Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

Quasibasen abelscher, nichtseparabler p-Gruppen

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades

vorgelegt von

Andrija Vodopivec

Eingereicht am:	23. Juni 2005
1. Gutachter:	Prof. Dr. O. Mutzbauer
2. Gutachter:	Prof. Dr. P. Müller
Tag der mündlichen Prüfung:	September 2005

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. O. Mutzbauer für seine freundliche und hilfreiche Unterstützung während meines Studiums und ganz besonders während meiner Promotion. Er nahm sich regelmäßig die Zeit für Diskussionen und brachte meine Arbeit mit wertvollen Anregungen voran.

Außerdem danke ich sehr herzlich meinen Eltern, meiner Familie und allen, die mir während dieser ganzen Zeit Mut gemacht haben. Nicht zuletzt danke ich meiner Ehefrau für die Liebe, Aufmerksamkeit, Geduld und Nachsicht, die sie mir und meiner Forschung entgegengebracht hat.

Die reine Mathematik ist auf ihre Art
die Poesie logischer Gedanken.

- Albert Einstein

Inhaltsverzeichnis

QUASIBASEN ABELSCHER, NICHTSEPARABLER p-GRUPPEN

ANDRIJA VODOPIVEC

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird der Bau der (abzählbaren) abelschen p-Gruppen untersucht, durch die Betrachtung der dazugehörigen Quasibasen, die in [3, Kapitel 34] als bestimmte erzeugende Systeme der gegebenen p-Gruppe definiert sind. In [4] wurde gezeigt, dass jede p-Gruppe eine sogenannte induktive Quasibasis besitzt, die sich allgemein mit vereinfachten Relationen zwischen ihrer Elementen, d.h. zwischen Erzeugenden der gegebenen p-Gruppe, auszeichnet. Unsere Untersuchung wird insbesondere auf die nichtseparablen p-Gruppen und ihre induktiven Quasibasen bezogen.

Für eine p-Gruppe G und eine ihrer basic Untergruppen B lässt sich leicht, durch eine Erweiterung der Basis von B, eine Quasibasis (vgl. [3]) bzw. eine induktive Quasibasis (vgl. [4]) konstruieren. Allein durch die Angabe der Untergruppe B, erhält man allerdings wenig Informationen über den Bau der Gruppe G. Anhand einer gegebenen Quasibasis von G lassen sich, was wir in dieser Arbeit zeigen werden, einige wesentliche Struktureigenschaften der Gruppe G ermitteln.

Im Kapitel 6 werden anhand einer gegebenen induktiven Quasibasis von G notwendige und hinreichende Kriterien für separabel bzw. reduziert angegeben. Im Kapitel 7 werden weiter wichtige Eigenschaften der ersten Ulm-Untergruppe $p^{\omega}G$ von G angegeben. Schließlich werden wir im Kapitel 8 zeigen, wie sich mittels der gegebenen induktiven Quasibasis von G die Ulm-Kaplansky-Invarianten für die Ordinalzahlen $< 2\omega$, berechnen lassen. Außerdem werden wir in Kapitel 4 die verallgemeinerten Prüfergruppen der Längen $\omega + n, n \in \mathbb{N}$ und $2\omega + 1$ konstruieren und eine induktive Quasibasis ermitteln. Die theoretischen Ergebnisse aus diversen Kapiteln werden an diesen konkreten Darstellungen der Prüfergruppen demonstriert.

2. Präliminarien

Zunächst sollen einige dieser Arbeit zugrundeliegende Definitionen und Hilfsmittel zusammengestellt werden. Eine abelsche Gruppe, deren sämtliche Elemente Ordnungen haben, die Potenzen einer festen Primzahl p sind, heißt *p-Gruppe*. Mit $\mathbb{Z}(p^n), n \in \mathbb{N}$ wird eine zyklische p-Gruppe der Ordnung p^n bezeichnet. Im folgenden sei p eine fixierte Primzahl und mit einer Gruppe G ist immer eine abzählbare unendliche abelsche p-Gruppe gemeint. Der *Sockel* von G, d.h. die Menge aller Elemente der Ordnung p in G, einschließlich der Null, ist eine Untergruppe von G und wird mit $G[p]$ bezeichnet. Mit $\mathbb{Z}_p$ wird der Ring der p-adischen ganzen Zahlen bezeichnet. Dann ist $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_p$.

Nun sei $g \in G \setminus \{0\}$. Ist die Gleichung

$$p^k x = g$$

nur für $k \leq n \in \mathbb{N}$ in G lösbar, so heißt $h(g) = n$ die *Höhe* von g. Wenn diese Gleichung für alle $k \in \mathbb{N}$ lösbar ist, ist g von *unendlicher Höhe* in G. Ist jedes $g \in G \setminus \{0\}$ von *endlicher Höhe*, d.h. $h(g) < \infty$, so heißt die Gruppe G *separabel*. Die Menge aller Elemente von unendlicher Höhe in G bildet eine Untergruppe, die sogenannte *erste Ulm-Untergruppe* von G, die wir mit $p^\omega G$ bezeichnen werden. Es gilt

$$p^\omega G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n G.$$

Die *k-te Ulm-Untergruppe* $p^{k\omega}G$ von G wird rekursiv für alle $k \in \mathbb{N}$ als die erste Ulm-Untergruppe von $p^{(k-1)\omega}G$ definiert. Mit $p^{k\omega+n}G = p^n\big(p^{k\omega}G\big)$ für $n, k \in \mathbb{N}$ wird die Menge aller Elemente von der Höhe $\geq n$ in $p^{k\omega}G$ bezeichnet. Gilt $g \in p^\sigma G \setminus p^{\sigma+1}G$ für ein $g \in G$ und eine Ordinalzahl σ, so wird $h(g) = \sigma$ als Höhe von g in G definiert. Dazu wird angemerkt, dass diese Definition im Fall $\sigma \in \mathbb{N}_0$ mit der obigen Definition endlicher Höhen übereinstimmt.

Für eine p-Gruppe G definiert man zu jeder Ordinalzahl σ die Faktorgruppe

$$F_\sigma(G) = (p^\sigma G)[p]/(p^{\sigma+1}G)[p].$$

Die Kardinalzahl $f_\sigma(G) = \operatorname{rg} F_\sigma(G)$ heißt σ-te *Ulm-Kaplansky Invariante* von G. Nach dem Satz von Ulm ([3, 77.3]) sind zwei reduzierte, abzählbare p-Gruppen genau dann isomorph, wenn sie dieselben Ulm-Kaplansky Invarianten besitzen.

Eine p-Gruppe G heißt *divisibel*, falls $pG = G$ gilt. Eine Gruppe heißt *reduziert*, falls die Nullgruppe ihre einzige divisible Untergruppe ist. Die kleinste Ordinalzahl σ mit $p^\sigma G = p^{\sigma+1}G$ heißt die *Länge* von G. Ist σ die Länge von G, so ist $p^\sigma G$ natürlich die *maximale divisible* Untergruppe von G. Für die Höhe eines Elementes $g \in G$ wird die Bezeichnung $h(g) = \infty$ verwendet, wenn $g \in p^{k\omega}G$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. genau dann, wenn g in der maximalen divisiblen Untergruppe von G liegt.

Ein typisches Beispiel für eine divisible Gruppe ist die Gruppe

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle \text{ mit } pa_1 = 0, pa_{i+1} = a_i \neq 0,\ i \in \mathbb{N}.$$

Folglich gilt $o(a_i) = p^i$.

Lemma 2.1. *Für jedes Element $a \in \mathbb{Z}(p^\infty) \setminus \{0\}$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid \lambda$, so dass $a = \lambda a_j$ und $o(a) = o(a_j)$.*

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{Z}(p^\infty) \setminus \{0\}$ beliebig gegeben. Dann existieren ein $j \in \mathbb{N}$ und natürliche Zahlen $0 \leq \lambda_i < p$, $\lambda_j \neq 0$, so dass

$$a = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i p^{j-i} a_j = \lambda a_j$$

mit $\lambda = \sum_{i=1}^{j} p^{j-i}\lambda_i$. Es gilt $p \nmid \lambda$, da $p \nmid \lambda_j$. Somit gilt auch $o(a) = o(a_j)$. ∎

In dieser Arbeit verwenden wir als wesentliches Hilfsmittel eine Untergruppe von $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$, der additiven Gruppe aller Folgen $(\lambda_k \mid k \in I)$ mit $\lambda_k \in \mathbb{Z}_p$, wobei I eine gegebene nicht leere abzählbare Indexmenge ist. Wir wollen jetzt diese Untergruppe definieren und einige ihrer Eigenschaften ableiten. Dazu wird für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ eine durch

$$\lambda \in p^n\mathbb{Z}_p \setminus p^{n+1}\mathbb{Z}_p$$

eindeutig bestimmte nichtnegative Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ betrachtet. Als *p-adische Norm* von $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ bezeichnen wir die rationale Zahl

$\|\lambda\| = p^{-n}$ und setzen $\|0\| = 0$. Außerdem wird jede p-adische Zahl $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ in der Form

$$\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \lambda_i p^i \text{ mit } \lambda_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

dargestellt. Falls $\lambda \neq 0$ ist, gilt

$$\|\lambda\| = p^{-n} \text{ mit } n = \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Nun sei für eine nicht leere abzählbare Indexmenge I durch $(\lambda_k \mid k \in I) \in \prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$ eine Folge dargestellt, die weiterhin in der Kurzform (λ_k, I) verwendet wird. Definiert man die Menge $I_i = \{k \in I \mid p^i \nmid \lambda_k\}$ zu jedem $i \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge (λ_k, I) eine *Nullfolge*, falls I_i endlich für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Mit

$$\left(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p\right)^* = \left\{(\lambda_k, I) \in \prod_{|I|} \mathbb{Z}_p \,\middle|\, |I_i| < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\right\}$$

wird die Menge aller Nullfolgen in $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$ bezeichnet. Jede Folge $(\lambda_k, I) \in \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$, d.h. $\lambda_k = 0$ für fast alle $k \in I$, ist eine Nullfolge. Ist $|I| = \infty$, so ist leicht zu prüfen, dass (λ_k, I) genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge $(\|\lambda_k\| \mid k \in I)$ mit dem Grenzwert Null konvergiert. Natürlich ist $(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$ eine Untergruppe von $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$ und $\bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p \subseteq (\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^* \subseteq \prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$.

Im Folgenden zeigen wir, dass $(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^* / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$ die maximale divisible Untergruppe von $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$ ist. Für ein beliebiges $\lambda = (\lambda_k, I) \in (\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$ gilt $p \nmid \lambda_k$ für höchstens endlich viele $k \in I$, d.h. es existiert ein $\lambda' \in \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$ mit $\lambda \in \lambda' + p(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$. Somit ist $(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^* / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$ divisibel. Für jedes $\lambda = (\lambda_k, I) \in \prod_{|I|} \mathbb{Z}_p \setminus (\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$ existiert andererseits ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $I_i = \{k \in I \mid p^i \nmid \lambda_k\}$ unendlich ist, d.h. $\lambda + (\bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p)$ hat endliche Höhe in $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$. Somit ist $(\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^* / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$ die maximale divisible Untergruppe von $\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p / \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}_p$.

Weiter sei eine Folge $(\lambda_k, I) \in \prod_{|I|} \mathbb{Z}_p$, sowie eine beliebige Folge $(g_k \mid k \in I)$ von Elementen $g_k \in G$ gegeben. Die Summe $\sum_{k \in I} \lambda_k g_k$ ist ein Element von G, wenn $\lambda_k g_k \neq 0$, also $o(g_k) \nmid \lambda_k$, für höchstens endlich viele $k \in I$. Ist die Menge $\{o(g_k) \mid k \in I\}$ beschränkt, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $o(g_k) \leq n$ für alle $k \in I$, so ist $\sum_{k \in I} \lambda_k g_k$ ein

Element von G, sofern $(\lambda_k, I) \in (\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$. In dieser Arbeit werden die Nullfolgen $(\lambda_k, I) \in (\prod_{|I|} \mathbb{Z}_p)^*$ mit $\lambda_k \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ für mindestens ein $k \in I$ von besonderem Interesse sein. Eine Nullfolge (λ_k, I) mit dieser Eigenschaft wird *normiert* genannt. Die Herkunft der Definition einer Nullfolge wird deutlich mit folgender Darstellung von Untergruppen divisibler p-Gruppen.

Proposition 2.2. *Es sei* $G = \bigoplus_{k\in I}\langle g_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}(p^\infty)$ *divisibel mit* $pg_1^k = 0$, $pg_{i+1}^k = g_i^k \neq 0$ *für alle* $k \in I, i \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\langle d_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ *mit* $pd_1 = 0$, $pd_{i+1} = d_i \neq 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *eine divisible Untergruppe von* G*, genau wenn eine normierte Nullfolge* (λ_k, I) *mit* $d_i = \sum_{k\in I} \lambda_k g_i^k$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *existiert.*

Beweis. Es sei $\langle d_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $pd_1 = 0, pd_{i+1} = d_i \neq 0$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ besitzen die Elemente $d_i \in \bigoplus_{k\in I}\langle g_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ die Form $d_i = \sum_{k\in I} \lambda_i^k g_i^k$ mit $0 \leq \lambda_i^k < p^i$ (vgl. 2.1), wobei $\lambda_i^k = 0$ für fast alle $k \in I$ und $p \nmid \lambda_i^k$ für mindestens ein $k \in I$ aus Ordnungsgründen gilt. Weiter gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$0 = d_i - pd_{i+1} = \sum_{k\in I} \lambda_i^k g_i^k - \sum_{k\in I} \lambda_{i+1}^k p g_{i+1}^k = \sum_{k\in I} (\lambda_i^k - \lambda_{i+1}^k) g_i^k.$$

Folglich ist $(\lambda_i^k - \lambda_{i+1}^k) g_i^k = 0$, d.h. $p^i \mid (\lambda_i^k - \lambda_{i+1}^k)$ für alle $k \in I$. Nun wird zu jedem $k \in I$ definiert

$$\lambda_k = \lambda_1^k + \sum_{j\in\mathbb{N}} (\lambda_{j+1}^k - \lambda_j^k) = \lambda_i^k + \sum_{j\geq i} \underbrace{(\lambda_{j+1}^k - \lambda_j^k)}_{\in p^j\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_p,$$

wobei die letzte Gleichung für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Für ein festes $i \in \mathbb{N}$ gilt $p^i \mid \lambda_k$ für fast alle $k \in I$, da $\lambda_i^k = 0$. Außerdem ist $p \nmid \lambda_k$ für mindestens ein $k \in I$, wegen $p \nmid \lambda_i^k$ für mindestens ein $i \in \mathbb{N}$. Also ist (λ_k, I) eine normierte Nullfolge. Insbesondere gilt $\lambda_k g_i^k = \lambda_i^k g_i^k$ und somit $d_i = \sum_{k\in I} \lambda_i^k g_i^k = \sum_{k\in I} \lambda_k g_i^k$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Nun sei $d_i = \sum_{k\in I} \lambda_k g_i^k$, zu jedem $i \in \mathbb{N}$, für eine normierte Nullfolge (λ_k, I). Definiert man $I_i = \{k \in I \mid p^i \nmid \lambda_k\}$, so gilt

$$pd_1 = \sum_{k\in I} p\lambda_k g_1^k = 0$$

und

$$pd_{i+1} = \sum_{k \in I_{i+1}} \lambda_k p g_{i+1} = \sum_{k \in I_{i+1}} \lambda_k g_i^k = \sum_{k \in I_i} \lambda_k g_i^k = d_i$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $o(d_i) = p^i$, da (λ_k, I) eine normierte Nullfolge ist. Also ist $\langle d_i \in G \mid i \in \mathbb{N} \rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $pd_1 = 0, pd_{i+1} = d_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. ∎

Zur obigen Proposition merken wir noch an, dass durch die Gruppe G eine beliebige divisible p-Gruppe gegeben ist, da jede divisible Torsionsgruppe zu einer direkten Summe $\bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)$, für irgendwelche Primzahlen p, nach [3, 23.1] isomorph ist (für ein festes p und die p-Gruppe G ist natürlich $G \cong \bigoplus \mathbb{Z}(p^\infty)$). In Proposition 2.2 wurden also alle divisiblen Untergruppen vom Rang 1 einer divisiblen p-Gruppe beschrieben.

