

**Modellbildung des Messprozesses
und Umsetzung eines
modellbasierten iterativen
Lösungsverfahrens der
Schnittbild-Rekonstruktion für die
Röntgen-Computertomographie**

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von
Kilian Dremel

aus Bamberg

Würzburg, 2017

Eingereicht am: 06.03.2017
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

1. Gutachter: Prof. Dr. Randolph Hanke
 2. Gutachter: Prof. Dr. Otto Sauer
- der Dissertation

1. Prüfer: Prof. Dr. Randolph Hanke
 2. Prüfer: Prof. Dr. Otto Sauer
 3. Prüfer: Prof. Dr. Werner Porod
- des Promotionskolloquiums

Tag des Promotionskolloquiums: 27.10.2017

Zusammenfassung

In der computertomographischen Schnittbildgebung treten Artefakte, also Anteile des Ergebnisses auf, die nicht Teil des gemessenen Objekts sind und die somit die Auswertbarkeit der Ergebnisse beeinflussen. Viele dieser Artefakte sind auf die Inkonsistenz des Modells der Rekonstruktion zur Messung zurückzuführen. Gerade im Hinblick auf Artefakte durch die Energieabhängigkeit der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten und Abweichungen der Geometrieinformation des Rekonstruktionsmodells wird häufig der Weg einer Nachbearbeitung der Messdaten beschritten, um Rekonstruktionsartefakte zu vermeiden.

Im Zuge dieser Arbeit wird ein Modell der computertomographischen Aufnahme mit Konzentration auf industrielle und materialwissenschaftliche Systeme erstellt, das nicht genutzt wird um die Messdaten zu verändern, sondern um das Rekonstruktionsmodell der Aufnahme an die Realität anzupassen.

Zunächst werden iterative Rekonstruktionsverfahren verglichen und ein passender Algorithmus ausgewählt, der die gewünschten Modifikationen des Aufnahmemodells erlaubt. Für diese Modifikationen werden bestehende Methoden erweitert und neue modellbasierte Ansätze entwickelt, die in den Rekonstruktionsablauf integriert werden können.

Im verwendeten Modell werden die Abhängigkeiten der rekonstruierten Werte vom polychromatischen Röntgenspektrum in das Simulationsmodell des Rekonstruktionsprozesses eingebracht und die Geometrie von Brennfleck und Detektorelementen integriert. Es wird gezeigt, dass sich durch die verwendeten Methoden Artefakte vermeiden lassen, die auf der Energieabhängigkeit der Schwächungskoeffizienten beruhen und die Auflösung des Rekonstruktionsbildes durch Geometrieannahmen gesteigert werden kann. Neben diesen Ansätzen werden auch neue Erweiterungen der Modellierung umgesetzt und getestet. Das zur Modellierung verwendete Röntgenspektrum der Aufnahme wird im Rekonstruktionsprozess angepasst. Damit kann die benötigte Genauigkeit dieses Eingangsparameters gesenkt werden. Durch die neu geschaffene Möglichkeit zur Rekonstruktion der Kombination von Datensätzen die mit unterschiedlichen Röntgenspektren aufgenommen wurden wird es möglich neben dem Schwächungskoeffizienten die Anteile der Comptonabsorption und der photoelektrischen Absorption getrennt zu bestimmen. Um Abweichungen vom verwendeten Geometriemodell zu berücksichtigen wird eine Methode auf der Basis von Bildkorrelation implementiert und getestet, mit deren Hilfe die angenommene Aufnahmegeometrie automatisch korrigiert wird. Zudem wird in einem neuartigen Ansatz zusätzlich zur detektorinternen Streustrahlung die Objektstreustrahlung während des Rekonstruktionsprozesses deterministisch simuliert und so das Modell der Realität der Messdatenaufnahme angepasst.

Die Umsetzung des daraus zusammengesetzten Rekonstruktionsmodells wird an Simulationsdatensätzen getestet und abschließend auf Messdaten angewandt, die das Potential der Methode aufzeigen.

Abstract

In computed tomography, parts of the result which are not features of the measured object – so called artifacts – occur and thus impair the evaluability of the results. Reconstruction methods require a model of the measurement. Many artifacts are induced by the inconsistency between the model of reconstruction and the measurement. Especially with regard to artifacts due to the energy dependence of the reconstructed attenuation coefficients and deviations of the geometry information of the reconstruction model, a frequently used method is the postprocessing of the measurement data to avoid reconstruction artifacts. In this thesis a model of computed tomography measurements with focus on systems used for industrial and material science purposes is developed that is not used to change the measured data, but to adapt the reconstruction model to the reality of measurement. Firstly, iterative reconstruction methods are compared and a suitable algorithm is selected that allows the desired modifications of the model. Therefore existing methods are extended and new model-based approaches are developed that can be integrated in the reconstruction process. The dependencies of the reconstructed values from the polychromatic X-ray spectrum are incorporated into the simulation model of the reconstruction process and the geometry of the focal spot and detector elements are integrated. Thereby artefacts caused by the energy-dependency of the attenuation coefficients are shown to be reduced and the resolution of the resulting data is shown to be increased by geometric modelling. Alongside these approaches of modeling new methods are developed and implemented. The X-ray spectrum used for the modeling is adapted during the reconstruction. Thereby the accuracy needed for this input parameter is lowered. Due to possibility of the combination of data sets scanned using different spectra the reconstruction of the Compton- and photoelectric parts of the attenuation coefficient becomes possible. To consider deviations of the geometry model used in the reconstruction a correlation-based method is implemented and tested to automatically correct these aberrations. In addition to radiation scattered within the detector, a new method is developed to simulate the object scattering during the reconstruction process and the model is therefore adapted to the reality of the measurement. The implementation of the reconstruction model composed therefrom is tested on simulation data sets and finally applied to measurement data which show the potential of the method.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Analytische Rechnungen und iterative Verfahren	2
1.2	Zielsetzung der vorliegenden Arbeit	3
2	CT, Simulation, Datenbewertung	5
2.1	Aufbau computertomographischer Standard-Systeme	6
2.1.1	Definitionen und Nomenklatur der Beschreibung von CT-Systemen .	6
2.1.2	Bedingungen an Aufnahmegeometrien	7
2.1.3	Standard-Aufnahmegeometrien	8
2.2	Simulation computertomographischer Datensätze	10
2.3	Simulations- und Mess-Phantome	11
2.4	Qualitätsmaße und Bewertung von Rekonstruktionen	14
3	Algorithmik	19
3.1	Prinzip der Schnittbildrekonstruktion	20
3.2	Gefilterte Rückprojektion	22
3.3	Iterative Rekonstruktionsmethoden	24
3.3.1	Projektoren	27
3.3.2	OSSART	30
3.3.3	Maximum-Likelihood basierte Optimierung	32
3.3.4	Lösungsmethoden für das Maximum-Likelihood-Problem	33
3.3.5	Vergleich der Lösungsmethoden	35
3.3.6	Additive Konstanten in Maximum-Likelihood-Verfahren	40
3.3.7	Regularisierungsmethoden	41
3.3.8	Abbruchkriterien	45
4	Modellannahmen	49
4.1	Vereinfachtes Modell für die gefilterte Rückprojektion	50
4.2	Modell der Röntgenquelle	52
4.3	Modell der Wechselwirkung	55
4.3.1	Energieabhängigkeit relevanter Absorptionsprozesse	55
4.3.2	Energie- und Winkelabhängigkeit relevanter Streuprozesse	58
4.3.3	Gesamtabsorption	62

4.4	Modell des Detektors	64
4.4.1	Quantenrauschen	65
4.4.2	Detektionswahrscheinlichkeit	66
4.4.3	Auflösungsbeeinflussende Effekte	66
4.4.4	Bildfehler	67
4.5	Modell der Aufnahmegeometrie	68
4.5.1	Systematische Abweichungen	68
4.5.2	Zufällige Abweichungen	69
4.6	Zusammenfassung der Modellbildung	69
5	Modellbasierte Rekonstruktion	73
5.1	Vorverarbeitung von Projektionsdaten	75
5.1.1	Hell- und Dunkelbild-Korrektur	75
5.1.2	Entfaltungsansätze	78
5.1.3	Polynomkorrektur bei Aufhärungsartefakten	82
5.2	Geometriemodell	85
5.2.1	Strahlsummenbasierte und intensitätsbasierte Überabtastung	86
5.2.2	Geometrie-Modell des Röntgendetektors	87
5.2.3	Geometrie-Modell des Brennflecks	89
5.2.4	Faltungsansätze als Modell der Detektor-Punktspreizfunktion	99
5.3	Energieabhängige Schwächungsmodelle	101
5.3.1	Vergleich segmentierungsbasierter und globaler Energiemodellierung	111
5.3.2	Polychromatische Rekonstruktion mit Spektrumsschätzung	121
5.3.3	Multispektrale Rekonstruktionsverfahren	130
5.4	Streumodell	138
5.5	Geometrieabweichungen	148
6	Anwendung	157
6.1	Magnesium-Schaum	159
6.1.1	Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit	159
6.1.2	Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse	160
6.2	Oboe	164
6.2.1	Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit	164
6.2.2	Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse	164
6.3	Motor-Kolben	167
6.3.1	Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit	167
6.3.2	Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse	168
7	Abschließende Diskussion und Ausblick	173
7.1	Abschließende Diskussion und Zusammenfassung	174
7.2	Offene Fragestellungen und Ausblick	176
	Literaturverzeichnis	178

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Analytische Rechnungen und iterative Verfahren

Die Computertomographie (CT) ist ein wichtiges Werkzeug nicht nur in der medizinischen Diagnostik, sondern auch in der zerstörungsfreien Prüfung. Dabei erstrecken sich die Aufgabenfelder von der Mikroskopie und wissenschaftlichen Materialcharakterisierung bis in den industriellen Bereich der Serienprüfung. Aufbau und Konzeption von computertomographischen Systemen haben sich seit dem ersten Scanner 1969 [1] hauptsächlich in ihrer Vielfalt verändert. Eine nach dem Abtasttheorem nach Nyquist-Shannon vollständige Abtastung ideal geeigneter Objekte mit monochromatischen, parallelen Strahlen wird in einem analytischen Rekonstruktionsverfahren wie der gefilterten Rückprojektion („Filtered Back-Projection“-FBP) nach wie vor die besten Resultate erzielen. Probleme der Schnittbildgebung durch CT-Aufnahmen entstehen durch die unvollständigen Abtastungen der Objektfrequenzen, die unzureichende Realisierbarkeit eines idealen Aufnahmesystems und das nicht-lineare Verhalten der Absorption des Strahls einer Labor-Röntgenquelle.

Spätestens seit den ersten klinischen Untersuchungen mit Röntgen-Computertomographie in den 1970er Jahren sind daher auch die Artefakte, also die Bildanteile, denen kein Äquivalent im gemessenen Objekt zuordenbar ist, bekannt. Es wurden viele Versuche unternommen, um diese Bildfehler - möglichst unter Wiederherstellung der durch sie überlagerten Information - zu beseitigen. So wurden die Messaufbauten verändert, um Streustrahlung zu vermeiden und Brennfleckgrößen der Röntgenröhren zu optimieren, die Messdaten durch Kalibration auf Referenzwerte in den angenommenen physikalischen Zusammenhang gebracht oder spezielle Rekonstruktionsfilter eingesetzt, um die Bildschärfe hin zum besten visuellen Eindruck anzupassen.

Unabhängig davon wie die Daten vor der Rekonstruktion des Schnittbilds angepasst sind, wird die Berechnungszeit der Ausgangsdaten immer eine Rolle spielen. Dabei ist es nicht verwunderlich, wenn die Arraygröße der Detektoren und damit die erreichbare Auflösung des Gesamtsystems im Laufe der Jahre zusammen mit der wachsenden Leistungsfähigkeit der Rechensysteme gestiegen ist. Heute werden für die Berechnung einer gefilterten Rückprojektion von Daten, die auf einem kleinen Detektorsystem aufgenommen wurden, nur noch Sekunden benötigt.

Gerade mit dem Aufkommen leicht verfügbarer hochparalleler Rechensysteme in den 2000er Jahren hat sich die Berechnungsgeschwindigkeit der Rekonstruktionen drastisch erhöht und so die Möglichkeit geschaffen, iterative, nicht-analytische Rekonstruktionsverfahren einzusetzen. Da in einem solchen Verfahren für jeden Iterationsschritt etwa die doppelte Rechenzeit benötigt wird, die zur Berechnung einer gefilterten Rückprojektion aufgewendet werden muss, findet man derartige Methoden auch heute noch selten im täglichen Einsatz von Materialprüfern und Radiologen. Setzt sich der Geschwindigkeitszuwachs durch den Einsatz paralleler Rechensysteme wie Grafikprozessoren aber weiterhin fort, so wird dieser für eine Beschleunigung der Rechenarchitekturen sorgen, die iterative Verfahren in den Standardeinsatz bringen kann.

Offen bleibt aber die Frage nach der Rechtfertigung iterativer Verfahren und deren Mehrwert gegenüber hochoptimierten und erfolgreich eingesetzten Standard-Techniken.

Es gibt mehrere bekannte Vorteile iterativer Rekonstruktionsverfahren, von denen zwei - durch die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen motiviert - besonders herausstechen. Zum Ersten besteht eine Eignung zum Einsatz von „Compressed Sensing“ (CS) Techniken, also dem Nutzen von Vorwissen über die Objektbeschaffenheit. CS ist vielfacher Gegenstand der Forschungsarbeit, da es die Möglichkeit bietet, mit geringerer Datenbasis zu arbeiten und damit Aufnahmezeiten zu verkürzen. CS geht in iterativen CT-Rekonstruktionsverfahren zumeist als Regularisierung ein und nutzt das Wissen über die Dünnbesetztheit des Bildgradienten.

Zweitens sind iterative Verfahren variabel anpassbar. Dies betrifft nicht nur die Geometrieparameter der Eingangsdaten, also das Aufnahmesystem, sondern auch das angenommene Modell der Datenakquise. Die Aufnahmegeometrie der Daten kann freier gewählt werden, so dass die Anforderungen an die technische Realisierung eines Scannersystems sinken. Das Modell der Datenaufnahme, das bei der gefilterten Rückprojektion durch ein lineares Gleichungssystem realisiert ist, kann ein nahezu beliebiges Design annehmen. Die Modellierung der Physik im Messablauf ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Durch den Aufbau eines Projektionsmodells und dessen Umsetzung in Software wird nach einer Antwort auf die oben gestellte Frage nach dem Vorteil iterativer Verfahren gegenüber der gefilterten Rückprojektion gesucht.

1.2 Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

Standardverfahren zur Schnittbildgebung wie die gefilterte Rückprojektion entwickeln Bildartefakte, wenn die Eingangsdaten nicht vollständig dem angenommenen Modell entsprechen. Da das verwendete Modell weder physikalische Eigenschaften der Strahlung noch der gemessenen Materie einbezieht, können Artefakte also auch entstehen, ohne dass die Aufnahmen durch Messfehler beeinträchtigt werden. Die Polychromatizität der Röntgenstrahlung, die durch Streuung entstandenen oder abgelenkten Photonen, die endliche Größe des Brennflecks und die statistische Natur der Messwerte sind dabei Beispiele für Eigenschaften des CT-Messverfahrens, die im Modell der FBP als Messfehler behandelt werden müssen.

Ziel dieser Arbeit ist es den Weg von der Entstehung der Röntgenstrahlung bis zu ihrer Detektion nachzuvollziehen und Abweichungen von einem rein linearen Modell aufzuzeigen. Die so erkannten Abweichungen werden auf ihre Relevanz im Bildgebungsprozess hin untersucht und die einflussreichsten Effekte identifiziert. Dabei liegt die Konzentration auf der Brennfleckgröße und -form sowie der statistischen Natur der Röntgenstrahlung bei ihrer Entstehung, auf der Energieabhängigkeit sowie der Streuquerschnitte bei der Wechselwirkung und auf Detektor-interner Streustrahlung beim Detektionsprozess. Diese Effekte werden zu einem deterministisch motivierten Simulationsmodell verbunden, mit dessen Ergebnissen der Vergleichsschritt eines iterativen Lösungsverfahrens für das inverse Rekonstruktionsproblem ausgeführt wird.

Vielfach sind die Modellierungsprobleme nicht nur durch iterative Lösungswege behandelbar, sondern können auch durch Vor- oder Nachbearbeitungsschritte des Rekonstruktionsprozes-

ses gelöst werden. Der Umfang dieser Arbeit begrenzt sich auf den Bereich der iterativen Algorithmen, so dass weitere Ansätze nur zum Vergleich herangezogen werden. Um aus der Vielzahl von Möglichkeiten die Kostenfunktion einer iterativen Rekonstruktion zu bilden, werden einige häufig verwendete Alternativen ausgewählt und zum Vergleich herangezogen. Mit der Wahl eines statistischen Rekonstruktionsverfahrens werden Regularisierungsmethoden und Abbruchkriterien festgelegt, um ein Basismodell zu schaffen, auf dem die physikalische Modellierung ansetzt.

Für die Modellbildung selbst wird ein „Beamlet“-Modell der Geometrie, also ein Modell sich überlagernder Einzelstrahlen zur Simulation der effektiven Pixelbreite des Detektors und des Brennflecks auf Quellseite aufgebaut. Dieses wird mit einem reinen Faltungsansatz verglichen, der auch als Modell der Szintillatorstreuung dient.

Das Modell der Wechselwirkung wird im Vergleich zweier Ansätze realisiert, die sich sowohl in ihrer Nähe zum tatsächlichen Absorptionsprozess als auch in der Menge an Vorwissen unterscheiden, die in die Berechnung eingehen muss. Durch die in dieser Arbeit entwickelte Kombination mit einer Spektrumsschätzung wird gezeigt, wie dieses Vorwissen reduziert werden kann. Durch die Einbeziehung des Paarbildungsprozesses wird eines der Energiemodelle für den Energiebereich über 1 MeV erweitert.

Auch werden Möglichkeiten untersucht wie CT-Aufnahmen bei unterschiedlichen Energien durch den modellbasierten Ansatz kombiniert werden können. Es wird ein multispektrales Rekonstruktionsverfahren entwickelt, das die an unterschiedliche Absorptionseffekte fallenden Anteile des Schwächungskoeffizienten auftrennt. Die Streustrahlung wird auf einer Segmentierung basierend in den Projektor des Simulationsmodells integriert und nach einmaliger Berechnung als additive Konstante weiterer Iterationen behandelt.

Um das Geometriemodell abzuschließen werden echte Messfehler, also Fehler der Aufnahmegeometrie, durch ein Korrelationsmodell berücksichtigt.

Softwaremodelle auf Monte-Carlo (MC) -Basis, die durch simulierte Zufallsprozesse komplexe physikalische Zusammenhänge nachstellen, können - bei sehr großem Rechenaufwand - genauere Simulationen erzeugen als es durch deterministische Modelle möglich ist. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Softwarebestandteile werden daher unter Berücksichtigung der für jede Iteration des Verfahrens notwendigen Rechenzeit vereinfacht und im Sinne der Anwendbarkeit und der großen Datenmengen auf die Anforderungen von Rekonstruktionssoftware zugeschnitten. So ist es Ziel der vorliegenden Arbeit die Möglichkeiten aufzeigen, die sich durch modellbasierte Rekonstruktion bei akzeptablen Berechnungszeiten ergeben und eine Abschätzung sinnvoller Bestandteile des Modells bieten.

Kapitel 2

Computertomographie, Simulation und Datenbewertung

Die Computertomographie stellt auch Jahre nach der ersten Schnittbild-Aufnahme 1969 noch ein modernes Werkzeug dar, um Information über das Innere von Materie zu erlangen, die im optischen Bereich undurchsichtig ist. Gerade durch iterative Rekonstruktionsverfahren, wie sie in dieser Arbeit zum Einsatz kommen, kann eine Vielzahl von Abtastgeometrien und damit von System-Aufbauten für die Tomographie realisiert werden.

Neben der Beschreibung der Standardgeometrien wird in diesem Kapitel auch auf die Simulation von CT-Datensätzen eingegangen. Simulationen des Messprozesses und iterative Rekonstruktionsverfahren sind durch die Notwendigkeit einer Vorwärtsprojektion, also einer simulierten Abbildung auf einem virtuellen Röntgen-Detektor, stark verknüpft. Zudem spielen Simulationen auch bei der Validierung von Rekonstruktionsverfahren eine entscheidende Rolle, da sie als ideale Referenz herangezogen werden können. Die für Simulationen und Messungen in dieser Arbeit verwendeten Phantome sowie Gütemaße zur Bewertung der aus simulierten und gemessenen Daten entstandenen Rekonstruktionen, werden zum Abschluss des Kapitels besprochen.

2.1 Aufbau computertomographischer Standard-Systeme

Röntgen-Tomographiesysteme benötigen die Absorptionsinformation aus einer Vielzahl von Winkeln rund um das darzustellende Objekt. Die Möglichkeiten vollständige Winkelinformation zu erlangen sind dabei begrenzt, so dass eine näherungsweise vollständige Abtastung der Winkelinformation zu den Bedingungen gehört, die an Aufnahmegeometrien gestellt werden müssen.

2.1.1 Definitionen und Nomenklatur der Beschreibung von CT-Systemen

Röntgen-computertomographische Anlagen (**CT-Systeme**) werden mit drei Komponenten verwirklicht: Der Röntgenquelle (**Quelle**), aus der die Strahlung austritt, dem Manipulatorsystem, auf dem die Probe (**Objekt**) positioniert wird, und dem Röntgendetektor (**Detektor**). Die Quelle kann dabei beliebig realisiert werden und beispielsweise aus einem radioaktiven Präparat bestehen, optische Elemente beinhalten oder durch eine klassische Röntgenröhre umgesetzt sein. Auch kann die an einem Synchrotron entstehende Strahlung als Quelle einer CT-Messung dienen. Im Rahmen der Modellbildung wird in Kap. 4.2 näher auf die für die Modellierung relevanten Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Röntgenquellen eingegangen.

Entweder das Manipulatorsystem oder die Quellen-Detektor-Kombination muss die Möglichkeit bieten, unterschiedliche Durchstrahlungswinkel durch das Objekt zu erreichen, um eine CT-Messung durchzuführen. Der Detektor besteht aus mehreren einzelnen Detektorelementen (**Pixel**), die eine Ortsauflösung des Röntgenbilds (**Projektion**) ermöglichen. Die **Rekonstruktion** des Schnittbildes wird in geeigneten Basisfunktionen (**Voxel**) umgesetzt,

die - der einfachen informatischen Umsetzung geschuldet - häufig als nicht-überlappende Kuben in kartesischen Koordinaten implementiert sind. Die Menge aller Voxel bildet das Rekonstruktionsraster (**Volumen**). Die Darstellung einer Schicht durch das Volumen wird als **Schnittbild** bezeichnet. Eine Übersicht bietet Abb. 2.1.

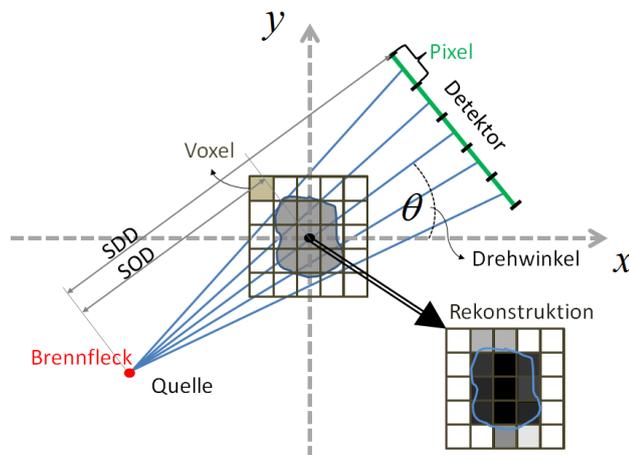


Abbildung 2.1: Aufbau und Komponenten eines computertomographischen Aufnahmesystems. Die Darstellung zeigt einen zweidimensionalen CT-Aufbau in Fächerstrahlgeometrie unter Drehwinkel θ . Der Quellen-Detektor- (SDD) und Quellen-Objekt-Abstand (SOD) geben die Vergrößerung des Systems vor.

Zur mathematischen Beschreibung wird im Folgenden eine Nomenklatur verwendet, deren wichtigste Anteile in Tab. 2.1 zusammengefasst sind. Zudem werden Formeldarstellungen vereinfacht, indem die Summenbildung $\sum_{x=0}^{N_x}$ für alle Indizes x im Bereich $x = 0$ bis $x = N_x$, durch \sum_x abgekürzt wird. N_x bezeichnet darin das Maximum des jeweiligen Gültigkeitsbereichs, also insbesondere die Menge aller Voxel j oder die Menge aller Detektorelemente i .

2.1.2 Bedingungen an Aufnahmegeometrien

Die Vollständigkeit der Messdaten kann mit Hilfe der Tuy-Smith-Bedingung bewertet werden [2]. Im Fall eines zweidimensionalen Aufnahmebereichs, also eines einzelnen Schnitts durch ein Objekt, besagt dieses, dass eine exakte Rekonstruktion dann möglich ist, wenn alle Linien, die die zu rekonstruierende Fläche schneiden, die Bahn der Quelle-Detektor-Bewegung mindestens einmal schneiden. Dies stellt sicher, dass für jeden Punkt im Objekt Information aus allen Winkelbereichen vorliegt. Dies führt zur Bedingung eines Aufnahmebereichs von $180^\circ + \alpha$ (α =Öffnungswinkel der Quelle) für eine kreisförmige Quelle-Detektor-Bewegung. Diese Bedingung kann auch im Fall eines dreidimensionalen Rekonstruktionsvolumens verwendet werden. Die analoge Bedingung ist, dass alle Ebenen durch das Rekonstruktionsvolumen einmal die Quelle-Detektor-Trajektorie schneiden [1]. Eine Auswahl von Trajektorien wird unten gegeben.

Eine weitere Bedingungen an die aufgenommenen Daten sind (logarithmierte) Projektionen mit kompaktem Träger, also die Abbildung eines Objekts, das nicht über die Grenzen der Projektion hinausragt. Diese Bedingung wird häufig im Zusammenhang sogenannter

Indizes	i	Pixelindex aus allen Projektionen
	j	Voxelindex aus allen Rekonstruktionsvoxeln
	k	Energieindex der betrachteten Energiestützstellen
	m	Überabtastungsindex der geometrischen Überabtastung
Geometrie	SOD	Quellen-Objekt-Abstand
	SDD	Quellen-Detektor-Abstand
Projektion	L	Log-Likelihood
	L_{ART}	Kostenfunktion ART
	$y_{i,0}$	Ungeschwächte Intensität bei Pixel i
	y_i	Gemessene Intensität bei Pixel i
	\bar{y}_i	Vorwärtsprojizierte Intensität bei Pixel i
	S	Strahlsumme
Rekonstruktion	μ_j	Voxel bei Index j
	a_{ij}	Strecke des Strahls i durch Voxel j
	λ	Relaxationsparameter der Rekonstruktion
	β_1 bzw. β_2	Relaxationsparameter der Regularisierung

Tabelle 2.1: Häufig verwendete Formelzeichen.

Region-Of-Interest(ROI) Aufnahmen umgangen. Dabei wird ein Objekt stärker vergrößert als es die Breite des Detektors zulassen würde, wenn die gesamte Objektbreite abgebildet werden soll. Es wird in diesem Fall von „truncated projections“ oder „abgeschnittenen Projektionen“ gesprochen.

Die oben genannte Bedingung einer Abtastung über $180^\circ + \alpha$ kann in vielen Fällen ebenfalls nicht eingehalten werden. Wird ein geringerer Winkelbereich gemessen, wird das sich stellende Rekonstruktionsproblem als „limited angle“, also als das Problem begrenzter Winkel bezeichnet. Dieses tritt bei nicht für Kegelstrahl geeigneten Objektgeometrien, also beispielsweise bei flächigen Objektmessungen auf. Eine Aufnahmegeometrie, die diese Voraussetzung immer verletzt, ist die Laminographie.

2.1.3 Standard-Aufnahmegeometrien

Die Trajektorie der Quelle bezüglich des Objekts, die die Aufnahmegeometrie vorgibt, kann - bei iterativen Rekonstruktionsverfahren - beliebige Formen annehmen, die die Tuy-Smith-Bedingung erfüllen sollten. Bei Rekonstruktion nach Feldkamp (siehe [3]) mit gefilterter Rückprojektion wird eine kreisförmige Trajektorie vorausgesetzt. Die gefilterte Rückprojektion kann in abgewandelter Form aber auch bei weiteren Aufnahmegeometrien eingesetzt werden (siehe z.B. [4]). Im Folgenden werden einige im Bereich der industriellen Computertomographie verwendeten Trajektorien vorgestellt. Skizzen zu den Trajektorien sind in Abb. 2.2 zu finden.

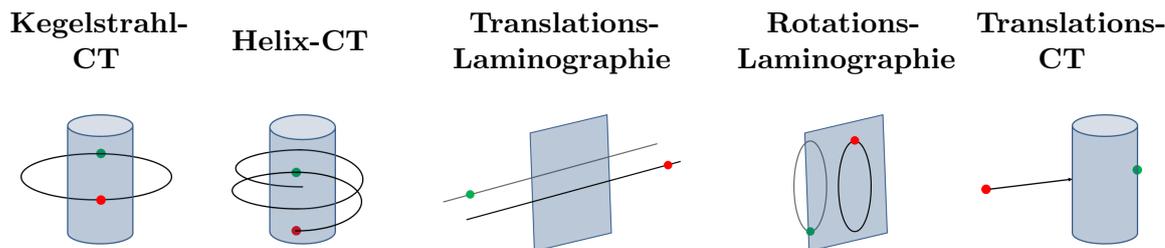


Abbildung 2.2: Übersicht einiger Standard-Aufnahmegeometrien in der Computertomographie. Die Quelle ist rot, der Detektor grün und die Trajektorie schwarz dargestellt. Neben den Standardgeometrien kann in iterativen Rekonstruktionsverfahren jede Kombination von Aufnahmen aus unterschiedlichen Winkeln zur Rekonstruktion verwendet werden.

Kegelstrahl-CT Bei der Standard-Kegelstrahl-CT bzw. Axial-CT wird die Aufnahme der Daten mit einer zweidimensionalen Detektorfläche auf einer Kreisbahn um das zu untersuchende Objekt durchgeführt. Die Daten werden zumeist über die vollen 360° aufgenommen und können mit Hilfe des Feldkamp Algorithmus [3] rekonstruiert werden. Die Vollständigkeit der Daten ist nur in der Objektebene gewährleistet, die sowohl senkrecht auf der Detektoroberfläche als auch auf der Drehachse steht. Bei großem Öffnungswinkel der Quelle (Winkel zwischen den Verbindungslinien der höchsten und der mittleren Detektorschicht zur Quelle) kommt es zu Artefakten (sog. *Feldkamp-Artefakte*) in den äußeren Schichten des Rekonstruktionsvolumens (siehe dazu auch [5]). Der Öffnungswinkel wird festgelegt durch den Quelle-Detektor (SDD)- und Quelle-Objekt - Abstand (SOD). Die *Fächerstrahl-CT* ist eine eindimensionale Variante dieser Aufnahmegeometrie, bei der die selbe Quelle-Detektor-Trajektorie unter Verwendung einer Detektorzeile abgetastet wird.

Helix-CT Bei der Verwendung einer Helix-Trajektorie können Artefakte, wie sie für die Kegelstrahl-Geometrie beschrieben wurden, vermieden werden. Quelle und Detektor bewegen sich dabei auf einer Helixbahn um das Objekt, so dass die oben eingeführte Tuy-Smith Bedingung eingehalten wird. Die Rekonstruktion solcher Daten kann als gefilterte Rückprojektion durchgeführt werden [1]. Im Zusammenhang mit iterativen Rekonstruktionsverfahren zeigen sich Probleme dieser Geometrie bei der Rekonstruktion von Teilvolumen. Während die Kegelstrahl-Trajektorie in der mittleren Objektschicht ohne Wissen über die weiter oben oder unten im Objekt gelegenen Teilbereiche durchgeführt werden kann, muss bei Helix-CT das gesamte Volumen rekonstruiert werden. Grund dafür ist, dass jeder Voxel des Rekonstruktionsvolumens für jeden Durchstrahlungswinkel um die Drehachse der Helix einen unterschiedlichen Durchstrahlungswinkel senkrecht zur Drehachse besitzt. Die Vorwärtsprojektion eines Detektorpixels bedarf also des Wissens aus unterschiedlichen Objektschichten. Eine iterative Rekonstruktion des Gesamtvolumens ist dagegen problemlos möglich.

Laminographie Bei Objekten, deren Objektabmessungen die Abmessungen von Computertomographiesystemen übersteigen, kann mit Hilfe von Laminographie Volumeninformation gewonnen werden. Dies spielt insbesondere bei flachen, ausgedehnten Objekten (z.B. Leiterplatten) eine entscheidende Rolle, da diese in einer Richtung problemlos von der Röntgenstrahlung durchdrungen werden, in den anderen Raumrichtungen aber zu stark absorbierend sein können, um eine Durchstrahlung im registrierbaren Intensitätsbereich zuzulassen. Auch ist in solchen Fällen eine vollständige Trajektorie von Quelle und Detektor um das Objekt nicht möglich.

Durch eine gegenläufige Bewegung von Quelle und Detektor vor und hinter dem Objekt kann trotzdem winkelabhängige Information über das Objektvolumen aufgenommen werden. Dafür werden Quelle und Detektor entweder als Translationsbewegung (*Translationslaminographie*) oder als Rotationsbewegung (*Rotationslaminographie*) am Objekt vorbeigeführt. Da der Winkelbereich eingeschränkt ist, ist die Tuy-Smith-Bedingung nicht erfüllt und es ergeben sich bei Rekonstruktion mit iterativen Verfahren typische Rekonstruktionsartefakte (siehe dazu auch [6]).

Translations-CT Neben den Standardgeometrien wurden auch spezialisierte Trajektorien entwickelt. Beispielhaft wurde für den Anwendungsfall von Wänden oder Rohrleitungen, die hinter dem Objekt keine Detektorbewegung zulassen, eine Trajektorie entwickelt, die es möglich macht Volumeninformation über den Rekonstruktionsbereich zu gewinnen, indem ausschließlich die Röntgenquelle bewegt wird. Durch das Zusammenspiel mehrerer Translationswege der Quelle auf den Detektor zu und die daraus resultierenden unterschiedlichen Vergrößerungen auf dem Weg der Quelle können sowohl mit numerischen als auch analytischen Verfahren Rekonstruktionsergebnisse erzielt werden (siehe dazu auch [4], [7]).

2.2 Simulation computertomographischer Datensätze

Die Simulation von CT-Daten ist eng mit iterativen Rekonstruktionsverfahren verknüpft. Modellbasierte Vorwärtsprojektionen (siehe Kap. 3) eines Voxelvolumens entsprechen im Idealfall einem tatsächlichen Messergebnis und können damit, bei gegebenen Volumendaten, als voxelbasierte Simulation betrachtet werden.

Simulationen lassen sich in die Klassen deterministischer und statistischer Verfahren einteilen. Statistische Verfahren gründen auf Monte-Carlo basierter Propagation von Photonen. Dabei werden einzelne Photonen einer bestimmten Energie simuliert und deren Interaktion an jedem Wegpunkt mit einer aus Wirkungsquerschnitten errechneten Wahrscheinlichkeit berechnet. Ob eine tatsächliche Interaktion stattfindet, wird aufgrund von Zufallszahlen entschieden. Dabei können aus einem Photon mehrere aus Teilprozessen gestreute Photonen entstehen, deren Weg weitergehend berechnet werden muss. Statistisches Rauschen der Simulationsdaten ist ein intrinsischer Teil des Verfahrens und damit für die Erzeugung eindeutiger, rauschfreier Daten nur bei der Propagation sehr großer Photonenzahlen ge-

eignet. Der Rechenaufwand für Monte-Carlo basierte Simulationen ist, trotz der guten Parallelisierbarkeit, dementsprechend hoch.

In deterministischen Simulationsverfahren werden Intensitäten durch ein Schwächungs- bzw. Streumodell auf dem Detektor abgebildet. Die statistische Natur der Teilchen bleibt unberücksichtigt und einer Eingangintensität kann nach ihrem Weg von der Röntgenquelle zum Detektor eine eindeutige und reproduzierbare Ausgangsintensität zugewiesen werden. Beide Simulationsvarianten können als voxelbasierte oder oberflächenbasierte Methode implementiert sein. Oberflächenbasierte Techniken weisen einem Volumenbereich, der durch eine geometrische Grundform (Primitiv) oder dreiecksbasiert (beispielsweise auf STL-Basis) begrenzt ist, die Eigenschaften eines Materials zu. Diese Eigenschaften bestimmen das Verhalten der propagierenden Photonen in diesem Bereich. Ein Strahl bzw. ein Photon kann dabei in jedem beliebigen Punkt, der innerhalb der Rechengenauigkeit bestimmbar ist, auf das Material treffen. Simulationssoftware dieser Art sind beispielsweise die in dieser Arbeit verwendeten Programme ROSI (Monte-Carlo-basiert, [8]) oder Scorpius XLab[®] (deterministisch, [9], [10]).

Voxelbasierte Techniken dagegen weisen einem Raster in jedem Punkt eine Eigenschaft zu. Dies wird auch zur Repräsentation von Volumendaten in der Schnittbildgebung verwendet. Software dieses Bereichs ist vornehmlich deterministisch und findet in iterativen Rekonstruktionsverfahren Verwendung.

Projektionsrauschen in simulierten Datensätzen Das Projektionsrauschen der Simulationen wird nach der Datensimulation durch Poisson-verteilte Zufallsvariablen additiv berechnet. Wenn es nicht anders angegeben wird, werden in den in dieser Arbeit verwendeten Simulationsauswertungen ungeschwächte Intensitäten von 1000 Photonen pro Detektorpixel angenommen. Die simulierten Daten werden entsprechend skaliert und eine Realisierung des Poisson-Rauschens entsprechend der transmittierten Intensität berechnet.

2.3 Simulations- und Mess-Phantome

Da der Umfang unterschiedlicher Effekte, die in dieser Arbeit behandelt werden, weitreichend ist, kann kein einheitliches Testphantom herangezogen werden. Insbesondere bei Messdatensätzen musste darauf geachtet werden, artefaktbildende Einflüsse auf den Effekt zu beschränken, der behandelt werden soll. In der folgenden Übersicht werden daher nur Simulationsparameter und Phantome beschrieben, die aufgrund ihrer allgemeinen Verwendbarkeit in mehreren Kapiteln Anwendung finden. Spezialisierte Messungen und Phantome werden in den entsprechenden Unterkapiteln beschrieben.

Simulationen dienen der Verifikation der Rekonstruktionsverfahren unter kontrollierbaren Bedingungen. Hier werden zwei allgemeine Simulationsphantome vorgestellt:

Lochplatten-Phantom Dieses Phantom entspricht den in [11] beschriebenen Spezifikationen und besteht aus einem Monomaterial-Quader mit Bohrungen. Das Phantom ist in

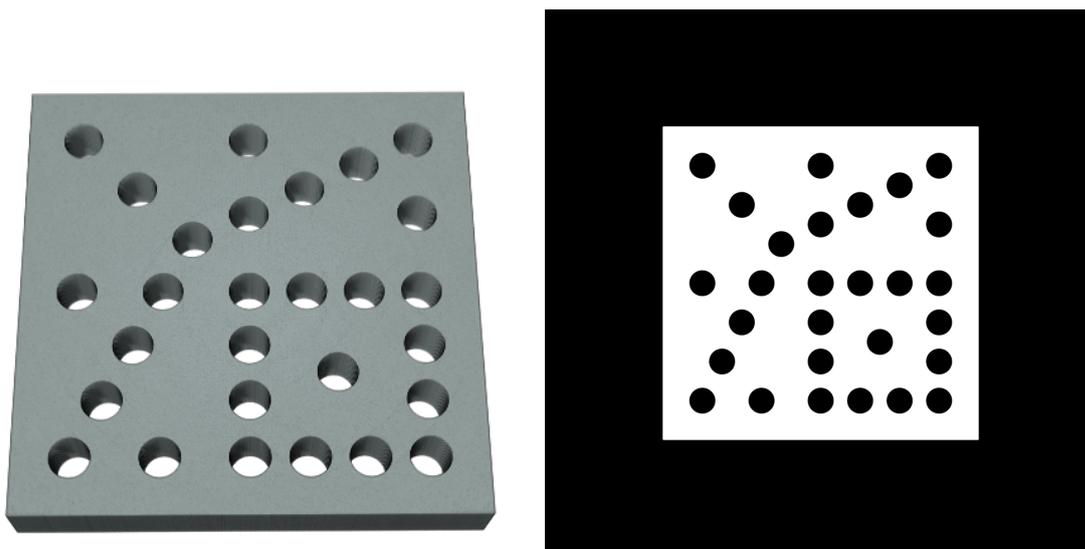


Abbildung 2.3: Dreidimensionale Ansicht und Schnittbild des Lochplattenphantoms. Es besteht aus einem Einfachmaterial mit Bohrungen, die asymmetrisch um den Drehmittelpunkt, der in der Mitte des Objekts simuliert wird, angeordnet sind.

Abb. 2.3 dargestellt. Die Bohrungen sind asymmetrisch um die Drehachse angeordnet, so dass trotz guter Auswertbarkeit der Quaderkanten und Bohrungen Symmetrie-Effekte durch die Kegelstrahl-CT vermieden werden können. In Tab. 2.2 werden die Aufnahmeparameter für den Standardfall zusammengefasst. Parameter, die davon abweichen werden in den entsprechenden Kapitel gesondert angeführt.

	Parameter	Wert
Phantom	Quader-Größe	48x48 mm
	Bohrungsdurchmesser	4 mm
	Bohrungen	28
	Material	Aluminium
Aufnahme	SOD	287,1 mm
	SDD	1040 mm
	Anzahl Projektionen	1000
	Winkelbereich	0° – 359,64°
Quelle	Spektrum	monoenergetisch 225 kV
	Detektor	
	Größe	Zeile 1024 Pixel
	Pixelgröße	0,3 mm x 0,3 mm

Tabelle 2.2: Simulationsparameter Lochplatten-Phantom

Die Simulation des Phantoms erfolgt mit einem voxelbasierten Vorwärtsprojektor, der auch für die Rekonstruktion verwendet wird. Es wird eine 16-fache intensitätsbasierte (siehe Kap. 5.2) Überabtastung der Detektorpixel verwendet, um die Projektion der Messwerte realistisch anzunähern. Für das zur Projektion verwendete Voxelraster wird keine erhöhte

Abtastung als die zu rekonstruierende Auflösung verwendet, da eine Vergleichbarkeit zur Referenz nur dann geeignet möglich ist, wenn das für die Simulation verwendete Raster keiner Interpolation unterliegt. Auf das Prinzip der Überabtastung der Detektorpixel und Volumenvoxel wird in Kap. 3.3.1 näher eingegangen.

Multimaterial-Phantom Auch wenn das oben beschriebene Lochplattenphantom mit einem polyenergetischen Spektrum simuliert wird, kann nur eine Materialeigenschaft simuliert werden. Aufgrund der einfachen Herstellbarkeit für reale Messversuche wird daher als Multimaterialphantom eine Aluminiumscheibe simuliert, die Einsätze aus Messing, Eisen und dem Kunststoff PMMA enthält. Eine Darstellung ist in Abb. 2.4, die Standard-Simulationsparameter in Tab. 2.3 gegeben. Die Simulation des Phantoms erfolgt

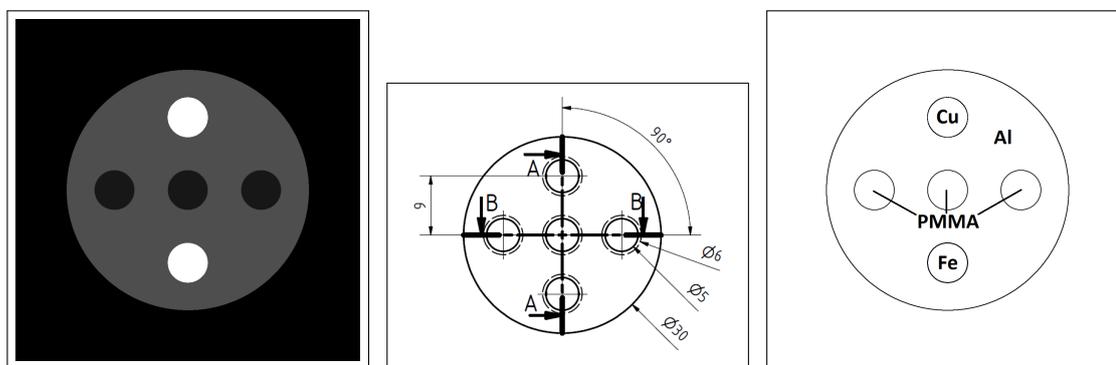


Abbildung 2.4: Schnittbild des Multimaterialphantoms (links, Grauwertspreizung: (0-2)). Kupfer und Eisen liegen links außerhalb des in der Grauwertspreizung darstellbaren Bereichs. Die Größen in Millimeter sowie die Anordnung der Materialien werden mittig und rechts als schematische Darstellungen gezeigt.

	Parameter	Wert
Phantom	Durchmesser Scheibe	30 mm
	Durchmesser Stifte	5 mm
Aufnahme	SOD	250 mm
	SDD	2500 mm
	Anzahl Projektionen	1000
	Winkelbereich	0° – 359,64°
Quelle	Spektrum	polyenergetisch, 160 kV / 220 kV unterschiedliche Vorfilter nach Anwendungsbereich
	Detektor	
	Größe	Zeile 1024 Pixel
	Pixelgröße	0,3 mm x 0,3 mm

Tabelle 2.3: Simulationsparameter Multimaterial-Phantom

durch den Vorwärtsprojektor des in Kap. 5.3.1 als segmentierungsbasiert beschriebenen Rekonstruktionsmodells.

Das zuletzt beschriebene Multimaterialphantom ist einfach als reales Objekt zu fertigen und dient daher in einigen Kapiteln als gemessenes Testphantom. Abb. 2.5 zeigt das Phantom mit eingesetzten Materialstiften. Die Kombination von Materialien wird dabei dem jeweiligen Problem angepasst. Ohne eingesetzte Stifte dient das Phantom für Einfachmaterial-Messungen. Die Materialeigenschaften der verwendeten Legierungen unterscheiden sich von den simulierten Zusammensetzungen. Dies trifft insbesondere auf das verwendete Aluminium zu, das als EN AW-2007 bezeichnet wird. Die über die von Hersteller angegebene Spezifikation dieses Materials hinausgehende Zusammensetzung wurde durch energiedispersive Röntgenspektroskopie (EDX) bestimmt. Die in Abb. 2.5 angegebenen Anteile von Kupfer und Blei bedingen relevante Abweichungen der angenommenen Absorption im Röntgenbereich. Das Aluminium wird im Folgenden als AlCuPb oder als industrielles Aluminium referenziert. Statt des Eisens wurde Stahl verwendet.



Element	Massenanteil (%)
Al	92,85
Cu	3,99
Pb	0,73
Mn	0,67
Fe	0,64
Si	0,58
Mg	0,53

Abbildung 2.5: Links: Umsetzung des Multimaterialphantoms mit eingesetzten Stiften. Rechts: Tabelle der durch EDX Analyse ermittelten Zusammensetzung des Aluminiums. Die hohen Kupfer- und Blei-Anteile bewirken signifikante Absorptionsunterschiede im Vergleich zu reinem Aluminium.

2.4 Qualitätsmaße und Bewertung von Rekonstruktionen

Qualitätsmaße zur Bildbewertung werden häufig nicht einheitlich, sondern fallspezifisch eingesetzt, denn insbesondere bei der Rekonstruktion realer Daten existiert kein Referenzdatensatz, an dem das Bild bewertet werden kann. Zum Test von Algorithmen, Aufnahme-prozeduren und Darstellungsvarianten kann ein unbekanntes Objekt in hoher und niedriger Auflösung gemessen und der niedrig aufgelöste Datensatz im Vergleich beurteilt werden. Steht nur ein Datensatz zur Verfügung, können ebenfalls Maße angesetzt werden, die das Rauschen und die Kantengenauigkeit beurteilen. Dafür werden in dieser Arbeit insbesondere die Shannon-Entropie und die Linienpreisfunktion an einer Kante bestimmt. Diese setzen allerdings Vorwissen über das gemessene Objekt - wie Bildbereiche nahezu konstanten Werts beziehungsweise scharfe Übergänge - voraus.

Bei Simulationen, deren Datengrundlage bekannt ist, kann der quadratische Abstand der Volumendaten oder die strukturelle Ähnlichkeit (SSIM - „structural similarity“) berechnet werden.

Im Zusammenhang der iterativen Rekonstruktion kann ebenfalls der Abstand der Vorwärtsprojektion zur Messung beurteilt werden. Da diese Maße Grundlage der Optimierungsfunktionen der iterativen Verfahren sind, bieten sich die Log-Likelihood-Funktion gemäß der Poissonverteilung (Kostenfunktion statistischer Verfahren) oder die L2-Norm des Abstands der Strahlsummen (Kostenfunktion der ART-Verfahren) an.

Entropie Die Informationsentropie eines Datensatzes nach Shannon ist eine histogrammbasierte Bewertungsmethode. Diese wird auf Formaten einer endlichen Zeichenzahl berechnet. Da die meisten Daten in Gleitkommadarstellung vorliegen, wird die Anzahl der Stützstellen des Histogramms festgelegt (in allen in dieser Arbeit verwendeten Beispielen wird die Anzahl auf 2^{16} festgesetzt) und die Daten von ihrem Minimum bis Maximum in das Histogramm eingeordnet. Aus dem normierten Histogramm p (Einträge p_v mit $v = 1 \dots N$) erfolgt die Berechnung des auf die maximal mögliche Entropie H_{\max} normierten Werts (siehe dazu auch [12]):

$$H_{\text{norm}} = - \frac{\sum_v^N p_v \log_2 p_v}{\log_2 H_{\max}} \quad (2.1)$$

Linienpreisfunktion Der an einer als scharf angenommenen Kante gemessene Übergang wird auch als Kantenspreisfunktion (ESF -“edge spread function“) bezeichnet. Die Kantenspreisfunktion ist damit die Antwort des Abbildungssystems auf eine Sprungfunktion. Die Linienpreisfunktion (LSF) kann als Ableitung der Kantenspreisfunktion berechnet werden und stellt eine Richtung der mehrdimensionalen Punktpreisfunktion (PSF) dar. Während LSF und PSF im Folgenden vornehmlich zur Bewertung der Szintillatorunschärfe eingesetzt werden, können auch Rekonstruktionsdaten mit bekannten scharfen Übergängen damit bewertet werden.

Quadratische Abweichung Die Varianz der Differenz zweier Datensätze (Eingangsdatensatz $\vec{\mu}$ und Referenzdatensatz $\vec{\mu}_{\text{ref}}$) entspricht deren für alle Voxel μ_j quadratisch gewichteter Abweichung. Durch die quadratische Gewichtung werden im Gegensatz zum Betrag der Differenz große Abweichungen stärker berücksichtigt. Sie kann berechnet werden durch:

$$\sigma = \sqrt{\sum_j^{N_{\text{Voxel}}} (\mu_j - \mu_{\text{ref},j})^2} \quad (2.2)$$

Die quadratische Abweichung stellt damit ein auf Vorwissen basierendes Maß dar, das dann Verwendung findet, wenn - wie im Fall von Simulationsdaten - ein Referenzdatensatz vorliegt, mit dem das Ergebnis $\vec{\mu}$ verglichen werden kann. Eine andere Möglichkeit einer solchen Bewertung stellt beispielsweise der Structural-Similarity („SSIM“-Index dar, der die Einflussfaktoren der Absolutheit, des Kontrastes und der strukturellen Vergleichbarkeit als gewichtete Faktoren einbezieht (siehe dazu z.B. [13]).

Standardabweichung Obwohl sehr ähnlich zur quadratischen Abweichung kann ein Differenzmaß nicht nur zwischen dem Rekonstruktionsbild und einem Referenzbild, sondern auch innerhalb eines Rekonstruktionsbilds $\bar{\mu}$ verwendet werden. Die Standardabweichung innerhalb eines bestimmten Voxelbereichs von N_{Voxel} Voxeln oder des gesamten Rekonstruktionsbilds wird hier definiert als:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Voxel}} - 1} \sum_j^{N_{\text{Voxel}}} (\mu_j - \bar{\mu})^2} \quad (2.3)$$

$$\text{mit : } \bar{\mu} = \frac{1}{N_{\text{Voxel}}} \sum_j^{N_{\text{Voxel}}} \mu_j \quad (2.4)$$

Wird dieses Maß auf einen bestimmten Voxelbereich angewendet, von dem bekannt ist, dass konstante Schwächungskoeffizienten vorliegen, gibt die Standardabweichung ein Maß des Rauschens oder ein Maß von Artefakten an, die die Einheitlichkeit der rekonstruierten Werte beeinflussen.

Konvergenzmaße Die Konvergenzmaße werden nicht mit Hilfe des fertigen Rekonstruktionsbildes berechnet. Die Konvergenz iterativer Algorithmen wird bestimmt durch den Wert ihrer Kostenfunktion. Dafür werden die Vorwärtsprojektionen \bar{y}_i mit den Messdaten y_i verglichen. In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden zwei unterschiedliche Optimierungsfunktionen verwendet, deren Konvergenzmaß auch gegenseitig als Beurteilungskriterium dienen kann.

Die Kostenfunktion der ART-artigen Algorithmen (siehe 3.3.2) ist die L2-Norm der Differenz zwischen vorwärtsprojizierter ($A_i\mu$, siehe auch Gl. 3.14) und gemessener Strahlsumme $S_i = \ln\left(\frac{y_{i,0}}{\bar{y}_i}\right)$ (siehe Lambert-Beer-Gesetz Gl. 3.1). Die Maßzahl für alle Strahlen $i = 1 \dots N_{\text{strahl}}$ berechnet sich also zu:

$$L_{\text{ART}} = \sum_i^{N_{\text{strahl}}} l_{\text{ART},i} = \sum_i^{N_{\text{strahl}}} \left(\ln\left(\frac{y_{i,0}}{\bar{y}_i}\right) - \sum_j a_{ij}\mu_j \right)^2 \quad (2.5)$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist die Kostenfunktion statistischer Rekonstruktionsmethoden. Diese kann, wie in Kap. 3.3.3 beschrieben, angegeben werden als:

$$L = \sum_i^{N_{\text{strahl}}} l_i = \sum_i^{N_{\text{strahl}}} y_i \ln(\bar{y}_i) - \bar{y}_i \quad (2.6)$$

Die Kostenfunktion l_i eines Strahls i hat ihr Maximum an der Stelle $\bar{y}_i = y_i$. L ist somit - zur besseren Darstellbarkeit - als Differenz zum Maximum L_{max} angebbar. Die Funktion ($l_{\text{max},i} - l_i$) für einen einzelnen Strahl i ist in Abb. 2.6 im Vergleich zu $l_{\text{ART},i}$ für einen Strahl mit gemessener, ungeschwächter Intensität $y_i = 1000$ als Funktion des vorwärtsprojizierten Werts \bar{y}_i aufgetragen. Die Konvergenzmaße werden im Zusammenhang der in dieser Arbeit verwendeten Beispiele als Funktion der Iterationszahl aufgetragen, um die Konvergenz der

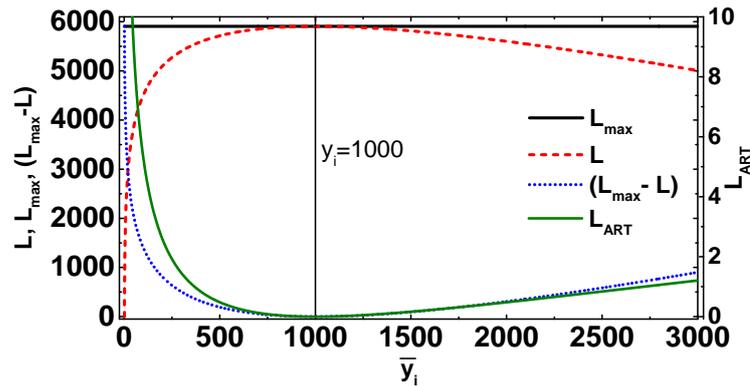


Abbildung 2.6: Konvergenzmaße L und L_{ART} als Funktion des vorwärtsprojizierten Werts \bar{y}_i für einen einzelnen, ungeschwächten Strahl der Intensität $y_i = 1000$. Das Maß $L_{max} - L$ wird aufgrund der besseren Darstellbarkeit gewählt.

verwendeten Algorithmen zu bewerten. Neben dem Konvergenzmaß selbst kann daher auch der Gradient des Maßes zur Bewertung verwendet werden.

Rekonstruktionsartefakte

Als Artefakte einer Schnittbildrekonstruktion werden Bildanteile bezeichnet, die nicht Teil des gemessenen Objekts sind. Diese Definition unterscheidet sich insbesondere im Hinblick modellbasierter Rekonstruktionsverfahren davon, Artefakte als Anteile des Rekonstruktionsbildes zu beschreiben, die nicht Teil der Messung sind. Bildveränderungen durch Streustrahlung oder Strahlaufhärtung gehören zur Messung und wären damit nicht als Artefakte zu nennen. Im Folgenden werden Bildanteile als Artefakte bezeichnet, wenn diese keinem Anteil des gemessenen oder simulierten Objekts entsprechen. Damit werden nicht nur durch das Rekonstruktionsverfahren, sondern auch durch das Rekonstruktionsmodell eingebrachte Bildfehler vom Begriff des Artefakts erfasst.

Typische zur Beschreibung von Artefakten der CT-Bildgebung verwendete Begriffe sind Streifen-Artefakt, Abschattungs-(auch „Cupping“-)Artefakt, Teilvolumenartefakt oder Bewegungs-Artefakt, sowie eine Vielzahl weiterer Bezeichnungen, deren Bedeutung beispielsweise zusammenfassend in [1] beschrieben ist.

Darstellung von Rekonstruktionsbildern und Angabe der Grauwertspreizung

Die Interpretation von Schnittbildern eines Rekonstruktionsergebnisses ist stark abhängig von der Darstellung der Grauwerte. Diese Grauwerte können durch die Angabe von Grenzen unterschiedlich auf den Bereich der im Bild vorhandenen Schwächungskoeffizienten verteilt oder auf einer nicht-linearen Skala gewichtet werden. In den in dieser Arbeit verwendeten Darstellungen der Rekonstruktionsergebnisse wird eine lineare Gewichtung der Grauwerte verwendet. Die obere (G_{oben}) und untere (G_{unten}) Grenze der Grauwertspreizung werden in der Form „(G_{unten} - G_{oben})“ zu den Abbildungen angegeben. Die Einheit der angegebenen Werte ist $\frac{1}{cm}$.

Kapitel 3

Algorithmik computertomographischer Rekonstruktion

Die Algorithmik der Schnittbildrekonstruktion kann die analytische Lösung des inversen Problems sein, wie sie für parallele Strahlen direkt aus den Fourier-Schnitt-Theorem abzuleiten ist. Sie kann sich aber auch als statistisches Modell - wie die in dieser Arbeit verwendete Poisson-Verteilung - als Basis einer Kostenfunktion für iterative Verfahren darstellen. In diesem Kapitel wird der Weg vom Prinzip der analytischen Rekonstruktion hin zum Design iterativer Methoden beschrieben. Es werden die Herleitungen numerischer Verfahren angegeben, die sich zur Lösung des Rekonstruktionsproblems eignen. Die Lösungen werden am Beispieldatensatz getestet und nach den im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Qualitätsmaßen sowohl auf Basis der Projektionen als auch der Rekonstruktionsergebnisse verglichen. Mit Hilfe der daraus generierten Ergebnisse kann die Wahl des verwendeten Algorithmus begründet werden. Die Wahl einer Variante des Vorwärts- und Rückprojektors legt das Grundgerüst einer Rekonstruktionsmethode fest, die durch das in Kap. 4 entwickelte Modell in Kap. 5 erweitert werden kann. Regularisierung ist ein essentieller Bestandteil iterativer Rekonstruktionsverfahren, der es erlaubt Vorwissen, das über die Messdaten hinausgeht, in den Rekonstruktionsprozess einzubringen. Daher werden im Anschluss an die Wahl des Algorithmus Regularisierungsmethoden untersucht, die das Gerüst des vorgestellten Verfahrens erweitern. Das Basismodell wird darüber hinaus durch den Vorschlag eines Abbruchkriteriums vervollständigt, das den Automatisierungsgrad des iterativen Ablaufs erhöht. Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse bewerten zu können, wird innerhalb dieses Kapitels weitestgehend auf die Verwendung von Messdaten verzichtet und die Gegenüberstellung der Ergebnisse wird auf Basis simulierter Daten durchgeführt.

3.1 Prinzip der Schnittbildrekonstruktion

Die Schnittbildrekonstruktion in der Röntgen-Computertomographie entspricht einer Umrechnung der aus unterschiedlichen Winkeln durch einen Schnitt der Probe gemessenen Absorption in auf Voxel verteilte Schwächungskoeffizienten. Dabei wird im Allgemeinen angenommen, dass sich die Absorption im Objekt mit Hilfe des Lambert-Beer'schen Gesetzes beschreiben lässt (siehe Kap. 4.3.3). Dieses weist einer ungeschwächten Strahlungsintensität $y_{i,0}$ mit Hilfe der Schwächungskoeffizienten $\mu(\vec{x})$ an Orten \vec{x} auf der Strecke W entlang des Strahls eine geschwächte Intensität y_i zu:

$$y_i = y_{i,0} e^{-S} = y_{i,0} e^{-\int_{\vec{x} \in W} \mu(\vec{x}) d\vec{x}} \quad (3.1)$$

Durch die Abhängigkeit der einheitenlosen Größe y_i vom Skalierungsparameter $y_{i,0}$ kommt der Intensität ohne dessen Angabe keine physikalische Bedeutung zu. Die gesuchte Größe der CT-Rekonstruktion ist der Schwächungskoeffizient μ , angegeben in reziproken Längeneinheiten. Neben der Ortsabhängigkeit ist μ dabei materialspezifisch und energieabhängig -

Eigenschaften, die insbesondere in modellbasierten Rekonstruktionsmethoden eine wichtige Rolle spielen. Mit Hilfe der Computertomographie kann bei bekannter Energie also aus Rekonstruktionsdaten auf Materialeigenschaften (Materialtyp, Dichte) geschlossen werden.

Der Messprozess bei der Röntgen-Computertomographie mit Hilfe paralleler Strahlen kann mathematisch durch die Radontransformation \mathfrak{R} beschrieben werden:

$$S = \mathfrak{R}\mu(\vec{x}) = \int_{x \in W} \mu(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.2)$$

Die Radontransformierte einer Funktion $\mu(\vec{x})$ entspricht also dem Integral im Exponenten der Lambert-Beer'schen Funktion, ein Anteil der im Zusammenhang der diskreten Darstellung in der Rekonstruktionsalgorithmik auch als *Strahlsumme* S bezeichnet wird.

Stellt man das Integral in Gleichung 3.2 in einem unter dem Winkel θ gedrehten, zu den Strahlen parallelen Koordinatensystem $(\eta(\vec{x}), \xi(\vec{x}))$ dar, gilt:

$$S_\theta = \int_{\eta \in W} \mu(\eta(\vec{x}), \xi(\vec{x})) d\eta \quad (3.3)$$

W bezeichnet darin die im Rekonstruktionsraum durchstrahlte Strecke. Die zweidimensionale Darstellung der $y(\theta, \xi)$ wird als Sinogramm bezeichnet. In Hinblick auf die Rücktransformation der Radontransformierten mit Hilfe der gefilterten Rückprojektion spielt das Fourier-Schnitt-Theorem eine entscheidende Rolle. Dieses wird einsichtig, wenn die radontransformierten Werte S_θ fouriertransformiert dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1D}(S_\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi \quad \underbrace{\text{siehe Gl. 3.3}}_{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\eta \in W} \mu(\eta(\vec{x}), \xi(\vec{x})) e^{-2\pi i q \xi} d\eta d\xi \quad (3.4) \\ &\underbrace{\text{kompakter Träger}}_{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta(\vec{x}), \xi(\vec{x})) e^{-2\pi i q \xi} d\eta d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\vec{x}) e^{-2\pi i q \xi(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = \left(\mathcal{F}_{2D}(\mu(\vec{x})) \right)_\theta \end{aligned}$$

Dabei wurde das Linienintegral entlang η unter der Annahme außerhalb von W auf Null abfallender Werte bis unendlich erweitert (Annahme eines kompakten Trägers). Die Darstellung zeigt, dass die eindimensional Fouriertransformierte der Messwerte der zweidimensional fouriertransformierten Darstellung des Schnittbildes μ unter dem Winkel θ entsprechen. Dieser als Fourier-Schnitt-Theorem bezeichnete Zusammenhang erlaubt eine Rücktransformation mittels der Fouriertransformation der Messwerte.

Die Messwerte realer Aufnahmesysteme liegen nicht als Funktionen, sondern diskret im Winkel und in der Abtastung der Detektorwerte vor. Die Bedingungen, die an die Geometrie des Aufnahmesystems gestellt werden, wurden bereits in Kap. 2 behandelt. Wie für alle diskret abgetasteten Signale gilt das Shannon-Nyquist-Kriterium für eine vollständige Abbildung des originalen Signals. Diesem Kriterium folgend (vgl. [1]) muss die Abtastung

mit Frequenz ω bei mindestens doppelter maximaler Signalfrequenz u_{\max} erfolgen:

$$\omega > 2u_{\max} \quad (3.5)$$

Die Abtastfrequenz entspricht der reziproken Pixelgröße $\frac{1}{d_{\text{Det.}}}$. Damit ist die maximale Auflösung der Rekonstruktion auf die halbe Detektorauflösung begrenzt.

$$\frac{1}{d_{\text{Det.}}} = \omega > 2u_{\max} = \frac{2}{d_{\max}} \quad (3.6)$$

Die notwendige Anzahl an Projektion N_p lässt sich ebenfalls aus dieser Überlegung abschätzen, da der maximale Abstand der Detektorgeraden im Frequenzraum dem Frequenzabstand in der Projektion entsprechen sollte (siehe [1]). Damit lässt sich zeigen:

$$N_p \approx M \quad (3.7)$$

M entspricht dabei der Anzahl von Detektorelementen in einer Detektorzeile.

3.2 Gefilterte Rückprojektion

Die gefilterte Rückprojektion basiert nicht direkt auf dem oben beschriebenen Prinzip des Fourier-Schnitt-Theorems. Eine direkte Umsetzung würde die Mittelung beziehungsweise Interpolation von Werten im 2D-Frequenzraum des Rekonstruktionsbildes beinhalten. Aus der inversen Fouriertransformierten wäre eine Rekonstruktion zu erhalten, die aufgrund der Mittelungen und Interpolationen aber stark auf Rauschen der Projektionsdaten reagieren würde.

Die Rückprojektion der Messdaten bietet eine numerisch stabile Methode, die Rekonstruktion zu berechnen. Die einfache, ungefilterte Rückprojektion in einem Parallelstrahlensystem lässt sich als Rückverschmierung der gemessenen Strahlsummen s_i , also im diskreten Fall als Summe aller Detektorpixel für einen Rekonstruktionsvoxel beschreiben:

$$s_i(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) = \ln \left(\frac{y_{i,0}}{y_i(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} \right) \quad (3.8)$$

$$\mu(x,y) = \frac{\pi}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} s_i(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \quad (3.9)$$

Die gefilterte Rückprojektion wird im folgenden kurz für unterschiedliche Aufnahmegeometrien beschrieben. Der Unterschied gefilterter und ungefilterter Rückprojektion im Fall paralleler Strahlen ist am Beispiel des Lochplatten-Phantoms in Abb. 3.1 dargestellt.

Parallelstrahlgeometrie Wie sich aus dem Fourier-Schnitt-Theorem ableiten lässt, liegen die Frequenzen der Projektionen auf Diagonalen durch den 2D-fouriertransformierten Bildraum. Kleine Frequenzen werden also bei einer einfachen Summe stärker gewichtet als

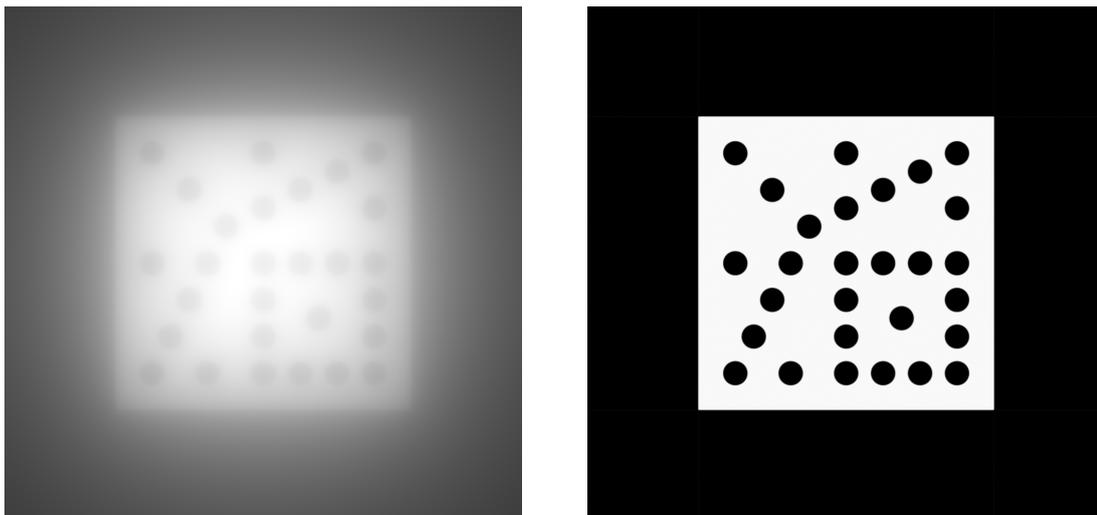


Abbildung 3.1: Unterschied zwischen gefilterter und ungefilterter Rückprojektion am Beispiel des Lochplatten-Phantoms. Der Filter entspricht einer Tiefpassfilterung der Projektionen. Links: Ungefilterte Rückprojektion. Rechts: Gefilterte Rückprojektion mit Shepp-Logan-Filter.

hohe Frequenzen. Eine einfache Lösung dieses Problems ist ein Hochpassfilter, der vor der Rückprojektion auf die Strahlsummen angewandt wird. Für die Parallelstrahlgeometrie kann die gefilterte Rückprojektion also dargestellt werden als:

$$\mu(x,y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} s_\theta(q) e^{2\pi i q \vec{\xi}_\theta(x,y)} |q| dq d\theta \quad (3.10)$$

Der Rampenfilter $G(q) = |q|$ kann durch Faltung der Strahlsummen auch direkt auf die nicht-fouriertransformierten Daten angewandt werden. Dabei wird der Filterkern in realen Anwendungen oft modifiziert, um die Bildschärfe auf den Anwendungsfall abzustimmen. Häufig eingesetzt wird dabei der Shepp-Logan-Filterkern [14]. Dieser begrenzt das Frequenzband mit einer Rechteckfunktion und senkt die Hochpass-Gewichtung bei hohen Frequenzen mit einer sinc-Funktion:

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \text{sinc}(\pi q) \quad (3.11)$$

Fächerstrahlgeometrie Die Parallelstrahlgeometrie findet nur bei Sychrotronmessungen näherungsweise Anwendung. Häufiger werden Geometrien verwendet, die auf divergenten Strahlen beruhen. Der zweidimensionale Fall ist dabei der Fächerstrahl, der beispielsweise bei der Verwendung von Detektorzeilen auftritt und dessen gefilterte Rückprojektion leicht verändert werden muss. So muss der Filterkern, abhängig vom betrachteten Abstand vom Detektormittelpunkt, verändert werden. Außerdem nimmt bei divergenten Strahlen die Intensität des Strahls quadratisch ab - ein Umstand dem über eine voxelabhängige

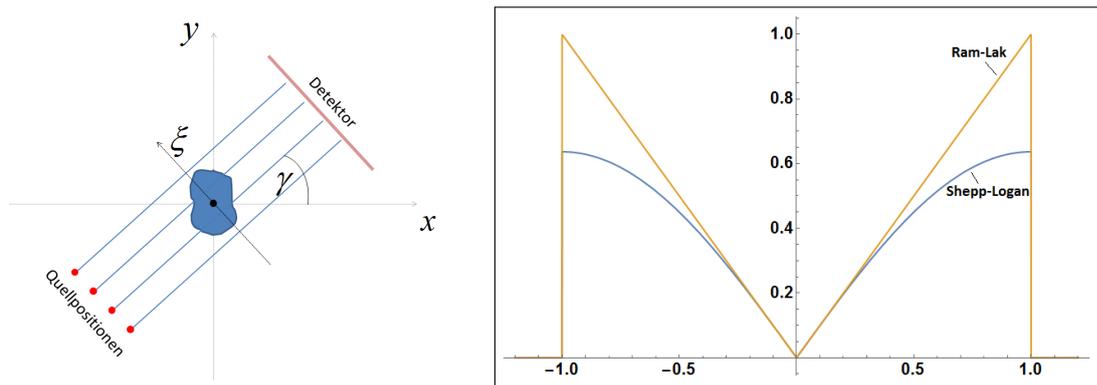


Abbildung 3.2: Links: Aufnahme und Schnittbilderstellung in Parallelstrahlgeometrie. Rechts: Filterkerne des Ram-Lak-Filters [15] (entspricht Rampenfilter (Hochpass) mit Bandbegrenzung) und des Shepp-Logan-Filters [14] für einen beispielhaften Frequenzbereich zwischen -1 und 1. Signalrauschen durch die Übergewichtung hoher Frequenzen kann durch den Shepp-Logan-Filterkern kompensiert werden.

Gewichtung im Rekonstruktionsraum Rechnung getragen werden kann:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\text{SOD}^2}{U^2}}_{\text{quadratische Gewichtung}} \left(\underbrace{\left(s_{\theta}(a) \frac{\text{SOD}}{\sqrt{\text{SOD}^2 + a^2}} \right)}_{\text{Filtergewichtung}} * g(a) \right) d\theta \quad (3.12)$$

Die Strecken U und SOD bezeichnen den Abstand der Quelle zum zu rekonstruierenden Voxel bzw. zum Drehmittelpunkt, projiziert auf das Lot zum Detektorpixel, dessen Abstand vom Mittelpunkt durch die Variable a beschrieben wird (siehe Abb. 3.3). Der Realraumfilter $g(a)$ wird durch Faltung angewendet.

Kegelstrahlgeometrie Wie in Kap. 2 beschrieben entspricht eine Kegelstrahlgeometrie nicht der Tuy-Smith-Vollständigkeitsbedingung. In der industriellen Computertomographie ist dieser Aufbau trotzdem der am häufigsten verwendete. Die gefilterte Rückprojektion muss in diesem Fall nicht nur die Divergenz in Rotationsrichtung, sondern auch die senkrecht zur Rotationsachse berücksichtigen. Wie bei einem Fächerstrahl Aufbau muss sowohl der Filter modifiziert, als auch die Rekonstruktion gewichtet werden. Dabei muss, neben dem Abstand vom Detektormittelpunkt in Zeilenrichtung a , auch der Abstand senkrecht zur Rotationsachse b für die Gewichtungen berücksichtigt werden:

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\text{SOD}^2}{U^2} \left(\left(\frac{\text{SOD}}{\sqrt{\text{SOD}^2 + a^2 + b^2}} s_{\theta}(a,b) \right) * g(a) \right) d\theta \quad (3.13)$$

3.3 Iterative Rekonstruktionsmethoden

Das Rekonstruktionsproblem ist ein schlecht gestelltes inverses Problem [16]. Bei einem inversen Problem liegt nur das Resultat einer Abbildung vor, aus dem nicht direkt auf die zu

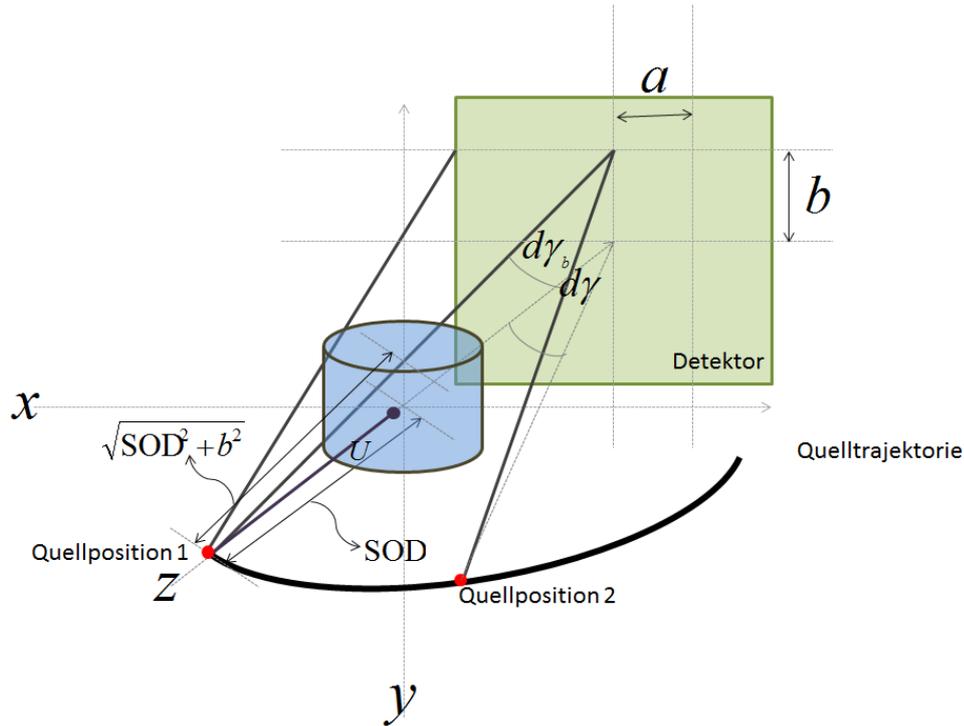


Abbildung 3.3: Rekonstruktion mit gefilterter Rückprojektion in Kegelstrahlgeometrie. Die Gewichtungen von Rekonstruktionsvolumen und Projektion hängen von den Abständen a und b (Detektorachsen) vom Detektormittelpunkt ab. U bezeichnet die Projektion des Abstandes zum Rekonstruktionsvoxel auf den Strahl zum mittleren Detektorpixel.

messende Größe geschlossen werden kann. Beschrieben werden kann eine solche Abbildung mit einem Operator A (mit Elementen a_{ij}) als:

$$A\mu = y \quad (3.14)$$

Im System der Tomographie stellen μ die Schwächungskoeffizienten des Bildes und y die vom Detektor gemessenen Werte dar. Dies kann nur dann durch einen Operator A^{-1} gelöst werden, wenn es sich um ein „gut gestelltes“ Problem handelt. Ein „schlecht gestelltes“ Problem liegt insbesondere dann vor, wenn die Lösung des inversen Problems nicht eindeutig ist (siehe [16]) - ein durch Photonenrauschen unvermeidbares Problem der CT.

