

# Wege der Analogiebildung

Eine qualitative Studie über den Prozess der Analogiebildung  
beim Lösen von Aufgaben

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

eingereicht am

INSTITUT FÜR MATHEMATIK  
DER JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG



von Markus Ruppert

im März 2017

- Betreuer und 1. Gutachter: Prof. Dr. Hans-Georg Weigand  
Julius-Maximilians-Universität Würzburg
2. Gutachter: Prof. Dr. Thomas Weth  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
3. Gutachter: Prof. Dr. Friedhelm Käpnick  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

# Danksagungen

„Jedes Existierende ist ein Analogon alles Existierenden; daher erscheint uns das Dasein immer zu gleicher Zeit gesondert und verknüpft.“

J. W. v. Goethe in Wilhelm Meisters Wanderjahre (2015, S. 230)

Die Analogie als grundlegende Verbindung alles Seienden und damit die Analogiebildung als Voraussetzung für Erkenntnisgewinn – so beschreibt nicht nur J. W. v. Goethe den Analogiebegriff (vgl. Abschnitt 1.3). Dem Bilden von Analogien kommt demnach beim Lernen im Allgemeinen und beim Lernen von Mathematik im Speziellen eine tragende Bedeutung zu. Den (Denk-)vorgängen, die sich beim Bilden von Analogien abspielen, versucht die vorliegende Arbeit auf den Grund zu gehen.

Beginnend mit der Themenfindung und -ausgestaltung, über die empirische Untersuchung, bis hin zur Fertigstellung der Arbeit haben viele Personen einen Beitrag zu deren Entstehung geleistet. Dafür gilt ihnen mein Dank.

Die Idee für das Forschungsvorhaben entstand in einem von vielen anregenden Gesprächen mit Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Weigand zu didaktischen Themen der Mathematik. Er unterstützte die Entstehung der Arbeit von diesem Zeitpunkt an mit unermüdlichem Optimismus für deren Gelingen, mit großem Wohlwollen, viel Geduld und einem stets offenen Ohr für fachdidaktische Fragestellungen aller Art. Aus jedem gemeinsamen Gespräch und jeder Rückmeldung über die vorliegende Arbeit konnte ich so neue Ideen, neue Motivation und neue Energie schöpfen – rückblickend unentbehrliche Voraussetzungen für ihre Fertigstellung. Dafür möchte ich mich herzlich bedanken.

Meinem ehemaligen Kollegen am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg Dr. Jan F. Wörler gilt mein besonderer Dank. Die zahlreichen Gespräche zur Mathematikdidaktik, aber auch die vielen gemeinsamen Projekte am Lehrstuhl waren zum einen stets Quelle inhaltlicher Erkenntnisse, zum anderen aber auch immer große Motivation, um in der Sache weiterzuarbeiten.

Gleiches gilt für die vielen fachlichen Gespräche mit Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl und mit vielen anderen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern auf verschiedenen Treffen und Tagungen. Hervorgehoben seien dabei der Austausch mit Prof. Dr. Heinz

Schumann über Analogiebildung im Allgemeinen und im Bereich der Geometrie im Speziellen sowie die Treffen mit Dr. Matthias Zimlich mit dem ich allgemeine Fragen zur Methodik und zur Methodologie besprechen konnte.

Der Universität Würzburg danke ich für die Ermöglichung der Teilnahme an solchen Tagungen, ohne die der wissenschaftliche Austausch ungleich schwieriger gewesen wäre. Dem Bayerischen Ministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst gilt mein Dank für die Beurlaubung vom Schuldienst und die vollständige Abordnung an die Universität Würzburg. Die Auseinandersetzung mit dem Forschungsgegenstand wäre anders nicht mit der nötigen Intensität möglich gewesen.

Mein größter Dank jedoch gilt meiner Familie, die meinem Interesse an der Mathematikdidaktik im Allgemeinen und an der vorliegenden Themenstellung im Speziellen stets mit großem Verständnis gegenüberstand und mich in vielerlei Hinsicht bei der Fertigstellung der Arbeit unterstützte. Vielen lieben Dank!

Markus Ruppert

Würzburg, 03. März 2017

Informationen zum Autor:

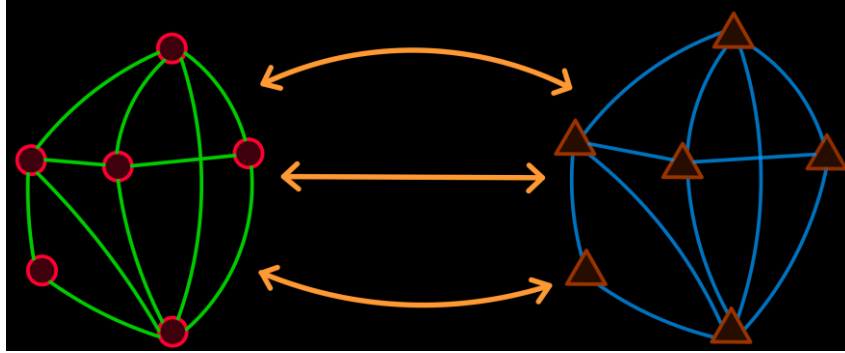
Markus Ruppert war von 2009 bis 2013 Assistent am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg und dort in der ersten Phase der Lehramtsausbildung für den Sekundarstufenbereich aller Schularten tätig. Seit 2013 ist er als Seminarlehrer und Seminarleiternam Siebold-Gymnasium Würzburg für die zweite Phase der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik verantwortlich.

# Inhalt

|  |            |
|--|------------|
| <b>EINLEITUNG</b>  | <b>9</b>   |
| <b>1 ZWEI DIMENSIONEN DER ANALOGIEBILDUNG</b>                            | <b>15</b>  |
| <b>1.1 Was ist eine Analogie?</b>  | <b>16</b>  |
| 1.1.1 Eine erste Annäherung  | 16         |
| 1.1.2 Genese und Evolution des Analogie-Begriffs                         | 26         |
| 1.1.3 Ähnlichkeit, Metapher, Vergleich, Metonymie ... und Analogie       | 31         |
| 1.1.4 Der Analogiebegriff: eine kurze Zusammenfassung                    | 34         |
| <b>1.2 Analogiebildung im Rahmen geistiger Tätigkeit</b>                 | <b>36</b>  |
| 1.2.1 Mentale Repräsentationen und mentale Modelle                       | 36         |
| 1.2.2 Analogiebildung als Strukturabbildung                              | 38         |
| 1.2.3 Der Handlungsraum – eine weitere Ebene der Analogiebildung         | 41         |
| 1.2.4 Ebenen der Analogiebildung – eine erste Dimension                  | 45         |
| <b>1.3 Epistemologische Bedeutung der Analogiebildung</b>                | <b>50</b>  |
| 1.3.1 Denken – Richtung und Weg  | 51         |
| 1.3.2 Denken – Art und Ziel  | 56         |
| 1.3.3 Reasoning – (Logisches) Schließen                                  | 58         |
| 1.3.4 Das Bilden von Analogien – eine Einordnung                         | 62         |
| <b>1.4 Analogiebildung als Prozess</b>                                   | <b>63</b>  |
| 1.4.1 Analogiebildung als Transfer                                       | 63         |
| 1.4.2 Phasen der Analogiebildung – eine zweite Dimension                 | 65         |
| <b>1.5 Analogiebildung – ein Zwei-Dimensionen-Modell</b>                 | <b>69</b>  |
| <b>2 FORSCHUNGSFRAGEN</b>  | <b>71</b>  |
| <b>3 ANALOGIEBILDUNGSPROZESSE ERFORSCHEN</b>                             | <b>73</b>  |
| <b>3.1 Methodische Überlegungen</b>                                      | <b>75</b>  |
| 3.1.1 Die Initiierung von Analogiebildungsprozessen                      | 75         |
| 3.1.2 Die Entwicklung der Aufgabensets – Fundamentale und zentrale Ideen | 87         |
| 3.1.3 Die Aufgabensequenzen – eine Einordnung                            | 93         |
| 3.1.4 Ergebnisse der ersten Vorstudie                                    | 102        |
| 3.1.5 Das Untersuchungsdesign – Ein Drei-Phasen-Design                   | 115        |
| 3.1.6 Ergebnisse der zweiten Vorstudie – Teil 1                          | 126        |
| <b>3.2 Analogiebildungsprozesse beschreiben und auswerten</b>            | <b>128</b> |
| 3.2.1 Die formal strukturierende qualitative Inhaltsanalyse              | 128        |
| 3.2.2 Anpassung der Methodologie   | 129        |
| 3.2.3 Ergebnisse der zweiten Vorstudie – Teil 2                          | 138        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4</b>   | <b>ERGEBNISSE DER HAUPTUNTERSUCHUNG</b>                                      | <b>143</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Darstellung und Aufbereitung der Ergebnisse</b>                           | <b>144</b> |
| 4.1.1      | Ein vollständig kommentiertes und kodiertes Transkript                       | 144        |
| 4.1.2      | Visualisierung I: Timelines  | 151        |
| <b>4.2</b> | <b>Die Entwicklung weiterer Analyseinstrumente</b>                           | <b>154</b> |
| 4.2.1      | Visualisierung II: Wege im Zwei-Dimensionen-Modell                           | 154        |
| 4.2.2      | Visualisierung III und Mathematisierung: Weg-Matrizen                        | 158        |
| <b>4.3</b> | <b>Gütekriterien qualitativer Forschung – Triangulation</b>                  | <b>161</b> |
| <b>4.4</b> | <b>Zusammenstellung und Interpretation der Daten</b>                         | <b>168</b> |
| 4.4.1      | Die Qualität der Transkripte und der Aufgabebearbeitungen                    | 168        |
| 4.4.2      | Rückschau: Der Kodierungsprozess   | 169        |
| 4.4.3      | Erste quantitative Auswertung der Kodierung                                  | 171        |
| 4.4.4      | Erste Auswertung der Timeline- und der ZDM-Darstellungen                     | 173        |
| 4.4.5      | Phasen der Analogiebildung in den ZDM-Darstellungen                          | 179        |
| 4.4.6      | Ebenen der Analogiebildung in den ZDM-Darstellungen                          | 187        |
| 4.4.7      | Wege der Analogiebildung – eine Clusteranalyse                               | 197        |
| <b>4.5</b> | <b>Verschiedene Wege der Analogiebildung</b>                                 | <b>213</b> |
| 4.5.1      | Analogiebildung beginnen – strukturierendes oder objektorientiertes Vorgehen | 213        |
| 4.5.2      | Phasen und Ebenen der Analogiebildung – Übergänge initiieren und begleiten   | 214        |
| <b>5</b>   | <b>ZUSAMMENFASSUNG</b>   | <b>217</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Rückblickende Reflexion des Vorgehens und der Ergebnisse</b>              | <b>217</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Vorschläge für den Unterrichtsalltag</b>                                  | <b>220</b> |
| 5.2.1      | Über Aufgabentexte sprechen  | 220        |
| 5.2.2      | Die Arbeit mit gelösten Beispielen   | 225        |
| 5.2.3      | Archimedes – Analogiebildung in historischen Texten                          | 232        |
| 5.2.4      | Analogiebildung beim räumlichen Konstruieren und Beweisen                    | 237        |
| 5.2.5      | Höhere Dimensionen mittels Analogiebildung entdecken                         | 241        |
| <b>5.3</b> | <b>Ausblick</b>  | <b>245</b> |
|            | <b>ABBILDUNGEN</b>   | <b>249</b> |
|            | <b>TABELLEN</b>  | <b>255</b> |
|            | <b>LITERATUR</b>   | <b>257</b> |
|            | <b>ANHANG</b>  | <b>273</b> |
| I          | AUFGABENSEQUENZEN  | 275        |
| II         | KATEGORIENSYSTEM   | 305        |
| III        | KODIERLEITFADEN  | 307        |







## Einleitung

Die Fähigkeit zum Bilden von Analogien ist von jeher ein wichtiges und zentrales Mittel der Erkenntnisgewinnung. Der Wissenschaftshistoriker Buckle (1885) etwa schreibt:

„The powers of man, so far as experience and analogy can guide us, are unlimited.“  
(S. 37f.)

Er stellt in seinem Werk „*History of civilisation in England*“ die Möglichkeit, durch den Rückgriff auf Erfahrungen das Wissen und die Erkenntnis (der Menschheit) zu erweitern, als ein wesentliches Charakteristikum der Analogiebildung heraus. Er misst also dem Bilden von Analogien aus kollektiv-epistemologischer Sicht eine entscheidende Bedeutung zu. Auch Betrachtungen zum allgemeinen wissenschaftlichen Fortschritt lassen keinen Zweifel an der Bedeutung von Analogiebildungen für die Entwicklung menschlicher Erkenntnis:

„Es ist in der Tat unbestritten, dass sich Analogieschlüsse in verschiedenen Bereichen geistiger Tätigkeit und insbesondere in der Geschichte von Erfindungen und in der Entwicklung der Wissenschaften als überaus fruchtbar erwiesen haben.“  
(Heinrich, 2006, S. 2)

Für den Erkenntnisgewinn im Rahmen der Mathematik stellt Laplace fest, dass „in den mathematischen Wissenschaften [...] die vorzüglichsten Mittel zur Auffindung der Wahrheit [...] Induktion und Analogie“ (1814, S. VII) sind. Auch der Mathematikdidaktiker G. Becker konstatiert, „dass mathematisches Arbeiten schlechthin in vielfältiger Weise von globalen oder lokalen Analogien durchzogen ist“ (1992, S. 5).

Doch welche Bedeutung haben Analogiebildungsprozesse für den Erkenntnisgewinn des Individuums? Welche Rolle spielen sie für den Lernprozess, der im Rahmen von Unterricht stattfindet? Wie kann das Bilden von Analogien beim Lernen mathematischer Begriffe oder beim Lösen mathematischer Probleme helfen? Und schließlich: Wie kann das Bilden von Analogien zum Gegenstand des Lernens gemacht werden?

Die Antworten auf diese Fragen in der wissenschaftshistorischen, der kognitionspsychologischen, aber auch in der mathematikdidaktischen Literatur sind zahlreich und führen in ihrer Gesamtheit zu einer Erkenntnis, die Pólya (1967) treffend formuliert:

„Analogie durchzieht unser ganzes Denken, unsere Alltagssprache und unsere trivialen Schlüsse ebenso wie künstlerische Ausdrucksweisen und höchste wissenschaftliche Leistungen.“ (S. 52)

Etwas konkreter sieht Bruder (2006) das Bilden von Analogien als grundlegend beim Lösen mathematischer Probleme an. Der Bezug zu Pólya spiegelt sich dabei im charakteristischen inneren Monolog wider, der vom Lerner gefordert wird:

„Analogieschlüsse sind in der Regel die ersten Versuche zur Bewältigung einer Problemsituation mit mathematischen Mitteln, insbesondere auch in Anwendungskontexten. Die bewusst oder unbewusst gestellte Frage:

**Kenne ich eine ähnliche Situation? Wie bin ich dabei vorgegangen?**

ist Dreh- und Angelpunkt erfolgreicher Problemlösung schlechthin.“

(S. 6, Hervorhebungen im Original)

Bezogen auf das Lernen von Mathematik beschreibt G. Becker (1992; vgl. auch Heinrich, 2006) die Bedeutung der Analogiebildung vor allem in den folgenden beiden Aspekten:

- „Beim Erlernen eines neuen Sachverhalts, insbesondere beim Auffinden der Lösung zu einem Problem legen Analogiebetrachtungen nicht selten eine Lösungsidee nahe.
- Beim Einprägen und Behalten erleichtern Analogien die Einbeziehung eines einzelnen Lerninhaltes in den vorhandenen Wissensbestand.“ (S. 8f)

Noch prägnanter formuliert hierzu Schumann: „Die allgemeine Bedeutung des Analogisierens für das Mathematiklernen besteht im effizienten Erwerb von neuem Wissen und im effizienten Behalten von schon Gelerntem“ (2007, S. 134). Auch Vásárhelyi (2006) gesteht dem Bilden von Analogien vor allem beim Begriffserwerb eine besondere Bedeutung zu und unterscheidet, bezugnehmend auf die Theorien des Begriffslernens nach Piaget (1980) und der mentalen Repräsentationen nach Bruner (1966), verschiedene Phasen, in denen Analogiebildungsprozesse das Lernen von Mathematik unterstützen können.

Die obigen Ausführungen verdeutlichen, dass über die besondere Bedeutung von Analogiebildungsprozessen beim Lernen im Allgemeinen und beim Lernen von Mathematik im Speziellen ein wissenschaftlicher Konsens auf den verschiedensten Ebenen besteht. Es liegt also nahe, von einem lernförderlichen Mathematikunterricht zu verlangen, dass er im Bewusstsein dieser Bedeutung entwickelt ist – dass er also einerseits Analogien aufzeigt und sich diese beim Lehren von Mathematik zunutze macht, dass er andererseits aber auch dem Lernenden Gelegenheiten bietet, Analogien zu erkennen und zu entwickeln, so dass die Fähigkeit zum Bilden von Analogien durch den Unterricht gezielt gefördert wird.

Vorschläge hierzu existieren bereits in zahlreichen Varianten und reichen von Trainingseinheiten, die darauf abzielen, Analogiebildungsfähigkeit durch die Arbeit mit einfachen Analogiebeispielen zu entwickeln („Analogieblätter“, Vásárhelyi, 2006), bis hin zu metakognitiven Ansätzen, die selbstreflexive Methoden vorschlagen, bei denen Lernende dazu angeleitet werden, sich zielführender Analogien bewusst zu werden und zu einem „Mathematisierungsmuster“ auszubauen (Bruder, 2006).

Welche dieser Methoden und welche Kombination davon letztlich als erfolgversprechend bezeichnet werden können, lässt sich jedoch nur dann beurteilen, wenn ausreichend Kenntnis darüber vorliegt, wie Analogiebildungsprozesse beim Lernen von Mathematik und beim Lösen mathematischer Aufgaben ablaufen, wodurch sich erfolgreiche Analogiebildungsprozesse auszeichnen, an welchen Stellen möglicherweise Schwierigkeiten bestehen und welche Ursachen für das Scheitern eines solchen Prozesses verantwortlich sind.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es deshalb, Analogiebildungsprozesse so zu beschreiben, dass mögliche Anknüpfungspunkte deutlich werden, an denen Maßnahmen zur Förderung von Analogiebildungsfähigkeit im Mathematikunterricht ansetzen sollten.

Doch warum besteht überhaupt Handlungsbedarf? Wie steht es um die Analogiebildungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler<sup>1</sup>? Sind sich die Lehrer der Bedeutung dieser Fähigkeiten für das Lernen von Mathematik bewusst? Zur Beantwortung derartiger Fragen bedarf es eingehender Untersuchungen des derzeitigen Ist-Standes. Eine Situation jedoch, in der auf einer intuitiven Ebene offensichtliche Probleme in diesem Bereich auftreten, in der sich also häufig eine Diskrepanz zwischen der Erwartung, die an die Fähigkeit der Schüler zur Analogiebildung gestellt wird, und dem was die Schüler diesbezüglich zu leisten in der Lage sind, erkennen lässt, tritt im Mathematikunterricht fortwährend auf: die Klassenarbeit.

Jede Lehrkraft wird im Rahmen einer Klassenarbeit erwarten, dass die im Unterricht vermittelten mathematischen Techniken und Strategien von ihren Schülern in einem gewissen Umfang auf neue Probleme übertragen und in neuen Situationen angewandt werden können. Gelingt dies in ausreichendem Maße, so wird sie mit dem Lern- und Verständnisfortschritt ihrer Schüler zufrieden sein und diesen (sicherlich meist zu Recht) auch auf den positiven Einfluss ihres Unterrichts beziehen.

Oft genug werden diese Erwartungen jedoch enttäuscht – der verlangte Transfer<sup>2</sup> gelingt nicht, selbst wenn es sich „nur“ um *nahen Transfer* handelt:

„Naher Transfer findet statt, wenn Lern- und Transfermaterial einander ähnlich sind, sich stark überschneiden. Transfer, der unter diesen Umständen erfolgt, dürfte sich sehr häufig einstellen und ist natürlich wenig aufregend. Lehrkräfte können sich indes aufregen, wenn ein solcher Transfer ausbleibt.“ (Klauer, 2011, S. 29)

---

<sup>1</sup> Im Folgenden wird, der besseren Lesbarkeit halber, z. B. von Schülern und von Lehrern die Rede sein. Dies schließt, wenn im Kontext nicht explizit anders dargestellt, die weibliche Form mit ein.

<sup>2</sup> Abgesehen davon, dass bislang noch nicht geklärt wurde, was unter einer Analogie bzw. dem Bilden einer Analogie zu verstehen ist, muss im Folgenden natürlich auch noch genauer expliziert werden, in welchem Zusammenhang die Begriffe der Analogiebildung und des Transfers stehen (vgl. Abschnitt 1.4.1) – für den Moment soll die Feststellung genügen, dass im Allgemeinen ein (großer) Teil des für die Lösung einer Klassenarbeit notwendigen Transfers mittels Analogiebildung geleistet werden kann.

„Warum gelingt dieser Transfer nicht? Das haben wir doch so oft geübt?“ wird sich die Lehrkraft angesichts ernüchternder Ergebnisse vielleicht fragen und darüber hinaus feststellen: „Die Lösung der Prüfungsaufgaben sind doch ganz analog zu den Aufgaben aus dem Unterricht.“ Es gibt wohl kaum eine Lehrkraft, die solche Erfahrungen noch nicht machen musste.

An dieser Stelle sind die Interpretationsmöglichkeiten vielfältig. Das Nichtzustandekommen eines erwarteten Transfers kann seine Ursache zum einen in der zu lösenden Aufgabe haben. Eventuell wird die Ähnlichkeit einer Aufgabe zu vorangegangenen Übungsaufgaben überhaupt nicht erkannt, die *Transferdistanz*<sup>3</sup> war dann möglicherweise zu groß. Ob eine Aufgabe allerdings vom einzelnen Schüler als zu schwer empfunden wird, hängt auch vom Individuum ab. Neben den Attributen der Aufgabe spielen deshalb auch individuelle Dispositionen des Lernenden, wie z. B. die kognitive Entwicklung oder das individuelle Vorwissen eine Rolle für den erfolgreichen Transfer. Der Transfer gelingt also auch dann nicht, wenn zwar die Nähe der Testaufgabe zu vorangegangenen Übungsaufgaben erkannt wird, die Lösung der Übungen aber nicht auf das Testproblem übertragen werden kann, weil z. B. der *cognitive load*<sup>4</sup>, die Belastung des Arbeitsgedächtnisses, zu groß war.<sup>5</sup>

Einer konkreten Schülerbearbeitung der Klassenarbeit kann man jedoch – für den Fall eines weniger erfolgreichen Lösungsversuchs – selten entnehmen, ob der Schüler die Ähnlichkeit<sup>6</sup> zwischen der Testaufgabe und den Aufgaben aus dem Unterricht nicht erkannt hat, oder ob er die Ähnlichkeit zwar erkannt hat, jedoch nicht in der Lage war, diese Erkenntnis für eine erfolgreiche Bearbeitung der Testaufgabe zu nutzen. Ebenso kann für den Fall einer erfolgreichen Aufgabenlösung selten nachvollzogen werden, ob der Schüler überhaupt auf vorangegangene Übungsbeispiele zurück gegriffen hat. Noch viel weniger kann aus dem schriftlichen Dokument alleine der Denkprozess rekonstruiert werden, der einer Aufgabenbearbeitung zugrunde liegt – unabhängig davon, ob es sich um eine erfolgreiche Bearbeitung oder um einen gescheiterten Lösungsversuch handelt.

Gerade dieser Denkprozess jedoch ist es, mit dessen Kenntnis sich so viele Antworten geben ließen, die am Korrekturschreibtisch des Lehrers im Verborgenen bleiben und die eine Erklärung der beschriebenen Diskrepanz zwischen Lehrererwartung und Schülerleis-

---

<sup>3</sup> Auf eine Diskussion des Begriffs der Transferdistanz, die als Metrik in einem mehrdimensionalen Untersuchungsraum ein objektives Maß für die Unterschiedlichkeit zweier Aufgabenstellungen definieren soll, wird an dieser Stelle mit dem Verweis auf Klauer (2011, S. 28ff.) verzichtet, der diese Diskussion mit Rekurs auf Goldstone (1994) und Ashby (1992) führt.

<sup>4</sup> Vgl. hierzu auch Abschnitt 3.1.1.

<sup>5</sup> Klauer (2011) formuliert hierzu ein „Passungstheorem“ mit dem es ihm – aus seiner Sicht – möglich wird, „(...) für bestimmte Niveaus subjektiver Voraussetzungen – sei es für das Lebensalter, für bestimmte Fähigkeiten, für die Intelligenz – ganz allgemein vorauszusagen, ob eine bestimmte Anforderung intellektuelle Prozesse aktivieren oder Lerntransfer auslösen kann.“ (S. 180)

<sup>6</sup> Auch der Zusammenhang der Begriffe Ähnlichkeit und Analogie muss im Zuge der vorliegenden Arbeit noch erläutert werden.

tung liefern könnten – Antworten auf Fragen wie die folgenden: Greifen Schüler beim Lösen von Testaufgaben überhaupt auf vorher gelöste Übungsbeispiele zu, versuchen sie, Analogien zu nutzen? Wenn ja, *wie* greifen Schüler auf die Übungsbeispiele zu? Lässt sich eine „Chronologie des Zugriffs“ – und damit eine Chronologie der Analogiebildung – beschreiben? Werden gemeinsame mathematische Strukturen erkannt oder stehen eher Oberflächenmerkmale im Fokus der Überlegungen? Unter welchen Umständen kommt es zur Übertragung mathematischer Handlungsstrategien? Wodurch zeichnen sich erfolgreiche Analogiebildungsprozesse aus? An welcher Stelle scheitern Analogiebildungsprozesse gegebenenfalls? Welche Rolle spielen dabei die Modi der (mentalen) Repräsentation einer Aufgabe? Die Reihe der Fragen, auf die man sich durch die Offenlegung von Denkprozessen beim Lösen mathematischer Aufgaben Antworten erhofft, ließe sich an dieser Stelle sicher mühelos fortsetzen – für die vorliegende Arbeit gilt es an dieser Stelle jedoch zunächst, die damit verbundene Hoffnung auf den Gewinn von Erkenntnissen über das Lernen von Mathematik als antreibende Kraft und Motivation darzulegen und die Formulierung konkreter Forschungsfragen auf einen späteren Zeitpunkt zu verschieben.

Ausgehend von den vorangegangenen Überlegungen lässt sich nun das zentrale Anliegen dieser Arbeit formulieren: Ziel ist es, einen Vorschlag zu unterbreiten, wie Prozesse der Analogiebildung beim Lösen mathematischer Aufgaben initiiert, beobachtet, beschrieben und interpretiert werden können, um auf dieser Grundlage Ansatzpunkte für geeignete Fördermaßnahmen zu identifizieren, bestehende Ideen zur Förderung der Analogiebildungsfähigkeit zu beurteilen und neue Ideen zu entwickeln.

Zu diesem Zweck wird zunächst ein theoretisches Konstrukt entwickelt, das die chronologische Beschreibung von Analogiebildungsprozessen auf mehreren Abstraktionsniveaus erlaubt (Kapitel 1). Dabei werden Erkenntnisse aus der Kognitionspsychologie mit Beobachtungen aus der Fachdidaktik zueinander in Beziehung gesetzt, so dass ein zweidimensionales Modell entsteht, in dem „Wege der Analogiebildung“ aufgezeigt, charakterisiert und verglichen werden können. Den besonderen Wert von Analogiebildung auf der Ebene der mathematischen Operationen (Handlungsebene) vermag dieses Modell deutlich herauszustellen.

Kernstück dieser Arbeit ist die Entwicklung eines vierstufigen Untersuchungsdesigns. Auf der Grundlage kognitionspsychologischer Erfahrungen mit beispielbasierten Lernumgebungen werden Aufgabensequenzen entwickelt, mit denen Analogiebildungsprozesse initiiert werden können. Die Anwendung verschiedener introspektiver Verfahren macht diese Prozesse schließlich beobachtbar und erschließt sie für die weitere Beschreibung und Interpretation. Die Entwicklung der Methode zur Gewinnung der Daten, und in diesem Zusammenhang die Darstellung der Ergebnisse einer ersten Vorstudie, werden in Abschnitt 3.1 dargelegt.

Auf welche Weise die gewonnenen Daten bezüglich des in Kapitel 1 entwickelten theoretischen Modells beschrieben werden können und mit welchen Mitteln eine anschließende Interpretation erfolgt, wird im Abschnitt 3.2 erläutert. Grundlage für diese Ausführungen ist die Auswertung einer zweiten Vorstudie.

In Kapitel 4 wird schließlich die Auswertung und Interpretation der konkreten Datensätze vorgenommen. Untersucht werden dabei 29 Aufgabenbearbeitungen von 14 Schülerinnen und Schülern der elften und zwölften Jahrgangsstufe bayerischer Gymnasien. Die Beschreibung der rekonstruierten Analogiebildungsprozesse im Zwei-Dimensionen-Modell und deren Vergleich erlaubt schließlich eine Klassifikation verschiedener „Wege der Analogiebildung“. Die Entwicklung verschiedener grafischer Darstellungsmöglichkeiten und Abstraktionen dieser Wege und deren simultane Verwendung ermöglichen zudem die Anwendung einfacher quantitativer Auswertungsmethoden, deren Ergebnisse die qualitativ gewonnenen Erkenntnisse zusätzlich zu stützen vermögen (vgl. Abschnitt 4.4).

Abschließend werden in Kapitel 5 Vorschläge unterbreitet, wie die Kenntnis um verschiedene „Wege der Analogiebildung“ dazu genutzt werden kann, geeignete Maßnahmen für die Förderung von Analogiebildungsfähigkeit beim Lernen von Mathematik und beim Lösen mathematischer Aufgaben zu ergreifen und zu entwickeln.

# 1 Zwei Dimensionen der Analogiebildung

In diesem Kapitel wird die theoretische Grundlage gelegt, auf der eine systematische empirische Untersuchung von Analogiebildungsprozessen möglich wird. Dazu werden zunächst, beispielgeleitet und von ihren historischen Wurzeln ausgehend (vgl. Abschnitte 1.1.1 und 1.1.2), die Begriffe Analogie und Analogiebildung und die Entwicklung ihrer Bedeutung für das menschliche Denken sowie für das Lernen im Allgemeinen und das Lernen von Mathematik im Speziellen dargelegt (Abschnitt 1.3).

Analogiebildung wird dabei zum einen als Strukturabbildung beschrieben (Gentner, 1983, 1988), einer Abbildung zwischen mentalen Repräsentationen verschiedener Objekt-Relations-Strukturen (Abschnitt 1.2.2). Zusammen mit der für das Lernen von Mathematik zentralen Bedeutung des Übertragens mathematischer Handlungsstrategien im Rahmen von Analogiebildungsprozessen (Abschnitt 1.2.3) erwächst aus diesem kognitionspsychologischen Ansatz eine für das theoretische Konstrukt der vorliegenden Arbeit verwendete erste Dimension der Analogiebildung (Abschnitt 1.2.4).

Das Bilden einer Analogie als menschliche Denkleistung wird anschließend aus philosophischer und kognitionspsychologischer Sicht verortet und zu Prozessen in Beziehung gesetzt, die beim Lernen von Mathematik und beim Lösen mathematischer Aufgaben eine wichtige Rolle spielen (Kreativität, Begriffsbildung, Problemlösen; Abschnitte 1.3.1 bis 1.3.3)

Berücksichtigt man dabei den Prozesscharakter derartiger Denkvorgänge, ergibt sich eine zweite (zeitliche) Dimension der Analogiebildung. Bezugnehmend vor allem auf die Arbeiten von Sternberg (1980), Gentner (1989), Ratterman (1997) und andere werden verschiedene Phasen konstatiert, die diese zweite Dimension beschreiben (vgl. Abschnitt 1.4.2).

Insgesamt ergibt sich demnach ein Feld von zwei Dimensionen der Analogiebildung, auf dessen Grundlage die in der empirischen Untersuchung gewonnenen Daten über Analogiebildungsprozesse beschrieben und interpretiert werden.

## 1.1 Was ist eine Analogie?

Um zu einem ersten, intuitiven und inhaltlichen Verständnis eines Begriffs zu gelangen, ist es notwendig, den „Begriff als Phänomen“ und „als Träger von Eigenschaften“ zu erkennen (vgl. z. B. Vollrath 1984, S. 209f.)<sup>7</sup>. Eine Möglichkeit dies zu erreichen ist, Beispiele anzugeben, die durch diesen Begriff beschrieben werden und die es vermögen, charakteristische Eigenschaften dieses Begriffs zu herauszustellen. Die Beispiele im nachfolgenden Abschnitt 1.1.1 sollen in diesem Sinne einen ersten Anhaltspunkt für den Analogiebegriff liefern, wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Gemeinsam ist diesen Beispielen, dass sie sich auf mathematische Inhalte beziehen, was natürlich dem Kontext der Arbeit geschuldet ist, für eine Beschreibung des Analogiebegriffs aber nicht nötig wäre. Gemeinsam ist den Beispielen außerdem – auch das sei bereits vorweg genommen – dass sie alle eine oder mehrere Facetten des Analogiebegriffs beleuchten. Diese werden in den darauf folgenden Abschnitten ausführlicher beschrieben, um schließlich zu einem integrierten Begriffsverständnis zu gelangen.

### 1.1.1 Eine erste Annäherung

#### Beispiel 1: Die Mitte

Aus „Fokus Mathematik 5“ (Brunnermeier et al., 2003, S. 54/Aufgabe 8):

Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen

- a) 6 und 18
- b) -6 und -18
- c) ...

Man könnte die Aufgabe a) auch so formulieren: „Welche Zahl hat zur 6 den gleichen Abstand wie zur 18?“ Gesucht ist also eine Zahl  $x$ , die der folgenden *Verhältnism Gleichung*<sup>8</sup> genügt:

$$18 - x = x - 6.$$

---

<sup>7</sup> Vollrath (1984) beschreibt verschiedene Stufen des Begriffslernens anhand des Flächeninhaltsbegriffs und überträgt diese Beschreibung an anderer Stelle auf das langfristige Lernen des Funktionsbegriffs (Online-Material zu Vollrath & Weigand, 2007: <http://www.projekt.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/schulalgebra/stufen.html> letzter Aufruf, 01.01.2017). Die damit angedeutete Verallgemeinerbarkeit dieser Stufen soll im Folgenden genutzt werden, um ein Verständnis für den Analogiebegriff zu entwickeln, wie es für diese Arbeit zugrunde gelegt wird.

<sup>8</sup> Der Begriff der Verhältnism Gleichung scheint für die vorliegenden Beispiele zunächst unangemessen, da es sich nicht um Quotienten handelt. Wie der Begriff „Verhältnis“ hier zu verstehen ist, wird mit dem Abschnitt 1.1.2 deutlich werden.



Aus „bsv – Mathematik 5“ (Feuerlein & Rieger, 2009, S. 45/Aufgabe 12):

Welche ganzen Zahlen sind auf der Zahlengeraden

- a) 3 Einheiten von 2 entfernt
- b) 5 Einheiten von 1 entfernt
- c) ...

Hier ist die oben noch gesuchte Mitte bereits gegeben. Gesucht sind, bei zusätzlich gegebenem Abstand, nun die beiden *äußeren Glieder* der obigen *Verhältnisgleichung*.

### Beispiel 2: Erweitern und Kürzen

Aus „Fokus Mathematik 6“ (Brunnermeier et al., 2004, S. 34/Aufgabe 9)

Übertrage ins Heft und ergänze die fehlenden Nenner bzw. Zähler:

- a)  $\frac{84}{132} = \frac{21}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{11} = \frac{42}{\blacksquare}$
- b)  $\frac{\blacksquare}{50} = \frac{3}{\blacksquare} = \frac{45}{150} = \frac{\blacksquare}{10} = \frac{420}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{100}$
- c) ...

Bei der Betrachtung dieser Beispiele wird man sagen: Die beteiligten Zahlen stehen in einem bestimmten Verhältnis zueinander und die gesuchten Zahlen sind so zu ergänzen, dass dieses Verhältnis gewahrt bleibt. Auch hier geht es also um eine *Verhältnisgleichheit*.

Noch deutlicher wird dies, wenn eine Verschiebung des zugrunde liegenden Verhältnisses Konsequenzen nach sich zieht, etwa eine ungerechte Verteilung von Gewinnen, wie in der folgenden Aufgabe aus „delta neu 6 - Mathematik für Gymnasien“ (Schätz & Eisentraut, 2009b, S. 29/Aufgabe 11)

Gregor, Laura, Lucas und Sophie verkaufen beim Schulfest Lose. Gregor verkauft 60 Lose, unter denen 24 Gewinnlose sind. In den Lostrommeln von Laura, Lucas und Sophie sind 75, 55 bzw. 65 Lose. Gib an, wie viele Gewinnlose ihre drei Lostrommeln jeweils enthalten müssen, wenn der Anteil der Gewinnlose bei allen vier Kindern gleich groß sein soll.

### Beispiel 3: Zahlenfolgen

Aus „Fokus Mathematik 5“ (Brunnermeier et al., 2003, S. 56/Aufgabe 24):

Setze die Zahlenfolgen sinngemäß fort:

- a) 0; -3; -6; ...
- b) 3; -2; -7; -12; ...
- ...
- e) 10; 9; 7; 4; 0; ...

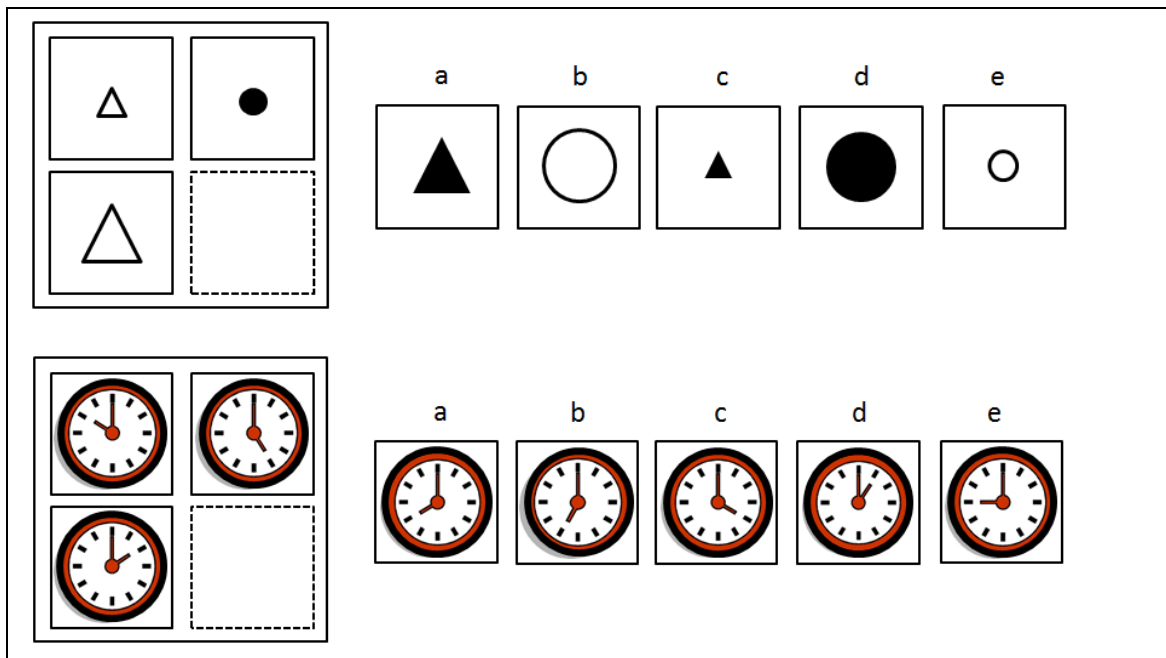
Gesucht ist in Aufgabe b) eine Zahl, die sich zur  $-12$  genauso verhält, wie die  $-12$  zur  $-7$  und wie diese wiederum zur  $-2$  und diese wiederum zur  $3$ . Es gilt also eine Folge von Zahlen zu erzeugen, bei der sich jede Zahl zu ihrem Vorgänger so verhält wie der Nachfolger zur Zahl selbst. Letztlich geht es also auch beim Fortsetzen einfacher Zahlenfolgen darum, ein *Verhältnis* zwischen den beteiligten Zahlen zu erkennen und in geeigneter Weise fortzusetzen.

Bei schwierigeren Aufgaben genügt es allerdings nicht mehr, den Zusammenhang der einzelnen Folgenglieder in einer konstanten Differenzen- oder Quotientenfolge der Folgenglieder zu suchen. Der eigentliche Zusammenhang kann erst aus der Entwicklung dieser Differenzen oder Quotienten erschlossen werden (vgl. Aufgabe e).

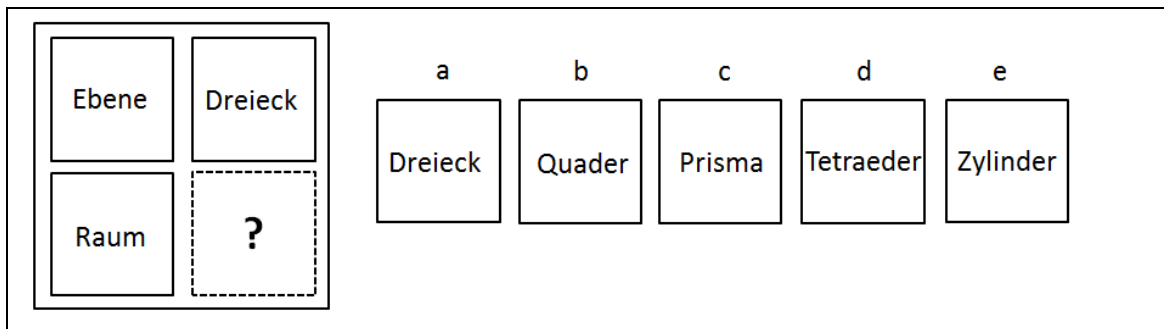
Aufgaben dieser Art werden auch häufig in Intelligenztests verwendet, z. B. im *Intelligenz-Struktur-Test I-S-T 2000 R* (vgl. Amthauer et al., 2001). Mit diesen Aufgaben wird die *numerische Intelligenz* im Rahmen des *schlussfolgernden Denkens* getestet.

Beispiel 4: Matrizen ergänzen

In Anlehnung an die in den Intelligenztests CFT, CFT 20, CFT 20-R (z. B. Weiß, 2006) und FAT (Belsler, Anger & Bargmann, 1965) zur Messung der Grundintelligenz benutzten Raven-Matrizen (Raven, 1956) sind die folgenden Aufgaben entworfen.<sup>9</sup> Zum zweiten Beispiel vgl. auch Vászrhelyi (2006, S. 22).



<sup>9</sup> Originalaufgaben aus diesen Tests dürfen nicht zitiert werden, deshalb wurden die obigen Beispiele den Aufgaben der Tests von ihrer Struktur nachempfunden und inhaltlich abgeändert. Die Abbildungen hierzu wurden, wie auch alle anderen Abbildungen zu den Beispielen dieses Abschnitts, vom Autor selbst erstellt.



Natürlich geht es auch bei diesen Beispielen darum, herauszufinden, wie sich die beteiligten Bilder bzw. Begriffe zueinander verhalten, oder besser: In welcher Relation oder in welcher Beziehung sie zueinander stehen. Das jeweils freie Feld der Matrix soll dann entsprechend dieser Relation ergänzt werden. Lässt sich jedoch im oberen Beispiel die richtige Antwort d) noch aus dem Vergleich von Merkmalsausprägungen zu den Attributen „Größe“, „Form“ und „Füllung“ eindeutig bestimmen, fällt dies in den beiden anderen Beispielen schon schwerer: Betrachtet man im mittleren Beispiel ausschließlich die Zeitdifferenzen zwischen den abgebildeten Uhren scheint e) die einzig richtige Lösung – steht jedoch die Symmetrie der beiden linken Anzeigen als Relation im Vordergrund, scheint auch b) als Lösung plausibel. Genauso hängt die Beurteilung der Lösung in der unteren Aufgabe vom Blickwinkel des Betrachters ab: Sieht man das Dreieck als 2-Simplex (also als einfachste Form eines Polygons mit nichtleerem Flächeninhalt), dann ist das Analogon im Raum das 3-Simplex, also das Tetraeder (als einfachste Form eines Polyeders mit nichtleerem Volumen). Stellt man sich den (dreidimensionalen) Raum aus der Ebene durch „Hochziehen“ in eine dritte Dimension entstanden vor, dann entstünde aus dem Dreieck in der Ebene durch „Hochziehen“ ein (dreiseitiges) Prisma im Raum – richtig wäre dann Antwort c). Und auch Antwort a) lässt sich plausibel machen: Eine Ebene kann auch lediglich in den Raum eingebettet sein. Ein Dreieck bleibt dabei ein Dreieck (vgl. Schumann 2007, S. 139). Allen drei Aufgaben ist gemein, dass die Beziehung zwischen den beteiligten Objekten zwar immer noch im Mittelpunkt der Überlegungen steht, im Gegensatz zu den vorangegangenen Aufgaben jedoch nicht mehr als reines Zahlenverhältnis aufgefasst werden muss (und kann).

#### Beispiel 5: Kreis und Kugel

Der Übergang von der Ebene in den Raum, wie er in der letzten Aufgabe des vorangegangenen Beispiels im Mittelpunkt steht, führte bereits Archimedes in seinem Werk „Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen“ zu ähnlichen Überlegungen (Abschnitt II, S. 388) bezüglich des Zusammenhangs zwischen Objekten der Ebene und des Raumes:

„... indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.“

*Archimedes, 1983, S. 388*

Abgesehen davon, dass für Archimedes auch der Kegel eine gültige Lösung der letzten Aufgabe gewesen wäre (vielleicht hatte er eine Rotation im Sinn), begnügte er sich nicht damit, über die räumlichen Entsprechungen ebener Objekte zu einer Beweisidee über das Volumen und die Oberfläche einer Kugel zu kommen, er bediente sich anschließend auch der Beweistechniken, die ihn bereits zu einer Aussage über den Flächeninhalt und den Umfang eines Kreises gebracht hatten (vgl. van der Waerden, 1973).

Beispiel 6:

Aus „Fokus Mathematik 5“ (Brunnermeier et al., 2003, S. 97 und 99, Hervorhebungen im Original):

Du erkennst, dass – ebenso, wie bei der Addition – auch bei der Multiplikation das **Kommutativgesetz** (Vertauschungsgesetz) gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

[...]

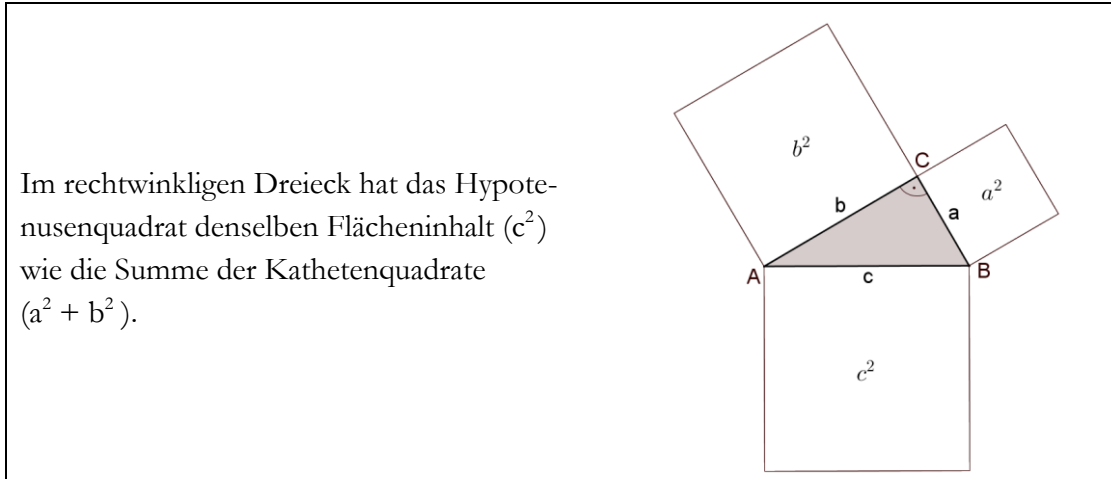
Wie bei der Addition gilt das **Assoziativgesetz der Multiplikation:**

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

In diesem Abschnitt zu den Rechenregeln bei der Multiplikation wird Bezug genommen zu Rechenregeln der Addition, die dem Schüler bereits bekannt sind. Es handelt sich dabei nicht um das Auffinden einer Entsprechung auf der Ebene mathematischer Objekte, sondern um das Erkennen einer gemeinsamen Struktur, die verschiedene Rechenarten auf einer Menge von Zahlen induzieren, mit dem Ziel, diese Gemeinsamkeiten, z. B. zum vorteilhaften Rechnen, von einer Rechenart auf die andere zu übertragen.

Beispiel 7: Der Satz des Pythagoras

Aus „Fokus Mathematik 9“ (Freytag et al., 2007, S. 38, Abbildung ähnlich):



Durch die Abbildung wird hier Bezug genommen zu einem ganz bestimmten rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$ . Dennoch weiß der geübte Leser sofort, dass dieses Dreieck nur ein Repräsentant für eine ganze Klasse von Dreiecken ist, nämlich für alle rechtwinkligen Dreiecke, und die Aussage auch für alle anderen rechtwinkligen Dreiecke gilt. Darüber hinaus wird in derartigen Formulierungen auch impliziert, dass ein Beweis der Aussage am Beispiel dieses Dreiecks für alle anderen rechtwinkligen Dreiecke in gleicher Weise durchgeführt werden kann. Typischerweise beginnt der zugehörige Beweis dann mit den Worten „Sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck ...“ – und auch hier wird wieder „o. B. d. A.“ mit einem Repräsentanten der Klasse argumentiert.

Beispiel 8:

Aus Eichler & Vogel (2011, S. 37):

Der Median ist robust gegen Ausreißer.

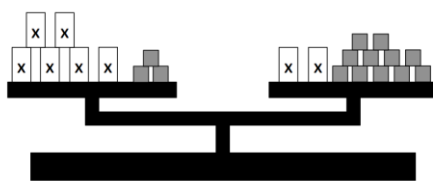
Ziel dieses in der beschreibenden Statistik üblichen Sprachgebrauchs ist es, eine anschauliche Vorstellung von den Eigenschaften des Medians als Lagemaß zu entwickeln. Um diese Anschaulichkeit zu erreichen, werden den beteiligten mathematischen Begriffen Eigenschaften aus der physisch-realen Welt zugeordnet. Es wird dabei einerseits der folgende Anthropomorphismus impliziert: Ein Datenpunkt, der weit von der Masse der Daten entfernt liegt, ist vergleichbar mit einer Person, die sich, etwa durch eine abweichende Meinung, von ihrer angestammten Gruppe entfernt – also mit einem Ausreißer (oder Abweichter). Andererseits wird dem Median, für den Fall dass solche „Ausreißer“ auftreten, eine

Eigenschaft (Robustheit) zugewiesen, die ebenfalls in dem gewählten realen Kontext interpretiert werden kann: Ein einzelner Abweichler vermag die Meinung der Gruppe nicht gleich in seine Richtung zu beeinflussen – entsprechend vermag ein einzelner Datenpunkt den Median als Lagemaß in der Regel kaum zu beeinflussen, egal wie weit der Datenpunkt von der Masse der Daten abweicht.<sup>10</sup>

### Beispiel 9: Gleichung und Gleichgewicht

Aus „Lambacher Schweizer 7“ (Schmid & Weidig, 2005, S. 101, Abbildung ähnlich):

Wenn man auf beiden Seiten der Waage jeweils zwei der unbekannt Massen wegnimmt, so bleibt die Waage im Gleichgewicht.



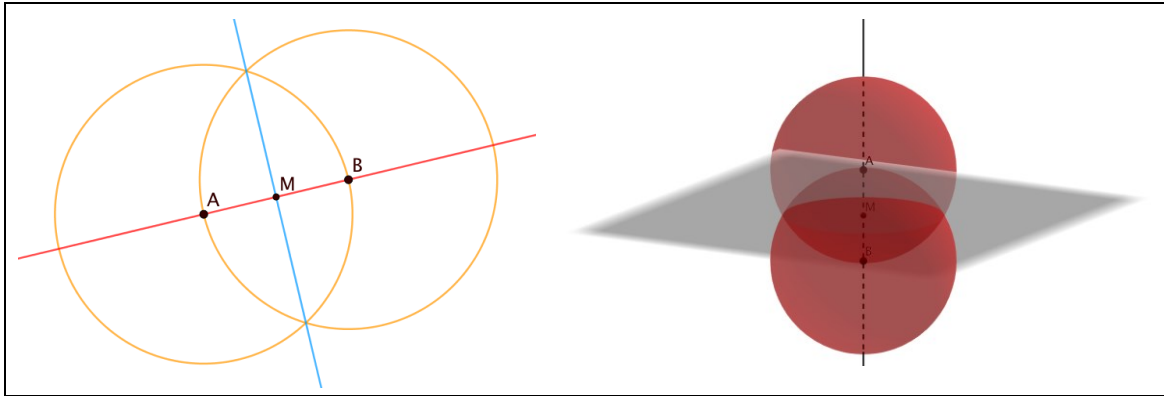
Das Wegnehmen von zwei (großen) Dosen bedeutet für die Gleichung, von den beiden Seiten jeweils den Term  $2x$  zu subtrahieren.

Es werden im gegebenen Kontext Äquivalenzumformungen der Gleichung  $6x + 3 = 2x + 11$  thematisiert. Dabei wird die Gleichung auf verschiedenen Ebenen mit der realen Welt in Beziehung gesetzt. Zunächst werden die beteiligten mathematischen Objekte, also die Termbestandteile auf beiden Seiten der Gleichung, durch reale Objekte veranschaulicht – die Unbekannte  $x$  wird zur Dose mit unbekanntem Gewicht, die Einheit 1 wird zur Gewichtseinheit. Darüber hinaus wird die Äquivalenz der beiden Terme auf den beiden Seiten der Gleichung dadurch veranschaulicht, dass sich die Waage im Gleichgewicht befindet. Es werden also auch die Relationen, die zwischen den beteiligten Objekten auf der mathematischen Ebene bestehen, auf den realen Kontext übertragen. Zuletzt werden neben den Objekten und Relationen auch mathematische Handlungen auf die reale Situation übertragen: Das Subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung wird als Wegnehmen auf beiden Seiten der Waage interpretiert. Bei den Schülern werden Grundvorstellungen aufgebaut wie: „Eine Gleichung ist wie eine Waage“ oder „Eine Gleichung ist ein Gleichgewicht“. Der Nutzen und die Grenzen dieses konkreten Modells sind bekannt und werden z. B. in Vollrath & Weigand (2007, S. 214f.) beschrieben. Für die vorliegende Arbeit von größerer Bedeutung ist allerdings die Tatsache, dass der Aufbau von Grundvorstellungen durch die Identifikation von Objekten, Relationen und Handlungen aus einem unbekanntem Bereich mit denen eines bekannten Bereichs erfolgt.

<sup>10</sup> Das arithmetische Mittel als Lagemaß besitzt diese Eigenschaft nicht. Im Gegensatz zur Bestimmung des Medians geht in die Bestimmung des arithmetischen Mittels jeder einzelne Datenpunkt ein. Das ist insbesondere dann von Nachteil, wenn ‚Ausreißer‘ zu erwarten sind – z. B. Messfehler. Diese beeinflussen das Resultat unter Umständen erheblich – das arithmetische Mittel ist also nicht ‚robust‘ gegen ‚Ausreißer‘.

Beispiel 10: Die mittelsenkrechte Ebene

Aus Schumann „Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum“ (2007, S. 136, Abbildung ähnlich):



Aus dieser Abbildung wird, ähnlich wie im Beispiel 5, deutlich, dass nicht nur Objekte der Ebene eine Entsprechung im dreidimensionalen Raum finden können, sondern z. B. auch Werkzeuge<sup>11</sup> und, damit einhergehend, mathematische Tätigkeiten – hier die Konstruktion aller Punkte, die von zwei vorgegebenen Punkten im Raum gleich weit entfernt sind. Aus diesen Tätigkeiten resultieren neue mathematische Objekte<sup>12</sup>, deren Passung im Kontext geprüft werden muss. Im vorliegenden Beispiel kann das zunächst auf der Objektebene durch den Vergleich des Konstruktionsergebnisses mit dem entsprechenden Ergebnis der ebenen Konstruktion geschehen. Allerdings liefert erst ein Beweis Gewissheit – und auch hier finden Beweisargumente für die ebene Situation eine Entsprechung im Raum, auch hier werden mathematische Tätigkeiten von einem Bereich auf den anderen übertragen.

Beispiel 11: Modellierung mit Funktionen

Nach Rasfeld (1981, S.56):

Ein Wasserbehälter wird über das Rohr  $R_1$  in der Zeit  $t_1$  und über das Rohr  $R_2$  in der Zeit  $t_2$  gefüllt. Die Befüllung des Behälters mit beiden Rohren soll in der Zeit  $t$  abgeschlossen sein. Zu verschiedenen Werten  $t_1$  kann die erforderliche Zeit  $t_2$  wie folgt errechnet werden:

$$t_2 = \frac{t \cdot t_1}{t_1 - t}$$

<sup>11</sup> Das (Geraden-)Lineal wird zum (virtuellen) (Ebenen-)„Planeal“, der (Kreis-)zirkel zum (Kugel-)zirkel.

<sup>12</sup> Hier: Die mittelsenkrechte Ebene als Ortsfläche der gesuchten Punkte.

Rasfeld (1981) schreibt hierzu:

„Sind aus der Unterrichtsarbeit die Funktionen der Form  $y = \frac{c \cdot x}{x - c}$  als gemeinsame Grundlage verschiedener Sachverhalte (Hohlspiegel, Konvexlinse, parallelgeschaltete Widerstände) hervorgegangen, so werden die Schüler denselben funktionalen Zusammenhang auch in einem Fall wie dem der Zuflußröhren [...] sehr schnell wiedererkennen“ (S. 77).

Rasfeld spricht hier eine Eigenschaft an, die man von mathematisch strukturgleichen Modellen erwartet: Erkenntnisse, die aus dem mathematischen Modell über den Zusammenhang verschiedener Größen in einer konkreten Situation gewonnen wurden, können auf die entsprechenden Größen einer anderen Situation übertragen werden, wenn die beteiligten Größen in einer strukturgleichen Abhängigkeit zueinander stehen. Die Beobachtung etwa, dass mit wachsendem Widerstand  $R_1$  in einer Parallelschaltung der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  der Widerstand  $R_2$  kleiner gewählt werden muss und schließlich gegen  $R$  strebt, wenn  $R$  konstant bleiben soll, wird im obigen Beispiel bezüglich der Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t$  gedeutet.

Was ist nun allen diesen Beispielen gemeinsam, was lässt sich im Hinblick auf das Lernen von Mathematik als ihr gemeinsamer Kern herausstellen? So unterschiedlich die Anforderungen an das mathematische Vorwissen, die mathematische Intuition und die mathematischen Fertigkeiten des Lerner in den obigen Überlegungen und Aufgaben auch sein mögen, es geht doch immer darum, (mathematische) Objekte und deren Beziehungen untereinander, sowie in manchen Fällen auch damit verknüpfte (mathematische) Handlungen von einem bereits bekannten, dem Lerner vertrauten Gegenstandsbereich auf einen weitgehend unbekanntem Bereich zu übertragen. Es geht darum, mehr oder weniger strenge strukturelle Ähnlichkeiten zu identifizieren und durch das Übertragen der Zusammenhänge aus dem bekannten Bereich Erkenntnisse in dem weniger vertrauten Bereich zu gewinnen. Holyoak & Thagard (1995) sprechen hier vom „*source analog* – a known domain that the child already understands in terms of familiar patterns“ und vom „*target analog* – a relatively unfamiliar domain that the child is trying to understand“ (S. 2, Hervorhebungen im Original) und auch English (2004a) sieht in der Analogie eine „*similarity in relational structure*“ (S. 5) zwischen einem Ausgangsbereich (*source* oder *base*) und einem Zielbereich (*target*). Diese sehr offene und allgemeine Formulierung des Analogiebegriffs als Ergebnis einer ersten inhaltlichen und intuitiven Annäherung soll im Folgenden als Grundlage für die weiteren Überlegungen herangezogen werden.

Genauer:

|   |
|---|
| Eine Analogie ist eine strukturelle Ähnlichkeit zwischen zwei Gegenstandsbereichen. |
|---|



Natürlich ist es nicht die Analogie zwischen zwei Bereichen selbst, sondern es sind der zugrunde liegende Denkprozess, das Aufdecken und Herstellen solcher Analogien zum Zweck des Erkenntnisgewinns und das Finden eines strukturellen Abgleichs („*structural alignment*“, vgl. English, 2004a, S. 5) oder einer Strukturabbildung (vgl. Gentner, 1983) zwischen *source* und *target*, die für das Lernen von Mathematik interessant sind. Diesem Aspekt soll auch die Aufmerksamkeit der vorliegenden Arbeit gelten. Allerdings muss zunächst noch geklärt werden, wie die Qualitätsunterschiede, wie die „(Spiel-)Arten“ der Analogie, die sich in den obigen Beispielen widerspiegeln, unterschieden und eingeordnet werden können.

Um also im Sinne Vollraths (1984, S. 210) zu einem integrierten und kritischen Verständnis des Analogiebegriffs zu gelangen und dieses für die dann folgende Diskussion über das Bilden von Analogien darlegen zu können, ist es einerseits notwendig, Beziehungen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu benachbarten und verwandten Begriffen aufzuzeigen. Soll der Begriff als Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtungen dienen, muss andererseits das Begriffsverständnis oder die Begriffsauffassung im wissenschaftlichen Kontext erörtert und auf Konsistenz überprüft werden. Erst dann können auch die obigen Beispiele bezüglich ihrer Bedeutung für die vorliegende Arbeit eingeordnet werden. Nicht zuletzt kann die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Begriff der Analogie, dessen Tragweite für die menschliche Erkenntnisfähigkeit von jeher so unbestritten ist, nur dann gelingen, wenn sie sich ihrer epistemologischen Wurzeln, den verschiedenen Strömungen, denen sie im Laufe ihrer Geschichte ausgesetzt war, und den damit verbundenen Bedeutungen und Bedeutungsänderungen des behandelten Begriffs bewusst ist. Davon ausgehend müssen Bedeutungslinien herausgearbeitet werden, die für die vorliegende Auseinandersetzung relevant sind.

### 1.1.2 Genese und Evolution des Analogie-Begriffs

Die Suche nach den Ursprüngen des Analogiebegriffs kann auf zweierlei Weisen erfolgen: Zunächst kann man versuchen herauszufinden, wann, von wem und in welchem Zusammenhang der Begriff tatsächlich zum ersten Mal verwendet wird. Übereinstimmend werden hier die Fragmente des Archytas von Tarent (5./4. Jh. v. u. Z.) als älteste zuverlässige Quelle genannt (vgl. z. B. Szabó, 1965, S. 201; Brandt, 1977, S. 3 und S. 51; Tiemann, 1993, S. 1). Der Begriff *ἀναλογία* (griech. Analogie) wird hier als (zahlenmäßige) Proportion (vgl. Tiemann, 1993, S. 2; Szabó, 1965, S. 199) übersetzt, während *ἀνα λόγον* (griech. analog) als „verhältnisgleich“ (vgl. Brandt, 1977, S. 53) oder als „je nach Verhältnis gleich“ (vgl. Szabó, 1965, S. 202 ff.) übersetzt wird. In seiner ersten gesicherten Wortbedeutung besitzt der Analogiebegriff also einen ausschließlich quantitativen Charakter, der vermutlich auch seine Verwendung in der gesamten Proportionenlehre der pythagoräischen Schule prägte (vgl. Brandt, 1977, S. 51) und bei Archytas auf dreigliedrige Proportionen in der Musik bezogen wird.<sup>13</sup>

Betrachtet man nun rückblickend die Beispiele aus dem Abschnitt 1.1.1, so lässt sich feststellen, dass den ersten drei Beispielen eine solch strenge Auffassung des Analogiebegriffs zugrunde liegt. Zur Lösung der angeführten Aufgaben ist jeweils ein bestimmtes Zahlenverhältnis herzustellen oder zu betrachten – die Lösung selbst ist eindeutig bestimmt.

Auf die ursprünglich rein mathematische Bedeutung der Begriffe *ἀναλογία* und *ἀνα λόγον* legt Szabó (1965) besonders großen Wert, um davon ausgehend deren semantische Entwicklung darzustellen:

„Jene Worterklärung, die ich hier für den mathematischen Terminus *ἀναλογία* vorschlage, soll vor allem als die für die archaische Zeit gültige erkannt werden. Aber es wäre verkehrt, genau denselben Wortsinn auch noch in den späteren Quellen, also z.B. in den Platon-Texten entdecken zu wollen. [...] Ebenso verhält es sich auch mit *ἀναλογον* selbst. Zweifellos hieß dieses Wort in dem späteren (und auch schon in dem klassischen) Sprachgebrauch der Gebildeten meistens dasselbe wie unser Adjektiv „analog“. [...] Aber nicht diese Fälle interessieren uns jetzt. Es geht hier vor allem um den alten (archaischen) und ursprünglichen Sinn dieses Terminus; um jenen Sinn also, dessen Spuren auch noch in vielen Euklid-Sätzen nachweisbar sind, da die betreffenden Sätze aus einer viel früheren, allerdings noch vorplatonischen Zeit entstammen.“ (S. 204)

Die mehrfache Erwähnung Platons und die damit verbundene Abgrenzung in der Verwendung des Analogiebegriffs geschieht an dieser Stelle nicht zufällig. Spätestens bei Platon

---

<sup>13</sup> Es finden sich bei Archytas die arithmetische Proportion ( $a - b = b - c$ ), die geometrische Proportion ( $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ) und die harmonische Proportion ( $\frac{a-b}{a} = \frac{b-c}{c}$ ). (vgl. hierzu Tiemann, 1993, S. 1)

nämlich erhält der Analogiebegriff auch eine qualitative, weniger exakte Komponente. Brandt (1977) schreibt hierzu:

„[...] hier erscheint die Analogie zum ersten Mal bewußt als eine zentrale Denkform und zugleich als Strukturprinzip des materiellen Seins der Welt. Hier deutet sich schon beinahe eine systematische Analogielehre an.“ (S. 92)

Er zitiert als Beleg einen Text von Platon, der die Brücke schlägt vom rein quantitativen Analogieverständnis (ausgedrückt durch Proportionen) bei Archytas hin zu einem Versuch, mittels Analogiebildung eine harmonische Beziehung zwischen den die physische Welt konstituierenden Elementen herzustellen:<sup>14</sup>

„Das schönste aller Bänder ist nun das, welches das Verbundene und sich selbst so viel wie möglich zu einem (hen) macht; das aber vermag seiner Natur nach am besten die Analogie zu bewirken. Wenn sich nämlich von irgendwelchen drei Zahlen oder Massen oder Flächen die mittlere zur letzten wie die erste zu ihr sich verhält [...] so folgt [...] daraus notwendig, daß alle eins sein werden.“ (Platon, Timaios 31c ff.; verkürztes Zitat nach Brandt, 1977, S. 92f.)

Diesen zunächst noch quantitativen Zusammenhang überträgt Platon nun jedoch auf seine Sicht über das „Weltganze“. Seine Überzeugung bezüglich einer Harmonie der Elemente führt ihn dazu, die bekannten Verhältnisse von Zahlen aus der Proportionenlehre auf das Verhältnis der Elemente zu übertragen und so die von ihm postulierte Harmonie der Elemente zu begründen:

„[...] demnach also, indem der Gott inmitten zwischen Feuer und Erde Wasser und Luft einfügte und sie zueinander soviel wie möglich in demselben Verhältnis schuf, [...] verknüpfte und gestaltete er so den sichtbaren und greifbaren Himmel. Und deswegen ward aus diesen und derartigen, [...] der Leib des Weltganzen erzeugt als durch Analogie [...] übereinstimmend.“ (Platon, Timaios 31c ff.; verkürztes Zitat nach Brandt, 1977, S. 93)

Eine Analogie wird hier also dazu verwendet, gesicherte Erkenntnisse aus einem Bereich zur Beschreibung eines anderen Bereichs heranzuziehen, auf dem noch kein gesichertes Wissen vorliegt. Die Beziehungen der beteiligten Objekte in diesem Bereich müssen dabei aber nicht mehr im streng quantitativen Sinn mit Proportionen aus dem Ausgangsbereich übereinstimmen, sondern werden nur in einem qualitativen Sinn übertragen und verwendet. Die Analogie ist hier also als strukturelle Übereinstimmung zu verstehen und nicht mehr als strenge Proportion. Hier deutet sich auch an, dass eine Analogie in diesem weiter gefassten, qualitativen Verständnis immer auch mit einer gewissen Vagheit verbunden ist –

---

<sup>14</sup> Tiemann (1993) zitiert die gleiche Textstelle Platons und formuliert dazu „Es ist PLATONS Bestreben, durch metaphysischen [sic] Betrachtungen die Welt als Einheit darzustellen. Dazu zieht er auch die Analogie heran und knüpft offensichtlich direkt an ARCHYTAS' geometrische Proportion an.“ (S. 4/5, Hervorhebungen im Original)

eine Analogie im obigen Sinne ist im Allgemeinen nicht mehr exakt und eindeutig, bedarf also einer weiteren Begründung.

Was sind die Gründe dafür? Das Herstellen einer Analogie im Sinne eines zahlenmäßigen Verhältnisses ist aufgrund der algebraischen Eigenschaften der betrachteten Zahlmengen eindeutig: Die betrachteten Zahlenpaare liegen in einer Äquivalenzklasse bezüglich einer Äquivalenzrelation.

In den Beispielen 4 und 5 des Abschnitts 1.1.1 beispielsweise werden jedoch ‚Verhältnisse‘ betrachtet, die keine reinen Zahlenverhältnisse mehr sind, sondern Verhältnisse von Objekten. Auch durch diese Verhältnisse werden Klassen definiert, denen Objektpaare aufgrund der Betrachtung bestimmter Attribute zugeordnet werden. Die oben angesprochene Vagheit ergibt sich daraus, dass sich je nach Auswahl der betrachteten Objektattribute ein anderes ‚Verhältnis‘ zwischen den Objekten ergibt, die Objektpaare also bezüglich verschiedener ‚Verhältnisse‘ verschiedenen Klassen zugeordnet werden können. Im Beispiel 4 etwa kommt es darauf an, ob die Symmetrie der Zeigerkonstellation oder die Differenz der betrachteten Uhrzeiten die Klassenzugehörigkeit bestimmt.

An der Stelle, an der deutlich wird, dass eine Analogie nicht nur als strenge Gleichheit von Proportionen eine Bedeutung für die menschliche Erkenntnis hat, setzt die zweite Möglichkeit an, die Suche nach den Ursprüngen des Analogiebegriffs aufzunehmen: Wo kommt das Bilden von Analogien (im beschriebenen verallgemeinerten Sinn) als Form des menschlichen Denkens zum ersten Mal vor? Wer nutzt (möglicherweise implizit) das Prinzip der strukturellen Verhältnisgleichheit, um Zusammenhänge in der uns umgebenden Welt und im menschlichen Denken darzustellen?

Diesen Weg geht z. B. Jünger (1963), wenn er das Lehrgedicht des Parmenides und Texte von Heraklit eingehend untersucht, Texte in denen der Analogiebegriff nicht explizit auftritt, und dazu schreibt:

„Wir sind auf der Suche nach dem Wesen der Analogie. Wir suchen es auf dem Wege, den die Geschichte des Phänomens der Analogie gegangen ist. Die Spuren des verwehten Weges [...] finden wir in den uns erhaltenen Texten, die von diesem Weg hier und da Zeugnis geben. [...] Doch vielleicht vermag das Phänomen da ursprünglicher hervorzukommen, wo sein Begriff noch nicht vorkommt?“ (S. 9)

Brandt (1977) geht in der griechischen Geschichte sogar noch weiter zurück und sieht die ersten Vorläufer bewusster Nutzung von Analogien in den Metaphern und Gleichnissen Homers, die sich teils auf der Ebene des bildlichen Vergleichens bewegen und auf gemeinsame Attribute der verglichenen Objekte beruhen<sup>15</sup>, teils aber auch Proportionen im Sinne

---

<sup>15</sup> „Denn stets hemmt' ihn die Schar der Geschlossenen: gleich wie ein Felsen, hochgetürmt und groß, an des bläulichen Meeres Gestade“ (Homer, Ilias, Gesang 15, Verse 618/619; <http://www.digbib.org>; Stand: 06.02.2017; übersetzt von J. H. Voß)

einer (qualitativen) Verhältnisgleichheit herstellen.<sup>16</sup> Gentner, Holyoak und Kokinov (2001a) schließlich sehen erste Dokumente der Analogie bereits im sumerischen Gilgamesh-Epos (ca. 2000 v. u. Z.) und in den indischen Upanishaden (ca. 700 v. u. Z.) (S. 4).

Für die vorliegende Arbeit werden die beiden hier dargelegten Spuren, das Verständnis des Analogiebegriffs als (explizit quantitative) Verhältnisgleichheit bzw. das Verständnis des Analogiebegriffs als Denkform und allgemeineres Strukturprinzip, nicht in aller Konsequenz aufgenommen und über den Lauf der Geschichte verfolgt.<sup>17</sup>

Doch auch wenn die verbindenden Linien hier nicht aufgezeigt werden können, wird man in den folgenden Ausführungen über die Behandlung des Analogiebegriffs im Rahmen kognitionspsychologischer Betrachtungen eben diese Traditionen wiederfinden. Für die vorliegende Arbeit ist dies insofern von Bedeutung, als das Bilden von Analogien im Sinne einer strengen Proportion zwar auch seinen Platz in der Kognitionspsychologie der Gegenwart gefunden hat und z. B. immer wieder als Ausgangspunkt für das Training von Analogiebildungsfähigkeiten vorgeschlagen wird (vgl. Vásárhelyi, 2006; Lee & Sriraman, 2011), hier aber eher das Bilden von Analogien als Strukturprinzip und als Denkform mit dem Ziel des Erkenntnisgewinns im Fokus steht. Damit muss zwangsläufig ein weiter gefasster Analogiebegriff als Grundlage dienen, wie er sich bei Sokrates oder Platon bereits andeutet. Es bedarf deshalb in diesem Zusammenhang keiner weiteren Argumentation, um einzusehen, dass sich die Bedeutung des Analogiebegriffs für das Lernen von Mathematik nicht in der Betrachtung von mathematischen Proportionen erschöpfen kann. Es wird sich sogar zeigen, dass es für das Lernen von Mathematik nicht genügt, ein erweitertes Begriffsverständnis zugrunde zu legen, das sich nur auf die Verallgemeinerung von Objekt-Relations-Strukturen beschränkt (vgl. Abschnitt 1.2.3). Bärthlein (1996) etwa schreibt zur Entwicklung des Analogiebegriffs in der Ideenlehre Platons:

---

<sup>16</sup> „Doch er selbst, wie ein Widder, umgeht die Scharen der Männer: Gleich dem Bock erscheint er mir, dickwolliges Vlieses [sic!], welcher die große Trift weißschimmernder Schafe durchwandelt.“ (Homer, Ilias, Gesang 3, Verse 196-198; <http://www.digbib.org>; Stand: 16.05.2013; übersetzt von J. H. Voß)

<sup>17</sup> Einige interessante Wegmarken über die Entwicklung des Analogiebegriffs findet man jedoch auch in der bis hierhin verwendeten Literatur: Eine Analyse zur Entwicklung des (quantitativen) Analogiebegriffs unter griechischen Mathematikern, sowie eine tiefgehende Interpretation der Bedeutung des Analogiebegriffs bei Platon, insbesondere bei der Darstellung seiner Ideenlehre im Rahmen der Methexistheorie, findet man bei Bärthlein (1996). Der Analogiebegriff bei Sokrates als „Vorstufe naturwissenschaftlichen Erkennens“ (S. 90) und die „Analogie des Seins“ bei Aristoteles (S. 121), sowie deren Beziehung zur platonischen Sichtweise, werden in Brandt (1977) diskutiert. Die Bedeutung des Analogiebegriffs beim Sprung von der Antike ins Mittelalter dokumentieren z. B. Tiemann (1993, S. 12f) und Bärthlein (1996, S. 178ff.). Sie sehen beide eine Verbindung von den Neuplatonikern zur Scholastik, insbesondere zu den theologischen Abhandlungen Thomas von Aquins (1225-1274). Allerdings stellt Tiemann auch fest, dass „(d)iese theologische Bedeutung [...] nun kaum noch mit der ursprünglichen, mathematischen Analogielehre in Verbindung zu bringen (ist).“ (S. 13) Unter den Philosophen der Neuzeit schließlich sieht Tiemann nur bei Immanuel Kant (1724-1804) eine nennenswerte Entwicklung des Analogiebegriffs. Auch Kant verwendet jedoch, ähnlich wie die Scholastiker, die Analogie zur Erklärung des Übersinnlichen „mit Begriffen, die sich aus der sinnlichen Erfahrung herleiten“ (Tiemann, 1993, S. 16).

„Analogie kann [...] nicht mehr Bildung von Zahlverhältnissen im Hinblick auf ein gleichbleibendes arithmetisches oder geometrisches Verhältnis sein, sondern ein Sichrichten nach der leitenden Idee des betreffenden Bereichs. Analogie ist dann zu verstehen als das Gestalten von Artefakten nach einem Vorbild, [...] die auf ein [...] Ziel gerichtete Handlung. Der bedingten mathematischen Analogie, der Mannigfaltigkeit gleicher Verhältnisse mit verschiedenen Termen entspricht nun [...] die Mannigfaltigkeit der nach einem bestimmten Vorbild gestalteten Artefakte.“ (S. 180)

Er gibt damit einen ersten Hinweis darauf, dass sich, will man die Bedeutung des Bildens von Analogien für den Erkenntnisprozess im Allgemeinen und damit auch für das Lernen von Mathematik in vollem Umfang fassen, das Verständnis des Analogiebegriffs auch auf die (*mathematische*) *Handlungsebene* erstrecken muss.

Diese Erkenntnis zeigt sich in den Beispielen 5, 10 und 11. In allen Fällen sind strukturelle Ähnlichkeiten der Ausgangspunkt für Analogieüberlegungen. Diese bleiben aber nicht auf der Ebene der Objekte und deren gegenseitigen Beziehungen stehen, sondern es werden auch mathematische Tätigkeiten wie das Konstruieren, das Beweisen oder die Modellbildung mit in die Überlegungen eingebunden und vom Ausgangsbereich (source) auf den Zielbereich (target) übertragen.

Auf diese Einsicht wird bei der Konstitution des hier zugrundeliegenden theoretischen Konstrukts noch ausführlicher zurückzukommen sein. Vorher soll jedoch der nun grob umrissene Analogiebegriff gegen andere Begriffe abgegrenzt werden, die in der Literatur teils synonym, teils in die eine oder andere Richtung implizierend verwendet werden, um anschließend eine Definition des Analogiebegriffs formulieren zu können, die der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt werden kann.

### 1.1.3 Ähnlichkeit, Metapher, Vergleich, Metonymie ... und Analogie

Vor dem Hintergrund der obigen Ausführungen ist einerseits deutlich geworden, dass der Analogiebegriff eng mit dem Begriff der Ähnlichkeit zusammenhängt. Andererseits wurde auch klar, dass es sich nicht um irgendeine, dem Alltagsverständnis entsprechende Form der Ähnlichkeit handelt – etwa eine Ähnlichkeit, die auf dem bloßen Vergleich von Attributen beruht. Pólya (1967) schreibt dazu:

„Analogie hat etwas mit ‚Ähnlichkeit‘ zu tun. Der Begriff der Ähnlichkeit im Sinne der Umgangssprache ist vag [sic!] und im Sinne der Geometrie enger als der Begriff der Analogie. Ähnliche Dinge stimmen in irgendeiner Hinsicht miteinander überein, analoge Dinge *stimmen in gewissen Beziehungen* zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander überein.“ (S. 52, Hervorhebungen im Original)

Es genügt also nicht, festzustellen, zwei Objekte seien sich aufgrund einer Übereinstimmung verschiedener Eigenschaften ähnlich, um damit eine Analogie aufgedeckt zu haben. Vielmehr treten bei einer Analogie die beteiligten Objekte oft in den Hintergrund und können einander hinsichtlich ihrer Attribute sogar völlig unähnlich sein. In Beispiel 6 handelt es sich um eine Ähnlichkeit im strukturmathematischen Sinn, bei der die Eigenschaften der Multiplikation mit den Eigenschaften der Addition verglichen und erklärt werden. Die Objektmenge, auf der diese Strukturen beschrieben werden, bleibt dabei die gleiche. Im Beispiel 7 wird der Satz des Pythagoras, also ein bestimmter Zusammenhang zwischen den Katheten und der Hypotenuse rechtwinkliger Dreiecke stellvertretend an einem bestimmten rechtwinkligen Dreieck erklärt. Auch hier weisen die beteiligten Objekte gemeinsame Eigenschaften auf – nur deshalb kann ein bestimmtes rechtwinkliges Dreieck als Repräsentant für die ganze Klasse von Figuren herangezogen werden. Ganz anders hingegen in Beispiel 11 und den damit verbundenen Ausführungen: Hier wird deutlich, dass die betrachtete Ähnlichkeit allein auf der Beziehungsstruktur zwischen den beteiligten Objekten beruht, von der Objektmenge also gänzlich unabhängig sein kann.<sup>18</sup>

Zusammenfassend geht es also in erster Linie um die Ähnlichkeit bezüglich einer relationalen Struktur. Mit Rekurs auf Gentner (1998) konkretisiert Becker (2006) hierzu:

„Bei Analogien geht es nicht um eine Ähnlichkeit zwischen Objekten, sondern vielmehr um eine Ähnlichkeit von Relationen. Dieser Aspekt steht auch in kognitionswissenschaftlichen Definitionen im Zentrum. So definiert Gentner eine Analogie als ‚a kind of similarity in which the same system of relations holds across different objects‘ (Gentner 1998: 107)“ (S. 45).

---

<sup>18</sup> Mit etwas tieferem Verständnis für algebraische Strukturen ist natürlich klar, dass additive und multiplikative Strukturen, wie sie im Beispiel 6 vorkommen, auch auf anderen Objektmengen als den im Schulunterricht üblichen Zahlmengen beschrieben werden können. Auch hier wird also die Unabhängigkeit einer Analogie von Oberflächenstrukturen (also den Objektattributen) deutlich.

Durch diesen Hinweis und mit Blick auf die Beispiele 8 und 9 rückt nun allerdings ein weiterer Begriff ins Blickfeld, der in das allmählich entstehende Begriffsnetz einzufügen ist: der Begriff der Metapher. Auch Becker (2006) greift in seinen weiteren Ausführungen diese Nähe auf und erläutert:

„Diese Definition beinhaltet bereits eine Nähe zur Metapher, die ja ebenfalls auf Ähnlichkeit beruht. Sie wird von Gentner auch in wissenschaftshistorischem Kontext verwendet. So fassen Gentner - Jeziorski (1993: 452) Analogien, wie dies schon Aristoteles tat, als Unterart von Metaphern auf, wobei sich die Entsprechungen nicht auf die involvierten Objekte beziehen, sondern auf Relationen zwischen diesen Objekten.“ (S. 44)

Presmeg (1997) sieht die Nähe der beiden Begriffe Analogie und Metapher ebenfalls, stellt jedoch zusätzlich eine Verknüpfung zum Begriff des Vergleichs (engl. simile) her. Sie konstatiert dabei aber, unter Bezugnahme auf Leino & Drakenberg (1993), eine Implikation, die den obigen Ausführungen von Becker (2006) entgegen steht:

„[...] metaphor can be considered to be an implicit form of analogy, while simile is an explicit form. Both of these forms of analogy involve a comparison of two domains of experience, but while simile would specify, ‘domain A is *like* domain B,’ metaphor would state ‘domain A *is* domain B.’“ (S. 268, Hervorhebungen im Original)

Presmeg sieht also – im Gegensatz zu Becker und Gentner – Metaphern als spezielle Analogien und nicht umgekehrt. Welche Eigenschaften allerdings als Charakteristika einer Metapher oder eines Vergleichs angesehen werden können, bleibt mit den Begriffen ‚explicit‘ und ‚implicit‘ zunächst noch sehr vage.

Betrachtet man vor diesem Hintergrund die Beispiele 8 und 9, so lassen sich diese im Sinne Presmegs ebenfalls als Analogien bezeichnen. Presmeg würde im Beispiel 9 wohl einerseits vom *Vergleich* einer Gleichung mit einer Waage sprechen – eine Gleichung ist *wie* eine Waage. Andererseits würde sie vielleicht die Gleichgewichtsmetapher als didaktisches Hilfsmittel zum Erlernen des Umgangs mit Gleichungen heranziehen – eine Gleichung *ist* ein Gleichgewicht (zwischen linker und rechter Seite). Genau wie die im Beispiel 9 gewählte Ausreißermetapher, stellt die Gleichgewichtsmetapher im Beispiel 8 eine Verbindung zwischen der abstrakten mathematischen Welt und der subjektiv erfahrbaren realen Welt her. In beiden Fällen ist es das Ziel, durch die Verwendung der Metapher eine Verknüpfung des mathematischen Sachverhalts mit einer realen Situation zu ermöglichen, die der Erfahrungswelt des Lernalters entspringt. Es kommt dabei nicht (nur) darauf an, die Attribute sich entsprechender Objekte miteinander in Einklang zu bringen – bezogen auf das Beispiel 9 hat ein Datenpunkt als solcher genommen mit dem Mitglied einer Personengruppe wenig gemeinsam. Erst wenn die Einbettung der Objekte, also deren relationale Einbindung, die Beziehungen zu anderen Objekten im jeweiligen Bereich, in die Betrachtung mit einbezogen werden, können die Metapher oder der Vergleich in vollem Umfang verstanden wer-



den. Entsprechend handelt es sich bei diesen Formen der Ähnlichkeit auch um Analogien<sup>19</sup> – als deren Charakteristikum könnte man den Zweck der Veranschaulichung heranziehen. Das spiegelt sich auch in der Einschätzung Gentners et al. (2001a) wider, die schreiben:

„People use [...] metaphors from familiar concrete domains to discuss less familiar or abstract domains.“ (S. 202)

Betrachtet man Metaphern dieser Art, so steht die Auffassung Presmegs (1997) über das Verhältnis der Begriffe Analogie und Metapher mit der obigen Begriffsdefinition in Einklang und kann für die vorliegende Arbeit zugrunde gelegt werden.<sup>20</sup> Die Unterscheidung zwischen Metapher und Vergleich als implizite bzw. explizite Analogie erscheint allerdings insofern problematisch, als dem Vergleich eine prozessartige Konnotation anhaftet (ein Vergleich ist das Herstellen einer Beziehung zwischen zwei Bereichen, während eine Analogie und damit auch eine Metapher eine bestehende Ähnlichkeit bestimmter Art beschreibt) – diese Unterscheidung soll deshalb hier nicht getroffen werden.

Mit den beiden Beispielen 6 und 7 wird noch ein weiterer Begriff gestreift, der im Zusammenhang mit Metaphern und Analogien eine Rolle spielt, der Begriff der Metonymie. Die Einbettung des Metonymie-Begriffs in das bestehende Begriffsnetz im Sinne Englishs (1997a) erlaubt, zusammen mit der Betrachtung der Unterschiede zwischen den Beispielen 6 und 7 einerseits und z. B. den Beispielen 8 bis 11 andererseits, eine weitere Nuancierung des Analogiebegriffs, die seine Struktur noch deutlicher hervortreten lässt. English (1997a) bezieht sich dabei auf die Ausführungen Lakoffs (1987), Holyoaks & Thagards (1995):

„[...] metonymy [...] involves a ‘looser connection’ than metaphor and can provide a way of extending meanings within a domain (Holyoak & Thagard, 1995). Metonymic understanding, according to Lakoff (1987) entails ‘understanding the whole in terms of some part or parts’; that is, some subcategory or member of a category is used to comprehend the category as a whole (p. 203)“ (S. 9)

---

<sup>19</sup> An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass hier nicht der Ansicht Gentners (2001a) gefolgt wird, die schreibt „Metaphors can be more structurally variable than analogies: They can be attribute matches, relation matches or both“ (S. 240). Die von ihr gewählten Beispiele, die zeigen sollen, dass eine Metapher auch eine Ähnlichkeit sein kann, die nur auf dem Vergleich von Attributen beruht, sind nämlich nicht überzeugend: Auch literarische Metaphern wie „His eyes are burning coals“ (S. 200) können nur verstanden werden, wenn auch der jeweilige Kontext im Ausgangs- und im Zielbereich mit berücksichtigt wird. In Gentners Beispiel ist die Attributübereinstimmung „leuchtend“ ohne Bedeutung, wenn nicht auch die Wirkung mit einbezogen wird, die von den glühenden Kohlen auf die Augen der betrachteten Person übertragen werden soll.

<sup>20</sup> Betrachtet man den Begriff der Metapher in der Welt der rhetorischen Mittel und Stilfiguren, so stößt man natürlich schnell auch auf literarische Metaphern, deren vordergründiges Ziel eine Hervorhebung bestimmter Attribute der verglichenen Objekte ist (z. B. Kamel = Wüstenschiff). Damit würde man solche Metaphern zunächst nicht als Analogie im obigen Sinne einordnen. Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass auch diese Metaphern nur verstanden werden können, wenn die Bedeutung der hervorzuhebenden Attribute im jeweiligen Gegenstandsbereich bekannt ist und mit übertragen werden kann – es handelt sich also auch hier um eine Ähnlichkeit, die sich nicht allein auf die Ebene der Objekteigenschaften beschränken lässt, sondern sich auch auf die strukturelle Ebene erstreckt.

In Beispiel 6 etwa gelingt die allgemeine Beschreibung von Strukturgesetzen mit Hilfe von Variablen, die Elemente einer festgelegten Zahlenmenge repräsentieren. Ähnlich in Beispiel 7: Die allgemeine Formulierung des Satzes von Pythagoras gelingt dadurch, dass ein Repräsentant der betrachteten Objektklasse herangezogen wird. English erkennt also im Verhältnis des Repräsentanten zu seiner Klasse eine weitere Variante der Analogie. Diese Art der Analogie kann auf verschiedene Weisen – in verschiedenen „Richtungen“ – gelesen und genutzt werden. Dazu erläutern Pólya (1968), sowie Reid und Knipping (2010), den Zusammenhang zwischen den Begriffen Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie(bildung), auf den später noch zurückzukommen sein wird (vgl. Abschnitt 1.3.3).

### 1.1.4 Der Analogiebegriff: eine kurze Zusammenfassung

Die Analogiedefinition aus Abschnitt 1.1.1 kann rückblickend insofern als umfassend bezeichnet werden, als sie in ihrer Allgemeinheit für die unterschiedlichen Spielarten der Analogie, wie sie bis hierhin beschrieben wurden, zutreffend ist. Allerdings vermag die Definition alleine die verborgenen Qualitäts- und Komplexitätsmerkmale des Analogiebegriffs nicht zu fassen, wie sie in der Verschiedenartigkeit der Beispiele zum Ausdruck kommen. Wenn nämlich im obigen Sinne von einer Analogie die Rede ist, so ist nicht von vornherein klar, ob auch Oberflächenmerkmale eine Rolle spielen, oder ob es sich um eine reine Strukturähnlichkeit handelt. Weiter ist nicht klar, ob es sich um eine einfache Verhältnisgleichheit (im strengen Sinne oder im Sinne Platons), oder um eine komplexere strukturelle Übereinstimmung zwischen zwei Bereichen handelt. Entsprechend findet man in der gängigen Literatur die Unterscheidung zwischen Oberflächenmerkmalen und Strukturmerkmalen zur Beschreibung der Qualität (vgl. z. B. Gentner, 1989, S. 199f.), sowie die Unterscheidung zwischen klassischen Analogien und allgemeineren Strukturähnlichkeiten zur Beschreibung der Komplexität der betrachteten Analogie (vgl. English, 2004a, S. 4f.).

Auch wenn mit den obigen Ausführungen deutlich wurde, dass klassische Analogien als spezielle Strukturähnlichkeiten aufgefasst werden können und auf die Betrachtung von Oberflächenmerkmalen zur Beschreibung des Wesens der Analogie auch verzichtet werden kann, spielen diese Unterscheidungen gerade bei der Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit und beim Lernen mittels Analogiebildung eine große Rolle.

Gholson et al. (1997, S. 152f.) und auch Gentner (1988) identifizieren die Veränderung des Fokus' weg von den Oberflächenmerkmalen hin zu den Strukturmerkmalen als wesentlichen Indikator des Lernfortschritts bei der Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeiten. Wenig verwunderlich ist vor diesem Hintergrund die Erkenntnis, dass eine zu starke Fokussierung auf Oberflächenmerkmale zu Interferenzen führen kann. Der Blick für eine Analogie bleibt dann möglicherweise verstellt (vgl. z. B. Bassok, 1997; Novick, 1988).

Weiter liegt die Annahme nahe, dass sich die Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit vom Herstellen einfacher Verhältnisgleichheiten hin zum Aufdecken komplexerer Ähnlichkeitsstrukturen entwickelt (vgl. dazu z. B. Lee und Sriraman, 2010). Lee und Sriraman schlagen deshalb – ähnlich wie z. B. Vászrhelyi (2006) – vor, klassische Analogien als Ausgangspunkt für das Argumentieren mit Analogien herzunehmen und die Entdeckung relationaler Strukturen zu nutzen, um metakognitive Aspekte herauszuarbeiten.

Es soll also zunächst an der Verwendung der eingangs formulierten Definition des Analogiebegriffs (s. Abschnitt 1.1.1) festgehalten werden. Allerdings soll dies ab sofort stets im Bewusstsein seiner eben beschriebenen Tiefenstruktur geschehen.

## 1.2 Analogiebildung im Rahmen geistiger Tätigkeit

Bisher wurde das Konzept der Analogie in der vorliegenden Arbeit eher als eine Struktureigenschaft beschrieben, die den Dingen innewohnt und als unabhängig vom Denken des Menschen betrachtet werden kann. Eine epistemologische Bedeutung gewinnen Ähnlichkeitseigenschaften dieser Art aber erst dadurch, dass sie im Rahmen geistiger Tätigkeit (vgl. Lompscher, 1975 und Abschnitt 1.2.3) betrachtet werden. Das Individuum kann eine Analogie nur auf der Grundlage der eigenen kognitiven Voraussetzungen erkennen und interpretieren. Aus epistemologischer Sicht knüpft eine Analogie immer an bereits vorhandenes Wissen (source) an (vgl. z. B. Gentner, 1983; English, 2004a), das Herstellen einer Analogie kann also nicht losgelöst von den Vorstellungen des Individuums und damit vom menschlichen Denken betrachtet werden. Um den oben beschriebenen Analogiebegriff auf die Ebene geistiger Tätigkeit zu heben, ist es zunächst notwendig, ein Konzept darzustellen, mit dem die mentalen Strukturen beschrieben werden können, die das Individuum im Zuge des eigenen Erkenntnisprozesses aufbaut. Es geht also zunächst darum, die Repräsentation des bereits vorhandenen Wissens zu modellieren.

### 1.2.1 Mentale Repräsentationen und mentale Modelle

Ausgangspunkt ist dabei die Vorstellung, dass sich Lernen und Erkenntnisgewinn durch die *Aneignung* der Umwelt im kognitiven System des Individuums vollzieht. Aneignung bedeutet dabei, dass das Individuum in der Auseinandersetzung mit seiner Umwelt eine mentale Vorstellung von darin enthaltenen Objekten, Relationen und Handlungen entwickelt. Man bezeichnet diese Vorstellungen als *mentale Repräsentationen*. Nannini (2006) formuliert dazu:

„Mentale Repräsentationen sind diejenigen *mentalen Zustände*, deren Funktion darin besteht, die *Interaktion zwischen einem Lebewesen und seiner Umwelt* zu steuern. Eine [...] mentale Repräsentation versucht, ein Modell eines Teiles der äußeren Welt oder von sich selbst [...] zu konstruieren, so daß es als ‘Landkarte’ benutzt werden kann, um sich in Übereinstimmung mit dem Erreichen der eigenen Zwecke in der Realität bewegen zu können und ihm entsprechend zu handeln [...].“ (S. 1)

Ein *mentales Modell* ist also eine Vorstellung von einer Konstellation aus Objekten, Relationen und Handlungen auf der Ebene *mentaler Repräsentationen*. Nannini spricht im Zusammenhang mit *mentalen Repräsentationen* und *mentalen Modellen* bewusst von Vorstellungen und Zuständen und nicht etwa von einem bloßen Abbild der Umwelt. Diese Begriffswahl ist der Idee geschuldet, dass sich jedes Individuum ein eigenes Bild seiner Umwelt konstruiert, das an bereits vorhandene Vorstellungen anknüpft und auf bereits bestehende Modelle aufbaut. Ein Abbild der Realität muss also immer vor dem Hintergrund des individuellen Erfahrungsschatzes gesehen werden. *Mentale Repräsentationen* und *mentale Modelle* sind deshalb in zweifacher Hinsicht relativ: Zum einen können sie sich von Individuum zu Indivi-

duum unterscheiden, zum anderen können sie sich innerhalb des Individuums entwickeln, etwa durch neue Erfahrungen. Sandkühler (2002) schreibt hierzu:

„Weil Erkenntnisse den Status von Konstruktionen haben und kontextuell und perspektivisch sind, sind sie relativ [...] und bleiben] gegenüber jeder Interpretation ‚stehen‘ für andere Interpretationen, durch andere Personen und durch ‚dieselbe‘ Person zu einer anderen Zeit.“ (S. 8)

Weiter können *mentale Repräsentationen* auf unterschiedliche Art im kognitiven System des Individuums verankert sein. Sie können

„[...] *bewusst* oder *unbewusst*, *sprachlich* oder *vorsprachlich*, *ikonisch* oder *syntaktisch* sein; sie können auch durch *symbolische* oder *subsymbolische Modelle* (d.h. *wissenschaftliche Metarepräsentationen*) rekonstruiert werden.“ (Nannini, 2006, S. 1, Hervorhebungen im Original)

Überträgt man nun, vor dem Hintergrund einer Abstraktion der Begriffe Objekt, Relation und Handlung, das Konzept der Analogie von der realen Welt auf die Ebene *mentaler Repräsentationen*, so kann Analogie als eine Ähnlichkeit zwischen *mentalen Modellen* interpretiert werden. Auf dieser Ebene kann nun auch vom Entdecken, vom Herstellen oder vom Bilden einer Analogie gesprochen werden: Ist das Individuum mit einer neuen Situation konfrontiert (z. B. mit einem neuen Begriff oder einer unbekanntem Problemstellung), so muss diese auf der Grundlage des vorhandenen Wissens verarbeitet werden. Dazu wird in einem ersten Schritt ein *mentales Modell* (Encoding, vgl. Abschnitt 1.4.2) der Situation entworfen. Das Bilden einer Analogie besteht dann darin, die Struktur und den Aufbau des *mentalen Modells* in bereits vorhandenen *mentalen Modellen* wiederzuerkennen (Inferring, vgl. Abschnitt 1.4.2). Auf diese Weise wird eine Verknüpfung zum Vorwissen hergestellt, die wiederum das neue Modell beeinflussen kann – es kommt zur Anpassung oder Weiterentwicklung des Modells. Bereits in diesem Sinne liefert Analogiebildung einen Beitrag zum Erkenntnisgewinn.

Aus der Sicht des Lehrenden ergibt sich durch diesen konstruktivistischen Ansatz eine weitreichende Konsequenz: Es kann dem Lehrenden nicht nur darum gehen, dem Lernenden ein angemessenes Bild der Umwelt zu „induzieren“. Vielmehr besteht die zentrale Aufgabe des Lehrenden darin, die vorhandenen *mentalen Repräsentationen* und *Modelle* der Lernenden möglichst genau zu kennen, um ihnen davon ausgehend jeweils Hilfestellungen für die Anpassung oder Weiterentwicklung ihrer individuellen Vorstellungen anbieten zu können. Davis & Maher (1997) folgern daraus:

„The central idea is that the teacher is concerned with the mental representations that a student is building in his or her head; the teacher tries to recognize the student’s representations as accurately as possible, and tries to help provide for that student precisely those experiences that will be the most useful for further development or revision of the mental structures that are being built. [...] In this role, the teacher is much less of a lecturer, and much more of a coach.“ (S. 94)

In dieser Rolle könne der Lehrer endlich das „age of the sage on the stage“ überwinden und zum „guide on the side“ (Davis & Maher, 1997, S. 94) werden.<sup>21</sup> Diese neue Aufgabe des Lehrers umschreiben sie anschließend noch mit einer schönen Metapher (vgl. Abschnitt 1.1.3):

„The experiences that the teacher provides are grist for the mill, but the student is the miller“ (S. 94)

In diesem Sinne muss, bezogen auf das Bilden von Analogien, vom Lehrenden also erwartet werden, dass er um die Bedeutung der Analogiebildung für das menschliche Denken im Allgemeinen und für den Wissenserwerb im Speziellen weiß. Er muss in der Lage sein, Prozesse, die beim Bilden von Analogien ablaufen, zu antizipieren und zu beurteilen, um gegebenenfalls Einfluss auf die daraus resultierenden *mentalen Modelle* nehmen zu können.

### 1.2.2 Analogiebildung als Strukturabbildung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden zwei wesentliche Punkte erläutert, die dazu beitragen, die epistemologische Bedeutung der Analogiebildung zu verdeutlichen. Zum einen ermöglicht die Verallgemeinerung des Analogiebegriffs, weg von der streng quantitativen Verhältnisgleichheit und weg von Ähnlichkeiten auf einer rein attributionalen Ebene hin zu allgemeineren strukturellen Ähnlichkeiten (vgl. Abschnitt 1.1.4), auch die Verbindung zweier Bereiche, die sich inhaltlich nicht überschneiden. Zum anderen erlaubt die Interpretation des Analogiebegriffs auf der Ebene der *mentalen Repräsentationen* und der *mentalen Modelle* eine Beschreibung des mentalen Vorgangs beim Bilden von Analogien (vgl. Abschnitt 1.2.1) und erhellt auf diese Weise einen wichtigen Prozess des individuellen Wissenszuwachses und Erkenntnisgewinns.