Definition 2.3. Eine Untergruppe B einer p-Gruppe G heißt *basic* Untergruppe von G, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) B ist direkte Summe zyklischer p-Gruppen,
(ii) B ist rein in G (d.h. $p^k B = B \cap p^k G$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$),
(iii) G/B ist divisibel.

Satz 2.4. [3, 35.2] *Alle basic Untergruppen einer p-Gruppe sind isomorph.*

Um die beiden ersten Bedingungen in Definition 2.3 nachzuweisen, kann man sogenannte p-unabhängige Systeme betrachten.

Definition 2.5. Ein System $\{x_i\}_{i \in I} \subset G \setminus \{0\}$ heißt *p-unabhängig*, falls für jedes endliche Teilsystem $\{x_1, \ldots, x_k\}$ und jedes $r \in \mathbb{N}$ aus

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \in p^r G$$

für $\lambda_i x_i \neq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \ldots, k\}$ folgt, dass

$$p^r | \lambda_i, \; i = 1, \ldots, k.$$

Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.6. [3, 32.1] *Eine Untergruppe einer p-Gruppe, die von einem p-unabhängigen System in G erzeugt wird, ist rein in G.*

Insbesondere ist die erzeugte Untergruppe direkte Summe zyklischer Gruppen, da ein p-unabhängiges System auch ein unabhängiges System ist.

Definition 2.7. [4] Es sei $B = B_\lambda = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \bigoplus_{u\in I_j} \langle x_j^u \rangle$ eine basic Untergruppe der p-Gruppe G vom Isomorphietyp $\lambda = (\lambda_j \mid j \in \mathbb{N})$ mit $\lambda_j = |I_j|$, und es sei $o(x_j^u) = p^j$ für $j \in \mathbb{N}, u \in I_j$. Weiter sei die divisible Gruppe G/B vom Rang d und I eine Indexmenge der Mächtigkeit d. Dann heißt die Menge

$$Q = \{a_i^k, x_j^u \mid i,j \in \mathbb{N}, k \in I, u \in I_j\} \subset G$$

eine *Quasibasis* von G, falls gilt

(i) $\{x_j^u \mid j \in \mathbb{N}, u \in I_j\}$ ist eine Basis der basic Untergruppe B mit $o(x_j^u) = p^j$ für alle $j \in \mathbb{N}, u \in I_j$;
(ii) $G/B = \bigoplus_{k\in I} A^k$, mit $A^k = \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty), k \in I$ und $pa_{i+1}^k + B = a_i^k + B$, für alle $i \in \mathbb{N}, k \in I$;
(iii) $o(a_i^k) = p^i$ für alle $i \in \mathbb{N}, k \in I$.

Man sieht leicht, dass gilt

$$G = \langle a_i^k, x_j^u \mid i,j \in \mathbb{N}, k \in I, u \in I_j\rangle.$$

Nach [3, 33.5] besitzt jede p-Gruppe eine Quasibasis, und diese definiert eine Reihe von Gleichungen, die die korrespondierenden Relationen zwischen den Erzeugern beschreiben:

$$pa_{i+1}^k = a_i^k - \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{u\in I_j} \alpha_{i,j}^{k,u} x_j^u \quad (i \in \mathbb{N}, k \in I, \alpha_{i,j}^{k,u} \in \mathbb{Z}).$$

Das Array $\alpha = (\alpha_{i,j}^{k,u})$ heißt *korrespondierendes* Relationsarray. Wegen $o(x_j^u) = p^j$ werden wir o.B.d.A. $0 \leq \alpha_{i,j}^{k,u} < p^j$ annehmen.

Weiterhin wird eine Quasibasis $Q = \{a_i^k, x_j^u \mid i,j \in \mathbb{N}, k \in I, u \in I_j\}$ von G, die bzgl. der basic Untergruppe $B = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}, u\in I_j} \langle x_j^u \rangle$ definiert ist, in der Kurzform $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ dargestellt. Die basic Untergruppe B wird die *korrespondierende* basic Untergruppe genannt und immer mit B bezeichnet. Mit den Elementen x_j^u und a_i^k in $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ sind immer die Elemente, durch die die korrespondierenden Relationen definiert sind, gemeint.

Für eine Quasibasis $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ von G und ein $n \in \mathbb{N}$ wird die Menge $p^nQ = \{c_i^k, y_j^u \mid i,j \in \mathbb{N}, k \in I, u \in I_{j+n}\}$ durch $y_j^u = p^n x_{j+n}^u$ und $c_i^k = p^n a_{i+n}^k$ definiert.

Lemma 2.8. *Es sei $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ eine Quasibasis von G mit dem Relationsarray $\alpha = (\alpha_{i,j}^{k,u})$. Dann ist p^nQ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Quasibasis von p^nG mit dem zugehörigen Array $(\alpha_{i+n,j+n}^{k,u})$.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass die Menge p^nQ die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.7 bzgl. der p-Gruppe p^nG erfüllt. Da

$$p^nB = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \bigoplus_{u\in I_{j+n}} \langle p^n x_{j+n}^u \rangle$$

eine basic Untergruppe von p^nG ist und $o(p^n x_{j+n}^u) = p^j$, $o(p^n a_{i+n}^k) = p^i$ gilt, sind die Bedingungen (i) und (iii) erfüllt. Mit $p^nG/p^nB \cong G/B \cong \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}(p^\infty)$ und den Relationen

$$p^{n+1}a_{i+n+1}^k = p^n a_{i+n}^k - \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{u\in I_{j+n}} \alpha_{i+n,j+n}^{k,u} p^n x_{j+n}^u$$

ist auch die Bedingung (ii) erfüllt. Aus den obigen Relationen erhält man das angegebene Array. ■

Lemma 2.9. *Ist $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ eine Quasibasis von G mit dem korrespondierenden Relationsarray $\alpha = (\alpha_{i,j}^{k,u})$, dann ist $P = \{c_i^k, y_j^u\}$ mit $x_j^u = \lambda_j^u y_j^u$ und $c_i^k = \lambda_k a_i^k$ für beliebige $\lambda_k \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ und $\lambda_j^u \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, auch eine Quasibasis von G mit dem zugehörigen Relationsarray $\beta = (\lambda_k \lambda_j^u \alpha_{i,j}^{k,u})$. Insbesondere definiert die Abbildung $x_j^u \mapsto y_j^u$ einen Automorphismus der basic Untergruppe $B = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}, u\in I_j} \langle x_j^u \rangle$.*

Beweis. Zu jedem $\lambda_j^u \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ existiert genau ein $y_j^u \in \langle x_j^u \rangle$, so dass $x_j^u = \lambda_j^u y_j^u$ bzw. $\langle x_j^u \rangle = \langle \lambda_j^u y_j^u \rangle = \langle y_j^u \rangle$ gilt. Somit ist $x_j^u \mapsto y_j^u$ ein Automorphismus von B. Weiter gilt $\langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle = \langle c_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle$, sowie

$$pc_{i+1}^k = p\lambda_k a_{i+1}^k = \lambda_k a_i^k - \lambda_k \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{u\in I_j} \alpha_{i,j}^{k,u} x_j^u = c_i^k - \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{u\in I_j} (\lambda_k \lambda_j^u \alpha_{i,j}^{k,u}) y_j^u.$$

Folglich erfüllt P die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.7 und das zugehörige Array ist $\beta = (\lambda_k \lambda_j^u \alpha_{i,j}^{k,u})$. ■

3. Induktive Quasibasen

Definition 3.1. [4, 3.] Eine Quasibasis $\{a_i^k, x_j^u\}$ heißt *induktiv*, falls die korrespondierenden Relationen die Form $pa_{i+1}^k = a_i^k - b_i^k$ mit $i \in \mathbb{N}$, $k \in I$ besitzen, wobei $b_i^k \in B_i = \bigoplus_{u \in I_i} \langle x_i^u \rangle$ ist, vgl. auch [1]. Weiterhin nennt man ein Relationsarray $\alpha = (\alpha_{i,j}^{k,u})$ *diagonal*, falls $\alpha_{i,j}^{k,u} = 0$ ist für $i \neq j$. Ein diagonales Array wird mit $\alpha = (\alpha_i^{k,u}) = (\alpha_{i,i}^{k,u})$ bezeichnet.

Nach [4, Lemma 6] besitzt jede p-Gruppe eine induktive Quasibasis, und das zugehörige Relationsarray ist diagonal. Eine induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ wird oft mit $Q = \{a_i^k, B\}$ oder $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ bezeichnet, falls die Angabe der erzeugenden Elemente x_i^u von B von keiner wesentlichen Bedeutung ist.

Mit den beiden folgenden Lemmas zeigen wir einige spezifische Relationen zwischen den Elementen, die eine induktive Quasibasis bilden. Anschließend wird gezeigt, wie sich ein Relationsarray einer induktiven Quasibasis verändern lässt, so dass dadurch die gleiche Gruppe beschrieben wird.

Lemma 3.2. *Es sei $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ eine induktive Quasibasis von G mit den korrespondierenden Relationen $pa_{i+1}^k = a_i^k - b_i^k$, $i \in \mathbb{N}, k \in I$. Dann gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$*

$$p^n a_{i+n}^k = a_i^k - \sum_{r=0}^{n-1} p^r b_{i+r}^k.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion über n. Es gilt $pa_{i+1}^k = a_i^k - b_i^k$. Wird angenommen, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, dann gilt

$$\begin{aligned} p^{n+1} a_{i+n+1}^k &= p^n a_{i+n}^k - p^n b_{i+n}^k \\ &= a_i^k - \sum_{r=0}^{n-1} p^r b_{i+r}^k - p^n b_{i+n}^k = a_i^k - \sum_{r=0}^{n} p^r b_{i+r}^k. \end{aligned}$$ ∎

Zwei Quasibasen $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ und $P = \{c_i^k, y_j^u\}$ einer p-Gruppe G heißen *verwandt*, wenn sie die gleiche korrespondierende basic Untergruppe B und die gleiche direkte Zerlegung $B = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} B_j$ besitzen, also wenn für alle $j \in \mathbb{N}$

$$B_j = \bigoplus_{u \in I_j} \langle x_j^u \rangle = \bigoplus_{u \in I_j} \langle y_j^u \rangle.$$

Die zugehörigen Relationsarrays werden ebenfalls *verwandt* genannt. Es ist zu beachten, dass die verwandten Quasibasen Q und P definitionsgemäß gleichmächtige Indexmengen besitzen. Daher kann man o.B.d.A. anzunehmen, dass die Indexmengen aller zueinander verwandten Quasibasen von G gleich sind.

Lemma 3.3. *Es seien* $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ *und* $P = \{c_i^k, \bigoplus B_i\}$ *zwei verwandte induktive Quasibasen von* G *mit den korrespondierenden Relationen* $a_i^k - pa_{i+1}^k = b_i^k$ *und* $c_i^k - pc_{i+1}^k = d_i^k$*. Dann existiert zu jedem* $k_0 \in I$ *eine normierte Nullfolge* (λ_k, I)*, so dass zu jedem* $n \in \mathbb{N}$

$$d_i^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k b_i^k \in p^n B_i$$

für fast alle $i \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Beweis. Wegen $G/B = \bigoplus_{k \in I} \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle = \bigoplus_{k \in I} \langle c_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle \cong \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}(p^\infty)$ existiert nach Proposition 2.2 eine normierte Nullfolge (λ_k, I), so dass $c_n^{k_0} = \sum_{k \in I} \lambda_k a_n^k + b_n, b_n \in B$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und für ein festes $k_0 \in I$. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d_n^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k b_n^k = c_n^{k_0} - pc_{n+1}^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k (a_n^k - pa_{n+1}^k) = b_n - pb_{n+1} \in B_n,$$

weil Q und P induktiv sind. Die Elemente $b_n \in B$ besitzen die Form $b_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_{n,i}$ mit $b_{n,i} \in B_i$. Es gilt zu jedem $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - pb_{n+1} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{(b_{n,i} - pb_{n+1,i})}_{\in B_i} \in B_n,$$

d.h. $b_{n,i} - pb_{n+1,i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq n$. Folglich ist zu jedem $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n,i} = pb_{n+1,i} = p^2 b_{n+2,i} = ... = 0, \text{ falls } i < n,$$
$$b_{n,i} = pb_{n+1,i} = p^2 b_{n+2,i} = ... = p^{i-n} b_{i,i}, \text{ falls } i \geq n,$$

und somit

$$\begin{aligned} b_n &= \underbrace{b_{n,1} + ... + b_{n,n-1}}_{=0} + b_{n,n} + b_{n,n+1} + b_{n,n+2} + ... \\ &= b_{n,n} + pb_{n+1,n+1} + p^2 b_{n+2,n+2} + ... + p^r b_{n+r,n+r} + ... \end{aligned}$$

Diese Summe ist endlich, also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $p^r b_{n+r,n+r} = 0$, bzw. $p^n \mid b_{n+r,n+r}$, für fast alle $r \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt zu jedem $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_{n+r}^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k b_{n+r}^k &= b_{n+r} - p b_{n+r} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} p^m b_{n+r+m,n+r+m} - \sum_{m \in \mathbb{N}_0} p^{m+1} b_{n+r+m+1,n+r+m+1} \\ &= b_{n+r,n+r} \in p^n B_{n+r} \end{aligned}$$

für fast alle $r \in \mathbb{N}_0$, woraus die Behauptung folgt. ■

Weiter sei $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ eine induktive Quasibasis von G mit den korrespondierenden Relationen

$$a_i^k - p a_{i+1}^k = \sum_{u \in I_i} \alpha_i^{k,u} x_i^u = b_i^k \in B_i.$$

Das zugehörige diagonale Relationsarray $\alpha = (\alpha_i^{k,u})$ wird in der Form

$$\alpha = (\alpha^k)_{k \in I}, \alpha^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & \\ & \alpha_2^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ und } \alpha_i^k = (\alpha_i^{k,u})_{u \in I_i}$$

mit $i \in \mathbb{N}, \alpha_i^{k,u} \in \mathbb{Z}$ dargestellt, wobei $\alpha_i^k \in \mathbb{Z}^{|I_i|}$ als ein finites Tupel und α als eine Folge diagonaler Matrizen α^k zu betrachten ist. Zwei diagonale Relationsarrays $\alpha = (\alpha_i^{k,u})$ und $\beta = (\beta_i^{k,u})$, die durch die gleichen Indexmengen definiert sind, was insbesondere bei zwei verwandten Arrays der Fall ist, heißen *fast gleich*, wenn zu jedem k die Gleichung $\alpha_i^k = \beta_i^k$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Zwei induktive verwandte Quasibasen von G mit den zueinander fast gleichen Relationsarrays werden *fast gleich* genannt. Das folgende Lemma zeigt, dass jedes Array β, das zu einem Relationsarray α von G fast gleich ist, auch ein Relationsarray von G darstellt.