Iterative Rekonstruktionsmethoden stellen Kurvenanpassungen („Fits“) in einem sehr großen Parameterraum dar. Die anzupassenden Funktionen werden als Vorwärtsprojektor bezeichnet und haben die Form des Lambert-Beerschen Gesetzes mit einer Strahlsumme, die von einer großen Anzahl von Parametern - den Schwächungskoeffizienten des Rekonstruktionsvolumens - abhängt. Die Kosten- bzw. Optimierungsfunktion zur Anpassung der Parameter an die Messwerte, also die im Rahmen der Kurvenanpassung an die Messdaten zu minimierende oder zu maximierende Funktion, kann auf mehrere Arten realisiert werden. Im Folgenden werden zwei Varianten der Optimierungsfunktion behandelt, deren Unterschied in Berücksichtigung der statistischen Natur der gemessenen Intensitätswerte liegt. Diese Kostenfunktionen können wiederum auf verschiedene Weisen extremalisiert werden, so dass eine große Anzahl von Algorithmen entsteht. Unterschiedliche Eigenschaften solcher

Fit-Algorithmen können in der Monotonizität der Konvergenz, der Konvergenzgeschwindigkeit, der Parallelisierbarkeit, der numerischen Stabilität (bei einer Lösung des Rekonstruktionsproblems mit eingeschränkter Maschinengenauigkeit), der Rechenzeit und der Speicheranforderung liegen [17]. Insbesondere multiplikative Lösungsverfahren unterscheiden sich von additiven Verfahren außerdem durch die gesicherte Positivität der rekonstruierten Werte bei Einsatz positiver Startwerte. Dies ist insbesondere bei Datensätzen zu beachten, die Phasenkontrast enthalten, welcher zu negativen Rekonstruktionswerten führen kann. Viele iterative Methoden können durch den Einsatz von *subsets*, also der Verwendung einer Untermenge aller Projektionen anstelle aller Daten in einem Updateschritt, beschleunigt werden.

Außerdem kann mit Hilfe von Regularisierung Vorwissen über die Probe mit in die Optimierung integriert werden. Im Bereich der statistischen Ansätze lässt sich dieses Vorwissen mit Hilfe eines Bayes-Schätzers integrieren. Solche Verfahren werden daher oft als „Maximum a posteriori“(MAP)-Verfahren bezeichnet.

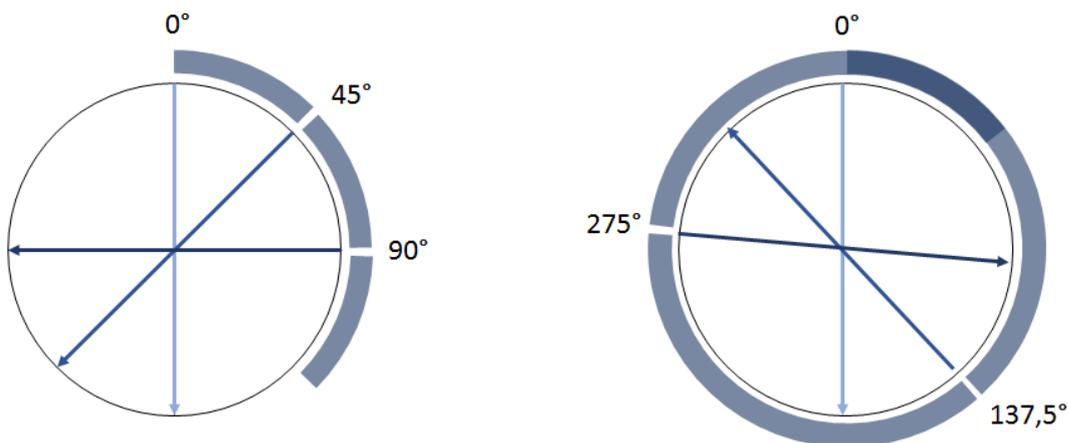


Abbildung 3.4: Projektionsreihenfolge: Eine serielle Reihenfolge (links) verlangsamt die Konvergenz. Hier wird der Ansatz der Verarbeitung von Projektionen mit $137,5^\circ$ Winkelunterschied (rechts) verfolgt. Während bei serieller Reihenfolge im gegebenen Beispiel nach der Verarbeitung von 3 Projektionen nur ein geringer Winkelbereich der Aufnahme für die Rekonstruktion verwendet wurde, wird im rechten Bild immer der maximale Winkelunterschied zu den vorangehenden Projektionen erreicht.

Projektionsreihenfolge Bei allen numerischen Lösungsverfahren, die nur einen Unterraum der Messdaten pro Update verwenden, spielt die Reihenfolge der Daten eine Rolle bei der Konvergenzgeschwindigkeit. Werden nacheinander mehrere Gleichungen verarbeitet, die sich zu ähnlich sind (also beispielsweise benachbarte Projektionen), wird die Konvergenz verlangsamt. Da dies nahelegt Projektionen mit möglichst großem Winkelabstand zu verarbeiten, existiert eine Vielzahl von Verarbeitungsschemata ([18], [19]). Ziel ist es sowohl den Abstand zur vorangegangenen Projektion als auch den zur Folgenden zu maximieren [20]. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz ist der einer Projektionsreihenfolge, deren Winkel auf Grundlage des goldenen Schnittes bestimmt werden und wird ähnlich zu [21] bearbeitet. Der goldene Winkel ($\approx 137,5^\circ$), also der kleinere Anteil bei der Teilung von 360° im goldenen

Schnitt, wird dabei unter Beachtung schon verwendeter Projektionen als Winkelfortschritt gewählt.

3.3.1 Projektoren

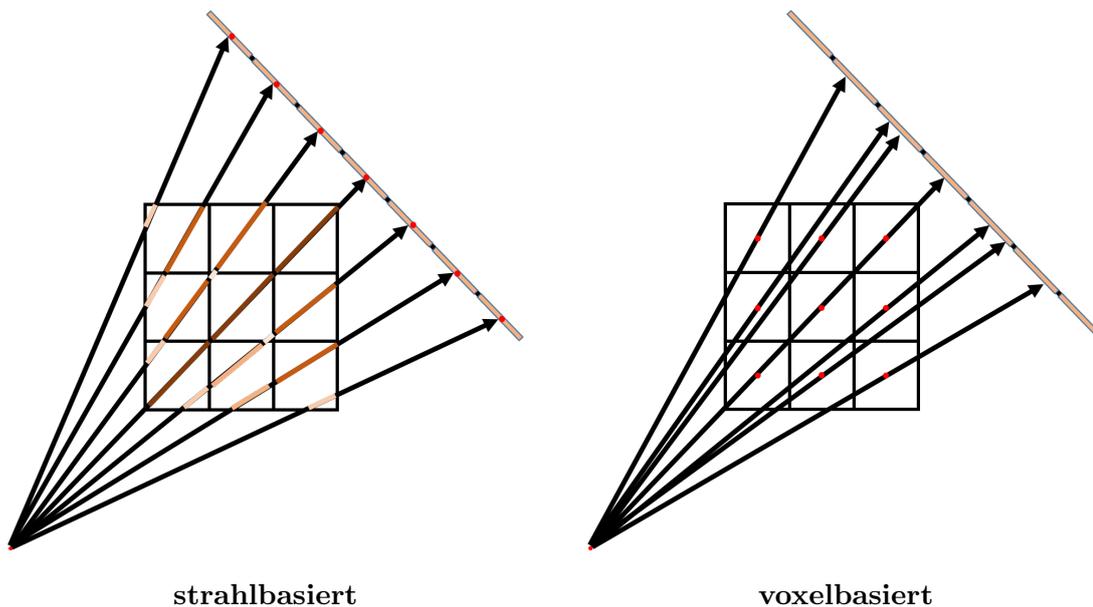
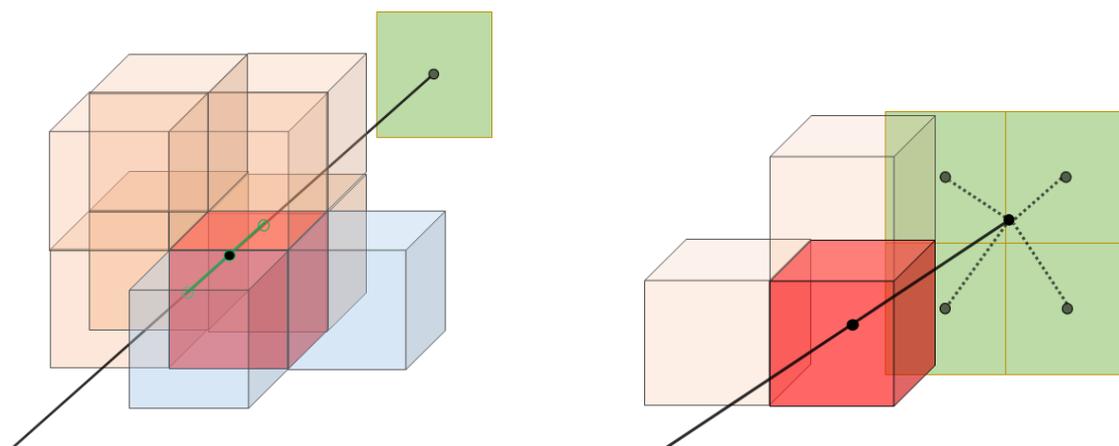


Abbildung 3.5: Darstellung der zwei verwendeten Projektorvarianten vereinfacht für den Fall einer eindimensionalen Detektorzeile. Die links farblich markierten Durchstrahlungslängen der Voxel unterscheiden sich von denen des voxelbasierten Projektors, bei dem der Strahl immer durch den Mittelpunkt des betrachteten Voxels berechnet wird. Während die Mittelung bei strahlbasierten Verfahren im Volumen stattfindet, werden bei volumenbasierten Projektoren Werte auf dem Detektor gemittelt.

Projektoren in der Rekonstruktionsalgorithmik stellen die Realisierungen der Operatoren A beziehungsweise A^{-1} aus Gl. 3.14 dar. Dabei werden im Fall des Vorwärtsprojektors A entlang eines Strahls Schwächungskoeffizienten gewichtet zu einer Strahlsumme addiert. Im Fall des Rückprojektors A^{-1} werden Werte eines virtuellen Detektors auf die Volumenvoxel verteilt. Die Gewichtung der Schwächungskoeffizienten erfolgt durch den Anteil der Fläche des durch den Strahl überstrichenen Bereichs eines Voxels zur Gesamtfläche.

Es existiert eine Vielzahl von Realisierungsmöglichkeiten dieser Operatoren, die insbesondere durch ihre Strahldefinition und die Definition des Flächenintegrals unterschieden werden. Einige Varianten werden im Folgenden genauer beschrieben:

Strahlbasierte Projektoren Bei strahlbasierten Projektoren wird der Mittelpunkt eines Detektorelements als Endpunkt einer Geraden betrachtet, die von der Quelle ausgeht. Diese Gerade wird innerhalb des betrachteten Volumens als Strahl definiert (siehe Abb. 3.5). Turbell (siehe [22]) verglich eine Vielzahl strahlbasierter Projektoren nach den Modellen von Siddon [23], Joseph [24], sowie nach dem Modell von Köhler [25] mit einem einfachen Ansatz konstanter Schrittweite, der die Schwächungskoeffizienten aus einer tri-linearen Interpolation errechnet. Während nach dem Siddon-Modell die Strahlängen durch ein Volumenvoxel als



(a) Interpolation des strahlbasierten Projektors im Volumen. Es erfolgt eine lineare Interpolation des Volumens am Mittelpunkt (schwarzer Punkt) der Strecke (grün) durch den betrachteten Voxel (rot). In die Interpolation werden die näherliegenden Nachbarn (gelb) einbezogen.

(b) Interpolation des voxelbasierten Projektors auf der Detektorfläche. Der betrachtete Voxel (rot) wird im Mittelpunkt geschnitten. Es wird linear zwischen den Detektorpixeln (grün) interpoliert.

Abbildung 3.6: Dreidimensionale Interpolation des strahlbasierten Projektors im Volumen und zweidimensionale Interpolation des voxelbasierten Projektors auf der Detektorfläche. Der das Volumen durchsetzende Strahl ist je als schwarze Linie markiert.

echte Längen berechnet und als Voxelwert direkt der im Array eingetragene Schwächungskoeffizient verwendet werden, wird im Modell nach Joseph eine Hauptrichtung entlang der Dimension festgelegt, die die größte Durchstrahlungslänge besitzt. Entlang weiterer Dimensionen wird linear interpoliert. Das Modell nach Köhler nutzt die Simpson-Regel zur Berechnung des Integrals. Für weitergehende Information wird auf [22] verwiesen und im Folgenden die Variante vorgestellt, die für weitere Betrachtungen als „strahlbasierter Projektor“ bezeichnet wird.

Die verwendete Definition eines strahlbasierten Projektors stellt eine Mischung der in [22] vorgestellten Modelle dar. Die Länge der Strecke, die ein Strahl in einem Voxel überstreicht, wird wie im Siddon-Modell direkt berechnet (siehe Farbkodierung des strahlbasierten Projektors in Abb. 3.5). Die Schwächungskoeffizienten werden in der Mitte der Strecke ausgelesen und durch lineare Interpolation im Volumen errechnet (siehe Abb. 3.6). Eine Flächennäherung zur Modellierung der endlichen Strahlbreite (siehe dazu Kap. 5.5) erfolgt durch Überabtastung, also durch eine Mittelung nach vielfacher Strahlberechnung.

Voxelbasierte Projektoren Bei voxelbasierten Projektoren wird die Strahldefinition so festgelegt, dass der betrachtete Voxel im Mittelpunkt geschnitten wird (siehe Abb. 3.5 und Abb. 3.6). Die Detektorelemente werden damit nicht in ihren Mittelpunkten, sondern an beliebigen Stellen vom Strahl getroffen. Zwischen den benachbarten Detektorelementen wird linear interpoliert. Eine Überabtastung zur Mittelung unterteilt die Voxel in O^3 Subvoxel, wobei O den Grad der Überabtastung darstellt.

Obwohl sich die Durchstrahlungslängen maximal um einen Faktor $\sqrt{3}$ unterscheiden können, wird die Schnittlänge in der verwendeten Implementierung für jedes Voxel berechnet.

Neben diesen beiden Projektionsverfahren wurde ein Projektionstyp vorgestellt (siehe [26]), der als besonders effizient hinsichtlich des Speicherzugriffs und somit besonders schnell in der Berechnung beschrieben wird. Da dessen Einfluss auf die Rechengenauigkeit im Rahmen dieser Arbeit nicht genauer untersucht werden konnte, wird hier aber auf eine genauere Betrachtung dieses Projektionstyps verzichtet.

Die Auswahl der vorliegenden Modelle wird durch deren Berechnungseffizienz bestimmt: Bei einer Vorwärtsprojektion wird eine Summe über Voxellemente für ein Detektorelement gebildet. In einer parallelen Verarbeitung der Projektionspixel treten in einem strahlbasierten Ansatz folglich keine konkurrierenden Schreibzugriffe auf den Speicher auf. Ein strahlbasierter Ansatz ist daher sowohl hinsichtlich der Berechnungszeit als auch der Speichereffizienz sinnvoll.

Ein Rückprojektor allerdings braucht in den meisten Fällen (eine Ausnahme bildet der Projektor der globalen Energiemodellierung in Kap. 5.3.1) kein Wissen über die „Vorgeschichte“ des Strahls, sondern kann für jeden Voxel separat berechnet werden. Hier erweist sich ein voxelbasierter Ansatz als effizienter.

In Abb. 3.7 wird die quadratische Abweichung der Rekonstruktionen zur Referenz (siehe Gl. 2.2) für einige Kombinationen von Überabtastung und Projektortyp über 1000 Iterationen anhand von Rekonstruktionen des Lochplatten-Phantoms gezeigt. Diese wurden sowohl ohne als auch mit Poisson-Rauschen berechnet (siehe dazu Kap. 2.2). Die Subsetgröße wurde zu 100 Projektionen gewählt. Variiert wurde der Rückprojektor, der voxelbasiert, strahlbasiert und beim voxelbasierten Projektor ohne bzw. mit zweifacher Überabtastung (also der Berechnung von 4 Strahlen pro Detektorpixel/Volumenvoxel, siehe dazu auch Kap. 5.2) realisiert wurde. Da implementierungsbedingt die mehrfache Abtastung des Vorwärts- und Rückprojektors im strahlbasierten Fall übereinstimmen muss, wurden gemischte Varianten in diesem Fall nicht mitberechnet. Der Vorwärtsprojektor wird immer strahlbasiert durchgeführt.

Die Auswertung (siehe Abb. 3.7) zeigt die hauptsächlichen Unterschiede bei der Genauigkeit des Vorwärtsprojektors. Ohne Rauschen wirkt sich eine höhere Überabtastung hierbei am stärksten auf das Ergebnis aus. Bei der Wahl des Rückprojektors ergeben sich nur geringe Unterschiede, die auch hinsichtlich der Überabtastung kaum Unterschiede zeigen. Wird mit Poissonrauschen gerechnet, zeigt ein voxelbasierter Rückprojektor die besseren Ergebnisse. Dies ist auf die stärkere Mittelung der Projektionswerte zurückzuführen, die sich durch die Interpolation auf der Detektorebene bei der Berechnung ergibt.

Da ein voxelbasierter Rückprojektor bei zusammenpassendem Verhältnis von Volumen- und Detektorgröße schneller berechnet werden kann als die strahlbasierte Variante, zeigt sich ein strahlbasierter Vorwärtsprojektor mit mehrfacher Abtastung und ein Rückprojektor ohne Überabtastung als geeignete Methode für eine genaue und schnelle Berechnung.

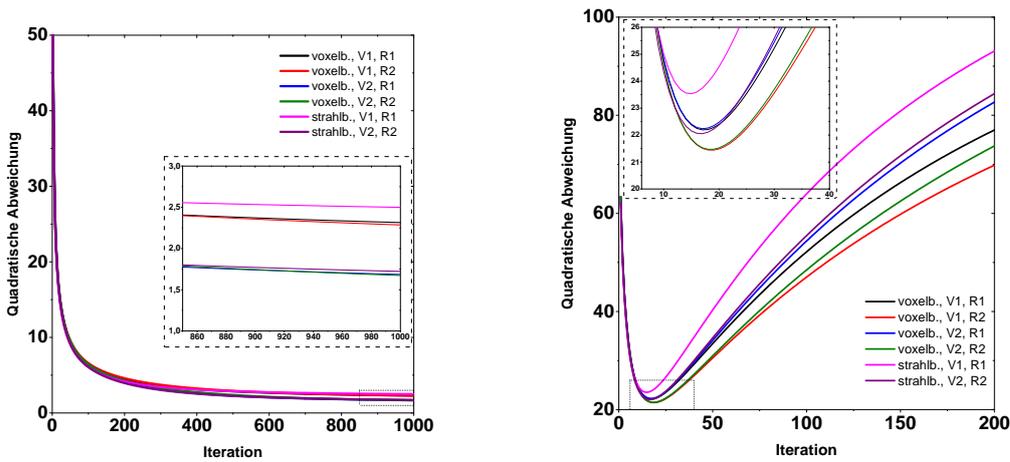


Abbildung 3.7: Vergleich der Projektoren nach der quadratischen Abweichung der Rekonstruktionen von der Referenz ohne (links) und mit (rechts) Poisson-Rauschen. Die Überabtastung der Projektoren wird mit V1/V2 für ein- bzw. zweifaches Oversampling des Vorwärtsprojektors und R1/R2 für ein- bzw. zweifaches Oversampling des Rückprojektors angegeben. Das beste Ergebnis zeigt die Kombination der Mehrfachberechnung des Vorwärtsprojektors und der Einfachberechnung der Rückprojektors (V1, R2).

3.3.2 OSSART

Die algebraische Rekonstruktionstechnik (Algebraic Reconstruction Technique - ART) ist ein Lösungsverfahren auf Basis der Verarbeitung von Strahlsummen $S_i = \sum_j a_{ij}\mu_j$. Die Strahlsummen werden mit den logarithmierten Messwerten verglichen. Bei ART wird das allgemein von Kaczmarz beschriebene Verfahren [27] zum Lösen dieses linearen Gleichungssystems verwendet. Die Lösung für eine Rekonstruktion μ^n bei Iteration n für einen Strahl mit aus der Messung berechneter Strahlsumme $s_i = \ln(\frac{y_{i,0}}{y_i})$ lautet:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \frac{a_{ij}(s_i - \sum_j a_{ij}\mu_j^n)}{(\sum_j a_{ij})^2} \quad (3.15)$$

λ bezeichnet einen Relaxationsparameter, der den Einfluss der Inkonsistenz der Daten und der Reihenfolge der verarbeiteten Strahlen minimiert. Das Update wird nacheinander für alle Strahlen aller Projektionen durchgeführt.

Eine hinsichtlich der Parallelisierbarkeit verbesserte Variante stellt die SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique) dar [28]. Dabei werden ganze Projektionen gleichzeitig in einem Updateschritt verwendet. Die im Folgenden beschriebene Variante stellt eine Abwandlung der SART dar, die als OSSART (Ordered Subset Algebraic Reconstruction Technique) bezeichnet wird. Diese verwendet Subsets (Untermengen aller Projektionen) an Stelle einer einzelnen Projektion pro Update-Schritt. Da Maximum-Likelihood Algorithmen häufig Subsets verwenden, kann dadurch leichter ein Vergleich gezogen werden. Die in [29]

angegebene Updategleichung lässt sich schreiben als:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \sum_{i \in S_M} \frac{a_{ij}}{\sum_{i \in S_M} a_{ij}} \frac{s_i - \sum_j a_{ij} \mu_j^n}{\sum_j a_{ij}}. \quad (3.16)$$

Dies wird in einem Updateschritt für alle Voxel j und alle Strahlen i ausgeführt, die zu Projektionen im Subset S_M gehören. Der Faktor λ bezeichnet wieder einen Relaxationsparameter.

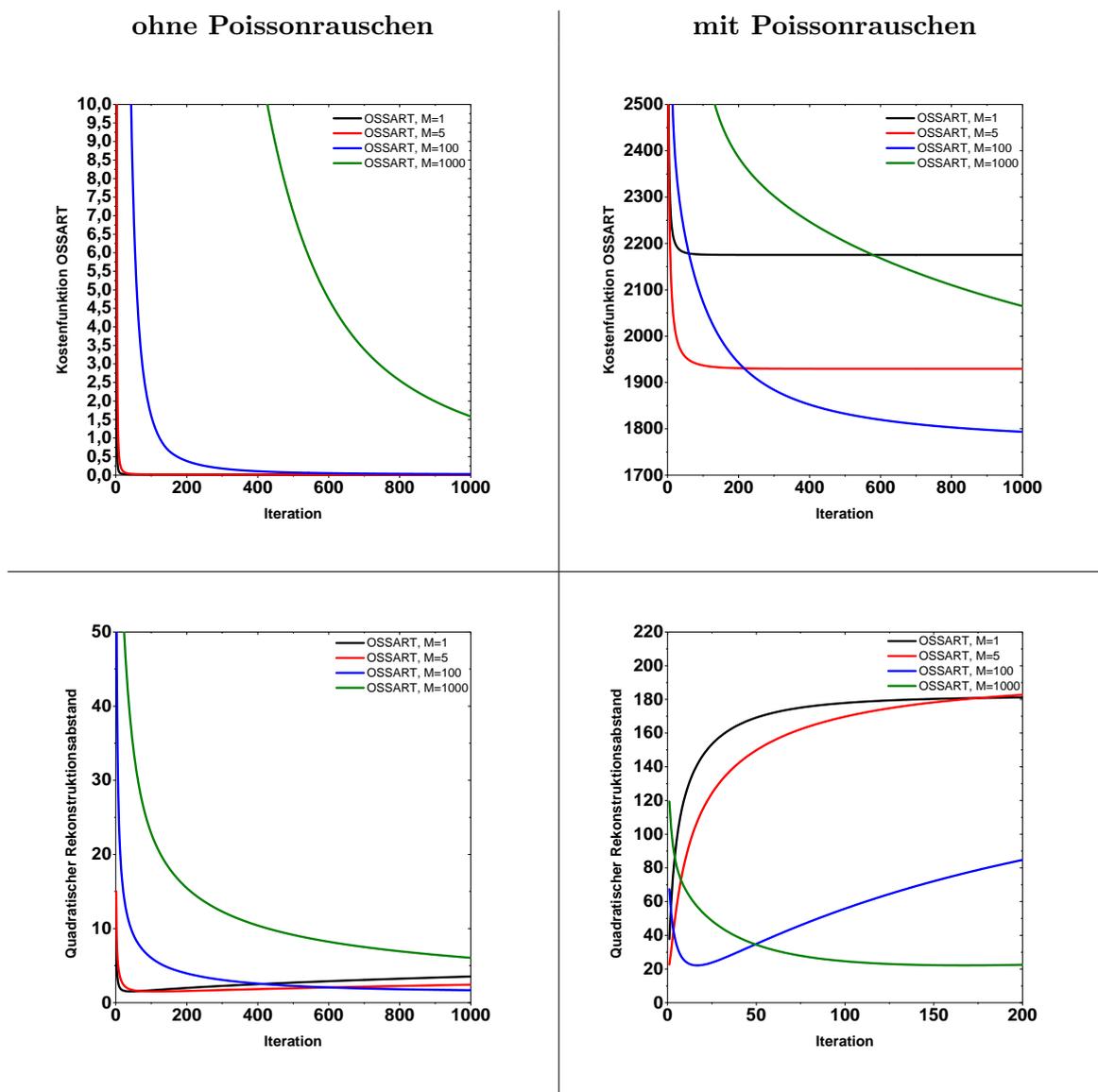


Abbildung 3.8: Quadratischer Abstand der Strahlsummen (Kostenfunktion der OSSART) und quadratischer Rekonstruktionsabstand an Simulationsdaten ohne Rauschen und mit Poissonrauschen (Rauschlevel siehe Kap. 2.2). Der Rekonstruktionsabstand mit Poissonrauschen wird zur besseren Darstellbarkeit nur für die ersten 200 Iterationen gezeigt. Die Auftragung der Kostenfunktion zeigt, dass die beste Konvergenz sowohl vom Rauschlevel als auch von der Subsetgröße abhängt. Bei Einfluss von Rauschen werden größere Subsets benötigt, die auch den Rekonstruktionsabstand verringern. Bei sehr kleinen Subsets zeigen sich auch ohne Poisson-Rauschen steigende Abweichungen von der Referenz.

Der Einfluss der Subsetgröße und damit auch der Unterschied in der Verwendung von OSS-ART oder SART ist in Abb. 3.8 dargestellt. Gezeigt sind die Fälle rauschfreier Projektionen und von Projektionen mit Poissonrauschen (siehe Kap. 2.2). Als Subsetgrößen M wurden 1, 5, 100 und alle (1000) Projektionen gewählt. Bei $M = 1$ entspricht das Update dem der SART. In diesem Fall wurde der Relaxationsparameter auf $\lambda = 0,5$ gesetzt, da bei größerem Relaxationsparameter nicht-monotones Verhalten der Gesamtkostenfunktion auftreten kann. Obwohl die Funktion für eine Projektion minimiert wird, steigt die Kostenfunktion aller Projektionen.

Dies zeigt auch ein Problem iterativer Verfahren bei zu kleiner Subsetgröße: Sind die Projektionen inkonsistent (zum Beispiel Projektionen mit Poisson-Rauschen), sinkt die Kostenfunktion nicht unter ein Minimum, das von der Subsetgröße abhängt. Diese unvollständige Optimierung zeigt sich auch im quadratischen Abstand zur Referenzrekonstruktion: Das Minimum wird bereits nach der ersten Iteration erreicht, es liegt bei niedrigeren Subsetgrößen höher und die rekonstruierten Werte entfernen sich schneller von der besten Lösung, da das Projektionsrauschen in jedem Update in die Rekonstruktion integriert wird. Dieser Effekt ist ebenfalls ohne Rauschen bei sehr kleinen Subsetgrößen und hohen Iterationszahlen beobachtbar und auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen. Der Unterschied der Betrachtung auf Projektionsbasis und der Betrachtung auf Rekonstruktionsbasis wird in Kap. 3.3.5 noch einmal dargestellt.

3.3.3 Maximum-Likelihood basierte Optimierung

Im Gegensatz zur Optimierung auf Basis der Strahlsummen kann ein Vergleich von Vorwärtsprojektion und Messung auch auf Basis der Intensitäten vorgenommen werden. Dieses Vorgehen bietet Vorteile hinsichtlich modellbasierter Rekonstruktionsvarianten, da additive Bestandteile des Modells, wie zum Beispiel Streustrahlung, einfach in die Vorwärtsprojektion integriert werden können. Grundlage bildet die Likelihood-Funktion der für die Projektionen angenommenen Poisson-Verteilung. Die Annahme einer Poissonverteilung beim Objektdurchgang kann für konstante und kleine Erfolgswahrscheinlichkeiten aus der Binomialverteilung genähert werden (siehe [30]). Die Binomialverteilung beschreibt den „Erfolg“ bzw. „Misserfolg“ eines Photons beim Durchdringen einer absorbierenden Strecke. Der Erwartungswert der ankommenden Photonen wird allerdings durch Absorptionswahrscheinlichkeit im Detektor weiter eingeschränkt. Da man aber auch dabei von einer Poissonverteilung ausgehen kann, lässt sich für die auf dem Detektor registrierte Strahlung auch gesamt eine Poissonverteilung zu Grunde legen. Die Absorptionswahrscheinlichkeit auf einer Strecke d beträgt $e^{-\mu d}$ bei einem Schwächungskoeffizienten μ (siehe dazu auch Kap. 4.3.3). Da in vielen Fällen keine photonenzählenden, sondern energieintegrierende Detektoren verwendet werden, ist die Annahme einer Poisson-Verteilung nicht vollständig zulässig (siehe [31]), kann aber als gute Näherung betrachtet werden, die den zusätzlichen Berechnungsaufwand für eine angepasste Statistik nicht rechtfertigt (siehe dazu [32]).

Im Sinne der Poissonverteilung wird die Messung y_i in Detektorelement i als eine Realisierung

der angenommenen Mittelwerte \bar{y}_i betrachtet:

$$P_{\bar{y}_i}(y_i) = \prod_i \frac{\bar{y}_i^{y_i}}{y_i!} e^{-\bar{y}_i} \quad (3.17)$$

Die zur Optimierung genutzte Funktion ist die logarithmierte Likelihood-Funktion, deren Maximum sich an der selben Stelle befindet, sich aber aufgrund des Wechsels vom Produkt zur Summe leichter optimieren lässt. Die Log-Likelihood-Funktion $\sum_i y_i \ln(\bar{y}_i) - \bar{y}_i - \ln(y_i!)$ wird oft ohne den in \bar{y}_i konstanten Term angegeben:

$$L(y_i) = \sum_i y_i \ln(\bar{y}_i) - \bar{y}_i \quad (3.18)$$

3.3.4 Lösungsmethoden für das Maximum-Likelihood-Problem

Der erste und bekannteste Ansatz zur Lösung des Poisson-Likelihood Problems wurde von Lange und Carson [33] vorgestellt und entspricht einem Expectation-Maximization (EM)-Ansatz (hier „EMML“). Die Beschreibung folgt an dieser Stelle in ihren Grundzügen der Beschreibung in [17]. Der für den Ansatz notwendige Raum von Poisson-Zufallsvariablen wird dabei beschrieben durch alle Ein- und Austrittsintensitäten der Voxel des betrachteten Volumens. Die Austrittsintensität aus dem Volumen entspricht der beobachteten Intensität y_i , die Eintrittsintensität der ungeschwächten Intensität $y_{i,0}$. Die unbekanntes Zufallsvariablen, die sich inmitten des Volumens befinden, werden durch das EM-Verfahren geschätzt. Erfolgt die Maximierung der damit aufstellbaren Kostenfunktion durch die Suche nach der Nullstelle der Ableitung, kann die Lösung nur mit Hilfe einer Taylorreihe für kleine Strahlsummen pro Voxel angegeben werden als [34]:

$$\mu_j^{n+1} = \frac{2 \sum_i (M_{ij}^n - N_{ij}^n)}{\sum_i a_{ij} (M_{ij}^n + N_{ij}^n)} \quad (3.19)$$

a_{ij} stellt den jeweiligen Eintrag der Systemmatrix gemäß Gl. 3.14 dar. M_{ij}^n und N_{ij}^n bezeichnen die Erwartungswerte von Ein- und Austrittsintensität im Voxel j auf Strahl i bei Iteration n . Diese können errechnet werden durch:

$$M_{ij}^n = y_{i,0} e^{-\sum_k^{j-1} a_{ik} \mu_k} - \bar{y}_i + y_i = N_{i,j-1}^n \quad (3.20)$$

Der EM-Algorithmus konvergiert nur sehr langsam und ist in seiner Berechnung schwer parallelisierbar. Die „ordered-subset“ Variante von Hudson und Larkin [35] verwendet nur einen kleinen Anteil der Projektionen pro Update. Dadurch kann die sehr langsame Konvergenz des EM-Algorithmus stark beschleunigt werden. Trotzdem erschwert die schwere Parallelisierbarkeit des Ansatzes einen Einsatz bei großen Datenmengen. Da es sich um einen multiplikativen Algorithmus handelt, sind Schwächungskoeffizienten kleiner als Null nicht möglich. Dadurch kann zwar auf eine zusätzliche Unterdrückung negativer Werte verzichtet werden, im Fall von Messungen, bei denen negative Werte erwartet werden (zum Beispiel Phasenkontrastmessungen) sind multiplikative Varianten aber nicht geeignet. Daher

wird EMLL nicht in den folgenden Vergleich der Methoden einbezogen.

Statt dessen können auch Ansätze verfolgt werden, die direkt die Log-Likelihood-Funktion maximieren. In dieser Arbeit werden deshalb, den Beschreibungen in [17] folgend, ein weiterer multiplikativer Ansatz sowie ein additives Verfahren untersucht.

„**Ordered Subset Convex (OSC)**“ Schreibt man die Log-Likelihood-Funktion $L(\mu)$ aller Projektionen als Summe von Log-Likelihood-Funktionen $l_i(S_i^n)$ mit Strahlsummen $S_i^n = \sum_j a_{ij}\mu_j^n$

$$L(\mu) = - \sum_i l_i(S_i^n) \quad (3.21)$$

für alle Strahlen i , kann die Konvexität der Log-Likelihood-Funktion l_i ausgenutzt werden (siehe [34]), um entsprechend [36] eine Funktion $Q_{\text{OSC}}(\mu^n)$ bei Iteration n zu finden, für die gilt:

$$L(\mu) = - \sum_i l_i \left(\sum_j \frac{S_i^n \mu_j^n}{S_i^n \mu_j^n} a_{ij} \mu_j \right) \geq - \sum_i \sum_j \frac{a_{ij} \mu_j^n}{S_i^n} l_i \left(\frac{\mu_j}{\mu_j^n} S_i^n \right) = Q_{\text{OSC}}(\mu^n) \quad (3.22)$$

Im Fall $\mu_j = \mu_j^n$, also wenn μ_j^n der gesuchten Lösung entspricht, geht die Ungleichung in eine Gleichung über. Durch eine Maximierung von Q_{OSC} wird also auch L maximiert. Dies wird erreicht durch Anwendung des Newton-Verfahrens unter Bildung der ersten und zweiten Ableitung von Q :

$$\frac{\partial}{\partial \mu_j} Q_{\text{OSC}}(\mu^n) = - \sum_i a_{ij} (y_i - y_{i,0} e^{-\frac{\mu_j}{\mu_j^n} S_i^n}) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu_j^2} Q_{\text{OSC}}(\mu^n) = - \sum_i \frac{a_{ij} S_i^n y_{i,0}}{\mu_j^n} e^{-\frac{\mu_j}{\mu_j^n} S_i^n} \quad (3.24)$$

An der Stelle $\mu_j = \mu_j^n$ kann also mit $\bar{y}_i = y_{i,0} \exp(-S_i^n)$ folgende Updategleichung angegeben werden:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n \left(1 + \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} S_i^n \bar{y}_i} \right) \quad (3.25)$$

Das Update erfolgt, wie in Gl. 3.25 zu erkennen ist, multiplikativ. Ein Startwert von $\vec{\mu} = \vec{0}$ ist also nicht möglich. Alle μ_j werden daher mit einem Startwert größer Null initialisiert. Durch die Einführung von Subsets (S_M) der Größe M kann die Konvergenz beschleunigt werden.

„**Maximum-Likelihood-Transmission**“ (**ML-TR**) Wird die Log-Likelihood-Funktion in der Nähe ihres Maximums betrachtet (siehe [37], [38]) und stellt μ_0 die dazugehörige Rekonstruktion dar, kann diese angegeben werden als Differenz zur aktuellen Schätzung: $\vec{\mu}_0 = \vec{\mu} + \Delta \vec{\mu}$. Die Maximierung der Log-Likelihood-Funktion erfolgt durch Null-Setzen der

ersten Ableitung. Die Gleichung kann dann in erster Ordnung entwickelt werden als:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j}(\vec{\mu} + \Delta \vec{\mu}) = \frac{\partial L}{\partial \mu_j}(\vec{\mu}) + \sum_h \frac{\partial^2 L(\vec{\mu})}{\partial \mu_j \mu_h} \Delta \mu_j = 0 \quad (3.26)$$

Schreibt man die Ableitung der Log-Likelihood-Funktion aus

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = \sum_i \bar{y}_i \left(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1 \right) \quad (3.27)$$

$$\sum_h \frac{\partial^2 L}{\partial \mu_j \mu_h} = - \sum_i a_{ij} \left(\sum_h a_{ih} \right) \bar{y}_i \quad (3.28)$$

so kann $\Delta \mu$ direkt berechnet werden. Mit $\mu^{n+1} = \mu^n + \Delta \mu$ folgt für die Updategleichung mit Relaxationsparameter λ (siehe auch [39]):

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\sum_h a_{ih}) \bar{y}_i} \quad (3.29)$$

Dieses Update wird im Folgenden als „MLTR-C“ (MLTR-*computed*, entsprechend der im Nenner verwendeten Vorwärtsprojektion \bar{y}_i) bezeichnet.

Befindet sich die aktuelle Schätzung nahe an der Lösung, so gilt $y_i \approx \bar{y}_i$. Wird diese Näherung für den Nenner in Gl. 3.29 verwendet, kann der Nenner vorberechnet werden. Außerdem gilt bei einem Start der Iterationen an der Stelle $\bar{y}_i = I_0$ die Ungleichung $y_i \leq \bar{y}_i$. Durch den kleineren Nenner wird die Konvergenz beschleunigt. Die Annahme $y_i \approx \bar{y}_i$ ist gerade zu Beginn einer Berechnung mit Startwert Null schlecht erfüllt, zeigt aber im Vergleich an Beispielrechnungen (siehe Kap. 3.3.5) auch bei nicht-initialisiertem Startvolumen schnellere Konvergenz. Für das Update der „MLTR-M“-Variante (MLTR-*measured*, entsprechend der im Nenner verwendeten Messdaten y_i) folgt:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\sum_h a_{ih}) y_i}. \quad (3.30)$$

3.3.5 Vergleich der Lösungsmethoden

Die oben beschriebenen Updategleichungen zur Lösung des Rekonstruktionsproblems (siehe Übersichtstabelle 3.1) werden nun sowohl hinsichtlich ihrer Konvergenz als auch hinsichtlich ihrer Rekonstruktionsqualität am Simulationsbeispiel verglichen. Dafür wurden die Rekonstruktionsvarianten OSSART, OSC sowie MLTR-M und MLTR-C mit unterschiedlichen Subsetgrößen auf das Lochplatten-Phantom (siehe Kap. 2.3) angewendet. Die Rekonstruktionen wurden für 1000 Iterationen berechnet. Dieser Wert wurde sehr groß gewählt, da dabei die akzeptable Berechnungszeit für die Rekonstruktion großer Volumendaten bereits weit überschreiten wäre. Der Vergleich wird für Projektionen mit und ohne simuliertes Poisson-Rauschen angestellt.

Entsprechend dem in Kap. 3.3.1 gewonnenen Ergebnis wurde mit einer vierfachen Überabtastung des Detektors im Vorwärtsprojektor und einem voxelbasierten Rückprojektor

OSC	$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n \left(1 + \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} S_i^n \bar{y}_i} \right)$
MLTR-C	$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\sum_h a_{ih}) \bar{y}_i}$
MLTR-M	$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \frac{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_{i \in S_M} a_{ij} (\sum_h a_{ih}) y_i}$
OSSART	$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \lambda \sum_{i \in S_M} \frac{a_{ij}}{\sum_{i \in S_M} (a_{ij})} \frac{s_i - S_i^n}{\sum_j (a_{ij})}$

Tabelle 3.1: Updategleichungen der verglichenen Verfahren im Überblick. Detailliert werden diese in Kap. 3.3.2 und Kap. 3.3.4 beschrieben. Die Variante OSC unterscheidet sich insbesondere durch das multiplikative Update. Während bei OSSART der Vergleich der projizierten Daten auf Basis der Strahlsummen ($s_i \leftrightarrow S_i^n$) durchgeführt wird, werden in den anderen Verfahren Intensitäten ($y_i \leftrightarrow \bar{y}_i$) verglichen. MLTR-M und MLTR-C unterscheiden sich nur durch die Ersetzung des Nenners ($\bar{y}_i \rightarrow y_i$) und die damit verbundene Änderung der Konvergenzgeschwindigkeit.

gerechnet. Der Relaxationsparameter wurde für alle Subsetgrößen $M > 1$ auf $\lambda = 1$ gesetzt. Ausnahme bildet nur die OSSART bei Subsetgröße $M = 1$. Bei dieser wurde $\lambda = 0,5$ gewählt, da der Algorithmus für $\lambda = 1$ nicht in allen Fällen konvergiert (siehe Kap. 3.3.2). Es wurden alle 1000 Projektionen für die Rekonstruktion verwendet.

Konvergenzmaß und Rekonstruktionsabstand Iterative Rekonstruktionsverfahren extremalisieren die ihnen zugehörige Kostenfunktion. Wird diese Kostenfunktion als Funktion der Anzahl von Iterationen aufgetragen, kann das bis dahin erreichbare Maximum oder Minimum bewertet und so die Konvergenzgeschwindigkeit bestimmt werden. Dies entspricht einem Vergleich der Verfahren auf *Projektionsbasis*, da die Kostenfunktion den Abstand der Vorwärtsprojektion von den Messdaten bewertet. Bei starkem Rauschen der Messdaten sind diese aber inkonsistent und nicht vereinbar. Die Rekonstruktion muss also die wahrscheinlichste Lösung im Sinne der Messdaten wiedergeben. Eine Bewertung auf *Rekonstruktionsbasis* - wie sie hier durch den Abstand zur Referenz durchgeführt wird - bildet folglich nur bei vollständig konsistenten Daten den Abstand der Projektionen ab.

Vergleich der Konvergenz

Die Ergebnisse des Vergleichs hinsichtlich Konvergenzverhalten am Beispielphantom werden in Abb. 3.9 gezeigt. Die Auswertung auf Projektionsbasis, die ohne Rauschen berechnet wurde, zeigt einen klaren Trend zu besserer Konvergenz für kleinere Subsetgrößen. Grund dafür ist, dass bei Projektionen ohne Rauschen die Log-Likelihood Funktion unabhängig

von der Subsetgröße monoton steigt. Bei mehr Updates, also kleineren Subsets, konvergiert die Rekonstruktion also schneller, ohne dabei das erreichbare Maximum zu verändern. Bei größeren Subsets ist die Optimierung also noch nicht abgeschlossen. Die Log-Likelihood der Vorwärtsprojektion des OSSART-Verfahrens ist nicht das Maß, welches direkt optimiert wird. Durch den direkten Zusammenhang zwischen Intensität und Strahlsumme muss, mindestens für Projektionen ohne Rauschen, das Maximum der Werte aber an der selben Stelle liegen. Dementsprechend sind auch die Unterschiede in der Kostenfunktion der OSSART gering. Sie zeigen, bis auf die Abweichung zwischen SART und ML-Methoden, die selben Trends, die sich beim Vergleich der Log-Likelihood-Funktion zeigen.

Der Trend zu kleinen Subsetgrößen, der sich ohne Rauschen zeigt, kehrt sich bei Projektionen mit Poissonrauschen um. Ausgewertet wurde hier je das Minimum der Log-Likelihood bzw. der Kostenfunktion der OSSART über 1000 Iterationen. Sowohl hinsichtlich der Log-Likelihood als auch hinsichtlich der Abweichung der Strahlsummen verschlechtert sich das Ergebnis der Optimierung bei kleinen Subsetgrößen. Die beste Konvergenz nach 1000 Iterationen hat hierbei die Subsetgröße $M=100$. Der Grund dafür ist, dass bei inkonsistenten Daten 5 Projektionen pro Subset nicht ausreichen, um eine globale Optimierung der Rekonstruktion gegenüber dem gesamten Datensatz zu erreichen. Wird die Subsetgröße erhöht, verlangsamt sich aber die Konvergenzgeschwindigkeit. Bei Subsetgröße $M=1000$, also bei der gleichzeitigen Verarbeitung aller Projektionen des Datensatzes, sind die Rekonstruktionen dementsprechend noch nicht weit genug konvergiert. Es gilt also einen optimalen Kompromiss aus Konvergenzgeschwindigkeit und Optimierungstiefe in Abhängigkeit des Poisson-Rauschens zu wählen.

Die Algorithmen unterscheiden sich untereinander wenig. Während ohne Projektionsrauschen innerhalb der Maximum-Likelihood-Verfahren keine Unterschiede erkennbar sind, zeigt bei Projektionen mit Rauschanteil das multiplikative OSC-Update die höchste Log-Likelihood beziehungsweise den niedrigsten Abstand der Strahlsummen. Grundsätzlich gilt also für die Konvergenz beider Kostenfunktionen:

- Die Unterschiede zwischen den Algorithmen sind allgemein gering und liegen, bei Betrachtung des Rekonstruktionsbildes mit dem Auge, zumeist unterhalb der Schwelle der Erkennbarkeit
- Die Unterschiede zwischen dem strahlbasierten (OSSART) und den Likelihood-basierten Verfahren fallen gering aus
- Entscheidend für die Konvergenz ist die Größe der Subsets und damit die Konvergenzgeschwindigkeit, nicht der gewählte Algorithmus

Für weitere Rekonstruktionen wird das MLTR-M Update gewählt, da dieses durch das additive Update auch negative Werte annehmen kann - ein Umstand der gerade im Umfeld hochauflösender Messungen mit Phasenkontrast notwendig ist. Die Konvergenzgeschwindigkeit liegt gleich auf mit den weiteren verglichenen Verfahren. Die Subsetgröße wird, wenn nicht anders angegeben, für weitere Simulationen auf $M=100$ gesetzt. Für Messungen wird die Subsetgröße dem Problem entsprechend angepasst. Durch die Wahl eines ML-Verfahrens

ergibt sich im Kontext der modellbasierten Rekonstruktion die Möglichkeit die Mittelung der überabgetasteten Strahlen zur Flächenberechnung intensitätsbasiert (siehe Kap. 5.2.1) durchzuführen. Außerdem können additive Konstanten wie Streustrahlung (siehe dazu den Ansatz in Kap. 5.4) direkt in den Rechenprozess einbezogen werden.

Die notwendige Anzahl an Iterationen im Einzelfall wird in Kap. 3.3.8 genauer untersucht, bei Simulationen aber weiterhin bei sehr großen Werten belassen, um unvollständige Konvergenz zu vermeiden.

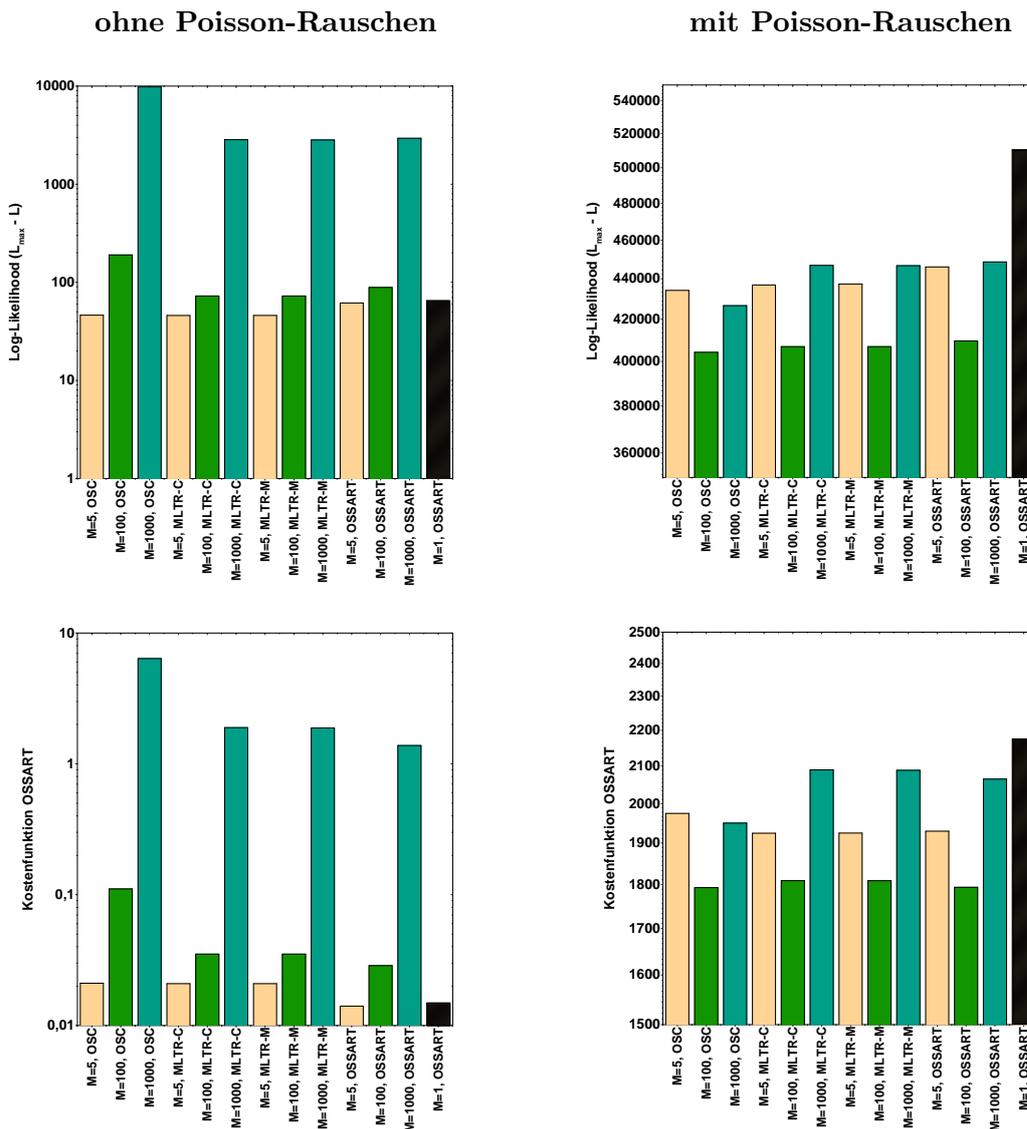


Abbildung 3.9: Log-Likelihood (in der Darstellung $L_{\max} - L$, siehe auch Kap. 2.4) und quadratischer Projektionsabstand (Kostenfunktion OSSART) der getesteten Algorithmen. Alle Auftragungen sind logarithmiert für eine bessere Darstellbarkeit. Gezeigt sind je die Minima (maximale Konvergenz in Projektions- und Rekonstruktionsbasis) aus Rekonstruktionen mit 1000 Iterationen. Die Abhängigkeit der erreichbaren Rekonstruktionsqualität von der Subsetgröße (M) zeigt sich unter Einfluss von Rauschen an der Umkehrung der Reihenfolge $M = 5$ und $M = 100$. Während ohne Rauschen kleine Subsetgrößen schneller konvergieren, kann bei Poisson-Rauschen nur mit größeren Subsets eine gute Lösung für alle Projektionen gefunden werden.

Vergleich nach Qualitätsmaßen

Neben dem Vergleich der Rekonstruktionen nach den Kostenfunktionen ist es auch möglich die Rekonstruktionen mit der simulierten Referenzrekonstruktion zu vergleichen. Dazu wird der quadratische Abstand (siehe Kap. 2.4) der Rekonstruktionen angegeben. Die Rekonstruktionen des Lochplatten-Phantoms erfolgen bei $M=100$ und einem Relaxationsparameter $\lambda=1$ auf 1000 Projektionen. Zusätzlich zu den iterativen Verfahren kann hier auch die gefilterte Rückprojektion mit zum Vergleich herangezogen werden. Diese wurde mit einem Shepp-Logan-Filter durchgeführt und vor dem Vergleich wurden mögliche negative Werte in der Rekonstruktion auf Null gesetzt, um den Vergleich zu ermöglichen. Auch bei den iterativen Rekonstruktionen wurden negative Werte nach jedem Update auf Null gesetzt. Dieses Vorgehen beschleunigt die Konvergenz durch das Vorwissen, dass kein Phasenkontrast auftritt und damit keine negativen Werte vorliegen können.

Die Ergebnisse sind in Abb. 3.10 gezeigt. Die Rekonstruktionen der Projektionen ohne Poisson-Rauschen schneiden die gefilterte Rückprojektion zwischen Iteration 100 und 200, zeigen ab dieser Iterationszahl also bessere Bildqualität. Dies ist insbesondere auf den glättenden Shepp-Logan-Filter zurückzuführen. Auffällig ist, dass das OSC-Update auch nach 1000 Iterationen einen höheren Abstand zur Referenz behält.

Ein ähnliches Bild bietet sich auch bei den Projektionen mit Poissonrauschen. Das niedrigste Minimum wird vom OSC-Update nicht erreicht. Das erneute Ansteigen des Abstands nach einem Minimum ist auf das Projektionsrauschen zurückzuführen. Während die Kostenfunktion weiter extremalisiert wird, entfernt sich die Rekonstruktion von der Referenz, da das Projektionsrauschen im Rekonstruktionsraum verteilt wird. Das hier verglichene Maß steigt wieder an. Der erste Schnittpunkt der iterativen Verfahren mit der gefilterten Rückprojektion liegt unter dem Einfluss von Rauschen zwischen Iteration 2 und 6. Mit größerem Projektionsrauschen wird es also schon bei weniger Iterationen sinnvoll, ein iteratives Verfahren einzusetzen. Die Möglichkeit das Wiederansteigen des Abstands zur Referenz zu verhindern, wird im Zusammenhang mit Regularisierung in Kap. 3.3.7 behandelt.

Das Ergebnis des Vergleichs unterstützt die Wahl des MLTR-M Algorithmus bei einer sinnvoll gewählten Subsetgröße.

Einfluss der Subsetgröße auf die Konvergenz

Die Abhängigkeit der Daten in Abb. 3.9 von der Subsetgröße zeigt, dass mit wenig oder keinem Rauschen der Projektionsdaten die Subsetgröße sehr klein gewählt werden kann, bei größerem Einfluss von Poissonrauschen die Subsetgröße aber erhöht werden muss, um die gesamte Log-Likelihood aller Projektionen zu maximieren. Der Zusammenhang zwischen dem quadratischen Abstand der Rekonstruktionen zur Referenz und der Subsetgröße wird in Abb. 3.11 für fünf Intensitäten des Poissonrauschens gezeigt. Die Datensätze wurden dabei mit Poissonrauschen entsprechend 100 bis 500 Photonen pro ungeschwächtem Strahl simuliert. Die Rekonstruktionen wurden mit den Subsetgrößen $M = 5, 10, 20, 50, 100$ durchgeführt. Das Minimum des Abstands zur Referenzrekonstruktion über 1000 Iterationen ohne

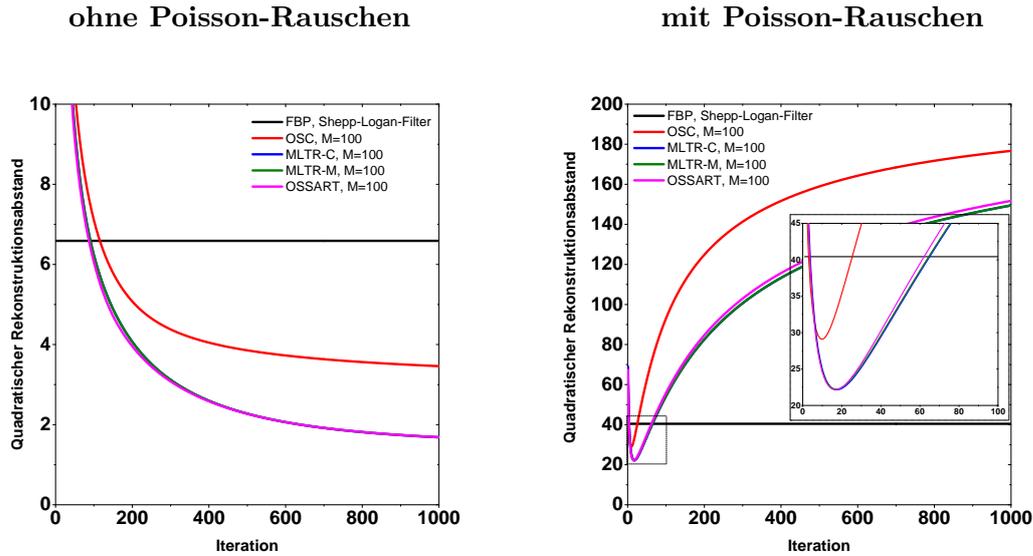


Abbildung 3.10: Vergleich der Rekonstruktionsverfahren nach dem quadratischen Abstand der Rekonstruktionen zur Referenz. Links ohne, rechts mit Poisson-Rauschen. Entscheidend sind die erreichbaren Minima. Bis auf den multiplikativen OSC Algorithmus unterscheiden sich die Varianten hauptsächlich in der Konvergenzgeschwindigkeit.

Regularisierung liegt bei größerem Projektionsrauschen erwartungsgemäß höher und wird eher erreicht. Der erkennbar größere Gradient bei kleinen Subsets für Datensätze mit größerem Rauschanteil lässt den Schluss zu, dass für Daten mit mehr Poissonrauschen größere Subsets gewählt werden müssen. Da die Minima des Abstands in Abb. 3.11 bei größeren Subsets konstant bleiben, wird für weitere Rekonstruktionen der Lochplatten-Simulation die Subsetgröße $M = 100$ gewählt, um eine sichere Konvergenz der Rekonstruktion zu gewährleisten.

3.3.6 Additive Konstanten in Maximum-Likelihood-Verfahren

Im Fall eines von der Vorwärtsprojektion \bar{y}_i unabhängigen Offsets r_i der Messdaten muss das ursprüngliche Simulationsmodell $\bar{y}_{i,(r_i=0)}$ angepasst werden zu:

$$\bar{y}_i = y_{i,0} e^{-\sum_j a_{ij}\mu_j} + r_i = \bar{y}_{i,(r_i=0)} + r_i \quad (3.31)$$

Darin bezeichnet r_i einen konstanten additiven Anteil, der zum Beispiel aus Streustrahlung oder Restbildartefakten bestehen kann. Die Ableitung ist dann:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = \sum_i a_{ij} \bar{y}_{i,(r_i=0)} \left(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1 \right) \quad (3.32)$$

In der Annahme kleiner Offsets gegenüber den Messwerten kann auch hier für das Update ein Nenner äquivalent zu Gl. 3.30 (MLTR-M) gewählt werden. Die Updatevorschrift lautet

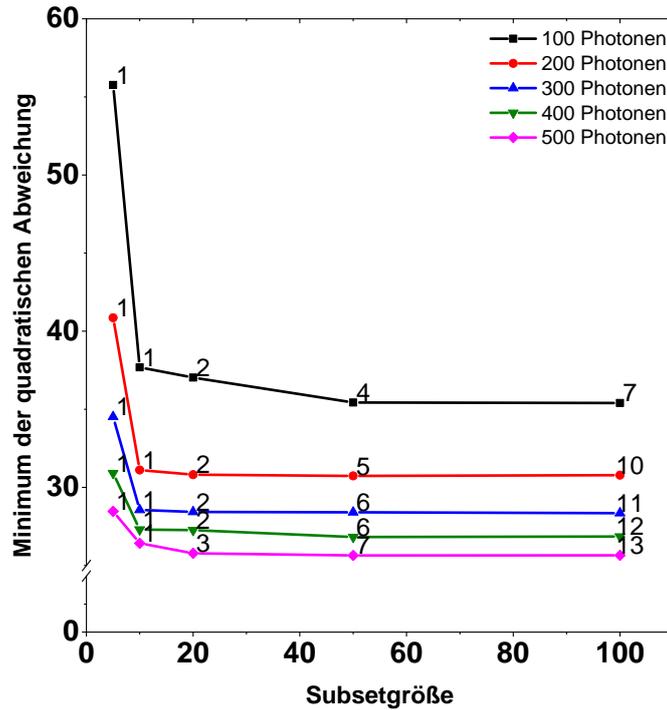


Abbildung 3.11: Abhängigkeit der erreichbaren Rekonstruktionsqualität (MLTR-M) von der Subset-Größe und dem Anteil des Poisson-Rauschens. Aufgetragen sind die minimal erreichbaren quadratischen Abstände zur Referenz bei Poisson-Rauschen entsprechend 100 bis 500 Photonen pro ungeschwächtem Strahl auf einem Detektorpixel. Zu jedem evaluierten Punkt ist die Iterationszahl angegeben, bei der das Minimum erreicht wurde.

hier also (mit Relaxationsparameter λ):

$$\mu^{n+1} = \mu^n + \lambda \frac{\sum_i a_{ij} \bar{y}_{i,(r_i=0)} \left(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1 \right)}{\sum_i a_{ij} (\sum_h a_{ih}) y_i}. \quad (3.33)$$

3.3.7 Regularisierungsmethoden

Die Notwendigkeit von Regularisierung ergibt sich aus der Inkonsistenz der Projektionen im Sinne des Poisson-Rauschens oder anderer zufälliger oder systematischer Messfehler. Dies wird in Kap. 3.3.5 am Steigen des quadratischen Rekonstruktionsabstandes nach einem Minimum, das schon nach wenigen Iterationen auftritt, sichtbar. Die Strahlen verschiedener Projektionen, die einen bestimmten Voxel schneiden, können nicht im Sinne der Referenzlösung vereint werden. Die Inkonsistenz wird als Rekonstruktions-Rauschen sichtbar. Um dies zu verhindern, besteht die Möglichkeit, unter Nebenbedingungen zu rekonstruieren. Eine solche Nebenbedingung kann die Bildglätte beziehungsweise die Dünnbesetztheit („sparsity“) der Ableitung des Bildes sein. Hier werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, wie diese Regularisierung realisiert werden kann.

Maximum-a-posteriori (MAP) Die erste Möglichkeit einer Nebenbedingung lässt sich in statistische Rekonstruktionsverfahren mit Hilfe der Bayes-Statistik integrieren. Der Satz von Bayes lautet:

$$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\beta|\alpha)P(\alpha)}{P(\beta)}. \quad (3.34)$$

Er gibt an, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses α unter der Bedingung, dass Ereignis β eingetreten ist, von der umgekehrt bedingten Wahrscheinlichkeit sowie den Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse abhängt. Identifiziert man α als Rekonstruktion und β als Messwerte, kann man (entsprechend [17]) mit der Poisson-Wahrscheinlichkeit der Messwerte $P_{\vec{y}_i}(y_i)$ aus Gl. 3.17 schreiben:

$$P(\vec{\mu}|\vec{y}) = \frac{P(\vec{y}|\vec{\mu})P(\vec{\mu})}{P(\vec{y})} \stackrel{P_{y_i}(\vec{y}_i)P(\vec{\mu})}{=} \frac{P(\vec{\mu})}{P(\vec{y})}. \quad (3.35)$$

Die Wahrscheinlichkeit der Messwerte unter der Bedingung, dass die aktuelle Rekonstruktion den tatsächlich gemessenen Werten entspricht, ist die Annahme für die Likelihood-Funktion. Die Wahrscheinlichkeit der Messwerte $P(\vec{y})$ ist konstant. Die Wahrscheinlichkeit für die Rekonstruktion $P(\vec{\mu})$ dagegen kann als a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung interpretiert werden. Darin kann Vorwissen integriert werden. Wird die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit $P(\vec{\mu}|\vec{y})$ anstelle von L maximiert, so kann nach dem Anwenden des Logarithmus die zu maximierende Funktion \tilde{L} unter Vernachlässigung konstanter Terme geschrieben werden als:

$$\tilde{L} = \ln P_{\vec{y}_i}(y_i) + \ln P(\vec{\mu}) = L(\mu) - \beta_1 R(\mu) \quad (3.36)$$

Darin ist $R(\mu)$ die Regularisierung, deren Stärke durch den Parameter β_1 geregelt werden kann. Die Updategleichung lässt sich dementsprechend angepasst für MLTR-M schreiben (siehe CA-NR in [17]):

$$\mu^{n+1} = \mu^n + \frac{\sum_i \bar{y}_{i,0}(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1) - \beta_1 \frac{\partial R}{\partial \mu}}{\sum_i a_{ij}(\sum_h a_{ih})y_i + \beta_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \mu^2}}. \quad (3.37)$$

Für die hier verwendeten Beispiele wird die Funktion R so festgelegt, dass sie benachbarte Voxeldifferenzen mit einer Huber-Funktion gewichtet. Es gilt:

$$R(\mu) = \sum_j \sum_k c_{jk} \psi(\underbrace{\mu_j - \mu_k}_{\Delta\mu_{jk}}, \delta) \quad (3.38)$$

mit

$$\psi(\mu, \delta) = \begin{cases} \frac{\Delta\mu_{jk}^2}{2}, & |\Delta\mu_{jk}| < \delta \\ \delta|\Delta\mu_{jk}| - \frac{\delta^2}{2}, & |\Delta\mu_{jk}| \geq \delta \end{cases} \quad (3.39)$$

Minimierung der Totalvariation Eine weitere Möglichkeit im Gegensatz zur Regularisierung mit Hilfe einer a priori-Verteilung, ist eine Regularisierung mit einem zusätzlichen

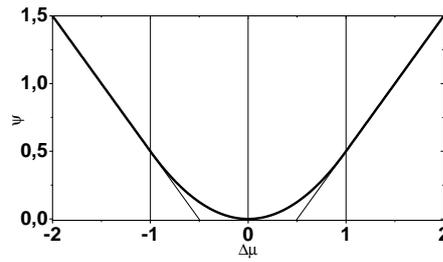


Abbildung 3.12: Darstellung einer Huber Funktion mit $\delta = 1$. Die nicht-quadratische Gewichtung der Regularisierung ab δ wirkt kantenerhaltend.

Gradientenabstieg. Dies wird hier über eine Regularisierung mit Hilfe der Minimierung der Totalvariation (TV) verwirklicht, die als Maß der Glätte des Rekonstruktionsvolumens eingesetzt werden kann. Die Vorgehensweise erfolgt hierbei nach [40] (siehe auch [20]). Das Update lautet dann:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i a_{ij}(\bar{y}_i - y_i)}{\sum_i a_{ij}(\sum_h a_{ih})y_i} + \beta_2 \frac{\partial T(\mu^n)}{\partial \mu_j^n} \quad (3.40)$$

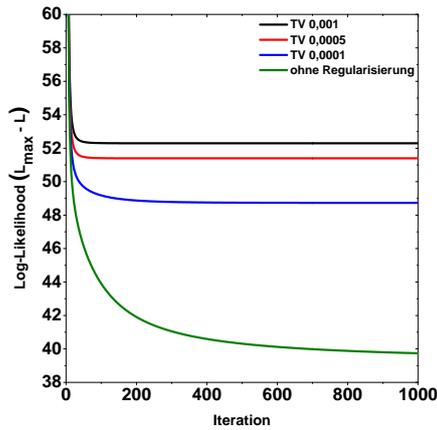
Die Totalvariation $T(\mu^n)$ lässt sich darin darstellen als L2-Norm des Gradienten von μ^n . Dann gilt:

$$T(\mu^n) = \sum_j \sqrt{\sum_k c_{jk}(\mu_j - \mu_k)^2} \quad (3.41)$$

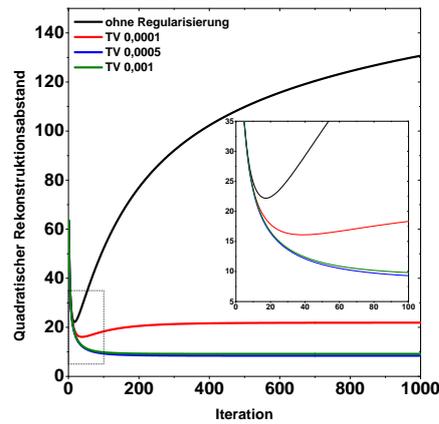
Die Auswahl aller Voxel, die zum Gradienten beitragen, wird hier durch die c_{ij} bestimmt. Hier wird c_{ij} so definiert, dass für alle direkten Nachbarelemente zu Voxel j $c_{ij} = 1$ gilt. Für alle anderen gilt $c_{ij} = 0$. Die Ableitung lautet dann:

$$\frac{\partial T(\mu^n)}{\partial \mu_j^n} = \frac{\sum_k c_{jk}(\mu_j - \mu_k)}{\sqrt{\sum_k c_{jk}(\mu_j - \mu_k)^2}} - \frac{\sum_k c_{kj}(\mu_k - \mu_j)}{\sqrt{\sum_k c_{kj}(\mu_k - \mu_j)^2}} \quad (3.42)$$

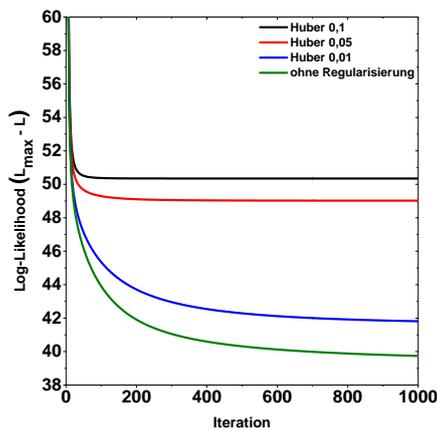
Die Auswirkungen der Regularisierung werden in Abb. 3.13 sichtbar. Für die Tests wurde die Regularisierung in den zwei beschriebenen Varianten (Huberfunktion als Teil der Kostenfunktion und Totalvariation als zusätzlicher Gradientenabstieg) mit je drei Gewichtungen β_1 bzw. β_2 auf das Lochplatten-Phantom angewendet. Die Parameter β_1 und β_2 sind aufgrund der unterschiedlichen Auswirkungen auf das Update nicht vereinbar und daher in unterschiedlichen Größenordnungen beliebig gewählt. Für alle regularisierten Rekonstruktionen zeigt sich eine frühere, aber niedrigere Konvergenz der Log-Likelihood-Funktion. Der Abstand zur Referenzrekonstruktion dagegen konvergiert besser in das richtige Ergebnis. Der Zusammenhang zwischen der unterdrückten Konvergenz der Log-Likelihood-Funktion und der stärkeren Annäherung des Rekonstruktionsergebnisses an die Referenz wird in allen Fällen deutlich. Einzige Ausnahme bildet die sehr starke Regularisierung ($\beta_2 = 0,001$) mit Totalvariationsminimierung. Die Rekonstruktion bleibt weiter von der Referenz entfernt als TV-Regularisierung mit $\beta_2 = 0,0005$, obwohl die Log-Likelihood bei noch niedrigerem Wert konvergiert. Grund dafür ist die zu starke Glättung durch die Regularisierung. Die



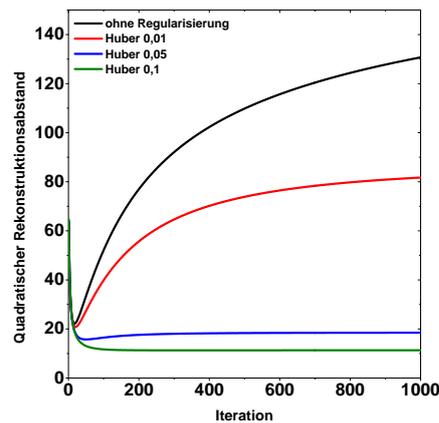
(a) Log-Likelihood (als Differenz zum Maximum) als Funktion der Iterationszahl bei Einfluss von Regularisierung mit Totalvariation.



(b) Quadratischer Rekonstruktionsabstand als Funktion der Iterationszahl bei Einfluss von Regularisierung mit Totalvariation.



(c) Log-Likelihood (als Differenz zum Maximum) als Funktion der Iterationszahl bei Einfluss von Regularisierung mit Huber-Funktion.



(d) Quadratischer Rekonstruktionsabstand als Funktion der Iterationszahl bei Einfluss von Regularisierung mit Huber-Funktion.

Abbildung 3.13: Einfluss der Regularisierung auf Rekonstruktionen mit Poisson-Rauschen. Bei der Wahl einer stärkeren Regularisierung kann die erreichbare Rekonstruktionsqualität (niedrigerer Abstand zur Referenz) gesteigert werden, die Log-Likelihood-Funktion aber sättigt bei höheren Werten. Wird die Regularisierung zu stark gewählt, können Details nicht vollständig rekonstruiert werden und der quadratische Abstand der Rekonstruktion zur Referenz sättigt bei größeren Werten („TV 0,001“ zeigt schlechtere Ergebnisse als „TV 0,0005“ trotz höherer Regularisierung - siehe Detailansicht in Abb. 3.13(b)).

Glättung wurde gegenüber der Rekonstruktion zu stark gewichtet und das Ergebnis entfernt sich wieder von der optimalen Lösung. Die geeignete Wahl des Regularisierungsparameters β_1 bzw. β_2 ist abhängig von der Anzahl der Projektionen, der Konvergenzgeschwindigkeit und insbesondere der Probe, so dass β_1 und β_2 nicht global festgelegt werden können. Die Parameter β_1 und β_2 werden daher in folgenden Beispielen durch das Austesten unterschiedlicher Regularisierungsstärken festgelegt. Eine automatische Festlegung ist Teil aktueller

Forschung (siehe beispielsweise [41], [42]) und hier nicht näher behandelt.

3.3.8 Abbruchkriterien

Wie bereits in Abb. 3.11 zu erkennen war, bildet der Abstand der simulierten Datensätze mit Poisson-Rauschen zur Referenz ein Minimum, das von der Subsetgröße abhängt. Würde ein anderes Phantom für die Simulation herangezogen oder eine andere Realisierung der Poisson-Verteilung zu Grunde gelegt, so wäre auch hier eine Verschiebung des Minimums zu erkennen. Auch eine Regularisierung kann nicht mit beliebig großem Parameter β angewandt werden, da auch bei kantenerhaltenden Regularisierungsfunktionen Details durch eine zu starke Glättung verloren gehen können. Darüber hinaus ist es sinnvoll ein objektives Maß zu definieren mit dem bestimmt werden kann, wann die Iterationen abgebrochen werden können. Hier werden zwei Möglichkeiten am Simulationsbeispiel untersucht:

- Der Abbruch bei Unterschreiten eines vorher bestimmten Werts des Gradienten der Log-Likelihood-Funktion
- Der Abbruch beim Absinken der Log-Likelihood-Funktion von zusätzlichen, nicht in die Rekonstruktion einbezogenen Projektionen

Die erste Variante bedarf einer ständigen Berechnung der Log-Likelihood für jede Projektion in jeder Iteration. Diese ist allerdings wenig rechenaufwändig, da die Vorwärtsprojektion bereits für das ML-Update berechnet werden muss. Die zweite Variante basiert auf einer in [43] beschriebenen Methode. Dabei werden mehrere gemessene Projektionen aus den vorhandenen Projektionen entnommen und statt für die Rekonstruktion dafür verwendet, das Abbruchkriterium zu bestimmen. Solche Projektionen können in überbestimmten Datensätzen aus der normalen Reihenfolge entnommene Aufnahmen sein, beziehungsweise im Fall von Aufnahmen mit zu wenig unterschiedlichen Winkeln (siehe Kap. 3.1) aus zusätzlichen Bildern bestehen. Diese können über das für die Rekonstruktion notwendige Maß hinaus gehende Aufnahmen sein, die gesondert gemessen werden müssten. Für beide Varianten besteht ein Zusammenhang zur Subsetgröße, so dass es nahe liegt, die Größe der Subsets bei Erreichen des Abbruchkriteriums anzupassen.

Eine weitere Variante ist das Festlegen einer sehr hohen Iterationszahl, bei der von Konvergenz ausgegangen werden kann. Das Endergebnis wird nach der Rekonstruktion mit einem Tiefpass-Filter geglättet, um das hochfrequente Rauschen zu unterdrücken, das sich durch die hohe Iterationszahl im Bild kumuliert hat (siehe z.B. [44]). Da ein solches Ergebnis aber an Kantenschärfe verlieren kann, die Rechenzeit sehr hoch ist und die Unterdrückung von hochfrequentem Rauschen auch durch Regularisierung erreicht werden kann, wird diese Methode hier nicht weiter verfolgt. Auch Ansätze, die auf mehrfacher Berechnung des Rekonstruktionsbildes beruhen, werden aufgrund der langen Berechnungszeiten modellbasierter Verfahren nicht berücksichtigt. Getestet werden beide Verfahren am Lochplatten-Phantom.

Gradient der Log-Likelihood-Funktion Das Abbruchkriterium eines vordefinierten Werts des Gradienten der Log-Likelihood-Funktion (ΔL) wird für drei Subsetgrößen untersucht, indem der Wert des Gradienten bei der Iterationszahl verglichen wird, bei der sich das Minimum des Abstands der Rekonstruktion zur Referenz ergibt. In Abb. 3.14 ist das Maß $\Delta(L_{\max} - L)$ für die drei Subsetgrößen $M = 5, 100, 1000$ dargestellt. Die gestrichelt eingezeichneten Linien stellen die Iteration dar, bei der nach dem Kriterium des quadratischen Rekonstruktionsabstandes ein Minimum erreicht wurde. Für $M = 1000$ wurde dieses Minimum innerhalb von 100 Iterationen nicht erreicht. Bei den Subsetgrößen $M = 5$ und $M = 100$ zeigt sich aber, dass die Steigungen der Log-Likelihood-Funktion an den verglichenen Stellen sehr unterschiedlich sind. Soll dieser Wert also ein Abbruchkriterium darstellen, so muss er für jede Subsetgröße einzeln angepasst werden. Da die Konvergenz der Log-Likelihood bei unterschiedlichen Phantomen oder Messaufbauten verschieden ausfällt, stellt der Gradient der Log-Likelihood-Funktion nur ein sehr grobes Maß zum Abbruch dar.

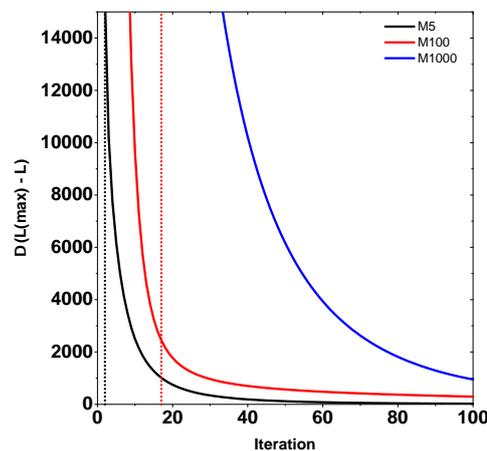
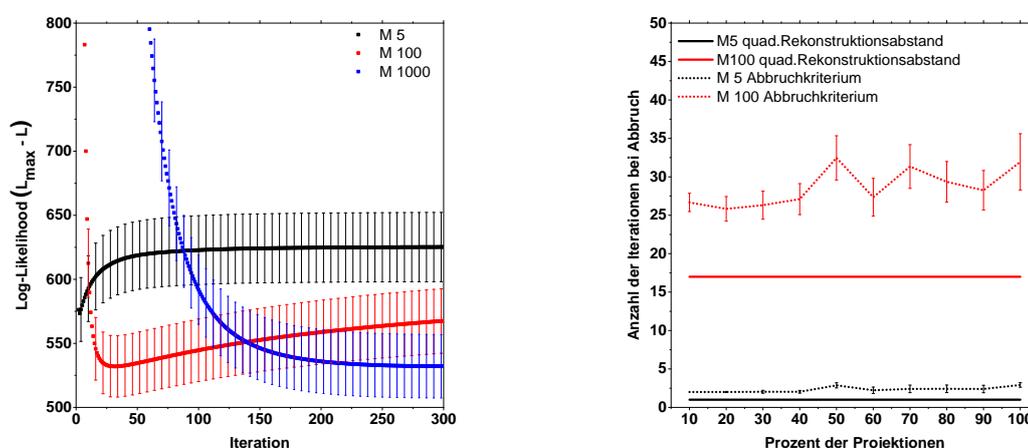


Abbildung 3.14: Gradient $\Delta(L_{\max} - L)$ der Log-Likelihood-Funktion für die Subsetgrößen $M = 5, 100, 1000$ für Rekonstruktionen mit Poisson-Rauschen. Die vertikalen Linien zeigen die Iteration, bei der das Minimum des quadratischen Abstands zur Referenz erreicht wird ($M = 1000$ erreicht kein Minimum). Die Werte des Gradienten am Schnittpunkt mit der Linie geben keinen Anhaltspunkt für ein Abbruchkriterium.