Einen wesentlichen Beitrag zur Beschreibung der Analogiebildung im obigen Sinne liefert Dedre Gentner mit ihrer Theorie der Strukturabbildungen (1983, Structure-Mapping Theory; vgl. auch Gentner, 1988). Gentner (1988) beschreibt die Grundidee ihrer Theorie über das Bilden von Analogien im wesentlichen mit Begriffen, die auch in der vorliegenden Arbeit bis hierhin schon Verwendung fanden:

„The basic intuition of structure-mapping theory is that an analogy is a mapping of knowledge from one domain (the base) into another (the target) which conveys that a system of relations that holds among the base objects also holds among the target objects. Thus an analogy is a way of noticing relational commonalities independently of the objects to which those relations apply.“ (S. 48; vgl. auch Gentner, 1989, S. 201)

Als Grundlage ihrer Theorie beschreibt sie (in Gentner, 1983) zunächst die Struktur mentaler Modelle (vgl. Abschnitt 1.2.1) genauer:

---

<sup>21</sup> Das Original dieses inzwischen geflügelten Wortes stammt von King (1993)

1. „Domains and situations are psychologically viewed as systems of objects, object-attributes and relations between objects.
2. Knowledge is presented here as propositional networks of nodes and predicates. The nodes represent concepts treated as wholes; the predicates applied to the nodes express propositions about the concepts.
3. [...] Attributes are predicates taking one argument, and relations are predicates taking two or more arguments [...].
4. These representations, including the distinctions between different kinds of predicates, are intended to reflect the way people construe a situation, rather than what is logically possible.“ (S. 157)

Gentner macht in den Punkten 1 bis 3 deutlich, dass sie auch die Übertragung komplexerer Wissenstrukturen mittels Analogiebildung in ihr Modell miteinbeziehen will. Mit dem Punkt 4 schließt sie sich zudem einer Sichtweise auf die Konstruktion von Wissen an, wie sie am Ende des vorigen Abschnitts bereits beschrieben wurde. Gentner unterscheidet im Punkt 3 außerdem zwischen einseitigen Prädikaten (Objekt-Attribute), einfachen zweiseitigen Prädikaten (Relationen zwischen Objekten) und zweiseitigen Prädikaten höherer Ordnung (Relationen zwischen Relationen), um damit Abbildungsregeln für einen Strukturabbildungsprozess zu formulieren:

1. „Discard attributes of objects [...]
2. Try to preserve relations between objects [...]
3. [...] To decide which relations are preserved, choose systems of relations [...]“  
(S. 158)

Die Regeln 1 und 2 machen deutlich, dass es sich tatsächlich um eine reine Strukturabbildung zwischen Ausgangs- und Zielbereich handelt und der Inhalt (die Attribute der beteiligten Objekte) für deren Beschreibung zunächst keine Rolle spielt.<sup>22</sup> Gentner (1983) schreibt diesbezüglich:

„[...] this discussion has been purely structural; the distinctions invoked rely only on the syntax of the knowledge representation, not on the content.“ (S. 158)

Mit der Regel 3 formuliert Gentner ein Auswahlkriterium für Objektrelationen, die unter der Analogieabbildung bevorzugt werden. Sie erklärt diese Auswahlregel mit der Bedeutung von Prädikaten höherer Ordnung beim Bilden einer Analogie (systematicity principle). Es werden bevorzugt solche Relationen abgebildet, die wiederum zueinander in Beziehung stehen:

„A predicate that belongs to a mappable system of mutually interconnecting relationships is more likely to be imported into the target than is an isolated predicate.“ (S. 163)

---

<sup>22</sup> Die Erkenntnis, dass inhaltliche Übereinstimmung zwischen zwei Bereichen dem Lerner beim Erkennen von Analogien helfen kann (vgl. Gentner, 1988), bleibt davon jedoch unberührt.

Sie verwirft damit die Auffassung, dass es für eine Verbindung zwischen zwei Bereichen im Rahmen einer Analogiebildung einzig auf den Grad an struktureller Übereinstimmung zwischen den zugehörigen mentalen Modellen ankommt:

„A theory based on the mere relative numbers of shared and non-shared predicates cannot provide an adequate account of analogy.“ (S. 156)

Für die vorliegende Arbeit ist der Ansatz Gentners in zweierlei Hinsicht von Interesse. Zum einen kann bei der Analyse von Analogiebildungsprozessen im empirischen Teil der Arbeit das Auswahlkriterium (systematicity principle) als Erklärungsmodell für Entscheidungen im Rahmen des Abbildungsprozesses dienen. Zum anderen erlaubt die konstruktivistische Grundvorstellung, auf deren Basis Gentner ihre Structure-Mapping-Theorie entwickelt hat, eine bessere Einordnung von Analogiebildungsprozessen hinsichtlich ihrer epistemologischen Bedeutung.

Mit den bisherigen Ausführungen lässt sich vor allem die Bedeutung von Analogiebildungsprozessen im Rahmen der Begriffsbildung gut begründen, wie dies auch von Vászárhelyi (2006) mit Rekurs auf Bruner (1966) und Piaget (1980) angedeutet wird:<sup>23</sup>

- „*Vernetzung* von enaktiven, ikonischen und/oder symbolischen (sprachlichen) Repräsentationen (Bruner 1966, [...]).
- *Extensive Systemerweiterung* – [...] Bekannte Elemente werden zu (neuen) Strukturen zusammengefügt (Assimilation nach Piaget 1980, [...]).
- *Intensive Systemerweiterung* – Umstrukturieren des Systems durch (teilweises) Auflösen von (bekannten) Strukturen, sodass sich (neue) Strukturen ergeben. (Akkommodation nach Piaget 1980, [...]).
- *Gegensatzbildung* zu bekannten Strukturen, um neue Strukturen zu bilden bzw. zu erfassen. [...]“ (S. 21, Hervorhebungen im Original)

Im folgenden Abschnitt wird das Analogiekonzept noch um die Ebene der Operationen und Handlungen erweitert, so dass die Bedeutung des Bildens von Analogien auch z. B. auf Problemlöseprozesse übertragen werden kann.

---

<sup>23</sup> Vászárhelyi spricht in diesem Zusammenhang von Systemanalogien und verweist dabei auf Gentner (1989). Gentner selbst spricht zwar von „systems of relations“ (S. 201), meint damit aber die Struktur aus Objekten und Relationen verschiedener Ordnung, wie sie im Abschnitt 1.2.2 beschrieben werden. Gentner (1989) beschreibt mit diesem Ausdruck wiederum ihr „principle of systematicity“ (vgl. oben).



### 1.2.3 Der Handlungsraum – eine weitere Ebene der Analogiebildung

Aus den obigen Beispielen und deren Analyse wird deutlich, dass durch eine Analogie eine Ähnlichkeit zwischen zwei Gegenstandsbereichen beschrieben wird, die sich zunächst durch Entsprechungen zwischen den beteiligten Objekten und vor allem zwischen deren gegenseitigen Beziehungen auszeichnet. Der Wert einer Analogie im Rahmen mathematischer Tätigkeit liegt aber weniger im Aufdecken struktureller Ähnlichkeiten selbst, als vielmehr in den Handlungsmöglichkeiten, die sich durch eine solche Entdeckung eröffnen.

English (1997a) schreibt hierzu:

„[...] there is more to analogical transfer [...] than the mapping of one structure to the other. [...] Simply noticing the relational commonalities between source and target is insufficient, however, for analogical transfer. [...] because transfer of the solution from the source to target problem is not a natural consequence of a successful [structure] mapping.“ (S. 200)

An dieser Stelle kann wieder auf das Modell der mentalen Repräsentationen zurückgegriffen werden. Ebenso wie deklaratives Wissen wird auch prozedurales Wissen im Zuge des Weltaneignungsprozesses in Form von mentalen Repräsentationen gespeichert. Lässt man eine Verallgemeinerung des Analogiebegriffs auf mentale Modelle zu, die auch prozedurale Wissenskomponenten beinhalten, kann auch die Übertragung von prozeduralem Wissen (also einem Wissen von Handlungen und Operationen) im Zuge eines Analogiebildungsprozesses erklärt werden. Bevor jedoch das Analogiekonzept auf der prozeduralen Ebene erweitert wird, soll der hier verwendete Sprachgebrauch im Zusammenhang mit den Begriffen Handlung und Operation im Rahmen geistiger Tätigkeit dargestellt werden.

#### Tätigkeitstheorie

An dieser Stelle, wie auch im Folgenden, werden die Begriffe *mathematische Tätigkeit*, *mathematische Handlung* und *mathematische Operation* den Ansätzen der Tätigkeitstheorie folgend verwendet, wie sie von Vygotski und Leontiev in der kulturhistorischen Schule grundgelegt und von Lompscher, Kossakowski und Giest im Bereich der Lerntätigkeit weiterentwickelt wurden (vgl. z. B. Lompscher, 1975; Kossakowski & Lompscher, 1977 und Giest & Lompscher, 2006). Eine Tätigkeit ist dabei eine „spezifisch menschliche Form der Aktivität“ (Giest & Lompscher, 2006, S. 41), die sich durch Bewusstheit, Strukturiertheit, Kontextuiertheit und Entwicklung (vgl. Giest & Lompscher, S. 34) auszeichnet. Findet diese Aktivität auf der mentalen Ebene statt, spricht man auch von *geistiger Tätigkeit* (vgl. Böhm, 2013, S. 72f.). In diesem Sinne sind z. B. das mathematische Modellieren und das (mathematische) Problemlösen (vgl. Bruder, Lengnik, Prediger, 2003) geistige Tätigkeiten.<sup>24</sup> Die

---

<sup>24</sup> Die Ausführungen Böhms und Bruders können dabei in ähnlicher Weise auch z. B. auf das mathematische Beweisen oder das Konstruieren übertragen werden.

(gedanklichen) Schritte, die zum Ausführen einer (geistigen) Tätigkeit notwendig sind, werden als Handlungen bezeichnet. Typische Handlungen im Rahmen einer Problemlösetätigkeit sind z. B. das Anfertigen einer Skizze, das Aufstellen und Lösen einer Gleichung oder das Betrachten von Spezialfällen. Bei der Ausführung dieser Handlungen finden geistige Operationen statt, die „als automatisierte und verkürzte Handlungen“ (Böhm, 2013, S. 75) interpretiert werden können, als Aktivitäten also, die im Laufe der Lerntätigkeit internalisiert wurden und nun unbewusst ablaufen können. Dazu zählen beispielsweise die Anwendung der Grundrechenarten, die Vereinfachung von Termen mit Hilfe der grundlegenden Strukturgesetze oder das Zeichnen einer Geraden im Rahmen einer Konstruktion.

Die Fragen, die sich bei der Beschreibung mathematischer Tätigkeit demnach stellen, sind z. B. Fragen nach den Prozessen, die beim Finden eines mathematischen Modells, eines Beweises oder allgemein der Lösung eines Problems ablaufen. Entsprechend können sich die Antworten auf diese Fragen nicht auf die Beschreibung des betrachteten Gegenstandsbereichs beschränken, sondern müssen auch Handlungsanweisungen liefern. Fordert Pólya (1967) den Lerner auf, sich selbst zu fragen „Kennst du eine verwandte Aufgabe?“ (S. 23), dann zielt diese Frage nur vordergründig darauf ab, Objekt-Relations-Strukturen einer bereits gelösten Problemstellung (source) wiederzuerkennen und auf das neue Problem zu übertragen (target). Viel wichtiger ist dabei, sich an den (mathematischen) Handlungsspielraum zu erinnern, der durch die Problemstellung im source-Bereich festgelegt war, und insbesondere an die (mathematischen) Handlungen und Operationen, die zur Lösung des Problems beigetragen haben. Mit der Entdeckung einer Analogie auf der Strukturebene ist also die Hoffnung verbunden, dass auch das damit verknüpfte prozedurale Wissen, also mentale Repräsentationen auf der Handlungsebene, in Erinnerung gerufen und übertragen werden kann. Es werden Entsprechungen erkannt, mit deren Hilfe letztlich Handlungen und Operationen im Zielbereich identifiziert werden können, die zur Lösung des neuen Problems führen.

Die herausragende Bedeutung der Handlungsebene für den Analogiebegriff wurde bereits in Abschnitt 1.1.2 im Zusammenhang mit den Aussagen Platons angedeutet und lässt sich nun noch einmal besonders gut an den Beispielen 5 und 11 illustrieren.

Der Kontext, in dem Archimedes die Erläuterungen aus Beispiel 5 liefert, ist die Frage nach dem Volumen und der Oberfläche der Kugel. Es gilt also eine Problemstellung im Raum zu lösen. Im Vorfeld dazu hat Archimedes bereits die bekannten Formeln zum Umfang und zum Flächeninhalt des Kreises bewiesen<sup>25</sup> (source problem) – die dabei erkannten Zusammenhänge in der Ebene versucht er sich nun für das neue Problem (target problem) zunutze zu machen. Er beschreibt dazu sehr detailliert die Abhängigkeiten zwischen bestimmten ebenen Figuren und die Analogie, die er diesbezüglich in der räumlichen Situati-

---

<sup>25</sup> Wengleich Archimedes dazu natürlich nicht die uns heute bekannte Formelsprache benutzt.

on erkennen kann. Die Analogie bezieht sich dabei zunächst auf Objekte (Kreis  $\rightarrow$  Kugel, Dreieck  $\rightarrow$  Kegel) und auf Relationen zwischen diesen Objekten (Umfang des Kreises als Grundlinie des Dreiecks  $\rightarrow$  Oberfläche der Kugel als Grundfläche des Kegels; Radius des Kreises als Höhe des Dreiecks  $\rightarrow$  Radius der Kugel als Höhe des Kegels). Die strukturelle Ähnlichkeit zwischen den Konstellationen in der Ebene und im Raum führt Archimedes schließlich zu einer Hypothese über die Volumengleichheit der beiden räumlichen Körper. Er begründet seine Annahme mit der Flächengleichheit der beiden ebenen Figuren – diese hat er bereits im Vorfeld bewiesen und dazu benutzt, das ebene Problem zu lösen. An dieser Stelle wird deutlich, dass Archimedes nicht nur die strukturelle Ähnlichkeit der beiden geometrischen Konstellationen im Blick hatte. Er hat nicht nur nach Entsprechungen auf der Objekt- und der Relationsebene gesucht, vielmehr war es sein eigentliches Ziel, auch auf der Handlungsebene des Beweisens geeignete Entsprechungen zu finden. Dies wird auch im weiteren Verlauf des Textes deutlich, in dem Archimedes seine Hypothese über den räumlichen Zusammenhang dadurch beweist, dass er immer wieder auf Beweisschritte des ebenen Problems zurückgreift (vgl. van der Waerden, 1973).<sup>26</sup>

Im Beispiel 11 geht es im Wesentlichen um die mathematische Modellierung eines realen Sachverhalts. Rasfeld (1981) stellt in diesem Zusammenhang verschiedene mathematische Gleichungen vor, die als funktionale Abhängigkeiten gedeutet werden und mit denen sich jeweils verschiedene reale Phänomene modellieren lassen. Rasfeld spricht dabei von *analogen Konkretisierungen* und sieht deren didaktischen Wert hauptsächlich darin, anhand der realen Phänomene Eigenschaften der betrachteten Funktionen im Sachkontext erkunden zu können. Vor dem Hintergrund des Modellierens tritt allerdings noch ein ganz anderer Aspekt in den Vordergrund: Werden auf der realen Ebene strukturelle Analogien zu einem

---

<sup>26</sup> An dieser Stelle besonders bemerkenswert ist, dass sich Archimedes des Beweisbedürfnisses seiner über die Analogiebetrachtung gewonnenen Erkenntnis bewusst war. Archimedes wusste also um die Vagheit des analogen Schlusses, wie sie auch im Abschnitt 1.1.1 bereits angedeutet wurde, und damit um den Unterschied zwischen deduktivem und analogem Schließen, wie er im Abschnitt 1.3.3 noch näher erläutert wird. Für das analoge Schließen hat Heinrich (2006) dies treffend formuliert: „Aber ein Analogieschluss (der nicht als Isomorphieschließen verstanden wird) beweist nichts“.

Zwei prominente Beispiele dafür, dass eine auf den ersten Blick naheliegende Analogie nicht zutrifft, ergeben sich bei der Übertragung von Eigenschaften des Dreiecks auf den Tetraeder. So wird der Satz „Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt“ im Raum zu: „Die vier Höhen eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt.“ Dieser Satz ist allerdings falsch und gilt nur in Tetraedern, die bestimmte Voraussetzungen erfüllen (vgl. dazu Schumann, 2006, S. 93 ff.). Genauso wird der Satz „Jedes Dreieck hat einen Inkreis“ aus der ebenen Geometrie im Raum zu: „Jeder Tetraeder hat eine Inkugel.“ Während eine entsprechende Analogie für den Umkreis keine Probleme bereitet, kommt es hier darauf an, was man unter einer Inkugel verstehen möchte: Ist die Inkugel des Tetraeders die Kugel, die jede Kante des Tetraeders berührt, dann ist der obige Satz wiederum falsch – nur bestimmte Tetraeder besitzen dann eine Inkugel (vgl. Schumann, 2006, S. 88 ff.). Versteht man unter der Inkugel allerdings die Kugel, die jede Seitenfläche des Tetraeders (von innen) berührt, dann ist die Aussage richtig und die Analogie lässt sich (ebenso wie für den Umkreis und wie im Beispiel 10 bereits angedeutet) sogar auf den Beweis des Sachverhalts und die zugehörige Mittelpunktskonstruktion ausweiten. Hier kommt dann die Analogie auf der Handlungsebene in vollem Umfang zum Tragen.

Phänomenbereich erkannt, zu dem bereits ein mathematisches Modell vorliegt (z. B. die Quotientengleichheit zweier Größen), so besteht die berechtigte Hoffnung, dass nicht nur die beteiligten Objekte (hier: Größen) und deren Zusammenhänge eine Entsprechung im vorhandenen Modell finden, sondern auch wesentliche Schritte der Modellbildung selbst „analisiert“<sup>27</sup> werden können: z. B. das Einführen geeigneter Variablen, das Aufstellen einer Funktionsgleichung, die grafische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs, die Identifikation einer Invarianten oder die Isolation von einflussnehmenden Parametern. All dies sind Entsprechungen auf der mathematischen Handlungsebene, deren Ausnutzung dazu führt, dass nicht jeder unbekannte reale Zusammenhang von Grund auf neu mathematisch modelliert werden muss.

Die Notwendigkeit, den Begriff der Analogiebildung über das Erkennen von Analogien auf der Objekt- und Relationsebene hinaus auf mathematische Tätigkeiten auszuweiten, sieht auch Aßmus (2013). Mit Rekurs auf Hesse (1991) unterscheidet sie (ähnlich wie English, 2004a) zunächst zwischen *analogem Zuordnen*, *analogem Verstehen* und *analogem Problemlösen*. Später räumt sie jedoch ein, dass analoges Zuordnen, wie auch vorliegend beschrieben, zwingend als Teilprozess des analogen Verstehens und des Analogen Problemlösens vorkommen muss. Sie spricht in diesem Zusammenhang von *Analogienutzung*:

„Während beim analogen Verstehen Zusammenhänge, Wirkmechanismen u.ä. bekannter Bereiche genutzt werden, um neue Inhalte zu erschließen, geht es beim *analogem Problemlösen* um das *Lösen* neuer Problemstellungen durch Rückgriff auf eine oder mehrere bekannte ähnliche Problemstellungen (Hesse 1991). Dies geschieht nicht so sehr durch das Übertragen von Zusammenhängen, sondern vor allem durch Nutzung von bekannten (Teil-)Lösungen und Lösungsverfahren. Diese Aspekte analogen Zuordnens sind somit Bestandteil aller Kategorien, sodass analoges Zuordnen als Teilprozess analogen Verstehens und analogen Problemlösens angesehen werden kann. Analoges Zuordnen stellt dabei die Voraussetzung für die Nutzung von Analogien dar, wie sie beim analogen Verstehen und analogen Problemlösen zum Einsatz kommen kann.“

(Aßmus, 2013, S. 33, Hervorhebungen im Original)

Trotzdem sieht Aßmus keine Möglichkeit, zwischen den beiden Begriffen des analogen Verstehens und der Analogienutzung eine trennscharfe Unterscheidung vorzunehmen (Aßmus, 2013, S. 34) – sie erkennt Überschneidungen vor allem in den Bereichen des Argumentierens mit Analogien und des schöpferischen Denkens (vgl. Holyoak & Thagard, 1989 bzw. Klix, 1992). Auch in der Chronologie des Prozesses seien die beiden Begriffe nicht trennscharf:

„Die Trennung und das damit implizierte zeitliche „Nacheinander“ von Analogieerkennung und Analogienutzung ist hier zunächst theoretischer Natur und muss sich empirisch nicht zwangsläufig widerspiegeln. So ist anzunehmen, dass die beiden Prozesse mitunter

---

<sup>27</sup> Der Sprachgebrauch des „Analysierens“ wird hier von Schumann (2007) übernommen.

ineinandergreifen und gegebenenfalls auch Analogieerkennungen, die zunächst auf flüchtigen Vermutungen basieren, erst durch die Analogienutzung verifiziert und damit vervollständigt werden.“ (Alßmus & Förster, 2015, S. 5)

Ein deskriptives Modell von Analogiebildungsprozessen, das im vorliegenden Sinne mathematische Tätigkeit integriert, bietet nun die Möglichkeit, die obige Unschärfe zu umgehen und beide Begriffe in einem Modell zu beschreiben.

#### 1.2.4 Ebenen der Analogiebildung – eine erste Dimension

Bezieht man also in die Beschreibung einer Analogie neben dem betrachteten Gegenstandsbereich auch den damit verknüpften Handlungsbereich mit ein, wird unmittelbar einsichtig, warum das Herstellen einer Analogie ein mächtiges Werkzeug für den Erkenntnisgewinn im Allgemeinen und beim Lernen von Mathematik im Speziellen ist: Die Bedeutung von Analogien bleibt dann nicht nur auf die Begriffsbildung beschränkt, sondern erstreckt sich durch die Übertragung von Handlungen und Operationen auch auf das Erlernen zentraler Tätigkeiten. Bezogen auf die Mathematik sind hier insbesondere die Tätigkeitsbereiche des Beweisens, des Problemlösens, des Modellierens und des Konstruierens zu nennen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine Analogie eine Ähnlichkeit beschreibt, die sich auf verschiedenen Ebenen manifestiert:

1. Objektebene
2. Relationsebene
3. Handlungsebene

Das Bilden einer Analogie spielt sich also auf genau diesen Ebenen ab. Objekte, deren Ähnlichkeit aufgrund gemeinsamer Attribute festgestellt wird, können genauso zum Aufdecken einer Analogie beitragen wie das Erkennen gemeinsamer Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten (vgl. Gentner, 1988) oder ähnlicher Mathematisierungsmuster (vgl. Bruder, 2006). Für das theoretische Konstrukt der vorliegenden Arbeit bilden diese Ebenen eine erste Dimension der Analogiebildung.

Eine schematische Darstellung dieses Zusammenhangs zeigt die Abb. 1.

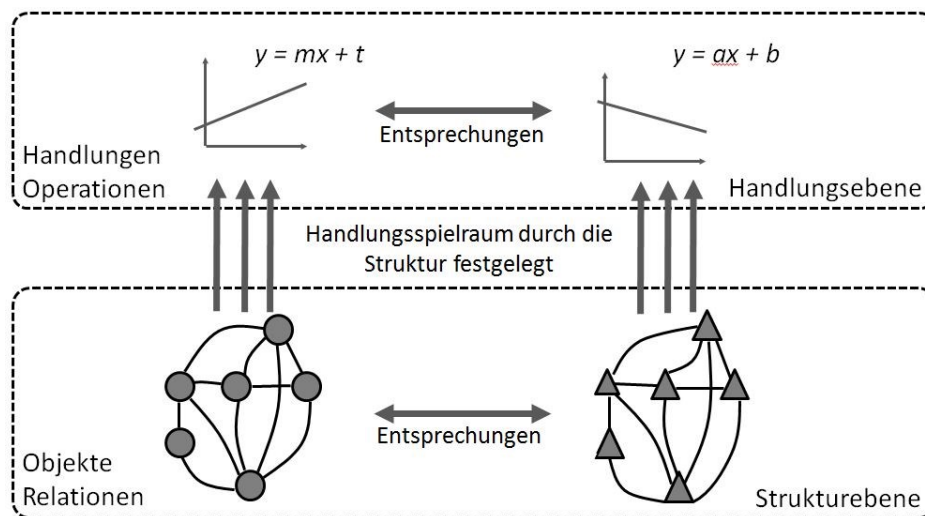


Abb. 1: Die Struktur von Ausgangs- und Zielbereich wird durch die Objekte und deren gegenseitige Beziehungen bestimmt und legt die Möglichkeiten auf der Handlungsebene fest.

Anhand der folgenden beiden Beispiele wird diese Darstellung des Analogiebegriffs noch etwas konkreter veranschaulicht.

Beispiel 1: Invariante Größen

Die beiden folgenden Aufgaben sind Teil der Aufgabensequenz 6 (vgl. Abschnitt 3.1.3), die auch für die empirische Untersuchung herangezogen wurde.

**Aufgabe 1 – Ein Gärtner und sein Lehrling**

Ein Gärtner benötigt zum Mähen eines Sportplatzes 2 h, sein Lehrling benötigt 3 h. Wie lange brauchen die beiden, wenn sie den Sportplatz gemeinsam mähen?

**Aufgabe 2 – Weihnachtsgeschenke**

Lisa möchte Weihnachtsgeschenke kaufen. Eigentlich will sie jedem Mädchen ihrer Klasse eine Kleinigkeit schenken. Sie kann für ihr Geld entweder 15 der schönen Teelichter kaufen oder 10 von den kleinen Weihnachtsengeln. Lisa entscheidet sich schließlich doch dafür, nur ihren besten Freundinnen etwas zu schenken.

Wie viele Freundinnen kann sie beschenken, wenn jede ein Teelicht und einen Weihnachtsengel bekommen soll?

In der Abb. 2 werden zunächst die Entsprechungen auf der Objekt- und der Relationsebene (also auf der Strukturebene) deutlich:

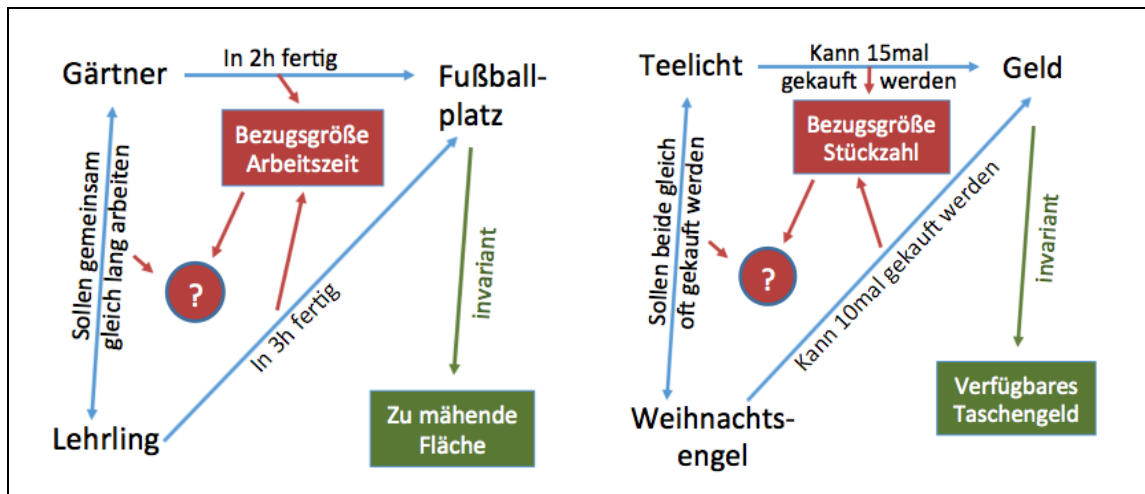


Abb. 2: Die grafische Darstellung der beiden Beispiele lässt die Analogie auf der Objekt- und auf der Relationsebene erkennen.

Betrachtet man nun zunächst für eine der Aufgaben die Handlungen und Operationen, die zu einer Lösung führen, kann sich das folgende Bild ergeben:

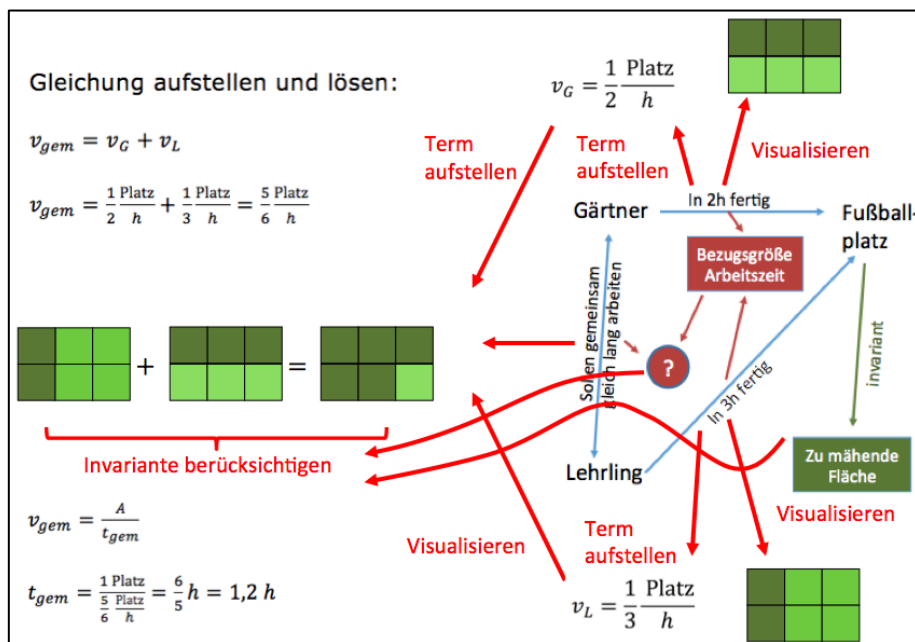


Abb. 3: Lösung der Aufgabe 1. Die zur Lösung erforderlichen Handlungen und Operationen sind benannt.

Eine Fortsetzung der Analogie von der Strukturebene (Objekt- und Handlungsebene, vgl. Abb. 3) auf die Handlungsebene lässt hoffen, dass die zur Lösung der Aufgabe 2 erforderlichen Handlungen ebenfalls „analogisiert“ werden können (vgl. Abb. 4).

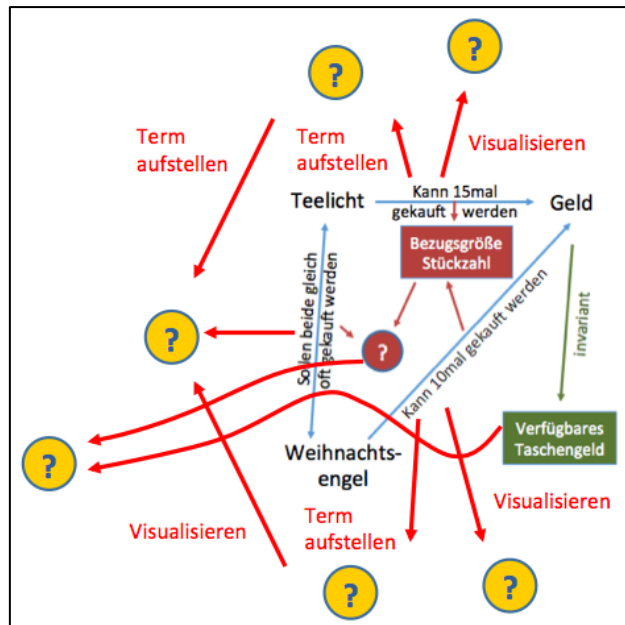


Abb. 4: Können für die Handlungen und Operationen, die zur Lösung der Aufgabe 1 beitragen, Entsprechungen gefunden werden, die zur Lösung der Aufgabe 2 führen?

Beispiel 2: Lineare Zusammenhänge

In diesem Beispiel sollen einerseits eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und andererseits ein Handytarif betrachtet werden. Im ersten Fall soll der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit, im zweiten Fall der Zusammenhang zwischen Telefonkosten und Zeit modelliert werden.

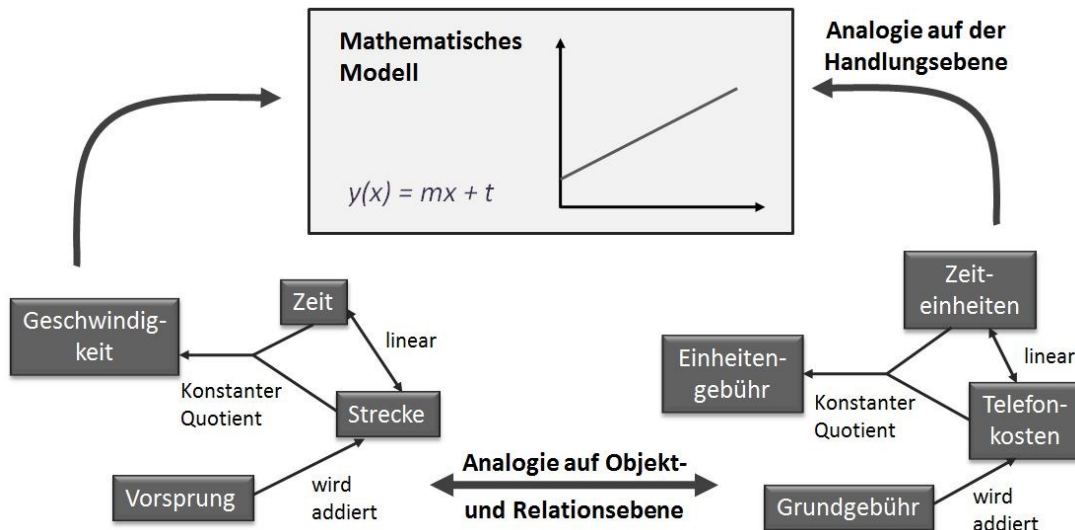


Abb. 5: Die Analogie auf der Objekt- und der Relationsebene führt zunächst zu einer Analogie auf der Handlungsebene und schließlich zu einem gemeinsamen Modell.



Ohne im Detail auf die Lösung dieser beiden Modellierungsaufgaben einzugehen, wird in der Abb. 5 trotzdem einerseits deutlich, dass sich Entsprechungen auf der Objekt- und der Relationsebene ergeben. Auf der anderen Seite wird bereits der Nutzen der Analogie dargestellt, nämlich die Interpretation der Entsprechungen auf der Handlungsebene als gemeinsames mathematisches Modell.

Aus den bisherigen Ausführungen, wie auch aus Abb. 2 bis Abb. 5 wird deutlich, dass die drei Ebenen der Analogiebildung nicht ganz gleichberechtigt nebeneinander stehen. Bilden die Objekt- und die Relationsebene gemeinsam die Struktur des Gegenstandsbereichs, wird die Handlungsebene erst durch die Strukturebene konstituiert. Die Struktur im Gegenstandsbereich bestimmt die Handlungsmöglichkeiten. Das Erkennen und Nutzen von Analogien auf der Handlungsebene wiederum ist für das Lernen im betrachteten Inhaltsbereich entscheidend. Für die vorliegende Arbeit bedeutet das, dass dem Entdecken und Bilden von Analogien auf dieser Ebene sowie dem Übergang zwischen der Strukturebene und der Handlungsebene besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muss.

### 1.3 Epistemologische Bedeutung der Analogiebildung

In den bisherigen Ausführungen wurde deutlich, dass das Bilden von Analogien für den individuellen Erkenntnisgewinn, z. B. im Rahmen der Begriffsbildung (vgl. Abschnitt 1.2.2), des Problemlösens (vgl. Abschnitt 1.2.4, Beispiel 1) oder des mathematischen Modellierens (vgl. Abschnitt 1.2.4, Beispiel 2), eine zentrale Rolle spielt. Der Wissenserwerb mittels Analogiebildung, wie er in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben wurde, spielt sich dabei auf der Ebene mentaler Repräsentationen ab und ist damit ein wichtiger Aspekt des menschlichen Denkens. Um vor diesem Hintergrund (ähnlich wie bei der Behandlung des Analogiebegriffs, vgl. Abschnitt 1.1) zu einem integrierten und kritischen Begriffsverständnis für das Bilden von Analogien zu kommen, und die Bedeutung der Analogiebildung für das menschliche Denken fassen zu können, ist auch hier die Einbettung in ein Netz von benachbarten und verwandten Begriffen nötig. Diese Einordnung wird im Folgenden vorgenommen.

Das Interesse für die Natur des menschlichen Denkens rührt letztlich an die philosophische Grundfrage nach dem Wesen des Menschen und ist deshalb seit jeher Gegenstand philosophischer Betrachtungen. Cohen (1879) etwa sieht in der Ideenlehre Platons die Ursprünge der Frage nach den Ursachen menschlicher Erkenntnisfähigkeit und darin ihre „hervorragend originale Bedeutung“ (S. 1). Erste Betrachtungen über den Zusammenhang des menschlichen Seins und der menschlichen Fähigkeit zur Erkenntnis durch das Denken findet Cohen aber bereits bei den Eleaten, deren Gedanken er wie folgt zusammenfasst:

„Denken und Sein sind (in ihrem Objecte [sic!]) dasselbe. Es giebt [sic!] kein anderes Seiende, als das des Denkens, und – dieser Gedanke vornehmlich ist ihnen lebendig – kein Gedachtes noch Denkbare, denn das Seiende.“ (S. 2)

Eine prägnante Zuspitzung erfährt die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Denken und Sein in der wohlbekannten Aussage Descartes „Je pense, donc je suis“ (frz. „Ich denke, also bin ich“; original: Descartes, 1637 ed. Cousin, 1824, S. 157), auf die ihn die Suche nach einem unumstößlichen Fundament der menschlichen Erkenntnisfähigkeit führt. Genauer formuliert er, ausgehend von seinen Zweifeln an der menschlichen Fähigkeit zur Erkenntnis:

„[...] et enfin, considérant que toutes les mêmes pensées que nous avons étant éveillés nous peuvent aussi venir quand nous dormons, sans qu'il y en ait aucune pour lors qui soit vraie, je me résolus de feindre que toutes les choses qui m'étoient jamais entrées en l'esprit n'étoient non plus vraies que les illusions de mes songes. Mais aussitôt après je pris garde que, pendant que je voulois ainsi penser que tout étoit faux, il falloit nécessairement que moi qui le pensois fusse quelque chose; et remarquant que cette vérité, je pense, donc je suis, étoit si ferme et si assurée, que toutes les plus extravagantes suppositions des sceptiques n'étoient pas capables de l'ébranler, je jugeai que je pouvois la recevoir sans scrupule pour le premier principe de la philosophie que je cherchois.“ (S. 157f)

So zentral die Überlegungen zum menschlichen Denken im Rahmen philosophischer Betrachtungen sind, so selbstverständlich ist es, dass die Auffassung über dessen Wesen sich mit verschiedenen philosophischen Strömungen gewandelt hat. Demnach können die angegebenen prominenten Beispiele nichts weiter sein als ein kleiner Ausschnitt, ein Schlaglicht, das die Bedeutung des Denkens für den Erkenntnisgewinn, das Lernen, erhellt, nicht aber eine umfassende Darstellung oder gar eine Definition dessen, was unter Denken zu verstehen sei. Zentral für die vorliegende Arbeit jedoch ist, dass dieses grundlegende Interesse am Zusammenhang zwischen Denken und Erkenntnis das Bedürfnis nach einer empirischen Erforschung von Denkprozessen geweckt hat und damit der Ausgangspunkt der modernen Kognitionspsychologie markiert wird.

Den Begriff des menschlichen Denkens aus Sicht der Kognitionspsychologie einzugrenzen, fällt allerdings ebenso schwer wie eine philosophische Annäherung. Auch in der Kognitionspsychologie bildeten sich im Laufe des 20. Jahrhunderts verschiedene Strömungen heraus, die ein uneinheitliches Bild zeichnen.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es deshalb, einen Überblick über wesentliche kognitionspsychologische Modelle und Begriffe zu liefern und Zusammenhänge so darzustellen, dass das Bilden von Analogien als ein Akt menschlichen Denkens aus der kognitionspsychologischen Sicht verortet werden kann.

### 1.3.1 Denken – Richtung und Weg

Weit gefasste kognitionspsychologische Beschreibungen des menschlichen Denkens, wie man sie etwa bei Gilhooly (1996) oder Mayer (1979) findet, unterscheiden zwischen gerichtetem und ungerichtetem Denken. Von gerichtetem Denken spricht Mayer dann, wenn die folgenden drei Voraussetzungen erfüllt sind:

„Denken ist kognitiv, aber aus Verhalten kann auf Denken gefolgert werden. Denken findet innerlich, im kognitiven System des Menschen statt, man kann nur indirekt darauf schließen.

Denken ist ein Prozeß, der eine gewisse Aktivierung von Wissen bzw. ein Repertoire von Operationen mit dem im kognitiven System verfügbaren Wissen einschließt.

Denken ist zielgerichtet und führt zu Verhalten, welches ein Problem ‚löst‘ oder auf eine Lösung ausgerichtet ist.“ (S. 6, Hervorhebungen im Original)

Ist nun speziell die dritte Bedingung nicht erfüllt, so spricht er von ungerichtetem Denken. Diese Art des Denkens ist ziellos, aus ihr muss auch nicht zwangsläufig ein zu beobachtendes Handeln resultieren. Wenn man beispielsweise seinen Gedanken einfach freien Lauf lässt („*Daydreaming*“, vgl. Gilhooly, S. 194ff), ohne über etwas Konkretes nachzudenken, oder auch wenn man während des Schlafs träumt, dann denkt man ungerichtet. Ungerichtetes Denken ist nur bedingt beeinflussbar und findet nur phasenweise bewusst statt (vgl.

auch Mayer S. 6, Fußnote 1). Gerichtetes Denken hingegen führt auf ein Ziel hin, findet im Bewusstsein statt und ist steuerbar.

Da der Erkenntnisgewinn des Individuums im Wesentlichen auf Prozesse gerichteten Denkens zurückgeführt wird, finden sich auf diesem Gebiet eine Vielzahl an weiteren Vorschlägen für Begrifflichkeiten und Kategorisierungen. Insbesondere wird die Zielsetzung des Denkens, das Lösen eines Problems (vgl. Mayer, obiges Zitat), häufig zur alleinigen Charakterisierung erhoben, ungerichtete mentale Prozesse werden dabei nicht zum Gegenstand der Betrachtung.

Hussy (1998) etwa sieht die Begriffe des Denkens und des Problemlösens als gleichwertig, ja eigentlich identisch an, wenn er schreibt:

„Zum Denken und Problemlösen zählen alle geistigen Vorgänge, die

- a) zielgerichtet sind,
- b) nicht alleine auf das Entdecken und Erkennen von Reizen beschränkt sind,
- c) nicht alleine auf das Speichern oder das Abrufen von Fakten im bzw. aus dem Gedächtnis beschränkt sind und
- d) - teilweise als Folge davon - das Verarbeiten von Fakten erforderlich machen.“ (S. 16)

und anschließend selbst konkretisiert:

„Damit sind die wesentlichsten Merkmale jener kognitiven Aktivitäten genannt, die mit ‚Denken‘ und ‚Problemlösen‘ bezeichnet werden. Im weiteren Verlauf des Textes werden wir die beiden Begriffe – insbesondere unter dem gemeinsamen Aspekt der Zielorientierung – synonym verwenden.“ (S. 20)

Bereits Duncker (1935) begreift das Denken als wesentlichen Teil von Problemlöseprozessen:

„Ein ‚Problem‘ entsteht z. B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht ‚weiß‘, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Ausgangszustand überführen läßt, wird das Denken auf den Plan gerufen. Ihm liegt es ob, ein vermittelndes Handeln allererst zu konzipieren.“ (S. 1)

Er bestreitet allerdings die Relevanz einer „Richtung“ des Denkprozesses:

„Es bedarf keines besonderen (arteigenen) Begriffs der ‚Richtung‘, die da ‚Elemente‘ ‚kombiniere‘. Richtung ist durchaus vom Typus eines Problems, genauer, einer Problemumformung und vermittelnden Lösungsphase.“ (S. 20)

Er bezieht sich dabei direkt auf Maier (1930), der, ähnlich wie Hussy, die Zielorientierung als entscheidendes Charakteristikum eines Denkprozesses konstatiert:

„The parts or experiences must be combined in a certain manner and a ‚direction‘ or way the problem is attacked, seems to be a factor which determines the nature of the combination.“ (S. 143)

Duncker sieht demnach im Einschlagen einer Richtung während des Denkprozesses (also während des Problemlöseprozesses) nicht dessen konstituierendes Moment, sondern bereits einen Teil der Problemlösung. Damit distanziert er sich auch von seinem Lehrer Max Wertheimer (1964), der das Denken im Sinne der Gestaltpsychologie als strukturelle Verwandlung bzw. Verbesserung eines Ausgangszustands im Hinblick auf einen zu erreichenden Zielzustand beschreibt und damit auch eine Richtung impliziert:

„Im wirklichen Denken ist die *funktionelle* Deutung eines Inhalts, eines Urteils, diejenige Bedeutung, die sich im Vorwärtsdringen des Denkens wandelt, von der äußersten Wichtigkeit – ohne sie wird das Denken unfruchtbar; wenn man diesen Wandel außer Acht lässt, erfaßt man den Weg des Fortschreitens nicht. Denn Feststellungen usw. haben in ihrem Zusammenhang etwas Gerichtetes (Vektorielles).“ (S. 249, Hervorhebungen im Original)

Wertheimer und Duncker prägen, unabhängig von der Diskussion um die Notwendigkeit eines Richtungsbegriffs zur Beschreibung menschlichen Denkens, mit ihren Ansätzen den Begriff des *Produktiven Denkens* und bringen damit in die Betrachtung von Denkvorgängen eine qualitative Komponente ein, die in der Gleichsetzung von Denken mit Problemlösen höchstens implizit enthalten ist: Nicht jedes Denken, auch nicht jedes gerichtete Denken, ist *produktiv*. Der Übersetzer von Wertheimers Werk „*Productive Thinking*“ (1945), Wolfgang Metzger (in: Wertheimer, 1964), macht dies in seiner Vorbemerkung besonders deutlich:

„*„Produktives Denken“* im buchstäblichen Sinn des pro-ducere, das heißt eines vorwärts dringenden, eines weiterführenden Denkens, – im Gegensatz zu einem Denken, das nur konstatierend und klassifizierend auf einem schon erreichten Stand verweilt oder das vermittelt eines vor Zeiten eingebläuten, persönlichkeitsfremden geistigen Instrumentariums sich mehr oder weniger blind und vertrauensvoll auf schon gefundenen und bewährten Lösungspfaden bewegt. Man hätte auch übersetzen können *„einsichtiges Denken“*; denn nur einsichtiges Denken [...] *kann* überhaupt weiterführen [...].“

(S. XV, Hervorhebungen im Original)

Wertheimer und Duncker bereiten damit neben einer Bewertung von Denkprozessen gleichzeitig einer Auffassung des Lernbegriffs den Weg, die sich von damals vorherrschenden, rein behaviouristischen Sichtweisen grundlegend unterscheidet. Lernen wird hier nicht als ‚Gewöhnung durch Übung‘ angesehen, wie etwa bei Thorndike grundgelegt und durch Skinner weiterentwickelt, sondern muss immer von Einsicht begleitet sein, will man durch Lernen eine Weiterentwicklung der eigenen Erkenntnis erzielen. Legte man dieses Paradigma dem Unterrichten zugrunde, „so kann eine Umwälzung des gesamten Unterrichts nicht ausbleiben, in der zum ersten Mal Wirklichkeit wird, was Pestalozzi in seinem Anschauungsbegriff vorschwebte [...]: *Die Erziehung zur geistigen Selbständigkeit*“ schreibt der enthusiastische Übersetzer weiter (Metzger, in: Wertheimer, 1964, S. XVI, Hervorhebung im Original).

Bis hierhin ist deutlich geworden, dass die Kognitionspsychologie, unabhängig von der betrachteten wissenschaftlichen Strömung und deren Modellen, überwiegend an Denkpro-

zessen interessiert ist, die ein Ziel verfolgen – an Denkprozessen also, die mit einem Erkenntnisgewinn einhergehen. Entsprechend besteht ein Teil kognitionspsychologischer Forschung darin, solche Denkprozesse detaillierter zu kategorisieren, ein anderer Teil ist bestrebt, Denkprozesse in ihrem Ablauf zu beschreiben und offen zu legen und wieder ein anderer Teil befasst sich mit den Einflussfaktoren des Individuums auf die Möglichkeiten des Erkenntnisgewinns. Das Bilden von Analogien soll in der vorliegenden Arbeit zunächst als Denkprozess im obigen Sinne bezüglich gängiger Kategorisierungen eingeordnet und anschließend in seinem Ablauf untersucht werden. Auf den Einfluss von individuellen Dispositionen wird dabei nur am Rande eingegangen.

Eine Möglichkeit, zielgebundene Denkprozesse im obigen Sinne in feinere Kategorien einzuteilen, besteht darin, nach der Art und Weise der Zielerreichung zu unterscheiden, also Wege des Denkens in ihrer Art zu beschreiben.

Guilford beschreitet im Rahmen seiner Intelligenzforschungen diesen Weg, indem er zwischen *konvergentem* und *divergentem Denken* unterscheidet (vgl. Guilford, 1967, S. 139ff. und S. 171ff.). Als *divergentes Denken* bezeichnet Guilford einen Denkprozess, der zwar auf die Erreichung eines Ziels ausgerichtet ist, aber Bereiche miteinbezieht, die nicht in direktem Zusammenhang mit der Ausgangssituation stehen. Teil des Denkprozesses beim *divergenten Denken* ist damit auch das Finden einer Richtung, die durch subjektive Bewertungen der hinzugezogenen Informationen bestimmt wird. Im Gegensatz dazu hat *konvergentes Denken* von Beginn an eine bestimmte Richtung, verläuft weitgehend linear und weicht kaum von eingeübten Mustern ab. Auch wenn Duncker und Wertheimer als Vertreter der *Gestaltpsychologie* auf der einen Seite und Guilford als *Intelligenzforscher* im Gefolge Spearman's auf der anderen Seite sehr verschiedene Gebiete der Kognitionspsychologie vertreten, spiegelt die Unterscheidung Guilfords in gewissem Sinne auch die verschiedenen Sichtweisen Duncckers und Wertheimers zum *produktiven Denken* wider (s. o.).

Eine zur Kategorisierung Guilfords sehr ähnliche Einteilung wurde von de Bono vorgenommen und in seinen eher populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen in pragmatischer Weise verwendet: Er spricht von *lateralem* und *vertikalem Denken* und sieht *das laterale Denken*, ähnlich wie Guilford *das divergente Denken*, als wichtiges Wesensmerkmal  *kreativer Denkprozesse*. In seinen Anleitungen zum „Lernen des Denkens“ unterscheidet de Bono weiter zwischen *intuitivem Denken*, bei dem die einzelnen Denkschritte nicht alle wahrnehmbar sind, *konsequentem Denken*, bei dem sich das Denken in einer progressiven Folge von Schritten vollzieht, und *strategischem Denken*, bei dem mögliche Denkschritte auf die beste Eignung im Denkkontext hin untersucht werden (vgl. de Bono, 1970, S. 13). Mit *intuitivem Denken* erklärt de Bono z. B. Gedankensprünge und Aha-Erlebnisse, während er mit *konsequentem Denken* eine bewusste Abfolge von Prozessen der Ideenfindung, Überprüfung, Verwerfung, Verbesserung etc. beschreibt (Trial and Error). Beim *strategischen Denken* wird

ein Wissen um mögliche Wege vorausgesetzt, Denken besteht dann in der Auswahl des Wegs.

Möchte man die Einteilungen Guilfords oder de Bonos auf einen Denkbegriff ausweiten, der auch ungerichtete Denkprozesse miteinbezieht, so geben die gewählten Termini bereits eine Zuordnung vor, stellt doch das Vorhandensein einer Richtung im Denken eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz des Prozesses dar. Ungerichtetes Denken kann demnach nur als divergent eingeordnet werden (bzw. entsprechend als lateral).

Wie in den vorangegangenen Abschnitten bereits angeklungen, kommt dem kreativen Denken im Zusammenhang mit den genannten Kategorisierungen eine besondere Stellung zu. Bei der Beschreibung seiner „Wege zur physikalischen Erkenntnis“ stellt Max Planck (1944) als wesentliches Charakteristikum kreativen Denkens fest (zitiert nach Kutschera, 2007):

„Eine jede wissenschaftliche Idee, die dem Gehirn des Forschers entspringt, knüpft stets an ein konkretes Erlebnis an, an eine Entdeckung, eine Beobachtung, eine Feststellung irgendwelcher Art, [...] und der Inhalt der Idee besteht darin, daß sie dies Erlebnis in Zusammenhang, in Vergleich bringt mit gewissen bereits vorliegenden andersartigen tatsächlichen Erlebnissen, daß sie also eine Brücke schlägt von einem zum andern und dadurch die zunächst lose nebeneinanderstehenden Tatsachen durch eine feste Beziehung miteinander verbindet.“ (S. 178)

Demnach ist kreatives Denken gerichtet und divergent, es ist einerseits auf ein Ziel hin ausgerichtet, bezieht aber zur Zielerreichung andererseits Gebiete mit ein, die zunächst nicht naheliegend erscheinen. Es wird deutlich, dass beim kreativen Denkvorgang immer etwas (zumindest subjektiv) Neues geschaffen wird, dass also das Produkt des Vorgangs, nämlich die Verknüpfung von Erfahrungen, die bislang unverknüpft waren, – Planck bezeichnet dies als Idee – (zumindest für den Denkenden) neu ist. Hadamard (1945) schreibt dazu in Übereinstimmung mit den Überlegungen Plancks (zitiert nach Francois & van Bendegem, 2007):

„[...] it is obvious, that invention or discovery, be it in mathematics or anywhere else, takes place by combining ideas.“ (S. 166)

Bereits der Vergleich des von Planck und Hadamard übereinstimmend als Charakteristikum kreativen Denkens eingeschätzten Verbindens verschiedener Erfahrungen oder Ideen mit dem Wesen der Analogie, wie es im vorangegangenen Abschnitt dargelegt wurde, lässt die Bedeutung des Bildens von Analogien für kreative Denkprozesse, für das Erschaffen subjektiv oder objektiv neuer Ideen erahnen. Nachfolgend soll dieser Zusammenhang jedoch, das Ziel einer Einordnung des Bildens von Analogien in ein Begriffsgefüge rund um das Denken des Menschen fest im Blick, noch besser ausgeformt werden.

### 1.3.2 Denken – Art und Ziel

Im einführenden Kapitel zum monumentalen *Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (2005) wählen Holyoak und Morisson als Zugang zum Begriff des Denkens zunächst den Weg über das Alltagsverständnis und die Etymologie des Wortes. Den Übergang von der Alltagssprache hin zu einer wissenschaftlichen Definition des Denkbegriffs vollziehen sie mit einer vorläufigen Formulierung, die sie im Anschluss näher erläutern:

„Thinking is the systematic transformation of mental representations of knowledge to characterize actual or possible states of the world, often in service of goals.“ (S. 2)

An dieser Stelle wird deutlich, welch starkes Instrument das Modell der mentalen Repräsentationen ist. Im vorliegenden Zusammenhang können nun auch kognitive Prozesse der allgemeinsten Art mit diesem Modell beschrieben werden. So knapp die Definition von Holyoak und Morisson auch sein mag, das Konzept der Transformation mentaler Wissensrepräsentationen vermag die verschiedenen vorangegangenen Charakterisierungen des Denkbegriffs zu vereinigen. Zum einen lässt sich konvergentes Denken genauso als Transformation mentaler Repräsentationen beschreiben wie divergentes Denken. Zum anderen muss dabei jedoch nicht zwingend ein Ziel verfolgt werden – es werden also nicht nur gerichtete, sondern auch ungerichtete mentale Prozesse als Denkprozesse beschrieben. Holyoak und Morisson gehen in ihren Überlegungen zu dieser Definition sogar noch einen Schritt weiter, indem sie erläutern, welche Aspekte bewusst nicht in die Definition aufgenommen wurden:

„We do not claim that thinking necessarily requires a human [...] or even a sentient being. [...] Finally, we do not claim thinking is inherently rational, optimal, desirable, or even smart.“ (S. 2)

Damit erhalten auch die kognitionspsychologischen Forschungsrichtungen zur künstlichen Intelligenz und die Primatenforschung ihren Platz und ihre Berechtigung im weiten Feld der Erforschung des Denkens (und damit des Denkens durch Analogiebildung, vgl. z. B. Kokinov, 1988 bzw. Oden et al., 2001).

Um nun dem eingangs des Abschnitts formulierten Ziel einen Schritt näher zu kommen, das Denken durch Analogiebildung in die kognitionspsychologische Begriffswelt einordnen zu können, soll an dieser Stelle noch der letzte Teil der Definition von Holyoak und Morisson, der Hinweis auf ein meist vorhandenes Ziel des Denkens, zum Anlass genommen werden, eine Begriffsbeschreibung vorzustellen, die von Rips und Conrad (1989) vorgenommen wurde. Sie unterscheiden Arten des Denkens und setzen diese miteinander in Beziehung. Dabei werden durch die Wahl der Begriffe gleichzeitig Ziele impliziert. Statt von einer Beschreibung verschiedener Arten des Denkens könnte man also, die Definition von Holyoak und Morisson im Sinne, auch von einer Beschreibung verschiedener Ziele des Denkens sprechen. Rips und Conrad nehmen dabei nicht nur eine Beschreibung, sondern



auch eine implizierende Ordnung der Begriffe vor, wie sie in der nachfolgenden Abb. 6 dargestellt wird:

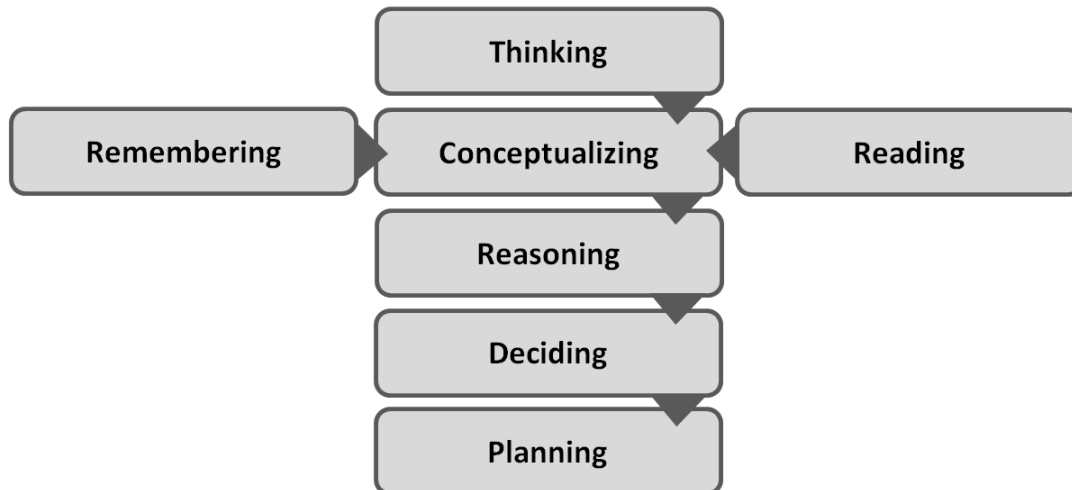


Abb. 6: Arten des Denkens nach Rips & Conrad (1989) wie in Holyoak & Morisson (2005, S. 3)

Als Grundlage der von Rips und Konrad hergestellten Begriffshierarchie kann dabei der Grad der Elaboriertheit angesehen werden, den die systematischen Transformationen mentaler Repräsentationen im Sinne Holyoaks und Morissons erreichen. Das zeigen die folgenden Überlegungen: Zum Erstellen eines (Handlungs-)Planes (Planning) bedarf es der Anordnung verschiedener (Handlungs-)Schritte. Jeder (Handlungs-)Schritt wiederum muss aus verschiedenen (Handlungs-)Alternativen ausgewählt werden. Dazu müssen die Alternativen gegeneinander abgewogen werden (Judgment/Decision making). Die hierfür nötigen Beurteilungskriterien und deren Gewichtung entspringen wiederum einer (nicht notwendigerweise logischen) Argumentation (Reasoning). Diese ist nur auf der Grundlage einer (begrifflichen) Ordnung und Strukturierung des Argumentationsgegenstands möglich, die erst hergestellt werden müssen (Conceptualizing). Umgekehrt können diese Zusammenhänge als „Enthalten-Relation“ gelesen werden.<sup>28</sup>

<sup>28</sup> Sowohl die Begriffe *logisches Denken*, *Schließen/Schlussfolgern* als auch *Argumentation/Argumentieren* sind aufgrund ihrer Verwendung in der einschlägigen Literatur jeweils mit einer Konnotation behaftet, die nicht mit derjenigen ihrer gängigen Übersetzungen *Reasoning*, *Inferring* und *Argumentation* übereinstimmt. Deshalb werden diese Begriffe und ihre Übersetzungen in der deutschsprachigen Literatur nicht konsequent und einheitlich, sondern eher gemäß der gewünschten Konnotation verwendet. Das spiegelt sich auch in diesem Absatz wider (*Argumentation* ↔ *Reasoning*) und wird noch einmal deutlich, wenn im nächsten Abschnitt vom *inductive*, *deductive*, *abductive* oder *analogical reasoning* bzw. vom *induktiven*, *deduktiven*, *abduktiven* oder *analogen Schließen* die Rede ist.

### 1.3.3 Reasoning – (Logisches) Schließen

Das *logische Schließen* und dessen Beschreibung kann wohl auf die längste Tradition und die umfangreichste Forschung im Rahmen der Untersuchungen zum menschlichen Denken zurückblicken (vgl. Manktelow, 2012, S. 34f.). Die Grundintention der Forschungsarbeit zum (*logischen*) *Schließen* ist es, herauszufinden „[...] how people ‚go beyond the given‘ [...]“ (Gilhooly, 1996, S. 105 nach Bruner 1973, vgl. auch Tversky, 2005, S. 209). Es geht also letztlich darum, zu beschreiben, auf welche Weise aus gegebenen Informationen (= Informationen aus der aktuellen Situation + Vorwissen) neues Wissen entsteht, also ein Erkenntnisgewinn stattfindet. Beschränkt man sich auf die Arten des Schließens, die sich mit den Mitteln der Logik beschreiben lassen, wird in den meisten Fällen *induktives*, *deduktives*, *abduktives* und *analoges Schließen* unterschieden (vgl. Holyoak & Morrison, 2005; Reid & Knipping, 2010). Andere Arten des Schließens werden z. B. von Tversky (*visuospatial reasoning*, 2005) oder auch von Reid & Knipping (*transformational reasoning*, 2010 nach Simon, 1996) diskutiert.

Im Kontext des mathematischen Beweisens beschreiben Reid & Knipping (2010) die vier klassischen Arten des Schließens als „different types of reasoning that are relevant to teaching and learning proof“ (S. 83). Durch die Betrachtung von *Fällen* (*cases*), *Regeln* (*rules*) und *Resultaten* (*results*), gelingt es ihnen, in einprägsamer, logischer Notation die vier Fälle zu unterscheiden und anhand einfacher Beispiele zu erläutern. Als *Fall* bezeichnen Reid und Knipping dabei eine konkrete Beobachtung, bei der eine bestimmte Voraussetzung erfüllt ist (z. B.: A: „Chino ist ein Hund“<sup>29</sup>). Eine *Regel* ist eine allgemeine Aussage, die feststellt, dass das Erfüllen einer Voraussetzung gleichzeitig das Erfüllen einer zweiten Voraussetzung nach sich zieht (z. B.:  $A \rightarrow B$ : „Hunde sind Tiere“). Ein *Resultat* ist, ähnlich wie ein Fall, eine konkrete Beobachtung der Erfüllung einer Voraussetzung. Diese ist aber mit einer zweiten Voraussetzung durch eine Regel verknüpft (in diesem Beispiel: B: „Chino ist ein Tier“). Die verschiedenen Arten des Schließens lassen sich nach Reid & Knipping dann wie folgt unterscheiden<sup>30</sup> (Tabelle 1):

---

<sup>29</sup> Beispiel übernommen aus Reid & Knipping (2010, S. 83)

<sup>30</sup> Als Kritikpunkt an der Darstellung Reids & Knippings lässt sich zum einen feststellen, dass die Bedeutung der verwendeten Symbole von deren Stellung innerhalb der Argumentation abhängt: A als Fall „Chino ist ein Hund“ hat eine andere Bedeutung als A in der Regel  $A \rightarrow B$  („Hunde sind Tiere“). Zum anderen wird nicht deutlich, wodurch sich im konkreten Fall ein Resultat von einem Fall unterscheidet. Insbesondere ist dadurch beim induktiven Schließen nicht von vornherein klar, dass aus A: „Chino ist ein Hund“ und B: „Chino ist ein Tier“ die Regel  $A \rightarrow B$ : „Hunde sind Tiere“ folgt und nicht etwa  $B \rightarrow A$ : „Tiere sind Hunde“. Hier bedarf es a priori des Wissens, dass B ein Resultat darstellt.

| Art                    | Beschreibung  | Symbolisch  |
|------------------------|---|---|
| <b>Deduktion</b>       | Ein Fall und eine Regel implizieren ein Resultat  | $A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$  |
| <b>Induktion</b>       | Ein Fall und ein Resultat implizieren eine Regel  | $A \wedge B \Rightarrow (A \rightarrow B)$  |
| <b>Abduktion</b>       | Eine Regel und ein Resultat implizieren einen Fall  | $B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow A$  |
| <b>Analogiebildung</b> | Aussage über einen Fall oder eine Regel in einem unbekanntem Zielbereich durch Feststellen einer Ähnlichkeit zwischen Fällen und deren gegenseitiger Beziehung im Ausgangs- bzw. Zielbereich. | $(A \approx C) \wedge A \Rightarrow C$<br>oder<br>$(A \approx C) \wedge (B \approx D) \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)$ |

Tabelle 1: Symbolische Beschreibung verschiedener Arten des Schließens

Auch wenn an dieser Stelle weder die von Reid & Knipping benutzte logische Notation, noch die von den Autoren vorgenommene weitere Verfeinerung in der Kategorisierung<sup>31</sup> der verschiedenen Arten des Schließens intensiv weiter verfolgt werden, leisten die Autoren doch in vier anderen Punkten wichtige Beiträge zur vorliegenden Arbeit.

Bezüglich der angestrebten Einordnung des Bildens von Analogien und dessen Bedeutung im Rahmen des menschlichen Denkens liefern Reid & Knipping einen weiteren Anhaltspunkt: Induktives, abduktives und analoges Schließen kann, im Gegensatz zu deduktiven Schlussfolgerungen, kreativ sein. Bezüglich des deduktiven Schließens berufen sich Reid und Knipping dabei auf Peirce: Obwohl einzig die Ergebnisse deduktiven Schließens keiner weiteren Verifikation bedürfen, sind deduktive Argumente dergestalt, dass „none of them much advance your knowledge of the truth“ (Peirce, 1955, S. 127 zit. nach Reid & Knipping, 2010, S. 87). Per definitionem (vgl. Abschnitt 1.3.1) kann solches Denken also nicht kreativ sein.<sup>32</sup> Den anderen Arten des Schließens hingegen weisen Reid & Knipping unter anderem die Rolle der Exploration zu, also z. B. die Rolle des Adaptierens, Modifizierens, Substituierens, Rearrangierens oder Kombinierens. Diese (und andere) Tätigkeiten werden

<sup>31</sup> z. B. unterscheiden Reid und Knipping beim induktiven Schließen noch zwischen Mustererkennung, Vorhersagen, Vermuten, Verallgemeinern und Testen (2010, S. 88ff. und S. 126)

<sup>32</sup> Knipping und Reid weisen allerdings auch darauf hin, „that deductive reasoning can lead to the *experience* of discovering a new truth.“ (S. 87, Hervorhebungen im Original). Subjektiv kann also auch deduktives Schließen zu neuen Erkenntnissen führen.

von Weth (1997, S. 21) mit Rekurs auf Osborn (1963) und Ristow (1988) als kreatives Tun bezeichnet.

Die einzelnen Arten des Schließens werden in den Untersuchungen Reids & Knippings jeweils direkt auf das Denken von Schülern beim Lösen mathematischer Probleme bezogen und anhand zahlreicher ausführlich erläuterter Transkripte exemplifiziert. Für den im Folgenden dokumentierten empirischen Teil der vorliegenden Arbeit liefern die Erläuterung zu den Transkripten einerseits eine erste Orientierung und erste Anhaltspunkte auf der methodischen Ebene, zeigen andererseits aber auch auf, wie die verschiedenen Arten des Schließens im konkreten Fall voneinander abgegrenzt werden können.

In diesem Zusammenhang führen Reid & Knipping auch aus, dass es in vielen Fällen nur sehr schwer zu entscheiden ist, ob es sich bei einer vorliegenden Argumentation tatsächlich um das Bilden einer Analogie handelt, oder ob dem Gedankengang nicht eher die Generalisierung verschiedener Beobachtungen aus der Vergangenheit und eine anschließende Spezialisierung bezogen auf das aktuelle Problem vorliegt. Die Autoren erkennen in dieser Schwierigkeit einen Zusammenhang wieder, der bereits von Pólya (1962) beschrieben wird (Abb. 7):

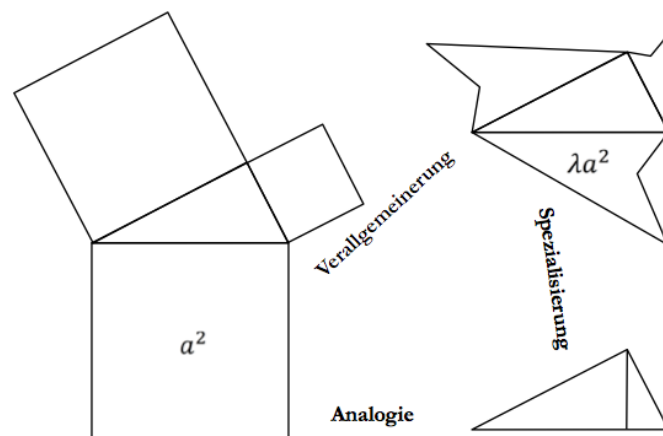


Abb. 7: Der Zusammenhang zwischen einer Analogie einerseits und einer Verallgemeinerung mit anschließender Spezialisierung andererseits (Abb. nach Pólya, 1962, S. 38)

Reid & Knipping interpretieren das Diagramm Pólya's wie folgt:

„If we reinterpret Pólya's diagram in our terms is [sic!] says that it is possible to reason by analogy from the Pythagorean Theorem shown graphically in I to the relation between the triangle areas shown in II. [...] Alternatively, the Pythagorean Theorem can be the inspiration for a generalization that areas of similar polygons built of the three sides of a right triangle will be related in the same way as the squares in the Pythagorean Theorem. This can then be specialized to the specific case of triangles.“ (S. 113)

Abschließend zeigen die folgenden Bemerkungen Reids & Knippings die Relevanz des hier vorliegenden Forschungsansatzes zum Schließen durch Analogiebildung – auch wenn sie sich hier im Kontext des mathematischen Beweisens äußern:

„Its importance [that of analogical reasoning, Anmerkung des Autors] has been pointed out by Pólya (1968) and it is receiving increased attention in mathematics education. [...] However, the connection between reasoning by analogy and proof is only beginning to be explored.“ (S. 110)

Zur Bedeutung des Bildens von Analogien für die Fortentwicklung der Mathematik als Ganzes schreiben sie mit Rekurs auf Benis-Sinaceur (2000) weiter:

„Virtually every breakthrough relies on analogies, either within a given field of mathematics or between different fields.“ (S. 281, zitiert nach Reid & Knipping, 2010, S. 110)

Zum Abschluss des Abschnitts „*Types of Reasoning*“ stellen die Autoren außerdem fest:

„There exists a body of research in both psychology and mathematics education on the kinds of reasoning students of different ages can use and choose to use (See Stylianides & Stylianides, 2008 ...). [...] However, more needs to be done. One key point that has received little attention is the process of formulating reasoning: that is, becoming aware of ones reasoning processes.“ (S. 127f.)

Damit scheint klar, dass nicht nur das Schließen mittels Analogiebildung im Allgemeinen ein Forschungsgebiet von aktuellem Interesse ist, sondern dass insbesondere die Untersuchung der dabei ablaufenden Denkprozesse einen Beitrag zur mathematikdidaktischen Forschung leisten kann.

### 1.3.4 Das Bilden von Analogien – eine Einordnung

Versucht man die bis hierhin ausgeführten Ausdifferenzierungen des Denkbegriffs so zu ordnen und miteinander in Einklang zu bringen, dass sich das Bilden von Analogien als menschliche Denkleistung in diesem Begriffsnetz verorten lässt, führt dies zur nachfolgenden schematischen Darstellung (Abb. 8).

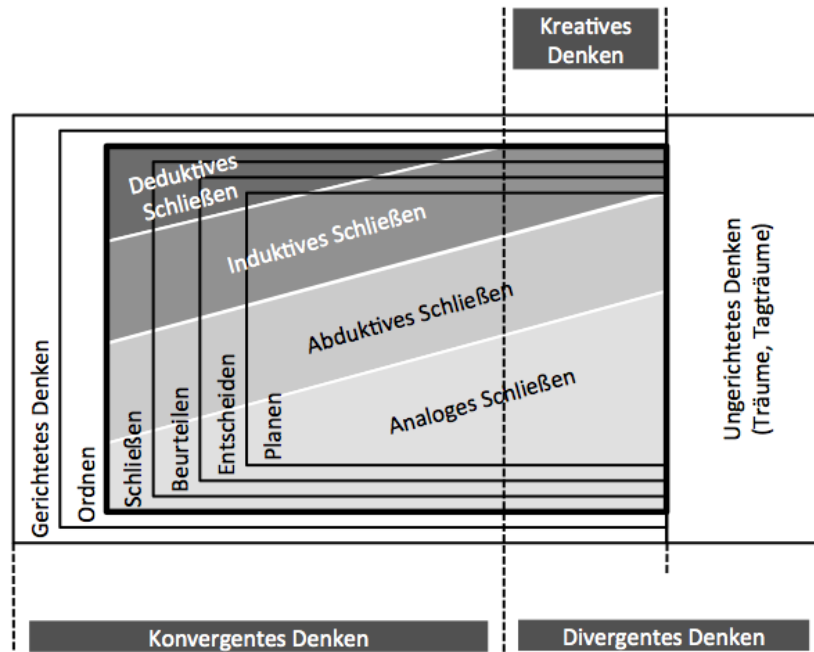


Abb. 8: Das Bilden von Analogien als menschliche Denkleistung

Das Bilden von Analogien nimmt also im Rahmen des menschlichen Denkens eine zentrale Rolle ein.

## 1.4 Analogiebildung als Prozess

Eine Analogie wurde im Abschnitt 1.1 als Ähnlichkeit zweier Gegenstandsbereiche auf der strukturellen Ebene und der dadurch konstituierten Möglichkeiten auf der Handlungsebene beschrieben. Im Abschnitt 1.2 konnte das Bilden von Analogien mit dem Modell mentaler Repräsentationen auf der Ebene geistiger Tätigkeit erklärt werden. Im Abschnitt 1.3 wurde anschließend das Bilden von Analogien und seine epistemische Bedeutung dargestellt. Will man nun Erkenntnisse darüber gewinnen, wie solche Denkleistungen zustande kommen, muss das Augenmerk auf deren Prozesscharakter gerichtet werden. In den folgenden Abschnitten wird Analogiebildung zunächst als Prozess des Wissenstransfers eingeordnet. Anschließend werden einzelne Komponenten des Transferprozesses extrahiert.

### 1.4.1 Analogiebildung als Transfer

Ein Transfer beschreibt im Wortsinn zunächst den Transport, die Übermittlung oder die Weitergabe eines Objekts, einer Person oder eines sonstigen Inhalts von einer Stelle an eine andere. Bezogen auf den Bereich des Lernens geht es um die Übertragung bereits gelernter Inhalte (Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten) auf neue Situationen, Aufgaben und Problemstellungen – man spricht dann von Lerntransfer. „Non scholae, sed vitea discimus“ – die allseits bekannte Inversion der Seneca-Kritik an den römischen Philosophenschulen der damaligen Zeit deutet dies bereits an und meint damit die Übertragung des in der Schule Gelernten auf die Aufgaben und Probleme des Alltags. Aus lernpsychologischer Sicht definiert Klauer (2011) präziser:

„Transfer ist ein nichttrivialer Lerneffekt, das heißt ein Lerneffekt bei Aufgaben, die in dem fraglichen Prozess weder gelernt noch geübt wurden.“ (S. 17)

Lern- oder Übungseffekte bezeichnet er dabei als nichttrivial, „wenn sie bei Aufgaben auftreten, die überhaupt nicht gelernt oder geübt wurden.“ (Ebd., S. 17)

Nicht nur im Rahmen des Lernens und Übens mathematischer Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten bleibt mit dieser Definition die Frage offen, nach welchen Kriterien eine bestimmte Aufgabe als geübt bzw. nicht geübt einzustufen ist. Kann damit bereits die Lösung einer Aufgabe als Transfer bezeichnet werden, die „mit anderen Zahlen“ schon einmal gelöst wurde, oder bedarf es zusätzlich eines geänderten Aufgabenkontexts? Muss sich die Ähnlichkeit auf die relationale Ebene beziehen oder genügt eine kategoriale Ähnlichkeit auf der Ebene von Objekteigenschaften? Oder muss die Übertragung des Gelernten gar auf der Strategie-Ebene stattfinden?

Klauer selbst beantwortet diese Fragen dahingehend, dass es nicht auf die übertragenen Inhalte ankommt, um von einem Transfer sprechen zu können, sondern auf den Effekt, den die Übertragung auf das Lernen hat. Er folgert daraus einerseits, dass jedes Lernen auf

einem Transfer beruht und andererseits, dass es auch negativen Transfer gibt, nämlich dann, wenn die Übertragung des bereits Gelernten negative Auswirkungen auf das Lernen hat – etwa, wenn Fehlvorstellungen dadurch gefestigt werden. Transfer kann dabei durch Übertragungen sowohl auf der kategorialen bzw. relationalen Ebene als auch auf der Handlungs-Ebene beschrieben werden. Diese Vorstellung des Transfers deckt sich mit den bereits beschriebenen Ebenen der Analogiebildung (vgl. 1.2.4) und es wird deutlich, dass im Sinne Klauers jede Analogiebildung als Transfer gesehen werden kann. Will man also Analogiebildung im Rahmen eines Lernvorgangs beschreiben, bei dem Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten sowohl auf der Struktur- als auch auf der Handlungsebene aufgebaut und erweitert werden, kann man zunächst den (allgemeineren) Begriff des (Lern-)Transfers betrachten. Die wissenschaftlichen Betrachtungen und Erkenntnisse hierzu sind vielfältig. Im Folgenden soll vor allem begründet werden, dass der Vorgang des (Lern-)Transfers und damit der Vorgang der Analogiebildung Prozesscharakter besitzen.

Klassische Zugänge zum Begriff des (Lern-)Transfers gehen auf Thorndike's Überlegungen zu *identischen Elementen* (Thorndike, 1906) zurück. In seiner behaviouristischen Auslegung findet Transfer dann statt, wenn der Zielbereich (hier: transfer situation) mit dem Ausgangsbereich (hier: original learning situation. Lobato, 2006, S. 433) Oberflächenmerkmale gemeinsam hat (vgl. Cox, 1997). Die konstruktivistische Sichtweise dieser Zugänge spricht hingegen von Gemeinsamkeiten, Überlappungen oder möglichen (Transfer-) Abbildungen zwischen den mentalen Repräsentationen der beiden Bereiche (vgl. Anderson, 1995). Beide Sichtweisen beschreiben Transfer unter Verwendung der Metapher der „Wissensanwendung“. Hierbei wird suggeriert, dass bereits erworbenes Wissen, unabhängig vom Kontext in dem es erworben wurde, in neuen Situationen angewendet werden kann. Die Metapher des „Wissenstransports“ hingegen ist Teil der klassischen Sichtweise. Demnach findet die Übertragung von Wissen statt, sobald der Lerner die Ähnlichkeit zwischen Ausgangs- und Zielbereich erkannt hat.

Die Kritik an der klassischen Sichtweise setzt an den statischen Vorstellungen dieser beiden Metaphern an:

„Finally, the static nature of the application or transportation metaphor suggests that “the formation of transfer environments are not assumed to be an actual part of the process, but rather are seen as differentially supporting or interfering with it” (Beach, 2003, p. 40). Consequently, the classical transfer approach does not account for the ways in which people often change transfer situations until they become similar to something they know (Bransford & Schwartz, 1999).“ (Lobato, 2006, S. 434f.)

Der Vorgang der Wissensübertragung kann demnach kein passiver Vorgang sein, der einzig vom Erkennen struktureller Ähnlichkeiten abhängt. Zudem ist das Erkennen von Ähnlichkeiten selbst kein augenblicklicher Vorgang, sondern bedarf der aktiven Tätigkeit des Lernenden: Der Lerner muss sowohl das Vorwissen als auch die Zielsituation erst anpassen (strukturieren), um Ähnlichkeiten überhaupt identifizieren zu können.



In diesem Sinne ist (Lern-)Transfer ein Vorgang, bei dem die Übertragung des Vorwissens auf neue Situationen i.d.R. mittels geeigneter Umstrukturierung geschieht und das Wissen auf diese Weise erweitert wird. Transfer wird also gesehen „as a dynamic phenomenon in which learners construct knowledge in targeted transfer situations“ (Lobato 2006, S. 439 mit Rekurs auf Rebello et al., 2005).

Der Begriff (Lern-)Transfer beschreibt also einen Prozess. Soll nun Analogiebildung als Form des Transfers beschrieben werden, so muss demnach neben dem Gegenstand einer Analogiebildung, der durch die verschiedenen Ebenen abgebildet wird, auch der Prozesscharakter Eingang in das theoretische Modell finden. Im nachfolgenden Abschnitt werden hierzu verschiedene Ansätze zusammen- und einander gegenübergestellt.

### 1.4.2 Phasen der Analogiebildung – eine zweite Dimension

Für eine chronologische Beschreibung von Analogiebildungsprozessen wurden in der kognitionspsychologischen Forschung verschiedene Komponenten-Modelle vorgestellt.

Allen voran beschreibt Sternberg (1977) im Rahmen seiner *Theorie der Intelligenz* auch den Prozess der Analogiebildung und extrahiert dabei sechs verschiedene Teilprozesse. Für einen experimentellen Nachweis der von ihm postulierten Komponenten (oder Phasen) der Analogiebildung bedient er sich klassischer Analogien der Form  $A : B = C : D$ .

Er teilt die sechs Teilprozesse zudem in drei Arten ein:

[ I ] Identifikation von Attributen

[ V ] Vergleich von Attributen

[ Ü ] Überprüfen der Analogie

Die sechs Phasen der Analogiebildung bezeichnet Sternberg folgendermaßen:

**Encoding:** Bestimmung aller relevanten Attribute der beteiligten Objekte [I].

**Inference:** Bestimmung des relevanten Zusammenhangs zwischen den Objekten A und B im Ausgangsbereich [V].

**Mapping:** Bestimmung des relevanten Zusammenhangs zwischen dem Objekt A aus dem Ausgangsbereich und dem Objekt C im Zielbereich [V].

**Application:** Übertragung des Zusammenhangs zwischen den Objekten A und B im Ausgangsbereich auf das Objekt C und potentielle Kandidaten für D im Zielbereich [V].

**Justification:** Überprüfen der Alternativen für D [V - optional]

**Preparation-Response:** Entscheidung für eine Antwortalternative und Kontrolle des Lösungsprozesses [Ü].

In verschiedenen Experimenten zur Bildung von klassischen Analogien gelingt es Sternberg das Auftreten der sechs Phasen nachzuweisen. Grundlage seiner Beobachtungen bildet dabei die Annahme, dass sich die Zeit, die zur Lösung einer solchen Aufgabe benötigt wird, additiv aus der für jede einzelne Phase benötigten Zeit zusammensetzt (*combination rule*):

„Response time is hypothesized to equal the sum of the amounts of time spent on each component operation. Hence, a simple linear model predicts response time as the sum across the different component operations of the number of times each component operation is performed (as an independent variable) multiplied by the duration of that component operation (as an estimated parameter).“ (S. 137)

Sternberg nimmt außerdem an, dass die Aufgabenschwierigkeit direkt mit der benötigten Bearbeitungszeit zusammenhängt, so dass sich z. B. im Encoding-Prozess die Bearbeitungszeit für diesen Teilbereich verdoppelt, wenn sich die zu identifizierende Zahl der Objektattribute verdoppelt.

In der Aufgabenkonstruktion für die Experimente zum Nachweis der einzelnen Analogiebildungsphasen schlagen sich diese Grundannahmen darin nieder, dass Sternberg die zu erwartenden Zeiten, die beispielsweise für Encoding, Infering und Mapping beim Lösen der Analogieaufgabe benötigt werden, durch das Auftreten identischer Objekte im Ausgangsbereich und/oder Zielbereich gezielt variiert. Seine empirischen Beobachtungen stützen die Hypothese über die Existenz der verschiedenen Phasen. Sternberg stellt vier verschiedene theoretische Modelle für den Analogiebildungsprozess in Form von Flussdiagrammen vor, die sich darin unterscheiden, auf welche Weise die Phasen der Analogiebildung zu einer Strategie zusammengefügt werden können. Konkreter unterscheidet er die Modelle danach, ob in den verschiedenen Phasen des Attributvergleichs, also während des Infering-, Mapping- bzw. Applying-Prozesses, die Attribute der einzelnen Objekte erschöpfend zum Vergleich herangezogen werden, oder nur so viele Attribute verglichen werden, bis eine geeignete Relation zwischen den Objekten gefunden ist. Für den Applying-Prozess unterscheidet er schließlich noch zwischen sequenzieller und alternierender Vergleichsstrategie, also danach, ob zunächst alle möglichen Attribute für die erste Analogieoption verglichen werden, bevor zur nächsten Option übergegangen wird, oder ob zunächst eine Eigenschaft für alle möglichen Kandidaten untersucht wird.

Es gelingt ihm zunächst, im Rahmen dieser Modelle Lösungsprozesse für verschiedene Arten von Analogieaufgaben theoretisch zu beschreiben. Er arbeitet im Rahmen seiner Untersuchungen zwar durchgehend mit klassischen Analogien, unterscheidet dabei jedoch zwei verschiedene Aufgabentypen. Beim ersten Aufgabentyp muss entschieden werden, ob eine angegebene Analogie richtig ist oder falsch (*True-False-Analogien*). Der zweite Aufgabentyp stellt verschiedene Antwortoptionen zur Verfügung, von denen eine ausgewählt werden muss (*Forced-Choice-Analogien*).

In einer quantitativen Untersuchung benutzt er sowohl *True-False-Analogien* als auch *Forced-Choice-Analogien* mit vier verschiedenen Inhaltsbereichen *Körperteile, verbale Analogien, Geometrie, Tiernamen*. Er kann zwei der von ihm entwickelten theoretischen Prozessmodelle verwerfen, eines tritt manchmal und eines tritt überwiegend auf.

Natürlich ist für eine Übertragung von Sternbergs Theorie auf den Analogiebegriff, wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, problematisch, dass sich die Beschreibung der Phasen nur auf klassische Analogien bezieht und entsprechend der experimentelle Nachweis auch lediglich mit solchen Analogien geführt wurde. Tatsächlich wird verschiedentlich darauf hingewiesen, dass die Phasen aus Sternbergs Theorie nicht immer alle und nicht immer in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden (z. B. Gentner, 1989). Insbesondere bei leichten Analogieaufgaben werden einzelne Phasen ausgelassen (Sheard & Readance, 1988; vgl. auch Klauer, 2011, S. 82 f.). Auch Aßmus, Fritzlär & Förster (2015) stützen sich auf ein Verlaufsmodell der Analogiebildung, dem verschiedene Phasen zugrunde liegen und stellen ebenfalls fest:

„Wird tatsächlich eine Analogie genutzt, werden möglicherweise nicht alle Phasen des Modells [...] durchlaufen, es könnten aber auch weitere Rücksprünge stattfinden. In diesem Sinne können diese Phasen als deskriptive Module aufgefasst werden, die sich für den jeweiligen Einzelfall sowohl in ihrer Art als auch in ihrer Reihenfolge spezifisch ausprägen.“ (S. 115)

Trotzdem besteht auch in den Arbeiten, die komplexere Analogien im Blick haben, Einvernehmen darüber, dass bestimmte Phasen für den Analogiebildungsprozess charakteristisch sind. Mit Rekurs auf Anderson & Thompson (1989), Novick (1988), Ross (1989), Thagard (1988) und einige andere schreibt Ratterman (1997):

„There are many different processes which have been proposed to have a role in analogical problem solving, but researchers have traditionally focussed on five: *representation, retrieval, mapping, adaption, and learning* [...]. When presented with a problem the solver must first construct a *representation* of the problem and the problem domain. Next, the solver must try to *retrieve* any representations of stored situations that she may have encountered in the past that could be relevant to the present problem. Once the potential solution is retrieved, the solver must then *map* the relations between the potential solution and the problem to be solved. If the correct solution is retrieved, the solver must *adapt* it for use in this particular problem. Finally the solver may *learn* from the solution of this particular problem, possibly acquiring new rules or techniques or modifying the conceptual representation of her knowledge (Novick, 1988).“ (S. 248, Hervorhebungen im Original)

Nebenbei wird hier noch einmal deutlich, dass die Übertragung von Operationen einen zentralen Teil der Analogiebildung darstellt und das Bilden von Analogien eine wichtige Bedeutung bei der Begriffsbildung sowie beim Regel- und Handlungslernen einnimmt.

Für die vorliegende Arbeit wird der Prozesscharakter der Analogiebildung in Anlehnung an die obigen Ausführungen Sternbergs und Rattermans in vier Phasen berücksichtigt:

1. **Strukturieren:** Der Lerner ordnet Objekte, Relationen oder Handlungen im Ausgangs- oder Zielbereich und entwickelt entsprechende mentale Repräsentationen.
2. **Abbilden:** Der Lerner stellt Entsprechungen zwischen Objekten, Relationen oder Handlungen im Ausgangs- und im Zielbereich her.
3. **Schließen:** Der Lerner ergänzt fehlende Entsprechungen im Zielbereich und kommt so zu neuen Erkenntnissen.
4. **Beurteilen:** Der Lerner überprüft die Gültigkeit der gewonnenen Erkenntnisse im gegebenen Kontext.

Weil einerseits die empirische Untersuchung zur vorliegenden Arbeit die Beantwortung der eingangs gestellten Fragen (vgl. Einleitung) im Blick hat und andererseits methodische Gründe dafür sprechen (vgl. Abschnitt 3.1.1), liegt der Schwerpunkt dabei auf der Beobachtung von Analogiebildungsprozessen beim Arbeiten mit gelösten Beispielaufgaben. Die Suche nach einem geeigneten Ausgangsbereich (*source*), also die Phase des *Infering* aus Sternbergs Modell (bzw. die von Ratterman genannte Phase des *Retrieval*), spielt demnach im gegebenen Setting nur eine untergeordnete Rolle. Deshalb sollen, wie z. B. auch von Holyoak (1984) und Holyoak, Junn & Billmann (1984) vorgeschlagen, die beiden Phasen *Encoding & Infering* (bzw. *Representation & Retrieval*) zusammengefasst werden. Holyoak, Junn & Billermann (1984) beschreiben die Aktivität in dieser Phase als „constructing mental representations of a known analog (the base) and of the novel analogous problem (the target)“ (S. 2043). Wie oben beschrieben, werden also die Objekte, Relationen und Handlungen im Ziel- und im Ausgangsbereich strukturiert und zu mentalen Repräsentationen verdichtet.

Die Phasen der Analogiebildung bilden also, auch wenn damit nicht zwingend eine entsprechende Chronologie festgelegt wird, den Prozesscharakter der Analogiebildung ab. Für die vorliegende Arbeit wird damit eine zweite Dimension der Analogiebildung festgelegt.

## 1.5 Analogiebildung – ein Zwei-Dimensionen-Modell

Mit den bisherigen Ausführungen tritt das theoretische Konstrukt, auf dessen Grundlage Prozesse der Analogiebildung betrachtet werden sollen, nun deutlich hervor: Mit den Ebenen der Analogiebildung (vgl. Abschnitt 1.2.4) wird eine erste Dimension und mit den Phasen der Analogiebildung (vgl. Abschnitt 1.4.2) eine zweite Dimension der Analogiebildung festgelegt. Führt man diese beiden Dimensionen zusammen, so ergibt sich ein zweidimensionaler „Prozessraum“ (im Folgenden: Zwei-Dimensionen-Modell), in dem sich Analogiebildungsprozesse abspielen. Den obigen Darstellungen zufolge findet Analogiebildung also auf verschiedenen Ebenen und in verschiedenen Phasen statt und jeder Zeitpunkt des Denkprozesses lässt sich einer Ebene und einer Phase zuordnen. Entsprechend lässt sich die Chronologie eines solchen Prozesses als zusammenhängender Weg im Zwei-Dimensionen-Modell darstellen. Der Verlauf des Wegs wird dabei durch die eben beschriebene Zuordnung einzelner Denkabschnitte zu den diskreten Feldern des „Prozessraums“ festgelegt. Mit den obigen Ergebnissen gilt darüber hinaus: Sowohl die Ebenen, als auch die Phasen der Analogiebildung können dabei in beliebiger Reihenfolge und auch mehrfach durchlaufen werden. Weiter können sowohl erfolgreiche als auch gescheiterte Analogiebildungsprozesse als Weg im Zwei-Dimensionen-Modell dargestellt werden (vgl. Abb. 9).

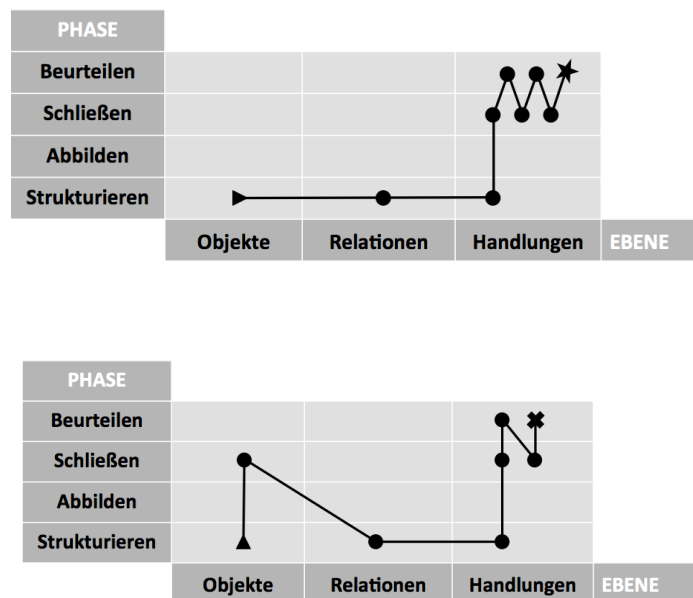


Abb. 9: Wege der Analogiebildung im Zwei-Dimensionen-Modell – ein erfolgreicher Analogiebildungsprozess (oben) und ein gescheiterter Analogiebildungsprozess (unten).

Die hier formulierten Annahmen wurden im Vorfeld ausführlich dargestellt und mit Rekurs auf den aktuellen Stand der Forschung gewissenhaft begründet. Die beiden genannten Dimensionen der Analogiebildung wurden auf diese Weise bislang noch nicht miteinander

in Beziehung gesetzt. Deshalb kann hier nur von Hypothesen gesprochen werden, deren Gültigkeit für den weiteren Verlauf der Arbeit vorausgesetzt werden muss. Die Ergebnisse dieser Arbeit müssen also stets vor dem Hintergrund des hier entwickelten theoretischen Konstrukts gesehen und dürfen nicht losgelöst von den daraus abgeleiteten Arbeitshypothesen betrachtet werden. An geeigneter Stelle wird auf diese Verbindung zurückzukommen sein.

### Zusammenfassung: Arbeitshypothesen

- Jedem Zeitpunkt eines Analogiebildungsprozesses lässt sich eine Ebene und eine Phase der Analogiebildung zuordnen.
- Analogiebildungsprozesse lassen sich demnach in ihrer Chronologie als Wege im Zwei-Dimensionen-Modell darstellen.
- Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser Wege lassen sich auf der Grundlage der Weg-Diagramme im Zwei-Dimensionen-Modell untersuchen und beschreiben.

## 2 Forschungsfragen

Möchte man der Tatsache Rechnung tragen, dass das Zwei-Dimensionen-Modell als theoretische Grundlage auf der Analogiebildungsprozesse hier erforscht werden sollen, in dieser Form neu ist, kommen zunächst nur qualitative Fragestellungen in den Sinn. Insbesondere muss die Frage beantwortet werden, ob die Wahl des Modells überhaupt aussagekräftige Ergebnisse liefert. Deshalb zunächst:

### **Frage 1:**

Wie sehen Analogiebildungsprozesse als „Wege“ im dargestellten Zwei-Dimensionen-Modell aus?

Stellt sich bei Beantwortung der Frage 1 heraus, dass die oben formulierten Arbeitshypothesen nicht nur tragfähig sind, sondern sogar Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei der Betrachtung von „Wegen der Analogiebildung“ im Zwei-Dimensionen-Modell zutage fördern, so liegt die Frage nach einer Kategorisierung dieser Wege nahe. Deshalb:

### **Frage 2:**

Lassen sich die „Wege der Analogiebildung“ (sowohl für gelungene, als auch für gescheiterte Analogiebildungsprozesse) klassifizieren?

Da es beim Lernen von Mathematik mittels Analogiebildung, wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben, vor allem darauf ankommt, einen Transfer auf der mathematischen Handlungsebene herzustellen, ist der Übergang von der Struktur- auf die Handlungsebene von besonderer Bedeutung. Versteht man Analogiebildung in erster Linie als Prozess, so ist es der Übergang von den Phasen des Strukturierens und Abbildens hin zur Phase des Schließens, der besonderes Gewicht hat. Vergleicht man erfolgreiche und gescheiterte Wege der Analogiebildung, so sollte das Augenmerk insbesondere auf diese Übergänge gerichtet werden, da hier mögliche Ursachen für das Scheitern von Analogiebildung vermutet werden können. Etwas allgemeiner:

**Frage 3:**

Welche Rolle spielen die einzelnen Phasen und Ebenen sowie die Übergänge dazwischen für den Analogiebildungsprozess und dessen Gelingen?

Und damit zusammenhängend:

**Frage 4:**

Welche Schlussfolgerungen können für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten aus den Antworten auf die Fragen 1 bis 3 gezogen werden?

Nachdem nun die Fragestellungen der vorliegenden Forschungsarbeit geklärt sind, müssen die Antworten auf der Grundlage realer Daten gegeben werden. Die Erhebung der erforderlichen Daten muss dabei einer zu den Fragestellungen passenden Methodologie folgen und deren Auswertung und Interpretation wiederum muss sich der passenden Methoden bedienen. Im nachfolgenden Kapitel werden sowohl die Methodologie als auch die verwendeten Methoden auf ein forschungstheoretisches Fundament gestellt und ausführlich begründet, bevor im daran anschließenden Kapitel die konkreten Daten vorgestellt, ausgewertet und vor dem Hintergrund der hier entwickelten theoretischen Grundlage interpretiert und diskutiert werden.



### 3 Analogiebildungsprozesse erforschen

Möchte man einen Prozess im Allgemeinen und einen Lernprozess wie das Bilden von Analogien im Speziellen beobachten und beschreiben, muss zunächst sichergestellt sein, dass dieser Prozess im Beobachtungszeitraum überhaupt stattfindet. Im vorliegenden Fall muss also eine Lernsituation hergestellt werden, die den Transfer mittels Analogiebildung im besten Fall gewährleistet, zumindest aber ermöglicht. Da es sich bei einem Lernprozess um einen mentalen Vorgang handelt, der sich der direkten Beobachtung entzieht, müssen zusätzlich Maßnahmen ergriffen werden, die es erlauben, den Prozess (ggf. indirekt) zu beobachten. Sollen die Beobachtungen anschließend bezüglich eines vorliegenden Prozessmodells systematisch beschrieben werden, ist zu klären, auf welcher Datengrundlage dieses Ziel am ehesten erreicht werden kann und welche Kriterien eine Einordnung der gewonnenen Beobachtungsdaten in das vorliegende Modell erlauben.

Zusammenfassend sind also vier Fragen zu klären:

1. Wie können Analogiebildungsprozesse in Gang gesetzt werden?
2. Wie können Analogiebildungsprozesse sichtbar und damit beobachtbar gemacht werden?
3. Welche Daten können und sollen zur Beschreibung von Analogiebildungsprozessen herangezogen werden?
4. Nach welchen Kriterien können die Daten auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells systematisiert werden?

Die ersten beiden Fragen stehen im Zentrum der methodischen Überlegungen. Um Analogiebildungsprozesse anzustoßen (Frage 1), muss zunächst geklärt werden, auf welche Weise der Ausgangsbereich, also der Arbeitsbereich, aus dem gelernte Strukturen und Handlungen übertragen werden sollen, grundgelegt wird. Es geht also darum, auf einer wissenschaftlich abgesicherten Grundlage Struktur- und Handlungswissen so bereitzustellen, dass eine Basis für Transferleistungen vorhanden ist. Eine entscheidende Rolle für das Auftreten von Transfer bei der konkreten Aufgabenbearbeitung spielt dabei die Darbietungsform der Aufgabensets (vgl. Abschnitt 3.1.1). Weiter müssen Aufgaben bzw. Aufgabensequenzen entwickelt werden, bei deren Bearbeitung zum einen Analogiebildung erwartet werden kann und die zum anderen für das Lernen von Mathematik inhaltlich bedeutsam sind (vgl. Abschnitt 3.1.2). Sichtbar und beobachtbar werden Analogiebildungsprozesse dadurch,

dass der Prozess der Aufgabenbearbeitung auf mehreren Ebenen dokumentiert und festgehalten wird (Frage 2). Soll gleichzeitig die Lernsituation nicht zu artifiziell sein, bedarf es eines speziell konstruierten Settings, in dessen Rahmen Gedanken beim Lösen von Aufgaben ungezwungen verbalisiert werden können (vgl. Abschnitte 3.1.5 und 3.1.6).

Die Antworten auf die Fragen 3 und 4 bilden den Kern des methodologischen Vorgehens. Zunächst ist hier festzuhalten, dass Denk- und Lernprozesse wie das Bilden von Analogien nicht direkt beobachtet werden können. Es müssen deshalb Anhaltspunkte für deren Ablauf auf ganz verschiedenen Ausdrucksebenen (Verbalisierung, Verschriftlichung, Gestik, Mimik) gefunden werden. Entsprechend kann sich die Untersuchung derartiger Prozesse weder auf eine Sorte von Daten beschränken, noch kann sie die gesammelten Daten verschiedener Art unverbunden nebeneinander stehen lassen (Frage 3, vgl. Abschnitt 3.2.2). Da der Untersuchungsgegenstand ein Prozess ist, der bei der Bearbeitung von geeigneten Aufgaben auftritt, muss das auszuwertende Datenmaterial diesen Prozess auch ausreichend abbilden. Prozessergebnisse alleine, also etwa die Schülerdokumente der gelösten Aufgaben oder die Präsentation der Ergebnisse, genügen als Datengrundlage zu seiner Beschreibung nicht. Die Systematik, in welche die gesammelten Daten schließlich einzuordnen sind, ist durch das vorliegende theoretische Konstrukt vorgegeben. Eine Vorschrift zu definieren, auf deren Grundlage die Zuordnung erfolgt (Frage 4), ist theoriebildender Teil des Forschungsprozesses und wird in einer Vorstudie aus dem Datenmaterial entwickelt (Abschnitt 3.2.3).

## 3.1 Methodische Überlegungen

### 3.1.1 Die Initiierung von Analogiebildungsprozessen

Will man Analogiebildungsprozesse untersuchen, also Lernprozesse, deren Kernelement das Übertragen von Strukturen und Operationen von einem Ausgangsbereich auf einen Zielbereich ist, muss man zunächst klären, wie ein Transfer dieser Art zum Zweck der Untersuchung am effektivsten initiiert werden kann. Natürlich wird es darum gehen, Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung geeigneter Aufgaben zu beobachten. Aßmus & Förster (2015) benennen im Vorfeld zu ihren Untersuchungen ein grundsätzliches Problem bei der Initiierung von Analogiebildungsprozessen:

„Analoges Problemlösen, bei dem das Quellproblem eigenständig gesucht und aktiviert wird, lässt sich unter Laborbedingungen nicht gezielt initiieren und erfassen, sondern bestenfalls zufällig beobachten.“ (S. 3)

Deshalb muss zuerst die Art und Weise festgelegt werden, in der die Schüler mit den Aufgaben konfrontiert werden sollen, um möglichst sicherzustellen, dass Analogiebildung im Beobachtungszeitraum überhaupt stattfindet.

