Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

Hermann Cohens Infinitesimal-Logik

Ihre philosophische Bedeutung aus der Perspektive der zeitgenössischen Kritik und neuerer mathematischer Diskurse.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Fakultät für Humanwissenschaften

vorgelegt von

Bernd Veit (Dipl.-Math.)

aus Würzburg.

Würzburg, 28. Juni 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Karl-Heinz Lembeck
Zweitgutachter: Prof. Dr. Sebastian Luft

Danksagung

Diese Danksagung möchte ich nutzen, um mich bei den Personen zu bedanken, ohne die dieses Dissertationsprojekt nicht möglich gewesen wäre.

Großen Dank spreche ich meinem Betreuer Professor Dr. Karl-Heinz Lembeck aus, der es mir ermöglichte, in diesem spannenden Grenzgebiet der Wissenschaften ‚Philosophie' und ‚Mathematik' zu promovieren. Er gab mir damit die Freiheit, meinen speziellen Interessen nach- und in ihnen aufzugehen. Zudem danke ich für seine stete, freundliche Hilfsbereitschaft.

Bei meinen lieben Eltern Anni und Paul Veit möchte ich mich dafür bedanken, dass sie mich während meiner akademischen Laufbahn nicht nur finanziell bedingungslos unterstützten.

Zusammenfassung

Den Mittelpunkt des folgenden Diskurses bildet ein Projekt des Neukantianers Hermann Cohen (1842–1918), das dieser unter dem Titel „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ 1883 präsentiert hat. Sein Vorhaben, die Fruchtbarkeit der infinitesimalen Größe in der Mathematik und den Naturwissenschaften auch für die Philosophie, vor allem die Kantische Transzendentalphilosophie, nutzbar zu machen, erwies sich zu damaliger Zeit als wenig populär. Infolge von Schwierigkeiten mit der Interpretation seiner komplizierten Schrift und heftiger Kritik führender Mathematiker blieb sein Werk weitgehend unbeachtet.

Anhand eines Blickes auf den Gang der Wissenschaft der Infinitesimal-Mathematik soll diese Kritik im Folgenden entkräftet und neu bewertet werden. Es zeigt sich hierbei, dass, anders als zu Lebzeiten Cohens, heute gezielt versucht wird, die infinitesimale Größe in die mathematische Lehre zu integrieren – auch wenn dies mit erheblichen, vor allem philosophischen Schwierigkeiten verbunden ist. Hierbei soll auch das wieder erstarkte Interesse an den Infinitesimalien in der Nonstandard-Analysis als Anreiz dienen, die Philosophie Cohens am heutigen Forschungsdiskurs teilhaben zu lassen. In jüngerer Zeit spielt zudem auch in der Smooth Infinitesimal Analysis die Position des Intuitionismus wieder eine Rolle, welche der um Hermann Cohen und Paul Natorp entstandenen „Marburger Schule“ nahesteht.

Auf den folgenden Seiten soll anhand Cohens „Logik der reinen Erkenntnis“ (1902) eine Lesart für eine „Infinitesimal-Logik“ Cohens präsentiert werden, die die Gedanken Cohens zur Infinitesimal-Methode in ein philosophisches System eingliedert. Wie schon in Cohens „Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ soll es auch hier als „unmittelbar nützlich“ erscheinen, „zugleich mit der Durchführung eines systematisch entscheidenden Gedankens seine geschichtliche Entwicklung zu verfolgen.“ [Cohen 1883, Vorwort] Dieser Rückblick auf die bewegte Historie des Infinitesimal-Begriffs soll grob die Entwicklungen hin zur Schaffenszeit Cohens umreißen und sodann als Prüfstein für dessen Ideen gelten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit diskutiert Hermann Cohens 1883 erschienenes Werk „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“, im Folgenden auch „Infinitesimalschrift“ genannt, als eine wegweisende Projektschrift, die mit der Integration der prinzipiellen Voraussetzungen der Infinitesimal-Mathematik einen wichtigen Ausgangspunkt für Cohens nachfolgendes „System der Philosophie“ (1902 – 1914) bildet. Die Überlegungen zu den prinzipiellen Voraussetzungen der Differential- und Integralmathematik werden sich als grundlegend für Cohens philosophisches Wirken erweisen. Dass Cohen sich derart ausgiebig mit der Infinitesimal-Mathematik auseinandersetzt, hat folgenden Grund: Aus seiner Überzeugung heraus, dass „Kants Genius nicht von den sensualististischen Aufklärern, sondern aus dem Studium der Begründer der mathematischen Naturwissenschaft die Anleitung zur transzendentalen Methode empfangen hat“ [Cohen 1883, Vorwort], rückt insbesondere das Faktum der Infinitesimal-Mathematik in den Fokus, da dieses die mathematische Naturwissenschaft begründet bzw. mitbegründet hat. So wie Kant seine Philosophie auf Grund der Vorlage der Prinzipienwissenschaft der Newtonschen Mechanik formte, will Cohen hundert Jahre später diese Kantische Philosophie derart modifizieren, dass sie sich auch mit den Prinzipien der Infinitesimal-Mathematik vereinbaren lässt.

Dieses Projekt entwickelt sich über die frühen Kant-Bücher Cohens, in denen er mit seinen Auslegungen die unter anderem von seinem Marburger Vorgänger Friedrich Albert Lange geforderte Rückbesinnung auf Kant verwirklicht, und führt zu seinen späten Schriften, in denen er seine eigenständige Philosophie präsentiert, die sich scheinbar weit von Kant entfernt. In seiner Auseinandersetzung mit den Prinzipien der Infinitesimal-Methode zeichnen sich bereits einige der zentralen Thesen ab, die Cohen in seinen späteren Werken zu seinem eigenen philosophischen System ausführt, das sich ähnlich umfangreich wie das Kantische gestaltet. Hier soll aber nur auf den erkenntnistheoretischen Teil seines Systems Bezug genommen werden, der im Lichte der „Kritik der reinen Vernunft“ steht: Cohens 1902 erstmals veröffentlichtes Werk über die „Logik der reinen Erkenntnis“, das er als „Grundlegung [s]eines Systems der Philosophie“ sieht [Cohen 1914, IX]. Seine anderen beiden Werke zeigen, dass er sich auch in seiner späten Phase ganz in der Tradition Kants sieht. Diese tragen in Anlehnung an die Kantische Dreiteilung die Titel „Ethik des reinen Willens“ und „Ästhetik des reinen Gefühls“. Für die Diskussion der Unendlichkeitsbegriffe, vor allem im Ausblick auf die aktuelle Mathematik, liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit aber – wie erwähnt – auf den Entwicklungen der Cohenschen „Logik (der reinen Erkenntnis)“.