Log-Likelihood zusätzlicher Projektionen Das Kriterium des Absinkens der Log-Likelihood für Projektionen, die nicht für das Rekonstruktionsupdate verwendet werden, ist gegenüber dem Gradienten (siehe oben) vielversprechender. Für die Subsetgrößen $M = 5, 100, 1000$ wurden Rekonstruktionen eines Datensatzes mit Poisson-Rauschen über 300 Iterationen durchgeführt. Die Vorwärtsprojektionen jedes Iterationsschrittes wurde gespeichert, um als Referenz für die Auswertung der Log-Likelihood-Funktion zu dienen. Die Auswertung wurde durchgeführt, indem die Log-Likelihood der simulierten Projektionen mit neuer Verteilung des Poissonrauschens bestimmt wurde. Dies wurde 1000 Mal berechnet, um eine Verteilung der Iterationszahlen zu erhalten, bei der die Rekonstruktion abgebrochen

würde. In Abb. 3.15(a) ist der Verlauf der Log-Likelihood der zusätzlich simulierten Daten gegenüber der Vorwärtsprojektion abhängig von der Iterationszahl dargestellt. Es wurde dabei die selbe Projektionszahl neu simuliert, die auch für die Rekonstruktion verwendet wurde. Die Fehlerbalken geben die Standardabweichung der 1000 Versuche mit unterschiedlicher Verteilung des Poisson-Rauschens wieder. Die Minima der Kurven geben die Anzahl der Iterationen vor, bei denen die Rekonstruktion abgebrochen würde. Für $M = 1000$ zeigt sich erwartungsgemäß kein Minimum. Für die anderen Subsetgrößen liegen die Minima der Mittelwerte bei Iteration 32 ($M = 100$) und Iteration 3 ($M = 5$). Die durch den Vergleich auf Rekonstruktionsbasis ermittelten Iterationszahlen mit minimaler Abweichung liegen bei Iteration 17 ($M = 100$) und Iteration 1 ($M = 5$).



(a) Auswertung der Log-Likelihood für einen zweiten Datensatz (1000 Projektionen), der als Abbruchkriterium herangezogen wird. Die Fehlerbalken geben die Standardabweichung bei der 1000-fachen Wiederholung des Versuchs an.

(b) Die Anzahl an Iterationen, bei der die Rekonstruktion abbrechen würde wird mit der Iterationszahl verglichen, die durch die Abweichung zur Referenz bestimmt wurde. Dabei werden 10% bis 100% der doppelt simulierten Daten verwendet.

Abbildung 3.15: Test des Abbruchkriteriums nach [43]. Es wurden 1000 Realisierungen der Poissonverteilung des Datensatzes simuliert und die Log-Likelihood Funktion dieser nicht verwendeten Daten als Abbruchkriterium herangezogen. Die Rekonstruktionen wurden ohne Regularisierung durchgeführt. Die vom Abbruchkriterium berechnete Iterationszahl liegt immer über der durch den Abstand zur Referenz vorgegebenen Anzahl benötigter Iterationen.

Die Auswirkungen, wenn weniger als die volle zusätzliche Anzahl an Projektionen zum Vergleich herangezogen werden, was dem Fall entsprechen würde, eine gewisse Prozentzahl der Projektionen doppelt zu messen, sind in Abb. 3.15(b) gezeigt. Dargestellt sind die Maxima der Log-Likelihood-Funktion der nicht verwendeten Projektionen für die Fälle, dass 10% bis 100% der Daten doppelt gemessen wurden. Als durchgehende Linien sind die Minima des quadratischen Rekonstruktionsabstands zur Referenz gezeigt. Die Abbruchiteration liegt in allen Fällen über der Iteration mit dem kleinsten Abstand zur Referenz. Die dargestellten Fehlerbalken geben die Standardabweichung der Iterationsanzahlen wieder, bei denen über 1000 Versuche das Kriterium erreicht wurde. Da die Poissonverteilungen jeweils neu berechnet wurden, stellt der gestrichelt dargestellte Mittelwert die Iterationszahl dar,

bei der der Abstand der Vorwärtsprojektion zu einer rauschfreien Messung am geringsten ist.

Da die so bestimmte Iterationszahl zum Abbruch der Rekonstruktion in einem ähnlichen Bereich liegt wie die Iterationszahlen, bei der der Abstand der Rekonstruktion zur Referenz am geringsten ist und die berechnete Iterationsanzahl nur wenig schwankt, kann dieses Kriterium als grobe Abschätzung der benötigten Iterationszahl verwendet werden.

Wird mit Regularisierung rekonstruiert, so werden mehr Iterationen benötigt, bevor sich ein Minimum des Rekonstruktionsabstands ausbildet oder der Abstand konstant bleibt (siehe auch Abb. 3.13). Diese Eigenschaft muss sich auch in einem Abbruchkriterium abbilden. Abb. 3.16 zeigt das Abbruchkriterium mit nicht verwendeten Projektionen bei TV-regularisierten Rekonstruktionen mit Regularisierungsgewichtung $\beta_2 = 0.0001$. Im Vergleich zur Rekonstruktion ohne Regularisierung zeigt sich der Trend zu größeren Iterationszahlen. Die Differenz des so errechneten Abbruchkriteriums von der durch das Minimum des Rekonstruktionsabstandes bestimmten Iterationszahl sinkt mit Regularisierung.

Trotz der vielversprechenden Ergebnisse des vorgestellten Abbruchkriteriums wird in den Auswertungen folgender Kapitel je eine feste Anzahl von Iterationen verwendet, da nur damit die Vergleichbarkeit unterschiedlicher Rekonstruktionsvarianten gegeben bleibt.

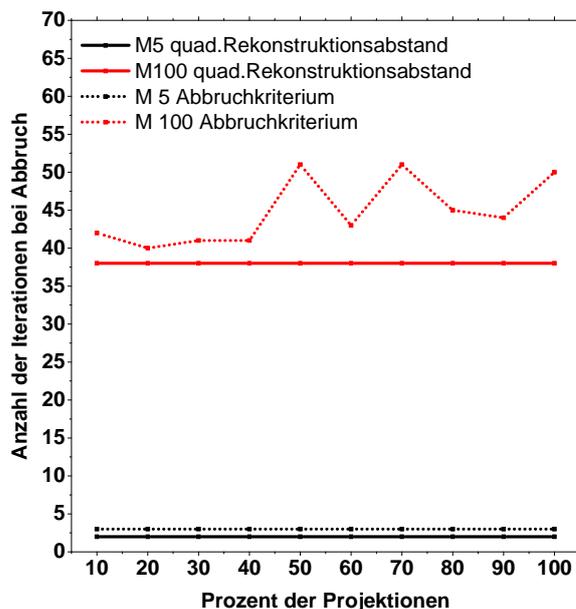


Abbildung 3.16: Das Abbruchkriterium nach [43] unter Einfluss von Regularisierung. Es zeigt sich, wie im Fall ohne Regularisierung, der Trend zu höheren Iterationszahlen im Abbruchkriterium.

Kapitel 4

Modellannahmen computertomographischer Rekonstruktion

Die computertomographische Rekonstruktion errechnet Schnittbilder des gemessenen Objekts aus Projektionsdaten, die digitalisiert als Matrizen von Grauwertstufen vorliegen. Wie im vorausgehenden Kapitel beschrieben, beruht das mathematische Modell der Rekonstruktion auf Grundannahmen über Datenqualität, Konsistenz und Menge der Information. Darüber hinaus ist, insbesondere für die gefilterte Rückprojektion, die Annahme notwendig, dass es sich bei den aufgenommenen CT-Daten um die Radontransformierte linearer Schwächungskoeffizienten handelt und dass diese sich über eine lineare Abbildung umkehren lässt. Diese Annahmen sind in vielen Fällen gut zur Schnittbildgebung geeignet.

Bei einer genaueren Betrachtung des Aufnahmesystems und der Rekonstruktionsergebnisse fällt auf, dass das idealisierte Modell der Radontransformation nicht vollständig zur Beschreibung des Messablaufs ausreicht. Weiterhin handelt es sich beim Rücktransformationsproblem um ein schlecht gestelltes Problem [16], das auch unter der Annahme durch Radontransformation erzeugter Eingangsdaten empfindlich auf Inkonsistenzen reagiert. Während bei der gefilterten Rückprojektion erweiterte Modellannahmen nur in der Vorverarbeitung der Projektionen mit in die Rekonstruktion eingebracht werden können, kann in iterativen Verfahren das Modell der Vorwärtsprojektion angepasst werden (siehe [45]). Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das Modell der gefilterten Rückprojektion sowie deren Vereinfachungen und eventuelle Fehlannahmen analysiert. In den darauf folgenden Unterkapiteln werden die physikalischen Grundlagen erarbeitet, die für ein in einer iterativen Rekonstruktion realisierbares Modell der Datenaufnahme verwendbar sind.

Computertomographische Anlagen sind vielfältig in ihrer Umsetzung und Bauweise. Insbesondere gibt es große Unterschiede zwischen den wesentlichen Problemstellungen medizinischer und industrieller bzw. materialwissenschaftlich genutzter CT-Anlagen. Industrielle Computertomographie-Geräte haben häufig speziell die Anforderung zu erfüllen, Strukturen im oder unterhalb des μm -Bereich abbilden zu können, so dass geringe Veränderungen der Aufnahmegeometrie zu starken Bildartefakten führen können. Das im Folgenden für die Umsetzung als Rekonstruktionsverfahren aufgestellte Modell wird sich auf die Anforderungen hochauflösender industrieller CT-Systeme beschränken und der medizinischen CT eigentümliche Probleme außen vor lassen.

4.1 Vereinfachtes Modell für die gefilterte Rückprojektion

Die gefilterte Rückprojektion (siehe auch Kap. 3.2) stellt die ortsraumbasierte Inversion der Radontransformation dar. Es gelten also die Modellannahmen, die in der Radontransformation gemacht werden. Strahlen verlaufen dabei von einer punktförmigen Quelle zu einem punktförmigen Detektorelement. Dies gilt sowohl für die Annahme von Parallelstrahlgeome-

trie, bei der die Strahlen als von einem unendlich weit entfernten Punkt ausgehend gedacht werden können als auch für Fächer- oder gar Kegelstrahlgeometrie. Die von der Quelle ausgehenden Strahlen haben eine Eingangs-Intensität $y_{i,0}$, die unabhängig von der Energie der Photonen eines realen Spektrums behandelt wird, da die gefilterte Rückprojektion eine Rekonstruktion auf Basis von Strahlsummen durchführt. Der Strahl wird als monoenergetisch angenommen, so dass der rekonstruierte Schwächungskoeffizient eines Voxels einer polyenergetischen Messung als Mittelwert der effektiven Schwächungskoeffizienten der aufgehärteten Einzelstrahlen aus unterschiedlichen Blickrichtungen rekonstruiert wird. Mit Aufhärtung wird dabei die Energieverschiebung im Röntgenspektrum zu höheren Energien bezeichnet. Da sich dieser Mittelwert im Fall von Strahlhärtung ortsabhängig ändert, verändern sich auch die rekonstruierten Schwächungskoeffizienten eines einzelnen Materials innerhalb einer Rekonstruktion.

Die vom gemessenen Objekt ausgehende Streustrahlung kann nur dann in der Vorverarbeitung vom Projektionsbild abgezogen werden, wenn sie bereits hinreichend bekannt ist. Fluktuationen der Quellenintensität und unterschiedliche Verstärkungen der vom Detektor registrierten Röntgenstrahlung werden durch eine der Logarithmierung der Daten und der Berechnung der Rückprojektion vorangehende Hell- und Dunkelbild-Korrektur ausgeglichen (Vorgehen genauer beschrieben in siehe Kap. 5.1.1). Eine Ausdehnung der Detektorelemente kann bei der gefilterten Rückprojektion als Projektion der Daten auf einen bestimmten Winkelbereich modelliert werden, um Aliasing-Artefakte zu vermeiden. Eine iterative Entfaltung des Detektorrasters, wie sie bei iterativen Rekonstruktionsmethoden möglich ist, kann dadurch aber nicht erlangt werden. Die Energieabhängigkeit des Detektors und die Verschmierung des Signals auf dem Detektor durch Streuung zwischen den Detektorelementen kann in einer nicht-iterativen Methode nur durch Vorverarbeitung der Projektionen berücksichtigt werden. Die bei der gefilterten Rückprojektion verwendeten Daten werden als rauschfrei angenommen und übermäßiges Rauschen im Rekonstruktionsbild durch eine angepasste Filterung der Projektionen unterdrückt (siehe 3.2). Die Aufnahmegeometrie ist bei der gefilterten Rückprojektion festgelegt. Im für Kegelstrahlgeometrie verwendeten Feldkamp-Algorithmus (siehe [3]) muss sich das Objekt dafür im Zentralstrahl der Quelle gedreht haben. Abweichungen der Geometrie können in Vorverarbeitungsschritten als Verschiebung des Detektorbilds interpretiert und über eine interpolierte Verschiebung des Projektionsbilds ausgeglichen werden. Diese Geometrieabweichungen müssen dafür allerdings vor der Rekonstruktion bekannt sein (siehe Kap. 4.5).

In Tabelle 4.1 (Kapitelende) werden die relevanten Annahmen der gefilterten Rückprojektion den Problemen realer CT-Aufnahmen gegenüber gestellt. Außerdem wird gezeigt, inwieweit eine implementierbare Erweiterung für dieses Modell gefunden werden kann. Die Details dieser Modellannahmen werden in der Fortführung dieses Kapitels behandelt.

4.2 Modell der Röntgenquelle

Als Röntgenquelle kann für die Computertomographie jede Vorrichtung genutzt werden, die mit oder ohne externe Energiezufuhr Photonen im Röntgenbereich erzeugt und diese in eine bekannte Richtung entlässt. Für die Radiographie und Computertomographie werden in modernen Messaufbauten insbesondere Röntgenröhren, Linearbeschleuniger, Synchrotrone und radioaktive Präparate verwendet. Radioaktive Proben werden in medizinischen Emissionstomographie-Verfahren, aber auch in der Durchstrahlungsprüfung im ZfP-Bereich eingesetzt. Während sich Synchrotrone besonders durch eine hohe Intensität und die damit möglichen kurzen Belichtungszeiten sowie durch einen nahezu parallelen Strahlenverlauf auszeichnen, können mit Linearbeschleunigern sehr hohe Photonenergien erzeugt werden. In dieser kurzen Übersicht werden nur die Bauformen von Röntgenröhren betrachtet, da diese in Laborsystemen vornehmlich zum Einsatz kommen.

Röntgenröhren gibt es in einer Vielzahl von Bauformen, die die physikalischen Eigenschaften der erzeugten Strahlung beeinflussen. Bei klassischen Röntgenröhren sind dabei insbesondere Transmissions- und Reflexionstarget-Röhren zu unterscheiden. Während die Röntgenstrahlung bei Reflexionstargets durch das Auftreffen von Elektronen auf einen schrägen Anodenteller erzeugt wird, entsteht die Strahlung in Fall von Transmissionstargets beim Durchdringen von Elektronen durch eine dünne Metallschicht. Der minimal mögliche Abstand einer Probe von der Röntgenquelle ist bei Reflexionstarget-Röhren größer als bei Quellen mit Transmissionstargets. Durch die verbesserte Möglichkeit der Kühlung kann bei Reflexionsröhren die elektrische Leistung erhöht werden, so dass die Anzahl der erzeugten Photonen bei ähnlicher Brennfleckgröße steigt. Der von Detektorseite „sichtbare“ Brennfleck ist dabei durch die Schrägstellung der Anode kleiner als der elektronische Brennfleck, verändert sich aber in Abhängigkeit des Blickwinkels (siehe dazu auch [46]). Einen Sonderfall der Reflexionsröhren stellen die besonders im medizinischen Bereich genutzten Drehanoden-Röhren dar [47]. Durch das Auftreffen der Elektronen auf ein drehbar gelagertes, rotationssymmetrisches Reflexionstarget, können sehr hohe Leistungen bei geringer Brennfleckgröße erreicht werden. Dabei wird das Target mit hoher Frequenz gedreht, so dass sich der mit Elektronen bestrahlte Bereich schnell ändert und damit die entstehende Wärme schnell abgeführt werden kann. Um höhere Auflösungen zu erzielen, werden vor allem in sogenannten Mikrofokusröhren elektromagnetische Linsen eingesetzt, die eine starke Fokussierung der einfallenden Elektronen und damit sehr geringe Brennfleckgrößen ermöglichen. Einen Spezialfall stellen auch Liquid-Metal-Jet Röntgenquellen dar. Bei diesen wird der Elektronenstrahl auf einen im Fluss befindlichen Flüssigmetallstrahl geleitet, um eine Aufwärmung des Targets zu verhindern[48].

Um für die Modellierung der Röntgenquelle nicht deren genaue Bauform kennen zu müssen, müssen die Eigenschaften der Röntgenquellen auf wenige Parameter beschränkt werden. Die entscheidenden gemeinsamen Eigenschaften aller Röntgenquellen sind die Größe des Brennflecks, das von der Quelle ausgehende energetische Spektrum der Röntgenstrahlung, die Stabilität der Intensität sowie die Größe der Brennfleckwanderung während der Auf-

nahme. Auch kann die winkelabhängige Energieverteilung (beispielsweise durch Heel-Effekt [1]) einen messbaren und zu berücksichtigenden Faktor darstellen. Im Folgenden werden zunächst die Statistik der generierten Photonen, das Röntgenspektrum sowie der Brennfleck näher betrachtet. Effekte der Brennfleckwanderung können als Abweichungen des Positioniersystems interpretiert werden und werden in Kap. 4.5 behandelt.

Statistik ausgehender Röntgenstrahlung Die durch das Auftreffen der Elektronen erzeugten Röntgenquanten entsprechen einer binomial verteilten Zufallsvariable [1]. Es gilt damit für die Wahrscheinlichkeit, dass genau y Röntgenquanten bei einer Anzahl A von Atomen, die durch die Elektronen wechselwirken können, erzeugt werden:

$$P(y) = \binom{A}{y} p^y (1-p)^{A-y} \quad (4.1)$$

Für eine große Anzahl von Atomen A und eine geringe Wahrscheinlichkeit p , dass ein Atom von einem Elektron getroffen wird, geht die Binomialverteilung in die Poissonverteilung über [49]. Die Anzahl an Photonen ist also Poisson-verteilt, mit der Wahrscheinlich P , dass (bei einem Erwartungswert \bar{y}) y Photonen die Röhre verlassen:

$$P(y) = \frac{\bar{y}^y}{y!} e^{-\bar{y}} \quad (4.2)$$

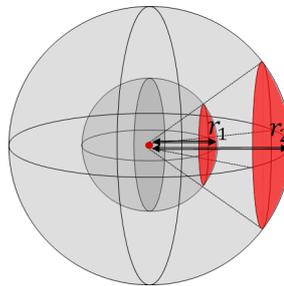


Abbildung 4.1: Quadratisches Abstandsgesetz. Die Intensität von der Quelle ausgehender Röntgenstrahlung nimmt entsprechend der umgebenden Kugeloberfläche ab. Sie entspricht bei Radius $r_1 = \frac{r_2}{2}$ also dem vierfachen der Intensität bei Radius r_2 .

Die zu einem Zeitpunkt emittierten Photonen befinden sich bei einer quasi-punktförmigen Quelle auf einer Kreisoberfläche mit Radius r , die proportional zu r^2 anwächst. Die daraus resultierende Abnahme der Photonenzahl pro Raumwinkelelement wird im Folgenden als „quadratisches Abstandsgesetz“ bezeichnet (siehe auch Abb. 4.1). Dies wird bei nicht-gebogenen Detektoren sichtbar, auf denen die Intensität zum Bildrand hin abfällt (siehe dazu Kap. 5.1.1)

Röntgenspektrum In Röntgenröhren werden Photonen in einem breiten Spektrum von Energien erzeugt. Der Hauptanteil des Spektrums entsteht durch Bremsstrahlung. Bremsstrahlung tritt auf durch die Beschleunigung der negativ geladenen Elektronen im Coulombfeld der Atomkerne des Anodenmaterials [50].

Überlagert wird das Spektrum von den charakteristischen Linien des Anodenmaterials. Diese entstammen der frei werdenden Energie der von höheren Schalen zurückfallenden Hüllenelektronen, wenn durch die Energie der einfallenden Elektronen ein Hüllenelektron herausgeschlagen wurde. Abb. 4.2 zeigt beispielhaft ein mit Monte-Carlo-Simulation errechnetes Spektrum einer Röntgenröhre mit Wolfram-Target bei 220 kV Spannung. Es zeigen sich die charakteristischen Linien der K- und L-Übergänge.

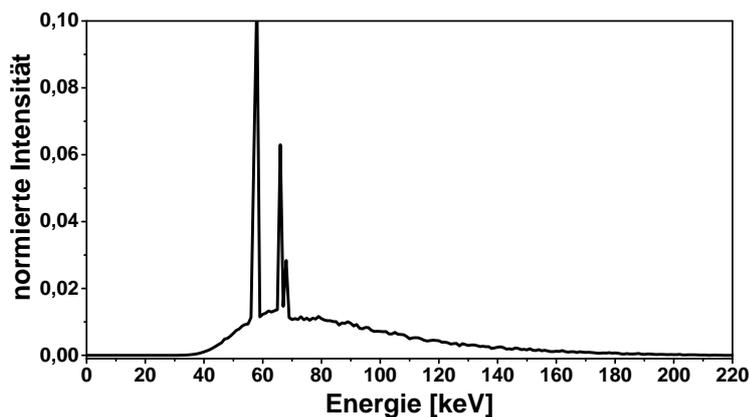


Abbildung 4.2: Monte-Carlo simuliertes Spektrum einer Röntgenquelle mit Wolfram-Target. Sichtbar sind die charakteristischen Linien sowie der durch Bremsstrahlung verursachte Verlauf.

Brennfleckform und -größe Der Brennfleck einer Röntgenröhre entsteht durch das Ein- oder Durchdringen der beschleunigten Elektronen durch das Anodenmaterial. Die Größe des Anregungsbereichs in der Anode bestimmt maßgeblich die Größe des optischen Brennflecks. Die Form des Brennflecks ist hauptsächlich durch die Form der Glühkathode, die Bauform der Anode, den Flugweg der Elektronen zum Target und den Winkel der Anode zur Flugstrecke bestimmt [51]. Mikrofokusröhren bilden Brennfleckformen, die durch eine Gaußverteilung genähert werden können [52]. Der messbare Brennfleck kann aber neben dem durch den Elektronenstrahl primär angeregten Bereich auch aus weiteren Brennflecken bestehen, die durch am Target gestreute Strahlung im Röhrenkörper verursacht werden [53]. Diese Sekundärstrahlung äußert sich als Verzerrung der Intensität im äußeren Brennfleckbereich („Sombbrero“-Struktur, siehe [52]).

Die Vermessung des Brennflecks einer Röntgenröhre muss abhängig von der Brennfleckgröße erfolgen. Während für große Brennflecke (oberhalb 0,1 mm), wie sie im Bereich der ZfP-Serienprüfung auftreten, der Brennfleck gemäß [54] direkt mittels einer Lochsitzblende gemessen werden kann, ist für Mikrofokusröhren aufgrund der sehr kleinen Abmessungen der Blenden, die nötig wären, keine direkte Messung des Brennflecks möglich. Man bedient sich dafür indirekter Methoden wie der Messung eines Drahtkreuzes oder einer Kugel mit definiertem Durchmesser (siehe [55]), oder, für noch kleinere Brennflecke, der Messung von periodischen Strukturen, die mittels Entfaltung Rückschluss auf die Brennfleckform erlauben [56].

4.3 Modell der Wechselwirkung

Beim Auftreffen der Röntgenphotonen auf ein Material mit nicht vernachlässigbarer Dichte kommt es zu Wechselwirkungen zwischen den Photonen und Elektronen des durchstrahlten Materials. Für den betrachteten Wellenlängenbereich zwischen 1 keV und 10 MeV sind vor allem vier Absorptions- und Streuprozesse entscheidend: Photoeffekt, Rayleigh-Streuung, Comptoneffekt und Paarbildung. Durch Streueffekte werden aber weitere Photonen erzeugt, die im Falle inkohärenter Comptonstreuung niedrigere Energien als das einfallende Photon haben können. Durch Photoeffekt und Paarbildung werden außerdem freie Elektronen erzeugt, die kinetische Energie tragen. Diese Kaskaden von erzeugten und abgebremsten Teilchen wechselwirken im Falle von Photonen wieder über die genannten Streu- und Absorptionsprozesse. Die freien Elektronen wechselwirken über die Paarvernichtung zu Photonen, ihnen wird durch die Erzeugung von Bremsstrahlung Energie entzogen, oder sie werden an Elektronen (Möllerstreuung) oder Positronen (Bhabastreuung) gestreut. Darüber hinaus können schon die primären Photonen Kerneffekte hervorrufen. Zu diesen zählt der Kernphotoeffekt [57], der im Bereich von 1 MeV bis 40 MeV auftritt [58].

Die Wahl, welche Effekte in der Vorwärtswärtsprojektion einer Rekonstruktion berücksichtigt werden müssen, ist zuerst begrenzt durch die Ordnung, in der sie auftreten. Kaskadeneffekte können deterministisch nur schwer erfasst werden und bleiben Domäne statistischer Monte-Carlo Simulationsmethoden. Damit kommen im oben genannten Energiebereich Photoeffekt, Comptoneffekt, Rayleigh-Streuung, Paarbildung im Kernfeld, Paarbildung im Coulombfeld der Elektronen und Kernphotoeffekt in Frage. Der Größenordnung ihres Einflusses nach können der Kernphotoeffekt, sowie die Paarbildung im Feld der Elektronen vernachlässigt werden, so dass sich die Auswahl relevanter Effekte auf zwei Absorptionseffekte (Photoeffekt und Paarbildung), sowie zwei Streuprozesse (Compton- und Rayleighstreuung) beschränken. Die folgende Übersicht bezieht sich auf die Ausführungen in [59], [60], [50], [61], [62], [63] und [64].

4.3.1 Energieabhängigkeit relevanter Absorptionsprozesse

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Absorptionsprozesses beim Durchgang eines Photons durch ein Objekt endlicher Dichte ist abhängig von der Photonenenergie, dem Objektmaterial und der Dichte des Objekts. Weitere Zusammenhänge der Absorptionswahrscheinlichkeit, wie der Zusammenhang zur Ausrichtung der Struktur eines Körpers im Strahlengang werden in dieser Übersicht vernachlässigt, da sie im Rahmen der späteren Einbindung in den Rekonstruktionsalgorithmus nicht von Relevanz sind.

Photoeffekt

Der Photoeffekt beschreibt die Ionisation eines Elektrons aus der Hülle eines Atoms oder Moleküls unter Absorption eines Photons. Die dafür mindestens notwendige Energie des Photons ist die Austrittsarbeit des Elektrons. Überschüssige Restenergie wird dem Elektron

als kinetische Energie übertragen. Da bei ansteigender Photonenenergie die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption beim Erreichen der Bindungsenergien stark ansteigt, kommt es zur Bildung von Absorptionskanten, die gegen hohe Photonenenergien nur langsam abfallen, von niedrigen Energien kommend aber sprunghaft ansteigen (siehe Abb. 4.10). Die Kante mit der höchsten Energie ist die der K-Schale, da die Elektronen darin am stärksten gebunden sind. Im Energiebereich konventioneller Röntgenröhren spielen vornehmlich die K-Kanten sowie die L-Kanten eine messbare Rolle. In computertomographischen Messungen wird daher oft versucht den Einfluss der Kantenabsorption zu minimieren, indem das Spektrum durch Vorfilter aufgehärtet wird, niedrige Energien also schon vor der Probe absorbiert werden. In Dual-Energy-Messungen werden die Kanten genutzt, um große Absorptionsunterschiede bei kleinen spektralen Änderungen zu erreichen. Der Wirkungsquerschnitt der photoelektrischen Absorption lässt sich nach [61] als zusammengesetzter Wirkungsquerschnitt der photoelektrischen Absorption der K-, L-, M- ... - Schale beschreiben:

$$\sigma_{photo} = \sigma_K + \sigma_L + \sigma_M \quad (4.3)$$

Die Absorption der K-Schale, die den größten Anteil an der Gesamtabsorption durch den Photoeffekt liefert, lässt sich über den zugehörigen Wirkungsquerschnitt beschreiben. Dieser lässt sich nach [61] durch eine Fitfunktion der Form

$$\sigma_K = Z^5 \sum_{n=1}^4 \frac{a_n + b_n Z}{1 + c_n Z} E_p^{-p_n} \quad (4.4)$$

beschreiben. Die damit in [61] evaluierten Parameter lassen den Schluss auf eine Abhängigkeit der 4,5ten Potenz zur Kernzahl Z und eine Energieabhängigkeit reziprok zur dritten Potenz für Photonen bis 500 keV zu. Für höhere Energien kann ein Zusammenhang $\sigma_K \propto E_p Z^{4,5}$ gefunden werden. Für den Bereich zwischen 10 keV und 500 keV sind in Abb. 4.3 Referenzdaten (siehe [65]) für Aluminium ($Z=13$), Eisen ($Z=26$) und Kupfer ($Z=29$), gewichtet mit der dritten Potenz der Energie aufgetragen. Es zeigt sich, dass der Zusammenhang $\sigma \propto E^3$ nur näherungsweise gegeben ist und die Werte auch für höhere Energien abweichen. Bei kleinen Energien ist eine alleinige Berücksichtigung von σ_K nicht hinreichend. Durch die Verschiebung der K-Kante zu höheren Energien bei steigender Kernladungszahl müssen auch für Elemente mit hoher Kernladungszahl weitere Absorptionskanten berücksichtigt werden. Da zur Durchstrahlung solcher Elemente aber auch signifikant höhere Photonenenergien benötigt werden, wird hier auf die Betrachtung weiterer Kanten verzichtet.

Paarbildung

Im höheren Energiebereich kommt es durch die Bildung von Elektron-Positron-Paaren zur Absorption von Photonen. Die mindestens vom vernichteten Photon aufzuwendende Energie ist die Summe der Ruheenergien von Elektron und Positron ($E_{\min} = 2m_e c^2 \approx 1022$ keV). Da dieser Prozess aufgrund der Impulserhaltung nicht im Vakuum stattfinden kann, ist die tatsächliche minimale Energie abhängig vom Stoff, der den Differenzimpuls aufnimmt

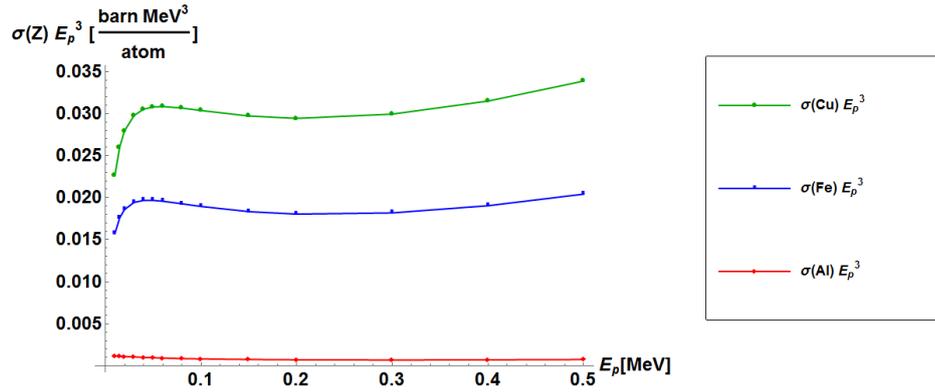


Abbildung 4.3: Wirkungsquerschnitt durch photoelektrischen Effekt multipliziert mit der dritten Potenz der Energie, aufgetragen für die Materialien Aluminium (Al), Eisen (Fe) und Kupfer (Cu) für den Energiebereich bis 500 keV. Bei einer perfekten E^3 -Abhängigkeit sind konstante Werte für die jeweiligen Materialien zu erwarten.

[50]. Nimmt ein Atomkern den Impuls auf, so spricht man von Paarbildung im Kernfeld. Wird der Differenzimpuls von einem Elektron aufgenommen, muss das Elektron mit dem Impuls eine hohe Energie aufnehmen, so dass $E_{\min} > 4m_e c^2 \approx 2044$ keV gilt. Dieser Vorgang wird als Paarbildung im Elektronenfeld bezeichnet. Der Streuquerschnitt für diesen Fall ist aufgrund des schwächeren Feldes des Elektrons deutlich kleiner.

Der Streuquerschnitt des Paarbildungsprozesses im Kernfeld lässt sich, [66] folgend, für kleine Energien (ab E_{\min}) nicht als analytisches Integral darstellen. Für den darauf folgenden Energiebereich von Energien deutlich größer als E_{\min} und bis $E \approx 70 Z^{-\frac{1}{3}}$ MeV lässt sich der Streuquerschnitt darstellen als:

$$\sigma_{\text{paar}} = r_e^2 \frac{Z^2}{137} \left(\frac{28}{9} \ln \left(\frac{2E_p}{m_e c^2} \right) - \frac{218}{27} \right) \quad (4.5)$$

Darin zu erkennen ist die Abhängigkeit $\sigma_{\text{paar}} \propto Z^2$ zur Kernladungszahl. Abb. 4.4 zeigt Gl. 4.5 für einige Materialien dargestellt gegen die entsprechenden mit Z^2 korrigierten Referenzdaten (siehe [65]). Es zeigt sich eine größer werdende Differenz zur angenommenen Abhängigkeit von der Kernladungszahl für große Z . An den Grenzen des gültigen Energiebereichs zeigt sich eine größer werdende Abweichung von der in Gl. 4.5 angegebenen Energieabhängigkeit. Die Übereinstimmung des nach Gl. 4.5 errechneten Streuquerschnitts mit den Materialdaten ist oberhalb 10 MeV am besten. Für die Bildgebung relevant ist insbesondere der Energiebereich unter 10 MeV. Aufgrund der besseren Übereinstimmung der Fit-Funktionen, die in Kap. 5.3 Verwendung finden, wird daher für den Energiebereich unter 10 MeV ein Zusammenhang $\sigma_{\text{paar}} \propto \ln(E_p)$ angenommen und auf eine direkte Verwendung von Gl. 4.5 verzichtet.

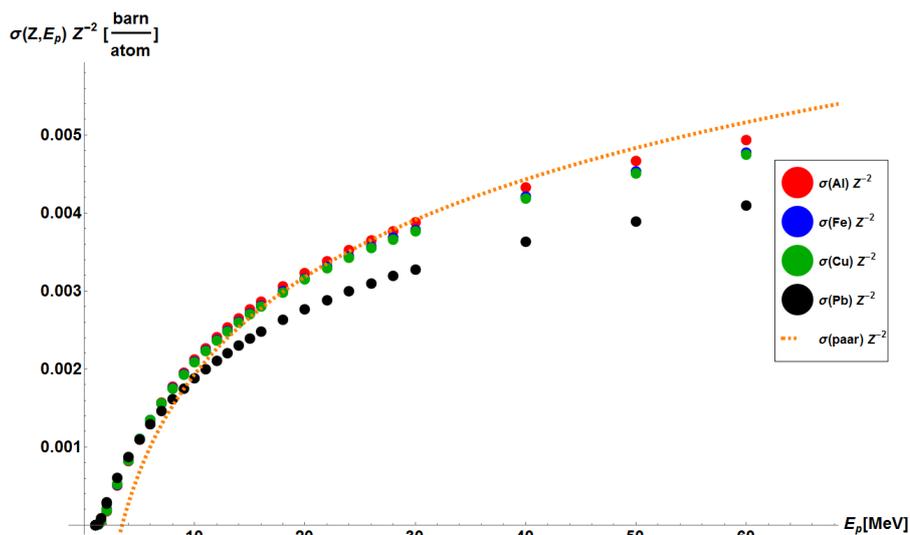


Abbildung 4.4: Wirkungsquerschnitt der Paarbildung dividiert durch die zweite Potenz der Kernladungszahl, aufgetragen für die Elemente Aluminium (Al), Eisen (Fe), Kupfer (Cu) und Blei (Pb). Die orangene Linie - $\sigma(\text{paar})$ - zeigt den in Gl. 4.5 dargestellten Zusammenhang dividiert durch Z^2 . Für Blei ($Z=82$) werden Abweichungen von Z^2 -Zusammenhang sichtbar. Die Energieabhängigkeit aus Gl. 4.5 zeigt Abweichungen im höheren, aber auch im niedrigeren und für die Bildgebung relevanten Energiebereich.

4.3.2 Energie- und Winkelabhängigkeit relevanter Streuprozesse

Neben Absorptionsprozessen findet eine Schwächung des Primärstrahls auch durch Streuung von Photonen statt. In Streuprozessen wird ein Photon des einfallenden Strahls abgelenkt und in eine Richtung ausgesandt, die durch eine winkelabhängige Streufunktion, also die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Winkel zwischen einfallender und gestreuter Photonenbahn, festgelegt ist. Zu unterscheiden sind dabei allgemein elastische und inelastische Streueignisse. Elastische Streuung ist energierhaltend, so dass das neu ausgesendete Photon die selbe Energie wie das einfallende Photon besitzt. Bei inelastischen Streueignissen wird Energie auf weitere Effektteilnehmer übertragen, so dass das gestreute Photon eine niedrigere Energie als das einfallende Photon besitzt.

Rayleighstreuung

Rayleighstreuung bezeichnet den Stoßprozess eines einfallenden Photons mit fest gebundenen Hüllenelektronen, bei dem das gesamte Atom den Rückstoß aufnimmt [64]. Dabei regt das Photon die Elektronenhülle zu erzwungenen Schwingungen gleicher Frequenz an. Die Schwingung der Elektronen verursacht ein Abstrahlen der aufgenommenen Energie in Form eines Photons gleicher Energie (siehe auch [64]). Die Wahrscheinlichkeit für ein Eintreffen dieses Streueignisses ist abhängig vom atomaren Formfaktor $F(Z, E)$ des durchstrahlten Materials. Der elektromagnetisch ableitbare differentielle Thomson-Wechselwirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$ ist der Grenzfall des differentiellen Klein-Nishina-Wechselwirkungsquerschnitts (Gl. 4.10) bei kleinen Energien und gibt die Grundverteilungsfunktion der Rayleighstreuung

an. Es gilt für den differentiellen Rayleigh-Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma_{\text{R}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{T}}}{d\Omega} [F(Z, E_p, \theta)]^2 = r_e^2 \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} [F(Z, E_p)]^2 \quad (4.6)$$

Die Bestimmung des atomaren Formfaktors $F(Z, E)$ ist nur für das Wasserstoffatom direkt aus der Schrödingergleichung möglich. In diesem Fall ergibt er sich zu:

$$F(1, E_p, \theta) = \left[1 + 4\pi^2 a_0^2 \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2}) E_p}{hc} \right) \right]^{-2} = \left[1 + 4\pi^2 a_0^2 x(E_p, \theta) \right]^{-2} \quad (4.7)$$

Hin zu höheren Kernladungszahlen existiert eine Vielzahl von Lösungsansätzen (siehe [62]). Baro et al. [67] zeigten eine gute Annäherung an gemessene Referenzdaten durch die Kurvenanpassung eines Polynoms (siehe dazu auch [59]). Mit Hilfe der Funktion

$$F(Z, x(E_p, \theta)) = \begin{cases} Z \frac{1 + a_1 x(E_p, \theta)^2 + a_2 x(E_p, \theta)^3 + a_3 x(E_p, \theta)^4}{(1 + a_4 x(E_p, \theta)^2 + a_5 x(E_p, \theta)^4)^2} \\ \max(F(Z, E, \theta), F_K(q, Z)) \end{cases}, \text{ wenn } Z > 10 \text{ und } F(Z, E, \theta) < 2 \quad (4.8)$$

wurden die Parameter a_1 bis a_5 für eine große Zahl von Elementen bestimmt.

Darin gilt für den Impulsübertrag x :

$$x(E_p, \theta) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2}) E_p}{hc} \quad (4.9)$$

mit Lichtgeschwindigkeit c , Planckschem Wirkungsquantum h und einfallender Photonenenergie E_p . Die Darstellung mit Hilfe des Impulsübertrags folgt hier der üblichen Notation in der Streutheorie, die es erlaubt Streuexperimente vergleichbar zu machen [68], da mit $\frac{E_p}{hc} = \frac{1}{\lambda}$ eine Normierung auf die Wellenlänge erfolgt.

Die Korrektur des gefitteten Formfaktors mit Hilfe von $F_K(q, Z)$ findet hier keine Berücksichtigung, da sie nur im Fall großer Winkel oder hoher Photonen-Energien auftritt. Bei großen Photonenenergien wird die Rayleighstreuung vernachlässigbar klein, bei großen Streuwinkeln nicht detektierbar im Sinne einer Streuung erster Ordnung.

Abb. 4.5 zeigt die totalen Streuquerschnitte der elastischen Streuung für einige Elemente aus Referenzdaten (siehe [65]) zusammen mit der durch Gl. 4.6 und Gl. 4.8 errechneten Näherung.

Comptonstreuung

Comptonstreuung bezeichnet die inelastische Streuung von Photonen durch den Compton-Effekt. Dabei kollidiert ein einfallendes Photon mit einem Elektron. Dieses Elektron wird in der theoretischen Herleitung des Streuquerschnitts nach Klein und Nishina ungebunden angenommen. Die Energie des Photons wird beim Stoß an das Elektron als kinetische Energie in Form eines neuen Photons größerer Wellenlänge abgegeben, das unter einem Winkel θ emittiert wird. Der winkelabhängige Wechselwirkungsquerschnitt für ein einzelnes

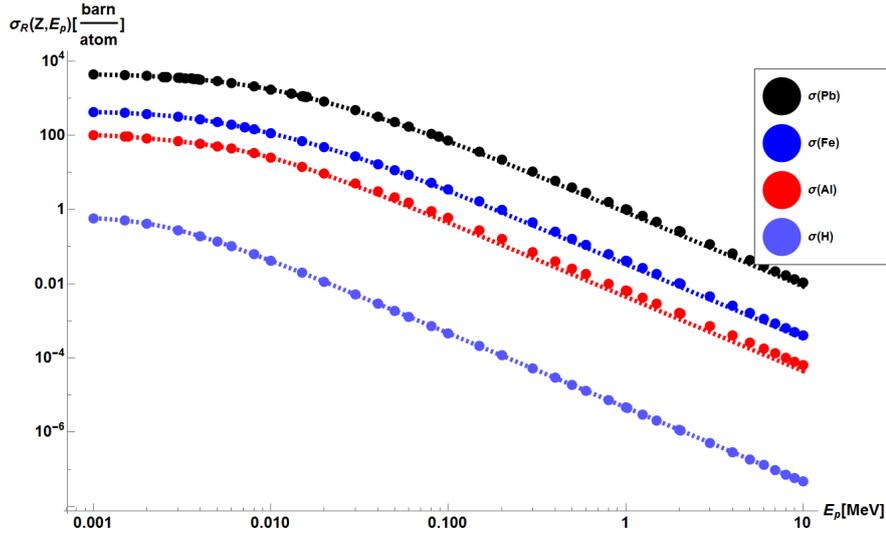


Abbildung 4.5: Wechselwirkungsquerschnitt der elastischen Streuung. Die Datenpunkte entstammen Referenzdaten ([65]) für Wasserstoff ($Z=1$), Aluminium ($Z=13$), Eisen ($Z=26$) und Blei ($Z=82$). Die Linien zeigen die dazugehörigen, nach Gl. 4.6 und Gl. 4.8 errechneten Werte.

Elektron lässt sich in Form der Klein-Nishina-Gleichung angeben (siehe auch [61]):

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} [1 + k(1 - \cos(\theta))]^{-2} \left[1 + \cos^2(\theta) + \frac{k^2(1 - \cos(\theta))^2}{1 + k(1 - \cos(\theta))} \right] \quad (4.10)$$

Dabei bezeichnet $k = \frac{E_p}{m_e c^2}$ das Verhältnis der Energie des einfallendes Photons E_p zur Ruheenergie des Elektrons.

Aus der Integration über alle Raumwinkel lässt sich der totale Wirkungsquerschnitt pro Elektron angeben zu [62]:

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2 \left(\frac{1+k}{k^2} \left[\frac{2(1+k)}{1+2k} - \frac{\ln(1+2k)}{k} \right] + \frac{\ln(1+2k)}{2k} - \frac{1+3k}{(1+2k)^2} \right) \quad (4.11)$$

Die Abhängigkeit von der Kernladungszahl ist gegeben durch die Anzahl zur Verfügung stehender Elektronen, was durch $\sigma_C \propto Z$ beschrieben werden kann [61]. Die Anzahl tatsächlich zur Verfügung stehender Elektronen ist allerdings beschränkt auf die quasi freien, also schwach gebundenen Elektronen. Um die Abhängigkeit des Streuquerschnitts des betrachteten Materials von der Bindung der Elektronen zu berücksichtigen, wird der winkelabhängige Streuquerschnitt mit der Funktion $S(Z, E_p, \theta)$, der ISF („Incoherent Scattering Function“), multipliziert [69]. Diese Funktion der Kernladungszahl Z und der Energie des einfallendes Photons lässt sich für das Wasserstoff-Atom in direktem Zusammenhang zum atomaren Formfaktor berechnen ([62]):

$$S(Z, E_p, \theta) = 1 - [F(Z, E_p)]^2 \quad (4.12)$$

In Abb. 4.6 wird der Wechselwirkungsquerschnitt durch Comptonstreuung winkelabhängig für das Wasserstoffatom dargestellt. Darin ist deutlich der Einfluss der ISF zu erkennen,

die die Streuung in Vorwärtsrichtung unterdrückt. Die ISF kann (siehe [67]) durch eine Fitfunktion der Form

$$S(Z, E_p, \theta) = Z \frac{1 - (1 + b_1 x(E_p, \theta)^2 + b_2 x(E_p, \theta)^3 + b_3 x(E_p, \theta)^4)}{(1 + b_4 x(E_p, \theta)^2 + b_5 x(E_p, \theta)^4)^2} \quad (4.13)$$

mit den 5 Paramtern b_1 bis b_5 und dem Impulsübertrag $x(E_p, \theta) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})E_p}{hc}$ dargestellt werden. Die Parameter wurden in [67] durch Anpassung der Funktion an in [62] tabellierte Daten evaluiert. Der Unterschied zwischen einfacher differentieller Klein-Nishina-Funktion und ihrer Gewichtung mit der ISF wird in Abb. 4.6 gezeigt. Gerade im Bereich der für die CT relevanten Streuung im Bereich bis 10° Öffnungswinkel ist die durch die ISF verursachte Differenz deutlich sichtbar.

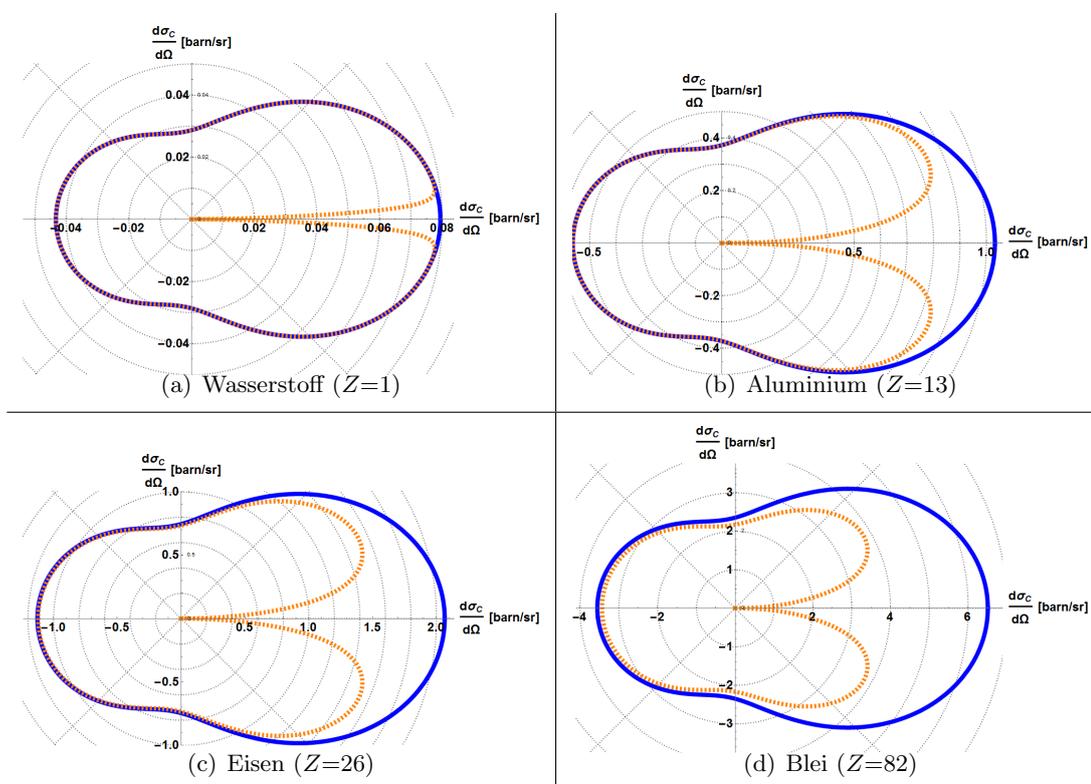


Abbildung 4.6: Winkelabhängigkeit des Wechselwirkungsquerschnitts der Comptonstreuung bei 100 keV (Einheit $\frac{\text{barn}}{\text{sr}}$). Es wird die nach [67] mit Gl. 4.13 gewichtete differentielle Klein-Nishina-Gleichung mit der einfachen differentiellen Klein-Nishina-Gleichung verglichen. Dabei ist die Funktion ohne Gewichtung durch die ISF als durchgehende blaue Linie, die gewichtete Funktion als orange-gestrichelte Linie dargestellt. Das einfallende Photon trifft in diesen Darstellungen vom linken Bildrand auf das Elektron im Koordinatenursprung.

Abb. 4.7 zeigt die winkelintegrierte Klein-Nishina-Funktion aufgetragen gegen Referenzdaten [65]. Neben der Streuung über die Raumwinkel tritt beim Comptoneffekt eine Energieverschiebung auf, die mit steigender Energie des einfallenden Photons und dem Streuwinkel θ an Einfluss gewinnt. Dies wird bei der Betrachtung der relativen Energieverschiebung sichtbar, wie sie in Abb. 4.8 aufgetragen ist. Der prozentuale Anteil der Energie, der in kinetische Energie übergeht, steigt bei gleichem Streuwinkel mit der Energie des einfallenden Photons an. Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn Messungen bei sehr hohen

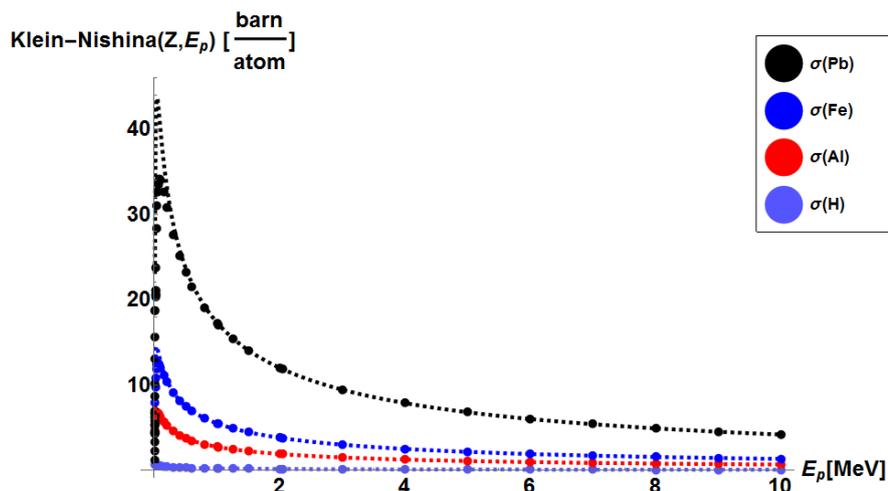


Abbildung 4.7: Winkelintegrierte Klein-Nishina-Funktion nach Gl. 4.11 aufgetragen gegen Referenzmaterialdaten aus [65]. Die Referenzdaten sind als Punkte dargestellt. Gezeigt werden beispielhaft die Daten für Wasserstoff (H), Aluminium (Al), Eisen (Fe) und Blei (Pb).

Energien auf Energie-integrierenden Detektoren aufgenommen werden. Abb. 4.9 zeigt die Energieabhängigkeit der Absorption in $\text{Gd}_2\text{O}_2\text{S}$, einem häufig verwendeten Szintillationsmaterial. Die Absorption des Materials steigt gegen niedrige Energien stark an, was eine höhere Gewichtung von Streustrahlung im niedrigen Energiebereich bewirkt. Der Effekt verstärkt sich für mehrfach gestreute Photonen.

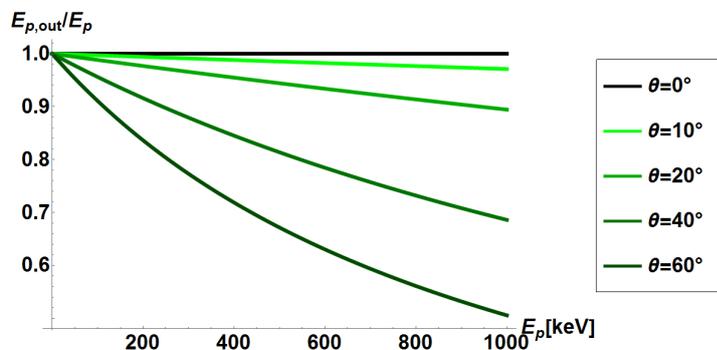


Abbildung 4.8: Relativer Anteil der Energie der gestreuten Compton-Photonen an der Energie der einfallenden Photonen in Abhängigkeit des Streuwinkels θ für Energien von 1 keV bis 1 MeV.

4.3.3 Gesamtabsorption

Der totale Wechselwirkungsquerschnitt σ_{tot} setzt sich additiv aus den einzelnen Wirkungsquerschnitten der absorbierenden und streuenden Anteile zusammen. Unter Berücksichtigung der hier vorgestellten Absorptionseffekte (Photoeffekt σ_{photo} und Paarbildung σ_{paar}) und Streueffekte (Rayleighstreuung σ_{R} und Comptonstreuung σ_{C}) gilt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{R}} + \sigma_{\text{photo}} + \sigma_{\text{C}} + \sigma_{\text{paar}} \quad (4.14)$$

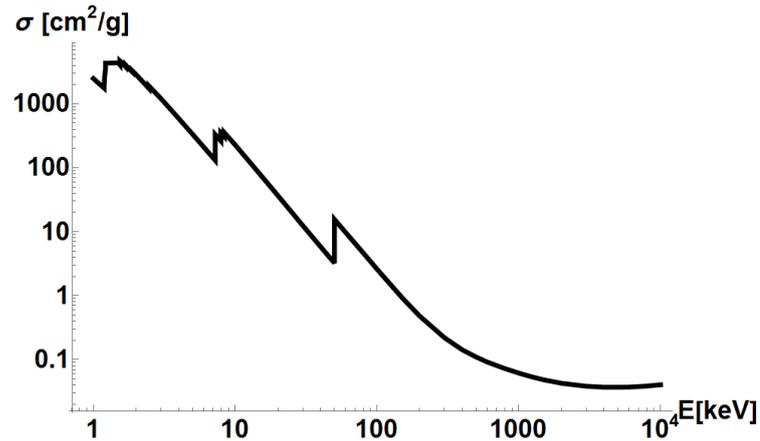


Abbildung 4.9: Gesamtwirkungsquerschnitt von $\text{Gd}_2\text{O}_2\text{S}$, einem typischen Szintillationsmaterial von Röntgendetektoren. Durch den größeren Wirkungsquerschnitt für spektrale Anteile kleiner Energien werden diese häufiger detektiert.

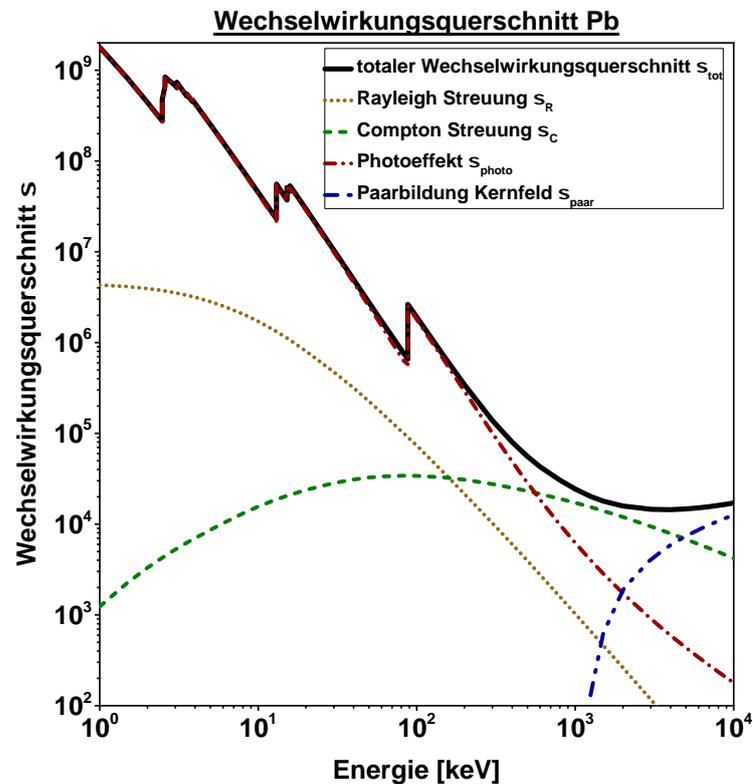


Abbildung 4.10: Zusammensetzung des totalen Wechselwirkungsquerschnitts σ_{tot} am Beispiel von Blei (Pb) für den Energiebereich von 1 keV bis 10 MeV. Die Daten entstammen der Referenzdatenbank [65].

Der Schwächungskoeffizient μ kann daraus unter Berücksichtigung der Materialdichte ρ berechnet werden:

$$\mu = \rho \sigma_{\text{tot}} \quad (4.15)$$

Mit der Proportionalität der Intensitätsabnahme dy einer monochromatischen Intensität zu einer infinitesimalen Weglänge dx durch ein Material mit Schwächungskoeffizient μ kann das

Lambert-Beersche Gesetz gefunden werden (Herleitung nach [70]). Die Differentialgleichung kann aufgestellt werden zu:

$$\frac{dy}{y} = -\mu dx \quad (4.16)$$

Die Integration vom Initialwert $y_{i,0}$ bis y beziehungsweise vom Ort 0 bis zum Ort x führt zum Lambert-Beerschen Gesetz:

$$\int_{y_{i,0}}^y \frac{dy'}{y'} = - \int_0^x \mu dx' \quad (4.17)$$

$$y = y_{i,0} \exp(-\mu x) \quad (4.18)$$

In nicht-homogenem Material gilt:

$$y = y_{i,0} \exp\left(-\int_0^x \mu(x') dx'\right) \quad (4.19)$$

4.4 Modell des Detektors

Röntgendetektion kann durch die Schwärzung eines Films, die Anregung eines Speicherleuchtstoffs, durch pixelierte Flachbild-Detektoren, Halbleiterdetektoren oder weitere Methoden erfolgen. Aufgrund der Notwendigkeit einer elektronischen Weiterverarbeitung der Daten wird der Fokus hier auf digital auslesbare Detektortypen gelegt. Der bei diesen Detektoren grundlegende Vorgang ist die Konversion der Röntgenphotonen in elektrische Impulse. Man unterscheidet dabei zwei hauptsächliche Detektortypen: Direkt- und indirekt konvertierende Detektoren.

Bei indirekt konvertierenden Detektoren wird die Röntgenstrahlung, in Abhängigkeit der Energie des Photons und des Szintillationsmaterials, von einer Fluoreszenzschicht absorbiert. In der Fluoreszenzschicht entstehen aus einem einfallenden Photon freie Elektron-Loch-Paare, die über dotierte Aktivatorzentren rekombinieren und über die niedrigeren Energiestufen der Zentren Licht im sichtbaren Bereich emittieren [30]. Typische Szintillatormaterialien sind NaI, CsI, Gd₂O₂S oder CdWO₄. Das davon ausgestrahlte sichtbare Licht wird anschließend von Photodioden aufgefangen, die entweder flächig hinter dem Szintillatormaterial angebracht sind oder den Szintillator über eine Optik abbilden.

Direkt konvertierende Detektoren bestehen aus einer Halbleiterschicht (zB. Si, GaAs, CdTe), in der bei Absorption eines Röntgenphotons eine Wolke freier Elektronen entsteht. Diese wird über ein elektrisches Feld zu Pixelelektroden hinter dem Halbleitermaterial beschleunigt. Die freien Elektronen werden dort direkt in ein elektrisches Signal umgewandelt. Durch diese Methode ergeben sich verbesserte Ortsauflösungen, da keine optische Streuung auftritt. Dieser auflösungssteigernde Effekt wird allerdings durch die bauformbedingte Mindestgröße der Pixelelektroden gemindert.

Die häufiger eingesetzten indirekt konvertierenden Detektoren für Röntgenphotonen geben also, je nach Bauform, nicht nur die poissonverteilten Röntgenquanten, die das Objekt direkt durchstrahlt haben, als Signal aus, sondern auch Streustrahlung aus dem Material des

Szintillators und der Optik. Durch Inhomogenitäten in Szintillationsmaterial oder Halbleiter treten außerdem pixelabhängige Sensitivitäten auf. Bei indirekt konvertierenden Detektoren werden außerdem mit steigender Energie der Röntgenphotonen mehr sichtbare Photonen erzeugt. Das Signal, das von den Photodioden aufgefangen wird, ist über alle Energieanteile des Röntgenspektrums integriert. Es enthält keine Information zur spektralen Verteilung der Photonen, die zum ausgelesenen Wert beigetragen haben.

Hinsichtlich des Detektormodells wird hier nicht auf einzelne Systeme oder Bauformen näher eingegangen, sondern es werden die modellierbaren Eigenschaften des Detektionssystems zusammengefasst. Größen, die auf den zu modellierenden Messprozess Einfluss haben, sind die tatsächlich gemessene Verteilung des Rauschens, das Szintillationsmaterial und dessen energieabhängige Detektionswahrscheinlichkeit sowie die Streustrahlung in Szintillator und Optik. Daneben wird im Folgenden kurz auf Bildfehler eingegangen, die nicht im Sinne einer Vorwärtsprojektion modellierbar sind, aber vor oder während der Rekonstruktion korrigiert werden müssen.

4.4.1 Quantenrauschen

Das Quantenrauschen auf dem Detektor kann durch eine Poissonverteilung beschrieben werden, da die Detektionswahrscheinlichkeit der einfallenden, poissonverteilten Intensität im Detektor wieder der eines Absorptionsprozesses entspricht, also selbst als poissonverteilt betrachtet werden kann. Energieintegrierende Detektoren nehmen die von der Quelle ausgesandten, polychromatisch bis zur Maximalenergie verteilten Photonen allerdings als energiegewichtete Summe auf. Den Ausführungen in [31] folgend kann das mittlere gemessene Signal eines Detektors durch das Energieintegral bis zur Maximalenergie des Spektrums $E_{\max} = eU$ mit der Beschleunigungsspannung U der Röntgenröhre dargestellt werden:

$$y = \int_0^{E_{\max}} a(E)N(E)T(E)A(E)dE \quad (4.20)$$

Dabei stellen $N(E)$ das Quellspektrum, $T(E)$ die Transmissionswahrscheinlichkeit und $A(E)$ die Detektionswahrscheinlichkeit dar. Der energieabhängige Parameter $a(E)$ ist konstant im Falle photonenzählender Detektoren. Im Falle energieintegrierender Detektoren gilt näherungsweise $a(E) = gE$ mit einer bauformabhängigen Konstanten g . Das Signal ist dabei für jede Energie eine poissonverteilte Zufallsvariable. Mit Hilfe der aus diesem Modell folgenden zusammengesetzten Poissonverteilung wurde in [32] ein statistischer Rekonstruktionsansatz entwickelt, von dem aber keine signifikante Verbesserung der Bildqualität gegenüber einem einfachen Poisson-Ansatz nachgewiesen werden konnte. Dementsprechend wird in den folgenden Kapiteln auf eine statistische Formulierung verzichtet, die über die Poisson-Verteilung hinausgeht.

4.4.2 Detektionswahrscheinlichkeit

Die Absorptionswahrscheinlichkeit im Detektor ($A(E)$ in Gl. 4.20) ist neben der Energie insbesondere vom Szintillationsmaterial und der Dicke des Szintillationsmaterials des Detektors abhängig. Die direkt in sichtbares und damit von Photodioden aufnehmbares Licht umgewandelte Intensität ist proportional zur Anzahl an Photonen (und damit bei indirekt konvertierenden Detektoren proportional zur deponierten Energie), die im Szintillatormaterial absorbiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption sinkt mit der Energie (siehe Kap. 4.3.1), steigt mit der Szintillatordicke und steigt durch die Absorptionskanten bei bestimmten Energien sprunghaft an.

Abb. 4.11 zeigt $A(E)$ für vier typische Szintillationsmaterialien bei unterschiedlichen Di-

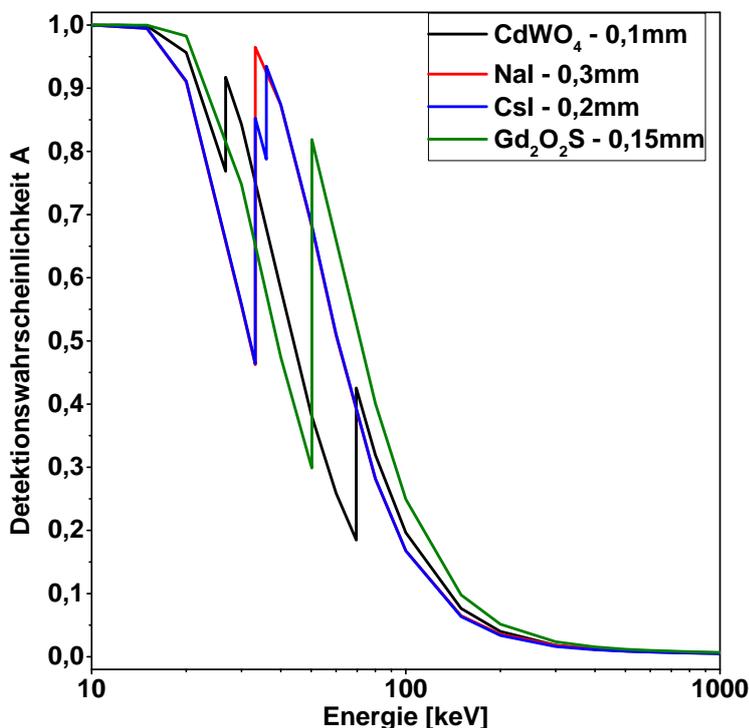


Abbildung 4.11: Detektionswahrscheinlichkeit $A(E)$ als Funktion der Energie für vier typische Szintillationsmaterialien bei je unterschiedlichen Dicken. Die zugrunde liegenden Daten entstammen der Referenzdatenbank [65].

cken. Die stark erhöhte Wahrscheinlichkeit einer Absorption bei niedrigen Energien bewirkt eine höhere Gewichtung niedriger Energien im *effektiven Spektrums*, also dem mit $A(E)$ gewichteten Quellspektrum.

4.4.3 Auflösungsbeeinflussende Effekte

Die Auflösung eines Detektorsystems ist vornehmlich durch dessen *Pixelgröße*, also durch die Größe der sensitiven Fläche vorgegeben, die einzeln ausgewertet werden kann. Wird der Szintillator aber durch eine Optik auf den CMOS-Sensor abgebildet, ist die Pixelgröße

nahezu beliebig variierbar. Der auflösungsbegrenzende Effekt ist dann die Streustrahlung, die innerhalb des Szintillators entsteht. Je dicker die fluoreszierende Schicht ist, desto mehr Strahlung wird in Nachbarbereiche gestreut, wodurch die effektive Auflösung des Detektors sinkt. Dieser Effekt lässt sich, in der Näherung einer gegen seine Fläche vernachlässigbaren Szintillatordicke, durch eine zweidimensionale Punktspreizfunktion (PSF) beschreiben, die von der Energie der einfallenden Strahlung abhängt. Dieser Prozess ist in Abb. 4.12 schematisch wiedergegeben.

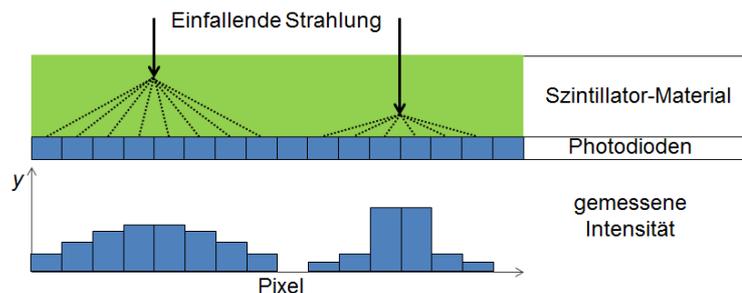


Abbildung 4.12: Schema der Detektor-internen Streuung. Je dicker das Szintillationsmaterial ist, desto unschärfer wird das durch das Röntgenquant ausgelöste Signal wiedergegeben. Der Vorgang kann mittels einer Punktspreizfunktion (PSF) beschrieben werden.

Neben der internen Detektorstreustrahlung entspricht die sensitive Fläche eines Detektorpixels nicht der gesamten Fläche des Sensors, da Zuleitungen und Ausleseelektronik Platz finden müssen [1]. Das Verhältnis wird als *Füllfaktor* bezeichnet. Diesem Faktor wird im Modell des Vorwärtsprojektors durch Überabtastung Rechnung getragen werden (siehe Kap. 5.2.2).

4.4.4 Bildfehler

Neben den direkt auflösungsbeeinflussenden Effekten wie der PSF, treten bei nahezu allen Detektoren Bildfehler auf, die in den meisten Fällen durch eine Vorbearbeitung der Projektionsdaten korrigierbar sind (siehe dazu Kap. 5.1.1). Dazu zählen neben Pixelfehlern, also dem vollständigen Ausfall einiger CMOS-Elemente, auch eine unterschiedliche Verstärkung einzelner Pixel oder Pixelarrays. Während ausgefallene Pixel häufig durch einen lokalen Median der umliegenden Pixel ersetzt werden, können sie in iterativen Verfahren vollständig aus der Berechnung ausgeschlossen werden. Die unterschiedliche Verstärkung wird durch eine Hellbildkorrektur berichtigt. Diese verhindert auch einen Abfall der Intensität eines Kegelstrahls zu den Seiten des Detektor durch den größeren Abstand der Detektorpixel zur Quelle (siehe Kap. 5.1.1).

Daneben kann es durch die Verstärkung des Detektorsignals zu einer Signalübermittlung ohne Bestrahlung der Detektorfläche kommen. Dies äußert sich als Hintergrund auf den Messdaten und kann durch eine Dunkelbildkorrektur, also den Abzug des ohne Strahlung aufgenommenen Bildes von den Projektionen, ausgeglichen werden. Daneben kann ein

Nachleuchten des Detektors auftreten, wenn in CT Aufnahmen die Bildakquise schneller erfolgt als alle zeitverzögerten Abstrahlungen sichtbaren Lichts abgeklungen sind.

4.5 Modell der Aufnahmegeometrie

Das Modell der Aufnahmegeometrie ist in Rekonstruktionsmethoden durch die Positionen von Quelle, Drehachse und Detektor festgelegt. Wie in Kap. 3.2 beschrieben, kann die gefilterte Rückprojektion nur für äquidistant abgetastete Kegelstrahl- oder Helix-Geometrie angewendet werden. Iterative Methoden können beliebige Positionen von Quelle, Detektor und Objekt zulassen, auch wenn dadurch nicht gesichert ist, dass alle nach [2] (siehe Kap. 2.1) für die Rekonstruktion notwendigen Daten aufgenommen wurden.

Die Darstellung des Modells erfolgt über die Systemmatrix A , die mit ihren Elementen a_{ij} für alle Strahlen i aller Projektionen und alle Voxel j eine Durchstrahlungslänge des Voxels festlegt (siehe Kap. 3.3). Mit ihr ist das Aufnahmesystem vollständig festgelegt. Die endliche Strahlbreite der Strahlen i kann in der Systemmatrix durch Überabtastung, also durch eine feinere Unterteilung in Einzelstrahlen berücksichtigt werden.

Das Modell der Aufnahmegeometrie kann also eine beliebige Form annehmen und wird dann in der Rekonstruktion zum besten Ergebnis führen, wenn die Systemmatrix ideal mit der realen Aufnahmegeometrie übereinstimmt. Im Sinne einer modellbasierten Rekonstruktionsmethode ist also nicht die Frage nach dem Modell der Aufnahmegeometrie, sondern die Frage nach dem Umgang mit Abweichungen vom angenommenen Modell entscheidend.

4.5.1 Systematische Abweichungen

Systematische Abweichungen können einfache, konstante Verschiebungen von einer oder mehreren Komponenten des Aufnahmesystems sein, die nicht in der Systemmatrix integriert sind. So sind Detektorverschiebungen („shifts“), also die Verschiebung des Detektormittelpunkts relativ zur Verbindungsgeraden zwischen Quelle und Drehachse, häufig auftretende und leicht korrigierbare Probleme. Ebenso treten häufig Drehungen und Verkippen der Detektorfläche auf oder es kommt zur Verschiebung des Brennflecks der Quelle beim Umschalten zwischen unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen.

Auch über die Messzeit nicht konstante Abweichungen können aber systematisch sein. So sind periodische Brennfleckwanderungen, die projektionsabhängig die Quellposition verändern, bei vielen Röntgenquellen zu beobachten. Brennfleckverschiebungen können auf die Erhitzung des Gehäuses zurückzuführen sein, die die Beschleunigungsstrecke der Elektronen innerhalb der Röntgenquelle ändert und so die Ausrichtung einer eventuell vorhandenen Elektronenoptik stört.

Temperaturveränderungen mit konstantem Gradienten sind auch als lineare Objektverschiebungen erkennbar. Schon Erhöhungen der Temperatur von wenigen Grad Celsius wirken sich, abhängig von Material und Größe des Manipulatorsystems, durch Objektverschiebungen von bis zu einigen μm aus. Dies führt insbesondere bei stark geometrisch vergrößerten

Abbildungen und hohen Ortsauflösungen zu Bildartefakten nach der Rekonstruktion. Verschiebungen durch Wärmeausdehnung infolge von Temperaturänderungen können entweder in die Abbildungsmatrix integriert werden oder unter Annahme eines nahezu parallelen Strahlenverlaufs durch eine rechnerische Verschiebung des Detektorbildes korrigiert werden.

4.5.2 Zufällige Abweichungen

Neben systematischen Abweichungen stören aber häufig zufällige Abweichungen der Systemgeometrie die Rekonstruktion. Diese können von Brennfleckbewegungen durch Spannungsschwankungen oder Probenbewegungen durch Erschütterungen des Messaufbaus herrühren. Ebenso sind Probenbewegungen durch Eigenbewegung bei lebenden Proben oder medizinischen Daten, bei Veränderungen durch chemische Reaktionen oder gar durch ein Lösen der Probe von der Halterung möglich.

Daneben werden Quelle, Detektor und Manipulatorsystem auf elektrischen Achsen mit endlicher Genauigkeit bewegt. Auch der Winkel der Rotationsachse weist eine endliche Anfahr- und Wiederholgenauigkeit auf.

Veränderungen, die innerhalb einer beweglichen Probe stattfinden und damit Inkonsistenzen zwischen den Projektionen erzeugen, können kaum korrigiert werden. Ist das Objekt aber starr und seine Bewegung kann als Translation dargestellt werden, können Rekonstruktionsverfahren dazu genutzt werden, die Konsistenz der Projektionen als Bedingung für eine iterative Korrektur der Abbildungsmatrix zu verwenden (siehe Kap. 5.5).

4.6 Zusammenfassung der Modellbildung

Im Verlauf dieses Kapitels wurden Gemeinsamkeiten der Bauformen von Röntgenquellen und Detektorsystemen gesucht, um deren Einflussfaktoren auf CT-Messungen auf wenige Parameter zu begrenzen. Außerdem wurde die Wechselwirkung der Röntgenstrahlung mit Materie dargelegt, um die entscheidenden Prozesse der Absorption und Streuung berechenbar zu machen.

Fluktuationen der Quellintensität, Streustrahlung, die nicht vom gemessenen Objekt selbst stammt, und Bildfehler können vor der Rekonstruktion korrigiert werden und können somit Teil des Modells der gefilterten Rückprojektion werden.

Insbesondere aber die Energieabhängigkeit der Wechselwirkung von Strahlung zeigt sich als entscheidende Einschränkung des vereinfachten Modells. Durch den Einsatz polychromatischer Laborquellen treten nicht nur Bildartefakte auf, sondern auch die Zuweisung von rekonstruierten Grauwerten zu den Schwächungskoeffizienten einzelner Materialien ist nicht mehr gegeben. Dieser Einschränkung wird in der Modellerweiterung durch eine polychromatische Modellierung des Röntgenspektrums Rechnung getragen.

Daneben werden die Aufnahmegeometrie hinsichtlich Brennfleckgröße, Detektorpixel-Ausdehnung, aber auch hinsichtlich Abweichungen von der angenommenen Geometrie als

wichtigste Bestandteile der Modellbildung betrachtet. Das erweiterte Modell muss daher Überabtastung als Modell der endlichen Ausdehnung von Quelle und Detektorelementen beinhalten und auch die Detektor-interne Streustrahlung als Modellbestandteil aufnehmen. Darüber hinaus werden im folgenden Kapitel auch ein Modell der vom Objekt ausgehenden Streustrahlung sowie Möglichkeiten vorgestellt, das erweiterte Rekonstruktionsmodell zur Kombination unterschiedlicher Messungen zu nutzen.

Projektionsabhängige zufällige oder systematische Geometrieabweichungen werden durch ein Selbstkonsistenzmodell korrigiert.

Tabelle 4.1 zeigt eine Übersicht der in der gefilterten Rückprojektion nutzbaren Vorverarbeitungsschritte und des erweiterten Modells.