#### Problemlösen vs. Gelöste Beispiele

Im Wesentlichen kommen hier zwei Vorgehensweisen in Frage, die sich vor allem hinsichtlich der Frage unterscheiden, ob die Probanden schon in der „Lernphase“, also dann, wenn im Ausgangsbereich das Wissen grundgelegt wird, selbständig arbeiten sollen, oder ob die Grundlagen der Analogiebildung eher im Rahmen einer Instruktion gebildet werden sollen. Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten:

1. Die Probanden sind bei der Bearbeitung der Aufgaben von Anfang an weitgehend auf sich gestellt. Die Untersuchung unterscheidet eine „Lernphase“, in der Problemstellungen bearbeitet werden, auf deren Lösung später Bezug genommen werden soll und eine „Testphase“, in der weitere Problemstellungen bearbeitet werden. In der Testphase wird der Transfer erwartet.
2. Den Probanden werden in der „Lernphase“ zunächst einige Aufgabenbeispiele mit Lösungen im Rahmen einer Instruktion präsentiert. In einer „Testphase“ lösen sie weitere Aufgaben ohne Instruktion. In dieser Phase wird der Transfer zu den gelösten Aufgabenbeispielen erwartet.

Vor allem zahlreiche Untersuchungen zum *example based learning*, bei denen die Effektivität von Lernprozessen bezüglich der Transferleistung der Probanden untersucht werden, widmen sich der Fragestellung, welche dieser beiden Methoden zu besseren Transferleistungen führt. Die Befunde hierzu sind relativ eindeutig, hängen aber davon ab, in welcher

Phase der Wissensaneignung sich der Lernende befindet (s. u.). Renkl & Atkinson (2003) fassen den diesbezüglichen Forschungsstand wie folgt zusammen:

„Cognitive load research has shown that learning from worked-out examples, in comparison to problem solving, is very effective during initial stages of cognitive skill acquisition. In later stages, however, solving problems is superior.“ (S. 15)

Erklärt werden können diese Resultate, vor dem Hintergrund der *Cognitive-Load-Theorie*, durch die Verschiedenartigkeit der Belastung, der das menschliche Arbeitsgedächtnis beim Arbeiten mit gelösten Aufgabenbeispielen einerseits bzw. im Rahmen von Problemlöseprozessen andererseits ausgesetzt ist.

Im Folgenden werden zunächst die wesentlichen Ergebnisse der beiden Forschungsrichtungen dargelegt, bevor auf dieser Grundlage eine Entscheidung für das methodische Vorgehen begründet wird.

#### Cognitive-Load-Theorie

Wissenserwerb und Wissenstransfer finden an der Schnittstelle zwischen dargebotenen Informationen einer Lernumgebung und der kognitiven Struktur des Lernenden statt. Die *Cognitive-Load-Theorie* versucht die Abhängigkeit der Effektivität eines Lernprozesses und des auftretenden Transfers von der Interaktion zwischen Informationsstrukturen und den Strukturen des menschlichen Informationsverarbeitungssystems zu beschreiben. Die „architektonische Struktur“ des menschlichen Informationsverarbeitungssystems, insbesondere des Arbeitsgedächtnisses, die den Annahmen der *Cognitive-Load-Theorie* zugrunde liegt, wird von Sweller et al. (1998) wie folgt beschrieben:

„We have a limited working memory that deals with all conscious activities and an effectively unlimited long-term memory that can be used to store schemas of varying degrees of automaticity. Intellectual skill comes from the construction of large numbers of increasingly sophisticated schemas with high degrees of automaticity. Schemas both bring together multiple elements that can be treated as a single element and allow us to ignore myriads of irrelevant elements. Working memory capacity is freed, allowing processes to occur that otherwise would overburden working memory. Automated schemas both allow fluid performance on familiar aspects of tasks and – by freeing working memory capacity – permit levels of performance on unfamiliar aspects that otherwise might be quite impossible.“ (S. 258)

Als zentraler Aspekt für die Effektivität von Wissenserwerb und Wissenstransfer wird im Rahmen der *Cognitive-Load-Theorie* also die Entlastung des begrenzten Arbeitsgedächtnisses während des Lernprozesses identifiziert. Diese Erkenntnisse ziehen unmittelbar Forderungen nach sich, die auf eine entsprechende Gestaltung von Lernumgebungen abzielen, in denen effektiver Transfer möglich wird:

„These structures and functions of human cognitive architecture have been used to design a variety of novel instructional procedures based on the assumption that working memory load should be reduced and schema construction encouraged.“ (Ebd., S. 251)

Gleichzeitig unterscheiden Sweller et al. (1998) in diesem Zusammenhang verschiedene Arten der kognitiven Belastung (*Cognitive Load*).

Mit *Intrinsic Load* wird die Belastung des Arbeitsgedächtnisses bezeichnet, deren Ursache zum einen in der Diskrepanz zwischen dem Vorwissen des Lernenden und des Lernmaterials, also in der subjektiv wahrgenommenen Komplexität des Materials zu suchen ist (vgl. Renkl et al., 2003). Eine solche Belastung „kann nicht ohne weiteres durch instruktionale Intervention verändert werden“ (Ebd., S. 94). Zum anderen steigt der *Intrinsic Load*, wenn die zu lernenden Elemente<sup>33</sup> stark miteinander verknüpft sind und dadurch simultan gelernt werden müssen (Sweller et al., 1998):

„The working memory load imposed depends on the number of elements that must be processed simultaneously in working memory, and the number of elements that must be processed simultaneously, in turn, depends on the extent of element interactivity.“  
(S. 259)

Über mathematische Lerngegenstände schreiben Sweller et al. (1998) in diesem Zusammenhang: „Mathematical tasks tend to be high in element interactivity“ (S. 260). Beim Lernen mathematischer Strukturen und Schemata ist also davon auszugehen, dass die Belastung des Arbeitsgedächtnisses bereits aufgrund der immanenten Struktur des zu lernenden Stoffs hoch ist.

*Extraneous Load* ist eine Belastung des Arbeitsgedächtnisses, die wesentlich von der Darbietung des Lernmaterials abhängt. Diese Art der Belastung entsteht durch Lernvorgaben, die „nicht unmittelbar dem Wissenserwerb dienen (z. B. Berechnen von Größen beim Lösen physikalischer Probleme)“ (Renkl et al., 2003, S. 94). Sie wird deshalb für den Lernprozess als wenig dienlich, ja sogar als unnötig und hinderlich angesehen (vgl. Sweller et al., 1998):

„[...] extraneous cognitive load is unnecessary cognitive load.“ (S. 259)

Stellen die Art von Darbietung und Instruktion des Lernstoffs die Ursache für *Extraneous Load* dar, kann im Umkehrschluss eine Reduktion der externen Belastung nur durch eine Anpassung auf diesem Gebiet erfolgen (Sweller, 1994):

„[...] extraneous cognitive load should be an important consideration when designing instruction. Extraneous cognitive load, by definition, is entirely under instructional control. It can be varied by varying the manner in which information is presented and the activities required of students.“ (S. 303)

---

<sup>33</sup> Sweller et al. (1998) fassen den Begriff des zu lernenden Elements in seiner allgemeinsten Form auf: „An element is anything that has been or needs to be learned.“ (S. 259)

Anders als beim *Intrinsic Load* kann der *Extraneous Load* also durch instruktionale Intervention beeinflusst werden.

Die Art der Belastung des Arbeitsgedächtnisses, die auf den eigentlichen Lernprozess zurückzuführen ist, also auf die kognitive Auseinandersetzung mit dem Lernmaterial und die Konstruktion von Schemata, wird im Rahmen der *Cognitive-Load-Theorie* als *Germane Load* bezeichnet. Auch der *Germane Load* kann von der Darbietung und der Instruktion des Lernstoffs beeinflusst werden.

Insgesamt ergibt sich für das Design einer Lernumgebung, in der Wissensaneignung und Wissenstransfer effektiv stattfinden sollen, die Forderung nach einer Minimierung des *Extraneous Load* einerseits und der Maximierung des *Germane Load* andererseits. Sweller et al. (1998) formulieren dies wie folgt:

„Appropriate instructional designs decrease extraneous cognitive load but increase germane cognitive load.“ (S. 259)

Doch wie kann eine solche Lernumgebung aussehen? Welche Aufgabe kommt der Lehrperson zu? Die Beantwortung dieser Fragen hat für die vorliegende Arbeit zweierlei Relevanz: Zum einen können daraus Erkenntnisse gewonnen werden, die sich auf das Untersuchungsdesign beziehen. Werden im Rahmen der Untersuchung Lernumgebungen verwendet, die den Ergebnissen der Forschungen zur *Cognitive-Load-Theorie* zufolge einen effektiveren Transfer erlauben, ist die Wahrscheinlichkeit größer, die gewünschten Analogiebildungsprozesse auch tatsächlich beobachten zu können. Zum anderen können diese Ergebnisse zusammen mit der hier vorliegenden Forschungsarbeit Anhaltspunkte liefern, wie Analogiebildungsprozesse im Mathematikunterricht initiiert, analysiert und unterstützt werden können.

#### Example-based Learning

An dieser Stelle kann man wieder auf die beiden eingangs des Abschnitts formulierten Möglichkeiten der Vorgehensweise zur Initiierung von Analogiebildungsprozessen zurückkommen. Verkürzt wiederholt muss die Frage beantwortet werden, ob Transfer besser im Rahmen von Problemlöseumgebungen gelingt, oder ob die gewünschten Lerneffekte dann eher auftreten, wenn die Schüler zunächst entsprechende gelöste Aufgabenbeispiele vorgestellt bekommen.

Die Befunde in diesem Bereich sind relativ eindeutig und beziehen sich in ihren Interpretationen meist auf die *Cognitive-Load-Theorie*. Der *worked example effect*, der im Rahmen der Forschungen zum *example based learning* den Vorteil von beispielbasierten gegenüber problembasierten Lernumgebungen beschreibt, wird z. B. von Sweller & Cooper (1985) und später auch von Paas & van Merriënboer (1994), von Renkl & Atkinson (2003) oder von Wittwer & Renkl (2010) jeweils mit entsprechendem Bezug auf die vorherigen Autoren und unter Berufung auf die *Cognitive-Load-Theorie* übereinstimmend folgendermaßen erklärt:

Steht ein Lerner am Anfang eines Lernprozesses, in dessen Zuge er sich neue Fertigkeiten und Strategien aneignen soll, ist der *Intrinsic Load* besonders hoch, „da das Erkennen und Nutzen größerer Bedeutungseinheiten noch nicht möglich ist“ (Renkl et al., 1993, S. 95) – die Diskrepanz zwischen Vorwissen und dem dargebotenen Lernstoff ist hoch. Kommt in dieser Phase des Lernens hoher *Extraneous Load* hinzu, ist das Arbeitsgedächtnis ausgelastet. Eine zusätzliche Belastung durch den eigentlichen Lernprozess (*Germane Load*) führt zur Überlastung des Arbeitsgedächtnisses – der Lerner ist überfordert. Dies äußert sich in längeren Lernzeiten für den gleichen Lernerfolg bzw. geringerer Transferfähigkeit bei gleicher Lernzeit (vgl. z. B. Sweller & Cooper, 1985):

„It was found, that not only did worked examples, as expected, require considerably less time to process than conventional problems, but that subsequent problems similar to the initial ones also were solved more rapidly.“ (S. 59)

Bezogen auf problembasierte Lernumgebungen konstatieren Wittwer & Renkl (2010) mit Rekurs auf Sweller (2005) und Sweller et al. (1998):

„When confronted with a problem, learners who are unfamiliar with a knowledge domain usually engage in domain-independent solution strategies such as means-end-analysis to approach the current problem. This search, however, puts high demands on the limited capacity of the learners' working memory and normally does not lead to the construction of problem-solving schemata (e.g., Sweller and Chandler 1994). As a result, learners who are left to their own devices during problem solving are unlikely to achieve a satisfactorily deep understanding about the principles relevant to the solution process so that they fail to solve transfer problems (e.g., Renkl et al. 1996).“ (S. 394)

Vor allem die für das Arbeiten in einer problemorientierten Lernumgebung typische Heuristik der Mittel-Ziel-Analyse wird dafür verantwortlich gemacht, dass Lernen durch die starke Auslastung des Arbeitsgedächtnisses nur in geringem Maß stattfindet, „da die Lernenden simultan den aktuellen Problemzustand, den gewünschten Zielzustand, mögliche Unterziele, Unterschiede zwischen den Zuständen und Operationen zur Reduktion dieser Unterschiede verfügbar halten müssen. Zwar ist die Mittel-Ziel-Analyse hilfreich beim Problemlösen, sie zielt jedoch nicht auf den Erwerb von Verständniswissen ab. Sie induziert damit hohen Extraneous Load und vermindert die Nutzung der Kapazität für lernförderlichen Germane Load.“ (Renkl et al., 2003, S. 95).

Das Lernen aus Beispielen hingegen vermag den Lernenden von Problemlöseaktivitäten zu entlasten. Die frei werdende Kapazität des Arbeitsgedächtnisses kann dazu genutzt werden, Strukturen und Schemata zu erkennen und zu begreifen – es wird also Verständnis aufgebaut (*germane load*), das anschließend zum Transfer befähigt. Wittwer & Renkl (2010) formulieren dies wie folgt:

„In contrast, providing worked examples prevents learners from engaging in irrelevant search processes and helps them to devote their attention to the presented problem states to solve a problem in a meaningful way. This frees up cognitive resources that can be

used to actively engage in understanding the solution procedure, ideally, with reference to the underlying domain principle. Hence, worked examples create a lower demand on the learners' working memory and support them in constructing problem-solving schemata. Therefore, studying worked examples is helpful to acquire knowledge that can be flexibly applied to new problem-solving situations (for more details, see, e.g., Atkinson et al. 2000; Renkl 2005; Van Gog et al. 2004).“ (S. 394)

Potentiell sind also beispielbasierte Lernumgebungen dazu geeignet, Transfer auf effektive Weise zu induzieren – für die vorliegende Arbeit scheint dies ein gangbarer Weg, um Analogiebildungsprozesse anzustoßen. Dennoch muss auch festgehalten werden: „Although asking learners to study worked examples has been shown to be an effective means of instruction, successful learning from worked examples does not always occur naturally“ (Wittwer & Renkl, 2010, S. 394). Die Bedingungen, unter denen beispielbasiertes Lernen zu effektivem Transfer führt, unter denen also die Hoffnung besteht, Analogiebildungsprozesse in Gang zu bringen, müssen im Folgenden weiter elaboriert werden.

Dazu können in einem ersten Schritt allgemeine Merkmale beispielbasierter Lernumgebungen festgehalten werden, die nachweislich zu effektivem Transfer führen. Wittwer und Renkl (2010) schreiben hierzu (S. 393f):

„Typically, example-based learning is designed in the following way: First, learners receive a general instruction in which concepts and principles of a domain are introduced. Second, learners study worked examples that are an instance of these concepts and principles. The worked examples normally consist of three components presented to the learners: (1) the formulation of a definite problem (e.g., a combination problem), (2) the solution steps undertaken (i.e., operators; these steps are sometimes missing), and (3) the final solution itself (i.e., the goal). Third, in addition to studying worked examples, learners are often required to solve problems in the learning phase.“

Und weiter:

„There is abundant empirical evidence showing that example-based learning designed in this way is more effective than learning by solving problems alone. This is particularly true for early phases of cognitive skill acquisition.“

Noch konkreter kommen Atkinson et al. (2000) unter Berücksichtigung der einschlägigen Forschungsergebnisse zu einem Vorschlag für ein „*Lesson & Example Design*“ für beispielbasiertes Lernen. Sie identifizieren dabei zunächst ursächliche Faktoren für die Effektivität beispielbasierten Lernens und führen diese zusammen. Die Gruppierung dieser Faktoren führt schließlich einerseits zu Forderungen an die einzelne Aufgabe und deren Darbietung, andererseits liefert sie Bedingungen an die Abfolge der gewählten Beispiele. Schließlich müssen noch subjektive Faktoren, insbesondere verschiedene Arten des Umgangs mit gelösten Beispielen, Berücksichtigung finden.

Für das einzelne Aufgabenbeispiel geben Atkinson et al. (2000) mit Rekurs auf Tarmizi & Sweller (1988) den *split-attention effect* auch für das Arbeiten mit gelösten Aufgabenbeispielen



zu bedenken. Tarmizi & Sweller (1988) sprechen vom *split-attention effect*, wenn der Lerneffekt einer Lernumgebung dadurch negativ beeinträchtigt wird, dass der Lernende gezwungen ist, voneinander separierte Informationen aus verschiedenen Informationsquellen und auf verschiedenen Repräsentationsebenen miteinander in Einklang zu bringen und zu einem Gesamtbild zusammenzufügen. Die Untersuchungen von Tarmizi & Sweller (1988) ergaben, dass in einem solchen Fall „guidance provided by worked examples not only failed to facilitate subsequent performance, it actually retarded learning“ (S. 431). In der gleichen Untersuchung können Tarmizi und Sweller (1988) jedoch auch einen Vorschlag zur Vermeidung des *split-attention effects* präsentieren: Es genügt offensichtlich, Erklärungen und Hilfestellungen so darzubieten, dass die jeweiligen Informationen nicht erst separat voneinander verstanden und dann zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass Texterklärungen zu bildlichen Darstellungen in diese integriert werden, um das Arbeitsgedächtnis hier zu entlasten.

Atkinson et al. (2000) schreiben hierzu:

„[...] restructuring the worked example by integrating verbal explanations into a diagram enhanced learning in comparison to conventional problem solving and split-source worked examples.“ (S. 187)

Ward & Sweller (1990) konnten die Ergebnisse von Tarmizi & Sweller (1988) in einem anderen Inhaltsbereich (Physik) und mit anderem Setting (teilnehmende Beobachtung) bestätigen.

Ein zweiter wichtiger Punkt bei der Darbietung gelöster Aufgabenbeispiele betrifft die Strukturierung der Aufgabenlösung. Catrambone konnte in verschiedenen aufeinander aufbauenden Studien (z. B. in Catrambone & Holyoak, 1990; und später in Catrambone, 1998) zeigen, dass die Clusterung einzelner Lösungsschritte zu verschiedenen Bedeutungsabschnitten und die Hervorhebung einzelner Teilziele den Lerner zum Nachdenken darüber anregt, warum die einzelnen Schritte gerade auf diese Weise zusammengefasst wurden. Implizit wird der Lerner so dazu gebracht, über die Tiefenstruktur der Aufgabe und deren Lösung nachzudenken. Nach Catrambone (1998) schneiden Lerner, die mit strukturierten gelösten Aufgaben konfrontiert werden, beim Lösen neuer Probleme erfolgreicher ab:

„[...] the use of labels and short phrases designed to encourage learners to group sets of steps have helped learners to be more successful solving novel problems.“ (S. 374)

Neben den dargestellten Einflussfaktoren einzelner Aufgaben und deren Merkmale auf den Erfolg beispielbasierten Lernens identifizieren Atkinson et al. (2000) auch Faktoren, die sich eher auf die Art und Weise der Darbietung von Beispielaufgaben beziehen und somit einen Hinweis darauf liefern, wie beispielbasiertes Lernen aussehen sollte. Sie unterscheiden dabei verschiedene Einflussgrößen, die auch für die Konstruktion der vorliegenden Aufgabenbeispiele relevant sind.

Am naheliegendsten ist dabei die Frage nach der Zahl der gelösten Aufgabenbeispiele, die nötig sind, um das Auftreten von Transfer bei nachfolgenden Aufgaben möglichst gut sicherzustellen. Reed & Bolstad (1991) konnten in einer Reihe von Experimenten folgendes feststellen:

„Our two examples provided enough information to solve each of the test problems, but students had to selectively use information from both examples to solve six of the eight problems.“ (S. 761)

Einem Teil der Probanden wurde dabei ein einfaches und ein komplexes Lösungsbeispiel dargeboten. Dieser Teil der Probanden schnitt bei der Bearbeitung der Testprobleme deutlich besser ab als der Teil der untersuchten Personen, dem nur eine Aufgabe dargeboten wurde, und auch besser als der Teil der Probanden, dem ein Beispiel mitsamt einer allgemeinen Erklärung zu den einzelnen Lösungsschritten und -strategien vorgelegt wurde. Speziell für Lernumgebungen mit mathematischen Lerninhalten konstatieren Wittwer & Renkl (2010) jedoch:

„[...] studies with mathematics as learning domain yielded a significant effect size. Obviously, adding instructional explanations to worked examples in this domain was helpful for learning. A tentative explanation might be that learners conceive mathematics as a particularly difficult learning domain in which they get unsure when they are left alone without instructional explanations (see also Schworm and Renkl, 2006). Similarly, it is plausible to assume that instructional explanations are helpful in this domain because they can facilitate the understanding of the formal language used in mathematics.“ (S. 405f)

Als wichtiger Hinweis für die konkrete Umsetzung beispielbasierter Lern- und Unterrichtseinheiten vor dem Hintergrund der Forderung nach zeitlicher Effizienz ist der Untersuchung von Reed & Bolstad (1991) zudem zu entnehmen, dass der Vergleich zweier Aufgaben offensichtlich genügt, um die Gemeinsamkeiten in der Lösungsstruktur zu erkennen und auf andere Beispiele zu übertragen – die Darbietung weiterer Beispiele also keinen bemerkenswerten Effekt mehr bewirkt:

„The success of this condition [...] shows that it is not necessary to provide an example for each possible test problem.“ (s. 761)

Als Konsequenz für eine beispielbasierte Lernumgebung formulieren Atkinson et al. (2000) deshalb:

„So, 'at least add a second example' appears to be a basic rule for worked-examples instructional design.“ (S. 202)

Wie sollen solche Beispiele nun im Zusammenhang gestaltet sein? Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede sollen die gelösten Beispielaufgaben aufweisen? Quilici & Mayer (1996) entwarfen für ihre Experimente Aufgaben zu drei Problembereichen der Statistik, die sich innerhalb des Problembereichs im Aufgabenkontext unterschieden. Über die Problembereiche hinweg stimmen die Aufgaben jedoch jeweils in bestimmten Oberflächen-

merkmalen überein. Quilici & Mayer (1996) konnten zeigen, dass Lerner, die für eine Zuordnung der verschiedenen Aufgaben zu einem bestimmten Problembereich strukturelle Ähnlichkeiten heranzogen, die Aufgaben besser lösten als Lerner, die sich bei der Zuordnung auf Oberflächenmerkmale konzentrierten. Sie schlagen deshalb vor, die Strukturerkennung durch eine spezielle Konstruktion der Aufgabensequenzen zu fördern:

„[...] success in categorizing elementary statistics problems can be improved by using techniques for presenting example problems that help students pay attention to structural features rather than to surface features. In particular, the principles underlying structure-emphasizing techniques involve arranging example problems so that (a) each problem type is exemplified by a battery of different cover stories [...] and (b) the same battery of cover stories is used across problem types.” (S. 157)

Da mit dem Fokus auf die Ziele der vorliegenden Arbeit bei der Konstruktion eines adäquaten Untersuchungsdesigns vor allem die Initiierung von Analogiebildungsprozessen im Vordergrund steht, ist die Behandlung mehrerer Problembereiche für die Untersuchung ein untergeordnetes Ziel – relevant für die weiteren Betrachtungen ist hier also vor allem die Bemerkung (a) des Vorschlags von Quilici & Mayer. Bei der Formulierung konkreter Vorschläge, wie Analogiebildungsprozesse im Mathematikunterricht unter Berücksichtigung der hier vorgelegten Untersuchungsergebnisse angestoßen werden können, wird die Idee von Quilici & Mayer wieder in Betracht gezogen werden.

Aus dem gleichen Grund nur am Rande erwähnt seien an dieser Stelle die Untersuchungen von Paas & van Marrienoer (1994), sowie von Trafton & Reiser (1993) bezüglich der Variation von Problemtypen bzw. der Abfolge von gelösten Beispielen und Testaufgaben innerhalb einer Lern- bzw. Unterrichtseinheit. Die beiden Untersuchungen zeigen, dass die Behandlung verschiedener Problemtypen innerhalb einer Lern- bzw. Unterrichtseinheit den Transfer steigern kann. Um dies zu gewährleisten, muss die Lernumgebung jedoch so gestaltet sein, dass die Belastung des Arbeitsgedächtnisses gering bleibt (Paas & van Marrienoer, 1994). Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass gelöste Beispiele und Testaufgaben zu einem Problembereich direkt aufeinander folgen. Als weniger günstig hat es sich erwiesen, wenn zuerst Beispiele zu allen Problembereichen präsentiert werden und anschließend, ebenso gesammelt, die entsprechenden Testprobleme dargeboten werden (Trafton & Reiser, 1993). Die Ergebnisse dieser beiden Untersuchungen sind für das Design der vorliegenden Studie aus genannten Gründen letztlich nicht von besonderer Relevanz, allerdings sollen die Ergebnisse der hier vorliegenden Arbeit in einen Vorschlag zur Initiierung, Analyse und Förderung von Analogiebildungsprozessen münden – an dieser Stelle wird auch ein Rückgriff auf die Untersuchungen von Paas & van Marrienoer (1994) sowie von Trafton & Reiser (1993) wichtig sein.

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten erläutert wurde, warum die Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen hinsichtlich der Initiierung von Analogiebildungsprozessen am vielversprechendsten erscheint und auf welche Weise gelöste Beispiele im Rahmen bei-

spielbasierter Lernumgebungen zu entwerfen bzw. zu organisieren sind, um effektiven Transfer zu erreichen, muss nun noch berücksichtigt werden, dass Lernende auf unterschiedliche Weise mit dem angebotenen Material interagieren. Zum einen ist zu klären, wodurch sich erfolgreiche Lerner im Umgang mit gelösten Beispielen und in der Übertragung gelöster Beispiele auf Testprobleme von schwachen Lernern unterscheiden, und zum anderen ist zu berücksichtigen, dass erfolgreiche Lerner durchaus auf unterschiedlichen Wegen zum Ziel kommen. Auf der Grundlage genauerer Erkenntnisse auf diesem Gebiet können dann Vorschläge für Maßnahmen unterbreitet werden, die einen transferförderlichen Umgang mit den gelösten Aufgaben anstoßen sollen.

Als zentrale Elemente, die für den Erfolg beim Lösen der Testprobleme ausschlaggebend zu sein scheinen, wurden durch verschiedene Arbeiten Selbsterklärungsstrategien im Umgang mit gelösten Aufgabenbeispielen identifiziert. Chi et al. (1989) etwa konstatieren:

„We propose that students learn and understand an example via the explanations they give while studying it. We hypothesize that such self-explanations are important and necessary.“ (S. 148)

Die Autoren beschreiben vier Charakteristika, durch die sich Selbsterklärungsversuche erfolgreicher Problemlöser von denen schwacher Problemlöser unterscheiden, und Renkl (1997) unterscheidet bei erfolgreichen Problemlösern zwei Arten von Selbsterklärungsstrategien. Auf dieser theoretischen Grundlage wurden in zahlreichen Studien Trainingsmöglichkeiten und metakognitive Maßnahmen zur Aneignung erfolgreicher Selbsterklärungsstrategien untersucht. Da für die vorliegende Untersuchung zwar das Wissen über die Effektivität von Selbsterklärungsstrategien relevant ist, nicht aber Maßnahmen zu deren längerfristiger Aneignung, genügt es hier, Hinweise auf kurzfristig wirksame Maßnahmen zur Initiierung von Selbsterklärungsaktivitäten bei den Probanden zu berücksichtigen. Chi et al. (1989) schreiben hierzu:

„The method which permits the most direct assessment of understanding of an example is to examine the explicit explanations that students provide while studying it. Explaining is a mechanism of study that allows students to infer and explicate the conditions and consequences of each procedural step in the example, as well as apply the principles and definitions of concepts to justify them.“ (S. 151)

Während der Fokus der Untersuchungen von Chi et al. (1989) auf der Analyse der Selbsterklärungstechniken und deren Wirksamkeit liegt, sind es zwei andere Punkte, die für die hier vorgestellte Studie von besonderer Bedeutung sind:

1. Um Selbsterklärungsprozesse beobachten zu können, benutzen die Autoren in ihrer Untersuchung die Methode des Lauten Denkens. In einem Labor-Setting mit einzelnen Probanden werden diese aufgefordert, ihre Gedanken beim Durcharbeiten der Beispiele laut zu explizieren.

2. Um den Grad des Verständnisses zu überprüfen, den die Probanden durch ihre Selbsterklärungen erreichen, werden ihre Äußerungen auf der Grundlage eines Kriterienkatalogs untersucht.

Dieser Kriterienkatalog bezieht sich im Wesentlichen darauf, in welchem Umfang Operationen (hier: „actions“), die den gelösten Beispielen zugrunde liegen, im Kontext der Aufgabe einerseits und in ihrer allgemeinen Bedeutung andererseits erfasst werden:

„We postulate that explanations can reveal students' understanding by showing whether or not they know:

1. The conditions of application of the actions;
2. The consequences of actions;
3. The relationship of actions to goals;
4. The relationship of goals and actions to natural laws and other principles.“

(Ebd. S. 151)

In der hier vorliegenden Untersuchung kann zum einen die Aufforderung zum Lauten Denken im Rahmen der Auseinandersetzung mit gelösten Beispielen zeigen, ob Selbsterklärungen stattfinden – ggf. kann die Arbeit der Probanden an dieser Stelle durch entsprechende Aufforderungen in diese Richtung gelenkt werden. Zum anderen kann der obige Kriterienkatalog neben der Selbsteinschätzung der Probanden einen weiteren Anhaltspunkt dafür liefern, wann die Beispielaufgaben verstanden sind und wann demnach zu den Testaufgaben übergegangen werden kann.

#### Zusammenfassung: Initiierung von Analogiebildungsprozessen

Die obigen Ausführungen erlauben es nun, auf einer wissenschaftlich abgesicherten Grundlage, Entscheidungen darüber zu treffen, auf welche Weise in der vorliegenden Untersuchung Analogiebildungsprozesse initiiert werden sollen.

Zunächst sind verschiedene Sequenzen von Aufgaben zu entwickeln, die eine ähnliche Struktur aufweisen. Ausgehend von der gemeinsamen Struktur sollen sich für diese Aufgaben ähnliche Abfolgen mathematischer Operationen (Schemata) finden lassen, die zur Lösung der Aufgaben führen. Die Aufgaben sollen dabei so gewählt werden, dass man davon ausgehen kann, den Probanden sind zwar die notwendigen Grundlagen, nicht jedoch die Struktur der Aufgaben und deren Lösungen geläufig – sie befinden sich also beim Erwerb der dargebotenen Schemata in einem Anfangsstadium. Die Ergebnisse der Studien zum *example based learning* legen dann nahe, dass eine beispielbasierte Untersuchungsumgebung mit größerer Wahrscheinlichkeit zum Auftreten von Transfer mittels Analogiebildung führt als eine problemorientierte Umgebung.

Die „Lernphase“ der Untersuchung, die Phase also, in welcher der Ausgangsbereich (source) der Analogiebildung grundgelegt werden soll, sollte demnach eine Instruktionsphase sein, in der den Probanden gelöste Beispielaufgaben dargeboten werden. Die gelös-

ten Beispielaufgaben weisen dabei die gemeinsame Struktur auf, welche von den Probanden später auf neue Aufgaben übertragen werden soll. Der verwendete Aufgabenkontext ist von Aufgabe zu Aufgabe unterschiedlich. Den Probanden werden mindestens zwei gelöste Beispielaufgaben mit leicht steigendem Schwierigkeitsgrad vorgestellt. In den Beispiellösungen werden Teilschritte bzw. erreichte Teilziele deutlich hervorgehoben. Zum Ansprechen verschiedener Repräsentationsmodi werden neben symbolischen Darstellungen auch immer ikonische Darstellungen der Lösungsideen angeboten. Wichtig hierbei ist die sinnvolle Einbettung der grafischen Darstellungen in den Text, z. B. durch geeignete Beschriftungen.

Die gelösten Aufgabenbeispiele liegen den Probanden in der Instruktionsphase schriftlich vor, der Versuchsleiter steht während der „Lernphase“ für Fragen zur Verfügung.

Zu Beginn der Lernphase sollen Selbsterklärungen der Probanden zu den Lösungsschritten der einzelnen Aufgaben sowie zum Zusammenhang zwischen den Aufgabenbeispielen angestoßen werden. Dies geschieht durch zweierlei Maßnahmen: Zum einen werden die Probanden darauf hingewiesen, dass sie auf Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben achten und eingehen sollen, zum anderen werden sie aufgefordert, ihre Gedanken bereits während des Studiums der Beispielaufgaben laut zu verbalisieren.

Dies gilt auch für die „Testphase“ der Untersuchung. In der Testphase lösen die Probanden weitere Aufgaben der Aufgabensequenz. Hier sollen sich die erhofften Transfereffekte in Form von Analogiebildungsprozessen einstellen. Die Beobachtung und Beschreibung dieser Prozesse erfolgt später, unter anderem auf der Grundlage der hier getätigten Äußerungen der Probanden.

### 3.1.2 Die Entwicklung der Aufgabensets – Fundamentale und zentrale Ideen

„It is confessed, that the utmost effort of human reason is to reduce the principles, productive of natural phenomena, to a greater simplicity, and to resolve the many particular effects into a few general causes, by means of reasonings from analogy, experience, and observation.“ (Hume, 1748; Sec. IV, Par. 26)

David Hume konstatiert in seiner erkenntnistheoretischen *Untersuchung über den menschlichen Verstand* (Übers. d. Verf.), dass alle Anstrengungen des menschlichen Denkens darauf abzielen, die Prinzipien der Natur, aber auch die Prinzipien des menschlichen Handelns, auf einige wenige, möglichst allgemein gültige Ausgangspunkte zu reduzieren. Als Mittel des Erkenntnisgewinns in diesem Sinne stehen uns aus der Sicht Humes die Beobachtung, die Erfahrung und die Analogiebildung zur Verfügung. Neues Wissen entsteht dadurch, dass wir die uns umgebende Welt aufmerksam beobachten und unbekannte Phänomene durch Rückgriff auf unsere Erfahrung mittels *Analogiebildung* beschreiben. Hume hat dabei zwar eher das kollektive Wissen im Blick, allerdings lässt sich diese Sichtweise auch auf das Individuum beziehen, wie im Folgenden noch aufgezeigt werden wird.

In der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts stand im Zentrum der didaktischen und insbesondere der mathematikdidaktischen Diskussion das Ringen um *fundamental ideas* (vgl. Bruner, 1960) bzw. *universelle Ideen* (vgl. Schreiber, 1983) – eine Diskussion, deren Ergebnisse die aktuelle curriculare Entwicklung und damit den heutigen Mathematikunterricht in Form von inhaltlichen Leitideen und darauf bezogene Kompetenzen prägen (vgl. Kultusministerkonferenz KMK, 2004).

In gewisser Weise ist der Ausgangspunkt der damaligen Überlegungen die Weiterführung der obigen Gedanken von Hume. Schon Whitehead (1913) beklagt:

„Die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen.“ (S. 260)

Zur Beseitigung dieses Missstandes schlägt er vor,

„[...] das Verständnis und der Erwerb mathematischen Wissens müsse sich an Begriffen vollziehen, die auch für das Alltagsdenken der Menschen weittragende Bedeutung haben. [...] Sie muß sich offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen.“ (S. 258)

In diesem Sinne fordert er, gewissermaßen als Bildungsstandard „für die intelligenteren Schüler“ (S. 262), zum Abschluss der Schullaufbahn:

„[...] eine Übersicht der ganzen geleisteten Arbeit [...]; diese wäre dabei ohne ungebührliche Einzelheiten zu betrachten, so daß der Nachdruck auf die allgemeinen Ideen fiele, die verwendet wurden, und auf deren Möglichkeiten erheblicherer Bedeutung, wollte man sie zum Gegenstand eindringenderen Studiums machen.“ (S. 263)

Bruner (1960) greift diesen Gedanken in einem allgemeineren Kontext wieder auf und führt ihn weiter: Er fordert jedes Fachgebiet dazu auf, sich seiner eigenen grundlegenden Ideen zu besinnen und konstatiert als Prinzip für die Entwicklung eines Fachcurriculums, dass es

„vom fundamentalen Verständnis des Faches her aufgebaut werden soll, das sich aus den tragenden, seine Struktur ausmachenden Prinzipien gewinnen lässt.“ (S. 42)

Mit den Worten von Loch (1970) erhebt Bruner damit „die Vermittlung der Struktur, der ‚fundamental ideas‘, der jeweils zugrundeliegenden Wissenschaft“ (S. 14) zum Unterrichtsprinzip. Bruner selbst ist dabei der Überzeugung, dass „die Grundlagen eines jeden Faches jedem Menschen in jedem Alter in irgendeiner Form beigebracht werden können.“ Er stützt seine Überzeugung auf die Annahme, dass „die basalen Ideen [...] und die grundlegenden Themen [...] ebenso einfach wie durchschlagend sind“ (S. 26).

Mit den vorangegangenen Ausführungen folgt für die Entwicklung eines Curriculums, diese solle sich entlang der fundamentalen Ideen eines jeden Faches vollziehen, um dem Individuum einen Lernprozess zu ermöglichen, der sich (ganz im Sinne Humes) wesentlich durch Rückgriffe auf die Erfahrungen des Individuums mit diesen Ideen vollzieht. Dabei spielen – gemäß Humes Verständnis des Erkenntnisgewinns – Analogiebildungsprozesse für das Gelingen des Rückgriffs auf Erfahrungen (hier: des Individuums) eine tragende Rolle.

Will man Analogiebildungsprozesse beim Lernen von Mathematik beobachten und beschreiben, die auch in curricularer Hinsicht bedeutungsvoll sind, müssen demnach Lernprozesse ins Visier genommen werden, die sich entlang fundamentaler Ideen der Mathematik abspielen. In der vorliegenden Untersuchung sollen Analogiebildungsprozesse im Rahmen einer beispielbasierten Lernumgebung betrachtet werden. In Abschnitt 3.1.1 wurde hierzu ausführlich dargelegt, welche methodischen Anforderungen an die dazu verwendeten Aufgaben gestellt werden müssen, damit Analogiebildungsprozesse angestoßen werden. Die letzten Ausführungen geben nun zusätzlich einen inhaltlichen Rahmen vor: Es ist – im Hinblick auf die unterrichtliche und curriculare Relevanz – sinnvoll, Aufgabensequenzen zu entwickeln, die sich an den fundamentalen Ideen der Mathematik orientieren. Um nun konkrete Aufgaben zu erstellen, bleibt also im Folgenden noch die Frage zu klären, welche mathematischen Grundprinzipien und Ideen im obigen Sinne als fundamental bezeichnet werden können.

Dazu muss zunächst herausgestellt werden, wodurch sich eine fundamentale Idee auszeichnet. Das Ringen um eine Begriffsdefinition der „fundamentalen Idee“ und die konkrete Suche nach fundamentalen Ideen der Mathematik wird, ausgehend von den Ausführungen Bruners (1960) bis zum Ende der 1980er-Jahre, von Schweiger (1992) in einem Übersichtsartikel zusammengefasst. Als Kriterien für eine fundamentale Idee erweisen sich die



Ausführungen Schreibers (1979, 1983) als tragfähig, auf die sich auch Schweiger (1992) in seinen Ausführungen bezieht:

- „Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken, die
- (1) in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
  - (2) tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
  - (3) als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, [sic!] geeignet erscheinen,
  - (4) den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
  - (5) in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen und handlungsmäßigen Archetyp besitzen.“ (Schreiber, 1983, S. 207)

Eine Verschlagwortung dieser Liste, um den Begriff der Vagheit ergänzt<sup>34</sup>, dient Hischer (2003, S. 43) zur Einordnung der Mittelwertbildung als in diesem Sinne fundamentale Idee. Er unterscheidet bei der Charakterisierung einer fundamentalen Idee zwischen den deskriptiven Kriterien

- Historizität,
- Archetypizität,
- Wesentlichkeit,
- Vagheit,

und den normativen Kriterien

- Durchgängigkeit,
- Transparenz.

Während Schweiger (1992) für die Charakterisierung fundamentaler Ideen feststellt, „die umschreibenden Definitionsversuche sind überraschend ähnlich, ebenso die Zielvorstellungen, die mit diesem Konzept verbunden sein könnten“ (S. 211), gestaltet sich die Antwort auf die Frage, welches nun konkret fundamentale Ideen der Mathematik seien und wie diese gegebenenfalls zu ordnen seien, ungleich schwieriger.

Auch hier wurden in der mathematikdidaktischen Diskussion verschiedene Kataloge für fundamentale Ideen vorgeschlagen. Wohl am meisten Beachtung fand dabei die Einteilung Schreibers (1983, S. 70) in prozessbezogene und eigenschaftsbezogene fundamentale Ideen sowie fundamentale Komponenten der Begriffsbildung (Tabelle 2, vgl. auch Schweiger, 1992, S. 206 oder, 1995, S. 19):

Ohne diese oder ähnliche Kategorisierungen hier näher zu untersuchen und zu vergleichen, wird bereits in der obigen Auflistung deutlich, dass die vorgelegten Sammlungen fundamentaler Ideen, mögen an ihnen auch „horizontale“ Kategorisierungen vorgenommen

---

<sup>34</sup> vgl. auch Jung (1978): „Die Idee einer Sache ist etwas vage, braucht keine Detaillierung, macht sie überhaupt erst sinnvoll. Sie entspricht dem was manche Lernpsychologen ein ‚Schema‘ nennen.“ (S. 170)

worden sein, zwar einerseits als Leitfaden für die Entwicklung mathematischer Curricula dienen können, andererseits aber noch keinen Hinweis darauf liefern, wie der Mathematikunterricht damit konkret auszugestalten sei. Insbesondere wird dadurch noch nicht deutlich, wie sich das Lernen vor dem Hintergrund fundamentaler Ideen vollziehen soll. Bender (1983) schreibt hierzu:

„Zentrale (bzw. universelle) Ideen sollen weder Grundlagen für die Mathematik als Wissenschaft noch Organisationsformen für den Unterricht liefern, sie sind vielmehr am jeweils betrachteten Gegenstand aufzuzeigen, können die Erschließung neuer Gebiete leiten, Beziehungen herstellen, das Wesentliche, das Wesen des Fachs sichtbar machen, insgesamt eben: Sinn stiften.“ (S. 11)

| <b>Prozeduren</b> | <b>Eigenschaften</b> | <b>Komponenten<br/>der Begriffsbildung</b> |
|-------------------|----------------------|--|
| Exhaustion        | Quantität            | Ideation                                   |
| Iteration         | Kontinuität          | Abstraktion                                |
| Reduktion         | Optimalität          | Repräsentation                             |
| Abbildung         | Invarianz            | Raum                                       |
| Algorithmus       | Unendlich            | Einheit                                    |

Tabelle 2: Fundamentale Ideen nach Schreiber (1983)

Bezogen auf die bevorstehende Aufgabe, nämlich die Entwicklung von Aufgabensequenzen, welche Analogiebildung entlang fundamentaler Ideen initiieren, muss also konkretisiert werden, welche Teilfähigkeiten es sind, an denen man die gewünschte Ausrichtung des Lernprozesses erkennen kann. Um dies zu erreichen ist eine „vertikale“ Kategorisierung fundamentaler Ideen notwendig, die letztlich bis in den Unterrichtsalltag hineinreicht.

Einen wichtigen Beitrag hierzu liefern Tietze et al. (1981, S. 41ff bzw. 2000, S. 37ff). Sie unterscheiden zwischen Leitideen, bereichsspezifischen Strategien und zentralen Mathematisierungsmustern. Schweiger (1992) fügt dieser hierarchischen Ordnung noch die Ebene universeller Ideen (der Wissenschaften) hinzu und schreibt:

„Die Wissenschaften werden als Fortführung menschlichen Tuns und Handelns von allgemeinen, durchaus universellen Ideen bestimmt, die nicht fachspezifisch sind (wie z. B. Ordnen, Klassifizieren, Erkennen von Symmetrien und Mustern, Auffinden von Invarianten). Universelle (oder wohl synonym: fundamentale) Ideen eines Fachs (wie etwa der Mathematik) sind entweder Konkretisierungen derartiger universeller Ideen der Wissenschaft oder sie sind fachspezifisch, ja geradezu fachkonstituierend bzw. kombinieren diese Aspekte. Durch weitere Konkretisierungen oder durch spezifisches Sondergut bzw.

wiederum deren Kombination gelangt man zu bereichsspezifischen fundamentalen Ideen, für die der Name zentrale Ideen eines Bereichs (wie etwa der Analysis, der Geometrie, der Stochastik) sehr passend erscheint.“ (S. 208f)

Zusammenfassend ergibt sich als „vertikale“ Kategorisierung fundamentaler Ideen nach Tietze et al. (1981 und 2000) und Schweiger (1992) die folgende Liste:

- Universelle Ideen (der Wissenschaften)
- Fundamentale Ideen (des Fachs)
- Zentrale Ideen (des Fachbereichs)
- Zentrale Mathematisierungsmuster

Um die Orientierung an fundamentalen Ideen, die manchmal auch als Wissenschaftsorientierung bezeichnet wird, für den konkreten Unterricht nutzbar zu machen, wurden gleichzeitig zu den allgemeinen Überlegungen rund um fundamentale bereichsübergreifende Ideen des Fachs (wie etwa diejenigen Schreibers) auch auf der Ebene einzelner mathematischer Gebiete Kataloge fundamentaler Idee konkretisiert (für die Geometrie vgl. z. B. Bender, 1983 oder Bender & Schreiber, 1985; für die Analysis vgl. z. B. Klika, 1981 bzw. 2000 oder Schweiger, 1982; für die Stochastik vgl. z. B. Heitele, 1975; für die analytische und die lineare Geometrie vgl. z. B. Tietze, 1979 oder Wittmann, 2003).

Klika (2003) greift im Vorfeld zur Formulierung der KMK-Bildungsstandards (2004), die mit der Formulierung von Leitideen und zugehörigen inhaltsbezogenen Kompetenzen in gewisser Hinsicht ein Exzerpt der hier skizzierten Diskussion darstellen, die vertikale Kategorisierung fundamentaler Ideen aus Tietze et al. (1981) in etwas abgewandelter Form wieder auf und konkretisiert ebenfalls weiter (Tabelle 3):

| <b>Universelle Ideen<br/>(erste Ebene)</b>   | <b>Zentrale Ideen<br/>(zweite Ebene)</b>   |
|--|--|
| Zahl, Größe<br>Strukturierung des<br>Raumes<br>Algorithmus<br>Messen<br>Optimierung<br>Approximation<br>Funktion | Schätzen<br>Symmetrie<br>Mittelwerte<br>Koordinaten<br>Linearisierung<br>Vektoren<br>Änderungsrate<br>Iteration<br>Rekursion |

Tabelle 3: Universelle Ideen und zentrale Ideen  
nach Klika (2003, S. 5)

Neben dieser Liste liefert Klika auch einen Anhaltspunkt dafür, an welcher Stelle die Anknüpfungspunkte für ein Lernen entlang fundamentaler Ideen zu suchen sind, und welche Rolle dabei der Transfer im Allgemeinen und die Analogiebildung im Speziellen spielen:

„Beim Lösen eines Problems werden bestimmte *Fähigkeiten* [...] und *Fertigkeiten* [...] mitgelernt. Sowohl Fähigkeiten als auch Fertigkeiten können später in einer für die Schülerinnen und Schüler neuen Problemlösesituation angewendet werden. [...] Bei komplexeren Problemen benötigt man in der Regel zusätzliche Fähigkeiten [...]. Bei diesem „nichtspezifischen“ Transfer können nun die mitgelernten heuristischen Strategien und insbesondere die zentralen Ideen eine wichtige Aufgabe übernehmen.“

(S. 7, Hervorhebungen im Original)

Es ergibt sich dabei die nachfolgende schematische Darstellung (Abb. 10):

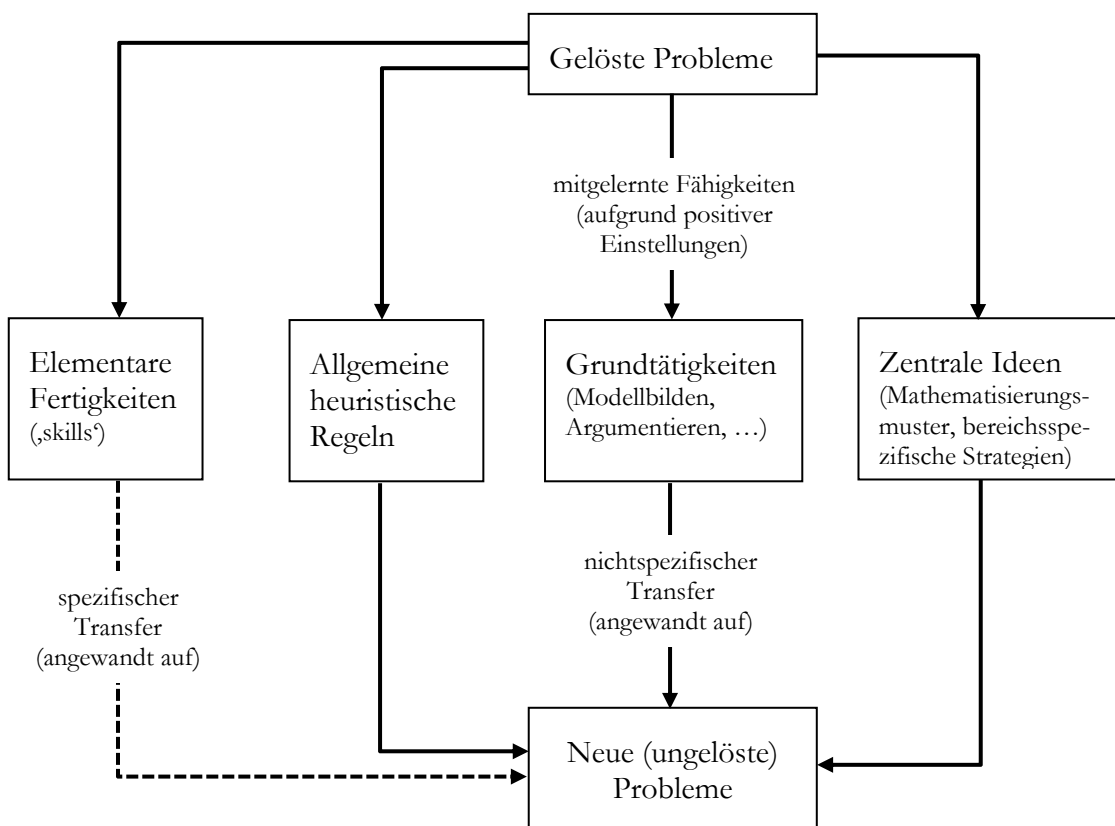


Abb. 10: Die Bedeutung zentraler Ideen für den Transfer (nach Klika, 2003, S. 7)

Mit Rekurs auf Heymann (1996) formuliert Klika außerdem Hoffnungen, die sich mit der Orientierung des Lernens und Lehrens an fundamentalen Ideen verknüpfen lassen. Insbesondere ist er der Auffassung, dass „der Wissenserwerb durch die Kenntnis zentraler Ideen erleichtert und gefördert werden kann“ (Klika, 2003, S. 7). Zusammen mit den obigen Ausführungen Klikas wird deutlich, dass es die zentralen Ideen mit ihren bereichsspezifischen Strategien und Mathematisierungsmustern sind, an denen sich konkrete Umsetzungen für

das Lernen und Lehren von Mathematik orientieren müssen, die einen Wissenserwerb entlang fundamentaler Ideen im Sinn haben.

Für die Entwicklung von Aufgabensequenzen, die nicht nur unter dem Gesichtspunkt der Initiierung von Analogiebildungsprozessen, sondern auch hinsichtlich ihrer inhaltlichen Orientierung für das Lernen von Mathematik bedeutsam sein sollen, gilt es also zunächst, verschiedene Gebiete abzudecken. Dies kann nach den obigen Ausführungen z. B. durch die Orientierung an den Leitideen der KMK-Bildungsstandards (2004) geschehen. Anschließend muss eine Einordnung der Aufgabensequenzen bezüglich der zentralen Ideen des jeweiligen Fachgebiets vorgenommen werden, und schließlich bleiben noch die typischen bereichsspezifischen Mathematisierungsmuster und Strategien zu benennen, auf welche sich die Analogiebildung auf der Handlungsebene beziehen soll.

Gleichzeitig schließt sich an dieser Stelle der Kreis: Die mathematischen Operationen, die im Zuge eines Analogiebildungsprozesses auf ein neues Problem übertragen werden sollen und damit beim Lernen von Mathematik im Sinne Humes den zentralen Gegenstand eines Analogiebildungsprozesses darstellen, sollten also gleichsam aus typischen Mathematisierungsmustern und Strategien des jeweiligen Gebiets erwachsen.

Bevor im nächsten Abschnitt die in der vorliegenden Untersuchung verwendeten Aufgabensequenzen vorgestellt und im obigen Sinne eingeordnet werden, sei bereits an dieser Stelle erwähnt, dass auch bei der Entwicklung der Unterrichtsvorschläge im Abschnitt 5.2 die Orientierung an fundamentalen Ideen erfolgt. In den Abschnitten 5.2.3, 5.2.4 und 5.2.5 etwa wird verdeutlicht, wie Wissenserwerb durch Analogiebildung im Rahmen der fundamentalen Idee „Strukturierung des Raumes“ (vgl. Klika, 2003, S. 5 oder Heymann, 1996) bzw. der Leitidee „Raum und Form“ (KMK, 2004) erfolgen kann.

### **3.1.3 Die Aufgabensequenzen – eine Einordnung**

Für die Hauptuntersuchung wurden insgesamt sechs Aufgabensequenzen entwickelt (vgl. Anhang I: Aufgabensequenzen), die im Folgenden bezüglich fundamentaler bzw. zentraler Ideen (vgl. Abschnitt 3.1.2) eingeordnet und für welche die notwendigen bereichsspezifischen Mathematisierungsmuster angegeben werden.

Der genaue Aufbau der Aufgabesequenzen wird anschließend, unter der Berücksichtigung der vorangegangenen methodischen Überlegungen, exemplarisch anhand der Aufgabensequenz „Mischprobleme“ erläutert. Die restlichen Aufgaben folgen den gleichen Prinzipien – sie sind deshalb im Anhang abgedruckt (s. Anhang I).

### **Aufgabensequenz 1: Flächengleichheiten**

#### Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit dem Grundprinzip „Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe besitzen den gleichen Flächeninhalt“. Dabei ist es meist notwendig, im Sinne der Argumentation geeignete Teildreiecke einer Figur und in diesen geeignete Grundlinien und Höhen zu identifizieren. Dies kann auf unterschiedliche Weise geschehen: Statische Betrachtungen führen dabei oft zu der Erkenntnis, dass verschiedene Teildreiecke einer Figur entweder eine Grundlinie gemeinsam haben und die gleiche Höhe besitzen oder umgekehrt. Dynamische Überlegungen hingegen nutzen oft aus, dass sich durch das Verschieben eines Eckpunktes im Dreieck parallel zur gegenüberliegenden Seite dessen Flächeninhalt nicht ändert.

#### Leitideen (KMK):

Messen  
Raum und Form

#### Zentrale Ideen:

Zerlegungsgleichheit  
Flächengleichheit bei Scherung

#### Bereichsspezifische Operationen:

Betrachten geeigneter Teildreiecke einer Figur  
Vergleichen von Streckenlängen  
Auffinden geeigneter Grundlinien und Höhen zur  
Berechnung des Flächeninhalts  
Dynamisierung des Problems, mentale Scherung

### **Aufgabensequenz 2: Kombinatorik**

#### Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit dem „allgemeinen Zählprinzip“. Sie erkennen dabei, dass es sich um Kombinationen ohne Wiederholung handelt, im Urnenmodell also um „Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Dazu ist es notwendig, die Grundmenge und die Mächtigkeit der ausgewählten Teilmenge zu bestimmen und die Situation anschließend zu algebraisieren. Eine Visualisierung (Baumdiagramm, Knotengraph) kann an dieser Stelle besonders gute Dienste leisten.

#### Leitideen (KMK):

Zahl  
Daten und Zufall

#### Zentrale Ideen:

Allgemeines Zählprinzip

#### Bereichsspezifische Operationen:

Beschreibung der Situation im Urnenmodell  
Identifikation von Grund- und Teilmenge  
Verwendung geeigneter Visualisierungen

**Aufgabensequenz 3: Lineare Zusammenhänge**Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler modellieren lineare Zusammenhänge als Funktionen und argumentieren auf der algebraischen und graphischen Ebene. Sie führen dabei sinnvolle Variablen ein, identifizieren deren Abhängigkeiten als lineare Funktionen, stellen entsprechende Funktionsgleichungen auf und stellen den Zusammenhang graphisch dar. Sie interpretieren Schnittpunkte zweier Funktionen als Lösung einer entsprechenden Gleichung und umgekehrt.

Leitidee (KMK):

Funktionaler Zusammenhang

Zentrale Ideen:

Erkennen, Darstellen, Beschreiben und Interpretieren linearer Zusammenhänge aus dem Sachkontext

Bereichsspezifische Operationen:

Einführen geeigneter Variablen  
Überprüfung der Quotientengleichheit des Differenzenquotienten  
Identifikation der Parameter eines linearen Zusammenhangs im Sachkontext  
Aufstellen einer linearen Funktionsgleichung  
Grafische Darstellung eines linearen Zusammenhangs  
Algebraische Darstellung und Lösung von Schnittproblemen (z. B. Treffpunktprobleme)  
Grafische Darstellung und Lösung von Schnittproblemen  
Interpretation der Lösung von Schnittproblemen im Sachkontext

**Aufgabensequenz 4: Mischprobleme**Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit den Begriffen Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz. Sie benutzen diese Begriffe, um verschiedene Anteile zu beschreiben und zu berechnen. Im Rahmen von Mischaufgaben müssen dazu geeignete Variablen eingeführt und Anteile auf verschiedene Arten als Terme ausgedrückt werden. Auf der algebraischen Ebene müssen die Schüler erkennen, dass Terme, die den gleichen Anteil beschreiben, gleichgesetzt werden können.

|   |   |
|---|---|
| <u>Leitideen (KMK):</u>                 | Zahl<br>Funktionaler Zusammenhang   |
| <u>Zentrale Ideen:</u>                  | Darstellung von und Rechnen mit Anteilen in Form von Prozentangaben   |
| <u>Bereichsspezifische Operationen:</u> | Bestimmung von Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz im Sachkontext<br>Einführen geeigneter Variablen<br>Darstellen von Anteilen in Form verschiedener Terme<br>Aufstellen einer Gleichung für verschiedene algebraische Darstellungen desselben Anteils |

### **Aufgabensequenz 5: Ebene Geometrie – Raumgeometrie**

#### Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit ihnen bekannten charakteristischen Eigenschaften geometrischer Objekte in der Ebene und im Raum. Zur Bestimmung geometrischer Orte im Raum führen sie mental räumliche Konstruktionen aus und erkennen die fiktive Spur von Schnittobjekten einer Konstruktion bei deren Dynamisierung als den gesuchten geometrischen Ort.

|   |  |
|---|--|
| <u>Leitideen (KMK):</u>                 | Raum und Form  |
| <u>Zentrale Ideen:</u>                  | Einbettung der Ebene in den Raum<br>Identifikation geometrischer Orte in der Ebene und im Raum   |
| <u>Bereichsspezifische Operationen:</u> | Benennen charakteristischer Eigenschaften geometrischer Objekte<br>Ausführen „mentaler Konstruktionen“ im Raum<br>Mentale Dynamisierung von Konstruktionen<br>Betrachten von Spuren geometrischer Schnittobjekte<br>Mentales Ergänzen einer Spur zu einer Ortsfläche bzw. -linie |



### **Aufgabensequenz 6: Bezugsgrößen und Invarianten**

#### Beschreibung der Aufgaben:

Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit dem Invarianzprinzip. Eine der gegebenen Größen wird unter verschiedenen Perspektiven betrachtet, bleibt dabei aber unverändert. Dieses Erkenntnis wird genutzt, um verschiedene Anteile gemeinsam bezüglich der Invarianten auszudrücken. Dazu müssen diese Anteile erst im Hinblick auf eine gemeinsame Bezugsgröße normiert werden.

#### Leitideen (KMK):

Funktionaler Zusammenhang  
Zahl

#### Zentrale Ideen:

Invarianzprinzip

#### Bereichsspezifische Operationen:

Identifikation einer gemeinsamen Bezugsgröße aus dem Sachkontext  
Normierung der gegebenen Größen  
Identifikation einer invarianten Größe

Weitere Aufgabensequenzen, von denen zwei Serien ohne Durchführung einer Vorstudie (vgl. Abschnitt 3.1.4), aber mit der gleichen Methode und dem gleichen Setting (vgl. Abschnitt 3.1.1 und 3.1.5) ebenfalls dazu herangezogen wurden, um Analogiebildungsprozesse zu untersuchen, sind im Rahmen einer Zulassungsarbeit entstanden und könnten für weitergehende Betrachtungen herangezogen werden (Schmitt, 2011; vgl. 5.3).

In der Zulassungsarbeit von Schmitt (2011) stand die Frage im Fokus, ob sich auch bei computerunterstützten Problemlöseprozessen Analogiebildung auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells beobachten lässt. Entsprechend wurden die Aufgabensequenzen in diesem Fall darauf ausgelegt, dass für die Lösung der Aufgaben bereichsspezifische Operationen nötig waren, die den Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms oder einer dynamischen Geometriesoftware erforderten.

### **Beispiel: Aufgabensequenz Mischprobleme**

Anhand der Aufgabensequenz „Mischprobleme“ wird im Folgenden exemplarisch verdeutlicht, wie in den Aufgabensequenzen die methodischen Vorgaben (Abschnitt 3.1.1) und die inhaltlichen Überlegungen (Abschnitt 3.1.2) Berücksichtigung finden. Die Idee, Mischaufgaben zur Untersuchung von Analogiebildungsprozessen heranzuziehen, stammt dabei von Reed et al. (1985), die Aufgaben selbst wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt.

Für die Instruktions- bzw. Lernphase werden, den Ausführungen von Abschnitt 3.1.1 folgend, in einem ersten Abschnitt der Aufgabensequenz die notwendigen grundlegenden Begriffe in Form einer kurzen Wiederholung bereit gestellt:

## Mischprobleme

Für den Umgang mit Prozentangaben muss grundsätzlich geklärt werden, auf welchen Grundwert sie sich beziehen. Es gilt der Zusammenhang

$$p\% \text{ von } G = P \Leftrightarrow p\% \cdot G = P$$

Dabei ist  $p\%$  der Prozentsatz,  $G$  der Grundwert und  $P$  der Prozentwert.

### Begriffe beim Rechnen mit Prozentangaben

Eine Jacke, die ursprünglich 120 € kostet, wird um 15% reduziert.  
Wie hoch ist der Rabatt?

15% von 120 € =  $15\% \cdot 120 \text{ €} = 0,15 \cdot 120 \text{ €} = 18 \text{ €}$ . Der Rabatt beträgt 18 €.

(Prozentsatz: 15%, Grundwert: 120 €, Prozentwert: 18 €)

Für Probleme mit Prozentangaben, die sich auf verschiedene Grundwerte beziehen, ist es oft wichtig, die Grundgesamtheit zu erkennen und zu ermitteln, wie diese zusammengesetzt ist.

Anschließend folgt das erste gelöste Beispiel, bei dem darauf geachtet wurde, dass Teilschritte bzw. erreichte Teilziele deutlich hervorgehoben sind. Weiter werden auch grafische Darstellungen der Lösungsidee angeboten. Hierbei wurde auf deren sinnvolle Einbettung in den Text und geeignete Beschriftungen besonderen Wert gelegt:

### Beispiel 1: Säurelösung

Ein Chemiker hat 3,6 Liter einer Säurelösung (= Wasser + Säure) mit 10% Säureanteil.

Wie viel Säurelösung mit 60% Säureanteil muss er hinzugeben, um insgesamt eine Lösung mit 15% Säureanteil zu erhalten?

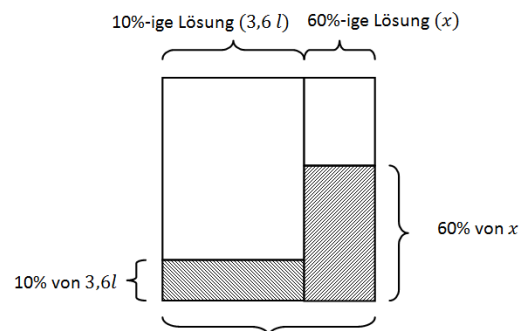
#### Lösung:

In der endgültigen Säurelösung sind enthalten:

10%-ige Säurelösung: 3,6 l

60%-ige Säurelösung:  $x$  (zu bestimmen)

Gesamtmenge:  $3,6 \text{ l} + x$



$x$  muss so bestimmt werden, dass der Säureanteil (schraffierte Fläche) an der Gesamtmenge (=  $3,6 \text{ l} + x$ ) die geforderten 15% beträgt.

Die Menge der Säure in der endgültigen Lösung berechnet sich also einerseits zu

$$\text{Säuremenge} = 10\% \text{ von } 3,6 \text{ l} + 60\% \text{ von } x = 0,1 \cdot 3,6 \text{ l} + 0,6 \cdot x \quad (1)$$

Andererseits soll der Anteil der Säure in der endgültigen Lösung 15% betragen, also:

$$\text{Säuremenge} = 15\% \text{ von } (3,6 \text{ l} + x) = 0,15 \cdot (3,6 \text{ l} + x) \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) liefert:

$$\begin{aligned} 0,1 \cdot 3,6 \text{ l} + 0,6 \cdot x &= 0,15 \cdot (3,6 \text{ l} + x) \\ \Leftrightarrow 0,36 \text{ l} + 0,6x &= 0,54 \text{ l} + 0,15x \\ \Leftrightarrow 0,45x &= 0,18 \text{ l} \\ \Leftrightarrow x &= 0,4 \text{ l} \end{aligned}$$

Es müssen also 0,4 l der 60%-igen Säurelösung hinzugegeben werden.

Das zweite Aufgabenbeispiel weist eine ähnliche Struktur, einen anderen Kontext und einen leicht steigenden Schwierigkeitsgrad auf, die Dokumentation der Lösungsschritte und die Darbietung der grafischen Darstellung orientieren sich am ersten Aufgabenbeispiel.

### Beispiel 2: Pflanzenöl

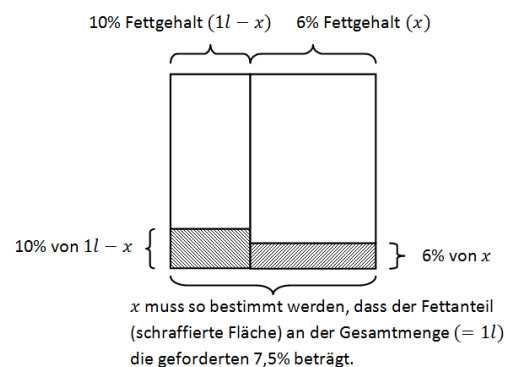
Pflanzliches Öl soll in 1-Liter-Flaschen abgefüllt werden. In einer bestimmten Sorte pflanzlichen Öls sind 10% gesättigte Fettsäuren enthalten. Eine andere Sorte enthält 6% gesättigte Fettsäuren.

Wie viel muss von einem Liter Öl mit 10%-igem Fettanteil durch das Öl mit 6%-igem Anteil ersetzt werden, um einen Liter pflanzliches Öl mit 7,5% Anteil an gesättigten Fettsäuren zu erhalten?

### Lösung:

In der endgültigen Ölmischung sind enthalten:

|  |          |
|--|----------|
| Öl mit 6% gesättigten Fettsäuren:      | $x$      |
| (zu bestimmen)                         |          |
| Öl mit 10% gesättigten Fettsäuren:     | $1l - x$ |
| (von 1l Öl wird die Menge $x$ ersetzt) |          |
| Gesamtmenge:                           | 1l       |



Die Menge der gesättigten Fettsäuren in der endgültigen Mischung berechnet sich einerseits zu

$$\text{Fettmenge} = 6\% \text{ von } x + 10\% \text{ von } (1l - x) = 0,06 \cdot x + 0,1 \cdot (1l - x) \quad (1)$$

Andererseits soll der Fettanteil in der endgültigen Mischung 7,5% betragen, also:

$$\text{Fettmenge} = 7,5\% \text{ von } 1l = 0,075 \cdot 1l \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) liefert:

$$\begin{aligned} 0,06 \cdot x + 0,1 \cdot (1l - x) &= 0,075 \cdot 1l \\ \Leftrightarrow 0,06x + 0,1l - 0,1x &= 0,075l \\ \Leftrightarrow 0,04x &= 0,025l \\ \Leftrightarrow x &= 0,625l \end{aligned}$$

Es müssen also  $0,625l = 625ml$  ersetzt werden.

---

Mit diesen beiden gelösten Aufgabenbeispielen sollte nun die Grundlage für einen erfolgreichen Transfer mittels Analogiebildung gelegt sein (source-Bereich). In der Testphase (vgl. 3.1.1) folgen nun vier Aufgabenbeispiele (Begründung vgl. auch Abschnitt 3.1.2), bei deren Bearbeitung im Rahmen der Untersuchung das Auftreten von Analogiebildungsprozessen beobachtet wurde.

### **Aufgabe 1 – Hotelrechnung**

Auf einer Hotelrechnung sind Übernachtungskosten und Frühstückskosten separat aufgeführt. In den 200 € Übernachtungskosten sind 19% Mehrwertsteuer enthalten, der Mehrwertsteueranteil bei den Frühstückskosten beläuft sich auf 7%. Der Hotelgast stellt fest: „Der Steueranteil an der Gesamtrechnung beträgt 17%.“

Wie hoch sind die Frühstückskosten?

### **Aufgabe 2 – Frostschutz**

Beim Wintercheck wird festgestellt, dass ein PKW vier Liter Kühlerflüssigkeit mit 20% Frostschutzanteil enthält.

Wie viel dieser Kühlerflüssigkeit muss durch eine Kühlerflüssigkeit mit 70% Frostschutzanteil ersetzt werden, um insgesamt einen Frostschutzanteil von 25% zu erreichen?

**Aufgabe 3 – Raucherstatistik**

Ein Statistiker hat versehentlich Kaffee über seinem Bericht zum Rauchverhalten Erwachsener verschüttet.

| Altersgruppe  | 18-45 | älter als 45 | Insgesamt |
|---------------|-------|--------------|-----------|
| Befragte      | 1260  |              |           |
| Raucher       | 567   |              |           |
| Nichtraucher  | 693   |              |           |
| Raucheranteil | 45%   | 35%          | 41%       |

Wie viele Personen der Altersgruppe „älter als 45“ wurden befragt?

**Aufgabe 4 – Wassermelone**

Das Innere einer Wassermelone besteht im reifen Zustand zu 90% aus Wasser, der Rest ist Fruchtfleisch. Eine 5 kg schwere reife Melone ist mehrere Tage der Sonne ausgesetzt und verliert durch Verdunstung Wasser. Anschließend beträgt der Wasseranteil nur noch 80%.

Wie schwer ist die Melone noch?

### 3.1.4 Ergebnisse der ersten Vorstudie

Im Rahmen einer ersten Vorstudie wurden die Aufgabensequenzen 1 bis 6 (vgl. Abschnitte 3.1.2 und 3.1.3) bezüglich der folgenden Fragestellungen untersucht:

- Sind die Instruktionen und die gelösten Aufgabenbeispiele für die Schüler verständlich formuliert?
- Sind die Aufgabenstellungen der zu lösenden Testaufgaben für die Schüler verständlich formuliert?
- Können die Schüler diese Aufgaben lösen?
- Sind die Schüler in der Lage, ihre Vorgehensweise (im Rahmen der Bearbeitung und/oder im Rahmen der Reflexionsaufgabe) zu verbalisieren?
- Greifen die Schüler auf die gelösten Beispiele aus der Instruktionsphase zu? Wird das aus den Verbalisierungen deutlich?
- Ist Analogiebildung auf den verschiedenen Ebenen erkennbar (Objekt-, Relations-, Operationsebene)?

Da es in dieser Vorstudie allein darum ging, die Tauglichkeit der entwickelten Aufgabensets zur Erzeugung von Analogiebildungsprozessen und die Fähigkeit der Schüler zur Verbalisierung ihrer Vorgehensweise einzuschätzen, wurden die Aufgabensequenzen in ein Format eingebettet, das eine selbständige schriftliche Bearbeitung durch die Schüler erlaubte. Die Aufteilung in eine Instruktionsphase und eine Testphase (vgl. Abschnitt 3.1.1) wurde dabei aufrecht erhalten und um eine Reflexionsphase ergänzt. Anders als später in der Hauptstudie (vgl. Abschnitt 3.1.5) wurde den Schülern die Instruktion mit den gelösten Aufgabenbeispielen zur jeweiligen Aufgabensequenz nur in schriftlicher Form zum Selbststudium vorgelegt. Sie konnten selbst entscheiden, wie lange sie sich mit den Instruktionmaterialien beschäftigen und wann sie mit dem Lösen der Testaufgaben beginnen. Die Dauer der Studie wurde auf insgesamt 90 Minuten festgelegt, wobei die Schüler 15 Minuten vor Schluss vom jeweiligen Versuchsleiter gebeten wurden, die Arbeit an den Aufgaben zu beenden und die Reflexionsaufgabe zu bearbeiten. Diese lautete, einheitlich für alle Aufgabensequenzen:

Nehmen Sie sich abschließend bitte mindestens 15 Minuten Zeit und **gehen Sie ihre Bearbeitungen noch einmal** durch.

Überlegen Sie, an welchen Stellen Sie eine Verbindung zu Lösungen der Aufgabenbeispiele aus dem Vorspann oder zu bereits von Ihnen gelösten Aufgaben hergestellt und für die Lösung einer neuen Aufgabe benutzt haben.

Schildern Sie an diesen Stellen bitte mit einem Farbstift, wie Sie die bereits gelösten Aufgaben hier genutzt haben und warum Ihnen die Lösungen an dieser Stelle weiter geholfen haben.

An der Vorstudie nahmen insgesamt 39 Schülerinnen und 19 Schüler der 11. Jahrgangsstufe eines sprachlichen Gymnasiums teil, so dass jede der sechs Aufgabensequenzen von mindestens neun Teilnehmern bearbeitet wurde. Die Leistungsfähigkeit der Kollegiatinnen und Kollegiaten im Bereich Mathematik wurde von ihren Lehrern übereinstimmend als insgesamt schwach beschrieben – von einigen Ausnahmen abgesehen. Die Vorstudie fand während einer Mathematik-Doppelstunde statt und wurde von den jeweiligen Lehrkräften beaufsichtigt, die im Vorfeld einige Instruktionen zur Durchführung (z. B. bzgl. der Bedeutung der Reflexionsphase für die Studie) bekommen hatten. Die Motivation der Kollegiaten zur Teilnahme wurde von den Lehrern anschließend als sehr unterschiedlich bezeichnet. Während sich einige Schüler auch nach der Bearbeitung der Aufgaben sehr interessiert am Zweck der Studie zeigten, schienen andere Schüler die Teilnahme an der Studie als willkommene Gelegenheit zur Entspannung genutzt zu haben. Dies zeigt sich auch in den Bearbeitungen: Es liegen Bearbeitungen vor, bei denen die Lösungen hervorragend dokumentiert und die Reflexionsaufgabe sehr engagiert beantwortet wurde – einige Gehefte wurden jedoch auch leer, nahezu unbearbeitet oder gar mit einem Kommentar zurückgegeben, der die fehlende Motivation deutlich zum Ausdruck bringt. Acht Arbeiten, bei denen die mangelhafte Arbeitshaltung deutlich zu erkennen war, wurden nicht zur Auswertung der Vorstudie herangezogen, so dass für die Untersuchung 50 Bearbeitungen zur Verfügung standen.

Die Auswertung der Bearbeitungen erfolgte, den oben formulierten Zielen entsprechend, auf drei Ebenen:

- Die Qualität der Bearbeitung wurde auf einer Skala von 0 bis 4 Punkten bewertet.
- Es wurde festgehalten, ob Analogiebildung in Form eines Rückgriffs auf die gelösten Aufgabenbeispiele erkennbar stattfand (+) oder nicht (O).  
Im positiven Fall wurde noch differenziert, auf welcher Ebene Analogiebildung zu erkennen war (Objekt-, Relations-, Operationsebene).
- Es wurde festgehalten, ob die Schüler ihr Vorgehen in nachvollziehbarer Form verbalisieren konnten (+) oder nicht (O).

Für die Beurteilung der Bearbeitungsqualität wurde nur die Aufgabenbearbeitung betrachtet, während für die Auswertung der Analogiebildungsmerkmale und die Beurteilung der Verbalisierungen sowohl die Dokumentation der Aufgabenbearbeitung als auch die Bearbeitung der Reflexionsaufgabe herangezogen wurden.

#### Besonderheiten der einzelnen Aufgabensequenzen im Rahmen der Vorstudie

Im Abschnitt 3.1.1 wurde erläutert, dass die Aufgabensequenzen aus einer Instruktionsphase mit (mindestens) zwei gelösten Aufgabenbeispielen unterschiedlichen Kontexts und einer Testphase mit zu lösenden Aufgaben (hier: standardmäßig vier Aufgaben) ähnlicher Struktur bestehen sollten. Bei einigen Aufgabensequenzen wurde leicht von diesem Standard abgewichen. Diese Abweichungen werden im Folgenden begründet.

In der Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“ standen insgesamt sechs Aufgaben für die Testphase zur Verfügung, so dass zwei Gruppen gebildet wurden, deren Mitglieder je vier dieser Aufgaben bearbeiteten.

In der Aufgabensequenz „Kombinatorik“ wurde bei der Darbietung der gelösten Aufgabenbeispiele darauf verzichtet, mehrere Aufgaben unterschiedlichen Kontexts anzubieten. Stattdessen wurden vier verschiedene Lösungsansätze zu einem Problem dargestellt. Hier sollte bei der Auswertung der Testaufgaben besonders darauf geachtet werden, auf welchen Lösungsweg zugegriffen wird und wie die Entscheidung von den Schülern anschließend begründet wird.

In der Aufgabensequenz „Mischprobleme“ (vgl. Abschnitt 3.1.3) wurden zwei Aufgaben gestellt, mit denen überprüft werden sollte, ob Schüler dazu neigen Analogieargumente auch dann anzuwenden, wenn keine Analogie vorliegt. Zum einen wurde hierzu eine Aufgabe gestellt, die den gelösten Beispielen zwar von der Lösungsstruktur sehr ähnlich ist, deren Prozentangaben sich jedoch auf unterschiedliche Grundwerte beziehen, also erst vereinheitlicht werden mussten (Aufgabe 1). In einer weiteren Aufgabe musste zwar auch mit verschiedenen Prozentangaben argumentiert werden, ihre Lösungsstruktur unterscheidet sich jedoch von den gelösten Beispielen grundlegend (Aufgabe 4).

Die Aufgabensequenz „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ weist im Instruktionsteil insgesamt fünf Beispiele aus der ebenen Geometrie auf, die im Testteil direkt auf die Raumgeometrie übertragen werden sollten (Aufgaben 2 bis 6). Im Testteil vorgeschaltet ist eine Aufgabe (Aufgabe 1) zur Analogisierung der Konstruktionswerkzeuge, die als Grundlage für die anderen Aufgaben dient (vgl. Abschnitt 5.2.4). Diese Aufgabe wurde nicht in die Bewertung aufgenommen, da hier lediglich die erforderlichen Werkzeuge bereitgestellt werden sollten. Die letzte Aufgabe dieser Sequenz fragt nach der Inkugel eines Tetraeders – ein Begriff, der, anders als der Begriff des Inkreises beim Dreieck, mehrere Deutungen zulässt: Meint man eine Kugel, die jede der Tetraederflächen von innen berührt, oder eine Kugel, die jede der Tetraederkanten berührt<sup>35</sup>? Beides sind mögliche Analogien zum Inkreis

---

<sup>35</sup> Im zweiten Fall wird die gesuchte Kugel manchmal als Kantenkugel bezeichnet (vgl. z. B. Fritsch, 2000, S. 153f.)



des Dreiecks, die letztlich auf verschiedenartigen Analogisierungen der Inkreiskonstruktion basieren. Während jedoch jeder Tetraeder eine Inkugel besitzt, wenn man darunter die Berührungskugel der Tetraederflächen versteht, haben interessanterweise nur ganz bestimmte Tetraeder eine Kantenkugel. Die erforderlichen Eigenschaften solcher Tetraeder erinnern an die Eigenschaften von Tangentenvierecken. Diese Zusammenhänge sind nicht direkt Gegenstand der Aufgabe, müssen aber bei deren Bewertung in Betracht gezogen werden. Das Hauptaugenmerk bei der Auswertung dieser Aufgabe sollte auf die Frage gelegt werden, ob unter den Schülerbearbeitungen verschiedene Analogiebildungen vorkommen und worin sich diese ggf. unterscheiden.

Für die Aufgabensequenz „Bezugsgrößen und Invarianten“ standen fünf Testaufgaben zur Verfügung, so dass auch hier zwei Gruppen gebildet wurden, deren Mitglieder je vier dieser Aufgaben bearbeiteten.

#### Auswertungsergebnisse

Auf eine quantifizierende Darstellung der Auswertungsergebnisse auf der Grundlage der beschriebenen Bewertungsskalen wird an dieser Stelle weitgehend verzichtet.<sup>36</sup> Für die Begründung der weiteren Entscheidungen hinsichtlich der Verwendung der Aufgabensequenzen im Rahmen der Hauptstudie genügt hier eine zusammenfassende Interpretation der Untersuchungsergebnisse.

Die inhaltliche Durchsicht der Aufgabenbearbeitungen, also die Bewertung der Bearbeitungsqualität, erfolgte auf der Grundlage eines Erwartungshorizonts. Zur Qualität der Bearbeitungen lässt sich insgesamt festhalten, dass bei ca. 29% der Bearbeitungen (61 von 207) die volle Punktzahl und bei ca. 49% (102 von 207) mindestens die Hälfte der Punkte erreicht werden konnte. Das bedeutet jedoch auch, dass über alle Aufgabenserien hinweg bei ca. 51% der Bearbeitungen weniger als die Hälfte der Punkte erreicht wurde. Neben einzelnen Aufgaben aller Sequenzen, die nur unzureichend oft oder insgesamt sehr schwach bearbeitet wurden, sind hierfür die Ergebnisse der beiden Aufgabensequenzen zur Geometrie („Flächengleichheiten“ und „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“) ausschlaggebend. Bei diesen Sequenzen konnten lediglich 16% bzw. 11% (5 von 32 bzw. 4 von 35) der Aufgaben mit der Höchstpunktzahl bewertet werden. Bei den Aufgaben zu Flächengleichheiten konnte sogar in mehr als 75% der Fälle nicht die Hälfte der Punkte erreicht werden (25 von 32).

---

<sup>36</sup> Eine detaillierte Aufstellung der Auswertungsergebnisse in tabellarischer Form kann auf Nachfrage beim Autor zur Verfügung gestellt werden.

Die Aufgabensequenzen „Flächengleichheiten“ und „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“

Dieses überraschend schlechte Ergebnis bei den Sequenzen mit geometrischem Schwerpunkt legt in einem ersten Schritt eine genauere Betrachtung der konkreten Aufgabenbearbeitungen für diese beiden Sequenzen nahe. Die Analyse der Fehler liefert dabei ein sehr unterschiedliches Bild: Bei der Korrektur der Bearbeitungen zur Sequenz „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ fällt auf, dass vielen Schülern grundlegende Vorstellungen zu Objekten im Raum fehlen. Insbesondere die unendliche Ausdehnung einer Geraden oder einer Ebene im Raum ist ihnen häufig nicht bewusst. Entsprechend werden bereits in der Aufgabe 1, in der es darum geht, räumliche Konstruktionswerkzeuge wie die Kugel, das parallele Ebenenpaar und den (unendlich hohen) Zylinder bereit zu stellen, Schwierigkeiten deutlich. Dies zeigen exemplarisch die beiden folgenden Schülerbearbeitungen (

Abb. 11 und Abb. 12):

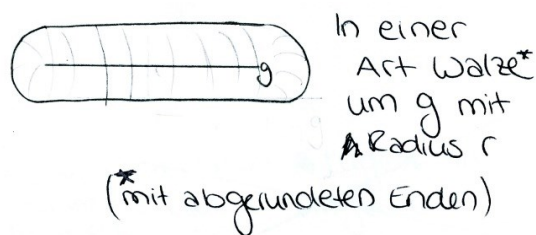


Abb. 11: Wo liegen alle Punkte, die von einer vorgegebenen Geraden  $g$  den Abstand  $r$  haben?

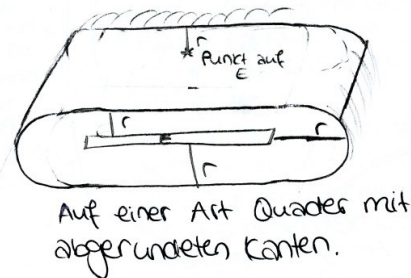


Abb. 12: Wo liegen alle Punkte, die von einer vorgegebenen Ebene  $E$  den Abstand  $r$  haben?

In der Folge wird häufig auch für Situationen im Raum weiter mit ebenen Werkzeugen argumentiert (Kreis statt Kugel, Gerade statt Ebene). Insgesamt muss festgestellt werden, dass der Sprung von der Ebene in den Raum von den Schülern sehr oft nur unzureichend vollzogen werden kann. Da den Teilnehmern raumgeometrische Konstruktionswerkzeuge sowie das mentale Operieren mit diesen Werkzeugen vor der Untersuchung nicht geläufig gewesen sein dürften, muss vor dem Hintergrund der *Cognitive Load Theorie* davon ausgegangen werden, dass bereits der *Intrinsic Load*, hier also die Diskrepanz zum Vorwissen bzw. die Neuartigkeit der notwendigen mentalen Operationen, sehr hoch war. Der *Extraneous Load* der Aufgabenstellungen wurde, im Sinne der obigen Ausführungen, versucht so gering wie möglich zu halten. Das wurde auch von einzelnen Schülern positiv angemerkt, wie die folgende Aussage verdeutlicht (Abb. 13):

Bei Pro Aufgabenlösung  
 war mir klar, wie es  
 zu lösen war, da das  
 Beispiel es sehr gut  
 dargestellt hat.  
 (gut v.a.: Skizzen!  
 mit kleiner Zusammen-  
 fassung darunter)

Abb. 13: Kommentar zur Gestaltung der Instruktionsbeispiele

Dennoch waren die Erläuterungen und die gelösten Beispiele in der Instruktionsphase recht umfangreich und anspruchsvoll. Der gedankliche Sprung von der Ebene in den Raum musste dabei natürlich von jedem Lerner selbst vollzogen werden. Dieser Schritt bereitete besondere Schwierigkeiten, und zudem sorgte die erforderliche Fachsprache offensichtlich für Verwirrung.

Dies belegen beispielhaft die folgenden Kommentare (Abb. 14):

Ich bezog mich hier v.a.  
 auf Beispiel 4/5.  
 Allerdings, deshalb  
 habe ich auch diese  
 Aufgabe nicht fertig-  
 gestellt, komme ich  
 von der Ebene  
 nicht zum Raum.

Es liegt weniger an  
 Visualisierungen der Struktur  
 als an der mathematische  
 Berechnung bzw. der  
 Herleitung.

Problem:

Die ersten Seiten zur Einführung habe ich  
 verstanden. Das Problem ist, dass ich es nicht  
 auf den Raum übertragen kann.

Abb. 14: Kommentare zu Schwierigkeiten bei der Übertragung ebener Situationen in den Raum.

Es muss für diese Aufgabensequenz also angenommen werden, dass bei einigen Schülern ein zu großer *cognitive load* den Transfer auf die Testaufgaben verhindert hat. Insbesondere konnte, in Ermangelung erfolgreicher Bearbeitungen der Aufgabe 6 zur Inkugel eines Tet-

raeders, nicht wie gewünscht beobachtet werden, ob die Schüler an dieser Stelle verschiedene Analogien bilden und wie sich diese ggf. unterscheiden.

Die Schwierigkeiten bei der Übertragung von Zusammenhängen und Operationen aus ebenen geometrischen Situationen auf analoge räumliche Probleme werden auch bei der Auswertung der Bearbeitungen und der nachträglichen Verbalisierungen hinsichtlich des Auftretens von Analogiebildungen deutlich: Insgesamt konnten zwar bei etwa 57% aller Bearbeitungen Analogiebildungsbemühungen festgestellt werden, im Vergleich mit den anderen Aufgabensequenzen ein guter Wert, doch nur bei jeweils etwa 15% der Bearbeitungen manifestierten sich diese in konkreten Schritten auf der Objekt-, Relations- bzw. Handlungsebene. Wie die folgenden beiden Bearbeitungsbeispiele zeigen, waren jedoch einzelne Schüler sehr wohl in der Lage, die von ihnen vollzogenen Analogiebildungen anschaulich zu verbalisieren (Abb. 15). Dies wiederum spricht dafür, dass bei entsprechend elaboriertem Vorwissen der inhaltliche Schwerpunkt durchaus geeignet gewählt scheint, will man Analogiebildungsprozesse auf verschiedenen Ebenen beobachten.

Auch wenn diese Schülerzitate die Relevanz einer Gegenstandsdimension der Analogiebildung einmal mehr unterstreichen, muss insgesamt für diese Aufgabensequenz festgehalten werden, dass sie den Schülern sowohl inhaltlich als auch bezüglich der Forderung nach einer Verbalisierung ihrer Vorgehensweise während der Aufgabenbearbeitung wohl zu viel abverlangt.

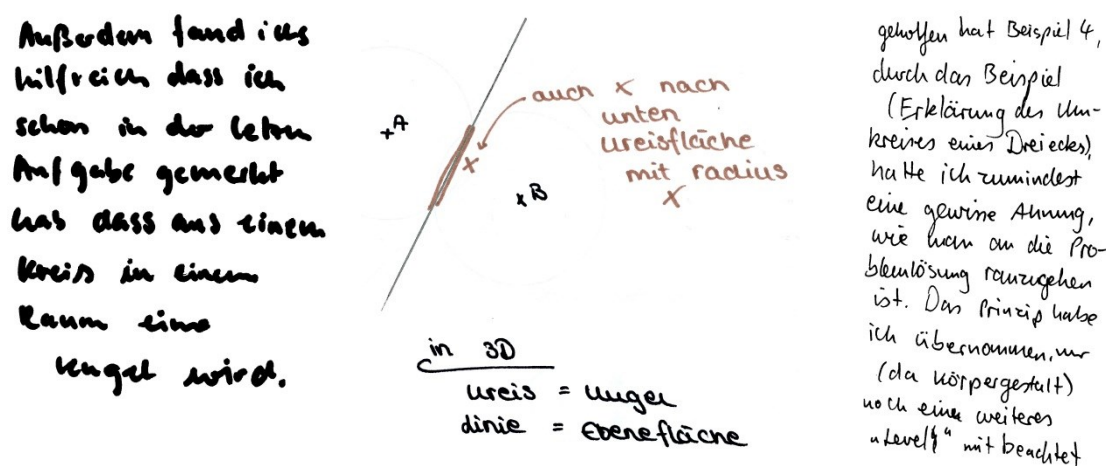


Abb. 15: Aufgabensequenz „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ – Analogiebildung auf verschiedenen Ebenen. Fragestellung links und Mitte: Wo liegen alle Punkte im Raum, die von zwei vorgegebenen Punkten  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben? Fragestellung rechts: Wie findet man den Umkugelmittelpunkt eines Tetraeders?

Betrachtet man nun die Bearbeitungen der Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“ genauer, so scheinen die Gründe für das Scheitern der Schüler hier etwas anders gelagert zu sein: Die Grundlagen zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken sind den Schülern offensichtlich bekannt, auch die Flächengleichheit zweier Dreiecke mit gleicher Höhe und

gleicher Grundlinie ist den meisten Schülern geläufig. Dennoch wird nur eine von vier Aufgaben zufriedenstellend gelöst. Die exemplarische Zusammenstellung von Verbalisierungen der Schüler zu dieser Aufgabensequenz (Abb. 16) gibt einigen Aufschluss darüber, wie die Probleme bei der Bearbeitung dieser Aufgaben gelagert sind. Viele Schüler haben demnach erkannt, dass sie die Flächengleichheit von Dreiecken ausnutzen müssen, um die Aufgaben zu lösen. Sie vermuten selbst, dass ihnen momentan lediglich der richtige „Blick auf die Aufgabe“, die richtige Idee fehlt. Offensichtlich ist es für die Lösung der Aufgaben weniger wichtig, eine gewisse Struktur aus den gelösten Beispielen auf das neue Problem zu übertragen, als vielmehr den richtigen „Kniff“ zu finden.

Ein weiteres Indiz dafür, dass diese Vermutung zutreffen könnte, liefert die Auswertung der Bearbeitungen und der nachträglichen Verbalisierungen hinsichtlich des Auftretens von Analogiebildung. Bei nur etwa 38% aller gelösten Aufgaben konnten überhaupt Hinweise auf Analogiebildungsprozesse identifiziert werden, und lediglich in je ca. 15% der Bearbeitungen konnten konkrete Analogiebildungen auf Objekt-, Relations und Handlungsebene festgestellt werden. Dieses Ergebnis ist dann nicht mehr sonderlich überraschend, wenn man, wie die Schüler selbst, den fehlenden Blick für die geometrische Situation als Grund für ihr Scheitern identifiziert. Für die weiteren Entscheidungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit bleibt festzuhalten: Analogiebildung scheint für diese Art von Aufgaben nicht das heuristische Hilfsmittel der Wahl zu sein.

|   |   |  |
|---|---|--|
| <p>Lösung von dem Bsp hat geholfen.<br/>Da man auf Parallelen verschieben darf ohne dass A sich verändert.<br/>Und wenn ein Dreieck <del>selbe</del> zwei Dreiecke selbe Höhe bzw. Grundlinie haben<br/>→ Flächengleich</p> | <p><b>Erläuterung<br/>Beispiel 1</b></p> <p>Durch Verschiebung eines Punktes auf der Parallelen einer Dreieckseite bleibt der Flächeninhalt gleich.</p> | <p>Konnte hier teilweise <del>an</del> Anregungen vom Vorteil bekommen. Hat aber nicht gereicht zum lösen!<br/><br/>Ich wusste gar nicht was ich machen sollte! Auch die Bsp haben nicht geholfen.</p> |
| <p><u>Vorne steht</u>, dass durch die seitenthalbierende die Flächen gleich groß werden.</p>  |   | <p><del>Ich</del> Habe leider keine Idee wie man diese Aufgabe lösen kann.<br/>Nicht einmal für einen Lösungsansatz</p>  |

Abb. 16: Verbalisierungen zur Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“

*Die Aufgabensequenzen „Bezugsgrößen und Invarianten“ und „Gemischte Prozentangaben“*

Von den restlichen Aufgabensequenzen wurden die Aufgaben zu „Bezugsgrößen und Invarianten“ sowie zu „Gemischten Prozentangaben“ besonders gut bearbeitet. Offensichtlich konnte bei diesen Aufgaben die Balance zwischen der Nähe zum Vorwissen auf der einen Seite und der Neuartigkeit der Aufgabenstellung auf der anderen Seite hergestellt werden. Zur Bearbeitung der Aufgaben musste tatsächlich lediglich auf nötiges Vorwissen aus der Sekundarstufe I zurückgegriffen werden, und dennoch war den Schülern die Art der Aufgabenstellung anscheinend so nicht geläufig – nur wenige Bearbeitungen kamen ohne Bezugnahme auf die gelösten Beispiele aus der Instruktionsphase aus.

Den Ergebnissen der inhaltlichen Durchsicht entsprechend, konnten bei einer großen Zahl von Aufgabenbearbeitungen zum einen konkrete Analogiebildungen auf allen Ebenen identifiziert werden. Zum anderen waren die Schüler zu fast allen Bearbeitungen in der Lage, eine verwertbare Verbalisierung ihres Zugriffs auf die gelösten Beispielaufgaben zu liefern. Dies wird in den Aussagen aus Abb. 17 beispielhaft deutlich.

Die Verbalisierungen zeigen, dass Analogiebildungen auf allen Ebenen stattfanden. Außerdem wurden Begriffe aus den Beispielen (Invariante, gemeinsame Bezugsgröße) aufgegriffen und auf die Testaufgaben übertragen. Die große Zahl an eindeutig identifizierbaren Analogiebildungen und gut nachvollziehbaren Verbalisierungen machen diese beiden Aufgabensequenzen für die Verwendung im Rahmen der Hauptuntersuchung besonders interessant.

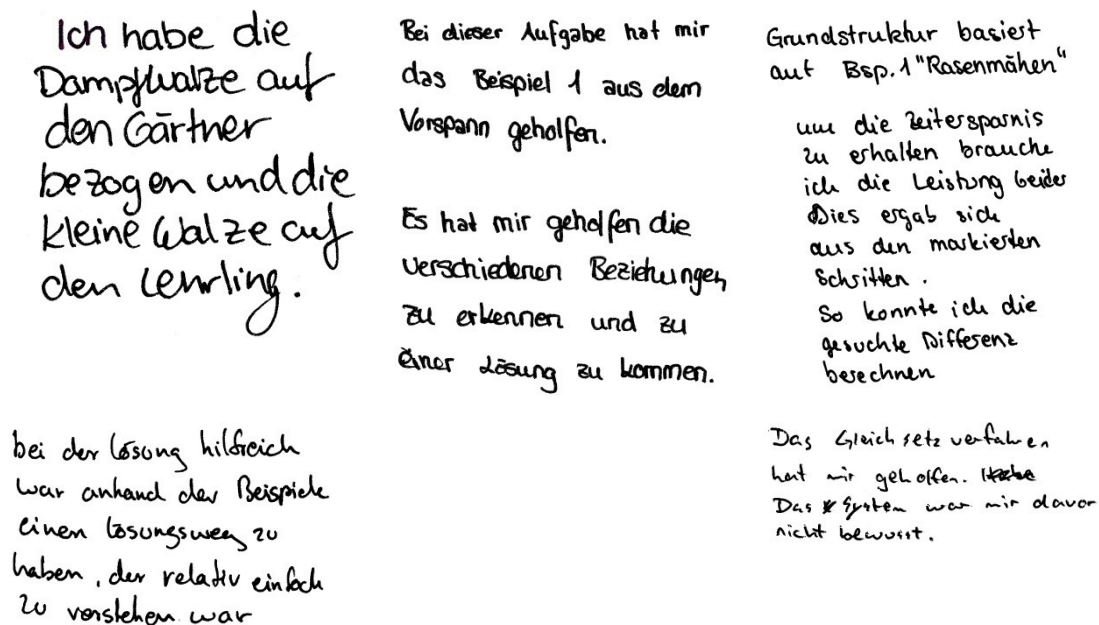


Abb. 17: Analogiebildung auf allen Ebenen bei der Bearbeitung der Aufgabensequenzen „Bezugsgrößen und Invarianten“ und „Gemischte Prozentangaben“

*Die Aufgabensequenzen „Lineare Zusammenhänge“ und „Kombinatorik“*

Zu betrachten sind an dieser Stelle noch die beiden Aufgabensequenzen zu „Linearen Zusammenhängen“ und zur „Kombinatorik“. Die Aufgaben zur ersteren wurden etwas besser gelöst, bei der Sequenz zur „Kombinatorik“ wurden hingegen besonders häufig ganze Aufgaben überhaupt nicht bearbeitet. In diesen Fällen zeugten die Bearbeitungen der restlichen Aufgaben meist von einer geringen Motivation des Teilnehmers. Einige Gesamtbearbeitungen aus diesem Bereich wurden so nur als Grenzfälle überhaupt in die Untersuchung mit aufgenommen, da wenigstens zwei Aufgaben erkennbar bearbeitet wurden. Bei der Aufgabensequenz zu den „Linearen Zusammenhängen“ beklagten die Teilnehmer die knappe Bearbeitungszeit. Die letzte Aufgabe dieser Sequenz konnte deshalb von fünf Teilnehmern nicht mehr bearbeitet werden.

Das Auftreten von erkennbaren Analogiebildungen ist bei beiden Sequenzen auf einem ähnlichen Niveau, doch bezüglich der Quantität sowie der Qualität der Verbalisierungen schneidet die Aufgabensequenz zur „Kombinatorik“ deutlich besser ab. Einige Beispiele zeigt die Abbildung 18.

Obwohl auch bei der Sequenz zu „linearen Zusammenhängen“ Analogiebildung auf den verschiedenen Ebenen beobachtet werden konnte (vgl. Abb. 20), und hier zudem die bereitgestellten Visualisierungen (hier: Funktionsgraphen) bei der Lösung der Testaufgaben häufiger herangezogen wurden als bei den anderen Aufgabensequenzen, scheint bei dieser Sequenz der Einsatz im Rahmen der Hauptstudie aus einem anderen Grund problematisch zu sein: Einige der Schüler gaben an, nicht auf die gelösten Aufgaben aus der Testphase als vielmehr auf bereits vorhandenes Wissen zurück gegriffen zu haben (Abb. 19).

Das ist zwar grundsätzlich erfreulich, will man aber Analogiebildungsprozesse beobachten, muss der Wissensbereich, auf den im Rahmen der Analogiebildung zugegriffen wird, (zumindest weitgehend) neu sein.



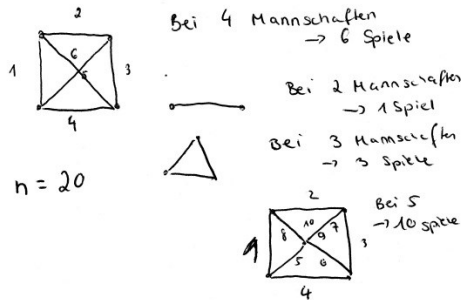
|   |   |
|---|---|
| <p>Lösung:</p> <p>jede der 20 Mannschaften hat 19 Mannschaften, mit denen sie spielen will<br/>also <math>20 \cdot 19</math> Spiele</p> <p>hier wird aber jede Mannschaft doppelt gezählt weil, wenn ich von Mannschaft A ausgehe:</p> <p>Ⓐ spielt mit B, C, D, ...<br/>und<br/>B spielt mit Ⓐ, C, D, ... → A doppelt gezählt</p> <p>→ also: <math>\frac{20 \cdot 19}{2} = 190</math> Formel von 2. (Lm)</p> <p>Ⓐ Es müssen 190 Begegnungen ausgetragen werden.</p> | <p>(Hier bitte vorerst nicht schreiben)</p> <p>→ 2. Aufgabe (Lösungsmöglichkeiten = Lm)<br/>jeder Punkt ist mit den n Punkten ist mit n-1 Punkten verbunden</p> |
|---|---|

Mann kann sich die 20 Mannschaften wie 20 Punkte vorstellen die mit jedem anderen Punkt ~~verbunden~~ einmal verbunden sein müssen.

Mit einem Spiel → 2 Mannschaften  
2 Punkte ; ein Strich  
Mannschaften      Spiel  
 $2 - 1 = \text{Spiel}$        ~~$20 \cdot (2 - 1)$~~

vollständige Anzahl Mannschaften

↳ Linie (Spiel) verbunden  
↓  
? vs ?