Ein besonderer Grund, sich heutzutage den Werken Cohens zu widmen, liegt darin, dass die Mathematik sich aktuell nach vielen Jahrzehnten wieder energischer mit Möglichkeiten der *Infinitesimal*-Analysis und nicht mehr nur mit der

Grenzwert-Analysis beschäftigt. Dass sie sich dabei auf den philosophischen Hintergrund stützt, diesen gar fordert und auch die durch Hermann Cohen und Paul Natorp (1854 – 1924) initiierte Marburger Schule positive Erwähnung erhält (vgl. unter anderem [Mormann & Katz 2013], [Bell 2005, 176ff. & 287], [Robinson 1966, 278]), war zu Lebzeiten Cohens und weit darüber hinaus undenkbar. Dies war im Grunde genommen solange der Fall, bis die Mathematiker Detlef Laugwitz und Curt Schmieden 1958 mit ihrem Aufsatz „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung" den Stein dafür ins Rollen brachten [Laugwitz 1958]. Denn lange Zeit wurde der Umgang mit eigentlichen unendlichkleinen Größen, sei es in der Mathematik[1] oder in der Philosophie, durch die vorrangigen Köpfe der Mathematik scharf und häufig auch polemisch, aber teils zu unrecht angegriffen – so auch die in dieser Arbeit behandelten Werke von Hermann Cohen. Dass Cohens Schreibart „manchmal geradezu unlogisch ist" [Frege 1885_1, 325], zählte bei seinen Kritikern noch zu der gemäßigteren Wortwahl. Cohens Theorien wurden auch als „psychologisch" [Cantor 1884, 267], „undue mysticism", „mathematically useless" oder „unnecessary, erroneous, and self-contradictory" [Russell 1903, §§ 303, 309, 324] bezeichnet. Diese negativen Rezensionen lassen sich nun – wie diese Arbeit zeigen soll – durch moderne Strömungen der Mathematik, namentlich die Nonstandard-Analysis und die Smooth Infinitesimal Analysis, stichhaltig entkräften. Diese vernichtenden Kritiken aus einer Zeit, in der unvereinbare mathematisch-philosophische Ansätze zur Diskussion standen, sind sicherlich ein Grund, dass die Schriften Cohens im heutigen philosophischen wie auch mathematischen Wissenschaftsdiskurs nicht ihre verdiente Aufmerksamkeit erfahren, obwohl die Marburger Schule das einzige (dem Autor) bekannte Konzept darstellt, das sich der Problematik des Infinitesimalen, diesem herausragenden Faktum der Wissenschaft, als einem *zentralen* erkenntnistheoretischen annimmt – zumindest in dem Ausmaße, dass ein gesamtphilosophisches System damit verbunden wird.

Gerade zu Lebzeiten Cohens wurde von dem Umgang mit *eigentlichen (aktualen)* unendlichkleinen Größen abgesehen, wie er noch von den Begründern der Differential- und Integral-Mathematik, also von G. W. Leibniz und I. Newton, gepflegt wurde und wie er seit den letzten Jahrzehnten unter anderem durch die Nonstandard-Mathematik wieder Akzeptanz findet. Es scheint, als wäre in dieser Zeit nach Kant und insbesondere Hegel, als der Wunsch einer metaphysikfreien Philosophie groß geworden ist, das Unendliche und vor allem das Infinitesimale zu einem jener gefürchteten metaphysischen Begriffe verkommen, die um jeden Preis vermieden werden müssten. Deswegen musste auch die These Cohens auf

[1] Beispielsweise könnte man auf die sehr kuriose und letztendlich unsachlich geführte Diskussion ([Bernstein 1904_1 & 1904_2], [Geissler 1904_3 & 1904_4], [Klein 1904]) im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1904 um K. Geisslers Aufsätze verweisen, die sich mit einer Begründung der Differential-Mathematik durch unendlichkleine Größen beschäftigen [Geissler 1904_1 & 1904_2].

Widerspruch stoßen, dass die Mathematik und auch ihr basalstes Teilgebiet, die Arithmetik, nur dann ausreichend begründet werden können, wenn die formale Logik durch eine transzendentale Logik ihre Mittel an die Hand bekommt und diese ohne eine *positive* Bestimmung des Unendlichkleinen nicht auskommen kann. Die Position Cohens, der rigoros die Vorherrschaft des Infinitesimalen vertritt und ebenso rigoros seine Philosophie an der Idee der Infinitesimalrechnung wachsen lässt, erscheint auf Grund ihrer Gegenläufigkeit zum Zeitgeist extremistisch und wurde deshalb derart kontrovers diskutiert. Obwohl oder gerade weil diese außergewöhnlichen Ambitionen Cohens die große Schwierigkeit in sich bergen, sowohl der Wissenschaft der Mathematik als auch der der Philosophie gerecht werden zu wollen, führten sie zu einer lebhaften Debatte, aus der dieses Projekt als wenig erfolgreich aber paradoxerweise als sehr einflussreich hervorgeht (vgl. [Giovanelli 2016]). Cohens Werke übten großen Einfluss auf die Marburger Schule aus. Vor allem Natorp und Cassirer sind neben einer Reihe weiterer Marburger Schüler, beispielsweise Gawronsky und Görland, zu nennen, die Prämissen und Hypothesen Cohens in ihren Schriften aufgriffen, verteidigten und weiter zu entwickeln versuchten. Bezeichnend ist hierfür auch, dass im Grundlagenstreit der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert die Marburger Schule keine unbedeutende Rolle spielte, die späten Werke des Initiators der Schule, Cohen, jedoch kaum Erwähnung fanden.

Es sind aber nicht nur die Kritiken seitens der Mathematiker, die das Standing der Werke Cohens so negativ beeinflussen, sondern auch Cohens schwer verständliche Art und Weise der Präsentation. Bezeichnend ist sicherlich der Einwurf Freges, der als kritischer Rezensent „im ungünstigsten Falle durch die Schreibart Cohens entschuldigt zu sein glaub[t], welche sich keineswegs durch Klarheit auszeichnet" [Frege 1885_1, 325]. Selbst von Seiten der Philosophie, auch in späterer Zeit, wurden „Undurchsichtigkeit", „argumentative Haltlosigkeit" und seine „sprachlichstilistischen Unzulänglichkeiten" beklagt [Flach 1968, 23f.]. Die Kritik geht sogar so weit, dass Natorp als Mitbegründer der Marburger Schule und enger Vertrauter Cohens nach eingehender Besprechung mit dem Verfasser seine Rezension zu Hermann Cohens „Logik der reinen Erkenntnis" nicht veröffentlicht, da Cohen seinen „letzten Gedanken nicht genügend wiedergegeben u. nicht adäquat beurteilt" fand. Natorp sah sich „offenbar außer Stande", in Cohens „eigentliche Meinung [...] hineinzudringen" [Cohen 1914, XIXf.].

Ausgehend von dieser Problematik sollen hier in diesem ersten Kapitel einleitend die Grundlagen der hier vorzufindenden Lesart bereitgestellt werden. Dies scheint aus mehreren Gründen vorteilhaft. Unter anderem, weil hier Cohens 1883 erschienene Schrift im Lichte seines fast 20 Jahre später erschienenem „System[s] der Philosophie" interpretiert wird. Aber auch, weil mit Cohen ein dynamisches System der Philosophie vorliegt: Denn „[w]as als eine Grundlage, als eine [...] logische Voraussetzung der Wissenschaft in Anspruch zu nehmen sei, das kann zunächst allein die geschichtliche Einsicht eröffnen." [Cohen 1883, Vorwort] Dies fordert eine ständige Neuorientierung am (aktuellen) Forschungsdiskurs und damit ein unabschließbares Programm. Dass man durch die Prägnanz der Historie vor einer gewissen Kontingenz nicht gefeit ist, zeigt Cohen selbst, indem er sich beispielsweise entgegen der damalig vorrangigen Forschung gegen die formallogische Begründung des Infinitesimalkalküls ausspricht [Cohen 1883, §§ 2–4]. Dass zudem ein schwer überschaubarer Umfang von Forschungsliteratur Aufgabe der Philosophie wird und insbesondere im „Geltendmachen des Infinitesimalbegriffs als eines Grundbegriffs des wissenschaftlichen Bewusstseins ein Eingriff in das Detail der mathematischen Forschung [...] verübt sein könnte" [Cohen 1883, Vorwort], versteht sich von selbst. Trotzdem sieht man bei Cohen einen klaren, rein philosophischen Auftrag, der sich nicht hinter einem Verweis auf die mögliche Kontingenz der Historie verstecken muss. Grund hierfür ist die Ausweisung der Cohenschen transzendentalen Logik, die er 1883 noch mit „Erkenntniskritik" betitelte: Diese ist eine Logik, die Cohen nach dem Vorbild der Infinitesimal-Methode in seinen späteren Schriften zu einer des Ursprungs entwickelt. In dieser Entwicklung erfahren zentrale Begriffe seiner Transzendentalphilosophie eine durchaus andere, aber letztendlich prägnantere Bedeutung.