Einflussgröße	Modell der FBP	Modell-Erweiterung	
Röntgenquelle			
Fluktuationen der Quellintensität (Spannung, Photonenstrom)	Hellbildkorrektur	-	
Endliche Ausdehnung des Brennflecks	-	Entfaltung Beamlet-Überabtastung Rekonstruktionsseitige Faltung	X X X
Spektrum	Monochromatisch	Polychromatische Modellierung der Energieabhängigkeit Integrierte Spektrumsbestimmung	X X
Brennfleckwanderung	-	Iterative Geometriekorrektur	X
Winkelabhängige Energieschiebung (Heel-Effekt)	-	Winkelabhängige polychromatische Modellierung	O
Detektor			
Grobes Detektorraster	-	Detektor - Überabtastung Detektor - Füllfaktor	X X
Detektor PSF	Entfaltung der Projektionen	Faltung der Vorwärtsprojektion	X
Effektives Spektrum	-	Gewichtung des angenommenen Röntgenspektrums	X
Quantenstatistik	-	ML-Ansatz Regularisierung	X X
Elektronik-Rauschen	-	Regularisierung	X
Pixelausfälle	Filterung der Projektionen	-	
Nachleuchten	-	Berücksichtigung in Vorwärtsprojektion	O
Manipulator			
Veränderliche Geometrieabweichungen	-	Iterative Geometriekorrektur	X
Konstante Geometriefehler	Vorkorrektur Angabe von Geometrieparametern	-	
Energieabhängige Wechselwirkung			
Energieabhängigkeit	Monochromatische Näherung	Polychromatische Modellierung	X
Objekt-Streuung	Konstanter Offset	Streumodell	X
Streuung in der Objektumgebung	Hellbildkorrektur	-	
Sonstige Einflüsse			
Unterabtastung	-	Regularisierung	X

Tabelle 4.1: Überblick des aufgestellten Modells für die Modellierung des Messprozesses in computertomographischen Aufnahmen. Mögliche Modellerweiterungen, die in Kap. 5 behandelt werden, sind am rechten Rand durch X, Erweiterungen, die keine Berücksichtigung finden, mit O gekennzeichnet.

Kapitel 5

Modellbasierte Rekonstruktion

Modellbasierte Rekonstruktion beschreibt die Verarbeitung der bei der CT entstehenden Rohdaten unter der Annahme eines Modells, das über den rein mathematischen Ansatz der gefilterten Rückprojektion hinausgeht. Die Berücksichtigung dieses Modells kann in unterschiedlicher Weise erfolgen: Die Projektionsdaten können direkt vorkorrigiert werden, um sie dem Verarbeitungsmodell der Rekonstruktion anzupassen. Typischerweise erfolgt vor allen Rekonstruktionsmethoden eine Offsetkorrektur und eine Normalisierung der Daten, aber auch Strahlaufhärtungskorrekturen können in speziellen Fällen direkt auf den Projektionsdaten erfolgen. Als Ansatz für die Rekonstruktion der vorkorrigierten Daten wird hier ein iteratives Verfahren gewählt, wie es bereits in Kap. 3.3.3 beschrieben wurde. Die Modellerweiterungen werden im Allgemeinen in den Vorwärtsprojektor, in einigen Fällen auch als Erweiterung der Updategleichung implementiert.

Dafür werden projektionsbasierte Vorverarbeitungsschritte zur Entfaltung und polynomiellen Aufhärtungskorrektur zunächst aufgearbeitet und als Vergleichsmethoden etabliert. Ein erweitertes Geometriemodell soll der Wiederherstellung der Bildschärfe in Rekonstruktionen mit Brennfleckproblematik und Abbildungsfehlern des Detektors dienen und wird sowohl als Faltungsmodell als auch als direkte Modellierung untersucht. Mit dem Einsatz energieabhängiger Schwächungsmodelle für die Rekonstruktion können viele artefaktbildende Probleme der CT-Rekonstruktion thematisiert oder gar gelöst werden. Es werden dafür zwei existierende Modelle untersucht und erweitert. Durch die simultane Schätzung des Spektrums des CT-Systems wird nicht nur der Parameterraum verkleinert, sondern auch zusätzliche Information über das Aufnahmesystem geschaffen. Eine logische Fortsetzung eines energieabhängigen Schwächungsmodells stellt auch die Integration von Messungen mit unterschiedlichen Spektren in den Rekonstruktionsprozess dar, die im bis dahin entwickelten Modell ebenso direkt, wie auch als Basis für eine Zerlegung nach Schwächungsanteilen eingesetzt werden kann. Auf dem Absorptionsmodell aufbauend wird ein Simulationsmodell der Streustrahlung entwickelt und in den Vorwärtsprojektor integriert. Abschließend wird, um Problemen von thermischer Ausdehnung und Schwingungsbewegungen der Probe zu begegnen, ein rekonstruktionsintegriertes Korrelationsmodell entwickelt und getestet.

5.1 Vorverarbeitung von Projektionsdaten

Die Vorverarbeitung von Messdaten ist in vielen Fällen vorteilhaft gegenüber der Verarbeitung in der Iterationsschleife einer iterativen Rekonstruktionsmethode, da die Berechnung einmalig erfolgt und somit weniger Rechenzeit in Anspruch nimmt. Eine einmalige Bearbeitung der Eingangsbilder ist allerdings nur dann möglich, wenn die Korrelation der Information aus verschiedenen Projektionen nicht zur Berechnung benötigt wird. Dies ist insbesondere bei systematischen, bekannten Messfehlern möglich, beziehungsweise bei festen Beziehungen der Messdaten zu den für das angenommene Rekonstruktionsmodell nötigen Daten.

5.1.1 Hell- und Dunkelbild-Korrektur

Nach dem Lambert Beer'schen Gesetz (Gl. 4.18) hängt die gemessene Intensität exponentiell mit dem Schwächungskoeffizienten zusammen. Die Größe $y_{i,0}$ ist dabei die ungeschwächte Intensität, die abgeschätzt oder separat gemessen werden muss. Abschätzungen der Eingangintensität $y_{i,0}$ können auf dem Intensitätswert eines Bereichs von Detektorpixeln in einem Außenbereich der Projektionen basieren, an denen kein Objekt den Strahl schwächt. Näherungsweise kann der so generierte Intensitätswert stellvertretend für den gesamten Detektor verwendet werden. Solche Näherungen können sich aber stark von den aus Messungen generierten ungeschwächten Intensitäten unterscheiden. Dafür verantwortlich sind die in Kap. 4 beschriebenen Detektor- und Quelleneigenschaften. Insbesondere der quadratische Zusammenhang der messbaren Intensität vom Abstand der Quelle zum Detektor sorgt in Kegelstrahlgeometrie für geringere Intensitäten am Detektorrand (siehe auch Abb. 4.1). Außerdem unterscheiden sich einzelne Pixel des Detektors in ihrer Empfindlichkeit und dem ihnen eigenen durch Dunkelströme verursachten Untergrundrauschen. Um das gesamte Bild zu vereinheitlichen wird sowohl eine Hell- als auch eine Dunkelbildkorrektur durchgeführt. Dafür wird von der gemessenen Projektion das Dunkelbild, also die Abbildung des Hintergrundrauschens, abgezogen und anschließend durch das ebenfalls Dunkelbild-korrigierte Hellbild, also die Projektion ohne Objekt im Strahlengang bei selber Belichtungszeit und selbem Röhrenstrom, geteilt. Dies lässt sich für eine Projektion $\vec{y}_{\text{orig.}}$ zusammenfassen zu:

$$\vec{y} = \frac{\vec{y}_{\text{orig.}} - \vec{y}_{\text{Dunkel}}}{\vec{y}_0 - \vec{y}_{\text{Dunkel}}} \quad (5.1)$$

Zusätzlich werden häufig Median-Filter auf das gemessene Bild angewandt, um projektionsabhängig auftretende Pixelfehler auszugleichen. In Abb. 5.1 wird die hochauflösende Aufnahme einer Holzprobe gezeigt, die mit einem runden Szintillator aufgenommen wurde (siehe Bildecken). Durch die Hell- und Dunkelbildkorrektur werden Szintillatorfehler und systematische Unterschiede zwischen den Pixeln des Detektors ausgeglichen.

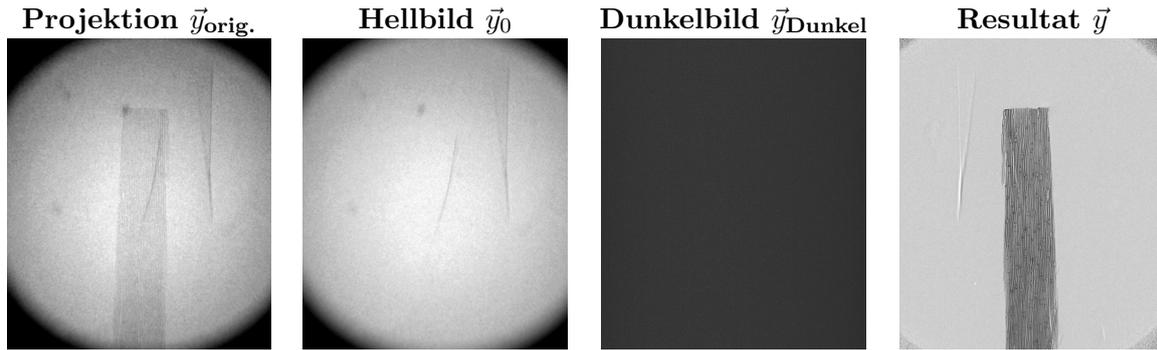


Abbildung 5.1: Verarbeitungsschritte des Hell- und Dunkelbild-Abgleichs am Beispiel einer Holzprobe. Die Grauwert-Darstellung ist für eine bessere Sichtbarkeit uneinheitlich gewählt.

Einfluss der Hellbild-Korrektur auf statistische Rekonstruktionsverfahren Die Hellbildkorrektur ist ein integrierter Bestandteil statistischer Rekonstruktionsmethoden. Dies zeigt sich in der Formulierung der Vorwärtsprojektion nach dem Lambert-Beerschen Gesetz (Gl. 4.18), in dem die ungeschwächte Intensität $y_{i,0}$ in Abhängigkeit jedes Strahls i eingeht. Werden die Projektionen durch das Hellbild geteilt, geht die in den Projektionen vorhandene Information über unterschiedliche SNR Werte in Abhängigkeit des bestrahlten Detektorpixels verloren. Der Unterschied zwischen einer MLTR-M (siehe Kap. 3.3.4) Rekonstruktion mit Hellbild-korrigierten Projektionen zur MLTR-M Rekonstruktion mit der Übergabe des Hellbilds in Abhängigkeit von i , wird am Lochplatten Simulationsphantom für einen Extremfall gezeigt. Das Hellbild wurde dabei als Normalverteilung simuliert, die zum Rand der Projektion auf 3,5 ‰ des Maximalwerts abfällt. Abb. 5.2 zeigt Linienprofile durch das Hellbild \vec{y}_0 , die Projektion \vec{y}_{orig} und die Hellbild-korrigierte Projektion $\vec{y}_{\text{HB-korr}}$ ($= \vec{y}$). Es ist erkennbar, dass das Projektionsrauschen der Hellbild-korrigierten Projektion an den Rändern zunimmt.

Die Rekonstruktionen wurden mit 100 Iterationen ohne Regularisierung durchgeführt. Die Ergebnisse der Rekonstruktionen sind in Abb. 5.3 dargestellt. Im Differenzbild zeigen sich Unterschiede in der Verteilung des Rauschens, da die Strahlen geringer Intensität unterschiedlich gewichtet in die Rekonstruktion eingehen. Dies zeigt sich auch am Signal-zu-Rauschen Verhältnis (SNR), das im Hellbild-korrigierten Rekonstruktionsbild stärker zu den Rändern hin abfällt. Die Unterschiede sind zwar auffällig und legen eine Verwendung unkorrigierter Daten in der Rekonstruktion nahe, die Intensitätsunterschiede im Hellbild des Beispiels mussten aber zur Darstellung des Effekts unrealistisch stark gewählt werden. Da der Effekt bei gewöhnlichen Strahldivergenzen von wenigen Grad geringer ausfällt, werden in folgenden Beispielen Hellbild-Korrekturen vor der Rekonstruktion auch bei statistischen Verfahren durchgeführt. Intensitätsabweichungen in der Projektion, die von einer unterschiedlichen Verstärkung des Signals herrühren, lassen sich zudem nicht von Abweichungen trennen, die durch die Strahldivergenz auftreten. Verstärkungsbedingte Intensitätsunterschiede sind nicht auf eine veränderte Photonstatistik zurückzuführen, so dass dabei keine Verbesserung des Rekonstruktionsergebnisses zu erwarten ist. Bei Simulationsdaten wird das Projektionsrauschen nach der Korrektur simuliert, um den Einfluss der Strahldivergenz

auf das Rekonstruktionsrauschen auszuschließen.

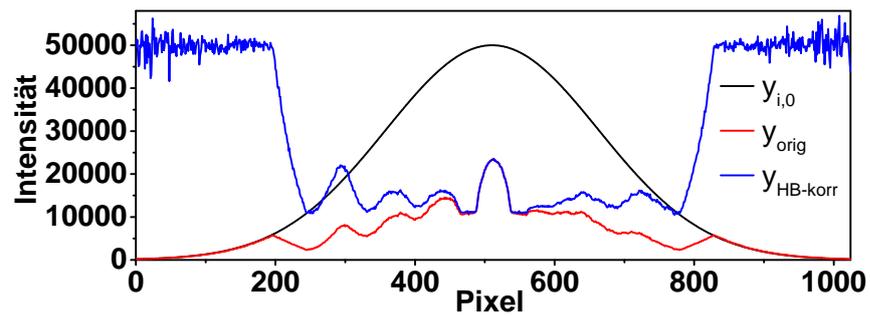
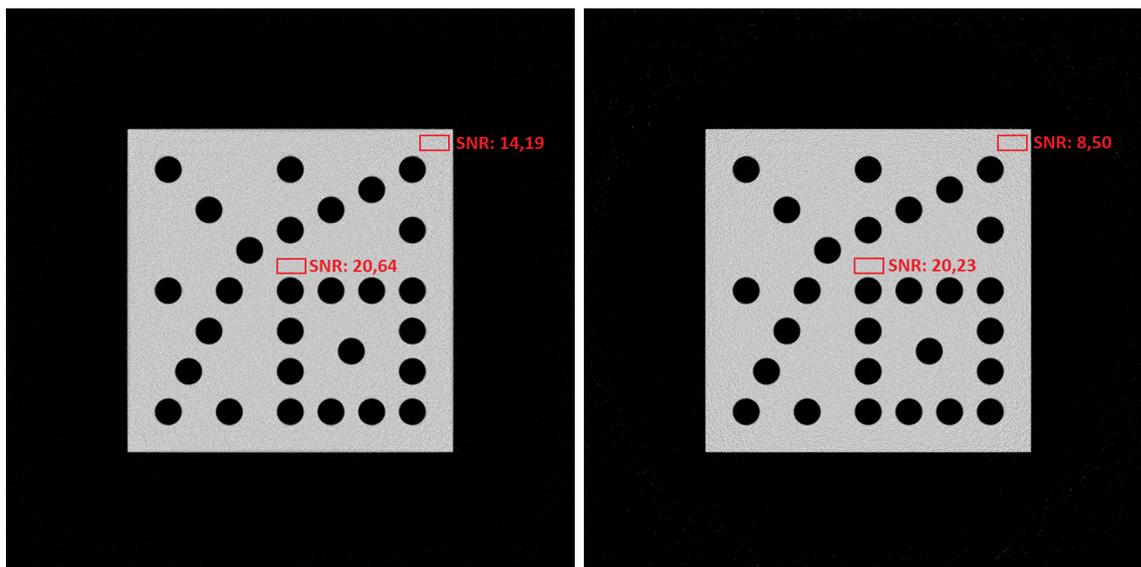
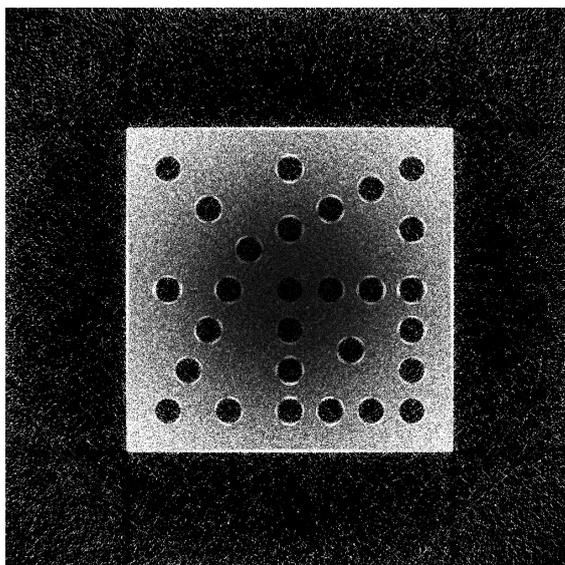


Abbildung 5.2: Beispiel Lochplatten-Phantom: Linienprofile durch das Hellbild \vec{y}_0 , die Projektion \vec{y}_{orig} und die Hellbild-korrigierte Projektion $\vec{y}_{HB-korr}$ des simulierten Lochplatten-Phantoms. Das Hellbild wurde für die Simulation so gewählt, dass die Intensitätswerte zum Rand hin stark abfallen, um den Einfluss der Hellbild-Korrektur auf das Rekonstruktionsergebnis einer iterativen statistischen Rekonstruktion zu zeigen.



(a) Rekonstruktionsergebnis mit pixelabhängiger Hellbild-Intensität $y_{i,0}$. Grauwertspreizung: (0-0,4). (b) Rekonstruktionsergebnis mit Hellbild-Korrektur vor der Berechnung. Grauwertspreizung: (0-0,4).



(c) Differenzbild der Ergebnisse mit und ohne Hellbild-Korrektur. Grauwertspreizung: (0-0,01).

Abbildung 5.3: Rekonstruktionsergebnisse des Lochplatten-Phantoms mit MLTR-M Update (siehe Kap. 3.3.4). Das Differenzbild zeigt eine unterschiedliche Verteilung des Rauschens im Rekonstruktionsergebnis, abhängig davon, ob eine Hellbild-Korrektur angewandt oder die Vorwärtsprojektion mit pixelabhängigem $y_{i,0}$ durchgeführt wurde. Im Inneren des Phantoms fallen die Unterschiede gering aus, da dort der Einfluss der Hellbild-Korrektur niedrig ist. In den Außenbereichen des Phantoms fällt das Signal-zu-Rauschen Verhältnis nach einer Hellbildkorrektur schneller ab.

5.1.2 Entfaltungsansätze

Computertomographische Aufnahmesysteme leiden unter einer Vielzahl von Abbildungsfehlern, die sich als Unschärfe in der Radiographie darstellen. Die beiden wichtigsten Einflussgrößen dieser Unschärfe, die Detektor-Punktspreizfunktion (PSF) und die geometri-

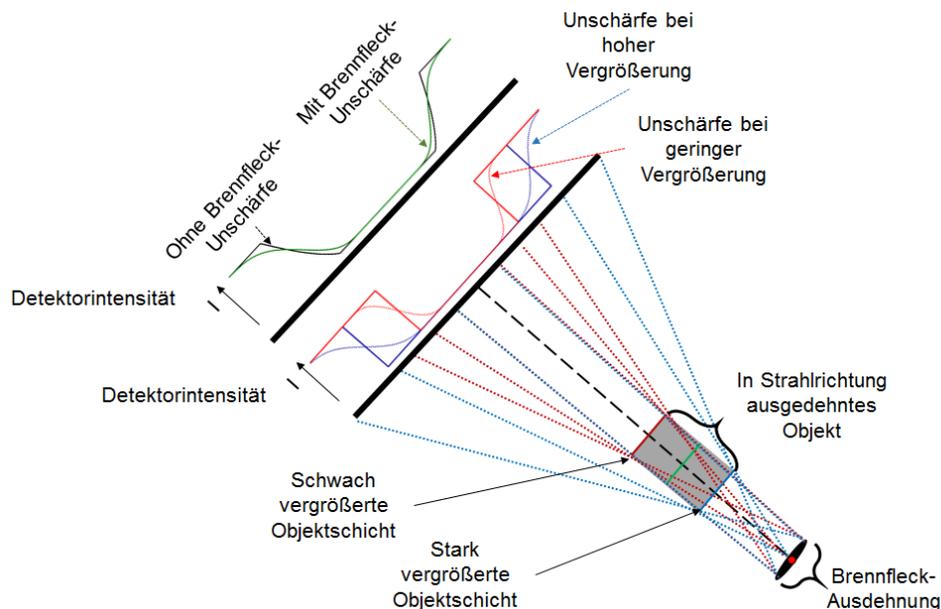


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung der Brennleck-Unschärfe bei einem in Strahlrichtung ausgedehnten Objekt. Objektnahe und objektferne Bereiche werden unterschiedlich vergrößert. Die Unschärfe der Abbildung durch den Brennleck ist somit nicht durch eine objektunabhängige Faltung des zweidimensionalen Detektorbilds darstellbar.

sche Unschärfe resultierend aus der endlichen Brennleckgröße, wurden bereits in Kap. 4 als Teil des Abbildungssystems vorgestellt. Die PSF des Detektors ist eine Unschärfe in der Detektorebene und somit gut als Faltung im Bild darstellbar. Die Unschärfe eines Punktes in der Probe durch den Brennleck dagegen ist abhängig von der Vergrößerung dieses Punktes. Dieser Effekt beginnt besonders bei kleinen Quell-Objekt-Abständen relevant zu werden, da in diesem Fall die Vergrößerungsunterschiede im Objekt zunehmen. In Abb. 5.4 sind die Unschärfe durch den Brennleck und seine vergrößerungsabhängige Auswirkung schematisch dargestellt. Die Brennleckunschärfe ist somit nicht als Faltung mit einer objektunabhängigen Funktion darstellbar.

Entfaltung der Detektorunschärfe Für eine Entfaltung der Projektionen ist die Kenntnis der Faltungsfunktion, also der Point-Spread-Function (PSF) des Systems erforderlich. Im Fall der Detektorunschärfe lässt sich die PSF mit Hilfe der LSF bestimmen (siehe dazu Kap. 2.4). Eine direkte Entfaltung mit den Messdaten führt allerdings zu verstärktem Rauschen durch numerische Fehler. Ein Fit der Messdaten mit einer entsprechenden Funktion (Hier verwendet: Normalverteilung, Lorentzfunktion oder eine Kombination mehrerer Verteilungsfunktionen, wie vorgeschlagen in [71] und [72]) macht die PSF analytisch darstellbar und verhindert eine Verstärkung des Rauschens bei der Entfaltung [73]. Die Entfaltung kann bei Messdaten mit geringem Rauschen direkt durch die Division im Fourierraum erfolgen. Der Einsatz eines Wiener-Filters ist allerdings sinnvoll um die Verstärkung der hohen Frequenzen des Bildrauschens zu unterdrücken. Eine solche Entfaltung unter Einsatz eines Wiener-Filters und eines aus der Projektion abgeschätzten Filterkerns unter Annahme einer

PSF in Form einer Gaußfunktion wird in Abb. 5.5 gezeigt. Zum Einsatz des Wiener-Filters ist es notwendig das spektrale Signal-zu-Rauschen-Verhältnis zu kennen. Das SNR kann unter der Annahme weißen Rauschens aus dem Bildspektrum abgeschätzt werden.

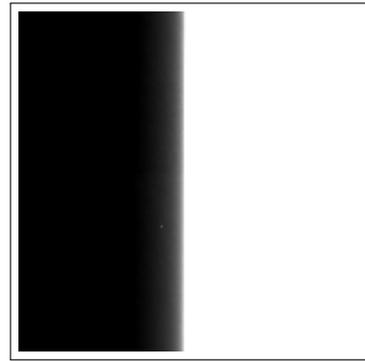
Setzt man die Entfaltung bei allen Projektionen eines Datensatzes um, so kann - bei richtig gewähltem Filterkern - die Rekonstruktionsqualität verbessert werden. Die erhöhte Kantenschärfe setzt sich in die Rekonstruktion fort und Artefakte durch die Streustrahlung im Detektor werden unterdrückt. Bei richtiger Wahl des Filterkerns wird also nicht nur die Bildschärfe erhöht, sondern auch die Projektion dem angenommenen Modell angepasst, da die Messwerte nach der Entfaltung besser dem Lambert-Beerschen Gesetz folgen. Ein Beispiel für den Effekt einer solchen Entfaltung ist in Abb. 5.5 gegeben.

Für die Anwendung der Entfaltung in der Rekonstruktion müssen entweder alle Projektionen wie im Beispiel oben entfaltet werden oder die Rekonstruktion selbst mit einem dreidimensionalen inversen Filter gefaltet werden. Für das gegebene Beispiel der Oboe, für das in Abb. 5.5 eine entfaltete Projektion gezeigt wird, ist in Abb. 5.6 das entsprechende Rekonstruktionsergebnis aus 800 entfaltetten Projektionen dargestellt. Nach der Entfaltung erscheint das Rekonstruktionsbild schärfer, was sich im zugehörigen Linienprofil als höhere Kantenschärfe zeigt (siehe z.B. Kante bei Pixel 290 in Linienprofil in Abb. 5.6). Der optische Eindruck von Bildschärfe wird allerdings auch durch stärkeres Rauschen erzeugt, das keine zusätzliche Information trägt. Der Kontrast zwischen Bereichen in denen kein Material erwartet wird, und Bereichen, in denen Material vorliegt, wird erhöht. Der Hauptanteil der Artefakte wird durch die Strahlaufhärtung gebildet. Dies zeigt sich nicht nur darin, dass die Artefakte durch Entfaltung nicht vollständig eliminiert werden konnten, sondern auch durch das Auftreten der Artefakte in den Richtungen der stärksten Absorption im Bild. Eine solche Entfaltung kann bei Messungen, die ausschließlich unter der Detektorunschärfe leiden, ein vorbereitendes (oder im Fall der Entfaltung des Rekonstruktionsvolumens ein nachträgliches) Vorgehen für eine gefilterte Rückprojektion sein. Für die modellbasierte iterative Rekonstruktion besteht (siehe Kap. 5.2) die Möglichkeit der Faltung der Vorwärtsprojektion.

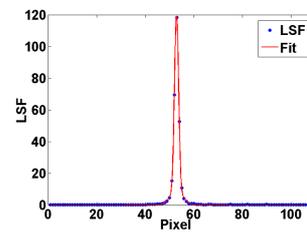
Entfaltung der Brennfleckunschärfe Hinsichtlich der Brennfleckentfaltung ist das Vorgehen ähnlich. Die Größe eines Faltungskerns kann für den Drehmittelpunkt aus der Größe des Brennflecks nach geometrischen Überlegungen bestimmt werden zu:

$$d_{\text{Faltungskern}} = \frac{\text{SDD}}{\text{SOD}} d_{\text{Brennfleck}}. \quad (5.2)$$

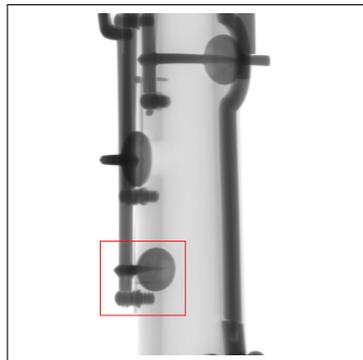
Dabei sind SDD und SOD der Objekt-Detektor- sowie der Quell-Objekt-Abstand. Da die Größe des Objekts und der daraus resultierende Öffnungswinkel den Vergrößerungsunterschied zwischen quellseitiger und detektorseitiger Objektkante angeben, kann man eine Abschätzung finden, die die Möglichkeit einer Entfaltung zur Kompensation der Brennfleckverschmierung angibt. Der maximale Unterschied der projizierten Brennfleckgröße ist



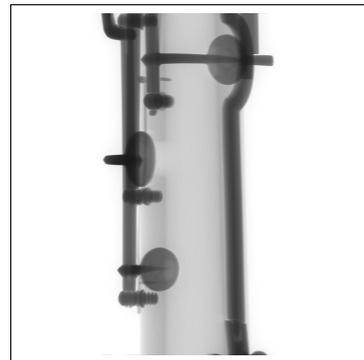
(a) Gemessene Wolframkante zur Bestimmung der LSF.



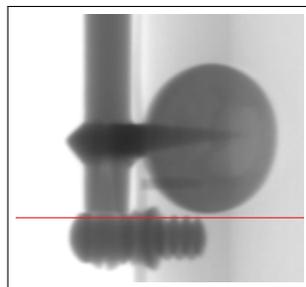
(b) Gemessene und angefitzte Werte der LSF.



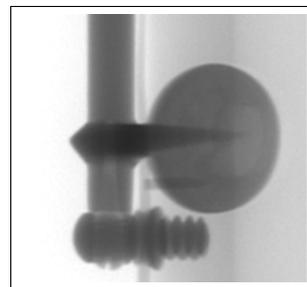
(c) Projektion vor der Entfaltung.



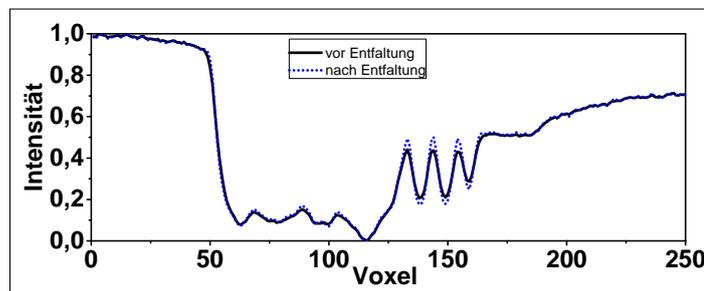
(d) Projektion nach der Entfaltung.



(e) Projektion vor der Entfaltung - Detailansicht.



(f) Projektion nach der Entfaltung - Detailansicht.



(g) Linienprofil entlang roter Linie in den Detailansichten.

Abbildung 5.5: Entfaltung der Radiographie einer Oboe mittels Wiener-Entfaltung. Der Filterkern wurde aus einer gemessenen und mit zwei Gaußfunktionen angefitzten Kante abgeschätzt. In den Detaildarstellungen sowie dem Linienprofil (entlang der roten Linie) zeigen sich höherer Kontrast und Kantenschärfe nach der Entfaltung.

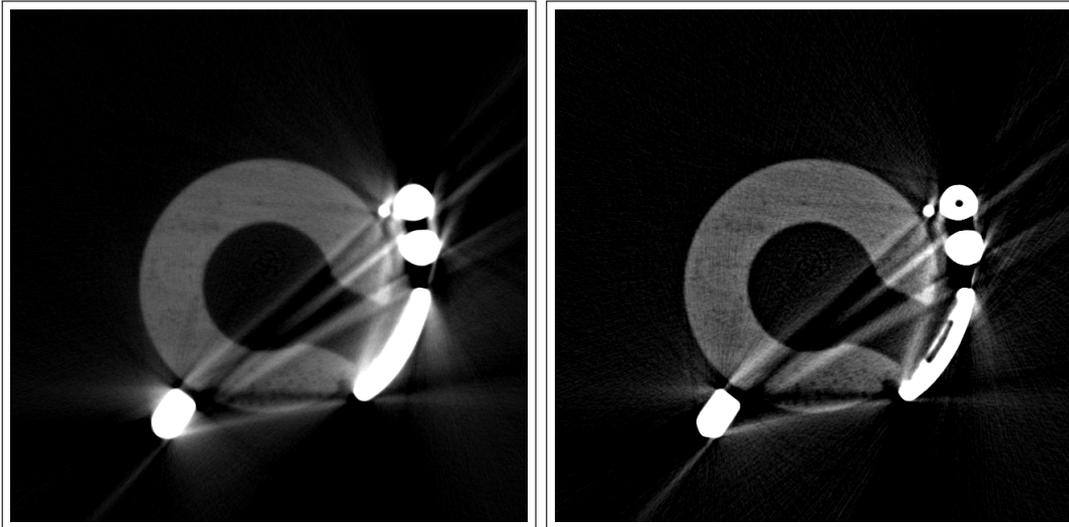


Abbildung 5.6: Gefilterte Rückprojektion des in Abb. 5.5 verwendeten Datensatzes einer Oboe vor (links) und nach (rechts) der Entfaltung der Projektionsdaten. Die allgemein höhere Bildschärfe nach dem Entfalten der Projektionen ist auf den verringerten Einfluss höherer bzw. niedrigerer umliegender Rekonstruktionsschichten zurückzuführen. Grauwertspreizung: (0-0,5)

nach Gl. 5.2 gegeben durch:

$$\Delta d = \left(\frac{\text{SDD} + R}{\text{SOD} - R} - \frac{\text{SDD} - R}{\text{SOD} + R} \right) d_{\text{Brennfleck}} \quad (5.3)$$

Dabei bezeichnet R den betrachteten Abstand vom Mittelpunkt des Rekonstruktionsbereichs. Für das Multimaterialphantom mit der in Kap. 2.3 angegebenen Aufnahmegeometrie ergibt sich beispielhaft (bezogen auf den Objektradius $R = 15 \text{ mm}$):

$$\Delta d \approx 1,2 d_{\text{Brennfleck}}$$

5.1.3 Polynomkorrektur bei Aufhärtungsartefakten

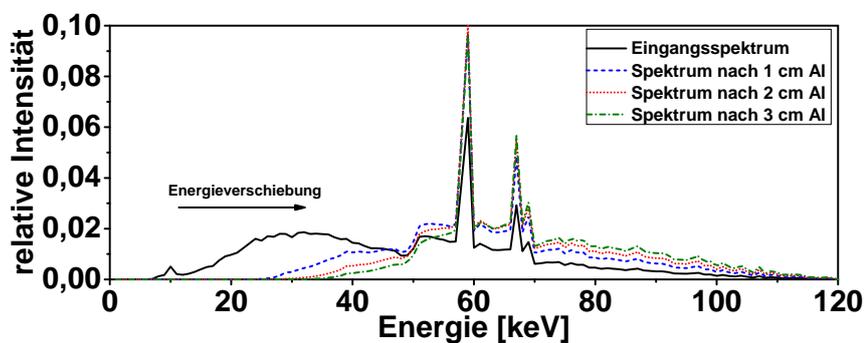
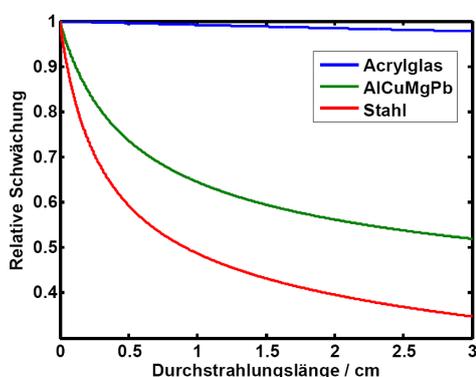


Abbildung 5.7: Normierte Röntgenspektren vor und nach der Durchstrahlung von Aluminium. Als Eingangsspektrum wurde das für die Polynomkorrektur verwendete 120 kV Röntgenspektrum mit 0,25 mm Ti Vorfilter verwendet. Die Energieverschiebung des Röntgenspektrums zu hohen Energien (Aufhärtung) nimmt mit der durchstrahlten Weglänge zu.

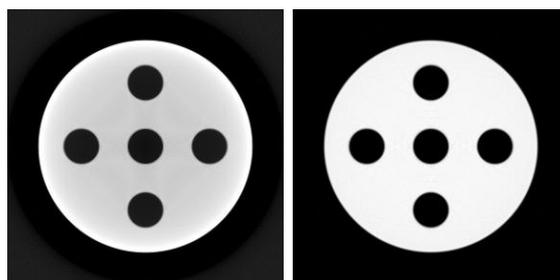
Aufhärtungsartefakte in der CT entstehen, wie in Kap. 4.3 beschrieben durch nicht-lineares

Verhalten des Absorptionskoeffizienten bei unterschiedlichen Durchstrahlungslängen, so dass das Integral $\int_{\vec{x} \in L} \mu(x) \vec{x}$ im Exponenten des Lambert-Beer-Gesetzes nicht mehr durch $\ln \frac{y_{i,0}}{y_i}$ errechnet werden kann, da $\mu = \mu(E)$ gilt und sich das Spektrum mit größer werdendem \vec{x} zu hohen Energien verschiebt. Das Lambert-Beer-Gesetz kann statt dessen unter Annahme diskreter Energie-Abtastung („Bins“) und eines diskret vorliegenden Volumens geschrieben werden als:

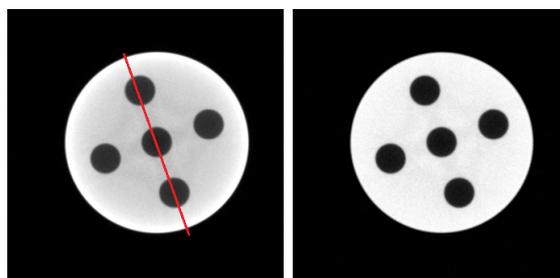
$$I = \sum_k y_{i,0_k} \exp \left(- \sum_j a_{ij} \mu_{jk} \right). \quad (5.4)$$



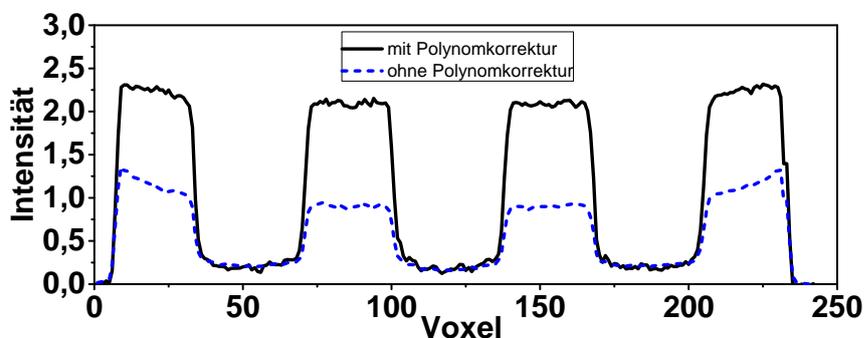
(a) Relative Schwächung der Materialien des Multimaterialphantoms, aufgetragen gegen die Durchstrahlungslänge. Aufgrund der sehr unterschiedlichen Aufhärtung kann kein einheitliches Modell für alle Materialien angenommen werden.



(b) **Simulationen** des Multimaterialphantoms ohne Material-Stifte. Links ohne Korrektur (Grauwertspreizung: (0-1,2)), rechts mit Polynomkorrektur (Grauwertspreizung: (0-2)).



(c) **Messungen** des Multimaterialphantoms ohne Material-Stifte. Links ohne Korrektur (Grauwertebereich 0-1,2), rechts mit Polynomkorrektur (Grauwertebereich 0-2).



(d) Linienprofil durch die Messergebnisse entlang der roten Linie in (c)

Abbildung 5.8: Polynomkorrektur bei Aufhärtungsartefakten am Beispiel des Multimaterialphantoms ohne eingesetzte Materialstifte. Die Grauwertbereiche sind aufgrund der Kontrasterhöhung durch die Polynomkorrektur unterschiedlich gewählt und bei den Einzelbildern angegeben.

Dabei bezeichnet $y_{i,0_k}$ die einfallende Intensität im k -ten Energie-Bin. a_{ij} sind die Durchstrahlungslängen diskreter Voxel μ_j von einem Strahl mit Index i .

Eine Vorkorrektur der Projektionsdaten hinsichtlich Strahlaufhärtung kann erfolgen, indem die Projektionen zuerst in Strahlsummen umgerechnet werden. Darauf kann mit Hilfe des Spektrums und der aus Referenzdaten entnommenen energieabhängigen Absorptionskoeffizienten eine Korrekturkurve erstellt werden, die jeder Strahlsumme eine entsprechende linearisierte Strahlsumme zuweist. Diese Korrekturkurve wird meist mit Polynomfunktionen höherer Ordnung gefittet. Wird diese auf die Projektion angewendet und rekonstruiert, können Aufhärtungsartefakte vermieden werden.

Diese Korrekturmethode ist allerdings nur im Fall eines einzelnen Materials innerhalb der Probe möglich. Dies zeigt sich, wenn man die Korrekturkurven unterschiedlicher Materialien vergleicht. In Abb. 5.8(a) werden die Korrekturpolynome für die Materialien des Multimaterialphantoms (Acrylglas, AlMgCuPb und Stahl) für das selbe Eingangsspektrum einer Wolframquelle bei 120 kV mit 0,25 mm Ti-Vorfilter verglichen. Darin aufgetragen ist die relative Schwächung pro durchstrahlter Wegstrecke, also der Anteil $\frac{\mu}{\mu_0}$ des Schwächungskoeffizienten μ , der sich nach der Aufhärtung des Spektrums für das Material ergibt, am Schwächungskoeffizienten μ_0 , der dem ungeschwächten Eingangsspektrum zugeordnet werden kann. Die starke Abweichung der Kurven zwischen hoch und niedrig absorbierenden Materialien legt nahe, dass nur die Aufhärtung des Röntgenspektrums für ein einzelnes Material korrigiert werden kann.

In Abb. 5.8 ist die unkorrigierte und mit Polynomkorrektur vorbearbeitete gefilterte Rückprojektion des Multimaterialphantoms ohne eingesetzte Material-Stifte in Messung und Simulation zu sehen. Während sich in der unkorrigierten FBP starke Cupping-Artefakte zeigen, sind diese in der korrigierten Variante deutlich vermindert. Restartefakte in den Rekonstruktionsvolumen der Messung sind durch Streustrahlung und die Abweichungen des für die Korrektur verwendeten Röntgenspektrums vom realen Spektrum bedingt.

5.2 Erweiterung des Geometriemodells durch Überabtastung und Faltungsansätze

Projektoren in Rekonstruktionsverfahren berechnen gewichtete Summen entlang der Strecke zwischen Quelle und Detektorpixel durch das Volumen. Die Voraussetzung dafür ist, dass sowohl der Brennfleck der Quelle als auch die Detektorelemente näherungsweise als punktförmig angenommen werden. Diese Annahme liefert in der gefilterten Rückprojektion bereits gute Ergebnisse. Die Vorwärtsprojektoren iterativer Verfahren bieten aber die Möglichkeit, durch genauere Abbildung der originalen Messgeometrie, also auch der Ausdehnung von Quelle und Detektorpixeln, das Rekonstruktionsergebnis zu verbessern.

In realen Messgeometrien überstreicht die Projektion zu einem Detektorelement ein Volumensegment. Dabei integriert der Strahl durch das Volumen die Schwächungskoeffizienten über das durchstrahlte Volumensegment V_{seg} . Im zweidimensionalen Fall wird das Volumenintegral zum Flächenintegral über die Fläche A_{seg} . In Abb. 5.9 ist die auf der Strecke zu einem Detektorpixel durchstrahlte Fläche eines zweidimensionalen Rekonstruktionsraums der Abtastung von Einzelstrahlen gegenübergestellt. Die im zwei- oder dreidimensionalen Fall gemessene Strahlsumme S (siehe auch Darstellung für FBP: Gl. 3.2) lautet:

$$S = \int_{V_{\text{seg}}} \mu dV \stackrel{2D}{\hat{=}} \int_{A_{\text{seg}}} \mu dA \quad (5.5)$$

Die Flächen- bzw. Volumenberechnung durch kubische Voxel ist nur mit hohem Rechenaufwand zu realisieren, da nicht nur das Volumensegment des Gesamtvolumens, sondern auch jedes teil-durchstrahlten Voxels berechnet werden muss. Eine einfachere Methode stellt die Überabtastung des Volumens („Oversampling“) dar. Dabei wird das Flächen- bzw. Volumenintegral über die Mittlung von N_{det} Linienintegralen genähert.

$$S = \int_{A_{\text{seg}}} \mu dA \approx \frac{1}{N_{\text{det}}} \sum_n^{N_{\text{det}}} \int_{x_n} \mu_n dx_n \quad (5.6)$$

Ein solches strahlsummenbasiertes Oversampling stellt aber nur eine Flächennäherung der Strahlsumme dar. Diese Näherung wird in allen strahlsummenbasierten Rekonstruktionsverfahren wie ART oder (OS-)SART eingesetzt.

In realen Detektoren wird die einfallende Intensität aus allen Punkten innerhalb des Detektorpixels integriert. Eine Näherung, die ein besseres Modell liefert ist also die Summe der Intensitäten von Einzelstrahlen:

$$y_i = \sum_n^{N_{\text{det}}} y_{i,0_n} e^{\int_{x_n} \mu_n dx_n} \quad (5.7)$$

$$\text{mit: } \sum_n^{N_{\text{det}}} y_{i,0_n} = y_{i,0} \quad (5.8)$$

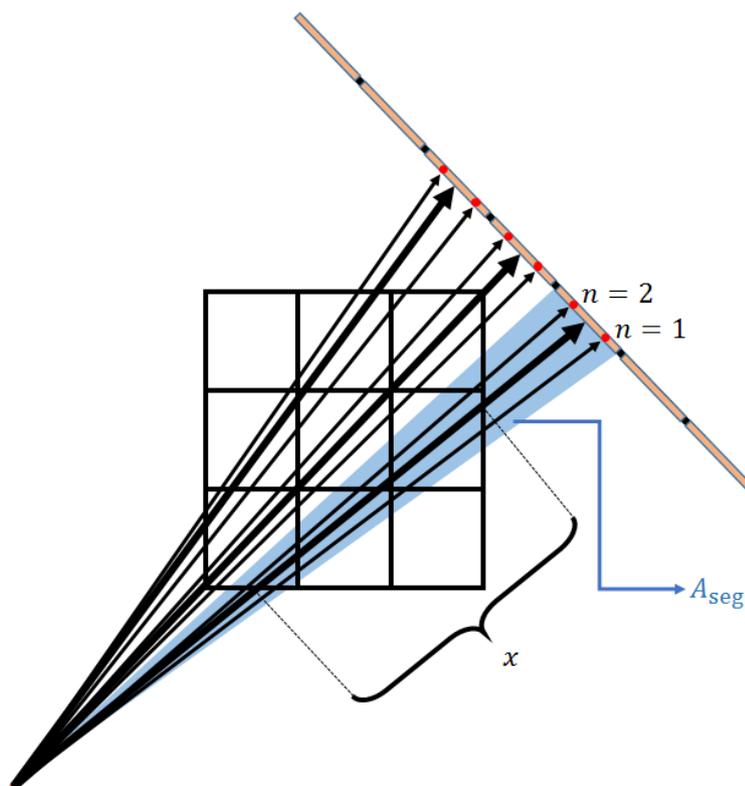


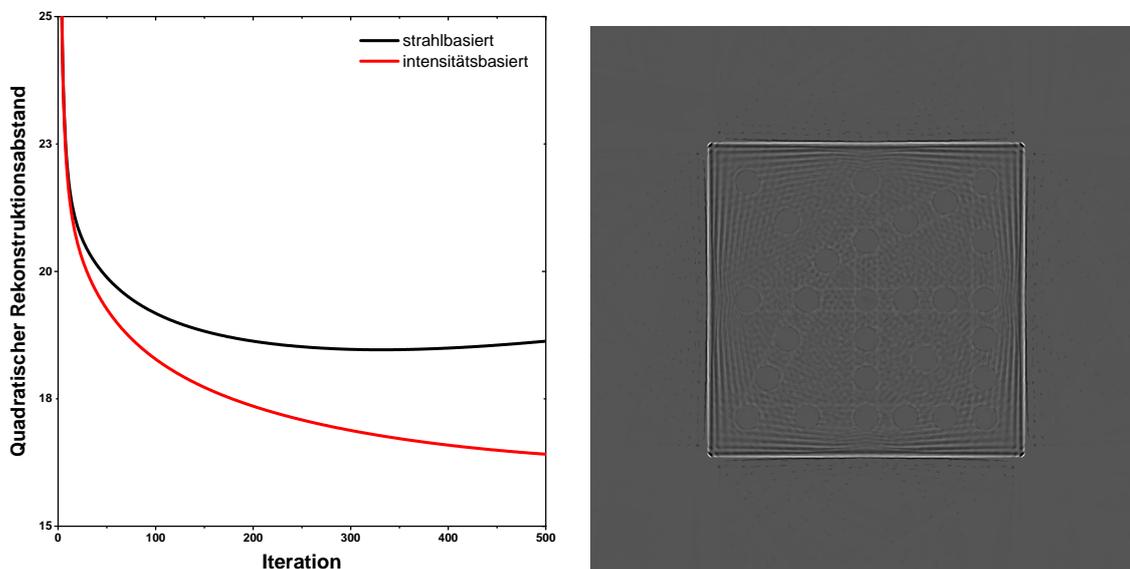
Abbildung 5.9: Überabtastung der Detektorpixel zur Flächen- oder Intensitätsmittelung in zweidimensionaler Darstellung.

Eine solche intensitätsbasierte Überabtastung ist mit mehr Exponenzierungen verbunden und damit rechenaufwändiger als eine strahlsummenbasierte Überabtastung mit anschließender, einmaliger Berechnung der Intensität.

5.2.1 Strahlsummenbasierte und intensitätsbasierte Überabtastung

Das oben vorgestellte Prinzip von strahlsummenbasierter und intensitätsbasierter Überabtastung wurde in [74] verglichen und es konnte gezeigt werden, dass eine nicht-lineare Modellierung im Sinne von Gl. 5.7 keine Verbesserungen der Bildqualität mit sich bringt. Um den Effekt der Modellierung am Datensatz des Lochplatten-Phantoms (siehe Kap. 2.3) zu zeigen, wird in der folgenden Simulation ein über acht simulierte Werte gemitteltes Detektor-Setup (achtfaches Binning) verwendet. Der Detektor besitzt in diesem Beispiel also 128 Pixel und wird auf ein Voxelraster von 1024×1024 Voxeln aus 1000 Projektionen rekonstruiert. Zur Rekonstruktion wird eine neunfache eindimensionale Überabtastung der Detektorpixel im Vorwärtsprojektor verwendet. Dieser Simulationsaufbau stellt den Unterschied der Strahlmodellierungen heraus, da bei den großen Detektorpixeln vielfach ein oder mehrere Kanten des Objekts im Strahlengang liegen. In Abb. 5.10 ist der Abstand des ohne Rauschen simulierten Datensatzes zur Referenzrekonstruktion im Iterationsverlauf dargestellt. Anhand des Plots sowie des gezeigten Differenzbildes nach 500 Iterationen sind Unterschiede zu erkennen, die den Einsatz des intensitätsbasierten Oversamplings in diesem Beispiel sinnvoll erscheinen lassen. Obwohl die Unterschiede, wie in [74] gezeigt,

in Standardsetups mit geringer Vergrößerung und einer Anzahl von Projektionen gemäß Gl. 3.7 klein sind, ist eine korrekte Berechnung der Intensitäten in einer modellbasierten Rekonstruktion sinnvoll.



(a) Vergleich des quadratischen Abstands zwischen Rekonstruktion und Referenz über 500 Iterationen. Die intensitätsbasierte Überabtastung nähert sich weiter der Referenz an.

(b) Differenzbild des Lochplattenphantoms rekonstruiert in beiden Überabtastungsvarianten (Grauwertspreizung: $(-0,05 - 0,1)$). Die Unterschiede werden an den Kanten der abgebildeten Platte am deutlichsten sichtbar.

Abbildung 5.10: Vergleich intensitätsbasierter und strahlsummenbasierter Überabtastung am Beispiel eines Simulationsdatensatzes des Lochplatten-Phantoms.

5.2.2 Geometrie-Modell des Röntgendetektors

Die Ausdehnung finiter Detektorelemente wird, entsprechend den Ergebnissen des vorangehenden Kapitels, als intensitätsbasierte Summe mehrerer Einzelstrahlen berechnet. Da ein Zeilendetektor simuliert wird, wird die Überabtastung eindimensional durchgeführt. Abb. 5.11 zeigt den Verlauf des Abstandes zur Referenzrekonstruktion für unterschiedliches N_{det} in Abhängigkeit der Iterationszahl und die Minima des Abstandes in Abhängigkeit der Überabtastung. Es sind deutliche Verbesserungen des Ergebnisses bei größerem Berechnungsaufwand für den Vorwärtsprojektor zu erkennen. Das erreichbare Minimum über 300 Iterationen wird mit steigendem N_{det} niedriger (sichtbar im Vergleich $N_{\text{det}} = 1$ und $N_{\text{det}} > 1$). Von 1-facher zu 4-facher Abtastung des Detektorpixels ergeben sich die größten Differenzen im Rekonstruktionsbild. Die Differenzen zwischen höheren Raten sind geringer und rechtfertigen nicht den deutlich größeren Rechenaufwand.

Wie in Kap. 4.4 beschrieben, sind die Füllfaktoren realer Detektorelemente kleiner als 1 möglich, so dass die effektive Pixelgröße geringer ist als die angenommene. Wird Überabtastung eingesetzt, muss für eine genaue Modellierung die effektive Breite berücksichtigt werden. Abb. 5.12 zeigt Simulationsergebnisse für Datensätze mit Füllfaktor 100% und

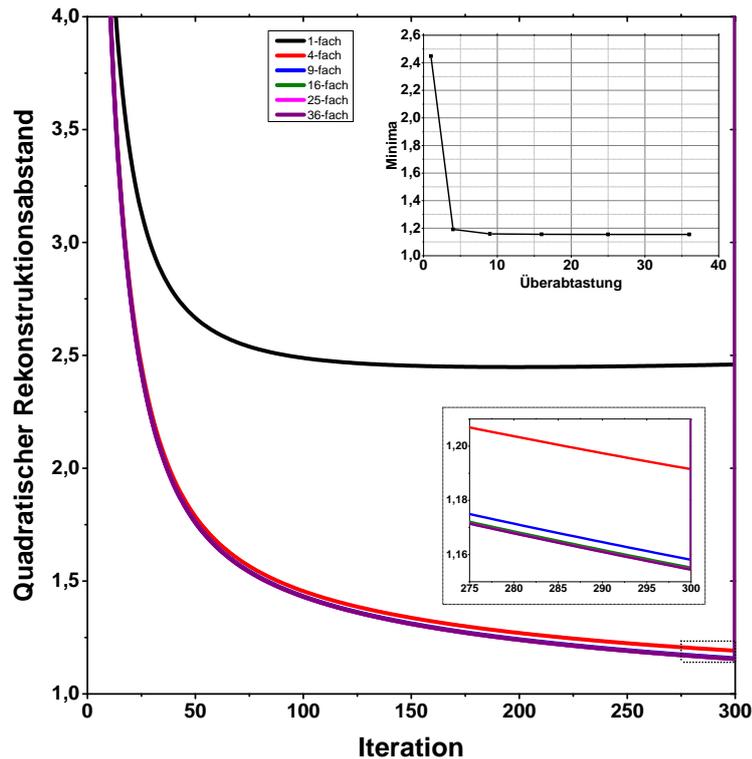
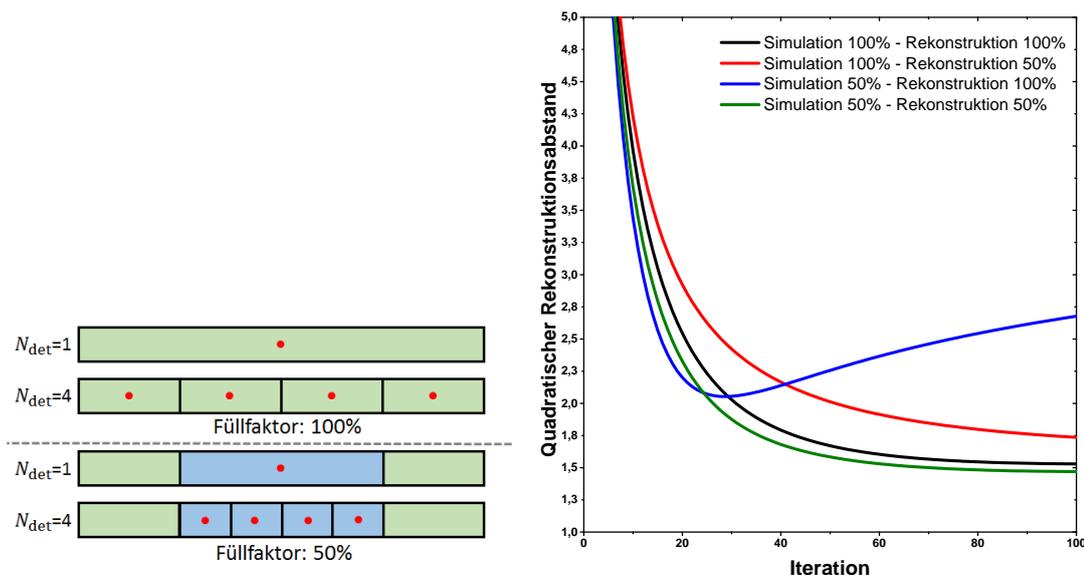


Abbildung 5.11: Quadratischer Abstand der Rekonstruktion zum Referenzdatensatz. Höhere Überabtastung N_{det} zeigt bessere Ergebnisse im Sinne niedrigerer Abstände zur Referenz. Die Auftragung der über 300 Iterationen erreichten Minima gegen N_{det} zeigt den größten Unterschied zwischen $N_{\text{det}} = 1$ und $N_{\text{det}} = 4$.

Füllfaktor 50%, die mit jeweils zur Simulation passendem und falschem Modell rekonstruiert wurden. Die Überabtastung wurde auf $N_{\text{det}} = 4$ gesetzt.

Bei nicht zur Simulation passenden Modellannahmen fallen die Ergebnisse erwartungsgemäß schlechter aus. Wird ein Füllfaktor 100% simuliert, aber die Überabtastung nur auf deutlich geringerer Detektorelementbreite durchgeführt, so entspricht dies einer Rekonstruktion mit $N_{\text{det}} = 1$. Dies zeigt sich am Beispiel der Rekonstruktion mit Füllfaktor 50%. Wird dagegen der Strahl breiter angenommen als in der Simulation, so zeigen sich deutliche Abweichungen und eine frühzeitige Abweichung vom Referenzbild. Die Fälle eines übereinstimmenden Modells zeigen die besten Ergebnisse. Bei halber Pixelfüllung zeigt der Abstand der Rekonstruktionen niedrigere Werte, da dabei die gleiche vierfache Überabtastung auf kleinerer Fläche durchgeführt wird.



(a) Schema des Simulationsaufbaus der Modellierung des Füllfaktors. Bei Füllfaktor 100% wird die gesamte Detektorbreite des Zeilendetektors modelliert. Bei Füllfaktor 50% wird nur der blau markierte Bereich in die Simulation und das Rekonstruktionsmodell eingezogen.

(b) Quadratischer Abstand der Rekonstruktion zur Referenz bei unterschiedlichen Kombinationen des simulierten und des in der Rekonstruktion modellierten Füllfaktors. Die Überabtastung wurde auf $N_{\text{det}} = 4$ eingestellt. Die übereinstimmenden Kombinationen zeigen die besten Ergebnisse.

Abbildung 5.12: Überabtastung der Detektorpixel zur Modellierung des Füllfaktors.

5.2.3 Geometrie-Modell des Brennflecks

Brennfleckmodell durch Überabtastung

Neben der Mehrfachberechnung des Vorwärtsprojektors für den Strahlweg eines Detektorpixels, ist es auch möglich diese Technik zur Modellierung des Brennflecks der Röntgenquelle einzusetzen. Die Ausdehnung des Brennflecks wird dabei diskret durch Sampling-Punkte abgetastet, die als Ausgangspunkt des vorwärtsprojizierten Strahls dienen. Die Vorgehensweise ist in Abb. 5.13 schematisch dargestellt. Wird zusätzlich, für erhöhte Genauigkeit, mit Detektorüberabtastung gerechnet, so müssen $M = N_{\text{BF}} N_{\text{det}}$ Strahlen durch das Volumen berechnet werden. Der Berechnungsaufwand für den genaueren Strahlweg steigt also für große Brennflecke bei hoher Rekonstruktionsauflösung, die viele Samplingpunkte benötigen, schnell an. Eine Möglichkeit das Brennfleckoversampling in die ML-Rekonstruktion zu integrieren, wurde in [75] vorgestellt. Die Vorwärtsprojektion eines Strahls i kann demnach beschrieben werden durch:

$$\bar{y}_i(\mu) = \sum_m^{N_{\text{BF}}} y_{i,0_m} \exp\left(-\sum_j a_{ij_m} \mu_j\right) = \sum_m^{N_{\text{BF}}} \bar{y}_{i_m} \quad (5.9)$$

$$\text{mit: } \bar{y}_{i_m} = y_{i,0_m} \exp\left(-\sum_j a_{ij_m} \mu_j\right) \quad (5.10)$$

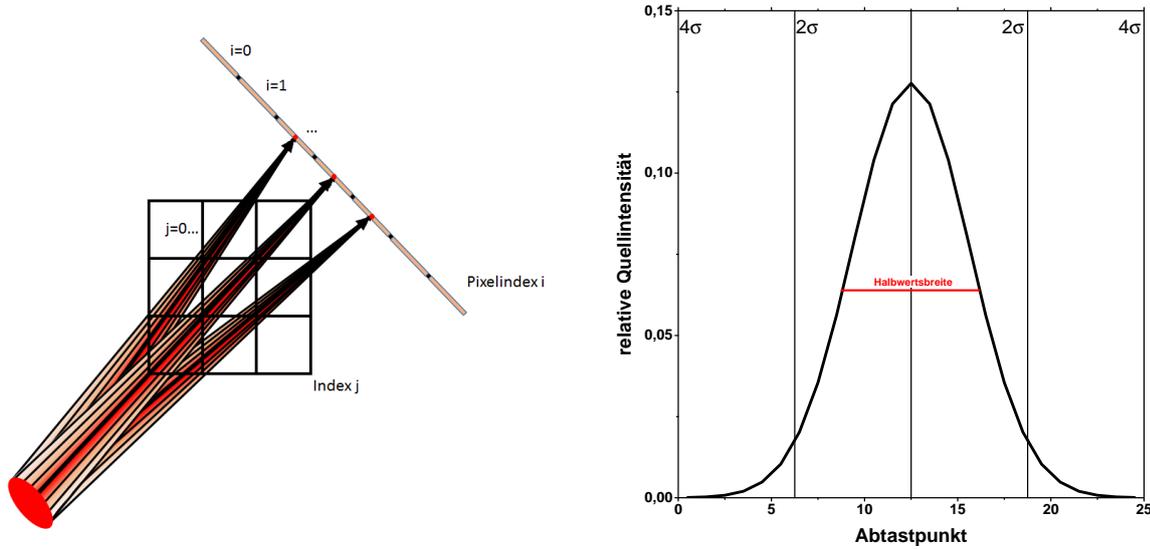


Abbildung 5.13: Im Vorwärtsprojektor eingesetztes Simulationsschema des Brennflecks. Die Intensitäten werden als mit einer Gaußfunktion gewichtete Summe berechnet. In den vorliegenden Beispielen werden die Brennflecke, wie rechts dargestellt, an 25 Punkten abgetastet und auf den Bereich $\pm 4\sigma$ begrenzt.

Mit einem Ansatz analog zu Kap. 3.3.4 wurde in [75] eine Updategleichung entwickelt:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i \sum_m \frac{\bar{y}_{im}}{\bar{y}_i} a_{ijm} \bar{y}_{im} \left(\frac{y_i}{\bar{y}_{im}} - 1 \right)}{\sum_i \sum_m \frac{\bar{y}_{im}}{\bar{y}_i} (\sum_h a_{ihm}) c_{im}} \quad (5.11)$$

Die c_{im} werden im Sinne des MLTR-M Updates durch die Messwerte ersetzt (siehe auch [76]), so dass folgt:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i \sum_m \frac{\bar{y}_{im}}{\bar{y}_i} a_{ijm} \bar{y}_{im} \left(\frac{y_i}{\bar{y}_{im}} - 1 \right)}{\sum_i \sum_m \frac{\bar{y}_{im}}{\bar{y}_i} a_{ijm} (\sum_h a_{ihm}) y_i} \quad (5.12)$$

Diese Updategleichung bedarf M Vorwärts- und M Rückprojektionen, da die Summenbildung $\sum_m \frac{\bar{y}_{im}}{\bar{y}_i} a_{ijm}$ von a_{ijm} abhängt, die für jeden Rückprojektionsschritt berechnet werden müssen. Eine schnellere Möglichkeit bietet die Näherung

$$\sum_m \bar{y}_{im} a_{ijm} \approx a_{ij} \sum_m \bar{y}_{im} = a_{ij} \bar{y}_i. \quad (5.13)$$

Die Näherung setzt voraus, dass sich die Durchstrahlungslängen a_{ijm} eines Voxels bei Variation von m nur wenig unterscheiden, der Einfluss des Brennflecks also nicht zu groß ist. Damit kann die gesamte projizierte Intensität direkt als Summe der einzelnen Vorwärtsprojektionen berechnet werden. Die Rückprojektion muss so nur einmalig stattfinden. Die verwendete Gleichung ist damit das MLTR-M Update (siehe Gl. 3.30).

Der modellierte Brennfleck kann, abhängig von der Abtastung N_{BF} , eine beliebige Form annehmen und durch eine ein-, zwei- oder dreidimensionale Verteilung repräsentiert werden. Im Allgemeinen reicht eine eindimensionale Modellierung bei Aufnahmen mit Zeilendetektor und eine zweidimensionale Funktion in Volumenrekonstruktionen. Eine dreidimensionale Verteilung mit Modellierung der Eigenabsorption im Targetmaterial führt zu deutlich erhöh-

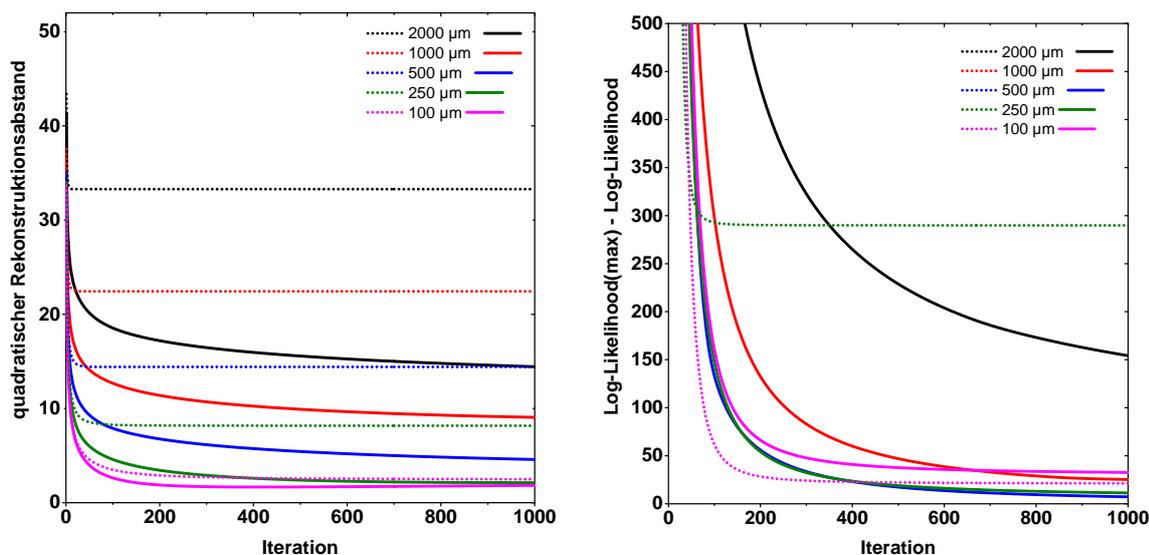
tem Rechenaufwand. Da außerdem die dreidimensionale Verteilung des Brennflecks für reale Anwendungen sehr schwer messbar ist, bleiben die Quellpositionen in den folgenden Beispielen auf die Ebene beschränkt, die parallel zur Detektorebene liegt. Als Standardannahme wird ein normalverteilter Brennfleck modelliert, dessen Halbwertsbreite als Brennfleckgröße direkt angegeben werden kann. Die Breite der modellierten Funktion bleibt als Anzahl von Standardabweichungen σ , die auf jeder Seite des Maximums an der Verteilung der Abtastpunkte teilnehmen, frei wählbar. In den Beispielen des Lochplatten-Phantoms wurde der Brennfleck auf $\pm 4\sigma$ begrenzt.

Vergleiche zur Rekonstruktion mit Strahlmodellierung wurden bereits in [44] angestellt. Das Fazit der dort angestellten Untersuchungen war, dass eine Strahlmodellierung erst bei größeren Brennflecken von Relevanz ist, als sie - relativ zur gewünschten Auflösung - in der klinischen CT auftreten. Im Bereich der Materialprüfung müssen unter anderem deutlich höhere Auflösungen erzielt werden, so dass die Fragestellung nach einer Auflösungserhöhung durch Strahlmodellierung in diesem Bereich an Relevanz gewinnt.

Zum Test der Methode werden zunächst Simulationen des Lochplattenphantoms mit unterschiedlichen Brennfleckgrößen erzeugt. Die Simulationseinstellungen bleiben, bis auf den Brennfleck, analog zu Kap. 2.3. Die simulierten Brennfleckgrößen sind $100 \mu\text{m}$, $250 \mu\text{m}$, $500 \mu\text{m}$, $1000 \mu\text{m}$ und $2000 \mu\text{m}$. Die Ergebnisse der mit und ohne Brennfleck-Überabtastung rekonstruierten Schichten werden in Abb. 5.14 gezeigt. Die Abtastung des eindimensional modellierten Brennflecks erfolgte in der Rekonstruktion mit 25 Stützpunkten. Die dadurch modellierte Brennfleckverteilung wird in Abb. 5.13 gezeigt.

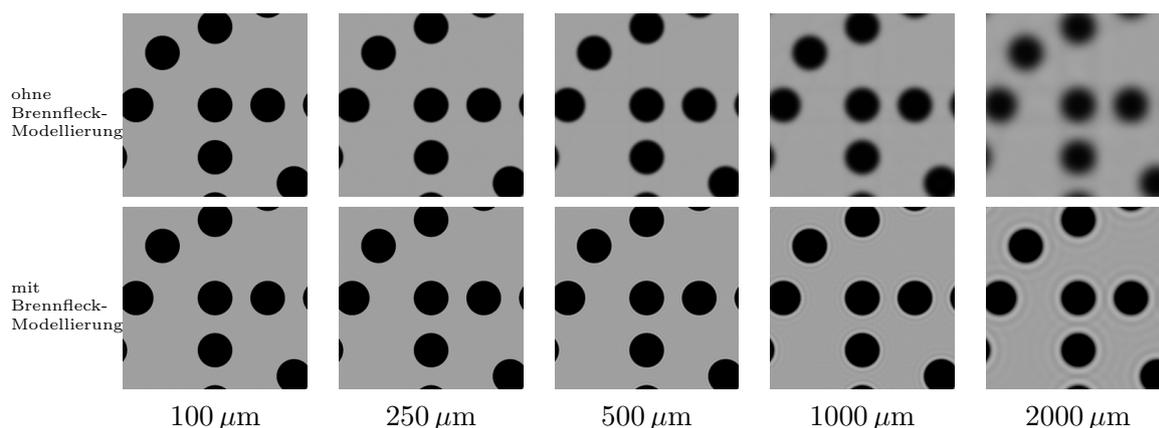
Zur Auswertung der Rekonstruktionsergebnisse wird das Referenzvolumen ohne Brennflecksimulation herangezogen. Die Rekonstruktionen zeigen eine erhöhte Bildschärfe gegenüber der Rekonstruktion ohne Brennfleck-Modellierung. Dies spiegelt sich auch im Abstand zur Referenzrekonstruktion wider. Während die Rekonstruktionen ohne Brennflecksimulation schon nach wenigen Iterationen weder weiter konvergieren (siehe Log-Likelihood in Abb. 5.14) noch sich der Referenzrekonstruktion weiter annähern, verbessert sich das Ergebnis der Rekonstruktionen mit Brennfleck-Überabtastung darüber hinaus. Die zusätzliche Annäherung der Log-Likelihood-Funktion an ihr Maximum zeigt, dass durch den modellbasierten Vorwärtsprojektor mehr Konsistenz zwischen den Projektionen hergestellt werden kann. Neben der Verbesserung des Ergebnisses zeigen die modellbasierten Rekonstruktionen aber auch zusätzliche „ringing“-Artefakte. Diese treten an Kanten des Phantoms auf und sind auf das Gibbs-Phänomen (siehe auch [77]) zurückzuführen. Da es sich bei der Brennfleckmodellierung in der iterativen Rekonstruktion um eine iterative Entfaltung handelt, werden auch die Anteile des Frequenzraums verstärkt, deren Fouriertransformierte des Originalbildes aufgrund der Rechteckübergänge im Bild Nulldurchgänge der sinc-Funktion zeigen. Dieses Phänomen wurde am Beispiel der Position-Emissions Tomographie (PET) in [78] beschrieben.

Wird die Entfaltung nur durch Modellierung der Vorwärtsprojektion durchgeführt, wird der Vergleich mit den Messdaten ($(\bar{y}_i - y_i)$ in Gl. 3.30) immer mit der durch den Brennfleck geglätteten Vorwärtsprojektion \bar{y}_i durchgeführt. Damit verstärkt sich in der Rekonstruktion das Rauschen aus den Messdaten. Sichtbar wird dieser Effekt anhand einer Simulation



(a) Quadratische Abweichungen vom Referenzvolumen aufgetragen gegen die Iterationszahl. Die Rekonstruktionen mit Brennfleck-Überabtastung (durchgezogene Linien) konvergieren tiefer und nähern sich stärker der Referenz an, als die Rekonstruktion (gestrichelte Linien) ohne Brennfleck-Modell.

(b) Die Log-Likelihood-Funktion (aufgetragen als Differenz zum Maximum, siehe Kap. 2.4) aufgetragen gegen die Iterationszahl. Die Log-Likelihood-Funktion stellt einen Vergleich auf Projektionsbasis dar, in dem die stärkere Annäherung der Vorwärtsprojektion an die Messdaten sichtbar wird.



(c) Rekonstruktionsergebnisse des Lochplattenphantoms ohne Poisson-Rauschen. Der visuelle Eindruck der Rekonstruktionen (Grauwertspreizung: (0-0,5)) wird verbessert. Auffällig ist das Aufkommen von Gibbs-Artefakten an den Objektkanten durch den Entfaltungscharakter der Brennfleck-Modellierung.

Abbildung 5.14: Rekonstruktionsergebnisse der Simulationsdaten der Lochplatten-Phantoms (siehe Kap. 2.3). Die Simulationen wurden ohne Poisson-Rauschen durchgeführt.

mit unterschiedlichen Brennfleckgrößen und gleichbleibendem Poisson-Rauschen (siehe Abb. 5.15). Während sich ohne Brennfleck-Überabtastung das SNR der Rekonstruktion nur wenig - bedingt durch die unterschiedlichen Poisson-Realisierungen - verändert, sinkt das Singal-Rausch-Verhältnis (SNR) der Rekonstruktionen mit Brennfleck-Überabtastung und Rückprojektor nach Gl. 3.30 mit zunehmender Brennfleckgröße.

Die Berücksichtigung der Überabtastung im Rückprojektor (siehe Gl. 5.12) sorgt hingegen für einen Anstieg des SNR, der auf den Ausgleich der rückprojizierten Werte über einen größeren Bereich und auf die dadurch verlangsamte Konvergenz zurückzuführen ist. Ein in der Bildverarbeitung häufig benutzter Ansatz ist eine regularisierte iterative Entfaltung

zur Unterdrückung von Entfaltungsartefakten. Regularisierung ist auch Bestandteil der modellbasierten Rekonstruktion und kann eingesetzt werden um dem verstärkten Rauschen durch die Entfaltung entgegenzuwirken. So kann Gl. 3.30 trotzdem für die Rückprojektion eingesetzt werden, um eine kürzere Berechnungszeit zu gewährleisten.

Zum Test der Methode an einem gemessenen Datensatz wird die Aufnahme eines Aluminiumbauteils herangezogen. Die Aufnahme der Radiographien erfolgte bei einer Beschleunigungsspannung von 500 kV auf einem Detektor, dessen Pixelauflösung von $200 \mu\text{m}$ bei 2016×2016 Pixeln zweifach auf 1008 Pixel je Seite gebinnt wurde. Die Voxelaufklärung bei der eingestellten Vergrößerung von 1,69 beträgt in der Rekonstruktion damit $235,16 \mu\text{m}$. Der Brennfleck der Röntgenquelle „COMET MXR-601HP/11“ misst nach Datenblatt [79] maximal 2 mm. Die angegebene Brennfleckgröße und Verteilung wurde bei 225 kV bestimmt. Da sich bei einer Überschätzung der Brennfleckgröße mehr Rekonstruktionsartefakte zeigten als bei einer Unterschätzung, wird der Brennfleck als Näherung für die Rekonstruktion als normal-verteilte Funktion mit Halbwertsbreite 1,5 mm angenommen. Die Brennfleckgröße wird über eine Fläche von 3 Standardabweichungen zu jeder Seite zweidimensional mit 5×5 Stützpunkten angegeben. Die Ergebnisse der Rekonstruktion werden in Abb. 5.16 gezeigt. Zum Vergleich herangezogen wird die ML-Rekonstruktion ohne Brennflecküberabtastung. Beide Varianten werden mit und ohne TV-Regularisierung ($\beta_2 = 2 \cdot 10^{-5}$) über 50 Iterationen durchgeführt. Die bei Simulationsdaten gezogenen Schlussfolgerungen (siehe Abb. 5.14 und Abb. 5.15) spiegeln sich auch in den Rekonstruktionsergebnissen aus Messdaten wider. Den in der Detailansicht dargestellten Fehlstellen im Metall kann eine Größe von ca. 250 bis $500 \mu\text{m}$ zugeordnet werden. Ohne Brennflecksimulation sind beide Fehlstellen kaum trennbar und haben durch die Verschmierung zwischen den CT-Schichten kaum Kontrast. Wird die Rekonstruktion ohne Brennfleckmodellierung mit Regularisierung berechnet, ist weniger Pixelrauschen erkennbar, Kontrast und Trennbarkeit der Fehlstellen wird aber kaum verbessert. Die unregularisierte Rekonstruktion mit Brennfleckmodell zeigt das aus den Simulationsergebnissen erwartete stärkere Rauschen, das sich aber mit Regularisierung unter Beibehaltung eines größeren Kontrasts an den Materialfehlern unterdrücken lässt. Bei Rekonstruktion mit Brennfleckmodell und Regularisierung zeigen sich die besten Ergebnisse.