Es waren 22 Gäste geladen

hier muss man im Gegensatz zu jeder Aufgabe davor einfach Rückwärts rechnen. hier hat man das Ergebnis und muss nach n auflösen um die Anzahl der Gäste herauszufinden.



5 Pkt/Leute  
11 Begegnungen beim Anstoßen

Bsp 2 wurde zur Lösung genutzt und der Ansatz in eine Gleichung eingebaut.

Abb. 18: Analogiebildungen auf allen Ebenen bei der Bearbeitung der Aufgabensequenz „Kombinatorik“



alles ohne Hilfe der  
Lösungsbeispiele ...  
- „Grundwissen“

Dies wusste ich  
bereits. Ich habe  
mir die Vorgehens-  
weise der Voraufgaben  
abgeschaut um  
mögliche Fehler zu  
vermeiden

Grundlagen waren noch  
bekannt  
=> gleichstellen konnte  
ich nach so ungefähr  
selber

Abb. 19: Manche Schüler greifen eher auf ihr Vorwissen zurück als auf die gelösten Aufgabenbeispiele

Gleichsetzen siehe  
Überholzeitpunkt von LKW/PKW  
in Aufgabe 2

Einsetzen, wieder  
wie in Bsp.  
Aufholjagd

Prinzip wie Bsp 3  
 $m =$  gegebene Geschwindigkeit  
 $-450$ , da entgegengesetzt  
der Aufstiegsrichtung  
(wie Rohrkopf)

Abb. 20: Ein Beispiel für Analogiebildung bei der Bearbeitung der Sequenz „Lineare Zusammenhänge“

### Zusammenfassung und Konsequenzen

Insgesamt wurden die Instruktionstexte und die gelösten Aufgabenbeispiele bei allen Aufgabensequenzen gut verstanden, die Instruktionen für die Sequenz „Lineare Zusammenhänge“ wurden allerdings als zu umfangreich empfunden. Auch die Testaufgaben wurden, bis auf einige Ausnahmen, von den Schülern als verständlich empfunden und im Durchschnitt auch zufriedenstellend gelöst. Eine Ausnahme bilden die Sequenzen mit geometrischem Schwerpunkt. Hier konnten die Aufgaben nur von wenigen Schülern ohne größere Schwierigkeiten gelöst werden. Bei der Bearbeitung der Verbalisierungsaufgabe im Anschluss an die Testphase wird deutlich, dass für die Schüler eine Explikation ihrer Gedanken beim Lösen von Mathematikaufgaben ungewohnt ist. Entsprechend wurde diese Aufgabe nur von einem Teil der Schüler zufriedenstellend gelöst. Dennoch konnten sowohl in den Bearbeitungen, als auch in den anschließenden Verbalisierungen Analogiebildungsschritte entnommen werden. Besonders gut gelang die Analogiebildung auf allen Ebenen bei den Aufgabensequenzen zu „Gemischten Prozentangaben“ und zu „Bezugsgrößen und Invarianten“. Ebenfalls gute Hinweise auf Analogiebildungsprozesse konnte man den Sequenzen „Kombinatorik“, „Lineare Zusammenhänge“ und „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ entnehmen. Im Rahmen der Sequenz „Lineare Zusammenhänge“ wurde jedoch

sehr oft auf das Schulwissen und weniger auf die Lösungsbeispiele zugegriffen, und bei der Sequenz „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ waren die meisten Schüler insgesamt von den Aufgaben, die mentales Arbeiten im Raum verlangten, etwas überfordert. Einzig die Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“ scheint für die Beobachtung von Analogiebildungsprozessen eher ungeeignet zu sein, da zur Lösung der Testaufgaben aus der Sicht der Schüler „die richtige Idee“, also ein ganz bestimmter Blick auf die mathematische Situation, ein Kniff, erforderlich ist.

Hinsichtlich der Hauptstudie muss nun entschieden werden, mit welchen Aufgabensequenzen gearbeitet werden soll. Dabei steht das Potenzial der einzelnen Sequenz zur Initiierung von Analogiebildungsprozessen im Mittelpunkt. Weiter sollen die Schüler in der Lage sein, ihre Gedanken beim Lösen der Aufgaben zu verbalisieren. Die Ergebnisse der Vorstudie legen nahe, dass die beiden Aufgabensequenzen zu „Gemischten Prozentangaben“ und zu „Bezugsgrößen und Invarianten“ hierzu am besten geeignet sind.

Weiter verspricht die Aufgabensequenz zur „Kombinatorik“ offensichtliche Analogiebildungen und gute Verbalisierungen seitens der Schüler. Zudem berichten Aßmus & Förster, unter Bezugnahme auf Käpnick (1998), über den Einsatz ähnlicher Aufgaben mit kombinatorischem Schwerpunkt, die bei vergleichbarem Setting im Rahmen der Studie ViStAD erfolgreich eingesetzt wurden. Es wurden dabei Zusammenhänge zwischen den Fähigkeiten zur Analogieerkennung bzw. -nutzung und mathematischer Begabung untersucht (vgl. Aßmus & Förster, 2012, 2013, 2015).

In der Hauptstudie soll deshalb auf diese drei Sequenzen zurückgegriffen werden. Die Aufgaben zur „Kombinatorik“ werden dabei ohne Veränderung übernommen, bei der Sequenz zu „Bezugsgrößen und Invarianten“ wird für die Hauptuntersuchung die Aufgabe 3a und bei den „Gemischten Prozentangaben“ die Aufgabe 4 gestrichen, die Aufgabe 1 wird unverändert beibehalten. Da bei den beiden Sequenzen „Lineare Zusammenhänge“ und „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ weniger fehlende Anhaltspunkte für Analogiebildungen, sondern vielmehr eine kognitive Überlastung bzw. ein Zeitproblem der Schüler als Ursache für weniger gute Ergebnisse in der Vorstudie identifiziert werden konnten, sollen diese Sequenzen dann zum Einsatz kommen, wenn abzusehen ist, dass unter den Teilnehmern besonders leistungsstarke Schüler sind. Die Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“ wird für die Benutzung im Rahmen der Hauptstudie verworfen.

### 3.1.5 Das Untersuchungsdesign – Ein Drei-Phasen-Design

Mit der Entscheidung für die Art der Darbietungsweise geeigneter Problemstellungen in einer beispielbasierten Lernumgebung (Abschnitt 3.1.1) und die Konstruktion der Aufgaben (Abschnitt 3.1.2) sind die wichtigsten Weichen für das Anstoßen von Analogiebildungsprozessen während des Beobachtungszeitraums gestellt. In einem nächsten Schritt kommt es nun darauf an, diese Prozesse, die sich ja im Denken des Lerners abspielen, durch geeignete Maßnahmen sichtbar und beschreibbar zu machen.

Wie im Abschnitt 1.1 ausführlich dargelegt wurde, ist es sowohl aus philosophischer, als auch aus kognitionspsychologischer Sicht nicht möglich, eine Definition vom Begriff des menschlichen Denkens anzugeben, die von sämtlichen Strömungen dieser Wissenschaften gleichermaßen akzeptiert würde. Ähnlich uneinheitlich und zum Teil umstritten sind deshalb auch die Methoden und Werkzeuge, denen man im Bereich der empirischen Kognitionsforschung vertraut, um einen Einblick in das Wesen des menschlichen Denkens zu gewinnen.

#### Introspektion

Bis weit in das 19. Jahrhundert hinein waren Fragen nach dem menschlichen Denken rein philosophischer Natur. Erst um die Jahrhundertwende zum 20. Jahrhundert erfolgte eine wissenschaftliche Annäherung an dieses Themengebiet. Als einer der Ursprünge wissenschaftlicher Kognitionspsychologie wird in historischen Betrachtungen zur Psychologie das Labor Wilhelm Wundts in Leipzig (um 1879) gesehen (vgl. z. B. Anderson, 2001, S. 7 oder Krings, 2001, S. 214). Wichtigstes Instrument wissenschaftlicher Untersuchungen war in dieser Zeit die Introspektion. Dabei werden solche Verfahren als introspektiv bezeichnet, von denen man sich eine „kontrollierte Bezugnahme auf die je eigenen Bewusstseinsinhalte“ (Rolf, 1996, S. 287) durch den Probanden versprach, oder einfacher:

„The word introspection [...] means, of course, looking into our own minds and reporting what we there discover.“ (Boring, 1953, S. 170)

Die Idee der Introspektion – des „In-sich-Hineinschauens“ – findet sich jedoch bereits bei Platon, der in seinem Dialog *Theaitetos* seinem Lehrer Sokrates die folgenden Worte in den Mund legt (Plato, 1871):

„[...] why should we not calmly and patiently review our own thoughts, and thoroughly examine and see what these appearances in us really are?“<sup>37</sup>

---

<sup>37</sup> Die Idee der Introspektion wird in der englischen Übersetzung von B. Jowett sehr deutlich, während sie in der deutschen Übersetzung von F. D. Schleiermacher in Plato (1940) eher vage bleibt: „Da es sich nun so verhält, können wir ganz gelassen in voller Muße die Sache wieder von vorn untersuchen, ohne verdrießlich zu werden, sondern recht aufrichtig uns prüfend, was doch diese Erscheinungen uns eigentlich sind (...)“ (S. 581).

Die Fähigkeit des Individuums „in sich zu gehen“, um Erkenntnisse über das eigene Denken zu gewinnen, wird in den Geburtsjahren der Kognitionspsychologie als gegeben angesehen und nicht ernsthaft in Frage gestellt (vgl. auch Descartes „Je pense donc je suis“, Abschnitt 1.1). Dies wird auch von Boring (1953) unterstrichen:

„So far as I know, the existence of such states has never been doubted by any critic, however skeptical in other respects he may have been. That we have *cogitations* of some sort is the *inconcussum* in a world most of whose other facts have at some time tottered in the breath of philosophical doubt. All people unhesitatingly believe that they feel themselves thinking, and that they distinguish the mental state as an inward activity or passion, from all the objects with which it may cognitively deal. *I regard this belief as the most fundamental of all the postulates of Psychology* [...]“ (S. 170. Hervorhebungen im Original)

Ausgehend von dieser als zwangsläufig angesehenen Existenz eines Bewusstseins, wird die Bedeutung der Introspektion für die Wissenschaftlichkeit der neuen Disziplin in deren Anfangsstadium in den „Principles of Psychology“ von W. James (1890) besonders deutlich:

„Introspective Observation is what we have to rely on first and foremost and always. [...] Everyone agrees, that we there discover states of consciousness.“ (S. 185, zitiert nach Boring, 1953, S. 170)

Auch wenn der an den philosophischen Lehren des amerikanischen Pragmatismus orientierte psychologische Mainstream in den USA zum Ende des 19. Jahrhunderts introspektive Verfahren nicht wie die Wundtsche Schule unter der Zielvorgabe einer „gründliche(n) und methodische(n) Analyse von Geistesinhalten“ (Anderson, S. 8) betrieb, sondern sich eher einer handlungsorientierten Tradition verpflichtet fühlte, war man sich doch darin einig, dass Introspektion einen Einblick in das Denken des Menschen erlaubt.

Zweifel am wissenschaftlichen Nutzen der noch zu Beginn des 20. Jahrhunderts verwendeten „naiven“ (vgl. Ericsson & Simon, 1999)<sup>38</sup> introspektiven Verfahren stützten sich wesentlich auf den Vorwurf, diese seien weder valide, denn dem Subjekt seien nur die Ergebnisse des eigenen Denkens, nicht aber das Denken selbst durch Introspektion zugänglich<sup>39</sup>, noch seien sie reliabel, denn „von Labor zu Labor wurden unterschiedliche Typen introspektiver Erfahrungen berichtet – passend zur jeweiligen ‚Haustheorie‘ des Labors, aus dem sie stammten“ (Anderson, S. 8). Die meiste Beachtung fanden dabei die Vorwürfe Watsons (1913), der die Beschreibung menschlichen Denken durch den introspektiven

---

<sup>38</sup> Ericsson und Simon sprechen von „naiven“ Verfahren der Introspektion, wenn „kein Unterschied gemacht [wird] zwischen a) den Erklärungen und Generalisierungen der kognitiven Prozesse des Individuums und b) den ausschließlichen Mitteilungen der kognitiven Prozesse“ (Leuchter, 2009, S. 52). Diese Unterscheidung führte schließlich zu den Begriffen der Vokalisierung einerseits und der Verbalisierung andererseits und konnte introspektiven Verfahren zu einer Renaissance im Rahmen der kognitiven Wende der 1970er Jahre verhelfen.

<sup>39</sup> „It is the *result* of thinking, not the process of thinking, that appears spontaneously in consciousness“ (Miller, 1962, S. 56, zitiert nach Nisbett & Wilson, 1977, S. 232, Hervorhebung im Original)

Zugriff auf Bewusstseinsinhalte für überflüssig und damit die Methodologie der klassischen Introspektion für eine Fehlentwicklung hält und rundweg ablehnt:

„Psychology, as the behaviorist views it, is a purely objective, experimental branch of natural science which needs introspection as little as do the sciences of chemistry and physics. It is granted that the behavior of animals can be investigated without appeal to consciousness. The position is taken here that the behavior of man and the behavior of animals must be considered on the same plane; as being equally essential to a general understanding of behavior.“ (S. 176)

Als Initiator der „Behaviouristischen Revolution“ vertritt Watson die Auffassung, menschliches Denken äußere sich in jedem Fall in menschlichem Verhalten, zur Erforschung menschlichen Denkens genüge es also, das Verhalten des Menschen zu studieren und die Zusammenhänge durch geeignete Reiz-Reaktion-Schemata zu beschreiben. Ohnehin sei aus wissenschaftlicher Sicht nur beobachtbares Verhalten in konsistenter Weise und ohne methodologische Widersprüche verwertbar. Watson verzichtet dabei allerdings nicht auf die Verwendung verbaler Daten – er interpretiert jedoch den Forschungsprozess neu: Die Probleme der klassischen Introspektion sieht er darin, dass das zu untersuchende Subjekt gleichzeitig der Beobachter ist, der über Bewusstseinszustände berichtet und dem Forscher lediglich die Aufgabe zukommt, diese Äußerungen aufzunehmen. Die Verantwortung für die Richtigkeit der Darstellung von Bewusstseinszuständen liegt im Forschungsprozess also beim Subjekt. Für die introspektive Beobachtung bedeutete das, dass strenge methodische Regeln der Introspektion entwickelt und die Versuchspersonen gemäß dieser Regeln trainiert werden mussten. Es galt also, einen Bedeutungsgehalt für die Äußerungen der Versuchsperson zu vereinbaren. Interpretiert man diese jedoch, wie Watson, als Verhalten auf eine bestimmte Reizsituation, so liegt die Verantwortung im Forschungsprozess beim Forscher, der das Verhalten nun beobachten und interpretieren muss. Als Versuchspersonen kommen so auch Personen ohne jede Erfahrung mit introspektiven Verfahren – ja sogar Tiere – in Frage (wenn man jede Art des Verhaltens als Kommunikation bzw. als Äußerung begreift). Durch die Verschiebung der Verantwortung gelingt es Watson also, den Forschungsprozess von der Notwendigkeit einer gemeinsamen Grundlage für die Bedeutung einzelner Äußerungen zu befreien. Boring (1953) drückt dies folgendermaßen aus:

„The important thing is to see that Watson, in attacking introspection, was objecting, not to the use of words by the subject, but to trusting the subject to use the words only with those meanings that the experimenter wishes the words to have.“ (S. 185)

Um diese Sichtweise von den Methoden der klassischen Introspektion abzugrenzen, spricht Watson von *verbal reports* (vgl. Boring, 1953, S. 185). In Bezugnahme auf diese Abgrenzung wird dabei häufig zwischen der Verbalisierung des Gedachten und der Vokalisierung von

Gedanken unterschieden (vgl. z. B. Ericsson & Simon, 1999, S. 63ff).<sup>40</sup> Während mit der Verbalisierung eine Explikation des Gedachten einhergeht, wird die Vokalisierung im Modell der Informationsverarbeitung (vgl. Abschnitt 3.1.1) lediglich als Offenlegung der Inhalte des Kurzzeitgedächtnisses verstanden – Gedanken können somit als verbales Verhalten studiert werden.

Auch wenn in der Folgezeit Methoden aufkamen und diskutiert wurden, von denen man sich einen unmittelbaren Zugriff auf die Gedanken der Versuchspersonen erhoffte als von den Methoden der klassischen Introspektion, wandte sich der Mainstream von verbalen Äußerungen als Daten ab und bekannte sich zu behaviouristischen Positionen, die in *verbal reports* nach wie vor nur eine indirekte Äußerung des Denkens (als Verhalten) erkannten. Unter anderem wurden die Unvollständigkeit von *verbal reports* und der Einfluss introspektiver Verfahren auf die Performanz und die Stringenz von Denkprozessen unter Laborbedingungen kritisiert (vgl. Ericsson & Simon, 1999, S. 60). Besonders schwerwiegend war allerdings die Kritik von Nisbett & Wilson (1977), die eine Zugriffsmöglichkeit auf höhere kognitive Prozesse wie Beurteilen oder Problemlösen grundsätzlich in Frage stellen. Anhand verschiedener Experimente identifizieren sie drei Aspekte, denen der fehlende Zugang zu höheren kognitiven Prozessen zugeschrieben wird:

„[...] there may be little or no direct introspective access to higher order cognitive processes. Subjects are sometimes (a) unaware of the existence of a stimulus that importantly influenced a response, (b) unaware of the existence of the response, and (c) unaware that the stimulus has affected the response.“ (S. 231)

Die Äußerungen im Rahmen introspektiver Methoden werden von Nisbett & Wilson (1977) nicht als Beschreibung kognitiver Prozesse akzeptiert. Sie vermuten die Grundlage dieser Äußerungen eher in impliziten Theorien der Versuchsperson über die Plausibilität bestimmter Stimuli als Ursache eines gegebenen Verhaltens:

„[...] when people attempt to report on their cognitive processes [...] they do not do so on the basis of any true introspection. Instead, their reports are based on a priori, implicit causal theories, or judgments about the extent to which a particular stimulus is a plausible cause of a given response.“ (S. 231)

Kritik an der extremen Position Nisbetts & Wilsons (1977) aus verschiedenen Richtungen fasst Leuchter (2009) dahingehend zusammen, dass einerseits die „[...] Diskrepanz zwischen verbalen Daten und Verhaltensdaten als Herausforderung für weitere Nachforschungen“ (S. 54) gesehen werden muss und andererseits „[...] sorgfältige Vorkehrungen in den Vorbereitungen der Versuche zu treffen sind.“ (S. 55). Dazu nennt sie verschiedene

---

<sup>40</sup> Mit anderen Worten wird eine „distinction between describing thoughts and expressing thoughts“ (Ericsson & Simon, 1999, S. 59) gemacht.

Faktoren, die bei der Versuchsdurchführung beachtet werden müssen. Besonders herauszustellen sind dabei die beiden folgenden Punkte:

„Als erstes muss sichergestellt werden, dass die Versuchspersonen verstehen, dass im Gedächtnis gespeicherte kognitive Prozesse gefragt sind und nicht Schlussfolgerungen und Deutungen zu eben diesen Prozessen.“ (S. 55)

„Der zeitliche Abstand zwischen dem Versuch und der Untersuchung der kognitiven Prozesse, die in diesem Versuch aktualisiert werden, muss möglichst kurz gehalten werden.“ (S. 56)

Leuchter (2009) sieht die Schwierigkeiten im Umgang mit verbalen Daten also keineswegs auf der systematischen Ebene, wie viele der Kritiker introspektiver Verfahren, sondern ausschließlich auf der methodischen Ebene und in der unausgereiften Methodologie – „verbale Protokolle über innere Zustände und Prozesse“ seien aber „grundsätzlich brauchbar“ (S. 55). Damit schließt sie sich der Meinung Ericssons & Simons (1999) an, die den Rückstand in der Entwicklung fundierter Methoden und einer stringenten Methodologie darauf zurück führen, dass während der behaviouristischen Revolution introspektive Verfahren bestenfalls dafür als geeignet angesehen wurden, sich einen ersten Überblick über ein Gebiet zu verschaffen, um anschließend gezielt „objektive“ Messverfahren anzuwenden (vgl. S. 3f). Ericsson und Simon waren es auch, die diesem Rückstand ein Regelwerk für die Erhebung und Auswertung verbaler Daten entgegensezten. Sie beschrieben Regeln zur Erhebung von Daten im Rahmen verschiedener introspektiver Verfahren, die den obigen Faktoren von Leuchter (2009) genügen und entwickelten eine Methodologie, wie mit den erhobenen Daten umzugehen sei. Der Titel des zugehörigen Standardwerks „Protocol Analysis – Verbal report as data“ verrät neben dem Namen, den die Autoren der von ihnen entwickelten Methodologie gaben, im Untertitel auch, dass es als Befreiungsschlag gegen die Kritiker verbaler Protokolle gedacht war. Verbale Protokolle können demnach, bei Beachtung methodischer und methodologischer Regeln, sehr wohl als Daten einer Untersuchung dienen, die wissenschaftlichen Ansprüchen genügt.

In der vorliegenden Arbeit sollen Analogiebildungsprozesse auf der Grundlage des in Kapitel 1 entwickelten Zwei-Dimensionen-Modells beobachtet und beschrieben werden. Insbesondere sollen dabei verschiedene Wege der Analogiebildung identifiziert und gegeneinander kontrastiert werden. Die Untersuchung dieser Denkprozesse alleine auf die daraus erwachsenden Resultate, also z. B. auf Dokumente mit Schülerlösungen zu stützen, erscheint zur Erreichung dieser Ziele als zu kurz gegriffen. Der Gedankengang selbst ist in solchen Daten mit großer Wahrscheinlichkeit nur lückenhaft dokumentiert, zeitliche Abläufe im Denkprozess lassen sich nur zum Teil rekonstruieren und das Aufdecken gedanklicher Irrwege im Lösungsprozess ist nur selten möglich. Ähnlich verhält es sich mit einer reinen Performanz-Analyse zur Identifizierung einzelner Prozesskomponenten, etwa über die benötigte Lösungszeit. Diese kann nur dann sinnvoll entwickelt werden, wenn eine klare

Vorstellung (z. B. in Form eines Prozessmodells) davon existiert, welche Prozesskomponenten im Laufe des Denkprozesses überhaupt durchlaufen werden. Dies steht einerseits im Widerspruch zum Ziel, verschiedene Wege des Denkens zu identifizieren, andererseits gehen auch hier Informationen der zeitlichen Abfolge und Hinweise auf möglicherweise aufgetretene Irrwege verloren. In der dargelegten Diskussion über introspektive Verfahren und in der jüngeren Kognitionsforschung lässt sich dieser Standpunkt wiederfinden (vgl. z. B. Ericsson & Simon, 1980; Hastrup, 1991; Schneider, 2001; Leuchter, 2009). Beginnend mit den Ausführungen von Ericsson & Simon (1980) haben sich verschiedene elaborierte Verfahren der Introspektion und damit verbundene Methodologien zur Auswertung der erhobenen Daten entwickelt und etabliert. Besondere Aufmerksamkeit wurde dabei der Methode des *Lauten Denkens* zuteil, die auch für die vorliegende Untersuchung Anwendung findet.

#### Die Methode des *Lauten Denkens*

Bei der Methode des *Lauten Denkens* handelt es sich um ein introspektives Verfahren, bei dem die Versuchsperson gebeten wird, auszusprechen, was ihr beim Bearbeiten einer Aufgabe „durch den Kopf geht“, sie soll „einfach ihre Gedanken ‚zu Wort kommen lassen‘“ (Wallach und Wolf, 2001, S. 9, Hervorhebung im Original). Der wesentliche Unterschied zu den Verfahren der klassischen Introspektion besteht darin, dass von der Versuchsperson nicht verlangt wird, Erklärungen oder Begründungen für die eigenen Denkprozesse abzugeben. Duncker (1935), der die ersten von einer breiteren wissenschaftlichen Öffentlichkeit wahrgenommenen Experimente mit dieser Methode durchführte, beschreibt den Unterschied zur klassischen Introspektion wie folgt:

„Diese Instruktion ‚*laut denken*‘ ist nicht identisch mit der bei Denkexperimenten sonst üblichen Aufforderung zur Selbstbeobachtung. Während der Selbstbeobachtende sich selbst als Denkenden zum Gegenstand macht, also – der Intention nach – verschieden vom denkenden Subjekt ist, bleibt der laut Denkende unmittelbar auf die Sache gerichtet, läßt sie nur gleichsam ‚zu Worte kommen‘.“ (S. 2, Hervorhebungen im Original)

Es bedarf also keines speziellen Trainings bzw. speziell geschulter Versuchspersonen zur Durchführung einer Untersuchung nach der Methode des *Lauten Denkens*.

Um die Äußerungen der Versuchsperson interpretieren zu können, muss zunächst verstanden werden, *was* beim *Lauten Denken* eigentlich geäußert wird (vgl. Ericsson & Simon, 1999, S. 135ff). Dazu wiederum ist es notwendig zu identifizieren, welche Gedächtnisinhalte überhaupt verbalisiert werden können. Eine der Grundannahmen der Methodologie von Ericsson & Simon ist, dass beim Lauten Denken (ausschließlich) Inhalte des Kurzzeitgedächtnisses verbalisiert werden (können):



- „1. The verbalizable cognitions can be described as states, that correspond to the contents of STM<sup>41</sup> (i. e., to the information that is in the focus of attention).
2. The information vocalized is a verbal encoding of the information in short-term memory.“ (Ericsson & Simon, 1999, S. 221)

Grundlage ist also ein Informationsverarbeitungsmodell, das auf einer Mehrspeichertheorie des Gedächtnisses beruht, wie sie auch in Abschnitt 3.1.1 erläutert wurde. Unterschieden wird dabei zwischen prozessbegleitendem Lauten Denken, bei dem die Äußerungen der Versuchspersonen während des Denkprozesses z. B. mittels einer Videokamera festgehalten werden und dem retrospektiven Lauten Denken, bei dem die Versuchsperson erst nach dem Bearbeitungsprozess gebeten wird ihre Gedanken zu äußern. Wallach & Wolf (2001, S. 10f und 24f) sehen diese Form der retrospektiven Introspektion lediglich für kurze Bearbeitungssequenzen als einsetzbar an und ordnen sie als statusdiagnostisches Verfahren ein, das nicht dazu geeignet ist Prozesse offenzulegen. Zudem befürchten sie, dass „der offline Charakter des retrospektiven Lauten Denkens [...] zu weitaus ernsteren Validitätsproblemen (führt)“ (Wallach & Wolf, S. 24 und s. u.). Als „neue, interessante Form des Verfahrens, die ihren Ursprung in der Bildungsforschung hat“ (S. 25) bezeichnen Wallach & Wolf das *Nachträgliche Laute Denken*, bei dem die Retrospektion z. B. durch das Betrachten eines Videomitschnitts des eigentlichen Denkprozesses unterstützt wird.<sup>42</sup> Das prozessbegleitende Laute Denken, das auch bei Ericsson & Simon (1999) im Mittelpunkt steht, lässt sich nach Wallach & Wolf (2001) als prozessdiagnostisches Verfahren einordnen und erlaubt demnach die Rekonstruktion von Denkprozessen, die in diesem Zusammenhang als „Trajektorie(n) von Wissenszuständen eines Probanden über aufeinanderfolgende Zeitpunkte“ (S. 11) gesehen werden. In dieser Formulierung wird auch die Annahme deutlich, dass durch Introspektion grundsätzlich nur auf deklaratives Wissen zugegriffen wird:

„prozeßbegleitende [sic!] Verbalisierungen (werden) als Externalisierung *deklarativen* Wissens betrachtet [...]“ (S. 11, Hervorhebung im Original)

Transformationen deklarativen Wissens werden dabei als Anwendung prozeduralen Wissens angesehen (vgl. Anderson, 2001, S. 238). Prozedurales Wissen lässt sich demnach lediglich indirekt in der Veränderung deklarativen Wissens beobachten.

Zusammenfassend ist, im Hinblick auf die Beobachtung und Beschreibung von Analogiebildungsprozessen, die Methode des prozessbegleitenden Lauten Denkens adäquat. Dabei sind hauptsächlich die Äußerungen der Versuchspersonen in der Testphase (s. Abschnitt 3.1.1) von Interesse. Da diese Äußerungen möglichst störungsfrei vorliegen sollen, bietet

---

<sup>41</sup> STM = Short-term memory (Anm. d. Verf.)

<sup>42</sup> Im Zusammenhang mit mathematikdidaktischen Fragestellungen wurden Varianten retrospektiver Verfahren z. B. von Leuchter (2009) zur Untersuchung professionellen Handlungswissens von Mathematiklehrkräften und von Borromeo Ferri (2004) zur Untersuchung mathematischer Denkstile angewandt.

sich ein Labor-Setting für die Untersuchung an, in dem die Testphase der Aufgabenbearbeitung videografiert wird. Als besonderer Nachteil eines Labor-Settings, bei dem die Probanden in Form von Einzeluntersuchungen beobachtet werden, gilt jedoch die artifizielle Situation, bei der man reaktante Auswirkungen auf das Untersuchungsergebnis befürchtet. Bezugnehmend auf eine Untersuchung im individuellen Labor-Setting schreibt Schoenfeld (1985):

„As Protocol 9.1 [...] indicates, strange things can happen in single-person protocols“ (S. 281).

Er verwendet deshalb für weitere Untersuchungen die Methode des *Pair Thinking aloud*, bei der zwei Versuchspersonen gemeinsam eine Aufgabe oder ein Problem bearbeiten und dabei ihre jeweiligen Gedanken laut äußern. Er begründet seine Vorgehensweise:

„One major reason for recording students in pairs is that doing so helps to alleviate the kinds of environmental pressures that weight so heavily on students as they solve problems individually.“ (S. 281)

Auch Haastrup (1991) verwendet die Methode des *Paarweisen Lauten Denkens* und führt weitere Begründungen dafür ins Feld:

„[...] by using pairs, one stimulates informants to verbalize all their conscious thought processes because they need to explain and justify their hypotheses [...] to their fellow informant. Furthermore, thinking aloud in pairs seems quite natural [...]; It comes close to a real life situation.“ (S. 85)

Bezogen auf die Ausgangsüberlegungen der vorliegenden Arbeit scheint dieser letzte Gedanke besonders schwerwiegend bei der Begründung der geeigneten Methode, geht es doch auch um Situationen wie die Vorbereitung auf eine Klassenarbeit, in denen die Schüler oft gemeinsam arbeiten und Analogiebildungsprozesse eine tragende Rolle spielen. Es sind aber nicht nur die Vorteile eines alltagsnahen Settings, die für die Methode des *Pair Thinking Aloud* sprechen, auch bezüglich der Quantität und Qualität der gewonnenen Daten scheint das Paarweise Laute Denken vielversprechend: Borromeo Ferri (2004) z. B. schreibt, „dass beim paarweisen Lösen von Problemen der Problemlöseprozess stärker verbalisiert und damit leichter rekonstruierbar ist“ (S. 65) und Haastrup (1987) stellt fest:

„It is hard to imagine that a setting with one informant thinking aloud for the benefit of a tape-recorder would have elicited protocols that were as informative as the ones based on pair work.“ (S. 202)

Auf den ersten Blick erscheint es fraglich, ob mit einer Methode, die auf gemeinsames Bearbeiten der Untersuchungsprobleme setzt und bei der zwangsläufig Interaktionen zwischen den beteiligten Individuen auftreten, die Untersuchung individueller Denkprozesse gelingen kann. Schoenfeld (1985) schreibt hierzu jedoch:

„[...] odd as it may seem, two-person protocols will often provide better information about individual students' decision-making processes than do single-person protocols.“  
(S. 281)

Auch Borromeo Ferri (2004) stellt sich auf diesen Standpunkt, sichert die Qualität ihrer Ergebnisse aber durch ein Drei-Phasen-Design ab: Anschließend an die Phase des Paarweise Lauten Denkens werden die einzelnen Versuchspersonen in einer zweiten Phase der Untersuchung gebeten, bei der Betrachtung des Videomitschnitts ihre Gedanken nochmals *nachträglich* laut zu rekonstruieren (vgl. oben). In einer dritten Phase wird noch ein individuelles Leitfadeninterview durchgeführt. Auch Haastrup (1991) sichert ihre Ergebnisse durch eine Phase individueller retrospektiver Introspektion ab (vgl. S. 203ff).

In der vorliegenden Untersuchung sollten die Paar-Protokolle ebenfalls nicht als einzige Datengrundlage zur Erforschung von Analogiebildungsprozessen herangezogen werden. Zur Absicherung der Datenqualität wurde jedoch ein anderer Weg eingeschlagen als bei Borromeo Ferri und Haastrup. Es wurden zu einem Untersuchungstermin immer vier Versuchspersonen eingeladen. In der Lernphase der Untersuchung (vgl. Abschnitt 3.1.1) betrachteten je zwei Schüler gemeinsam gelöste Aufgaben zu einem Inhaltsbereich. Die Inhaltsbereiche der beiden Schülerpaare waren dabei unterschiedlich. Die Testphase der Untersuchung (vgl. Abschnitt 3.1.1) wurde aufgeteilt in eine *Partnerphase* und eine *Expertenphase*. Während der Partnerphase bearbeiteten die ursprünglich gebildeten Zweiergruppen je zwei neue Probleme ihres Inhaltsbereichs mit der Bitte, ihre Gedanken laut zu äußern (Paarweise Lautes Denken). In der Expertenphase wurden die Partner getauscht. In den neu entstandenen Gruppen wurde nun je eine Aufgabe aus jedem der beiden Inhaltsbereiche bearbeitet (vgl. Abb. 21).

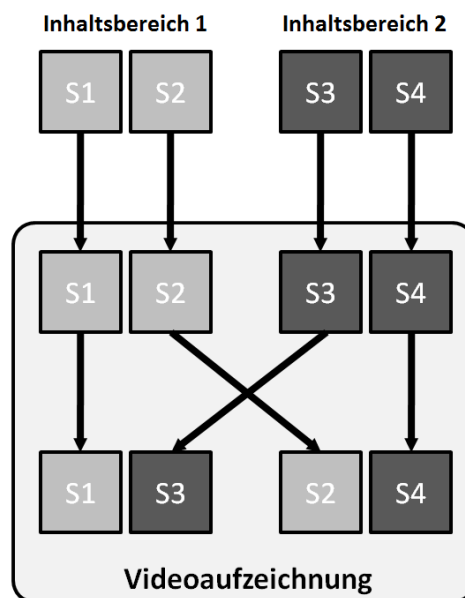


Abb. 21: Schematische Darstellung des Drei-Phasen-Designs

Da für jede Aufgabe nun einer der Schüler noch keine Erfahrung mit dem zu bearbeitenden Inhaltsbereich gesammelt hatte, war anzunehmen, dass der jeweilige „Experte“ für

diese Aufgabe die Federführung übernimmt und den Gedankengang weitgehend alleine bestimmt. Man erhält in dieser Phase also weitgehend individuelle *Think aloud Protocols*, ohne jedoch die Natürlichkeit der Situation einzubüßen, wie dies beim individuellen nachträglichen Lauten Denken der Fall wäre.

Für die konkrete Durchführung der Untersuchung und die Auswertung der Ergebnisse müssen die Vorbehalte gegenüber der verwendeten Methode in den Blick genommen werden. Es müssen entweder Maßnahmen ergriffen werden, die diese Vorbehalte so weit wie möglich entkräften oder aber die aus der Methode resultierenden Unwägbarkeiten müssen bei der Auswertung der Ergebnisse Berücksichtigung finden.

Wie oben bereits erläutert, besteht die Hauptschwierigkeit bei der Verwendung introspektiver Verfahren darin, valide Daten zu erzeugen. Es bestehen zum einen Bedenken bezüglich der wahrheitsgemäßen Verbalisierung der Denkprozesse. Die Befürchtung, es könnte über Gedächtnisinhalte berichtet werden, die erst nachträglich „hinzu erfunden“ werden, beziehen sich Wallach & Wolf (2001, S. 16) jedoch nur auf die Methode des retrospektiven Lauten Denkens, und auch das Problem der Unvollständigkeit von Think Aloud Protocols aufgrund des Vergessens von Gedächtnisinhalten bezeichnet Van Someren (1994) für das prozessbegleitende Laute Denken als „essentially absent“ (S. 32). Schwerwiegender ist das Problem der Unvollständigkeit der Protokolle aufgrund von Synchronisationsfehlern zwischen den Gedächtnisinhalten und den verbalen Äußerungen der Probanden. Van Someren (1994) weist nach, dass besonders leicht erschließbare Teilprozesse manchmal nicht verbalisiert werden. Dieser Sachverhalt muss bei der Auswertung der Daten mit in Erwägung gezogen werden.

Bedenken bezüglich der Validität der mittels introspektiver Verfahren erhobenen Daten bestehen zum anderen bezüglich des Einflusses, den die Verbalisierung der Daten selbst auf den eigentlichen Gedankengang der Versuchsperson hat. Ericsson & Simon (1980) versuchen in ihrem Grundlagenwerk dieses Problem dadurch anzugehen, dass sie Verbalisierungen bezüglich ihrer Qualität des Zugriffs auf Gedächtnisinhalte (Level I, II und III, Ericsson & Simon, 1980, S. 218f) unterscheiden. Die Verbalisierungen vom Level I und II unterscheiden sich vor allem dadurch, dass die Gedächtnisinhalte selbst einmal in sprachnaher Form repräsentiert sind und demnach direkt geäußert werden können (Level I). Im anderen Fall muss erst durch Rekodierungsprozesse eine verbalisierbare Repräsentationsform des Gedächtnisinhalts hergestellt werden (Level II). Als Verbalisierungen auf dem Level III bezeichnen Ericsson & Simon Äußerungen, die bewertende oder begründende Aussagen des Probanden bezüglich des eigenen Gedankengangs beinhalten, oder denen ein Filterprozess vorausgeht, bei dem der Proband zunächst überprüfen muss, ob es sich um eine Äußerung handelt, die im Versuchskontext erwünscht ist. Unter Rekurs auf zahlreiche Studien zum Einfluss von Äußerungen der verschiedenen Levels auf die Denkprozesse der Probanden kommen Ericsson & Simon zu dem Ergebnis, dass bei der Methode des Lauten

Denkens lediglich unter Beteiligung von Äußerungen des Levels III Veränderungen in der Reihenfolge einzelner Denkabschnitte oder Unterbrechungen des Gedankengangs zu erwarten sind. Verwenden die Versuchspersonen nur Verbalisierungen der Levels I und II, so kann lediglich eine Veränderung in der Performanz der Denkprozesse (also in deren Dauer), aber nicht im Ablauf selbst nachgewiesen werden. Da die Zuordnung einzelner Denkabschnitte zu den Feldern im Zwei-Dimensionen-Modell nicht aufgrund einer Performanzanalyse, sondern durch die Kodierung der verbalen Äußerungen während des Denkprozesses erfolgen soll, und auch im weiteren Verlauf die Dauer einzelner Denkabschnitte nur eine untergeordnete Rolle spielt, kann dieser Effekt in Kauf genommen werden.

Für die Erzeugung valider Daten unter Verwendung der Methode des Lauten Denkens kommt es demzufolge wesentlich darauf an, dass Verbalisierungen ausschließlich auf den Levels I und II erfolgen. In den Augen von Ericsson & Simon hängt die Art und Weise, in der die Versuchsperson ihre Gedanken verbalisiert, also auf welchem Level die Verbalisierung stattfindet, hauptsächlich von der *Instruktion* durch den Versuchsleiter ab. Für die konkrete Durchführung der Methode des Lauten Denkens schlagen sie deshalb zum einen eine *standardisierte Instruktion* zu Beginn der Untersuchung vor, die der Versuchsperson verdeutlicht, dass es *nur* auf die Verbalisierung *aller* aufkommenden Gedanken ankommt, nicht aber auf eine Begründung oder eine Erläuterung der Gedanken selbst (vgl. Ericsson & Simon, S. 378). Andere Autoren verwenden leicht abgewandelte und weniger standardisierte Instruktionen (vgl. Wallach & Wolf, S. 20), allerdings zielen auch diese stets darauf ab, Verbalisierungen vom Level III vorzubeugen. Zum anderen werden sogenannte *Reminder* zugelassen, also Aufforderungen des Versuchsleiters, welche die Probanden daran erinnern sollen, ihre Gedanken weiterhin zu verbalisieren, falls eine größere Pause entsteht. Als dritte Maßnahme zur Initiierung *geeigneter* Verbalisierungen werden kurze *Aufwärmphasen* vor der eigentlichen Untersuchung durchgeführt. Die Probanden werden dabei üblicherweise gebeten, kurze Denkaufgaben aus verschiedenen Inhaltsbereichen zu lösen und ihre Gedanken währenddessen zu verbalisieren (vgl. Ericsson & Simon, S. 378).

In der vorliegenden Untersuchung wurden die Probanden jeweils bereits im Vorfeld und auch direkt vor der Untersuchung darüber informiert, dass der Verlauf von Denkprozessen untersucht werden soll und es deshalb wichtig sei, so viele eigene Gedanken wie möglich laut zu verbalisieren. Es wurde auch darauf hingewiesen, dass keine Begründungen oder Erläuterungen zu den Gedanken und deren Verlauf gegeben werden müssen und sollen. Als Aufwärmphase wurde die Lernphase der beispielbasierten Lernumgebung (vgl. Abschnitt 3.1.1) genutzt: Bereits in dieser Phase wurden die Versuchspersonen gebeten, beim gemeinsamen Studium der gelösten Beispielaufgaben ihre Gedanken zu verbalisieren. Um den Trainingscharakter bezüglich der Technik des Lauten Denkens nicht zu stören, und da zudem die Daten aus dieser Phase der Untersuchung für die Analogiebildung nicht von Bedeutung sind, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet, die Äußerungen der Probanden aufzuzeichnen.

### 3.1.6 Ergebnisse der zweiten Vorstudie – Teil 1

Die zweite Vorstudie wurde mit zwei Gymnasiastinnen der 11. Klasse durchgeführt. In dieser Studie sollten die folgenden methodischen Fragen geklärt werden:

- Wie kommen die Schüler mit der Labor-Situation, insbesondere den Instruktionen, und mit der Methode des Lauten Denkens zurecht? Entsteht eine „natürliche“ Kommunikation über die Aufgaben?
- Genügt die „Instruktionsphase“ als Aufwärmphase für das *Laute Denken*?
- Können die Schüler ihre Gedanken äußern, ohne dabei Verbalisierungen vom Level III (s. Abschnitt 3.1.5) zu produzieren?
- Übernimmt eine der Schülerinnen die Federführung beim Lösen der Aufgabe?

Während der Instruktionsphase verhielten sich die beiden Schülerinnen eher schüchtern und es war mehrfach eine Aufforderung nötig, lauter zu sprechen. Auch zu Beginn der Videoaufzeichnungen brauchten die beiden einige Minuten, bis sie die Anwesenheit der Kamera schließlich zu vergessen schienen und sich ein ungezwungen wirkendes Gespräch über die Aufgaben entwickelte. Im Nachhinein betrachtet wäre der Einsatz von *Remindern* an manchen Stellen sinnvoll gewesen. Vor allem dann, wenn die gemeinsame Argumentation ins Stocken geriet und die beiden Schülerinnen über weitere Lösungsmöglichkeiten nachdachten, vergaßen sie zeitweise, dass auch diese Gedanken geäußert werden sollten. Es konnten keine Verbalisierungen vom Level III beobachtet werden, auftretende Erklärungen und Begründungen bezogen sich ausschließlich auf die Aufgaben und die vorgeschlagenen Lösungsansätze. Diese wurden deshalb durchgängig als Argumentation in der Beurteilungsphase des Analogiebildungsprozesses interpretiert (vgl. Abschnitt 1.4.2). Für fast alle Aufgabenbearbeitungen ließ sich eine Schülerin benennen, die insgesamt den Fortgang der Lösung und somit den Dialog bestimmte.

Diese Beobachtungen wurden zum Anlass genommen, das Untersuchungsdesign zu ergänzen: Für die Hauptuntersuchung sollte nun der Versuchsleiter direkt im Anschluss an jede der Aufgabenbearbeitungen denjenigen Versuchsteilnehmer bestimmen, der in dieser Aufgabe die Federführung übernommen hatte. Der ausgewählte Versuchsteilnehmer wurde jeweils gebeten, den Gedankengang noch einmal in knapper Form darzulegen. Diese methodische Vorgehensweise ist als *Teach-Back-Methode* bekannt (vgl. Wallach & Wolf, S. 25) und wurde z. B. von Vora & Helander (2005) im Rahmen von Untersuchungen zur Bedienerfreundlichkeit von Software der *Think-Aloud-Methode* bewusst vorgezogen:

„In a study that compared the teaching and the CTA [Concurrent Think Aloud, Anm. d. Verf.] methods for evaluating usability of human-computer interactive tasks, the results indicated that the number of verbalizations elicited using the teaching method far exceeded those elicited using the CTA method. Also, the concurrent verbalizations were domi-

nated by the participants' interactive behavior and provided little insight into the participants' thought processes or search strategies, which were easily captured using the teaching method.“ (S. 375)

Die *Teach-Back-Phase* diente im Untersuchungsdesign also einerseits dazu, die individuelle Wahrnehmung des Analogiebildungsprozesses aus der Sicht der federführenden Versuchsperson in Form verbaler Daten zu gewinnen. Andererseits konnten im Rahmen der Datenauswertung die Äußerungen aus der *Teach-Back-Phase* immer dann ergänzend herangezogen werden, wenn eine Lücke in den introspektiven Verbalisierungen der Gedankengänge vermutet oder eine Bestätigung für die Kodierung im Zwei-Dimensionen-Modell benötigt wurde (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Das zweite Ziel dieser zweiten Vorstudie war die Entwicklung eines Kodierleitfadens für die spätere Kodierung der Transkripte aus der Hauptuntersuchung. In diesem Zusammenhang war die Identifikation und Ausformulierung geeigneter Ankerbeispiele für die einzelnen Subkategorien im Kodierschema besonders wichtig. Auf die diesbezüglichen Ergebnisse wird im Rahmen der methodologischen Überlegungen noch genauer eingegangen (vgl. Abschnitt 3.2.3).

## 3.2 Analogiebildungsprozesse beschreiben und auswerten

Wurde im Abschnitt 3.1 die methodische Vorgehensweise bei der vorliegenden Untersuchung auf einer wissenschaftlichen Grundlage entwickelt und kritisch reflektiert, gilt es nun, die Art der erhobenen Daten einzuordnen, die Möglichkeiten der wissenschaftlichen Auseinandersetzung auszuloten und schließlich den Umgang mit dem erhobenen Datenmaterial offenzulegen, um letztlich „die Nachvollziehbarkeit der Interpretation und damit die Intersubjektivität des Forschungsergebnisses“ (Lamnek, 2005, S. 24) zu gewährleisten. Dies impliziert auch bei der qualitativen Analyse von Daten eine Regelgeleitetheit. Mayring (2010) fordert deshalb bei der qualitativen Interpretation von Daten, dass „die Ergebnisse [...] vom jeweiligen Theoriehintergrund her interpretiert [werden], und auch die einzelnen Analyseschritte [...] von theoretischen Überlegungen geleitet [sind]“ (S. 13). Insbesondere verlangt Mayring das „Anknüpfen an den Erfahrungen anderer mit dem zu untersuchenden Gegenstand“ (Ebd., S. 13).

### 3.2.1 Die formal strukturierende qualitative Inhaltsanalyse

Die verwendeten Methoden für die Auswertung des Datenmaterials orientieren sich im Wesentlichen an den Konzepten der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) und der Protocol Analysis nach Ericsson & Simon (1984).<sup>43</sup> Den Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit folgend (vgl. 2) stehen dabei die Beschreibung und Klassifikation von Analogiebildungsprozessen auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells (vgl. 1.5) im Mittelpunkt. Die genannten Ziele im Blick, steht die Entscheidung für eine qualitativ-deskriptive bzw. qualitativ-interpretative Vorgehensweise dabei im Einklang mit dem Selbstverständnis qualitativer Forschung. Einerseits wird der Untersuchung verbaler Daten mittels strukturierender qualitativer Inhaltsanalyse bei der hier angestrebten Beschreibung und Analyse von Verhaltens- und Denkprozessen eine große Bedeutung beigemessen (vgl. Mayring, S. 23f.). Andererseits wurde das Ordnen „eines Datenmaterials nach bestimmten, empirisch und theoretisch sinnvoll erscheinenden Ordnungsgesichtspunkten, [mit dem Ziel ...] eine strukturierte Beschreibung des Datenmaterials zu ermöglichen,“ (Mayring, 2010, S. 24) bereits von Barton & Lazarsfeld (1979) zur „Hauptaufgabe qualitativer Forschung“ erklärt und als „Konstruktion deskriptiver Systeme“ bezeichnet (nach Lamnek, 2005, S. 95). Lässt sich das Datenmaterial durch die Klassifikation im Sinne eines „integrierenden Konstrukts“ (Barton & Lazarsfeld, 1979, S. 77ff. nach Lamnek, 2005, S. 97) anschließend auf einem höheren Abstraktionsniveau beschreiben, mündet die Analy-

---

<sup>43</sup> Im Folgenden werden Mayrings methodologische Überlegungen zur qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) dargelegt und auf die vorliegende Studie übertragen. Die zentralen Ausführungen zur Protocol Analysis wurden bereits im Abschnitt 3.1.5 ausführlich expliziert (vgl. dazu auch nochmals Leuchter, 2009 & Haastrop, 1991).



se in eine Theoriebildung – eine Aufgabe qualitativer Forschung, wie sie z. B. von Glaser & Strauss (1979) hervorgehoben wird. Mayring (2010, S. 22) zitiert hierzu:

„Ganz gleich, welchen Typus von qualitativen Daten man vorzieht, alle scheinen außerordentlich gut für die Entdeckung gegenstandsbezogener Theorien [...] geeignet zu sein.“  
(Glaser & Strauss, 1979, S. 108)

Ziel der prozessbezogenen Inhaltsanalyse ist es also, das vorliegende Datenmaterial auf einer vorgegebenen theoretischen Grundlage so zu strukturieren, dass die Beschreibung und Interpretation der zugrundeliegenden Prozesse möglich wird. Es steht demnach die Rekonstruktion der Beziehung einzelner Bedeutungseinheiten untereinander, sowie deren chronologische Abfolge im Mittelpunkt des Interesses (vgl. Mayring, 2010, S. 96). Für eine strukturierende Inhaltsanalyse schlägt Mayring ein Ablaufmodell vor, das er zunächst für vier verschiedene Formen (formal, inhaltlich, typisierend, skalierend) spezifiziert (vgl. Mayring, 2010, S. 92ff) und schließlich in einen allgemeinen Ablauf inhaltsanalytischen Vorgehens einbettet (vgl. Mayring, 2010, S. 52ff und S. 60; Lamnek, 2005, S. 518). In der vorliegenden Arbeit werden die Daten bezüglich formaler Kriterien strukturiert, die dem theoretischen Modell entspringen. Entsprechend wird im Folgenden das Ablaufmodell Mayrings für die formal strukturierende qualitative Inhaltsanalyse auf die gegebene Untersuchungssituation übertragen.

### 3.2.2 Anpassung der Methodologie

Die einzelnen Punkte des allgemeinen Ablaufmodells werden von Mayring übernommen. Mayring selbst legt in seinen Ausführungen allerdings großen Wert darauf, dass bei der Planung und Durchführung qualitativer inhaltsanalytischer Analyseverfahren nicht die Verfahrensweise selbst im Zentrum der Überlegungen steht, sondern immer der Untersuchungsgegenstand:

„Die Verfahrensweisen sollen nicht als Techniken verstanden werden, die blind von einem Gegenstand auf einen anderen übertragen werden können. Die Adäquatheit muss jeweils am Material erwiesen werden.“ (Mayring, 2010, S. 50)

Entsprechend wird nun versucht, die allgemeine Verfahrensweise auf die konkrete Untersuchung hin so zu modifizieren, dass die Methodologie erhalten bleibt.

#### Festlegung des Materials

Will man Analogiebildungsprozesse analysieren, müssen diese durch ein geeignetes Setting zunächst initiiert und beobachtbar gemacht werden. Die Überlegungen hierzu wurden in den Abschnitten 3.1.1 bis 3.1.3 ausführlich dargelegt. Daraus ergeben sich einerseits Anforderungen an die ausgewählten Aufgabensets, andererseits an die Fähigkeit der Probanden, auch kompliziertere Gedankengänge nachvollziehbar verbalisieren zu können. Sind die Aufgabensets zusammengestellt, muss sichergestellt sein, dass die Probanden eine realisti-

sche Chance haben, die Aufgaben zu lösen. Auch wenn die Aufgaben so ausgewählt sind, dass die Schüler zur Lösung der Aufgaben in der Regel nicht unmittelbar auf ihr bis dahin erworbenes Schulwissen zurückgreifen können, ist dazu trotzdem ein bestimmter Grad an mathematischer Vorerfahrung notwendig. Betrachtet man diese Aspekte zusammen mit den Ergebnissen der ersten Voruntersuchung (Abschnitt 3.1.4), so erscheint es für den Ertrag der Hauptuntersuchungen am vielversprechendsten, mit Schülern der gymnasialen Oberstufe zu arbeiten.

Aufgrund dieser Vorüberlegungen wurden für die Hauptuntersuchung 14 Schülerinnen und Schüler der elften Jahrgangsstufe eines bayerischen Gymnasiums ausgewählt, sodass insgesamt 29 Aufgabenbearbeitungen videografiert werden konnten. Die ausgewählten Probanden deckten nach den Aussagen der betreuenden Lehrkräfte das Leistungsspektrum von sehr leistungsstarken bis hin zu eher leistungsschwachen Schülern ab.

Bei der so getroffenen Auswahl von Schülerinnen und Schülern ist offensichtlich, dass es sich bei der Gruppe der Probanden weder um einen altersmäßig, noch um einen leistungsmäßig repräsentativen Querschnitt von Mathematik-Lernenden der eigentlich zu betrachtenden Grundgesamtheit handelt. Nachdem es in der vorliegenden Studie jedoch im Schwerpunkt darum geht, ein Instrument zur Untersuchung von Analogiebildungsprozessen vorzustellen, um aufgrund der erhobenen Daten *Existenzansagen* über verschiedene Wege der Analogiebildung zu machen, kann dies in Kauf genommen werden.

#### Analyse der Entstehungssituation

Die potenziellen Probanden und deren Eltern wurden im Vorfeld genau über die Zielsetzung der geplanten Untersuchung informiert. Besonders deutlich wurde dabei herausgestellt, dass es bei der Analyse der Aufgabenbearbeitungen nicht vorrangig darum geht, die Qualität der Lösungen zu beurteilen, sondern das Interesse dem Gedankengang gilt, der beim Bearbeiten der Aufgaben vollzogen wird. Die Teilnahme an der Untersuchung war für die Schüler freiwillig, zusätzlich wurde eine Einverständniserklärung von den Eltern eingeholt. Vor der Durchführung der Untersuchung wurde keine Gegenleistung in Aussicht gestellt. Es ist also davon auszugehen, dass die Schüler aus Interesse an der Sache teilnahmen und hohe Motivation für eine konstruktive Arbeit vorhanden war.

Die Untersuchungstermine fanden, mit Ausnahme der Videoaufnahmen, die auch als Grundlage für die zweite Vorstudie dienten (vgl. Abschnitte 3.1.6 und 3.2.3), in Gruppen zu vier Schülern statt. Die Gruppen kamen jeweils nach Unterrichtsschluss mit dem Versuchsleiter in zwei nebeneinander liegenden Räumen der Schule zusammen, die vom Direktorat des Gymnasiums für die Videoaufzeichnungen zur Verfügung gestellt worden waren. Dort wurde den Schülern der Ablauf der Untersuchung erläutert und die erforderlichen Instruktionen zum *Lauten Denken* wurden gegeben (vgl. Abschnitt 3.1.5). Die Untersuchung selbst nahm, inklusive kleiner Pausen, jeweils ca. drei Stunden in Anspruch. Abschließend erhielten die Teilnehmer eine kleine Belohnung in Form von Süßigkeiten.

### Formale Charakteristika des Materials

Wie die Schwerpunktsetzung beim methodischen Vorgehen bereits verrät, sind die Videomitschnitte aus der Testphase der Laboruntersuchung die zentrale, aber nicht die einzige Datenquelle. Aus den Videos selbst lassen sich einerseits natürlich die verbalen Äußerungen der Probanden während des *Lauten Denkens*, auf deren Auswertung sich die Ergebnisse der Arbeit wesentlich stützen, extrahieren. Neben den gesammelten Audio-Daten dienen aber auch die zugehörigen Bild-Daten als wichtige Informationsquelle. So erweisen sich z. B. das *Zeigen* oder *Blicken* der Probanden auf bestimmte Stellen im Aufgabentext, auf Beispiellösungen oder auf eigene Aufgabenlösungen bei der Zuordnung einzelner Denkabschnitte im Analogiebildungsmodell immer wieder als Schlüsselinformation.

Eine weitere Datenquelle sind die schriftlichen Schüleraufzeichnungen, die während der Testphase entstanden. Auch sie können für die Auswertung der Denkprozesse herangezogen werden, da sie durch die Videoaufzeichnung in ihrer Chronologie direkt mit den Schüleräußerungen zu verknüpfen sind. Hinweise, die eine Zuordnung der verbalisierten Denkprozesse im Analogiebildungsmodell erleichtern, wie etwa die Verwendung einer Schreibweise aus den gelösten Aufgabenbeispielen oder einer ähnlichen Veranschaulichung, sind deshalb auch hier zu finden.

Zuletzt können noch die Videomitschnitte der *Teach-Back-Phase* (vgl. Abschnitt 3.1.6) dazu herangezogen werden, Klarheit über den nachzuzeichnenden Gedankengang zu gewinnen. Die Rekapitulation des Vorgehens bei der Lösungsfindung durch den federführenden Probanden kann dabei insbesondere dann weitere Hinweise für die Einordnung der vorher aufgezeichneten Denkprozesse liefern, wenn dabei nochmals explizit Analogien zur Erläuterung herangezogen werden.

Bereits die Aufbereitung der Daten für deren spätere Verwendung im Rahmen der strukturierenden Inhaltsanalyse kann nach Mayring (2010, S. 53) die Urdaten erheblich verändern. Um einen Einfluss der Datenaufbereitung auf das Untersuchungsergebnis zu vermeiden, müssen auch hierfür genaue Regeln festgelegt werden.

Für die vorliegende Untersuchung betrifft dies zunächst die Transkription der Schülerdialoge. Dresing & Pehl (2013, S. 17) beschreiben dazu treffend das „Dilemma zwischen realistischer Situationsnähe und praktikabler Präsentations- ja eigentlich Kompressionsform“, das sich bei der Erstellung eines Transkripts ergibt und ergänzen hierzu:

„Jeder, der transkribiert oder mit Transkripten arbeitet, sollte sich im Vorfeld bewusst sein, dass eine Transkription nie die Gesprächssituation vollständig festhalten kann. Dafür spielen während der Kommunikation zu viele Faktoren eine Rolle, die unmöglich alle erfasst werden können. Es muss eine Fokussierung auf bestimmte Aspekte stattfinden. Diese Aspekte variieren je nach Forschungsziel bzw. intendierter Verwendung des Transkripts und der konkreten Situation.“ (Dresing & Pehl, 2013, S. 17f)

Da es bei der Auswertung der hier erhobenen Daten weder darum geht, linguistische Phänomene zu untersuchen, noch darum, die besondere Bedeutung paralinguistischer Begleiterscheinungen herauszuarbeiten, kann z. B. auf die Transkription von Dialektfärbungen, Umgangssprache oder Tonhöhen verzichtet werden. Ziel der Transkription ist die Erfassung der aufgezeichneten Dialoge in ihrem logischen und chronologischen Gehalt. Mit der Transkription wird demnach eine Darstellung des Gesprochenen angestrebt, die das Erkennen von Sinnabschnitten und deren Zusammenhänge vor dem Hintergrund der durch die Theorie vorgegebenen Kategorien möglichst gut unterstützt - sie steht also unter dem Primat der Verständlichkeit. Dennoch betonen Dresing & Piehl, „für die Erstellung von Transkripten sollte man [...] nicht ‚einfach so‘ loslegen“ (2013, S. 20, Hervorhebungen im Original). Es bedürfe auch für Untersuchungen mit einer derartigen Schwerpunktsetzung eines Regelsystems, das eine gewisse Einheitlichkeit der Transkripte gewährleistet und auf den Verwendungszweck abgestimmt ist.

Kuckartz (2005, S. 43) gibt dabei zu bedenken, dass sich in „den Sozialwissenschaften [...] nicht von der Existenz von Transkriptionsstandards sprechen“ lässt und schlägt deshalb vor, „bewusst einfache und schnell erlernbare Transkriptionsregeln, die die Sprache deutlich ‚glätten‘ und den Fokus auf den Inhalt des Redebeitrags setzen“ (Kuckartz et al., 2008, S. 27, Hervorhebungen im Original) zu verwenden.

Aufbauend auf die Ausführungen von Kuckartz et al. (2008) stellen Dresing & Piehl (2013) ein Regelsystem für Transkriptionen vor, das sie nach eigenen Worten mit den „Rückmeldungen der Transkribierenden, Lektoren und Forscher[n] aus hunderten bearbeiteter Interviewstunden [...] konkretisiert und um einige Hinweise erweitert“ (S. 20) haben. Dieses Regelwerk wird im Rahmen der vorliegenden Studie für die Transkription der Audiodaten übernommen und leicht an die Gegebenheiten der Untersuchungssituation und die Funktionalitäten der verwendeten Software angepasst. Die wichtigsten Punkte in der Zusammenfassung:

- „1. Es wird wörtlich transkribiert, also nicht lautsprachlich oder zusammenfassend. Vorhandene Dialekte werden möglichst wortgenau ins Hochdeutsche übersetzt. [...]
2. Wortverschleifungen werden nicht transkribiert, sondern an das Schriftdeutsch angelehert. [...]. Die Satzform wird beibehalten, auch wenn sie syntaktische Fehler beinhaltet, [...]
3. Wort- und Satzabbrüche sowie Stottern werden geglättet bzw. ausgelassen, Wortdoppelungen nur erfasst, wenn sie als Stilmittel zur Betonung genutzt werden: „Das ist mir sehr, sehr wichtig.“. „Ganze“ Halbsätze, denen nur die Vollendung fehlt, werden jedoch erfasst und mit dem Abbruchzeichen / gekennzeichnet.
4. Interpunktion wird zu Gunsten der Lesbarkeit geglättet [...]. Dabei sollen Sinneinheiten beibehalten werden.

[...]

8. Jeder Sprecherbeitrag erhält eigene Absätze.

[...]“ (Dresing & Piehl, 2013, S. 21ff)

Da die Kodierung und eine zeitliche Auswertung der Dialoge in Form entsprechender Zeitleisten direkt in der Software Videograph erfolgt (vgl. nächste Seite), kann an einigen Stellen auch vom Regelwerk Dresings & Piehls abgewichen werden. So können beispielsweise die Regeln

„5. Pausen werden durch drei Auslassungspunkte in Klammern (...) markiert.

[...]

12. Das Transkript wird als Rich Text Format (.rtf-Datei) gespeichert. Benennung der Datei entsprechend des Audiodateinamens (ohne Endung wav, mp3). Beispielsweise: Interview\_04022011.rtf oder Interview\_schmitt.rtf“ (Dresing & Piehl, 2013, S. 21ff)

vernachlässigt werden.

Ergänzend zu den obigen allgemeinen Transkriptionsregeln geben Dresing & Piehl noch Hinweise für eine einheitliche Schreibweise der Transkripte (Dresing & Piehl, 2013, S. 24f), die allerdings eher für Transkriptionen von Belang sind, bei denen mehrere Transkribenten am gleichen Datenmaterial arbeiten. Trotzdem wird bei der vorliegenden Transkription versucht, auch diese Regeln umzusetzen, um Inkonsistenzen zu vermeiden, die sich später auf die Reliabilität der Ergebnisse auswirken könnten.

Da das Bildmaterial und die schriftlichen Schülerdokumente immer parallel zum Transkript betrachtet werden, müssen an diesen Daten zunächst keine Aufbereitungsarbeiten geleistet werden, sie werden in der Rohform für die Auswertung herangezogen.

#### Richtung der Analyse, theoriegeleitete Differenzierung der Fragestellung, Festlegung der Analysetechnik

Die Aufarbeitung des aktuellen Forschungsstandes und die Anbindung der Fragestellung an die vorhandene Theorie sowie die Explikation des eigenen Vorverständnisses wurden in Kapitel 1 ausführlich dargelegt. Die daraus erwachsende Zielsetzung der Untersuchung und die Fragestellung wurden in Kapitel 2 festgelegt. Weiterhin zeigen die Überlegungen aus dem Abschnitt 3.2.1, dass die strukturierende qualitative Inhaltsanalyse das passende Instrumentarium für die Erforschung der vorliegenden Fragestellung bereitstellt.

#### Festlegung der Analyseeinheiten

Für die Analyse selbst müssen in einem ersten Schritt die Analyseeinheiten festgelegt werden „um die Präzision der Inhaltsanalyse zu erhöhen“ (Mayring, 2010, S. 59).

Die *Kodiereinheit* legt dabei fest, welches der kleinstmögliche zu kodierende Materialbestandteil ist. Da für die tiefere Auswertung der erhobenen Daten auch die „Verweildauer“ innerhalb einer Kategorie interessant erscheint, soll die zeitliche Information der Videomittschnitte durch die Transkription und anschließende Kodierung der Texte nicht verloren gehen. Deshalb wurde für die Auswertung die Software Videograph® ausgewählt. Bei der Arbeit mit Videograph® können die Dialoge in vorher festgelegten äquidistanten Zeitabschnitten untersucht werden. Die Zeitabschnitte werden dann entsprechend dem vorgegebenen Kodierschema den Kategorien des Kategoriensystems zugeordnet und in einer Zeitleiste grafisch dargestellt. Um Sinnzusammenhänge besser erfassen zu können, dürfen die gewählten Zeitabschnitte nicht zu klein gewählt werden. Der erste Materialdurchgang erfolgte deshalb in Zeitschritten von 10 Sekunden. In einem zweiten Durchgang wurden in den Zeitabschnitten, in denen ein Wechsel der Kategorie festgestellt wurde, die Zeiteinteilung noch auf bis zu 1 Sekunde verfeinert, um die zeitliche Information über den Denkvorgang nicht durch die vorgegebenen Zeitabschnitte zu verfälschen. Das Ergebnis ist eine sekundengenaue Zuordnung des artikulierten Gedankengangs zu den vorgegebenen Kategorien.

Als *Kontexteinheit* wird der größte Materialbestandteil bezeichnet, der unter eine Kategorie fallen kann. In der vorliegenden Untersuchung kann dies – auch wenn es faktisch nicht vorkommt – der gesamte Text eines Videos sein.

Bei der vorliegenden Analyse erfolgt der Materialdurchgang grundsätzlich durch die gesamte Videoaufzeichnung des jeweiligen Falls. Da die Materialdurchläufe in festgelegten Zeitabschnitten erfolgen, ohne dass vorher eine Selektion nach relevanten Stellen vorgenommen wird, ergeben sich durch Pausen oder Abschweifungen zwangsläufig Zeitabschnitte, die keiner der vorgegebenen Kategorien zugeordnet werden können. Hier wird bewusst auf die Erstellung einer eigenen Kategorie („Sonstiges“ o. ä.) verzichtet. Diese Zeitabschnitte erscheinen in der grafischen Darstellung der Auswertung später als Lücken und sind so für die Interpretation besser zu handhaben. Damit ist auch die *Auswertungseinheit* festgelegt.

#### Festlegung des Kategoriensystems

Im Falle einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse geht es darum, „eine bestimmte Struktur aus dem Material herauszufiltern“ (Mayring, 2010, S. 92; vgl. auch Abschnitt 3.2.1). Während es sich z. B. bei Grounded Theory Methodologien „um eine Auswertungstechnik zur *Entwicklung* und *Überprüfung* von Theorien [handelt], die eng am vorgefundenen Material arbeitet bzw. in den Daten verankert (grounded) ist“ (Bortz & Döring, 1995, S. 308, Hervorhebungen im Original), wird bei der strukturierenden Inhaltsanalyse „die Struktur in Form eines Kategoriensystems an das Material herangetragen“ (Mayring, 2010, S. 92). Strauss & Corbin (1996, S. 89) beschreiben ihr Vorgehen nach der Grounded Theory Methodologie als ein Arbeiten mit Daten, bei dem „deduktiv Aussagen über Beziehungen“ aufgestellt, oder „mögliche Eigenschaften und ihre Dimensionen“ vermutet werden, um

diese Hypothesen anschließend wiederum am Material zu überprüfen. Bei der strukturierenden Inhaltsanalyse hingegen müssen „die grundsätzlichen Strukturierungsdimensionen [...] genau bestimmt werden, sie müssen aus der Fragestellung abgeleitet und theoretisch begründet werden“ (Mayring, 2010, S. 92). Sie werden vor dem theoretischen Hintergrund außerdem „weiter differenziert, indem sie in einzelne Ausprägungen aufgespalten werden“ (Ebd., S. 92). Schließlich werden die „Dimensionen und Ausprägungen [...] dann zu einem Kategoriensystem zusammengestellt“ (Ebd., S.92). Es handelt sich bei der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse also um die „deduktive Anwendung eines Kategoriensystems“ (Mayring, 2010, S. 66).

In der vorliegenden Untersuchung wurden die Dimensionen der Analogiebildung in den Abschnitten 1.2.4 (Ebenen der Analogiebildung) und 1.4.2 (Phasen der Analogiebildung) theoretisch begründet und jeweils nach verschiedenen Ausprägungen untergliedert. Die Besonderheit des theoretischen Konstrukts besteht nun darin, dass die Ausprägungen gemäß dem Zwei-Dimensionen-Modell der Analogiebildung (vgl. Abschnitt 1.5) miteinander verschränkt sind. Das Strukturieren einer Problemstellung etwa findet nach dem hier explizierten theoretischen Vorverständnis stets entweder auf der Objekt-, der Relations- oder der Handlungsebene statt. Genauso verhält es sich mit den anderen Ausprägungen der Phasen-Dimension.

Diesen Vorüberlegungen entsprechend ist das theoretisch abgeleitete Kategoriensystem durch die zwölf Felder des Zwei-Dimensionen-Modells festgelegt. Es kommt nun darauf an, Kodierregeln zu entwickeln, die eine möglichst eindeutige Zuordnung der Schüleräußerungen zu den einzelnen Kategorien erlaubt.

#### Die Entwicklung eines Kodierschemas

Mayring (2010) schlägt mit Rekurs auf Ulich et al. (1985) und Haußer et al. (1982) ein Verfahren zur Festlegung eines Kodierschemas vor, das sich in drei Schritten vollzieht:

„1. Definition der Kategorien

Es wird genau definiert, welche Textbestandteile unter eine Kategorie fallen.

2. Ankerbeispiele

Es werden konkrete Textstellen angeführt, die unter eine Kategorie fallen und als Beispiele für diese Kategorie gelten sollen.

3. Kodierregeln

Es werden dort, wo Abgrenzungsprobleme zwischen Kategorien bestehen, Regeln formuliert, um eindeutige Zuordnungen zu ermöglichen.“ (Mayring, 2010, S. 92)

Eine Definition der Kategorien kann dabei aus der Theorie und den zu erwartenden Beobachtungen heraus entwickelt werden. Für die Angabe von Ankerbeispielen können fiktive Textstellen herangezogen werden, besser jedoch ist es, bereits hier auf erstes Datenmaterial zuzugreifen. In der vorliegenden Untersuchung ist die Extraktion von Ankerbeispielen aus dem Datenmaterial ein weiteres Ergebnis der zweiten Vorstudie und wird in Ab-

schnitt 3.2.3 genauer erläutert. Die Sammlung von Ankerbeispielen wird dabei in mehreren Durchläufen durch mehrere Datensätze zusammengetragen. An dieser Stelle sollte ergänzt werden, dass unter Ankerbeispielen auch Beispieläußerungen verstanden werden können, die gerade nicht unter einer bestimmten Kategorie kodiert werden. Dadurch kann die Abgrenzung zu anderen Kategorien deutlicher kontrastiert werden. Hier verschwimmen die Grenzen zwischen Schritt 2 und Schritt 3 des von Mayring (2010) vorgestellten Verfahrens. In der vorliegenden Untersuchung soll sich jedoch der Schritt 3 nicht nur auf textbezogene Regeln beschränken, wie mit Grenzfällen umzugehen sei, sondern es sollen auch Regeln formuliert werden, wie in diesen Fällen auf das Bildmaterial und die Schülerdokumente als zusätzliche Datenquellen zugegriffen wird, um hier eine Eindeutigkeit der Zuordnung zu erreichen. Die Umsetzung des beschriebenen Verfahrens führt schließlich zu einem ausführlichen Kodierleitfaden, der für diejenigen, die an der Kodierung des Materials beteiligt sind, verbindlich ist.

Die gewissenhafte Festlegung der Kodiereinheiten und die sorgfältige Entwicklung des Kodierleitfadens kann einen großen Beitrag zur Reliabilität der Untersuchung leisten, wird dadurch doch eine gewisse Standardisierung des Analyseverfahrens erreicht und zumindest ansatzweise ein Vergleich der Kodiererergebnisse verschiedener Kodierer ermöglicht (Inter-coder-Reliabilität, vgl. Abschnitt 4.3).

#### Zusammenstellung der Ergebnisse und Interpretation in Richtung der Fragestellung

Die Ergebnisse der Kodierung mit der Software Videograph®, die zur Auswertung herangezogen werden sollen, liegen zunächst als grafische Darstellung in Form einer Zeitleiste (Timeline) vor. Die konkrete Zuordnung der verbalisierten Denkschritte zu einer Kategorie tritt dabei als farbiger Balken auf, dessen Länge die Dauer der Zeitspanne widerspiegelt, für die das Datenmaterial in die entsprechende Kategorie eingeordnet wurde. Die Software erlaubt es, mit Hilfe eines beweglichen Reiters in der Zeitleiste auf bestimmte Stellen des Video- und Audiomaterials zuzugreifen. Dabei bleibt die zugehörige Stelle auf der Zeitleiste markiert und es erscheint zusätzlich das zugehörige Transkript im Transkriptionsfenster (vgl. Abb. 22).

Ausgehend von diesen Diagrammen werden im Abschnitt 4.2 weitere Werkzeuge entwickelt, die eine Analyse des zugrundeliegenden Denkprozesses und einen Vergleich verschiedener Analogiebildungsprozesse ermöglichen, um schließlich zu einer Interpretation verschiedener „Wege der Analogiebildung“ zu kommen.



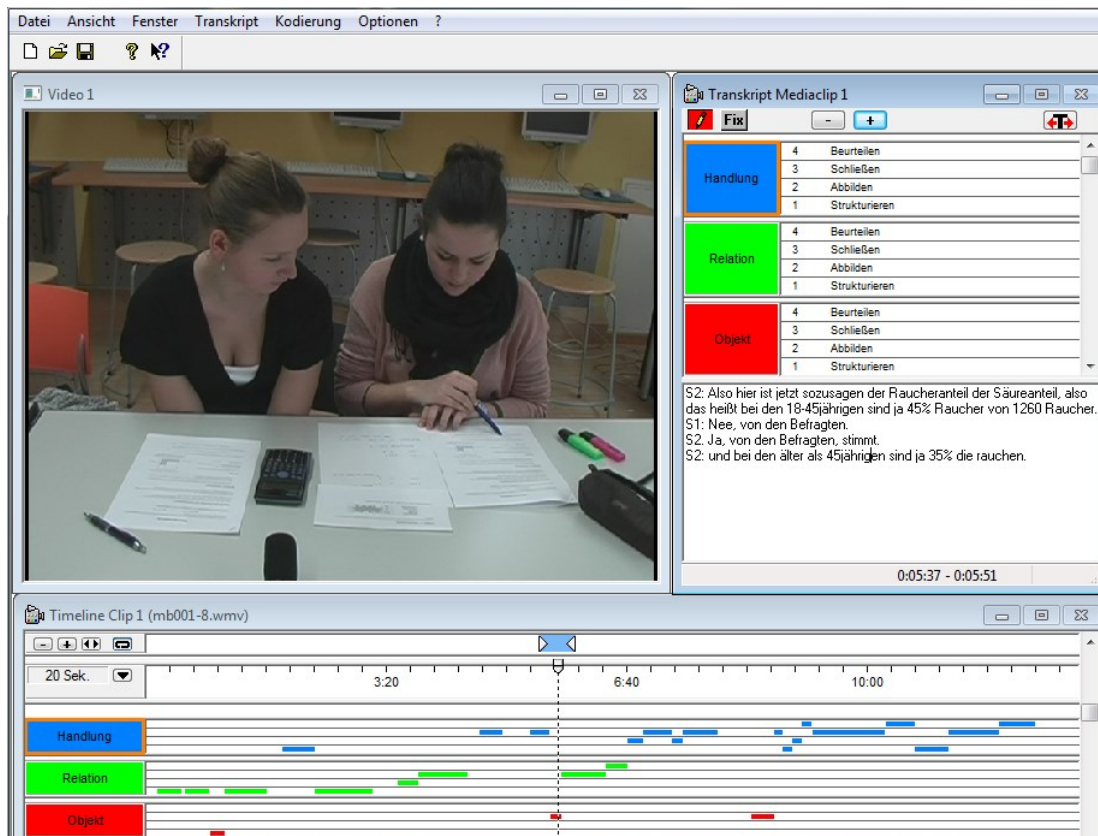


Abb. 22: Bedienoberfläche der Software Videograph®, grafische Darstellung der Denkprozesse in einer Timeline

### Anwendung der inhaltsanalytischen Gütekriterien

Anders als bei quantitativen Untersuchungen, bei denen klassische Gütekriterien wie Validität oder Reliabilität in Form bestimmter Kennzahlen überprüft werden können, die sich direkt dem quantitativen Datenmaterial entnehmen lassen, muss bei einer qualitativ angelegten Forschungsarbeit bereits im Vorfeld dargelegt werden, in welcher Form die Erfüllung bestimmter (qualitativer) Gütekriterien Eingang in die methodologischen Entscheidungen gefunden haben.

Zur Formulierung qualitativer Gütekriterien existieren dabei verschiedene Ansätze. Lamnek (2005, S. 148ff) beispielsweise versucht, die einschlägigen Begriffe und Kriterien des quantitativen Paradigmas auf qualitative Forschungsvorhaben zu transferieren, während Mayring (2002, vgl. S. 144ff) eigene Gütekriterien für qualitative Sozialforschung vorschlägt:

- (1) *Verfabrendokumentation und Argumentative Interpretationsabsicherung*: detaillierte und lückenlose Darstellung und Explikation des gesamten Forschungsprozesses mit dem Ziel der intersubjektiven Überprüfbarkeit.

- (2) *Regelgeleitetheit*: Systematisierung und Verallgemeinerung qualitativer Forschungsprozesse. Formulierung von allgemeinen methodischen und methodologischen Regeln an denen sich das konkrete Forschungsvorhaben orientiert.
- (3) *Nähe zum Gegenstand*: Relevanz von Kontext und Zielsetzung des Forschungsvorhabens für den Untersuchungsgegenstand.
- (4) *Kommunikative Validierung*: Rückmeldung der Untersuchungsergebnisse an die Befragten und Diskussion in der Forschergemeinschaft.
- (5) *Triangulation*: Wechsel der Perspektive auf das Datenmaterial, der sich auf unterschiedlichen Ebenen vollziehen kann (z. B. Daten-, Methoden- oder Theorien-Triangulation, vgl. Flick, 2011, S. 13ff).

Im Kapitel 1 wurde die Relevanz der Fragestellung für den Untersuchungsgegenstand – das Lernen von Mathematik – im Sinne des obigen Punktes (3) einerseits anhand verschiedener Beispiele aus der Lern- und Unterrichtsrealität, andererseits durch eine sorgfältige theoretische Verortung des Analogiebildungsbegriffs verdeutlicht. Damit wird das zugrunde gelegte Vorverständnis als Basis für die daraus resultierenden Fragestellungen (Kapitel 2) explizit und nachvollziehbar. Weiter dient das gesamte Kapitel 3 vor dem Hintergrund der genannten Punkte (1) und (2) einerseits der genauen Beschreibung und der theoretischen Begründung der Vorgehensweise sowohl während der empirischen Untersuchung (Abschnitt 3.1) als auch bei der Auswertung und Interpretation der Daten (Abschnitt 3.2). Im Abschnitt 4.3 schließlich wird unter anderem dargelegt, welche Maßnahmen der Triangulation (5) in der vorliegenden Arbeit ergriffen werden, um etwas über die Validität und die Reliabilität der Forschungsergebnisse aussagen zu können.

### 3.2.3 Ergebnisse der zweiten Vorstudie – Teil 2

Ein Ziel der zweiten Vorstudie war die Erprobung der Untersuchungsmethode (vgl. Abschnitt 3.1.6). Weitere Ziele waren die Einübung der Transkriptionsregeln und des Umgangs mit der Software Videograph® sowie die Entwicklung eines Kodierleitfadens.

Die Transkription der Videosequenzen nach den Transkriptionsregeln, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, erfolgte dabei zunächst im Transkriptionsfenster der Software. So konnte auch für die spätere Kodierung noch die simultane Ausgabe von Transkript, Bild und Ton im Bedienfenster der Software genutzt werden.

Wie im Abschnitt 3.2.2 beschrieben, verlangt die Methodologie der strukturierenden Inhaltsanalyse im Vorfeld der Kodierung zunächst die Definition der einzelnen Kategorien und anschließend die materialgestützte Sammlung von Ankerbeispielen. Diese werden schließlich in einem Kodierleitfaden zusammengestellt.

Die Schülerinnen arbeiteten in dieser Vorstudie an acht verschiedenen Aufgaben, so dass damit acht Datensätze für die Erstellung des Kodierleitfadens und einen ersten Kodierungsdurchgang zur Verfügung standen.

Zunächst wurden dazu die Definitionen der Kategorien formuliert und um fiktive Ankerbeispiele ergänzt. In einem ersten Materialdurchgang konnten nun auf der Grundlage der bis dahin formulierten Kodierregeln erste Kodierungen vorgenommen und originale Textpassagen als Ankerbeispiele mit in den Kodierleitfaden aufgenommen werden.

Beispiel: Die Kategorie „Schließen auf der Objektebene (Sch. O)“

Definition:

- Der Proband stellt einen direkten Zusammenhang zwischen den Objekten im Zielbereich und den Objekten im Ausgangsbereich her (z. B. unter Benennung gemeinsamer Attribute).
- Der Proband argumentiert auf der Objektebene im Zielbereich unter Zuhilfenahme der Objekte (und deren Attributen) aus gelösten Beispielaufgaben.

Fiktive Ankerbeispiele:

- „Objekt A (aus dem Zielbereich) ist wie Objekt B (aus dem Ausgangsbereich)“
- „Objekt A (aus dem Zielbereich) hat die Eigenschaft X [genau wie Objekt B (aus dem Ausgangsbereich) die Eigenschaft X hat].“

Ankerbeispiele aus den Datensätzen (sprachlich und grammatikalisch geglättet aus dem Transkript):

- „Die Mannschaften sind die Punkte und die Linien sind die Begegnungen.“
- „Die Länge der Straße ist also invariant [genau wie die Fläche des Sportplatzes im Aufgabenbeispiel invariant ist].“

Auf diese Weise wurden zu jeder der zwölf Kategorien Definitionen formuliert und Ankerbeispiele zusammengetragen.

Im zweiten Materialdurchgang wurde anschließend versucht, mit den ergänzten Kodierregeln die komplette Videosequenz zu kodieren. Bei der Kodierung auf der Grundlage des so entstandenen Kodierleitfadens offenbarten sich an einigen Stellen trotzdem noch Unklarheiten bei der Zuordnung zu den einzelnen Kategorien. Um diese Unklarheiten weiter zu reduzieren, wurden ergänzende Regeln formuliert, wie in solchen Fällen auf die Bild-Daten und die schriftlichen Schülerdokumente zugegriffen werden soll.

In den Transkriptionsregeln wurde zugunsten der Lesbarkeit bewusst sowohl auf eine Dokumentation der nonverbalen Aktivitäten der Schüler (wie z. B. das Zeigen auf die Aufgabenbeispiele oder die bisherigen Lösungsschritte), als auch auf eine Aufnahme der schriftli-

chen Aufzeichnungen in die Transkripte verzichtet (vgl. Abschnitt 3.2.2). Deshalb müssen Stellen, an denen bei der Kodierung auf zusätzliches Datenmaterial zugegriffen wird, eigens gekennzeichnet werden. Dies geschieht einerseits durch die Einführung von Pseudokategorien (Zeigen auf die Beispiele, Zeigen auf die bisherige Lösung, Anfertigen einer Skizze, Anfertigen einer Rechnung, etc.), die gleichzeitig mit echten Kategorien kodiert werden dürfen. Andererseits werden die Transkripte zur besseren Dokumentation in ihrer Endfassung dreispaltig verfasst. In der ersten Spalte steht das eigentliche Transkript, in der zweiten Spalte werden die Pseudokategorien dokumentiert und in der dritten Spalte werden die eigentlichen Kategorien zugeordnet. Um die Bedeutung der Pseudokategorien für die tatsächliche Kodierung verdeutlichen zu können, wird im nachfolgenden Beispieltranskript eine zweispaltige Darstellung verwendet, bei der die Zuordnung zu Pseudokategorien ausformuliert ist. Im endgültigen dreispaltigen Transkript, wie es für die tatsächlichen Fallbetrachtungen exemplarisch im Abschnitt 4.1.1 zu finden ist, wird auf eine Ausformulierung weitgehend verzichtet.

#### Beispieltranskript: VS2\_001

|    |  |   |
|----|--|---|
| 12 | S2: Zwei Mannschaften haben eine Begegnung   |   |
| 13 | S1: Genau  |   |
| 14 | S2: Dann haben drei Mannschaften zwei, nein auch drei, nein zwei Begegnungen.  |   |
| 15 | S1: Ja, eigentlich schon.  |   |
| 16 | S1: Wenn man drei Mannschaften hat A, B, C. Dann kann A und B gegeneinander spielen, B und C und A und C, also drei Mal.   | Skizze (dok_ski):<br>[S1 skizziert drei Punkte mit Bezeichnungen A, B und C und verbindet diese untereinander.] |
| 17 | S2: Stimmt.  |   |
| 18 | S1: So geht's nicht.   |   |
| 19 | S1: Wenn du praktisch 20 Mannschaften hast und eine Begegnung, dann musst du doch so weit runterzählen bis die 20 aufgebraucht sind und dann hast du es doch eigentlich, oder. | Zeigen (zei_bsp):<br>[Beide zeigen auf die Lösung der Beispielaufgaben.]  |
| 20 | S2: Jede Mannschaft spielt gegen 19 Mannschaften. Aber wenn man das so macht wird's ja doppelt gezählt, deshalb muss man runterzählen.   | Schriftliche Dokumentation (dok_re):<br>[S1 schreibt die Summe auf<br>$19+18+\dots+2+1$ .]                      |
| 21 | S1: Genau.   | Zeigen (zei_bsp):<br>[S2 zeigt auf ein anderes Beispiel.]   |
| 22 | S2: Das geht aber wahrscheinlich schneller.  |   |
| 23 | S2: Bei der 2 das finde ich eigentlich ganz logisch, weil eine Mannschaft kann ja nicht gegen sich selbst spielen.   |   |
| 24 | S2: Deswegen das n-1 und durch 2 weil ja jede Mannschaft nur einmal gegen eine Mannschaft spielt sonst wird es ja doppelt gezählt.   | Schriftliche Dokumentation (dok_re):<br>[Beide rechnen gemeinsam mit der Formel $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ .]    |
| 25 | S1: Das ist eigentlich dasselbe, oder?   |   |
| 26 | S2: Ja, dann kann man's nur schneller ausrechnen.  |   |

Nach einem ersten Lösungsversuch (Zeilen 1 bis 11, hier nicht angegeben) beginnt S2 einen zweiten Anlauf, indem sie Beziehungen zwischen den beteiligten Objekten im Zielbereich benennt (Fundstelle: Z. 12, Kodierung: Str\_R).<sup>44</sup> Im weiteren Verlauf (bis Z. 15) wird versucht, anhand kleiner Beispiele ein Muster über die Anzahl der Begegnungen zu erkennen. Im Zuge einer Skizze wird, analog zu den Abbildungen aus den Aufgabenbeispielen, eine grafische Darstellung der Problemstellung für kleine Zahlen erstellt. Dabei treten die Mannschaften als Punkte auf und die Begegnungen als Verbindungslinien, es werden also Gemeinsamkeiten zwischen den Relationen der Objekte im Zielbereich und denen im Ausgangsbereich ausgenutzt, um die Situation zu visualisieren (Fundstelle: Z. 16, Kodierung Abb\_R, zusätzlicher Beleg durch nonverbale Daten: dok\_ski)<sup>45</sup> und damit die Untersuchung nach Mustern fortzusetzen. Damit kann die Aussage aus Z. 14 revidiert werden (Beu\_R). Während des anschließenden gemeinsamen Betrachtens der Beispiellösungen werden Hypothesen über deren Anwendbarkeit im Zielbereich formuliert (Z. 17-20, Abb\_H, ze\_i\_bsp). Die Operation „Runterzählen“ aus dem Beispiel wird als zielführend erkannt und schließlich auf die Situation im Zielbereich angewandt (Z. 20/21, Sch\_H, dok\_re). Da ihr dieses Vorgehen zu umständlich erscheint, schlägt S2 vor, die Operation „Aufstellen eines Terms“ aus den gelösten Beispielen auf die Situation im Zielbereich zu übertragen (Z. 22, Abb\_H, ze\_i\_bsp). Sie erläutert und begründet das dazu notwendige Vorgehen ebenfalls gleich im Zielbereich (Z. 23/24, Sch\_H, Beu\_H). S1 bestätigt dieses Vorgehen, indem die Verbindung zu dem anderen gelösten Beispiel hergestellt wird (Z. 25, Beu\_H, ze\_i\_lsg). Abschließend wenden beide die von S2 vorgeschlagene Operation „Aufstellen eines Terms“ auf die Situation im Zielbereich an (und kommen so zum korrekten Ergebnis (Z. 26, Sch\_H, dok\_re)).

Im Beispieltranskript ergibt sich also mehrfach die Situation, dass zur Absicherung der Kodierung auf Textbasis die Bilddaten oder die Schülerdokumente herangezogen werden können. Dazu wurden im Rahmen der Kodierung die entsprechenden Textstellen im Transkript mit der Zuordnung zu den Pseudokategorien (Zeigen, schriftliche Dokumentation) ergänzt, um zu dokumentieren, an welcher Stelle auf diese Daten zugegriffen wurde.

Das Ergebnis dieser zweiten Vorstudie hinsichtlich der Datenanalyse ist also ein Kodierleitfaden (vgl. Anhang III), der eine möglichst eindeutige Kodierung des vorhandenen Datenmaterials gewährleisten soll. Neben den Regeln zur Kodierung von transkribierten Textstellen enthält der Leitfaden auch Regeln zur Verwendung des zusätzlichen Datenmaterials (vgl. 3.2.2). Die im Anhang abgedruckte Endversion des Kodierfadens entstand nach der

---

<sup>44</sup> Für die Kürzel zu den einzelnen Kategorien und Pseudokategorien vgl. Anhang II.  
Hier z. B.: Str\_R = Strukturieren auf der Relationsebene

<sup>45</sup> Im Folgenden werden die Kodierungen und Belege der besseren Lesbarkeit wegen in der Form (Fundstelle, Kodierung, Beleg durch zusätzliche Datenquelle) angegeben, ohne dies in jedem Einzelfall nochmals zu erläutern.

Kodierung einzelner Videobeispiele durch einen zweiten Kodierer und deren Auswertung (vgl. 4.3). Vor allem für die Phase „Abilden“ wurden dabei auf allen Ebenen noch einige Konkretisierungen vorgenommen.

## 4 Ergebnisse der Hauptuntersuchung

In diesem Kapitel werden zunächst die Ergebnisse der Datensammlung und der Datenanalyse präsentiert, ohne dabei bereits interpretativ damit zu arbeiten. Im Mittelpunkt steht hierbei die intersubjektive Nachvollziehbarkeit des Forschungsprozesses (vgl. Mayring, 2002, S. 145). Um die Ergebnisse weiter abzusichern, werden sie anschließend auch vor dem Hintergrund weiterer qualitativer Gütekriterien (vgl. Abschnitt 3.2.2) genauer beleuchtet.

In einem zweiten Schritt geht es um vorbereitende Arbeiten, die eine Interpretation der Ergebnisse auf der Grundlage des theoretischen Modells erlauben. Es werden mittels erster vorsichtiger Interpretationen verschiedene Darstellungsformen der Ergebnisse entwickelt, die unterschiedliche Perspektiven auf den Forschungsgegenstand zulassen und im Gesamtbild zu einer umfassenden Interpretation führen.

Die Ergebnisse dieser Interpretation – verschiedene Wege der Analogiebildung – werden schließlich in einem eigenen Abschnitt zusammengestellt und zurück auf die Entstehungssituation bezogen. Hierbei gilt die „Nähe zum Gegenstand“ (Mayring, 2002, S. 146) in folgendem Sinne als Leitgedanke: Es sollen Ansatzpunkte geliefert werden, die eine direkte Berücksichtigung verschiedener Wege der Analogiebildung beim Lernen von Mathematik ermöglichen.

## 4.1 Darstellung und Aufbereitung der Ergebnisse

Die Darstellung der Ergebnisse des vorgestellten Kodierungsprozesses soll sich im Sinne Mayrings (2002) zunächst am Einzelfall orientieren. Er schreibt hierzu:

„Im Forschungsprozess müssen immer auch Einzelfälle mit erhoben und analysiert werden, an denen die Adäquatheit von Verfahrensweisen und Ergebnisinterpretationen laufend überprüft werden kann.“ (Mayring, 2002, S. 27)

Es wird deshalb zunächst ein vollständiges Transkript mit den entsprechenden Kodierungen vorgestellt und kommentiert, bevor mit der Gesamtheit der Kodierungsergebnisse und deren grafischer Darstellung weiter gearbeitet wird.

### 4.1.1 Ein vollständig kommentiertes und kodiertes Transkript

Im Video 001\_3 lösen zwei Schülerinnen S1 (im Video links) und S2 (im Video rechts) gemeinsam die Aufgabe 3 (Glücksspiel) aus dem Bereich „Kombinatorik“:

#### Aufgabe 3 – Glücksspiel

Bei einem Glücksspiel wird eine Anzahl nummerierter Kugeln in eine Lostrommel gegeben. Anschließend werden zwei Kugeln gezogen und deren Nummern notiert. Gewonnen hat, wer diese beiden Zahlen notiert hat. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.

Der Spielleiter wirbt: „Die Gewinnchance bei diesem Spiel ist 1 zu 2145.“

Wie viele Kugeln sind in der Lostrommel?

Den Schülerinnen wurden in der Lernphase die gelösten Beispielaufgaben aus dem Bereich „Kombinatorik“ vorgelegt. Sie hatten ca. zehn Minuten Zeit, sich mit den Beispielaufgaben auseinanderzusetzen und sollten anschließend die Aufgaben des Aufgabensets „Kombinatorik“ lösen. Die hier bearbeitete Aufgabe ist die dritte aus dem Aufgabenset. Während der Bearbeitung durften die Schülerinnen auf die gelösten Beispielaufgaben, aber auch auf die bereits bearbeiteten Aufgaben aus dem Aufgabenset zugreifen. Die Gehefte mit den Aufgabensets waren zu diesem Zweck bewusst nur mit einer Büroklammer zusammengehalten, damit die gelösten Aufgabenbeispiele gleichzeitig mit den Testaufgaben aufgeschlagen werden konnten.

Nach dem Lesen des Aufgabentexts beginnen die Schülerinnen gleich mit dem Dialog:

| Transkript des Dialogs | Pseudokategorien | Kodierung |
|------------------------|------------------|-----------|
|------------------------|------------------|-----------|



|   |  |  |                |
|---|--|--|----------------|
| 1 | S2: Jede Zahl ist nur einmal vorhanden ... von den Kugeln.   |  | Str_O          |
| 2 | S2: Also sagen wir mal, die Anzahl der Kugeln ist $n$ .  |  | Sch_O          |
| 3 | S2: Dann kann man ja jede Kugel mit $n-1$ Kugeln sozusagen kombinieren.  |  | Sch_R          |
| 4 | S2: Weil es werden ja immer zwei gezogen.  |  | Beu_R          |
| 5 | S2: Aber ist ja egal, ob man erst die 3 oder erst die 5 notiert hat, d.h. wenn z. B. erst die Nummer 3 gezogen wird und dann Nummer 5, ist ja egal, oder ob erst die 5 gezogen wird und dann die 3, also müssen wir die Reihenfolge noch ausschließen. |  | Str_R<br>Str_H |

S2 verbalisiert zunächst die Situation der beteiligten Objekte und deren Eigenschaften im Zielbereich (Str\_O, Z. 1). Die Verwendung der gleichen Variablen ( $n$ ) wie in den vorgegebenen Beispielen deutet darauf hin, dass auf dieser Ebene eine direkte Verbindung zwischen Ausgangsbereich und Zielbereich hergestellt wird (Sch\_O, Z. 2). Anschließend stellt S2 eine Beziehung zwischen den Objekten des Zielbereichs her. Auch hier wird auf die Variable  $n$  zurückgegriffen, weshalb eine Analogiebildung auf der Relationsebene angenommen wird (Sch\_R, Z. 3). Dieser Zusammenhang wird im Zielbereich begründet (Beu\_R, Z. 4). Anschließend werden die Beziehungen im Zielbereich genauer untersucht (Str\_R, Z. 5\_o) und eine erste Idee für eine mathematisch notwendige Operation wird formuliert („ausschließen“, Str\_H, Z. 5\_u).

| Transkript des Dialogs |   | Pseudokategorien | Kodierung |
|------------------------|---|------------------|-----------|
| 6                      | S1 (liest vor): ... ist die Reihenfolge der Punkte unerheblich – Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge. | zei_bsp (KomE)   | Str_R     |
| 7                      | S2: Aber das ist Ziehen ohne Zurücklegen, und wir haben ja Ziehen mit, oder ...                         | zei_bsp (Kom2)   | Abb_R     |
| 8                      | S1: Nein, ohne.   |                  |           |
| 9                      | S2: Nein, stimmt, stimmt.   |                  |           |
| 10                     | S2: Dann können wir's eigentlich damit machen, oder?  | zei_bsp (Kom2)   | Sch_R     |
| 11                     | S2: Weil sozusagen, ja, genau - das ist die 2.  | zei_bsp (Kom2)   | Beu_R     |

Im Dialog Z. 6-11 werden die Phasen der Analogiebildung auf der Relationsebene deutlich. S1 benennt unter Einbeziehung des vorgelegten Beispielsets (Kombinatorik, Einführung) in Z. 6 zunächst die Beziehungen, die zwischen den beteiligten Objekten im Ausgangsbereich vorliegen (Str\_R, ze\_i\_bsp). S2 vermutet in Z. 7 zunächst einen Unterschied bzgl. der Relationen im Ausgangsbereich und im Zielbereich (Ziehen mit Zurücklegen vs. Ziehen ohne Zurücklegen) (Abb\_R, ze\_i\_bsp), S1 korrigiert sie aber dann (Z. 8/9). Das Zeigen eines bestimmten Beispiels (Kombinatorik, Aufgabe 2) in Zusammenhang mit der Aussage in Z. 10 legt die Vermutung nahe, dass hier die Analogiebildung auf der Relationsebene vollzogen wird (Sch\_R, ze\_i\_bsp) und schließlich eine Bestätigung erfährt (Beu\_R, Z. 11,

zei\_bsp). Da die letzten beiden Schritte nur unzureichend verbalisiert wurden, muss die Zuordnung an dieser Stelle auf der Grundlage der zu erkennenden Gestik im Videomaterial (vgl. Pseudokategorien) und der Einbettung in den Gesamtdialog erfolgen. Ein weiteres Indiz dafür, dass sich die letzten beiden Schritte in der genannten Weise zuordnen lassen, ist die Tatsache, dass die Argumentation nun auf der Handlungsebene weitergeführt wird.

| Transkript des Dialogs                                   | Pseudokategorien | Kodierung |
|--|------------------|-----------|
| 12 S1: Wir können praktisch 2 aus n ziehen.              | zei_bsp (Kom2)   | Str_H     |
| 13 S2: Ja.   |                  |           |
| 14 S1: Jetzt müssen wir das nur noch auf das übertragen. | zei_bsp (Kom2)   | Abb_H     |

S1 nimmt die Beispielaufgabe zur Hand (Kombinatorik, Aufgabe 2) und verbalisiert den Lösungsterm (Str\_H, Z. 12, ze\_i\_bsp). Anschließend stellt sie fest, dass die Lösung auf den Zielbereich übertragen werden kann (Abb\_H, Z. 14, ze\_i\_bsp).

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien | Kodierung       |
|--|------------------|-----------------|
| 15 S2: 1 zu 2145 heißt, dass du 2145 mal ziehen musst, um einmal zu gewinnen, sozusagen.                             | tr_re            | Str_R           |
| 16 S2: Also es gibt 2145 Möglichkeiten, dass eine mal richtig ist.   |                  | Sch_R           |
| 17 S1: Ja, obwohl nein, weil du hast doch, ... die Reihenfolge ist ja Wurst – da musst du doch nicht doppelt nehmen. |                  | Str_H           |
| 18 S2: Stimmt. Dann musst du es durch zwei teilen.   |                  |                 |
| 19 S1: Oder durch zwei teilen?   |                  |                 |
| 20 S2: Nein, in einem Fall hast du Recht, aber weil die Reihenfolge ja egal ist, musst du es mal zwei nehmen.        |                  |                 |
| 21 S1: Ja, genau, doch mal 2.  | tr_re            | Str_H,<br>Sch_H |

Bevor die nötigen Operationen übertragen werden, klären die Schülerinnen zunächst noch den Zusammenhang zwischen der angegebenen Gewinnwahrscheinlichkeit und der Anzahl der Möglichkeiten, sowie den Einfluss der Reihenfolge (Str\_R, Z. 15-16, tr\_re) und diskutieren die nötigen Operationen, um diesen Zusammenhang mathematisch zu fassen (Str\_H, Z. 17-21). Der Vorschlag wird dann mit dem Taschenrechner umgesetzt (Sch\_H, Z. 21, tr\_re).

Im folgenden Dialog wird versucht, das Ergebnis der Berechnung im Zielbereich zu interpretieren und auf Plausibilität zu prüfen (Sch\_H, Beu\_H, Z. 22-24).

| Transkript des Dialogs                              | Pseudokategorien | Kodierung |
|---|------------------|-----------|
| 22 S2: Also, so viele Möglichkeiten gibt's dann.    |                  | Sch_H     |
| 23 S1: Nein, Quatsch ... so viele Kugeln sind drin. |                  | Beu_H     |
| 24 S2: Ja, so viele Kugeln sind's oder - ah, nee.   |                  |           |

Offensichtlich kann das Ergebnis im Zielbereich nicht sinnvoll interpretiert werden, so dass an dieser Stelle der Gedankengang *abgebrochen* wird, um die Situation nochmals auf der Relations- und Objektebene zu betrachten.