Diese Entwicklung Cohens „[v]on der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik" kann nach Edel dennoch „als kontinuierlich und weitgehend stringent" eingestuft werden [Edel 2010, 20].[2] Cohen nutzt Kant als Vorlage, interpretiert einzelne Thesen neu und bringt so Schritt für Schritt *seine* Gesamtkonzeption einer Erkenntnistheorie zur Entfaltung.

1.1 Erkenntniskritik

Cohen versucht für den Akt der Gegenstandskonstitution eine letzte methodische Instanz auszuweisen, deren „*Organon*" die Infinitesimal-Mathematik bildet [Cohen 1883, § 92]. Jeder dieser Akte ist ein Erkenntnisvollzug, der sich in einen kontinuierlichen Fluss eines erkennenden Bewusstseins einordnen lässt. Das Resultat der Erkenntnis ist demgemäß keineswegs aus dem Nichts erschienen oder vom Himmel gefallen, sondern folgt einer Absicht und ist schon im Ansatz durch einen vorgegebenen Diskurs bestimmt. Das heißt nichts anderes, als dass jede (wissenschaftliche) Erkenntnis auf ein selbstgegebenes Ziel hinarbeitet und insofern einer vorbestimmten Frage kritisch folgt. Deren Beantwortung stellt das Ziel dar, die eine Lücke bzw. Unzulänglichkeit in besagtem Diskurs schließen soll. Das Erkenntnisresultat ist demnach nur durch die Informationen genährt, die in der Beantwortung, d.h.

[2] Edel beschreibt dort treffend die schrittweise Entwicklung hin zu Cohens „System der Philosophie" und überbrückt mit seiner Analyse die zwischen den beiden grundverschiedenen Theorien Kants und Cohens bestehende Kluft.

im Vollzug bereitgestellt werden. Und vor allem steckt in der Frage schon das *Motiv* – in den paraphrasierenden Worten Freges in etwa so, wie „in der Endknospe eines Zweiges ein Wachstumsbestreben erkennbar ist." [Frege 1885_1, 326]

Vor allem der Begriff des „Wachstumsbestrebens" ist für das Anliegen Cohens passend. Cohen zeigt die Parallelen zur Infinitesimal-Mathematik auf und versucht deren Prinzipien für seine Philosophie geltend zu machen:

Sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Nimmt man den Wert $f(x_0)$ einer zu einer Definitionsmenge $D_f = \{..., x_{-1}, x_0, x_1, ...\}$ entsprechenden Wertemenge W_f, so lässt sich mit der Berücksichtigung von einer noch so kleinen Umgebung von x_0 mit der Differentation das dortige Verhalten, bzw. das „Wachstumsbestreben" der Funktion ermitteln. Diesen Aspekt, dass im Unendlichkleinen auf Grund der Differentation und höheren Differentationen unendlich viele Informationen enthalten sein können, sieht Cohen auch in der Erkenntnis realisiert. Wie bereits erwähnt, ist jede Erkenntnis als ein Vollzug anzusehen. Sie entspringt dem Bewusstsein und entfaltet sich wie jeder Teil des Baumes aus einer anfangs noch nicht erkennbaren unendlich kleinen „Endknospe".

Diese einfache Überlegung zieht für die damalige Zeit jedoch eher ungewöhnliche Konsequenzen für die Mathematik nach sich. Das Infinitesimale wird so zu einer rationalen, der Natur innewohnenden Größe, die jeder Gegenstandskonstitution vorausgeht. Cohen tritt der Vorstellung entgegen, infinitesimale Größen seien rein fiktive, künstliche Produkte einer bloß theoretischen Wissenschaft. Als mathematischen Beistand zitiert er aus dem „Elementarlehrbuch der Theorie der Funktionen oder der Infinitesimalanalysis" von A. A. Cournot: So bildet nämlich „die Infinitesimal-Methode nicht blos einen geistreichen Kunstgriff, sondern sie ist der *natürliche Ausdruck der Entstehungsart physischer Grössen*, welche nach Elementen wachsen, die kleiner sind, als jede endliche Grösse. [...] Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, hat man mit Grund sagen können: dass die unendlichkleinen Grössen *in der Natur* existiren und man könnte bei dieser Vorstellungsart sehr passend die *Function* $f'(x)$ die *erzeugende* oder *ursprüngliche* Function und $f(x)$ die *abgeleitete* Function nennen" ([Cournot 1845, 41f.], [Cohen 1883, § 85]). Diese ungewöhnliche Position hebt sich durch ihren konstruktivistischen Ansatz von den damals populären Vorstellungen zu den Grundlegungen der Mathematik ab. Bei Cohen findet die Leistung der *Synthesis*, d.h. die „freie Schöpfung" [Cohen 1885, 240] des dabei nicht nur naiv konstituierenden, sondern notwendig *kritischen Erkennens*, eine tiefgreifende Bedeutung:

„In dem Unendlichkleinen wird als seinem natürlichen Elemente und *Ursprung* das Endliche gegründet, welches und sofern es wissenschaftlich objectivirt und bestimmt werden kann." [Cohen 1883, § 92] Das Infinitesimale wird bei Cohen zu einer eigenständigen, eigentlichen Größe der Philosophie und so auch der Mathematik.

1.2 Das Infinitesimale und der Begriff des „Ideals“

Diese „eigentlich“ unendliche Größe ist ein Begriff Cantors, der dem potentiellen Unendlichen und dem unveränderlichen absolut Unendlichen gegenübergestellt wird. Mit dem potentiellen Unendlichen, das dem Namen nach negativ bestimmt ist, haben wir einen Unendlichkeitsbegriff vorliegen, der mit der Aristotelischen Position verbunden wird. Mit dem absolut Unendlichen als einer unveränderlichen und oftmals metaphysischen Größe einen Grundlagenbegriff, der der Platonischen Ideenlehre zugeordnet wird. Dagegen ist das eigentlich Unendliche ein positiver (bei Cantor ein mengentheoretischer) Unendlichkeitsbegriff, der Veränderungen insofern zulässt, als dass unterschiedliche Unendlichkeiten akzeptiert werden. Cantor bewies beispielsweise, dass in der Aufzählung der reellen Zahlen eine größere Anzahl von Elementen vorliegt als in der Aufzählung der rationalen oder ganzen Zahlen und somit, dass innerhalb der Welt des Unendlichen sinnvoll über unterschiedliche Größen gesprochen werden kann. Dementsprechend lassen sich logische Modelle bilden, in denen man mit diesen unterschiedlichen Unendlichkeiten ‚rechnen‘ kann. In der Nonstandard- und der Smooth Infinitesimal Analysis, zwei aktuelleren Strömungen der Mathematik, wird nun sogar mit Modellen experimentiert, die unterschiedliche Unendlichkeiten sogar insoweit zulassen, als dass wenn mit ω die ‚Menge‘ der natürlichen Zahlen beschrieben wird, mit $\omega/2$ bspw. die ‚Menge‘ der geraden positiven Zahlen klassifiziert werden kann. Diese Beschreibung des eigentlichen Unendlichen ist eine der aktualen Unendlichkeit, die „Eigentlichkeit“ bringt aber das Anliegen Cohens besser zur Geltung. Cohen lässt die Beschreibung eines antizipierten „Mehr und Mehr von endlichen Elementen“ derart zu, dass mit dem „*Begriff ihrer Zusammenfassung*“ [Cohen 1914, 179] dem Unendlichen und seinen verschiedenen Formen ein eigener bzw. ein eigentlicher Wert zugeschrieben wird. Wie sich zeigen wird, unterscheidet Cohen daher zwischen dem Urteil der Einheit der Mehrheit, das die ‚natürliche‘ Einheit des Zählprozesses vertritt, und dem Urteil der Einheit der Allheit, das unendliche Reihen zum Abschluss bringt. Die Möglichkeit des *unendlichen Urteils*, das sich durch den Begriff der Mehrheit andeutet und eben mit dem Urteil der Einheit der Allheit zu einem Abschluss gebracht wird, wird durch ein weiteres transzendental-logisches Urteil realisiert, das Cohen priorisiert – und an die Idee des Infinitesimals anknüpft (s. Kap. 3).