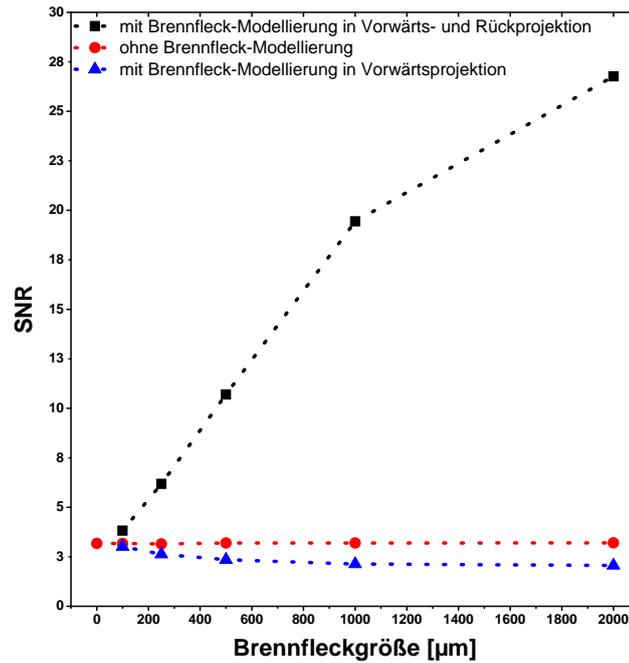
Brennfleckmodell durch Faltung

Ist die geometrische Vergrößerung in einem Messaufbau sehr groß, die Divergenz des Röntgenstrahls hingegen sehr klein, so dass es einen messbaren Einfluss des Brennflecks, aber kaum Vergrößerungsunterschiede innerhalb der Probe gibt, kann die Brennfleck-Unschärfe näherungsweise als Faltung des Detektorbildes mit dem zweidimensionalen Abbild des Brennflecks modelliert werden. Zur Abschätzung bis zu welchen Divergenzen des Röntgenstrahls diese Näherung gültig ist, kann Gl. 5.3 genutzt werden. Die Faltung wird nach der Vorwärtsprojektion angewandt und verändert dementsprechend die virtuellen Intensitäten \bar{y}_i in jeder Iteration. Da eine Faltung sich über viele Detektorpixel erstreckt und die parallele Berechnung vieler Einzelstrahlen Grundlage einer schnellen Berechnung der

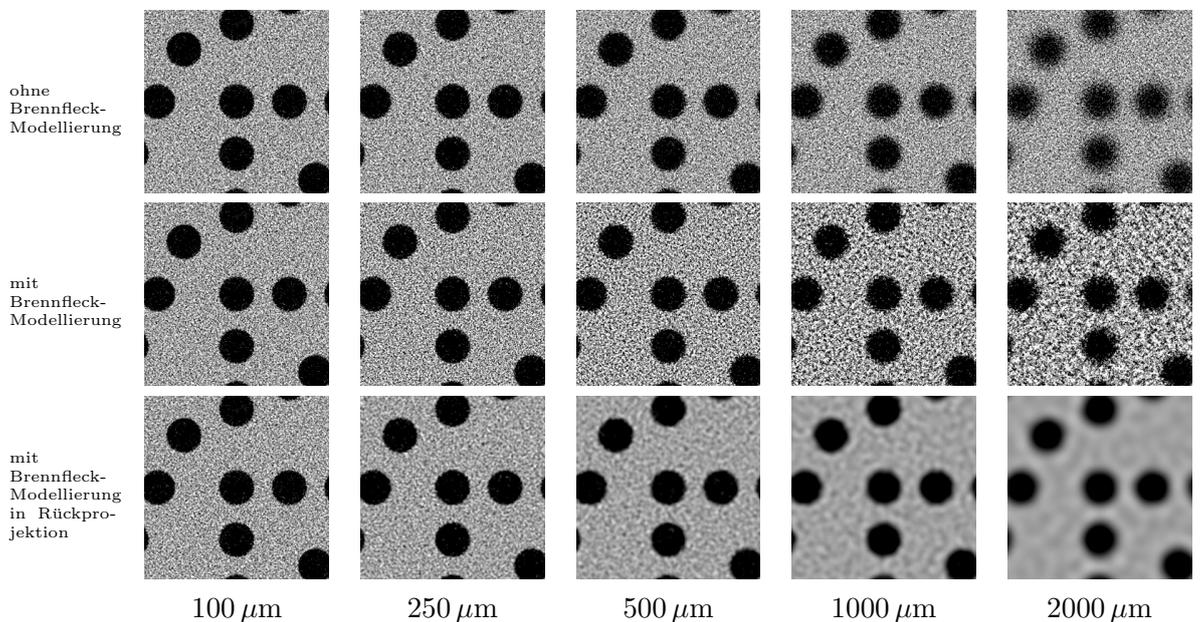
Vorwärtsprojektion ist, kann diese Modellierung nur schwer in die Kostenfunktion der Rekonstruktion einbezogen werden. Es wird daher im Folgenden davon ausgegangen, dass die Änderungen der Vorwärtsprojektion durch die Faltung nur geringes Ausmaß haben und daher die Vorwärtsprojektion \bar{y}_i in Gl. 3.30 durch das mit der Brennfleckverteilung gefaltete Ergebnis ersetzt werden kann.

Rekonstruktionsergebnisse aus simulierten Daten werden für das Lochplattenphantom in Abb. 5.17 gezeigt. Der Vergleich zeigt eine Verbesserung des Rekonstruktionsergebnisses unter Verwendung einer mit der Brennfleck-Verteilung gefalteten Vorwärtsprojektion. Deutlich sichtbar wird aber die Verschlechterung des Ergebnisses bei großer Strahldivergenz. Da die Abweichungen vom Drehmittelpunkt ausgehend mit der Divergenz des Strahls zunehmen, zeigen sich Artefakte vornehmlich in den Außenbereichen des Phantoms.

Wie bei der Brennfleckmodellierung durch Überabtastung werden mit 50 Iterationen auch für die Modellierung durch Faltung Rekonstruktionen des Aluminiumbauteils analog zu Abb. 5.16 durchgeführt. Verglichen wird die Methode der Faltung der Vorwärtsprojektionen mit einer Entfaltung des Rekonstruktionsvolumens mit Wienerfilter (siehe z.B. [80]) nach der Rekonstruktion. Die Rekonstruktionen mit Volumenentfaltung zeigen ähnliche Ergebnisse zur rechenaufwändigeren Faltung der Vorwärtsprojektion, wenn unregularisierte Rekonstruktionen durchgeführt werden (siehe Abb. 5.18). Werden die Rekonstruktionen regularisiert berechnet, so zeigen sich bessere Ergebnisse bei Faltung der Vorwärtsprojektion, da die Regularisierung zum Zeitpunkt des iterativen Updates auch die Entfaltungsartefakte unterdrückt. Bei einer volumenbasierten Entfaltung auf Basis der regularisierten Rekonstruktion ohne Einbeziehung des Brennflecks, zeigen sich deutlich stärkere Entfaltungsartefakte. Durch Einsatz einer Regularisierung in einem iterativen Entfaltungsverfahren für die volumenbasierte Entfaltung könnten bessere Ergebnisse erreicht werden. Solche Verfahren sind aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.



(a) Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) im Material des Lochplatten-Phantoms aufgetragen gegen die Brennfleckgröße bei Iterationszahl 100. Wird die Brennfleck-Abtastung in der Rückprojektion nicht berücksichtigt, sinkt das SNR in Abhängigkeit der Brennfleckgröße. Wird es berücksichtigt, verlangsamt sich die Konvergenz. Durch die langsamere Konvergenz und die Überlagerung der Strahlen in der Rückprojektion steigt das SNR bei Iteration 100 mit größerem Brennfleck.



(b) Rekonstruktionen (Grauwertspreizung: $(0-0,5)$) des Lochplattenphantoms mit Poisson-Rauschen. Es werden die Ergebnisse ohne Brennfleck-Modellierung, mit Modellierung in der Vorwärtsprojektion und mit Modellierung nach Gl. 5.12 (Modellierung des Brennflecks in Vorwärts- und Rückprojektion) gezeigt.

Abbildung 5.15: Rekonstruktionsergebnisse der Simulationsdaten der Lochplatten-Phantoms. Die Simulationen wurden mit Poisson-Rauschen durchgeführt (siehe Kap. 2.2 und Kap. 2.3). Die Ergebnisse zeigen eine Abhängigkeit des SNR von der Größe des Brennflecks und der Berücksichtigung des Brennflecks in der Rückprojektion.

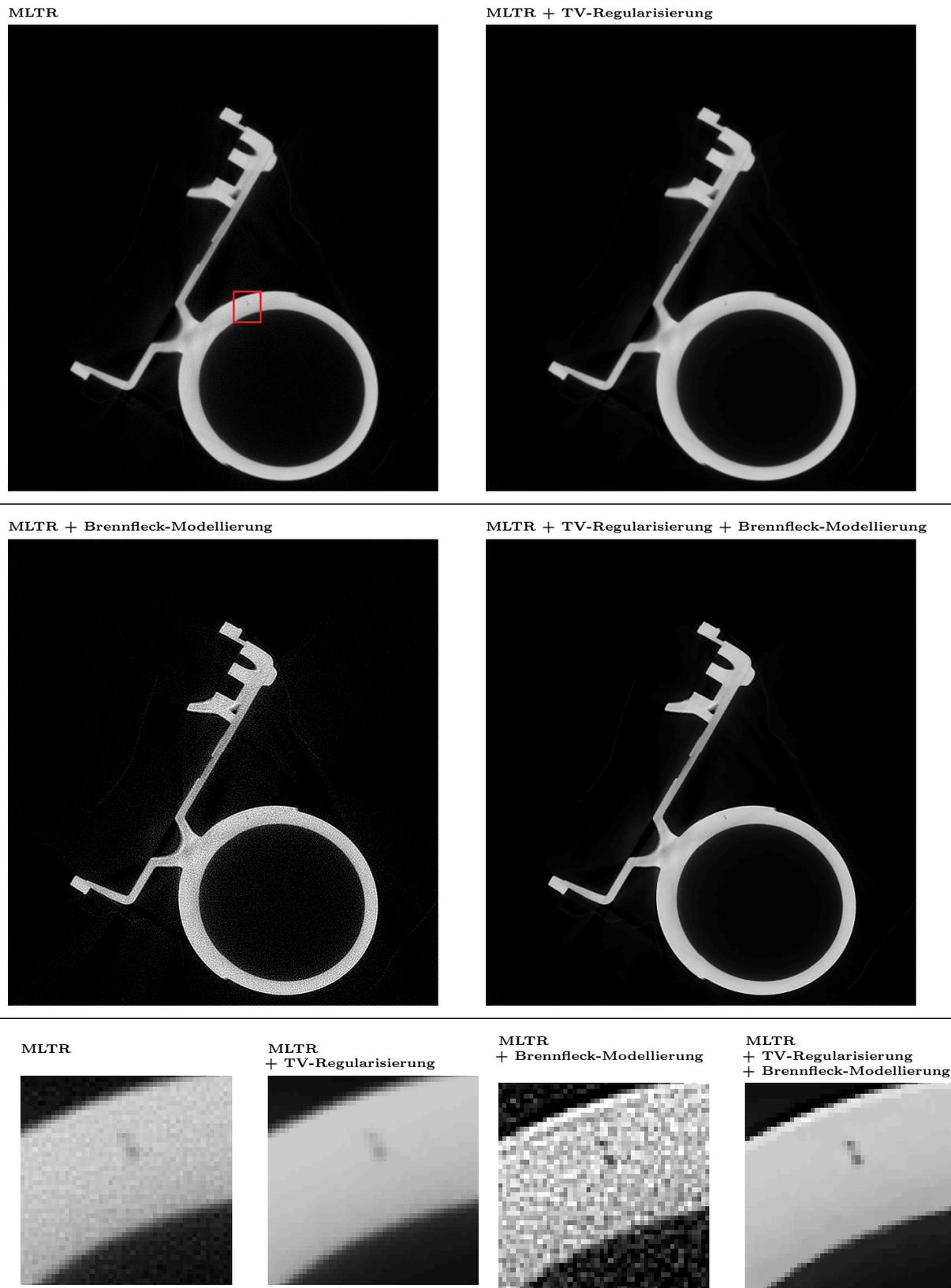


Abbildung 5.16: Rekonstruktionsergebnisse eines Aluminiumbauteils mit Regularisierung und Brennfleckmodellierung (mit 5×5 Überabtastung eines normalverteilten Brennflecks der Halbwertsbreite $1500 \mu\text{m}$). Die Schnittbilder werden für alle Rekonstruktionsvarianten mit und ohne Regularisierung und Brennfleck-Modellierung gezeigt. In den Detailansichten werden durch die Modellierung zwei schwer trennbare Materialfehler sichtbar. Das durch die Brennflecksimulation verstärkte Rauschen der Rekonstruktion kann unter Beibehaltung des verbesserten Kontrastes durch Regularisierung gemindert werden. Grauwertspreizung: (0-0,4).

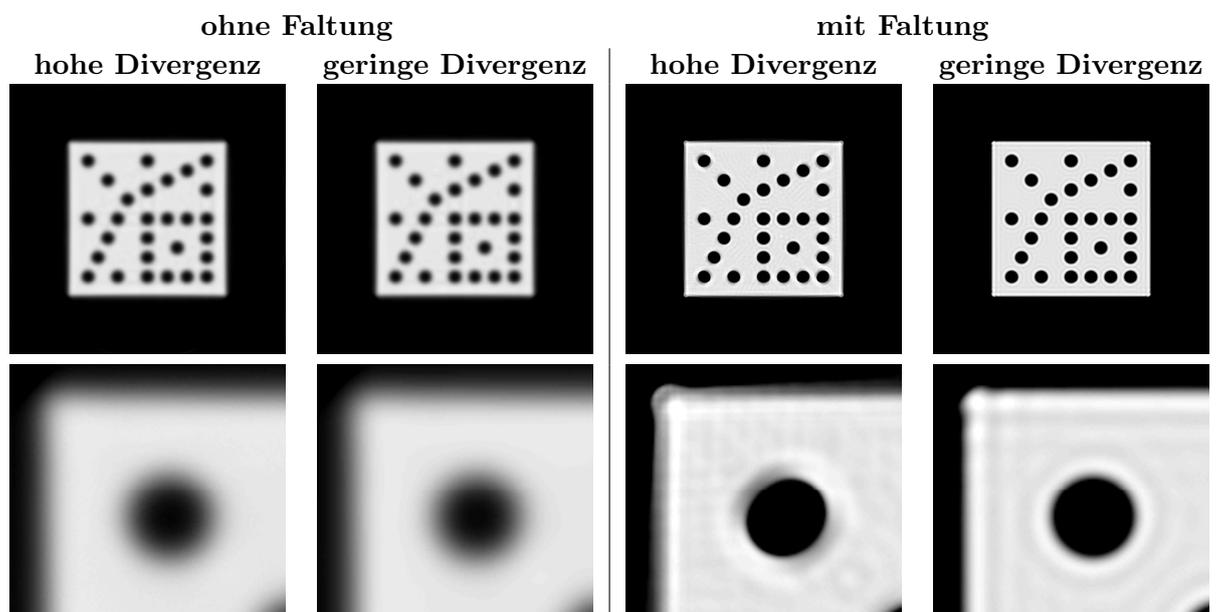
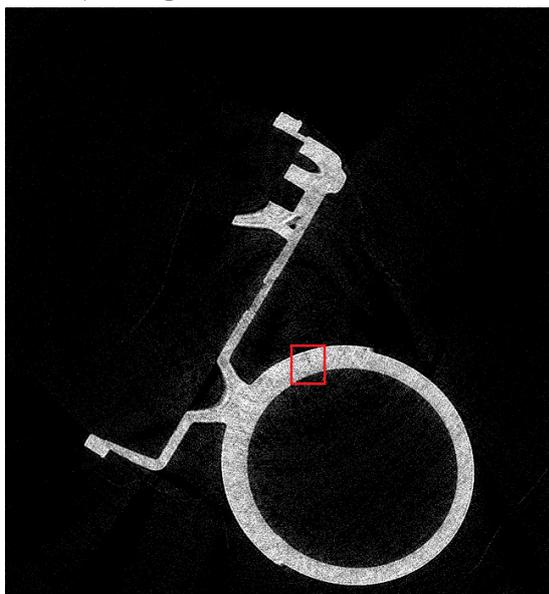


Abbildung 5.17: Modellierung der Brennfleckunschärfe durch Faltung der Vorwärtsprojektion mit der Brennfleckverteilung. Bei hoher Strahldivergenz (ca. 61° Öffnungswinkel, ca. 17° bei niedriger Divergenz) lässt sich der Brennfleck nicht mehr als Faltungskern darstellen und es kommt zu Artefakten im Außenbereich des Rekonstruktionsvolumens, in dem die Divergenz des Strahls am größten ist (siehe Detailansichten). Grauwertspreizung: (0-0,35)

MLTR + Faltung



MLTR + TV-Regularisierung + Faltung



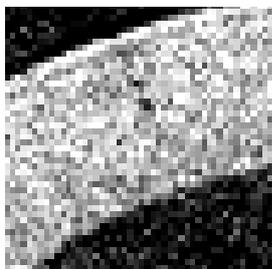
MLTR + Volumen-Entfaltung



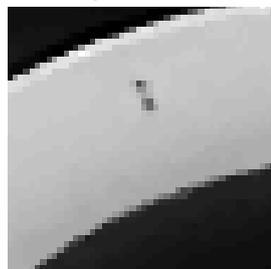
MLTR + TV-Regularisierung + Faltung



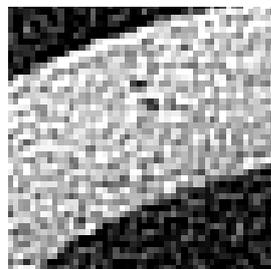
MLTR + Faltung



MLTR + TV-Regularisierung + Faltung



MLTR + Volumen-Entfaltung



MLTR + TV-Regularisierung + Volumen-Entfaltung

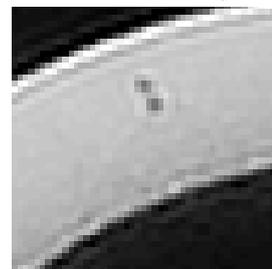


Abbildung 5.18: Vergleich der Faltung der Vorwärtsprojektion während der Rekonstruktion mit der Volumenentfaltung nach der Rekonstruktion ohne und mit Regularisierung. Die Detailansichten unten zeigen Fehlstellen im Aluminiumkörper. Während durch die Regularisierung das Rauschen durch die Entfaltung unterdrückt werden kann, treten Entfaltungsartefakte (Doppelkanten) auf, die nur bei einer Faltung der Vorwärtsprojektion durch die Regularisierung unterdrückt werden. Grauwertspreizung: (0-0,4).

5.2.4 Faltungsansätze als Modell der Detektor-Punktspreizfunktion

Die Detektor-PSF kann (siehe Kap. 4.4.3) als Faltung in der Detektorebene beschrieben werden. In Kap. 5.1.2 wurde die Entfaltung der gemessenen Projektionen beschrieben. Das Projektionsmodell für das iterative Rekonstruktionsverfahren kann, wie schon näherungsweise für den Brennfleck, durch eine Faltung der Vorwärtsprojektion angepasst werden. Die Annahme kleiner Änderungen der Vorwärtsprojektion durch die Faltung muss für die Updategleichung, wie schon in Kap. 5.2.3, auch dabei gelten. Der Aufwand der Berechnung ist geringer, wenn vor der Rekonstruktion eine Entfaltung der Messdaten vorgenommen wird, da die Entfaltung nur einmalig, die Faltung der Vorwärtsprojektion dagegen in jeder Iteration durchgeführt werden muss.

Zur Veranschaulichung werden Rekonstruktionen zweier Simulationsdatensätze, die mit einer angenommenen Gauß- bzw. Lorentzfunktion als Modell der Detektor-PSF erstellt wurden, durchgeführt. Die Halbwertsbreite beträgt in beiden Fällen $600 \mu\text{m}$, also 2 Detektorpixel. Die Auswirkungen der Faltung sind aufgrund der größeren Reichweite der Funktion bei der Lorentz-PSF größer. Wie am Abstand der Rekonstruktion zur Referenz (siehe Abb. 5.19) zu erkennen ist, kann durch die Modellierung ein besseres Rekonstruktionsergebnis erzielt werden. Der gemittelte Plot der oberen Kante des Phantoms (siehe Abb. 5.20) zeigt die höhere Kantenschärfe der Rekonstruktion mit Berücksichtigung des Modells der Detektor-PSF bei Iteration 200.

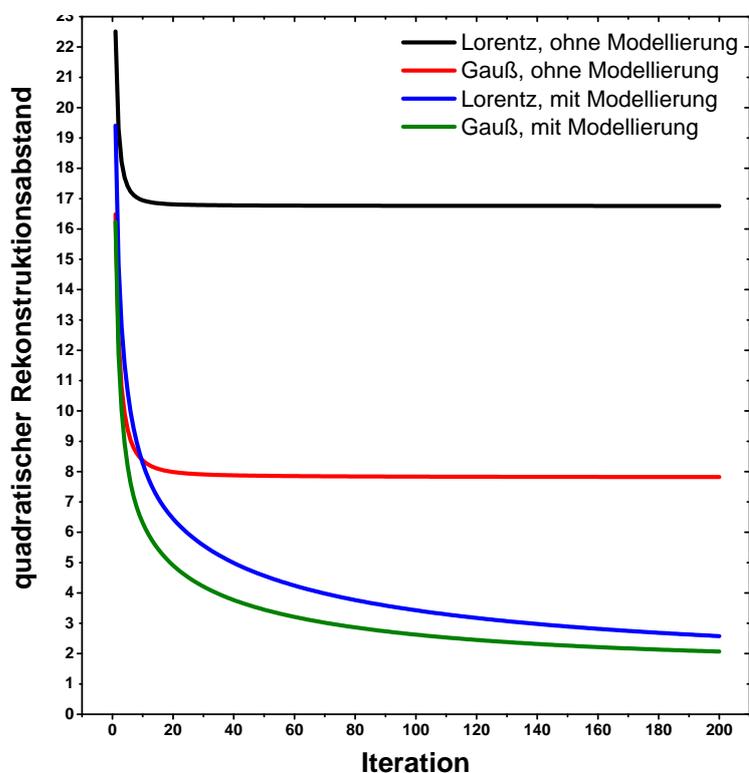
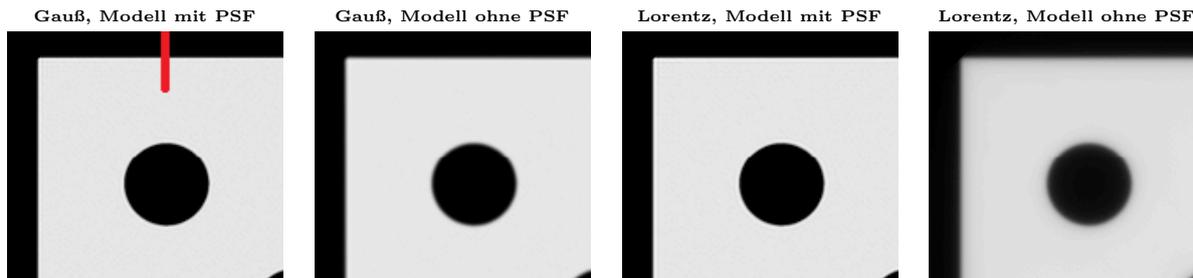
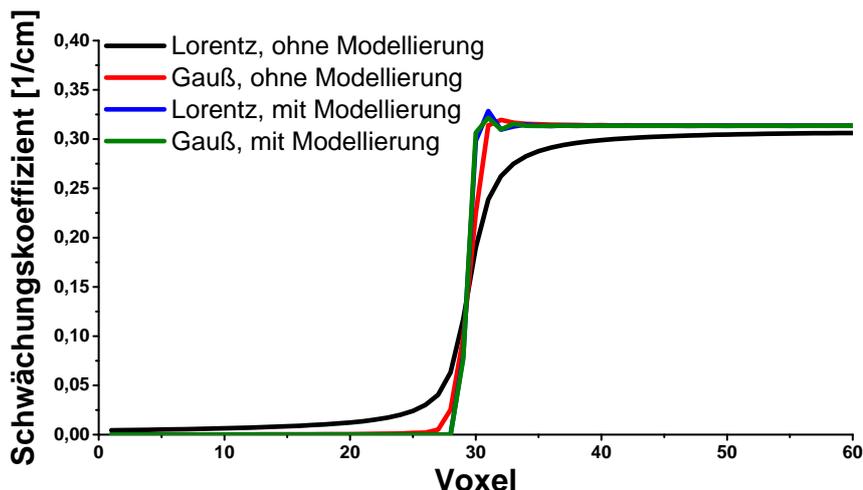


Abbildung 5.19: Auswertung des quadratischen Rekonstruktionsabstandes für die Rekonstruktionen in den vier Varianten. Bei Modellierung der Detektor-PSF mit Halbwertsbreite $600 \mu\text{m}$ zeigen sich in beiden Fällen niedrigere Abstände zum Referenzdatensatz.



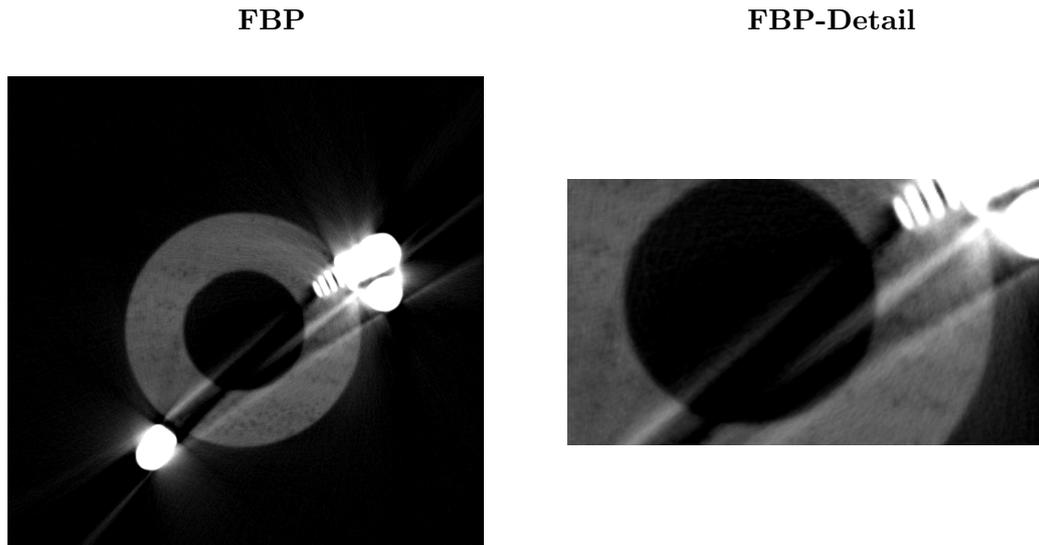
(a) Detailanschnitte der Rekonstruktionen des Lochplatten-Phantoms mit Gauß- und Lorentzfunktion der Halbwertsbreite $600 \mu\text{m}$ als simulierte PSF. Die Rekonstruktionen wurden über 200 Iterationen berechnet.



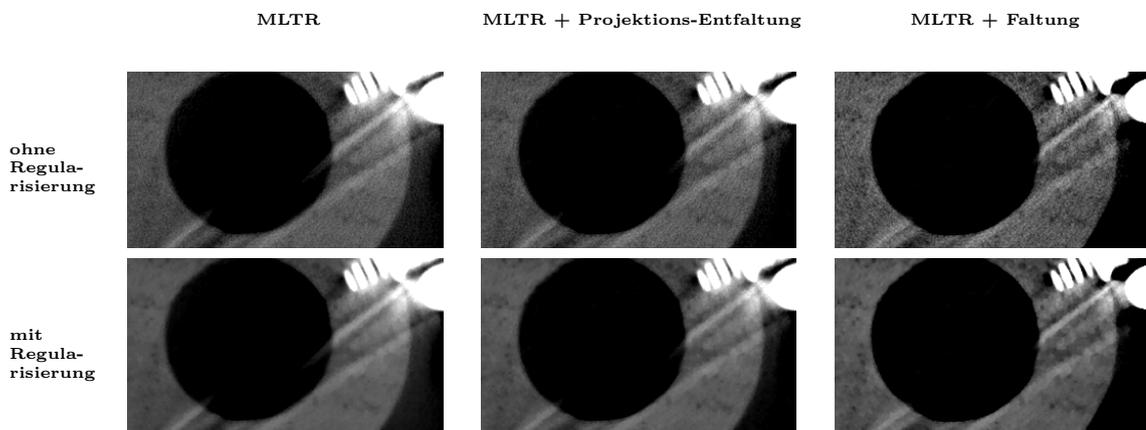
(b) Linienprofil entlang der roten Linie in (a). Die Kantenschärfe wird durch die Faltung der Vorwärtsprojektion erhöht.

Abbildung 5.20: Rekonstruktionsergebnisse der Faltung der Vorwärtsprojektion zur Modellierung der Detektor-PSF. Unter Annahme einer Gauß- und einer Lorentzfunktion für die Detektor-PSF mit Halbwertsbreite $600 \mu\text{m}$ zeigen sich in beiden Fällen bessere Ergebnisse durch die Faltung der Vorwärtsprojektion. Grauwertspreizung: (0 - 0,35)

Ein Messbeispiel bietet die schon in Kap. 5.1 vorgestellte CT einer Oboe. Die PSF des Detektors wurde für dieses Beispiel anhand einer Kantenmessung bestimmt (siehe auch Abb. 5.5). Es werden die Rekonstruktionen mit Standardvorwärtsprojektion und mit bzw. ohne Entfaltung der Projektionen, wie sie in Kap. 5.1 gezeigt wurde, verglichen mit Rekonstruktionen, die mit durch Faltung veränderter Vorwärtsprojektion durchgeführt wurden. In den Varianten, in denen die Detektor-PSF berücksichtigt wurde, steigt das Rauschen der Rekonstruktion an. Dies kann mit leichter Regularisierung während der Rekonstruktion geglättet werden. Abb. 5.21 zeigt je einen Ausschnitt der Ergebnisse aller Rekonstruktionsvarianten. Die Rekonstruktion hat eine Voxelgröße von $81,67 \mu\text{m}$ in einem Raster der Größe $640 \times 640 \times 256$. Obwohl alle entfaltenen Varianten mit der selben Detektor-PSF berechnet wurden, zeigen sich leichte Unterschiede im Ergebnis. Diese sind darauf zurückzuführen, dass die Faltung der Vorwärtsprojektion eine iterative Entfaltung im Rekonstruktionsraum darstellt und sich so von der einmaligen Entfaltung im Projektionsraum unterscheidet. Die Rekonstruktion mit Faltung der Vorwärtsprojektion zeigt etwas mehr Kantenschärfe, die Unterschiede fallen aber allgemein gering aus.



(a) Rekonstruktionen durch gefilterte Rückprojektion (FBP) als Übersichtsbild und Ausschnitt.



(b) Detailansichten der Rekonstruktionen ohne PSF-Modell (MLTR), mit dem Vorverarbeitungsschritt der Projektionsentfaltung (MLTR + Projektions-Entfaltung) und mit Faltung der Vorwärtsprojektion als PSF-Modell (MLTR + Faltung).

Abbildung 5.21: Rekonstruktionsschichten einer Oboe (siehe auch Kap. 5.1.2). Grauwertspreizung: (0-0,5). Die Ergebnisse der entfalteten Varianten zeigen verbesserte Kantenschärfe. Zwischen den Ergebnissen mit Faltung der Vorwärtsprojektion und mit Entfaltung der Projektionen als Vorverarbeitungsschritt sind die Unterschiede gering.

5.3 Einsatz energieabhängiger Schwächungsmodelle

Die Korrektur der durch die Polychromatizität der Röntgenstrahlung verursachten Artefakte in der Rekonstruktion wurde in einer Vielzahl von Lösungswegen behandelt. In der medizinischen CT stellt die Annahme von Wasser als Grundlage aller gemessenen Objekte eine Möglichkeit dar, die Strahlaufhärtung im Weichgewebe näherungsweise zu korrigieren [81]. Durch Knochen und Metalle verursachte Artefakte müssen dann separat behandelt werden. In der industriellen CT gibt es neben der in Kap. 5.1 beschriebenen Polynomkorrektur auf Projektionsbasis auch iterative segmentierungsbasierte Verfahren. Dazu zählen die in [82] und [83] vorgestellten Arbeiten. Bei [82] wird eine gefilterte Rückprojektion nach der Segmentierung in hoch und niedrig absorbierende Anteile geteilt. Aus der

Annahme homogener und zusammenhängender hochabsorbierender Materialanteile kann das nicht-lineare Absorptionsverhalten des Materials bestimmt und eine Korrekturkurve erstellt werden. Ähnlich geht auch [83] vor. Die Aufteilung erfolgt hier in eine beliebige Anzahl unterschiedlich absorbierender Materialien.

Ein im Zusammenhang mit Metallartefakten, also Artefakten, die durch das Zusammenspiel von Strahlaufhärtung, Streustrahlung und dem großen Dynamikunterschied der digitalen Messung stark und schwach absorbierender Materialien auf dem Röntgendetektor entstehen, häufig verwendeter Ansatz ist auch die Segmentierung der Metallanteile in den Projektionen. Die Metallanteile werden als Messfehler gewertet und durch eine lineare oder polynomielle Interpolation dem umgebenden, weniger absorbierenden Material angepasst, um dann eine gefilterte Rückprojektion anwenden zu können, die weniger Artefakte enthält (siehe z.B. [84]). Eine solche Segmentierung kann aber auch dafür herangezogen werden in einer iterativen Rekonstruktion Strahlen durch den so definierten Volumen-Bereich niedriger zu gewichten, um Messwerten ohne Metalleinfluss höhere Priorität einzuräumen (siehe dazu [1]).

Für die modellbasierte Rekonstruktion sind Ansätze interessant, die während einer iterativen Rekonstruktion als Modell der Vorwärtsprojektion verwendet werden können. In [85] (siehe auch [86]) wird das Modell eines Systems bekannter Materialien verwendet. Mit dem Ansatz

$$\mu_j = \sum_l \sigma_l(E) \rho_j f_j^l \quad \text{mit} \quad f_j^l = \begin{cases} 0 & \text{gehört nicht zu Material } l \\ 1 & \text{gehört zu Material } l \end{cases} \quad (5.14)$$

wird einem Voxel μ_j der Rekonstruktion eines der Materialien mit energieabhängigem Wirkungsquerschnitt σ_l zugeordnet. Die Gewebeanteile f_j^l können durch Segmentierung zugewiesen werden. Die Rekonstruktion berechnet die Dichte ρ_j , die dem Voxel j entsprechend $\mu_j = \sigma_j \rho_j$ zuzuordnen ist. In [87] wird dieser Ansatz für den Fall $f_j^l \in [0,1]$ weiterverfolgt. Für die hier verwendete modellbasierte Rekonstruktion werden mit [39] und [88] zwei weitere Ansätze näher untersucht, die sich in der Komplexität der Berechnung und im nötigen Vorwissen unterscheiden.

Globales Energiemodell In [88] wird ein Energiemodell vorgestellt, das den am stärksten energieabhängigen Anteil, den Anteil $\mu \propto \frac{1}{E^3}$ des Photoeffekts, modelliert. Da dieses keine Materialsegmentierung beinhaltet, wird es im Folgenden als „globales Energiemodell“ referenziert. Es wird die Annahme verwendet, dass die effektive Energie des Spektrums eines Röntgenstrahls linear mit der Strahlsumme steigt (im Gegensatz zu [88] hier mit zusätzlicher Gewichtung durch die Strahllänge im Voxel):

$$E_{\text{eff},j} = E_0 + \eta \sum_h^{j-1} a_{ih} \mu_h \quad (5.15)$$

Ein effektiver Schwächungskoeffizient, der proportional zu $\frac{1}{E_{\text{eff},j}^3}$ steigt, kann also dargestellt werden als:

$$\mu(E_{\text{eff},j}) \propto \frac{1}{E_{\text{eff},j}^3} = \frac{1}{(E_0 + \eta \sum_h^{j-1} a_{ih} \mu_h)^3}. \quad (5.16)$$

Bezogen auf die effektive Energie des ungeschwächten Spektrums, kann das Energiemodell also geschrieben werden als:

$$\frac{\mu_j(E_{\text{eff},j})}{\mu_j(E_0)} = \frac{E_0^3}{E_{\text{eff},j}^3} \quad (5.17)$$

$$\mu_j(E_{\text{eff},j}) = \frac{\mu_j(E_0)}{\left(\frac{E_{\text{eff},j}}{E_0}\right)^3} = \frac{\mu_j(E_0)}{\left(1 + \frac{\eta}{E_0} \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h\right)^3} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{y}_i &= y_{i,0} \exp\left(-\sum_j a_{ij} \frac{\mu_j(E_0)}{\left(1 + \frac{\eta}{E_0} \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h\right)^3}\right) \\ &= y_{i,0} \exp\left(-\sum_j a_{ij} \frac{\mu_j(E_0)}{\left(1 + \alpha \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h\right)^\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Darin wurde wie in [88] $\alpha = \frac{\eta}{E_0}$ substituiert und der Exponent 3 analog zu [88] durch einen weiteren freien Parameter ε ersetzt, der mehr Freiheiten der Parameterwahl erlaubt. So kann für ein härteres Spektrum eine Verringerung von ε zu einer besseren Anpassung an den Compton-Anteil des Spektrums führen.

In [88] wird das Rekonstruktionsproblem durch einen SART-Ansatz gelöst. Im Folgenden wird, im Sinne der Konsistenz mit anderen hier vorgestellten Verfahren, ein MLTR-M Ansatz verfolgt, der gemäß Kap. 3.3.4 hergeleitet werden kann. Das Update lässt sich folglich angeben zu:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i \frac{a_{ij}}{(1+\alpha \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h)^\varepsilon} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_i \frac{a_{ij}}{(1+\alpha \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h)^{2\varepsilon}} (\sum_h a_{ih}) y_i} \quad (5.20)$$

Technisch führt der Ansatz aber zu dem Problem, dass nur bei strahlbasierten Projektoren die „Vorgeschichte“ des Strahls ($\sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h$) bekannt ist. Der Rückprojektor, für den dieser Faktor ebenso wie für die Vorwärtsprojektion benötigt wird, wird in dieser Arbeit voxelbasiert ausgeführt (siehe Kap. 3.3.1), so dass, soll kein zusätzlicher Rechenaufwand betrieben werden, eine Näherung angewandt werden muss. Dabei wird im Rückprojektor

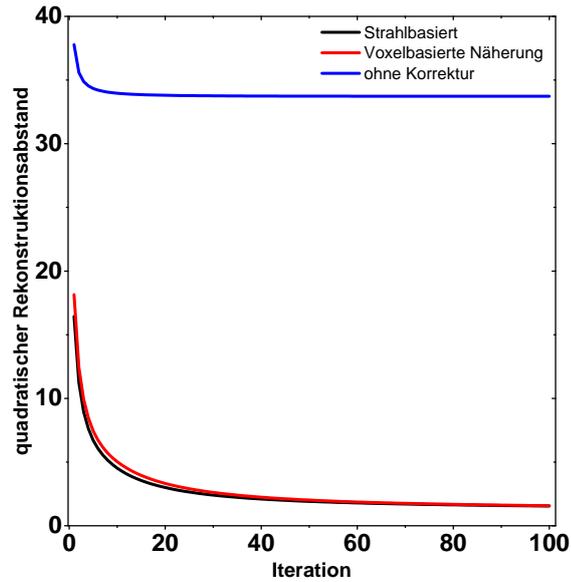
$$\alpha \sum_h^{j-1} a_{ih}\mu_h = 0 \quad (5.21)$$

gesetzt, so dass das polyenergetische Modell nur im Vorwärtsprojektor Anwendung findet. Dann gilt analog zu Gl. 3.30 mit \bar{y}_i aus Gl. 5.19:

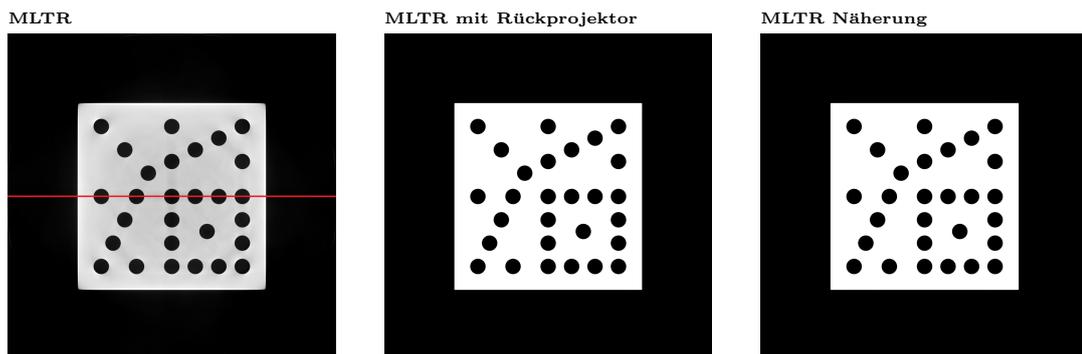
$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i a_{ij} (\bar{y}_i - y_i)}{\sum_i a_{ij} (\sum_h a_{ih}) y_i} \quad (5.22)$$

Zum Vergleich des Rekonstruktionsupdates nach Gl. 5.20 und der Näherung nach Gl. 5.22 wird das Lochplattenphantom durch den Vorwärtsprojektor nach Gl. 5.19 mit den Parametern $\alpha = 0,1$ und $\varepsilon = 3,0$ simuliert. Diese Parameter wurden gewählt, da sie im Bereich für die Rekonstruktion von Messdaten benötigter Werte liegen. Die Rekonstruktion wird an-

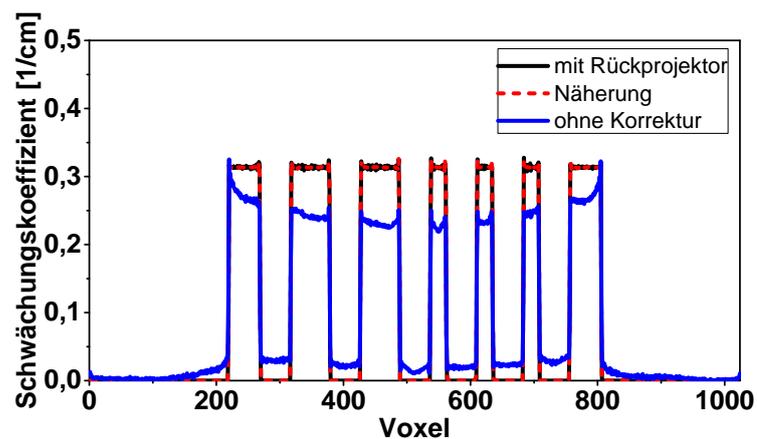
schließlich mit 100 Iterationen bei einer Subsetgröße von $M = 5$ sowohl mit strahlbasiertem Rückprojektor nach Gl. 5.20 und mit voxelbasiertem Rückprojektor nach Gl. 5.22 durchgeführt. Zum Vergleich wird zusätzlich eine Rekonstruktion mit $\alpha = 0$, also ohne Korrektur der Strahlaufhärtung durchgeführt. Die Auswertung der Ergebnisse (siehe Abb. 5.22) erfolgt iterationsweise anhand des quadratischen Abstandes zur Referenzrekonstruktion. Wie sich zeigt, konvergiert die strahlbasierte Variante ohne Näherung schneller als die voxelbasierte Näherung, aber sie konvergiert in das gleiche Ergebnis. Die unkorrigierte Variante zeigt deutlich schlechtere Ergebnisse.



(a) Quadratischer Abstand der Rekonstruktion zur Referenz (siehe Kap. 2.4) aufgetragen über 100 Iterationen.



(b) Schnittbilder des Lochplattenphantoms bei Iterationszahl 100, rekonstruiert nach Gl. 5.20 (mit Rückprojektor), mit der Näherung nach Gl. 5.22 sowie ohne Korrektur (MLTR).



(c) Linienprofil entlang der roten Linie in (b).

Abbildung 5.22: Globale Energiemodellierung nach Gl. 5.20 (mit Rückprojektor) und Gl. 5.22 (Näherung) im Vergleich zur Rekonstruktion ohne Korrektur (MLTR). Der Abstand zur Referenzrekonstruktion zeigt nur leicht verlangsamte Konvergenz durch die voxelbasierte Näherung, bei der die Energiemodellierung nur im Vorwärtsprojektor stattfindet. Grauwertspreizung: (0-0,35).

Segmentierungsbasierter Modellansatz In [39] wird die polychromatische Natur der Röntgenstrahlen durch das angepasste Lambert-Beer'sche Gesetz

$$\bar{y}_i = \sum_k y_{i,0_k} \underbrace{\exp\left(-\sum_j a_{ij}(\phi(\mu_j)\Phi_k + \theta(\mu_j)\Theta_k)\right)}_{\bar{y}_{ik}} = \sum_k \bar{y}_{ik} \quad (5.23)$$

beschrieben. Dieser Ansatz modelliert die Gesamtabsorption durch den photoelektrischen Effekt ($\phi(\mu)\Phi(E)$) und den Comptoneffekt ($\theta(\mu)\Theta(E)$) und setzt diese aus einem von der Energie k abhängigen Anteil (Φ_k, Θ_k) sowie einem materialabhängigen Anteil (ϕ, θ) zusammen. Dieser in [39] IMPACT („Iterative Maximum-likelihood Polychromatic Algorithm for CT“) genannte Algorithmus wird hier zur Abtrennung gegenüber dem globalen Energiemodell als segmentierungsbasierter Ansatz bezeichnet. Der energieabhängige Anteil wird auf eine Referenzenergie E_0 normiert und durch die Energiezusammenhänge gemäß Kap. 4.3 beschrieben:

$$\Phi(E) = \frac{\frac{1}{E^3}}{\frac{1}{E_0^3}} = \frac{E_0^3}{E^3} \quad (5.24)$$

$$\Theta(E) = \frac{\text{KN}(E)}{\text{KN}(E_0)} \quad (5.25)$$

Darin bezeichnet $\text{KN}(E)$ die Klein-Nishina-Gleichung (siehe Kap. 4.3). Mit Hilfe einer Herleitung der Updategleichung gemäß Kap. 3.3.4 kann diese in ähnlicher Notation zu [39] wie folgt angegeben werden:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i a_{ij}(\phi_j(\mu)')\left(1 - \frac{y_i}{\sum_k \bar{y}_{ik}}\right)Y_i^\Phi + \theta_j(\mu)'\left(1 - \frac{y_i}{\sum_k \bar{y}_{ik}}\right)Y_i^\Theta}{\sum_i a_{ij}(\phi_j(\mu)')M_i + \theta_j(\mu)'N_i} \quad (5.26)$$

Es gilt dabei:

$$\phi_j(\mu)' = \frac{\partial \phi(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_j^n} \quad (5.27)$$

$$\theta_j(\mu)' = \frac{\partial \theta(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_j^n} \quad (5.28)$$

$$Y_i^\Phi = \sum_k \Phi_k \bar{y}_{ik} \quad (5.29)$$

$$Y_i^\Theta = \sum_k \Theta_k \bar{y}_{ik} \quad (5.30)$$

Die Anteile M_i und N_i des Nenners können geschrieben werden als:

$$M_i = \sum_h a_{ih} \phi_h(\mu)' \left(\sum_k \Phi_k^2 \bar{y}_{ik} \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) + \frac{y_i (Y_i^\Phi)^2}{(\bar{y}_i)^2} \right) \quad (5.31)$$

$$+ \sum_h a_{ih} \theta_h(\mu)' \left(\sum_k \Phi_k \Theta_k \bar{y}_{ik} \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) + \frac{y_i Y_i^\Phi Y_i^\Theta}{(\bar{y}_i)^2} \right)$$

$$N_i = \sum_h a_{ih} \phi_h(\mu)' \left(\sum_k \Phi_k \Theta_k \bar{y}_{ik} \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) + \frac{y_i Y_i^\Phi Y_i^\Theta}{(\bar{y}_i)^2} \right) \quad (5.32)$$

$$+ \sum_h a_{ih} \theta_h(\mu)' \left(\sum_k \Theta_k^2 \bar{y}_{ik} \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) + \frac{y_i (Y_i^\Theta)^2}{(\bar{y}_i)^2} \right)$$

Eine allgemeinere Form von Gl. 5.26, die es erlaubt beliebig viele Absorptionsanteile einzu- beziehen, wird in Gl. 5.36 gegeben.

Die Vorwärtsprojektion \bar{y}_i muss in Gl. 5.26 nur einmalig pro Iteration und Projektion berechnet werden, da für alle Gewichtungen der \bar{y}_{ik} die selben Wege durchstrahlt werden. Die Materialdaten $\phi(\mu), \theta(\mu)$ werden vor der Rekonstruktion für alle Materialien im Rekonstruktionsvolumen festgelegt. Dabei müssen sowohl die Dichte als auch die Absorptionseigenschaften der Materialien bekannt sein. Die in der Probe vorkommenden Stoffe werden nach Gesamtabsorption sortiert und linear interpoliert (siehe Abb. 5.23). Die Ableitungen $\frac{\partial \theta(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_h^n}$ beschreiben die Steigungen der Verbindungsgeraden und können vorberechnet werden.

Die Materialdaten selbst können durch eine Kurvenanpassung an Referenzdaten gewon-

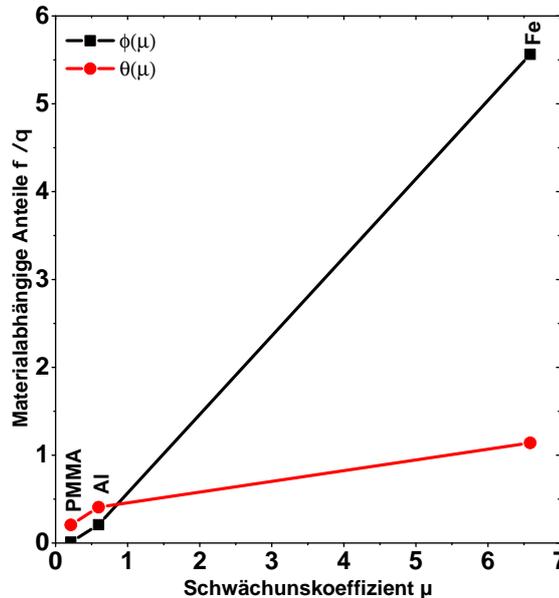


Abbildung 5.23: Materialabhängige Anteile des Photoeffekts (ϕ) und Comptoneffekts (θ) aus Gl. 5.23, aufgetragen für die Materialien PMMA, Aluminium (Al), und Eisen (Fe). Die Materialdaten können durch lineare Interpolation (Linien) auch bei Zwischenwerten ausgelesen werden.

nen werden. Die Fitfunktion beinhaltet bereits die Referenzenergie E_0 , die auch für die

Rekonstruktion verwendet wird:

$$\mu(E) = \rho \left(\frac{E_0^3}{E^3} \phi + \frac{KN(E)}{KN(E_0)} \theta \right) \quad (5.33)$$

Werden diese Kurvenanpassungen mit den Referenzdaten aus der Referenzdatenbank [65] und mit den Dichten gemäß [89] für eine Vielzahl von Elementen bei $E_0 = 70\text{keV}$ durchgeführt, zeigen sich die Abhängigkeiten der Absorptionseffekte von der Kernladungszahl. Wird die Dichte mit in die Rechnung einbezogen, zeigt sich auch die Abhängigkeit der Dichte von der Ordnungszahl der Elemente.

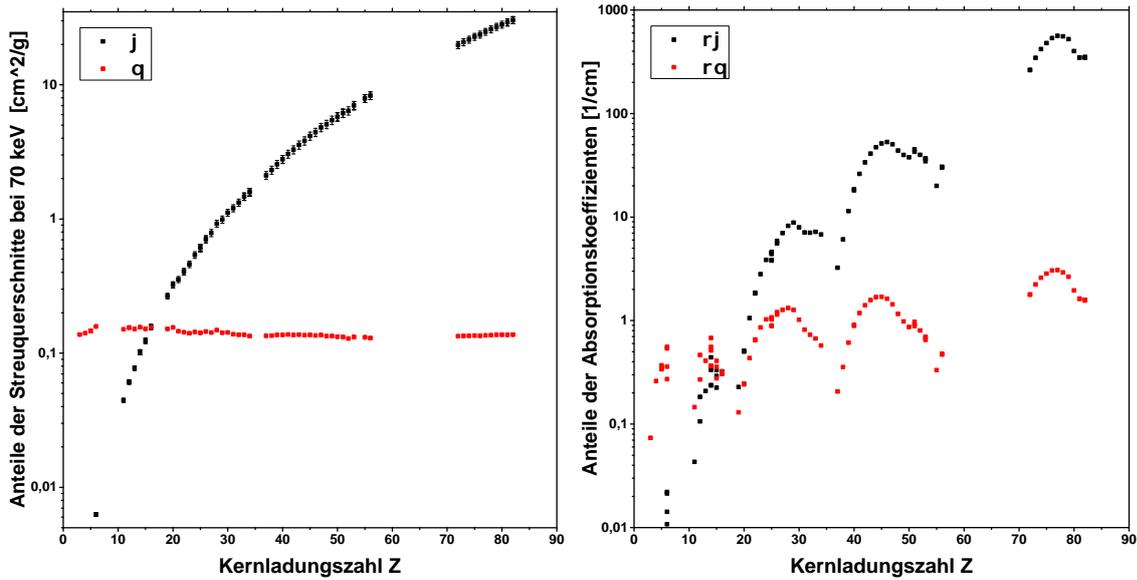


Abbildung 5.24: Links: Anteile der Streuquerschnitte bei 70 keV. Rechts: Anteile des Absorptionskoeffizienten bei 70 keV. Aufgetragen sind die Fit-Ergebnisse mit Standardfehler für die Anteile des Photo- (ϕ) und Comptoneffekts (θ) für einige elementare Stoffe. Einige Elemente werden in unterschiedlichen Konfigurationen gezeigt. Die gezeigten Daten entsprechen den Materialparametern, die der Rekonstruktion nach [39] bei einer Referenzenergie von 70 keV übergeben werden. Die Bogenstruktur ist auf die innerhalb einer Periode des Periodensystems alternierende Dichte zurückzuführen. Bei kleinen Ordnungszahlen ist der Wechsel zu einem Haupteinfluss des Comptoneffekts bei 70 keV zu erkennen.

Erweiterung für Energien größer 1 MeV In der industriellen CT werden teilweise auch Beschleunigungsspannungen jenseits von 1 MeV eingesetzt. Die Erweiterung des Vorwärtsprojektionsmodells um einen Paarbildungsterm kann wie für Gl. 5.23 durchgeführt werden:

$$\bar{y}_i = \sum_k y_{i,0_k} \exp \left(- \sum_j a_{ij} (\phi(\mu_j) \Phi_k + \theta(\mu_j) \Theta_k + \xi(\mu_j) \Xi_k) \right) = \sum_k \bar{y}_{ik} \quad (5.34)$$

Da sich das Modell mit der Energieabhängigkeit des Paarbildungsterms

$$\Xi(E) = \begin{cases} 0 & E < 1022 \text{ keV} \\ \frac{\ln E}{\ln E_0} & E \geq 1022 \text{ keV} \end{cases} \quad (5.35)$$

für kleine Energien zur Form von Gl. 5.23 auflöst, kann die Updategleichung 5.26 allgemeiner geschrieben werden. Die Bezeichnungen der Photo-, Compton- und Paarbildungsanteile $\phi(\mu_j)$, Φ_k , $\theta(\mu_j)$, Θ_k und $\xi(\mu_j)$, Ξ_k werden dafür durch die indizierten Variablen ϕ_v , $\Phi_{k,v}$ ersetzt. Jeder Index v entspricht dabei einem der v_{\max} Anteile an der Gesamtabsorption. Die Updategleichung lautet in der so verkürzten Form:

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\sum_i \sum_{v=0}^{v_{\max}} \phi'_v(\mu_j^n) a_{ij} \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) Y_i^{\Phi_v}}{\sum_i \sum_{v=0}^{v_{\max}} \phi'_v(\mu_j^n) a_{ij} M_{i,v}} \quad (5.36)$$

mit:

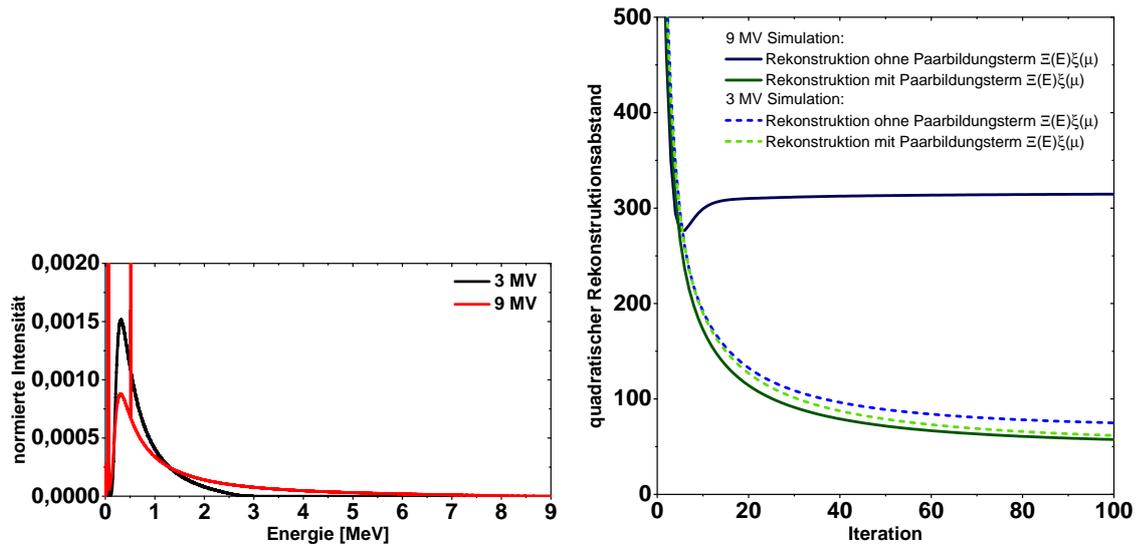
$$Y_i^{\Phi_v} = \sum_k \Phi_{k,v} \bar{y}_{ik} \quad (5.37)$$

Die Anteile $M_{i,v}$ des Nenners lassen sich darin schreiben als:

$$M_{i,v} = \sum_{w=0}^{v_{\max}} \left(\sum_j a_{ij} \phi'_w(\mu_j^n) \right) \left(\left(\sum_k \Phi_{k,v} \Phi_{k,w} \bar{y}_{ik} \right) \left(1 - \frac{y_i}{\bar{y}_i}\right) + \frac{y_i Y_i^{\Phi_v} Y_i^{\Phi_w}}{\bar{y}_i^2} \right) \quad (5.38)$$

Anhand von Simulationen des Multimaterialphantoms (siehe Kap. 2.3) kann eine grobe Abschätzung erstellt werden, welchen Einfluss die zusätzliche Berücksichtigung des Paarbildungsanteils an der Rekonstruktion besitzt. Dafür wurden Simulationsdaten mit einem Vorwärtsprojektor gemäß Gl. 5.34 erstellt und sowohl mit zusätzlicher Berücksichtigung des Paarbildungsterms $\Xi(E)\xi$ als auch unter alleiniger Berücksichtigung des photoelektrischen und des Compton-Anteils entsprechend Gl. 5.26 bis Iteration 100 rekonstruiert. Die zur Rekonstruktion herangezogenen Wolfram-Spektren wurden durch Monte-Carlo Simulationen für Beschleunigungsspannungen von 3 MV und 9 MV generiert (siehe Abb. 5.25). Der Abstand zum Referenzvolumen (siehe ebenfalls Abb. 5.25) zeigt den größeren Einfluss des Paarbildungsterms bei höheren Beschleunigungsspannungen. Der Einfluss auf unterschiedliche Materialien wird insbesondere in den Differenzbildern (Betrag der Differenz) zwischen den Rekonstruktionsergebnissen bei Iteration 100 mit und ohne Berücksichtigung des Paarbildungsanteils sichtbar (siehe Abb. 5.26). Insbesondere bei der Simulation mit 9 MV Beschleunigungsspannung zeigen sich relevante Abweichungen vom erwarteten Schwächungskoeffizienten. Darüber hinaus werden an den Rändern von Bereichen hoher Absorption auch Rekonstruktionsartefakte in Form unscharfer Kanten erkennbar. Während die Vernachlässigung des Paarbildungsanteils an der Absorption bei Simulationsdaten bei 3 MV vornehmlich einen Versatz der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten bewirkt, werden bei 9 MV auch die Artefakte an den Kanten der Absorptionsbereiche sichtbar. Diese werden durch das unzureichend wiedergegebene Modell der Simulation hervorgerufen.

Da keine Ergebnisse aus realen Datensätzen vorliegen, kann an dieser Stelle nur die Abschätzung angegeben werden, dass bei hohen Energien vermehrt auftretende Streustrahlungsartefakte die in diesen Simulationsergebnissen auftretenden Artefakte überlagern würden. Zudem wurde in den Simulationen keine Absorptionswahrscheinlichkeit des Röntgendetektors berücksichtigt, die den Schwerpunkt des effektiven Spektrums zu kleineren Energien verschiebt (siehe auch Kap. 4.4). Eine Berücksichtigung des Paarbildungsterms in der Re-

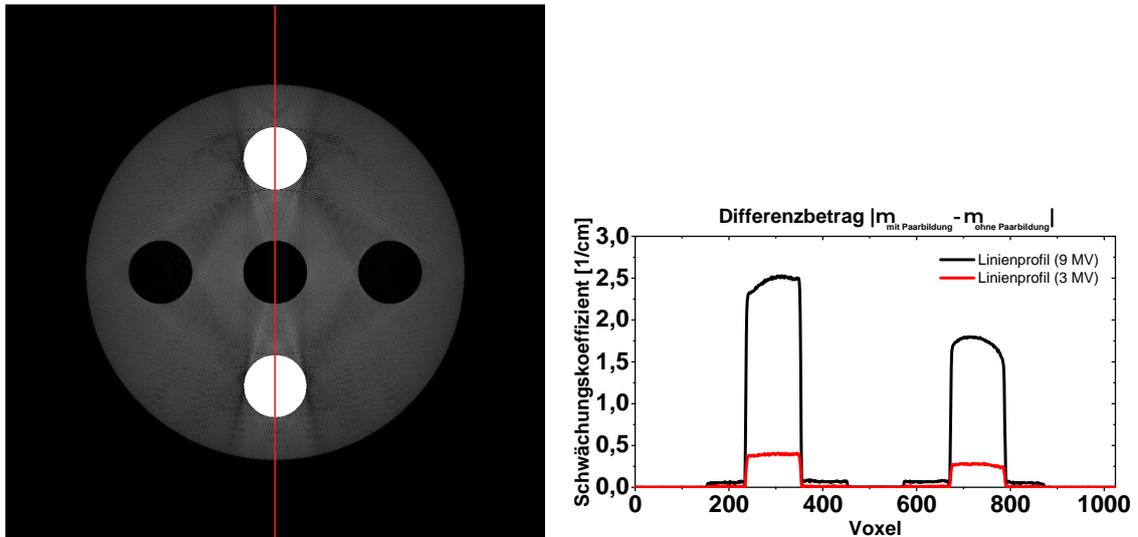


(a) Monte-Carlo simulierte W-Spektren bei Beschleunigungsspannungen von 3 MV und 9 MV. Die hier normiert dargestellten Spektren wurden zur Erstellung der Simulationen mit Gl. 5.34 herangezogen. Zusätzlich zum Bremsspektrum und den charakteristischen Linien bilden Photonen aus Paarvernichtungsprozessen eine Linie bei 511 keV.

(b) Auftragung des quadratischen Rekonstruktionsabstandes (entsprechend Kap. 2.4) gegen die Iterationszahl. Der größere Abstand bei Vernachlässigung des Paarbildungsanteils, insbesondere bei Verwendung des 9 MV Spektrums, zeigt den stärkeren Einfluss der Paarbildung bei höheren Beschleunigungsspannungen.

Abbildung 5.25: Spektren der Simulationen des Multimaterialphantoms und Auswertung der Rekonstruktionen bei Energien größer 1 MeV.

Rekonstruktion erscheint daher erst bei Röntgenspektren aus Beschleunigungsspannungen deutlich größer als 1 MV sinnvoll.



(a) Differenzbetrag der Rekonstruktionen mit und ohne Berücksichtigung des Paarbildungsterms der Simulationen bei 9 MV. Rekonstruiert wurden Simulationsdaten des Multimaterialphantoms (siehe auch Abb. 5.25). Grauwertspreizung: (0-0,2)

(b) Linienprofil entlang der roten Linie in (a). Gezeigt wird das Linienprofil durch das in (a) gezeigte Differenzbild und durch das entsprechende Differenzbild bei Verwendung eines 3 MV Spektrums.

Abbildung 5.26: Differenzbild bei Berücksichtigung und Vernachlässigung des Paarbildungsanteils der Rekonstruktion aus Simulationsdaten mit 9 MV Beschleunigungsspannung und das daraus generierte Linienprofil. Die Differenzen wurden bei Iteration 100 gebildet.

5.3.1 Vergleich segmentierungsbasierter und globaler Energiemodellierung

Um einen Vergleich der zwei Methoden der Energiemodellierung anzustellen, werden sowohl Simulations- als auch Messdaten herangezogen. Deterministisch errechnete Simulationsdaten beinhalten insbesondere im Zusammenhang der Energieabhängigkeiten das Problem, dass der in der Simulation verwendete Projektor selbst nur ein ungenaues Abbild der Realität liefert. Bei Monte-Carlo-basierten Simulationen hingegen kann die Energieabhängigkeit nicht ohne den Einfluss sekundärer Effekte wie der Streustrahlung bewertet werden. Simulationen werden im Folgenden durch das genauere Modell des segmentierungsbasierten Projektors erzeugt und für beide Rekonstruktionsvarianten verwendet. Die Aussagekraft der Ergebnisse aus Simulationsdaten wird im Anschluss durch Messdaten unterstützt.

Einzelmaterial

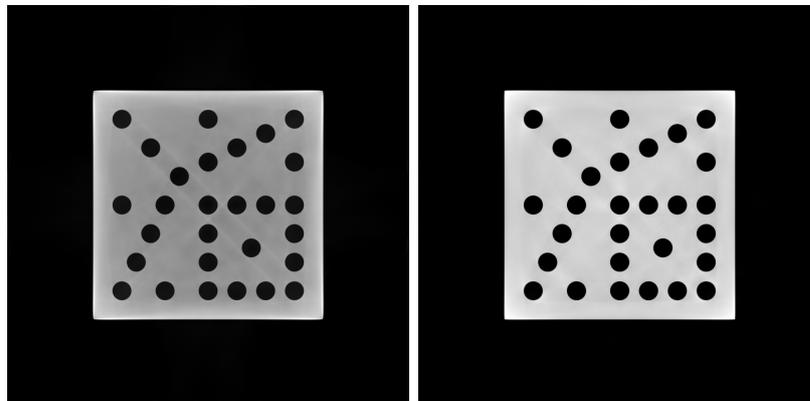
Zunächst kann die Rekonstruktion an einem Phantom getestet werden, das nur aus einem einzelnen Material besteht. Dafür wird eine CT Aufnahme des Lochplattenphantoms aus Aluminium mit einem Wolfram-Spektrum mit 220 kV Beschleunigungsspannung simuliert. Ein Rekonstruktionsergebnis mit globaler Energiemodellierung wird in Abb. 5.27 gezeigt. Durch Auswertung des quadratischen Abstands zur Referenzrekonstruktion (siehe Abb. 5.27) wird ersichtlich, dass die Variation eines der Parameter α und ε hinreichend ist, um ähnliche gute Ergebnisse zu erzielen. Der im Bereich $\alpha = 0,0$ bis $\alpha = 0,1$ und $\varepsilon = 2,5$ bis $\varepsilon = 3,5$

ermittelte beste Wert des Exponenten liegt bei $\varepsilon = 2,6$. Durch niedrigeres ε kann eine bessere Anpassung an die in der Simulation verwendete Kombination aus Photo- und Comptoneffekt erzielt werden. Bei niedrigerem α können aber auch bei $\varepsilon = 3,0$ ähnlich gute Ergebnisse erzielt werden, so dass die aufwändigere Variation von zwei Parametern auch durch die alleinige Anpassung von α ersetzt werden kann. Die Wahl von α kann dann empirisch durch die Variation des Parameters und die Bewertung des Ergebnisses erfolgen.

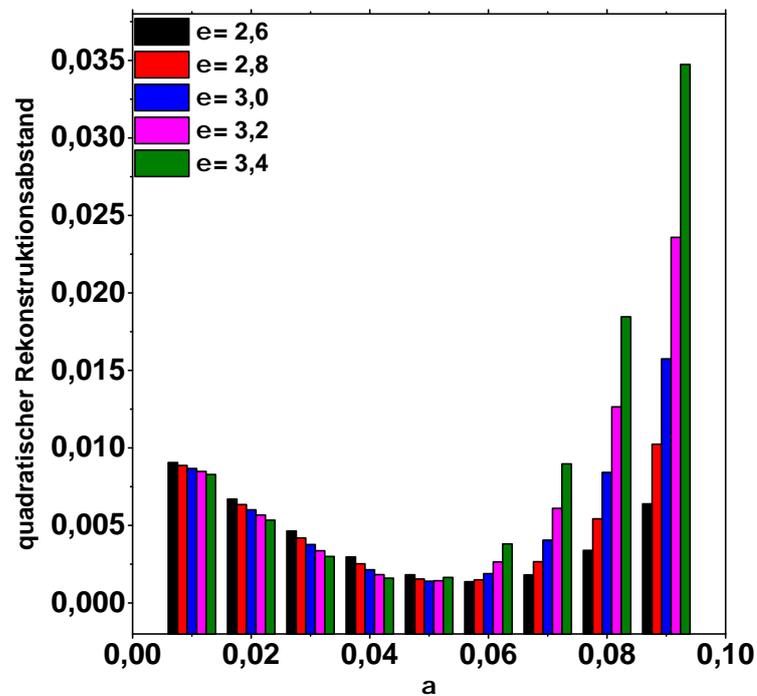
Die Aluminiumplatte des Multimaterialphantoms ohne Stecker dient als Messphantom zum Vergleich der Methoden. Für die in Abb. 5.28 gezeigten Rekonstruktionen wird die Entropie des Bildgradienten als Maß der Bildgüte für den Parameterbereich $\varepsilon = 2,8/3,0/3,2$ und $\alpha = 0,05$ bis $\alpha = 0,15$ verwendet. Wie schon in der Simulation werden ähnliche Ergebnisse für unterschiedliche Parameterkombinationen $(\alpha|\varepsilon) = (0,08|2,8)$, $(0,07|3,0)$, $(0,07|3,2)$ erreicht. Die Kombination $(0,07|3,2)$ hat die niedrigste Shannon-Entropie (zur Bewertung der Bildgüte mit Hilfe der Shannon-Entropie siehe auch Kap. 2.4 und [12]) des Bildgradienten und wird in Abb. 5.28 zum Vergleich gezeigt. Die Rekonstruktionen mit MLTR wurden mit niedriger TV-Regularisierung ($\beta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$) durchgeführt.

Für die segmentierungsbasierte Energiemodellierung werden ebenfalls Rekonstruktionen des Lochplattenphantoms durchgeführt. Da die Simulation mit dem Vorwärtsprojektor dieser Methode durchgeführt wurden, sind die in Abb. 5.29 gezeigten Ergebnisse entsprechend passend zur Referenz.

Die Rekonstruktion der Messung des Einzelmaterial-Phantoms wurde mit einem simulierten 120 kV-Spektrum ohne Vorfilter durchgeführt. Das Spektrum wurde für die Rekonstruktion in 1 keV Schritten von 5 bis 120 keV abgetastet. Es wurde die selbe leichte Regularisierung wie bei der globalen Energiemodellierung verwendet. Spektrum und Rekonstruktion werden zusammen mit einem Linienprofil zum Vergleich der Methoden in Abb. 5.30 gezeigt. Aufgrund der zu 70 keV gewählten Referenzenergie liegen die rekonstruierten Schwächungskoeffizienten niedriger als bei globaler Energiemodellierung.



(a) Rekonstruktionen ohne Korrektur (links) und mit bester (nach Auswertung des quadratischen Abstands zur Referenzrekonstruktion) Korrektur ($\varepsilon = 2,6$, $\alpha = 0,06$, rechts). Grauwertspreizung: (0 - 1).



(b) Quadratische Abweichungen von der Referenzrekonstruktion bei einigen ausgewählten Werten der Parameter α und ε .

Abbildung 5.27: Parameterfindung bei globaler Energiemodellierung. Die polychromatische Simulation des Lochplattenphantoms wurde für den Parameterraum $\alpha = 0$ bis $\alpha = 0,09$ und $\varepsilon = 2,5$ bis $\varepsilon = 3,4$ rekonstruiert. Es können durch Variation nur eines Parameter α, ε ähnliche Ergebnisse erzielt werden. Da die rekonstruierten Grauwerte der polychromatischen Simulation von denen der monochromatischen Simulationen abweichen und die Abweichungen auf normierten Volumen berechnet wurden, können die Werte nicht direkt mit denen der monochromatischen Rekonstruktionen (beispielsweise in Kap. 3.3.5) verglichen werden.

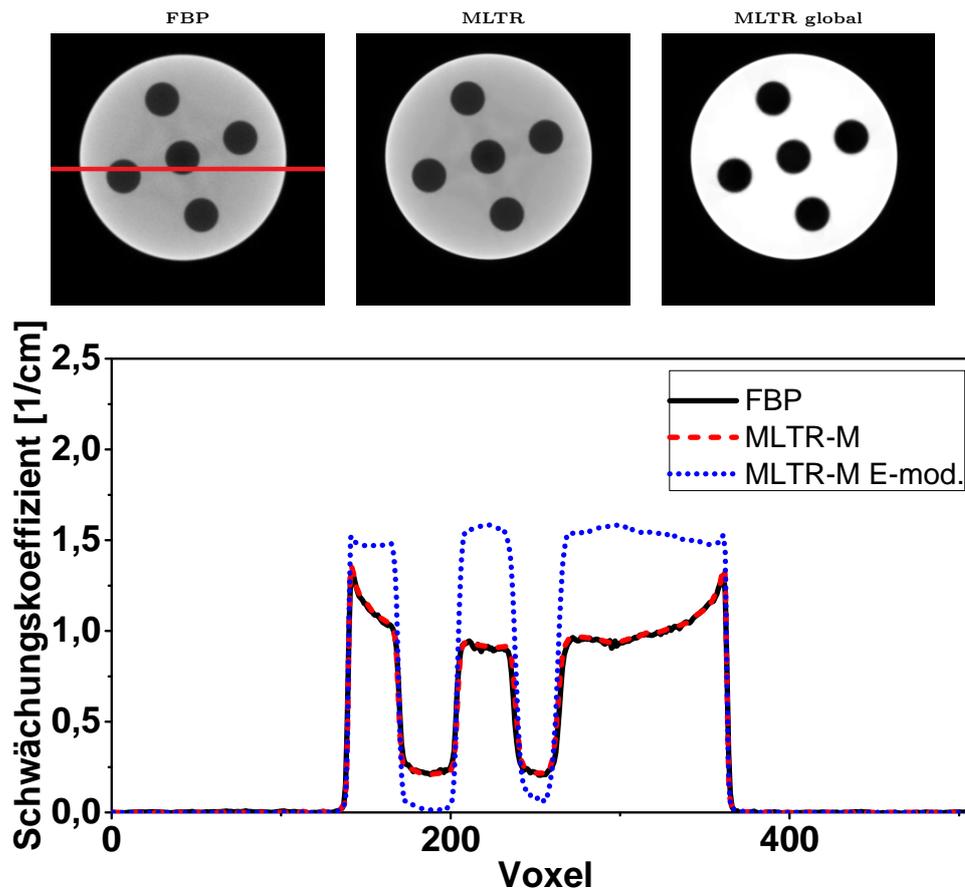
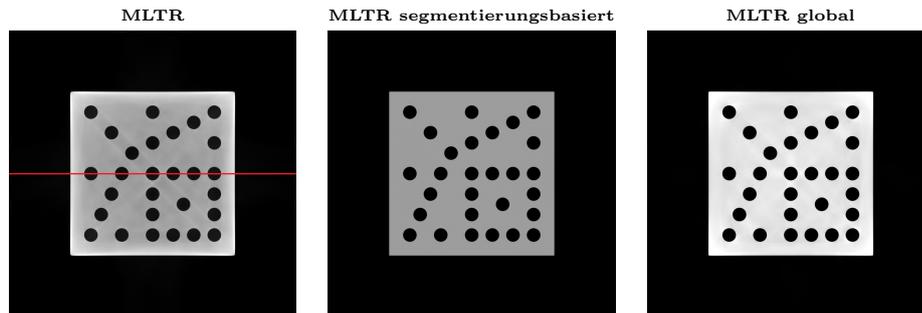
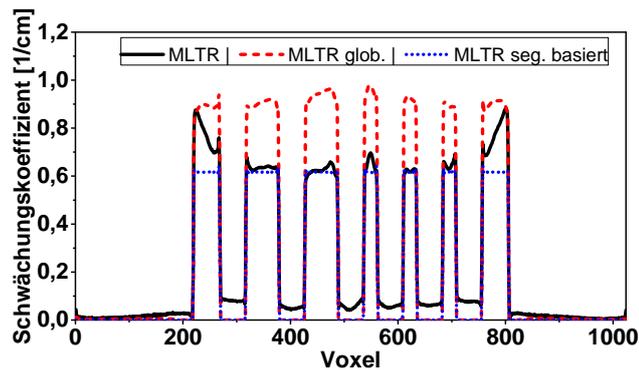


Abbildung 5.28: Rekonstruktionen der AlCuPb-Scheibe (siehe Kap. 2.3) mit globaler Energiemodellierung und Linienprofil entlang der roten Linie. Die globale Energiemodellierung wurde in der Kombination $(\alpha|\varepsilon) = (0,07|3,2)$ durchgeführt. Die Rekonstruktionen werden in einem Grauwertfenster von 0 bis $1,5 \frac{1}{\text{cm}}$ dargestellt.

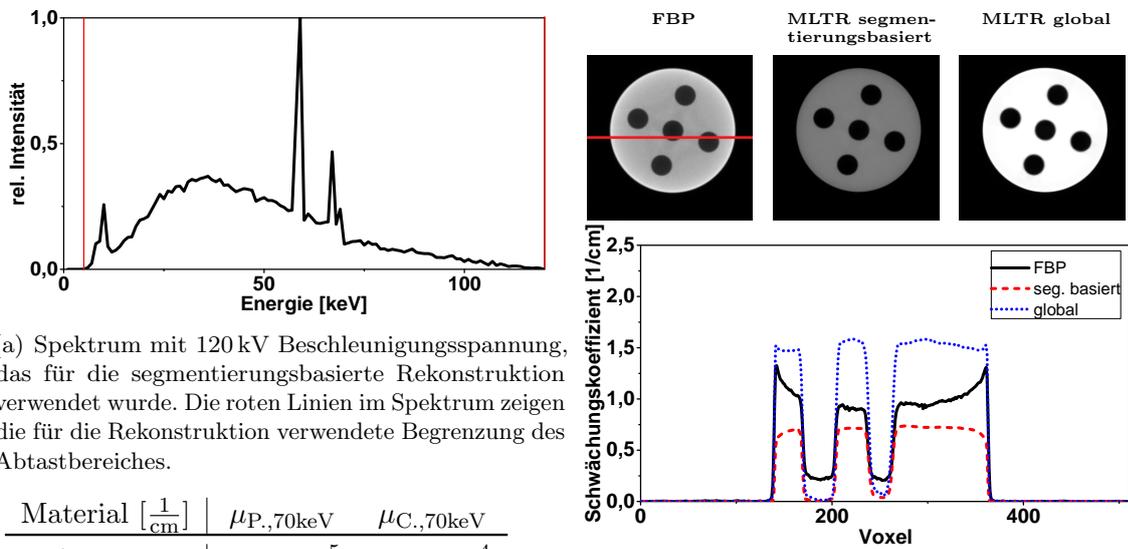


(a) Rekonstruktionsschnitte des Lochplattenphantoms nach Gl. 3.30 (MLTR), nach Gl. 5.26 (globale Energiemodellierung) und nach Gl. 5.22 (segmentierungsbasierte Energiemodellierung). Grauwertspreizung: (0-1).



(b) Linienprofil entlang der roten Linie in (a). Der Unterschied der mittleren Schwächungskoeffizienten zwischen den Methoden entspricht dem Unterschied der Energien ($E_0=70$ keV und effektive Energie des Spektrums) bei denen rekonstruiert wird.