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien | Kodierung |
|--|------------------|-----------|
| 25 S2: Du hast in einem Fall von 2145 mal Recht, d.h. du hast zwei Nummern notiert ... |                  | Str_R     |
| 26 S1: Zwei Möglichkeiten hast du schon mit einbezogen.                                |                  |           |
| 27 S2: D.h. du hast die zwei richtigen Nummern notiert und die Kugeln wurden gezogen.  |                  |           |

Zunächst argumentieren die beiden Schülerinnen noch auf der Relationsebene und versuchen noch einmal Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Möglichkeiten und der Anzahl der gezogenen Kugeln herzustellen (Str\_R, Z. 25-27), bevor sie im Folgenden dazu übergehen sich die Situation im ZB nochmals auf der Objektebene zu verdeutlichen (Str\_O, Z. 28-31). Dazu zeichnet S1 eine Urne mit Kugeln und deutet an, dass zwei davon gezogen werden.

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien                                 | Kodierung |
|---|--|-----------|
| 28 S1: Du hast eine Urne und da sind die Kugeln drin und du ziehst zwei raus. | dok_ski  | Str_O     |
| 29 S1: Es ist egal welche ...   | [S1 zeichnet eine Urne mit Kugeln und deutet an, |           |
| 30 S2: ... aber die Kugeln sind nummeriert ...                                | dass zwei davon gezogen werden.]                 |           |
| 31 S1: ... und es gibt jede nur einmal.                                       |  |           |

Im Folgenden werden Verbindungen zwischen den Aufgabentexten (Beispielaufgaben und Testaufgabe) hergestellt. S1 versucht die Zahl der Möglichkeiten als Anzahl der möglichen Kugeln nach dem ersten Zug zu deuten und damit die Zusammenhänge im Zielbereich für sich neu zu ordnen (Str\_R, Z. 32). S2 widerspricht und liefert eine Aussage über diesen Zusammenhang, auf den sich die Schülerinnen bereits vorher geeinigt hatten (Str\_R, vgl. auch Z. 16, Z. 33). Dieser Zusammenhang wird dann von S1 konkretisiert und festgehalten (Sch\_R, Z. 34) und von S2 durch eine zusätzliche Verbindung zwischen den gezogenen Kugeln als richtig bestätigt (Beu\_R, Z. 35).

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien                | Kodierung |
|---|---------------------------------|-----------|
| 32 S1: Du hast, warte, ist das nicht einfach so, dass das die sind, die noch drin sind.   |                                 | Str_R     |
| 33 S2: Du meinst, weil ein Fall ja zutrifft. Aber nee, das müssen doch eigentlich die Möglichkeiten sein. Eigentlich müssen das ja die Möglichkeiten sein, die zutreffen können und eine davon ist richtig. |                                 |           |
| 34 S1: Das heißt, das sind die Kombinationen.   |                                 | Sch_R     |
| 35 S2: Ja, genau. Das sind die Kombinationen und du kannst jede Kugel mit n-1 Kugeln kombinieren.   |                                 | Beu_R     |
| 36 S2: Das heißt wir müssen es ...  | dok_re [S1 schreibt $n*(n-1)$ ] | Str_H     |
| 37 S2: ... und dann durch 2145.   | zei_bsp (Kom2)                  |           |
| 38 S1: Warte mal ...  |                                 |           |

In Z. 37/38 werden die notwendigen Operationen im Zielbereich versucht zu ordnen (Str\_H, dok\_re). Die Schülerinnen sind aber beide unsicher, nehmen nochmals die gelösten Beispiele her und *brechen* den Gedankengang an dieser Stelle wieder *ab*.

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien   | Kodierung      |
|---|--|----------------|
| 39 S2: Oder die Kugeln sind wieder die Punkte - die Verbindung bedeutet, dass man die Kugeln zusammen zieht, also in einem Spiel sozusagen, eine Möglichkeit. |  | Sch_O          |
| 40 S2: ... und es darf nur eine Linie da sein ...   |  | Sch_R          |
| 41 S2: ... weil ja sonst wieder doppelt gezählt würde ...   |  | Beu_R          |
| 42 S2: ... und von jeder Kugel - jede Kugel kann mit jeder kombiniert werden, aber zwei Kugeln jeweils nur einmal.  |  | Sch_R          |
| 43 S2: Deswegen müsste es ja eigentlich wieder das sein.  | zei_bsp (Kom2)<br>dok_re<br>[S1 ergänzt zu $n*(n-1)/2$ ] | Abb_H<br>Sch_H |

S2 resümiert hier nochmals das bisher Erreichte anhand der Beispielaufgabe 2 und stellt zunächst ein weiteres Mal den Analogieschluss auf der Objektebene her (Sch\_O, Z. 39). Anschließend werden auch die Zusammenhänge zwischen den beteiligten Objekten unter Rückbezug auf die Objektanalogie (S2 überträgt die Bedeutung der „Linie“ in der bildlichen Darstellung des Beispiels auf die Situation im Zielbereich) noch einmal reflektiert (Sch\_R, Z. 40) und bestätigt (Beu\_R, Z. 41). S1 wählt zunächst eine der Beispiellösungen aus, die sie mit der Testaufgabe in Verbindung bringt (Abb\_H, Z. 43, ze\_i\_bsp) und ergänzt anschließend den Term. Das deutet darauf hin, dass ein Übertragen der Beispiellösung auf die Testaufgabe und damit ein Analogieschluss auf der Handlungsebene stattfindet (Sch\_H, Z. 43, dok\_re) – die Schülerinnen korrigieren auf der Grundlage ihrer hergestellten Analo-

gien auf der Objekt- und Relationsebene den Term für die Anzahl der Zugmöglichkeiten.

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien                               | Kodierung |
|---|--|-----------|
| 44 S2: Also das sind die Möglichkeiten, d.h. das ist die Anzahl der Verbindungen zwischen den ... |  | Sch_O     |
| 45 S1: ... und die Punkte sind die Kugeln sagst du?   |  |           |
| 46 S2: Ja!  | zei_lsg  |           |
| 47 S2: Wenn du das dann gleich 2145 setzt, dann kann man's auflösen.                              | dok_re<br>[S1 ergänzt zu<br>$n*(n-1)/2=2145$ ] | Sch_H     |

Nach einer weiteren Rückversicherung über die Richtigkeit der Analogiebildung auf der Objektebene (Sch\_O, Z. 44-46) folgt der entscheidende Schritt: Das Gleichsetzen des aufgestellten Terms für die Anzahl der Möglichkeiten und der angegebenen konkreten Anzahl, die sich aus der Wahrscheinlichkeitsaussage ergeben hatte (Sch\_H, Z. 46/47, ze\_i\_lsg, dok\_re). Anschließend sind die beiden Schülerinnen allerdings nicht in der Lage die aufgestellte quadratische Gleichung zu lösen (Z. 48/49).

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien | Kodierung |
|---|------------------|-----------|
| 48 S2: Also kannst du es doch mal 2 nehmen, dann war das gar nicht so schlecht, schau: Das haben wir da oben schon gemacht. Wenn du das auflöst, dann musst du das mal zwei nehmen. | zei_lsg          | Sch_H     |
| 49 S1: Warte mal. Dann haben wir ... die Klammer auch auflösen ... Aber ... dann kommen wir immernoch nicht drauf.  |                  | Beu_H     |

Es folgen weitere Argumentationsansätze (Z. 50 bis 57). Es handelt sich dabei im Wesentlichen um Argumentationen auf der Handlungsebene, bei denen die Schülerinnen versuchen, Lösungsansätze aus den Beispielaufgaben auf das aktuelle Problem zu übertragen bzw. bereits vorhandene Lösungsansätze durch andere Zugänge zu verifizieren.

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien | Kodierung                    |
|--|------------------|------------------------------|
| 50 S1: Wenn wir zwei Punkte haben und das eine Verbindungslinie ist, d.h. dass wir das mal zwei machen können. Aber: Wenn wir drei haben, sind ja drei Verbindungslinien und wenn wir vier haben, gibt es ja noch mehr, dann gibt es sechs, also kann man nicht einfach mal zwei machen, weil das sich nicht immer verdoppelt ...<br>... Nee, wir brauchen nur zwei. |                  | Str_H<br><br>Schl_H<br>Beu_H |
| 51 S2: Ja, wir haben zwei Kugeln, deswegen müssen wir eigentlich nur ... nee.  |                  |                              |
| 52 S2: Ja, aber dass die beiden Kugeln ausgewählt werden, zusammen, bedeutet ja die Verbindung.  |                  | Beu_R                        |
| 53 S1: Ich glaube wir müssen das so machen ...   |                  | Beu_H                        |

|    |  |   |  |
|----|--|---|--|
| 54 | S2: Ja eigentlich, das muss ja rauskommen als Möglichkeiten, die verschiedenen Möglichkeiten die es gibt.                        | dok_re  |  |
| 55 | S2: Warum hast du jetzt 4290 genommen?   |   |  |
| 56 | S1: Weil wir doch gemeint haben, dass das die Möglichkeiten sind, also die Linien und die Punkte, da müssen wir mal zwei machen. | tr_re   |  |
| 57 | S1: Wohl nicht!  | [SS lachen, das Ergebnis im TR scheint nicht den Erwartungen zu entsprechen und wird verworfen] |  |

Erst ganz am Ende des Videomitschnitts kommen die SS durch Zuhilfenahme eines anderen Aufgabenbeispiels noch zu einem alternativen Lösungsweg:

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien  | Kodierung |
|--|---|-----------|
| 58 [...] Gesprächsabschnitt nicht transkribiert, da kein weiterer Beitrag.                             |   |           |
| 59 S2: Also, nochmal von vorne. Wir haben n Kugeln, die sind nummeriert.                               |   | Str_O     |
| 60 S2: Die Verbindung bedeutet, dass diese Kugel mit dieser anderen Kugel gezogen wird.                |   | Sch_O     |
| 61 S2: Das heißt, wir haben, sagen wir mal, so viele Verbindungen. Das heißt, das muss rauskommen.     |   | Sch_R     |
| 62 S2: ...d.h. wenn wir jetzt einfach 2 aus n gleich 2145, dann haben wir ja eine Gleichung sozusagen. | zei_bsp (Kom3)<br>dok_re:<br>[S1 schreibt 2 aus n gleich 2145]. | Sch_H     |

Ausgangspunkt ist wieder die Analogiebildung auf der Objektebene. Es werden noch einmal die Objekte im Zielbereich geordnet (Str\_O, Z. 59) und die Analogie zu den Beispielaufgaben wird hergestellt (Sch\_O, Z. 60). Anschließend wird die Analogiebildung auf der Relationsebene ein weiteres Mal bestätigt (Sch\_Re, Z. 61). Die Bezugnahme auf ein anderes Beispiel als zuvor (Kombinatorik, Beispiel 3) führt nun allerdings dazu, dass die Schülerinnen einen anderen Term für die Anzahl der Möglichkeiten aufstellen (Sch\_H, Z. 62, ze\_i\_bsp, dok\_re). Sie kommen durch Gleichsetzen (vgl. Z. 47) wieder zu einer Gleichung, die allerdings auch diesmal nicht aufgelöst werden kann.

Da zwei verschiedene Lösungsansätze vorliegen, die genaue Bestimmung der Lösung jedoch jeweils am Auflösen der entsprechenden Gleichung scheitert, sind keine weiteren Fortschritte mehr zu erwarten – es erfolgt der *Abbruch* durch den Versuchsleiter.

### 4.1.2 Visualisierung I: Timelines

In Abschnitt 3.2.2 wurde bereits angesprochen, dass die Software Videograph® eine grafische Darstellung der Kodierung in Form einer *Timeline* generiert (vgl. Abbildung Abb. 23). Die Auswertung der kodierten Daten soll unter anderem auf der Grundlage der Timelines zu den verschiedenen Denkprozessen erfolgen.

Die *Timeline*, die von der Software zum Beispiel aus Abschnitt 4.1.1 erzeugt wird, sieht folgendermaßen aus:

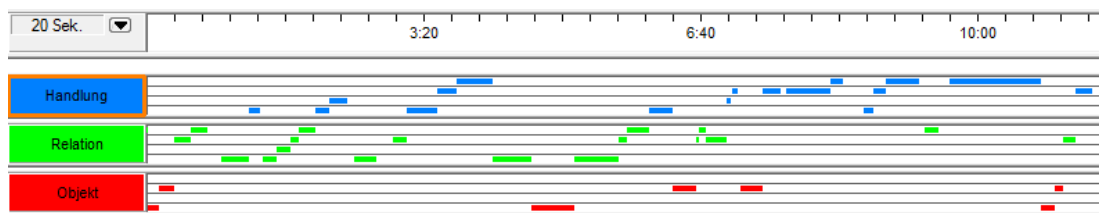


Abb. 23: Die Timeline-Darstellung des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1

Bereits aus dieser grafischen Darstellung des Denkprozesses lassen sich, zum Teil mit Hilfe erster vorsichtiger Interpretationen, eine ganze Reihe verschiedener Informationen entnehmen:

- Naturgemäß ist bei einer Timeline die Chronologie erkennbar, in der verschiedene Kategorien des Analogiebildungsprozesses durchlaufen werden.
- Zusätzlich kann die „Aufenthaltsdauer“ innerhalb einer Kategorie bzw. die Dauer von Denkpausen über die Länge der Balken abgelesen werden.
- Finden im Zuge eines Gedankengangs Übergänge zwischen den Kategorien statt, dann sind durch die Farbgebung der Darstellung und die räumliche Nähe der Balken Übergänge innerhalb einer Ebene besonders gut erkennbar.
- Es ist über den gesamten Denkprozess hinweg i. d. R. eine „Tendenz“ beim Durchlaufen der Kategorien erkennbar, die in der Timeline-Darstellung „von unten nach oben“ weist.
- Die Beobachtungen von Sheard & Readance (1988), dass nicht alle Phasen eines Analogiebildungsprozesses durchlaufen werden müssen, können auf der Grundlage der Kodierung genauso bestätigt werden wie die Ergebnisse von Gentner (1989), wonach auch die Reihenfolge beim Durchlaufen der Phasen nicht zwingend festgelegt ist (vgl. Abschnitt 1.4.2).

Markiert man in der grafischen Darstellung Zeitpunkte, an denen aus dem Text eindeutig ein Abbruch des aktuellen Gedankengangs erkennbar ist (vgl. etwa im Beispiel aus Abschnitt 4.1.1 nach Z. 24), so ergeben sich weitere Deutungsmöglichkeiten:

- Nach einem Abbruch des laufenden Gedankengangs beginnt der neue *Denkabschnitt* im Diagramm stets „weiter unten“.
- Teilt man den Denkprozess auf diese Weise in *Denkabschnitte* ein, so stellt man fest, dass sich die Tendenz „von unten nach oben“ beim Durchlaufen der Kategorien innerhalb dieser Denkabschnitte noch deutlicher manifestiert.

Es lohnt sich also – neben dem gesamten Denkprozess – auch einzelne Denkabschnitte genauer zu betrachten. Finden innerhalb dieser Denkabschnitte trotz einer grundsätzlichen Aufwärtstendenz des Graphen Sprünge „nach unten“ statt, so kann das häufig auf eine der folgenden zwei Ursachen zurückgeführt werden:

- In manchen Fällen können an diesen Stellen im Text Signalworte gefunden werden, die auch hier eine Interpretation als Abbruch des aktuellen Gedankengangs zulassen, etwa durch Anzweifeln des bisher Erreichten und Anbieten einer Alternative. Im Beispiel: „Aber, ist ja egal, ob man erst die 3 oder erst die 5 notiert hat [...] also müssen wir die Reihenfolge noch ausschließen“ (Z. 5). Hier entstehen also zwei *Denkabschnitte*.
- Handelt es sich im Diagramm um einen „Ausreißer nach unten“, so kann es sich im Text um eine Rückversicherung über das bisher Erreichte auf einer niedrigeren Ebene handeln – ein Phänomen, das sehr häufig auftritt und sich als typisches Verhalten beim Bilden von Analogien erweist. Im Beispiel: „S2: Also das sind die Möglichkeiten, d.h. das ist die Anzahl der Verbindungen zwischen den ... S1: ... und die Punkte sind die Kugeln sagst du? S2: Ja!“ (Z. 44-46). Hier vergewissern sich die Schülerinnen nochmals ihrer Analogie auf Objektebene (Kodierung: Sch\_O), obwohl sie gerade auf der Handlungsebene argumentieren.

Mit diesen ersten vorsichtigen Interpretationen, die durch das Zusammenspiel der grafischen Darstellung in der Timeline mit dem zugrundeliegenden Text möglich wird, ergibt sich für das Beispiel nun das folgende Bild (Abb. 24):

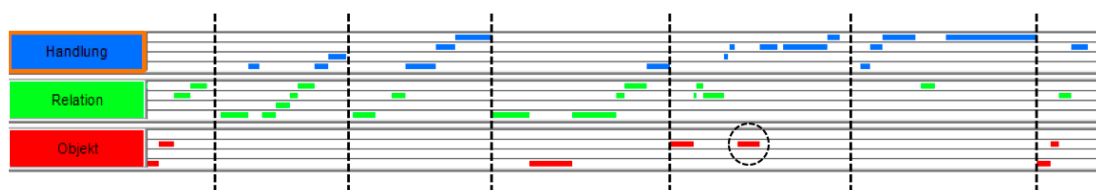


Abb. 24: Denkabschnitte (getrennt durch gestrichelte Linien) und „Ausreißer“ (gestrichelter Kreis) im Denkprozess aus Abschnitt 4.1.1

Auch wenn sich durch die Analyse der Timeline bereits erste, insgesamt überraschend tiefgehende Interpretationsmöglichkeiten ergeben, birgt diese Darstellung hinsichtlich des hier entwickelten theoretischen Konstrukts einen entscheidenden Nachteil: Während diejenigen Phasenübergänge im Laufe des Denkprozesses, die sich innerhalb einer Ebene vollziehen, mit Hilfe der Timeline-Darstellung sehr gut erkennbar sind, können Ebenenübergänge, die innerhalb einer Phase des Analogiebildungsprozesses stattfinden, nur schwer erkannt wer-



den. So entdeckt man z. B. im letzten Abschnitt des Beispieltranskripts nur bei genauem Hinsehen, dass es sich bei der Argumentation um einen umfassenden Analogieschluss (Phase: „Schließen“) handelt, der sich auf Objekt-, Relations- und Handlungsebene erstreckt. Dieser Mangel wird im folgenden Abschnitt durch die Darstellung der Denkabschnitte im Zwei-Dimensionen-Modell versucht zu beseitigen.

## 4.2 Die Entwicklung weiterer Analyseinstrumente

Auch wenn durch die Timeline-Darstellung bereits eine erste Quantifizierung des Denkprozesses stattfindet, gestaltet sich ein Vergleich verschiedener Timelines schwierig. Für einen späteren Vergleich verschiedener Analogiebildungsprozesse ist demnach ein Instrument wünschenswert, das eine quantitative Auswertung erlaubt. Um Ansatzpunkte für einen quantitativen Vergleich zu finden, muss hier vor allem eine Normierung der dargestellten Denkprozesse bzgl. ihrer Länge erfolgen. Weiter muss ein geeignetes Abstands- oder Ähnlichkeitsmaß entwickelt werden. Im folgenden Abschnitt wird deshalb zunächst die Visualisierung der zu untersuchenden Denkprozesse im Zwei-Dimensionen-Modell vorgestellt. Ebenso wie der Timeline-Darstellung können mit Hilfe erster Interpretationsansätze auch dieser Visualisierungsmöglichkeit interessante Aspekte der Denkprozesse entnommen werden. Auf dieser Grundlage werden anschließend Weg-Matrizen definiert, die schließlich ein Werkzeug liefern, mit dem verschiedene „Wege der Analogiebildung“ auch quantitativ verglichen werden können.

### 4.2.1 Visualisierung II: Wege im Zwei-Dimensionen-Modell

Die Darstellung eines Analogiebildungsprozesses im Zwei-Dimensionen-Modell erfolgt als Punkt-Linien-Diagramm (im Folgenden ZDM-Darstellung). Die Punkte spiegeln dabei die einzelnen Stationen des Denkprozesses wider, wie sie sich aus den Daten durch die Einordnung in das Kategoriensystem ergeben. Zwei chronologisch aufeinanderfolgende Punkte werden mit einer Linie verbunden. Auf diese Weise ergibt sich ein zusammenhängender Graph mit einem Start- und einem Endpunkt. Stellt man den kompletten Denkprozess in Form eines solchen Graphen dar, erhält man in der Regel ein sehr unübersichtliches und wenig aussagekräftiges Bild. Exemplarisch sei dies am Beispiel aus dem Abschnitt 4.1.1 in Abbildung Abb. 25 gezeigt:<sup>46</sup>

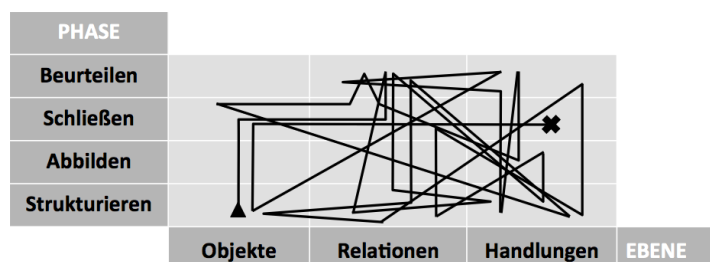


Abb. 25: Der gesamte Denkprozess aus Beispiel 4.1.1 als grafische Darstellung im Zwei-Dimensionen-Modell

<sup>46</sup> Um die Übersichtlichkeit nicht noch stärker zu beeinträchtigen, wurde in der ZDM-Darstellung aus Abb. 25 auf die Markierung von „Weg-Punkten“ verzichtet und nur der „Weg“ selbst abgebildet.

Einschub: Eine kurze Legende für die Weg-Darstellungen im ZDM-Modell

Da im Folgenden immer wieder auf die Weg-Diagramme im ZDM-Modell referenziert wird, soll an dieser Stelle eine kurze Erklärung für die verwendeten Symbole in Form einer Legende geliefert werden (Tabelle 4):


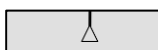


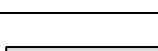
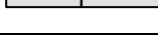



| Symbol  | Erklärung   |
|---|---|
|    | Beginn eines Analogiebildungsprozesses  |
|    | Beginn eines neuen Denkabschnitts – es gehen weitere Abschnitte voraus  |
|    | Abbruch eines Denkabschnitts – es folgen weitere Abschnitte   |
|    | Ende eines Analogiebildungsprozesses – es konnte ein Ergebnis erreicht werden, dieses ist aber nicht korrekt                    |
|   | Ende eines Denkabschnitts – es konnte ein Ergebnis erreicht werden, dieses ist aber nicht korrekt, es folgen weitere Abschnitte |
|  | Ende eines Analogiebildungsprozesses – es konnte ein korrektes Ergebnis erreicht werden   |
|  | Ende eines Denkabschnitts – es konnte ein korrektes Ergebnis erreicht werden, es folgen weitere Abschnitte                      |
|  | Durchlaufenes Feld im Zuge eines Denkabschnitts   |
|  | Durchlaufenes Feld im Zuge eines Rückgriffs   |

Tabelle 4: Die Bedeutung der verwendeten Symbole im ZDM-Modell

Erinnert man sich nun jedoch an die ersten vorsichtigen Interpretationsansätze aus dem letzten Abschnitt, so liegt die separate Darstellung einzelner Denkabschnitte im Zwei-Dimensionen-Modell nahe. Ordnet man die einzelnen Denkabschnitte dann wieder chronologisch an, ergibt sich ein wesentlich geordneteres und leichter zu durchschauendes Bild (Abb. 26):

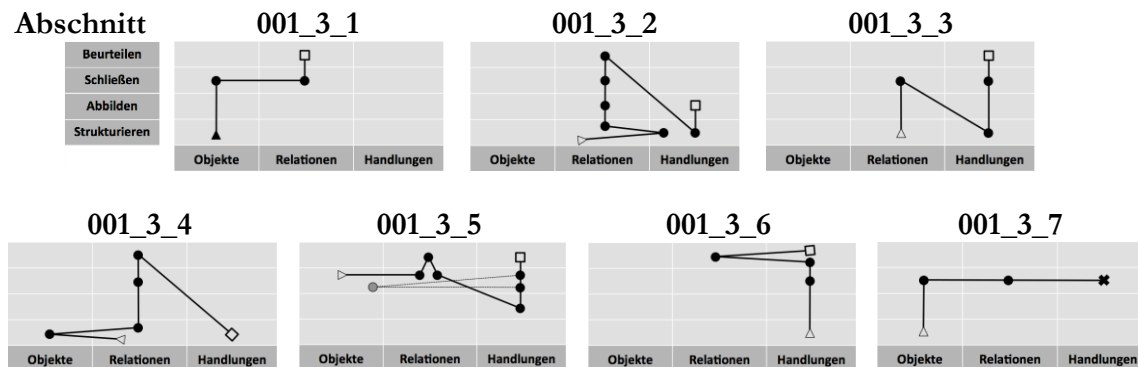


Abb. 26: Der Denkprozess aus Beispiel 4.1.1 zerlegt in einzelne Denkabschnitte und dargestellt im Zwei-Dimensionen-Modell

Auch für diese Art der Darstellung eines Analogiebildungsprozesses lassen sich zunächst verschiedene Vor- und Nachteile angeben:

- Auch die Wege im Zwei-Dimensionen-Modell lassen noch Aussagen über die chronologische Abfolge der Kodierungen zu.
- Allerdings geht durch die Punkt-Linien-Darstellung die Information über die „Aufenthaltsdauer“ innerhalb einer Kategorie verloren.

Diese Information könnte zwar auch hier Berücksichtigung finden, z. B. durch eine Proportionalität zwischen Aufenthaltsdauer und „Fläche“ oder „Durchmesser“ der „Weg-Punkte“, allerdings ginge diese Maßnahme wiederum zu Lasten der Übersichtlichkeit. Es wird sich erweisen, dass die ZDM-Darstellung andere Vorzüge hat, die sich mit den Vorteilen der Timeline-Darstellung bestens ergänzen, so dass es letztlich nicht darum geht, sich für eine der beiden Darstellungen zu entscheiden, sondern eher darum, einen Weg zu finden, wie die Vorteile beider Darstellungen im Interpretationsprozess gewinnbringend genutzt werden können. Weitere Aspekte sind:

- Wie in der Timeline lassen sich auch in der ZDM-Darstellung Übergänge innerhalb einer Ebene gut erkennen, nämlich als vertikal verlaufende Wegabschnitte (z. B. in 001\_3\_2).
- Zusätzlich können nun auch Übergänge innerhalb einer Phase der Analogiebildung leicht identifiziert werden, nämlich als horizontal verlaufende Wegabschnitte (z. B. in 001\_3\_7).

In Abschnitt 4.1.2 wurde explizit als Nachteil der Timeline-Darstellung genannt, dass solche Übergänge nur schwer zu erkennen sind. Umgekehrt besitzt die ZDM-Darstellung jedoch auch einen entscheidenden Nachteil gegenüber der Timeline:

- Abbrüche des Gedankengangs sind nur schwer als solche zu erkennen.

Läge die ZDM-Darstellung als einziges Werkzeug zur Interpretation der Gedankengänge vor, dann fiel die Einteilung in Denkabschnitte auf dieser Grundlage ungleich schwerer als mit der Timeline.

Beide Darstellungen schließlich haben eine gemeinsame Schwäche:

- Auch mit Hilfe der ZDM-Darstellung ist eine Basis, auf der ein quantitativer Vergleich verschiedener „Wege der Analogiebildung“ möglich wird, nur schwer vorstellbar. Immernoch sind Wege der Analogiebildung unterschiedlich lang, durchlaufen Stationen mehrfach und/oder in verschiedenen Richtungen. Ein Abstands- oder Ähnlichkeitsmaß für solche Wege scheint nach wie vor nicht realisierbar.

Dennoch lassen sich auch mit Hilfe der ZDM-Darstellung erste Interpretationen vornehmen, die schließlich auf ein erfolgversprechendes Werkzeug führen, das sogar einen quantitativen Vergleich von Wegen der Analogiebildung ermöglicht.

Ähnlich wie bei der Timeline-Darstellung lässt sich beim Vergleich der Graphen verschiedener Denkprozesse bzw. Denkabschnitte nämlich auch hier eine Tendenz bezüglich des Verlaufs feststellen:

- Die Wege der einzelnen Denkabschnitte in der ZDM-Darstellung verlaufen im Wesentlichen „von links nach rechts“ und „von unten nach oben“.

Zudem lässt sich über den Verlauf der Wege festhalten:

- Ein neuer Denkabschnitt (z. B. nach einem Abbruch des Gedankengangs) beginnt sehr häufig auf der Objektebene und/oder in der Phase des Strukturierens.

Mit diesen beiden Feststellungen lässt sich nun allein durch die Angabe der durchlaufenen Kategorien eine grobe Vermutung über den Verlauf des Graphen, also über den Weg der Analogiebildung, aufstellen.

In der folgenden Abbildung werden in der linken Spalte nur die durchlaufenen Kategorien eines Denkabschnitts als Punkte im Zwei-Dimensionen-Modell dargestellt. Die mittlere Spalte zeigt den tatsächlichen Verlauf des Gedankengangs, während die rechte Spalte einen Verlauf zeigt, wie er auf der Grundlage der gegebenen Punkte auch möglich wäre. Vor dem Hintergrund der letzten Ausführungen und mit etwas Erfahrung im Umgang mit den vorgestellten Darstellungen ist der tatsächliche Verlauf des Graphen in keinem der beiden Fälle eine größere Überraschung, während der fiktive Verlauf geradezu unnatürlich wirkt (Abb. 27).

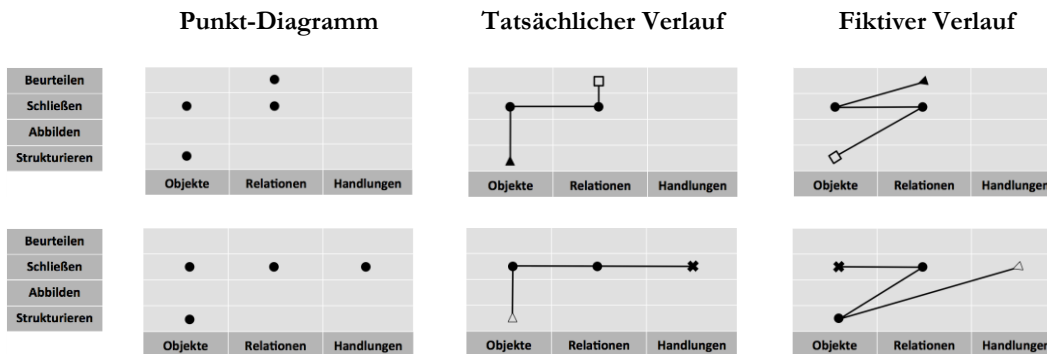


Abb. 27: Punkt-Diagramm, tatsächliche Wege und fiktive Wege für die Denkabschnitte 001\_3\_1 und 001\_3\_7 aus dem Beispiel 4.1.1 (vgl. auch Abb. 26)

Die Schlussfolgerung, die aus diesen Überlegungen gezogen werden kann, ist dennoch überraschend: Trotz des Verzichts auf die Zeitinformation, die in den grafischen Darstellungen als Timeline bzw. im Zwei-Dimensionen-Modell enthalten ist, sind noch Rückschlüsse auf den ungefähren Verlauf des Graphen in der ZDM-Darstellung möglich. Es kommt also wesentlich darauf an, welche Kategorien während des Denkprozesses überhaupt durchlaufen werden, während die Reihenfolge und damit der Weg dadurch ohnehin im Groben festgelegt sind.

#### 4.2.2 Visualisierung III und Mathematisierung: Weg-Matrizen

Das überraschende Ergebnis aus Abschnitt 4.2.1 kann nun dazu genutzt werden, eine Normierung und Quantifizierung der Denkabschnitte vorzunehmen. Zunächst sollen hier die Probleme noch einmal zusammengefasst werden, aufgrund derer sich die Darstellungen als Timeline und im Zwei-Dimensionen-Modell einer quantitativen Betrachtung weitgehend entziehen:

- Es müssen Timelines bzw. Wege miteinander verglichen werden, die unterschiedlich lang sind.
- Ein Maß für die Ähnlichkeit bzw. den Unterschied zwischen zwei Wegen ist nur schwer zu definieren.

Verzichtet man nun auf die Zeitinformation, ergibt sich zunächst ein Bild wie in der linken Spalte der Abb. 27. Ist man zusätzlich nur daran interessiert, welche Kategorien während eines Denkprozesses durchlaufen werden, und vernachlässigt man das Phänomen, dass eine Kategorie während eines Denkabschnitts auch mehrfach durchlaufen werden kann, vereinfacht sich die Darstellung noch weiter (Abb. 28):

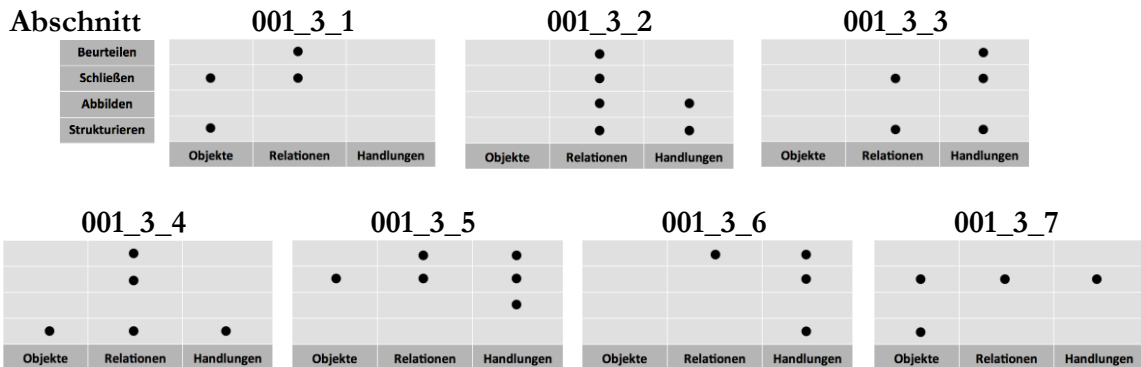


Abb. 28: Punkt-Diagramme für die einzelnen Denkabschnitte des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1

Letztlich erhält man auf diese Weise für jeden Weg eine 4×3-Matrix aus Punkten und Leerstellen. Eine mögliche Mathematisierung dieser Darstellung ist die Betrachtung entsprechender 0-1-Matrizen (Abb. 29):

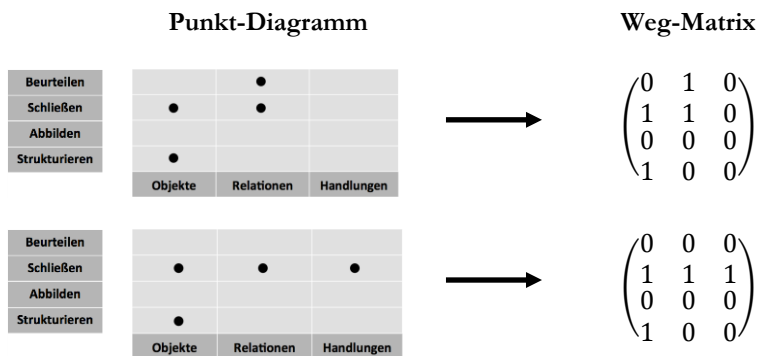


Abb. 29: Die Denkabschnitte 001\_3\_1 und 001\_3\_7 des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 dargestellt als Punktdiagramm im Zwei-Dimensionen-Modell und als 0-1-Matrix

Insgesamt ergibt sich so für den Denkprozess aus Abschnitt 4.1.1 die folgende Zusammenstellung von Matrizen (diese sollen im Folgenden als Weg-Matrizen bezeichnet werden) für die einzelnen Denkabschnitte:

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 001_3_1  | 001_3_2  | 001_3_3  | 001_3_4  | 001_3_5  | 001_3_6  | 001_3_7  |

Tabelle 5: Die Darstellung des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 in Form von Weg-Matrizen für die einzelnen Denkabschnitte

Durch diese Normierung erhält man also mathematische Objekte, die miteinander verglichen werden können. Interpretiert man die Weg-Matrizen z. B. als Vektoren im Vektorraum  $\mathbb{R}^{4 \times 3}$ , können die bekannten Abstandsfunktionen (=Metriken) dazu dienen, den Unterschied zweier Wege durch den Wert der zugehörigen Abstandsfunktion zu quantifizieren.<sup>47</sup> Das z. B. im Bereich der euklidischen Geometrie übliche Abstandsmaß

$$d_2(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (a_{ij} - b_{ij})^2} \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

erweist sich als eher ungeeignet, da zwei Weg-Matrizen, die sich in genau einem Eintrag unterscheiden, der Abstand  $d(A, B) = 1$  zugeordnet wird, während zwei Matrizen mit genau zwei unterschiedlichen Einträgen den Abstand  $d(A, B) = \sqrt{2}$  besitzen. Naheliegender ist hier ein proportionales Verhalten, also z. B. ein Abstandsmaß, das die Anzahl an unterschiedlichen Einträgen zählt. Diese Bedingung wird z. B. von der Summe der Differenzbeträge (sog. City-Block-Metrik) erfüllt:

$$d_1(A, B) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 |a_{ij} - b_{ij}| \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

Die Wege zu den Denkabschnitten 001\_3\_1 und 001\_3\_2 aus dem Beispiel haben nun den Abstand  $d_1(001_3_1; 001_3_2) = 5$ , während z. B. die Wege 001\_3\_1 und 001\_3\_7 den Abstand  $d_1(001_3_1; 001_3_7) = 2$  besitzen. Das Ergebnis dieser Betrachtung stimmt auch mit dem ersten Augenschein überein, dass sich die Wege zu den Denkabschnitten 001\_3\_1 und 001\_3\_7 ähnlicher sind als die beiden Wege zu 001\_3\_1 und 001\_3\_2.

Im Zuge der Gesamtauswertung werden die Weg-Matrizen zusammen mit dem hier definierten Abstandsmaß im Rahmen einer Cluster-Analyse dazu beitragen, verschiedene Gruppen von untereinander „ähnlichen Wegen“ voneinander abzugrenzen. Dabei wird auch näher erläutert, warum die Weg-Matrizen von vorn herein als Datensätze metrischer Daten und nicht als binäre Datensätze aufgefasst werden.

---

<sup>47</sup> Für die hier verwendeten Abstandsfunktionen (Metriken) und deren Eigenschaften vergleiche z. B. Heuser (1988, S. 98ff.)



### 4.3 Gütekriterien qualitativer Forschung – Triangulation

Bevor eine Zusammenstellung und Interpretation der Untersuchungsergebnisse erfolgt, sollen in diesem Abschnitt zunächst der Auswertungsprozess und dessen Ergebnisse daraufhin untersucht werden, ob sie gängigen Gütekriterien für qualitative Sozialforschung genügen können.

Bereits im Rahmen der methodologischen Überlegungen aus Abschnitt 3.2.2 werden Gütekriterien für qualitative Forschung vorgestellt, wie sie z. B. von Mayring (2002) vorgeschlagen werden. Einige dieser Punkte wurden dabei bereits in die methodologischen Vorüberlegungen eingebunden. Ein wichtiger Aspekt, der nun – nachdem die verwendeten Werkzeuge und ihre Anwendung vorgestellt wurden – näher betrachtet werden kann, ist die *Triangulation*, die im Zuge der Untersuchung auf verschiedenen Ebenen zur Validität und zur Reliabilität der Untersuchungsergebnisse beitragen soll.

Flick (2011) beschreibt das Konzept der Triangulation folgendermaßen:

„Vereinfacht ausgedrückt bezeichnet der Begriff Triangulation, dass ein Forschungsgegenstand von (mindestens) zwei Punkten aus betrachtet [...] wird.“ (S. 11)

und definiert:

„Triangulation beinhaltet die Einnahme unterschiedlicher Perspektiven auf einen untersuchten Gegenstand [...]. Diese Perspektiven können sich in unterschiedlichen Methoden [...] und/oder unterschiedlichen gewählten theoretischen Zugängen konkretisieren [...]. Weiterhin bezieht sie sich auf die Kombination unterschiedlicher Datensorten. [...] Durch die Triangulation [...] sollte ein prinzipieller Erkenntniszuwachs möglich sein [...].“ (S. 12)

Über die Bedeutung der Triangulation für die qualitative Sozialforschung schreibt Flick (2011) weiter, dass

„[...] Triangulation als empirischer Zugang zu den untersuchten Feldern und Gegenständen weniger ein Instrument der Überprüfung empirischer Ergebnisse als einen Weg zu erweiterten Erkenntnismöglichkeiten darstellt.“ (S. 9)

Bereits Denzin (1970) beschreibt verschiedene Möglichkeiten der Triangulation und unterscheidet dabei neben den bereits genannten Typen (Methoden-, Theorien-, Daten-Triangulation) noch die Triangulation auf der Forscherebene (Investigator-Triangulation, vgl. auch Flick, 2011, S. 14).

#### Daten-Triangulation

Im Sinne Denzins (1970) versteht man unter Daten-Triangulation die Einbeziehung von Datenquellen, die sich in Zeit, Raum und/oder in der Person voneinander unterscheiden. Die Untersuchung der so gewonnenen verschiedenen Datenmengen mit denselben Metho-

den führt im Idealfall auf die gleichen Ergebnisse. Die obige Konnotation erlaubt es jedoch auch dann von einer Datentriangulation zu sprechen, wenn verschiedene Datenquellen des gleichen Untersuchungsgegenstands für die Auswertung herangezogen werden können.

In der vorliegenden Untersuchung stehen die Schüler-Dialoge im Zentrum des Interesses. Diese werden jedoch bei Bedarf im obigen Sinne einer Daten-Triangulation um die Bild-Daten, die Schüler-Dokumente und/oder die Aussagen der Teach-Back-Phase ergänzt (vgl. Abschnitt 3.2.2).

#### Methoden-Triangulation

Denzins ursprüngliche Idee der Methoden-Triangulation zielt vor allem auf die Validität der im Forschungsprozess entwickelten Konstrukte ab. Eine hohe Konstruktvalidität kann nach Denzin dadurch nachgewiesen werden, dass die Anwendung verschiedener Methoden auf das gleiche Datenmaterial zu gleichen Ergebnissen führt. Er schreibt hierzu:

„[...] methodological triangulation involves a complex process of playing each method off against the other so as to maximize the validity of field efforts.“ (Denzin, 1970, S. 310)

Diese Sichtweise wird allerdings von verschiedenen Seiten skeptisch betrachtet. Lamnek (1988) etwa hält „übereinstimmende Ergebnisse für unwahrscheinlich, wenn die Methoden von unterschiedlicher Qualität sind“ (S. 236, zitiert nach Flick, 2011, S. 19) und auch Köckeis-Stangl (1982, S. 363) warnt, man solle „im voraus [sic!] darauf gefasst [...] sein, als Ergebnis kein einheitliches, sondern eher ein kaleidoskopartiges Bild zu erhalten.“ In diesem Sinne sieht auch Denzin selbst in seinen späteren Ausführungen Methoden-Triangulation „als Strategie auf dem Weg zu einem tieferen Verständnis des untersuchten Gegenstands und damit als Schritt auf dem Weg zu mehr Erkenntnis und weniger zu Validität und Objektivität in der Interpretation.“ (Flick, 2011, S. 20)

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Methoden zur Erhebung der Daten in diesem Sinne triangulierend verwendet. So steht die Methode des Lauten Denkens und dessen Erfassung per Videomitschnitt neben der Dokumentation von Schülerlösungen in Form von schriftlichen Dokumenten sowie der Durchführung und Aufzeichnung der Teach-Back-Phase.

Wie in Abschnitt 3.2.2 bereits beschrieben, steht die Auswertung der Videomitschnitte zum Lauten Denken im Zentrum der Untersuchung. Flankiert werden die so gewonnenen verbalen Daten jedoch von den Bild-Daten und den Schülerdokumenten. Das Ergebnis sind die in den Abschnitten 4.1.2 bis 4.2.2 beschriebenen Darstellungen der Daten. Auf der Ebene der Auswertung ergibt sich eine Methoden-Triangulation im obigen Sinne auch im Umgang mit diesen Darstellungen. Zur Interpretation der Versuchsergebnisse steuern die Timeline-Darstellung und die ZDM-Darstellung auf der einen Seite wichtige Informationen über den chronologischen Verlauf der Denkprozesse bei. Auf der anderen Seite erlaubt

die Darstellung der Denkprozesse in Form von Weg-Matrizen einen quantitativen Vergleich und damit eine Kategorisierung verschiedener Denkabschnitte.

Die Triangulation auf der Methodenebene zielt also im Rahmen der Datenerhebung darauf ab, eine höhere Validität zu erreichen und die Interpretation der Hauptdatenquelle abzusichern, während die Verwendung verschiedener Methoden zur Auswertung der gewonnenen Daten eher dazu beitragen soll, den Untersuchungsgegenstand aus einem größeren Blickwinkel erfassen zu können. In diesem Sinne ist der Begriff der Methoden-Triangulation auch bei Fielding und Fielding (1986) zu verstehen, wenn sie schreiben:

„We should combine [...] methods carefully and purposefully with the intention of adding breadth or depth to our analysis but not for the purpose of pursuing ‚objective‘ truth.“ (S. 33)

### Theorien-Triangulation

Unter Theorien-Triangulation kann zum einen die gegenseitige Abgrenzung verschiedener Theorien zu einem Untersuchungsgegenstand vor dem Hintergrund konkreter Daten verstanden werden. So betrachtet dient die Triangulation hier der Verifikation bzw. Falsifikation verschiedener Theorien und damit entweder der Kontrastierung derjenigen Theorie, die durch die Ergebnisse gestützt werden soll, oder der Entwicklung einer neuen Theorie. Dementsprechend empfiehlt Flick (2011):

„Insbesondere in Feldern, die durch ein geringes Maß an theoretischer Kohärenz gekennzeichnet sind, ist der Rückgriff auf Theorien-Triangulation zu empfehlen.“ (S. 14)

Ähnlich wie bei der Methoden-Triangulation müssen die verschiedenen Theorien, die den Hintergrund einer Untersuchung bilden, jedoch nicht zwingend einander gegenübergestellt werden. Auch hier kann der Schwerpunkt auf die Multiperspektivität gelegt werden, die durch die Einbeziehung verschiedener in der Vorbereitung einer Datenauswertung in das Blickfeld gerückter Theorien entstehen kann. Es geht dann nicht mehr darum, dass diese Theorien zueinander in Konkurrenz stehen, sondern vielmehr darum,

„[...] approaching the data with multiple perspectives and hypotheses in mind. [...] various theoretical points of view could be placed side by side to assess their utility and power.“ (Denzin, 1970, S. 303)

Triangulation auf der theoretischen Ebene kann also auch die Zusammenführung verschiedener Theorien im Blick haben und als Zielvorstellung wieder ein umfassenderes Bild des Untersuchungsgegenstands anstreben.

### Investigator-Triangulation

Will man die Maßnahmen der Triangulation unter Rückgriff auf die klassischen Gütekriterien betrachten, so dienen die bisher beschriebenen Maßnahmen vornehmlich der Steige-

rung der Validität. Eine weitere Maßnahme, die vor allem die Objektivität und die Reliabilität der Untersuchungsergebnisse im Blick hat, ist die Triangulation auf der investigativen Ebene. Im Zentrum steht dabei die Beteiligung mehrerer Forscher am Forschungsprozess. Dabei kann, ähnlich wie bei der Methoden-Triangulation, zwischen Triangulationsmaßnahmen beim Prozess der Datenerhebung und Maßnahmen beim Auswertungsprozess unterschieden werden. Denzin (1970) schreibt hierzu:

„Triangulating observers removes the potential bias that comes from a single person, and insures a greater reliability in observations“ (S. 303)

Flick (2011, S. 14) jedoch warnt, dass „[d]abei [...] nicht die schlichte Arbeitsteilung oder Delegation vermeintlicher Routinefähigkeiten an Hilfskräfte gemeint [...]“ sei, sondern es vielmehr darum gehe, gleichwertige Forscher in jeder Phase des Forschungsprozesses so mit einzubeziehen, dass mögliche Verzerrungen durch die Person des Forschers aufgedeckt und minimiert werden können.

Natürlich gestaltet sich die Umsetzung dieses Forschungs-Grundsatzes äußerst aufwändig. Vor allem in der Auswertungsphase bedeutet die Einbeziehung weiterer Experten einen erheblichen Mehraufwand. Einerseits müssen die beteiligten Personen auf den gleichen Wissensstand gebracht werden, andererseits erfordert die parallele Auswertung der Daten durch zwei oder drei Forscher den zwei- bzw. dreifachen Zeitaufwand. Zusätzlich müssten die Auswertungsergebnisse gemeinsam diskutiert werden, um einen Erkenntnis-Mehrwert zu erzielen. Steht für die Auswertung also keine größere Forschergruppe oder zumindest eine Gruppe qualifizierter wissenschaftlicher Hilfskräfte im Hintergrund der Untersuchung, kann dieses Gütekriterium nur im Ansatz verwirklicht werden.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurde in der Phase der Datenerhebung mit drei verschiedenen Versuchsleitern gearbeitet, die vorher gemäß den obigen Darstellungen instruiert wurden.

Auf die Triangulationsmaßnahmen, die bezüglich der am Forschungsprozess beteiligten Personen im Rahmen der Auswertung ergriffen wurden, wird im Folgenden detaillierter eingegangen.

Mayring (2010, S. 120f.) unterscheidet im Zusammenhang mit dem klassischen Gütekriterium der Reliabilität die beiden Begriffe *Stabilität* und *Reproduzierbarkeit*.

Um *Stabilität* zu erreichen, schlägt Mayring vor, das Material von jedem Forscher, der am Kodierungsprozess beteiligt ist, mehrfach und unabhängig von vorhergehenden Materialdurchgängen zu kodieren. Der Grad an Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Durchgängen liefert einen Koeffizienten, der als Maß für die sogenannte *Intracoder-Reliabilität* verwendet werden kann.

*Reproduzierbarkeit* kann nach Mayring gemessen werden, wenn verschiedene Kodierer das gleiche Material kodieren und die Ergebnisse anschließend miteinander verglichen werden.

Auch hier liefert der Grad an Übereinstimmung zwischen den Kodierergebnissen der verschiedenen Kodierer einen Koeffizienten, der nun als Maß für die sogenannte *Intercoder-Reliabilität* verwendet werden kann.

Eine Variante bei der Beteiligung verschiedener Kodierer am Auswertungsprozess ist die konsensuelle Kodierung. Dabei einigen sich verschiedene Kodierer in der gemeinsamen Diskussion darüber, wie das vorliegende Datenmaterial zu kodieren sei. Auf die Messung eines Koeffizienten wird dabei meist verzichtet.

Die Rahmenbedingungen der vorliegenden Untersuchung ließen eine durchgängige Arbeit mit mehreren Kodierern nicht zu, sodass die Bestimmung einer Intercoder-Reliabilität nur für einzelne Sequenzen der vorliegenden Video-Mitschnitte möglich war. Eine studentische Hilfskraft, die bereits im Rahmen ihrer Staatsexamensarbeit Analogiebildungsprozesse auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells untersucht hatte (vgl. Schmitt, 2011), wurde gebeten, die Videomitschnitte 001\_3 und 003\_4 unter Berücksichtigung des Kodierleitfadens zu kodieren. Ein Vergleich dieser Kodierung mit den Kodierergebnissen des Autors kann nun zunächst auf der Grundlage der Timeline-Darstellung des untersuchten Denkvorgangs geschehen (Abb. 30):

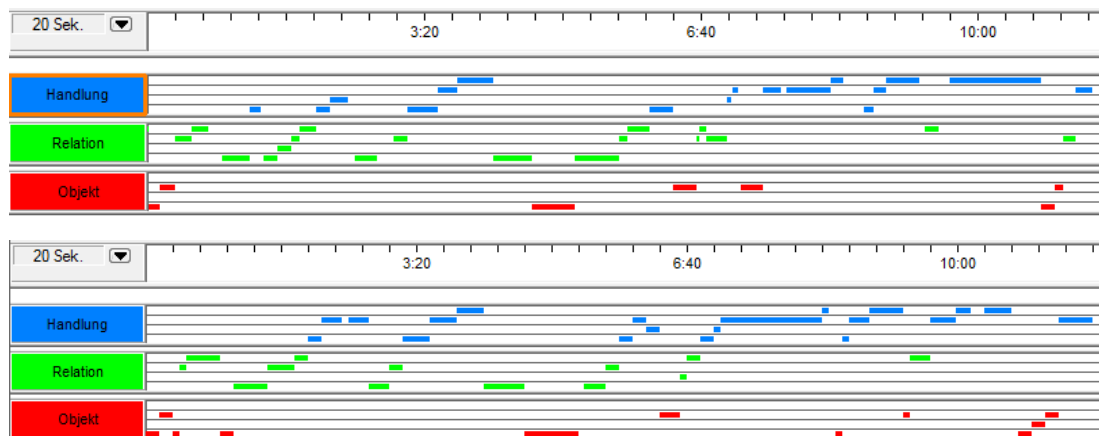


Abb. 30: Intercoder-Reliabilität – Die Timelines zweier Kodierer zum Video 001\_3 (Skalierung: 20s)

Ein erster, rein optischer Vergleich zeigt bereits, dass die Kodierungen sich in weiten Teilen entsprechen, dass es aber auch Stellen gibt, an denen keine Übereinstimmung erzielt werden konnte. Insbesondere gibt es Stellen, die bei einem der Kodierer kodiert wurden, beim anderen jedoch nicht. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die beiden Kodierungen des Videos 003\_4 (vgl. Abb. Abb. 31).

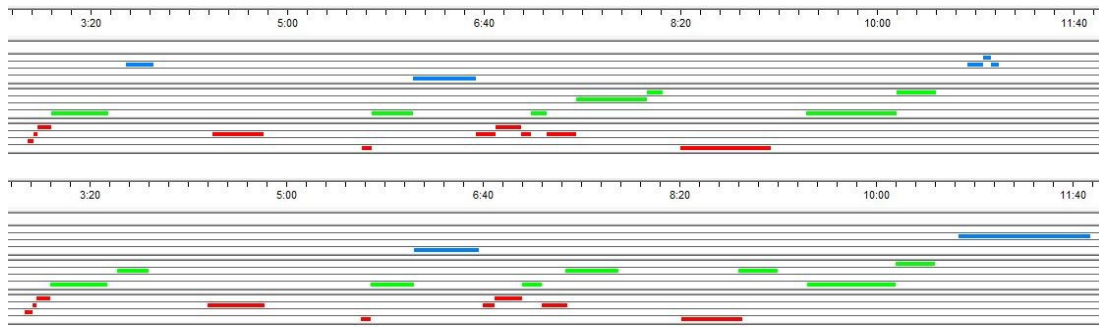


Abb. 31: Intercoder-Reliabilität – Die Timelines zweier Kodierer zum Video 003\_4 (Skalierung: 10s)

Für eine Quantifizierung der Intercoder-Reliabilität muss zunächst festgelegt werden, welche Gesprächsabschnitte für den Vergleich herangezogen werden können. Im gemeinsamen Gespräch über die Kodierungen wurde z. B. festgestellt, dass die studentische Hilfskraft für Phasen, in denen nicht gesprochen wurde, die Kodierung aus dem letzten Gesprächsabschnitt weitergeführt hat, während der Autor der Arbeit an solchen Stellen nicht kodiert hat. Es scheint also sinnvoll, zumindest solche Zeiträume aus dem Vergleich auszuklammern. Weiter soll sich der Vergleich ausschließlich auf die tatsächlichen Kategorien beziehen – es sind ja diese Zuteilungen, die später für die Auswertung interessant sind – während die Kodierung von Pseudokategorien außer Acht gelassen wird. Zudem werden geringe zeitliche Verschiebungen (im Sekundenbereich) beim Kodieren der Kategorien als Übereinstimmungen akzeptiert, da die studentische Hilfskraft nur für eine begrenzte Zeit zur Verfügung stand und eine sekundengenaue Kodierung, die sonst durch weitere Materialdurchgänge erreicht wurde, hier entfallen musste. Verglichen werden sollen deshalb Kodierabschnitte von fünf Sekunden.

Für die Bewertung der Reliabilität auf der beschriebenen Grundlage soll der Reliabilitätskoeffizient nach Holsti (1969) herangezogen werden, der sich als prozentuale Übereinstimmung berechnet:

$$R_H = \frac{\text{Anzahl der Kodierer} \times \text{Anzahl der übereinstimmenden Kodierungen}}{\text{Zahl aller Kodierurteile}}$$

Andere Koeffizienten, bei denen z. B. die Möglichkeit zufällig übereinstimmender Kodierungen mit berücksichtigt wird und Abhängigkeiten von der Anzahl der Ausprägungen vermieden werden sollen (etwa nach Krippendorff, 2013), scheinen hier auch angesichts der geringen Anzahl der zum Vergleich verfügbaren Kodierungen nicht angemessen. Da die Reliabilitätsmessung an Beispielen aus der ersten Voruntersuchung stattfindet, können die Ergebnisse und Auffälligkeiten dazu hergenommen werden, die Kodieranweisungen weiter zu verbessern, um für die restlichen Kodierungen eindeutige Zuordnungen zu erhalten.

Im Beispiel 001\_3 ergeben sich mit dem genannten Vorgehen 49 Übereinstimmungen bei insgesamt 124 Kodierurteilen und der Holsti-Koeffizient berechnet sich damit zu:

$$R_H = \frac{2 \cdot 49}{124} = 0,790$$

Im Beispiel 003\_4 ergeben sich mit dem genannten Vorgehen 31 Übereinstimmungen bei insgesamt 80 Kodierurteilen und der Holsti-Koeffizient berechnet sich damit zu:

$$R_H = \frac{2 \cdot 31}{80} = 0,775$$

Koeffizienten von 0,790 bzw. 0,775 sind vom optimalen Ergebnis 1,0 noch recht weit entfernt und könnten bei einfachen Zuordnungsaufgaben nicht mehr akzeptiert werden. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch komplexe inhaltliche Kategorien zuzuordnen sind und das Ergebnis der Kodierungen anschließend noch genau analysiert und auf Verbesserungsmöglichkeiten am Kodierleitfaden hin untersucht wurde, können diese Werte als hinreichend gut angenommen werden.

## 4.4 Zusammenstellung und Interpretation der Daten

In diesem Abschnitt wird zunächst der Kodierungsprozess in der Rückschau reflektiert, bevor eine Gesamtschau der kodierten Daten erfolgt. Ausgehend davon wird versucht, schrittweise eine nachvollziehbare Struktur innerhalb der Datenmenge herauszuarbeiten. Mit Hilfe der verwendeten grafischen und mathematischen Darstellungen, und unter Rückbezug auf die theoretischen Überlegungen, werden die Daten anschließend gemäß der erkannten Struktur geordnet. Auf der Grundlage dieser Ordnung erfolgt – teils parallel zum Strukturierungsprozess – die Interpretation der Ergebnisse. Naturgemäß können im Rahmen einer deskriptiven Untersuchung keine absoluten Aussagen über die *Wege der Analogiebildung* erwartet werden. Vielmehr geht es darum, geleitet von den zugrundeliegenden theoretischen Überlegungen, eine Struktur in der Menge der erhobenen Daten herauszuarbeiten, die es erlaubt, Existenzaussagen über den Analogiebildungsprozess zu formulieren, die für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten relevant sind. Geleitet wird die Darstellung dabei auch in dieser Phase der Untersuchung von der Vorstellung, den Forschungsprozess und die Vorgehensweise so weit wie möglich offenzulegen und für eine Diskussion zugänglich aufzubereiten.

### 4.4.1 Die Qualität der Transkripte und der Aufgabenbearbeitungen

Die Qualität der Auswertung und Interpretation transkribierter Dialoge hinsichtlich der in 4.3 beschriebenen Gütekriterien hängt nicht zuletzt von der Qualität der Dialoge selbst ab. In Bezug auf die vorliegende Untersuchung ist damit vor allem die Umsetzung des Lauten Denkens durch die Schüler gemeint. Allerdings können zudem nur dann sinnvolle Beobachtungen gemacht werden, wenn die Aufgabenstellung so gewählt ist, dass sie die Probanden nicht unter- oder überfordert. Sind die Aufgaben zu schwer, so sind die Probanden möglicherweise nicht in der Lage, überhaupt Analogien zu erkennen und entsprechende Schlussfolgerungen für die Aufgabenbearbeitung zu ziehen. Sind die Aufgaben zu leicht, besteht die Gefahr, dass die Analogie zu einer bereits gelösten Aufgabe überhaupt nicht benötigt wird. In beiden Fällen entstehen Transkripte, die für die Untersuchung nur geringen Wert haben, da das erhoffte Phänomen nicht in ausreichendem Umfang beobachtet werden kann.

Hinsichtlich dieser beiden Einflussfaktoren liegen für die Auswertung Aufgabenbearbeitungen von unterschiedlicher Qualität vor. Die Methode des Lauten Denkens wurde von allen Schülern bereitwillig aufgenommen und umgesetzt. Die auftretende Nervosität beim Sprechen vor der laufenden Kamera war, den Schülern zufolge, zwar vorhanden, aber bei keinem Probanden spürbar. Auch die Gruppenzusammensetzungen führten nicht dadurch zu spürbaren Einschränkungen der Dialogbereitschaft, dass es Vorbehalte zwischen den Schülern gab, da sich die Schüler innerhalb der Gruppen alle kannten und untereinander



ein gutes Verhältnis pflegten. Allerdings gab es bei einigen Gruppen durchaus die Tendenz, auch einmal „im Stillen“ über weitere Schritte nachzudenken und damit möglicherweise nicht alle Gedanken so zu äußern, wie sie dem Probanden gerade in den Sinn kamen. Interessanterweise trat dieses Phänomen eher bei den männlichen Probanden auf, sie mussten bisweilen an die Verbalisierung ihrer Gedanken erinnert werden. Die Beiträge der weiblichen Probanden erschienen dagegen weitgehend lückenlos. Auch bezüglich der Aufgabebearbeitungen ergaben sich teils deutliche Unterschiede. Keine der videografierten Bearbeitungen ist deshalb unbrauchbar, weil die Probanden durch die Aufgabenstellung überfordert waren und aus diesem Grund keine Analogiebildung zu beobachten war. Es gibt allerdings einige Aufzeichnungen, bei denen den Schülern die Aufgabebearbeitung recht leicht von der Hand ging und eine Analogiebildung im transkribierten Dialog nicht auf den ersten Blick zu erkennen ist. Da die transkribierten Dialoge nicht die einzige Datenquelle bilden, auf der die Kodierung beruht (vgl. 3.2), konnten trotzdem alle Aufgabebearbeitungen für die Auswertung herangezogen werden. Eine Begründung dafür wird im nächsten Abschnitt geliefert.

#### **4.4.2      Rückschau: Der Kodierungsprozess**

Im Abschnitt 3.2 wurde ausführlich die Natur der vorliegenden Daten analysiert und es wurden im Rahmen der Erstellung eines Kodierleitfadens Regeln entwickelt, wie im Zuge des Kodierungsprozesses auf diese Daten zugegriffen werden soll, um zu einer validen Zuordnung innerhalb des Kategoriensystems zu kommen. Im Zentrum stehen dabei die transkribierten Schülerdialoge. Es zeigt sich, dass in den meisten Fällen diese Datenquelle genügt, um mit Hilfe des Kodierleitfadens und der dort aufgeführten Ankerbeispiele aus der zweiten Voruntersuchung zu einer Zuordnung zu kommen. Dennoch sind an vielen Stellen auch die Pseudokategorien hilfreich, um das Urteil durch den Zugriff auf die Bild- und Textdaten, die Schülerdokumente und die Teachback-Protokolle abzusichern. Es liegt in der Natur der qualitativen Vorgehensweise, dass trotz der genannten umfangreichen Bemühungen, geeignete Maßnahmen zur Objektivierung des Vorgehens zu integrieren, ein Rest subjektiver Einschätzung durch den Auswertenden bestehen bleibt.

Auf die vorliegende Untersuchung bezogen seien hierzu beispielhaft zwei Aspekte genannt, die sich im Rahmen eines Kodierleitfadens kaum oder nur schwer in Form einer Regel formulieren lassen und deshalb zu subjektiven Einschätzungen führen könnten. Zum einen betrifft dies Aufgabebearbeitungen, bei denen die Schüler sehr schnell einen Lösungsweg erkennen (vgl. 4.4.1). Die Verbalisierungen beschränken sich dann stark auf Strukturierungen und Operationen im Zielbereich. Es sind dies die Situationen, wie sie im Abschnitt 1.3.3 unter Bezugnahme auf Reid & Knipping (2010) erläutert wurden – Situationen, in denen nur schwer entschieden werden kann, ob es sich bei dem beobachteten Denkvorgang tatsächlich um einen Analogiebildungsprozess handelt, oder ob eine Generalisierung

verschiedener Beobachtungen aus der Vergangenheit und eine anschließende Spezialisierung bezogen auf das aktuelle Problem vorliegt. In einigen Fällen konnte hier das Teachback-Protokoll eindeutig Aufschluss geben, denn die zugrundeliegende Analogiebildung wurde dort nachträglich erläutert, sodass z. B. auch Strukturierungen, die sich ausschließlich auf den Zielbereich beziehen, als Teil eines Analogiebildungsprozesses interpretiert werden konnten (vgl. z. B. 004\_4). In anderen Fällen war diese Erkenntnis schwieriger zu gewinnen. Hier waren es einzelne Signalworte oder kleine Hinweise, die als Rechtfertigung der Interpretation im Sinne eines Analogiebildungsprozesses herangezogen werden mussten. In 005\_2 etwa stellt S1 rückblickend fest: „Jetzt haben wir wieder gerechnet wie vorher“, während in 002\_2 mit Blick auf eines der gelösten Beispiele in einer Nebenbemerkung die Verbindung hergestellt wird: „Das ist im Prinzip wieder eine Mischung“. In einem Fall schließlich (Video 005\_6) ist die Entscheidung nicht eindeutig zu treffen, wenn man die Aufgabenbearbeitung isoliert betrachtet. Die Aufgabenbearbeitung erfolgt hier ohne jeden Bezug zu den gelösten Aufgabenbeispielen und auch das Teachback-Protokoll kann in diesem Fall nicht weiterhelfen. Die einzelnen Dialogabschnitte wurden dennoch als Teile eines Analogiebildungsprozesses kodiert und mit in die Auswertung aufgenommen, da von den beiden Schülern zum Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung bereits andere Aufgaben des gleichen Sets bearbeitet wurden, bei denen der Rückgriff auf die Aufgabenbeispiele deutlich beobachtet werden konnte.

Es zeigt sich also, dass bei den genannten Beispielen bei sehr strenger Auslegung der Kodierregeln möglicherweise auch andere Entscheidungen hätten gerechtfertigt werden können.

Ein zweiter Aspekt, der eine mögliche Quelle für subjektive Beurteilungen bilden könnte, bezieht sich auf die Kodierung des Analogiebildungsprozesses bezüglich der einzelnen Phasen: Es zeigte sich im Zuge des Kodierungsvorgangs, dass vor allem die Phase *Abbildern* nur selten kodiert wurde (s. hierzu auch Abschnitt 4.4.3). Eine mögliche Interpretation dieser Beobachtung ist, dass selbst beim *Lauten Denken* der Prozess des *Abbilderns* eher im Hintergrund abläuft und deshalb nicht in jedem Fall deutlich expliziert wird. Eine andere Möglichkeit der Interpretation ist jedoch, dass die Phase des *Abbilderns* durch den Kodierleitfaden und die Ankerbeispiele nicht trennscharf genug von den anderen Phasen (v.a. *Strukturieren* und *Schließen*) abgegrenzt wird. Diese Möglichkeit kann nicht vollständig ausgeschlossen werden.

### 4.4.3 Erste quantitative Auswertung der Kodierung

Es wurden insgesamt 29 Aufgabenbearbeitungen transkribiert, kodiert und für die Auswertung als geeignet eingestuft, darunter auch die Aufgabenbearbeitungen aus der zweiten Voruntersuchung. Auf die Verwendung von vier weiteren Aufgabenbearbeitungen, die im Rahmen einer Hausarbeit nach dem gleichen Untersuchungsdesign videografiert wurden (vgl. Schmitt, 2011), wird an dieser Stelle verzichtet. Der Untersuchungsschwerpunkt von Schmitt lag auf der Beobachtung von Analogiebildungsprozessen beim Problemlösen mit Computereinsatz. Durch den Computereinsatz kommen für die Untersuchung methodische Aspekte ins Spiel, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll. Es wurden zudem andere Aufgabensets verwendet, die den Einsatz des Computers erlauben. Auf die durchaus interessanten Aspekte dieser Untersuchung wird in Abschnitt 5.3 knapp eingegangen.

Von den 29 Aufgabenbearbeitungen waren 19 erfolgreich: Es konnte ein korrektes Ergebnis erzielt und dieses im Sachzusammenhang richtig interpretiert werden. Von den zehn Bearbeitungen, die nicht zu einem korrekten Ergebnis führten, wurden drei abgebrochen, da die Schüler keine weitere Lösungsidee entwickeln konnten (001\_2, 001\_3, 005\_6). Bei vier der fehlerhaften Bearbeitungen kamen die Schüler zwar zu einem Endergebnis, dieses war jedoch nicht korrekt (001\_7, 002\_4, 003\_5, 004\_3). Der Bearbeitungsprozess von drei der nicht korrekt gelösten Aufgaben weist in seinem Verlauf das korrekte Ergebnis auf, die Schüler verwarfen jedoch dieses Ergebnis oder waren nicht in der Lage, es im Sachzusammenhang richtig zu interpretieren (001\_8, 002\_2, 003\_4).

Die Kodierung der 29 Aufgabenbearbeitungen lässt für einige Denkprozesse eine Zergliederung in einzelne Denkabschnitte zu, die durch erkennbare Abbrüche oder Unterbrechungen eines Gedankengangs identifiziert und im jeweiligen Transkript begründet wird. Auf diese Weise ergeben sich 70 Denkabschnitte und Denkprozesse mit bis zu sieben Abschnitten (zur Rolle der Timeline-Darstellung bei der Zerlegung der Gedankengänge in einzelne Denkabschnitte vgl. 4.4.4). Wie in 4.1.2 und 4.2.1 dargelegt, sollen die Denkabschnitte einzeln mit Hilfe der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten visualisiert werden. Die Interpretation dieser Darstellungen wird im Folgenden einerseits durch die Betrachtung der Denkabschnitte als Teil eines Denkprozesses erfolgen, es sollen aber auch die Denkabschnitte verschiedener Denkprozesse miteinander verglichen werden. Dabei bleibt natürlich zu berücksichtigen, dass es Bearbeitungen gibt, die aus einem einzigen Denkabschnitt bestehen (insgesamt neun) und andere, die in verschiedene Abschnitte zerfallen. Weiter muss berücksichtigt werden, dass der einzelne Denkabschnitt kaum ohne Berücksichtigung seiner Stellung innerhalb des Gedankengangs betrachtet werden kann. Soll dies dennoch geschehen, muss deutlich gemacht werden, an welcher Stelle dies Berücksichtigung findet.

Bevor die einzelnen Darstellungen als Werkzeuge zur Auswertung verwendet werden, sollen die Ergebnisse der Kodierung noch knapp im Ganzen quantitativ betrachtet werden. Stellt man die absoluten Häufigkeiten für die Zuordnungen zu den einzelnen Kategorien im ZDM-Modell zusammen, so ergibt sich folgendes Bild (Abb. 32):

| PHASE                |                |                   |                   |              |
|----------------------|----------------|-------------------|-------------------|--------------|
| <b>Beurteilen</b>    | 16             | 41                | 77                |              |
| <b>Schließen</b>     | 41             | 59                | 95                |              |
| <b>Abbilden</b>      | 15             | 16                | 19                |              |
| <b>Strukturieren</b> | 50             | 73                | 35                |              |
|                      | <b>Objekte</b> | <b>Relationen</b> | <b>Handlungen</b> | <b>EBENE</b> |

Abb. 32: Absolute Häufigkeiten für die Zuordnung zu den Kategorien des Kategoriensystems

Es wird deutlich, dass es große Unterschiede in der Anzahl der Zuordnungen zu den einzelnen Kategorien gibt. Besonders auffällig dabei ist, dass Kodierungen für die Phase des „Abbildens“ auf allen Ebenen deutlich seltener vorkommen als Kodierungen für andere Phasen des Analogiebildungsprozesses. Diese Beobachtung ermöglicht verschiedene Interpretationsansätze, die bereits in Abschnitt 4.4.2 angesprochen wurden. Auch das „Beurteilen auf der Objektebene“ wird vergleichsweise selten kodiert. Ein Grund könnte sein, dass zum Beurteilen einer Analogie auf der Objektebene auch zugrundeliegende Relationen zwischen den Objekten herangezogen werden. Dies wird dann möglicherweise bereits auf der Relationsebene kodiert – auch an dieser Stelle können die einzelnen Felder im ZDM-Diagramm durch den Kodierleitfaden möglicherweise nicht mit absoluter Trennschärfe aufgelöst werden.

Vergleicht man die Anzahl der Aufgabenbearbeitungen und der Denkabschnitte mit den angegebenen Häufigkeiten, stellt man erwartungsgemäß weiter fest: Nicht in jedem Denkabschnitt und noch nicht einmal in jeder der beobachteten Aufgabenbearbeitungen wird jedes Feld des ZDM-Modells durchlaufen. Genauere Betrachtungen zeigen, dass bei 17 der 29 Bearbeitungen (58,6%) jede Phase der Analogiebildung expliziert wurde. Bezogen auf den Erfolg der Bearbeitungen ergibt sich eine Quote von 63,2% der erfolgreichen Bearbeitungen, bei denen alle Phasen erkennbar durchlaufen wurden, wohingegen dies lediglich bei 50% der fehlerbehafteten Aufgabenbearbeitungen der Fall ist – dies ist nur ein leichter Hinweis dafür, dass das Bewusstmachen aller Phasen der Analogiebildung mit dem Erfolg der Bearbeitung zusammenhängen könnte. Betrachtet man die Ebenen der Analogiebildung, so stellt man fest, dass sich in sämtlichen Aufgabenbearbeitungen Äußerungen auf allen Ebenen der Analogiebildung finden. Dies ist ein deutlicher Hinweis dafür, dass sich

ein Problemlöseprozess mittels Analogiebildung nicht allein auf der Handlungsebene abspielen kann, sondern eine Analogiebildung auf der Strukturebene (Objekte + Relationen) mit einhergehen muss. Die weiteren Betrachtungen werden sogar durchgehend zeigen, dass die Überlegungen auf der Strukturebene den Analogiebildungen auf der Handlungsebene vorausgehen.

#### 4.4.4 Erste Auswertung der Timeline- und der ZDM-Darstellungen

In diesem und den folgenden Abschnitten werden die beiden in 4.1.2 und 4.2.1 entwickelten grafischen Darstellungsmöglichkeiten herangezogen, um die Beobachtungen zu strukturieren und für eine Interpretation aufzubereiten. Um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen, wird für die nachfolgenden Ausführungen zur Veranschaulichung bestimmter Aspekte nur jeweils eine Auswahl an Darstellungen exemplarisch abgebildet.<sup>48</sup>

Widmet man sich nun den beiden grafischen Darstellungen der betrachteten Denkprozesse, so gilt es zunächst, die Erkenntnisse aus der zweiten Voruntersuchung zu reproduzieren. Diese sollen ja den Ausgangspunkt für tiefergehende Untersuchungen und Auswertungen bilden.

In einem ersten Schritt können hierzu die Timeline-Darstellungen der 29 Aufgabenbearbeitungen als Ganzes betrachtet werden. Eine Erkenntnis aus der Voruntersuchung war (vgl. Abschnitt 4.1.2), dass die Kodierungen sich während des Denkprozesses im Wesentlichen „von unten nach oben“ entwickeln, dass also die Argumentation zum einen den Phasen der Analogiebildung folgt (erkennbar in der Timeline-Darstellung zumindest innerhalb einer Ebene). Zum anderen verfolgt der Gedankengang den Weg von der Objekt- über die Relations- hin zur Handlungsebene. Dies gilt, auch für die im Rahmen der Hauptuntersuchung aufgezeichneten Denkprozesse, in der Regel nicht strikt, aber tendenziell sowohl für sehr stringente Lösungswege, als auch für langwierige Argumentationen (vgl. Abb. 33). Ein Rückbezug auf diese Überlegungen und eine genauere Auswertung diesbezüglich erfolgen bei der Betrachtung der ZDM-Darstellungen.

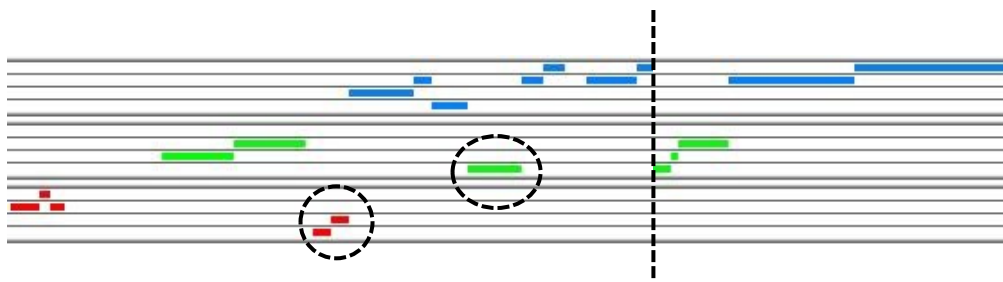
Weitere Betrachtungen der Timeline-Darstellungen ließen in der Voruntersuchung vermuten, dass deutliche Unterbrechungen der oben beschriebenen Tendenz innerhalb einer Darstellung entweder auf einen Abbruch des Gedankengangs und das Aufgreifen und Verfolgen einer neuen Idee hinweisen, oder auf eine Rückversicherung des bisher Erreichten (meist auf der Strukturebene, vgl. 4.1.2).

---

<sup>48</sup> Eine vollständige Zusammenstellung der Timeline-Darstellungen und der ZDM-Darstellungen kann auf Nachfrage beim Autor zur Verfügung gestellt werden.

Abb. 33: Timeline-Darstellungen der Bearbeitungen 004\_5 und 005\_4 <sup>49</sup>

Abbrüche des Gedankengangs und derartige Rückgriffe müssen natürlich am Transkript identifiziert und belegt werden. Die Timeline-Darstellung kann jedoch an solchen Stellen Anlass geben, das Transkript noch einmal herzunehmen und nach Signalwörtern zu untersuchen, die auf einen Abbruch des Gedankengangs oder einen Rückgriff hinweisen und möglicherweise in einem ersten Durchgang nicht als solche erkannt wurden. Exemplarisch kann dies an der Bearbeitung 001\_6 nochmals gezeigt werden (vgl. Abb. 34).

Abb. 34: Timeline-Darstellung der Bearbeitung 001\_6.  
Gerahmt: Rückversicherungen auf der Strukturebene. Gestrichelte Linie: Abbruch des Gedankengangs

Bereits die unbearbeitete Timeline-Darstellung des kompletten Denkvorgangs weist die angesprochene Tendenz „von unten nach oben“ auf. Es treten allerdings zwischendurch drei deutliche Sprünge „nach unten“ auf. Die Arbeit am Transkript macht deutlich, dass es sich bei den ersten beiden Stellen um Rückgriffe im obigen Sinne handelt, und dass die dritte Stelle auf einen Abbruch des Gedankengangs zurückzuführen ist.<sup>50</sup>

<sup>49</sup> Eindrucksvoll ist die strikte Entwicklung des Gedankengangs „von unten nach oben“ bei 004\_5 (oben), die in der Tendenz jedoch auch bei 005\_4 (unten) deutlich zu erkennen ist. Beides sind Darstellungen eines Gedankengangs, der ohne erkennbare Unterbrechung direkt zur Lösung der Aufgabe führt.

<sup>50</sup> Die vollständigen Transkripte können auf Nachfrage beim Autor zur Verfügung gestellt werden.

Die Bearbeitung 001\_6 zerfällt also in zwei Denkabschnitte, im ersten Denkabschnitt erfolgen dabei zwei Rückgriffe. Betrachtet man nun die beiden Denkabschnitte jeweils für sich und blendet dabei die Sprünge durch Rückgriffe aus, so wird die oben beschriebene Tendenz in der Timeline-Darstellung wesentlich deutlicher sichtbar.

Auf diese Weise konnten im Zusammenspiel zwischen Transkript und Timeline-Darstellung 70 verschiedene Denkabschnitte identifiziert werden (vgl. 4.4.3). Da natürlich auch die Identifikation von Abbruch- und Rückgriff-Stellen nicht vollständig objektivierbar ist, muss die Entscheidungsgrundlage im Transkript offengelegt werden. Aus diesem Grund werden im Transkript die jeweiligen Stellen deutlich hervorgehoben und mit einer knappen Argumentation versehen.

Verschafft man sich nun einen Überblick über die zugehörigen Timeline-Darstellungen, so lässt sich die beschriebene Tendenz auch für fast alle Denkabschnitte deutlich erkennen – wirkliches Fortschreiten innerhalb eines Analogiebildungsprozesses scheint also eine Entsprechung in der grafischen Darstellung zu haben. Dies ist ein erster deutlicher Anknüpfungspunkt, wenn es darum gehen soll, Analogiebildungsprozesse didaktisch aufzubereiten. Soll die Analogiebildung als heuristische Strategie eingeübt und bewusst gemacht werden, kann an diese Erkenntnis angeknüpft werden. Es können z. B. die verwendeten Aufgabenformate so gewählt werden, dass die einzelnen Ebenen bzw. die einzelnen Phasen des Analogiebildungsprozesses zunächst separat in das Blickfeld gerückt und eingeübt werden. Eine andere Möglichkeit ist es, durch entsprechende Aufgabensequenzen ein Fortschreiten im Analogiebildungsprozess zunächst bewusst anzuleiten, bevor der Lerner sich freier im Feld der Analogiebildung bewegt. Ähnlich wie beim Initiieren von Analogiebildungsprozessen zum Zwecke der hier vorliegenden wissenschaftlichen Untersuchung (vgl. 3.1.1) könnte deshalb auch beim Erlernen von Analogiebildungsfähigkeiten der Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen eine Schlüsselrolle zukommen. Konkretere Ausführungen und eine Fortführung dieses Gedankengangs werden in Abschnitt 5.2 vorgenommen.

Nachdem nun alle Denkprozesse gleichermaßen aufbereitet und in Denkabschnitte zerlegt wurden, sind an dieser Stelle die Voraussetzungen geschaffen, die nötig sind, um diese auf Grundlage der Timeline-Darstellungen miteinander zu vergleichen oder gegeneinander abzugrenzen, zu gruppieren oder zu separieren. Wie in den Abschnitten 4.1.2 und 4.2.1 beschrieben, sollen dazu die Timeline-Darstellungen zuvor als Wege im Zwei-Dimensionen-Modell dargestellt werden. So kann z. B. die Argumentation innerhalb einer Phase oder die Aufenthaltshäufigkeiten in einer bestimmten Kategorie, Phase oder Ebene besser mit in den Blick genommen werden.

Auch für die ZDM-Diagramme soll zunächst überprüft werden, ob die Beobachtungen aus der zweiten Voruntersuchung auch für die neuen Aufgabenbearbeitungen reproduziert werden können. Im Anschluss daran werden zunächst qualitative Ordnungskriterien herangezogen um die *Wege der Analogiebildung* zu klassifizieren. In einem weiteren Schritt wird

versucht, einer Gruppierung mit quantitativen Methoden nahezukommen. Neben einer ausführlichen Darstellung der Ergebnisse dieser Betrachtungen werden parallel dazu jeweils Interpretationsansätze geliefert, die in den abschließenden Betrachtungen zusammengeführt werden und in Empfehlungen zu konkreten Maßnahmen für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten münden.

Im Wesentlichen sind es zwei Beobachtungen, die während der zweiten Voruntersuchung bei einer ersten qualitativen Betrachtung der ZDM-Darstellungen auffielen und die sich nun auch in den neuen ZDM-Darstellungen manifestieren:

Zum einen lässt sich, ähnlich wie bei der Timeline-Darstellung, beim Vergleich der Graphen verschiedener Denkprozesse bzw. Denkabschnitte eine Tendenz bezüglich des Verlaufs feststellen: Die Wege der einzelnen Denkabschnitte in der ZDM-Darstellung verlaufen im Wesentlichen „von links nach rechts“ und „von unten nach oben“, insgesamt also von „links unten nach rechts oben“.

Eine genauere Auswertung der Wege im ZDM-Diagramm liefert:

- 55 Wege enden im ZDM-Diagramm weiter oben als sie begonnen haben (78,6%), nur drei Wege enden weiter unten (4,3%).
- 61 Wege enden im ZDM-Diagramm weiter rechts als sie begonnen haben (87,1%), nur einer endet weiter links (1,4%).
- 50 Wege enden im ZDM-Diagramm weiter oben und auch weiter rechts als sie begonnen haben (71,4%), nur ein Weg endet weiter unten und weiter links (1,4%).
- 66 Wege enden im ZDM-Diagramm weiter oben oder weiter rechts als sie begonnen haben (94,3%).
- 3 Wege enden im ZDM-Diagramm im gleichen Feld, in dem sie begonnen haben (4,3%).

Die Zahlen belegen eindrucksvoll, dass sich die Beobachtung aus der Voruntersuchung bezüglich des tendenziellen Verlaufs von Analogiebildungsprozessen in der ZDM-Darstellung durch die *Wege der Analogiebildung* aus der Hauptuntersuchung weiter festigen lässt. Dies bestätigt zudem nachträglich die obigen Ausführungen zum tendenziellen Verlauf der Timeline-Darstellungen.

Als zweite, noch etwas detailliertere Beobachtung zum Verlauf der Wege im ZDM-Diagramm wurde im Rahmen der Voruntersuchung festgehalten, dass ein neuer Denkabschnitt (z. B. nach einem Abbruch des Gedankengangs) sehr häufig auf der Objektebene und/oder in der Phase des Strukturierens beginnt. Auch hierzu lassen sich Zahlen angeben, die diese Beobachtung weiter stützen:



- 52 Wege im ZDM-Diagramm beginnen auf der Objektebene (74,2%).
- 48 Wege im ZDM-Diagramm beginnen mit der Phase des Strukturierens (68,6%).
- 67 Wege im ZDM-Diagramm beginnen auf der Objektebene oder mit der Phase des Strukturierens (95,7%).
- 33 Wege im ZDM-Diagramm beginnen mit der Phase des Strukturierens auf der Objektebene (47,1%).
- Nur 3 Wege im ZDM-Diagramm beginnen weder auf der Objektebene noch mit der Phase des Strukturierens (4,3%).

Als weitere bemerkenswerte Häufigkeit ergibt sich:

- 35 Wege im ZDM-Diagramm enden mit der Phase des Beurteilens auf der Handlungsebene (50,0%).

Zusammen mit den obigen Zahlen wird damit nicht nur die Tendenz der Wege im ZDM-Diagramm beschrieben, sondern auch der Ausgangspunkt der meisten Analogiebildungsprozesse genauer verortet. In der Untersuchung von Schmitt (2011) werden ZDM-Darstellungen verwendet, in denen für die betrachteten *Wege der Analogiebildung* ein „Startpunkt“ in der linken unteren Ecke und ein „Endpunkt“ in der rechten oberen Ecke des Diagramms festgelegt wird (s. Abb. 35).

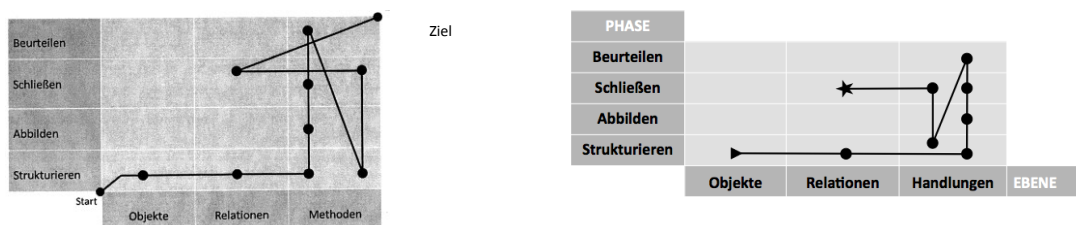


Abb. 35: ZDM-Diagramm aus Schmitt (2011, S. 37) (links).  
Übertragung auf die hier verwendete Darstellung (rechts)

Diese a priori-Festlegung kann zwar weder im Untersuchungskontext noch im Transkript, sondern nur mit der Erwartung eines entsprechenden Verlaufs allgemein begründet werden, obige Zahlen zeigen jedoch, dass die zugrundeliegende Annahme zumindest nicht völlig aus der Luft gegriffen ist: In nahezu der Hälfte aller Fälle ist das Strukturieren auf der Objektebene tatsächlich der Ausgangspunkt des betrachteten Denkabschnitts (47,1%) und der *Weg der Analogiebildung* wird sogar in der Hälfte aller Fälle mit der Phase des Beurteilens auf der Handlungsebene abgeschlossen (50,0%). Das ist umso bemerkenswerter, als es sich bei den betrachteten Wegen zum Teil um Denkabschnitte und nicht um vollständige Analogiebildungsprozesse handelt. Mit dem einzelnen Denkabschnitt beginnt also in der Regel weder der Denkprozess noch endet er an dieser Stelle. Diese Tatsache spiegelt sich darin

wieder, dass nur 14 Wege im ZDM-Diagramm mit der Phase des Strukturierens auf der Objektebene beginnen *und* in der Phase des Beurteilens auf der Handlungsebene abgeschlossen werden (20,0%). Eine genauere Analyse zeigt zudem, dass drei dieser 14 Wege zu den neun Denkprozessen gehören, die durch die Kodierung nicht in weitere Denkabschnitte zerfallen und elf der Wege jeweils Teil eines Denkprozesses sind. Zusammen mit den vorherigen Betrachtungen wird dadurch vor allem deutlich: Der Verlauf eines Analogiebildungsprozesses im ZDM-Diagramm ist in seiner Richtung sowie seinem Ausgangs- und Endbereich weitgehend festgelegt. Dabei spielt es nur eine untergeordnete Rolle, ob es sich um einen vollständigen Analogiebildungsprozess handelt oder um einen Denkabschnitt, der nur einen Teil des Denkprozesses darstellt. Die tatsächlichen Unterschiede liegen damit im Wesentlichen im Weg selbst. Damit ist ein Anknüpfungspunkt hergestellt, der es erlaubt, einzelne Denkabschnitte auch losgelöst von dem Denkprozess, dessen Teil sie sind, zu untersuchen. Wie genau dies geschieht, wird in Abschnitt 4.4.5 erläutert.

In Abbildung Abb. 36 werden die vorangegangenen Betrachtungen an mehreren Beispielen vergleichend illustriert.

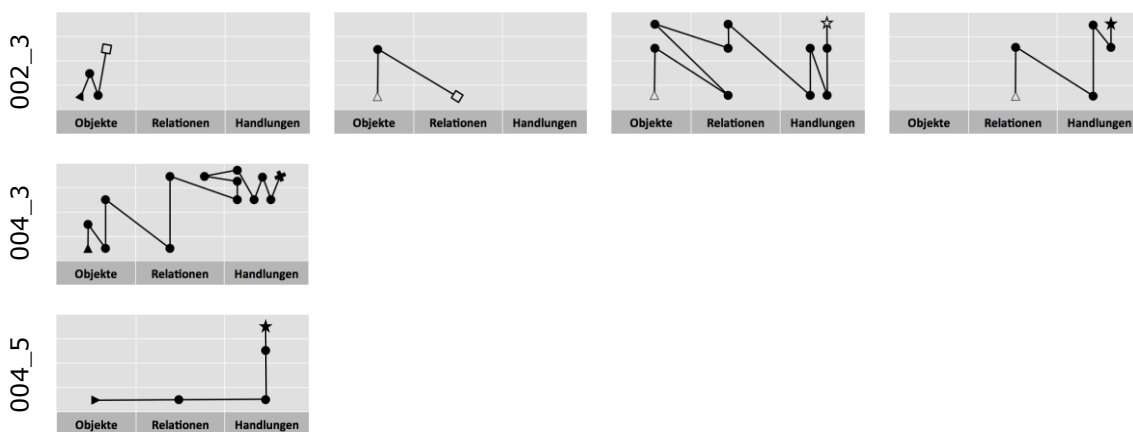


Abb. 36: ZDM-Diagramme verschiedener Analogiebildungsprozesse

Alle abgebildeten Analogiebildungsprozesse beginnen mit dem Strukturieren auf der Objektebene und werden mit dem Beurteilen auf der Handlungsebene abgeschlossen. Während der Denkvorgang 002\_3 durch die Kodierung in vier Denkabschnitte zerfällt, sind 004\_3 und 004\_5 Denkprozesse ohne weiteren Bruch. In allen Abbildungen ist die Tendenz der Darstellung „von unten links nach oben rechts“ deutlich zu erkennen. Für den Denkprozess 002\_3 gilt dies im Ganzen, aber auch für die einzelnen Denkabschnitte, von denen einer sogar wiederum die beiden genannten Start- und Endpunkte aufweist (002\_3\_3). Vergleicht man nun die zwei Denkabschnitte 004\_3\_1 und 004\_5\_1 miteinander, so nehmen die Wege trotz übereinstimmendem Anfangs- und Endpunkt und erkenn-

bar gleicher Tendenz in der ZDM-Darstellung doch einen deutlich unterschiedlichen Verlauf. Es fällt auf, dass der Weg 004\_3\_1 dem Verlauf nach eher mit dem Weg 002\_3\_3 vergleichbar zu sein scheint. Bei beiden Wegen gehen den Argumentationen auf der Handlungsebene nahezu vollständige Analogiebildungen auf der Objekt- und auf der Relationsebene voraus. Im Vergleich dazu zeigt der Weg 004\_5\_1, dass hier dem Strukturieren auf allen Ebenen sofort die Analogiebildung auf der Handlungsebene folgt, ohne dass auf der Objekt- und Relationsebene weitere Phasen durchlaufen wurden. Dies wiederum zeigt eher eine Ähnlichkeit zum Weg 002\_3\_4. In den nachfolgenden Abschnitten wird es die Aufgabe sein, derartige Ähnlichkeiten zu erkennen, deren Bedeutung für den Analogiebildungsprozess offenzulegen und Schlussfolgerungen für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten zu ziehen.

Die beiden eben dargelegten Aspekte zum Verlauf von *Wegen der Analogiebildung* im ZDM-Diagramm wurden in den Vorüberlegungen als Argumente herangezogen, mit denen die Verwendung der Aufenthaltsmatrizen begründet und als aussagekräftig erkannt wurde (vgl. 4.2.2). Die dortige Argumentation kann somit aufrecht erhalten werden. Ob sich die beschriebenen augenscheinlichen Ähnlichkeiten von Wegen auch in den Gruppierungen einer quantitativen Analyse wiederfinden lassen, kann also mit Hilfe der Aufenthaltsmatrizen untersucht werden.

Auf der Grundlage obiger Überlegungen kann weiter ausgesagt werden, dass die Phasen der Analogiebildung während des Denkprozesses zumindest tendenziell in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden und dass auch hinsichtlich der Ebenen eine zeitliche Abfolge von Argumenten auf der Objekt- über die Relations- hin zur Handlungsebene tendenziell zu erkennen ist. Das Zwei-Dimensionen-Modell scheint also schlüssige Darstellungen und erkennbare Muster zu liefern, ohne dabei im Widerspruch zu den theoretischen Grundlagen und den darin verankerten Forschungsergebnissen zu stehen. Darüber, ob alle Phasen durchlaufen werden, oder ob sich die Argumentation auf alle Ebenen der Analogiebildung erstreckt, kann aus obigen Betrachtungen alleine keine Aussage gemacht werden. Ob dies überhaupt immer der Fall ist, wird beispielsweise von Gentner (1989) bezweifelt (vgl. Abschnitt 1.4.2). Für ganze Denkvorgänge wurden diesbezügliche Auswertungen in Abschnitt 4.4.3 ausführlich dargelegt.

#### **4.4.5 Phasen der Analogiebildung in den ZDM-Darstellungen**

In 4.4.4 wurde begründet, warum die Untersuchung und der Vergleich einzelner Denkabschnitte auch dann weiterführende Erkenntnisse liefern können, wenn die Abschnitte nicht den vollständigen Analogiebildungsprozess im Rahmen einer Aufgabenlösung darstellen. Insbesondere gilt dies auch dann, wenn sie nicht Teil der selben Aufgabenbearbeitung sind. Auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells interessiert vor allem die Frage, welche

Bedeutung die einzelnen Ebenen bzw. die einzelnen Phasen für den Analogiebildungsprozess haben. Es werden deshalb im Folgenden Denkabschnitte miteinander in Beziehung gesetzt, deren Gemeinsamkeit sich auf eine Phase oder eine Ebene des Analogiebildungsprozesses beziehen lassen. Im Abschnitt 4.2.1 wurde bereits herausgearbeitet, dass die Darstellung der Denkabschnitte als Wege im ZDM-Diagramm gut geeignet ist, um derartige Zusammenhänge zu entdecken: Bewegt sich die Argumentation des Denkabschnitts innerhalb einer Phase des Analogiebildungsprozesses und deckt dabei mehrere Ebenen ab, so wird dies als horizontaler Verlauf des Weges im ZDM-Diagramm erkennbar. Wird hingegen innerhalb einer Ebene argumentiert und werden dabei mehrere Phasen durchlaufen, so verläuft der Weg vertikal. Ob es in jeder Phase horizontale Bewegungen bzw. auf jeder Ebene vertikale Bewegungen gibt und welche Bedeutung diese Phänomene ggf. für den gesamten Denkprozess haben, sind zwei Fragen, die es im Folgenden zu beantworten gilt. Eine weitere Frage wird sein, ob sich aus diesen Überlegungen sinnvolle Gruppierungen innerhalb der Denkabschnitte herausarbeiten lassen, aus denen Erkenntnisse über Analogiebildungsprozesse im Allgemeinen gewonnen werden können.

#### Phase I: Strukturieren

Als erste Gruppe werden Denkabschnitte betrachtet, die sich ausschließlich oder vorwiegend auf das Strukturieren in den verschiedenen Ebenen beschränken.

Die Denkabschnitte aus Abb. 37 bewegen sich ausschließlich in der Phase des Strukturierens. Auffällig ist, dass alle drei Wege den Beginn eines Denkprozesses darstellen, der in mehrere Denkabschnitte zerfällt. Es werden also hier zunächst die Gegebenheiten im Ausgangs- und im Zielbereich vollkommen separat betrachtet, bevor in einem neuen Denkabschnitt die Phase des Strukturierens verlassen und ein Zusammenhang beschrieben wird, der für die Bearbeitung des Problems im Zielbereich genutzt werden kann.

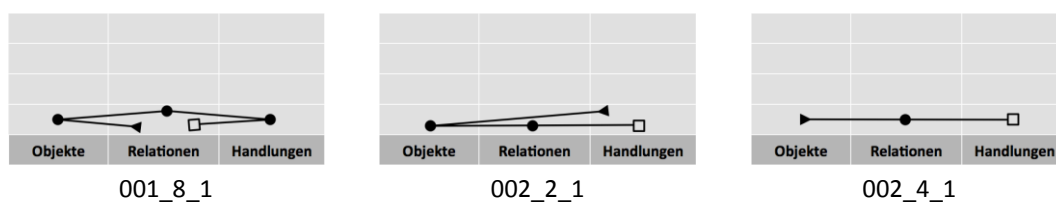


Abb. 37: Wege im ZDM-Diagramm, die sich ausschließlich in der Phase des Strukturierens bewegen

Bezogen auf die ZDM-Darstellungen kommen die beiden Denkprozesse 002\_1 und 002\_4 im nächsten Schritt auf ganz ähnlichem Weg zum Ziel und führen auf ein – wenn auch falsches – Endergebnis (vgl. Abb. 38). Beide beginnen dabei mit Analogisierungen auf der Objektebene, bevor über den Zwischenschritt zusätzlicher Strukturierungen die Argumentation auf der Handlungsebene abgeschlossen wird. Der Analogiebildungsprozess 002\_8 hingegen verlässt zunächst die Phase des Strukturierens und stellt auf allen Ebenen Zu-

sammenhänge zwischen Ausgangs- und Zielbereich her. Erst dann wird ein ähnlicher Weg wie in 002\_2\_2 und 002\_4\_2 beschriftet, der schließlich mit ausführlichen Argumentationen auf der Handlungsebene ebenfalls zum Ziel führt – es kann ein Endergebnis angegeben werden, das jedoch auch in diesem Fall nicht korrekt ist. Interessant ist hier ein Blick in die Transkripte: Sowohl in 002\_2 also auch in 001\_8 kommen die Probanden im Verlauf der Argumentation auf das korrekte Ergebnis, können dieses jedoch im Sachzusammenhang nicht als Endergebnis interpretieren.

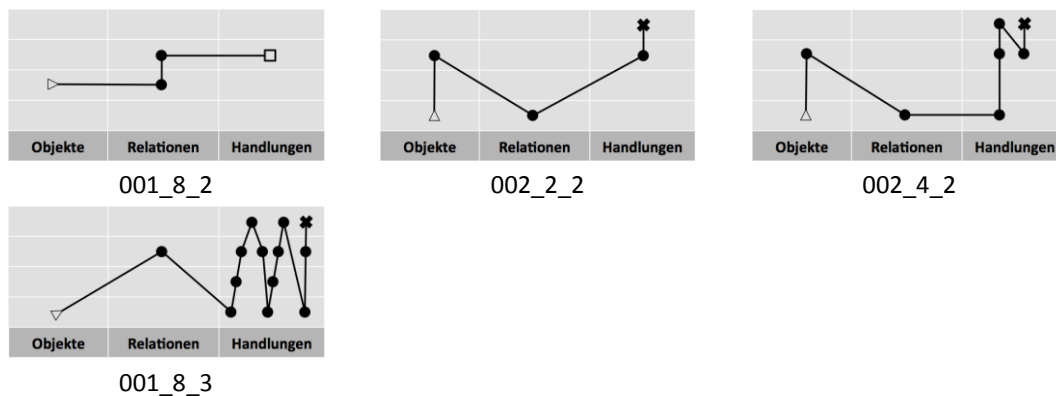


Abb. 38: Fortsetzung der Gedankengänge aus Abb. 37 (von oben nach unten gelesen)

Ein weiterer Denkabschnitt, der zu 001\_8\_1, 002\_2\_1 und 002\_4\_1 gruppiert werden kann, ist 003\_4\_2 (vgl. Abb. 39, links). Hier handelt es sich zwar nicht um den Start eines Analogiebildungsprozesses, allerdings verrät der Blick ins Transkript, dass in 003\_4 nach einigen Vorüberlegungen (003\_4\_1) der Gedankengang abgebrochen wird. Es wird anschließend ein gelöstes Aufgabenbeispiel hergenommen und ausführlich auf allen Ebenen erläutert (003\_4\_2). Davon ausgehend erfolgen schließlich die weiteren Überlegungen (003\_4\_3 und 003\_4\_4).