Lemma 3.4. *Es seien $Q = \{a_i^k, x_j^u\}$ eine induktive Quasibasis von G mit dem Relationsarray $\alpha = (\alpha_i^{k,u})$ und ein beliebiges zu α fast gleiches Array β gegeben. Dann existiert eine Quasibasis $P = \{c_i^k, x_j^u\}$ von G mit dem Relationsarray β und $c_i^k = a_i^k$ zu jedem $k \in I$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass sich eine zu Q fast gleiche Quasibasis $\{c_i^k, x_i^k\}$ von G mit dem Relationsarray $\beta = (\beta_i^k)$ konstruieren lässt, so dass die Gleichheiten $\alpha_i^k = \beta_i^k$ und $a_i^k = c_i^k$ zu jedem $k \in I$ bis auf eine Stelle $i = i_k \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Durch endlich viele Wiederholungen, unabhängig für jedes k, dieses Verfahrens erhält man jede zu Q fast gleiche Quasibasis P. Also sei ein Array $\beta = (\beta_i^k)$, das zu α fast gleich ist durch

$$\beta_i^k = \begin{cases} (\alpha_i^{k,u})_{u \in I_i}, & \text{falls } i \neq i_k \\ (z^{k,u})_{u \in I_i}, & \text{falls } i = i_k \end{cases}$$

definiert, wobei $i_k \in \mathbb{N}$ und ein finites Tupel $(z^{k,u} \mid u \in I_{i_k}) \in \mathbb{Z}^{|I_{i_k}|}$ zu jedem $k \in I$ beliebig gegeben sind. Wir zeigen, dass $P = \{c_i^k, x_j^u \mid i, j \in \mathbb{N}, k \in I, u \in I_j\} \subset G$ mit

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^k + p^{i_k - i} \sum_{u \in I_{i_k}} (z^{k,u} - \alpha_{i_k}^{k,u}) x_{i_k}^u, & \text{falls } i \leq i_k \\ a_i^k, & \text{falls } i > i_k \end{cases}$$

für alle $k \in I$ eine induktive Quasibasis von G ist, bzw. dass P die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.7 erfüllt. Die Bedingungen (i) und (iii) sind trivialerweise erfüllt. Da $c_i^k + B = a_i^k + B$ für alle $k \in I$, $i \in \mathbb{N}$ gilt, wird auch die Bedingung (ii) erfüllt. Weiter gilt für alle $k \in I$

$$\begin{aligned} pc_{i+1}^k &= p\left(a_{i+1}^k + p^{i_k - i - 1} \sum_{u \in I_{i_k}} (z^{k,u} - \alpha_{i_k}^{k,u}) x_{i_k}^u\right) \\ &= a_i^k - \sum_{u \in I_i} \alpha_i^{k,u} x_i^u + p^{i_k - i} \sum_{u \in I_{i_k}} (z^{k,u} - \alpha_{i_k}^{k,u}) x_{i_k}^u \\ &= c_i^k - \sum_{u \in I_i} \alpha_i^{k,u} x_i^u, \ \text{falls } i < i_k, \\ pc_{i_k+1}^k &= pa_{i_k+1}^k = a_{i_k}^k - \sum_{u \in I_{i_k}} \alpha_{i_k}^{k,u} x_{i_k}^u \\ &= c_{i_k}^k - \sum_{u \in I_{i_k}} (z^{k,u} - \alpha_{i_k}^{k,u}) x_{i_k}^u - \sum_{u \in I_{i_k}} \alpha_{i_k}^{k,u} x_{i_k}^u = c_{i_k}^k - \sum_{u \in I_{i_k}} z^{k,u} x_{i_k}^u, \\ pc_{i+1}^k &= pa_{i+1}^k = a_i^k - \sum_{u \in I_i} \alpha_i^{k,u} x_i^u = c_i^k - \sum_{u \in I_i} \alpha_i^{k,u} x_i^u, \ \text{falls } i > i_k. \end{aligned}$$

Somit erhält man das angegebene Array β. ∎

Lemma 3.5. *Es seien $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G und $J \subseteq I$ eine beliebige Untermenge. Weiter seien zu jedem $k \in I \setminus J$ Nullfolgen $(\lambda_l^k \mid l \in J)$ gegeben. Dann ist $P = \{c_i^k, B\}$ mit*

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^k + \sum_{l \in J} \lambda_l^k a_i^l, & \text{falls } k \in I \setminus J \\ a_i^k, & \text{falls } k \in J \end{cases}$$

eine induktive Quasibasis von G.

Beweis. Wir zeigen, dass $P = \{c_i^k, B\}$ eine Quasibasis von G ist bzw. dass die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.7 erfüllt sind. Die Bedingungen (i) und (iii) sind trivialerweise erfüllt. Nun zeigen wir, dass die Bedingung (ii) auch erfüllt ist. Wegen $a_i^k = c_i^k - \sum_{k \in J} \lambda_l^k c_i^l$ für $k \in I \setminus J$ gilt natürlich $\langle a_i^k \mid k \in I, i \in \mathbb{N} \rangle = \langle c_i^k \mid k \in I, i \in \mathbb{N} \rangle$. Folglich ist

$$G/B = \bigoplus_{k \in I} \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle = \sum_{k \in I} \langle c_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle.$$

Bezeichnet man $C^k = \langle c_i^k + B \mid i \in \mathbb{N} \rangle$, so bleibt noch zu zeigen, dass die Summe $\sum_{k \in I} C^k$ direkt ist. Da $C^k \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ trivialerweise gilt, können wir ein beliebiges Element $c \in \sum_{k \in I} C^k$ in der Form $c = \sum_{k \in I} \mu_k c_i^k + B$, $\mu_k \in \mathbb{Z}$ für ein $i \in \mathbb{N}$ darstellen. Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \sum_{k \in I \setminus J} \mu_k \left(a_i^k + \sum_{l \in J} \lambda_l^k a_i^l \right) + \sum_{k \in J} \mu_k a_i^k + B \\ &= \sum_{k \in I \setminus J} \mu_k a_i^k + \sum_{k \in J} \sum_{l \in I \setminus J} \mu_l \lambda_k^l a_i^k + \sum_{k \in J} \mu_k a_i^k + B \\ &= \sum_{k \in I \setminus J} \mu_k a_i^k + \sum_{k \in J} \left(\sum_{l \in I \setminus J} \mu_l \lambda_k^l + \mu_k \right) a_i^k + B. \end{aligned}$$

Ist $c = 0 \in G/B$, so ist $p^i \mid \mu_k$ für alle $k \in I \setminus J$ und

$$p^i \left| \left(\sum_{l \in I \setminus J} \mu_l \lambda_k^l + \mu_k \right) \right.$$

für alle $k \in J$. Es folgt $p^i \mid \mu_k$ für alle $k \in I$. Also ist $c = 0 \in G/B$ nur für $\mu_k c_i^k = 0$ erfüllt, d.h. die Summe $\sum_{k \in I} C^k$ ist direkt. Somit ist P eine Quasibasis von G. Da $c_i^k - c_{i+1}^k \in B_i$ trivialerweise gilt, ist P induktiv. ∎

Korollar 3.6. *Es seien $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G und (λ_k, I) eine normierte Nullfolge. Definiert man*

$$c_i^k = \begin{cases} \sum_{l\in I} \lambda_l a_i^l, & \textit{falls } k = k_0 \\ a_i^k, & \textit{falls } k \neq k_0 \end{cases}$$

für ein beliebiges $k_0 \in I$ mit $p \nmid \lambda_{k_0}$, so ist $P = \{c_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G.

Beweis. Nach Lemma 2.9 ist $\bar{P} = \{\bar{c}_i^k, B\}$ mit $\bar{c}_i^{k_0} = \lambda_{k_0} a_i^{k_0}$ und $\bar{c}_i^k = a_i^k$ für alle $k \neq k_0$ auch eine Quasibasis von G. Insbesondere ist $\bar{P}$ induktiv. Wendet man nun Lemma 3.5 für die Quasibasis $\bar{P}$ mit $J = I \setminus \{k_0\}$ an, zeigt sich, dass die in Korollar angegebene Quasibasis P auch eine induktive Quasibasis von G ist. ∎

4. Konstruktion und Quasibasen von $\mathcal{H}_{2\omega+1}$

Die verallgemeinerten *Prüfergruppen* $\mathcal{H}_\sigma$ der Länge σ werden durch die folgenden Eigenschaften für alle Ordinalzahlen σ definiert (vgl. [3, Kapitel 81]):

(i) $p^\sigma \mathcal{H}_{\sigma+1}$ ist zyklisch der Ordnung p und $\mathcal{H}_{\sigma+1}/p^\sigma \mathcal{H}_{\sigma+1} \cong \mathcal{H}_\sigma$;
(ii) $\mathcal{H}_\sigma = \bigoplus_{\rho<\sigma} \mathcal{H}_\rho$, falls σ eine Limeszahl ist.

Insbesondere existiert die Gruppe $\mathcal{H}_\sigma$ zu jedem σ, vgl. auch [6, Satz 6.3].

In [4] wurde die verallgemeinerte Prüfergruppe $\mathcal{H}_{\omega+n} = \langle b_0, b_1, ...\rangle$ der Länge $\omega + n, n \in \mathbb{N}$ mit den definierenden Relationen $p^n b_0 = 0$, $p^i b_i = b_0$ betrachtet. Weiter wurde eine induktive Quasibasis $Q = \{a_i, x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}_{\omega+n}$ mit $a_i = p^n b_i$ und $x_i = b_i - pb_{i+1}$ ermittelt, deren Relationsarray die folgende Form besitzt

$$\alpha = \begin{pmatrix} p^n & & & \\ & p^n & & \\ & & p^n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\langle x_i\rangle \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^i)$ eine basic Untergruppe der Gruppe $\mathcal{H}_{\omega+n}$.

Nun berechnen wir alle Ulm-Kaplansky Invarianten von $\mathcal{H}_{\omega+n}$. Es ist leicht zu prüfen, dass $p^r \mathcal{H}_{\omega+n} = \langle b_0, p^r b_{r+1}, p^r b_{r+2}, ...\rangle \cong \mathcal{H}_{\omega+n}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und $p^\omega \mathcal{H}_{\omega+n} = \langle b_0\rangle$. Somit erhält man $p^\sigma \mathcal{H}_{\omega+n}[p] = \langle p^{n-1} b_0\rangle$ für alle $0 \le \sigma < \omega + n$, sowie

$$f_\sigma(\mathcal{H}_{\omega+n}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le \sigma < \omega + n, \\ 0, & \text{falls } \sigma \ge \omega + n. \end{cases}$$

Bevor wir mit der Konstruktion der Gruppe $\mathcal{H}_{2\omega+1}$ beginnen, berechnen wir noch ihre Ulm-Kaplansky-Invarianten. Da basic Untergruppen von $\mathcal{H}_{\omega+n}$ zu $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^i)$ isomorph sind, sind basic Untergruppen von $\mathcal{H}_{2\omega}$ und somit auch von $\mathcal{H}_{2\omega+1}$ zu $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}(p^i)$ isomorph. Nach [3, 37. Ex 9] folgt $f_n(\mathcal{H}_{2\omega+1}) = \aleph_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter gilt

$$p^\omega \mathcal{H}_{2\omega+1}/p^{2\omega}\mathcal{H}_{2\omega+1} \cong p^\omega \mathcal{H}_{2\omega} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} p^\omega \mathcal{H}_{\omega+i} \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}(p^i).$$

Wegen $p^{2\omega}\mathcal{H}_{2\omega+1} \cong \mathbb{Z}(p)$ folgt $p^{\omega}\mathcal{H}_{2\omega+1} \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}(p^i)$. Somit erhält man $p^{\omega+n}\mathcal{H}_{2\omega+1} \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}(p^i)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, woraus

$$\left(p^{\omega+n}\mathcal{H}_{2\omega+1}\right)[p]/\left(p^{\omega+n+1}\mathcal{H}_{2\omega+1}\right)[p] \cong \mathbb{Z}(p)$$

folgt. Also ist $f_{\omega+n}(\mathcal{H}_{2\omega+1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem ist $p^{2\omega}\mathcal{H}_{2\omega+1} \cong \mathbb{Z}(p)$ und somit $f_{2\omega}(\mathcal{H}_{2\omega+1}) = 1$. Also gilt

$$f_\sigma(\mathcal{H}_{2\omega+1}) = \begin{cases} \aleph_0, & \text{falls } 0 \leq \sigma < \omega, \\ 1, & \text{falls } \omega \leq \sigma \leq 2\omega \\ 0, & \text{falls } \sigma > 2\omega. \end{cases}$$

In diesem Kapitel werden wir weiter die verallgemeinerte Prüfergruppe $\mathcal{H}_{2\omega+1}$ der Länge $2\omega + 1$ konstruieren und eine induktive Quasibasis ermitteln. Es sei $H = \langle h_0\rangle \oplus (\bigoplus_{i,k\in\mathbb{N}}\langle h_i^k\rangle)$ eine freie abelsche Gruppe und

$$L = \langle ph_0, p^k h_1^k - h_0, p^{i-1}h_i^k - h_1^k \mid i, k \in \mathbb{N}\rangle \subseteq H$$

eine Untergruppe von H. Wir bezeichnen $\mathcal{G} = H/L = \langle g_0, g_i^k \mid i, k \in \mathbb{N}\rangle$ mit $g_0 = h_0 + L$ und $g_i^k = h_i^k + L$. Die definierenden Relationen von $\mathcal{G}$ sind

$$pg_0 = 0, p^k g_1^k = g_0 \text{ und } p^{i-1}g_i^k = g_1^k \text{ für } i, k \in \mathbb{N},$$

da $pg_0 = ph_0 + L = 0 \in \mathcal{G}$, $p^k g_0^k = p^k h_1^k + L = h_0 + L = g_0$ und $p^{i-1}g_i^k = p^{i-1}h_i^k + L = h_1^k + L = g_1^k$ für $i, k \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.1. *Es gilt*

(i) *Jedes $l \in L$ besitzt die Form $l = \lambda_0 h_0 + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k h_i^k$ mit $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i^k \in p^{i-1}\mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $\lambda_1^k \in p^k\mathbb{Z}$, wenn $l = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_1^k h_1^k$, sowie $h_0 \notin L$;*

(ii) *Für ein beliebiges $r \in \mathbb{N}$ besitzt jedes $g \in p^r\mathcal{G}$ die Form*

$$g = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\mu_1^k g_1^k + \sum_{i>r} \mu_i^k g_i^k\right)$$

mit $\mu_1^k \in \mathbb{Z}$ und $\mu_i^k \in p^r\mathbb{Z}$ für $i > r$.

Beweis. (i) Es sei $l \in L$ beliebig gegeben. Dann existieren $\alpha, \beta^k, \gamma_i^k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\begin{aligned} l &= \alpha p h_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta^k (p^k h_1^k - h_0) + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \gamma_i^k (p^{i-1} h_i^k - h_1^k) \\ &= \left(\alpha p - \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta^k\right) h_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(p^k \beta^k - \sum_{i>1} \gamma_i^k\right) h_1^k + \sum_{i>1} \gamma_i^k p^{i-1} h_i^k\right) \\ &= \lambda_0 h_0 + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k h_i^k \end{aligned}$$

für geeignete $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_i^k \in p^{i-1}\mathbb{Z}$.