Abbildung 5.29: Rekonstruktionen des Lochplattenphantoms bei 220 kV Beschleunigungsspannung. Der Vergleich zeigt deutliche Verbesserungen mit beiden Ansätzen. Da die Simulation mit dem Vorwärtsprojektor der segmentierungsbasierten Variante erstellt wurde, sind die Ergebnisse entsprechend passend zur Referenz. Im Linienprofil des globalen Energieansatzes sind Schwankungen der Grauwerte innerhalb des Objekts erkennbar, die auf das nicht vollständig zur Simulation passende Modell zurückzuführen sind.



(a) Spektrum mit 120 kV Beschleunigungsspannung, das für die segmentierungs-basierte Rekonstruktion verwendet wurde. Die roten Linien im Spektrum zeigen die für die Rekonstruktion verwendete Begrenzung des Abtastbereiches.

Material [$\frac{1}{\text{cm}}$]	$\mu_{P.,70\text{keV}}$	$\mu_{C.,70\text{keV}}$
Luft	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
AlCuPb	0,39	0,43

(b) Tabelle der in der segmentierungs-basierten Rekonstruktionsmethode verwendeten Materialien, aufgeschlüsselt nach deren photoelektrischen $\mu_{P.,70\text{keV}}$ und Compton-Anteilen $\mu_{C.,70\text{keV}}$ bei $E_0 = 70 \text{ keV}$.

(c) Schnittbilder der Rekonstruktionsergebnisse der Messung der AlCuPb-Scheibe. Das gezeigte Linienprofil folgt der roten Linie. Die niedrigeren Grauwerte des segmentierungs-basierten Modellansatzes sind auf den Unterschied zwischen der Referenzenergie $E_0 = 70 \text{ keV}$ und der effektiven Energie des Spektrums zurückzuführen. Grauwertspreizung: (0 - 1,5).

Abbildung 5.30: Vergleich der Rekonstruktionen mit globaler und segmentierungs-basierter Energiemodellierung an der Messung des Multimaterialphantoms ohne Stifte.

Multimaterial

Bei globaler Energiemodellierung erfolgt die Anpassung der Energieabhängigkeit übergreifend für alle Materialien der Probe. Die Abhängigkeit der Aufhärtung von den Materialeigenschaften wird als Abhängigkeit von der Strahlsumme beschrieben, ist also proportional zum Schwächungskoeffizienten (siehe Gl. 5.16). Die Anpassung des segmentierungsbasierten Modellansatzes erfolgt dagegen mit durch die Segmentierung zugewiesenen Materialeigenschaften.

Wie bei den Beispielen zum Einzelmaterial werden Simulationen auch hierbei zunächst mit dem Vorwärtsprojektor des segmentierungsbasierten Ansatzes (siehe Gl. 5.23) durchgeführt. Für diese Simulation wurden fünf unterschiedliche Spektren (160 kV und 220 kV Beschleunigungsspannung mit 0,5 mm Ti oder 1,0 mm Cu Vorfilter) herangezogen und die Standardabweichung im Bereich der unterschiedlichen Materialien bewertet. Die Standardabweichung gibt Aufschluss über Artefakte, da die zu einem bestimmten Material gehörenden Bereiche im idealen Volumen einen einzigen Schwächungskoeffizienten beinhalten. Die Auswertung wird ausschließlich für $\varepsilon = 3,0$ vorgenommen, da im vorhergehenden Kapitel gezeigt werden konnte, dass durch Variation nur eines Parameters sehr ähnliche Ergebnisse erzielt werden.

In Abb. 5.31 werden Unterschiede für die Rekonstruktionsergebnisse unterschiedlicher Materialien im globalen Modellansatz deutlich. In der Abbildung sind die Minima der Standardabweichung für die verwendeten Spektren und Materialien aufgetragen. Deutlich wird, dass sich der für das beste Ergebnis nötige Parameter α abhängig vom Spektrum und vom betrachteten Material ergibt, da die Eigenschaften des Spektrums und des Materials im Parameter α vereint modelliert werden. Eine optimale Wahl lässt sich beim globalen Modellansatz also nur empirisch treffen. Abb. 5.32 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse

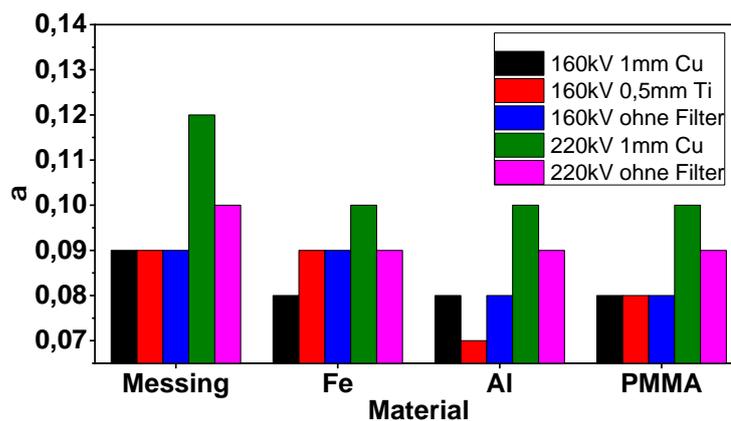


Abbildung 5.31: Parameter α bei der niedrigsten Standardabweichung im betrachteten Materialbereich, aufgetragen für die 5 verwendeten Spektren und die im Multimaterialphantom vorkommenden Materialien. Für die Auswertung wurden Simulationsdaten mit dem Vorwärtsprojektor nach Gl. 5.23 verwendet. Die besten Werte des Parameters α sind sowohl abhängig vom Spektrum, als auch abhängig vom Material. Damit kann die globale Energiemodellierung bei mehreren Materialien mit stark unterschiedlichen Absorptionseigenschaften in einer Probe keine ideale Artefakt-Korrektur bewirken.

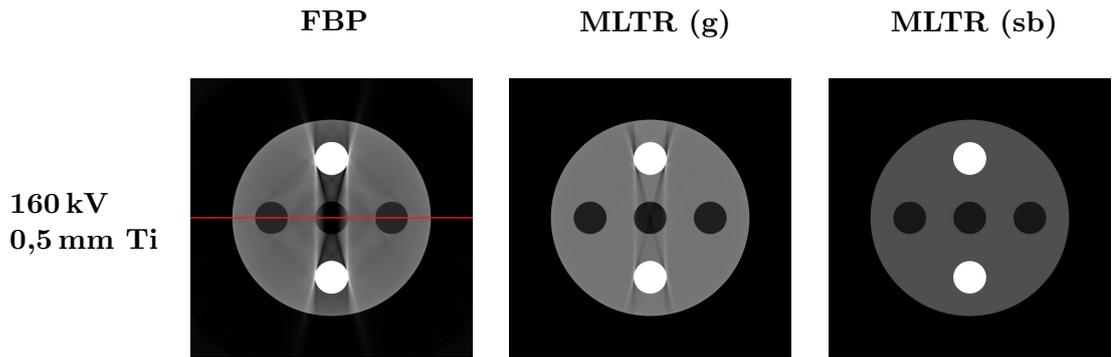
Material [$\frac{1}{\text{cm}}$]	$\mu_{\text{Photoeffekt, 70keV}}$	$\mu_{\text{Comptoneffekt, 70keV}}$
Luft	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
PMMA	0,01	0,12
Messing	9,18	1,09

Tabelle 5.1: Materialdaten für die segmentierungsbasierte Modellierung der Rekonstruktion der Messung eines Steckers. Die Ergebnisse werden in Abb. 5.33 gezeigt.

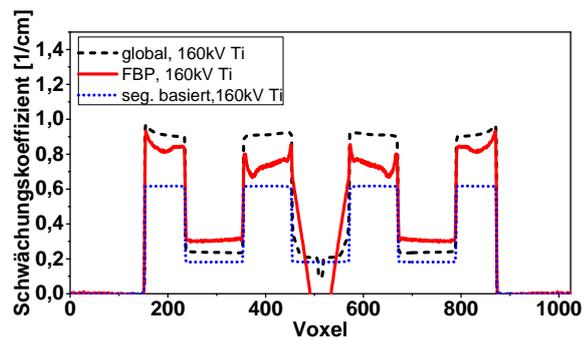
des bei 220 kV Beschleunigungsspannung mit 1 mm Cu-Filter und des bei 160 kV mit 0,5 mm Ti-Filter simulierten Multimaterialphantoms mit beiden Ansätzen im Vergleich. Die Ergebnisse der gefilterten Rückprojektion mit Shepp-Logan-Filter zeigen deutliche Cupping-Artefakte, die den Schwächungskoeffizienten im PMMA-Stift in der Mitte des Phantoms unbestimmbar macht. Die globale Energiemodellierung wurde mit $\alpha = 0,07$ (160kV, Ti-Filter) bzw. $\alpha = 0,10$ (220kV, Cu-Filter) entsprechend Abb. 5.31 für den Aluminiumanteil, der den größten Teil des Phantoms ausmacht, durchgeführt. Es wurden bei allen iterativen Rekonstruktionen 100 Iterationen mit einer TV-Regularisierung ($\beta_2 = 10^{-4}$) berechnet.

Die Rekonstruktionsergebnisse des segmentierungsbasierten Verfahrens sind erwartungsgemäß sehr gut, da die Simulation mit dem entsprechenden Vorwärtsprojektor erstellt wurde. Die Ergebnisse der globalen Energiemodellierung zeigen noch Artefakte. Die rekonstruierten Werte des mittleren PMMA-Stifts sind in beiden gezeigten Fällen noch artefaktbehaftet.

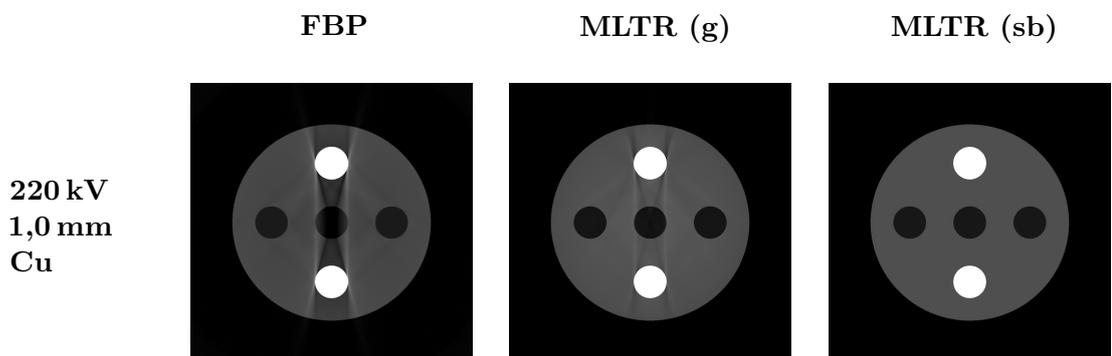
Ein Vergleich der Verfahren am Messbeispiel kann an der Messung eines industriell genutzten Steckers durchgeführt werden. In den Kunststoff-Stecker sind Kontakte aus Messing eingebettet, deren Zusammensetzung (60% Cu, 18% Zn, 12% Ni, 7% Sn, 3% Sonstiges) mit Röntgenfluoreszenzanalyse bestimmt wurde (siehe Tab. 5.1). Die entsprechenden Rekonstruktionsschichten werden in Abb. 5.33 gezeigt. Das für die segmentierungsbasierte Energiemodellierung verwendete Spektrum wurde durch die im folgenden Kapitel vorgestellte Spektrumsschätzung bestimmt. Ähnlich zu den Simulationen (siehe Abb. 5.32) verbessert die globale Energiemodellierung nach Gl. 5.22 die Rekonstruktionsergebnisse. Kunststoffanteile zwischen den Messingdrähten, die ohne Modell durch Artefakte überlagert waren, werden sichtbar und der Kontrast zwischen Metall und Kunststoff steigt. Die segmentierungsbasierte Energiemodellierung erfordert mehr Vorwissen über die Probe. Die Zusammensetzung des Kunststoffs und der Messinganteile wurde näherungsweise bestimmt und ein Röntgenspektrum geschätzt. Das Rekonstruktionsergebnis zeigt deutlich weniger Artefakte und den aus den Materialdaten erwarteten Kontrast.



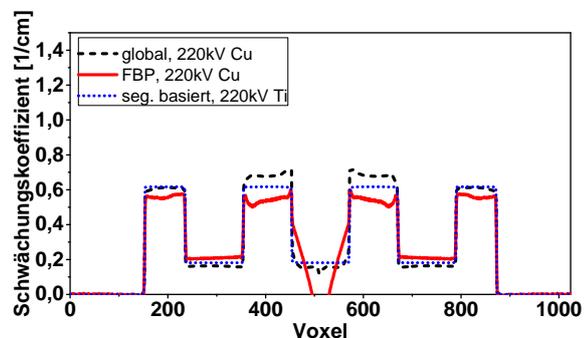
(a) Rekonstruktionsergebnisse des Multimaterialphantoms mit einem simulierten Spektrum bei 160 kV Beschleunigungsspannung und 0,5 mm Ti Vorfilter. Grauwertspreizung: (0-2).



(b) Linienprofil bei 160 kV Beschleunigungsspannung und 0,5 mm Ti Vorfilter entlang der roten Linie in (a).

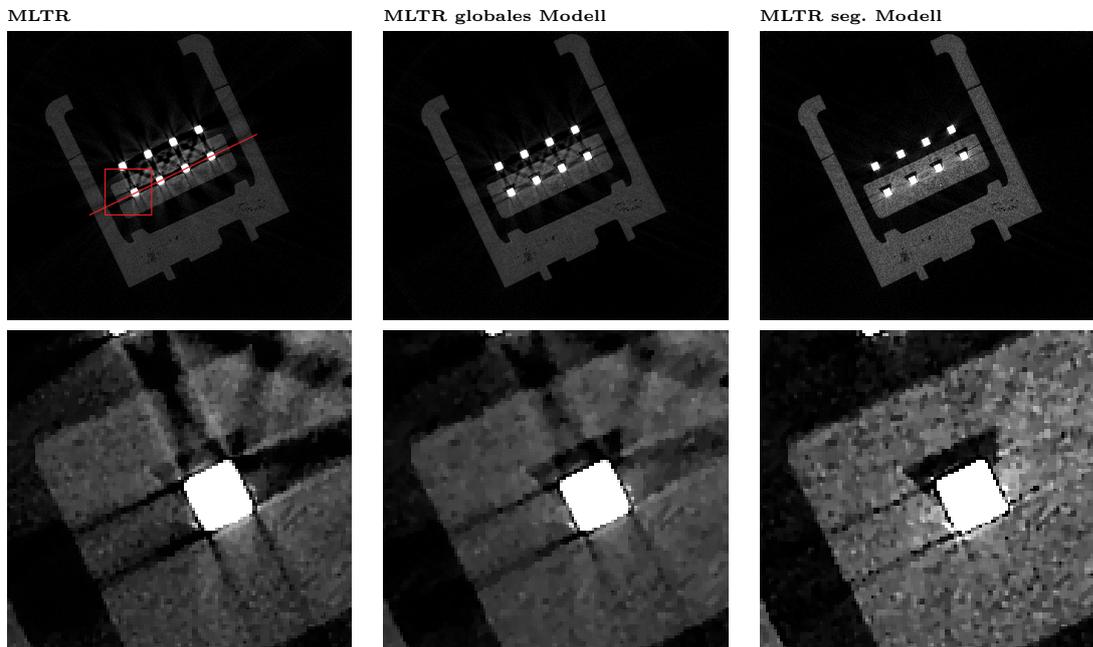


(c) Rekonstruktionsergebnisse des Multimaterialphantoms mit einem simulierten Spektrum bei 220 kV Beschleunigungsspannung und 1,0 mm Cu Vorfilter. Grauwertspreizung: (0-2).

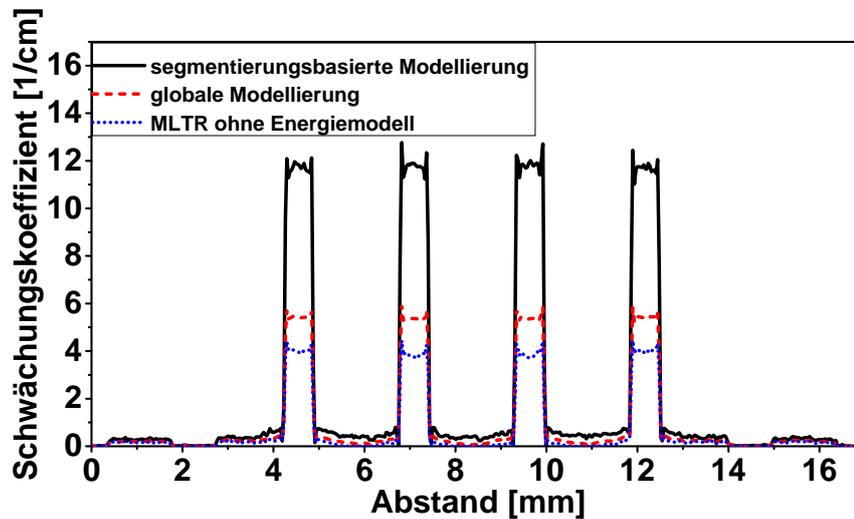


(d) Linienprofil bei 220 kV Beschleunigungsspannung und 1,0 mm Cu Vorfilter entlang der roten Linie in (a).

Abbildung 5.32: Vergleich der Rekonstruktionsergebnisse des Multimaterialphantoms für gefilterte Rückprojektion, globales und segmentierungsbasiertes Energiemodell. Das segmentierungsbasierte Modell diente zur Simulation der Vorwärtsprojektionen und zeigt damit ideale Rekonstruktionen. Das globale Modell zeigt bei höheren Energien (220 kV, 1,0 mm Cu Spektrum) bessere Ergebnisse. Im Vergleich zur gefilterten Rückprojektion (FBP) zeigen beide Verfahren Verbesserungen hinsichtlich der auftretenden Cupping-Artefakte.



(a) Schnittbilder des Rekonstruktionsvolumens der Messung eines industriell genutzten Steckers. Insbesondere in den Detailansichten (unten) zeigen sich ohne Energiemodellierung starke Artefakte durch das polychromatische Röntgenspektrum. Grauwertspreizung: (0 - 1).



(b) Linienprofil entlang der roten Linie in (a). Durch die Energiemodellierung verändern sich sowohl der Kontrast als auch die Einheitlichkeit der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten in den Kunststoff-Bereichen.

Abbildung 5.33: Rekonstruktionsschichten der CT-Messung eines industriell genutzten Steckers. Ähnlich zu den Simulationen (siehe Abb. 5.32) zeigt die globale Energiemodellierung Verbesserungen hinsichtlich der durch das polychromatische Röntgenspektrum auftretenden Artefakte. Nahezu artefaktfreie Ergebnisse werden durch die segmentierungsbasierte Energiemodellierung geschaffen.

5.3.2 Polychromatische Rekonstruktion mit Spektrumsschätzung

In Kap. 5.3 wurde ein Algorithmus vorgestellt, der es erlaubt, das effektive Röntgenspektrum des Aufnahmesystems zusammen mit Materialeigenschaften der gemessenen Probe zu verwenden, um Aufhärungsartefakte im Rekonstruktionsvolumen zu verringern. Obwohl der Einfluss von Abweichungen des angenommenen Röntgenspektrums von der tatsächlichen Energieverteilung der Photonen gering ist, werden gerade fehlerhafte Annahmen im Bereich kleiner Energien als Artefakte im Rekonstruktionsvolumen sichtbar.

Um Kenntnis des effektiven Spektrums zu erlangen, können unterschiedliche Methoden eingesetzt werden. Das Spektrum kann deterministisch simuliert werden (siehe z.B. [90]), es kann - bei guter Kenntnis des Systemaufbaus - durch Monte-Carlo Methoden simuliert werden oder es kann mit Hilfe eines Spektrometers gemessen werden. Messungen bilden aber, ebenso wie Simulationen, die ausschließlich die Röntgenquelle berücksichtigen, nur das Quellspektrum ab. Die zusätzliche spektrale Gewichtung durch den Szintillator des Detektionssystems bleibt dabei unberücksichtigt.

Sidky et al. [91] entwickelten eine auf dem Maximum-Likelihood Verfahren basierende Schätzung des Röntgenspektrums unter Annahme von Poissonrauschen auf streustrahlungsfreien Durchstrahlungsbildern. Dafür werden keilförmige Testkörper bekannter Abmessungen in den Strahlengang gebracht, deren Materialzusammensetzung zuvor genau bestimmt wurde. Da der Detektor in diesem Fall derselbe ist, dessen Einfluss auf das effektive Spektrum mitberechnet werden soll, kann damit in einem iterativen Verfahren eine Schätzung dieses Spektrums erfolgen. An gemessenen Phantomen konnte dies bereits in [92] nachgewiesen werden.

In der Rekonstruktion werden für jede Vorwärtsprojektion Durchstrahlungslängen des Volumens erfasst. Kann mit einem Initialspektrum also eine Rekonstruktion erstellt werden, deren Voxel segmentierbar und damit den Materialparametern zuordenbar sind, so liegt die in [91] verwendete Information über Material und erwartete Detektorintensität vor und kann zur Schätzung des Spektrums verwendet werden.

Maximum-Likelihood Schätzung des Spektrums Die Schätzung des Spektrums entspricht einem Rekonstruktionsprozess unter der Voraussetzung bekannter Durchstrahlungslängen. Das Transmissionsmodell aus [91] entspricht dabei der Vorwärtsprojektion eines Detektorelements:

$$\bar{y}_i = \sum_k \bar{y}_{ik} = \sum_k y_{0k} \exp \left(- \sum_j a_{ij} \mu_{jk} \right) \quad (5.39)$$

mit Spektrum \vec{y}_0 , abgetastet bei Energie-Index k . \bar{y}_{ik} entspricht der materialabhängigen Vorwärtsprojektion der segmentierten Volumendaten. Der energieabhängige Wert μ_{jk} berechnet

sich also, analog zu Gl. 5.23 aus dem Voxelwert μ_j :

$$\begin{aligned}\mu_{jk} &= \phi(\mu_j)\Phi_k + \theta(\mu_j)\Theta_k \\ \phi(\mu_j) &= \phi(\mu_{\text{Materialklasse}}) \\ \theta(\mu_j) &= \theta(\mu_{\text{Materialklasse}})\end{aligned}\tag{5.40}$$

Die in [91] gegebene Updategleichung nach dem Expectation-Maximization-Maximum-Likelihood (EMML) Verfahren kann bei Iteration n geschrieben werden als:

$$y_{0_k}^n = y_{0_k}^{n-1} \frac{\sum_i \bar{y}_{ik} \frac{y_i}{\bar{y}_i}}{\sum_i \bar{y}_{ik}}\tag{5.41}$$

Da die Updategleichung multiplikativ ist, wird die Positivität des Spektrums immer gewährleistet. Die Abhängigkeit des Spektrums vom Detektorpixel-Index i wurde in obigen Gleichungen vernachlässigt, kann aber jederzeit durch eine Skalierung in Abhängigkeit von i eingeführt werden.

Wird dieses Vorgehen in die Rekonstruktion integriert, kann es nicht als Teil des Rekonstruktionsupdates erfolgen. Eine Schätzung des Spektrums kann aber als Zwischenschritt eingesetzt werden, der nur geringen zusätzlichen Rechenaufwand mit sich bringt, da alle für die Schätzung notwendigen Daten (Messdaten, projizierte Werte) bereits für die Vorwärtsprojektion der Rekonstruktion berechnet wurden. Für die Zeitpunkte, zu denen dieser Zwischenschritt ausgeführt wird, stehen mehrere Möglichkeiten zur Wahl. Das Spektrum kann nach jeder Iteration, jedem Subset oder jeder Projektion erneuert werden. Da bei einer Durchführung am Ende einer Iteration sehr viele Datenpunkte vorgehalten werden müssen, erscheinen die Varianten, das Spektrum nach jedem Subset oder jeder Projektion neu zu berechnen, sinnvoller. Hier wird die Erneuerung des Spektrums nach jeder Projektion mit einer Iterationszahl zwischen $N_{\text{Spektrum}} = 10$ und $N_{\text{Spektrum}} = 100$ durchgeführt. Da dies für jede Projektion erfolgt, sind nach einer Iteration der Rekonstruktion $N_{\text{Proj.}} \cdot N_{\text{Spektrum}}$ Iterationen des Spektrums abgeschlossen. Dies entspricht bei einer beispielhaften Zahl von 1000 Projektionen und $N_{\text{Spektrum}} = 10$ einer Anzahl von 10^5 Iterationen des Spektrums pro Iteration des Rekonstruktionsverfahrens.

Im Gegensatz zur Spektrumsschätzung in [91] ist die Datenbasis \bar{y}_i im hier beschriebenen Fall veränderlich - ein Umstand, der durch die Annahme einer guten Initialschätzung und einer geeigneten Segmentierung gerechtfertigt werden muss.

Eine sinnvolle Segmentierung kann nur erfolgen, wenn die Rekonstruktion bereits den erwarteten Wertebereich erreicht hat. Der Start der Spektrenberechnung kann also erst nach einigen Iterationen erfolgen. Der Ablauf kann beschrieben werden durch:

1. Durchführung von n_0 Iterationen
2. Für jede Projektion der folgenden Iterationen:
 - Berechnung von $\bar{y}_{ik,0}$
 - Berechnung der projizierten Intensitäten \bar{y}_i

- Update des Spektrums nach Gl. 5.41
- Eventuelle Begrenzung des Spektrums

3. Verwendung des Spektrums in weiteren Iterationen

Eine einzelne Vorwärtsprojektion enthält die Durchstrahlungslängen in unterschiedlichen Kombinationen von Materialien. Entscheidend für die Korrektheit der Schätzung und die Konvergenz des Algorithmus ist die Genauigkeit der Materialdaten. Passen diese nicht zur verwendeten Probe oder sind die Messdaten durch Streustrahlung oder Messfehler überlagert, wird dies auch das Ergebnis der Spektrumsschätzung beeinflussen. Um trotz Messfehlern eine Artefaktreduktion durch die Anpassung des Spektrums zu erzielen, können die für das Spektrum verwendeten Messwerte eingeschränkt werden. Sehr geringe Detektorintensitäten besitzen den größten relativen Fehler durch Intensitätsoffsets (z.B. durch vom Objekt ausgehende Streustrahlung), so dass eine Begrenzung des minimal verarbeiteten Messwerts zur Verbesserung der Ergebnisse führt.

Wird zudem das Spektrum so begrenzt, dass eine Abweichung vom Initialspektrum nur bis zu einer festgelegten prozentualen Grenze möglich ist, kann ein Divergieren der Berechnung auch bei Messfehlern und unter Einfluss von Streustrahlung vermieden werden.

Da es sich um einen multiplikativen Algorithmus handelt, muss das Spektrum mit Werten größer als Null initialisiert werden. Als Initialspektrum können entweder simulierte Werte dienen, oder es wird eine Funktion angenommen, die nicht die spezifischen Eigenschaften eines Röntgenspektrums aufweist. In den folgenden Simulationen werden dafür die Funktionen $y_{0,\text{const}}(E) = \frac{1}{E_{\text{Max}} - E_{\text{Min}}}$, $y_{0,\text{sin}}(E) = \frac{1}{2} \sin(E)$ und $y_{0,\text{sin}^2}(E) = \frac{2}{\pi} \sin^2(E)$ herangezogen.

Simulationen und Messergebnisse Um den Einfluss des Initialspektrums an Simulationsergebnissen zu zeigen, wurde das Multimaterialphantom (siehe Kap. 2.3) verwendet. Um das Spektrum zunächst frei von der eigentlichen Rekonstruktion schätzen zu können, wird die Rekonstruktion mit dem Referenzvolumen initialisiert und nur eine Iteration durchgeführt, so dass nur Veränderungen des Spektrums auftreten können. N_{Spektrum} wurde auf den Wert 100 gesetzt, so dass bei 1000 Projektionen 10^5 Updates des Spektrums durchgeführt werden.

Die Simulationen wurden mit 3 Spektren bei 160 kV Maximalspannung mit 1 mm Cu Vorfilter, bei 220 kV ohne Vorfilter und bei 220 kV mit 1 mm Cu Vorfilter durchgeführt. Die in den Simulationen verwendeten Spektren entstammen Schätzungen mit simulierten Initialspektren nach Gl. 5.41 aus Messungen an Stufenkeilen.

Die aus der Rekonstruktion generierten Spektren werden in Abb. 5.34 gezeigt. Wie schon in [91] beschrieben, können charakteristische Linien nur dann wiederhergestellt werden, wenn sie als Teil des Initialspektrums in die Schätzung eingehen. Das errechnete Spektrum weicht bei charakteristischen Linien in diesem Energiebereich von der Referenz ab und generiert ungleiche Werte, so dass der Schwerpunkt des Spektrums gut wiedergegeben wird. Dies

zeigt sich in Tabelle 5.2. Darin werden die Schwerpunkte der Spektren

$$\bar{E} = \frac{\sum_k I_{0,k} E_k}{\sum_k I_{0,k}} \quad (5.42)$$

errechnet. Die größten Abweichungen zeigen sich bei Annahme eines konstanten Initialspektrums. Wird eine \sin^2 Funktion, die am besten der Form der Referenzspektren entspricht, als Initialisierung zugrunde gelegt, fallen die Abweichungen zur Referenz am geringsten aus. Grund dafür sind vornehmlich hohe Energien im Spektrum. Diese werden im Phantom kaum geschwächt und haben damit nur skalierenden Einfluss. In Abb. 5.34 wird dies für 160 kV genauer gezeigt.

Spektrum	\bar{E}_{ref} [keV]	\bar{E}_{const} [keV]	\bar{E}_{sin} [keV]	\bar{E}_{sin^2} [keV]
160 kV 1 mm Cu	81.58	82.70	82.54	82.45
220 kV ohne Filter	61.51	62.58	62.39	62.28
220 kV 1 mm Cu	90.26	92.40	91.82	91.48

Tabelle 5.2: Vergleich der Schwerpunktsenergien. Das konstant initialisierte Spektrum zeigt die größten, das \sin^2 initialisierte Spektrum die geringsten Abweichungen.

Zum Test der Methode mit Messdaten werden CT-Aufnahmen einer gebogenen Aluminiumfolie der Dicke $250 \mu\text{m}$ mit einer Materialreinheit von 99,0 % durchgeführt. Bei einer Spannung von 50 kV werden bei drei Messungen unterschiedliche Vorfilter bekannter Materialstärke benutzt. Aus der bekannten spektralen Aufhärtung durch den Vorfilter kann abgeschätzt werden, ob die erhaltenen Spektren den Einfluss des Vorfilters widerspiegeln. Gestartet wird die Bestimmung des Spektrums mit $N_{\text{Spektrum}} = 10$ bei Iteration 5 von 50 sowohl mit \sin^2 Initialspektrum als auch mit einem 50 kV Spektrum das gemäß [93] simuliert und mit dem Absorptionsverhalten eines $50 \mu\text{m}$ $\text{Gd}_2\text{O}_2\text{S}$ Szintillators gewichtet wurde. Bei Verwendung des simulierten Initialspektrums wurden auch die Aluminium-Vorfilter als bekannt angenommen und in die Initialisierung einbezogen. Beide Varianten zeigen sehr ähnliche Ergebnisse, sowohl in der Rekonstruktion (siehe Abb. 5.36), als auch im berechneten Spektrum. Die Ergebnisse der Spektrumsschätzung werden in Abb. 5.35 gezeigt. Anhand der Erhöhung niedriger Energien des geschätzten Spektrums gegenüber dem simulierten Initialspektrum lässt sich schließen, dass das spezifische Absorptionsverhalten des verwendeten Detektors Unterschiede zur im Initialspektrum getätigten Annahme zeigt.

Im \sin^2 -initialisierten Spektrum wurde kein Wissen über den verwendeten Vorfilter vorausgesetzt. Abb. 5.35 zeigt daher für diesen Fall zusätzlich zu den geschätzten Spektren die Spektren, die theoretisch entstehen, wenn dem 0,5 mm Aluminiumfilter weitere 0,5 mm bzw. 1,0 mm Aluminium vorgeschaltet werden. Es zeigen sich leichte Abweichungen bei kleinen Energien, aber eine gute Wiedergabe des Gesamtverlaufs. Da die drei berechneten Spektren auf drei separaten Messungen beruhen, können auch leichte Veränderungen des tatsächlichen Quellspektrums durch die Erwärmung der Quelle nicht ausgeschlossen werden. Bei einer Voxelauflösung von $17,9 \mu\text{m}$ und einer Wandstärke der Aluminiumfolie von $250 \mu\text{m}$ ist die Folie zwar gut segmentierbar, durch die Abhängigkeit der Genauigkeit der

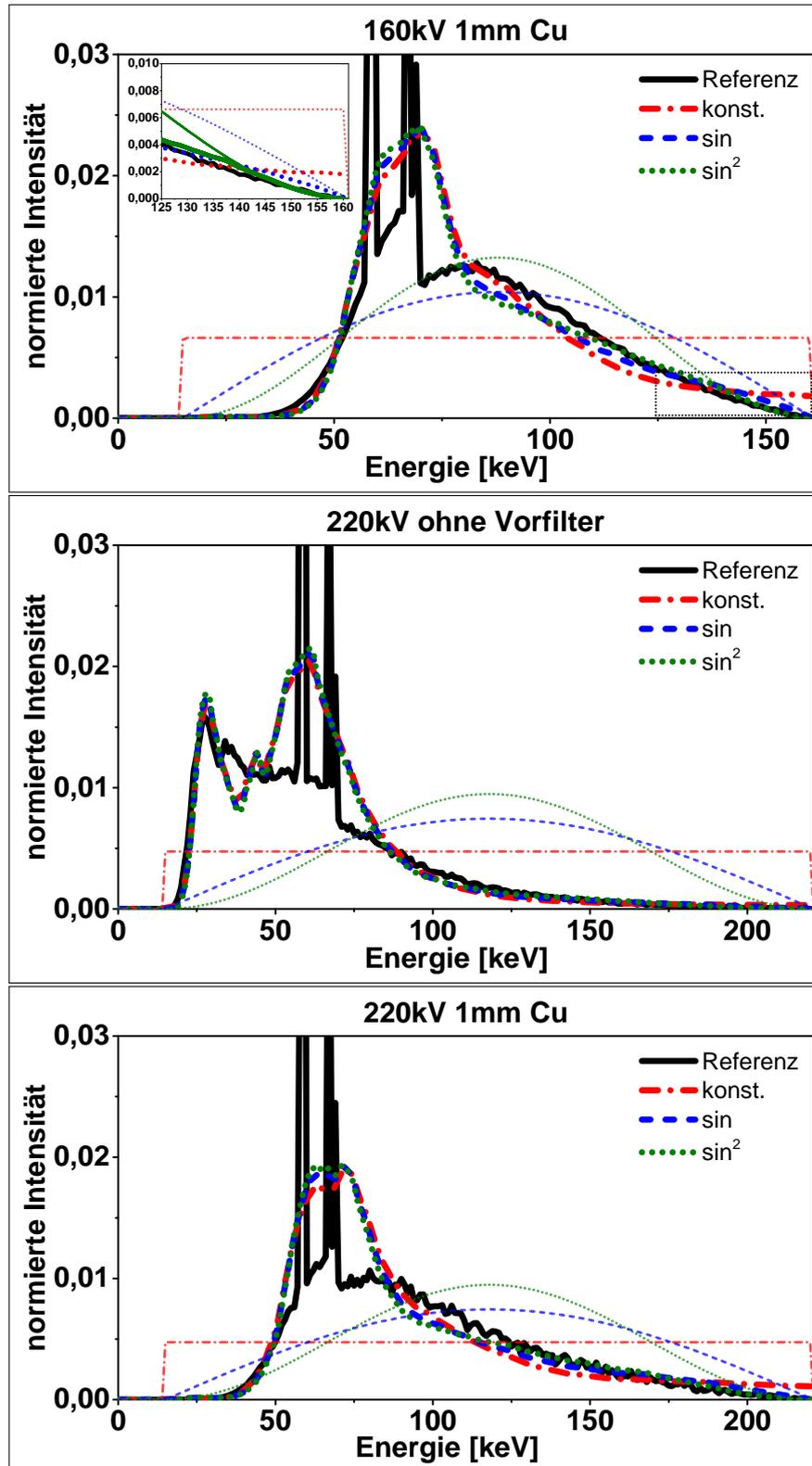


Abbildung 5.34: Berechnete Spektren und zugehörige Initialspektren der Simulationen des Multimaterialphantoms. Als durchgezogene, schwarze Linie wird das Referenzspektrum gezeigt. Die Spektren zeigen größere Abweichungen bei hohen Energien, da die Energieabhängigkeit der Absorption in diesem Bereich schwächer ist. Dies wird in der vergrößerten Darstellung des umrahmten Bereichs bei 160 kV deutlich. Die dünnen Linien zeigen die Initialspektren.

Durchstrahlungslängen von der Voxelaufösung kann aber auch ein darauf zurückföhrbarer Einfluss auf das errechnete Spektrum nicht ausgeschlossen werden.

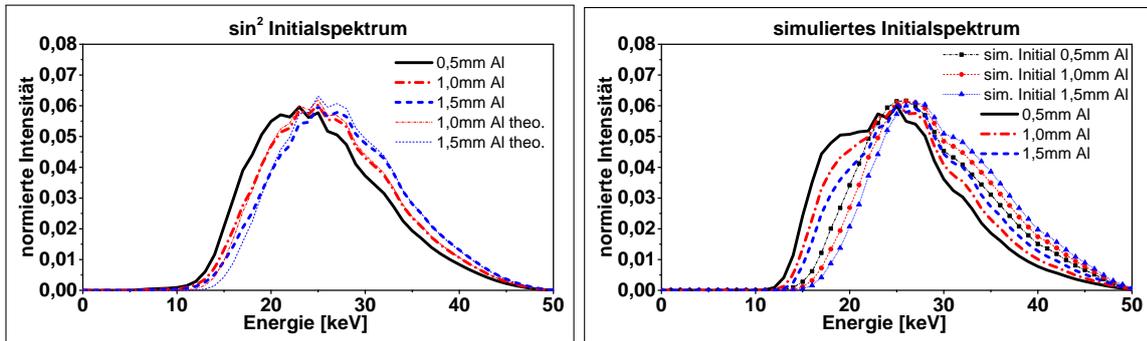


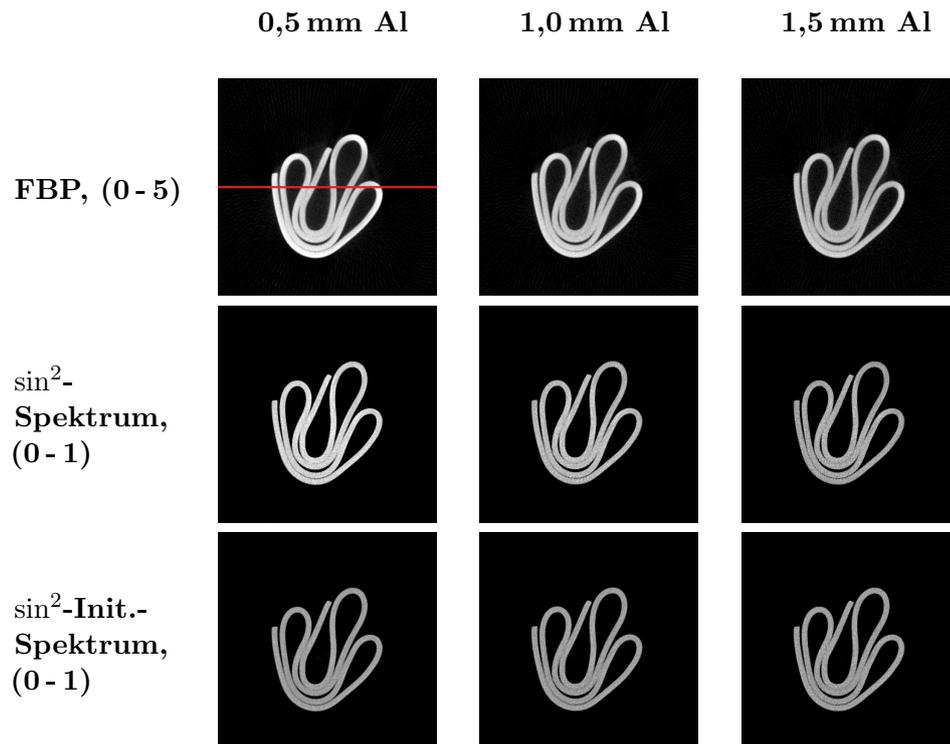
Abbildung 5.35: Ergebnisse der in die Rekonstruktion integrierten Spektrumsschätzung. Bei Initialisierung mit einer \sin^2 -Annahme können die Vorfilter der CT-Messungen nachvollzogen werden. Wird mit einem nach [93] simulierten Spektrum initialisiert, zeigt sich eine leichte Verschiebung des Spektrums zu niedrigeren Energien.

Zuletzt wird die Anwendbarkeit der Spektrumsanpassung noch an einem Messbeispiel industrieller CT gezeigt. Das Testbauteil wurde bereits in Kap. 5.2.3 bei der Evaluation der Brennfleckmodellierung herangezogen. Die Messung erfolgt hier bei 500 kV auf einem 2016×2016 Detektorarray. Die Vergrößerung auf die $200 \mu\text{m}$ großen Detektorelemente beträgt 1,32. Aus 1200 Projektionen wird eine mittlere Schicht der Größe 1024×1024 bei $150 \mu\text{m}$ Voxelgröße errechnet. Die Projektionen wurden vor ihrer Verwendung in der CT durch Entfaltung und eine Objekt-Streustrahlkorrektur gemäß Kap. 5.4 vorkorrigiert.

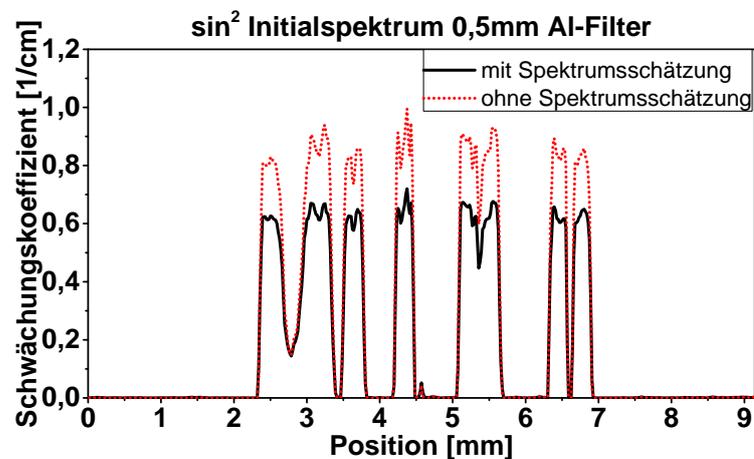
Als Material wird ein industrielles Aluminium ($\mu_{60 \text{ keV}} = 0,81 \frac{1}{\text{cm}}$) mit Verunreinigungen von Blei und anderen schweren Elementen in einer Zusammensetzung angenommen, die auch für die Messungen des Multimaterialphantoms verwendet wurde. Ab Iterationen 5 von 20 wird das simulierte 500 kV Initialspektrum mit $N_{\text{Spektrum}} = 10$ Iterationen pro Projektion korrigiert. Die Spektren wurden für die Rekonstruktion an 50 Stützstellen von 10 keV bis 500 keV abgetastet. Die Referenzenergie E_0 (siehe Gl. 5.24) der Rekonstruktionen nach Gl. 5.26 beträgt $E_0 = 70 \text{ keV}$. Abb. 5.38 zeigt die Ergebnisse der Rekonstruktion und Abb. 5.37 die Veränderungen im Spektrum nach Iteration 20. Das Spektrum zeigt eine deutliche Verlagerung zu kleineren Energien, da die Effizienz des Szintillators im Initialspektrum nicht berücksichtigt ist. Diese ist aufgrund des Wirkungsquerschnitts der Absorptionsprozesse größer für niedrige Energien (siehe Abb. 4.9).

In Abb. 5.38 werden die Rekonstruktionsbilder der mittleren Detektorschicht von FBP, monochromatischem MLTR-Ansatz, polychromatischem MLTR-Ansatz mit Initialspektrum und polychromatischem MLTR-Ansatz mit aus dem Initialspektrum geschätztem Spektrum verglichen. Die Rekonstruktionen zeigen deutlich verbesserte Ergebnisse bei Verwendung eines polychromatischen Rekonstruktionsansatzes (verminderte Cupping- und Abschattungs-Artefakte). Der Vergleich der beiden Spektren zeigt die Erniedrigung der Schwächungskoeffizienten hin zum erwarteten Wert von $0,81 \frac{1}{\text{cm}}$. Die Grauwerte innerhalb des Materials werden einheitlicher (siehe Voxelbereich 550-650).

Auch wenn die Rekonstruktionsergebnisse der Rekonstruktion nach Gl. 5.26 durch die zusätz-



(a) Schnittbilder der Rekonstruktion mit integrierter Spektrumsschätzung. Die Rekonstruktionen der gefilterten Rückprojektionen sind ohne Referenzenergie rekonstruiert und müssen daher in einem unterschiedlichen Grauwertfenster dargestellt werden. Die Grauwertspreizung ist zeilenweise zur jeweiligen Variante angegeben.



(b) Linienprofil entlang der roten Linie in (a). Im Linienprofil zeigt sich die Absenkung der rekonstruierten Werte durch die Anpassung des Spektrums.

Abbildung 5.36: Rekonstruktionsergebnisse der Messung einer hochreinen Aluminiumfolie nach Gl. 5.26 mit in die Rekonstruktion integrierter Spektrumsschätzung.

liche Spektrumsschätzung deutlich verbessert werden können (insbesondere bei weitgehend unbekanntem Spektrum), müssen bei Messdaten, die nicht hinsichtlich Streustrahlung korrigiert wurden, Einschränkungen gemacht werden. Dies kann, wie oben erwähnt, durch das Ausschließen von Messwerten ab einer definierten Schwelle erreicht werden.

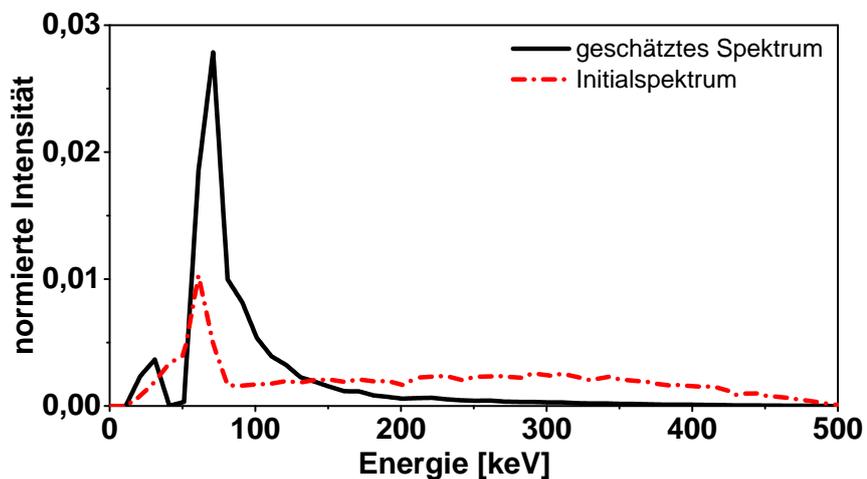


Abbildung 5.37: Initialspektrum und Schätzung des Spektrums nach der 20. Iteration der Rekonstruktion. Das Spektrum wurde an 50 Stützstellen von 10 bis 500 keV für die Rekonstruktion verwendet und geschätzt. Es ist ein deutlicher Trend zu niedrigeren Energien erkennbar, der auf die Detektorcharakteristik zurückgeführt werden kann, die im Initialspektrum nicht berücksichtigt ist.

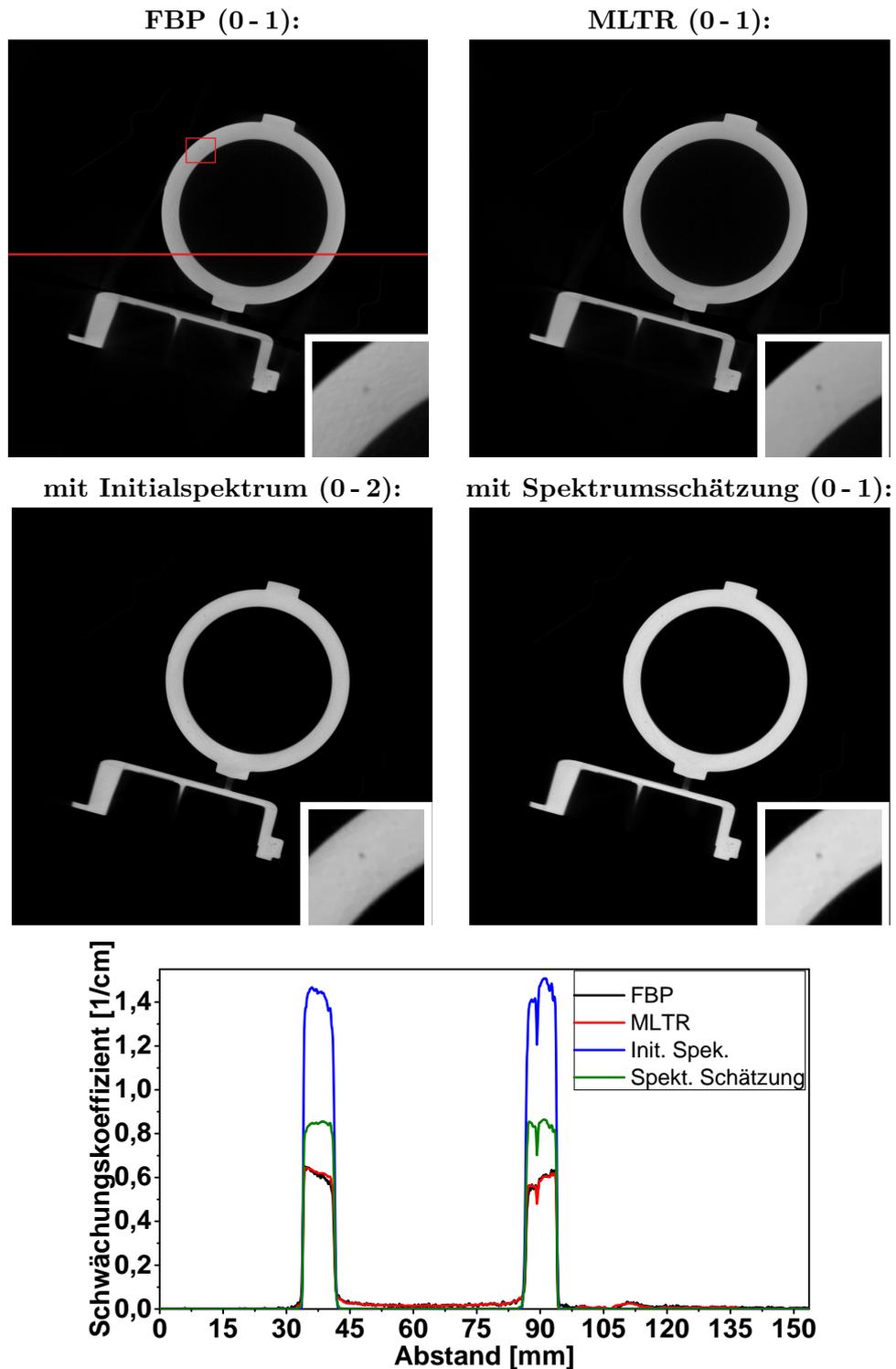


Abbildung 5.38: Ergebnisse der Rekonstruktionen des Aluminiumbauteils mit und ohne Spektrumsschätzung. Das Linienprofil folgt der roten Linie im Ergebnis der gefilterten Rückprojektion. Während die FBP und eine monoenergetische MLTR Rekonstruktion Abschattungsartefakte im Luft-Bereich zeigen, sind die Ergebnisse sowohl der Rekonstruktion mit Initialspektrum als auch der Rekonstruktion mit Spektrumsschätzung verbessert. Das Ergebnis mit Spektrumsschätzung zeigt den erwarteten Schwächungskoeffizienten von $0,81 \frac{1}{\text{cm}}$ bei der Referenzenergie 70 keV und eine einheitlichere Grauwerteverteilung im Material. Bei der Messung ohne Veränderung des Initialspektrums fallen die rekonstruierten Schwächungskoeffizienten deutlich größer als in den verglichenen Varianten aus. Für die Darstellung dieser Variante wurde daher zur besseren Darstellbarkeit eine andere Grauwertspreizung gewählt.

5.3.3 Multispektrale Rekonstruktionsverfahren

Ein in der Schnittbildgebung relevantes Problem ist die simultane Abbildung von hoch- und niedrig-absorbierenden Materialbereichen. Werden stark aufgehärtete Spektren zur Bildgebung verwendet, so sinkt durch die Vorfilterung nicht nur das Signal-Rausch-Verhältnis, sondern auch der Kontrast von niedrig absorbierenden Materialien, so dass bei gegebener Detektordynamik eventuelle Dichteunterschiede innerhalb des durchstrahlten Objekts nicht mehr unterschieden werden können. Werden dagegen Röntgenspektren verwendet, die auch niedrige Energien enthalten, so werden auf dem Detektor hinter den hochabsorbierenden Anteilen einer Probe nur hohe Energien registriert - es kommt zu Strahlaufhärtungs- und Streustrahlungsartefakten, wobei letztere durch den großen Anteil der Streustrahlung in Bereichen hoher Absorption bedingt werden.

Darüber hinaus kann mit einem einzelnen Messwert eines einzelnen Spektrums nur ein Wert - der Absorptionskoeffizient - rekonstruiert werden. Für die Rekonstruktion von Anteilen zweier oder mehrerer an der Schwächung beteiligter Effekte, wie der in Kap. 5.3 verwendeten Anteile von Rayleigh-, Compton-, Paarbildungs- oder photoelektrischer Absorption, bedarf es mehr Information. Daneben könnte eine Auftrennung auch nach Dichte und Kernladungszahl oder exakt zugeordneten Basismaterialien erfolgen.

Eine solche Auftrennung von Anteilen der Schwächungseffekte mit Hilfe zweier Tomographien mit unterschiedlichem Spektrum wurde erstmals von Alvarez und Macovski (siehe [94]) gezeigt. Diese Methoden können sowohl auf Projektionsbasis als auch als Nachverarbeitungsschritt der Rekonstruktion (siehe [95]) eingesetzt werden. Eine Zerlegung, die die Projektionen nicht nach Schwächungsanteilen, sondern nach unterschiedlichen Basismaterialien trennt, kann mit Hilfe von Materialdaten durchgeführt werden (siehe [96]).

Ein modellbasiertes Rekonstruktionsverfahren, in das Vorwissen über die spektralen Intensitäten der Quelle eingebracht wird, kann sowohl zur Korrektur der oben beschriebenen Artefakte als auch zur Auftrennung nach Schwächungsanteilen oder Materialien verwendet werden. Im Folgenden werden zwei Konzepte entwickelt und vorgestellt, die multispektrale Datensätze verarbeiten können. Während das Erste die Anwendung des im oben beschriebenen, segmentierungsbasierten Modells für mehrere Spektren zeigt, wird beim Zweiten eine Methode zur direkten Zerlegung der Absorptionsanteile entwickelt, deren rekonstruierte Materialdaten als Basis für weitere Rekonstruktionen mit Hilfe des Modells nach Gl. 5.26 dienen können und damit zur Reduktion des benötigten Vorwissens beitragen.

Segmentierungsbasiertes Energiemodell mit mehreren Spektren Die Updategleichung des segmentierungsbasierten Modells (Gl. 5.26) ist abhängig von der Wahl einer Referenzenergie E_0 , auf der die gefitteten Materialdaten beruhen und die die Schwächungskoeffizienten der Rekonstruktion vorgibt (siehe Kap. 5.3.1). Die Vorwärtsprojektion (Gl. 5.23) setzt sich aus den Vorwärtsprojektionen der Einzelenergien gewichtet nach der spektralen Intensität $y_{i,0_k}$ in Energie-Index k zusammen. Das Spektrum ist abhängig von i und somit vom betrachteten Strahl. Dies ermöglicht somit die Verwendung strahl- bzw. projektionsweise unterschiedlicher Spektren. Damit können für eine einzelne Rekonstruktion mehrere

unterschiedliche Spannungen oder Vorfilter verwendet werden. Zur Rekonstruktion kann beispielsweise Gl. 5.26 eingesetzt werden.

Eine mögliche Anwendung dieses Verfahrens ist das Umschalten der Quelle von niedrigen zu höheren Beschleunigungsspannungen in Winkelbereichen hoher Absorption durch das Objekt. Dies soll an zwei Messbeispielen verdeutlicht werden. Rekonstruiert werden Messungen des Multimaterialphantoms mit vier Eisen-Stiften und einem PMMA-Stift in der Mitte des Aluminiumkörpers. Gemessen wurden die Spannungs-Vorfilter-Kombinationen (220 kV, 2 mm Cu) und (160 kV, 2 mm Cu). Die Ergebnisse werden in Abb. 5.39 gezeigt.

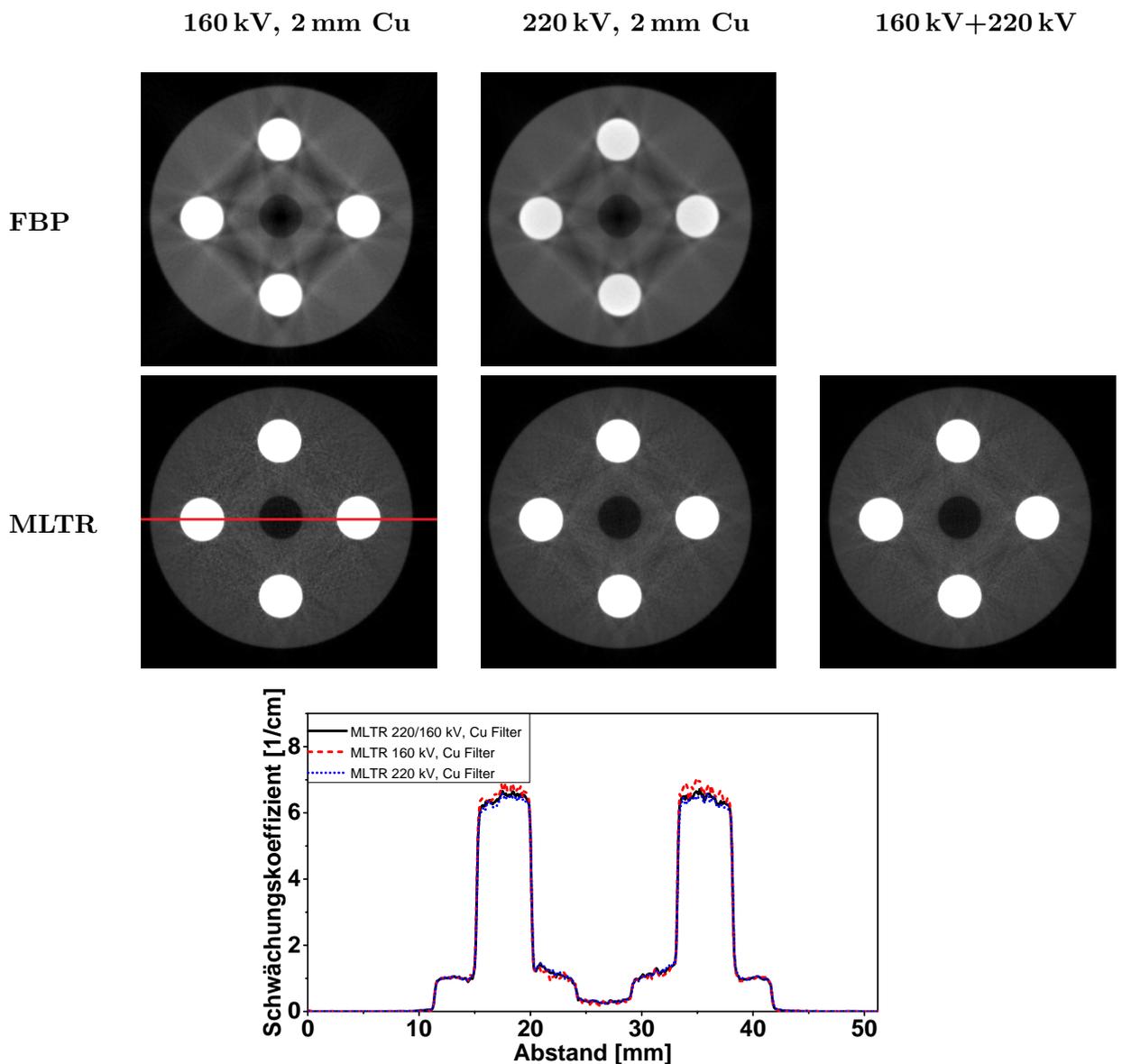


Abbildung 5.39: Rekonstruktionsergebnisse nach Gl. 5.26 der Messungen des Multimaterialphantoms bei 160 kV mit 2 mm Cu Vorfilter und 220 kV mit 2 mm Cu Vorfilter sowie der Kombination beider Messungen. Die Linienprofile folgen der roten Linie. Die Strahlauhfärtungs-Artefakte, die in den FBP-Rekonstruktionen sichtbar sind, werden durch das Energiemodell in den einzelnen Datensätzen ebenso wie im kombinierten Datensatz korrigiert. Die Grauwertspreizung wird aufgrund der für die MLTR Rekonstruktionen gewählten Referenzenergie unterschiedlich gewählt zu (0-4) bei MLTR Rekonstruktionen und (0-2) bei FBP-Rekonstruktionen.

Das verwendete Spektrum wurde simuliert und mit der energieabhängigen Detektoreffizienz gewichtet. Sowohl die Einzelergebnisse, als auch das Kombinationsergebnis zeigen wenig Artefakte durch Strahlaufhärtung. Die Linienprofile legen nahezu gleiche Ergebnisse nahe. Dies zeigt, dass sich die einzelnen Messungen in der Rekonstruktion gut kombinieren lassen. Da die Ergebnisse der Einzelmessungen ebenso gute Bildqualität zeigen, ist im gezeigten Beispiel die Kombination der Messungen zwar möglich aber nicht notwendig.

Die Kombination der Messungen des Phantoms bei 160 kV mit 0,89 mm Ti-Vorfilter mit der oben gezeigten Messung bei 220 kV Spannung und 2,0 mm Kupfer Vorfilter zeigt ein anderes Bild. Die Messung leidet bei 160 kV mit Ti-Vorfilter entlang der Strecken der größten Absorption im Phantom unter Artefakten, die nicht durch das Energiemodell korrigiert werden können. Der 220 kV Datensatz wird hierbei nicht zusätzlich verwendet, sondern ersetzt in den 160 kV Projektionen die Anteile der größten Absorptionslänge (siehe Sinogramm in Abb. 5.40). Dies betrifft die Projektionen durch zwei Eisenstifte und den

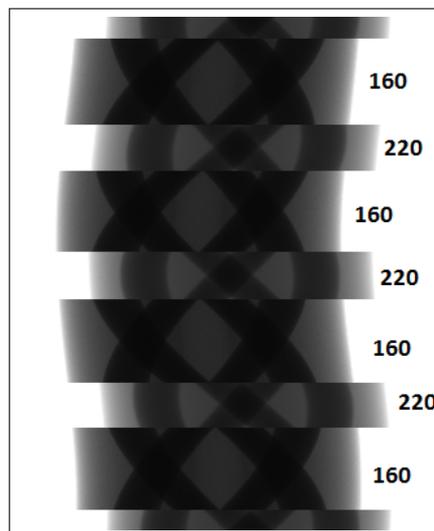


Abbildung 5.40: Kombiniertes Sinogramm der 220 kV und 160 kV Messung. Die Verschiebung der Projektionen in den unterschiedlichen Messungen ist auf eine Detektorverschiebung zurückzuführen und wird durch das projektionsabhängige Geometriemodell ausgeglichen. Im Sinogramm sind die Bereiche der 160 kV-Messung gekennzeichnet, die durch die Daten der 220 kV ersetzt wurden.

PMMA-Stift in der Mitte des Phantoms. Der Schwächungskoeffizient der PMMA-Stifts wird in der Einzelmessung bei 160 kV aufgrund der über die Energiemodellierung hinausgehenden Beeinflussung der Messdaten durch Streustrahlung und Detektordynamik nur schlecht rekonstruiert (siehe Abb. 5.41). Der Versatz der Projektionen im gezeigten Sinogramm ist auf einen unterschiedlichen Detektorshift zurückzuführen, der im Geometriemodell der Rekonstruktion bereits berücksichtigt ist.

Die aus den zwei Messungen kombinierte Rekonstruktion zeigt, obwohl nicht mehr Projektionen verwendet werden als für die 160 kV Einzelmessung, deutlich weniger Artefakte. Die 220 kV Messdaten werden innerhalb eines Subsets der Rekonstruktion mit den 160 kV Messdaten verknüpft und bieten zusätzliche Information, die zur Vermeidung der Artefakte dient.

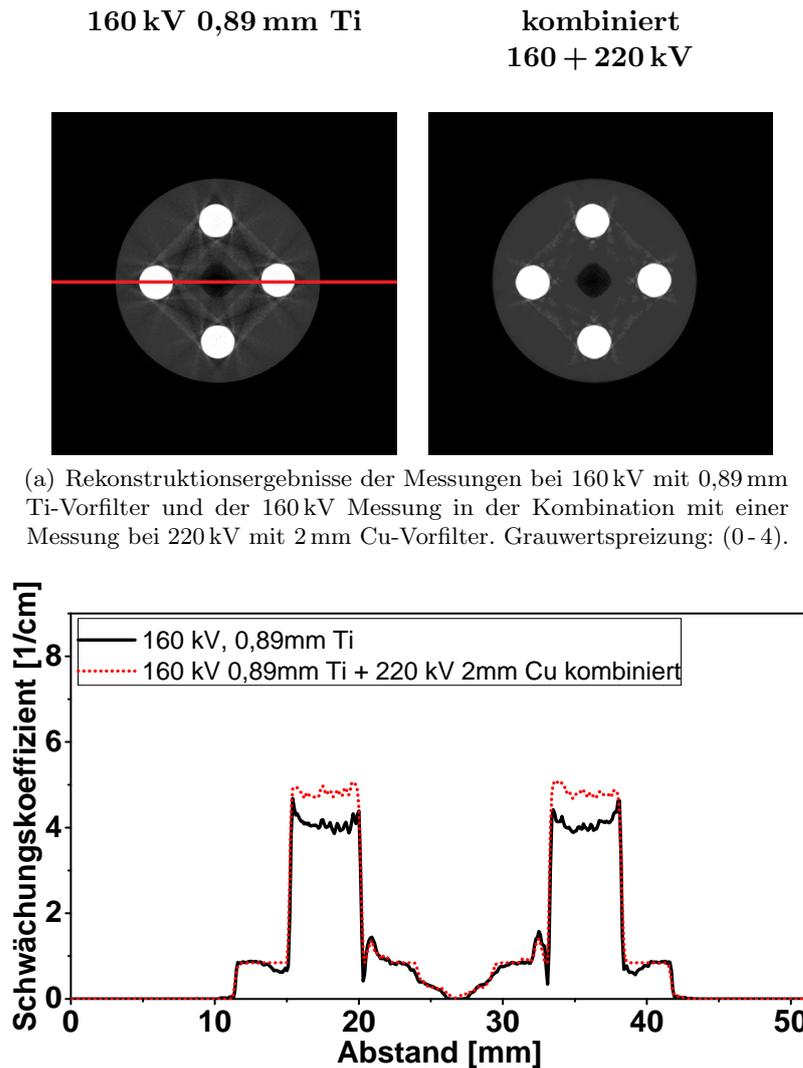


Abbildung 5.41: Kombination zweier Messungen des Multimaterialphantoms. Die trotz Energiemodellierung verbliebenen Artefakte der 160 kV Messung werden durch die ersetzten Daten weitgehend korrigiert.

Multienergetisches Modell zur Zerlegung nach Absorptionsanteilen Neben der Rekonstruktion des Absorptionskoeffizienten bietet die Messung mit mehreren Spektren die Möglichkeit mehrere Anteile des Schwächungskoeffizienten zu rekonstruieren. Das hier entwickelte Verfahren kann genutzt werden, den photoelektrischen Anteil sowie den Comptonanteil an der Absorption eines Materials für jeden rekonstruierten Voxel zu bestimmen. Dafür wird die Updategleichung des MLTR-M Algorithmus (siehe Gl. 5.23) genutzt. Die Vorwärtsprojektion wird, analog zu Kap. 5.3, als zusammengesetzt aus zwei Anteilen betrachtet:

$$\bar{y}_i = \sum_k I_{0,k} \exp\left(-\sum_j a_{ij}(\phi_j \Phi_k + \theta_j \Theta_k)\right) = \sum_k \bar{y}_{ik} \quad (5.43)$$

Statt eines einzelnen Volumens von Schwächungskoeffizienten wird die doppelte Anzahl von Unbekannten für die Rekonstruktion angenommen, die sich aus einem Volumen $\vec{\phi}$ und einem Volumen $\vec{\theta}$ mit Voxel-elementen ϕ_j und θ_j zusammensetzt. Die Updategleichungen der Iteration $n + 1$ lauten:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\frac{\partial L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j} |_{\phi^n, \theta^n}}{\sum_h \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j \partial \phi_h} |_{\phi^n, \theta^n} + \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j \partial \theta_h} |_{\phi^n, \theta^n}} \quad (5.44)$$

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n - \frac{\frac{\partial L(\phi, \theta)}{\partial \theta_j} |_{\phi^n, \theta^n}}{\sum_h \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_h} |_{\phi^n, \theta^n} + \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \theta_j \partial \phi_h} |_{\phi^n, \theta^n}} \quad (5.45)$$

Beispielhaft für den Anteil ϕ_j - und analog für θ_j herleitbar - lassen sich Zähler und Nenner darin schreiben als:

$$\frac{\partial L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j} |_{\phi^n, \theta^n} = \sum_i a_{ij} \left(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1 \right) \sum_k \Phi_k \bar{y}_{ik} \quad (5.46)$$

$$\sum_h \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j \partial \phi_h} |_{\phi^n, \theta^n} + \frac{\partial^2 L(\phi, \theta)}{\partial \phi_j \partial \theta_h} |_{\phi^n, \theta^n} = \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} & \sum_i a_{ij} \sum_h a_{ih} \left(\left(\frac{y_i}{\bar{y}_i} - 1 \right) \left(\sum_k (\Phi_k \Phi_k \bar{y}_{ik}) + \sum_k (\Phi_k \Theta_k \bar{y}_{ik}) \right) \right. \\ & \left. - \frac{y_i}{\bar{y}_i^2} \left(\sum_k (\Phi_k \bar{y}_{ik}) \sum_k (\Phi_k \bar{y}_{ik}) + \sum_k (\Phi_k \bar{y}_{ik}) \sum_k (\Theta_k \bar{y}_{ik}) \right) \right) \end{aligned}$$

Während bei einer Rekonstruktion mit segmentierungsbasierter Energiemodellierung wie in Kap. 5.3 die Materialparameter bei einer bestimmten Referenzenergie angegeben werden müssen, kann bei dieser Variante die Referenzenergie E_0 (siehe Gl. 5.33) frei gewählt werden. Dies beeinflusst die rekonstruierten Anteile der Absorption durch Photo- und Comptoneffekt und damit den Kontrast zwischen den Gesamtschwächungskoeffizienten unterschiedlicher Materialien.

In Abb. 5.42 sind Rekonstruktionen zweier Messungen des Multimaterialphantoms dargestellt. Die Messungen wurden bei den Spannungen 160 kV und 220 kV jeweils mit 2 mm Cu-Vorfilter durchgeführt. Es werden die multispektralen Rekonstruktionen bei zwei unterschiedlichen Referenzenergien gezeigt. Es stellt sich dabei heraus, dass die Wahl von E_0 einen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis nicht nur hinsichtlich der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten, sondern auch hinsichtlich der Artefaktreduktion hat. Die Rekonstruktionsergebnisse bei 70 keV legen nahe, dass die Wahl niedriger Referenzenergien zu mehr verbleibenden Artefakten führt. Dies ist auf den größeren Einfluss der photoelektrischen Absorption mit der dazugehörigen stärkeren Energieabhängigkeit $\propto \frac{1}{E^3}$ zurückzuführen. Deutlich wird das auch in Abb. 5.43. Darin sind je über einen definierten Bereich der Rekonstruktionsschichten gemittelte Werte jedes Materials in 10 keV Schritten der Referenzenergie E_0 aufgetragen. Die Fehlerbalken geben die Standardabweichung der rekonstruierten Werte im ausgelesenen Bereich an und sind damit ein Maß für die Konstanz der rekonstruierten Werte im Material. Die aus den zwei Messungen erhaltenen Kurven geben die als Modell

verwendeten Energieabhängigkeiten wieder. Das Verhältnis der Absorptionsanteile sowie die Gesamtabsorption stellen ein Rekonstruktionsergebnis dar. Der Vergleich des Kunststoffes PMMA und der Eisenstifte spiegelt gut die stärkere Gewichtung des Photoeffekts bei höheren Kernladungszahlen im betrachteten Energiebereich. Insbesondere die Gesamtabsorption der Eisenstifte ist bei 70 keV aber höher als für die Rekonstruktionen mit segmentierungs-basiertem Modell angenommen ($7,4 \frac{1}{\text{cm}} \leftrightarrow 6,7 \frac{1}{\text{cm}}$). Dieser Unterschied kann auf Abweichungen der mittleren Energien der für die Berechnung verwendeten Röntgenspektren von den realen effektiven Spektren beruhen. Aus der Betrachtung der Fehlerbalken kann, wie schon aus Abb 5.42, geschlossen werden werden, dass die Wahl größerer Referenzenergien E_0 zu besseren Rekonstruktionsergebnissen führt. Der grundsätzlichen Wahl einer sehr großen Referenzenergie steht aber die Einstellung des Kontrasts der Schwächungskoeffizienten unterschiedlicher Materialien gegenüber, da der Kontrast bei größerer Referenzenergie sinkt.

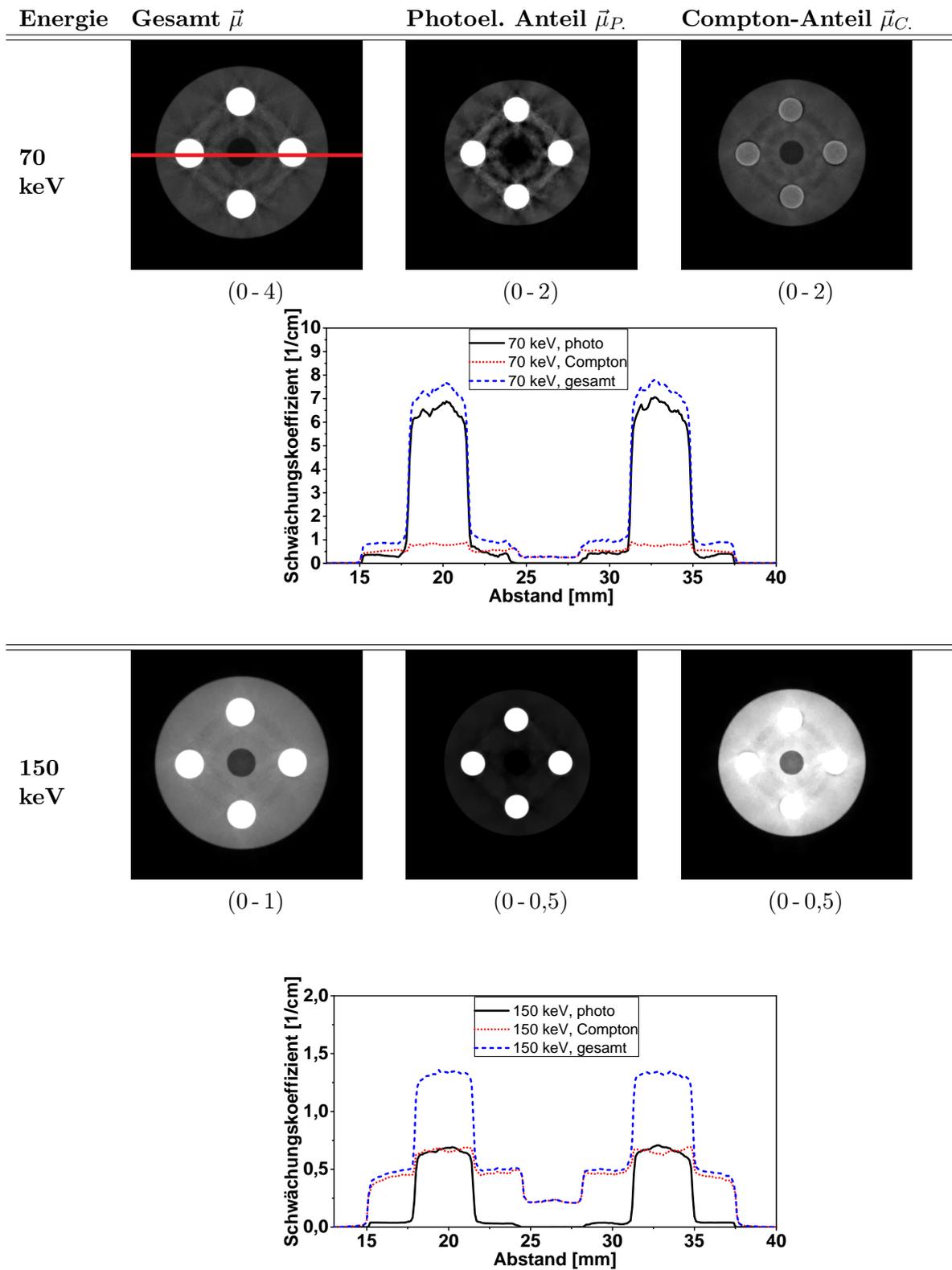
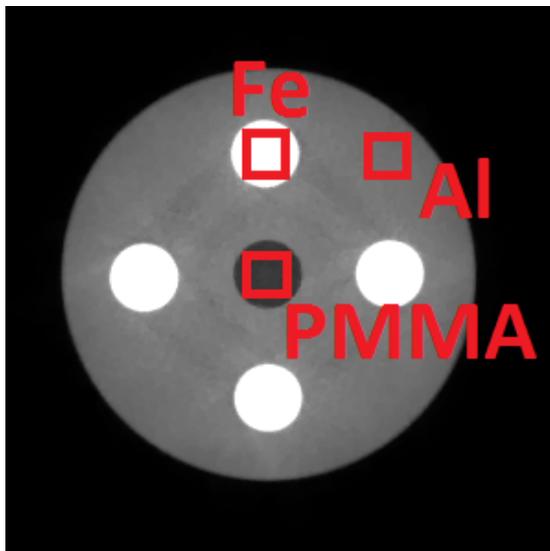
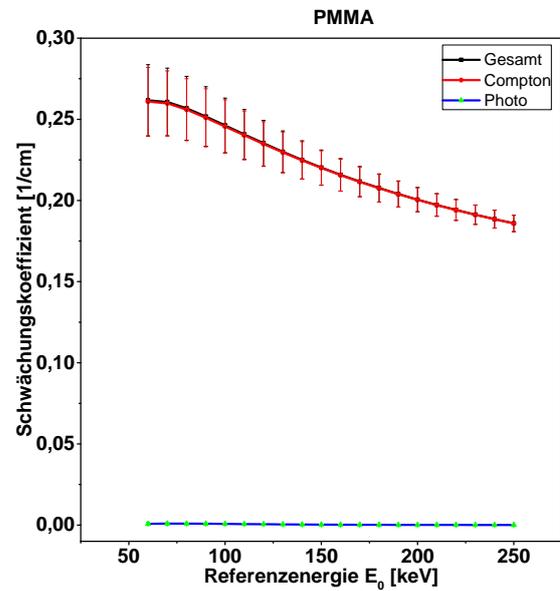


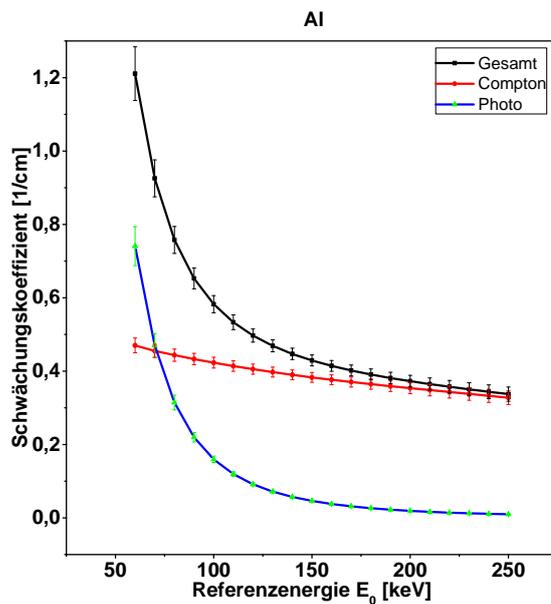
Abbildung 5.42: Rekonstruktionsergebnisse nach 500 Iterationen und zugehörige Linienprofile durch die mittlere Bildzeile (rote Linie). Leichte Abschattungen an den Kanten der Eisenstifte sind auf die Brennfleckverschiebung beim Wechsel der Röhrenspannung zurückzuführen. Es zeigen sich Unterschiede der Schwächungskoeffizienten abhängig von der gewählten Referenzenergie E_0 . Die Gesamtabsorption wurde als Addition der Einzelanteile berechnet. Die Grauwertspreizung kann aufgrund der sich mit der Referenzenergie verändernden Schwächungskoeffizienten nicht für alle Darstellungen gleich gewählt werden und ist je unter den Bildern angegeben.