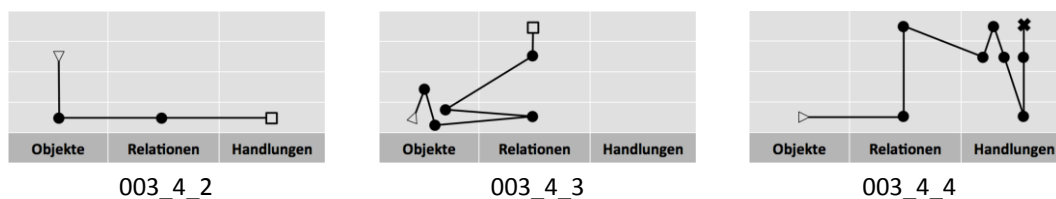


Abb. 39: Ein weiterer Denkprozess, der (im Grunde) mit einem Denkabschnitt in der Phase des Strukturierens beginnt, ist 003\_4.

Neben diesen Denkabschnitten, die sich fast ausschließlich auf die Phase des Strukturierens beschränken und dann abgebrochen werden, gibt es Abschnitte, bei denen ebenfalls der Schwerpunkt auf dem Strukturieren liegt, bei denen jedoch auch Vorstöße in andere Phasen des Analogiebildungsprozesses auftreten. Es werden bei diesen Denkprozessen also

wieder vorwiegend Ausgangs- und Zielbereich separat betrachtet, es werden allerdings an einigen Stellen auch Zusammenhänge zwischen den beiden Bereichen hergestellt (vgl. Abb. 40).

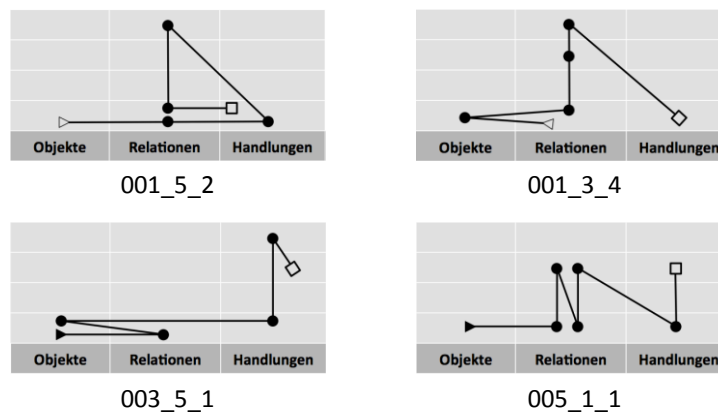


Abb. 40: Denkabschnitte, die ihren Schwerpunkt in der Strukturierungsphase haben.

Es handelt sich bei allen vier Denkabschnitten um Teile eines Denkprozesses, der danach noch nicht abgeschlossen ist. Abschnitte 003\_5\_1 und 005\_1\_1 markieren wieder den Beginn eines Denkprozesses. Bei 001\_5\_2 und 003\_5\_1 fällt auf, dass zunächst wieder Strukturierungen auf allen Ebenen vorgenommen werden, bevor Beziehungen zwischen Ausgangs- und Zielbereich hergestellt werden. In dieser Hinsicht können die beiden Denkabschnitte mit denen aus Abb. 37 verglichen werden. Anders als bei diesen wird der Gedankengang allerdings nicht unterbrochen nachdem diese Strukturierungen vorgenommen sind, sondern er wird weitergeführt und es werden erste Beziehungen zwischen Ausgangs- und Zielbereich hergestellt. Auffällig ist auch, dass bei den Abschnitten 001\_5\_2, 001\_3\_4 und 005\_1\_1 die Loslösung von der Strukturierungsphase und die Zuwendung zu den Zusammenhängen zwischen Ausgangs- und Zielbereich auf der Relationsebene erfolgt. Da diese Ebene hier deutlich im Zentrum der Argumentation steht, werden diese Denkabschnitte auch dann wieder eine Rolle spielen, wenn es darum geht, den Blick auf die Ebenen der Analogiebildung zu richten.

Eine weitere Gruppe von Denkabschnitten, die an dieser Stelle mit ins Blickfeld gerückt werden sollen, sind diejenigen Denkabschnitte, die ausgehend von knappen strukturierenden Überlegungen auf verschiedenen Ebenen den Denkprozess direkt abschließen (vgl. Abb. 41). Auffällig ist hier, dass die Wege nach den strukturierenden Überlegungen (meist) auf allen Ebenen sämtlich ohne große Umwege auf der Handlungsebene abgeschlossen werden können. Vergleicht man diese vollständigen Denkprozesse mit den bisher betrachteten Denkabschnitten, so lässt sich weiter eine Ähnlichkeit zwischen den Wegen aus Abb. 41 und den Wegen von 002\_2\_2 und 002\_4\_2 aus Abb. 38 feststellen. Dies waren aber gerade die Fortsetzungen der zuerst betrachteten Denkabschnitte, die nach rein strukturierenden Überlegungen auf allen Ebenen zunächst abgebrochen wurden.

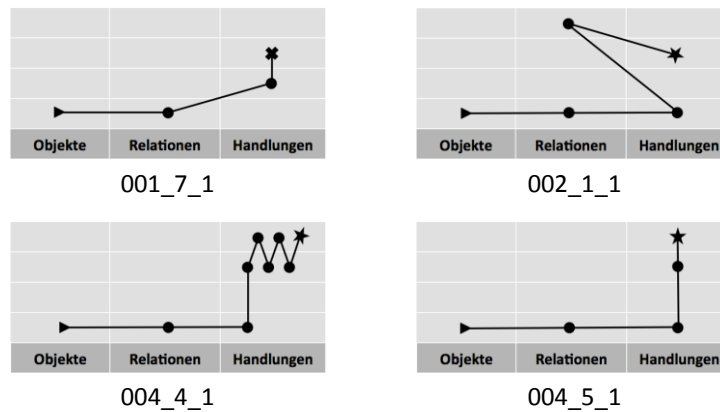


Abb. 41: Denkabschnitte, die ausgehend von knappen strukturierenden Überlegungen direkt abgeschlossen werden.

Zuletzt lässt sich feststellen, dass die Denkabschnitte 004\_4\_1 und 004\_5\_1 nach den Überlegungen in der Phase des Strukturierens ausschließlich auf der Handlungsebene argumentieren, ohne nochmals auf die Zusammenhänge zwischen Objekten und Relationen zurückzugreifen. Beim Blick in die beiden Transkripte wird deutlich: Es handelt sich jeweils um sehr zielstrebige Analogiebildungsprozesse, die auch souverän zum korrekten Ergebnis führen.

Insgesamt zeigt sich also, dass bei vielen der beobachteten Analogiebildungsprozesse die Probanden deutlich strukturierende Überlegungen an den Anfang stellen, bevor Beziehungen zwischen Ausgangs- und Zielbereich hergestellt und zum Lösen des Problems im Zielbereich genutzt werden.

### Phase II: Abbilden

Die Phase des Abbildens wird in den Vorüberlegungen beschrieben als die Phase, in der Beziehungen zwischen Ausgangs- und Zielbereich hergestellt werden, ohne dass dabei bereits Schlussfolgerungen (im Zielbereich) gezogen werden. Wie in 4.4.3 bereits dargelegt, ist es diese Einschränkung, die eine zweifelsfreie Zuordnung zur Phase des Abbildens erschwert. Oft sind es nur Halbsätze, die eindeutig zugeordnet werden können, weil sie direkt mit Schlussfolgerungen einhergehen, oder weil das Abbilden die Weiterführung eines Strukturierungsprozesses darstellt. Deshalb finden sich in Denkabschnitten, bei denen die Phase des Abbildens auftritt, typischerweise direkt vorausgehend Strukturierungen, oder direkt nachfolgend Schlussfolgerungen und Beurteilungen auf der selben Ebene. Anders als in der Phase des Strukturierens finden sich deshalb in der Phase des Abbildens kaum horizontale Bewegungen im ZDM-Diagramm. In Abb. 42 wird dies anhand einiger Beispiele illustriert.

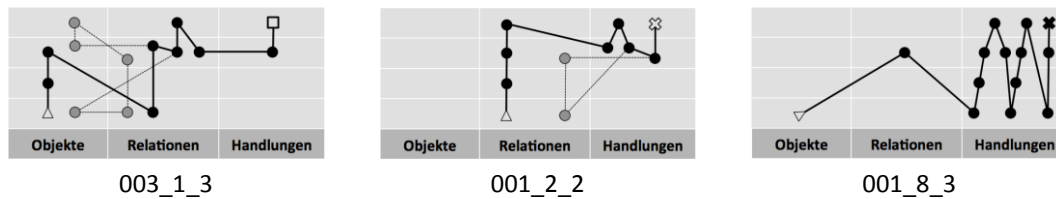


Abb. 42: Denkabschnitte, bei denen die Phase als Teil der Analogiebildung innerhalb einer Ebene auftritt.

Aus den ZDM-Darstellungen der abgebildeten Denkabschnitte wird deutlich, dass die Phase des Abbildens als Teil der Analogiebildung innerhalb einer Ebene kodiert wurde. In Diagramm 003\_1\_3 ist dies die Objektebene, in 001\_2\_2 die Relationsebene und in 001\_8\_3 die Handlungsebene – hier wird die Ebene sogar mehrfach durchlaufen. Für alle drei abgebildeten Denkabschnitte ist offensichtlich, dass an dieser Stelle die vertikale Wegrichtung maßgeblich für den Verlauf des Analogiebildungsprozesses ist. Betrachtet man weitere Denkabschnitte, in denen eine Kodierung für die Phase des Abbildens auftritt, so scheint dieser Verlauf charakteristisch zu sein und ist auch mit Blick auf die theoretischen Grundlagen nachzuvollziehen. Auch wenn es einzelne Ausnahmen gibt (z. B. 005\_5\_2 oder 001\_8\_2), wird deutlich, dass Analogiebildungsprozesse in der Phase des Abbildens in der Regel nicht „horizontal“ verlaufen. Die Phase des Abbildens hat also eher eine Brückenfunktion, um auf einer bestimmten Ebene von der Phase des Strukturierens in die Phase des Schließens zu gelangen. Argumentationen, die sich in der Phase des Abbildens über mehrere Ebenen erstrecken, sind, anders als in der Phase des Strukturierens, eher die Ausnahme.

Phasen III und IV: Schließen und Beurteilen

Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Phasen kann ganz ähnlich beschrieben werden, wie der Zusammenhang der ersten beiden Phasen, des Strukturierens und des Abbildens. In die Phase und aus der Phase des Schließens führen häufig „horizontale oder diagonale“ Wege im ZDM-Diagramm (vgl. Abb. 43).

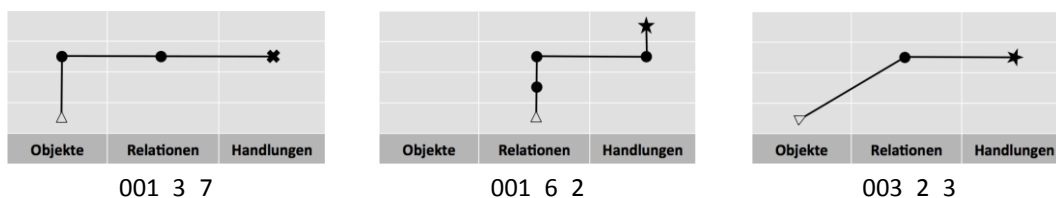


Abb. 43 : „Horizontale und diagonale“ Wege in der Phase des Schließens



Entsprechende Wege in der Phase des Beurteilens sind dagegen die Ausnahme. Typisch ist hier der vertikale Verlauf zumindest beim Eintritt in diese Phase: Dem Beurteilen der Analogiebildung auf einer bestimmten Ebene geht nahezu ausnahmslos das Schließen auf dieser Ebene voraus (vgl. Abb. 44). In 001\_3\_5 erkennt man dieses Phänomen auf der Relations- und auf der Handlungsebene. Zieht man den Rückgriff aus 003\_1\_3 mit ein, erkennt man die Reihenfolge „Schließen-Beurteilen“ in 001\_5\_4 und 003\_1\_3 sogar jeweils auf allen Ebenen.

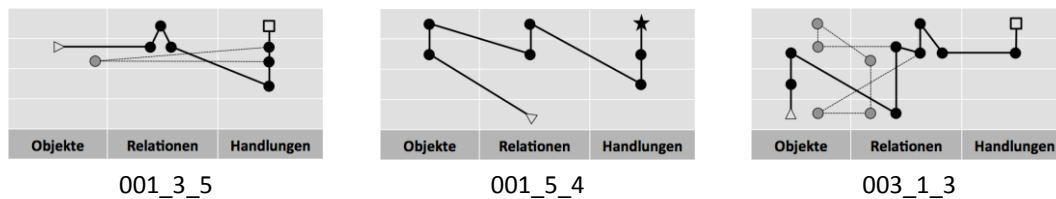


Abb. 44: Der Phase des Beurteilens geht nahezu immer eine Phase des Schließens auf der gleichen Ebene voraus.

Diese Beobachtungen sind auch hier aus theoretischer Sicht erklärbar: Ist der Analogiebildungsprozess so weit fortgeschritten, dass die wesentlichen Zusammenhänge zwischen Ausgangs- und Zielbereich auf verschiedenen Ebenen erfasst wurden, so können Schlussfolgerungen gezogen werden. Diese beschränken sich häufig nicht auf eine Ebene, so dass horizontale Wege im ZDM-Diagramm entstehen. Zudem müssen den Schlussfolgerungen auf einer Ebene dann nicht zwingend Argumentationen auf der gleichen Ebene vorausgehen, es kommen also auch „diagonale Wege“ vor, die in die Phase des Schließens münden. In der Phase des Beurteilens liegt jedoch die Vermutung nahe, dass sich die jeweilige Beurteilung auf eine direkt zuvor formulierte Schlussfolgerung bezieht. Der Blick in die Transkripte vermag das an vielen Beispielen zu bestätigen. Exemplarisch wird dieses Phänomen nachfolgend an einem Transkriptausschnitt des Videos 005\_2 illustriert. Der Phase des Schließens auf der Relationsebene (Z. 6-10) folgt direkt die Beurteilung des Schlusses (Z. 11). Den vorgenommenen Operationen im Zielbereich (Z. 13-15 und Z. 17/18) folgt jeweils direkt die Begründung für deren Richtigkeit (Z. 16 bzw. Z. 19).

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien | Kodierung |
|---|------------------|-----------|
| 6 S2: Also von ihrem gesamten Geld, also die schönen Teelichter, jedes kostet 1/15 von ihrem gesamten Geld. |                  | Sch_R     |
| 7 S2: Und, ja die ...   |                  | ==        |
| 8 S1 (schreibt): ...1/15 Geld für die Teelichter, ...   |                  | ==        |
| 9 S2: Ja und die Engel kosten 1/10 von ihrem Geld.  | dok_txt          | ==        |
| 10 S2: Zusammen, wenn sie ...   |                  | ==        |

|   |        |       |
|---|--------|-------|
| 11 S2: ... weil jede Freundin bekommt zusammen ja beide.                | dok_re | Beu_R |
| 12 S2: Also für beides braucht sie 4/30, oder?                          |        | Sch_R |
| 13 S1: Wir addieren das auf 3/30 und das sind 2/30, also sind das 5/30. |        | Sch_H |
| 14 S2: Ja, stimmt, ja.  |        | ==    |
| 15 S1: Also sind das 1/6.   |        | ==    |
| 16 S2: Additionsregel ...!  |        | Beu_H |
| 17 S1: Also kann sie sechs von ihren Freundinnen versorgen.             |        | Sch_H |
| 18 S2: Ja.  |        | ==    |
| 19 S1: Weil wir wieder den Kehrwert bilden ... 1/6 Geld.                |        | Beu_H |
| 20 S2: Ja, oder 1 Geld durch 1/6 Geld sind 6 Freundinnen...             |        | ==    |
| 21 S2: ... die sie beschenken kann.                                     |        | ==    |

Als besonders typisch für die Phasen Schließen und Beurteilen erweist sich ein Verlauf, der sich durch den mehrfachen Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen innerhalb einer Ebene (entweder der Relations- oder der Handlungsebene) auszeichnet (vgl. Abb. 45).

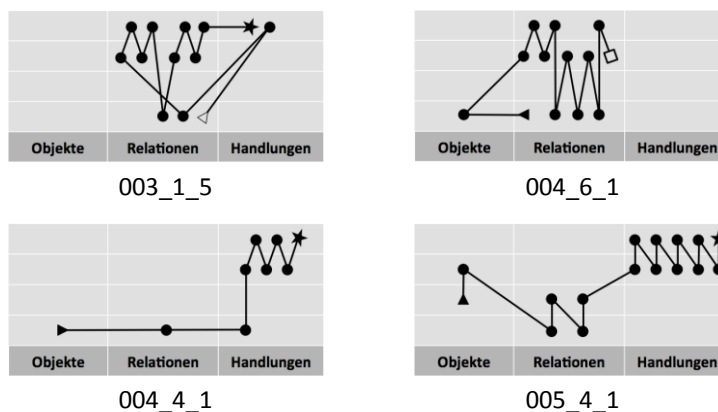


Abb. 45: Der mehrfache Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auf der Relationsebene (003\_1\_5 und 004\_6\_1) oder auf der Handlungsebene (004\_4\_1 und 005\_4\_1) ist besonders typisch für den Abschluss eines Analogiebildungsprozesses.

Der häufige Wechsel zwischen den beiden Phasen auf der Handlungsebene scheint typisch für den Abschluss eines Analogiebildungsprozesses zu sein, wie viele weitere Beispiele zeigen (z. B. 003\_5\_1, 004\_1\_1, 004\_3\_1, u. a.). Auch dies ist mit Blick auf die konkreten Aufgabenbearbeitungen zu erklären: Ist die Analogie auf Objekt- und Relationsebene erkannt, sind auf der Handlungsebene meist mehrere Operationen zu analogisieren. Jede Operation wird im Rahmen der Argumentation eigens vor dem Hintergrund der verwendeten Analogie begründet – es ergibt sich ein Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen auf der Handlungsebene.

Manche Denkabschnitte zeigen diesen Wechsel sogar sowohl auf der Relations- als auch auf der Handlungsebene (vgl. Abb. 46):

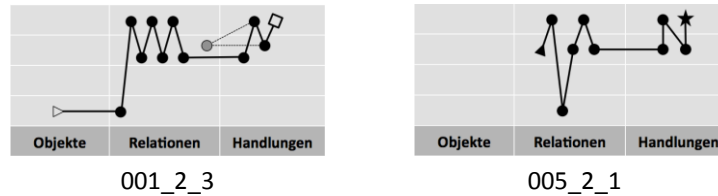


Abb. 46: Der charakteristische mehrfache Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen innerhalb eines Denkprozesses sowohl auf der Relationsebene als auch auf der Handlungsebene

Es wird deutlich, dass zwar die Phase des Schließens für sich alleine betrachtet werden kann, die Phase des Beurteilens jedoch erwartungsgemäß stark an die Phase des Schließens gekoppelt ist. Auffällig ist zudem, dass der mehrfache Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen auf der Relations- oder Handlungsebene häufig dann auftritt, wenn die Analogie im Wesentlichen erfasst ist und es darum geht, die notwendigen Operationen vorzubereiten oder durchzuführen. Das mehrfache Beurteilen der verwendeten Analogieschlüsse hilft dabei, den Gedankengang abzusichern und aufrecht zu erhalten. Abbrüche des Gedankengangs erfolgen dann kaum noch, die Aufgabenbearbeitung kann häufig erfolgreich abgeschlossen werden. Insgesamt weisen zwölf der 19 erfolgreichen Analogiebildungsprozesse einen solchen mehrfachen Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen auf. Aus einigen Transkripten wird ersichtlich, dass ein zunächst unsicheres Herangehen an die Analogisierung der notwendigen Operationen durch wiederholte Beurteilung und Begründung der eigenen Vorgehensweise und der erhaltenen Resultate stabilisiert werden konnte und schließlich zu einem Ergebnis führte. In Video 004\_2 etwa erkennen die Probanden durch das ständige Hinterfragen der eigenen Resultate im Sachzusammenhang zunächst einen Fehler (004\_2\_2). Dieser wird im nächsten Denkabschnitt behoben. Dabei hilft wiederum das immerwährende Beurteilen der verwendeten Schlussfolgerungen, um schließlich die Richtigkeit des Ergebnisses einschätzen zu können (004\_2\_3).

#### 4.4.6 Ebenen der Analogiebildung in den ZDM-Darstellungen

Bis hierhin wurden die Wege im ZDM-Diagramm vor allem hinsichtlich der Phasen der Analogiebildung analysiert. Es konnte auf der erhobenen Datengrundlage die Frage beantwortet werden, auf welche Weise Analogiebildungsprozesse in eine bestimmte Phase eintreten bzw. wie die Wege im Anschluss an das Durchlaufen einer bestimmten Phase aussehen können. Weiter wurden die auftretenden Muster und Phänomene auf ihre Bedeutung für den gesamten Analogiebildungsprozess hin untersucht. Auf dieser Grundlage können später Schlussfolgerungen für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten gezogen und



|    |   |  |       |
|----|---|--|-------|
| 4  | S1: Ja.   |  | ==    |
| 5  | S1 (schreibt)   |  | ==    |
| 6  | S1: Und man sucht jetzt praktisch noch eine Invariante.   |  | ==    |
| 7  | S1: Das ist praktisch das, was du damit erfüllen willst. Also hier jetzt, wenn du eine Walze hast für eine Fläche, dann ist also die gesamte Fläche die es einmal gibt ist dann die Invariante. |  | ==    |
| 8  | S1: Das heißt in dem Fall jetzt wahrscheinlich die Arbeits...   |  | Str_O |
| 9  | S1: ... die Leistung denke ich, die die bringen.  |  |       |
| 10 | S2: Und dass die Arbeitszeit gleich ist?  |  | Sch_O |
| 11 | S1: Das ist auch ne ... keine Ahnung!   |  | ==    |
| 12 | S1: Naja, ich denk mal die Invariante ist halt die Lücke die man füllen muss mit so einer Arbeitskraft.   |  | ==    |

Interessant ist hier auch der weitere Verlauf des Denkprozesses, dessen ZDM-Darstellung sich in Abb. 48 findet. Auch die nachfolgenden Denkabschnitte beginnen mit Betrachtungen auf der Objektebene, scheinen sich aber Stück für Stück auf die Relations- und die Handlungsebene „voranzutasten“ und führen schließlich zum Erfolg.

Ein ganz ähnliches Muster, also einen Analogiebildungsprozess, der sich zunächst auf der Objektebene bewegt, seinen Schwerpunkt im ZDM-Diagramm dann aber in mehreren Denkabschnitten immer weiter „nach rechts“ verlagert, um auf der Handlungsebene zum Abschluss zu kommen, findet sich häufiger: Auch der Analogiebildungsprozess 003\_2, dessen erster Abschnitt 003\_2\_1 in Abb. 47 (rechts) abgebildet ist, oder die Gedankengänge 003\_4 und 001\_5 entwickeln sich auf diese Weise und kommen zu einem erfolgreichen Abschluss.

Für einen erfolgreichen Analogiebildungsprozess ist in diesen Fällen eine gründliche Analyse der Analogie auf der Objektebene eine gute Vorbereitung, um die Überlegungen anschließend auf den anderen Ebenen fortzuführen. Dies ist eine Beobachtung, die auch für das Lernen von Analogiebildungsfähigkeiten Berücksichtigung finden kann (vgl. 5.2).

#### Der Übergang von der Objektebene auf die Relationsebene

Eine ganze Reihe von Denkabschnitten zeigt den oben bereits beschriebenen Übergang von der Objektebene auf die Relationsebene. Typischerweise sind dies Denkabschnitte, denen bereits einige Überlegungen auf der Objektebene vorausgegangen sind, mit denen der Denkprozess aber noch nicht abgeschlossen ist (vgl. Abb. 48):

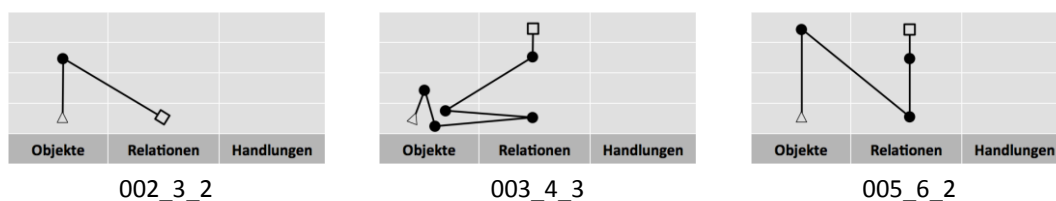


Abb. 48: Der Übergang von der Objekt- auf die Relationsebene

Die Relationsebene

Die Auswahl an Denkabschnitten, die einen Schwerpunkt auf der Relationsebene haben, ist vielfältig. Abschnitte, die sich im Wesentlichen auf die Relationsebene beschränken (wie z. B. 004\_6\_1 und 004\_6\_2), kommen allerdings kaum vor. Bemerkenswert ist jedoch, dass sich immer wieder Wege im ZDM-Diagramm ergeben, bei denen die Relationsebene vollständig (oder fast vollständig) durchlaufen wird, um anschließend auf der Handlungsebene fortgeführt zu werden (vgl. Abb. 49).

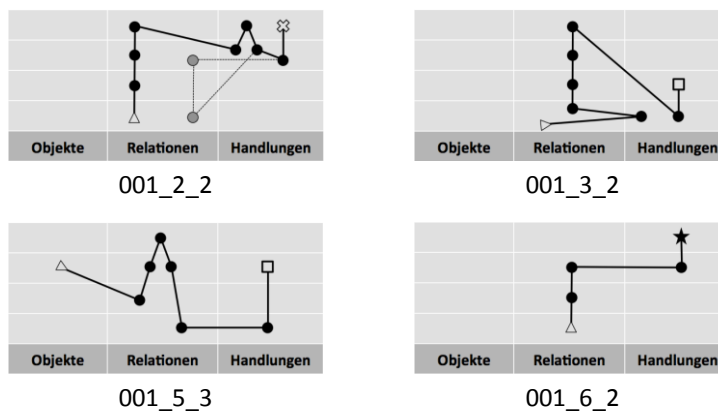


Abb. 49: Wege, die auf der Relationsebene die Phasen vollständig (oder fast vollständig) durchlaufen, um anschließend auf der Handlungsebene weitergeführt zu werden.

Auch hier sind dies typischerweise Wege, denen bereits eingehendere Betrachtungen auf der Objektebene vorausgehen. Neben der obigen Gruppe von Denkabschnitten, bei denen das strikte Durchlaufen aller Phasen auffällt, findet man noch eine zweite Gruppe von Denkabschnitten, die bereits im Zusammenhang mit den Phasen der Analogiebildung in 4.4.5 beschrieben wurde und sich durch mehrfache Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auszeichnet. Fasst man diese Gruppe von Denkabschnitten hinsichtlich der Relationsebene noch etwas weiter, so ergibt sich eine Zusammenstellung von Wegen, die sich durch starke Bewegung innerhalb der Relationsebene auszeichnen. Zu den bereits in Abschnitt 4.4.5 gezeigten Denkabschnitten 003\_1\_5, 004\_6\_1 oder 001\_2\_3 und 005\_2\_1 (vgl. Abb. 45 und Abb. 46) können damit z. B. auch die Denkabschnitte 003\_1\_3, 004\_6\_2 und 005\_3\_1 gruppiert werden (vgl. Abb. 50):

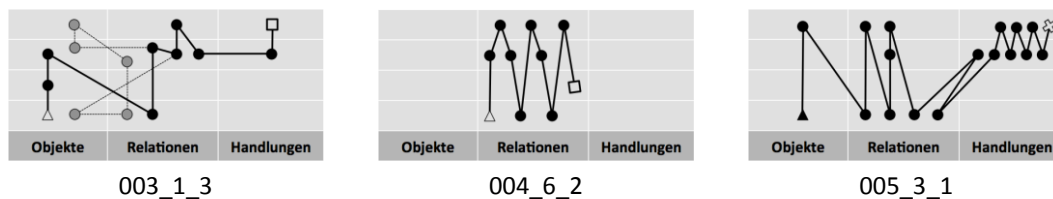


Abb. 50: Starke Bewegung innerhalb der Relationsebene

Ein Blick in die entsprechenden Transkripte verrät, dass hier auf der Relationsebene zunächst verschiedene Relationen analogisiert werden und ein Ringen um die korrekten Zusammenhänge im Zielbereich stattfindet, bevor sich die Analogiebildung auch auf die Handlungsebene erstreckt. Der nachfolgende Auszug aus dem Transkript zu Denkabschnitt 003\_1\_3 (Z. 28-48) macht dies deutlich:

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien | Kodierung |
|--|------------------|-----------|
| 28 S1: Und die Geschwindigkeit ist ja halt die Strecke praktisch durch die Zeit.                       |                  | Str_R     |
| 29 S2: Richtig.  |                  | ==        |
| 30 S1: Das heißt v_WG ist ja dann praktisch ...  | dok_txt          | ==        |
| 31 S1: ... s durch t. und das ist ja praktisch, ...  |                  | Sch_R     |
| UNTERBRECHUNG des Gedankengangs und Rückversicherung bzgl. der Analogie auf Objekt- und Relationsebene |                  |           |
| 32 S1: Ich denke s ist ja die Invariante, das heißt die ist ja 1.                                      |                  | Sch_O     |
| 33 S1: Ist ja eine Straße.   |                  | Beu_O     |
| 34 S2: Ja.   |                  | ==        |
| 35 S1: Das heißt, dann hab ich praktisch 1 durch 1/12 (schreibt 1/12h).                                |                  | Sch_R     |
| 36 S2: Bzw. s durch 1/12.  |                  | ==        |
| 37 S1: Nein s ist doch 1 - die Strecke ist doch 1, oder?   |                  | Str_R     |
| 38 S1: Weil die Invariante ist ja insgesamt eine Straße.   |                  | Sch_O     |
| WIEDERAUFGREIFEN des Gedankengangs von oben  |                  |           |
| 39 S2: Dann haben wir eine Straße.   |                  | Sch_R     |
| 40 S1: Dann haben wir 1/12 km/h - nein, ja halt ... 1/12 pro Stunde.                                   |                  | Beu_R     |
| 41 S2: 1/12 Straße pro Stunde.   |                  | ==        |
| 42 S2: Bei der großen Walze haben wir 1/12 Straße pro Stunde.  |                  | ==        |
| 43 S1: Und bei der kleinen Walze ...   |                  | Sch_R     |
| 44 S2: ...haben wir nur 1/4 von der Zwölfstel Straße pro Stunde.                                       |                  | ==        |
| 45 S1: Und dann ist ja die gemeinsame halt ... 1/4 plus 1/12, ja o.k. (schreibt)                       | dok_re           | Sch_H     |
| 46 S1: Und das sind dann halt 1/3. Ja?   |                  | Sch_H     |
| 47 S2: Nein.   |                  | Beu_H     |
| 48 S1: Das ergibt doch alles keinen Sinn ...   |                  | ==        |

Nach dem Herstellen der ersten Zusammenhänge (Z. 28-31) tritt Verunsicherung auf – der Gedankengang wird zunächst unterbrochen und es werden erst Überlegungen auf der Objektebene angestellt (Z. 32-34), bevor weitere Relationen im Zielbereich analysiert werden

(Z. 35-37). Auch der wieder aufgegriffene Gedankengang bewegt sich nochmals auf der Relationsebene und klärt Zusammenhänge zwischen den beteiligten Objekten (Z. 39-44), bevor konkrete Operationen im Zielbereich durchgeführt und anschließend beurteilt werden (Z. 45-48). Das Ergebnis muss an dieser Stelle noch verworfen werden, der Denkprozess insgesamt führt erst später zum korrekten Ergebnis.

Auch wenn dies hier nur als Vermutung geäußert werden kann, so liegt ein Zusammenhang zwischen der eingehenden Argumentation auf der Relationsebene und dem Urteilsvermögen bezüglich des Ergebnisses nahe: Werden die Zusammenhänge zwischen den beteiligten Objekten richtig erkannt, so können Ergebnisse auf der Handlungsebene besser interpretiert werden. Anders ausgedrückt: Wären im obigen Beispiel den Operationen auf der Handlungsebene nicht ausführliche Überlegungen auf der Relationsebene vorausgegangen, wäre das Ergebnis möglicherweise nicht als falsch erkannt worden.

Der Denkabschnitt 004\_6\_2 ist ein weiteres Beispiel, das die obige Vermutung zu stützen vermag. Hier zeigt sich eine ähnliche Vorgehensweise beim Ringen um die richtigen Analogiebildungen auf der Relationsebene (Z. 32-57). Diese Überlegungen tragen in einem abschließenden Denkabschnitt dazu bei, dass der Schüler das Ergebnis als korrekt einstuft.

#### Der Übergang von der Relationsebene auf die Handlungsebene

Ähnlich wie beim Übergang von der Objekt- auf die Relationsebene gibt es auch beim Übergang von der Relations- auf die Handlungsebene zahlreiche Wege, die diesen Schritt als eigenen Denkabschnitt markieren (vgl. Abb. 51). Erwartungsgemäß gehen diesen Denkabschnitten bereits Überlegungen auf der Objekt- und auf der Relationsebene voraus. In einigen Fällen kann der Denkprozess mit diesem Denkabschnitt jedoch bereits abgeschlossen werden (vgl. 002\_3\_4, Abb. 51 Mitte, aber auch z. B. 001\_1\_2, 001\_6\_2 oder 004\_6\_3).

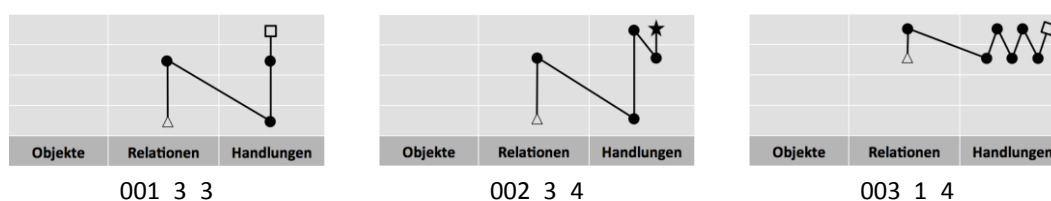


Abb. 51: Übergänge von der Relations- auf die Handlungsebene

#### Die Handlungsebene

Natürlich ist es die Handlungsebene, auf der letztlich die entscheidenden Schritte für die mathematische Bearbeitung eines Problems oder einer Aufgabe stattfinden. Es werden z. B. Variablen definiert, Gleichungen aufgestellt und gelöst, geometrische Eigenschaften



ausgenutzt oder zufällige Vorgänge modelliert. Bei den betrachteten Denkprozessen geschieht dies auf der Grundlage einer strukturellen Analogie. Eine erkannte Analogie auf Objekt- und Relationsebene eröffnet insofern Handlungsmöglichkeiten im Zielbereich, als nun auch mathematische Operationen analogisiert werden können. Es zeigt sich auch an den ZDM-Diagrammen, dass die Analogiebildung auf der Handlungsebene einen besonders großen Raum während des gesamten Analogiebildungsprozesses einnimmt.

Was bei der Betrachtung derjenigen Wege im ZDM-Diagramm auffällt, deren Schwerpunkt auf der Handlungsebene liegt, ist die deutliche Anbindung an die anderen Ebenen. Anders als auf der Objekt- oder der Relationsebene treten hier keine Denkabschnitte auf, die sich ausschließlich auf der Handlungsebene bewegen – es ist immer ein Bezug zur Strukturanalogie auf Objekt- und/oder Relationsebene erkennbar. Dies entspricht insofern den Erwartungen vor dem Hintergrund der theoretischen Überlegungen, als sich hierin die oben beschriebene Abhängigkeit von Analogiebildungen auf der Handlungsebene vom Erkennen der Strukturanalogie widerspiegelt. Bezüglich der „vertikalen Bewegungen“ auf der Handlungsebene des ZDM-Diagramms sind drei typische Verläufe erkennbar, die im Folgenden genauer beschrieben werden.

Zum einen sind dies Denkabschnitte, die nach (meist ausführlichen) Vorüberlegungen auf der Objekt- und der Relationsebene die Handlungsebene sehr zielstrebig durchlaufen und dann zum Abschluss kommen (vgl. z. B. Abb. 52).

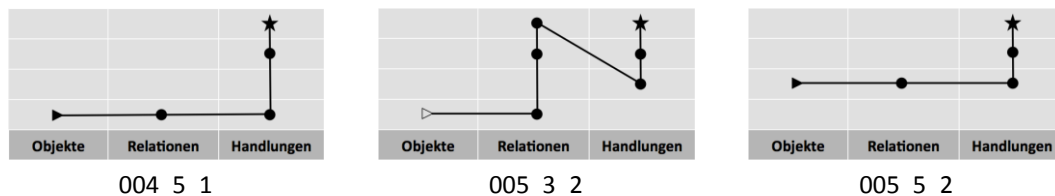


Abb. 52: Übergänge von der Relations- auf die Handlungsebene

Das zielstrebige Durchlaufen der Handlungsebene zeigt sich vor allem bei Aufgabenbearbeitungen, bei denen die Analogie auf der Objekt- und auf der Handlungsebene sehr schnell erfasst und gut verbalisiert werden konnte (entweder im Dialog oder im Teachback-Interview) – bei Aufgabenstellungen also, deren Bearbeitung mittels Analogiebildung den Schülern eher leicht fiel.

Aufgabenbearbeitungen hingegen, bei denen im Dialog zunächst etwas Unsicherheit über die zu verwendenden Operationen auf der Handlungsebene auftritt, zeichnen sich durch Bewegungen innerhalb der Handlungsebene aus (vgl. z. B. Abb. 53): Es wird hier wiederholt auch zurückgesprungen in die Phasen des Strukturierens und Abbildens, um die notwendigen Operationen zu ordnen und sich der Analogie auf der Handlungsebene zu vergewissern.

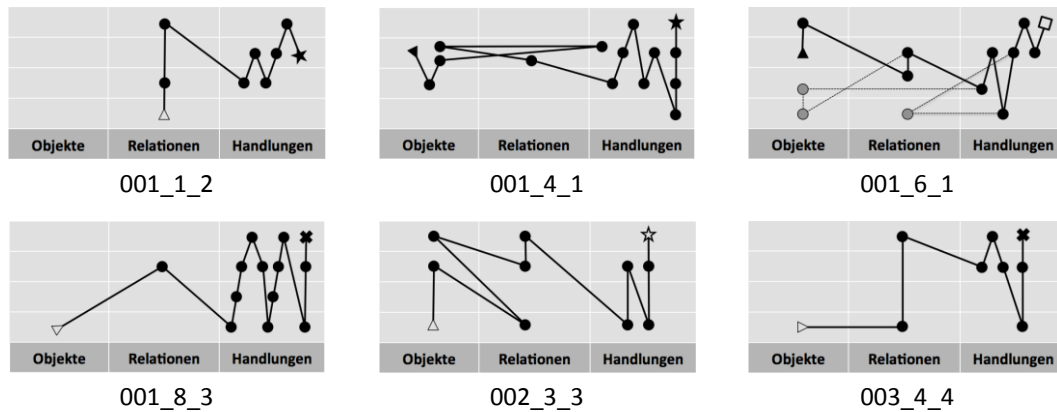


Abb. 53: Intensive Bewegungen innerhalb der Handlungsebene

Ein Transkriptausschnitt zu 001\_8\_3 (Z. 35-64) gibt hier weiter Aufschluss:

| Transkript des Dialogs  | Pseudokategorien  | Kodierung |
|---|-------------------|-----------|
| 35 S2: Deshalb ist jetzt die Frage, wie viele von den 45jährigen müssen da Raucher sein, so dass 35 % rauskommt und dadurch dann eben diese 41% erreicht werden.        |                   | Str_H     |
| 36 S1: Machen wir die andere Gleichung.   |                   | Abb_H     |
| 37 S2: Ja.  |                   | ==        |
| 38 S1: Das sind 41 von der Gesamtmenge jetzt.   |                   | ==        |
| 39 S2 (schreibt und stellt die Gleichung auf)   | dok_re            | Sch_H     |
| 40 S2: Jetzt muss man's hier wieder gleichsetzen, weil es sind ja quasi die zwei Gleichungen.   | dok_re, , zei_bsp | ==        |
| 41 Beide (rechnen)  | tr_re             | ==        |
| 42 S2: Das sind aber die Prozent ... da müssen wir eine Einheit dazu machen, nicht dass man das verwechselt. Also B für Befragte, das sind ja jetzt quasi unsere Liter. |                   | Beu_H     |
| 43 S1 (rechnet)   | tr_re             | Sch_H     |
| 44 S2: Wir müssen doch erst Befragte zu Befragte ...  |                   | Str_H     |
| 45 S1: ... nee, das haben wir doch hier auch gemacht.   | dok_re            | Abb_H     |
| 46 S1: Das wieder normal.   | zei_lsg           | Sch_H     |
| 47 S2: War das mal 6?   |                   | ==        |
| 48 S1: Ja.  |                   | ==        |
| 49 S2: Dann das rüber.  |                   | ==        |
| 50 S1: Welches willst du rüber.   |                   | ==        |
| 51 S2: Ja, kommt ja minus raus.   |                   | ==        |
| 52 S1: 50,4 ... ist gleich.   |                   | ==        |
| 53 S2: 0,06x. Jetzt müssen wir noch teilen. X ist gleich ...  |                   | ==        |
| 54 S1: ... 840.   |                   | ==        |
| 55 S2: O.k. 840 sind aber, sind Raucher jetzt, gell.  |                   | Beu_H     |
| 56 S1: Nee, sind die Befragten.   |                   | ==        |
| 57 S2: Nee, sind Raucher, weil wir haben doch jetzt: Wie viel müssen  |                   | Str_H     |

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| Raucher sein, damit das hier raus kommt und jetzt müssen wir noch schauen ... 840 sind 45% von was? |       |       |
| 58 S2: Das kann man doch mit Dreisatz machen, oder?   |       | Str_H |
| 59 S2: 840 sind 45%, wie viel sind das?   |       | Sch_H |
| 60 S2: Nein! 100% sind wie viel. 45% sind 840.  |       | ==    |
| 61 S1: Das mal das durch das. (tippt)   | tr_re | ==    |
| 62 S2: ... =20,8. Hä. Das kann doch nicht sein.   |       | Beu_H |
| 63 S1 (tippt neu)   |       | ==    |
| 64 S2: Ja, das kann sein.   |       | ==    |

Zunächst scheint der Analogiebildungsprozess auf der Handlungsebene hier sehr zielstrebig zu einem Ergebnis zu führen (Z. 34-42), es kommt allerdings während der Ausführung der notwendigen Operationen im Zielbereich zu Unsicherheiten, sodass noch einmal die notwendigen Schritte geordnet und mit dem Ausgangsbereich in Beziehung gesetzt werden (Z. 43/44). Anschließend wird die Lösung weiter vorangetrieben und führt zu einem Ergebnis (Z. 45-53). Dieses kann jedoch im Sachzusammenhang nicht korrekt interpretiert werden (Z. 54/55), es kommt zu neuerlichen Überlegungen bzgl. weiterer Rechenschritte und deren Ausführung (Z. 56-63). Es zeigt sich, dass wiederholtes Strukturieren auf der Handlungsebene und das wiederholte Herstellen der Zusammenhänge zwischen Ausgangs- und Zielbereich hier deutlich dazu beitragen, die anfängliche Verunsicherung abzubauen, sodass schließlich ein Ergebnis präsentiert werden kann.

Als letzte Gruppe treten hier nochmals die bereits in 4.4.5 beschriebenen Denkabschnitte auf, die sich durch einen mehrfachen Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auf der Handlungsebene auszeichnen. Sie könnten zwar als Teilgruppe (also als Spezialfälle) der oben abgebildeten Denkabschnitte beschrieben werden, sie unterscheiden sich allerdings darin, dass hier die Vorgehensweise auf der Handlungsebene eigentlich klar ist, dass einzelne Operationen jedoch jeweils (z. B. durch die Interpretation des Handlungsergebnisses im Sachzusammenhang) begründet oder gerechtfertigt werden. Neben den bereits in Abb. 45 (unten) bereits gezeigten Denkabschnitten, die dieses Phänomen aufweisen, sind in Abb. 54 weitere Denkabschnitte zu sehen, die den charakteristischen Wechsel zeigen.

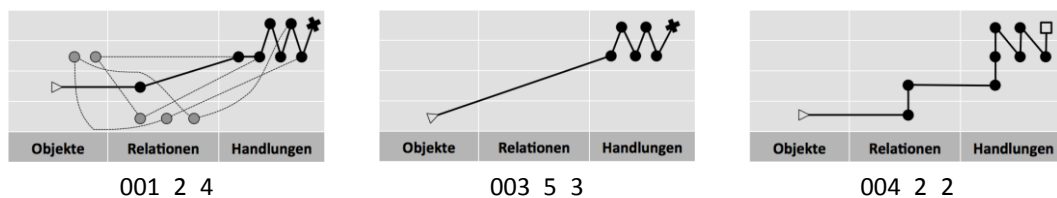


Abb. 54: Der charakteristische Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auf der Handlungsebene

Auch hierzu kann der Blick in ein Transkript einen Einblick geben (nachfolgend ein Auszug aus 005\_3\_1, Z. 29-50):

| Transkript des Dialogs   | Pseudokategorien | Kodierung |
|--|------------------|-----------|
| 29 S2: Also haben wir 1 Arbeit.  |                  | Sch_H     |
| 30 S1: ... durch drei teilen.  | tr_re            | ==        |
| 31 S2: ... durch die Arbeitsgeschwindigkeit teilen.  |                  | ==        |
| 32 S1: Ja gut, alles klar.   |                  | ==        |
| 33 S2 (tippt)  |                  | ==        |
| 34 S2: Das sind ... 26 h 40 min bzw. 26 2/3 h.   |                  | ==        |
| 35 S2: Das heißt...  |                  | Beu_H     |
| 36 S1: ...der ist ziemlich dumm. Das kann doch nicht richtig sein.   |                  | ==        |
| 37 S2: Ja, weil...   |                  | ==        |
| 38 S2: Jetzt würde er sie ja doppelt besetzen,   |                  | ==        |
| 39 S2: ... d.h. man muss die zusammen ... genau, zusammen tun sie soviel arbeiten und im Durchschnitt muss man's noch halbieren, | zei_lsg          | Sch_H     |
| 40 S2: ... weil wir ja die durchschnittliche Arbeitsgeschwindigkeit betrachten.  |                  | Beu_H     |
| 41 S2: Also nicht durch 3/80, sondern durch 1,5/80.  | tr_re            | Sch_H     |
| 42 S1: Und das Ergebnis wird schon viel logischer sein.  |                  | Beu_H     |
| 43 S2: Hast Recht, damit kommen dann bisschen mehr Wochenstunden raus, dann kommen nämlich ...                                   |                  | ==        |
| 44 S2: ... 53h 20min raus.   |                  | ==        |
| 45 S1: Oh nein, meine 54h wären so falsch gewesen.   |                  | ==        |
| 46 S1: Jetzt rundet er nämlich ab und deshalb hat er 53h,  |                  | Sch_H     |
| 47 S1: ... weil niemand 20min angestellt ist.  |                  | Beu_H     |
| 48 S2: Ja, aber dadurch verliert er Profit.  |                  | ==        |
| 49 S1: Es ist die Frage, sagt er jetzt 54h oder 53h?   |                  | ==        |
| 50 S2: Also, ich denke er wird sagen 54h.  |                  | ==        |

Es wird deutlich, dass die notwendige Vorgehensweise hier von Beginn an klar ist, dass jedoch selbst einzelne Zwischenschritte sehr gewissenhaft begründet und im Sachzusammenhang interpretiert werden.

#### 4.4.7 Wege der Analogiebildung – eine Clusteranalyse

Ziel der bisherigen Überlegungen ist es, den Verlauf unterschiedlicher Analogiebildungsprozesse zu vergleichen, die Bedeutung einzelner Denkabschnitte nach ihrem Verlauf und ihrer Stellung innerhalb des Denkprozesses zu analysieren und dabei Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten, die für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten relevant sind. Die Analyse basiert bis hierhin im Wesentlichen auf der Inaugenscheinnahme der verschiedenen Wege und dem qualitativen Ordnen nach theoretisch basierten Kriterien. Dabei wurden in den Abschnitten 4.4.5 und 4.4.6 nahezu alle Wege jeweils (mindestens) einer Gruppe zugeordnet, der vor dem Hintergrund des theoretischen Konstrukts eine Bedeutung beigemessen werden kann. Selbst von den Wegen, die in den Ausführungen nicht eigens erwähnt werden, können nur einige wenige nicht in eine der Gruppierungen aufgenommen werden (vgl. Abb. Abb. 55):

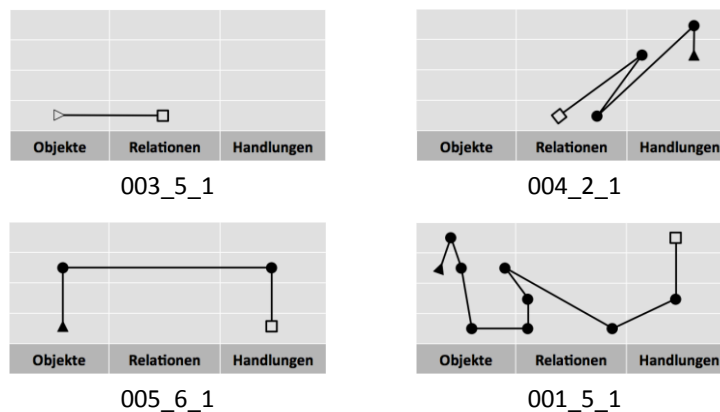


Abb. 55: Der Weg 003\_5\_1 entzieht sich durch seine Länge einer vernünftigen Zuordnung, Weg 004\_2\_1 ist der einzige Weg, der den Richtungsannahmen „von links nach rechts und von oben nach unten“ für die Wege im ZDM-Diagramm in beiden Punkten widerspricht und die Wege 005\_6\_1 und 001\_5\_1 erscheinen bezüglich der beschriebenen Gruppenbildung in ihrem Verlauf zu indifferent.

Dahingegen werden einige Wege mehrfach genannt, die beschriebenen Gruppen sind also nicht disjunkt. Auch dies ist vor dem theoretischen Hintergrund erklärbar, denn natürlich muss ein Denkabschnitt, bezogen auf die obigen Charakteristika, nicht zwingend nur einen der genannten Schwerpunkte aufweisen. Beim Denkabschnitt 004\_5\_1 beispielsweise zeigen sich Schwerpunkte sowohl in der Phase des Strukturierens, als auch auf der Handlungsebene.

Da die vorliegende Datenmenge einen überschaubaren Umfang hat, ist dieses Verfahren der Gruppenbildung, das die *Wege der Analogiebildung* auf der Grundlage des theoretischen Konstrukts nach Augenschein ordnet, auch ohne die Hilfe automatisierter quantitativer Verfahren noch zu leisten. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt auf der Hand: Auch wenn die theoretische Basis den Ausgangspunkt der Zuordnungsentscheidung bildet, wird nicht

eindeutig geklärt, was es bedeutet, wenn z. B. von einem „Schwerpunkt des Gedankengangs auf der Handlungsebene“ die Rede ist. Betrachtet man die Gemeinsamkeiten der so einander zugeordneten Wege und verfolgt die damit einhergehende Argumentation, so wird die Gruppierung zwar nachvollziehbar, es bleibt aber der Eindruck einer letztlich subjektiven Entscheidung.

Natürlich ist die eigentliche Idee bei der Anwendung quantitativer Methoden zur multivariaten Datenanalyse, bei der eine zunächst ungeordnete Datenmenge strukturiert werden soll, dass die Gruppen im Ausgangspunkt unbekannt sind. Mit Hilfe des Verfahrens soll eine solche Gruppierung, die anschließend vor dem theoretischen Hintergrund interpretiert wird, erst herbeigeführt werden.

Für die vorliegende Untersuchung wird der umgekehrte Weg beschritten: Der Vorschlag für eine Gruppierung der Daten liegt bereits vor und es soll gezeigt werden, dass auch eine geeignete quantitative Analyse zu ähnlichen Ergebnissen führt.

Verschiedene Gründe sprechen für ein solches Vorgehen: Zum einen ist aufgrund der verhältnismäßig geringen Datenmenge eine qualitative Gruppierung auch auf der Grundlage der ZDM-Darstellungen möglich. Um ein quantitatives Vorgehen anwenden zu können, sind zusätzliche Mathematisierungen nötig, die mit einem Informationsverlust einhergehen (vgl. 4.2.2). Zum anderen ist eine disjunkte Gruppierung für die vorliegende Untersuchung kein zwingendes Resultat – eine solche wird aber durch die bekannten quantitativen Verfahren erzeugt und muss vor dem theoretischen Hintergrund im Zuge der Ergebnisinterpretation ggf. nachträglich wieder aufgelöst werden.

Warum soll dann überhaupt eine quantitative Analyse erfolgen? Nicht zuletzt bleibt die Frage, wie mit größeren Datenmengen umgegangen würde, die durch eine Inaugenscheinnahme nicht mehr zu bewältigen sind. Es soll deshalb an dieser Stelle ein quantitatives Verfahren zum einen dazu dienen, die auf der theoretischen Basis qualitativ erhaltenen Ergebnisse nachträglich abzusichern. Zum anderen soll gezeigt werden, dass auch mit Hilfe des gewählten quantitativen Verfahrens Gruppen entstehen, die sich auf der theoretischen Ebene im obigen Sinne interpretieren lassen.

Ein quantitatives Verfahren, das es erlaubt, eine Datenmenge bezüglich bestimmter Kriterien zu ordnen und zu gruppieren, ist die Clusteranalyse.

„Ziel ist es dabei häufig, solche Untersuchungsobjekte zu Gruppen (Cluster) zusammenzufassen, die im Hinblick auf die betrachteten Eigenschaften oder Merkmale als möglichst homogen zu bezeichnen sind. Gleichzeitig sollten die Gruppen untereinander eine möglichst große Heterogenität aufweisen, d. h. möglichst unähnlich sein.“

(Backhaus, 2016, S. 455)

Voraussetzung dafür, dass eine Clusteranalyse durchgeführt werden kann, ist dabei zunächst, dass vergleichbare Objekte vorliegen – Objekte also, denen ein Proximitätsmaß

(Abstands- oder Ähnlichkeitsmaß) zugeordnet werden kann. Durch die Abstrahierung der Weg-Diagramme im Zwei-Dimensionen-Modell hin zu Weg-Matrizen ist dies gelungen, wie in Abschnitt 4.2.2 bereits begründet wird. Die vorliegenden Datensätze können damit als multivariate Datensätze mit zwölf binären Variablen (hier: 0 und 1) interpretiert werden.

Bezüglich des Verfahrens selbst können im Wesentlichen agglomerative bzw. divisive hierarchische und partitionierende Verfahren unterschieden werden. Aufgrund der vorliegenden Datengrundlage, die keine vorgegebene Partitionierung der Datensätze nahelegt, ist die Wahl eines geeigneten agglomerativen hierarchischen Verfahrens anzustreben. Dabei bildet zunächst jeder Datensatz ein eigenes Cluster. Auf der Grundlage des Abstandsmaßes und eines Fusionierungsalgorithmus werden diese nach und nach zu größeren Clustern zusammengefasst, bis eine Abbruchbedingung die Beendigung des Algorithmus festlegt.

Für die konkrete Durchführung einer hierarchischen agglomerativen Clusteranalyse müssen demnach drei Entscheidungen getroffen werden:

1. Welches Ähnlichkeitsmaß soll verwendet werden?
2. Auf welche Weise werden auf der Grundlage des Ähnlichkeitsmaßes Datensätze zu Clustern zusammengefasst (=Wahl des Fusionierungsalgorithmus)?
3. Wann wird das Verfahren abgebrochen (=Abbruchbedingung)?

#### Die Wahl des Ähnlichkeitsmaßes

Für Datensätze mit binären Variablen werden verschiedene Ähnlichkeitsmaße vorgeschlagen, deren Wahl vom vorliegenden Kontext abhängt (vgl. Backhaus, 2016, S. 459ff; Handl, 2010, S. 96ff). Kommt der Übereinstimmung in beiden Merkmalsausprägungen die gleiche Bedeutung zu, so ist der Simple-Matching-Koeffizient zu wählen. Dabei wird beim Vergleich zweier Datensätze die Zahl der Übereinstimmungen zur Zahl der Merkmale  $M$  ins Verhältnis gesetzt – es entsteht ein Koeffizient mit Werten zwischen 0 und 1:<sup>51</sup>

$$\alpha = \frac{|00| + |11|}{M}$$

Interpretiert man allerdings die Wegmatrizen als Datensätze mit metrischen Variablen, so können, wie in 4.2.2 beschrieben, auch die üblichen Metriken (Distanzmaße) als Ähnlichkeitsmaße verwendet werden. Für die vorliegende Untersuchung werden die Datensätze, die sich aus den Wegmatrizen ergeben, von vornherein als metrisch behandelt und mit der City-Block-Metrik untereinander verglichen. Dies wird folgendermaßen begründet: Zum einen liefern der Simple-Matching-Koeffizient und die City-Block-Metrik bei der Cluster-

---

<sup>51</sup> Dabei:  $|00|$  = Anzahl der Merkmale, bei denen beide Datensätze die Merkmalsausprägung 0 gemeinsam haben und  $|11|$  = Anzahl der Merkmale, bei denen beide Datensätze die Merkmalsausprägung 1 gemeinsam haben.

analyse binärer Datensätze identische Ergebnisse. Zum anderen soll im Folgenden die Mathematisierung der Wegmatrizen noch dahingehend erweitert werden, dass auch die Häufigkeiten, mit denen ein *Weg der Analogiebildung* ein bestimmtes Feld der ZDM-Darstellung durchläuft, mit abgebildet werden. Dies ist aber nur für die City-Block-Metrik sinnvoll möglich. Aus diesem Grund wird also auch für die binäre Darstellung der ZDM-Matrizen die City-Block-Metrik als Ähnlichkeitsmaß gewählt.

#### Die Wahl des Fusionierungsalgorithmus

Der Fusionierungsalgorithmus gibt vor, auf welche Weise Datensätze zu Clustern zusammengefasst werden und wie auf der Grundlage des verwendeten Ähnlichkeitsmaßes die Ähnlichkeit zweier Cluster gemessen wird. Die gängigen Clusterverfahren lassen sich dabei nach *dilatierenden*, *kontrahierenden* und *konservativen* Verfahren unterteilen (vgl. Backhaus, 2016, S. 488 ff; Kohn, 2005, S. 75 ff).

„*Dilatierende* Verfahren neigen dazu, die Objekte verstärkt in einzelne, etwa gleich große Gruppen zusammenzufassen, während *kontrahierende* Algorithmen dazu tendieren, zunächst wenige große Gruppen zu bilden, denen viele kleine gegenüberstehen. Kontrahierende Verfahren sind damit geeignet, insbesondere „Ausreißer“ in einem Objektraum zu identifizieren. Weist ein Verfahren weder Tendenzen zur Dilatation noch zur Kontraktion auf, so wird es als *konservativ* bezeichnet.“

(Backhaus, 2016, S. 488 f)

Das *Single-Linkage-Verfahren* (oder: *Minimum-Linkage-Verfahren*) als kontrahierender Algorithmus ist demnach zur Identifikation von Ausreißern im betrachteten Datensatz geeignet, neigt jedoch zur Kettenbildung, so dass sich schließlich sehr kleine und sehr große Cluster einander gegenüberstehen. Der Abstand zweier Cluster ergibt sich beim Single-Linkage-Verfahren als Minimum aller Abstände zwischen den Elementen der beiden beteiligten Cluster  $C_1$  und  $C_2$ :

$$d_{SL}(C_1, C_2) = \min\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in C_1; x_2 \in C_2\}$$

Mit dem *Complete-Linkage-Verfahren* (oder: *Maximum-Linkage-Verfahren*) als dilatierender Algorithmus lassen sich auch Datensätze in Gruppen integrieren, die einen größeren Abstand zu anderen Datensätzen aufweisen. Es ergeben sich schließlich insgesamt ähnlich große Cluster.

Der Abstand zweier Cluster ergibt sich beim Complete-Linkage-Verfahren als Maximum aller Abstände zwischen den Elementen der beiden beteiligten Cluster  $C_1$  und  $C_2$ :

$$d_{CL}(C_1, C_2) = \max\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in C_1; x_2 \in C_2\}$$

Als konservative Verfahren liegen das *Average-Linkage-Verfahren* und das *Average-Group-Linkage-Verfahren* bezüglich der Effekte auf die Clusterbildung zwischen den beiden obigen



Verfahren. Beim Average-Linkage-Verfahren wird der Abstand zweier Cluster als arithmetisches Mittel aller Abstände zwischen allen Elementen des einen Clusters und allen Elementen des anderen Clusters gebildet, während beim Average-Group-Linkage-Verfahren der Abstand zweier Cluster als arithmetisches Mittel aller Abstände zwischen allen Elementen beider Cluster gebildet wird. Häufig benutzt wird nach Backhaus (2016, S. 484) auch das *Ward-Verfahren*, das zur Clusterbildung eine Minimierung einer Fehlerquadratsumme heranzieht. Für das Ward-Verfahren wird allerdings das euklidische Abstandsmaß empfohlen (vgl. Handl, 2010, S. 390) – dieses wurde oben für den Sachzusammenhang jedoch bereits als ungeeignet erklärt. Zudem nennt Backhaus als Voraussetzung für die sinnvolle Verwendung des Ward-Verfahrens, dass aus dem Sachzusammenhang etwa gleich große Gruppen mit ähnlicher Ausdehnung zu erwarten sein sollten. Diese Voraussetzung ist für den hier erhobenen Datensatz nicht erfüllt – das Ward-Verfahren scheidet also für die vorliegende Untersuchung aus.

Backhaus empfiehlt (2016, S. 494),

„[...] dass bei praktischen Anwendungen eine Objektmenge zunächst mit Hilfe des Single-Linkage-Verfahrens auf Ausreißer untersucht werden sollte. Anschließend sind die gefundenen „Ausreißer-Objekte“ zu eliminieren, und die reduzierte Objektmenge ist dann mit Hilfe eines anderen agglomerativen Verfahrens zu gruppieren, wobei die Auswahl des Verfahrens vor dem Hintergrund der jeweiligen Anwendungssituation zu erfolgen hat.“

Vor diesem Hintergrund werden für die vorliegenden Weg-Matrizen die vier Verfahren Single-Linkage, Average-Linkage, Average-Group-Linkage und Maximum-Linkage mit Hilfe der Software SPSS<sup>®</sup> durchgeführt und ausgewertet (vgl. Eckstein, 2016, S. 343 ff).

Als Ausgabe erzeugt die Software jeweils ...

- ... eine Abstandsmatrix auf Datensatzbasis.
- ... eine Zuordnungsübersicht, aus der deutlich wird, nach welchem Iterationsschritt welche beiden Cluster bei welchem Distanzmaß zusammengeführt werden.
- ... ein vollständiges Dendrogramm – ein Baumdiagramm, aus dem deutlich wird, welche Datensätze in welcher Reihenfolge zu Clustern zusammengefasst werden, solange, bis alle Datensätze zu einem Cluster vereinigt sind.

Zusätzlich zu diesen Ausgabeobjekten ...

- ... wurde mit der Software Microsoft Excel zu jedem Verfahren jeweils Scree-Plot angefertigt – ein Diagramm, in dem das Distanzmaß der fusionierten Cluster in Abhängigkeit vom jeweiligen Iterationsschritt aufgetragen wird (s. u.).

- ... wurden die verschiedenen Cluster ausgewählter Analyseverfahren nochmals als Dendrogramme dargestellt, aus denen direkt ersichtlich wird, welche ZDM-Diagramme durch das jeweilige Verfahren zusammengeführt wurden.<sup>52</sup>

#### Festlegung einer Abbruchbedingung

Da es sich bei der Clusteranalyse erkennbar um ein algorithmisches Verfahren handelt, ist die Angabe einer Abbruchbedingung zwingend erforderlich. Wie aus den von SPSS® erzeugten Dendrogrammen ersichtlich wird, endet das Verfahren automatisch, wenn alle Datensätze zu einem Cluster zusammengefasst wurden. Um sinnvolle Aussagen über eine Gruppenbildung treffen zu können, muss das Verfahren also vorher abgebrochen werden.

Für die Formulierung einer Abbruchbedingung können verschiedene Überlegungen maßgeblich sein. Da das zugrundeliegende Abstandsmaß für die Clusterbildung mit jedem Schritt zunimmt, kann zum einen die Angabe einer oberen Grenze für das Abstandsmaß ein Abbruchkriterium sein. Im Gegensatz dazu nimmt bei agglomerativen Verfahren die Zahl der Cluster immer weiter ab. Es kann also das Unterschreiten einer gewünschten Anzahl an Clustern ebenfalls eine Abbruchbedingung sein. Backhaus (2016, S. 494) gibt hierzu allerdings zu bedenken:

„I. d. R. hat der Anwender keine sachlogisch begründbaren Vorstellungen zur Gruppierung der Untersuchungsobjekte und versucht deshalb mit Hilfe der Clusteranalyse eine den Daten inhärente Gruppierung aufzudecken. Vor diesem Hintergrund sollte sich auch die Bestimmung der Clusterzahl an statistischen Kriterien orientieren und nicht sachlogisch (im Hinblick auf den Gruppen zugeordneten Fällen) begründet werden. Bei der Entscheidung über die Clusterzahl besteht immer ein Zielkonflikt zwischen der „Homogenitätsanforderung an die Cluster-Lösung“ und der „Handhabbarkeit der Cluster-Lösung“. Zur Lösung dieses Konflikts können auch sachlogische Überlegungen herangezogen werden, die sich allerdings nur auf die Anzahl der zu wählenden Cluster beziehen und nicht an den in den Clustern zusammengefassten Fällen ausgerichtet sein sollten.“

Als Möglichkeit zur statistischen Begründung einer Abbruchbedingung stellt Backhaus (2016, S. 495 f.) das *Elbow-Kriterium* vor. In einem *Scree-Plot* wird dazu das zu einer Clusterbildung führende Distanzmaß in Abhängigkeit vom zugehörigen Iterationsschritt dargestellt (vgl. Abb. 56). Es ergibt sich ein monoton steigender Graph. Zeigt der Verlauf des Graphen eine besonders große Sprungstelle oder einen „Knick nach oben“ (=elbow), so ist dies eine geeignete Stelle, um die Clusteranalyse abzubrechen, da im nächsten Iterationsschritt Datensätze gruppiert würden, die deutlich weiter auseinander liegen, als die bisher bereits gruppierten Datensätze.

---

<sup>52</sup> Die genannten Auswertungen können auf Nachfrage beim Autor zur Verfügung gestellt werden.

Sind mehrere solcher Stellen erkennbar, so können inhaltliche Argumente eine Abbruchentscheidung festlegen.

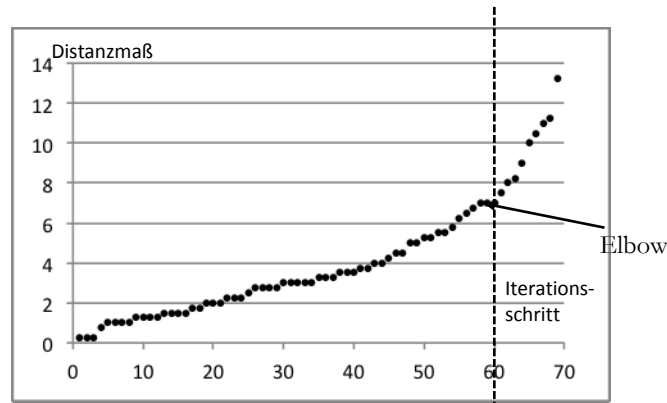


Abb. 56: Scree-Plot – der Abbruch nach dem Elbow-Kriterium bietet sich an der markierten Stelle an. Es bleiben neun Cluster übrig.

Da das Elbow-Kriterium am Scree-Plot nicht immer eindeutig erkennbar ist, wurden auch für die Bestimmung der optimalen Clusteranzahl verschiedene Regeln entwickelt (z. B. Stopping Rule von Calinski/Harabasz oder der Test von Mojena, vgl. Backhaus, 2016, S. 496f; Handl, 2010, S. 409), die im Rahmen der vorliegenden Untersuchung jedoch nicht zum Tragen kommen, da die Kombination von Elbow-Kriterium zusammen mit einer vorgegebenen Anzahl von Clustern hier mit hinreichender Genauigkeit zu einem plausiblen Abbruchkriterium führt.

### Die Analyse der Datensätze

Entsprechend der Empfehlungen von Backhaus (2016) wurden für die vorliegende Datenmenge zunächst die Ergebnisse des Single-Linkage-Verfahrens analysiert. Der Blick auf das zugehörige Dendrogramm und den Scree-Plot zeigt bereits die genannten Eigenschaften des Single-Linkage-Verfahrens: Es können zwar einige Datensätze als Ausreißer identifiziert werden, eine geeignete Clusterbildung findet jedoch nicht statt. Während nach dem zweiten Schritt noch 28 Cluster gezählt werden, finden sich nach dem dritten Schritt zwar nur noch acht Cluster – davon allerdings sechs einelementige Gruppen (die Ausreißer) und eine Gruppe mit 61 Elementen.

Betrachtet man die Ausreißer anhand der ZDM-Diagramme näher, so stellt man einerseits fest, dass dabei zwar ein Weg auftritt, der auch bei den bisherigen qualitativen Betrachtungen nicht zugeordnet werden konnte (001\_5\_1), andererseits finden sich auch Wege, die durchaus charakteristische Eigenschaften im obigen Sinne aufweisen (z. B. 001\_8\_3). Dem Dendrogramm kann entnommen werden, dass das Minimum-Linkage-Verfahren bereits in

vier Schritten zur vollständigen Gruppierung aller Datensätze führt. Bezogen auf die Ausreißer lässt sich also feststellen, dass deren Distanz zu den anderen Datensätzen in der City-Block-Metrik nicht auffällig groß ist. So hat z. B. selbst der Datensatz 001\_5\_1 zum Datensatz 005\_5\_1 den Abstand 3, dennoch werden die beiden Datensätze durch das Single-Linkage-Verfahren erst im letzten Schritt zueinander gruppiert.

Eine weitere Erkenntnis lässt sich bereits aus den Ergebnissen des ersten Analyse-Schritts ziehen: Durch die binäre Struktur der Daten und das gewählte Distanzmaß sind die auftretenden Distanzen auf wenige Werte beschränkt – es können als Abstand zwischen zwei Wegmatrizen nur ganzzahlige Werte zwischen 0 und 12 auftreten. Zusammen mit der gewählten Entscheidungsregel kommt es deshalb zwangsläufig zu Mehrdeutigkeiten. So hat der eben betrachtete Datensatz 005\_5\_1 etwa zum Datensatz 001\_1\_1 den Abstand 4, also einen größeren Abstand als zum vermeintlichen Ausreißer 001\_5\_1. Trotzdem werden diese beiden Datensätze nach dem dritten Schritt in einem Cluster zusammengefasst.

Vor diesem Hintergrund wurde entschieden, die durch das Single-Linkage-Verfahren identifizierten Ausreißer vorerst nicht aus dem Datensatz zu entfernen.

Im nächsten Schritt werden die Ergebnisse der anderen verwendeten Clusterverfahren (Average-Linkage, Average-Group-Linkage, Maximum-Linkage) einander gegenüber gestellt. Alle drei Verfahren führen erst nach deutlich mehr Iterationsschritten zu einer vollständigen Gruppierung als das Single-Linkage-Verfahren. Dies erleichtert die Festlegung einer Abbruchbedingung. Betrachtet man die Scree-Plots, so lassen sich für die beiden Average-Linkage-Verfahren, bedingt durch die Mittelwertbildungen, deutlich Stellen erkennen, für die ein Elbow-Kriterium als Abbruch-Argument gerechtfertigt ist. Beim Scree-Plot des Maximum-Linkage-Verfahrens hingegen ist noch deutlich die diskrete Natur der auftretenden Abstandswerte zu erkennen und ein Elbow-Kriterium kann hier nicht mit vergleichbarer Eindeutigkeit festgelegt werden. Die vorausgehenden qualitativen Betrachtungen legen allerdings nahe, die Clusteranzahl nicht zu klein zu wählen. Es wurden etwa zehn verschiedene Gruppen von Wegen voneinander abgegrenzt. Diese Obergrenze für die Anzahl der Cluster soll deshalb zusätzlich in die Abbruchbedingung mit einfließen. Für die Average-Linkage-Verfahren fällt diese Zusatzbedingung mit dem Elbow-Kriterium zusammen, für das Maximum-Linkage-Verfahren kann nun die Abbruchbedingung ebenfalls eindeutig festgelegt werden. Es entstehen auf diese Weise zwischen acht und zehn Cluster, deren Struktur nun genauer analysiert wird.

Bei den Average-Linkage-Verfahren fällt auf, dass die Größe der entstandenen Cluster sehr unterschiedlich ist. So entstehen einelementige Cluster ebenso wie Cluster mit 30 Datensätzen. Zudem neigen die beiden Verfahren noch deutlich zur Kettenbildung, also dem sukzessiven Zuordnen einzelner Elemente zu einem bestehenden Cluster. Das führt zu unerwünscht großen Distanzen und damit zu Heterogenität innerhalb dieses Clusters (vgl. Abb.

57, links). Allerdings ergeben sich auch bereits Cluster, die deutliche Gemeinsamkeiten der abgebildeten Denkabschnitte aufweisen (vgl. Abb. 57, rechts).

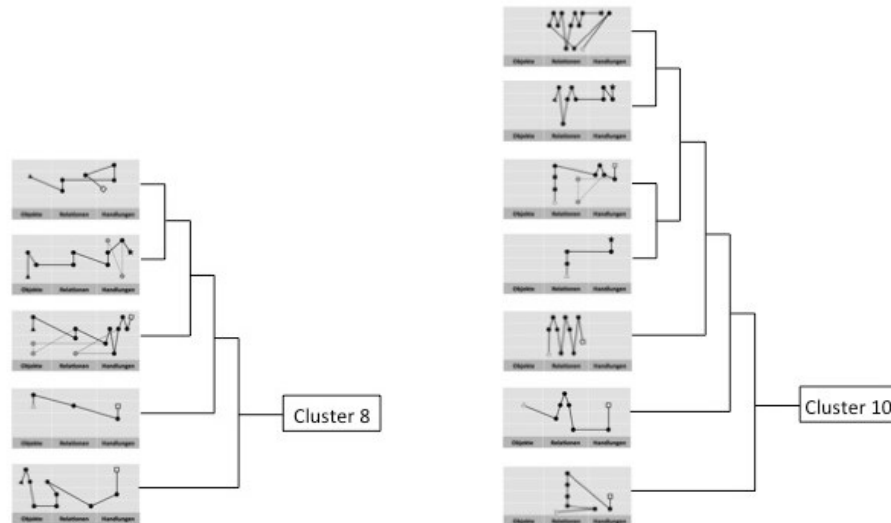


Abb. 57: Kettenbildung beim Average-Group-Linkage-Verfahren (links), Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Relationsebene werden in einem Cluster zusammenfasst (rechts).

Beim Maximum-Linkage-Verfahren ergeben sich neun Cluster mit einer Größe zwischen drei und 15 Datensätzen. Auch bei diesem Verfahren ergeben sich bereits erste gute Übereinstimmungen mit den qualitativen Überlegungen und auch die vermeintlichen Ausreißer finden sich in nachvollziehbaren Gruppen wieder (s. unten). Allerdings werden auch Wege in einem Cluster zusammengefasst, wie sie in Abb. 58 zu sehen sind.

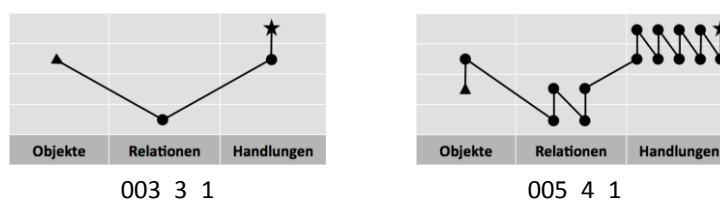


Abb. 58: Die beiden Denkabschnitte 003\_3\_1 und 005\_4\_1 werden in einem Cluster zusammengefasst.

Der Grund liegt im Informationsverlust, den die Denkabschnitte beim Übergang von der ZDM-Darstellung zur Weg-Matrix erleiden. Macht man sich bewusst, dass für die Darstellung der beiden Wege in der Weg-Matrix nur berücksichtigt wird, welche Felder des Zwei-Dimensionen-Modells durchlaufen werden, stellt man fest, dass sich die beiden Weg-Matrizen nur in zwei Einträgen unterscheiden und der Abstand der beiden Denkabschnitte in der City-Block-Metrik folglich 2 beträgt. Der in der qualitativen Analyse als typisch be-



Die Trennung der beiden Denkabschnitte durch die Berücksichtigung der Aufenthaltshäufigkeiten ist demzufolge gelungen, genau wie die Zuordnung zu einem Weg, der ebenfalls den typischen mehrfachen Wechsel zwischen den Ebenen „Schließen“ und „Beurteilen“ aufweist. Allerdings existieren noch weitere solcher Wege, die in anderen Clustern zusammengefasst werden (vgl. Abb. 60, rechts).



Abb. 60: Denkabschnitt 005\_4\_1 wird nun einem anderen Cluster zugeordnet (links). Es gibt noch weitere Denkabschnitte in anderen Clustern, die den typischen mehrfachen Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen aufweisen (rechts).

Es wird deutlich, dass eine einfache Gewichtung der Aufenthaltshäufigkeiten in den Weg-Matrizen eine Clusterung erzeugt, mit der vor allem unter stark besetzten Matrizen differenziert wird, während schwach besetzte Matrizen mit unterschiedlichen Wegen kaum noch getrennt werden können. Es liegt also nahe, die Gewichtung mehrfacher Durchläufe zu verändern. Dabei sollte auch die grundsätzliche Vorstellung berücksichtigt werden, dass die Ähnlichkeit zweier Wege nach wie vor zuerst vom Verlauf und erst nachrangig von der Häufigkeit der Durchläufe auf einzelnen Feldern abhängt. Erreicht werden kann dies z. B. indem man wiederholte Durchläufe durch ein Feld im ZDM-Diagramm schwächer gewichtet als den ersten Durchlauf (z. B. mit einem Gewichtungsfaktor  $k = 0,5$  oder  $k = 0,25$ ). Die Weg-Matrizen der beiden oben betrachteten Wege ändern sich dabei z. B. wie folgt (Abb. 61):

|                                 |  |  |
|---------------------------------|--|--|
| Gewichtungsfaktor<br>$k = 0,5$  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \end{pmatrix}$   |
| Gewichtungsfaktor<br>$k = 0,25$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \end{pmatrix}$ |
|                                 | 003_3_1  | 005_4_1  |

Abb. 61: Matrixdarstellung der Denkabschnitte 003\_3\_1 und 005\_4\_1 mit gewichteten Aufenthaltshäufigkeiten

Auch für verschiedene Gewichtungsfaktoren wurden die Denkabschnitte als Weg-Matrix dargestellt und eine Gruppierung mittels der vier beschriebenen Cluster-Verfahren wurde durchgeführt und ausgewertet. Die Minimum-Linkage-Methode fördert dabei keine weiteren Kandidaten für Ausreißer mehr zutage. Während die beiden Average-Linkage-Methoden auch für gewichtete Aufenthaltshäufigkeiten teils stark zur Kettenbildung neigen und sehr unterschiedlich große Gruppen erzeugen, liefert das Maximum-Linkage-Verfahren im Scree-Plot deutliche Abbruchbedingungen durch das Elbow-Kriterium und erzeugt vor allem für die leicht gewichtete Variante ( $k = 0,25$ ) Cluster von angemessener Größe. Es erweist sich insgesamt also das Maximum-Linkage-Verfahren als ein Verfahren, das in allen Fällen eine Gruppierung hervorbringt, die angemessene Gruppengrößen aufweist, nicht zur Kettenbildung neigt und jeweils ein deutliches Abbruchkriterium liefert.

Analysiert man nun die Entwicklung der Clusterbildung bezüglich der Gewichtung der Aufenthaltshäufigkeiten, so lassen sich einige Phänomene beobachten, die für die Interpretation der Ergebnisse und für eine Einschätzung der Brauchbarkeit einer Cluster-Analyse im gegebenen Zusammenhang nützlich sind.

Betrachtet man zunächst die Clusterung ohne Berücksichtigung der Aufenthaltshäufigkeiten, so kann man feststellen, dass bereits einige der charakteristischen Verläufe, die im Zuge der qualitativen Analyse beschrieben wurden, abgebildet werden können. In Cluster 3 werden z. B. Wege zusammengefasst, die ihren Ausgangs- und Schwerpunkt auf der Objektebene haben und sich von dort aus auf die anderen Ebenen erstrecken (vgl. Abb. 62, links sowie Abb. 47 und Abb. 48 in Abschnitt 4.4.6).

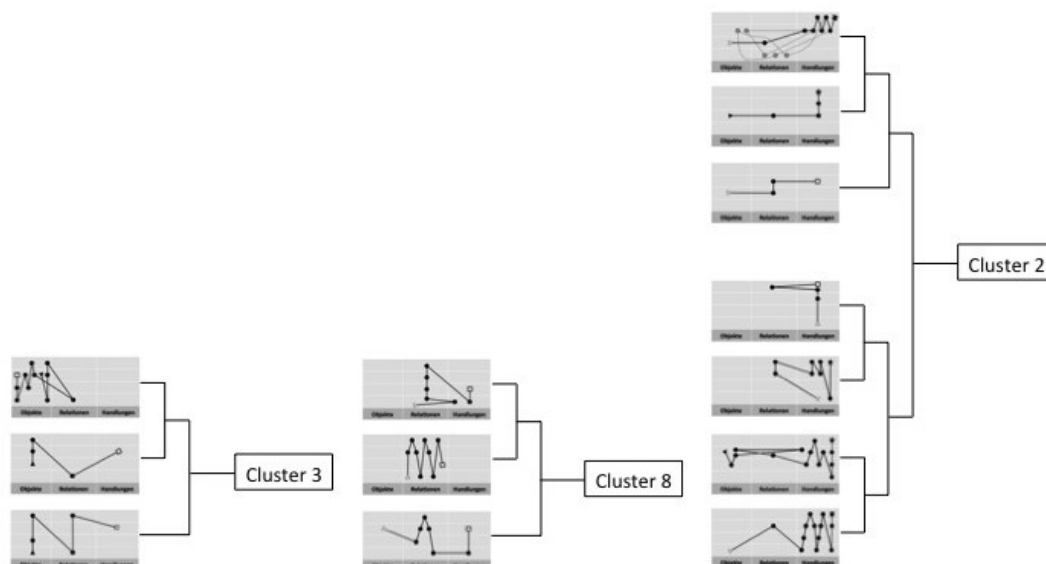


Abb. 62: Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Objektebene (Cluster 3, links), auf der Relationsebene (Cluster 8, Mitte) und auf der Handlungsebene (Cluster 2, rechts)



In Cluster 8 hingegen werden einige (wenn auch nicht alle) Wege mit Schwerpunkt auf der Relationsebene zusammengefasst (vgl. Abb. 62, Mitte) und in Cluster 2 finden sich Denkabschnitte, die vorwiegend auf der Handlungsebene verlaufen (Abb. 62, rechts).

Auch diejenigen Denkabschnitte, die eine eher horizontale Tendenz aufweisen, also (zumindest stückweise) innerhalb einer Phase verlaufen, werden dabei einander zugeordnet.

Wie allerdings oben bereits beschrieben, werden aufgrund des Informationsverlusts auch Denkabschnitte gruppiert, die man nach bloßem Augenschein nicht in einer Gruppe zusammenfassen würde. Genauere Betrachtungen zeigen erwartungsgemäß, dass es vor allem Denkabschnitte mit hohen Aufenthaltshäufigkeiten sind, die in ihren Clustern teils deplatziert wirken (z. B. 003\_1\_5 in Cluster 9 oder 004\_6\_1 in Cluster 5). Es fällt weiter auf, dass in der Gruppe der dünn besetzten Matrizen wiederum eine recht zuverlässige Clustering gelingt (vgl. z. B. Cluster 4).

Betrachtet man nun die Ergebnisse der anderen Clusterungen in der Reihenfolge von leicht gewichteten hin zu einfach gewichteten Aufenthaltshäufigkeiten und verfolgt die Veränderungen in der Clusterung, so fallen verschiedene Phänomene auf, die im Folgenden beschrieben werden sollen.

#### Übergang: $k = 0$ zu $k = 0,25$

Aus vielen Clustern wurden die offensichtlich unpassenden Datensätze entfernt und – im Hinblick auf die theoretischen Überlegungen – auf sinnvolle Weise anderen Clustern zugeordnet. Der bereits oben erwähnte Datensatz 004\_6\_1 etwa wurde aus dem ursprünglichen Cluster 5 entfernt und, zusammen mit einem weiteren Denkabschnitt, dem ursprünglichen Cluster 8 zugeschlagen, so dass die Gruppierung von Denkabschnitten mit Schwerpunkt auf der Relationsebene im Vergleich zu Abb. 62 zwar gewachsen ist, diesen Schwerpunkt aber immernoch deutlich repräsentiert (vgl. Abb. 63, Mitte). Aufgrund ähnlicher leichter Umgruppierungen treten auch die anderen Ebenen nun deutlicher zutage (Objektebene: ursprünglich Cluster 3, nun als neues erweitertes Cluster 9, Abb. 63, links; Handlungsebene: ursprünglich Cluster 2, nun verkleinerter Cluster 5, Abb. 63, rechts). Gleiches gilt für die Phasen und deren Übergänge: Während das neu entstandene Cluster 7 aus Teilen der ursprünglichen Cluster 1 und 4 zusammengesetzt ist und nun recht homogen kurze Denkabschnitte mit Schwerpunkt in der Phase des Schließens zusammenfasst, scheinen im neu entstandenen Cluster 1 nun Denkabschnitte zusammengefasst, die ausgehend vom Strukturieren auf verschiedenen Ebenen übergehen zur Analogiebildung in verschiedenen Phasen der Handlungsebene.

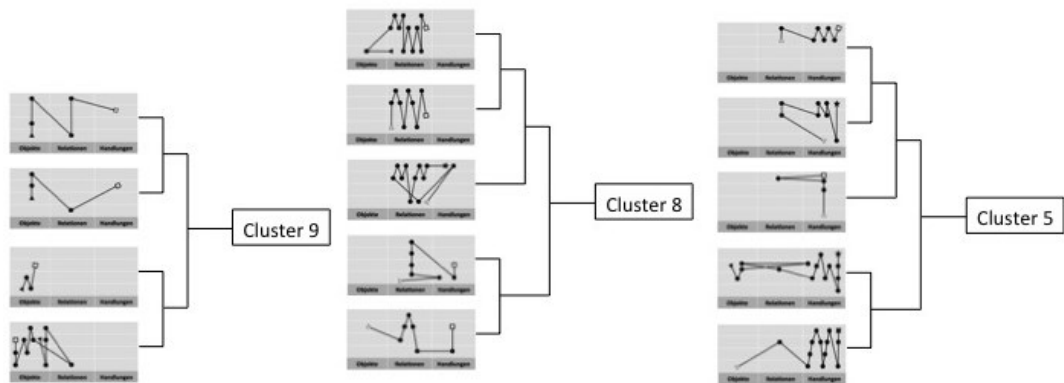


Abb. 63: Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Objektebene (Cluster 9, links), auf der Relationsebene (Cluster 8, Mitte) und auf der Handlungsebene (Cluster 5, rechts)

Es zeigt sich hier also ein Bild, das den obigen qualitativen Überlegungen überraschend nahe kommt und die verschiedenen Verläufe, die auch vor dem theoretischen Hintergrund diskutiert wurden, gut separiert.

Übergang:  $k = 0,25$  zu  $k = 0,5$

Es sind im Wesentlichen drei Effekte, die beim Übergang zu einem höheren Gewichtungsfaktor bezüglich der Aufenthaltshäufigkeiten bemerkenswert sind. Zum einen bleiben die Gruppierungen der Denkabschnitte, die ihren Schwerpunkt auf der Objekt- bzw. Relationsebene haben, nahezu unverändert. Die Cluster mit Schwerpunkt auf der Handlungsebene zerfallen jedoch in kleinere Cluster, einige Datensätze werden anderen Clustern zugeordnet bzw. kommen aus anderen Clustern hinzu. Insgesamt geschieht die Umordnung so, dass dünn besetzte Matrizen und Matrizen mit niedrigen Einträgen in größeren Clustern zusammengefasst werden, während Matrizen mit vielen oder hohen Einträgen stärker differenziert werden. Dies führt dazu, dass in den großen neuen Clustern 1 (14 Elemente) und 7 (16 Elemente) eine deutliche Gemeinsamkeit nur noch schwer zu erkennen ist, während die abgebildeten Cluster 5, 8 und 10 mit recht ähnlichen Datensätzen dennoch unterschieden werden (Abb. 64).

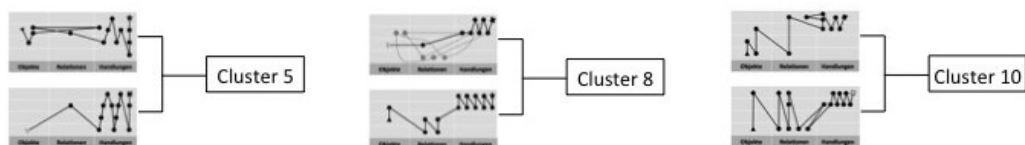


Abb. 64: Die Cluster 5, 8 und 10 werden trotz der augenscheinlichen Ähnlichkeit ihrer Elemente unterschieden.

Übergang:  $k = 0,5$  zu  $k = 1$ 

Der eben bereits beschriebene Trend bei der Entwicklung der Cluster setzt sich erwartungsgemäß bei weiterer Erhöhung des Gewichtungsfaktors fort. Wie oben bereits beschrieben entsteht ein sehr großes Cluster mit 31 Datensätzen, das sich überwiegend aus den ursprünglichen Clustern 1, 2 und 7 zusammensetzt. Die Datensätze werden dabei alle durch eine dünn besetzte Matrix mit niedrigen Werten repräsentiert. Daneben entstehen vier zweielementige Cluster – darunter die bereits in Abb. 64 betrachteten. Während das ursprüngliche Cluster 3 (starke Bewegung auf der Relationsebene) unverändert wieder gebildet wird (nun Cluster 4), zerfallen die ursprünglichen Cluster 2 und 4, die bei der Gewichtung mit den Faktoren 0,25 bzw. 0,5 nahezu unverändert Denkabschnitte auf der Objekt- bzw. Relationsebene (zielstrebigem Verlauf) repräsentierten.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass eine zu stark gewichtete Aufenthaltshäufigkeit zu einer sehr starken Ausdifferenzierung von Datensätzen mit hohen Aufenthaltshäufigkeiten führt, während verschiedene Datensätze mit dünn besetzten Matrizen und niedrigen Einträgen nicht mehr angemessen getrennt werden können.

Zusammenfassung

Aus den durchgeführten Clusteranalysen können im Wesentlichen zwei Erkenntnisse gewonnen werden.

Zum einen konnten die verschiedenen in der qualitativen Analyse beschriebenen Gruppen auch durch die Clusteranalysen beobachtet werden. Die Clusteranalyse als quantitatives Werkzeug ist also grundsätzlich dazu geeignet, verschiedene *Wege der Analogiebildung* zu erkennen und bezüglich der Hintergrundtheorie geeignete Gruppen zu generieren.

Die obigen Erläuterungen zeigen allerdings, dass manche Gruppen erst durch eine veränderte Schwerpunktsetzung bei der Mathematisierung der Datensätze scharf getrennt werden können. Da vor dem Hintergrund des theoretischen Konstrukts nicht zwingend eine disjunkte Gruppierung angestrebt werden muss, kann die Durchführung mehrerer Clusteranalysen hier durchaus zu einem gewinnbringenden Ergebnis führen: Je nach mathematischer Schwerpunktsetzung kann so der jeweilige Fokus auf die Daten variiert werden. Soll der Fokus stärker auf den tendenziellen Verlauf der Denkwege gerichtet sein, so kann eine Clusteranalyse ohne Berücksichtigung von Aufenthaltshäufigkeiten durchgeführt werden. Kurze Wege mit unterschiedlichem Verlauf können auf diese Weise gut ausdifferenziert werden. Sollen auch Effekte berücksichtigt werden, die von der Aufenthaltshäufigkeit in den Feldern des ZDM-Diagramms abhängen (wie z. B. der typische mehrfache Wechsel zwischen „Schließen“ und „Begründen“), können erst Weg-Matrizen mit (gewichteten) Aufenthaltshäufigkeiten zu einer entsprechenden Gruppenbildung führen. Auch lange Denkwege mit vielen Stationen im ZDM-Diagramm können so besser unterschieden wer-

den. Die Entwicklung der Clusterbildung bei steigendem Gewichtungsfaktor sollte dabei beobachtet und im Sachzusammenhang interpretiert werden. Wird ein Datensatz dabei durch die Clusteranalyse, abhängig von der mathematischen Modellierung, unterschiedlichen Gruppen zugeteilt, kann dies ebenso vor dem theoretischen Hintergrund interpretiert werden, wie bei der obigen qualitativen Analyse.

## 4.5 Verschiedene Wege der Analogiebildung

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen, dass auf der theoretischen Grundlage Denkabschnitte eines Analogiebildungsprozesses nach ihrem Verlauf im ZDM-Diagramm unterschieden werden können. Es ergeben sich Gruppierungen, denen in Bezug auf den Analogiebildungsprozess als Ganzen verschiedene Bedeutungen beigemessen werden können. Entsprechend können für das Erlernen von Analogiebildungsfähigkeiten verschiedene Anforderungen an die verwendeten Aufgabenformate formuliert werden. Es zeigt sich dabei, dass Denkabschnitte, die sich schwerpunktmäßig innerhalb einzelner Phasen und Ebenen bewegen, ebenso bedeutsam sind wie diejenigen, die einen Übergang zwischen einzelnen Phasen oder Ebenen markieren. Nachfolgend werden die sich hieraus ergebenden Konsequenzen zusammenfassend dargestellt und Vorschläge für geeignete Aufgabenformate zum Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten unterbreitet.

### 4.5.1 Analogiebildung beginnen – strukturierendes oder objektorientiertes Vorgehen

Die Aufgabenbearbeitungen zeigen deutlich, dass bei vielen Analogiebildungsprozessen strukturierende Überlegungen den Ausgangspunkt des Denkprozesses darstellen (strukturierendes Vorgehen, vgl. 4.4.5). Ausgangs- und Zielbereich werden auf allen Ebenen zunächst getrennt betrachtet, bevor Beziehungen zwischen den beiden Bereichen hergestellt werden. Auch vor dem Hintergrund der theoretischen Überlegungen erscheint dieses Vorgehen sinnvoll, ist doch damit die Grundlage des Analogiebildungsprozess im Sinne Sternbergs (1977) auf allen Ebenen gelegt. Sollen Analogiebildungsprozesse angestoßen werden, so kann diese Vorgehensweise durch die Verwendung geeigneter Aufgabenformate unterstützt werden. Beginnend mit der Benennung der beteiligten Objekte im Ausgangs- und im Zielbereich können in einem nächsten Schritt deren gegenseitige Beziehungen z. B. in einem Strukturdiagramm veranschaulicht werden. Auf dieser Grundlage werden die verwendeten Operationen im Ausgangsbereich geordnet und begründet, bevor die Verbindung zum Zielbereich hergestellt wird.

Eine weitere Vorgehensweise, die im Zuge der Untersuchung häufig als Grundlage für einen erfolgreichen Analogiebildungsprozess beobachtet wurde, ist eine gründliche Analyse der Analogie auf der Objektebene als Vorbereitung für die Überlegungen auf den anderen Ebenen (objektorientiertes Vorgehen, vgl. 4.4.6). Auch dieses Vorgehen lässt sich vor dem Hintergrund theoretischer Überlegungen als sinnvoll rechtfertigen, denn das Betrachten der Analogie auf der Objektebene ist zunächst der einfachste Teil des Analogiebildungsprozesses. Implizit werden dabei allerdings die zugrundeliegenden Relationen bereits benutzt. Die entsprechenden Analogien auf der Relationsebene müssen in einem nächsten Schritt dann nur noch expliziert werden, um Handlungsoptionen aus der strukturellen Ebene ableiten zu

können. Für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten kann diese Vorgehensweise dahingehend unterstützt werden, dass der Lernende zunächst angehalten wird, Analogien auf der Objektebene bewusst herzustellen und zu benennen. Dabei können auch ähnliche Aufgabenformate zum Tragen kommen, wie sie z. B. aus Intelligenztests bekannt sind. Bezogen auf die konkrete Aufgabenstellung kann auf diese Weise das Entdecken der entsprechenden Objektanalogien angeleitet werden.

Da also beide Vorgehensweisen beim Bilden von Analogien eine gute Grundlage für den weiteren Verlauf des Analogiebildungsprozesses legen, können Aufgabensets zum Erlernen von Analogiebildungsfähigkeiten so gestaltet sein, dass in verschiedenen Aufgaben jeweils einer der Zugänge unterstützt und begleitet wird. Für das weitere Vorgehen innerhalb des Analogiebildungsprozesses ist bereits aus der Analyse der Daten deutlich geworden, dass es wesentlich darauf ankommt, die Übergänge zwischen den Phasen (vor allem beim strukturorientierten Zugang) und den Ebenen (vor allem beim objektorientierten Zugang) zu bewältigen. Vorschläge zur Initiierung dieser Übergänge und zur Unterstützung der Lernenden bei deren Überwindung werden im nachfolgenden Abschnitt unterbreitet.

#### **4.5.2 Phasen und Ebenen der Analogiebildung – Übergänge initiieren und begleiten**

##### Phase: „Abbilden“

Wie in Abschnitt 1.4.2 bereits herausgestellt, spielt die Phase des Abbildens einerseits eine wichtige Schlüsselrolle im Analogiebildungsprozess, da hier die Verbindung zwischen Ausgangs- und Zielbereich erst hergestellt wird. Andererseits tritt diese Phase bei den Verbalisierungen des Prozesses nicht sehr deutlich in Erscheinung (vgl. 4.4.3). Sollen Analogiebildungsfähigkeiten auch auf einer Metaebene entwickelt werden, gilt es deshalb insbesondere dieser Phase des Analogiebildungsprozesses besonderes Augenmerk zu schenken und Aufgabenformate zu entwickeln, welche die Aufmerksamkeit bewusst auf die Verbindungen zwischen Ausgangs- und Zielbereich lenken. Wenn dieser Teil des Analogiebildungsprozesses mit Hilfe geeigneter Aufgaben stärker ins Bewusstsein gerückt wird, könnte es gelingen, den Übergang von strukturierenden Überlegungen hin zum Schließen planvoller, zielgerichteter und weniger intuitiv zu gestalten, als dieser bei einigen der untersuchten Aufgabenbearbeitungen zu sein scheint.

##### Phasen: „Schließen“ und „Beurteilen“

Den Beobachtungen aus 4.4.5 und 4.4.6 zufolge spricht vieles dafür, dass der typische mehrfache Wechsel zwischen den Phasen „Schließen“ und „Beurteilen“ auf der Relations- und der Handlungsebene zu erfolgreichen Aufgabenbearbeitungen führt. Will man diese

Erkenntnis für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten nutzbar machen, müssen demnach Aufgabenformate entwickelt werden, bei denen das als typisch erkannte Zusammenspiel zwischen Schließen und Beurteilen eingeübt und bewusst initiiert wird. Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass Ergebnisse vorher abgeschätzt werden und die Schätzwerte als Bezugspunkt in der Beurteilungsphase herangezogen werden müssen. Als eine andere Form des Beurteilens kann die Interpretation des Ergebnisses im Sachzusammenhang verlangt werden. Sollen in der Phase des Beurteilens durch die Wahl der Aufgaben bewusst Ausgangs- und Zielbereich miteinander in Verbindung gebracht werden, um Analogiebildungen bzgl. ihrer Richtigkeit zu überprüfen, kann auch an dieser Stelle die Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen dazu dienen, solche Überlegungen anzuleiten.

#### Ebene: „Relationen“

Versteht man das Bilden von Analogien vor allem als Strukturabbildung zwischen einem Ausgangs- und einem Zielbereich, so kommt den Relationen zwischen den beteiligten Objekten eine besondere Bedeutung zu (vgl. 1.2.2). Diese kommt umso mehr zum Tragen, wenn die Analogiebildung um die Handlungsebene erweitert wird und sich auch auf (mathematische) Operationen beziehen soll. Es sind nämlich vor allem die Relationen zwischen den beteiligten Objekten, durch die mögliche Handlungsoptionen festgelegt werden (vgl. 1.2.3). Insofern ist der Relationsebene für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Vor dem Hintergrund der beobachteten Wege im ZDM-Diagramm scheinen die folgenden beiden Aspekte wichtig: Soll das Bilden von Analogien als heuristische Strategie erkannt und am konkreten Problem angewandt werden, so ist die Ausweitung der Analogie von der Strukturabbildung auf den dadurch erschlossenen Handlungsraum zwingend notwendig. Das Erfassen der zugrundeliegenden Analogie auf der Relationsebene öffnet den Blick auf die möglichen Handlungsoptionen und ist deshalb wichtiger Bestandteil des Problemlöseprozesses. Das bewusste und zunächst geführte Durchlaufen der einzelnen Analogiebildungsphasen ist deshalb vor allem auf der Relationsebene eine wichtige Übung für das Erlernen dieser heuristischen Strategie. Zum anderen muss der Weg auf die Handlungsebene natürlich auch gegangen werden. Es müssen also die verschiedenen Handlungsoptionen erkannt, benannt und gegeneinander abgewägt werden. Aufgabenstellungen, die diesen Aspekt der Analogiebildungsfähigkeit trainieren sollen, müssen also die Relationsebene als Ausgangspunkt für mathematische Operationen ins Blickfeld rücken. Dies kann z. B. durch die konkrete Frage nach Handlungsmöglichkeiten geschehen, die sich durch die Analogiebildung auf Objekt- und Relationsebene eröffnen haben.

##### Ebenen: Der Übergang „Relationen“ – „Handlungen“

Wie in 1.2.3 bereits dargelegt wurde, bildet der Übergang von der Relations- auf die Handlungsebene einen besonderen Schritt im Analogiebildungsprozess. Es ist dieser Übergang, der die hier betrachteten Analogiebildungsprozesse von klassischen Analogiebetrachtungen unterscheidet. Erst wenn die vorhandene strukturelle Analogie erkannt ist und auf der Handlungsebene genutzt wird, um Problemlösungsansätze zu entwickeln, kann von einer heuristischen Strategie gesprochen werden, erst dann wird ein Transfer im Sinne Klauers (2011) geleistet (vgl. 1.4.1). Soll die Fähigkeit zur Analogiebildung für das Erlernen allgemeiner mathematischer Kompetenzen zur Verfügung stehen, ist es also zentral, dass dieser Übergang vollzogen werden kann. Aufgabenstellungen, die diesen Übergang bewusst in den Fokus nehmen, können an die Fragestellungen nach Handlungsoptionen, die im vorangegangenen Abschnitt vorgeschlagen wurden, anknüpfen und diese konkretisieren. Mit Bezug zu bereits bearbeiteten Beispielen können Fragen nach konkreten Operationen gestellt werden (z. B. „Kannst du auch bei dieser Aufgabe die Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke ausnutzen?“ oder „Erlaubt der Zusammenhang der Variablen auch hier das Aufstellen einer geeigneten quadratischen Gleichung?“).