Es sei $l = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_1^k h_1^k$ angenommen. Durch Koeffizientenvergleich bei h_i^k ergibt sich $\gamma_i^k = 0$ für $i > 1, k \in \mathbb{N}$ und somit $\lambda_1^k = p^k \beta^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Also gilt $\lambda_1^k \in p^k\mathbb{Z}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nun sei $l = h_0$ angenommen. Durch Koeffizientenvergleich bei h_i^k ergibt sich $\gamma_i^k = 0$ für $i > 1, k \in \mathbb{N}$ und somit auch $p^k \beta^k = 0$ bzw. $\beta^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, sowie

$$1 = \lambda_0 = \alpha p - \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta^k = \alpha p,$$

im Widerspruch zu $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(ii) Es sei $g \in p^r\mathcal{G}$ für ein $r \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Dann existieren $\lambda_i^k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\begin{aligned} g = p^r \left(g_0 + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k g_i^k\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{1\le i\le r} \lambda_i^k p^r g_i^k + \sum_{i>r} \lambda_i^k p^r g_i^k\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{1\le i\le r} \lambda_i^k p^{r-i+1} g_1^k + \sum_{i>r} \lambda_i^k p^r g_i^k\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\mu_1^k g_1^k + \sum_{i>r} \mu_i^k g_i^k\right) \end{aligned}$$

für geeignete $\mu_1^k \in \mathbb{Z}$ und $\mu_i^k \in p^r\mathbb{Z}$ für $i > r$. ∎

Im Folgenden wird gezeigt, dass $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$. Dazu wird zuerst ein Lemma bewiesen.

Lemma 4.2. *Es gilt* $p^\omega \mathcal{G} = \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle \cong \mathcal{H}_{\omega+1}$.

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass $p^\omega \mathcal{G} \subseteq \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ gilt. Dazu sei ein beliebiges Element $g = \sum_{i,k \in \mathbb{N}} \lambda_i^k g_i^k \in p^\omega \mathcal{G}$ mit $\lambda_i^k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Es existiert ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $\lambda_i^k = 0$ für alle $i > r$ gilt. Da $g \in p^r \mathcal{G}$ ist, existieren ganze Zahlen $\mu_1^k \in \mathbb{Z}$ und $\mu_i^k \in p^r \mathbb{Z}$ für $i > r$ nach Lemma 4.1.(ii), so dass

$$g = \sum_{i,k \in \mathbb{N}} \lambda_i^k g_i^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\mu_1^k g_1^k + \sum_{i > r} \mu_i^k g_i^k \right).$$

Folglich gilt

$$\sum_{i,k \in \mathbb{N}} \lambda_i^k g_i^k - \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\mu_1^k g_1^k + \sum_{i>r} \mu_i^k g_i^k \right)$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left((\lambda_1^k - \mu_1^k) g_1^k + \sum_{1 < i \leq r} \lambda_i^k g_i^k - \sum_{i > r} \mu_i^k g_i^k \right) = 0 \in H/L.$$

Durch Koeffizientenvergleich in H bei h_i^k (vgl. Darstellung 4.1.(i)) gilt $\lambda_i^k \in p^{i-1}\mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq r$. Somit, und mit $\lambda_i^k = 0$ für $i > r$, existiert ein $\bar{\lambda}_i^k \in \mathbb{Z}$ zu jedem λ_i^k, so dass $\lambda_i^k = p^{i-1} \bar{\lambda}_i^k$. Es gilt

$$g = \sum_{i,k \in \mathbb{N}} \bar{\lambda}_i^k p^{i-1} g_i^k = \sum_{i,k \in \mathbb{N}} \bar{\lambda}_i^k g_1^k \in \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle.$$

Also ist $p^\omega \mathcal{G} \subseteq \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$. Wegen $g_1^k = p^{i-1} g_i^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ folgt $p^\omega \mathcal{G} = \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$. Andererseits ist $g_0 = p g_1^1 \in \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ mit $o(g_0) = p$, da $g_0 = h_0 + L \neq 0 \in H/L$ nach Lemma 4.1.(i). Somit ist $\langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle \cong \mathcal{H}_{\omega+1}$, da die definierenden Relationen von g_0, g_1^k in $\mathcal{G}$ identisch mit denen von $\mathcal{H}_{\omega+1}$ sind. ∎

Lemma 4.3. *Es gilt*

$$f_\sigma(\mathcal{G}) = f_\sigma(\mathcal{H}_{2\omega+1}) = \begin{cases} \aleph_0, & \textit{falls } 0 \leq \sigma < \omega, \\ 1, & \textit{falls } \omega \leq \sigma \leq 2\omega \\ 0, & \textit{falls } \sigma > 2\omega, \end{cases}$$

für alle Ordinalzahlen σ, *d.h.* $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$.

Beweis. Es gilt $f_\sigma(\mathcal{G}) = \aleph_0$ für $0 \leq \sigma < \omega$ nach [3, 37. Ex 9]. Mit Lemma 4.2 gilt weiter

$$(p^{\omega+n}\mathcal{G})[p]/(p^{\omega+n+1}\mathcal{G})[p] \cong (p^n\mathcal{H}_{\omega+1})[p]/(p^{n+1}\mathcal{H}_{\omega+1})[p] \cong \mathbb{Z}(p)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und somit $f_\sigma(\mathcal{G}) = 1$ für $\omega \leq \sigma < 2\omega$. Da $p^\omega\mathcal{G} = \langle g_1^k \mid k \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathcal{H}_{\omega+1}$ nach Lemma 4.2 ist, gilt $p^{2\omega}\mathcal{G} = \langle g_0\rangle \cong \mathbb{Z}(p)$ und $p^{2\omega+1}\mathcal{G} = 0$, d.h. $f_{2\omega}(\mathcal{G}) = 1$ und $f_\sigma(\mathcal{G}) = 0$ für $\sigma > 2\omega$. ■

Um eine basic Untergruppe von $\mathcal{G}$ zu finden, wird

$$x_i^k = g_{i+1}^k - pg_{i+2}^k \in \mathcal{G}$$

für alle $i, k \in \mathbb{N}$ definiert. Weiter sei $\mathcal{B} = \langle x_i^k \mid k, i \in \mathbb{N}\rangle$ definiert.

Lemma 4.4. *Es gilt $o(x_i^k) = p^i$ und $\mathcal{B} = \bigoplus_{i,k\in\mathbb{N}}\langle x_i^k\rangle$. Insbesondere ist $\mathcal{B}$ eine basic Untergruppe von $\mathcal{G}$.*

Beweis. Wegen $p^ix_i^k = p^ig_{i+1}^k - p^{i+1}g_{i+2}^k = g_1^k - g_1^k = 0$ gilt $o(x_i^k) \leq p^i$. Nun nehmen wir $\lambda x_i^k = \lambda g_{i+1}^k - \lambda pg_{i+2}^k = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{Z}$ an. Dann gilt $\lambda h_{i+1}^k - \lambda ph_{i+2}^k \in L$, d.h. $p^i \mid \lambda$ nach Koeffizientenvergleich bei h_i^k mit Darstellung 4.1.(i). Also gilt $o(x_i^k) = p^i$.

Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{B} = \bigoplus_{i,k\in\mathbb{N}}\langle x_i^k\rangle$ gilt, bzw. dass $\{x_i^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}$ ein p-unabhängiges System ist. Es sei ein beliebiges Element

$$\sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k x_i^k \in p^r\mathcal{G}$$

mit $0 \leq \lambda_i^k < p^i$ für ein $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach Lemma 4.1.(ii) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\mu_1^kg_1^k + \sum_{i>r}\mu_i^kg_i^k\right) &= \sum_{i,k\in\mathbb{N}}\lambda_i^kx_i^k = \sum_{i,k\in\mathbb{N}}\lambda_i^k(g_{i+1}^k - pg_{i+2}^k)\\ &= \sum_{i,k\in\mathbb{N}}(\lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k)g_{i+1}^k\end{aligned}$$

mit geeigneten $\mu_0^k \in \mathbb{Z}$, $\mu_i^k \in p^r\mathbb{Z}$ für $i > r$ und $\lambda_0^k = 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{i,k\in\mathbb{N}}(\lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k)g_{i+1}^k - \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\mu_1^kg_1^k + \sum_{i>r}\mu_i^kg_i^k\right)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(-\mu_1^kg_1^k + \sum_{1\leq i<r}(\lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k)g_{i+1}^k + \sum_{i\geq r}(\lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k - \mu_{i+1}^k)g_{i+1}^k\right)\\ &= 0 \in H/L.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich in H bei h_i^k (vgl. Darstellung 4.1.(i)) folgt

$$\begin{aligned} &(1) \quad \lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k \in p^i\mathbb{Z} \text{ für alle } 1 \le i < r, \\ &(2) \quad \lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k - \mu_{i+1}^k \in p^i\mathbb{Z} \text{ für alle } i \ge r. \end{aligned}$$

Aus (1) erhält man rekursiv $\lambda_i^k = 0$ für alle $1 \le i < r$, da $\lambda_0^k = 0$ und $0 \le \lambda_i^k < p^i$ gilt. Andererseits folgt $\lambda_i^k - p\lambda_{i-1}^k \in p^r\mathbb{Z}$ für $i \ge r$ aus (2), da $\mu_{i+1}^k \in p^r\mathbb{Z}$. Da $\lambda_{r-1}^k = 0$ ist, gilt rekursiv $\lambda_i^k \in p^r\mathbb{Z}$ für alle $i \ge r$. Also gilt $\sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k x_i^k \in p^r\mathcal{G}$ nur für $p^r \mid \lambda_i^k$. Somit ist $\mathcal{B} = \bigoplus_{i,k\in\mathbb{N}} \langle x_i^k \rangle$ und wegen der p-Unabhängigkeit, ist $\mathcal{B}$ rein in $\mathcal{G}$.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass $\mathcal{G}/\mathcal{B}$ divisibel ist. Dazu ist es ausreichend zu zeigen, dass $\mathcal{G}/\mathcal{B} \subseteq p(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ ist, da $p(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{G}/\mathcal{B}$ trivialerweise erfüllt ist. Wird ein $g = \lambda_0 g_0 + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_i^k g_i^k \in \mathcal{G}$ mit $\lambda_0, \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$ beliebig gegeben, so ist

$$\begin{aligned} g &= \lambda_0 g_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_1^k g_1^k + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_{i+1}^k (x_i^k + p g_{i+2}^k) \\ &= \lambda_0 p g_1^1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} p \left(\lambda_1^k g_2^k - \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{i+1}^k g_{i+1}^k \right) + \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \lambda_{i+1}^k x_i^k. \end{aligned}$$

Also gilt $g + \mathcal{B} \in p(\mathcal{G}/\mathcal{B})$. ■

Nun werden wir eine induktive Quasibasis von $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$ ermitteln. Dazu sei definiert

$$a_i^0 = p^2 g_{i+1}^1 \text{ und } a_i^k = p^k g_{i+1}^k - p^{k+1} g_{i+1}^{k+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, dass $o(a_i^k) = p^i$. Wegen $p^i a_i^0 = p^2 g_1^1 = p g_0 = 0$ und $p^i a_i^k = p^k g_1^k - p^{k+1} g_1^{k+1} = g_0 - g_0 = 0$ für $k \ge 1$ gilt $o(a_i^k) \le p^i$. Weiter wird gezeigt, dass $p^{i-1} a_i^k \ne 0$ für alle $i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $p^{i-1} a_i^0 = p g_1^1 = g_0 \ne 0$, da $h_0 \notin L$ nach Lemma 4.1.(i). Wird $0 = p^{i-1} a_i^k = p^{k-1} g_1^k - p^k g_1^{k+1}$ für $k \ge 1$ angenommen, so ist $p^{k-1} h_1^k - p^k h_1^{k+1} \in L$ und folglich $p^{k-1} \in p^k\mathbb{Z}$ nach Lemma 4.1.(i), ein Widerspruch. Also gilt $o(a_i^k) = p^i$ für alle $i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$.

Insbesondere gilt $a_i^0 - p a_{i+1}^0 = p^2 g_{i+1}^1 - p^3 g_{i+2}^1 = p^2 x_i^1 \in \mathcal{B}$ und

$$\begin{aligned} a_i^k - p a_{i+1}^k &= p^k g_{i+1}^k - p^{k+1} g_{i+1}^{k+1} - p^{k+1} g_{i+2}^{k+1} + p^{k+2} g_{i+2}^{k+1} \\ &= p^k x_i^k - p^{k+1} x_i^{k+1} \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{1}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $A^k = \langle a_i^k + \mathcal{B} \mid i \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathcal{G}/\mathcal{B}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Lemma 4.5. *Es gilt* $\mathcal{G}/\mathcal{B} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} A^k \cong \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Beweis. Da $a_1^0 = p^2 g_2^1 = p g_1^1 \in p^\omega \mathcal{G}$ und $a_1^k = p^{k-1} g_1^k - p^k g_1^{k+1} \in p^\omega \mathcal{G}$, sowie $a_1^k \neq 0$ wegen $o(a_1^k) = p$ gilt, ist $a_i^k \notin \mathcal{B}$. Somit und mit $a_i^k - p a_{i+1}^k \in \mathcal{B}$ gilt $A^k \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Weiter wird gezeigt, dass $\mathcal{G}/\mathcal{B} \subseteq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$. Dazu sei $g_i^k \in \mathcal{G}$ beliebig für $i, k \in \mathbb{N}$. Es gilt $g_1^1 = p^2 g_3^1 = a_2^0$,

$$g_{i+1}^1 = x_i^1 + p x_{i+1}^1 + p^2 g_{i+3}^1 = x_i^1 + p x_{i+1}^1 + a_{i+2}^0 \quad (*)$$

für $i \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} g_1^k = p^k g_{k+1}^k = p g_{k+1}^1 - \sum_{r=1}^{k-1} (p^r g_{k+1}^r - p^{r+1} g_{k+1}^{r+1}) \\ = p(x_k^1 + p x_{k+1}^1 + a_{k+2}^0) - \sum_{r=1}^{k-1} a_{k+1}^r \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Mit $(*)$ und

$$\begin{aligned} g_{i+1}^{k+1} &= \sum_{r=0}^{k} (p^r g_{i+r+1}^{k+1} - p^{r+1} g_{i+r+2}^{k+1}) + p^{k+1} g_{i+k+2}^{k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} p^r x_{i+r}^{k+1} - a_{i+k+1}^k + p^k g_{i+k+1}^k \end{aligned}$$

gilt rekursiv $g_i^k + \mathcal{B} \in \sum_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{G}/\mathcal{B} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Summe $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$ direkt ist. Da $A^k \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ gilt, genügt es nachzuweisen, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \langle a_1^k + B \rangle$ direkt ist, bzw. dass $a = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_1^k \in \mathcal{B}$ mit $0 \leq \lambda_k < p$ nur für $\lambda_k = 0$ zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Dazu sei $a \in \mathcal{B}$ angenommen, d.h.

$$\begin{aligned} a = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \lambda_k a_1^k &= \lambda_0 p g_1^1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (p^{k-1} g_1^k - p^k g_1^{k+1}) \\ &= (\lambda_0 p + \lambda_1) g_1^1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) p^k g_1^{k+1} \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Dann gilt $a = 0$, da $g_1^k \in p^\omega \mathcal{G}$. Also ist

$$(\lambda_0 p + \lambda_1) g_1^1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) p^k g_1^{k+1} = 0 \in H/L$$

Durch Koeffizientenvergleich in H bei h_i^k (vgl. Darstellung 4.1 (i)) folgt $\lambda_{k+1} - \lambda_k \in p\mathbb{Z}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\lambda_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \lambda_k < p$ ist, gilt rekursiv $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $a = \lambda_0 p g_1^1 = \lambda_0 g_0 = 0$ bzw. $\lambda_0 h_0 \in L$, woraus $\lambda_0 = 0$ folgt, da $h_0 \neq L$ nach Lemma 4.1.(i). Also ist $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. es gilt $\mathcal{G}/\mathcal{B} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} A^k$. ∎

Der folgende Satz zeigt uns, dass $\mathcal{H}_{2\omega+1}$ spezielle Relationsarrays besitzt, nämlich Arrays $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit den zueinander gleichen Diagonalelementen α_i^k.