Während ein Teil seiner Gegner versucht, die Unendlichkeit nur induktiv, durch den ‚natürlichen‘ Zählprozess, d.h. ohne besagten Abschluss zu beschreiben und damit für die Grundlegung eines Axiomensystems der Arithmetik die Unendlichkeit nur in ihrer Potentialität zulassen, ist für Cohen die Setzung dieser eigenständigen aktualen Unendlichkeit unvermeidbar. Zur Begründung verweist er unter anderem auf die Entwicklung in der Mathematikgeschichte. Die alten Griechen, die ihre Zahlenlehre auf dem Begriff der Einheit aufbauten, verbanden damit eine Art Zeichenlehre. In dieser wollten sie den Bruch nicht als eine derartige Einheit gelten lassen, denn dieser sei nur eine Verhältniszahl bzw. -größe, dem die Selbständigkeit und ‚Natürlichkeit' abhanden gekommen sei. Im Verlauf der Mathematikgeschichte wurden zwar die rationalen Zahlen anerkannt, es lag aber mit den irrationalen Zahlen (π, $\sqrt{2}$ etc.) ein ähnliches Problem der Anerkennung vor. Jenen wurde auch fehlende Selbständigkeit und fehlender natürlicher Gegenstandsbezug vorgeworfen: Hierzu sei eine bezeichnende Gegenüberstellung Stifels (1486–1567) zum Begriff der ‚Irrationalzahl' zitiert, stellvertretend könnte sie genauso mit kleinen Modifikationen zum Begriff der ‚Infinitesimalzahl' geführt werden: „Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder fingierte (ficti). Weil nämlich bei Beweisen an geometrischen Figuren die irrationalen Zahlen noch Erfolg haben, wo die rationalen Zahlen uns im Stich lassen [. . .], deshalb werden wir veranlasst und gezwungen zuzugeben, dass sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als real, sicher und feststehend empfinden. Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung [. . .]. [. . .] Es kann nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem die Genauigkeit fehlt und was zu wahren Zahlen kein Verhältnis hat. So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie unter dem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist; ist doch das Verhältnis einer irrationalen Zahl zu einer rationalen nicht weniger unbestimmt als das einer unendlichen zu einer endlichen."[3] Diese Diskussion lässt sich mit fast ähnlichen Argumenten bezüglich der infinten und infinitesimalen Zahlen lesen. Der selbständige Wert der irrationalen Zahlen ist zu Zeiten Cohens schon unumstritten; damals ist unter den Mathematikern sogar die Vorstellung vorherrschend, den Kontinuitätsbegriff durch die Menge aller reellen Zahlen zu erschöpfen. Dieses Phänomen ist unter der (zu Zeiten Cohens unumstrittenen) Kontinuumshypothese bekannt und wird durch den Gedanken getragen, dass mit den reellen Zahlen der Zahlenstrahl komplett ausgezeichnet wird. Wären Infinitesimalzahlen zulässig, so wie es Cohen propagiert, wäre diese Kontinuumshypothese ungültig!

Es muss hier angemerkt werden, dass in dieser Schrift nahezu synonym von infinitesimalen Größen als auch von infinitesimalen Zahlen die Rede sein wird, was auch durch den unterschiedlichen Gebrauch in der Literatur bedingt ist. Von einer infinitesimalen (intensiven) Größe wird vor allem dann die Rede sein, wenn der Bezug auf Kants intensiver Größe im Hintergrund besteht. Der Begriff der „Infinitesimalzahl", wie er auch bei Laugwitz und Schmieden (v.a. [Laugwitz 1958 & 1986]) zu finden ist, kommt vor allem dann ins Spiel, wenn die eigentliche Setzung eines Infinitesimums gegenüber einer bloß in ihrer Potentialität akzeptierten infinitesimalen Größe betont werden soll.

[3]Entnommen aus einer ausführlichen Diskussion zu einem Thema der Philosophie der Mathematik, das sich in Bezug auf das Kontinuum und dem Infinitesimalen mit dem Verschwinden des Größenbegriffs im 19. Jahrhundert beschäftigt, in: [Bedürftig 2014, 228f.]. Dort wird zitiert nach H. Gericke: „Mathematik im Abendland", Berlin-Heidelberg 1990, S. 275

Anhand der Bemerkung Stifels wird deutlich, dass das ,Natürliche', das bei den alten Griechen bloß die positiven ganzen Zahlen waren, nun (schon) der Umgang mit den reellen Zahlen ist und dass der Unendlichkeitsbegriff in jeder auftretenden Form als etwas Metaphysisches oder Naturfremdes und Subjektives verstanden werden konnte bzw. kann. Gegen die Vorstellung, dass die unendlichen Zahlen metaphysische sind, spricht jedoch die immer wieder akzeptierte Selbständigkeit ,neuer' Zahlen (früher die (ir)rationalen Zahlen, jetzt die Unendlichkeiten) und die Vorstellung eines immer wiederkehrenden *bloßen ,Schließens von Lücken in mathematischen Systemen'*, wie es auch schon bei den heutzutage akzeptierten Imaginärzahlen vorliegt. Genauso lässt Cohen übrigens auch den Vorwurf, dies sei eine rein subjektive Setzung, die sich einem ,natürlichen'Gegenstandsbezug widersetzt, nicht gelten.

Wir haben bei Cohen also eine Sichtweise vorliegen, die diese Lücken durch ideelle Begriffe geschlossen sieht. Dieser Idealismus ist aber keiner der absoluten metaphysischen Grundlagen, die einen dogmatischen Ideenhimmel propagieren. Betrachtet man den Zahlenstrahl, so ist jeder neue ,ideelle' Begriff, also die Bruchzahl, dann die reelle und nun die infinitesimale Zahl eine *Denknotwendigkeit* und entlarvt somit einen ,Fehler', eine ,Unzulänglichkeit', ein ,Fragezeichen' des vorhergehenden Modells. Mit den ,neuen' Zahlen werden die ,alten, unzulänglichen' Modelle in ,neue, umfangreichere' eingebettet und bekommen vor allem eine *neue Grundlegung.*

Das bedeutet zum Einen, dass dem Cohenschen Idealismus „alle Gesetze nur Gefüge von Bedingungen [sind], die auf vorausgesetzten Grundlegungen sich erheben." Das heißt, jeder transzendental-logische Ansatz bezieht sich auf ein ,beliebiges' Modell (aber *„jeder Fortschritt de[s]selben [Ansatzes] muß stets von neuem in demselben Ursprung entspringen*" [Cohen 1914, 123]), der – auf der Suche nach seinen Möglichkeitsbedingungen – seine Grundlegung, seinen Grund, seinen Ursprung in einem *hypothetischen* Urteil findet. Die Aufgabe des Philosophen sollte dann sein, diese hypothetischen Ideen in einem philosophischen System zu arrangieren.