Bezieht man neben dem als typisch erkannten mehrfachen Wechsel zwischen „Schließen“ und „Beurteilen“ auf der Handlungsebene auch die anderen auf dieser Ebene beschriebenen Beobachtungen mit ein, so können weitere Empfehlungen abgeleitet werden: Neben dem stetigen Beurteilen und Interpretieren der verwendeten Operationen auch für Teilschritte kann der Lernende bei Unsicherheit dazu angehalten werden, wiederholt Strukturierungen auf der Handlungsebene im Ausgangs- und im Zielbereich vorzunehmen, um weitere Operationen für die Analogiebildung zu erschließen.



## 5 Zusammenfassung

### 5.1 Rückblickende Reflexion des Vorgehens und der Ergebnisse

Die Ausführungen der letzten beiden Kapitel zeigen, dass die eingehende Analyse der vorliegenden Denkprozesse und deren Denkabschnitte das Wesen von Analogiebildungsprozessen in vielen Punkten offenlegen kann. Insbesondere wird deutlich, dass das theoretische Konstrukt tragfähig ist und die Unterscheidung verschiedener *Wege der Analogiebildung* auf dieser Grundlage auch durch quantitative Analysemethoden getroffen werden kann. Es wurde die Verschränkung zweier Dimensionen der Analogiebildung (Phasen und Ebenen) vorgenommen, deren Bedeutung für den Verlauf von Analogiebildungsprozessen und damit für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten relevant ist. Mit der zweidimensionalen Darstellung von *Wege der Analogiebildung* in diesem Modell (ZDM-Darstellungen) wurde ein Werkzeug entwickelt, das den Verlauf von Analogiebildungsprozessen sichtbar macht.

Die Methode des paarweise Lauten Denkens beim Lösen von Aufgaben mittels gelöster Aufgabenbeispiele erweist sich dabei in einem dreiphasigen Untersuchungs-Design als gut geeignet, um Analogiebildungsprozesse zu initiieren, offenzulegen und für eine formal strukturierende qualitative Inhaltsanalyse aufzubereiten. Mittels geeigneter Software und der damit erzeugten grafischen Darstellungen zu den beobachteten Denkprozessen (Timeline-Darstellungen) können erste Analysen durchgeführt und erste Charakteristika von *Wege der Analogiebildung* identifiziert werden. Als besonders wertvoll zeigt sich in dieser Phase des Analyseprozesses die Triangulation auf der Datenebene: Transkribierte Dialoge, Videomaterial, Schülerdokumente und Teachback-Protokolle vermögen sich im Zweifelsfall gut zu ergänzen und eine belastbare Argumentationsgrundlage für die getroffenen Entscheidungen zu liefern. Die resultierende Einteilung in Denkabschnitte führt schließlich zu den gewünschten ZDM-Darstellungen, die anschließend als neuartiges Werkzeug zur qualitativen und quantitativen Analyse herangezogen werden.

Bereits die qualitative Analyse der ZDM-Darstellungen legt offen, dass sowohl die Ebenen als auch die Phasen der Analogiebildung relevant sind für die Beschreibung des Verlaufs

von Analogiebildungsprozessen und sich vor diesem Hintergrund charakteristisch unterschiedliche *Wege der Analogiebildung* für die einzelnen Denkabschnitte ergeben. Diese lassen sich in einem ersten Schritt dem Augenschein nach ordnen und gruppieren. Sieht man die Denkabschnitte im Kontext des gesamten Analogiebildungsprozesses, so kann der charakteristische Verlauf der Denkabschnitte einer so entstandenen Gruppe vor dem theoretischen Hintergrund interpretiert werden. Es zeigt sich, dass den einzelnen Gruppen auf der Grundlage des Verlaufs der gruppierten Wege jeweils eine eigene Bedeutung beigemessen werden kann, die für den Analogiebildungsprozess als Ganzes relevant ist. Diese Erkenntnis wiederum erlaubt Rückschlüsse auf Möglichkeiten zur Unterstützung von Lernenden beim Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten, wie sie in Abschnitt 4.5 gezogen werden. Bei der Formulierung konkreter Vorschläge zur Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeiten im Abschnitt 5.2 wird hierauf Bezug genommen: Das Wissen um die besondere Bedeutung verschiedener *Wege der Analogiebildung* ermöglicht es, Aufgaben- und Fragestellungen so zu formulieren, dass charakteristische Denkabschnitte und Übergänge im Zuge eines Analogiebildungsprozesses besonders in den Blick genommen und gefördert werden können.

In einem letzten Schritt wird ein quantitatives Analyseinstrument entwickelt, das die qualitativ gefundenen Ergebnisse zu bestätigen vermag. Damit die Wege der Analogiebildung überhaupt im Rahmen einer quantitativen Analyse untersucht werden können, ist die weitere Abstraktion der Denkabschnitte durch eine Mathematisierung der ZDM-Darstellungen notwendig. Die Mathematisierung der Wege kann dabei mit unterschiedlichem Abstraktionsgrad erfolgen, je nachdem, in welchem Maß Aufenthaltshäufigkeiten auf den Feldern des ZDM-Diagramms berücksichtigt werden sollen. Im Rahmen einer mehrstufigen Clusteranalyse zeigt sich, dass bei der Gruppierung der vorliegenden Datensätze durch die Variation des Abstraktionsgrads der Fokus auf unterschiedliche Aspekte im Verlauf der *Wege der Analogiebildung* gelegt werden kann.

Schon im Rahmen der qualitativen Analyse der Datensätze wird deutlich, dass es eine trennscharfe Gruppierung der beobachteten Denkabschnitte nicht geben kann. Allein aus der sehr unterschiedlichen Länge der einzelnen Denkabschnitte resultieren Datensätze, die mehrere typische Merkmale bezüglich des Verlaufs im ZDM-Diagramm in sich vereinen und so mehreren Gruppierungen zugeordnet werden können. Strebt man also keine disjunkte Clusterung der Datensätze an, können sowohl die charakteristischen Gruppen, als auch das Phänomen der Zugehörigkeit eines Datensatzes zu mehreren Gruppen im Rahmen der mehrstufigen Clusteranalyse abgebildet werden: Auch hier beobachtet man bei steigender Gewichtung der Aufenthaltshäufigkeiten Gruppierungen, die erhalten bleiben und einzelne Datensätze, welche die Gruppenzugehörigkeit wechseln.

Natürlich erwartet man bei der quantitativen Analyse einer ungeordneten Datenmenge mittels einer Clusteranalyse, dass die erwarteten Cluster nicht bereits im Vorfeld durch eine

qualitative Analyse postuliert werden. Vielmehr sollten die rein durch quantitative Kriterien aus der Datenmenge entstandenen Cluster erst im Nachhinein im Sachzusammenhang interpretiert werden. Das umgekehrte Vorgehen im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird mit dem Informationsverlust gerechtfertigt, der mit der Mathematisierung der Wege im ZDM-Diagramm einhergeht. Nur auf diesem Weg konnte die mehrstufige Clusteranalyse als passendes quantitatives Untersuchungswerkzeug entwickelt werden. Da die Ergebnisse der qualitativen Analyse damit im Wesentlichen reproduziert werden können, steht dieses Werkzeug nun für Nachfolgeuntersuchungen zur Verfügung. Es können damit nun auch größere Datenmengen ohne vorherige qualitative Betrachtungen analysiert und zumindest vorsortiert werden.

Eine eindeutige Aussage darüber, wie der Erfolg einer Aufgabenlösung vom Verlauf des Analogiebildungsprozesses abhängt, kann auf der vorliegenden Datengrundlage zwar nicht getroffen werden: Es können kurze, zielstrebige Gedankengänge, die zum Ziel führen, genauso beobachtet werden, wie Denkprozesse, die in mehreren Anläufen zu einem Ergebnis kommen. Scheinbar stringente Aufgabenbearbeitungen können ebenso zu einem falschen Resultat führen, wie Argumentationen, die immer wieder unterbrochen und an einer anderen Stelle wieder aufgenommen werden. Dennoch können die gewonnenen Erkenntnisse nun als Grundlage für die Entwicklung geeigneter Aufgabensets genutzt werden, die dazu beitragen, Analogiebildungsprozesse im Mathematikunterricht anzuleiten und zu beurteilen. Im nachfolgenden Abschnitt werden deshalb konkrete Vorschläge für den Unterrichtsalltag unterbreitet, die es einerseits ermöglichen, auf der Grundlage der vorliegend gewonnenen Erkenntnisse Aufgaben- und Fragestellungen so zu formulieren, dass bewusst bestimmte Aspekte eines Analogiebildungsprozesses in den Blick genommen werden können (Abschnitte 5.2.1 und 5.2.2). Durch die gezielte Initiierung auch von Teilaspekten eines Analogiebildungsprozesses liegen vor dem Hintergrund der vorliegenden Ergebnisse schließlich Analyse- und Diagnosemöglichkeiten auf der Hand. Andererseits sollen im Folgenden auch geeignete Inhaltsbereiche vorgestellt werden, auf denen sich Analogiebildung als typische heuristische Strategie auch im Rahmen der Schulmathematik etablieren lässt (Abschnitte 5.2.3, 5.2.4 und 5.2.5).

## 5.2 Vorschläge für den Unterrichtsalltag

Der Anspruch mathematikdidaktischer Forschung ist es unter anderem, aus ihren Ergebnissen Schlussfolgerungen für den Unterrichtsalltag ziehen zu können, die eine Steigerung des Lernerfolgs implizieren. Setzt man voraus, dass der Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten ein erwünschtes Ziel des Mathematikunterrichts ist, so sollten Erkenntnisse über den Prozess der Analogiebildung in Vorschlägen münden, wie dieses Ziel erreicht werden kann.<sup>53</sup> Im Folgenden wird an konkreten Beispielen aufgezeigt, wie die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit im Unterricht nutzbar gemacht werden können. Zum einen geht es dabei um die Vermittlung von Analogiebildungsfähigkeiten und eines zugehörigen Metawissens über Analogiebildung als heuristische Strategie. Zum anderen geht es darum, der Lehrperson Vorschläge zu unterbreiten, wie obige Erkenntnisse im Sinne professionellen Wissens (z. B. im Sinne Shulmans als *pedagogical content knowledge*; 1986, 1987) genutzt werden können, um Analogiebildungsprozesse im Unterricht zu initiieren, zu analysieren, zu diagnostizieren, zu begleiten und zu unterstützen.

### 5.2.1 Über Aufgabentexte sprechen<sup>54</sup>

Ein erster Schritt zum Aufbau von Analogiebildungskompetenzen liegt darin, aus Problemstellungen und Aufgabentexten die für die Fragestellung relevanten Objekte zu identifizieren und deren Relationen erfassen zu können. Nicht zuletzt der Umgang mit sogenannten „Kapitänsaufgaben“ zeigt im Rahmen von Untersuchungen über das Verständnis mathematischer Texte bei Kindern im Grundschulalter, dass bereits hier erste Schwierigkeiten auftreten: Viele Kinder neigen dazu, mit den vorkommenden Zahlen einfach zu rechnen, auch wenn diese für die Fragestellung nicht relevant sind (vgl. z. B. Selzer/Spiegel, 2003; Stern, 1992; Keller/Brandenberg, 1999).

Wo liegen hier die Probleme? Was kann man tun?

H. Dambeck meint im Nachrichtenmagazin SPIEGEL-Online, hierauf erste Antworten gefunden zu haben:

„Im Unterricht werden Textaufgaben intensiv geübt. Die Texte selbst sind meist belanglos und haben mit dem tatsächlichen Leben der Kinder wenig zu tun. Wozu sollen sie die

---

<sup>53</sup> KMK-Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2015) - Die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (K2) im Anforderungsbereich I: „Die Schülerinnen und Schüler können einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden.“

<sup>54</sup> Die Vorschläge in diesem Abschnitt gehen auf den Artikel „Von Äpfeln, Birnen, Plus und Minus“ (Rupert, 2012) zurück. Es wird in größeren Teilen auch wörtlich aus diesem Artikel zitiert, ohne dass dabei die für direktes Zitieren übliche Notation verwendet wird. Da es sich um einen Artikel des Verfassers handelt, scheint dieses Vorgehen zugunsten der Lesbarkeit gerechtfertigt.

Aufgabe dann genau lesen, wenn sie ja immer wieder nur Zahlen in eine Gleichung einsetzen? In der Regel ist bei den Textaufgaben zudem jene Rechenoperation gefragt, die gerade im Unterricht besprochen wurde. (...) Das Denken kommt zu kurz [...]“

(H. Dambeck, SPIEGEL-Online, 17.01.2012)

Versucht man den Ergebnissen der Studien zu „Kapitänsaufgaben“ etwas Positives abzugewinnen, dann ist es vielleicht das erkennbare Bemühen der Schüler, die Mathematik hinter der Aufgabe zu finden. Die Ergebnisse zeigen dann allerdings, dass im Zuge dieser Bemühungen die Inhalte des Aufgabentexts nicht zur Lösung der Aufgabe herangezogen oder gar bewusst ignoriert werden. Die mathematischen Objekte treten in den Vordergrund, der Kontext und die Struktur des Problems werden weitgehend ausgeblendet.

Weitere Schwierigkeiten beim Umgang mit Textaufgaben ergeben sich aus der Tatsache, dass Kinder beim Rückgriff auf bereits gelöste Aufgabenbeispiele dazu neigen, inhaltliche Ähnlichkeiten zur Beispielaufgabe eher als Argument für ihr Vorgehen bei der Lösung einer neuen Aufgabe heranzuziehen, als Ähnlichkeiten in der mathematischen Struktur der beiden Aufgaben (vgl. Bassok, 1997).

Eine mögliche Erklärung für diese beiden, auf den ersten Blick widersprüchlichen Befunde, liefert die eingehende Betrachtung der verschiedenen Informationen, die von den Kindern im Rahmen einer Textaufgabe verarbeitet werden müssen.

Da ist einerseits der *Kontext* der Aufgabe, den es zu erfassen gilt:

- Worum geht es?
- Was ist gesucht?

Andererseits sind den *beteiligten Objekten* quantifizierende Angaben zugeordnet:

- Was ist gegeben?

Um sich nun *mathematische Handlungsoptionen* erschließen zu können, muss die *mathematische Struktur* hinter einer Aufgabe erkannt werden:

- Wie hängen die Größen zusammen?
- Welche mathematischen Operationen sind sinnvoll?

Im Hinblick auf die Fähigkeiten zur Analogiebildung sind die Kinder nach dem Lösen einer Aufgabe im besten Fall in der Lage, deren mathematische Struktur in neuen Aufgaben wiederzuerkennen und Lösungsstrategien von der bekannten auf die neue Aufgabe zu übertragen. Schwierigkeiten dabei können demnach auf ganz verschiedenen Ebenen auftreten. Wichtig ist es deshalb, den Schülern das Verstehen auf den einzelnen Ebenen zu erleichtern, darüber hinaus muss aber auch deutlich werden, dass die sinnvolle Lösung eines Problems nur unter Berücksichtigung aller drei genannten Ebenen sicher gelingt. Hinsichtlich des Aufbaus von Analogiebildungsfähigkeiten können also zunächst die Ebenen der

Analogiebildung (insbesondere die Objekt- und die Relationsebene) in den Fokus genommen werden.

Dazu genügt es in einem ersten Schritt, Aufgabentexte verschiedener Aufgaben genau zu analysieren, Ähnlichkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten und diese zu verbalisieren. Es gilt also Aufgabensequenzen zu entwickeln, die genau auf diese Zielsetzung zugeschnitten sind. Ziel ist es, die Ebenen der Analogiebildung separat deutlich werden zu lassen. Zusätzlich können derartige Aufgabensequenzen auch diagnostischen Zwecken dienen: Bestehen die auftretenden Schwierigkeiten eher darin, dass die mathematische Ebene von der Ebene auftretender Oberflächenmerkmale im Kontext nicht getrennt werden kann? Oder ist das Problem gerade anders herum gelagert, dass nämlich der Zusammenhang zwischen der mathematischen Ebene und dem Kontext nicht hergestellt werden kann (vgl. Kapitänsaufgaben)?

Im folgenden wird aufgezeigt, wie Aufgaben, die bezüglich der genannten Ebenen verglichen werden können, konzipiert sein sollten.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- (K) Kontext
- (O) Oberflächenmerkmale (gegebene Größen, Objektebene)
- (S) Struktur (Relationsebene)

Konstruiert man nun Aufgaben, die sich jeweils in mindestens einem der Merkmale (K), (O) oder (S) unterscheiden, ergeben sich potentiell acht Aufgaben pro Aufgabensequenz. Ausgehend von einer Aufgabe mit bestimmtem Kontext (K), bestimmten Oberflächenmerkmalen (O) und einer bestimmten Struktur (S) muss nun eine Aufgabe konstruiert werden, die z. B. den gleichen Kontext und die gleiche Struktur aufweist, sich aber in den Oberflächenmerkmalen von der ursprünglichen Aufgabe unterscheidet.

Stellt man diesen beiden Aufgaben nun im obigen Sinne weitere Aufgaben zur Seite, dann können die Schüler über die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Aufgaben ins Gespräch kommen. Insbesondere können Sie diskutieren, welche Art der Ähnlichkeit nützlich ist, wenn man sich beim Lösen einer Aufgabe an eine bereits gelöste Aufgabe erinnert (vgl. Pólya, 1949).

Nachfolgend wird ein entsprechendes Aufgabenset vorgestellt und anschließend hinsichtlich der obigen Ausführungen erläutert. Es werden dabei Fragestellungen formuliert, die im obigen Sinne für den Erwerb von Analogiebildungskompetenzen als geeignet erscheinen.

Beispiel: Über Aufgabentexte sprechen**Aufgabe 1 – Die Losbude (I)**

An einer Losbude gibt es Lose mit sechs verschiedenen Motiven. Diese wiederum sind jeweils in vier verschiedenen Farben vorhanden. Jedes dieser Gewinnlose ist zu Beginn zwölf Mal auf die Lostrommeln verteilt. Sechs Lose kosten 4 €. Der Budenbesitzer muss die Lostrommeln erfahrungsgemäß alle drei Stunden neu befüllen.

Mit welchen Tageseinnahmen kann der Budenbesitzer rechnen?

**Aufgabe 2 – Die Losbude (II)**

Zu Beginn des einwöchigen Herbstfests spendet ein regionaler Sponsor Preise für die Losbude im Wert von 350 €. Am ersten Festtag erspielen sich die Besucher des Festes insgesamt vier große Hauptgewinne im Gesamtwert von je 45 €, sechs kleine Hauptgewinne im Wert von insgesamt 150 €, 42 mittlere Gewinne im Wert von 330 € und zahlreiche Kleingewinne im Gesamtwert von 270 €. Aus den Einnahmen durch die Losverkäufe von 1289 € muss er außerdem die Standgebühren von 170 € und laufende Kosten von 45 € bezahlen.

Kann der Losbudenbesitzer zufrieden sein?

**Aufgabe 3 – Das Riesenrad (I)**

Das Riesenrad „Bellevue“ in Düsseldorf ist mit einer Höhe von 56 m eines der größten transportablen Riesenräder der Welt. In jeder seiner 42 Gondeln haben sechs Personen Platz. Eine Fahrkarte kostet 6 € pro Person und eine Umdrehung dauert 4 Minuten.

Wie viel Geld können die Betreiber am Tag einnehmen?

**Aufgabe 4 – Das Riesenrad (II)**

Am Ende des Tages zieht der Riesenradbetreiber Bilanz:

„Mit den Fahrtickets haben wir heute 5430 € eingenommen. Für jeden meiner acht Mitarbeiter muss ich 170 € zahlen. Die Standgebühr beträgt am Tag 1700 €, für Strom muss ich 210 € ausgeben. Die laufenden Kosten für die Trucks, Versicherungen u.s.w. belaufen sich täglich auf 1170 €. In unserem Riesenradshop haben wir 120 € eingenommen und unser Fotoservice hat 175 € eingebracht. Für Reparaturen, Wartungen und Ersatzteile muss ich 890 € am Tag rechnen.“

War es ein guter Tag für den Betreiber?

Aufeinander aufbauende Fragestellungen und Aufträge könnten dann lauten:

**Arbeitsaufträge zu den Aufgaben 1 bis 4**

1. Erkläre in eigenen Worten, worum es in der Aufgabe geht.
2. Formuliere die Frage in eigenen Worten.
3. Stelle die gegebenen Größen in einem Bild dar. Es soll deutlich werden, wie die Größen zusammenhängen.
4. Welche der Aufgaben findest du ähnlich? Begründe genau!
5. Welche Aufgaben findet dein Banknachbar ähnlich? Lass dir seine Begründung erläutern!
6. Diskutiert verschiedene Möglichkeiten!

Die Wirksamkeit der Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit bereits mehrfach dargestellt (vgl. z. B. Abschnitt 4.5.2). Liegen zu ausgewählten Aufgabentexten bereits Lösungsbeispiele vor, kann sich noch folgende Frage anschließen:

7. Welche der bereits gelösten Aufgaben können dir beim Bearbeiten der anderen Aufgaben helfen? Begründe genau und beziehe dich auf die Antwort zu Auftrag 6!

Weitere in diesem Sinne beispielhaft ausgearbeitete Aufgabensets finden sich bei Ruppert (2012). Es wird deutlich, dass es zunächst darum geht, die verschiedenen Ebenen der Analogiebildung in das Blickfeld zu rücken: Sollen in den Aufträgen 1 und 2 die beteiligten Objekte benannt und mit ihren Eigenschaften beschrieben werden, wird durch Auftrag 3 die Struktur der Situation offengelegt. Die Aufträge 4 bis 6 zielen darauf ab, unterschiedliche Kriterien für die Ähnlichkeit der vorliegenden Aufgabentexte zu erkennen und zu diskutieren. Durch die Aufgabe 7 soll die strukturelle Ähnlichkeit verschiedener Aufgaben als nutzbringend erkannt werden, wenn es darum geht mathematische Handlungsoptionen in einer neuen Aufgabenstellung zu identifizieren – der wichtige Übergang von der Relations- auf die Handlungsebene wird bewusst gemacht. Die Bearbeitung der Aufträge 4 bis 7 kann zudem zu diagnostischen Zwecken herangezogen werden: Wird die strukturelle Ähnlichkeit nicht als gewinnbringend für die Lösung weiterer Aufgaben erkannt, kann die Ursache z. B. in einer zu starken Fokussierung des Kontexts oder der Oberflächenmerkmale liegen – eine Unterstützung bei der Beschreibung vorliegender Relationen und deren Übertragung scheint dann notwendig.



### 5.2.2 Die Arbeit mit gelösten Beispielen

Wurde das Augenmerk durch die Vorschläge in Abschnitt 5.2.1 vor allem auf die Strukturierung auf der Objekt- und Relationsebene gelegt, müssen nun Vorschläge folgen, die auch die Übergänge zwischen den Phasen des Analogiebildungsprozesses und vor allem den Übergang auf die Handlungsebene in den Mittelpunkt rücken.

In Abschnitt 3.1.1 wurde ausführlich dargelegt, dass die Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen hinsichtlich der Initiierung von Analogiebildungsprozessen im vorliegenden Forschungskontext am vielversprechendsten scheint. Die Ergebnisse der Forschungsarbeit zeigen, dass diese Hoffnung berechtigt ist: Die Schüler greifen zum Lösen neuer Problemstellungen gezielt auf die vorher betrachteten gelösten Aufgabenbeispiele zu und sind auch in der Lage, ihre Vorgehensweise dabei zu explizieren. Die Teachback-Interviews zeigen zudem, dass die Probanden ihre Strategie im Nachgang auch auf der Meta-Ebene reflektieren können. Dies kann zum Anlass genommen werden, die Arbeit mit gelösten Aufgabenbeispielen auch zur Initiierung und zur Diagnose von Analogiebildungsprozessen im Unterrichtsalltag heranzuziehen.

Die Idee, z. B. in Schulbücher voll ausgearbeitete Aufgabenbeispiele zu integrieren, ist nicht neu. So finden sich z. B. in der Schulbuchreihe *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien* konsequent zu jedem Abschnitt gelöste Aufgabenbeispiele verschiedener Aufgabentypen, bevor sich die Übungsaufgaben anschließen. Im Vorspann des Buches heißt es dazu: „Die vollständig bearbeiteten Beispiele bieten den Schülerinnen und Schülern Hilfe für das selbstständige Lösen von Aufgaben. Bei den Lösungen wird Wert auf die Wahl geeigneter Strategien und auf wichtige Gedankenschritte und Begründungen gelegt“ (Jgst. 9, Schmid & Weidig, 2007, S. 7). In der Schulbuchreihe *Fokus Mathematik – Gymnasium Bayern* tragen exemplarisch gelöste Arbeitsaufträge zu Beginn jedes Abschnitts zur Erarbeitung der entsprechenden Inhalte bei und es heißt hierzu: „Wesentliche Begriffe und Zusammenhänge werden in Form von Definitionen und Sätzen hervorgehoben und anhand von Beispielen erläutert“ (Jgst. 11, Jahnke & Scholz, 2009, S. 5). In der Schulbuchreihe *Delta neu* schließlich wird festgestellt: „Die Beispiele werden ausführlich behandelt und vermitteln zusammen mit dem Informationsteil ein gründliches Verständnis des Lernstoffs“ (Jgst. 5, Schätz & Eisentraut, 2009a, S. 6). Der Behandlung von gelösten Aufgabenbeispielen wird also durchweg eine große Bedeutung beigemessen. In allen drei Schulbuchreihen wird jedoch zum einen darauf verzichtet, den Schülern eine Arbeitsstrategie für den Umgang mit gelösten Aufgabenbeispielen an die Hand zu geben. Zum anderen werden die Lernenden auch nicht dabei angeleitet, gelöste Aufgabenbeispiele bewusst bei der Bearbeitung neuer Problemstellungen heranzuziehen – ein Rückbezug auf die gelösten Beispiele im Rahmen der Übungsaufgaben fehlt. Die Erfahrung aus dem Unterrichtsalltag zeigt jedoch, dass sich vor allem bei leistungsschwächeren Schülern die Idee, strukturelle Ähnlichkeiten zwischen bereits gelösten Aufgaben und neuen Problemstellungen zu nutzen, um eine Lösungsstrategie

zu entwickeln, nicht automatisch einstellt. Für diese Schüler ist jede neue Aufgabe eine Problemstellung, die es von Grund auf neu zu verstehen und zu bearbeiten gilt. Dies ist, vor allem bei Berufsanfängern im Lehrberuf, sehr häufig die Ursache für eine große Diskrepanz zwischen den Leistungserwartungen, die z. B. in schriftlichen Leistungsnachweisen an die Schüler gestellt werden, und deren tatsächlicher Leistungsfähigkeit. Das häufig zugrundeliegende Missverständnis hierbei ist einfach in eine Formel zu fassen: Ein Unterrichtsinhalt der *behandelt* wurde, ist deshalb noch lange nicht *behalten, verstanden* und *für den Transfer bereit* (vgl. Einleitung).

Wie also kann der Umgang mit gelösten Aufgabenbeispielen im Unterrichtsalltag gestaltet werden, um Analogiebildungsfähigkeiten zu fördern, Analogiebildung als gewinnbringende Lösungsstrategie in das Blickfeld des Lernenden zu rücken und diese Strategie schließlich kontextunabhängig verfügbar zu machen?

Greift man die Vorüberlegungen und die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf, so liegen erste Ideen auf der Hand: Es sollten in sich abgeschlossene Aufgabensequenzen ausgearbeitet werden, bei denen, ausgehend von *mehreren* gelösten Aufgabenbeispielen (vgl. dazu Abschnitt 3.1.1), die verschiedenen Ebenen und Phasen des Analogiebildungsprozesses bewusst in den Mittelpunkt gestellt und anschließend expliziert werden. Die vorliegend gewonnenen Erkenntnisse über verschiedene Wege der Analogiebildung sollten dabei in die Entwicklung solcher Aufgabensequenzen mit einbezogen werden. Wie dies anhand geeigneter Fragestellungen gelingen kann, wurde bereits in den Abschnitten 4.5.1 und 4.5.2 angedeutet – im Folgenden wird dazu ein weiteres Beispiel ausgeführt.

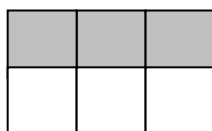
#### Beispiel: Aufgaben zum Invarianzprinzip

Als Ausgangspunkt werden hier die gelösten Aufgabenbeispiele einer Aufgabensequenz verwendet, die auch im Zuge der vorliegenden Forschungsarbeit zum Einsatz kam (vgl. auch Anhang I). Es können jedoch genauso gelöste Aufgabenbeispiele aus den oben genannten Schulbüchern als Grundlage dienen.

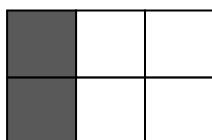
---

#### **Beispiel 1 – Rasenmähen**

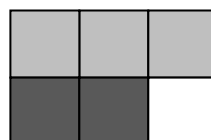
Ein Gärtner benötigt zum Mähen eines Sportplatzes 2 h, sein Lehrling benötigt 3 h. Wie lange brauchen die beiden, wenn sie den Sportplatz gemeinsam mähen?

**Lösung:****Gemeinsame Bezugsgröße:** Arbeitszeit in Stunden**Invariante:** zu mähende Fläche (1 Sportplatz)**Normierung bzgl. der Größe „Arbeitszeit“ (d. h. Fläche die in 1 h gemäht wird):**Definition „Arbeitsgeschwindigkeit“:  $v_{\text{Arb.}} = \frac{\text{gemähte Fläche}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{A}{t}$ Arbeitsgeschwindigkeit des Gärtners:  $v_{\text{Gärtner}} = \frac{1 \text{ Platz}}{2 \text{ h}}$ Arbeitsgeschwindigkeit des Lehrlings:  $v_{\text{Lehrling}} = \frac{1 \text{ Platz}}{3 \text{ h}}$ ⇒ Gemeinsame Arbeitsgeschwindigkeit:  $v_{\text{gem}} = v_{\text{G}} + v_{\text{L}} = \frac{1 \text{ Platz}}{2 \text{ h}} + \frac{1 \text{ Platz}}{3 \text{ h}} = \frac{5 \text{ Platz}}{6 \text{ h}}$ **Gemähte (Sportplatz-)Fläche pro Stunde:**

Gärtner



Lehrling



gemeinsam

**Gesucht:** Benötigte Arbeitszeit  $t_{\text{gem}}$  für die gleiche Fläche bei gemeinsamer Arbeit.  
( $A = 1 \text{ Platz}$  ist die Invariante!)**Damit:**  $v_{\text{gem}} = \frac{A}{t_{\text{gem}}} \Rightarrow t_{\text{gem}} = \frac{A}{v_{\text{gem}}} = \frac{1 \text{ Platz}}{\frac{5 \text{ Platz}}{6 \text{ h}}} = \frac{6}{5} \text{ h} = 1,2 \text{ h}$ Gemeinsam brauchen Sie also  $1,2 \text{ h} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$ .**Beispiel 2 – Gutschein**

In einer Zeitschrift sind im Rahmen einer Werbeaktion Gutscheine für das regionale Hallenbad abgedruckt. Dort steht:

**„Gutschein für 12× Schwimmbad oder  
für 3× Schwimmbad mit Sauna“**

Maria geht nicht gerne Schwimmen und fragt sich, ob sie mit dem Gutschein auch nur die Sauna benutzen kann.

Für wie viele Saunabesuche könnte sie den Gutschein nutzen, wenn sie annimmt, dass Schwimmbad und Sauna einzeln genauso viel kosten wie die Kombi-Karte?

**Lösung:**

**Gemeinsame Bezugsgröße:** Anzahl der Eintritte

**Invariante:** Wert des Gutscheins

**Normierung bzgl. der Größe „Eintritt“**

(d. h. Anteil des Gutscheins, der bei einem Eintritt „verbraucht“ wird):

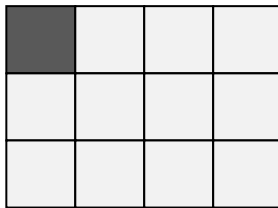
Definition „Eintrittskosten“:  $k = \frac{\text{nötiges Guthaben}}{\text{Anzahl der dafür möglichen Eintritte}} = \frac{G}{N}$

„Eintrittskosten“ Schwimmbad:  $k_{SB} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{12 \text{ Eintritt}}$

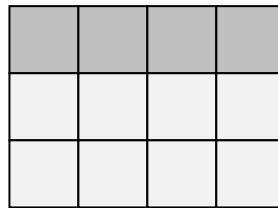
„Eintrittskosten“ Schwimmbad + Sauna:  $k_{SB+S} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{3 \text{ Eintritt}}$

⇒ „Eintrittskosten“ Sauna:  $k_S = k_{SB+S} - k_{SB} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{3 \text{ Eintritt}} - \frac{1 \text{ Gutschein}}{12 \text{ Eintritt}} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{4 \text{ Eintritt}}$

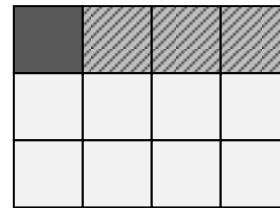
**Verbrauchtes „Guthaben“ (vom Gutschein) pro Eintritt:**



Schwimmbad



Schwimmbad mit Sauna



Sauna (schraffiert)

**Gesucht:** Anzahl der möglichen Eintritte für den reinen Saunagang ( $N_S$ ) pro Gutschein.  
( $G = 1$  Gutschein ist die Invariante!)

**Damit:**  $k_S = \frac{G}{N_S} \Rightarrow N_S = \frac{G}{k_S} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{\frac{1 \text{ Gutschein}}{4 \text{ Eintritt}}} = 4 \text{ Eintritt}$

Der Gutschein müsste also für vier Saunabesuche reichen.

---

Erste Fragestellungen, die sich direkt an die Auseinandersetzung mit den gelösten Beispielen anschließen können, finden sich bereits im Abschnitt 5.2.1 (Fragen 1-3). Dabei steht die Strukturierung der Beispielaufgaben auf der Objekt- und Relationsebene im Mittelpunkt des Interesses. Weiterführend können die Beispiele auch auf der Handlungsebene strukturiert werden:

- Welche mathematischen Operationen führen zum Ergebnis?
- Welches ist die wichtigste Idee auf dem Weg zur Lösung?
- Benenne einzelne Lösungsschritte in eigenen Worten.

Schließlich können bereits die gelösten Aufgabenbeispiele im Sinne einer Analogiebildung zueinander in Beziehung gesetzt werden:

- Formuliere Ähnlichkeiten zwischen den beiden Aufgaben.
- Unterscheide: Beziehen sich die Ähnlichkeiten auf die Struktur der Aufgabenstellung (Beteiligte Objekte und deren Relationen) oder auf die Lösungsstrategie? Finde beides!

Die obigen Fragen zielen darauf ab, den Ausgangsbereich (die gelösten Aufgabenbeispiele) auf allen Ebenen in seiner Struktur zu erfassen.

Nun sollen die Erkenntnisse aus den gelösten Aufgabenbeispielen auch auf neue Problemstellungen übertragen werden:

#### **Aufgabe 1 – Verpackungsmaschinen**

In einer Verpackungsfirma boomt das Geschäft so stark, dass die Verpackungsmaschine für die täglich anfallenden Produkte 30 h benötigen würde und deshalb nicht mehr alle Produkte rechtzeitig verpackt werden können. Es muss eine zweite Maschine angeschafft werden. Um Nachtschichten zu vermeiden, soll die Verpackungszeit durch die Anschaffung einer zweiten Maschine auf 12 h gedrückt werden.

Wie leistungsfähig muss die neue Verpackungsmaschine sein?

#### **Aufgabe 2 – Stellenausschreibung**

Ein Personalchef überlegt: Für den Etat neu zu besetzender Stellen kann er entweder Fachkräfte in einem Umfang von 48 Wochenstunden oder ungelernete Kräfte in einem Umfang von 60 Wochenstunden einstellen. Er entscheidet sich dafür, je eine Fachkraft und eine ungelernete Kraft mit gleicher Wochenarbeitszeit einzustellen.

Welche Wochenarbeitszeit kann er in den Stellenausschreibungen anbieten?

Kommt also nun der Zielbereich mit ins Spiel (Aufgaben 1 und 2), können die beiden verschiedenen Wege der Analogiebildung im Anfangsstadium des Prozesses Berücksichtigung finden (vgl. Abschnitt 4.5.1): Es kann zum einen die Analogiebildung auf der Objektebene unterstützt werden, zum anderen kann die Phase des Strukturierens auch auf den Zielbereich ausgeweitet werden.

Um Zweites zu erreichen, können ähnliche Fragen an die neue Problemstellung gestellt werden, wie an die gelösten Ausgangsbeispiele:

- Welches sind die beteiligten Objekte?
- In welcher Beziehung stehen diese Objekte miteinander?
- Welche mathematischen Operationen erscheinen auf dieser Grundlage sinnvoll?

Will man dagegen zunächst die Analogiebildung auf der Objektebene initiieren, können die Entsprechungen auch direkt angesprochen werden. Bezogen auf die obigen Aufgabenstellungen etwa:

- In Beispiel 1 spielt der Lehrling die gleiche Rolle wie ... in Aufgabe 1, denn ... .
- In Beispiel 2 hat der Gutschein einen bestimmten Wert, der für Sauna- oder Schwimmbadbesuche verbraucht werden darf. In Beispiel 1 entspricht dies ..., denn ....

Für die Begründungen in obigem Lückentext werden dann bereits Argumente auf der Relationsebene benötigt. An dieser Stelle rücken nun die Übergänge zwischen den einzelnen Ebenen und Phasen der Analogiebildung stärker in den Mittelpunkt (vgl. Abschnitt 4.5.2).

Auch diese Übergänge können durch geeignete Frage- und Aufgabenstellungen angeregt und begleitet werden. Bezogen auf obige Beispiele etwa:

- Welche Objekte in Aufgabe 1 stehen in einem ähnlichen Verhältnis wie der Gärtner zum Sportplatz im Beispiel 1? Begründel!
- Kann für die Berechnung der anzubietenden Arbeitszeit in Aufgabe 2 ein ähnlicher Ansatz gewählt werden wie für die zum Mähen benötigte Zeit in Beispiel 1? Begründe und stelle einen entsprechenden Ansatz auf.

Auf diese Weise werden Argumente notwendig, mit denen die möglichen Handlungsoptionen im Zielbereich durch die relationale Ähnlichkeit der Situationen im Ausgangs- und im Zielbereich begründet werden können. Der wichtige Übergang zwischen der Relations- und der Handlungsebene kann so verdeutlicht und bewusst initiiert werden.

Schwierigkeiten an dieser Stelle legen nahe, dass die Analogie auf der Objekt- und der Relationsebene nicht umfassend genug erkannt wurde. Insofern können derartige Frage- und Aufgabenstellungen auch eine diagnostische Funktion übernehmen.

Ähnliche Ansätze wie in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 verfolgt auch Renkl (2016). Er schlägt vor, die Schüler explizit zum Vergleichen von Aufgabentexten (S. 18) und von verschiedenen Lösungsmethoden (S. 19f) anzuregen. Als geeignetes Mittel hierzu nennt er – ähnlich wie Ruppert (2012) – Aufgabensets, die sich hinsichtlich ihrer Struktur und/oder ihres Kontexts unterscheiden. Für den Aufbau von Transferwissen sieht er die anschließende Formulierung geeigneter Fragen zu den Aufgabentexten und Lösungsbeispielen an (*Leitfragen* oder *Prompts*). Wie in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 sind dies Fragen, die sich konkret auf den Vergleich der Aufgaben und Lösungen hinsichtlich ihrer Ähnlichkeiten auf

der Objekt-, Relations- und Handlungsebene beziehen. Für den produktiven Einsatz derartiger Übungen formuliert Renkl drei Richtlinien:

- (1) Nicht Vergleiche um des Vergleichens willen, sondern um Defizite anzugehen.
- (2) Oft Übersehenes durch Vergleiche auffällig machen.
- (3) Vergleiche bei jedem einzelnen Schüler explizit anregen.

Für den konkreten Umgang mit gelösten Aufgabenbeispielen extrahiert Renkl aus dem aktuellen Forschungsstand zum *example based learning* zudem weitere Prinzipien, für die ein positiver Einfluss auf den Lerneffekt nachgewiesen ist (Renkl, 2014a und 2014b, S. 122ff). Besonders hebt er dabei die Effektivität von Selbsterklärungen hervor, die jedoch durch geeignete Hilfestellungen unterstützt werden soll (vgl. auch Edwards et al., 2014). Im Rahmen der obigen Vorschläge wird dies durch die Fragestellungen und die angeleitete Strukturierung der gelösten Aufgabenbeispiele erreicht. Zusätzlich wird das Augenmerk auf die Phasen und Ebenen des Analogiebildungsprozesses gerichtet, um den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit Rechnung zu tragen. Noch einen Schritt weiter gehen Begolli & Richland (2016), die vor allem die Wichtigkeit verschiedener Repräsentationsebenen gelöster Aufgabenbeispiele thematisieren und dabei auch fehlerhafte Beispiellösungen mit einbeziehen:

„[...] instructional recommendations should emphasize the utility of making compared representations visible simultaneously, but more broadly to highlight the importance of supporting learners in aligning, mapping, and drawing inferences about the similarities and differences across representations such as multiple solution strategies for a problem. Teachers should also be made aware of the challenges inherent in making such comparisons when one of the representations is a misconception.“ (S. 202)

Einen weiteren wichtigen Aspekt im individuellen Umgang der Lernenden mit gelösten Beispielen sprechen auch Little & McDaniel (2015) an: Sie zeigen, dass es Lernende gibt, die dazu neigen, die gelösten Aufgabenbeispiele als Ganze zu memorieren, anstatt deren strukturelle Ähnlichkeit zu extrahieren. Dies führt – abhängig von der Lernsituation – zu unterschiedlich erfolgreichen Lernprozessen. Little & McDaniel geben zu bedenken:

„[...] instructors should be conscious of the different orientations that a learner might bring to the classroom and make their learning goals and their assessment expectations explicit. [...] Consequently, instructors may be able to diagnose and possibly modify strategy use before students with less ideal strategy orientations flounder on exams.“

(S. 167)

Ausgehend von diesen Richtlinien können Aufgabensets entwickelt werden, die das Fördern von Analogiebildungsfähigkeiten im Blick haben.

### 5.2.3 Archimedes – Analogiebildung in historischen Texten<sup>55</sup>

Ein weiterer Zugang zum besonderen Wert von Analogiebetrachtungen kann darin liegen, sie als heuristische Strategie in erfolgreichen mathematischen Gedankengängen anderer zu entdecken. Im Rahmen mathematischer Beweisführung finden sich verschiedentlich Beispiele für Überlegungen, die sich eines Analogieschlusses bedienen.<sup>56</sup> Für die Behandlung im Rahmen der Schulmathematik eignen sich derartige Abhandlungen jedoch in der Regel nicht. Eine Ausnahme bilden dabei die Überlegungen Archimedes' bei der Entdeckung einer Formel zur Bestimmung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche in seiner *Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen*. Anhand dieses Texts kann allerdings nicht nur das effektive heuristische Werkzeug der Analogiebildung, sondern auch der Wert der mathematischen Formelsprache erkannt und entdeckt werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

In den Lehrbüchern für den Mathematikunterricht findet sich zur Bestimmung des Kugelvolumens meist folgende Idee wieder (vgl. z. B. Schmid & Weidig, 2008, S. 17f): Man vergleicht bestimmte Schnittflächen einer Kugel mit den Schnittflächen eines Vergleichskörpers (nämlich des umschriebenen Zylinders, aus dem zwei einbeschriebene Kegel so entfernt wurden, dass deren Grundflächen mit der Grund- bzw. Deckfläche des Zylinders zusammenfallen) und stellt fest, dass die Schnittflächen der beiden Körper auf jeder Höhe über der Grundfläche den gleichen Flächeninhalt besitzen (vgl. Abb. 65).

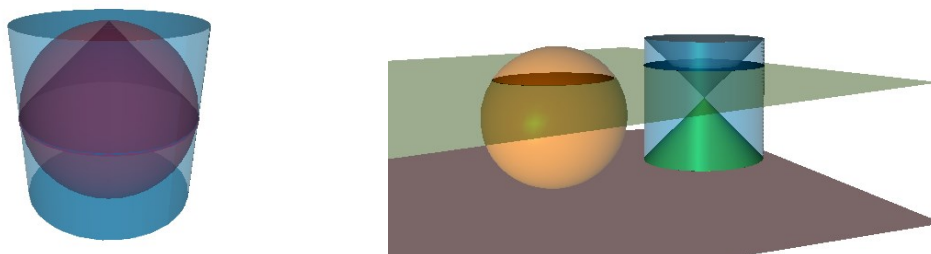


Abb. 65: Einbeschriebener Kegel und umschriebener Zylinder

<sup>55</sup> Die Vorschläge in diesem Abschnitt gehen auf den Artikel „Archimedes – Kreis und Kugel“ (Ruppert, 2011a) zurück. Es wird in größeren Teilen auch wörtlich aus diesem Artikel zitiert, ohne dass dabei die für direktes Zitieren übliche Notation verwendet wird. Da es sich um einen Artikel des Verfassers handelt, scheint dieses Vorgehen zugunsten der Lesbarkeit gerechtfertigt.

<sup>56</sup> vgl. z. B. Eulers Überlegungen zum Grenzwert der Bernoulli-Summe reziproker Quadratzahlen (nach Pólya, 1954, S. 41ff)



Dann wird das Prinzip von Cavalieri<sup>57</sup> (1598-1647) angewandt:

*Zwei Körper, die auf einer gemeinsamen Grundebene  $E$  stehen, haben das gleiche Volumen, wenn jeweils die Schnittflächen der beiden Körper mit jeder zu  $E$  parallelen Ebene inhaltsgleich sind.*

Damit ist die Kugel zum Vergleichskörper volumengleich. Das Volumen des Vergleichskörpers kann von den Schülern jedoch bereits berechnet werden und damit ist auch das Volumen der Kugel bekannt.

Archimedes hat das Prinzip von Cavalieri und damit einen grundlegenden Gedanken der Integralrechnung durch seine „*Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen*“ (Archimedes, 1983) in gewissem Sinne vorweggenommen. Er hat – ebenso wie Cavalieri – eine Volumenbestimmung auf die Betrachtung der Schnittflächen von Vergleichskörpern zurückgeführt und daraus Rückschlüsse über die Volumina der beiden Körper gezogen (bei Cavalieri: Methode der Indivisiblen)<sup>58</sup>. Nachdem Archimedes’ Methode allerdings erst nachträglich durch den Satz von Cavalieri legitimiert wurde, mussten die Ergebnisse von Archimedes noch bewiesen werden. Die herausragende Leistung Archimedes’ war es, die Beweisbedürftigkeit seiner Vermutungen über das Kugelvolumen und die Kugeloberfläche selbst zu erkennen. Er gibt sich in seinen Werken nicht mit den Plausibilitätserklärungen zufrieden, die das Ergebnis seiner mechanischen Betrachtungen waren, sondern führt den Beweis seiner Vermutungen anschließend rein geometrisch. Wesentliche Grundlage seines Beweises und Quelle wichtiger Ideen sind Analogieüberlegungen. Archimedes überträgt dabei Methoden und Erkenntnisse, die er selbst bei der Bestimmung von Flächeninhalt und Umfang des Kreises entwickelt und gesammelt hat, auf Volumen- und Oberflächenbestimmung der Kugel.

Ausgehend von seinen Vermutungen, die er durch seine „mechanische Methode“ gewonnen hat, formuliert er die folgende Idee (vgl. Abschnitt 1.1.1, Beispiel 5):

„Durch diesen Lehrsatz, daß eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius des Kugel gleich.“ (Archimedes, 1983, Abschnitt II)

---

<sup>57</sup> Als Spezialfall des Satzes von Fubini wurde das Prinzip von Cavalieri selbst erst zu Beginn des 20. Jh. streng bewiesen.

<sup>58</sup> In seiner „*Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen*“ (Archimedes, 1983) legt Archimedes eine Art und Weise der mathematischen Hypothesengenerierung offen, wie sie ganz typisch für sein Vorgehen im Zusammenhang mit Flächen- und Volumenbetrachtungen ist. Zur Bestimmung von Flächen und Volumina gegebener Objekte sucht Archimedes stets Vergleichsobjekte bekannter Fläche oder bekannten Volumens, die mit dem gegebenen Objekt bezüglich eines geschickt gewählten Hebelarms im Gleichgewicht stehen.

Die mechanische Methode zusammen mit der Analogie zu einem bekannten Satz über den Flächeninhalt des Kreises liefert ihm also eine Idee für den Oberflächeninhalt der Kugel.

Bereits hier wird deutlich, dass Analogien auf der Objekt- und Strukturebene hergestellt werden, um auf dieser Grundlage Hypothesen zu generieren (vgl. Abb. 66).

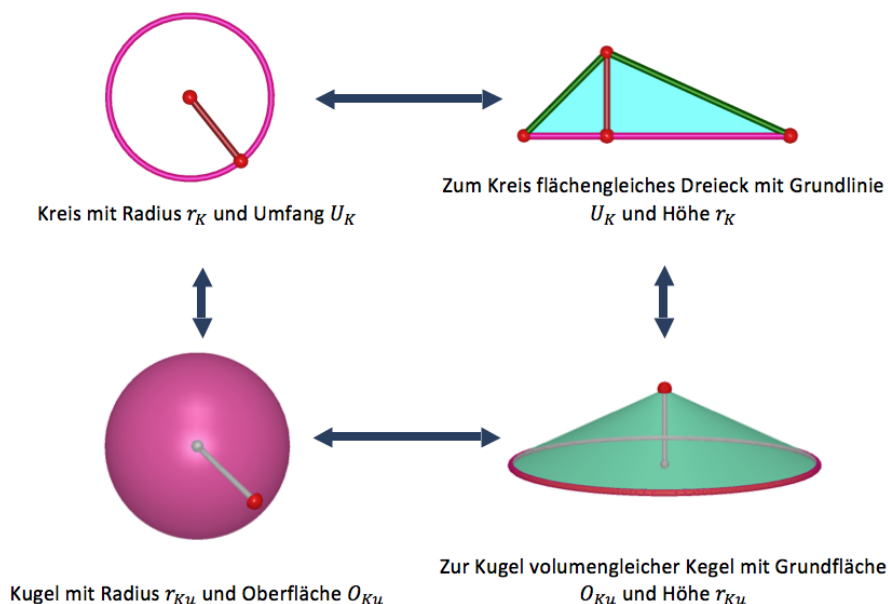


Abb. 66: Die Analogie zwischen Kreisumfang und Kugeloberfläche

Archimedes führt diese Gedankengänge allerdings noch weiter und nutzt Analogieüberlegungen auch in seiner anschließenden Beweisführung – die verwendeten Analogien werden auf die Handlungsebene ausgedehnt.

Im Rahmen des Mathematikunterrichts kann Archimedes' gesamter Gedankengang nicht oder kaum im Detail nachvollzogen werden. Trotzdem können Teilaspekte seiner Überlegungen herausgegriffen werden, um den Schülern die Besonderheit seiner Leistungen und die Leistungsfähigkeit der Analogiebildung nahe zu bringen. Dazu können einzelne Beweise am Originaltext nachvollzogen werden. Die Analogieüberlegungen können extrahiert werden und die im Mathematikunterricht oft vernachlässigte Arbeit mit Texten kann zudem Ausgangspunkt einer Diskussion über die Vorteile der Formelsprache sein.

Auf welche Weise z. B. die obigen Ausführungen von Archimedes im genannten Sinne genutzt werden können, wird anhand nachfolgender Aufgabenstellungen gezeigt. Bezogen auf das hier entwickelte theoretische Modell der Analogiebildung, kann vor allem die Bedeutung des Übergangs von der Relationsebene auf die Handlungsebene hervorgehoben und am historischen Beispiel nachvollzogen werden. Eine ausführliche Darstellung weiterer Analogieüberlegungen im Rahmen der Beweisführung Archimedes' findet sich bei Ruppert (2011a).

### Archimedes I: Flächeninhalt des Kreises und Kreisumfang

Der griechische Gelehrte Archimedes (ca. 287 – 212 v. Chr.) gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Die wichtigsten mathematischen Errungenschaften sind seine Arbeiten zu Flächeninhalt und Umfang des Kreises, sowie zu Volumen und Oberfläche der Kugel. Seine über 2000 Jahre alten Texte sind (natürlich in der Übersetzung) durchaus gut verständlich.

Zur Bestimmung des Kreisinhaltuses benutzt Archimedes einen Trick.

Er kann nämlich beweisen:

*„Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck inhaltsgleich, sofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis [gemeint ist: der anderen Kathete] ist.“*

*(Archimedes: Kreismessung, Abschnitt I, S. 369)*

#### Aufgaben

1. „Übersetze“ den Text in die heutige Sprache.
2. Veranschauliche die Aussage des Texts in einer Zeichnung. Es soll dabei deutlich werden, welche Zusammenhänge Archimedes zwischen den beteiligten geometrischen Objekten erkennt.
3. Zeige mit deinem Wissen über die Flächeninhaltsformeln von Kreis und Dreieck die Richtigkeit der Aussage. (Wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmt, war auch Archimedes schon bekannt.)

### Archimedes II: Volumen und Oberfläche einer Kugel

Das Volumen einer Kugel bestimmt Archimedes mit der Methode, die ihn schon bei der Bestimmung der Kreisfläche zum Ziel geführt hat. Er nähert das Kugelvolumen durch die Volumina ein- bzw. umbeschriebener Körper an und bestätigt so seine Vermutungen, die er mit seiner „mechanischen Methode“ gewonnen hat.

Zur Bestimmung der Kugeloberfläche hat Archimedes einen Geistesblitz:

*„Durch diesen Lehrsatz, daß eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.“*

*(Archimedes: Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen, Abschnitt II, S. 388)*

Aufgaben

1. „Übersetze“ den Text in die heutige Sprache.
2. Drücke in eigenen Worten aus: Welchen Zusammenhang stellt Archimedes zwischen ebenen und räumlichen Objekten her?
3. Archimedes kannte bereits das Kugel- und das Kegelvolumen. Bestimme mit deinem Wissen über die zugehörigen Volumenformeln und der Vermutung von Archimedes eine Formel für die Kugeloberfläche.

### 5.2.4 Analogiebildung beim räumlichen Konstruieren und Beweisen<sup>59</sup>

Konstruktionen im Raum und damit zusammenhängende Überlegungen spielen im Unterrichtsalltag eine untergeordnete Rolle, obwohl das „Operieren mit Körpern im Raum“ in den KMK-Bildungsstandards (KMK, 2004: Leitidee „Raum und Form“) ausdrücklich gefordert wird. Berührkreis- bzw. Berührkugelprobleme bieten einen Lernanlass, der eine Einführung in die Welt der dreidimensionalen Konstruktionen erlaubt. Auf der Grundlage des Wissens über Konstruktionen in der Ebene erfolgt der Übergang zur Konstruktion im Raum dabei durch geeignete Analogieüberlegungen (vgl. Becker, 1992; Schumann, 2007; Ruppert, 2010). Mögliche Ausgangspunkte für die Betrachtung von Berührkreis- bzw. Berührkugelproblemen sind vielfältig. Gesprächsanlässe können z. B. architektonische Besonderheiten, Kunstwerke oder historische Abbildungen, die Anwendung von kugelförmigen Messköpfen bei der Bestimmung von Gewindemaßen, oder die Beschreibung der Bewegung einer Kugel beim Rollen auf einer Schiene sein (Abbildungen hierzu vgl. Ruppert, 2011b).

Um zu räumlichen Konstruktionen übergehen und dabei die auftretenden Analogien zu ebenen Konstruktionen nutzen zu können, muss zunächst geklärt werden, dass Objekte der Ebene auf zwei Arten analogisiert, also von der Ebene in den Raum übertragen werden können (vgl. z. B. Schumann, 2007, S. 139):

- Analogie 1. Art: Einbettung des ebenen Objekts in den Raum, d.h. ein Punkt in der Ebene wird zum Punkt im Raum, eine Gerade in der Ebene wird zur Geraden im Raum, etc.
- Analogie 2. Art: Objekte werden aufgrund charakteristischer Eigenschaften analogisiert (z. B. eine Kugel als Ort aller Punkte, die von einem vorgegebenen Punkt den gleichen Abstand besitzen als Objektanalogie zum Kreis in der Ebene).

Der Übergang von der Ebene in den Raum bietet also eine gute Möglichkeit, anhand einfacher Objekte das Erkennen und Beschreiben von Analogien auf der Objektebene zu üben. Es wird dabei auch deutlich, dass der Prozess der Analogiebildung bereits auf der Objektebene nicht zu eindeutigen Ergebnissen führen muss, sondern dass die Oberflächeneigenschaften, auf die Bezug genommen wird, hier ausschlaggebend sind.

Der besondere Wert des geometrischen Kontexts liegt in seiner Anschaulichkeit: Anders als bei algebraischen Objekten, wie z. B. Gleichungen oder Termen, lassen sich geometri-

---

<sup>59</sup> In diesem Abschnitt werden die Vorschläge aus den Artikeln „Kreise und Kugeln – einfach (be)rührend!“ (Ruppert, 2011b) und „Unterwegs zwischen den Dimensionen - Mit GeoGebra 3D per Analogiebildung von der Ebene in den Raum“ (Ruppert, 2015) zusammengefasst. Es wird in größeren Teilen auch wörtlich aus diesen Artikeln zitiert, ohne dass dabei die für direktes Zitieren übliche Notation verwendet wird. Da es sich um Artikel des Verfassers handelt, scheint dieses Vorgehen zugunsten der Lesbarkeit gerechtfertigt.

sche Objekte in der Ebene und im Raum *greifbar* und damit besser *begreifbar* darstellen. Es können zu diesem Zweck auch veranschaulichende digitale Hilfsmittel, wie z. B. (ebene und räumliche) dynamische Geometriesysteme herangezogen werden, die den Lerner z. B. beim Entdecken charakteristischer Objekteigenschaften unterstützen, auf deren Grundlage schließlich Analogien erkannt werden. H. Schumann (2007) spricht in diesem Zusammenhang vom *interaktiven Analogisieren* ebener Geometrie im Raum.

Natürlich beruht der besondere Wert von Analogiebildungsprozessen auch im geometrischen Kontext weniger auf der Analogisierung einzelner Objekte als vielmehr auf der Betrachtung von Beziehungen zwischen den beteiligten Objekten, also den Analogien auf der Relationsebene. Durch die Beziehung zwischen den Objekten wiederum werden Regeln festgelegt, wie mit diesen Objekten operiert werden darf (hier z. B.: Regeln beim Konstruieren und Regeln beim Beweisen geometrischer Sachverhalte). Die strukturelle Ähnlichkeit legt dabei die berechtigte Hoffnung nahe, dass sich auch die dadurch bestimmten Vorgehensweisen und Ideen analogisieren lassen – auch hier ist also die Analogiebildung auf der Handlungsebene das Ziel.

#### Beispiel: Berührprobleme

Berührprobleme in der Ebene und im Raum bieten ein geeignetes Übungsfeld zur Analogiebildung im Bereich geometrischer Konstruktionen und Beweise: Die Frage nach der Lage aller Kugeln, die vorgegebene elementare geometrische Objekte berühren, lässt sich durch die Analogisierung ebener Konstruktionen und Beweise in der Ebene beantworten. Mittels geeigneter Betrachtungen auf der Relationsebene müssen dabei zunächst räumliche Entsprechungen der verfügbaren Konstruktionswerkzeuge bereitgestellt werden (vgl. Abb. 67), bevor auf der Handlungsebene auch Konstruktionen und Beweise mittels Analogiebildung von der Ebene in den Raum übertragen werden können.

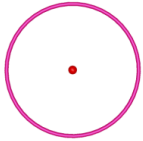
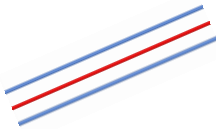
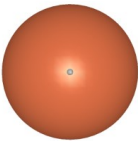
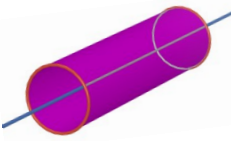
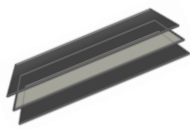
| Ebene Konstruktionswerkzeuge  |   | Räumliche Konstruktionswerkzeuge (RW)   |  |   |
|---|---|---|--|---|
|  |  |  |  |  |
| Kreis   | Geradenpaar   | Kugel   | Zylinder   | Ebenenpaar  |

Abb. 67: Konstruktionswerkzeuge in der Ebene und im Raum.  
Die Charakterisierung als geometrischer Ort liefert die Objektanalogie.

Mit diesen Werkzeugen können zunächst Grundkonstruktionen analogisiert werden: Die Konstruktion der mittelsenkrechten Geraden etwa wird dabei zur Konstruktion der mittelsenkrechten Ebene im Raum. Als geometrischer Ort handelt es sich in beiden Fällen um die Menge aller Punkte, die von zwei vorgegebenen Punkten (in der Ebene bzw. im Raum) den gleichen Abstand haben.

Stehen die erforderlichen Grundkonstruktionen zur Verfügung, können auch komplexere Fragen im Raum beantwortet werden, wie z. B. die Frage nach dem Umkugelmittelpunkt eines Tetraeders. Auch hier hilft das ebene Analogon auf der Objektebene – die Bestimmung des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks – um über die Relationsebene (s. oben) auf die erforderliche Analogisierung der einzelnen Konstruktionsschritte (Suche nach dem Schnittpunkt mittelsenkrechter Ebenen) zu kommen.

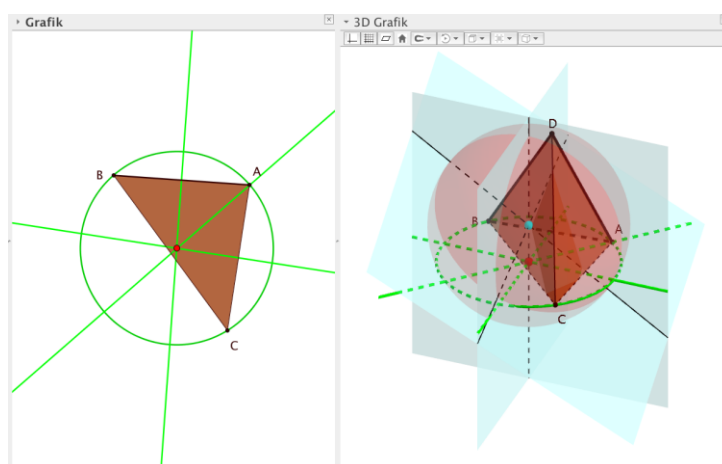


Abb. 68: Die Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks (links) und der Umkugel eines Tetraeders (rechts)

Dieses Beispiel bietet zugleich auch einen Anlass, die Tragfähigkeit der Analogiebildung im Bereich des Beweises kennenzulernen: Genau wie es eines Beweises bedarf, dass sich die Mittelsenkrechten dreier Dreiecksseiten in einem Punkt schneiden, ist es nicht offensichtlich, dass die sechs mittelsenkrechten Ebenen der sechs Kanten eines Tetraeders einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen. Die einzelnen Beweisschritte können jedoch unter Benutzung der Analogien auf der Objekt- und Relationsebene fast wörtlich aus der Ebene in den Raum übertragen werden.

Etliche weitere Beispiele, die zeigen, dass Berührprobleme ein geeignetes Übungsfeld für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten im Allgemeinen und den Übergang von Objekt- und Relationsebene hin zur Handlungsebene im Speziellen bieten, werden bei Ruppert (2011b, 2015) ausgeführt. Es wird dabei auch an verschiedenen Beispielen deutlich, dass die Ergebnisse von Analogieüberlegung immer einer Überprüfung bedürfen. So erge-

ben sich bereits bei der Analogisierung des Inkreisbegriffs Schwierigkeiten, die dazu führen, dass die Existenz der Inkugel eines Tetraeders – je nach Analogisierung des Inkreisbegriffs – von der Form des Tetraeders abhängen kann (vgl. Ruppert, 2015).

Eine beeindruckende Fülle von weiteren Beispielen, in denen räumliche Konstruktionen und Beweise mittels Analogiebildung aus ebenen Überlegungen abgeleitet werden können, wird bei Schumann (2004, 2007) vorgestellt. Es gelingt Schumann an zahlreichen Beispielen aufzuzeigen, wie Raumgeometrieprogramme die Hypothesengenerierung und Ideenfindung im Rahmen des Analogiebildungsprozesses unterstützen können. Die Idee, Analogien auf der Objekt- und Relationsebene auszunutzen, um Handlungsoptionen im Zielbereich zu erschließen, wird zwar nicht expliziert, steht jedoch im Mittelpunkt vieler seiner Ausführungen.

Ott (2011) hat im Rahmen einer schriftlichen Hausarbeit eine Unterrichtssequenz zur Schulung der Analogiebildungsfähigkeit im obigen Kontext entwickelt und erprobt. Sie kommt bezüglich der Inhalte zu dem Ergebnis:

„In der Unterrichtssequenz ist es gelungen, die ebene Geometrie mit der räumlichen zu verknüpfen. [...] Ich sehe das räumliche Analogisieren der ebenen Geometrie als eine sehr gute Möglichkeit den Geometrieunterricht als zusammenhängend und realitätsnah zu vermitteln. Das Analogisieren an sich ist außerdem eine Strategie, die den Schülerinnen und Schülern das ganze Leben lang von nutzen sein kann [...].“ (S. 82)

Sie gibt aber auch zu bedenken:

„Jedoch muss das Analogisieren nach dem Spiralprinzip immer wieder über die gesamte Schulzeit hinweg aufgegriffen und in verschiedenen Kontexten geübt werden, damit es in das Repertoire der immer verfügbaren und abrufbaren Problemlösestrategien der Schülerinnen und Schüler übergeht.“ (Ebd., S. 82)



### 5.2.5 Höhere Dimensionen mittels Analogiebildung entdecken<sup>60</sup>

In Abschnitt 5.2.4 wird deutlich, wie wirkungsvoll das Bilden von Analogien als heuristische Strategie beim Übergang von der Ebene in den Raum in allen Facetten zum Tragen kommt. Auf der Objektebene sind es charakteristische Eigenschaften, die in den Raum übertragen werden, um Analogien herzustellen und Werkzeuge bereitzustellen. Analogien auf der Relationsebene tragen dazu bei, dass Konstruktions- und Beweisstrategien übertragen werden können. Es liegt nahe, all diese Überlegungen auch auf höhere Dimensionen auszudehnen. Ein wesentlicher Unterschied zum Übergang zwischen Ebene und Raum ist dabei allerdings der Verlust der Anschaulichkeit. Aus Sicht der Schulmathematik spielt deshalb die Betrachtung höherer Dimensionen nur am Rande eine Rolle und eignet sich eher für Neigungsgruppen oder die Begabtenförderung. Dennoch kann die Analogiebildung in vielerlei Hinsicht einen Einblick in das allgemeine Konzept des  $n$ -dimensionalen (Vektor-)Raums und damit die Grunderfahrung ermöglichen, „die Mathematik als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (vgl. Winter, 2003, S. 7) zu erleben. Durch die geschickte Wahl der betrachteten Objekte und verschiedener Zugänge gelingt es mittels Analogiebildung sogar, Darstellungsmöglichkeiten höherdimensionaler Objekte zu gewinnen und diese somit der Unvorstellbarkeit zu entreißen.

Als geeignetes und hinsichtlich der Möglichkeiten zum Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten besonders ergiebige Untersuchungsobjekt erweist sich dabei der vierdimensionale Würfel. Schrittweise können dabei zunächst systematisch Analogien zwischen Quadrat und Würfel betrachtet werden, um diese schließlich in die vierte Dimension weiterzuführen.

Ein erster Schritt kann die Analogiebildung des Würfelbegriffs im Rahmen des Koordinatenkonzepts sein: Bezeichnet man als  $n$ -dimensionalen Würfel die konvexe Hülle aller Punkte mit den Koordinaten 0 oder 1, so ergibt sich die Strecke  $[0; 1]$  als eindimensionaler Würfel und das Einheitsquadrat als zweidimensionaler Würfel.

Der Analogieschluss, der zur Beschreibung höherdimensionaler Würfel nötig ist, wird nun auf der mathematischen Ebene auch von Schülern spielend vollzogen: Durch Hinzufügen weiterer Koordinaten erhält man die Koordinaten der Eckpunkte eines Einheitshyperwürfels im vier-, fünf-, oder  $n$ -dimensionalen Koordinatensystem. Die Fortsetzung der Eckenanzahl von 2 (für den eindimensionalen Würfel) über 4 (für den zweidimensionalen Würfel) und 8 (für den dreidimensionalen Würfel) auf 16, 32 und  $2^n$  (für den vier-, fünf-, bzw.  $n$ -dimensionalen Würfel) lässt sich dabei auch mit kombinatorischen Mitteln leicht begrün-

---

<sup>60</sup> In diesem Abschnitt werden die Vorschläge aus den Artikeln „Würfelbetrachtungen. Drei Wege zu höheren Dimensionen.“ (Ruppert, 2010) und „Das Klein-Projekt - Hochschulmathematik vor dem Hintergrund der Schulmathematik.“ (Weigand/Ruppert, 2015) zusammengefasst. Es wird in größeren Teilen auch wörtlich aus diesen Artikeln zitiert, ohne dass dabei die für direktes Zitieren übliche Notation verwendet wird. Da es sich um Artikel des Verfassers handelt, scheint dieses Vorgehen zugunsten der Lesbarkeit gerechtfertigt.

den. Die Darstellung eines Hyperwürfels in höheren Dimensionen wird also zunächst als rein mathematische Fortsetzung des Koordinatenkonzepts erlebt. Auch wenn eine Veranschaulichung in höheren Dimensionen fehlt, können Analogieüberlegungen aus der Ebene und dem Raum weitergeführt werden: z. B. kann geklärt werden, welche Ecken eigentlich durch Kanten miteinander verbunden sind und welche Ecken zur gleichen Fläche gehören. Auf diese Weise lässt sich aus der Anzahl der Ecken die Anzahl der Kanten (eindimensionale Begrenzungen) und Flächen (zweidimensionale Begrenzungen) eines  $n$ -dimensionalen Würfels bestimmen. Es entsteht eine Tabelle in der zunächst die Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen eines  $n$ -dimensionalen Würfels abgelesen werden kann (vgl. Tabelle 6; s. auch Graumann, 2009).

| $n \setminus k$ | 0     | 1                 | 2                            | 3    | 4   | 5   | ... | $k$                          | ... | $n$ |
|-----------------|-------|-------------------|------------------------------|------|-----|-----|-----|------------------------------|-----|-----|
| 0               | 1     | -                 | -                            | -    | -   | -   | -   | -                            | -   | -   |
| 1               | 2     | 1                 | -                            | -    | -   | -   | -   | -                            | -   | -   |
| 2               | 4     | 4                 | 1                            | -    | -   | -   | -   | -                            | -   | -   |
| 3               | 8     | 12                | 6                            | 1    | -   | -   | -   | -                            | -   | -   |
| 4               | 16    | 32                | 24                           | 8    | 1   | -   | -   | -                            | -   | -   |
| 5               | 32    | 80                | 80                           | 40   | 10  | 1   | -   | -                            | -   | -   |
| 6               | ...   | ...               | ...                          | ...  | ... | ... | ... | -                            | -   | -   |
| 7               | ...   | ...               | ...                          | ...  | ... | ... | ... | -                            | -   | -   |
| 8               | ...   | ...               | 1792                         | 1792 | ... | ... | ... | -                            | -   | -   |
| ...             |       |                   |                              |      |     |     |     | -                            | -   | -   |
| $k$             |       |                   |                              |      |     |     |     | 1                            | -   | -   |
| ...             |       |                   |                              |      |     |     |     | ...                          | ... | -   |
| $n$             | $2^n$ | $n \cdot 2^{n-1}$ | $\binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$ | ...  | ... | ... | ... | $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ | ... | 1   |

Tabelle 6: Die Anzahl  $k$ -dimensionaler Begrenzungs(hyper)flächen eines  $n$ -dimensionalen (Hyper-)Würfels

Um die Analogiebetrachtungen (und damit die Tabelle) weiter fortzuführen, muss nun noch erkannt werden, dass jeder  $n$ -dimensionale Würfel von  $k$ -dimensionalen Würfeln begrenzt wird (für alle  $k < n$ ) – der vierdimensionale Würfel beispielsweise besitzt also neben Ecken, Kanten und Flächen auch dreidimensionale Begrenzungswürfel.

Erfahrungsgemäß finden Schüler in der Tabelle zunächst Regelmäßigkeiten, die an einzelnen Stellen eine Fortsetzung erlauben. Zum Auffinden der folgenden geschlossenen Darstellung für die Anzahl  $N(n; k)$  der  $k$ -dimensionalen Begrenzungswürfel eines  $n$ -dimensionalen Würfels sind hingegen fortgeschrittene kombinatorische Überlegungen nötig:

$$N(n; k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

Von den Schülern vermutete Zusammenhänge aus der Tabelle können mit dieser Formel allerdings nachträglich schön bewiesen werden, wie in Ruppert (2010) an verschiedenen Beispielen gezeigt wird. Zwei Zugänge zu höherdimensionalen Würfeln, die auf eine Veranschaulichung in niedrigeren Dimensionen abzielen, liefert die Betrachtung von Schrägbildern und von geeigneten Orthogonalprojektionen. Auch hier tragen Analogieüberlegungen über das Entstehen von Schrägbildern und Orthogonalprojektionen in niedrigeren Dimensionen dazu bei, dass Darstellungsmöglichkeiten weitergeführt werden können: Interpretiert man z. B. das Schrägbild eines (dreidimensionalen) Würfels in der Ebene als „verschobenes Quadrat“, so ist der Schritt zum dreidimensionalen Schrägbild des vierdimensionalen Würfels in Form eines „verschobenen Würfels“ nicht weit (vgl. Abb. 69).



Abb. 69: Schrägbild des Würfels als „verschobenes Quadrat“ (links) und Schrägbild des vierdimensionalen (Hyper-)Würfels als „verschobener Würfel“ (rechts)

Ein solches Schrägbild kann schließlich sogar gebastelt werden (vgl. Abb. 70):

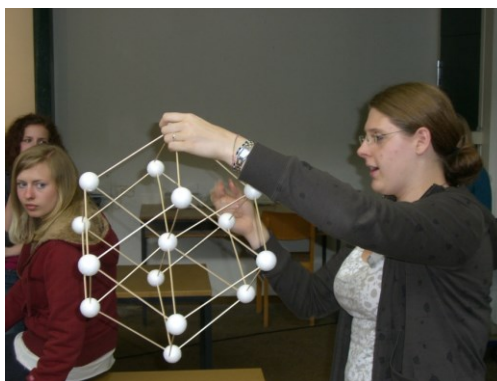


Abb. 70: Dreidimensionales Schrägbild eines vierdimensionalen (Hyper-)Würfels

Auch Orthogonalprojektionen liefern einen handlungsorientierten Zugang, der mittels Analogieüberlegungen zu Veranschaulichungen höherdimensionaler Würfel führt (vgl. Abb. 71).

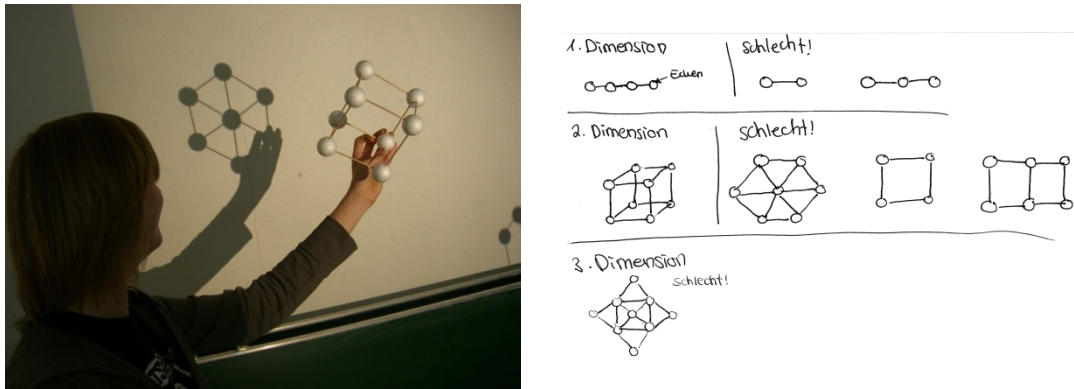


Abb. 71: Projektion eines Würfels entlang der (dreidimensionalen) Raumdiagonalen (links)  
Schülerbearbeitung: Eine Klassifizierung verschiedener Projektionen (rechts)

Betrachtet man Projektionen entlang der ( $n$ -dimensionalen) Raumdiagonalen, so ergeben sich alle Eckpunkte des  $n$ -dimensionalen Würfels als geeignete Linearkombinationen aus den Projektionen der erzeugenden Einheitsvektoren. Projiziert man den  $n$ -dimensionalen Würfel entlang der Raumdiagonalen in die Ebene, so sind die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks der Ausgangspunkt für das Auffinden der restlichen Eckpunkte (vgl. Ruppert, 2010, 2015).

Ein weiterer anschaulicher, aber eher dynamischer Zugang kann über die Betrachtung von Würfelschnitten in höheren Dimensionen erfolgen. Auch hier sind Analogieüberlegungen erforderlich, um eine Vorstellung darüber zu gewinnen, wie das Schnittbild eines vierdimensionalen Würfels sich entwickelt, würde er durch unseren dreidimensionalen Raum hindurchwandern (vgl. hierzu Ruppert, 2010, 2015).

## 5.3 Ausblick

In Abschnitt 5.1 wird deutlich, dass der wissenschaftliche Beitrag der vorliegenden Arbeit zum einen die Beschreibung verschiedener *Wege der Analogiebildung* und deren Bedeutung für den Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten ist. Darüber hinaus steht jedoch auch die Entwicklung geeigneter Methoden zum Initiieren und Beobachten von Analogiebildungsprozessen sowie effektiver Werkzeuge zu deren Analyse im Mittelpunkt der Ausführungen. Wie die dabei gewonnenen Erkenntnisse genutzt werden können, um Analogiebildungsprozesse auch im Unterrichtsalltag zu initiieren, zu beobachten, zu unterstützen, zu analysieren und zu explizieren wird in Abschnitt 5.2 erläutert.

Diese verschiedenen Aspekte der vorliegenden Arbeit erlauben weiterführende Fragestellungen in verschiedenen Richtungen:

1. Können die gefundenen Wege der Analogiebildung auch in größeren Datensätzen reproduziert werden? Kann dabei die beschriebene mehrstufige Clusteranalyse trotz des hohen Abstraktionsgrads der Denkabschnitte zumindest die Funktion einer Vorklassifizierung der Datensätze erfüllen?
2. Können mit der Methode des paarweise Lauten Denkens und mit Hilfe des Drei-Phasen-Designs auch andere Denkvorgänge (z. B. Kreatives Denken) initiiert und damit für eine Beschreibung als Prozess zugänglich gemacht werden?
3. Können auch andere Denkvorgänge durch die Verschränkung verschiedener Dimensionen als Wege in einem entsprechenden Diagramm dargestellt und so einer tiefergehenden Analyse zugänglich gemacht werden?
4. Wie können Aufgabensets systematisch entwickelt werden, mit denen die verschiedenen Zugänge zu einem Analogiebildungsprozess genauso berücksichtigt werden, wie die als besonders wichtig erkannten Übergänge zwischen den einzelnen Phasen und Ebenen der Analogiebildung?
5. Wie sehen Wege der Analogiebildung bei „anerkannt vorbildlichen Analogiebildungsprozessen“ aus und welche Erkenntnis lässt sich daraus gewinnen? Wie sind also z. B. in bekannten Beweistexten die Phasen und Ebenen der Analogiebildung zu erkennen und auf welchem Weg wird das Zwei-Dimensionen-Modell dabei durchlaufen? (z. B. Archimedes, Kreis – Kugel, 1983; oder: Euler-Summe, vgl. Pólya, 1962)
6. Auf der anderen Seite: Lassen sich Wege der Analogiebildung auch in früheren Stadien der Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeiten beobachten und aussagekräftig beschreiben, um so weitere Erkenntnisse für die Unterstützung beim Erwerb von Analogiebildungsfähigkeiten zu gewinnen?

7. Welche Bedeutung haben Analogiebildungsprozesse für die Entwicklung kreativer Ideen? Bei Chan & Schunn (2015) wird die *Protocol Analysis* verwendet, um im Rahmen wissenschaftlicher Brainstormings den Einfluss von Analogien auf innovative wissenschaftliche Konzepte zu untersuchen, während dieser Zusammenhang z. B. bei Green (2012) auf neurologischer Ebene untersucht wird.
8. Kann die vorliegende Beschreibung von Analogiebildungsprozessen die Erforschung des Zusammenhangs zwischen der Fähigkeit zur Analogiebildung und mathematischer Begabung unterstützen? Zumindest für Grundschüler geht Käpnick (1998) davon aus, „dass sich mathematisch potentiell begabte Dritt- und Viertkläßler deutlich von weniger begabten gleichaltrigen Kindern hinsichtlich des Erkennens struktureller Zusammenhänge, des Transfers erkannter Strukturen und des Wechsels der Repräsentationsebenen unterscheiden, was sie schließlich vielfach befähigt, selbständig effektive Lösungsstrategien für komplexere mathematische Aufgaben zu entwickeln“ (S. 193). Die Ergebnisse, die Käpnick (1998) und später auch Aßmus & Förster (Aßmus, 2013; Aßmus & Förster, 2012, 2013, 2015) präsentieren, lassen sich im vorliegenden Modell wie folgt interpretieren: Mathematisch potentiell begabte Grundschul Kinder zeigen deutlich höhere Analogiebildungsfähigkeiten auf der Objekt- und Relationsebene als die Vergleichsgruppen, tun sich mit der Analogiebildung auf der Handlungsebene jedoch (noch) ähnlich schwer.

Auf dem Feld der Analogiebildung gibt es also noch viele Fragen zu beantworten – auch deshalb, weil das Bilden von Analogien eine wichtige und tragfähige Strategie im Rahmen von Problemlöseprozessen ist.

Doch darüber hinaus besitzt die Analogie eine grundlegende Bedeutung bei Erkenntnisprozessen und beim Verstehen, was sich in der Feststellung Arthur Schopenhauers ausdrückt, mit der die vorliegende Arbeit abgeschlossen wird:

„Gleichnisse sind von großem Werte, sofern sie ein unbekanntes Verhältnis auf ein bekanntes zurückführen. Auch die ausführlicheren Gleichnisse, welche zur Parabel oder Allegorie anwachsen, sind nur die Zurückführung irgendeines Verhältnisses auf seine einfachste, anschaulichste und handgreiflichste Darstellung. – Sogar beruht alle Begriffsbildung im Grunde auf Gleichnissen, sofern sie aus dem Auffassen des Ähnlichen und Fallenlassen des Unähnlichen in den Dingen erwächst. Ferner besteht jedes eigentliche Verstehen zuletzt in einem Auffassen von Verhältnissen (*un saisir de rapports*): man wird aber jedes Verhältnis um so deutlicher und reiner auffassen, als man es in weit von einander verschiedenen Fällen und zwischen ganz heterogenen Dingen als dasselbe wiedererkennt. Solange nämlich ein Verhältnis mir nur als in einem einzelnen Falle vorhanden bekannt ist, habe ich von demselben bloß eine individuelle, also eigentlich nur noch anschauliche Erkenntnis: sobald ich aber auch nur in zwei verschiedenen Fällen dasselbe Verhältnis auffasse, habe ich einen Begriff von der ganzen Art desselben, also eine tiefere und vollkommenerere Erkenntnis.“

(Schopenhauer, 1851, §289, S. 602)







# Abbildungen

|   |     |
|---|-----|
| Abb. 1: Die Struktur von Ausgangs- und Zielbereich wird durch die Objekte und deren gegenseitige Beziehungen bestimmt und legt die Möglichkeiten auf der Handlungsebene fest. (Quelle: Ruppert) ..... | 46  |
| Abb. 2: Die grafische Darstellung der beiden Beispiele lässt die Analogie auf der Objekt- und auf der Relationsebene erkennen. (Quelle: Ruppert) .....  | 47  |
| Abb. 3: Lösung der Aufgabe 1: Die zur Lösung erforderlichen Handlungen und Operationen sind benannt. (Quelle: Ruppert) .....  | 47  |
| Abb. 4: Können für die Handlungen und Operationen, die zur Lösung der Aufgabe 1 beitragen Entsprechungen gefunden werden, die zur Lösung der Aufgabe 2 führen? (Quelle: Ruppert) .....                | 48  |
| Abb. 5: Die Analogie auf der Objekt- und der Relationsebene führt zunächst zu einer Analogie auf der Handlungsebene und schließlich zu einem gemeinsamen Modell. (Quelle: Ruppert) .....              | 48  |
| Abb. 6: Arten des Denkens nach Rips & Conrad (1989) wie in Holyoak & Morisson (2005, S. 3) (Quelle: Ruppert nach Rips & Conrad (1989) wie in Holyoak & Morisson (2005, S. 3)) .....                   | 57  |
| Abb. 7: Der Zusammenhang zwischen einer Analogie einerseits und einer Verallgemeinerung mit anschließender Spezialisierung andererseits (Quelle: Ruppert nach Pólya, 1962, S. 38) .....               | 60  |
| Abb. 8: Das Bilden von Analogien als menschliche Denkleistung (Quelle: Ruppert) .....   | 62  |
| Abb. 9: Wege der Analogiebildung im Zwei-Dimensionen-Modell - ein erfolgreicher Analogiebildungsprozess (oben) und ein gescheiterter Analogiebildungsprozess (unten). (Quelle: Ruppert) .....         | 69  |
| Abb. 11: Wo liegen alle Punkte, die von einer vorgegebenen Geraden $g$ den Abstand $r$ haben? (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....                                       | 106 |
| Abb. 12: Wo liegen alle Punkte, die von einer vorgegebenen Ebene $E$ den Abstand $r$ haben? (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....   | 106 |
| Abb. 13: Kommentar zur Gestaltung der Instruktionsbeispiele (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....   | 107 |
| Abb. 14: Kommentare zu Schwierigkeiten bei der Übertragung ebener Situationen in den Raum (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....   | 107 |

|  |     |
|--|-----|
| Abb. 15: Aufgabensequenz „Ebene Geometrie – Raumgeometrie“ – Analogiebildung auf verschiedenen Ebenen. Fragestellung links und Mitte: Wo liegen alle Punkte im Raum, die von zwei vorgegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand haben? Fragestellung rechts: Wie findet man den Umkugelmittelpunkt eines Tetraeders? (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) ..... | 108 |
| Abb. 16: Verbalisierungen zur Aufgabensequenz „Flächengleichheiten“ (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....  | 109 |
| Abb. 17: Analogiebildung auf allen Ebenen bei der Bearbeitung der Aufgabensequenzen „Bezugsgrößen und Invarianten“ und „Gemischte Prozentangaben“ (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....  | 110 |
| Abb. 18: Analogiebildungen auf allen Ebenen bei der Bearbeitung der Aufgabensequenz „Kombinatorik“ (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....   | 112 |
| Abb. 19: Manche Schüler greifen eher auf ihr Vorwissen zurück als auf die gelösten Aufgabenbeispiele. (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....  | 113 |
| Abb. 20: Ein Beispiel für Analogiebildung bei der Bearbeitung der Sequenz „Lineare Zusammenhänge“ (Quelle: Schülerbearbeitung im Rahmen der ersten Vorstudie) .....  | 113 |
| Abb. 21: Schematische Darstellung des Drei-Phasen-Designs (Quelle: Ruppert) .....  | 123 |
| Abb. 22: Bedienoberfläche der Software Videograph®, grafische Darstellung der Denkprozesse in einer Timeline (Quelle: Ruppert - Screenshot der Software Videograph®, mit freundlicher Genehmigung der abgebildeten Schülerinnen).....  | 137 |
| Abb. 23: Die Timeline-Darstellung des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 (Quelle: Ruppert - Screenshot der Software Videograph®).....   | 151 |
| Abb. 24: Denkabschnitte (getrennt durch gestrichelte Linien) und „Ausreißer“ (gestrichelter Kreis) im Denkprozess aus Abschnitt 4.1.1 (Quelle: Ruppert - Screenshot der Software Videograph®).....   | 152 |
| Abb. 25: Der gesamte Denkprozess aus Beispiel 4.1.1 als grafische Darstellung im Zwei-Dimensionen-Modell (Quelle: Ruppert) .....   | 154 |
| Abb. 26: Der Denkprozess aus Beispiel 4.1.1 zerlegt in einzelne Denkabschnitte und dargestellt im Zwei-Dimensionen-Modell (Quelle: Ruppert).....   | 156 |

|   |     |
|---|-----|
| Abb. 27: Punkt-Diagramm, tatsächliche Wege und fiktive Wege für die Denkabschnitte 001_3_1 und 001_3_7 aus dem Beispiel 4.1.1 (vgl. auch Abb. 26) (Quelle: Ruppert).....  | 158 |
| Abb. 28: Punkt-Diagramme für die einzelnen Denkabschnitte des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 (Quelle: Ruppert).....  | 159 |
| Abb. 29: Die Denkabschnitte 001_3_1 und 001_3_7 des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 dargestellt als Punktdiagramm im Zwei-Dimensionen-Modell und als 0-1-Matrix (Quelle: Ruppert).....                            | 159 |
| Abb. 30: Intercoder-Reliabilität – Die Timelines zweier Kodierer zum Video 001_3 (Skalierung: 20s) (Quelle: Ruppert & Schmitt - Screenshot der Software Videograph®) .....  | 165 |
| Abb. 31: Intercoder-Reliabilität – Die Timelines zweier Kodierer zum Video 003_4 (Skalierung: 10s) (Quelle: Ruppert & Schmitt - Screenshot der Software Videograph®) .....  | 166 |
| Abb. 32: Absolute Häufigkeiten für die Zuordnung zu den Kategorien des Kategoriensystems (Quelle: Ruppert) .....  | 172 |
| Abb. 33: Timeline-Darstellungen der Bearbeitungen 004_5 und 005_4 (Quelle: Ruppert - Screenshot der Software Videograph®).....  | 174 |
| Abb. 34: Timeline-Darstellung der Bearbeitung 001_6. Gerahmt: Rückversicherungen auf der Strukturebene. Gestrichelte Linie: Abbruch des Gedankengangs (Quelle: Ruppert - Screenshot der Software Videograph®) ..... | 174 |
| Abb. 35: ZDM-Diagramm aus Schmitt (2011, S. 37) (links). Übertragung auf die hier verwendete Darstellung (rechts) (Quelle: Schmitt, 2011, S. 37).....   | 177 |
| Abb. 36: ZDM-Diagramme verschiedener Analogiebildungsprozesse (Quelle: Ruppert) .....   | 178 |
| Abb. 37: Wege im ZDM-Diagramm, die sich ausschließlich in der Phase des Strukturierens bewegen. (Quelle: Ruppert) .....   | 180 |
| Abb. 38: Fortsetzung der Gedankengänge aus Abb. 37 (von oben nach unten gelesen) (Quelle: Ruppert) .....  | 181 |
| Abb. 39: Ein weiterer Denkprozess, der (im Grunde) mit einem Denkabschnitt in der Phase des Strukturierens beginnt ist 003_4. (Quelle: Ruppert).....  | 181 |
| Abb. 40: Denkabschnitte, die ihren Schwerpunkt in der Strukturierungsphase haben. (Quelle: Ruppert) .....   | 182 |

|  |     |
|--|-----|
| Abb. 41: Denkabschnitte, die ausgehend von knappen strukturierenden Überlegungen direkt abgeschlossen werden. (Quelle: Ruppert).....   | 183 |
| Abb. 42: Denkabschnitte, bei denen die Phase als Teil der Analogiebildung innerhalb einer Ebene auftritt. (Quelle: Ruppert).....   | 184 |
| Abb. 43 : „Horizontale und diagonale“ Wege in der Phase des Schließens (Quelle: Ruppert) .....   | 184 |
| Abb. 44: Der Phase des Beurteilens geht nahezu immer eine Phase des Schließens auf der gleichen Ebene voraus. (Quelle: Ruppert).....   | 185 |
| Abb. 45: Der mehrfache Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auf der Relationsebene (003_1_5 und 004_6_1) oder auf der Handlungsebene (004_4_1 und 005_4_1) ist besonders typisch für den Abschluss eines Analogiebildungsprozesses. (Quelle: Ruppert).....   | 186 |
| Abb. 46: Der charakteristische mehrfache Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen innerhalb eines Denkprozesses sowohl auf der Relationsebene als auch auf der Handlungsebene (Quelle: Ruppert) .....  | 187 |
| Abb. 47: Ausgangs- und Schwerpunkt der abgebildeten Denkabschnitte sind Überlegungen auf der Objektebene. (Quelle: Ruppert) .....  | 188 |
| Abb. 48: Der Übergang von der Objekt- auf die Relationsebene (Quelle: Ruppert).....  | 189 |
| Abb. 49: Wege, die auf der Relationsebene die Phasen vollständig (oder fast vollständig) durchlaufen werden, um anschließend auf der Handlungsebene weitergeführt zu werden. (Quelle: Ruppert) .....   | 190 |
| Abb. 50: Starke Bewegung innerhalb der Relationsebene (Quelle: Ruppert).....   | 190 |
| Abb. 51: Übergänge von der Relations- auf die Handlungsebene (Quelle: Ruppert).....  | 192 |
| Abb. 52: Übergänge von der Relations- auf die Handlungsebene (Quelle: Ruppert).....  | 193 |
| Abb. 53: Intensive Bewegungen innerhalb der Handlungsebene (Quelle: Ruppert) .....   | 194 |
| Abb. 54: Der charakteristische Wechsel zwischen den Phasen Schließen und Beurteilen auf der Handlungsebene (Quelle: Ruppert) .....   | 195 |
| Abb. 55: Der Weg 003_5_1 entzieht sich durch seine Länge einer vernünftigen Zuordnung, Weg 004_2_1 ist der einzige Weg, der den Richtungsannahmen „von links nach rechts und von oben nach unten“ für die Wege im ZDM-Diagramm in beiden Punkten widerspricht und die Wege 005_6_1 und 001_5_1 erscheinen bezüglich der beschriebenen Gruppenbildung in ihrem Verlauf zu indifferent. (Quelle: Ruppert)..... | 197 |

Abb. 56: Scree-Plot – der Abbruch nach dem Elbow-Kriterium bietet sich an der markierten Stelle an. Es bleiben neun Cluster übrig. (Quelle: Ruppert)..... 203

Abb. 57: Kettenbildung beim Average-Group-Linkage-Verfahren (links), Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Relationsebene werden in einem Cluster zusammenfasst (rechts) (Quelle: Ruppert) ..... 205

Abb. 58: Die beiden Denkabschnitte 003\_3\_1 und 005\_4\_1 werden in einem Cluster zusammengefasst. (Quelle: Ruppert) ..... 205

Abb. 59: Matrixdarstellung der Denkabschnitte 003\_3\_1 und 005\_4\_1 mit Aufenthaltshäufigkeiten (Quelle: Ruppert) ..... 206

Abb. 60: Denkabschnitt 005\_4\_1 wird nun einem anderen Cluster zugeordnet (links). Es gibt noch weitere Denkabschnitte in anderen Clustern, die den typischen mehrfachen Wechsel zwischen Schließen und Beurteilen aufweisen (rechts). (Quelle: Ruppert) ..... 207

Abb. 61: Matrixdarstellung der Denkabschnitte 003\_3\_1 und 005\_4\_1 mit gewichteten Aufenthaltshäufigkeiten (Quelle: Ruppert) ..... 207

Abb. 62: Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Objektebene (Cluster 3, links), auf der Relationsebene (Cluster 8, Mitte) und auf der Handlungsebene (Cluster 2, rechts) (Quelle: Ruppert) ..... 208

Abb. 63: Denkabschnitte mit Schwerpunkt auf der Objektebene (Cluster 9, links), auf der Relationsebene (Cluster 8, Mitte) und auf der Handlungsebene (Cluster 5, rechts) (Quelle: Ruppert) ..... 210

Abb. 64: Die Cluster 5, 8 und 10 werden trotz der augenscheinlichen Ähnlichkeit ihrer Elemente unterschieden. (Quelle: Ruppert) ..... 210

Abb. 65: Einbeschriebener Kegel und umbeschriebener Zylinder (Quelle: Ruppert mit Archimedes Geo3D®) ..... 232

Abb. 66: Die Analogie zwischen Kreisumfang und Kugeloberfläche (Quelle: Ruppert mit Cabri3D®)..... 234

Abb. 67: Konstruktionswerkzeuge in der Ebene und im Raum. Die Charakterisierung als geometrischer Ort liefert die Objektanalogie. (Quelle: Ruppert mit Cabri3D®)..... 238

Abb. 68: Die Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks (links) und der Umkugel eines Tetraeders (rechts) (Quelle: Ruppert mit GeoGebra®)..... 239

Abb. 69: Schrägbild des Würfels als „verschobenes Quadrat“ (links) und Schrägbild des vierdimensionalen (Hyper)würfels als „verschobener Würfel“ (rechts) (Quelle: Ruppert mit Cabri3D®)..... 243

Abb. 70: Dreidimensionales Schrägbild eines vierdimensionalen (Hyper)Würfels  
 (Quelle: Ruppert (Schülerfoto beim Girls'day 2011 der Universität Würzburg)  
 mit freundlicher Genehmigung der Schülerin bzw. deren Eltern) ..... 243

Abb. 71: Projektion eines Würfels entlang der (dreidimensionalen) Raumdiagonalen  
 (links). Schülerbearbeitung: Eine Klassifizierung verschiedener Projektionen  
 (rechts)  
 (Quelle: Ruppert (Schülerfoto beim Girls' day 2011 der Universität Würzburg)  
 mit freundlicher Genehmigung der Schülerin bzw. deren Eltern;  
 Schülerbearbeitung im Rahmen des Girls' Day 2011) ..... 244

Die Abbildungen zu den Beispielen im Abschnitt 1.1.1 sowie zu den Aufgaben der Aufgabensequenzen im Anhang wurden nicht eigens nummeriert und ins Abbildungsverzeichnis aufgenommen. Diese Abbildungen wurden alle vom Autor selbst erstellt.

---

## Tabellen

|  |     |
|--|-----|
| Tabelle 1: Symbolische Beschreibung verschiedener Arten des Schließens.....  | 59  |
| Tabelle 2: Fundamentale Ideen nach Schreiber (1983) .....  | 90  |
| Tabelle 3: Universelle Ideen und zentrale Ideen nach Klika (2003, S. 5) .....  | 91  |
| Tabelle 4: Die Bedeutung der verwendeten Symbole im ZDM-Modell.....  | 155 |
| Tabelle 5: Die Darstellung des Denkprozesses aus Abschnitt 4.1.1 in Form von<br>Weg-Matrizen für die einzelnen Denkabschnitte..... | 159 |
| Tabelle 6: Die Anzahl k-dimensionaler Begrenzungs(hyper)flächen eines<br>n-dimensionalen (Hyper)Würfels .....                      | 242 |





## Literatur

- AMTHAUER, R., BROCKE, B., LIEPMANN, D. UND BEAUDUCEL, A. (2001). *I-S-T 2000 R - Intelligenz-Struktur-Test 2000 R*. Göttingen: Hogrefe.
- ANDERSON, J. R. (2001). *Kognitive Psychologie* (3. Ausg.). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- ANDERSON, J. R. UND THOMPSON, R. (1989). Use of Analogy in a Production System Architecture. In S. VOSNIADOU UND A. ORTONY (Hrsg.), *Similarity and Analogical Reasoning* (S. 267-297). New York: Cambridge University Press.
- ANDERSON, J. R., CORBETT, A. T., KOEDINGER, K. UND PELLETIER, R. (1995). Cognitive tutors: Lessons learned. *The Journal of the Learning Sciences*, 4, S. 167-207.
- ARCHIMEDES (1983). *Archimedes Werke übersetzt von A. Czwilina*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- ASHBY, F. G. (1992). *Multidimensional Models of Perception and Cognition*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- ABMUS, D. (2013). Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Kindern - Begriffsklärung und Überblick zu empirischen Studien. *mathematica didactica*, 36, S. 28-44.
- ABMUS, D., FÖRSTER, F. (2012). Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In M. LUDWIG UND M. KLEINE (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 89-92). Münster: WTM-Verlag.
- ABMUS, D., FÖRSTER, F. (2013). ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. *mathematica didactica*, 36, S. 45-65.
- ABMUS, D., FÖRSTER, F. (2015). ViStAD - Analoges Denken beim Problemlösen - Förderliche und hinderliche Bedingungen bei Analogieerkennung und Analogienutzung. In A. KUZLE UND B. ROTT (Hrsg.), *Problemlösen gestalten und beforschen* (S. 1-32). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- ABMUS, D., FÖRSTER, F., FRITZLAR, T. (2015) Analogical reasoning abilities of mathematically gifted children - first results of the video study ViStAD. In F. M. SINGER, F. TOADER UND C. VOICA (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference 2015, Romania, Sinaia*.

- ABMUS, D., FRITZLAR, T. UND FÖRSTER, F. (2014). Analogieerkennung im Problemlöseprozess – ein Verlaufsmodell. In ROTH, J., AMES, J. (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 113-116). Münster: WTM-Verlag.
- ATKINSON, K. A., DERRY, S. J., RENKL, A. UND WORTHAM, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research*, 70, S. 181-214.
- BÄRTHLEIN, K. (1996). *Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon*. (J. TALANGA, Hrsg.) Würzburg: Königshausen und Neumann.
- BACKHAUS, K., ERICHSON, B., PLINKE, W. UND WEIBER, R. (2016). *Multivariate Analysemethoden* (14. überarbeitete Ausg.). Berlin, Heidelberg: Springer Gabler.
- BARTON, A. H. UND LAZARSELD, P. E. (1979). Einige Funktionen von qualitativer Analyse in der Sozialforschung. In C. HOPF UND E. WEINGARTEN, *Qualitative Sozialforschung* (S. 41-89). Stuttgart: Klett.
- BASSOK, M. (1997). Two Types of Reliance on Correlations Between Content and Structure in Reasoning About Word Problems. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 221-246). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- BECKER, G. (1992). Integration von ebener und räumlicher Geometrie durch Bildung von Analogien. *mathematica didactica* (15), S. 5-12.
- BECKER, H. (2006). *Semantische und lexikalische Aspekte der mathematischen Fachsprache des 19. Jahrhunderts*. Universität Oldenburg: Dissertation.
- BEGOLLI, K. N. UND RICHLAND, L. E. (2016). Teaching Mathematics by Comparison: Analog Visibility as a Double-Edged Sword. *Journal of Educational Psychology*, 108 (2), S. 194-213.
- BELSER, H., ANGER, H. UND BARGMANN, R. (1965). *Frankfurter Analogietest FAT 7-8: Begabungstest für 7. und 8. Klassen: Testheft mit Anleitung und Normtabellen*. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung, Frankfurt am Main: Dissertation.
- BENDER, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der SI. In H. WALTER (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 8-17). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- BENDER, P. UND SCHREIBER, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien: öbv.
- BENIS-SINACEUR, H. (2000). The Nature of Progress in Mathematics: The Significance of Analogy. In E. GROSHOLZ UND H. BERGER, *The Growth of Mathematical Knowledge* (S. 281-293). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BORING, E. G. (1953). A history of introspection. *Psychological Bulletin*, 50 (3), S. 169-189.