Satz 4.6. *Die Menge* $\mathcal{Q} = \{a_i^k, x_i^k \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\}$ *ist eine induktive Quasibasis von* $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$ *mit dem korrespondierenden Relationsarray*

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & & \\ & \alpha_2^k & & \\ & & \alpha_3^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_i^0 = (p^2, 0, \ldots)$ *und* $\alpha_i^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, p^k, -p^{k+1}, 0, \ldots)$ *für alle* $i, k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach den Lemmas 4.4 und 4.5 erfüllt die Menge $\mathcal{Q}$ die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.7. Mit

$$a_i^k - p a_{i+1}^k = \begin{cases} p^2 x_i^1, & \text{falls } k = 0 \\ p^k x_i^k - p^{k+1} x_i^{k+1}, & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}$$

(vgl. (1)) erhält man das angegebene Array. ∎

5. Die Höhe von Quasibasen

Es sei $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$ eine basic Untergruppe von G und sei $B^{\Pi} = \prod_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Jedes Element $\delta \in B^{\Pi}$ wird in der Form

$$\delta = (b_1, b_2, ...) \in B^{\Pi}$$

dargestellt, wobei $b_i \in B_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiter wird mit $h(\bar{\delta})$ für ein $\delta \in B^{\Pi}$ die Höhe von $\bar{\delta} = \delta + B$ in B^{Π}/B bezeichnet. Wenn wir für ein $\delta = (b_i \in B_i \mid i \in \mathbb{N}) \in B^{\Pi}$ mit $h^B(b_i)$ die Höhe von b_i in B bezeichnen, so gilt

$$h(\bar{\delta}) = \liminf(h^B(b_i))_{i\in\mathbb{N}}.$$

Dabei ist noch zu beachten, dass $h^B(b_i) = \infty$ genau für $b_i = 0$ und $h^B(b_i) \in \{0, 1, ..., i-1\}$ für $b_i \neq 0$ gilt.

Im Weiteren bezeichnen wir mit $B_0^{\Pi} \subset B^{\Pi}$ die Menge aller Elemente $\delta \in B^{\Pi}$ mit der Eigenschaft, dass $\bar{\delta} \in B^{\Pi}/B$ von unendlicher Höhe in B^{Π}/B ist. Debei ist zu beachten, dass $B_0^{\Pi} = \widehat{B}$ die Komplettierung in der p-adischen Topologie ist, vgl. auch [2]. Wir merken an, dass B_0^{Π} eine Untergruppe von B^{Π} ist und dass $B \subseteq B_0^{\Pi} \subseteq B^{\Pi}$ gilt. Außerdem ist zu beachten, dass ein $\delta = (b_i \in B_i \mid i \in \mathbb{N})$ genau dann in B_0^{Π} liegt, wenn $\lim_{i\to\infty}(h^B(b_i))_{i\in\mathbb{N}} = \infty$. Die Gruppe B_0^{Π} ist eine gemischte Gruppe, denn für die beliebigen Elemente $b_i \in B_i$ mit $h^B(b_i) = 0$, d.h. $o(b_i) = p^i$, ist beispielsweise

$$(b_1, pb_2, p^2b_3, ...) \in B_0^{\Pi}$$

ein Element endlicher Ordnung, nämlich der Ordnung p, und

$$(p^{[i/2]}b_i \mid i \in \mathbb{N}) = (b_1, pb_2, pb_3, p^2b_4, p^2b_5, p^3b_6, p^3b_7, ...) \in B_0^{\Pi}$$

ein Element unendlicher Ordnung. Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass $B_0^{\Pi}/B = p^{\omega}(B^{\Pi}/B)$ bzw. $B_0^{\Pi} = \{\delta \in B^{\Pi} \mid h(\bar{\delta}) = \infty\}$ gilt.

Lemma 5.1. $B_0^{\Pi}/B = p^{\omega}\big(B^{\Pi}/B\big)$ *ist die maximale divisible Untergruppe von* B^{Π}/B. *Insbesondere gilt* $\operatorname{tor}\big(B^{\Pi}/B\big) = \operatorname{tor} B^{\Pi}/B \subset B_0^{\Pi}/B$.

Beweis. Für ein beliebiges $\delta = (b_i \in B_i \mid i \in \mathbb{N}) \in B_0^{\Pi}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $p \mid b_i$ für alle $i > n$. Es gilt

$$\delta + B = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, b_{n+1}, b_{n+2}, ...) + B \in p\big(B_0^{\Pi}/B\big),$$

woraus $B_0^\Pi/B \subseteq p\big(B_0^\Pi/B\big)$ folgt. Somit ist B_0^Π/B divisibel. Da $B_0^\Pi/B = p^\omega(B^\Pi/B)$ definitionsgemäß gilt, ist B_0^Π/B sogar die maximale divisible Untergruppe von B^Π/B.

Nun zeigen wir, dass $\operatorname{tor}\big(B^\Pi/B\big) = \operatorname{tor} B^\Pi/B$. Dazu ist ausreichend nachzuweisen, dass $\bar\delta \in \operatorname{tor}\big(B^\Pi/B\big)$ genau dann gilt, wenn $\delta \in \operatorname{tor} B^\Pi$. Es gilt $p^n\delta = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, falls $\delta \in \operatorname{tor} B^\Pi$ und somit $p^n\bar\delta = 0 \in B^\Pi/B$ bzw. $\bar\delta \in \operatorname{tor}\big(B^\Pi/B\big)$. Ist andererseits $\bar\delta \in \operatorname{tor}\big(B^\Pi/B\big)$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p^n\bar\delta = 0 \in B^\Pi/B$, d.h. $p^n\delta \in B$. Folglich existiert ein $m \geq n$, so dass $p^m\delta = 0$ bzw. $\delta \in \operatorname{tor} B^\Pi$. Insbesondere gilt $\operatorname{tor} B^\Pi/B \subset B_0^\Pi/B$, da $\operatorname{tor} B^\Pi \subset B_0^\Pi$. ∎

Das folgende Lemma gibt uns einige Rechenregeln für die Höhe $h(\bar\delta)$, $\delta \in B^\Pi$, die eine Folgerung der in [3, Kapitel 37] angegebenen Rechenregeln für die sogenannte verallgemeinerte p-Höhe sind. In dieser Arbeit beschränken wir uns jedoch auf die in 5.2 angegebenen Eigenschaften.

Lemma 5.2. *Für die Elemente $\delta_1, \delta_2 \in B^\Pi$ und $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ mit $\|\lambda\| = p^{-n}$ gilt*

(i) $h(\bar\delta_1 + \bar\delta_2) \geq \min\{h(\bar\delta_1), h(\bar\delta_2)\}$,
(ii) $h(\bar\delta_1 + \bar\delta_2) = h(\bar\delta_1)$, *falls* $h(\bar\delta_1) < h(\bar\delta_2)$,
(iii) $h(\lambda\bar\delta) = h(\bar\delta) + n$.

Beweis. (i) und (ii) sind aus [3, Kapitel 37] bekannte Höheneigenschaften. Eigenschaft (iii) gilt wegen

$$h(\lambda\bar\delta) = h(p^n\bar\lambda\bar\delta) = h(\bar\lambda\bar\delta) + n = h(\bar\delta) + n,$$

wobei $\bar\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ mit $\lambda = p^n\bar\lambda$. ∎

Nun kommen wir zu einer Notation, auf die viele weitere Ergebnisse Bezug nehmen werden.

Notation 5.3. Für eine induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ von G mit den zugehörigen Relationen $a_i^k - pa_{i+1}^k = b_i^k \in B_i$ bezeichnen wir

$$\delta^k = \delta^k(Q) = (b_1^k, b_2^k, ...) \in B^\Pi$$

und die Folge $\Delta_Q = (\delta^k \mid k \in I)$. Durch die Angabe der Folge Δ_Q bzw. der Elemente $\delta^k = (a_i^k - pa_{i+1}^k \mid i \in \mathbb{N})$ werden die korrespondierenden Relationen von G bestimmt. Nun wird an Stelle des Relationsarrays von Q oft die Folge Δ_Q betrachtet. Dabei werden die Höhe $h(\bar{\delta})$ der Elemente $\delta \in \langle \delta^k \mid k \in I \rangle$ und der Wert

$$h(Q) = \min\{h(\bar{\delta}^k) \mid k \in I\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

der die *Höhe* von Q genannt wird, von wesentlicher Bedeutung sein. Weiter heißt ein Tupel der Form

$$\delta = \sum_{k \in I} \lambda_k \delta^k = \left(\sum_{k \in I} \lambda_k b_i^k \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right),$$

wobei (λ_k, I) eine Nullfolge ist, eine *δ-Kombination* von Q. Eine δ-Kombination ist ein wohldefiniertes Element von B^Π, da jede ihrer Komponenten eine endliche Summe ist. Die Menge aller δ-Kombinationen von Q wird mit $\Delta(Q)$ bezeichnet. Für jede induktive Quasibasis Q von G ist leicht zu zeigen, dass $\Delta(Q) \subseteq B^\Pi$ eine Untergruppe von B^Π ist, weil $\sum_{k \in I} \lambda_k \delta^k = 0$ für die Nullfolge $(\lambda_k, I) = (0, 0, ...)$ gilt und weil durch die Addition zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge entsteht. Eine δ-Kombination $\delta = \sum_{k \in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta(Q)$ wird *normiert* genannt, falls (λ_k, I) eine normierte Nullfolge ist. Die Menge aller normierten δ-Kombinationen bezeichnen wir mit $\Delta^*(Q)$. Die Bedeutung der δ-Kombinationen bzw. der Menge $\Delta(Q)$ wird weiter unten, hauptsächlich im nächsten Kapitel deutlich werden.

Beispiel 5.4. Wir werden für drei Quasibasen $Q = \{a_i^k, x_i^u\}$ aus den zugehörigen Arrays die Höhe $h(Q)$ ablesen. In allen drei Fällen geht es um Quasibasen mit $|I| = |I_i| = 1$, d.h. $B = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^i)$ und $G/B \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. Daher werden die Indizes k, u weggelassen und die Höhe $h(\bar{\delta}) = h(Q)$ betrachtet, wobei δ das einzige Folgenglied von Δ_Q ist. In [4, Kapitel 2 und 5] wurden die Quasibasen mit den folgenden Arrays angegeben

(i) $\alpha = \begin{pmatrix} p^n & & & \\ & p^n & & \\ & & p^n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \delta = (p^n x_1, p^n x_2, ...),\ h(\bar{\delta}) = n,$

$$\text{(ii)}\ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \delta = (x_1, 0, x_3, 0, ...),\ h(\bar{\delta}) = 1,$$

$$\text{(iii)}\ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & p & & & \\ & & p^2 & & \\ & & & p^3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \delta = (x_1, px_2, p^2x_3, ...),\ h(\bar{\delta}) = \infty.$$

Im folgenden Beispiel werden wir für die im Satz 4.6 angegebene induktive Quasibasis $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$ die Folge $\Delta_{\mathcal{Q}}$ ermitteln und die Höhen $h(\bar{\delta}^k(\mathcal{Q}))$, $h(\mathcal{Q})$ berechnen.

Beispiel 5.5. Für die Quasibasis $\mathcal{Q} = \{a_i^k, x_i^k\}$ von $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$ gilt

$$b_i^k = a_i^k - pa_{i+1}^k = \begin{cases} p^2x_i^1, & \text{falls } k = 0, \\ p^k(x_i^k - px_i^{k+1}), & \text{falls } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

nach Satz 4.6 und damit $\Delta_{\mathcal{Q}} = (\delta^k = (b_i^k | i \in \mathbb{N}) \mid k \in \mathbb{N}_0)$, sowie $h(\bar{\delta}^0) = h(\delta^0) = 2$ und $h(\bar{\delta}^k) = h(\delta^k) = k$ für $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $h(\mathcal{Q}) = \min\{h(\bar{\delta}^k) \mid k \in I\} = h(\bar{\delta}^1) = 1$.

Mit dem folgenden Lemma wird gezeigt, dass für jedes $\delta \in \Delta^*(Q)$ eine zu Q verwandte Quasibasis P existiert, so dass δ ein Element der Folge Δ_P ist.

Lemma 5.6. *Es seien eine induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G und ein $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k(Q) \in \Delta^*(Q)$ gegeben. Dann existiert eine zu Q verwandte Quasibasis P von G, so dass zu einem beliebig gewählten $k_0 \in I$ mit $p \nmid \lambda_{k_0}$*

$$\delta^k(P) = \begin{cases} \delta, & \textit{falls } k = k_0 \\ \delta^k(Q), & \textit{falls } k \neq k_0. \end{cases}$$

Beweis. Nach Korollar 3.6 existiert eine induktive Quasibasis $P = \{c_i^k, B\}$ von G mit

$$c_i^k = \begin{cases} \sum_{l\in I} \lambda_l a_i^l, & \text{falls } k = k_0 \\ a_i^k, & \text{falls } k \neq k_0, \end{cases}$$

da $p \nmid \lambda_{k_0}$. Insbesondere gilt $\delta^k(P) = \delta^k(Q)$ für $k \neq k_0$ und

$$\delta^{k_0}(P) = \sum_{k\in I} \lambda_k (a_i^k - pa_{i+1}^k \mid i \in \mathbb{N}) = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k(Q) = \delta. \qquad \blacksquare$$

Eine induktive Quasibasis Q von G heißt *normiert*, falls $h(\bar{\delta}^k) = h(Q)$ für alle $k \in I$. Nun wird gezeigt, dass die Gruppe G eine normierte Quasibasis P mit $h(P) = h(Q)$ besitzt.