Zum Anderen liegt mit dieser Auffassung ein ,aufgeweichter' Idealismus vor, insofern, als dass der Idealismus selbst nur eine letzte hypothetische Idee darstellt, denn: „Indem unaufhörlich der Grund vertieft, also das Niveau der Forschung tiefer gelegt wird, wird die Erkenntnis demgemäß reiner [sic!]; wird daher das Fundament der Wissenschaft gesicherter." Dies ist die Kraft der Idee als Hypothesis. Das ist die *doppelte* Richtung des (Cohenschen) wissenschaftlichen Idealismus: *„nur in der Grundlegung die Grundlage anzuerkennen; in der Grundlegung aber auch der Grundlage sicher und gewiß zu sein.*" [Cohen 1914, 305]

Cohen sieht die Objektivität eines Zahlbegriffs bzw. jedes beliebigen Begriffes demnach in der Selbständigkeit als zulängliches Mittel der Sicherung und der

Erzeugung für den Gegenstand (vgl. [Cohen 1914, 132]). Diese Selbständigkeit für Sicherung und Erzeugung sind bei Cohen die herausragende Bedeutung eines Erkenntnisbegriffs. Genau in dieser Auffassung liegt die Aufgabe der Philosophie und nicht mehr die der Mathematik. Für den Mathematiker ist es im Allgemeinen gleichgültig, ob in seiner Rechnung ein Zahlbegriff ein *eigentlicher* oder ein Verhältnisbegriff ist. Ob man mit dem Verhältnis 1 zu 3 oder mit der Zahl 1/3 oder $0,\overline{3}$ rechnet, hat für das Ergebnis einer Gleichung im Normalfall keine Auswirkung. Genauso sind beispielsweise *alle* Sätze in Standardmodellen über $\mathbb{R}$ im erweiterten Modell der Robinsonschen Nonstandard-Analysis, das infinitesimale und infinite Zahlen zulässt, gültig – und die neuen infinitesimalen und infiniten Zahlen würden sich alle durch Grenzwertformeln umschreiben lassen (s. Kap. 6.2–4). Man könnte dann sofort einwerfen, man würde sich hier nur mit mathematischen Kunstgriffen auseinandersetzen und vorgeschlagene Änderungen wären ohne Belang. Was sich aber ändert, ist die Denkweise – das ist das Entscheidende. Dazu sei ein populäres aktuelles Buch zur Philosophie der Mathematik erwähnt, das die immer noch stattfindende „Leugnung“ des „großen Problems“ im „*Umgang mit der Unendlichkeit*“ [Bedürftig 2014, 3] angeprangert. Es verhandelt seitenweise ein Kapitel über das „Infinitesimale Denken“ mit dem Anliegen, durch die Akzeptanz einer *eigentlichen* unendlich kleinen Größe die Denkweisen *systematisch* zu ändern und zu *vereinfachen* (vgl. [Bedürftig 2014, 404]).

1.3 Das Infinitesimale und die Anschauung

Für die Auseinandersetzung mit dem Anschauungsbegriff sei noch kurz auf die andere Richtung des Subjektivitätsvorwurfes bezüglich der Akzeptanz eigentlicher unendlich kleiner Größen verwiesen. Wären Zahlen bzw. Größen nur Verhältnisse, d.h. nur Vergleichungsmittel, dann wären sie de facto nicht objektiv. Aber nimmt man die Infinitesimalzahl her, dann widerspricht diese dieser Illusion, denn sie kann nicht schlechterdings auf einen Gegenstand bezogen werden. Kein Ding lässt sich als ein Unendlichkleines abzählen. Und genau hierin sieht Cohen die Infinitesimalzahl zur Auszeichnung dieser *eigentlichen* Objektivität erkoren, die in reiner Selbständigkeit Erkenntnis erzeugt und sichert. Objektivität besteht in der Anerkennung ideeller Prinzipien und ihrer *nachträglichen* Übereinstimmung mit den empirischen Daten. Denn – so sagt Cohen – die kopernikanische Wende ist weniger durch das Fernglas, als vielmehr durch das Studium der Kegelschnitte ermöglicht worden, welches ohne Anerkennung und Denken reeller Zahlen (π!) kaum möglich wäre.

Man könnte hier aber immer noch einwerfen, dass die Formen, die die Kegelschnitte ergeben, nur die Möglichkeiten unseres ‚schon vorhandenen‘ Erkenntnisapparats beschreiben, d.h. man könnte sagen: Die Möglichkeit der Kegelschnitte wäre bzw. könne nur in der Anschauung entsprechender kegelschnittförmiger Gegenstände entstanden sein.

Cohen aber distanziert sich von der Einstellung, dass die Frage nach der Realität (des Unendlichen) eine „nach ihrer existentialen Ausprägung in der Welt der sinnlichen Dinge“ sei. [Cohen 1883, § 52] Der Unendlichkeitsbegriff ist, wie wir gesehen haben, eine Idee. So, wie er auf der Idee des Gesetzes der Kontinuität gegründet wird, ist er eben selbst eine Idee, „eine nothwendige Idee, und als solche eine *ewige Wahrheit*“ [Cohen 1883, § 52]. Im selben Sinne gibt es in dieser Welt der sinnlichen Dinge keinen exakten rechten Winkel, oder um es mit einem nicht-mathematischen Begriff zu verdeutlichen: In der Welt der sinnlichen Dinge existiert auch keine absolute Ruhe – diese kann nämlich nur als eine unendlich kleine Geschwindigkeit geltend gemacht werden.

Wenn vorher die Infinitesimalzahl als eine „Lückenschließung“ im Aufbau eines vollständigen, oder besser immer wieder zu vervollständigenden mathematischen Systems vorgestellt wurde, so liegt mit ihr eine Denknotwendigkeit vor. Dadurch, dass diese besondere Zahl keinen Gegenstand zählen soll, ist sie nur von logischem Interesse und ein Prototyp *reiner* Erkenntnis.