- BORROMEO FERRI, R. (2004). *Mathematische Denkstile*. Hildesheim: Franzbecker.
- BORTZ, J. UND DÖRING, N. (1995). *Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler* (2. Auflage Ausg.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- BRANDT, T. (1977). *Ana ton auton logon - Zur Entwicklung des Gebrauchs der Analogie in der griechischen Philosophie*. Marburg: Görlich und Weiershäuser.
- BRUDER, R. (2006). Grundlagen für Analogieschlüsse: Mathematisierungsmuster und Vorgehensstrategien in Anwendungssituationen. *Der Mathematikunterricht* (52), S. 5-18.
- BRUDER, R., LENGNIK, K. UND PREDIGER, S. (2003). Preprint Nr. 2265 des Fachbereichs Mathematik. *Ein Instrumentarium zur Erfassung subjektiver Theorien über Mathematikaufgaben*. TU Darmstadt.
- BRUNER, J. S. (1966). *Studies in cognitive growth*. New York: Wiley.
- BRUNER, J. S. (1972). *Der Prozess der Erziehung* (2. Ausg.). Berlin, Düsseldorf: Schwann.
- BRUNER, J. S. (1973). *Beyond the information given*. Oxford: Norton.
- BRUNNERMEIER, A., HERZ, A., KAMMERMEYER, F., KILIAN, H., SAUER, J. UND ZECHEL, J. (2003). *Fokus Mathematik - Gymnasium Bayern: 5. Jahrgangsstufe*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- BRUNNERMEIER, A., HERZ, A., KAMMERMEYER, F., KILIAN, H., KURZ, K., SAUER, J. ET AL. (2004). *Fokus Mathematik - Gymnasium Bayern: 6. Jahrgangsstufe*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- BUCKLE, H. T. (1885). *History of civilisation in England* (2. Ausg., Bd. 1). New York: D. Appleton and Company.
- CATAMBRONE, R. (1998). The subgoal learning model. *Journal of experimental psychology: General*, 127, S. 355-376.
- CATRAMBONE, R. UND HOLYOAK, K. J. (1990). Learning subgoals and methods for solving probability problems. *Memory & Cognition*, 18, S. 593-603.
- CHAN, J. UND SCHUNN, C. (2015). The Impact of Analogies on Creative Concept Generation: Lessons From an In Vivo Study in Engineering Design. *Cognitive Science*, 39, S. 126-155.
- CHI, M. T., BASSOK, M., LEWIS, M. W., REIMANN, P. UND GLASER, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13, S. 145-182.
- COHEN, H. (1879). *Platons Ideenlehre und die Mathematik*. Marburg: N. G. Elwertsche Verlagsbuchhandlung.
- COUSIN, V. (1824). *Oeuvres de Descartes*. Paris: F. G. Levrault.

- COX, B. D. (1997). The rediscovery of the active learner in adaptive contexts: A developmental-historical analysis of transfer of training. *Educational Psychologist*, 32 (1), S. 41-55.
- DAMBECK, H. (2012). 26 Schafe + 10 Ziegen = 36 Jahre. *Der SPIEGEL - Spiegel-Online am* 17.01.2012.
- DAVIS, R. B. UND MAHER, C. A. (1997). How Students Think: The Role of Representations. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (S. 93-116). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- DENZIN, N. K. (1970). *The Research Act*. Chicago: Aldine.
- DESCARTES, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyden: Ian Maire.
- DRESING, T. UND PEHL, T. (2013). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (5. Ausg.). Marburg: Eigenverlag.
- DUNCKER, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Julius Springer.
- ECKSTEIN, P. P. (2016). *Angewandte Statistik mit SPSS* (8. Auflage Ausg.). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- EDWARDS, B. J., WILLIAMS, J. J., GENTNER, D. UND LOMBROZO, T. (2014). Effects of comparison and explanation on analogical transfer. In P. BELLO, M. GUARINI, M. MCSHANE UND B. SCASELLATI (Hrsg.) *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, S. 445-450.
- EICHLER, A. UND VOGEL, M. (2011). *Leitfaden Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- ENGLISH, L. D. (Hrsg.). (1997a) *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 191-220). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- ENGLISH, L. D. (1997b). Analogies, Metaphors, and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors and Images* (S. 3-18). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- ENGLISH, L. D. (1997c). Children's Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational Word Problems. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 191-220). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- ENGLISH, L. D. (Hrsg.). (2004a). *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates.

- ENGLISH, L. D. (2004b). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners* (S. 1-22). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- ERICSSON, K. A. UND SIMON, H. A. (1980). Verbal report as data. *Psychological Review*, 87 (3), S. 215-251.
- ERICSSON, K. A. UND SIMON, H. A. (1999). *Protocol Analysis* (3. Ausg.). Cambridge, London: MIT Press.
- FEUERLEIN, C. UND RIEGER, M. (2009). *bsv Mathematik 5 - G8 Bayern*. München: Bayerischer Schulbuch Verlag.
- FLICK, U. (2011). *Triangulation - Eine Einführung* (3. aktualisierte Ausg.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- FRANCOIS, K. P. (2007). *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*. New York: Springer Science+Business Media.
- FREYTAG, C., GRÄUPNER, C., HERZ, A., KAMMERMEYER, F., KILIAN, H., KURZ, K. ET AL. (2007). *Fokus Mathematik - Gymnasium Bayern: 9. Jahrgangsstufe*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- FRITSCH, R. (2000). Tetraeder und Kugeln. In R. FLACHSMEYER, R. FRITSCH UND H.-C. REICHEL, *Mathematik - Interdisziplinär* (S. 149-156). Aachen: Shaker Verlag.
- GENTNER, D. (1983). Structure Mapping: A Theoretical Framework for Analogy. *Cognitive Science* (7), S. 155-170.
- GENTNER, D. (1988). Metaphor as Structure Mapping: The Relational Shift. *Child Development* (59), S. 47-59.
- GENTNER, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. VOSNIADU UND A. ORTONY (Hrsg.), *Similarity and analogical reasoning* (S. 199-241). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- GENTNER, D. (1998). Analogy. In W. BECHTEL UND G. GRAHAM (Hrsg.), *A Companion to Cognitive Science* (S. 107-113). Oxford: Blackwell.
- GENTNER, D. UND JEZIORSKI, M. (1993). The shift from metaphor to analogy in Western science. In A. ORTONY (Hrsg.), *Metaphor and thought* (S. 447-480). New York: Cambridge University Press.
- GENTNER, D., BOWDLE, B. F. UND BORONAT, C. (2001). Metaphor is like Analogy. In D. GENTNER, K. J. HOLYOAK UND B. N. KOKINOV (Hrsg.), *The Analogical Mind - Perspectives from Cognitive Science* (S. 199-254). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- GENTNER, D., HOLYOAK, K. J. UND KOKINOV, B. N. (2001a). *The Analogical Mind - Perspectives from Cognitive Science*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

- GENTNER, D., HOLYOAK, K. J. UND KOKINOV, B. N. (2001b). The Place of Analogy in Cognition. IN D. GENTNER, K. J. HOLYOAK UND B. N. KOKINOV (Hrsg.), *The Analogical Mind* (S. 1-19). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- GHOLSON, B., SMITHER, D., BUHRMANN, A., DUNCAN, M. K. UND PIERCE, K. A. (1997). Children's Development of Analogical Problem-Solving Skill. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 149-190). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- GIEST, H. UND LOMPSCHER, J. (2006). *Lerntätigkeit - Lernen aus kultur-historischer Perspektive: Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Berlin: Lehmanns Media.
- GILHOOLY, K. J. (1996). *Thinking - Directed, Undirected and Creative*. San Diego: Academic Press Limited.
- GLASER, B. G. UND STRAUSS, A. L. (1979). Die Entdeckung gegenstandsbezogener Theorie: Eine Grundstrategie qualitativer Sozialforschung. In C. HOPF UND E. WEINGARTEN, *Qualitative Sozialforschung* (S. 91-111). Stuttgart: Klett.
- GOETHE, J. W. V. (2015). *Wilhelm Meisters Wanderjahre*. Altenmünster: Jazzybee Verlag Jürgen Beck.
- GOLDSTONE, R. L. (1994). The role of similarity in categorization: Providing a groundwork. *Cognition* (52), S. 125-157.
- GRAUMANN, G. (2009). Spate in drei und mehr Dimensionen. *Der Mathematikunterricht*, 55 (1), S. 16-25.
- GREEN, A. E. (2012). Neural Correlates of Creativity in Analogical Reasoning. *Journal of Experimental Psychology*, 38 (2), S. 264-272.
- GUILFORD, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. USA: McGraw-Hill Book Company.
- HAASTRUP, K. (1991). *Lexical Inferencing Procedures or Talking about Words*. Tübingen: Gunter Narr Verlag.
- HAASTRUP, K. (1987). Using Thinking Aloud and Retrospection to Uncover Learners' Lexical Inferencing Procedures. In C. FAERCH UND G. KASPER, *Introspection in Second Language Research* (S. 197-212). Clevedon: Multilingual Matters Ltd.
- HANDL, A. (2010). *Multivariate Analysemethoden* (2. Ausg.). Heidelberg: Springer.
- HAUBER, K., MAYRING, P. UND STREHMEL, P. (1982). Praktische Probleme bei der Inhaltsanalyse offen erhobener Kognitionen diskutiert am Beispiel der Variablen "Berufsinteresse arbeitsloser Lehrer". In H.-D. DANN, W. HUMPERT, F. KRAUSE UND K.-C. TANNSTÄDT (Hrsg.), *Analyse und Modifikation subjektiver Theorien von Lehrern* (S. 159-173). Konstanz.

- HEINRICH, F. (2006). Analogiebildung in der Mathematik und im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht* (52), S. 2-5.
- HEITEL, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* (6), S. 187-205.
- HELMAN, D. H. (1988). *Analogical Reasoning: Perspectives of Artificial Intelligence, Cognitive Science, and Philosophy*. Dordrecht: Kluwer.
- HESSE, F. W. (1991). *Analoges Problemlösen. Eine Analyse kognitiver Prozesse beim analogen Problemlösen*. Weinheim: Psychologische Verlags Union.
- HEUSER, H. (1988). *Lehrbuch der Analysis - Teil 1* (5. durchgesehene Ausg.). Stuttgart: B. G. Teubner.
- HEYMANN, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.
- HISCHER, H. (2003). Mittelwertbildung - Eine der ältesten mathematischen Ideen. *Mathematik Lehren*, 119, S. 40-46.
- HISCHER, H. UND WEIß, M. (Hrsg.). (1995). *Fundamentale Ideen - Zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- HOLSTI, O. R. (1969). *Content Analysis for the Social Sciences and Humanities*. Reading, Massachusetts: Addison Wesley.
- HOLYOAK, K. J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R. J. STERNBERG (Hrsg.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Bd. 2). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- HOLYOAK, K. J., JUNN, E. N. UND BILLMAN, D. O. (1984). Development of Analogical Problem-Solving Skill. *Child Development* (55), S. 2042-2055.
- HOLYOAK, K. J. UND THAGARD, P. (1995). *Mental Leaps - Analogy in Creative Thought*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- HOLYOAK, K. J. UND MORRISON, R. G. (2005). *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning*. New York: Cambridge University Press.
- HUME, D. (1748). *An Enquiry Concerning Human Understanding. Reprint: Harvard Classics Vol. 37 (1910)*. P. F. Collier and Son.
- HUSSY, W. (1998). *Denken und Problemlösen* (2. Ausg.). Stuttgart: W. Kohlhammer GmbH.
- JÜNGEL, B. (1964). *Zum Ursprung der Analogie bei Parmenides und Heraklit*. Berlin: Walter de Gruyter & Co.

- JAHNKE, T. UND SCHOLZ, D. (2009). *Fokus Mathematik 11 - Gymnasium Bayern*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- JUNG, W. (1978). Zum Begriff der mathematischen Bildung - Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidaktik. *mathematica didactica* (1), S. 161-176.
- KÖCKEIS-STANGL, E. (1982). Methoden der Sozialforschung. In K. HURRELMANN UND D. Ulich (Hrsg.), *Handbuch der Sozialforschung* (S. 321-370). Weinheim: Beltz.
- KÄPNICK, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt a. M.: Lang.
- KELLER, B. UND BRANDENBURG, M. (1999). Kapitänsaufgaben in Bildern. *Die Grundschulzeitschrift*, 126, S. 54-55.
- KING, A. (1993). From Sage on the Stage to Guide on the Side. *College Teaching*, 41, S. 30-35.
- KLAUER, K. J. (2011). *Transfer des Lernens*. Stuttgart: Kohlhammer.
- KLIKA, M. (1981). Fundamentale Ideen im Analysisunterricht. *mathematica didactica*, 4, S. 1-31.
- KLIKA, M. (2003). Zentrale Ideen - echte Hilfen. *Mathematik Lehren*, 119, S. 4-7.
- KLIX, F. (1992). *Die Natur des Verstandes*. Göttingen: Hogrefe.
- KOKINOV, B. (1988). Associative memory-based reasoning: How to represent and retrieve cases. In T. O'SHEA UND V. SGUREV, *Artificial intelligence III: Methodology, Systems, Applications* (S. 51-58). Amsterdam: Elsevier.
- KOSSAKOWSKI, A. UND LOMPSCHER, J. (1977). Teilfunktionen und Komponenten der psychischen Regulation der Tätigkeit. In A. KOSSAKOWSKI, H. KÜHN, J. LOMPSCHER UND G. ROSENFELD (Hrsg.), *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess* (1. Ausg.).
- KRINGS, H. P. (2001). *Repairing texts: empirical investigations of machine translation post-editing processes*. (G. S. Koby, Hrsg. UND G. Koby, Übers.) Kent: State University Press.
- KRIPPENDORF, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to its Methodology*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- KUCKARTZ, U. (2005). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- KUCKARTZ, U., DRESING, T. UND RÄDIKER, S. S. (2008). *Qualitative Evaluation. Der Einstieg in die Praxis*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.



- KULTUSMINISTERKONFERENZ, KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.
- KULTUSMINISTERKONFERENZ, KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Köln: Wolters Kluwer.
- KUTSCHERA, U. (2007). *Streitpunkt Evolution*. Berlin: LIT Verlag Dr. W. Hopf.
- KUZLE, A. UND ROTT, B. (2015). *Problemlösen gestalten und beforschen*. Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- LAKOFF, G. (1987). *Women, Fire and Dangerous Things*. Chicago: The University of Chicago Press.
- LAMNEK, S. (1988). *Qualitative Sozialforschung - Band 1: Methodologie*. München: Psychologie Verlags Union.
- LAMNEK, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung*. Weinheim, Basel: Beltz PVU.
- LAPLACE, P. S. (1814). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit* (2. Ausg.). R. v. MISES, (Hrsg.). Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- LEE, K.-H. UND SRIRAMAN, B. (2011). Conjecturing via Reconceived Classical Analogy. *Educational Studies in Mathematics* (76/2), S. 123-140.
- LEINO, A.-L. UND DRAKENBERG, M. (1993). Metaphor: An educational perspective. *Research Bulletin. University of Helsinki, Department of Education*, 34.
- LEUCHTER, M. (2009). *Die Rolle der Lehrperson bei der Aufgabenbearbeitung*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.
- LITTLE, J. L. UND MCDANIEL, M. A. (2015). Some Learners Abstract, Others Memorize Examples: Implications for Education. *Translational Issues in Psychological Science*, 1 (2), S. 158-169.
- LOBATO, J. (2006). Alternative Perspectives on the Transfer of Learning: History, Issues, and Challenges for Future Research. *The Journal of the Learning Sciences*, 15 (4), S. 431-449.
- LOCH, W. (1972). Vorwort des Herausgebers zur deutschen Übersetzung von J. Bruners 'The Process of Education'. In J. S. BRUNER UND W. LOCH (Hrsg.), *Der Prozess der Erziehung* (A. HARTUNG, Übers., 2. Ausg., S. 7-15). Düsseldorf, Berlin: Schwann.
- LOMPSCHER, J. (1975). *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten* (2. Ausg.). Berlin: Volk und Wissen.
- MAIER, N. R. (1930). Reasoning in Humans I. On direction. *Journal of Comparative Psychology*, 10(2), S. 115-143.

- MANKTELOW, K. (2012). *Thinking and Reasoning*. New York: Psychology Press.
- MAYER, R. E. (1979). *Denken und Problemlösen*. (E. M. Pinto, Übers.) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- MAYRING, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.
- MAYRING, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse* (11. aktualisierte und überarbeitete Ausg.). Weinheim, Basel: Beltz.
- NANNINI, S. (2006). *Mentale Repräsentation und Naturalisierung der Intentionalität*. Abgerufen am 11.08.2013 von <http://www.repraesentation.uni-bremen.de/Texte/P2.pdf>
- NISBETT, R. E. UND WILSON, T. (1977). Telling more than we can know: Verbal reports on mental processes. *Psychological Review*, 84 (3), S. 231-259.
- NOVICK, L. R. (1988). Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* (14), S. 510-520.
- ODEN, D. L., ROGER, K. R. UND PREMACK, D. (2001). Can an Ape Reason Analogically? Comprehension and Production of Analogical Problems by Sarah, a Chimpanzee (Pan troglodytes). In D. GENTNER, K. J. HOLYOAK UND B. N. KOKINOV, *The Analogical Mind* (S. 471-498). Cambridge, London: MIT Press.
- OSBORN, A. F. (1963). *Applied imagination*. New York: Scribner's.
- OTT, S. (2011). *Das räumliche Analogisieren der ebenen Geometrie - ein alternativer Zugang zu Raumgeometrie?* Universität Würzburg: Schriftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an Realschulen (unveröffentlicht).
- PAAS, F. G. UND VAN MERRIENBOER, J. J. (1994). Variability of Worked Examples and Transfer of Geometrical Problem-Solving Skills: A Cognitive-Load Approach. *Journal of Educational Psychology*, 86 (1), S. 122-133.
- PIAGET, J. (1980). *Psychologie der Intelligenz*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- PLATO. (1871). *Theaetetos*. (B. Jowett, Übers.) New York: C. Scribner's sons.
- PLATO. (1940). *Sämtliche Werke*. (F. D. SCHLEIERMACHER, Übers.) Berlin: L. Schneider.
- PRESMEG, N. (1997). Reasoning with Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 267-280). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- PÓLYA, G. (1962). *Mathematik und plausible Schließen - Induktion und Analogie in der Mathematik* (Bd. 1). (L. Bechtolsheim, Übers.) Basel, Stuttgart: Birkhäuser.
- PÓLYA, G. (1967). *Schule des Denkens* (2. Ausg.). Bern: A. Francke Verlag.

- PÓLYA, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Bd. I: Induction and Analogy in Mathematics). Princeton: Princeton University Press.
- QUILICI, J. L. UND MAYER, R. E. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistical word problems. *Journal of Educational Psychology*, 88 (1), S. 144-161.
- RASFELD, P. (1981). *Der didaktische Wert analoger Konkretisierungen für Begriffsbildungen im Mathematikunterricht vor allem der Sekundarstufe I*. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn: Dissertation.
- RATTERMAN, M. J. (1997). Mathematical Reasoning and Analogy. In L. D. ENGLISH (Hrsg.), *Mathematical Reasoning - Analogies, Metaphors, and Images* (S. 247-264). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- RAVEN, J. C. (1956). *Guide to using progressive matrices*. London: H. K. Lewis.
- REBELLO, S., ZOLLMAN, D., ALBAUGH, A. R., ENGELHARDT, P. B., GRAY, K. E., HREPIC, Z., ET AL. (2005). Dynamic transfer: A perspective from physics education research. In J. Mestre (Hrsg.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (S. 217-250). Greenwich, CT: Information Age.
- REED, S. K., DEMPSTER, A. UND ETTINGER, M. (1985). Usefulness of Analogous Solutions for Solving Algebra Word Problems. *Journal of Experimental Psychology*, 11 (1), S. 106-125.
- REED, S. K. UND BOLSTAD, C. A. (1991). Use of examples and procedures in problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, S. 753-766.
- REID, D. UND KINPPING, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense.
- RENKL, A. (1997). Learning from worked-out examples: A study on individual differences. *Cognitive Science*, 21, S. 1-29.
- RENKL, A. (2014). Toward an Instructionally Oriented Theory of Example-Based Learning. *Cognitive Science*, 38, S. 1-37.
- RENKL, A. (2014). Learning from worked examples: How to prepare students for meaningful problem solving. In V. A. BENASSI, C. E. OVERSON UND C. M. HAKALA, *Applying the Science of Learning in Education: Infusing psychological science into the curriculum*. Retrieved from the Society for the Teaching of Psychology web site: <http://teachpsych.org/ebooks/asle2014/index.php>. (zuletzt aufgerufen: 25.02.2017)
- RENKL, A. (2016). Vergleiche anregen - Eine produktive Komponente beim Üben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 67, S. 17-20.
- RENKL, A., MANDL, H. UND GRUBER, H. (1996). Inert knowledge: Analyses and remedies. *Educational Psychologist*, 31, S. 115-121.



- SCHMITT, M. (2011). *Empirische Untersuchung zur Charakterisierung von Analogiebildungsprozessen beim Problemlösen mit Computereinsatz*. Universität Würzburg: Schriftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an Realschulen (unveröffentlicht).
- SCHNEIDER, J. F. (2001). *Lautes Denken - Prozessanalysen bei Selbst- und Fremdeinschätzungen*. Weimar: Verlag Rita Dadder.
- SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press Inc.
- SCHOPENHAUER, A. (1851). *Parerga und Paralipomena: kleine philosophische Schriften* (Bd. 2). Berlin: A. W. Hayn.
- SCHREIBER, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. *mathematica didactica*, 2, S. 165-171.
- SCHREIBER, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *mathematica didactica*, 6, S. 65-76.
- SCHUMANN, H. (2004). Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel "Dreieck-Tetraeder". *mathematica didactica*, 1 (27), S. 82-100.
- SCHUMANN, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum - Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D*. Hildesheim: Franzbecker.
- SCHWEIGER, F. (1982). Fundamentale Ideen zur Analysis und handlungsorientierter Unterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 103-111). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- SCHWEIGER, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13 (2/3), S. 199-214.
- SCHWILL, A. (1995). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In H. HISCHER UND M. WEIß (Hrsg.), *Fundamentale Ideen - Zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" der Gesellschaft für Mathematik* (S. 18-25). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- SELTER, C. UND SPIEGEL, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.
- SHEARD, C. UND READANCE, J. E. (1988). An Investigation of the Inference and Mapping Processes of the Componential Theory of Analogical Reasoning. *Journal of Educational Research* (81), S. 347-353.
- SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), S. 4-14.

- SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (2), S. 1-22.
- SIMON, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for sense of self. *Educational Studies in Mathematics* (30), S. 197-210.
- STERN, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"? *Der Mathematikunterricht*, 4, S. 7-29.
- STERNBERG, R. J. (1977). *Intelligence, Information processing, and Analogical Reasoning*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- STRAUSS, A. L. UND CORBIN, J. (1996). *Grounded Theory, Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.
- SWELLER, J. (1994). Cognitive Load Theory, Learning Difficulty and Instructional Design. *Learning and Instruction*, 4, S. 295-312.
- SWELLER, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. MAYER, *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 19-33). Cambridge: Cambridge University Press.
- SWELLER, J. UND COOPER, G. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, 1, S. 59-89.
- SWELLER, J., VAN MERRIENBOER, J. J. UND PASS, F. G. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, 10 (3), S. 251-296.
- SWELLER, J. UND CHANDLER, P. (2004). Why some material is difficult to learn. *Cognition and instruction*, 12, S. 185-233.
- SZABÓ, A. (1965). Die frühgriechische Proportionenlehre im Spiegel ihrer Terminologie. *Archive for History of Exact Sciences* (2), S. 197-270.
- TARMIZI, R. A. UND SWELLER, J. (1988). Guidance during mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 80, S. 424-436.
- THAGARD, P. (1988). Dimensions of Analogy. In D. H. HELMAN (Hrsg.), *Analogical Reasoning: Perspectives of Artificial Intelligence, Cognitive Science, and Philosophy* (S. 105-124). Dordrecht: Kluwer.
- THORNDIKE, E. L. (1906). *Principles of Teaching*. New York: Seiler.
- TIEMANN, A. (1993). *Analogie - Analyse einer grundlegenden Denkweise in der Physik*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch.
- TIETZE, U. P. (1979). Fundamentale Ideen der linearen Algebra und der analytischen Geometrie. *mathematica didactica* (2), S. 137-163.

- TIETZE, U. P., KLIKA, M. UND WOLPERS, H. (1981). *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- TIETZE, U.-P., KLIKA, M. UND WOLPERS, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Band 1: Grundfragen der Analysis* (2. Ausg.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- TRAFTON, J. G. UND REISER, B. J. (1993). The contributions of studying examples and solving problems to skill acquisition. In M. POLSON (Hrsg.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Cognitive Science Community* (S. 1017-1022). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- TVERSKY, B. (2005). Visuospatial Reasoning. In K. J. HOLYOAK UND R. G. MORRISON, *Thinking and Reasoning* (S. 209-240). New York: Cambridge University Press.
- ULICH, D., HAUBER, K., MAYRING, P., STREHMEL, P., KANDLER, M. UND DEGENHARD, B. (1985). *Psychologie der Krisenbewältigung. Eine Längsschnittstudie mit arbeitslosen Lehrern*. Weinheim: Beltz.
- VÁSÁRHELYI, E. (2006). Über das Lernen mittels Analogiebildung. *Der Mathematikunterricht, Jahrgang 52 - Heft 6*, S. 20-36.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1973). *Einfall und Überlegung* (3. erw. Ausg.). Basel: Birkhäuser Verlag.
- VOLLRATH, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslebens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- VOLLRATH, H.-J. UND WEIGAND, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. München: Spektrum Akademischer Verlag.
- VORA, P. UND HELANDER, M. (1995). A Teaching method as an alternative to the concurrent think-aloud method for usability testing. In Y. ANZAI, K. OGAWA UND H. MORI, *Symbiosis of Human and Artifact* (S. 375-380). Elsevier Sciences Ltd.
- VOSNIADOU, S. UND ORTONY, A. (Hrsg.). (1989). *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- WALLACH, D. UND WOLF, C. (2001). Das prozeßbegleitende Laute Denken - Grundlagen und Perspektiven. In J. F. SCHNEIDER (Hrsg.), *Lautes Denken - Prozessanalysen bei Selbst- und Fremdeinschätzungen* (S. 9-29). Weimar: Verlag Rita Dadder.
- WARD, M. UND SWELLER, J. (1990). Structuring effective worked examples. *Cognition and Instruction*, 7, S. 1-39.
- WATSON, J. B. (1913). Psychology as the behaviourist views it. *Psychological Review*, 20, S. 158-177.
- WEIB, R. H. (2006). *Grundintelligenztest Skala 2 - Revision. CFT 20-R*. Göttingen: Hogrefe.

- WEIGAND, H.-G. UND RUPPERT, M. (2015). Das Klein-Projekt - Hochschulmathematik vor dem Hintergrund der Schulmathematik. In J. ROTH, T. BAUER, H. KOCH UND S. PREDIGER, *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 103-118). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- WERTHEIMER, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.
- WERTHEIMER, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Ausg.). (W. METZGER, Übers.) Frankfurt a. M.: W. Kramer & Co.
- WETH, T. (1997). *Begriffsbildung als kreatives Tun im Mathematikunterricht*. Universität Würzburg: Habilitationsschrift.
- WHITEHEAD, A. N. (1913). *The Mathematical Curriculum*. Deutsche Übersetzung von A. Wittenberg (1962) In: *Neue Sammlung* (2).
- WITTMANN, G. (2003). Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie. *Mathematik Lehren*, 119, S. 47-51.
- WITTWER, J. UND RENKL, A. (2010). How effective are Instructional Explanations in Example-Based Learning? A Meta-Analytic Review. *Educational Psychology Review*, 22, S. 393-409.



## Anhang

|      |                   |     |
|------|-------------------|-----|
| I.   | Aufgabensequenzen | 275 |
| II.  | Kategoriensystem  | 305 |
| III. | Kodierleitfaden   | 307 |

### **Bemerkung zum Anhang**

Aus Layout-Gründen weicht die Darstellung der Aufgabensequenzen im Anhang I hinsichtlich der Seitenumbrüche von der Originaldarstellung ab. Im Original wurde darauf geachtet, dass Aufgabenbeispiele und deren Lösung auf einer Seite abgedruckt sind und dass sich Abbildungen, auf die im Text Bezug genommen wird, auf der gleichen Seite befinden wie der Text.

Die Abbildungen zu den Aufgabensequenzen wurden alle vom Autor selbst gefertigt.



# I Aufgabensequenzen

## Aufgabesequenz I – Flächengleichheiten

Die Fläche eines Dreiecks ergibt sich als  $A = \frac{1}{2}g \cdot h$ .

Dabei ist  $g$  eine beliebige Dreiecksseite (Grundlinie) und  $h$  die zu dieser Seite gehörende Dreieckshöhe (Abb. 1 und Abb. 2). Erinnerung: Die Höhe  $h$  kann auch außerhalb des Dreiecks liegen (Abb. 2).

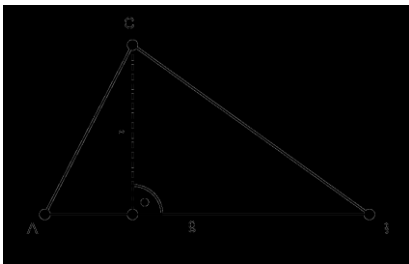


Abb. 1

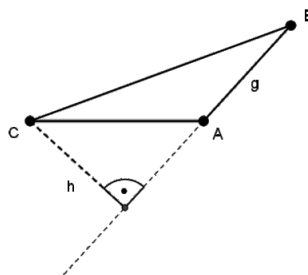


Abb.2

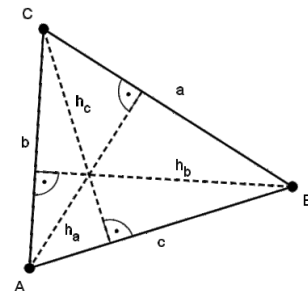


Abb.3

Es gilt demnach (vgl. Abb. 3):

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

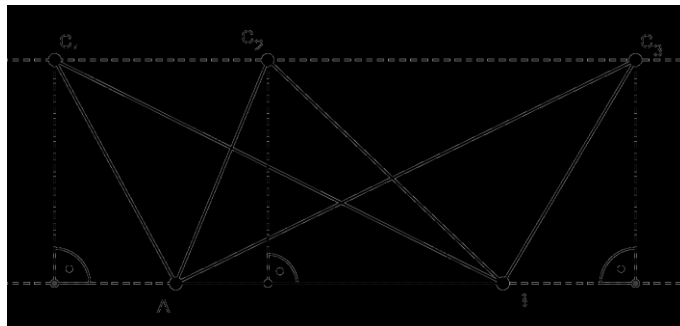
Stimmen also zwei verschiedene Dreiecke in der Länge einer Dreiecksseite überein und sind auch die zugehörigen Höhen gleich lang, dann haben sie den selben Flächeninhalt.

### Beispiel 1:

Zeige: Verschiebt man einen Eckpunkt des Dreiecks  $\Delta ABC$  auf einer Parallelen zur gegenüber liegenden Seite, so ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks nicht.

**Lösung:**

In der folgenden Abbildung gehen die Punkte  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  durch Verschiebung entlang einer Parallelen zu  $[AB]$  auseinander hervor und sind auf dieser Parallelen beliebig gewählt.



**Zu zeigen:** Die Dreiecke  $\Delta ABC_1$ ,  $\Delta ABC_2$  und  $\Delta ABC_3$  haben den selben Flächeninhalt.

Die Dreiecke  $\Delta ABC_1$ ,  $\Delta ABC_2$  und  $\Delta ABC_3$  haben die Dreiecksseite  $[AB]$  gemeinsam. Die zugehörigen Höhen  $h_{C_1}$ ,  $h_{C_2}$  und  $h_{C_3}$  sind gleich groß, denn der Abstand der Punkte  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  zur Geraden  $AB$  ist gleich.

Es gilt somit:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{C_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{C_3} \quad \text{bzw.} \quad A_{\Delta ABC_1} = A_{\Delta ABC_2} = A_{\Delta ABC_3}$$

Für die Verschiebung der Punkte  $A$  und  $B$  entlang entsprechender Parallelen führen analoge Überlegungen zum gleichen Ergebnis – die Behauptung ist damit gezeigt.

**Zusammenfassung:**

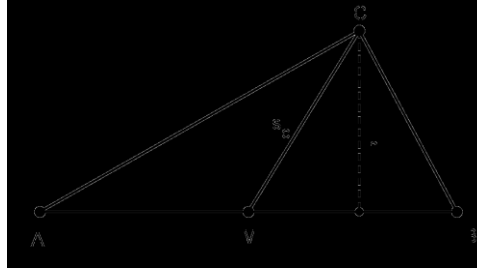
Die betrachteten Dreiecke stimmen in der Grundlinie überein. Die zugehörigen Höhen sind gleich lang. Deshalb ist auch ihr Flächeninhalt gleich groß.

**Beispiel 2:**

Beweise: Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks teilt dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teile.

**Lösung:**

In der folgenden Abbildung ist  $s_c$  die Seitenhalbierende von  $c$ .



**Zu zeigen:** Die beiden Dreiecke  $\Delta AMC$  und  $\Delta MBC$  haben den gleichen Flächeninhalt.

Da  $s_c$  die Seitenhalbierende von  $c$  ist, sind die beiden Strecken  $[AM]$  und  $[MB]$  gleich lang. Fasst man diese Strecken als Grundlinien der beiden Dreiecke  $\Delta AMC$  und  $\Delta MBC$  auf, so ist die zugehörige Höhe in beiden Fällen die Strecke  $h$ .

$$\text{Es gilt also: } A_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{MB} \cdot h = A_{\Delta MBC}$$

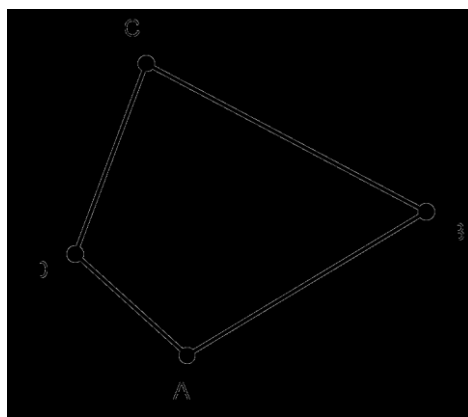
Die Betrachtung der anderen Seitenhalbierenden führt auf analoge Weise zum gleichen Ergebnis – die Behauptung ist damit gezeigt.

**Zusammenfassung:**

Die betrachteten Dreiecke stimmen in ihrer Höhe überein. Die zugehörigen Grundlinien sind gleich lang. Deshalb ist auch ihr Flächeninhalt gleich groß.

### Aufgabe 1 – Flächenumwandlung vom Viereck zum Dreieck

Wandeln Sie das gegebene Viereck  $ABCD$  durch Konstruktion zunächst in ein flächengleiches Dreieck und schließlich in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck um. Notieren und begründen Sie ihre Lösungsschritte jeweils.

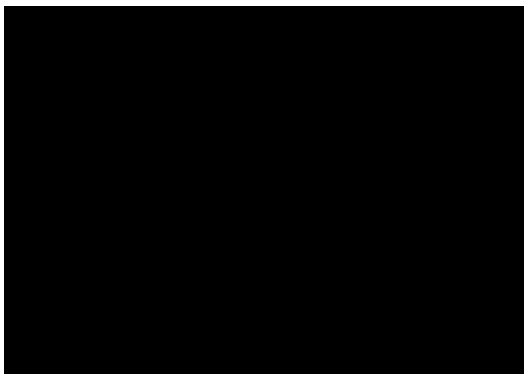


### Aufgabe 2 – Flächenverhältnisse I

In einem Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  sollen die Punkte  $D$  auf  $a$  und  $E$  auf  $c$  so gewählt werden, dass die Dreiecke  $\triangle ADC$ ,  $\triangle AED$  und  $\triangle EBD$  flächengleich sind.

Geben Sie die Länge der Strecke  $[CD]$  als Teil von  $a$  und die Länge der Strecke  $[AE]$  als Teil von  $c$  an.

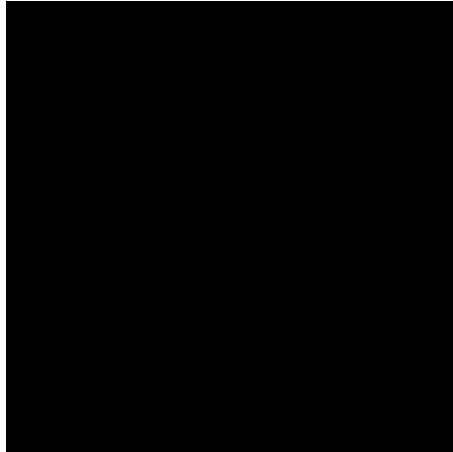
Begründen Sie genau!



### Aufgabe 3 – Flächenoptimierung

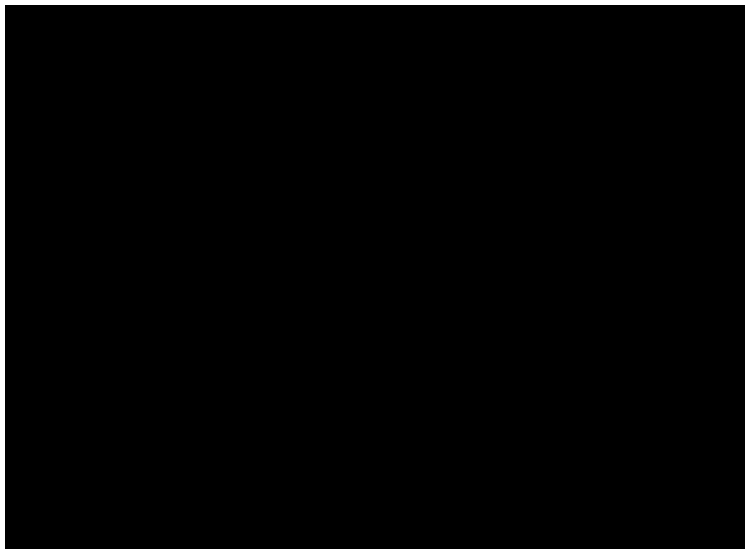
Zeigen Sie:

Unter den in einen gegebenen Kreis eingeschriebenen Rechtecken hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. Argumentieren Sie dabei an der folgenden Figur.



### Aufgabe 4 – Grundstücksbegradigung

In einem Flächennutzungsplan sind zwei Grundstücke (1 und 2) eingezeichnet, die durch eine abknickende Grenze ABC voneinander getrennt sind. Wie kann man die Linie ABC durch eine geradlinige Begrenzung ersetzen, bei der die Grundstücksflächen gleich bleiben?



### Aufgabe 5 – Flächenverhältnisse II

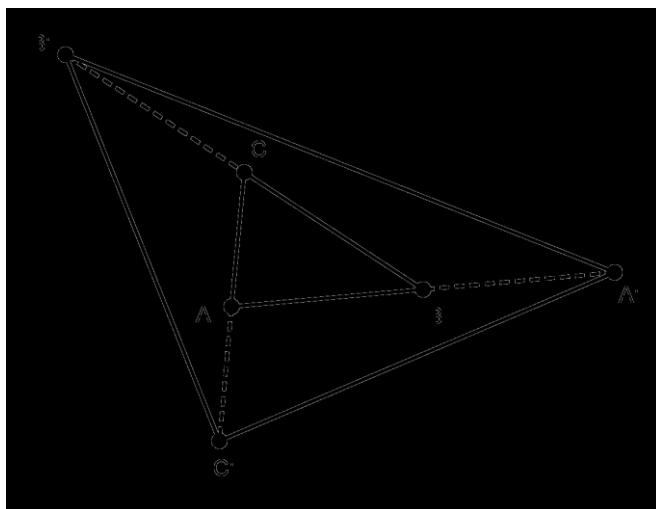
Gegeben ist das Dreieck  $\Delta ABC$ .

Der Punkt  $A'$  ist der Bildpunkt von  $A$  bei Punktspiegelung an  $B$ .

Der Punkt  $B'$  ist der Bildpunkt von  $B$  bei Punktspiegelung an  $C$ .

Der Punkt  $C'$  ist der Bildpunkt von  $C$  bei Punktspiegelung an  $A$ .

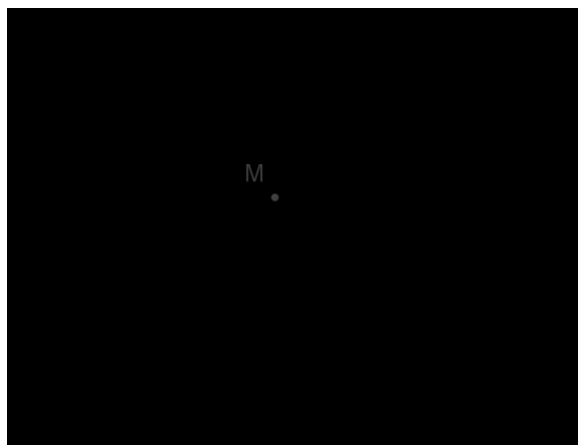
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  ?



### Aufgabe 6 – Flächengleiche Teildreiecke

Bestimmen Sie alle konvexen Vierecke (das sind Vierecke, bei denen beide Diagonalen im Inneren des Vierecks liegen) mit der folgenden Eigenschaft:

Die vier Teildreiecke, welche durch die Diagonalen und die Viereckseiten begrenzt werden, sind flächengleich. (Das abgebildete Viereck besitzt diese Eigenschaft offensichtlich nicht, denn der Flächeninhalt des Teildreiecks  $\Delta ABM$  ist sicher größer als der Flächeninhalt des Teildreiecks  $\Delta MBC$ .)





## Aufgabensequenz II – Ein kombinatorisches Problem unter verschiedenen Blickwinkeln

### Vollständige Graphen

Auf einem Papier befinden sich  $n$  Punkte. Man spricht von einem vollständigen  $n$ -Graphen, wenn jeder Punkt mit jedem anderen Punkt durch genau eine Linie verbunden ist.

Wie viele Linien müssen gezeichnet werden, um einen vollständigen  $n$ -Graphen zu erhalten?

Geben Sie eine Lösung an, die von der Anzahl  $n$  der Punkte abhängt.

### Lösungsmöglichkeiten:

#### 1. Von „kleinen“ Graphen aus gedacht

**$n = 1$ :** Der „kleinste“ vollständige  $n$ -Graph besitzt einen Punkt und damit natürlich keine Verbindungslinien.

**$n = 2$ :** Der nächstkleinere vollständige  $n$ -Graph besitzt zwei Punkte und damit eine Verbindungslinie.

**$n = 3$ :** Um ausgehend vom 2-Graph den vollständigen 3-Graph zu zeichnen, muss der „neue“ Punkt mit den beiden Punkten des 2-Graphen verbunden werden. Dazu sind zwei neue Linien nötig. Der vollständige 3-Graph hat also  $1 + 2 = 3$  Linien.

**$n = 4$ :** Um ausgehend vom 3-Graph den vollständigen 4-Graph zu zeichnen, muss der „neue“ Punkt mit den drei Punkten des 3-Graphen verbunden werden. Dazu sind drei neue Linien nötig. Der vollständige 4-Graph hat also  $1 + 2 + 3 = 6$  Linien.

...

#### Beliebiges $n$ :

Um ausgehend vom  $(n - 1)$ -Graph den vollständigen  $n$ -Graph zu zeichnen, muss der „neue“ Punkt mit den  $n - 1$  Punkten des  $(n - 1)$ -Graphen verbunden werden. Dazu sind  $n - 1$  neue Linien nötig. Der vollständige  $n$ -Graph hat also  $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$  Linien.

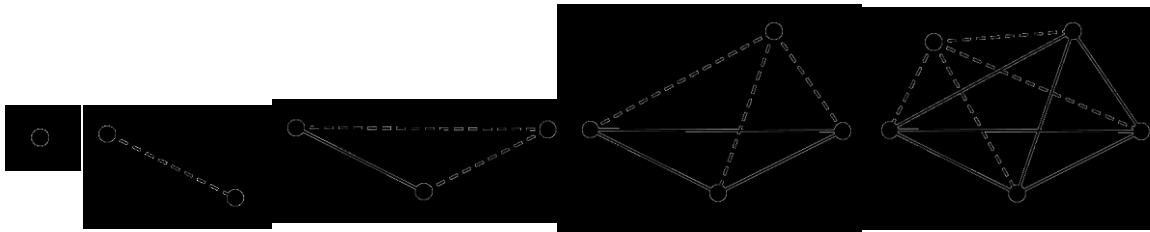


Abbildung: Von „kleinen“ Graphen aus gedacht

### 2. Von einem Punkt aus gedacht

Greift man einen beliebigen der  $n$  Punkte eines vollständigen  $n$ -Graphen heraus, dann muss dieser Punkt mit allen  $n - 1$  anderen Punkten durch eine Linie verbunden sein. Von jedem der  $n$  Punkte gehen also  $n - 1$  Linien aus. Bedenkt man nun noch, dass jede Linie in zwei Punkten endet, jede Linie auf diese Weise also doppelt gezählt wird, ergibt sich für die Gesamtzahl der Linien

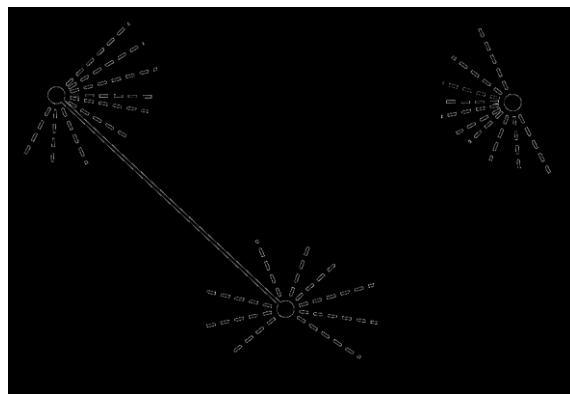


Abbildung: Von einem Punkt aus gedacht

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

### 3. Von den Linien aus gedacht

Bedenkt man, dass jede Linie zwei ganz bestimmte Punkte miteinander verbindet, dann ist die Frage nach der Anzahl der Linien gleichbedeutend mit der folgenden Frage:

„Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den  $n$  Punkten zwei Punkte auszuwählen?“

Das lässt sich aber als Urnenexperiment modellieren:

Es müssen zwei verschiedene Punkte (Kugeln) ausgewählt werden  $\Rightarrow$  Ziehen ohne Zurücklegen.

Für das Zeichnen der Linie zwischen zwei Punkten ist die Reihenfolge der Punkte unerheblich  $\Rightarrow$  Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Es handelt sich also um eine „Lotto-Situation“ und es gibt  $\binom{n}{2}$  verschiedene Möglichkeiten zwei Punkte für das Zeichnen einer Linie auszuwählen.

#### 4. Der Reihe nach gedacht

Betrachtet man die Punkte der Reihe nach, dann sind vom ersten Punkt aus  $n - 1$  Linien (zu den restlichen  $n - 1$  Punkten) zu zeichnen.

Vom zweiten Punkt aus sind noch  $n - 2$  Linien zu zeichnen, denn eine Linie zum ersten Punkt gibt es ja schon.

Vom dritten Punkt aus sind noch  $n - 3$  Linien zu zeichnen usw. Ist man beim letzten (also beim  $n$ -ten) Punkt angekommen, dann sind alle anderen Punkte bereits mit diesem verbunden und es bleibt keine Linie mehr zu zeichnen.

Insgesamt müssen also  $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$  Linien gezeichnet werden.

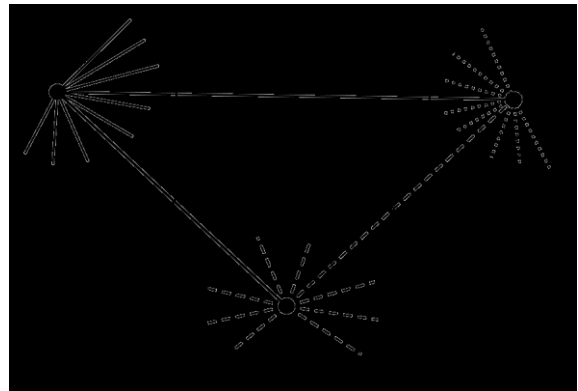


Abbildung: Der Reihe nach gedacht

#### Zusammenfassung

Man stellt fest, dass ganz verschiedene Wege zu einer Lösung dieser Aufgabe führen.

Die Überlegungen 1. bis 4. zeigen außerdem:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} = \binom{n}{2} = (n - 1) + \dots + 2 + 1$$

### **Aufgabe 1 – Fußballturnier**

In einer Fußball-Liga sind 20 Mannschaften. Wie viele Begegnungen müssen ausgetragen werden, damit jede Mannschaft einmal gegen jede andere Mannschaft gespielt hat?

### **Aufgabe 2 – Sektempfang**

Bei einem Sektempfang begrüßen sich die Gäste, indem jeder mit jedem anstößt. Die Gläser klingen 231 Mal.

Wie viele Gäste waren geladen?

### **Aufgabe 3 – Wanderwege**

Zwei Orte A und B sind durch  $n$  verschiedene Wanderwege miteinander verbunden.

Wie viele Tage kann man wandern, wenn man jeden Tag einen anderen Rundweg von A über B zurück nach A gehen will?

Man will dabei einen einmal gegangenen Rundweg auch nicht mehr in entgegengesetzter Richtung laufen. Zwei solche Rundwege unterscheiden sich also in mindestens einer der beiden Strecken.

### **Aufgabe 4 – Glücksspiel**

Bei einem Glücksspiel wird eine Anzahl nummerierter Kugeln in eine Lostrommel gegeben. Anschließend werden zwei Kugeln gezogen und deren Nummern notiert. Gewonnen hat, wer diese beiden Zahlen notiert hat. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.

Der Spielleiter wirbt: „Die Gewinnchance bei diesem Spiel ist 1 zu 2145.“

Wie viele Kugeln sind in der Lostrommel?

## Aufgabensequenz III – Lineare Zusammenhänge

### Beispiel 1: Asphaltierarbeiten

Beim Asphaltieren einer Straße kommen die Bauarbeiter pro Stunde etwa 80 m voran.

Die Zuordnung

Zeit  $t \mapsto$  asphaltierte Strecke  $s$

ist linear, denn in gleichlangen Zeitabschnitten asphaltieren die Arbeiter die gleiche Strecke – d.h. der Quotient  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 80 \frac{m}{h}$  ( $= \frac{\text{asphaltierte Strecke}}{\text{dafür benötigte Zeit}}$ ) ist konstant. Er gibt die Arbeitsgeschwindigkeit an.

Man kann lineare Zusammenhänge auch durch einen Funktionsterm beschreiben:

$$\text{Allgemein: } y(x) = m \cdot x + t \quad (*)$$

Dabei ist  $m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$  und  $t = y(0)$ . Die graphische Darstellung dieser Funktion ist eine Gerade mit der Steigung  $m$  und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $t$ .

Im Beispiel ist  $m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_A$  die Arbeitsgeschwindigkeit und der  $y$ -Achsenabschnitt  $s_0 = s(0)$  die asphaltierte Strecke zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Es ergibt sich also:  $s(t) = v_A \cdot t + s_0$

### Beispiel 2: Aufholjagd

Ein LKW startet um 8:00 Uhr an der Autobahnauffahrt A mit der konstanten Geschwindigkeit von  $80 \frac{km}{h}$ . Anderthalb Stunden später startet ein PKW ebenfalls bei A mit der konstanten Geschwindigkeit  $110 \frac{km}{h}$  in die gleiche Richtung.

Um wie viel Uhr holt der PKW den LKW ein?

Wie weit sind die beiden Fahrzeuge dann vom Startpunkt entfernt?

**Lösung:**

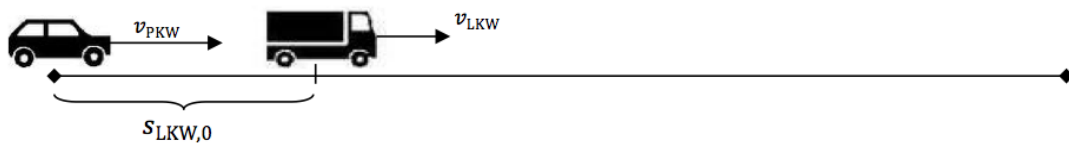
Hier werden zwei lineare Zuordnungen beschrieben:

$$t \mapsto s_{\text{LKW}} \quad (\text{Zeit} \mapsto \text{Entfernung des LKW vom Startpunkt})$$

$$t \mapsto s_{\text{PKW}} \quad (\text{Zeit} \mapsto \text{Entfernung des PKW vom Startpunkt})$$

Der Quotient  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  ist für beide Bewegungen durch die konstante Geschwindigkeit gegeben.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$ :



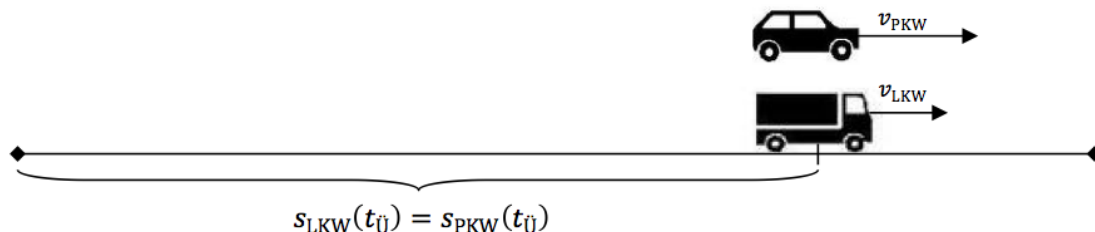
Will man beide Vorgänge miteinander vergleichen, dann muss man den gleichen **Zeitnullpunkt** und den gleichen **Ortsnullpunkt** zugrunde legen. Diese darf man frei wählen. Wählen wir z. B. den Zeitpunkt, zu dem der PKW startet (9:30 Uhr) als Zeitnullpunkt und den Startpunkt der Fahrzeuge als gemeinsamen Ortsnullpunkt, dann erhält man:

$$s_{\text{LKW}}(t) = v_{\text{LKW}} \cdot t + s_{\text{LKW},0}$$

$$s_{\text{PKW}}(t) = v_{\text{PKW}} \cdot t$$

Das sind Terme der Art von (\*). Dabei ist  $s_{\text{LKW},0} = s_{\text{LKW}}(0) = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5\text{h} = 120\text{km}$  die Entfernung des LKW vom Startpunkt zum Zeitpunkt  $t = 0$  (also der Vorsprung des LKW beim Start des PKW) und  $s_{\text{PKW},0} = 0$ , denn der PKW startet ja zum Zeitpunkt  $t = 0$  erst.

Zum Überholzeitpunkt  $t = t_{\text{Ü}}$ :

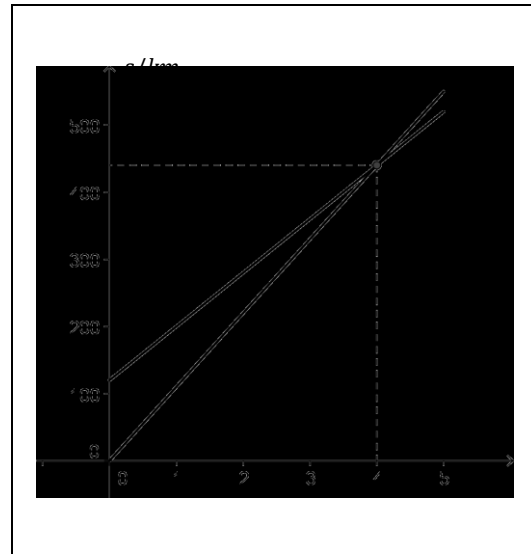


Obige Gleichungen liefern nun für den Zeitpunkt  $t$  die Entfernung der Fahrzeuge zum Startpunkt.

### Berechnung des Überholzeitpunkts:

Zum Überholzeitpunkt  $t_{\ddot{u}}$  ist die Entfernung der beiden Fahrzeuge zum Startpunkt ist gleich. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
 s_{\text{LKW}}(t_{\ddot{u}}) &= s_{\text{PKW}}(t_{\ddot{u}}) \\
 \Leftrightarrow v_{\text{LKW}} \cdot t_{\ddot{u}} + s_{\text{LKW},0} &= v_{\text{PKW}} \cdot t_{\ddot{u}} \\
 \Leftrightarrow v_{\text{PKW}} \cdot t_{\ddot{u}} - v_{\text{LKW}} \cdot t_{\ddot{u}} &= s_{\text{LKW},0} \\
 \Leftrightarrow t_{\ddot{u}} \cdot (v_{\text{PKW}} - v_{\text{LKW}}) &= s_{\text{LKW},0} \\
 \Leftrightarrow t_{\ddot{u}} = \frac{s_{\text{LKW},0}}{v_{\text{PKW}} - v_{\text{LKW}}} &= \frac{120 \text{ km}}{110 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \\
 &= \frac{120 \text{ km}}{30 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 4 \text{ h}
 \end{aligned}$$



Der PKW überholt den LKW 4 h nachdem er gestartet ist, also um 13.30 Uhr.

Einsetzen liefert:  $s_{\text{PKW}}(t_{\ddot{u}}) = v_{\text{PKW}} \cdot t_{\ddot{u}} = 110 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4,0 \text{ h} = 440 \text{ km}$  ( $= s_{\text{LKW}}(t_{\ddot{u}})$ )

Die beiden Fahrzeuge treffen sich 440 km vom Startpunkt entfernt.

### Beispiel 3: Tunnelbohrung

Bei einer Tunnelbohrung wird immer von beiden Seiten aus gegraben. Es soll ein 6 km langer Tunnel gegraben werden. Am einen Ende des Tunnels kommen die Bohrarbeiten 15 m pro Tag (d) voran. Am anderen Ende kann erst 40 Tage später mit den Arbeiten begonnen werden, dafür kommen die Arbeiter 25 m pro Tag voran.

Wann und wo gelingt der Durchbruch?

**Lösung:**

Gegeben sind die Bohrgeschwindigkeiten  $v_A = 15 \frac{m}{d}$  und  $v_B = 25 \frac{m}{d}$

Als Zuordnung betrachten wir

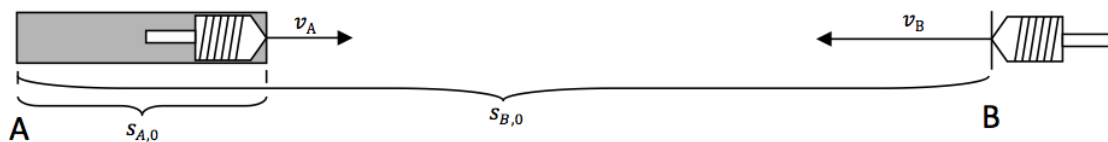
$t \mapsto s_A$  Entfernung des Bohrkopfs A vom Tunnelende A.

$t \mapsto s_B$  Entfernung des Bohrkopfs B vom Tunnelende A.

Gemeinsamer Ortsnullpunkt: Tunnelende A

Gemeinsamer Zeitnullpunkt: Bohrbeginn am Tunnelende B

**Zum Zeitpunkt  $t = 0$ :**



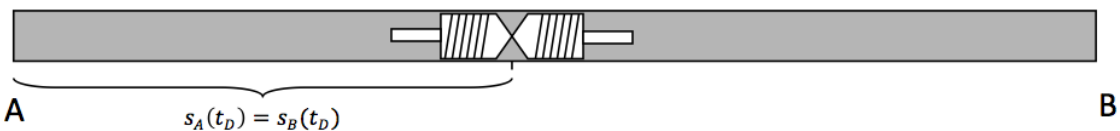
Für die beiden Zuordnungen ergibt sich so:

$$s_A(t) = v_A \cdot t + s_{A,0}$$

$$s_B(t) = s_{B,0} - v_B \cdot t$$

Dabei ist  $s_{A,0} = v_A \cdot 40 d = 15 \frac{m}{d} \cdot 10 d = 600 m$  und  $s_{B,0} = 6000 m$  (diese Bohrung beginnt ja bei B). In der zweiten Gleichung ergibt sich ein Minuszeichen, da ja mit der Bohrgeschwindigkeit  $v_A$  in Richtung A gebohrt wird, der Abstand des Bohrkopfs B zum gemeinsamen Ortsnullpunkt wird also kleiner.

**Zum Durchbruchzeitpunkt  $t = t_D$ :**



Der Durchbruch ist dann erreicht, wenn sich die beiden Bohrer in der gleichen Entfernung vom Tunnelende A befinden, wenn also gilt:

$$s_A(t_D) = s_B(t_D)$$



Damit:

$$s_A(t_D) = s_B(t_D)$$

$$\Leftrightarrow v_A \cdot t_D + s_{A,0} = s_{B,0} - v_B \cdot t_D$$

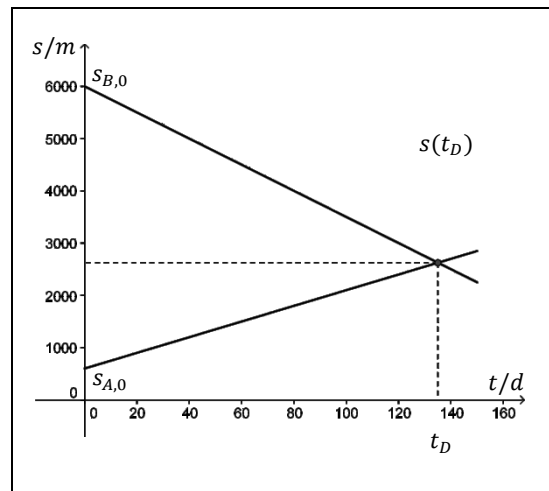
$$\Leftrightarrow t_D \cdot (v_A + v_B) = s_{B,0} - s_{A,0}$$

$$\Leftrightarrow t_D = \frac{s_{B,0} - s_{A,0}}{v_A + v_B} = \frac{6000 \text{ m} - 600 \text{ m}}{15 \frac{\text{m}}{\text{d}} + 25 \frac{\text{m}}{\text{d}}} = 135 \text{ d}$$

Den Arbeitern gelingt also nach 135 Tagen der Durchbruch. Einsetzen liefert:

$$s_A(135d) = 15 \frac{\text{m}}{\text{d}} \cdot 135 \text{ d} + 600 \text{ m} = 2625 \text{ m}$$

Der Durchbruch gelingt also 2625 m vom Tunnelende A entfernt.



### **Aufgabe 1 – Streifarbeiten**

Die lange Wand eines Krankenhausganges muss gestrichen werden. Der Lehrling beginnt um 7.15 Uhr die Wand mit einer Grundierung zu streichen. Er schafft in der Stunde 4,5 m des Ganges. Obwohl man über die verwendete Grundierung gleich den eigentlichen Anstrich machen könnte, fängt sein Meister damit erst eine halbe Stunde später an. Er schafft 6 m in der Stunde.

Um wie viel Uhr holt der Meister seinen Lehrling ein?

Wie viel haben sie bis dahin gestrichen?

### **Aufgabe 2 – Bergbesteigung**

Ein Wanderer startet um 7:30 Uhr zur Besteigung eines 1650 m höher gelegenen Gipfels. Er bewältigt ca. 300 Höhenmeter pro Stunde. Ein anderer Wanderer hat auf der Gipfelhütte übernachtet und macht sich um 9:00 Uhr an den Abstieg. Er überwindet dabei etwa 450 Höhenmeter pro Stunde.

Um wie viel Uhr und auf welcher Höhe begegnen sich die beiden?

### **Aufgabe 3 – Fahrradtour**

Familie Peters plant eine Fahrradtour. Sie einigen sich darauf, dass der Vater mit den Kindern langsam voraus fährt. Sie starten um 10:00 Uhr und fahren etwa mit der konstanten Geschwindigkeit

$18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Die sportliche Mutter fährt eine Stunde später nach. Sie erreicht die anderen um 13:30 Uhr.

Wie schnell fährt die Mutter?

Nach welcher Strecke hat sie die anderen eingeholt?

### **Aufgabe 4 – Undichtes Schuldach**

Um das eindringende Wasser eines undichten Schuldachs aufzufangen, stellt der Hausmeister an verschiedenen „Tropfstellen“ Eimer auf. In einem Eimer steigt der Wasserstand pro Stunde um 2 cm. Das Wasser steht schon 10 cm hoch in diesem Eimer, als der Hausmeister ein neues Leck entdeckt und einen weiteren Eimer gleicher Größe aufstellt. Als er das nächste Mal nachsieht, sind beide Eimer fast voll (Wasserstand: 30 cm).

Wie stark tropft das neue Leck?

## Aufgabensequenz IV – Mischprobleme

Für den Umgang mit Prozentangaben muss grundsätzlich geklärt werden, auf welchen Grundwert sie sich beziehen. Es gilt der Zusammenhang

$$p\% \text{ von } G = P \quad \Leftrightarrow \quad p\% \cdot G = P$$

Dabei ist  $p\%$  der Prozentsatz,  $G$  der Grundwert und  $P$  der Prozentwert.

### Begriffe beim Rechnen mit Prozentangaben

Eine Jacke, die ursprünglich 120 € kostet wird um 15% reduziert. Wie hoch ist der Rabatt?

15% von 120 € =  $15\% \cdot 120 \text{ €} = 0,15 \cdot 120 \text{ €} = 18\text{€}$ . Der Rabatt beträgt 18 €.

(Prozentsatz: 15%, Grundwert: 120 €, Prozentwert: 18 €)

Für Probleme mit Prozentangaben, die sich auf verschiedene Grundwerte beziehen, ist es oft wichtig, die Grundgesamtheit zu erkennen und zu ermitteln wie diese zusammengesetzt ist.

### Beispiel 1: Säurelösung

Ein Chemiker hat 3,6 Liter einer Säurelösung (= Wasser + Säure) mit 10% Säureanteil.

Wie viel Säurelösung mit 60% Säureanteil muss er hinzugeben, um insgesamt eine Lösung mit 15% Säureanteil zu erhalten?

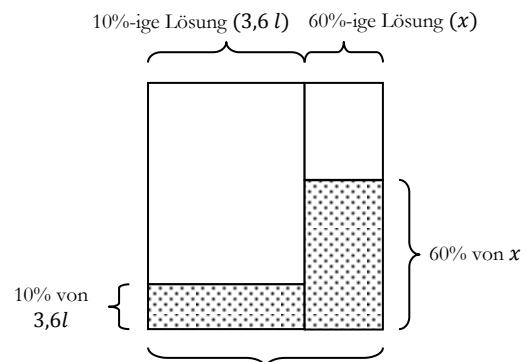
#### Lösung:

In der endgültigen Säurelösung sind enthalten:

10%-ige Säurelösung:  $3,6 \text{ l}$

60%-ige Säurelösung:  $x$  (zu bestimmen)

Gesamtmenge:  $3,6 \text{ l} + x$



$x$  muss so bestimmt werden, dass der Säureanteil (schraffierte Fläche) an der Gesamtmenge (=  $3,6 \text{ l} + x$ ) die geforderten 15% beträgt.

Die Menge der Säure in der endgültigen Lösung berechnet sich also einerseits zu

$$\text{Säuremenge} = 10\% \text{ von } 3,6 \text{ l} + 60\% \text{ von } x = 0,1 \cdot 3,6 \text{ l} + 0,6 \cdot x \quad (1)$$

Andererseits soll der Anteil der Säure in der endgültigen Lösung 15% betragen, also:

$$\text{Säuremenge} = 15\% \text{ von } (3,6 \text{ l} + x) = 0,15 \cdot (3,6 \text{ l} + x) \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) liefert:

$$0,1 \cdot 3,6 \text{ l} + 0,6 \cdot x = 0,15 \cdot (3,6 \text{ l} + x)$$

$$\Leftrightarrow 0,36 \text{ l} + 0,6x = 0,54 \text{ l} + 0,15x$$

$$\Leftrightarrow 0,45x = 0,18 \text{ l}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,4 \text{ l}$$

Es müssen also 0,4 l der 60%-igen Säurelösung hinzugegeben werden.

---

## Beispiel 2: Pflanzenöl

Pflanzliches Öl soll in 1-Liter-Flaschen abgefüllt werden. In einer bestimmten Sorte pflanzlichen Öls sind 10% gesättigte Fettsäuren enthalten. Eine andere Sorte enthält 6% gesättigte Fettsäuren.

Wie viel muss von einem Liter Öl mit 10%-igem Fettanteil durch das Öl mit 6%-igem Anteil ersetzt werden, um einen Liter pflanzliches Öl mit 7,5% Anteil an gesättigten Fettsäuren zu erhalten?

### Lösung:

In der endgültigen Ölmischung sind enthalten:

Öl mit 6% gesättigten Fettsäuren:  $x$  (zu bestimmen)

Öl mit 10% gesättigten Fettsäuren:  $1l - x$  (von 1l Öl wird die Menge  $x$  ersetzt)

Gesamtmenge:  $1l$

Die Menge der gesättigten Fettsäuren in der endgültigen Mischung berechnet sich einerseits zu

$$\text{Fettmenge} = 6\% \text{ von } x + 10\% \text{ von } (1l - x) = 0,06 \cdot x + 0,1 \cdot (1l - x) \quad (1)$$

Andererseits soll der Fettanteil in der endgültigen Mischung 7,5% betragen, also:

$$\text{Fettmenge} = 7,5\% \text{ von } 1l = 0,075 \cdot 1l \quad (2)$$

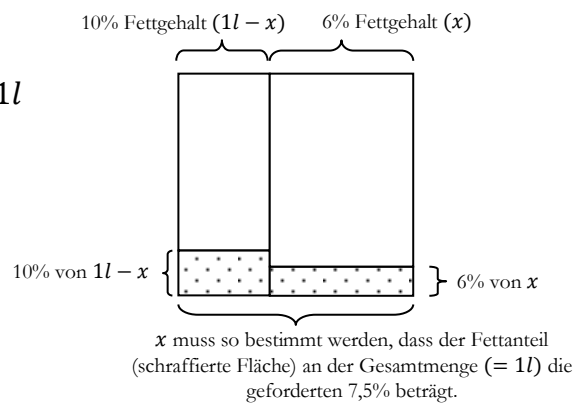
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert:

$$0,06 \cdot x + 0,1 \cdot (1l - x) = 0,075 \cdot 1l$$

$$\Leftrightarrow 0,06x + 0,1l - 0,1x = 0,075l$$

$$\Leftrightarrow 0,04x = 0,025l$$

$$\Leftrightarrow x = 0,625l$$



Es müssen also  $0,625l = 625ml$  ersetzt werden.

### Aufgabe 1 – Hotelrechnung

Auf einer Hotelrechnung sind Übernachtungskosten und Frühstückskosten separat aufgeführt. In den 200 € Übernachtungskosten sind 19% Mehrwertsteuer enthalten, der Mehrwertsteueranteil bei den Frühstückskosten beläuft sich auf 7%. Der Hotelgast stellt fest: „Der Steueranteil an der Gesamtrechnung beträgt 17%.“

Wie hoch sind die Frühstückskosten?

### Aufgabe 2 – Frostschutz

Beim Wintercheck wird festgestellt, dass ein PKW vier Liter Kühlerflüssigkeit mit 20% Frostschutzanteil enthält.

Wie viel dieser Kühlerflüssigkeit muss durch eine Kühlerflüssigkeit mit 70% Frostschutzanteil ersetzt werden, um insgesamt einen Frostschutzanteil von 25% zu erreichen?

### Aufgabe 3 – Raucherstatistik

Ein Statistiker hat versehentlich Kaffee über seinem Bericht zum Rauchverhalten Erwachsener verschüttet.

| Altersgruppe  | 18-45 | älter als 45 | Insgesamt |
|---------------|-------|--------------|-----------|
| Befragte      | 1260  |              |           |
| Raucher       | 567   |              |           |
| Nichtraucher  | 693   |              |           |
| Raucheranteil | 45%   | 35%          | 41%       |

Wie viele Personen der Altersgruppe „älter als 45“ wurden befragt?

### Aufgabe 4 – Wassermelone

Das Innere einer Wassermelone besteht im reifen Zustand zu 90% aus Wasser, der Rest ist Fruchtfleisch. Eine 5 kg schwere reife Melone ist mehrere Tage der Sonne ausgesetzt und verliert durch Verdunstung Wasser. Anschließend beträgt der Wasseranteil nur noch 80%.

Wie schwer ist die Melone noch?

## Aufgabensequenz V

### Ebene Geometrie – Raumgeometrie

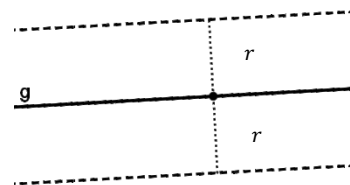
#### Konstruktionswerkzeuge in der Ebene

Alle Punkte der Ebene, die von einem vorgegeben Punkt  $P$  den gleichen Abstand  $r$  haben, liegen auf einem Kreis um  $P$  mit Radius  $r$  (kurz:  $k(r; P)$ , s. Abb.).

Alle Punkte der Ebene, die von einer Geraden  $g$  den gleichen Abstand  $r$  haben, liegen auf einem parallelen Geradenpaar. Der Abstand der Parallelen zu  $g$  beträgt jeweils  $r$  (s. Abb.).



Alle Punkte mit Abstand  $r$  von  $P$   
liegen auf dem Kreis  $k(r; P)$ .



Alle Punkte mit Abstand  $r$  von  $g$   
liegen auf einem parallelen Geradenpaar.

Mit diesen beiden „Werkzeugen“ (Kreis und Geradenpaar) können verschiedene Abstandsprobleme gelöst werden.

#### Beispiel 1: Punkte gleichen Abstands zu $A$ und $B$

Wo liegen alle Punkte der Ebene, die von zwei vorgegebenen Punkten  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt sind?

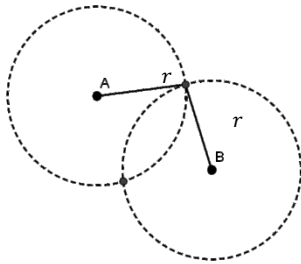
#### Lösung:

Zunächst konstruieren wir alle Punkte, die von  $A$  und  $B$  einen bestimmten Abstand  $r$  haben. Diese Punkte liegen

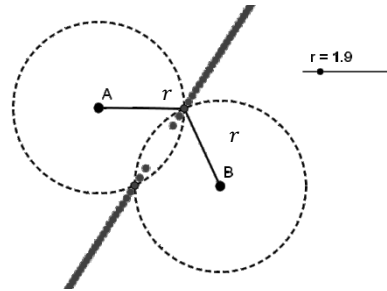
- auf dem Kreis um  $A$  mit Radius  $r$ .
- auf dem Kreis um  $B$  mit Radius  $r$ .

Variieren wir nun (im Kopf) den Radius  $r \geq 0$  in dieser Konstruktion (real ginge das z. B. mit der Geometrie-Software Geogebra), so erhalten wir alle Punkte, die von  $A$  und  $B$  den

gleichen Abstand haben – sie bilden die Mittelsenkrechte der Strecke  $[AB]$ . (Das lässt sich auch beweisen!)



Die Punkte mit Abstand  $r$  von  $A$  und  $B$  liegen auf  $k(A; r)$  und auf  $k(B; r)$ .



Die Punkte mit gleichem Abstand von  $A$  und  $B$  liegen auf der Mittelsenkrechten von  $[AB]$ .

### Beispiel 2: Punkte gleichen Abstands zu $g$ und $A$ (mit $A \in g$ )

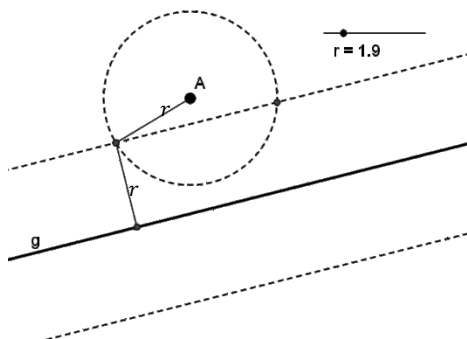
Wo liegen alle Punkte der Ebene, die von einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $A$ , der nicht auf  $g$  liegt, gleich weit entfernt sind?

#### Lösung:

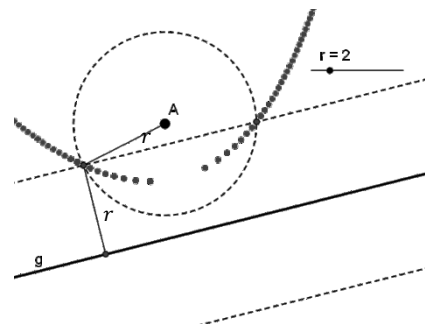
Zunächst konstruieren wir alle Punkte, die von  $A$  und  $g$  einen bestimmten Abstand  $r$  haben. Diese Punkte liegen

- auf dem Kreis um  $A$  mit Radius  $r$ .
- auf dem parallelen Geradenpaar zu  $g$  im Abstand  $r$ .

Variieren wir nun  $r \geq 0$  in dieser Konstruktion, so erhalten wir alle Punkte, die von  $A$  und  $g$  den gleichen Abstand haben – sie bilden eine Parabel (auch das lässt sich beweisen).



Die Punkte mit Abstand  $r$  von  $A$  und  $g$  liegen auf  $k(r; A)$  und dem parallelen Geradenpaar zu  $g$  im Abstand  $r$ .



Alle Punkte mit gleichem Abstand von  $A$  und  $g$  liegen auf einer Parabel.



**Beispiel 3: Punkte gleichen Abstands zu  $g$  und  $h$  (mit  $g \nparallel h$ )**

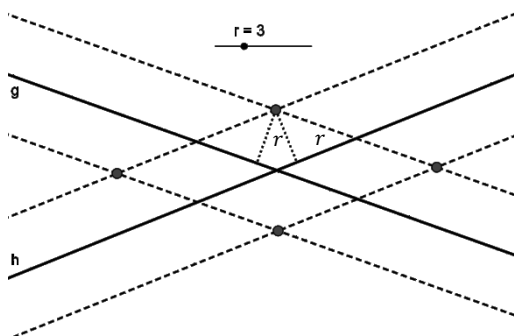
Wo liegen alle Punkte der Ebene, die von zwei nichtparallelen Geraden  $g$  und  $h$  gleich weit entfernt sind?

**Lösung:**

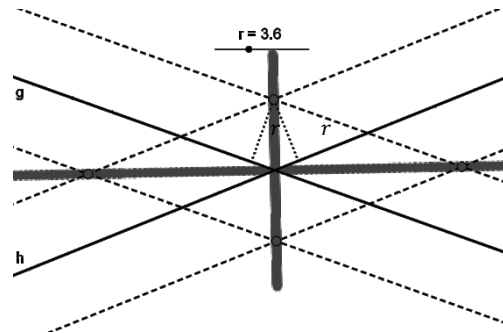
Zunächst konstruieren wir alle Punkte, die von  $g$  und  $h$  einen bestimmten Abstand  $r$  haben. Diese Punkte liegen

- auf dem parallelen Geradenpaar zu  $g$  im Abstand  $r$ .
- auf dem parallelen Geradenpaar zu  $h$  im Abstand  $r$ .

Variieren wir nun  $r \geq 0$  in dieser Konstruktion, so erhalten wir alle Punkte, die von  $g$  und  $h$  den gleichen Abstand haben – sie bilden das Winkelhalbierendenpaar von  $g$  und  $h$ . (Auch das kann noch streng bewiesen werden.)



Die Punkte mit Abstand  $r$  zu  $g$  und  $h$  liegen auf den beiden parallelen Geradenpaaren zu  $g$  und  $h$  im Abstand  $r$ .



Alle Punkte mit gleichem Abstand zu  $g$  und  $h$  bilden die beiden Winkelhalbierenden Geraden von  $g$  und  $h$ .

**Beispiel 4: Der Umkreis**

Zeigen Sie: Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Umkreismittelpunkt.

**Lösung:**

Zu zeigen ist:

- Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich.
- Der gemeinsame Schnittpunkt ist der Umkreismittelpunkt.

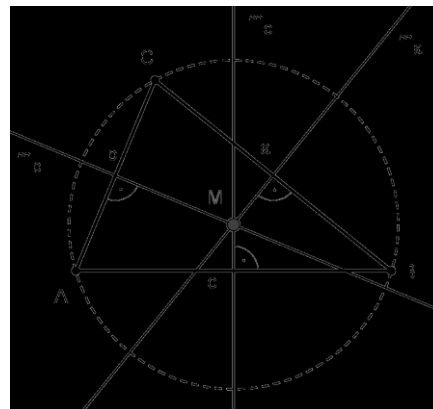
Hier hilft die Lösung von Beispiel 1 weiter, denn wir wissen:

- Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten  $m_c$  von  $[AB]$  sind gleich weit von  $A$  und  $B$  entfernt.
- Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten  $m_a$  von  $[BC]$  sind gleich weit von  $B$  und  $C$  entfernt.

Das gilt insbesondere für den Schnittpunkt  $M$  der beiden Geraden  $m_a$  und  $m_c$ . Damit ist  $M$  gleich weit von  $A, B$  und  $C$  entfernt.  $M$  ist also der Umkreismittelpunkt.

Da  $M$  aber gleich weit von  $A$  und  $C$  entfernt ist, muss  $M$  auf der Mittelsenkrechten  $m_b$  von  $[AC]$  liegen, oder anders ausgedrückt: Auch  $m_b$  verläuft durch den Schnittpunkt von  $m_a$  und  $m_c$ .

Damit sind beide Behauptungen gezeigt.



Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Umkreismittelpunkt.

---

**Beispiel 5: Der Inkreis**

Zeigen Sie: Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Inkreismittelpunkt.

**Lösung:**

Zu zeigen ist:

- Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich.
- Der gemeinsame Schnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt.

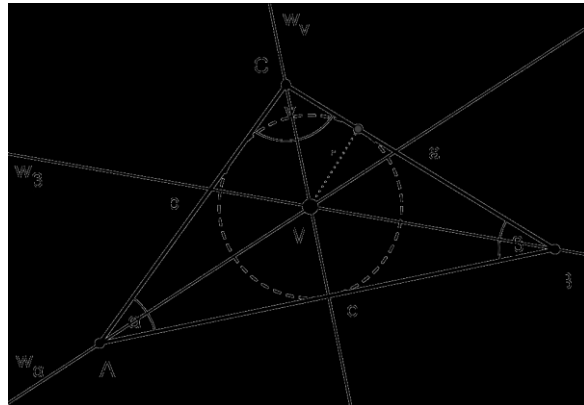
Hier hilft die Lösung von Beispiel 3 weiter, denn wir wissen:

- Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  sind gleich weit von  $b$  und  $c$  entfernt.
- Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden  $w_\beta$  sind gleich weit von  $a$  und  $c$  entfernt.

Das gilt insbesondere für den Schnittpunkt  $M$  der beiden Geraden  $w_\alpha$  und  $w_\beta$ . Damit ist  $M$  gleich weit von  $a, b$  und  $c$  entfernt.  $M$  ist also der Inkreismitelpunkt (denn ein Kreis um  $M$  der  $a$  berührt, berührt somit auch  $b$  und  $c$ ).

Da  $M$  aber gleich weit von  $a$  und  $b$  entfernt ist, muss  $M$  auf der Winkelhalbierenden  $w_\gamma$  von  $\gamma$  liegen, oder anders ausgedrückt: Auch  $w_\gamma$  verläuft durch den Schnittpunkt von  $w_\alpha$  und  $w_\beta$ .

Damit sind beide Behauptungen gezeigt.



Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Inkreismitelpunkt.

### Aufgabe 1 – Konstruktionswerkzeuge im Raum

In dieser Aufgabe geht es darum, die ebenen „Konstruktionswerkzeuge“ Kreis und paralleles Geradenpaar auf Situationen im Raum zu übertragen, um auch im Raum Konstruktionen durchführen zu können.

Wo liegen alle Punkte im Raum, die

- a) von einem vorgegebenen Punkt  $P$  den Abstand  $r$  haben?
- b) von einer vorgegebenen Geraden  $g$  den Abstand  $r$  haben?
- c) von einer vorgegebenen Ebene  $E$  den Abstand  $r$  haben?

### Aufgabe 2 – Punkte gleichen Abstands zu $A$ und $B$

Wo liegen alle Punkte des Raumes, die von zwei vorgegebenen Punkten  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt sind?

Geben Sie an, wie man diese Punkte mit den räumlichen Konstruktionswerkzeugen (Aufgabe 1) konstruieren kann und beschreiben Sie die Lage der Punkte möglichst genau.

### Aufgabe 3 – Punkte gleichen Abstands zu $g$ und $A$

Wo liegen alle Punkte des Raumes, die von einer vorgegebenen Geraden  $g$  und einem vorgegebenen Punkt  $A$  gleich weit entfernt sind?

Geben Sie an, wie man diese Punkte mit den räumlichen Konstruktionswerkzeugen (Aufgabe 1) konstruieren kann und beschreiben Sie die Lage der Punkte möglichst genau.

### Aufgabe 4 – Punkte gleichen Abstands zu $E$ und $A$

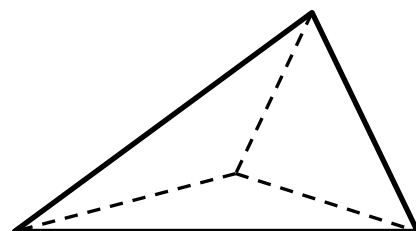
Wo liegen alle Punkte des Raumes, die von einer vorgegebenen Ebene  $E$  und einem vorgegebenen Punkt  $A$  gleich weit entfernt sind?

Geben Sie an, wie man diese Punkte mit den räumlichen Konstruktionswerkzeugen (Aufgabe 1) konstruieren kann und beschreiben Sie die Lage der Punkte möglichst genau.

### Aufgabe 5 – Umkugel eines Tetraeders

Eine dreiseitige Pyramide heißt auch Tetraeder.

Formulieren Sie eine Vermutung, wie man die Umkugel eines Tetraeders findet und versuchen Sie zu begründen, warum Ihre Vermutung zutrifft.



Ein Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide

## Aufgabensequenz VI

### Bezugsgrößen und Invarianten

Um in Anwendungsaufgaben verschiedene Angaben verarbeiten zu können, sind die folgenden Überlegungen oft hilfreich:

- Gibt es eine gemeinsame Bezugsgröße?
- Gibt es eine Angabe, die sich bei den Betrachtungen nicht ändert (= eine Invariante)?
- Lassen sich die Angaben auf die gemeinsame Invariante beziehen und auf eine Einheit der Bezugsgröße normieren?

#### Beispiel 1 – Rasenmähen

Ein Gärtner benötigt zum Mähen eines Sportplatzes 2 h, sein Lehrling benötigt 3 h.  
Wie lange brauchen die beiden, wenn sie den Sportplatz gemeinsam mähen?

#### Lösung:

**Gemeinsame Bezugsgröße:** Arbeitszeit in Stunden

**Invariante:** zu mähende Fläche (1 Sportplatz)

**Normierung bzgl. der Größe „Arbeitszeit“ (d. h. Fläche die in 1 h gemäht wird):**

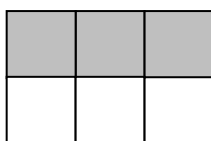
Definition „Arbeitsgeschwindigkeit“:  $v_{\text{Arb.}} = \frac{\text{gemähte Fläche}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{A}{t}$

Arbeitsgeschwindigkeit des Gärtners:  $v_{\text{Gärtner}} = \frac{1 \text{ Platz}}{2 \text{ h}}$

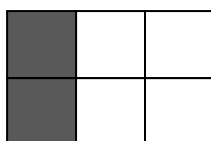
Arbeitsgeschwindigkeit des Lehrlings:  $v_{\text{Lehrling}} = \frac{1 \text{ Platz}}{3 \text{ h}}$

⇒ Gemeinsame Arbeitsgeschwindigkeit:  $v_{\text{gem}} = v_{\text{G}} + v_{\text{L}} = \frac{1 \text{ Platz}}{2 \text{ h}} + \frac{1 \text{ Platz}}{3 \text{ h}} = \frac{5 \text{ Platz}}{6 \text{ h}}$

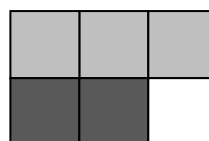
**Gemähte (Sportplatz-)Fläche pro Stunde:**



Gärtner



Lehrling



gemeinsam

**Gesucht:** Benötigte Arbeitszeit  $t_{\text{gem}}$  für die gleiche Fläche bei gemeinsamer Arbeit.  
( $A = 1\text{Platz}$  ist die Invariante!)

**Damit:** 
$$v_{\text{gem}} = \frac{A}{t_{\text{gem}}} \Rightarrow t_{\text{gem}} = \frac{A}{v_{\text{gem}}} = \frac{1 \text{ Platz}}{\frac{5 \text{ Platz}}{6 \text{ h}}} = \frac{6}{5} \text{ h} = 1,2 \text{ h}$$

Gemeinsam brauchen Sie also  $1,2 \text{ h} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$ .

## Beispiel 2 – Gutschein

In einer Zeitschrift sind im Rahmen einer Werbeaktion Gutscheine für das regionale Hallenbad abgedruckt. Dort steht:

**„Gutschein für 12× Schwimmbad oder für 3× Schwimmbad mit Sauna“.**

Maria geht nicht gerne Schwimmen und fragt sich, ob sie mit dem Gutschein auch nur die Sauna benutzen kann.

Für wie viele Saunabesuche könnte sie den Gutschein nutzen, wenn sie annimmt, dass Schwimmbad und Sauna einzeln genauso viel kosten wie die Kombi-Karte?

### Lösung:

**Gemeinsame Bezugsgröße:** Anzahl der Eintritte

**Invariante:** Wert des Gutscheins

### Normierung bzgl. der Größe „Eintritt“

(d. h. Anteil des Gutscheins, der bei einem Eintritt „verbraucht“ wird):

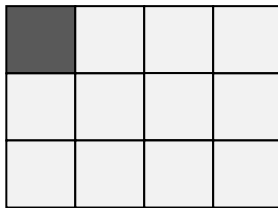
Definition „Eintrittskosten“: 
$$k = \frac{\text{nötiges Guthaben}}{\text{Anzahl der dafür möglichen Eintritte}} = \frac{G}{N}$$

„Eintrittskosten“ Schwimmbad: 
$$k_{\text{SB}} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{12 \text{ Eintritt}}$$

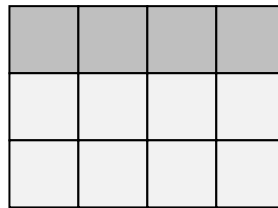
„Eintrittskosten“ Schwimmbad + Sauna: 
$$k_{\text{SB+S}} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{3 \text{ Eintritt}}$$

$$\Rightarrow \text{„Eintrittskosten“ Sauna: } k_{\text{S}} = k_{\text{SB+S}} - k_{\text{SB}} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{3 \text{ Eintritt}} - \frac{1 \text{ Gutschein}}{12 \text{ Eintritt}} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{4 \text{ Eintritt}}$$

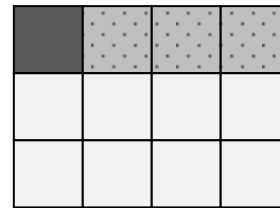
**Verbrauchtes „Guthaben“ (vom Gutschein) pro Eintritt:**



Schwimmbad



Schwimmbad mit Sauna



Sauna (schraffiert)

**Gesucht:** Anzahl der möglichen Eintritte für den reinen Saunagang ( $N_S$ ) pro Gutschein.  
( $G = 1$  Gutschein ist die Invariante!)

**Damit:**  $k_S = \frac{G}{N_S} \Rightarrow N_S = \frac{G}{k_S} = \frac{1 \text{ Gutschein}}{\frac{1 \text{ Gutschein}}{4 \text{ Eintritt}}} = 4 \text{ Eintritt}$

Der Gutschein müsste also für vier Saunabesuche reichen.

**Aufgabe 1 – Straßenbau**

Eine Straße soll geteert werden. Mit einer großen leistungsfähigen Dampfwalze bräuchte man für die Strecke 12 h.

Wie groß ist die Zeitersparnis, wenn man von der anderen Seite mit einer kleinen Walze entgegenarbeitet, mit der man in der gleichen Zeit jedoch nur ein Viertel der Strecke teeren kann?

**Aufgabe 2 – Weihnachtsgeschenke**

Lisa möchte Weihnachtsgeschenke kaufen. Eigentlich will Sie jedem Mädchen ihrer Klasse eine Kleinigkeit schenken. Sie kann für ihr Geld entweder 15 der schönen Teelichter kaufen oder 10 von den kleinen Weihnachtsengeln. Lisa entscheidet sich schließlich doch dafür nur ihren besten Freundinnen etwas zu schenken.

Wie viele Freundinnen kann sie beschenken, wenn jede ein Teelicht und einen Weihnachtsengel bekommen soll?

### **Aufgabe 3 – Schwimmbadreparatur**

Um das Wasser des Schwimmerbeckens abzupumpen, benutzt Bademeister Paule meist die starke Pumpe, die das Becken in 4 h leerpumpt. Wenn es schnell gehen muss, nimmt er noch die schwächere Pumpe dazu, die eigentlich für das Nichtschwimmerbecken gedacht ist. Mit beiden Pumpen ist das Becken dann in 2,4 h leer. Das Schwimmbad muss heute für Reparaturarbeiten wieder einmal leergepumpt werden. Als Paule die starke Pumpe anschalten will, sieht er, dass sie defekt ist.

Wie viel Zeit muss Paule einplanen, wenn er das Becken allein mit der schwächeren Pumpe leeren möchte?

### **Aufgabe 4 – Verpackungsmaschinen**

In einer Verpackungsfirma boomt das Geschäft so stark, dass die Verpackungsmaschine für die täglich anfallenden Produkte 30 h benötigen würde und deshalb nicht mehr alle Produkte rechtzeitig verpackt werden können. Es muss eine zweite Maschine angeschafft werden. Um Nachtschichten zu vermeiden, soll die Verpackungszeit durch die Anschaffung einer zweiten Maschine auf 12 h gedrückt werden.

Wie leistungsfähig muss die neue Verpackungsmaschine sein?

### **Aufgabe 5 – Stellenausschreibung**

Ein Personalchef überlegt: Für den Etat neu zu besetzender Stellen kann er entweder Fachkräfte in einem Umfang von 48 Wochenstunden oder ungelernete Kräfte in einem Umfang von 60 Wochenstunden einstellen. Er entscheidet sich dafür, je eine Fachkraft und eine ungelernete Kraft mit gleicher Wochenarbeitszeit einzustellen.

Welche Wochenarbeitszeit kann er in den Stellenausschreibungen anbieten?



## II Kategoriensystem

### Hauptkategorien

|       |  |
|-------|--|
| Str_O | Strukturieren auf Objektebene  |
| Abb_O | Abbilden auf Objektebene   |
| Sch_O | Schließen auf Objektebene  |
| Beu_O | Beurteilen auf Objektebene   |
|       |  |
| Str_R | Strukturieren auf Relationsebene   |
| Abb_R | Abbilden auf Relationsebene  |
| Sch_R | Schließen auf Relationsebene   |
| Beu_R | Beurteilen auf Relationsebene  |
|       |  |
| Str_H | Strukturieren auf Handlungsebene   |
| Abb_H | Abbilden auf Handlungsebene  |
| Sch_H | Schließen auf Handlungsebene   |
| Beu_H | Beurteilen auf Handlungsebene  |
|       |  |
| ==    | Kodierung wie zuvor  |
| XXX   | keine Kodierung  |
| AAA   | allgemeine Aussage ohne Bezug zu einer einzelnen Kategorie<br>(z. B. auch: Vorlesen des Aufgabentexts) |

### Pseudokategorien

|         |   |
|---------|---|
| dok_txt | schriftliches Festhalten von Gedankenschritten in Textform<br>(z. B. geg. Größen) |
| dok_ski | Anfertigen einer Skizze   |
| dok_re  | schriftliches Anfertigen einer Rechnung   |
|         |   |
| tr_re   | Anfertigen einer Rechnung mit dem Taschenrechner                                  |
|         |   |
| zei_bsp | Zeigen auf die gelösten Aufgabenbeispiele   |
| zei_lsg | Zeigen auf die eigenen Aufgabenlösungen   |
| zei_auf | Zeigen auf den Aufgabentext der zu lösenden Aufgabe                               |
| zei_ski | Zeigen auf eine selbst angefertigte Skizze  |



### III Kodierleitfaden

#### Objektebene

##### Strukturieren (Str\_O):

- P. benennt Objekte im AB oder im ZB.
- P. zählt Objekte auf.
- P. benennt Eigenschaften von Objekten im ZB oder im AB.
- P. ordnet Objekten im ZB oder im AB Eigenschaften zu.

Beispiele:

- „Also wir haben ... (Aufzählung von Objekten im AB oder ZB)“
- „In diesem Beispiel hatten wir ...“

##### Abilden (Abb\_O):

- P. benennt gemeinsame Eigenschaften von Objekten im ZB und im AB.
- P. ordnet Eigenschaften.

Beispiele:

- P. zeigt auf das Beispiel „Die kleinere Pumpe ist jetzt quasi gesucht. Sozusagen unsere Unbekannte.“
- „... und man sucht jetzt praktisch noch eine Invariante.“

##### Schließen (Sch\_O):

- P. bildet die Analogie zwischen Objekten im ZB und im AB durch direkte Bezugnahme.
- P. argumentiert auf Objektebene unter Zuhilfenahme der Beispiele.

Beispiele:

- „Die Mannschaften sind die Punkte und die Begegnungen sind die Linien.“
- „Also die Invariante wäre jetzt sozusagen die Straße.“
- P. bezieht sich auf die Aufgabenbeispiele.

##### Beurteilen (Beu\_O):

- P. begründet die Objektanalogie.
- P. bestärkt die Objektanalogie.

Beispiele:

- „(Die Invariante ist das Geld) ... weil sich's nicht ändert“
- „(Ja, dann ist die Invariante das Geld) ... Praktisch das, was dann aufgeteilt wird - in die Wochenstunden“

## Relationsebene

### Strukturieren (Str\_R):

- P. benennt Beziehungen zwischen Objekten im AB oder im ZB.
- P. ordnet Beziehungen im AB oder im ZB.

Beispiele:

- „Wenn sie nur die Teelichter kauft, ist das Geld durch 15 und wenn sie nur die Weihnachtsengel kauft ist das Geld durch 10.“
- „(...) die 48 h Fachkraft sind genau so viel Wert, wie die 60 h ungelernete Kraft.“
- „Dann kann A und B gegeneinander spielen, B und C und A und C, also drei Mal.“

### Abbilden (Abb\_R):

- P. benennt Gemeinsamkeiten zwischen Beziehungen im AB oder im ZB.
- P. fertigt eine Skizze wie im AB an, aus der die Beziehungen zwischen den Objekten im ZB deutlich werden.
- P. vergleicht Beziehungen in AB und ZB.

Beispiele:

- P. fertigt eine Skizze mit Teelichtern und Weihnachtsengeln – umrahmt diese jeweils um zu verdeutlichen, dass sie das gesamte Taschengeld aufbrauchen.

### Schließen (Sch\_R):

- P. ordnet Beziehungen im ZB unter Berufung auf den AB.
- P. bildet die Analogie zwischen Beziehungen im AB und dem ZB.

Beispiele:

- „... dann ist das so wie hier ...“(bezogen auf einen Zusammenhang zwischen beteiligten Objekten).
- „... dann verhält sich das genauso wie...“

### Beurteilen (Beu\_R):

- P. begründet die Analogie zwischen Relationen.
- P. bestärkt die Analogie zwischen Relationen.

Beispiele:

- „Weil dann weißt du praktisch, wie viel eine Stunde einer Fachkraft kostet und wie viel eine ungelernete kostet.“

## Handlungsebene

### Strukturieren (Str\_H):

- P. benennt einzelne Operationen im AB oder im ZB.
- P. ordnet einzelne Operationen im AB oder im ZB.
- P. legt eine Reihenfolge von Operationen fest.

Beispiele:

- „Hier haben wir zuerst durch ... geteilt.“
- „Jetzt haben wir schon ... gemacht.“
- „Da haben wir ... konstruiert.“
- „Das müssen wir jetzt auflösen.“

### Abbilden (Abb\_H):

- P. formuliert Hypothesen über die Anwendbarkeit bestimmter Operationen aus dem AB im ZB.
- P. stellt fest, dass im nächsten Schritt bestimmte Operationen auf den Zielbereich übertragen werden müssen.

Beispiele:

- „Dann können wir das so machen wie hier...“
- „Jetzt müssen wir das wieder gleichsetzen ...“

### Schließen (Sch\_H):

- P. führt Operationen im ZB aus.

Beispiele:

- Einführen einer Variablen
- Aufstellen eines Terms
- Gleichsetzen verschiedener Terme
- Berechnen eines bestimmten Termwerts

### Beurteilen (Beu\_H):

- P. begründet die Verwendung einer bestimmten Operation.
- P. kontrolliert die Ergebnisse der Operation auf Plausibilität.
- P. interpretiert die Ergebnisse der Operation im ZB (z. B. durch Rückbezug auf Objekte im ZB).

Beispiele:

- „Ja, genau! Das muss ja weniger sein als der Ausgangswert ...“
- „..., weil hier ja noch etwas dazukommt.“
- „Weil beides zusammen geht ja nicht - also addieren auf jeden Fall nicht.“

### Zugriff auf Bilddaten und Schülerdokumente

Bestehen Zweifel bei der Zuordnung eines Textabschnitts zu einer der obigen Kategorien, kann zusätzlich auf das Bildmaterial und die Schülerdokumente zugegriffen werden.

Die dabei auftretenden Schüleraktivitäten werden in Form von unten aufgelisteten Pseudokategorien festgehalten, die zeitgleich mit den obigen Kategorien kodiert werden dürfen.

Damit wird sichergestellt, dass immer dann, wenn zur eigentlichen Kodierung zusätzliches Datenmaterial herangezogen wird, eine Dokumentation dieses Vorgangs stattfindet. Für die Auswertung und Interpretation der kodierten Daten finden die Pseudokategorien keine weitere Berücksichtigung.

#### Pseudokategorien:

##### Zugriff auf das Schülerdokument:

schriftliches Festhalten von Gedankenschritten in Textform (z. B. geg. Größen) (dok\_txt)

Anfertigen einer Skizze (dok\_ski)

schriftliches Anfertigen einer Rechnung (dok\_re)

##### Zugriff auf die Bild-Daten:

Anfertigen einer Rechnung mit dem Taschenrechner (tr\_re)

Zeigen auf die gelösten Aufgabenbeispiele (zei\_bsp)

Zeigen auf die eigenen Aufgabenlösungen (zei\_lsg)

Zeigen auf den Aufgabentext der zu lösenden Aufgabe (zei\_auf)

#### Beispiel:

Transkript:

S1: „Deswegen müsste es ja eigentlich wieder das sein.“

Bilddaten:

[S1 zeigt auf eines der gelösten Aufgabenbeispiele]

Schülerdokument:

[und ergänzt auf dem Lösungsblatt die Formel  $n \cdot (n - 1)$  zu  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ .]

Die Kodierung des Transkripts wird an dieser Stelle durch die Zuordnung zu den Pseudokategorien zei\_bsp (Zugriff auf ein Aufgabenbeispiel) und dok\_re (Ausführen einer schriftlichen Rechnung) unterstützt.

Die Kodierung selbst liefert zusammen mit den obigen Definitionen und Ankerbeispielen zunächst Abb\_H, zusammen mit dok\_re, dann aber auch noch Sch\_H. Dieser Teil der Kodierung wäre ohne den Zugriff auf das Bildmaterial und die Schülerdokumente und die Zuordnung zu den Pseudokategorien sicherlich verloren gegangen.

Vollständig kodierte Transkript an dieser Stelle:

| Transkript des Dialogs                               | Pseudokategorien   | Kodierung      |
|--|--|----------------|
| 43 Deswegen müsste es ja eigentlich wieder das sein. | zei_bsp (Kom2)<br>dok_re<br>[S1 ergänzt zu $n*(n-1)/2$ ] | Abb_H<br>Sch_H |