Lemma 5.7. *Zu jeder induktiven Quasibasis Q von G existiert eine normierte zu Q verwandte Quasibasis P mit $h(P) = h(Q)$.*

Beweis. Wir bezeichnen $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ und $\delta^k = \delta^k(Q)$ für alle $k \in I$. Um die Quasibasis P zu konstruieren, wählt man ein $k_0 \in I$ mit $h(\bar{\delta}^{k_0}) = h(Q)$ und definiert eine Untermenge $J = \{k \in I \mid h(\bar{\delta}^k) \neq h(Q)\} \subseteq I$. Es wird gezeigt, dass $P = \{c_i^k, \bigoplus B_i\}$ mit

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^k, & \text{für } k \in I \setminus J, \\ a_i^k + a_i^{k_0}, & \text{für } k \in J, \end{cases}$$

eine induktive Quasibasis von G ist. Die Menge P erfüllt trivialerweise die Bedingungen (i) und (iii) aus Definition 2.7. Die Bedingung (ii) wird ebenfalls wegen der folgenden Relationen erfüllt. Für $k \in J$ ist

$$c_i^k - pc_{i+1}^k = a_i^k - pa_{i+1}^k + a_i^{k_0} - pa_{i+1}^{k_0} = b_i^k + b_i^{k_0} \in B_i.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{k\in I} \langle c_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle \\ &\qquad = \left(\bigoplus_{k\in J} \langle a_i^k + a_i^{k_0} + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle\right) \oplus \left(\bigoplus_{k\in I\setminus J} \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle\right) \\ &\qquad = \bigoplus_{k\in I} \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle. \end{aligned}$$

Somit ist P eine induktive Quasibasis von G mit

$$\delta^k(P) = \begin{cases} \delta^k, & \text{für } k \in I \setminus J, \\ \delta^k + \delta^{k_0}, & \text{für } k \in J. \end{cases}$$

Nach Lemma 5.2 gilt

$$h(\bar{\delta}^k(P)) = h(\bar{\delta}^k + \bar{\delta}^{k_0}) = h(\bar{\delta}^{k_0}) = h(Q)$$

für alle $k \in J$, da $h(\bar{\delta}^{k_0}) < h(\bar{\delta}^k)$. Also ist $h(\bar{\delta}^k(P)) = h(Q)$ für alle $k \in I$, d.h. P ist normiert mit $h(P) = h(Q)$. ∎

Satz 5.8. *Verwandte induktive Quasibasen von G besitzen dieselbe Höhe.*

Beweis. Nach Lemma 5.7 genügt es zu zeigen, dass $h(Q) = h(P)$ für zwei normierte zueinander verwandte Quasibasen $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ und $P = \{c_i^k, \bigoplus B_i\}$ von G gilt. Es wird $h(Q) > h(P) \in \mathbb{N}_0$ angenommen und $h = h(P)$ bezeichnet. Außerdem bezeichnen wir $b_i^k = a_i^k - pa_{i+1}^k$, $d_i^k = c_i^k - pc_{i+1}^k$. Zu einem festen $k_0 \in I$ existiert eine normierte Nullfolge (λ_k, I) nach Korollar 3.6, so dass

$$d_i^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k b_i^k \in p^n B_i$$

zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $i \in \mathbb{N}$. Bezeichnet man $\delta^{k_0} = \delta^{k_0}(P) = (d_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N})$ und $\delta = \sum_{k \in I} \lambda_k \delta^k(Q) = (\sum_{k \in I} \lambda_k b_i^k \mid i \in \mathbb{N})$, so folgt $h(\bar{\delta}^{k_0} - \bar{\delta}) = \liminf(h(d_i^{k_0} - \sum_{k \in I} \lambda_k b_i^k)) = \infty$ und nach Lemma 5.2.(i), (ii) gilt

$$h(\bar{\delta}) = h(\bar{\delta}^{k_0}) = h.$$

Nun wird eine endliche nicht leere Menge $J = \{k \in I \mid p^{h+1} \nmid \lambda_k\}$ definiert. Bezeichnet man $\delta_1 = \sum_{k \in J} \lambda_k \delta^k(Q)$ und $\delta_2 = \sum_{k \in I \setminus J} \lambda_k \delta^k(Q)$, so ist

$$h(\bar{\delta}_1) \geq \min\{h(\lambda_k \bar{\delta}^k(Q)) \mid k \in J\} > h,$$

weil $h(\lambda_k \bar{\delta}^k(Q)) \geq h(\bar{\delta}^k(Q)) = h(Q) > h$ für alle $k \in J$ gilt. Andererseits ist $h(\bar{\delta}_2) > h$, da $\bar{\delta}_2 \in p^{h+1} B^{\Pi}$. Da $h(\bar{\delta}_1), h(\bar{\delta}_2) > h$ gilt, ist

$$h = h(\bar{\delta}) = h(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) \geq \min\{h(\bar{\delta}_1), h(\bar{\delta}_2)\} > h,$$

ein Widerspruch. Also ist $h(Q) = h(P)$. ∎

6. Quasibasen reduzierter p-Gruppen

In diesem Kapitel wird gezeigt wie sich anhand einer gegebenen induktiven Quasibasis von G bestimmen lässt, ob die Gruppe G separabel bzw. reduziert ist.

Lemma 6.1. *Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann ist jedes $g \in G \setminus \{0\}$ mit $o(g) = p^j$ bzw. jedes $g \in \sum_{k\in I} \lambda_k a_j^k + B$ mit einer endlichen Folge ganzer Zahlen (λ_k, I) genau dann von unendlicher Höhe in G, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$g = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k = p^{n+1} \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n+1}^k = p^{n+2} \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n+2}^k = ...$$

existiert. Dann gilt insbesondere $h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k(Q)) \geq j$.

Beweis. Es sei ein $g \in G \setminus \{0\}$ mit $o(g) = p^j$ gegeben. Da $G/B = \bigoplus_{k\in I} \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}(p^\infty)$, existiert eine normierte Nullfolge (λ_k, I) nach Proposition 2.2, so dass $g \in \sum_{k\in I} \lambda_k a_j^k + B$. Nun sei $g = \sum_{k\in I} \lambda_k a_j^k + b$ mit $b \in \bigoplus_{i<l} B_i$ für ein $l \in \mathbb{N}$ bezeichnet und $g \in p^\omega G$ angenommen. Dann gilt nach Lemma 3.2 für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g = \sum_{k\in I} \lambda_k a_j^k + b = \sum_{k\in I} \lambda_k \left(p^n a_{j+n}^k + \sum_{r=0}^{n-1} p^r b_{j+r}^k \right) + b \in p^n G.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} g - p^n \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k\in I} \lambda_k p^r b_{j+r}^k + b = \sum_{r=j}^{n+j-1} \sum_{k\in I} \lambda_k p^{r-j} b_r^k + b \\ &= \underbrace{\sum_{r=j}^{l-1} \sum_{k\in I} \lambda_k p^{r-j} b_r^k + b}_{\in \bigoplus_{i<l} B_i} + \sum_{r=l}^{n+j-1} \underbrace{\sum_{k\in I} \lambda_k p^{r-j} b_r^k}_{\in B_r, r\geq l} \in p^n B \end{aligned}$$

für alle $n \geq l$. Bezeichnet man $b_r = \sum_{k\in I} \lambda_k p^{r-j} b_r^k \in B_r$, gilt folglich wegen der direkten Summe von $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$

$$\sum_{r=j}^{l-1} b_r + b = 0$$

und somit

$$\sum_{r=l}^{n+j-1} b_r \in p^n B \text{ für alle } n \geq l,$$

d.h. $b_r = 0$ für alle $r \geq l$. Also gilt $g = p^n \sum_{k\in J} \lambda_k a^k_{j+n}$ für alle $n \geq l$. Somit besitzt ein $g \in p^\omega G$ (sogar genau) die angegebene Form. Außerdem ist $b_r = \sum_{k\in I} \lambda_k p^{r-j} b^k_r = 0$, d.h. $p^j \mid \sum_{k\in I} \lambda_k b^k_r$, für alle $r \geq l$. Somit ist $h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k(Q)) \geq j$. ■

Korollar 6.2. *Es sei $Q = \{a^k_i, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann gilt $a^k_i \notin p^\omega G$ zu jedem $k \in I$ für alle $i > h(\bar{\delta}^k)$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein $k \in I$ und ein $j > h = h(\bar{\delta}^k)$ mit $a^k_j \in p^\omega G$ existieren. Dann existiert nach Lemma 6.1 ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a^k_j = p^n a^k_{j+n}$ für alle $n \geq m$. Da unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ mit $p^{h+1} \nmid b^k_i = a^k_i - pa^k_{i+1} \in B_i$ existieren, können wir o.B.d.A. ein $n \geq m$ mit $p^{h+1} \nmid b^k_{j+n}$ fixieren. Dann gilt nach Lemma 3.2

$$\sum_{r=0}^{n} p^r b^k_{j+r} = a^k_j - p^{n+1} a^k_{j+n+1} = 0.$$

Wegen direkter Zerlegung von $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$ folgt $p^r b^k_{j+r} = 0$ für alle $0 \leq r \leq n$. Insbesondere ist $p^n b^k_{j+n} = 0$ bzw. $p^j \mid b^k_{j+n}$, ein Widerspruch zu $p^{h+1} \nmid b^k_{j+n}$. Also gilt $a^k_j \notin p^\omega G$. ■

Satz 6.3. *Es sei $Q = \{a^k_i, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Gruppe G ist separabel;*
(ii) $h(\bar{\delta}) = 0$ *für alle* $\delta \in \Delta^*(Q)$;
(iii) $h(\bar{\delta}) = 0$ *für alle* $\delta \in \langle\widehat{Q}\rangle \setminus p\langle\widehat{Q}\rangle$, *wobei* $\widehat{Q} = \{\delta^k(Q) \mid k \in I\}$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii),(iii): Es sei $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta^*(Q)$ beliebig. Wird $h(\bar{\delta}) > 0$ angenommen, existiert ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k\in I} \lambda_k b^k_i \in pB_i$

für alle $i \geq j$. Somit und mit Lemma 3.2 ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \neq \sum_{k\in I} \lambda_k p^{j-1} a_j^k &= \sum_{k\in I} \lambda_k p^{j-1} \left(p^n a_{j+n}^k + \sum_{r=0}^{n-1} p^r b_{j+r}^k \right) \\ &= p^{j+n-1} \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k + \sum_{r=0}^{n-1} \underbrace{p^{j+r-1} \sum_{k\in I} \lambda_k b_{j+r}^k}_{\in p^{j+r} B_{j+r} = 0} \\ &= p^{j+n-1} \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k. \end{aligned}$$

Folglich ist $\sum_{k\in I} \lambda_k p^{j-1} a_j^k \in G \setminus \{0\}$ ein Element unendlicher Höhe bzw. G nicht separabel. Also gilt (i) $\Rightarrow$ (ii). Da $\langle \widehat{Q} \rangle \setminus p\langle \widehat{Q} \rangle \subseteq \Delta^*(Q)$ ist und $\delta \in \Delta^*(Q)$ beliebig gewählt wurde, gilt auch (i) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Angenommen, G ist nicht separabel, d.h. es existiert ein $g \in G \setminus \{0\}$ mit $h(g) = \infty$. Es sei $o(g) = p^j$. Nach Lemma 6.1 existiert eine normierte Nullfolge (λ_k, I) mit $h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k) \geq j > 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Angenommen, es existiert ein $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) > 0$. Bezeichnet man $\delta_1 = \sum_{k\in I_0} \lambda_k \delta^k$ und $\delta_2 = \sum_{k\in I\setminus I_0} \lambda_k \delta^k$, wobei $I_0 = \{k \in I \mid p \nmid \lambda_k\} \neq \emptyset$, so gilt $\delta_1 \in \langle \widehat{Q} \rangle \setminus p\langle \widehat{Q} \rangle$ und $h(\bar{\delta}_2) > 0$. Folglich gilt

$$\hat{h}(\bar{\delta}_1) = h(\bar{\delta} - \bar{\delta}_2) \geq \min\{h(\bar{\delta}), h(\bar{\delta}_2)\} > 0.$$

Also existiert ein $\delta_1 \in \langle \widehat{Q} \rangle \setminus p\langle \widehat{Q} \rangle$ mit $h(\bar{\delta}_1) > 0$, falls ein $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) > 0$ existiert. ∎

Mit dem folgenden Lemma wird gezeigt, wie sich anhand eines gegebenen $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) = \infty$ eine divisible Untergruppe von G konstruieren lässt.

Lemma 6.4. *Es seien $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G und $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta(Q)^*$ mit $h(\bar{\delta}) = \infty$. Dann existiert eine streng monoton steigende Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so dass $\langle d_i \in G \mid i \in \mathbb{N} \rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $d_i = pd_{i+1} = p^{n_i} \sum_{k\in I} \lambda_k a_{i+n_i}^k \neq 0$ für $i \in \mathbb{N}$ und $pd_1 = 0$.*

Beweis. Da $h(\bar{\delta}) = \infty$ gilt, existiert eine streng monoton steigende Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so dass $p^i \mid \sum_{k\in I} \lambda_k b_n^k$ für alle $n \geq n_i$.

Nun wird $d_i = p^{n_i} \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{i+n_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ definiert. Es gilt $pd_1 = p^{n_1+1} \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{n_1+1} = 0$ und mit Lemma 3.2 für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} pd_{i+1} &= p^{n_{i+1}+1} \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{i+n_{i+1}+1} \\ &= p^{n_i+(n_{i+1}-n_i+1)} \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{i+n_i+(n_{i+1}-n_i+1)} \\ &= \underbrace{p^{n_i} \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{i+n_i}}_{=d_i} - \sum_{r=0}^{n_{i+1}-n_i} p^{n_i+r} \underbrace{\sum_{k\in I} \lambda_k b^k_{i+n_i+r}}_{\in p^i B_{i+n_i+r}} = d_i. \end{aligned}$$

Also ist $\langle d_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. Da (λ_k, I) normiert ist, gilt $o(d_i) = p^i$, d.h. $d_i \neq 0$, für alle $i \in \mathbb{N}$. ∎

Lemma 6.5. *Es sei $Q = \{a^k_i, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Ist G nicht reduziert mit einer divisiblen Untergruppe $0 \neq D \leq G$, dann existiert ein $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) = \infty$, so dass $D \subseteq \langle \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$.*

Beweis. Es sei G nicht reduziert mit einer divisiblen Untergruppe $D = \langle g_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $pg_1 = 0, pg_{i+1} = g_i \neq 0$. Da $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong \langle g_i + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \bigoplus_{k\in I} G/B$ existiert eine normierte Nullfolge (λ_k, I), so dass $g_i \in \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_i + B$, für alle $i \in \mathbb{N}$ nach Proposition 2.2 gilt. Folglich gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ nach Lemma 6.1

$$g_i = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_{i+n} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ und für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = g_i - pg_{i+1} = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k (a^k_{i+n} - pa^k_{i+n+1}) = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k b^k_{i+n} \in p^n B_{i+n},$$

d.h. $p^i \mid \sum_{k\in I} \lambda_k b^k_{i+n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k) = \infty$. Insbesondere gilt $D = \langle g_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \langle \sum_{k\in I} \lambda_k a^k_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$. ∎

Satz 6.6. *Es sei $Q = \{a^k_i, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Gruppe G ist reduziert;*
(ii) *$h(\bar{\delta}) < \infty$ für alle $\delta \in \Delta(Q)$;*
(iii) *$h(\bar{\delta}) < \infty$ für alle $\delta \in \Delta^*(Q)$.*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (iii): Das ist eine direkte Folgerung von Lemmata 6.4 und 6.5.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Es gilt $\Delta^*(Q) \subset \Delta(Q)$. Existiert andererseits ein Element $\delta = \sum_{k\in I} \lambda_k \delta^k \in \Delta(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) = \infty$, für das wir eine normierte Nullfolge (λ_k, I) durch $\lambda_k = p^n \bar{\lambda}_k$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definieren werden, so gilt nach Lemma 5.2.(iii)

$$\infty = h(\bar{\delta}) = n + h(\sum_{k\in I} \bar{\lambda}_k \bar{\delta}^k).$$

Somit ist $h(\sum_{k\in I} \bar{\lambda}_k \bar{\delta}^k) = \infty$, wobei $\sum_{k\in I} \bar{\lambda}_k \delta^k \in \Delta^*(Q)$. ■

7. Quasibasen und die erste Ulm-Untergruppe

In diesem Kapitel werden wir anhand einer gegebenen Quasibasis von G einige Eigenschaften der ersten Ulm-Untergruppe $p^\omega G$ ableiten. Dazu führen wir einen bestimmten Typ von Quasibasen, nämlich die sogenannte bereinigte Quasibasis, der Gruppe G ein, der weiterhin als ein wesentliches Hilfsmittel verwendet wird.

Es sei ein $\delta \in B^\Pi = \prod_{j\in\mathbb{N}} B_j$ für eine basic Untergruppe $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$ von G *bereinigt* genannt, falls

$$h(\bar{\delta}) = h(\delta)$$

gilt, wobei $h(\delta)$ die Höhe von δ in B^Π bezeichnet. Definitionsgemäß ist jedes $\delta \in B^\Pi$ mit $h(\bar{\delta}) = 0$ bereinigt. Für ein bereinigtes $\delta = (b_i \mid i \in \mathbb{N}) \in B^\Pi$ mit $h(\bar{\delta}) = n \in \mathbb{N}$ gilt $b_i \in p^n B$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit $b_1 = ... = b_n = 0$, sowie $b_i \notin p^{n+1}B_i$ für unendlich viele $i > n$. Ist $\delta \in B^\Pi$ mit $h(\bar{\delta}) = \infty$ bereinigt, so ist $\delta = (0, 0, ...) = 0$. Es ist zu beachten, dass zu jedem $\delta \in B^\Pi$ mit $h(\bar{\delta}) < \infty$ ein bereinigtes $\delta' \in B^\Pi$ mit $\delta \equiv \delta'$ modulo B existiert.