Dies soll noch mit einem Rückblick auf Newton und Leibniz verdeutlicht werden. Allen voran liefert die Infinitesimal-Mathematik *die* Methode, um die Mathematik auf Bewegung zu beziehen. Diese nannte Newton anfänglich die Fluxionsmethode. Die Fluxion als Wachstumsgeschwindigkeit ist bestimmt im Unendlichkleinen und geht der Fluente (der Wachstumsgröße) vorausgeht. Die Fluxion legt zu Grunde, dass in jedem Unendlichkleinen, d.h. in jedem ‚relativen Nichts‘ diese Bewegung ihren Ursprung findet. Newton beglaubigt dieses ‚ursprüngliche‘ Urteil aus dem ‚Nichts‘ mit der Null auf seinem $\overset{0}{x}$. Dies ist bei Leibniz (und in der modernen Schreibweise) das dx. Bei Leibniz ist hervorzuheben, dass dieses dx bewusst ein *Infinitesimales*, d.h. ein Unendlichkleines sein musste, was unter seinen Vorgängern stets noch als das *Indivisible*, d.h. das Unteilbare, verhandelt wurde. Indem er den Begriff der Teilbarkeit ausschließt, hat Leibniz gezeigt, dass er seinen Begriff von der (sinnlichen) Empfindung befreit sehen will. Damit gilt nun aber auch, dass dort, wo Cohen den Ursprung der Erkenntnis sieht, nichts sein kann, das dem Prinzip der Kantischen Axiomen der Anschauung genügt. Denn dies besagt: „*Alle Anschauungen sind extensive Größen*.“ Und eine extensive Größe nennt Kant „diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht, und also notwendig vor dieser vorhergeht.“ Es wird bei Cohen demnach „die Wahrnehmung eines Objekts, als Erscheinung,“ nicht „durch dieselbe synthetische Einheit des Mannigfaltigen der gegebenen sinnlichen Anschauung möglich“ gemacht. [Kant KrV, B 202f.] Für Cohen widerspricht diesem Axiom der Anschauung der Infinitesimalbegriff. Das Denken muss demnach der Anschauung vorausgehen. Denn das Infinitesimale wird bei Cohen zum Archimedischen Punkt. Dies versucht er durch diverse Aussagen der Wegweiser in der Wissenschaft der

Mathematik zu bestätigen, so wird beispielsweise Leibniz zitiert: „Die Regeln des Endlichen reussieren im Unendlichkleinen; und die Regeln des Unendlichkleinen reussieren im Endlichen.“ [Cohen 1914, 125f.] Oder auch Nikolaus von Kues: „Die Unendlichkeit selbst nenne ich das Maß von allem.“ [Cohen 1914, 32]

Der Infinitesimal-Begriff ist für Cohen der „Grundbegriff der Zahl und Größe“ [Cohen 1914, 125], da er mit den Lückenschließungen im System den neuesten Begriffen die Möglichkeit fortschrittlicherer, exakterer und auch *reinerer* Erkenntnis zuschreibt. Dieser Begriff ist allein im reinen Denken gegründet und mit ihm ist ein Urteil des Ursprungs verbunden, das das Etwas aus besagtem ‚Nichts‘ zum Vorschein bringt. Bei Cohen werden die Infinitesimalzahlen zum Grund der Erkenntnis – und keine Empfindung und keine Anschauung. Mit dem Unendlichkleinen haben wir einen Begriff vorliegen, dessen Bedeutsamkeit für die wissenschaftliche Erkenntnis unbestreitbar ist. Dieser Zahlbegriff konnte nicht am ‚Ding‘ abgelesen bzw. veranschaulicht werden, sondern er ist eine reine Denknotwendigkeit systematischer Logik. Um es noch zu verdeutlichen: Bei Cohen wird das Denken dadurch zur ersten Instanz, dass ihm, dem Denken, nichts mit „*abschliessende[r] Geltung*“ gegeben sein kann [vgl. Cohen 1883, § 87]. Dem Denken sind allenfalls ‚Fragezeichen‘, ‚Fehler‘, ‚Lücken‘ oder ‚Unzulänglichkeiten‘ gegeben.

Es muss zum Beispiel möglich sein, die Ultraschallortung mancher Fledermausarten zu den Empfindungen zu zählen, obwohl sie dem Menschen nicht als unmittelbare Wahrnehmung gegeben ist. Für die Realisierung der Ultraschallortung kann dem menschlichen Subjekt kein sinnlicher Reiz zu Grunde liegen, zumindest nicht unmittelbar, weswegen die Subjektivität von vornherein fehlt. Dass der Ultraschall deswegen aber nicht in selbem Maße Geltung erfahren darf wie die Schallwellen, die das menschliche Ohr verlautbar macht, wäre kontraintuitiv – schon allein wegen des fließenden Übergangs im Spektrum des Schalls, das sich für gewöhnlich in Infraschall, Hörschall, Ultra- und Hyperschall unterteilt. (Dieses Spektrum ist übrigens nur durch Wellengleichungen, also Differentialrechnung beschreibbar.) Der Ultraschall besitzt nur eine ‚andere Wirklichkeit‘. Er ist genauso Gegenstand *einer* Wissenschaft und auf Grund der Messbarkeit ver*gleich*bar. Der Gegenstand erhält im System Geltung durch seine errechnete Größe. Die systematische Größenbestimmung macht sie zu einem Einzelgegenstand in der Wissenschaft der Akustik. *Nicht im* Sinnlichen, sondern *für* es muss nach Cohen die Realität ge- und begründet werden. Was als das Reale gelten soll und was ‚Wahrheitsgeltung‘ vertreten soll, ist das, *kraft dessen* die Empfindung objektiviert und realisiert wird (vgl. [Cohen 1883, § 104]).

1.4 Transzendentalphilosophie

Für die Marburger Schule bildet trotz der bereits beschriebenen ‚Reformationen‘ der transzendentalphilosophische Ansatz Kants immer noch das Herzstück ihrer neukantianischen Lehre. Jedoch muss der Kantische Begriff der „Transzendentalphilosophie“ nach den bisher vorgestellten Neuerungen eine andere Auslegung erfahren. Des Problems mit der Anschauung als einer unrechtmäßigen, mit „psychologischen Vorstellungen und Zumutungen“ versehenen und unkritischen Vorgabe für das reine Denken hat sich Cohen entledigt (s. Kap. 1.2). Zudem darf für Cohen die Philosophie keinesfalls auf einem spekulativen oder dogmatischen Idealismus gegründet sein, der sich mit einer innerhalb seines Wissenschaftsgebiets getroffenen Vorgabe eines Ideenhimmels selbst schwängert. Die Idee versteht Cohen als Prinzip, die sich im Kontext eines ‚Modells‘ ausbildet (s. Kap. 1.3). Es liegt mit dem ‚Modell‘ demnach ein Tatbestand vor, den die Philosophie „auf die *Voraussetzungen* und *Grundlagen* [hin], die in ihren *Gesetzen* und für dieselben angenommen werden“ [Cohen 1883, § 9], zu untersuchen hat. Abgesehen von der Voraussetzung jenes Tatbestandes liegt damit die Wahrheitslehre der Kantischen transzendentalen Analytik vor, die die reine Erkenntnis in ihre Elemente und Prinzipien zergliedert (vlg. [Kant KrV, B86]). Um die Philosophie als eine objektive Wissenschaft zu präsentieren, die nicht Gefahr läuft, sich mit subjektiven Beschreibungen des Bewusstseins zu rechtfertigen, orientiert sich Cohen – für die Philosophie fast traditionsgemäß – an der Mathematik. Wie im vorherigen Kapitel angedeutet, sind die hyperreellen Zahlen kein Produkt eines übertalentierten Mathematikers, dem es möglich ist, seiner Wissenschaft in dogmatischer Methode neue Annahmen und Axiome zu präsentieren. Die hyperreellen Zahlen drängen sich als begriffliche Lücken eines vorhandenen Systems auf und an der Schließung dieser Lücke wird meist lange Zeit und auf unterschiedlichste Weise geforscht. Diese neuen Voraussetzungen hyperreeller Zahlen gilt es möglichst homogen, das heißt möglichst konsistent und widerspruchsfrei mit bewährten Systemen zu verbinden. Die Axiome der Mathematik fallen dabei keineswegs vom (Platonischen Ideen-)Himmel, sondern „sind auch erst ausgeschieden worden aus dem Inhalt der mathematischen Forschung, als derselbe bereits stattlich sich ausgebaut hatte. Ohne solche latente Grundlagen aber hätte die Mathematik sich nicht entfalten können. So geht es mit allem Erkennen. Die Wissenschaft geht der Logik und deren Ergänzung vorauf. Auf den Thatbestand der Wissenschaft richtet sich die Untersuchung der Erkenntnis, die Prüfung ihres Geltungswerthes und ihrer Rechtsquellen.“ [Cohen 1883, § 7]