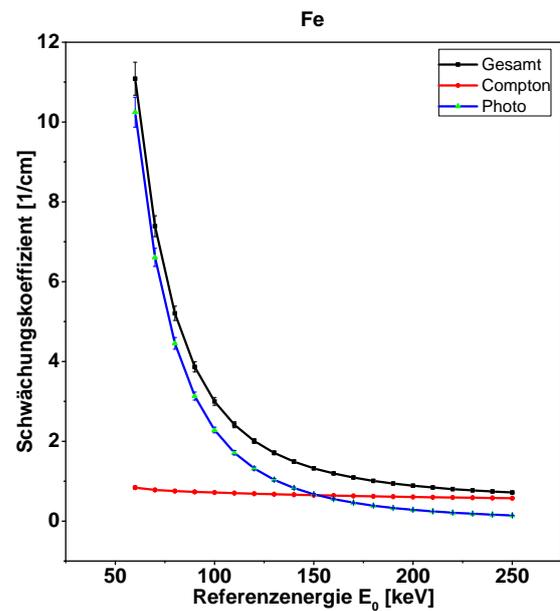
(a) Bereiche der Rekonstruktionen aus denen die Mittelwerte und Standardabweichungen ausgelesen wurden.



(b) Energieabhängige Schwächungskoeffizienten des PMMA-Bereichs.



(c) Energieabhängige Schwächungskoeffizienten des Al-Bereichs.



(d) Energieabhängige Schwächungskoeffizienten des Fe-Bereichs.

Abbildung 5.43: Rekonstruierte Schwächungskoeffizienten in Abhängigkeit der Referenzenergie E_0 . Die Werte wurden gemittelt in den in (a) eingezeichneten Bereichen ausgelesen. Die Fehlerbalken stellen die Standardabweichung im Bereich der ausgelesenen Werte dar und geben damit ein Maß für Rekonstruktionsartefakte in den Materialien wieder. Es zeigt sich die stärkere Gewichtung des Photoeffekts bei größeren Kernladungszahlen. Bessere Rekonstruktionsergebnisse werden, dem Maß der Standardabweichung folgend, bei höheren Energien erzielt.

5.4 Entwicklung eines Streumodells

Neben den bisher behandelten Effekten der Detektor-internen Streuung (modelliert als Punkt-Spreiz-Funktion des Detektors in Kap. 4.4) und der Energieabhängigkeit der Schwächung bei polychromatischer Röntgenstrahlung (siehe Kap. 4.3) spielt die im Objekt gestreute Strahlung eine entscheidende Rolle bei der Entstehung von Rekonstruktionsartefakten. Diese vom Objekt ausgehende Streustrahlung wirkt sich stark auf das Ergebnis von CT-Rekonstruktionen aus, da Streustrahlung in Objektbereichen entsteht, bei deren Durchstrahlung viel Intensität des einfallenden Strahls verloren geht und somit der im Detektor gemessene Wert reiner transmittierter Strahlung gering ist. Kleine Anteile von Objektstreustrahlung bewirken also große relative Fehler der Messdaten.

Die Objektstreustrahlung kann messtechnisch verringert werden, indem der Strahl kollimiert und damit Streustrahlung aus Objektbereichen vermieden wird, die nicht zur Messung beitragen. Dies ist insbesondere bei Zeilendetektoren von Interesse, da eine Einschränkung der Strahlung auf die Zeilenhöhe die Streustrahlung stark verringert.

Da die exakte Form und Zusammensetzung des gemessenen Objekts vor der Messung unbekannt ist, bieten sich zur Korrektur der Messfehler vor allem die oben beschriebene Vermeidung der Streustrahlung während der Messung, Nachverarbeitungsmethoden im rekonstruierten Volumen oder die hier gewählte Variante einer Integration der Streustrahlung in die iterative Rekonstruktion an. Entscheidend ist eine gute Schätzung der im Objekt gestreuten Strahlung. [97] beschreibt dafür die Verwendung von Faltungskernen und Monte-Carlo basierten Simulationen. Faltungsbasierte Methoden (siehe [98] bzw. [99]) wiederum bieten häufig nur die Möglichkeit, ein einzelnes Material zu berücksichtigen oder sie basieren auf vorberechneten Monte-Carlo-Simulationen.

Der hier verfolgte Ansatz die Streustrahlung zu minimieren geht auf die bereits in Kap. 5.3 entwickelte Erweiterung des segmentierungsbasierten Energiemodells nach [39] zurück, das Vorwissen über die Materialparameter und das effektive Spektrum des Messaufbaus erfordert. Im Energiebereich bis 500 keV ist die durch Paarvernichtung gestreute Strahlung nicht zu berücksichtigen, die durch elastische Streuung aufgenommene Intensität aber signifikant. Die in Kap. 5.3 gezeigte Erweiterung für Absorption in Energiebereichen über 1 MeV (siehe Gl. 5.34) wird daher im Folgenden für den Anteil der Rayleigh-Streuung an der Gesamtabsorption genutzt (siehe auch [100]).

Methode

Die in Gl. 5.36 angegebene Updategleichung kann auch für die Einbeziehung der Rayleigh-Streuung genutzt werden. Das Wissen über diese in Gl. 5.36 als absorbiert angenommenen Photonen kann dann für die Simulation der Streustrahlung genutzt werden. Die Energieabhängigkeit $\Xi(E)$ wird dann angegeben werden als:

$$\Xi(E) = \frac{\sigma_R(E_k)}{\sigma_R(E_0)} \quad (5.48)$$

Wie in Kap. 5.3 ist diese Energieabhängigkeit in Energie-Index k relativ zu einer Referenzenergie E_0 angegeben, die die Energiezuordnung der Schwächungskoeffizienten des Rekonstruktionsbilds vorgibt. Die Updategleichung kann, bis auf die veränderte Energieabhängigkeit, analog zur Hochenergie-Erweiterung in Kap. 5.3 übernommen werden.

Die Projektion der Streustrahlung auf den Detektor erfolgt auf Basis der Intensitäten $\bar{y}_{sc.i,j,(R,C)}$ die in einem einzelnen Voxel des Rekonstruktionsvolumens aufgrund eines einzelnen Effekts (Rayleigh (R), Compton (C)) absorbiert werden. Die Vorwärtsprojektion muss nur einmal ausgeführt werden, um die Intensitäten $\bar{y}_{sc.i,j,(R,C)}$ beider Absorptionsanteile zu erhalten. Die Intensität, die über alle Raumwinkel aus einem Voxel für einen bestimmten Absorptionseffekt gestreut wird, wird damit in einer einzelnen Vorwärtsprojektion ohne zusätzlichen Aufwand berechnet.

Diese Intensitäten werden über alle Raumwinkel gestreut, so dass der Anteil, der den Detektor trifft, sehr gering ist. Entsprechend dem in [69] für deterministische Simulationen verfolgten Ansatz kann dieser Anteil für durch Rayleigh- und Compton-Effekt gestreute Photonen näherungsweise aus dem Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts zum totalen Wirkungsquerschnitt berechnet werden:

$$p_R(E, \theta) = \frac{d\sigma_R(E, \theta)\Delta\Omega}{\sigma_R(E)} \quad (5.49)$$

$$p_C(E, \theta) = \frac{d\sigma_C(E, \theta)\Delta\Omega}{\sigma_C(E)} \quad (5.50)$$

Darin ist θ der Winkel zwischen dem betrachteten, vorwärtsprojizierten Strahl und dem

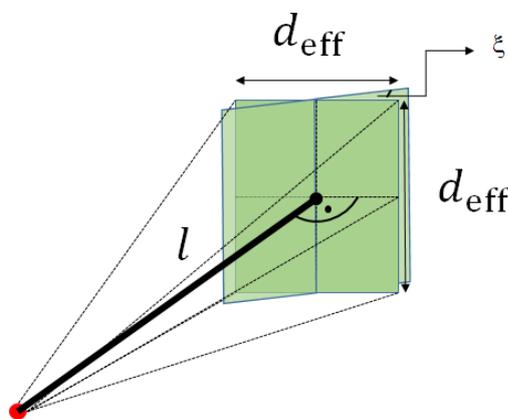


Abbildung 5.44: Berechnung des Raumwinkels eines Pixelelements. Der Abstand vom Voxel von dem Streustrahlung ausgeht zum Detektorpixel ist mit l bezeichnet. Die effektive, also die um den Winkel ξ zwischen der Detektornormalen und der Bahn des einfallenden Photons korrigierte, Größe des Detektorpixels wird mit d_{eff} bezeichnet.

davon ausgehend gestreuten Strahl. Das Raumwinkelelement, das von einem Detektorpixel abgedeckt wird, kann aus geometrischen Überlegungen (siehe Abb. 5.44) berechnet werden als:

$$\Delta\Omega = 4\text{atan} \left(\frac{d_{\text{eff}}^2}{2l\sqrt{4l^2 + 2d_{\text{eff}}^2}} \right) \quad (5.51)$$

d_{eff} ist darin eine effektive Pixelgröße des Detektorelements bei einer Voxel-zu-Detektorpixel Distanz l . Die effektive Detektorpixelgröße bezieht den Winkel ξ ein, der sich zwischen dem gestreuten Photon und der Detektornormalen ergibt ($d_{\text{eff}} = d_{\text{det}} \cos(\xi)$, mit Detektorpixelgröße d_{det}).

Die gestreute Intensität in Detektorpixel i ergibt sich durch die Summe der aus allen Voxeln j des Rekonstruktionsvolumens auf allen Strahlen zu Detektorelement h gestreuten Intensitäten:

$$\bar{y}_{\text{sc-tot},i} = \sum_h \sum_j (p_R(E, \theta) \bar{y}_{\text{sc},i,j,R} + p_C(E, \theta) \bar{y}_{\text{sc},i,j,C}) \exp(-S_{ji}) \quad (5.52)$$

Darin werden mit den Strahlsummen S_{ji} die von Voxel j bis zum Detektorelement i gestreuten Intensitäten vom Material der Probe geschwächt. Diese Intensitäten $\bar{y}_{\text{sc-tot},i}$ werden als konstante Offsets zur Vorwärtsprojektion behandelt:

$$\bar{y}_i = \sum_k y_{i,0_k} \exp\left(-\sum_j a_{ij} \mu_{j,k}\right) + \overbrace{\bar{y}_{\text{sc},\text{tot},i}}^{\text{konst.}} \quad (5.53)$$

Die Schwierigkeit dieses Vorgehens liegt in der Darstellung der differentiellen und totalen Streuquerschnitte $\sigma_R(E)$, $d\sigma_R(E, \theta)$ und $\sigma_C(E)$, $d\sigma_C(E, \theta)$. Die differentiellen Anteile beider Effekte hängen von der Kernladungszahl, der Energie und dem Winkel θ ab, unter dem sie gestreut werden. Sie können nach Gl. 4.6 und Gl. 4.10 berechnet werden. Der Atomformfaktor sowie die inkohärente Streufunktion können über die Polynome Gl. 4.8 und Gl. 4.13 berechnet werden. Die totalen Wirkungsquerschnitte können durch numerische Integration vor der Rekonstruktion für alle Energie-Indizes k und alle Materialien vorberechnet werden. Der durch die Compton-Streuung auftretende Energieverlust wird durch die Verwendung der Energie E'_k für Compton-gestreuete Photonen berücksichtigt:

$$E'_k = \frac{E_k}{1 + \frac{E_k}{511 \text{ keV}} (1 - \cos(\theta))} \quad (5.54)$$

Typischerweise benötigen iterative Rekonstruktionsmethoden eine Vorwärts- und eine Rückprojektion für jeden Drehwinkel des Objekts. Soll Streustrahlung projiziert werden, so muss diese auf jedem Strahl, der das Volumen schneidet, von jedem vom Strahl durchsetzten Voxel des Volumens aus bis zum Detektor hin geschwächt werden. Soll Mehrfachstreuung der Ordnung s berücksichtigt werden, so steigt die Anzahl der Vorwärtsprojektionen $N_{\text{vorwärts}}$ mit dem Faktor $(N_{\text{vorwärts}})^s$. Ein Rechenaufwand dieses Umfangs ist im Sinne einer rekonstruktionsintegrierten Streustrahlkorrektur nicht sinnvoll, so dass für die hier angestrebte Lösung Näherungen gemacht werden:

- Die Berechnung wird auf Streustrahlung erster Ordnung begrenzt (siehe dafür auch Abb. 5.47)

- Das Rekonstruktionsvolumen, das zur Propagation der Streustrahlung genutzt wird, wird auf einem gröberen Voxelraster berechnet (Dies beinhaltet die Annahme, dass die Materialverteilung nur langsam variiert).
- Die Streustrahlung wird für ein grobes Detektorraster berechnet und anschließend interpoliert (Diese Annahme bezieht die niederfrequente Natur der Streustrahlung ein)
- Die Vorwärtsprojektion der gestreuten Strahlung wird nicht von einzelnen Voxeln ausgehend berechnet, sondern die Streustrahlung eines Strahls wird für mehrere Voxel zu einer Voxelgruppe zusammengefasst (siehe Abb. 5.45).

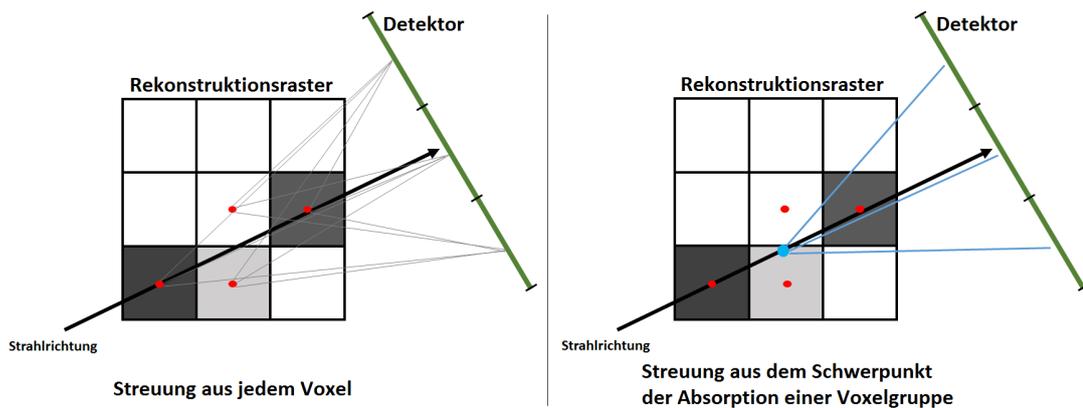
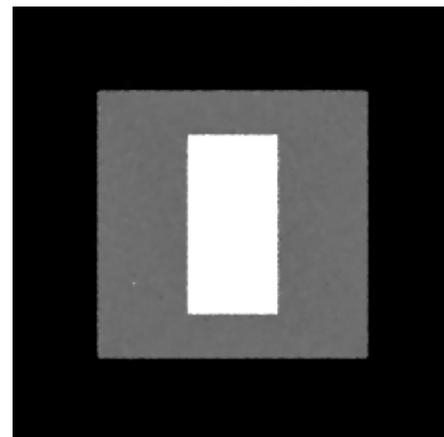


Abbildung 5.45: Aufteilung der Streustrahlung eines Strahl in Voxelgruppen. Die vom einfallenden Strahl gestreute Intensität wird aus dem Mittelpunkt jedes Voxels (rot) gestreut (links). Zur Beschleunigung der Vorwärtsprojektion kann die Streustrahlung näherungsweise berechnet werden, indem sie aus mehreren Voxeln zusammengefasst und aus dem Schwerpunkt der Absorption (blau) des Strahls gestreut wird (rechts). Die genaue Berechnung des Streupunkts erfolgt in Gl. 5.55.

Parameter	Wert
Abstand Quelle-Objekt	100 cm
Abstand Quelle-Detektor	105 cm
Anzahl Projektionen	200
Detektorgröße	256 x 256
Detektorpixelgröße	200 μm
Rekonstruktionsgröße	256 ³
Voxelgröße	190,48 μm
Ungeschwächte Intensität pro Detektorpixel	14700
Energie (monochromatisch)	100 keV

(a) Aufnahmeparameter der Monte-Carlo CT-Simulation (siehe Kap. 2.2) zum Test des Streuprojektors.



(b) Mittlere Schicht des MC-Phantoms. Der Schnitt zeigt die Aluminiumscheibe eingebettet in einen PMMA-Kubus.

Abbildung 5.46: Aufnahmeparameter und Schnittbild der mittleren Schicht des MC-Phantoms.

Um den Projektor zu testen und die Genauigkeit nachzuweisen, wurde eine Monte-Carlo(MC) CT-Simulation mit der Simulationssoftware ROSI (siehe [8]) erstellt. Das virtuelle Phantom für die simulierte CT bestand aus einer Aluminiumscheibe mit 20 mm Durchmesser und

einer Höhe von 10 mm eingebettet in einen 30 mm x 30 mm PMMA-Kubus (im Folgenden als MC-Phantom bezeichnet). Die Simulationsparameter sind in Tab. 5.46(a) zusammengefasst. Jede Projektion wurde mit 10^9 virtuellen Photonen (entspricht einem ungeschwächten Wert pro Detektorpixel von $y_{i,0} \approx 14700$) berechnet. Um Projektionen der gestreuten Intensität erster und höherer Ordnungen zu unterscheiden wurde ein virtueller Detektor angenommen, der die Produkte einzelner Streueffekte unterscheiden kann. Um eine Konzentration auf den Einfluss gestreuter Intensität zu schaffen, wurde mit einem monochromatischen Strahl der Energie 100 keV simuliert.

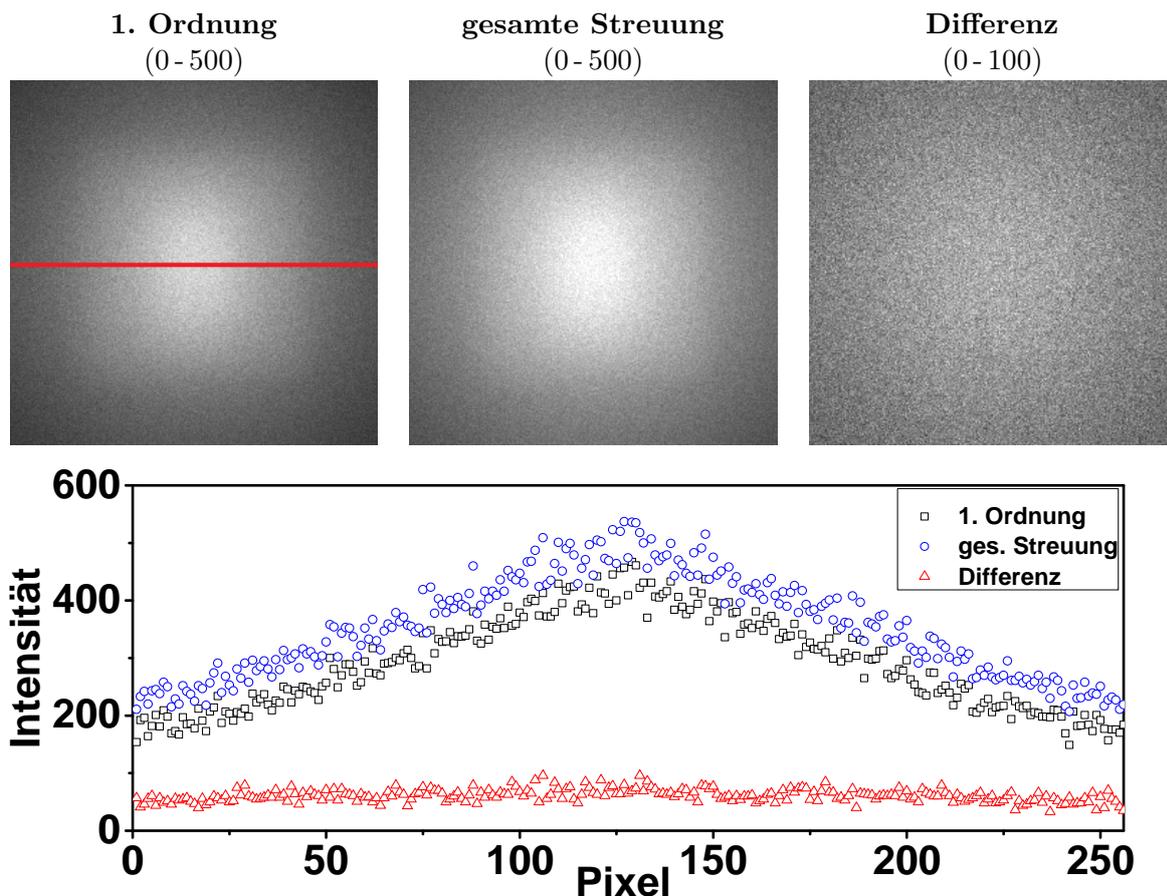


Abbildung 5.47: Streubilder einer virtuellen Radiographie des MC-Phantoms. Die gestreuten Intensitäten der MC-simulierten virtuellen Aufnahme werden bei 100 keV für die Streuung erster Ordnung, die gesamte Streuintensität und die Differenz der Bilder gezeigt. Die Differenz der Streuung erster Ordnung und der gesamten gestreuten Intensität ist näherungsweise konstant über die Detektorpixel. Das Linienprofil folgt der roten Linie im Streubild erster Ordnung. Um die Darstellbarkeit zu gewährleisten, ist die Grauwertspreizung des Differenzbilds enger gewählt (siehe Beschriftung der Einzelbilder).

Die Annahme, dass eine Begrenzung auf Streuung erster Ordnung gerechtfertigt ist, wird in Abb. 5.47 am Beispiel der Monte-Carlo Simulation gezeigt. Die Intensität höherer Streuordnungen ist im gezeigten Beispiel etwa eine Größenordnung kleiner als die Intensität erster Ordnung. Zudem ist es möglich, die Winkelverteilung der höheren Streuordnungen aufgrund der aus der ersten Streuordnung resultierenden Einfallrichtungen näherungsweise isotrop zu behandeln.

Die Verwendung von Voxelgruppen zur schnelleren Berechnung der Streustrahlung wird als Aufteilung der vom Strahl geschnittenen Volumenstrecke in V Teilstücke umgesetzt. Die Teilstücke haben je die gleiche Länge, unterscheiden sich aber durch den Punkt, von dem aus die Streustrahlung zum Detektor propagiert. Dieser Ursprung wird berechnet als Schwerpunkt der Absorption, der für eine Voxelgruppe angegeben werden kann zu:

$$x_i = \frac{\sum_j (a_{ij} \mu_j \sum_h^j (a_{ih}))}{\sum_j a_{ij} \mu_j} \quad (5.55)$$

Im Unterschied zur Wahl des Mittelpunkts der Gruppe werden die gestreuten Strahlen auch an den Kanten des rekonstruierten Objekts durch das Objektmaterial geschwächt. So können realitätsnähere Ergebnisse erzielt werden, da insbesondere die oberflächennahen Gebiete aufgrund der geringeren Eigenabsorption stark zur Streustrahlungsintensität beitragen. Abb. 5.48 zeigt die Wahl der Streupunkte schematisch für einen einzelnen Strahl. In Abb. 5.49 werden die gewählten Streupunkte für viele Strahlen am Beispiel des MC-simulierten Phantoms gezeigt. Die Mittelpunkte der Gruppen sind darin als schwarze Linien eingezeichnet. Während bei einer einzelnen Voxelgruppe die Streupunkte in der Objektmitte, also auf der Mittellinie, gewählt werden, verschieben sich diese bei vier Voxelgruppen. In den außenliegenden Objektbereichen treten entlang eines Strahls Absorptionsunterschiede innerhalb einer Gruppe auf, die den Absorptionsschwerpunkt in das Objekt verlagern. Außerhalb des Objekts wird die Wahl des Streupunkts durch das Rauschen der Projektionen beeinflusst. Da in diesem Bereich aber kaum Absorption stattfindet, tragen diese Punkte auch nicht zur Streuintensität bei.

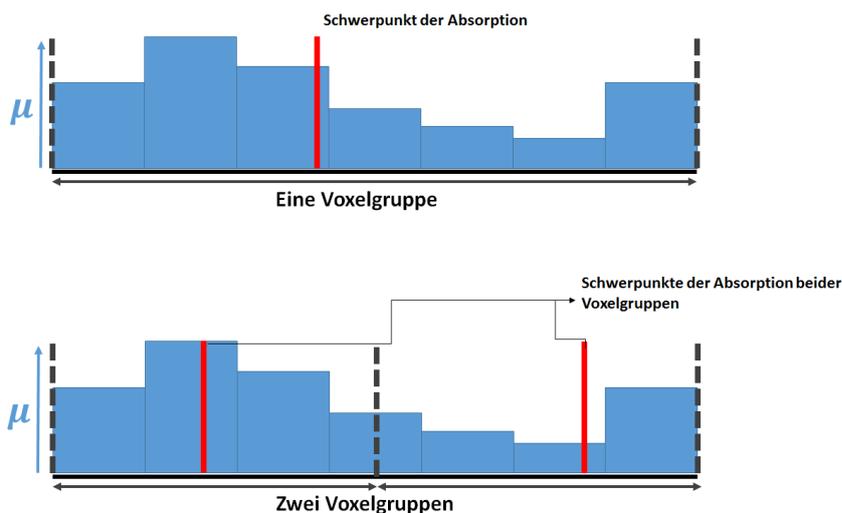


Abbildung 5.48: Schwerpunkt der Absorption entlang eines Strahls bei ein und zwei Voxelgruppen in eindimensionaler Darstellung. Die blau markierten Schwächungskoeffizienten entlang eines Strahls werden in Voxelgruppen aufgeteilt. Die Streustrahlung wird, anstelle der Vorwärtsprojektion aus jedem Voxel, aus den rot markierten Schwerpunkten projiziert.

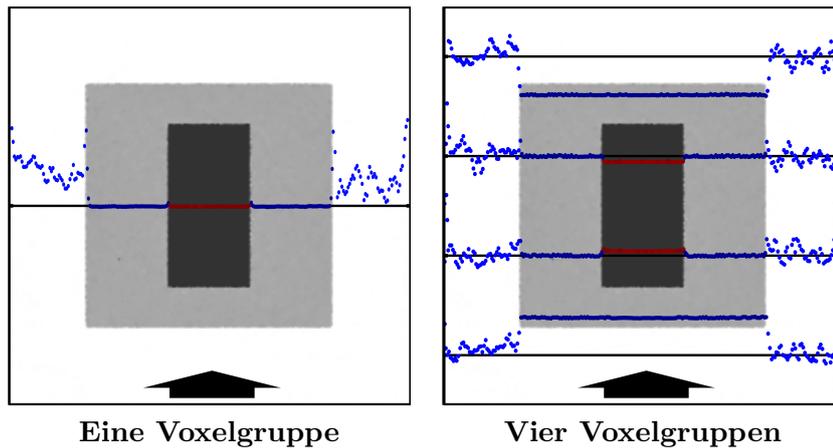


Abbildung 5.49: Wahl der Ausgangspunkte für die Propagation der Streustrahlung bei einer (links) und vier (rechts) Voxelgruppen. Die Punkte zeigen die Ausgangspunkte der Streustrahlung und sind farblich hinsichtlich der Wahl der Materialklasse codiert, die zur Streustrahlung beiträgt. Unterlegt sind diese mit der rekonstruierten Schicht des Phantoms (invertiert zur besseren Darstellung). Die Punkte gehören zu den dem Pfeil entlang einfallenden Strahlen.

Die Änderung des Rekonstruktionsvolumens durch die Berücksichtigung der Streustrahlung trägt selbst nur wenig zu einer Veränderung der berechneten Streustrahlung in der nächsten Iteration bei, da die Streustrahlung im Bereich von zwei Größenordnungen kleiner angenommen werden kann als die Primärstrahlung und die Grundform des rekonstruierten Objekts auch ohne Streustrahlabschätzung gut wiedergegeben werden kann. Dies erlaubt die Streustrahlung nur wenige Male oder nur einmalig im Rekonstruktionsvorgang zu berechnen. Im gezeigten Beispiel des MC-Phantoms wurde die Streustrahlung nur einmalig während der Rekonstruktion bei Iterationszahl 25 von 100 berechnet. Der vollständige Ablauf der Streustrahlschätzung im Vorwärtsprojektor der Rekonstruktion, im Vorwärtsprojektor der Streustrahlung und für die Berücksichtigung in folgenden Iterationen, in denen die Streustrahlung nicht mehr explizit berechnet wird, lässt sich zusammengefasst darstellen:

Vorwärtsprojektor der Primärstrahlung:

1. Berechnung der Gesamtstreuintensität $\bar{y}_{sc.,i,j}$ für jeden Strahl und jede Voxelgruppe für beide Streueffekte
2. Berechnung der Streupunkte für jede Voxelgruppe durch Gewichtung nach Gl. 5.55
3. Bestimmung einer segmentierten Materialklasse für die Voxelgruppe

Vorwärtsprojektor der Streustrahlung:

1. Interpolation des Rekonstruktionsrasters zu geringerer Größe
2. Projektion der Streustrahlung durch das verkleinerte Volumen zu einem verkleinerten Detektorarray (unter Berücksichtigung der veränderten Energie beim Compton-Effekt)
3. Gewichtung der Intensitäten beider Effekte mit der Winkelabhängigkeit nach Gl. 5.49

4. Summierung aller Streustrahlintensitäten der Projektion (siehe Gl. 5.52)

Weitere Iterationen:

1. Interpolation der nach Gl. 5.52 berechneten Streustrahlprojektionen zur Größe des Originaldetektors
2. Addition der interpolierten Projektion zur Vorwärtsprojektion nach Gl. 5.53

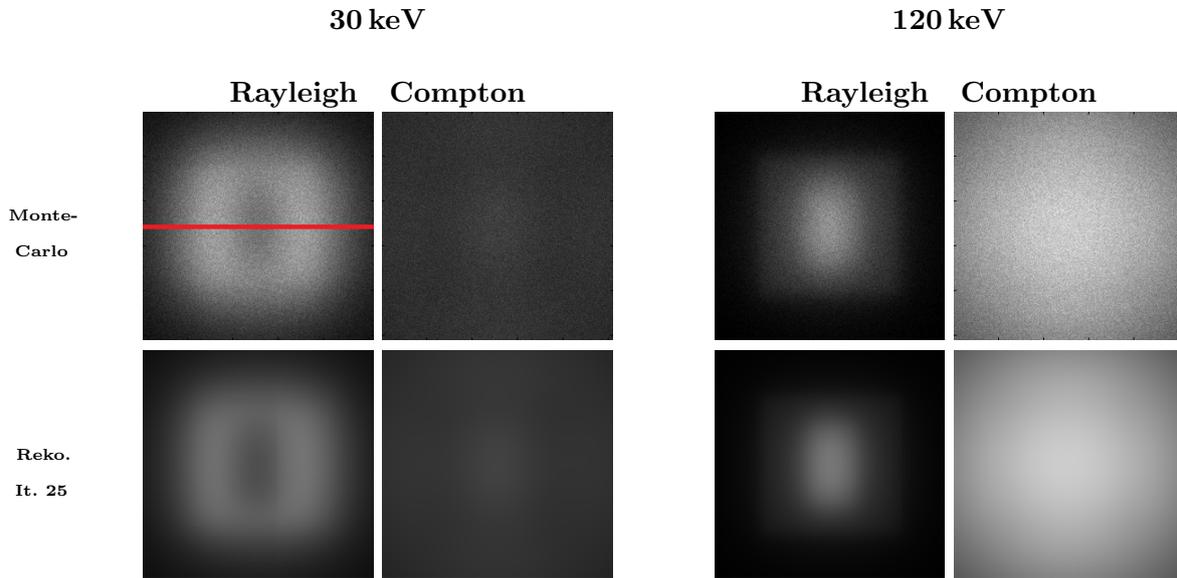
Ergebnisse

Um die Methode zu testen, wird zunächst an einer einzelnen Radiographie der MC-Simulation das energieabhängige Verhalten der Streustrahlprojektion untersucht. Dafür wurde die MC-Simulation bei unterschiedlichen monochromatischen Energien durchgeführt. Zum Vergleich wird die Streustrahlprojektion bei Iteration 25 der Rekonstruktion herangezogen, deren Ergebnisse für Rayleigh- und Compton-Streuung separat betrachtet werden. Die Ergebnisse bei den Energien 30, 70, 120 und 180 keV werden in Abb. 5.50 gezeigt. Die Ergebnisse der beispielhaft im Vergleich gezeigten Rekonstruktionen lassen sich am Besten anhand eines Linienprofils entlang der eingezeichneten roten Linie bewerten. Die Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit den MC-simulierten Daten. Diese werden in Abb. 5.50 für Streustrahlung erster Ordnung gezeigt. Größere Abweichungen treten nur bei 30 keV und elastischer Streuung auf. Der Intensitätseinbruch durch Selbstabsorption im Bereich des Aluminiums wird durch die Streustrahlprojektion leicht unterschätzt. Dies ist auf die Materialdaten zurückzuführen, die für das rekonstruktionsintegrierte Streumodell ohne Absorptionskanten modelliert werden. Die Projektion der Compton-Streuung befindet sich für alle betrachteten Energien in guter Übereinstimmung.

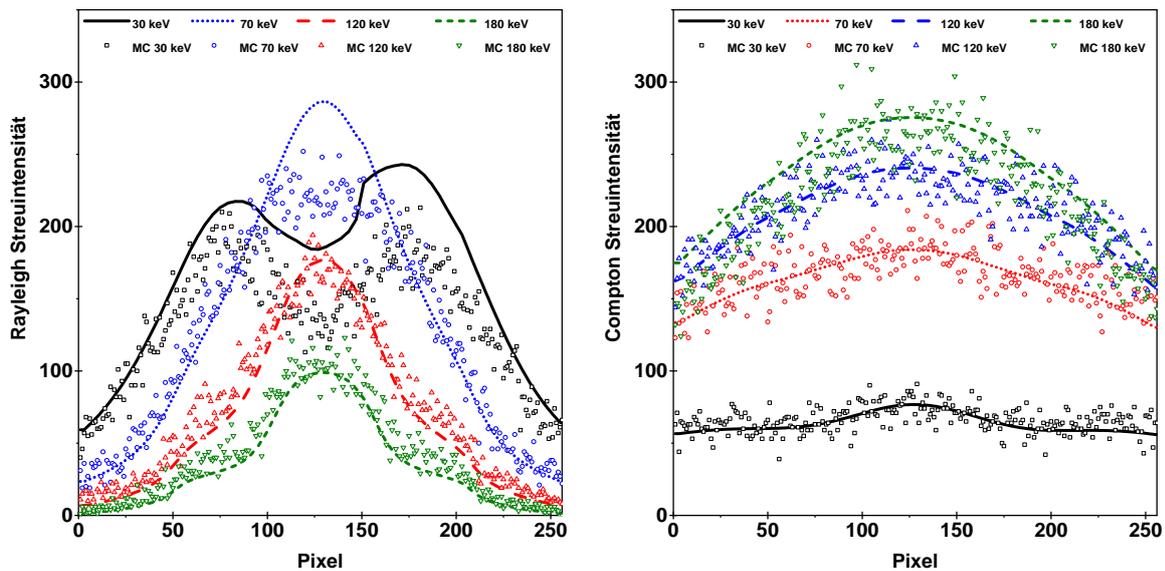
Die Rekonstruktion des MC-Phantoms bei 100 keV wurde mit geringer Regularisierung auf Basis der Totalvariationsminimierung mit 100 Iterationen durchgeführt. Die Materialdaten, die für die Rekonstruktion benutzt wurden, entstammen [65] und werden in Tab 5.3 gezeigt. Es wurde eine Referenzenergie von 70 keV gewählt. In Abb. 5.51 werden die Rekonstruktionsergebnisse mit und ohne Berechnung der Streustrahlung gezeigt. Beide Rekonstruktionen wurden mit 100 Iterationen und äquivalenten Einstellungen durchgeführt. Wird die Streustrahlung nicht berücksichtigt, treten Cupping-Artefakte auf. Die Anwendbarkeit auf des Streumodells auf Messdaten wird in Kap. 6 gezeigt.

	$\mu_{\text{total}}[\frac{1}{\text{cm}}]$	$\mu_{\text{Rayleigh}}[\frac{1}{\text{cm}}]$	$\mu_{\text{photoel.}}[\frac{1}{\text{cm}}]$	$\mu_{\text{Compton}}[\frac{1}{\text{cm}}]$
Luft	0.00020	0.00000	0.000010	0.00019
PMMA	0.22	0.010	0.010	0.20
Al	0.63	0.040	0.18	0.41

Tabelle 5.3: Materialdaten der Rekonstruktion des MC-Phantoms. Die gewählte Referenzenergie liegt bei 70 keV.

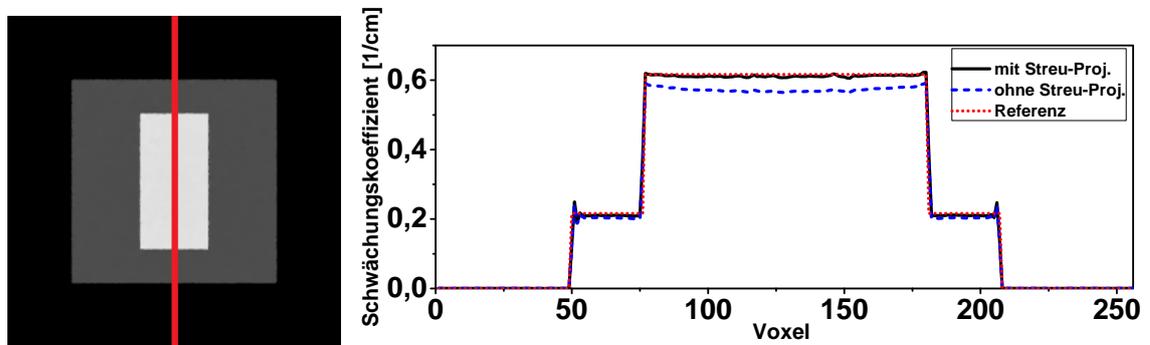


(a) Gestreute Intensitäten aus Rayleigh und Compton-Effekt als Streuprojektionen. Die Bilder zeigen die Ergebnisse einer Monte-Carlo (MC) Simulation im Vergleich zur Streuprojektion während der Rekonstruktion der MC-simulierten Projektionen bei Iteration 25. Gezeigt werden die Ergebnisse bei 30 keV und 120 keV. Grauwertspreizung: (0,300).

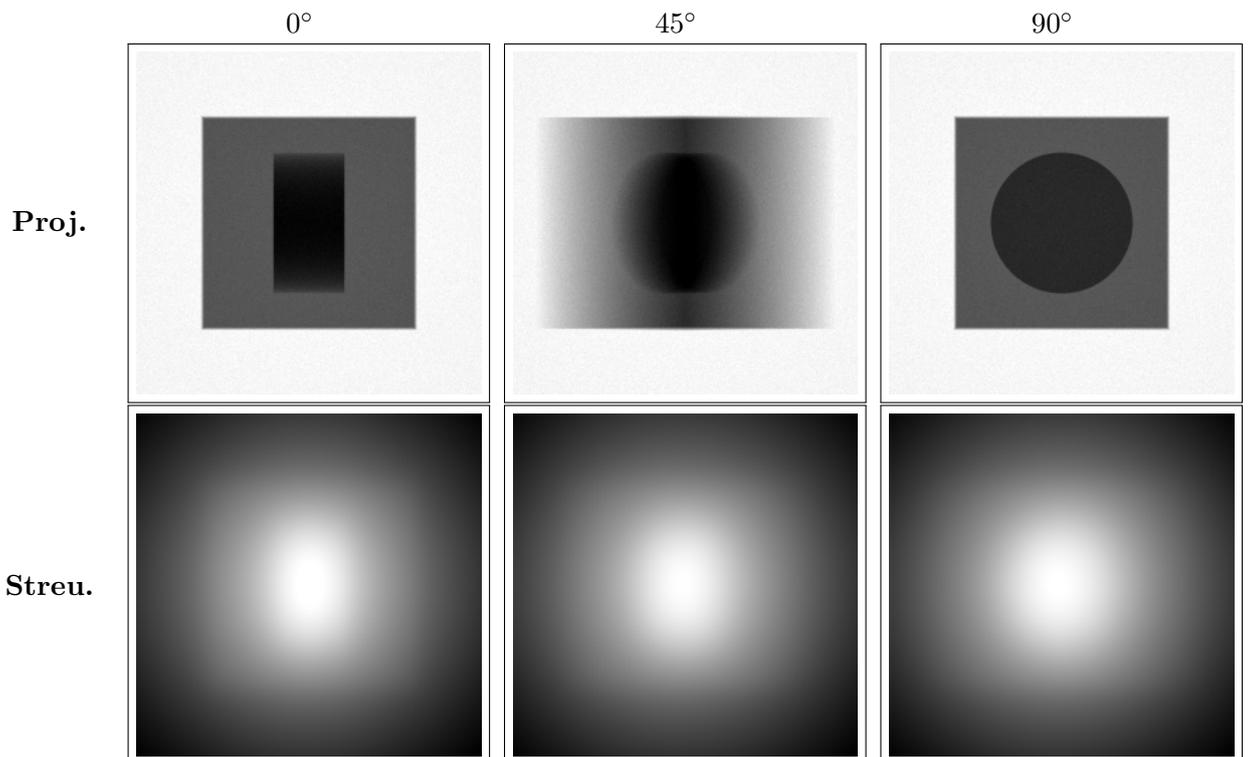


(b) Gestreute Intensitäten durch Rayleigh- und Compton-Effekt als Linienprofil entlang der roten Linie in (a), aufgetragen für die einfallenden Photonenenergien 30 keV, 70 keV, 120 keV und 180 keV. Die als Linien aufgetragenen Profile der rekonstruktionseitigen Vorwärtsprojektionen stimmen gut mit den als Punkten gezeichneten Profilen der MC-Simulationen überein.

Abbildung 5.50: Vergleich der MC-simulierten Streustrahlung erster Ordnung mit den nach Iteration 25 der Rekonstruktion gewonnenen Streustrahlprojektionen bei unterschiedlichen Energien. Die Anzahl von Voxelgruppen wurde zu 16 gewählt.



(a) Rekonstruierte Schicht des MC-Phantoms mit entsprechendem Linienprofil entlang der roten Markierung. Ohne Berücksichtigung der Streustrahlung treten Cupping-Artefakte auf, die durch die zusätzliche Berechnung der Streustrahlung verringert werden.



(b) Projektionen (Grauwertspreizung: (0, 15000)) bei 0, 45 und 90 Grad Drehwinkel des Objekts zusammen mit den entsprechenden Streuprojektionen (Grauwertspreizung: (0, 380)).

Abbildung 5.51: Linienprofil eines Rekonstruktionsschnitts und Streuprojektionen bei unterschiedlichen Drehwinkeln des Objekts.

5.5 Korrektur aufnahmebedingter Geometrieabweichungen

Die bisher beschriebenen Anpassungen des physikalischen Modells der Rekonstruktion helfen in vielen Fällen die Bildqualität zu verbessern. Häufig werden die größten artefakterzeugenden Probleme in CT Rekonstruktionen allerdings nicht durch das physikalische Modell der Wechselwirkung von Strahlung und Materie, sondern durch das Modell der Aufnahmegeometrie hervorgerufen. Dies wird besonders bei angestrebten Auflösungen im Mikro- oder gar Nanometerbereich zu einer Herausforderung, da in diesem Größenbereich mit dem Auge kaum sichtbare Veränderungen des Aufnahmesystems große Auswirkungen auf die Messung haben (siehe auch [101], [102], [103]). Zu solchen Veränderungen des Aufnahmesystems zählen, wie in Kap. 4 beschrieben, insbesondere Ungenauigkeiten des Manipulationssystems, Bewegungen des Brennflecks und Materialausdehnung durch Temperaturschwankungen. Solange die Veränderung konstant in allen Projektionen auftritt, kann sie leicht als Vorverarbeitungsschritt korrigiert oder als konstanter Versatz der Geometrieparameter berücksichtigt werden. Das Problem eines Geometrieversatzes, der zeit- und damit projektionsabhängig auftritt, wie zum Beispiel bei der Wärmeausdehnung des Manipulationssystems, ist anspruchsvoller in der Korrektur. Eine Möglichkeit bieten Modelle wie das einer temperaturabhängig linearen Ausdehnung oder eine Korrektur durch den Vergleich zweier gegeneinander um 180° gedrehter Projektionen, die nur bei geringer Vergrößerung durchgeführt werden kann.

Mayo et al. ([102]) benutzten die Rekonstruktion mit gefilterter Rückprojektion, um anschließend Vorwärtsprojektionen des Volumens durchzuführen. Durch Kreuzkorrelation der vorwärtsprojizierten Daten und der Messung kann so ein Detektorversatz ermittelt werden, der als Korrektur der Geometriedaten für weitere Rückprojektionen dient. Weitere Methoden zur Geometriekorrektur basieren auf Maßen der Bildschärfe (siehe z.B. [104]) oder auf der Auswertung von Sinogramm-Symmetrien (siehe z.B. [105]).

Als Erweiterung des von Mayo et al. vorgestellten Prinzips der Korrelation von Vorwärtsprojektion und Messung kann die Korrektur der Geometrieabweichungen durch Kreuzkorrelation in iterative Rekonstruktionsmethoden integriert werden. Da iterative Verfahren auf der alternierenden Abfolge von Vorwärts- und Rückprojektion basieren, kann die Korrektur mit nur geringem zusätzlichem Rechenaufwand durchgeführt werden (so auch beschrieben in [106]).

Kreuzkorrelationsverfahren zur Geometriekorrektur

Eine Korrelationskorrektur wird hier, im Unterschied zu [102], in den MLTR-M Ansatz als Zwischenschritt integriert. Sind y die Messwerte der Projektion n und \bar{y} die entsprechenden vorwärtsprojizierten Daten, kann die Kreuzkorrelation K als Produkt der fouriertransformierten Projektionen errechnet werden. $\mathcal{F}_{2D}(y)^*$ ist dabei die komplex konjugierte Darstellung der zweidimensional fouriertransformierten Projektion $\mathcal{F}_{2D}(y)$.

$$K = \mathcal{F}_{2D}^{-1}(\mathcal{F}_{2D}(y)^* \mathcal{F}_{2D}(\bar{y})) \quad (5.56)$$

Methode

Die Position des Maximums von K definiert die Verschiebung ($\Delta\vec{x}$) der Bilder in Detektorpixeln. Um dieses Maximum zu finden, wird eine bilineare Interpolation benutzt, die es erlaubt Ergebnisse unterhalb der ganzzahligen Pixelgenauigkeit auszugeben. Die Berechnung von K in einem vordefinierten Teilausschnitt des Projektionsbildes erlaubt die Konzentration der Geometriekorrektur auf einen bestimmten Teilbereich der Probe.

Um das Ergebnis der Korrelation zu verbessern, können die vorwärtsprojizierten Daten und die Messdaten zudem durch kantenerhaltende Glättung (z.B. Minimierung der Totalvariation) bzw. Kantefilter vorbearbeitet werden.

Das Update der Geometrieinformation kann als Verschiebung des Detektors \vec{D} , als Versatz der Rotationsachse \vec{R} oder als Verschiebung des Brennflecks \vec{S} durchgeführt werden. Die Koordinaten \vec{D}' , \vec{R}' , \vec{S}' nach der Korrelation können bei Vergrößerung M angegeben werden durch:

$$\vec{D}' = \vec{D} + \lambda_{\text{Geo.}} d_{\text{Det.}} \Delta\vec{x} \quad (5.57)$$

$$\vec{R}' = \vec{R} + \lambda_{\text{Geo.}} \frac{d_{\text{Det.}} \Delta\vec{x}}{M} \quad (5.58)$$

$$\vec{S}' = \vec{S} + \lambda_{\text{Geo.}} d_{\text{Det.}} \frac{1}{M-1} \Delta\vec{x} \quad (5.59)$$

Darin bezeichnet $d_{\text{Det.}}$ die Pixelgröße und $\lambda_{\text{Geo.}}$ einen Relaxationsparameter, der im Fall stark fehlerbehafteter Geometriedaten $\lambda_{\text{Geo.}} < 1$ gesetzt werden kann, um eine Überkorrektur zu vermeiden. Soll nur ein konstanter Shift der Projektionen errechnet werden, ist eine Mittelung über alle Projektionen möglich bevor die Geometriedaten erneuert werden.

Der Ablauf der Geometriekorrektur kann beschrieben werden durch:

1. Vorwärtsprojektion
2. evtl. Kantefilter / kantenerhaltende Glättung
3. Kreuzkorrelation (siehe Gl. 5.56)
4. Suche nach Maximum von K mit bilinearer Interpolation
5. Rückprojektion
6. Update der Geometrieinformation

Test des Kreuzkorrelationsverfahren an Simulations- und Messdaten

Um die Geometriekorrektur zu testen, werden Simulationen und Messungen durchgeführt. Für die Simulationen werden die Projektionen des Lochplattenphantoms um eine zufällige Anzahl von Pixeln (maximal ± 4 , ± 8 oder ± 16 Pixel) sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung verschoben. Da die Verschiebung dabei beliebige, nicht ganzzahlige Werte annehmen kann, werden die Projektionen bei der Simulation des Versatzes kubisch interpoliert.

Die Simulation wurde monoenergetisch durchgeführt und sowohl ohne als auch mit Poissonrauschen zur Auswertung herangezogen. Da die Korrektur eine sinnvolle Startlösung des Rekonstruktionsproblems benötigt, wurde die Geometrieberechnung bei Iterationszahl 3 gestartet. Es wurde mit 200 Subsets (5 Projektionen pro Subset) im Fall idealer Projektionen und mit 50 Subsets (20 Projektionen pro Subset) bei Daten mit Rauschen rekonstruiert. Die Konvergenzgeschwindigkeiten der Rekonstruktionen mit und ohne Rauschen variieren daher.

Messungen wurden an einem Kalibrierphantom der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) durchgeführt, das aus zu einem Tetraeder geformten Rubinkugeln besteht (siehe auch [107]). Abb. 5.52 zeigt eine 3D-Rekonstruktion des Phantoms zur Übersicht. Die Kugeln haben einen Durchmesser von $500\ \mu\text{m}$ und wurden mit einer Vergrößerung von $M = 99.2$ mit einer COMET Mikrofocus Röntgenröhre bei einer Spannung von 80 kV gemessen. Die CT Aufnahme eignet sich sehr gut als Test der oben beschriebenen Methode, da trotz guter Ausrichtung von Detektor und Quelle während der Messung Drifts bzw. Ungenauigkeiten der Achsen des Manipulatorsystems auftraten. Für die Messung wird folglich die Korrektur der Rotationsachse gemäß Gl. 5.59 durchgeführt. Der Relaxationsparameter $\lambda_{\text{Geo.}}$ wurde zu $\lambda_{\text{Geo.}} = 1$ gewählt. Die Voxelgröße des Rekonstruktionsvolumens beträgt $2,1\ \mu\text{m}$ bei einem Voxelraster der Größe 512^3 . Jede Iteration wurde mit 40 Subsets bei 800 Projektionen durchgeführt. Die Geometriekorrektur wurde ab Iteration 5 zugeschaltet.

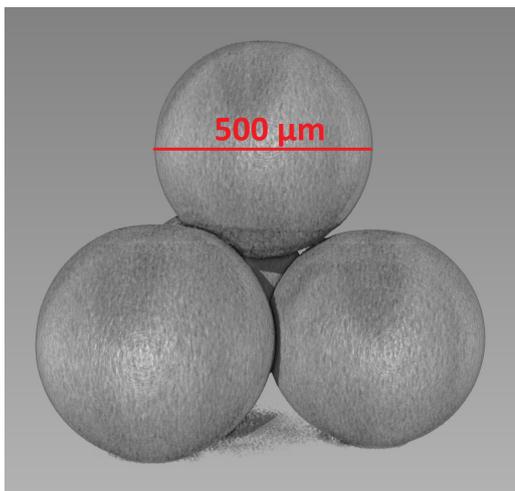


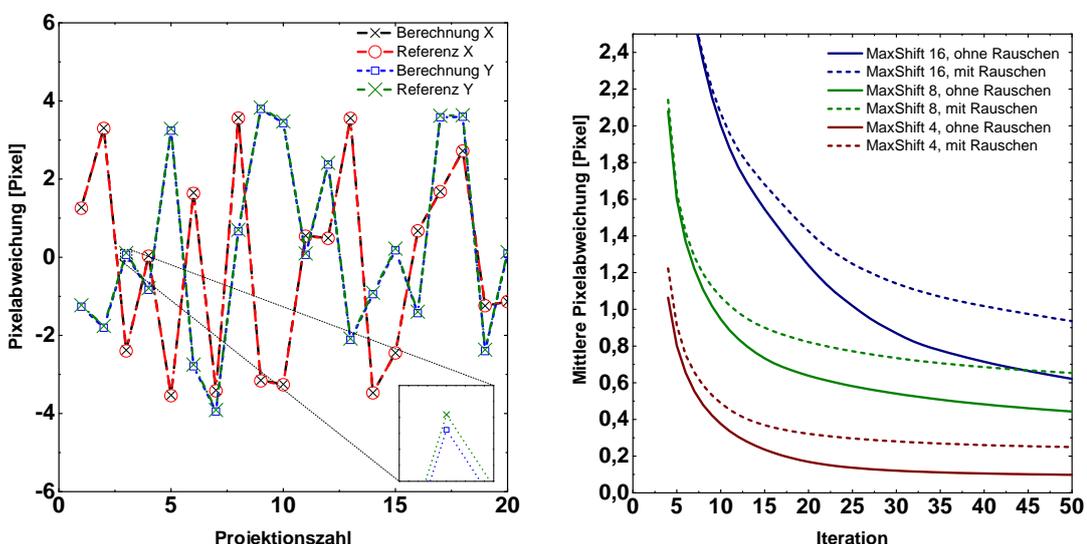
Abbildung 5.52: 3D-Rekonstruktion des Kalibrierphantoms der PTB. Das Phantom besteht aus zum Tetraeder geformten Rubinkugeln. Die Kugeln haben einen Durchmesser von $500\ \mu\text{m}$.

Ergebnisse

Abb. 5.53(a) zeigt die theoretischen und errechneten Detektorshifts in Richtung beider Detektorachsen der ersten 20 Projektionen nach 50 Iterationen der Rekonstruktion ohne Rauschen. Der Maximalshift der gezeigten Daten war ± 4 Pixel. Die Übereinstimmung der simulierten und errechneten Punkte legt nahe, dass die Methode geeignet ist, um Abweichungen der Geometrie besser als pixelgenau zu bestimmen. Die in Abb. 5.53(b) gezeigten mittleren Abweichungen über alle Pixel der simulierten und errechneten Detektorbewegun-

gen zeigen bessere Konvergenz der Daten ohne simuliertes Rauschen, was durch die bessere Datenkonsistenz erklärbar ist. Auch der maximale Versatz der Simulationsdaten spielt eine Rolle bei der Konvergenz, die insbesondere bei Daten mit Poissonrauschen zum Tragen kommt. Die mittlere Abweichung sinkt dabei bei den nach 50 Iterationen nahezu konvergierten Simulationsdaten mit ± 4 Pixel Versatz ohne Rauschen auf einen Wert von 10% der Detektorpixelbreite. Die nach 50 Iterationen verbliebene maximale Abweichung steigt mit dem maximal simulierten Detektorversatz. Dies ist auf zwei Gründe zurückzuführen:

1. Da mehr Versatz korrigiert werden muss, sind die größten Abweichungen nach 50 Iterationen noch nicht vollständig korrigiert. Dies wird insbesondere am mit der Versatzgröße steigenden Restgradienten bei Iteration 50 in Abb. 5.53(b) sichtbar.
2. Kann für eine oder mehrere der Projektionen kein Maximum des Korrelationsbildes gefunden werden, steigt deren Auswirkung auf die mittlere Abweichung mit der Größe des simulierten Shifts.



(a) Simulierte und berechnete Abweichungen in x- und y-Richtung der ersten 20 Projektionen bei einem Maximalshift von ± 4 Pixeln an einem Datensatz ohne Rauschen. Die Übereinstimmung von simulierten und berechneten Verschiebungen legt nahe, dass Verschiebungen im Subpixelbereich korrigierbar sind.

(b) Mittlere Abweichung der Position der Detektorpixel von der simulierten Geometrie für alle Simulationsdatensätze aufgetragen gegen die Iterationszahl. Sowohl mit steigender Geometrieabweichung als auch mit der zusätzlichen Simulation von Poissonrauschen verlangsamt sich die Konvergenz der Korrektur.

Abbildung 5.53: Auswertung der Ergebnisse der Geometriekorrektur am Simulationsphantom.

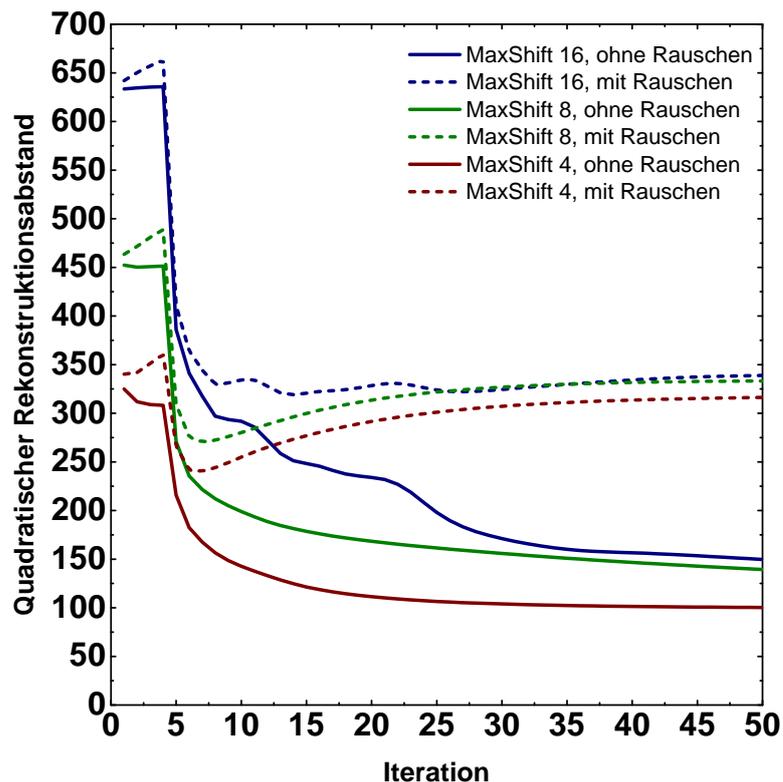
Ein Vergleich der Rekonstruktionen wird in Abb. 5.54 gezeigt. Die Rekonstruktionen mit und ohne Korrektur wurden je 50 Iterationen lang berechnet. Die Bilder zeigen den Datensatz mit einem maximalem Versatz um ± 8 Pixel. Ohne Korrektur macht sich die schlechtere Vereinbarkeit der Daten als Unschärfe an den Objektkanten und als Rauschen bemerkbar. Wie insbesondere an der Rekonstruktion der Daten ohne Poissonrauschen sichtbar wird, steigt damit durch die bessere Übereinstimmung der Projektionen das SNR der Rekonstruktion an. In Abb. 5.54 ist daher in den Darstellungen der Rekonstruktionen ohne Poissonrauschen für einen Ausschnitt aus dem Objektbereich das SNR zum Vergleich angegeben. Eine

Angabe des SNR in den von Rauschen überlagerten Rekonstruktionsdaten ist aufgrund des Regularisierungseinflusses nicht sinnvoll. Die mittlere quadratische Abweichung der Rekonstruktionen von ihrer Referenz, wie sie in Abb. 5.54 dargestellt ist, zeigt eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse ab Iteration 5, ab der die Korrelation berechnet wird. Der Anstieg der Abweichung bei Simulationsdaten mit Poissonrauschen ist auf die mit der Iterationszahl zunehmende Verteilung des Projektions-Rauschens in der Rekonstruktion zurückzuführen, wie es in Kap. 3.3.7 beschrieben wurde. Die Sprünge der Graphen in Abb. 5.54 zeigen die Veränderung der Geometrieinformation.

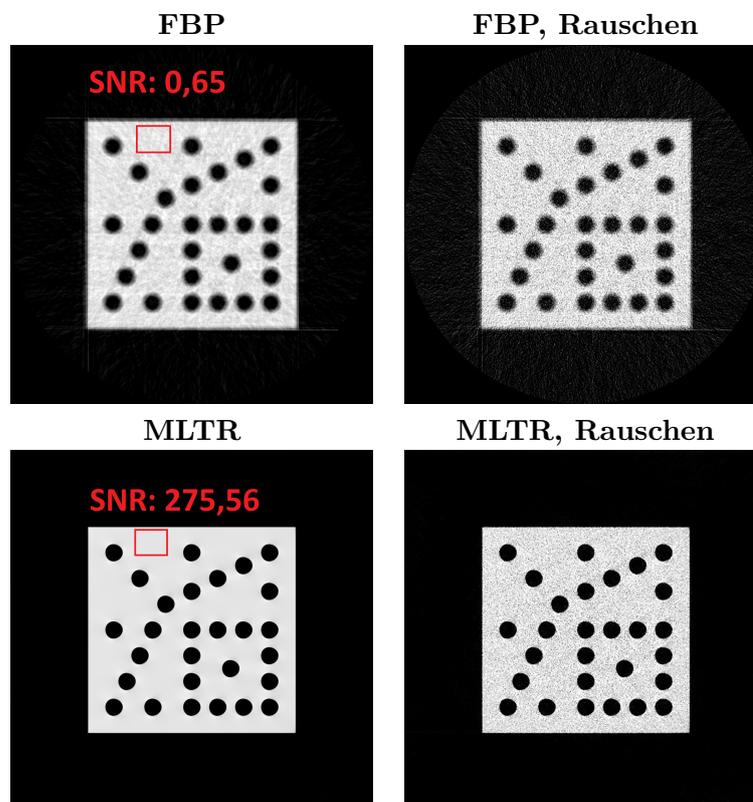
Die Messdaten des Tetraeders wurden ebenfalls mit und ohne Korrelation über 50 Iterationen rekonstruiert. Es wurde für die Rekonstruktion eine leichte Regularisierung ($\beta_2 = 0,00005$) verwendet. Die unkorrigierten Rekonstruktionen zeigen Doppelkanten, die sich auf eine Seite der Rubinkugeln beschränken (siehe Abb. 5.56). Sie sind also nicht auf einen konstanten Detektorshift zurückzuführen, der sich als gleichmäßige Doppelkante in der Rekonstruktion äußern würde. Die Schritte der Korrelationskorrektur werden in Abb. 5.55 gezeigt: Die Korrelation von Messdaten und Vorwärtsprojektion bildet ein Maximum nahe der Bildmitte, aus dem eine Abweichung in Detektorkoordinaten errechnet werden kann. Die Ergebnisse der Rekonstruktion mit Korrektur nach Iteration 50 sind ebenfalls zum Vergleich in Abb. 5.56 dargestellt. Wie in den Simulationen ist eine Verbesserung des SNR und eine Reduzierung der Doppelkanten erkennbar. Im Zusammenhang mit den errechneten Abweichungen (siehe Abb. 5.57) werden auch Probleme des Verfahrens deutlich: Die Sprünge der Objektverschiebung um Projektion 340 und 470 sind auf Maxima des Korrelationsbildes zurückzuführen, die durch Rauschen verursacht werden. Die verstärkten Abweichungen in diesem Bereich werden als Schatten an den Kanten der Rubinkugeln sichtbar.

Die Auswertung der Verschiebungen zeigt unkorrelierte Bewegungen des Objekts in der x-y-Ebene, die von Ungenauigkeiten der Drehachse bzw. Vibrationen des Manipulatorsystems herrühren können. Der von den oben erwähnten Stellen abgesehen ansteigende Verlauf der Verschiebung des Objekts in r-Richtung, also in Richtung der Drehachse, kann als thermischer Drift während der Aufnahmezeit interpretiert werden.

Die Geometriekorrektur unter Benutzung der Kreuzkorrelation zwischen Vorwärtsprojektion und Messdaten ist eine einfache und effektive Variante zur Korrektur von typischen ungewollten Veränderungen der Aufnahmegeometrie, für deren Berechnung in iterativen Rekonstruktionsverfahren kaum zusätzlicher Rechenaufwand nötig ist. Ein Problem für die Korrelation stellen Region-of-Interest Messungen dar, die nur einen sehr kleinen Ausschnitt der Gesamtprobe abbilden. Objektkanten, die aus Bereichen außerhalb des rekonstruierten Bereichs stammen und in den Projektionen abgebildet werden, können zu Problemen bei der Korrelation führen und so eine Verbesserung der Geometrie verhindern. Außerdem ist es sinnvoll, mit Hilfe einer Begrenzung des maximal veränderlichen Geometriebereichs Vorwissen einzubringen und so im Fall stark unkorrelierter Daten eine Überkorrektur zu vermeiden.



(a) Quadratischer Abstand der Rekonstruktionen von der Referenzrekonstruktion. Die Graphen zeigen einen deutlichen Sprung zu einem geringeren Abstand zur Referenz ab Einsetzen der Geometriekorrektur.



(b) Rekonstruktionsschichten des Lochplattenphantoms mit gefilterter Rückprojektion (FBP) und MLTR Rekonstruktion mit zusätzlicher Geometriekorrektur mit und ohne Poissonrauschen. Die Bilder sind der Simulation mit maximal ± 8 Detektorpixel Versatz zuzuordnen. Grauwertspreizung: (0-0,35).

Abbildung 5.54: Vergleich der Rekonstruktionen der simulierten Datensätze zum Test der Geometriekorrektur durch Bildkorrelation.

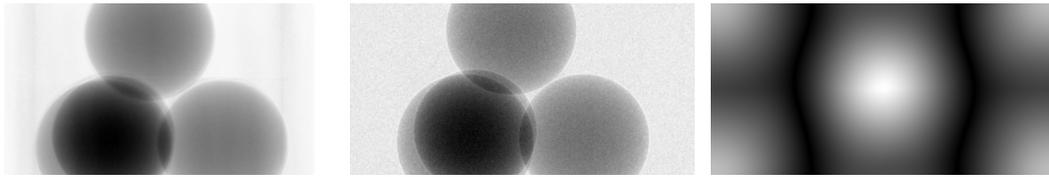
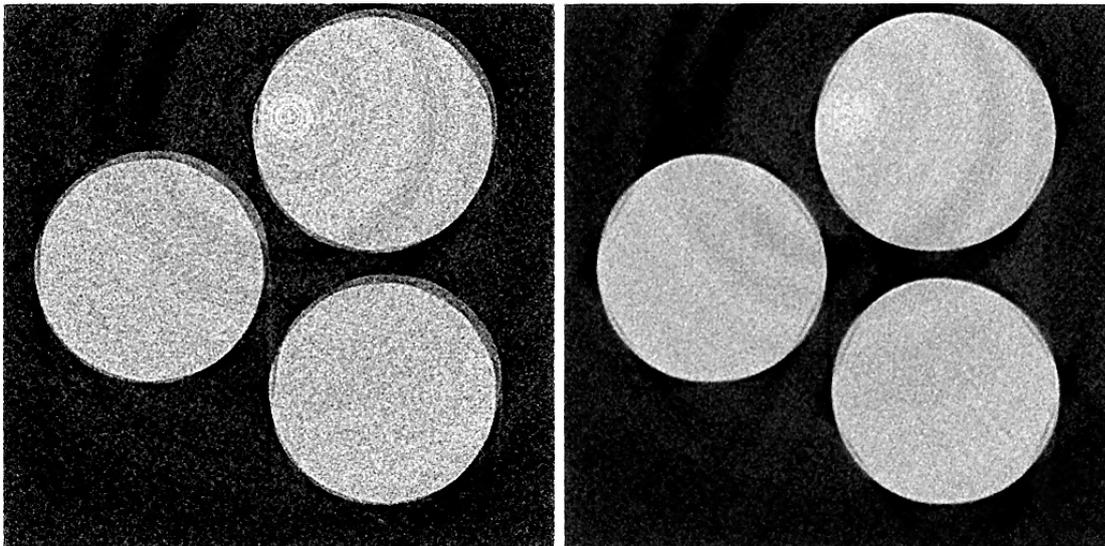
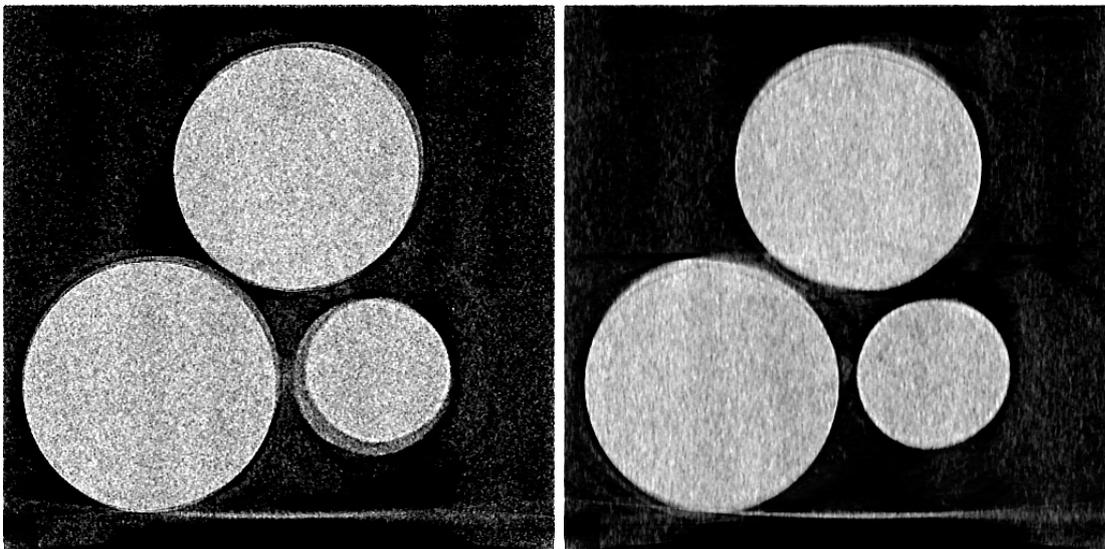


Abbildung 5.55: V.l.n.r.: Vorwärtsprojektion, gemessene Projektion und Kreuzkorrelation. Die Abweichung wird über die Verschiebung des Maximums des Kreuzkorrelationsbildes vom Bildmittelpunkt bestimmt.



(a) Rekonstruierte Volumen nach 50 Iterationen - XY Schicht. Links: ohne Korrektur, rechts: mit Korrektur



(b) Rekonstruierte Volumen nach 50 Iterationen - XZ Schicht. Links: ohne Korrektur, rechts: mit Korrektur

Abbildung 5.56: Schichten der x - y und x - z Ebenen aus der Rekonstruktion des Rubinkugel-Tetraeders. Bei Anwendung der Korrelationskorrektur werden die einseitigen Doppelkanten der Rubinkugeln deutlich reduziert. Durch die bessere Übereinstimmung der Daten verbessert sich auch das SNR der Rekonstruktion. Grauwertspreizung: (0 - 2,5).

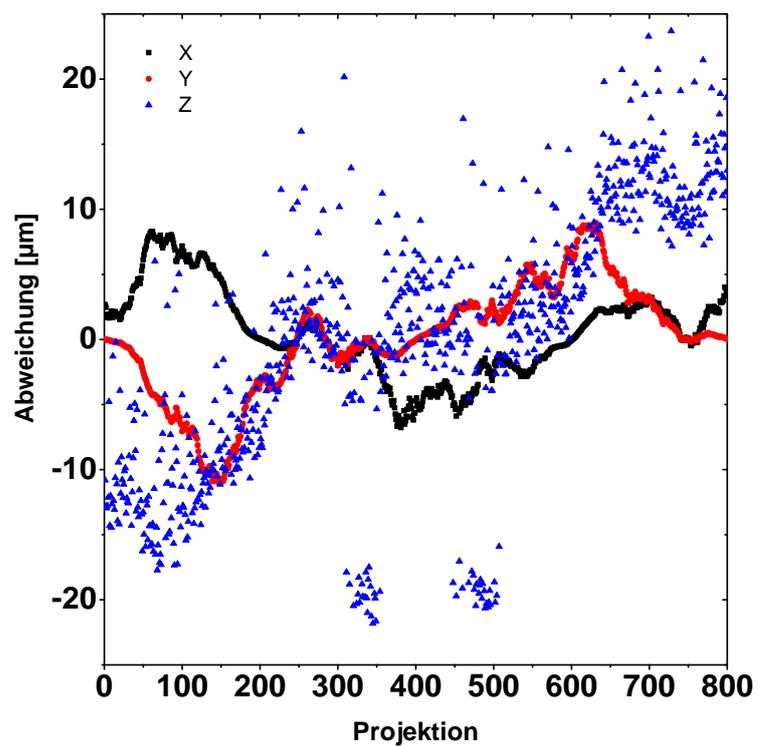


Abbildung 5.57: Berechnete Abweichungen der Objektachse von der angenommenen Geometrie in μm für die drei Raumrichtungen (x,y,z). Die z-Achse zeigt in Richtung der Drehachse des Objekts. Die Verschiebung in Z-Richtung zeigt einen ansteigenden Verlauf, der in Teilstücken durch Fehler der Geometriekorrektur gestört wird, die durch Rauschen der Projektionen verursacht werden.

Kapitel 6

Anwendung modellbasierter Rekonstruktion

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Möglichkeiten zusammengetragen, ein Modell der Messung in die Rekonstruktion einzubringen, das durch eine größere Realitätsnähe die Chance bietet bessere Rekonstruktionsergebnisse zu erzielen und Rekonstruktionsartefakte zu vermeiden. Die im Kap. 5 erarbeiteten Modellerweiterungen können verkürzt durch das Zu- und Abschalten folgender Optionen beschrieben werden:

- Entfaltung der Projektionen bei Einfluss der Detektorunschärfe
- Überabtastung des Brennflecks bei Einfluss der Brennfleckunschärfe
- Regularisierung bei Einfluss von Projektionsrauschen
- Modellierung des Röntgenspektrums bei Einfluss von Strahlaufhärtung
- Modellierung der Objektstreustrahlung bei geringer Transmission
- Geometriekorrektur durch Kreuzkorrelation bei Einfluss unbekannter Abweichungen des Geometriemodells

Weitere in Kap. 3 und Kap. 5 beschriebenen Modellanteile sind entweder Teil jeder hier verwendeten Rekonstruktionsvariante (zum Beispiel Maximum-Likelihood Schätzung und Detektor-Überabtastung), wurden zu Gunsten eines anderen Modells verworfen (beispielsweise globale Energiemodellierung) oder treffen nicht auf die gezeigten Beispiele zu (beispielsweise Zwei-Spektren-Rekonstruktion und Erweiterung des Modells für Energien größer 1 MeV).

Anhand von drei Beispielen, die sich in der Art der Problemstellung und dessen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis unterscheiden, wird im Verlauf dieses Kapitels die Entscheidung getroffen Modellbestandteile in die Rekonstruktion einzubeziehen oder als vernachlässigbar anzusehen. Betrachtet werden der Datensatz der Messung eines Magnesium-Schaums, der Datensatz der Messung einer Oboe und der Datensatz der Messung eines Motor-Kolbens. Während die Rekonstruktion des Magnesiumschaums, als Beispiel aus dem Bereich der Materialcharakterisierung, unter der begrenzten Auflösung und Achsgenauigkeit des CT-Systems leidet, werden bei den Datensätzen der Oboe, als Beispiel eines Objekts mit stark unterschiedlichen Materialien, und des Kolbens, als Beispiel eines industriellen Datensatzes, Rekonstruktionsprobleme vor allem durch Strahlaufhärtung und Streustrahlung verursacht.

6.1 Magnesium-Schaum

Die Messung eines Mg-Schaums (siehe dazu [108]) bietet eine gute Möglichkeit die Auflösungserhöhung durch Brennfleck-Überabtastung an einem 3D Datensatz zu testen. Die Schaumwände dieser Struktur sind breit genug um ihrerseits mit Luftporen unterschiedlicher Größe durchsetzt zu sein, die einen schnellen Eindruck der erreichbaren Auflösung der Rekonstruktionsmethode liefern. An einem Datensatz, der an einer Kompakt-CT-Anlage aufgenommen wurde, wird gezeigt, dass die maximale Voxelauflösung eines Systems erst durch gute Modellierung der Rekonstruktion ausgereizt werden kann. Eine Photographie des Objekts und die 3D-Rekonstruktion werden in Abb. 6.1 gezeigt.

6.1.1 Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit

	Parameter	Wert
Objekt	Maße	ca. $9,8 \times 4,8 \times 8,8$ mm
Aufnahme	SOD	85,83 mm
	SDD	231,00 mm
	Anzahl Projektionen	800
	Winkelbereich	0° bis $359,55^\circ$
Quelle	Spannung	50 kV
	Strom	$450 \mu\text{A}$
Detektor	Größe	1024×1024 Pixel
	Pixelgröße	$48 \mu\text{m}$
	Integrationszeit	6,0 s
Rekonstruktion	Größe	$512 \times 512 \times 768$ Pixel
	Voxelgröße	$20,0 \times 20,0 \times 20,0 \mu\text{m}$
	Subsets	40
	Iterationen	35
	Modellierter Brennfleck	$50,8 \mu\text{m}$ (Gauß, FWHM)
	Modellierte Detektor-PSF	$30,24 \mu\text{m}$ (Lorentz, FWHM)

Tabelle 6.1: Mess- und Rekonstruktionsparameter des Magnesium-Schaums.