Für eine induktive Quasibasis Q von G werden wir in diesem Kapitel insbesondere die Elemente $\delta^k = \delta^k(Q)$ mit $h(\bar{\delta}^k) = \infty$ betrachten. Dazu wird $I_\infty = \{k \in I \mid h(\bar{\delta}^k) = \infty\}$ bezeichnet. Weiter heißt eine induktive Quasibasis Q von G *bereinigt*, wenn jedes $\delta^k(Q)$ bereinigt ist. Falls Q bereinigt ist, gilt insbesondere $\delta^k = 0$ für alle $k \in I_\infty$. Das folgende Lemma zeigt, dass jede p-Gruppe eine bereinigte Quasibasis besitzt.

Lemma 7.1. *Für jede induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G existiert eine zu Q verwandte bereinigte Quasibasis P, so dass $\delta^k(P) \equiv \delta^k(Q)$ modulo B für $k \in I \setminus I_\infty$. Insbesondere gilt $h(\delta^k(P)) = h(\delta^k(Q))$ für alle $k \in I$.*

Beweis. Nach Lemma 6.4 existiert zu jedem $k \in I_\infty$, d.h. $h(\bar{\delta}^k) = \infty$, eine streng monoton steigende Folge $(n_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass $\langle d_i^k \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $d_i^k = p^{n_i^k} a_{i+n_i^k}^k$ für alle $k \in I_\infty$ gilt. Weiter wird gezeigt, dass die Menge $Q' = \{c_i^k, B\}$ mit

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^k, & \text{falls } k \in I \setminus I_\infty, \\ d_i^k, & \text{falls } k \in I_\infty, \end{cases}$$

eine Quasibasis von G ist bzw. dass die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 2.7 erfüllt sind. Wir werden nur die Eigenschaft (ii) zeigen, da (i) und (iii) trivialerweise erfüllt sind. Dazu bezeichnen wir $A^k = \langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ für $k \in I \setminus I_\infty$ und $D^k = \langle d_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ für $k \in I_\infty$. Da $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong D^k \subseteq A^k \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ gilt, ist $D^k = A^k$ für alle $k \in I_\infty$. Somit gilt

$$G/B = \bigoplus_{k\in I} A^k = \bigoplus_{k\in I\setminus I_\infty} A^k \oplus \left(\bigoplus_{k\in I_\infty} D^k\right).$$

Folglich ist Q' eine Quasibasis von G. Außerdem ist Q' induktiv, da Q induktiv ist. Nach Lemma 3.4 existiert eine zu Q' verwandte und fast gleiche Quasibasis P, wobei die Elemente $\delta^k(P)$, die mit $\delta^k(Q')$ bis auf endlich viele Komponenten zueinander gleich sind, beliebig vorgegeben werden können. Also können wir die Quasibasis P so wählen, dass P mit $\delta^k(P) = \delta^k(Q') = 0 \in B^\Pi$ für $k \in I_\infty$ und $\delta^k(P) \equiv \delta^k(Q') = \delta^k(Q)$ modulo B für $k \in I \setminus I_\infty$ bereinigt ist. Natürlich gilt $h(\delta^k(P)) = h(\delta^k(Q))$ für alle $k \in I$. ■

Nun zeigen wir noch einige Eigenschaften bereinigter Quasibasen.

Lemma 7.2. *Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine bereinigte Quasibasis von G. Dann gilt*

(i) $a_i^k = p^{h(\delta^k)-i} a_{h(\delta^k)}^k$ *für* $h(\delta^k) < \infty$, *falls* $1 \le i \le h(\delta^k)$,
(ii) $a_{h(\delta^k)}^k = p^{i-h(\delta^k)} a_i^k$ *für alle* $i \ge h(\delta^k)$,
(iii) $\langle a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ *für alle* $k \in I_\infty$,
(iv) $\langle a_i^k \mid k \in I, 1 \le i \le h(\delta^k)\rangle \subseteq p^\omega G$,
(v) $a_i^k \in p^{\omega+h(\delta^k)-i} G$ *für* $h(\delta^k) < \infty$, *falls* $1 \le i \le h(\delta^k)$.

Beweis. (i) Da Q bereinigt ist, gilt $b_i^k = a_i^k - p a_{i+1}^k = 0$, da $b_i^k \in p^{h(\delta^k)} B_i = 0$, falls $0 < i \le h(\delta^k) < \infty$. Folglich ist $a_i^k = p^{h(\delta^k)-i} a_{h(\delta^k)}^k$.

(ii) Da $b_i^k \in p^{h(\delta^k)} B_i$, gilt nach Lemma 3.2 für alle $i \ge h(\delta^k)$

$$a_{h(\delta^k)}^k = p^{i-h(\delta^k)} a_i^k + \sum_{r=0}^{i-h(\delta^k)-1} \underbrace{p^r b_{h(\delta^k)+r}^k}_{=0} = p^{i-h(\delta^k)} a_i^k.$$

(iii) Ist $k \in I_\infty$, so gilt $\delta^k = (b_i^k \mid i \in \mathbb{N}) = 0$. Somit ist $\langle a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(iv) Es gilt $a_i^k \in p^\omega G$ für alle $k \in I_\infty$ und $i < h(\delta^k) = \infty$ nach (iii). Andererseits ist $a_{h(\delta^k)}^k \in p^\omega G$ für $k \notin I_\infty$ nach (ii) und somit $a_i^k \in p^\omega G$ für $1 \le i \le h(\delta^k)$ nach (i).

(v) Da $a_{h(\delta^k)}^k \in p^\omega G$ nach (iv) und $a_i^k = p^{h(\delta^k)-i} a_{h(\delta^k)}^k$ nach (i) für alle $1 \le i \le h(\delta^k) < \infty$ gilt, ist a_i^k von der Höhe $\ge h(\delta^k) - i$ in $p^\omega G$. Also ist $a_i^k \in p^{\omega + h(\delta^k)-i} G$. ∎

Lemma 7.3. *Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann gilt* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) *mit*

(i) *Es existiert ein $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $j = h(\bar{\delta}) \in \mathbb{N}$,*
(ii) *Es existiert ein $g \in p^\omega G$ mit $o(g) = p^j$,*
(iii) *Es existiert ein $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) \ge j$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Es sei $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $j = h(\bar{\delta}) \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine induktive Quasibasis P von G nach Lemma 5.6, so dass $\delta = \delta^k(P)$ für ein $k \in I$. Nach Lemma 7.1 können wir o.B.d.A. annehmen, dass P bereinigt ist. Dann gilt $j = h(\bar{\delta}) = h(\delta)$. Somit ist $a_j^k \in p^\omega G$ nach Lemma 7.2.(iv). Insbesondere gilt $o(a_j^k) = p^j$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Nach Lemma 6.1 besitzt jedes $g \in p^\omega G$ mit $o(g) = p^j$ die Form $g = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und eine normierte Nullfolge (λ_k, I), wobei $h(\bar{\delta}) \ge\ j$ mit $\bar{\delta} = h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k)$ gilt. ∎

Nun geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die endliche Länge der ersten Ulm-Untergruppe $p^\omega G$ einer reduzierten Gruppe G an.

Satz 7.4. *Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis einer reduzierten Gruppe G. Die Gruppe $p^\omega G$ ist von der Länge $n \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn $n = \max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(Q)\} \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Es sei $n = \max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(Q)\} \in \mathbb{N}_0$ und $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) = n$. Ist $n = 0$, so ist G separabel bzw. $p^\omega G = 0$ nach Satz 6.3. Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $g \in p^\omega G$ mit $o(g) = p^n$ nach Lemma 7.3. Folglich ist $p^{\omega+m} G \ne 0$ für alle $m < n$. Ist $p^{\omega+n} G \ne 0$, so existiert ein $g \in p^\omega G$ mit $o(g) > p^n$ und somit existiert nach Lemma 7.3 ein $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) > n$, ein Widerspruch. Also ist $p^\omega G$ von der Länge n.

Nun sei $p^\omega G$ von der Länge $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. für jedes $g \in p^\omega G$ gilt $o(g) \le p^n$. Da G reduziert ist, sind alle $\bar{\delta}$ mit $\delta \in \Delta^*(Q)$ von endlicher

Höhe nach Satz 6.6. Wäre $n < h(\bar{\delta}) < \infty$, so hätte nach Lemma 7.3 ein $g \in p^\omega G$ mit $o(g) = p^{h(\bar{\delta})} > p^n$ existiert, ein Widerspruch. Also ist $\max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(Q)\} \leq n$. Andererseits existiert mindestens ein $g \in p^\omega G$ mit $o(g) = p^n$, d.h. es existiert ein $\delta \in \Delta^*(Q)$ mit $h(\bar{\delta}) \geq n$ nach Lemma 7.3. Also ist $n = \max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(Q)\} \in \mathbb{N}_0$. ■

Mit dem folgenden Beispiel wird Satz 7.4 auf die, in Kapitel 4 angegebenen Gruppen $\mathcal{H}_{\omega+n}$ und $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}_{2\omega+1}$, angewendet.

Beispiel 7.5. Für die Gruppe $\mathcal{H}_{\omega+n}$ wurde eine Quasibasis Q mit $|I| = 1$ und $\Delta^*(Q) = \{\lambda\delta \mid \lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p, \delta = (p^n, p^n, ...)\}$ angegeben. Es gilt $h(\lambda\bar{\delta}) = h(\bar{\delta}) = n \in \mathbb{N}$ für alle $\lambda\delta \in \Delta^*(Q)$ nach Lemma 5.2.(iii). Somit ist $\max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(Q)\} = n \in \mathbb{N}$, bzw. ist die Gruppe $\mathcal{H}_{\omega+n}$ von der Länge $\omega + n$ nach Satz 7.4.

Nun betrachten wir die Quasibasis $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{G}$ mit $\Delta_{\mathcal{Q}} = (\delta^k \mid k \in \mathbb{N}_0)$ und $h(\bar{\delta}^k) = k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$ (vgl. Beispiel 5.5). Somit ist $\max\{h(\bar{\delta}) \mid \delta \in \Delta^*(\mathcal{Q})\} = \infty$, d.h. die Gruppe $\mathcal{G}$ ist nicht von der Länge $\omega + n$, $n \in \mathbb{N}_0$ nach Satz 7.4, bzw. ist von der Länge $\geq 2\omega$.

Im Weiteren sei die Gruppe G nicht reduziert mit einer beliebigen divisiblen Untergruppe D. Nach [3, 21.3] ist D ein direkter Summand von G. Durch $G = G' \oplus D$ wird ein Komplement $G' \subseteq G$ definiert. Falls D die maximale divisible Untergruppe von G ist, ist G' reduziert. Weiterhin wird die Gruppe D für eine Indexmenge J mit $|J| = \operatorname{rg} D$ in der Form $D = \bigoplus_{k\in J}\langle a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \bigoplus_{|J|} \mathbb{Z}(p^\infty)$ dargestellt, wobei $pa_1^k = 0$ und $pa_{i+1}^k = a_i^k$. Falls $D = 0$, wird $J = \emptyset$ vereinbart.

Ist weiter $Q' = \{a_i^k, B \mid k \in J'\}$ eine beliebige (induktive) Quasibasis von G', so ist leicht zu zeigen, dass $Q = \{a_i^k, B \mid k \in I\}$ mit $I = J \cup J'$ eine (induktive) Quasibasis von G ist. Dabei ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned} G/B &\cong \big(G'/B\big) \oplus D \\ &= \bigoplus_{k\in J'}\langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle \oplus \left(\bigoplus_{k\in J}\langle a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle\right) \\ &\cong \bigoplus_{|I|} \mathbb{Z}(p^\infty) \end{aligned}$$

gilt. Diesen Sachverhalt werden wir im Folgenden oft anwenden.

Ein diagonales Relationsarray $\alpha = (\alpha^k)$ bzgl. einer induktiven Quasibasis Q von G heißt *klein*, falls $h(\bar{\delta}(Q)) = \infty$ für alle $k \in I$, d.h. $h(Q) = \infty$ (vgl. Kapitel 5). Der Begriff eines kleinen Relationsarrays wurde schon in [4, Kapitel 3] definiert bzgl. einer beliebigen, nicht unbedingt induktiven, Quasibasis von G, vgl. auch [5]. Die obige Definition eines kleinen Relationsarrays ist für diagonale Arrays, also für induktiven Quasibasen äquivalent zur in [4] angegebenen Definition. Der folgende Satz entspricht der Proposition [4, 11] und wird mit einem neuen Beweis gegeben, nämlich durch die Betrachtung der Elemente $\delta^k = \delta^k(Q)$ und ihrer Höhen $h(\bar{\delta}^k)$.

Satz 7.6. *Eine basic Untergruppe B von G ist genau dann ein direkter Summand von G, wenn eine (und somit jede) induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G unendliche Höhe hat.*

Beweis. Zuerst sei $G = B \oplus D$ für eine basic Untergruppe B und die maximale divisible Untergruppe D von G angenommen. Wegen $D \cong G/B \cong \bigoplus \mathbb{Z}(p^\infty)$, besitzt die Gruppe D die Form $D = \bigoplus_{k\in I}\langle a_i^k \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ mit $pa_1^k = 0, pa_{i+1}^k = a_i^k \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wobei I eine Indexmenge mit $|I| = \mathrm{rg}(G/B)$ ist. Natürlich ist $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G. Insbesondere gilt $\delta^k(Q) = (a_i^k - pa_{i+1}^k \mid i \in \mathbb{N}) = 0 \in B^\Pi$ für alle $k \in I$, d.h. $h(Q) = \infty$. Weiter sei $B = \bigoplus B_i$ eine beliebige Zerlegung von B. Mit dem oben gezeigten, existiert eine Quasibasis $Q' = \{a'^k_i, \bigoplus B_i\}$ von G mit $h(Q) = \infty$. Dann ist jede zu Q' verwandte Quasibasis von unendlicher Höhe nach Satz 5.8. Da dies für eine beliebige Zerlegung $B = \bigoplus B_i$ gilt, ist insbesondere jede Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G von unendlicher Höhe.

Sei nun umgekehrt $Q = \{a_i^k, B\}$ eine beliebige induktive Quasibasis von G mit $h(\bar{\delta}^k(Q)) = \infty$ für alle $k \in I$. Dann existieren nach Lemma 6.5 die Elemente $d_i^k \in G$, so dass $\langle d_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ für alle $k \in I$ und

$$\bigoplus_{k\in I}\langle d_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle = \bigoplus_{k\in I}\langle a_i^k + B \mid i \in \mathbb{N}\rangle = G/B.$$

Bezeichnet man $D = \bigoplus_{k\in I}\langle d_i^k \mid i \in \mathbb{N}\rangle$, so ist also $G = B + D$. Außerdem ist $B \cap D = 0$ wegen $D \cong \bigoplus_{|I|}\mathbb{Z}(p^\infty)$. Somit gilt $G = B \oplus D$. ∎

Falls eine basic Untergruppe $B \subseteq G$ ein direkter Summand von G mit $G = B \oplus D$ ist, wird noch angemerkt, dass $p^\omega G = D$ gilt. Für die maximale divisible Untergruppe D von G gibt uns das folgende Lemma eine notwendige und hinreichende Bedingung für $p^\omega G = D$ an.