Entsprechend formuliert Cohen die Aufgaben der Philosophie; sie soll „in seinem [sc. Kants] Sinne, in dem Geist und Buchstaben des kritischen Systems die *Vernunft in der Wissenschaft [objektivieren]*.“ Für Cohen gilt: Die Kantische „*Kritik der Vernunft ist Kritik der Erkenntniss* oder der Wissenschaft.“ Die Aufgabe der transzendentalen Logik ist demnach die Entdeckung „der Grundlagen des Erkennens, auf welchen die *Wissenschaft* sich aufbaut und von deren Geltung sie abhängt.“ [Cohen 1883, §§ 8–9] Darin besteht die Aufgabe der Philosophie als

‚Grundlagenwissenschaft'. Mit dem Faktum der Wissenschaft als Ausgangspunkt schafft sie sich damit auch selbst die besten Voraussetzungen, Wissenschaftlichkeit zu repräsentieren. Philosophie soll Medizin sein gegen aufkeimende ungerechtfertigte Annahmen und Paradoxien, sie soll ein System zugrunde legen, in dem wir von einem gesunden Wahrheitsanspruch profitieren, der sich eben nicht im ‚*Er*fundenwerden', sondern im ‚*Ge*fundenwerden' äußert.

Eine Frage, die sich hierbei noch stellt, ist die, wann hier von „der Wissenschaft" gesprochen werden kann und demnach, was überhaupt zu „den Wissenschaften" gezählt werden soll. In den verschiedenen Ausführungen Cohens lässt sich dabei eine ‚Öffnung' erkennen: Während Cohen in seiner 1883 erschienen „Infinitesimalschrift" nur die Mathematik und die mathematische Naturwissenschaft heranzieht, gestaltet er dies in der „Logik der reinen Erkenntnis" freier, aber auch undurchsichtiger. Dort soll auch auf die „Geisteswissenschaften Bezug genommen" werden [Cohen 1914, 607]. Auch wird die Logik in ihrer Abgrenzung zu, somit auch in ihrer Abhängigkeit von der Psychologie verhandelt; und auch die Gebiete der Ethik und Ästhetik sollen sich in Cohens philosophischem System wiederfinden. Mit welchen An- und Voraussetzungen das für letztere Disziplinen geschieht, ist von Cohen unzureichend geklärt, für diese Arbeit jedoch nebensächlich. Man muss sich vor Augen führen, dass dieses Cohensche Projekt ein *unendliches* darstellt, insbesondere im Hinblick auf den Verlauf der Wissenschaft. Und dies fordert Cohen auch für die Zeit nach seinen letzten Veröffentlichungen. In dieser Arbeit soll Cohens großartige und ertragreiche Einbeziehung des Infinitesimal-Begriffs im Vordergrund stehen, seine Inbezugnahmen anderer Einzelwissenschaften bedürfen sicherlich einer Revision durch die Erkenntnisse heutiger Zeit, was hier aber nicht zum Thema werden soll. Ich schlage vor, Cohen in Bezug auf die Möglichkeit der (Einzel-)Wissenschaft(en) äußerst („welt-")offen zu lesen, auch wenn das nicht mehr im Sinne Cohens selbst ist.

1.5 Das dynamische System

Cohen stellt sein Projekt als ein unabschließbares vor. Wird hier vom „Tatbestand" oder „Faktum" gesprochen, so ist damit kein abgeschlossener Bestand gemeint, sondern ein „Werdefaktum" [Cohen 1914, 76]. Das heißt, wir haben ein *offenes* System vorliegen insoweit, als dass dasselbe immer wieder auf die Kompatibilität mit den neuesten Errungenschaften der einzelnen Wissenschaften hin geprüft werden muss. Die Philosophie befindet sich mit ihrem Grundlegungsauftrag damit in einem stetigen Dialog mit und insofern in Abhängigkeit von allen Wissenschaften. Cohen betont explizit, dass seine Urteilsaufstellung in der Erkenntnislogik genau wie seine in seinen Werken postulierten Kategorien und Grundsätze ständig geprüft werden müssen und gegebenenfalls, beispielsweise durch die Entstehung neuer Einzelwissenschaften – so, wie es in dem hier zu behandelnden Projekt durch die

Infinitesimal-Mathematik geschieht – aktualisiert und verbessert werden müssen. Denn es muss klar sein, dass „eine solche *Vollständigkeit* nicht eine Fülle, sondern eine offene Wunde der Logik ausmachen würde. Neue Probleme werden neue Voraussetzungen erforderlich machen.“ [Cohen 1914, 396]

Vollzogene und sich vollziehende Erkenntnisarbeit in den Wissenschaften bilden die *Dinge*, deren Möglichkeits*bedingungen* bzw. Ursprung entdeckt und beglaubigt werden sollen. Analog zum unendlichen Fortschreiten der Wissenschaften wird so auch die Suche nach dem Ursprung eine unendliche Aufgabe. Die Unendlichkeit ist dabei auf den angestrebten unaufhörlichen Dialog der Philosophie mit den anderen Wissenschaften bezogen. Neue Forschungsergebnisse der anderen Wissenschaften benötigen eine Prüfung ihrer philosophischen Voraussetzungen. Bewirken diese Ergebnisse eine neue Konstellation der Cohenschen Urteilslogik, so gilt es für die Wissenschaftswelt wiederum, ihre Ergebnisse auf diese Neuerungen bezüglich der Grundlagenwissenschaft der Philosophie hin zu prüfen. Es gibt demnach keine Problemstellungen in der Mathematik, die in Gänze ein bloßes Anliegen der Mathematik darstellen. Umgekehrt gilt für diesen Dialog, dass mit Cohens Grundlegungen nebenbei ein Zugang zur Mathematik mit hyperreellen Zahlen geschaffen wird. Und es gilt ebenso, dass Cohen sich im Hinblick auf die Schlagwörter ‚Konsistenz‘ oder ‚Widerspruchsfreiheit‘ an den Ergebnissen der Mathematik messen lassen muss. Mit dieser ständigen Bewegtheit als Basis der Cohenschen Philosophie erscheint es wiederum sehr attraktiv, sich an der Infinitesimal-Methode zu orientieren, die *das* Mittel ist, um Bewegung zu mathematisieren und um Dynamik in die reine Erkenntnis zu integrieren. Wichtig ist es bei diesem Sachverhalt, den Gedanken der Ursprünglichkeit, den Cohen mit dem Prinzip der Infinitesimal-Methode verbindet, nicht außer Acht zu lassen. Denn genau darin bekommt seine bzw. die Philosophie ihren Anker, um der Beliebigkeit und Kontingenz zu trotzen.