Für die CT-Aufnahme wurden 800 Projektionen bei einer 2,7-fachen Vergrößerung aufgenommen. Die Winkelauflösung, also die Anzahl an Projektionen, ist trotz der Anzahl von 1024 Detektorpixeln ausreichend, da der Schaum die Detektorbreite bei dieser Vergrößerung nicht vollständig ausnutzt. Da das Manipulatorsystem der verwendeten CT-Anlage bei der

angestrebten Auflösung von $20\ \mu\text{m}$ Voxelgröße an die Grenze seiner möglichen Präzision stößt, müssen Geometriefehler in das Modell der Rekonstruktion einbezogen werden. Eine Übersicht der Aufnahmeparameter wird in Tab. 6.1 gegeben.

Die Detektorunschärfe stellt ein weiteres Problem dar, das durch die Messung einer Absorptionskante bestimmt wird. Die angenommene Lorentzfunktion wird durch die Funktionsanpassung an das Detektorbild der Kantenmessung zu $30,24\ \mu\text{m}$ Halbwertsbreite bestimmt. Der Brennfleck des Systems wird durch Messungen einer hochabsorbierenden Kante in unterschiedlichen Quell-Objekt-Abständen bestimmt. Während bei Detektor-nahen Aufnahmen der Brennfleck gegenüber der Detektor-PSF vernachlässigbar wird, nimmt der Einfluss des Brennflecks bei kleinen Quell-Objekt-Abständen zu. Daraus kann der Brennfleck in der Näherung einer Normalverteilung mit einer Halbwertsbreite von $50,80 \pm 2,42\ \mu\text{m}$ bestimmt werden.

Da Strahlaufhärtung und Streustrahlung, den fehlenden Artefakten des FBP-Rekonstruktionsergebnisses nach zu urteilen, keine Haupteinflüsse auf die Aufnahme darstellen, wird auf eine Korrektur in dieser Hinsicht verzichtet. Das Modell der Rekonstruktion besteht folglich aus der Standardgeometrie mit zusätzlicher Geometriekorrektur, der Entfaltung zur Korrektur der Detektorunschärfe und einer Brennflecküberabtastung, die in die MLTR-Rekonstruktion eingebracht werden.

6.1.2 Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse

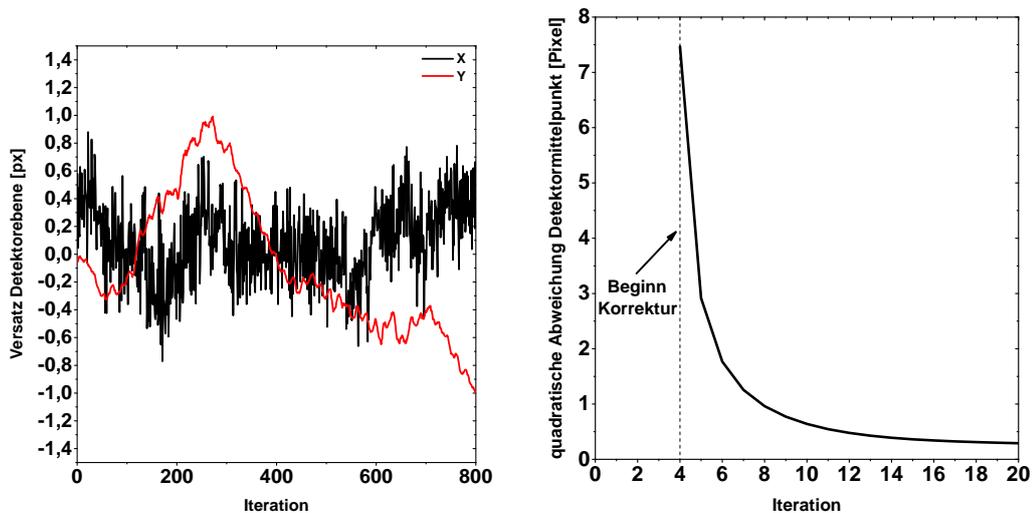
Entsprechend den Erfahrungen aus Kap 5.2.4 wird die Entfaltung der Detektor-PSF einmalig vor dem Start der Rekonstruktion durchgeführt. Die dafür eingesetzte Wiener-Entfaltung wird mit einer Rauschunterdrückung entsprechend der Annahme eines konstanten Signal-Rausch-Verhältnisses $\text{SNR}=667$ durchgeführt. Dieser Wert wurde so gewählt, dass das Rauschen der entfalteten Projektionen dem der Originalprojektionen entspricht.

Die Geometrieabweichung wird über 20 Iterationen bestimmt. Die Korrektur setzt dabei bei Iteration 3 ein, so dass die veränderte Aufnahmegeometrie zum ersten Mal in Iteration 4 in die Rekonstruktion eingeht. Die Geometrieänderungen können (siehe Kap. 5.5) als Abweichung der Detektor-, Quell- oder Manipulatorkoordinaten interpretiert werden und wurden für die Messung des Mg-Schaums als Veränderungen der Detektorkoordinaten angenommen. Die in Abb. 6.2 dargestellten Ergebnisse zeigen Abweichungen der Detektorkoordinaten in beide Raumrichtungen. Die darin dargestellte Abnahme der Korrekturwerte zeigt eine gute Konvergenz.

Die rekonstruierten Schichten der Messung des Mg-Schaums sind in Abb. 6.3 dargestellt. Darin werden auch Zwischenschritte gezeigt, um die sukzessive Veränderung des Rekonstruktionsvolumens zu zeigen. Das Ergebnis der gefilterten Rückprojektion ohne Korrekturen zeigt in der Detaildarstellung unscharfe Kanten und eine erschwerte Erkennbarkeit der Lufteinschlüsse in den Schaumwänden. Nach der Geometriekorrektur ist das Ergebnis leicht verbessert, da sich eine Bewegung des Aufnahmesystems als Unschärfe im Bild auswirkt. Unterschiede,



Abbildung 6.1: Modellbasierte 3D-Rekonstruktion (links) des Aluminiumoxid-Schaums neben einer Photographie der Probe (rechts).



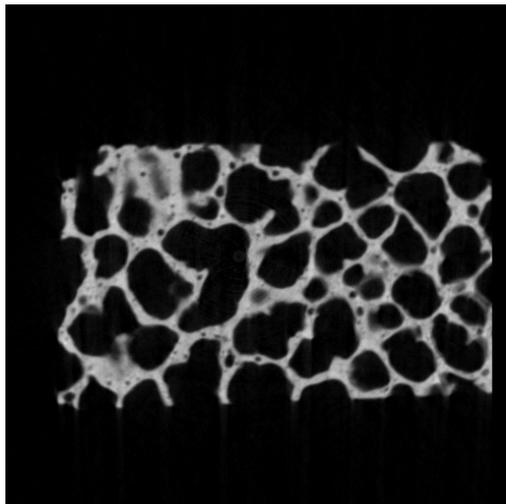
(a) Abweichung der Detektorcoordinate in Detektorpixeln.

(b) Konvergenz der Geometriekorrektur. Aufgetragen ist die euklidische Norm $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ des Korrekturvektors $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ der Detektorcoordinate in der Einheit von Detektorpixeln.

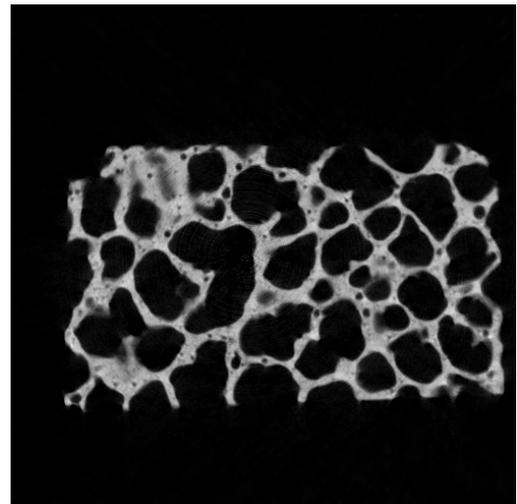
Abbildung 6.2: Korrektur zur Aufnahmegeometrie der Messung des Magnesium-Schaums. Die Geometrieabweichung wurde in Einheiten von Detektorpixeln ab Iteration 3 (Einbeziehung in die Rekonstruktion ab Iteration 4) berechnet.

Verfahrens ergeben, sind kaum zu erkennen. Nach der Entfaltung ist die Detailgenauigkeit auch in der FBP-Rekonstruktion deutlich verbessert, da die zweidimensionale Entfaltung der Projektionen Einflüsse anderer Schichten des Rekonstruktionsvolumens reduziert. Die Rekonstruktion des Endergebnisses wird mit einer 3x3 Brennfleck-Überabtastung vorgenom-

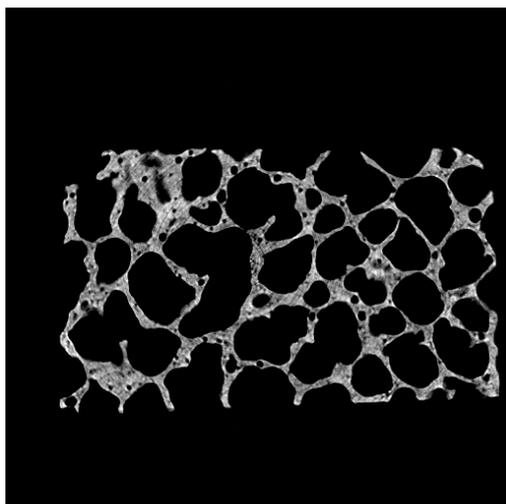
men. Der Brennfleck wird dabei mit der oben angegebenen Halbwertsbreite von $50,80 \mu\text{m}$ modelliert. Bei einer Subsetgröße von 20 Projektionen pro Subset wird das Ergebnis nach 35 Iterationen gezeigt. In der rekonstruierten Schicht wird die Verstärkung des Entfaltungseffekts deutlich, der bereits durch die Berücksichtigung der Detektor-PSF sichtbar wurde.



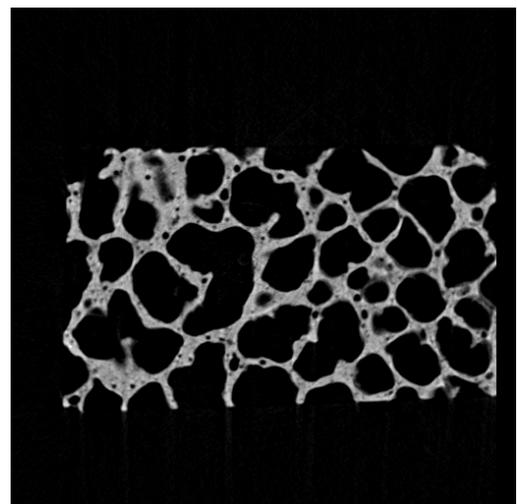
(a) FBP-Rekonstruktion. Grauwertspreizung: (0-3).



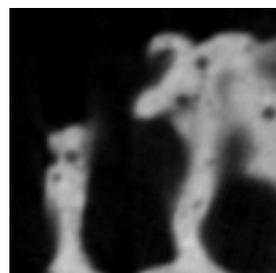
(b) MLTR-Rekonstruktion nach Geometriekorrektur. Grauwertspreizung: (0-3).



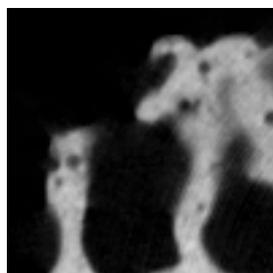
(d) MLTR-Rekonstruktion mit 50 μm gaußförmigem Brennfleck. Grauwertspreizung: (0-5).



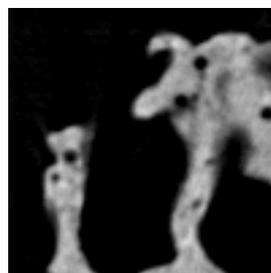
(c) FBP-Rekonstruktion nach Projektions-Entfaltung. Grauwertspreizung: (0-5).



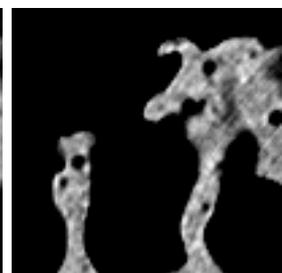
(e) FBP



(f) MLTR mit Geometrie-korrektur



(g) FBP nach Entfaltung



(h) MLTR mit 50 μm Brennfleck-Modell

Abbildung 6.3: Zwischenschritte und Endergebnisse der modellbasierten Rekonstruktion. Die Auflösung wird durch die Einbeziehung von Aufnahmegeometrie, Detektorunschärfe und Brennfleck erhöht.

6.2 Oboe

Die Messdaten der Oboe wurden bereits in Kap. 5.1.2 im Zusammenhang der Projektionsdatenentfaltung herangezogen. Die Messung entstammt Probemessungen (privates Musikinstrument), die zur Vorbereitung des DFG-*MUSICES* Projekts (siehe beispielsweise [109]) durchgeführt wurden. CT-Schnittbilder von Musikinstrumenten zeigen ähnliche Bildgebungsprobleme, die auch bei medizinischen Daten auftreten. Während bei radiologischer Bildgebung metallische Implantate eine Überstrahlung des Weichgewebekontrastes bewirken, schafft die Einfassung von Holzbauteilen der Musikinstrumente durch Klappen aus Neusilber oder Messing Abschattungen im Inneren der Probe.

6.2.1 Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit

Die Aufnahmeparameter der Messung sind in Tab. 6.2 zusammengefasst. Trotz der starken Vorfilterung des Quellspektrums zeigt die Rekonstruktion noch starke Aufhärtungsartefakte. Die Korrektur muss also insbesondere die durch Strahlaufhärtung und Streustrahlung verursachten Anteile an den Messdaten berücksichtigen. Eine für die Entfaltung der Messdaten gemessene Linienspreizfunktion wurde bereits in Abb. 5.5 gezeigt. Um die Streustrahlung, die vom Objekt ausgeht, zu simulieren, werden das effektive Spektrum sowie die Materialdaten der Probe benötigt. Da das Spektrum nur als Simulation vorliegt, wird es während der Rekonstruktion angepasst. Als Materialdaten werden der Referenzdatenbank [65] die Schwächungskoeffizienten bei 70 keV entnommen (siehe Tabelle in Abb. 6.4). Die Materialdaten des Holzanteils wurden als ähnlich zu Wasser abgeschätzt.

6.2.2 Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse

Das für das Rekonstruktionsmodell angenommene Röntgenspektrum wurde während des iterativen Rekonstruktionsprozesses verändert, um die größte Nähe der Rekonstruktion zu den Materialdaten zu erreichen. Das Ergebnis dieser Spektrumsschätzung wird in Abb. 6.4 gezeigt. Das Spektrum zeigt eine Verschiebung zu niedrigeren Energien durch die Anpassung. Dieses Spektrum wird auch eingesetzt, um die Vorwärtsprojektion der Streuintensitäten zu generieren. Eine Projektion mit entsprechender Streuprojektion wird ebenfalls in Abb. 6.4 gezeigt. Besonders die Anteile der Projektion, die die höchste Absorption (Klappen über den Tonlöchern) zeigen, können mit der größten Streustrahlungsintensität identifiziert werden.

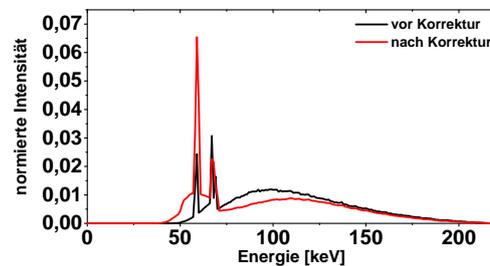
Die Endergebnisse der gefilterten Rückprojektion und des modellbasierten Verfahrens werden in Abb. 6.6 anhand einer Rekonstruktionsschicht senkrecht zur Drehachse (xy) und einer Schicht entlang der Drehachse (xz) gezeigt. Die Trennbarkeit der Probenbestandteile ist in der modellbasierten Rekonstruktion deutlich erhöht. Anteile des Holzes, die in der gefilterten Rückprojektion durch Artefakte überlagert waren, werden mit gutem Kontrast sichtbar und zeigen die Porenstruktur des Holzes. Insbesondere in der xz -Schicht sind

	Parameter	Wert
Objekt	Durchmesser Holz	ca. 26 mm
	Durchmesser Gesamt	bis zu 40 mm
Aufnahme	SOD	432,0 mm
	SDD	1053,0 mm
	Anzahl Projektionen	800
	Winkelbereich	0° bis 359,55°
Quelle	Spannung	220 kV
	Strom	1600 μ A
	Vorfilter	2,5 mm Cu
Detektor	Größe	1024 \times 1024 Pixel
	Pixelgröße	200 μ m
	Integrationszeit	0,2 s
Rekonstruktion	Größe	640 \times 640 \times 300 Pixel
	Voxelgröße	81,67 \times 81,67 \times 81,67 μ m
	Subsets	160
	Iterationen	25

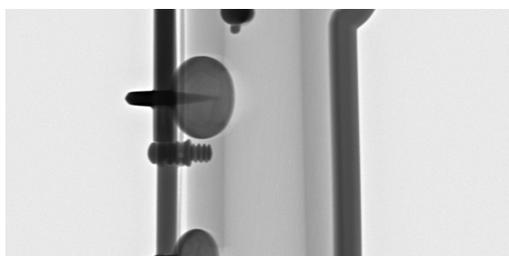
Tabelle 6.2: Mess- und Rekonstruktionsparameter der Messung der Oboe.

Material	$\mu_{\text{ges.}}$	$\mu_{\text{photo.}}$	$\mu_{\text{Compt.}}$	$\mu_{\text{Rayl.}}$
Luft	0,00020	0,0	0,00020	0,0
Holz	0,19	0,01	0,17	0,01
Neusilber	9,20	7,36	1,12	0,71

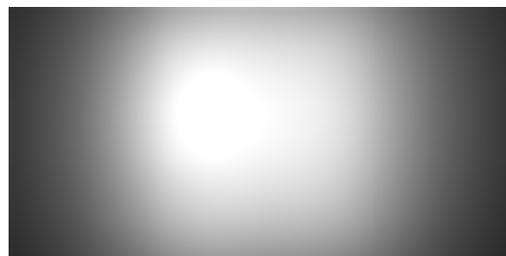
(a) Zur Rekonstruktion verwendete Materialparameter in Einheit $\frac{1}{\text{cm}}$.



(b) Korrektur des angenommenen 220 kV Spektrums.

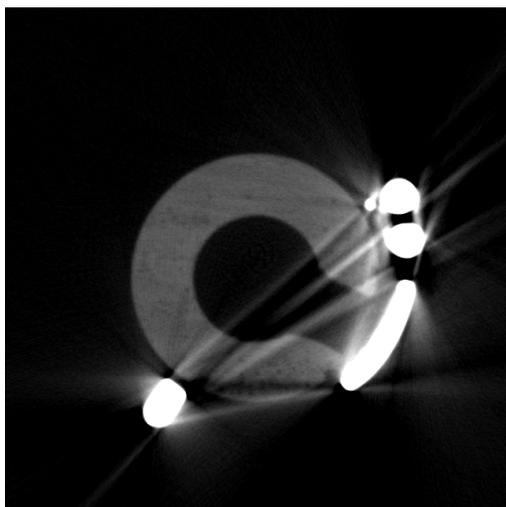


(c) In der Rekonstruktion verwendeter Projektionsausschnitt bei Winkel 0°.

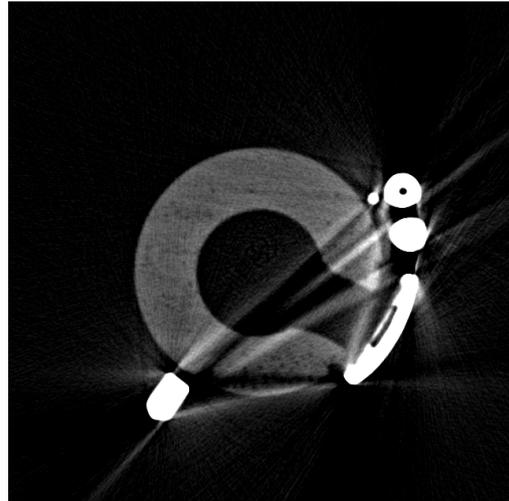


(d) Zu (b) gehörige Projektion der Streustrahlung.

Abbildung 6.4: Korrektur des Spektrums und der Objektstreustrahlung während der Rekonstruktion.



(a) FBP



(b) FBP-Rekonstruktion nach Entfaltung der Projektionen.

Abbildung 6.5: Vergleich der MLTR-Rekonstruktionen vor und nach der Entfaltung der Projektionsdaten. Grauwertspreizung: (0-0,5).

Restartefakte aber auch noch in der MLTR-Rekonstruktion zu sehen. Diese sind auf die sehr niedrigen Intensitätswerte in den Projektionen der Messung zurückzuführen, in denen große Durchstrahlungslängen des Neusilbers auftreten. Innerhalb solcher niedriger Intensitäten wird der relative Fehler durch eine Über- oder Unterschätzung der materialspezifischen Absorption bzw. der Streustrahlung sehr groß.

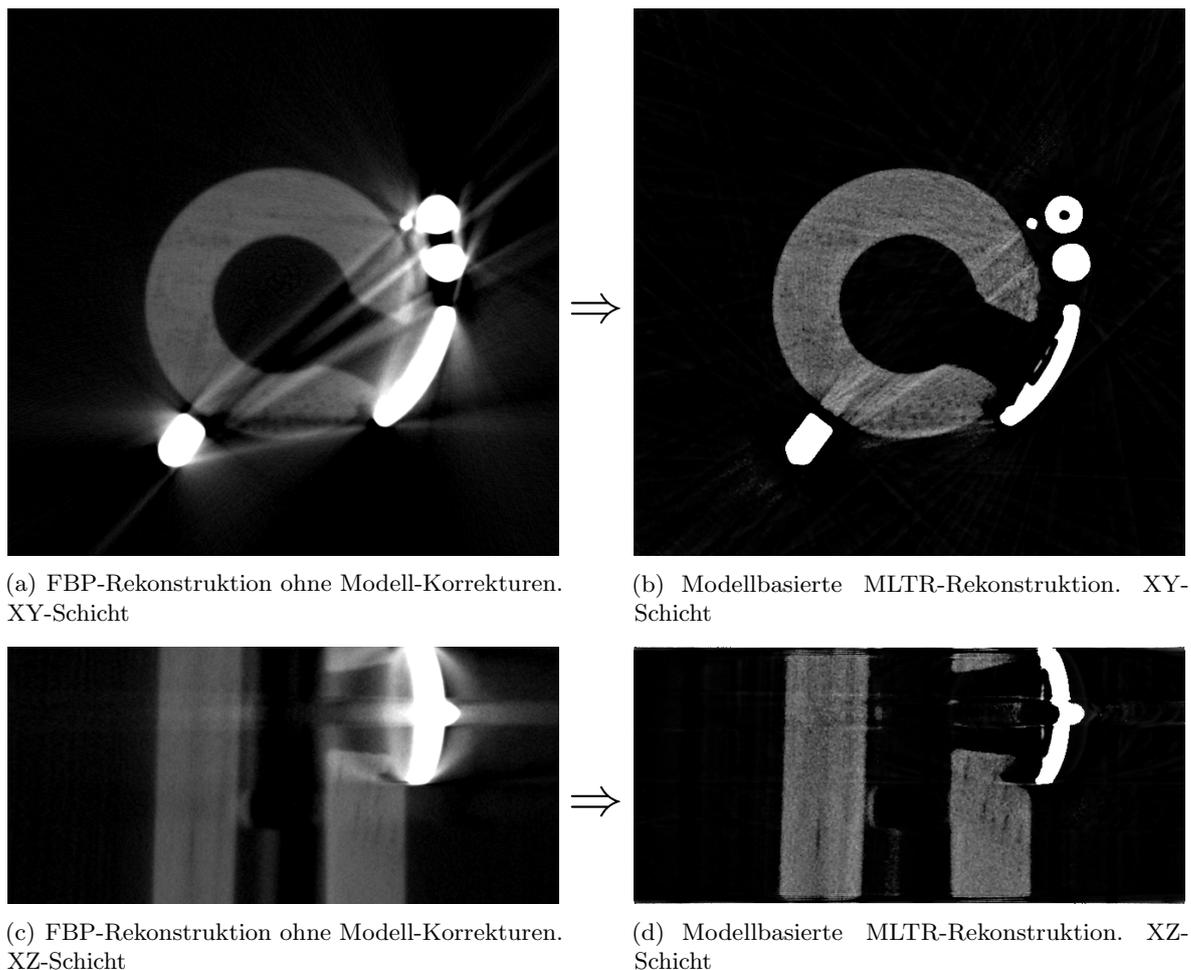


Abbildung 6.6: Vergleich der Endergebnisse der gefilterten Rückprojektion und des modellbasierten Ansatzes. Grauwertspreizung: (0-0,5).

6.3 Motor-Kolben

Der Datensatz des Kolbens für einen Verbrennungsmotor wurde im Rahmen eines Industrieprojekts zur Entwicklung eines Inline-CT-Systems aufgenommen. Dieses Beispiel stellt damit einen Anwendungsfall dar, der Problemstellungen der industriellen Serienprüfung aufzeigt. Der Kolben besteht aus einem Aluminiumkörper, der mit einem Eisenring versehen ist. Gelagert wird der Kolben auf einer Plastik-Schale, die eine genaue und für alle Bauteile der Serienprüfung gleiche Positionierung zulässt. Der Kolben wird zur Übersicht in Abb. 6.7 als dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionsergebnisses gezeigt.

6.3.1 Aufnahmeparameter und Korrekturnotwendigkeit

Die Aufnahmeparameter der Messung sind in Tab. 6.3 zusammengefasst. Die gefilterte Rückprojektion (siehe z.B. Abb. 6.9) zeigt starke Artefakte durch Strahlauhhärtung und Streustrahlung, die zu Abschattungs-bereichen im Inneren der Probe und zu einer Überschätzung der Schwächungskoeffizienten im Außenbereich der Probe führen. Diese erschweren eine

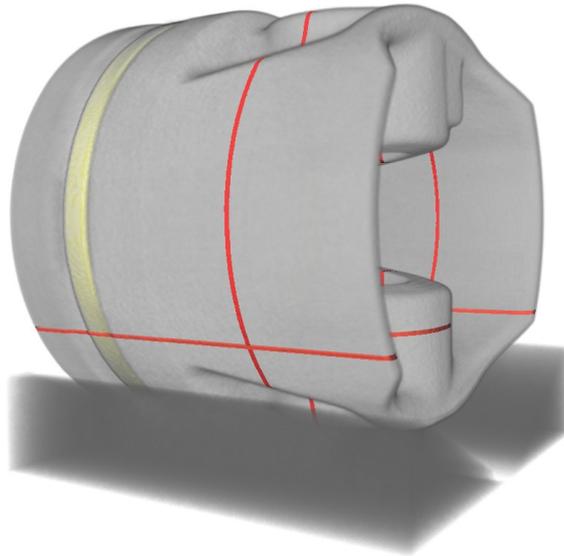


Abbildung 6.7: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionsergebnisses des Motor-Kolbens. Der Eisenring im Aluminiumbauteil ist gelb gekennzeichnet. Die roten Linien deuten die in Abb. 6.9 und Abb. 6.10 gezeigten Schnitte an.

Grauwert-Segmentierung und damit eine automatisierte Prüfung des Kolbens. Aufgrund der Anforderungen der Serienprüfung an die Positioniergenauigkeit des Objekts sind keine Abweichungen vom Geometriemodell zu erwarten. Die Messaufgabe erfordert keine Erhöhung der Auflösung durch eine Berücksichtigung der Brennfleckgröße oder Detektor-PSF, da die erreichbare Auflösung des CT-Systems der Problemstellung angepasst wurde und Materialfehler und Lufteinschlüsse, die kleiner als die erreichbare Auflösung sind, nicht erkennbar sein müssen. Die Erweiterung des Rekonstruktionsmodells bezieht sich daher allein auf die Korrektur von Nicht-Linearitäten durch das polychromatische Röntgenspektrum und die vom Objekt ausgehende Streustrahlung.

6.3.2 Rekonstruktionsmodell und Ergebnisse

Zur Rekonstruktion der Daten mit Hilfe des segmentierungsbasierten Energiemodells entsprechend Gl. 5.26 wurde ein simuliertes Röntgenspektrum mit 225 kV Beschleunigungsspannung und einem der Messung entsprechenden Vorfilter von 3,5 mm Cu verwendet. Die verwendeten Materialdaten sind in Tab. 6.4 aufgeführt. Die Ergebnisse der Rekonstruktion ohne Korrektur der Objektstreustrahlung (siehe Abb. 6.9 und Abb. 6.10) nach 30 Iterationen zeigen kaum sichtbare Verbesserungen zur gefilterten Rückprojektion, die über eine reine Erhöhung der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten hinausgeht. Dies liegt im durch 3,5 mm Kupfer stark gefilterten Spektrum begründet, das wenig niedrige Energien enthält und somit wenig Strahlaufhärtingsartefakte verursacht (Schwerpunkt des für die modellbasierte Rekonstruktion verwendeten Spektrums ca. 115 keV). Die sichtbaren Artefakte durch Nicht-Linearitäten können aber deutlich verbessert werden, wird die Objektstreustrahlung mit in das Modell einbezogen. Abb. 6.8 zeigt zwei Projektionsbilder mit den zugehörigen Abbildungen der Streustrahlung. Die Streustrahlung wurde während der Rekonstruktion

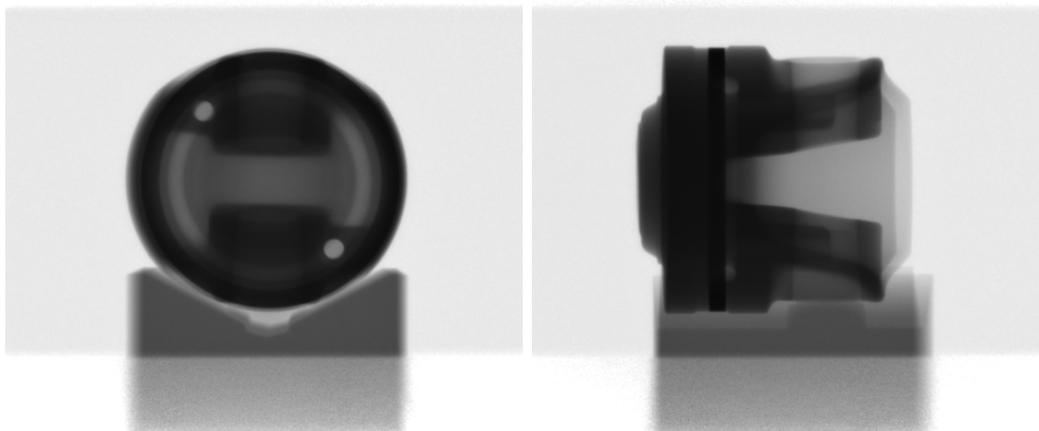
	Parameter	Wert
Objekt	Durchmesser Kolben	ca. 80 mm
Aufnahme	SOD	697,1 mm
	SDD	850,0 mm
	Anzahl Projektionen	390
	Winkelbereich	0° bis 359,08°
Quelle	Spannung	225 kV
	Strom	8000 μ A
	Vorfilter	3,5 mm Cu
Detektor	Größe	472×472 Pixel
	Pixelgröße	400 μ m
	Integrationszeit	0,066 s
Rekonstruktion	Größe	464×464×400 Pixel
	Voxelgröße	331,68×331,68×331,68 μ m
	Subsets	78
	Iterationen	30

Tabelle 6.3: Mess- und Rekonstruktionsparameter der Messung des Motor-Kolbens.

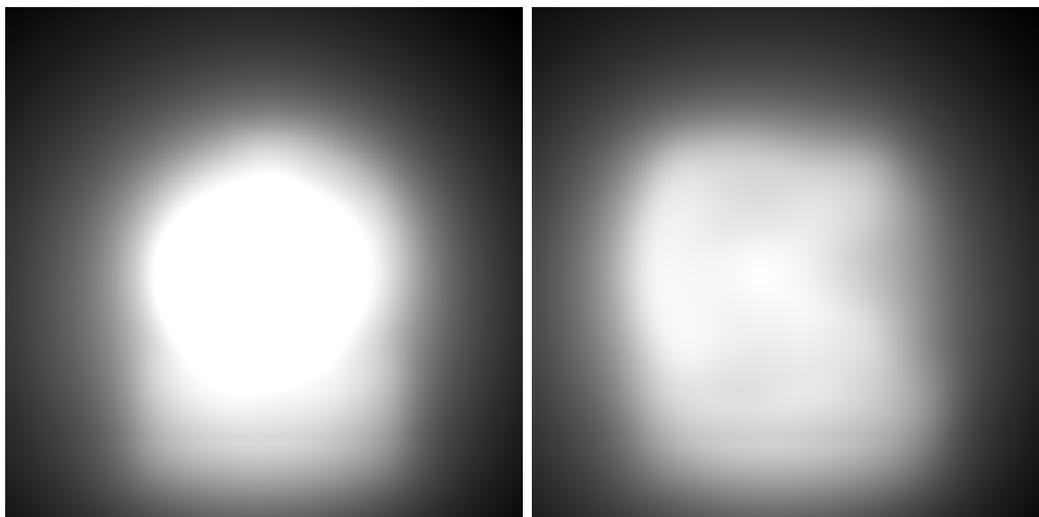
Material	μ_{total}	$\mu_{\text{Rayl.}}$	$\mu_{\text{photoel.}}$	$\mu_{\text{Compt.}}$
Luft	0.00020	0.00000	0.00001	0.00019
PMMA	0.22	0.01	0.01	0.20
Al	0.63	0.03	0.20	0.40
Fe	6.43	0.56	4.81	1.06

Tabelle 6.4: Materialdaten, die für die segmentierungsbasierte Energiemodellierung und das Modell der Streustrahlung des Rekonstruktionsverfahrens verwendet wurden. Die Werte sind in Einheiten von $\frac{1}{\text{cm}}$ angegeben.

bei Iterationszahl 10 berechnet und gemäß Kap. 5.4 in das Modell der Rekonstruktion integriert. Die dazugehörigen Rekonstruktionsergebnisse in Abb. 6.9 und Abb. 6.10 zeigen eine deutliche Verminderung der Abschattungsartefakte.

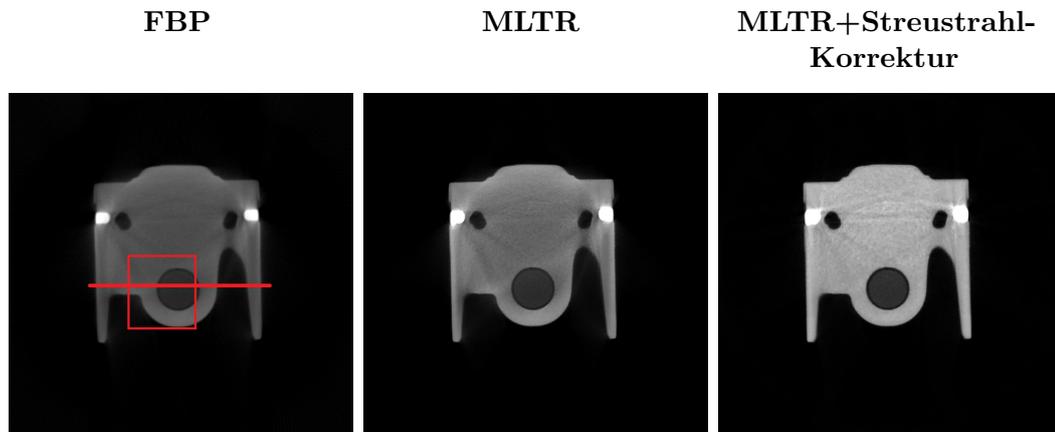


(a) Projektionsbilder des Kolbens bei 0° und ca. 90° . Grauwertspreizung: (0-7000).

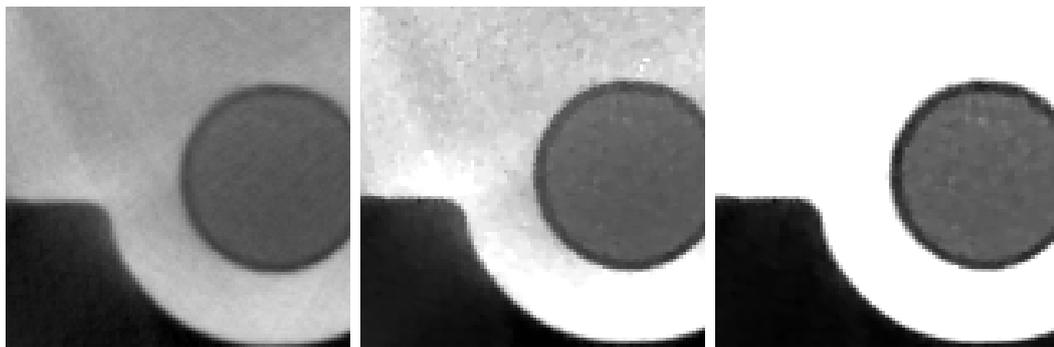


(b) Im Rekonstruktionsprozess berechnete Abbildungen der Objektstreustrahlung des Kolbens bei 0° und ca. 90° entsprechend den Projektionsbildern in (a). Grauwertspreizung: (0-170).

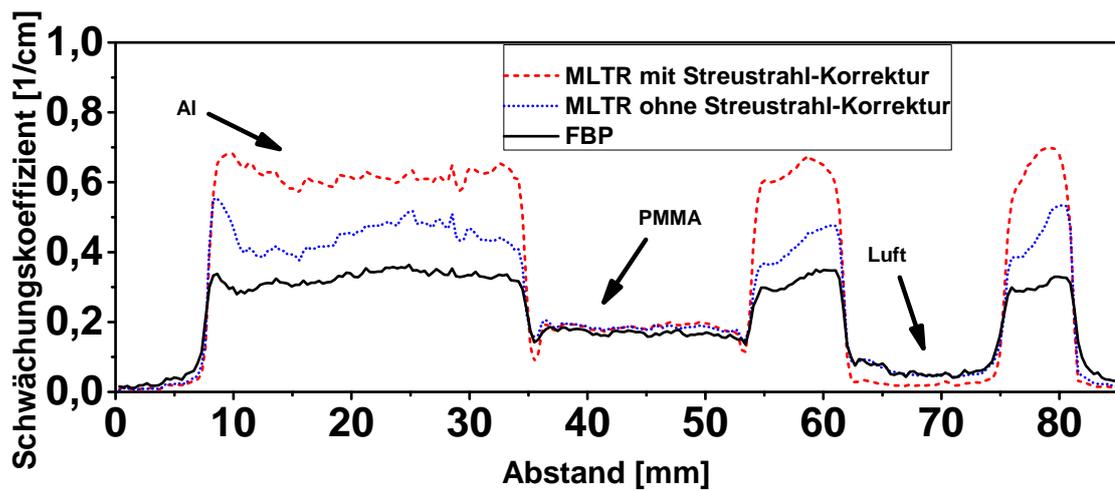
Abbildung 6.8: Projektionsbilder des Motor-Kolbens bei 0° und ca. 90° . In den Abbildungen der Objektstreustrahlung ist die nach vorne gerichtete Streuung am dominantesten.



(a) Rekonstruktionsschichten des Kolbens in der xy-Ebene (senkrecht zur Drehachse). Es werden die gefilterte Rückprojektion mit Shepp-Logen-Fiter, die segmentierungsbasierte MLTR-Rekonstruktion und die segmentierungsbasierte MLTR-Rekonstruktion mit Simulation der Objektstreustrahlung gezeigt. Grauwertspreizung: (0-1,0).



(b) Rekonstruktionsschichten des Kolbens der xy-Ebene (senkrecht zur Drehachse) in Detaildarstellung. Der Detailausschnitt ist in (a) gekennzeichnet. Grauwertspreizung: (0-0,5).

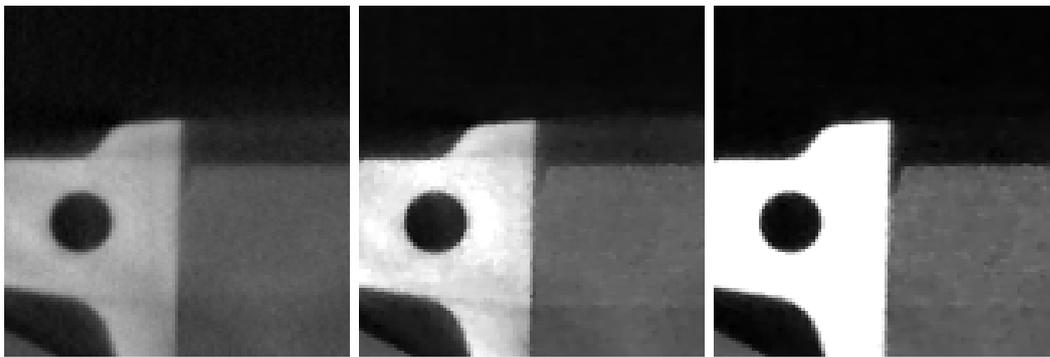


(c) Linienprofil entlang der roten Linie in (a).

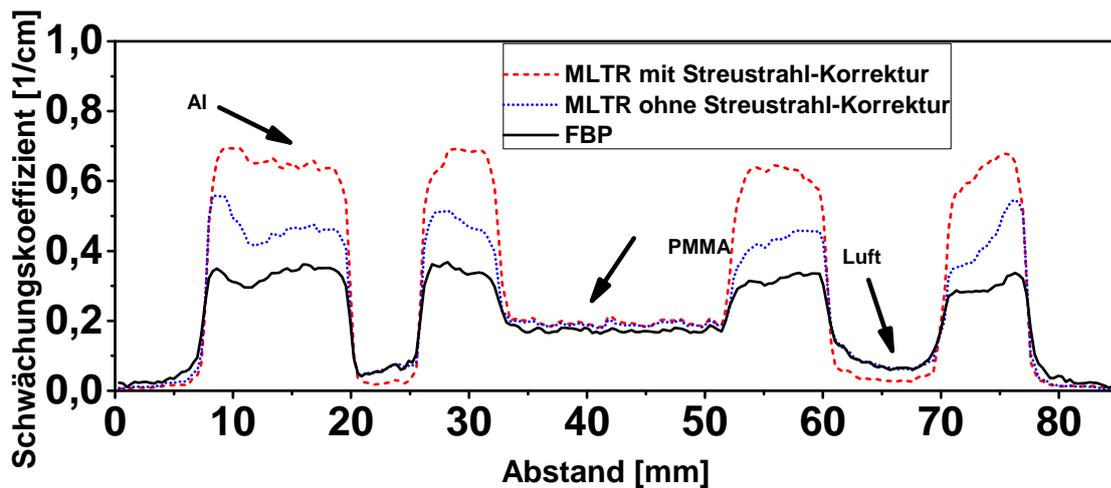
Abbildung 6.9: Rekonstruktionsbilder und zugehöriges Linienprofil des Kolbens in der xy-Ebene.



(a) Rekonstruktionsschichten des Kolbens in der xz -Ebene (senkrecht zur Drehachse). Es werden die gefilterte Rückprojektion mit Shepp-Logen-Fiter, die segmentierungsbasierte MLTR-Rekonstruktion und die segmentierungsbasierte MLTR-Rekonstruktion mit Simulation der Objektstreuung gezeigt. Grauwertspreizung: (0 - 1,0).



(b) Rekonstruktionsschichten des Kolbens der xz -Ebene (senkrecht zur Drehachse) in Detaildarstellung. Der Detailausschnitt ist in (a) gekennzeichnet. Grauwertspreizung: (0 - 0,5).



(c) Linienprofil entlang der roten Linie in (a).

Abbildung 6.10: Rekonstruktionsbilder und zugehöriges Linienprofil des Kolbens in der xz -Ebene.

Kapitel 7

Abschließende Diskussion und Ausblick

7.1 Abschließende Diskussion und Zusammenfassung des modellbasierten Ansatzes

Als Zielsetzung wurde zum Beginn der vorliegenden Arbeit die Schaffung eines iterativen Rekonstruktionsverfahrens definiert, das über das vereinfachende Modell der gefilterten Rückprojektion hinaus den physikalischen Messprozess simuliert. So sollten Rekonstruktionsergebnisse erreicht werden, die hinsichtlich ihrer Detailgenauigkeit, der Vermeidung von Bildfehlern und Artefakten sowie der physikalischen Bedeutung der rekonstruierten Schwächungskoeffizienten über die Ergebnisse der schneller und leichter durchführbaren konventionellen Rekonstruktionsmethoden hinausgehen. Damit verbunden stand die Frage nach der Berechtigung des erhöhten Rechenaufwandes konkurrierend mit erfolgreich eingesetzten Standardverfahren.

Die Umsetzung dieser Vorgabe startete mit der Auswahl eines geeigneten Algorithmus für die Verarbeitung der Projektionsdaten. Hinsichtlich der sich bietenden Möglichkeiten für Modellerweiterungen konnte gezeigt werden, dass ein statistisches Rekonstruktionsmodell die notwendigen Voraussetzungen erfüllt, um Modellanpassungen hinsichtlich Polychromatizität und additiver Anteile an den Messwerten wie der Streustrahlung einzubringen. Mit dem Vergleich und der Auswahl des Algorithmus sowie dem Test von Regularisierungsmethoden und Abbruchkriterien wurde die Grundlage für Modellerweiterungen gelegt. Neben Vorverarbeitungsansätzen für die Projektionsdaten wurde der Fokus insbesondere auf Modellerweiterungen gelegt, die als Teil der iterativen Rekonstruktion die Vorwärtsprojektion und damit das Simulationsmodell variieren. Es wurden das Geometriemodell der Rekonstruktion genauer betrachtet und in diesem Zusammenhang die Möglichkeiten untersucht, die über eine Fläche gemittelte Messwertaufnahme des Detektors sowie die Ausdehnung des Brennflecks der Röntgenquelle in das Simulationsmodell einzubeziehen. Die vielfache Modellierung von Einzelstrahlen zeigte im Gegensatz zu Faltungsansätzen vornehmlich bei großen Strahldivergenzen bessere Ergebnisse. Einen großen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis zeigte die Modellierung des polychromatischen Quellspektrums, die in zwei unterschiedlichen Ansätzen untersucht und verglichen wurde. Wurde dieses Spektrum in die Berechnung einbezogen, konnte neben der Vermeidung von Rekonstruktionsartefakten auch die erfolgreiche Kombination unterschiedlicher Messungen bei verschiedenen Röntgenspektren erreicht werden. Erstmals konnte auch die Auftrennung von Anteilen der Schwächung als intrinsischer Teil des Rekonstruktionsalgorithmus gezeigt werden. Aus der durch die Einbeziehung der Energieabhängigkeit gewonnenen Zusatzinformation konnte ein Modell der Objektstreustrahlung aufgestellt werden. Werden zusätzlich Abweichungen vom angenommenen Geometriemodell durch einen Selbstkonsistenztest in jedem Iterationsschritt angepasst, sind die stärksten artefakterzeugenden Einflüsse auf die Rekonstruktion ausgeschlossen.

Aus der Vielzahl getesteter Varianten kann hier ein Modell aufgestellt werden, das für die meisten Einsatzfälle die beste Variante darstellt. So bleibt es trotz angepasstem Vorwärtspro-

jektor ein sinnvoller Schritt, eine Vorverarbeitung der Messdaten auch bei modellbasierten Rekonstruktionsverfahren durchzuführen. Das wird insbesondere im Schritt einer Hell- und Dunkelbildkorrektur deutlich, die die Möglichkeit schafft eine projektionsweise konstante ungeschwächte Intensität y_0 anzugeben. Daneben bleibt es hinsichtlich der benötigten Rechenzeit sinnvoll, eine Entfaltung der Messdaten auf Projektionsbasis durchzuführen, um die Punktspreizfunktion der Detektorunschärfe auszugleichen. Die Rekonstruktionsbilder zeigten keine relevanten Unterschiede zwischen der Modellierung der PSF während des Rekonstruktionsprozesses und der Entfaltung der Projektionen. Das für eine Modellierung der Ausdehnung von Brennfleck und Detektorpixelgröße sinnvolle Geometriemodell stellt aber deren Überabtastung unter Berücksichtigung der Intensitätsverteilung des Brennflecks und Einflussfaktoren wie dem Füllfaktor der Detektorpixel dar.

Die energieabhängige Schwächung im Objekt ist durch ein segmentierungsbasiertes Modell besser beschreibbar, als durch die vorgestellte globale Lösung. Dies zeigte sich in den vorgestellten Messergebnissen an einer besseren Artefaktreduktion durch das segmentierungsbasierte Modell, das sowohl die Energieabhängigkeit des Photoeffekts als auch die des Comptoneffekts in die Rechnung einbezieht. Für diese Modellierung des Energieabhängigkeit wird Kenntnis des effektiven, also des durch die Energieabhängigkeit der Detektionswahrscheinlichkeit gewichteten, Röntgenspektrums benötigt. Durch die Anpassung des Spektrums während der Rekonstruktion können Fehler dieser Eingangsgröße ausgeglichen und so bessere Ergebnisse erreicht werden. Das segmentierungsbasierte Modell bietet außerdem die Möglichkeit zu einer Berechnung und Vorwärtsprojektion der Objektstreustrahlung.

Die Bausteine der Kreuzkorrelations-Korrektur bei Geometrieabweichungen und der Regularisierung der Rekonstruktion durch Totalvariationsminimierung stehen unabhängig vom physikalischen Modell, bilden aber wichtige Anteile bei der Vermeidung von Bildartefakten.

Die eingehende Fragestellung nach der Berechtigung des iterativen modellbasierten Ansatzes gegenüber etablierten Methoden lässt sich erst durch eine kritische Betrachtung der Ergebnisse beantworten. Die Stärke des modellbasierten Ansatzes stellt die sichtbare Verbesserung der Bildqualität dar. Diese konnte an Simulationsergebnissen nachgewiesen werden, die sowohl visuell erkennbare als auch an Bildqualitätsmaßen quantifizierbare Verbesserungen aufzeigen. Deutliche Verbesserungen der Bildqualität konnten aber auch an Messdaten nachgewiesen werden.

Demgegenüber stehen aber Verbesserungen der Bildqualität, die ohne iterativen Ansatz allein durch eine Verarbeitung auf Projektionsbasis erreicht werden können, und die in einer schnellen Rekonstruktion durch gefilterte Rückprojektion sehr gute Ergebnisse schaffen. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn die Probleme der Bildgebung hauptsächlich durch die Unschärfe des Detektors oder des Brennflecks bei kleinen Strahldivergenzen hervorgerufen werden. Zudem existieren, wie in Kap. 5 beschrieben, auch Korrekturen der Rekonstruktionsbilder auf Ebene der Bildverarbeitung, ohne genaues Wissen über den physikalischen Zusammenhang und ohne viele einzelne Eingangsparameter, die akzeptable Ergebnisse generieren.

Diese Eingangsparameter - hier insbesondere die Materialdaten, das effektive Röntgenspek-

trum, die projektionsgenaue Geometrie und weitere - konnten aber auch in der modellbasierten Rekonstruktion, wie sie hier vorgestellt wird, reduziert werden. Die Variation des Spektrums und die Bestimmung der Geometrie im Rekonstruktionsprozess sowie der Einsatz von Regularisierung lockern die Genauigkeit, die bei der Angabe der Eingangsparameter eingehalten werden muss.

Doch selbst wenn alle zusätzlichen Parameter mit hoher Genauigkeit bestimmt sind, bleiben Variationsmöglichkeiten, die einen Einsatz der modellbasierten Rekonstruktion ohne genaue Kenntnis der verwendeten Zusammenhänge erschweren. So bleiben beispielsweise für die Brennflecksimulation die Wahl der Abtastpunkte, beim Streumodell der zu wählende Grad der Vereinfachung (Anzahl der Voxelgruppen) oder hinsichtlich der Geometriekorrektur der Einsatz eines Kantenfilters vor der Korrelation die Wahl des Anwenders.

Werden diese Parameter aber hinreichend gut gewählt, können durch den iterativen Ansatz sehr gute Ergebnisse erreicht werden. Durch die mit der iterativen Methode mögliche Regularisierung können Rekonstruktionen errechnet werden, deren Signal-zu-Rauschen-Verhältnis unter Beibehaltung der vollen Ortsauflösung weit über den Ergebnissen einer gefilterten Rückprojektion liegt.

7.2 Offene Fragestellungen und Ausblick

Im Zusammenspiel der einzelnen Modellanteile konnte in dieser Arbeit ein näherungsweise konsistentes Modell des Aufnahmeprozesses in die iterative Rekonstruktion integriert werden. Daneben aber wurden an vielen Stellen Fragen aufgeworfen, die nicht zur Gänze beantwortet sind und weiterer Untersuchungen bedürfen. Im Hinblick des verwendeten Algorithmus konnte gezeigt werden, dass die Verwendung von Subsets größeren Einfluss auf die erreichbare Bildqualität hat als die Verwendung eines statistischen Ansatzes. Gerade aber in Hinblick auf die Größe von Subsets oder deren Variation während des Rekonstruktionsvorgangs bleiben ungeklärte Fragen offen. Eine schnellere Konvergenz durch eine Relaxation der Subsetgröße kann im tatsächlichen Anwendungsfall hinsichtlich der langen Berechnungszeiten und großen Datenmengen sinnvoll sein und bleibt somit Teil weiterer Untersuchungen.

Auch hinsichtlich des Geometriemodells wurde gezeigt, dass eine Brennfleckentfaltung möglich ist und zu verbesserten Ergebnissen führt. Dabei wurde der Brennfleck als Normalverteilung beschrieben und nicht explizit auf die eventuell dreidimensional darstellbare Verteilung des Brennflecks eingegangen. Eine korrekte Simulation der auf das Anodenmaterial einfallenden Elektronen und deren Einfluss auf den Brennfleck, dessen Form und die Energieverteilung der austretenden Photonen bleibt hier unbearbeitet. Gerade hinsichtlich wachsender Rechenkapazität kann eine solche Simulation während des Rekonstruktionsvorgangs sinnvoll werden. Ähnliche Probleme könnten durch Wissen um den exakten Aufbau eines einzelnen Detektionssystems und Modellierung der dabei auftretenden Prozesse beantwortet werden.

Hinsichtlich des energieabhängigen Schwächungsmodells verbleiben insbesondere bei mul-

tispektralen Tomographien Fragen, die die Auftrennung der Absorptionsanteile betreffen. Dabei spielt insbesondere der Einfluss der Referenzenergie auf das Rekonstruktionsergebnis eine Rolle, der nicht vollständig geklärt ist. Auch die Bedeutung von Absorptionskanten in einem Schwächungsmodell, das keine materialspezifischen Energieabhängigkeiten berücksichtigt, ist nicht quantifiziert. Ebenfalls aus der Rechnung ausgeschlossen wurden Umgebungseinflüsse auf die Streustrahlung, die nur durch eine Hellbildkorrektur einbezogen wurden. Die von Objekt ausgehende Streustrahlung trifft als sekundäre Streustrahlung aus der Umgebung auf den Detektor und ihre Rolle bei der Entstehung von Rekonstruktionsartefakten ist weitgehend unklar.

Zuletzt verbleiben Fragestellungen, die weniger das physikalische Modell als die Optimierung der Parameterwahl in jedem Einzelbereich betreffen und gerade in Hinblick auf eine leicht verwendbare Implementierung, deren Entwicklung nicht Teil dieser Arbeit ist, von Bedeutung sind.

Literaturverzeichnis

- [1] BUZUG, T M.: *Einführung in die Computertomographie: mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Springer-Verlag, 2005
- [2] TUY, H K.: An inversion formula for cone-beam reconstruction. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43 (1983), Nr. 3, S. 546–552
- [3] FELDKAMP, LA ; DAVIS, LC ; KRESS, JW: Practical cone-beam algorithm. In: *JOSA A* 1 (1984), Nr. 6, S. 612–619
- [4] DREMEL, K: Datenaufnahme und Rekonstruktion für eine translatorische Variante der Röntgen-Computertomographie. In: *ZfP-Zeitung* 137 (2013), S. 40–45
- [5] SCHÖN, T ; BAUSCHER, I ; FUCHS, T ; HASSLER, U ; HILLER, J ; KASPERL, S ; OECKL, S ; SCHRÖPFER, S ; WEIZEL, V: Dimensionelles Messen mit Helix-Computertomographie. In: *Proc. Annual Meeting of the DGZfP*, 2009, S. 1–2
- [6] EBENSPERGER, T: *Konzeption, Umsetzung und Evaluierung eines linsenlosen Röntgenmikroskopes*, Universität Würzburg, Diss., 2015
- [7] SCHÖN, T ; FUCHS, T ; HANKE, R ; DREMEL, K: A translation-based data acquisition method for computed tomography: Theoretical analysis and simulation study. In: *Medical physics* 40 (2013), Nr. 8, S. 081922
- [8] GIERSCH, J ; WEIDEMANN, A ; ANTON, G: ROSI-An object-oriented and parallel-computing Monte Carlo simulation for X-ray imaging. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 509 (2003), Nr. 1, S. 151–156
- [9] WENIG, P ; KASPERL, S: Examination of the measurement uncertainty on dimensional measurements by X-ray computed tomography. In: *Proceedings of 9th European Conference on Non-Destructive Testing (ECNDT), Berlin, Germany*, 2006
- [10] REHAK, M ; HASSLER, U ; HANKE, R: Acquisition trajectories for X-ray tomosynthesis applied to planar samples. In: *2nd International Symposium on NDT in Aerospace* Bd. 22, 2010, S. 24

- [11] BARTSCHER, M ; SATO, O ; HÄRTIG, F ; NEUSCHAEFER-RUBE, U: Current state of standardization in the field of dimensional computed tomography. In: *Measurement Science and Technology* 25 (2014), Nr. 6
- [12] SCHIELEIN, R ; SCHRÖPFER, S ; KIUNKE, M ; ZABLER, S ; KASPERL, S: Quantitative evaluation of CT Images by means of Shannon Entropy. In: *11th European Conference on Non-Destructive Testing (ECNDT 2014)*, 2014
- [13] WANG, Z ; BOVIK, A C.: A universal image quality index. In: *IEEE signal processing letters* 9 (2002), Nr. 3, S. 81–84
- [14] SHEPP, L A. ; LOGAN, B F.: The Fourier reconstruction of a head section. In: *Nuclear Science, IEEE Transactions on* 21 (1974), Nr. 3, S. 21–43
- [15] RAMACHANDRAN, G N. ; LAKSHMINARAYANAN, A V.: Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 68 (1971), Nr. 9, S. 2236–2240
- [16] LOUIS, A K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Vieweg+Teubner Verlag, Stuttgart, 1989
- [17] FESSLER, JA ; SONKA, M ; FITZPATRICK, JM: Handbook of Medical Imaging. In: *Medical Image Processing and Analysis* (2000)
- [18] GUAN, H ; GORDON, R: A projection access order for speedy convergence of ART (algebraic reconstruction technique): a multilevel scheme for computed tomography. In: *Physics in medicine and biology* 39 (1994), Nr. 11, S. 2005
- [19] MUELLER, K ; YAGEL, R ; CORNHILL, J F.: The weighted-distance scheme: a globally optimizing projection ordering method for ART. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 16 (1997), Nr. 2, S. 223–230
- [20] DITTMANN, J: Tomographische Rekonstruktion aus wenigen Röntgenprojektionen auf Grundlage der Compressed Sensing Theorie (*Masterarbeit*). (2013)
- [21] KÖHLER, T: A projection access scheme for iterative reconstruction based on the golden section. In: *Nuclear Science Symposium Conference Record* Bd. 6, 2004
- [22] TURBELL, H: *Cone-beam reconstruction using filtered backprojection*, Linköping University Electronic Press, Diss., 2001
- [23] SIDDON, R L.: Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array. In: *Medical physics* 12 (1985), Nr. 2, S. 252–255
- [24] JOSEPH, P M.: An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 1 (1982), Nr. 3, S. 192–196

- [25] KOHLER, T ; TURBELL, H ; GRASS, M: Efficient forward projection through discrete data sets using tri-linear interpolation. In: *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2000 IEEE* Bd. 2 IEEE, 2000, S. 15–113
- [26] DE MAN, B ; BASU, S: Distance-driven projection and backprojection. In: *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2002 IEEE* Bd. 3 IEEE, 2002, S. 1477–1480
- [27] KACZMARZ, S: Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. In: *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres* 35 (1937), S. 355–357
- [28] ANDERSEN, A H. ; KAK, A C.: Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm. In: *Ultrasonic imaging* 6 (1984), Nr. 1, S. 81–94
- [29] WANG, G ; JIANG, M: Ordered-subset simultaneous algebraic reconstruction techniques (OS-SART). In: *Journal of X-ray Science and Technology* 12 (2004), Nr. 3, S. 169–177
- [30] KNOLL, G F.: *Radiation detection and measurement*. John Wiley & Sons, 1999
- [31] WHITING, B R.: Signal statistics in x-ray computed tomography. In: *Medical Imaging 2002* International Society for Optics and Photonics, 2002, S. 53–60
- [32] LASIO, G M. ; WHITING, B R. ; WILLIAMSON, J F.: Statistical reconstruction for x-ray computed tomography using energy-integrating detectors. In: *Physics in medicine and biology* 52 (2007), Nr. 8, S. 2247
- [33] LANGE, K ; CARSON, R u. a.: EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. In: *J Comput Assist Tomogr* 8 (1984), Nr. 2, S. 306–16
- [34] LANGE, K ; FESSLER, J A.: Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography. In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 4 (1995), Nr. 10, S. 1430–1438
- [35] HUDSON, H M. ; LARKIN, R S.: Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. In: *IEEE transactions on medical imaging* 13 (1994), Nr. 4, S. 601–609
- [36] DE PIERRO, A R.: A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography. In: *IEEE transactions on medical imaging* 14 (1994), Nr. 1, S. 132–137
- [37] NUYTS, J ; DUPONT, P ; MORTELMANS, L: Iterative reconstruction of transmission sinograms with low signal to noise ratio. In: *2nd IEEE Workshop CMP: can we beat the curse of dimensionality (Prague, Czech Republic, Aug. 28-30, 1996)*, 1997, S. 237–248
- [38] NUYTS, J ; DE MAN, B ; DUPONT, P ; DEFRISE, M ; SUETENS, P ; MORTELMANS, L: Iterative reconstruction for helical CT: a simulation study. In: *Physics in medicine and biology* 43 (1998), Nr. 4, S. 729

- [39] DE MAN, B ; NUYTS, J ; DUPONT, P ; MARCHAL, G ; SUETENS, P: An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for CT. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 20 (2001), Nr. 10, S. 999–1008
- [40] SIDKY, E Y. ; PAN, X: Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization. In: *Physics in medicine and biology* 53 (2008), Nr. 17, S. 4777
- [41] YANG, X ; HOFMANN, R ; DAPP, R ; KAMP, T van d. ; SANTOS ROLO, T dos ; XIAO, X ; MOOSMANN, J ; KASHEF, J ; STOTZKA, R: TV-based conjugate gradient method and discrete L-curve for few-view CT reconstruction of X-ray in vivo data. In: *Optics express* 23 (2015), Nr. 5, S. 5368–5387
- [42] WU, M ; MAIER, A ; XIA, Y ; FAHRIG, R: Auto-tuned path-based iterative reconstruction (aPBIR) for X-ray computed tomography. In: *Proc. 4th Intl. Mtg. on image formation in X-ray CT*, 2016, S. 403–406
- [43] PICHOTKA, M P.: *Iterative CBCT reconstruction-algorithms for a spectroscopic Medipix-Micro-CT*, Universität Freiburg, Diss., 2014
- [44] HOFMANN, C ; KNAUP, M ; KACHELRIESS, M: Effects of ray profile modeling on resolution recovery in clinical CT. In: *Medical physics* 41 (2014), Nr. 2
- [45] NUYTS, J ; DE MAN, B ; FESSLER, J A. ; ZBIJEWSKI, W ; BEEKMAN, F J.: Modelling the physics in the iterative reconstruction for transmission computed tomography. In: *Physics in medicine and biology* 58 (2013), Nr. 12, S. R63
- [46] DÖSSEL, O: Bildgebende Verfahren in der Medizin. In: *Von der Technik zur medizinischen Anwendung: Springer Verlag* (2000)
- [47] SCHARDT, P ; DEURINGER, J ; FREUDENBERGER, J ; HELL, E ; KNÜPFER, W ; MATTERN, D ; SCHILD, M: New x-ray tube performance in computed tomography by introducing the rotating envelope tube technology. In: *Medical physics* 31 (2004), Nr. 9, S. 2699–2706
- [48] LARSSON, D H. ; TAKMAN, P A. ; LUNDSTRÖM, U ; BURVALL, A ; HERTZ, HM: A 24 keV liquid-metal-jet x-ray source for biomedical applications. In: *Review of Scientific Instruments* 82 (2011), Nr. 12
- [49] GEORGII, H: *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015
- [50] VOGEL, H ; GERTHSEN, C: Gerthsen Physik. In: *Gerthsen Physik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Springer-Lehrbuch 1* (1997)
- [51] BAVENDIEK, K ; EWERT, U ; RIEDO, A ; HEIKE, U ; ZSCHERPEL, U: New measurement methods of focal spot size and shape of X-ray tubes in digital radiological applications in comparison to current standards. In: *18th World Conf Nondestruct. Test*. Citeseer, 2012

- [52] SALAMON, M: Implementierung und Vergleich zur Brennfleckmessung von Mikrofokusröntgenröhren (*Master Arbeit*). (2007)
- [53] BOONE, M N. ; VLASSENBROECK, J ; PEETERMANS, S ; VAN LOO, D ; DIERICK, M ; VAN HOOREBEKE, L: Secondary radiation in transmission-type X-ray tubes: simulation, practical issues and solution in the context of X-ray microtomography. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 661 (2012), Nr. 1, S. 7–12
- [54] CEN: Non-destructive testing—Characteristics of focal spots in industrial X-ray systems for use in non-destructive testing—Part 5: Measurement of the effective focal spot size of mini and micro focus X-ray tubes / European Committee for Standardization. 1999 (EN 12543-1:1999 E). – EN
- [55] CEN: Non-destructive testing—Characteristics of focal spots in industrial X-ray systems for use in non-destructive testing—Part 5: Measurement of the effective focal spot size of mini and micro focus X-ray tubes / European Committee for Standardization. 1999 (EN 12543-5:1999 E). – EN
- [56] JOBST, A ; KOSTKA, G ; SCHMITT, P: Neue Methode zur Charakterisierung von Brennflecken kleiner als 5 μm . In: *DACH Jahrestagung* (2004)
- [57] THOMPSON, A ; ATTWOOD, DT ; GULLIKSON, E ; HOWELLS, M ; KORTRIGHT, J ; ROBINSON, A u. a.: X-ray data booklet (2009). In: URL <http://xdb.lbl.gov> (2009)
- [58] KOCKUM, J ; STARFELT, N: Measurement of photonuclear absorption cross sections. In: *Nuclear Instruments and Methods* 5 (1959), Nr. 1, S. 37–43
- [59] SALVAT, F ; FERNÁNDEZ-VAREA, J M. ; SEMPAU, J: PENELOPE-2006: A code system for Monte Carlo simulation of electron and photon transport. In: *Workshop Proceedings, 2006*
- [60] SALVAT, F ; FERNÁNDEZ-VAREA, J M.: Overview of physical interaction models for photon and electron transport used in Monte Carlo codes. In: *Metrologia* 46 (2009), Nr. 2, S. 112
- [61] HUBBELL, J H.: Photon cross sections, attenuation coefficients, and energy absorption coefficients from 10 keV to 100 GeV / DTIC Document. 1969. – Forschungsbericht
- [62] HUBBELL, J H. ; VEIGELE, WM J. ; BRIGGS, EA ; BROWN, RT ; CROMER, DT ; HOWERTON, RJ: Atomic form factors, incoherent scattering functions, and photon scattering cross sections. In: *Journal of physical and chemical reference data* 4 (1975), Nr. 3, S. 471–538
- [63] HANKE, R ; BÖBEL, F: Determination of material flaw size by intensity evaluation of polychromatic X-ray transmission. In: *Ndt & E International* 25 (1992), Nr. 2, S. 87–93

- [64] KRIEGER, H: *Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes*. Springer, 2012
- [65] BERGER, MJ ; HUBBELL, JH ; SELTZER, SM ; CHANG, J ; COURSEY, JS ; SUNKUMAR, R ; ZUCKER, DS ; OLSEN, K: *XCOM: Photon cross section database*. <http://physics.nist.gov/xcom>, 2010
- [66] BETHE, H ; HEITLER, W: On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Bd. 146 The Royal Society, 1934, S. 83–112
- [67] BARÓ, J ; ROTETA, M ; FERNÁNDEZ-VAREA, JM ; SALVAT, F: Analytical cross sections for Monte Carlo simulation of photon transport. In: *Radiation Physics and Chemistry* 44 (1994), Nr. 5, S. 531–552
- [68] GERTH, S: *Stabilität adsorbierter Polymerschichten an Grenzflächen*, Universitätsbibliothek der Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2012
- [69] FREUD, N ; DUVAUCHELLE, P ; PISTRUI-MAXIMEAN, SA ; LÉTANG, J-M ; BABOT, D: Deterministic simulation of first-order scattering in virtual X-ray imaging. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* 222 (2004), Nr. 1, S. 285–300
- [70] KAK, A C. ; SLANEY, M: *Principles of computerized tomographic imaging*. IEEE press, 1988
- [71] ZSCHERPEL, U ; OSTERLOH, K ; EWERT, U ; BERLIN, BAM: Unsharpness characteristics of digital detectors for industrial radiographic imaging. In: *Journal of Nondestructive Testing* 9 (2004), Nr. 5
- [72] YIN, F ; GIGER, M L. ; DOI, K: Measurement of the presampling modulation transfer function of film digitizers using a curve fitting technique. In: *Medical physics* 17 (1990), Nr. 6, S. 962–966
- [73] CLAUSSEN, J A.: Vergleich von Methoden und Algorithmen zur Streustrahlkorrektur in Dual-Energy Röntgenbildern (*Masterarbeit*). (2015)
- [74] LITTLE, K J. ; LA RIVIERE, P J.: An algorithm for modeling non-linear system effects in iterative CT reconstruction. In: *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2012 IEEE* IEEE, 2012, S. 2174–2177
- [75] YU, D F. ; FESSLER, J A. ; FICARO, E P.: Maximum-likelihood transmission image reconstruction for overlapping transmission beams. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 19 (2000), Nr. 11, S. 1094–1105
- [76] ERDOGAN, H ; FESSLER, J A.: Monotonic algorithms for transmission tomography. In: *Biomedical Imaging, 2002. 5th IEEE EMBS International Summer School on IEEE*, 2002, S. 14

- [77] JEFFREYS, Harold ; JEFFREYS, Bertha S.: *Methods of mathematical physics 3rd ed.* Cambridge University Press, 1972
- [78] NUYTS, J: Unconstrained image reconstruction with resolution modelling does not have a unique solution. In: *EJNMMI physics* 1 (2014), Nr. 1, S. 98
- [79] COMET AG (Hrsg.): *MXR-601HP/11.* : COMET AG, 12 2014. (915395.51) . – Ver. 2
- [80] ANNADURAI, S: *Fundamentals of digital image processing.* Pearson Education India, 2007
- [81] FUCHS, T: *Strahlaufhärtungskorrekturen in der Computer-Tomographie,* Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 1998
- [82] KASPERL, S: *Qualitätsverbesserungen durch referenzfreie Artefaktreduzierung und Oberflächennormierung in der industriellen 3D-Computertomographie,* Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2005
- [83] KRUMM, M ; KASPERL, S ; FRANZ, M: Reducing non-linear artifacts of multi-material objects in industrial 3D computed tomography. In: *Ndt & E International* 41 (2008), Nr. 4, S. 242–251
- [84] GLOVER, G H. ; PELC, NJ: An algorithm for the reduction of metal clip artifacts in CT reconstructions. In: *Medical physics* 8 (1981), Nr. 6, S. 799–807
- [85] ELBAKRI, I A. ; FESSLER, J A.: Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 21 (2002), Nr. 2, S. 89–99
- [86] ELBAKRI, I A.: *Statistical reconstruction algorithms for polyenergetic X-ray computed tomography,* The University of Michigan, Diss., 2003
- [87] ELBAKRI, I A. ; FESSLER, Jeffrey A.: Segmentation-free statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography with experimental validation. In: *Physics in medicine and biology* 48 (2003), Nr. 15, S. 2453
- [88] BRABANT, L ; PAUWELS, E ; DIERICK, M ; VAN LOO, D ; BOONE, MA ; VAN HOOBEKE, L: A novel beam hardening correction method requiring no prior knowledge, incorporated in an iterative reconstruction algorithm. In: *NDT & E International* 51 (2012), S. 68–73
- [89] HUBBELL, J H. ; SELTZER, S M.: Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements Z= 1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest / National Inst. of Standards and Technology-PL, Gaithersburg, MD (United States). Ionizing Radiation Div. 1995. – Forschungsbericht

- [90] TUCKER, D M. ; BARNES, G T. ; CHAKRABORTY, D P.: Semiempirical model for generating tungsten target x-ray spectra. In: *Medical physics* 18 (1991), Nr. 2, S. 211–218
- [91] SIDKY, E Y. ; YU, L ; PAN, X ; ZOU, Y ; VANNIER, M: A robust method of x-ray source spectrum estimation from transmission measurements: Demonstrated on computer simulated, scatter-free transmission data. In: *Journal of applied physics* 97 (2005), Nr. 12
- [92] DUAN, X ; WANG, J ; YU, L ; LENG, S ; MCCOLLOUGH, C H.: CT scanner x-ray spectrum estimation from transmission measurements. In: *Medical physics* 38 (2011), Nr. 2, S. 993–997
- [93] BOONE, J M. ; SEIBERT, J A.: An accurate method for computer-generating tungsten anode x-ray spectra from 30 to 140 kV. In: *Medical physics* 24 (1997), Nr. 11, S. 1661–1670
- [94] ALVAREZ, R E. ; MACOVSKI, A: Energy-selective reconstructions in x-ray computerised tomography. In: *Physics in medicine and biology* 21 (1976), Nr. 5, S. 733
- [95] HEINZL, C ; KASTNER, Jo ; GROLLER, E: Surface extraction from multi-material components for metrology using dual energy CT. In: *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on* 13 (2007), Nr. 6, S. 1520–1527
- [96] ZHANG, G ; CHENG, J ; ZHANG, L ; CHEN, Z ; XING, Y: A practical reconstruction method for dual energy computed tomography. In: *Journal of X-ray Science and Technology* 16 (2008), Nr. 2, S. 67–88
- [97] RÜHRNSCHOPF, E ; KLINGENBECK, K: A general framework and review of scatter correction methods in cone beam CT. Part 2: scatter estimation approaches. In: *Medical physics* 38 (2011), Nr. 9, S. 5186–5199
- [98] MEYER, M ; KALENDER, W A. ; KYRIAKOU, Y: A fast and pragmatic approach for scatter correction in flat-detector CT using elliptic modeling and iterative optimization. In: *Physics in medicine and biology* 55 (2009), Nr. 1, S. 99
- [99] KYRIAKOU, Y ; RIEDEL, T ; KALENDER, W A.: Combining deterministic and Monte Carlo calculations for fast estimation of scatter intensities in CT. In: *Physics in medicine and biology* 51 (2006), Nr. 18, S. 4567
- [100] DREMEL, Kilian ; FUCHS, Theobald: Scatter simulation and correction in computed tomography: A reconstruction-integrated approach modelling the forward projection. In: *NDT & E International* 86 (2017), S. 132–139
- [101] HÖLZING, A ; FRIMMEL, H E. ; VOLAND, V ; DREMEL, K ; ZABLER, S ; MINTER, W E L.: The Cover of Mineralium Deposita's Anniversary Volume Uncovered. In: *13th SGA Biennial Meeting 2015* 4 (2015)

- [102] MAYO, S ; MILLER, P ; GAO, D ; SHEFFIELD-PARKER, J: Software image alignment for X-ray microtomography with submicrometre resolution using a SEM-based X-ray microscope. In: *Journal of microscopy* 228 (2007), Nr. 3, S. 257–263
- [103] STAHLHUT, P ; DREMEL, K ; DITTMANN, J ; ENGEL, JM ; ZABLER, S ; HOELZING, A ; HANKE, R: First results on laboratory nano-CT with a needle reflection target and an adapted toolchain. In: *SPIE Optical Engineering+ Applications* International Society for Optics and Photonics, 2016
- [104] KINGSTON, A ; SAKELLARIOU, A ; VARSLLOT, T ; MYERS, G ; SHEPPARD, A: Reliable automatic alignment of tomographic projection data by passive auto-focus. In: *Medical physics* 38 (2011), Nr. 9, S. 4934–4945
- [105] BERGER, M ; MAIER, A ; XIA, Y ; HORNEGGER, J ; FAHRIG, R: Motion Compensated Fan-Beam CT by Enforcing Fourier Properties of the Sinogram in. In: *Proceedings of the third international conference on image formation in x-ray computed tomography*, 2014, S. 329–332
- [106] DREMEL, K ; ALTHOFF, D ; ZABLER, S: CT Alignment Correction in Iterative Reconstruction Methods. In: *4th International Conference on Image Formation in X-Ray Computed Tomography*, 2016
- [107] EHRIG, K ; BARTSCHER, M ; GOEBBELS, J ; M, Schulze ; STAUDE, A: Dimensionelles Messen unter Phasenkontrast mit Synchrotron Computertomographie. In: *DGZfP-Jahrestagung*, 2010
- [108] NEU, TR ; MUKHERJEE, M ; GARCIA-MORENO, F ; BANHART, J: Magnesium and magnesium alloy foams. In: *7th International Conference on Porous Metals and Metallic Foams (MetFoam2011)*, 2011, S. 133
- [109] KIRSCH, S ; BÄR, Frank P. ; FUCHS, T ; KRETZER, C ; RAQUET, M ; SCHOLZ, G ; WAGNER, R ; WAGNER, S ; WOLTERS, M: Das MUSICES-Projekt: Entwicklung eines Standards zur Computertomographie von Musikinstrumenten. In: *KulturGut: aus der Forschung des Germanischen Nationalmuseums* (2016), Nr. 51, S. 13–16

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Randolph Hanke dafür, dass er mir die Möglichkeit zur Promotion gegeben und mich beginnend mit der Anfertigung meiner Diplomarbeit bis zur Fertigstellung dieser Dissertation unterstützt hat.

Ganz besonders möchte ich auch die Unterstützung und Förderung hervorheben, die mir durch Dr. Theobald Fuchs zuteil wurde. Für die fachlichen Diskussionen und wertvollen Tipps möchte ich mich sehr bedanken.

Darüber hinaus gilt mein Dank an dieser Stelle denen, die mich auf freundschaftlichste Weise durch meine Zeit am LRM begleitet haben:

- Britta für ihre liebe Unterstützung bei allen Fragen und ihren nie verlorenen Humor
- Markus für die langen Gespräche und Diskussionen und natürlich seine Hilfe bei allen IT-Fragen
- Richard für die gute Zusammenarbeit und Freundschaft
- Aldi für die herausragende Fähigkeit es nie langweilig werden zu lassen
- Jonas, Philipp, Andi, Christian, Jens, Astrid, Simon und allen Weiteren, die zur familiären Atmosphäre des LRM beigetragen haben, für die tolle Zeit

Darüber hinaus danke ich auch den Kollegen in Fürth - ganz besonders an Tobias und Markus - die mir viel geholfen haben.

Besonders gewichtiger Dank geht aber auch an meine Familie und meine Freunde, deren Unterstützung in jeder Hinsicht zum Gelingen meines Studiums beigetragen und mich bis zur Promotion geführt hat.

Vielen Dank!