Satz 7.7. *Die erste Ulm-Untergruppe $p^\omega G$ von G ist genau dann die maximale divisible Untergruppe von G, wenn eine induktive Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G existiert, so dass die Folge $\big(\bar{\delta}^k(Q) \mid k \in I \setminus I_\infty\big)$ in B^Π/B p-unabhängig ist.*

Beweis. Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine beliebige induktive Quasibasis von G. Wegen Lemma 7.1 können wir o.B.d.A. annehmen, dass Q bereinigt ist. Mit $D \subseteq p^\omega G$ bezeichnen wir weiter die maximale divisible Untergruppe von G. Ist $D \subsetneqq p^\omega G$, so existiert ein Element $g \in p^\omega G \setminus D$ und sei $o(g) = p^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 6.1 existiert eine normierte Nullfolge (λ_k, I) mit $g = p^n \sum_{k\in I} \lambda_k a_{j+n}^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $h(\sum_{k\in I} \lambda_k \bar{\delta}^k) \geq j$. Mit Lemma 5.2 folgt $h(\sum_{k\in I\setminus I_\infty} \lambda_k \bar{\delta}^k) \geq j$. Nun wird aus Notationsgründen $J = \{k \in I \setminus I_\infty \mid p^j \nmid \lambda_k\}$ gesetzt. Es gilt $J \neq \emptyset$, da sonst $g = p^n \sum_{k\in I_\infty} \lambda_k a_{j+n}^k = 0$ wäre. Also ist $0 < |J| < \infty$, da (λ_k, I) eine Nullfolge ist. Weiter ergibt sich $h(\sum_{k\in J} \lambda_k \bar{\delta}^k) \geq j$ nach Lemma 5.2, da $h(\sum_{k\in I\setminus I_\infty} \lambda_k \bar{\delta}^k) \geq j$. Somit ist die Folge $\big(\bar{\delta}^k(Q) \mid k \in J\big)$ p-abhängig in B^Π/B.

Ist nun $p^\omega G = D$, so ist die Gruppe G' mit $G = G' \oplus D$ separabel. Es seien weiter $Q' = \{a_i^k, B \mid k \in J'\}$ mit $|J'| = \mathrm{rg}(G'/B)$ eine induktive Quasibasis von G' und $D = \bigoplus_{k\in J} \langle a_i^k \in G \mid i \in \mathbb{N}\rangle \cong \bigoplus_{|J|} \mathbb{Z}(p^\infty)$ für eine Indexmenge J. Dann ist $Q = \{a_i^k, B \mid k \in I = J \cup J'\}$ eine induktive Quasibasis von G. Nach Satz 6.3 ist insbesondere die Folge $\big(\bar{\delta}^k(Q) \mid k \in J' = I \setminus I_\infty\big)$ p-unabhängig in B^Π/B, da G' separabel ist. ∎

8. Quasibasen und die Ulm-Kaplansky Invarianten

Ist $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigoplus_{u\in I_i} \langle x_i^u \rangle \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigoplus_{|I_i|} \mathbb{Z}(p^i)$ eine basic Untergruppe von G, so gilt für die Ulm-Kaplansky Invarianten $f_i(G) = |I_{i+1}|$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ nach [3, 37. Ex 9]. In diesem Kapitel werden wir weiter zeigen, wie sich anhand einer gegebenen induktiven Quasibasis $Q = \{a_i^k, B\}$ von G die Ulm-Kaplansky Invarianten $f_\sigma(G)$ für $\omega \le \sigma < 2\omega$ bestimmen lassen.

Es seien $Q = \{a_i^k, B\}$ eine induktive Quasibasis von G und $I_n = I_n(Q) = \{k \in I \mid h(\bar{\delta}^k) \ge n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Insbesondere gilt $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq ... \supseteq I_\infty$. Weiter bezeichnen wir $\Delta_{Q,n} = (\rho_k \mid k \in I)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$\rho_k = \begin{cases} \delta^k, & \text{falls } k \in I_n \setminus I_{n+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Familie von Folgen $\{p^{m-r}\Delta_{Q,r} \mid 0 \le r \le m\}$ für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ besitzt paarweise disjunkte *Träger*

$$\operatorname{supp}(p^{m-r}\Delta_{Q,r}) = \{k \in I \mid \rho_k \ne 0\} = I_r \setminus I_{r+1}.$$

Somit ist $\bigcup_{r=0}^m p^{m-r}\Delta_{Q,r}$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ eine wohldefinierte Folge. Weiter wird vereinbart, dass eine Folge p-unabhängig ist, falls die Folge der Komponenten ungleich 0, d.h. mit dem Index aus dem Träger, p-unabhängig ist.

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ heißt eine bereinigte (vgl. Kapitel 7) Quasibasis eine *n-Quasibasis* von G, falls $\bigcup_{r=0}^m p^{m-r}\Delta_{Q,r}$ p-unabhängig in $p^m B^\Pi$ für alle $0 \le m \le n$ ist. Definitionsgemäß ist eine n-Quasibasis auch eine m-Quasibasis von G für alle $0 \le m \le n$.

Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass jede p-Gruppe zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine n-Quasibasis besitzt.

Lemma 8.1. *Es sei $Q = \{a_i^k, \bigoplus B_i\}$ eine induktive Quasibasis von G. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine zu Q verwandte n-Quasibasis von G.*

Beweis. Zuerst sei definiert zu einem festen $n \in \mathbb{N}_0$ mit $I_n = I_n(Q)$

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^k + \sum_{l\in J} \lambda_k^l a_i^l, & \text{falls } k \in I_n \setminus (J \cup I_{n+1}), \\ a_i^k, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda_k^l \in \mathbb{Z}$ und $J_n \subseteq I_n \setminus I_{n+1}$ beliebig gegeben sind. Dann ist $P = \{c_i^k, \bigoplus B_i\}$ eine induktive Quasibasis von G nach Lemma 3.5. Mit $\delta^k = \delta^k(Q)$ gilt insbesondere

$$\delta^k(P) = \begin{cases} \delta^k + \sum_{l \in J} \lambda_k^l \delta^l, & \text{falls } k \in I_n \setminus (J_n \cup I_{n+1}), \\ \delta^k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 7.1 können wir o.B.d.A. annehmen, dass P bereinigt ist. Im Folgenden wird die Quasibasis P abhängig von der Wahl von $\lambda_k^l \in \mathbb{Z}$ und $J_n \subseteq I_n \setminus I_{n+1}$ angewendet.

Nun führen wir eine Induktion über n. Für den Fall $n = 0$ sei Q als eine beliebige Quasibasis von G betrachtet und $J_0 \subseteq I \setminus I_1$ dadurch definiert, dass die Folge $\left(\delta^k \in \Delta_{Q,0} \mid k \in J_0\right)$ eine in B^Π maximale p-unabhängige Teilfolge von $\left(\delta^k \mid k \in I \setminus I_1\right)$ ist. Somit ist P eine 0-Quasibasis von G, da die Folge $\left(\delta^k \mid k \in J_0 = \operatorname{supp} \Delta_{P,0}\right)$ p-unabhängig in B^Π ist.

Weiter sei Q eine $(n-1)$-Quasibasis von G für ein $n \in \mathbb{N}$ und wir zeigen, dass eine zu Q verwandte n-Quasibasis von G existiert. Dazu wird $\Delta = \bigcup_{r=0}^{n-1} p^{n-1-r} \Delta_{Q,r}$ gesetzt. Dann ist $p\Delta$ natürlich p-unabhängig in $p^n B^\Pi$. Weiter sei durch $p\Delta \cup (\delta^k \in \Delta_{Q,n} \mid k \in J_n)$ mit $J_n \subseteq I_n \setminus I_{n+1}$ eine in $p^n B^\Pi$ maximale p-unabhängige Teilfolge von $p\Delta \cup \Delta_{Q,n}$ definiert. Dann existieren ganze Zahlen λ_k^l zu jedem $k \in I_n \setminus (J_n \cup I_{n+1})$, so dass $p^{n+1} \mid \delta^k + \sum_{l \in J_n} \lambda_k^l \delta^k$. Somit ist P eine n-Quasibasis von G, da $\bigcup_{r=0}^m p^{m-r} \Delta_{P,r}$ p-unabhängig in $p^m B^\Pi$ für alle $0 \leq m \leq n$. ∎

Lemma 8.2. *Es sei $Q = \{a_i^k, B\}$ eine n-Quasibasis von G. Dann gilt*

$$\left(p^{\omega+r} G\right)[p] = \bigoplus_{k \in I_{r+1}} \langle a_1^k \rangle$$

für alle $0 \leq r \leq n$.

Beweis. Da $a_1^k \in p^{\omega + h(\delta^k) - 1} G \subseteq p^{\omega+r} G$ für $k \in I_{r+1}$ nach Lemma 7.2.(v) und $o(a_1^k) = p$ gilt, ist $a_1^k \in (p^{\omega+r}G)[p]$. Also ist $\langle a_1^k \mid k \in I_{r+1} \rangle \subseteq (p^{\omega+r}G)[p]$.

Nun sei $g \in (p^{\omega+r}G)[p]$ für ein beliebiges $0 \leq r \leq n$. Dann existiert ein $g' \in p^\omega G$ mit $o(g') = p^{r+1}$, so dass $p^r g' = g$. Nach Lemma 6.1 existieren ein $m \in \mathbb{N}_0$ und eine normierte Nullfolge (λ_k, I), so dass $g' = p^m \sum_{k \in I} \lambda_k a_{m+r+1}^k$ und $h\left(\sum_{k \in I} \lambda_k \bar{\delta}^k\right) \geq r + 1$. Wegen

$h\big(\sum_{k\in I_{r+1}}\lambda_k\bar\delta^k\big)\ge r+1$ gilt folglich $h\big(\sum_{k\in I\setminus I_{r+1}}\lambda_k\bar\delta^k\big)\ge r+1$. Da Q eine r-Quasibasis von G ist, folgt $p\mid\lambda_k$ für alle $k\in I\setminus I_{r+1}$. Mit $p\mid b_i^k=a_i^k-pa_{i+1}^k$ für $k\in I_{r+1}$, da Q bereinigt ist, folgt mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned} g=p^rg' &= \sum_{k\in I\setminus I_{r+1}}\underbrace{\lambda_k p^{r+m}a^k_{m+r+1}}_{=0,\ \text{da } p\mid\lambda_k}+\sum_{k\in I_{r+1}}\lambda_k p^{r+m}a^k_{m+r+1}\\ &= \sum_{k\in I_{r+1}}\lambda_k\left(a_1^k-\sum_{l=0}^{r+m-1}\underbrace{p^lb^k_{l+1}}_{=0}\right)=\sum_{k\in I_{r+1}}\lambda_k a_1^k. \end{aligned}$$

Also ist $(p^{\omega+r}G)\,[p]\subseteq\langle a_1^k\mid k\in I_{r+1}\rangle$.

Nun wird gezeigt, dass $\langle a_1^k\mid k\in I_1\rangle=\bigoplus_{k\in I_1}\langle a_1^k\rangle$. Es sei $\sum_{k\in I_1}\lambda_k a_1^k=0$ für $0\le\lambda_k<p$. Dann gilt $\lambda_ka_1^k\in B$ für alle $k\in I_1$ wegen der direkten Zerlegung $G/B=\bigoplus_{k\in I}\langle a_i^k+B\mid i\in\mathbb N\rangle$. Da jede n-Quasibasis auch eine 0-Quasibasis ist, gilt $\langle a_1^k\mid k\in I_1\rangle=(p^\omega G)\,[p]$, woraus $\lambda_ka_1^k\in B\cap p^\omega G=0$ folgt, d.h. $\langle a_1^k\mid k\in I_1\rangle=\bigoplus_{k\in I_1}\langle a_1^k\rangle$. ■

Satz 8.3. *Es sei Q eine n-Quasibasis von G für ein $n\in\mathbb N$. Dann gilt für die Ulm-Kaplansky Invarianten von G*

$$f_{\omega+r}(G)=|I_{r+1}\setminus I_{r+2}|=|\operatorname{supp}\Delta_{Q,r+1}|$$

zu jedem $0\le r<n$.

Beweis. Nach Lemma 8.2 gilt für alle $0\le r<n$

$$\big(p^{\omega+r}G\big)\,[p]/\big(p^{\omega+r+1}G\big)\,[p]=\bigoplus_{k\in I_{r+1}\setminus I_{r+2}}\left\langle a_1^k+\bigoplus_{l\in I\setminus I_{r+2}}\langle a_1^l\rangle\right\rangle$$

und somit $f_{\omega+r}(G)=|I_{r+1}\setminus I_{r+2}|=|\operatorname{supp}\Delta_{Q,r+1}|$. ■

Im folgenden Beispiel wenden wir Satz 8.3 für die in Kapitel 4 konstruierten Gruppe $\mathcal G\cong\mathcal H_{2\omega+1}$ an, um die Ulm-Kaplansky Invarianten $f_{\omega+r}(\mathcal G)$ für alle $r\in\mathbb N_0$ zu berechnen.

Beispiel 8.4. Wir betrachten die induktive Quasibasis $\mathcal Q=\{a_i^k,\mathcal B\}$ von $\mathcal G\cong\mathcal H_{2\omega+1}$ mit $\mathcal B=\bigoplus_{i,k\in\mathbb N}x_i^k$ und $\delta^k=\delta^k(\mathcal Q)=(b_i^k\mid i\in\mathbb N)$, wobei

$$b_i^k=a_i^k-pa_{i+1}^k=\begin{cases} p^2x_i^1, & \text{falls } k=0,\\ p^k(x_i^k-px_i^{k+1}), & \text{falls } k\ne 0.\end{cases}$$

Die Quasibasis $\mathcal{Q}$ ist eine 1-Quasibasis von $\mathcal{G}$ mit $\Delta_{\mathcal{Q},0} = (0, 0, ...)$ und $\Delta_{\mathcal{Q},1} = (0, \delta^1, 0, 0...)$. Nun sei ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Durch

$$c_i^k = \begin{cases} a_i^0 + p \sum_{l=1}^{n-1} a_i^l, & \text{falls } k = 0, \\ a_i^k, & \text{falls } k \neq 0, \end{cases}$$

wird nach Lemma 3.5 eine induktive Quasibasis $P = \{c_i^k, x_i^k\}$ von $\mathcal{G}$ definiert. Es gilt $\delta^k(P) = \delta^k(\mathcal{Q})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \delta^0(P) &= \delta^0 + p \sum_{l=1}^{n-1} \delta^l \\ &= \left(p^2 x_i^1 - \sum_{l=1}^{n-1} p^{l+1}(x_i^l - p x_i^{l+1}) \middle| i \in \mathbb{N} \right) \\ &= \left(p^{n+1} x_i^n \mid i \in \mathbb{N} \right) \in p^{n+1} \mathcal{B}^{\Pi}. \end{aligned}$$

Die Quasibasis P ist natürlich eine n-Quasibasis von $\mathcal{G}$ mit

$$\Delta_{P,r+1} = \Delta_{\mathcal{Q},r+1} = (0, ..., 0, \delta^{r+1}, 0, ...)$$

für alle $0 \leq r < n$. Mit dem Satz 8.3 folgt $f_{\omega+r}(\mathcal{G}) = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$.

Literatur

1. K. Benabdallah and K. Honda, *Straight bases of abelian p-groups*, Abelian Group Theory, Proceedings, Honolulu (1982/83), Lecture Notes **1006**, 556 – 561.
2. D. L. Boyer, A. Mader, *A representation for abelian groups with no elements of infinite height*, Pac. J. Math. **20** (1967), 31 – 33.
3. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups* I+II, Academic Press (1970, 1973).
4. O. Mutzbauer, E. Toubassi, *Quasibases of p-Groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **102**,77 – 95 (1999).
5. O. Mutzbauer, E. Toubassi, *A splitting criterion for a class of mixed modules*, Rocky Mountain J. Math. **24** (1994), 1533 – 1543.
6. R. J. Nunke, *Purity and subfunctors of the identity*, Topics in abelian Groups, 121 – 171 (Chicago, Illinois, 1963)

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit in allen Teilen selbstständig gefertigt und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Würzburg, den 23. Juni 2005

Andrija Vodopivec