Die Infinitesimal-Methode zeichnet sich eben darin aus, in unendlichkleinen Bereichen, sozusagen im relativen Nichts, Aussagen über die Bewegung (1. Ableitung), die Richtung (2. Ableitung) etc. des Untersuchungsbereiches, als das zugehörige Etwas, in dem das ‚Nichts‘ zum relativen Nichts wird, zu treffen. Wird dieser Sachverhalt der ideellen Mathematik auf die wirkliche Welt übertragen, in der beispielsweise kein vollkommen runder Kreis gefunden werden kann und in der die geometrische Form eines Etwas nur dann durch die Mathematik erschöpfend approximiert werden kann, wenn man eine Funktion unendlichen Grades nutzen könnte, dann ist mit den unendlich vielen Ableitungen, die der unendliche Grad liefert, die Möglichkeit gegeben, „durch den unendlichen Inhalt *den Ursprung desjenigen Begriffs zur Definition zu bringen, der das Problem bildet.* So wird das sogenannte, aber keineswegs so zu verstehende Nichts zum *Operationsmittel*, um das *jedesmalige* Etwas, das in Frage steht, in seinem Ursprung und dadurch erst eigentlich zur Erzeugung und zur Bestimmung zu bringen.“ [Cohen 1914, 89] Der

Ursprung und sein Zusammenhang mit diesem ominösen (relativen) Nichts und sein Wert für das Cohensche Verständnis von transzendentaler Methode wird in den Kapiteln 3.2 bis 3.4 ausführlicher dargestellt. Hier sei der Ursprung als erkenntniskritisches Fundament jedes Gedankens vermerkt, insofern jeder Gedanke auf ein Denken zurückgeht, dessen *ursprüngliche Motivation* das Entstehen des Gedankens schon verantwortet und sich somit die Entstehungsgeschichte der ‚bewegten Vergangenheit' des Etwas aufdecken lässt. Diese Ursprünglichkeit ist somit gleichzeitig eine Denknotwendigkeit, da sie auf jeden Gedanken übertragbar sein muss, sogar auf den des Ursprungs!

Um auf die Vermeidung der Beliebigkeit und Kontingenz zurückzukommen, sei auf den Cohenschen tranzendentalen Idealismus verwiesen: In der Infinitesimal-Methode kann eine Anschauung, die in ihrer „Gegebenheit" sich an einer Unmittelbarkeit der mathematischen Kategorisierung sinnlicher Affiziertheit anlehnt, aus genannten Gründen nicht maßgebend sein, d.h. erst und nur durch die Realisierung im Denken kann der menschlichen Vernunft der Eigenwert zugesprochen werden, den sie verdient. Außer man bemüht sich um eine Glaubenswahrheit und stellt sich diese Wahrheit als eine irgendwie von ‚außen' gegebene vor. Es ist aber das konstruktive Denken, das mit hypothetisch-idealistischen Setzungen alle Gesetze nur als Gefüge von Bedingungen auftreten lässt und diese entstehen aus vorausgesetzten Grundlegungen. Und diese Grundlegungen sind die *einer* Erkenntnis *unserer* Wissenschaft, die zwar rastlos fortschreitet, aber diesem Fortschreiten, dieser Bewegung wird ein Fixpunkt gegeben: „*[J]eder Fortschritt derselben [Bewegung] muß stets von neuem in demselben Ursprung entspringen*" [Cohen 1914, 123]. Der Ursprung ist der Anker und dort sind die Motive der Erkenntnisse auffindbar. Hier hat die Philosophie ein Alleinstellungsmerkmal, das auch auch Robinson, Vorreiter der Nonstandard-Theorien der Mathematik, mit dem bezeichnenden Satz anerkennt: „Number systems, like hair styles, go in and out of fashion – it's underneath that counts." [Robinson 1973, 14]

1.6 Reinheit

Die transzendentale Logik Cohens baut nicht mehr auf der bei Kant noch vorangestellten transzendentalen Ästhetik auf. Den Ursprung bildet das reine Denken. „Reinheit" soll demnach keine Erfahrungsunabhängigkeit bedeuten, sondern eine Erkenntnis erhält dadurch das Prädikat „rein", dass sie der Unwissenschaftlichkeit entledigt wird. D.h., sie muss objektiv sein, was nichts anderes bedeutet, als eine systematische Grundlegung nach Vorbild des Cohenschen wissenschaftlichen Idealismus erfahren zu haben. Die reine, wissenschaftliche Erkenntnis ist somit gleichbedeutend mit einer philosophisch legitimierten Erkenntnis.

Da der Ursprung nur dem reinen Denken angehört und dem Denken nichts gegeben sein kann, wird die Erkenntniskritik als eine *Selbst*kritik ausgezeichnet.

Mit dieser Selbstkritik beginnt die Prima Philosophia: „Die Kritik entdeckt das *Reine* in der Vernunft, insofern sie die *Bedingungen der Gewissheit* entdeckt, auf denen die *Erkenntniss als Wissenschaft* beruht.“ [Cohen 1883, § 8]

Mit den bisherigen Ausführungen sollte demnach auch klar sein, dass der transzendentale Idealismus der Cohenschen Philosophie, also die Möglichkeitsbedingungen neuer hypothetischer Elemente, den Rahmen für den Fortschritt der Wissenschaft bildet. So schreibt Cohen: „Der notwendige Gedanke vom *Fortschritt der Wissenschaft* hat zur notwendigen, nicht etwa bloß Begleitung, sondern *Voraussetzung* den Gedanken vom *Fortschritt der reinen Erkenntnisse*.“ [Cohen 1914, 396]

Und diese Elemente gilt es in ihrem Werdegang auszuzeichnen. Dies ist unumgänglich mit der Frage nach ihrem Ursprung verknüpft und hat zur Folge, dass besagter Rahmen, in dem diese neuen Elemente entstehen konnten, in *systematischer* wie auch *historischer* Hinsicht geprüft werden muss. So hat auch das Problem des Infinitesimal-Begriffs eine lange Tradition, die bis zu den alten Griechen zurückreicht.

2 Beiträge zur Geschichte der Philosophie der Infinitesimal-Mathematik bis Cohen

Nachdem im ersten Kapitel einleitend auf Grundbegriffe der Philosophie Cohens eingegangen wurde, die in direktem Zusammenhang mit der Diskussion rund um die Infinitesimal-Mathematik stehen, soll im zweiten Kapitel ein Vorgeschmack auf die Prägnanz des Infinit(esimal)en im Grenzgebiet der Wissenschaften der (Philosophie der) Mathematik und der Philosophie geliefert werden. Es soll verdeutlicht werden, dass es, wie Cohens Philosophie erklärt, „keine Problemstellungen in der Mathematik [gibt], die in Gänze ein bloßes Anliegen der Mathematik darstellen" und dass auch eine derart exakte Wissenschaft wie die Mathematik vom „Dialog" mit der Philosophie und mit anderen Einzelwissenschaften, wie beispielsweise den Naturwissenschaften oder der Theologie (s.u.), nicht ausgeschlossen werden kann (vgl. Kap. 1.5).

Es geht in diesem Kapitel weniger um die geschichtliche Aufarbeitung, wie sie sich schon in Cohens *Infinitesimalschrift* wiederfindet, als vielmehr darum, dass der Blick auf besagten „Dialog" gelenkt werden soll, wie auch auf seine These, dass die Begründung des Infinitesimalbegriffs „ein Anliegen der Philosophie" [Cohen 1883, §1] war und ist und dass diese Grundlegung mit selbiger *unweigerlich* verbunden ist. Cohen plädiert im Gegensatz zu manchem seiner Kritiker aus der Mathematik dafür, dass die Infinitesimal-Mathematik in ihrer Entstehung kein rein zahlentheoretisches Phänomen darstellt, sondern sich im gesamtwissenschaftlichen Kosmos geradezu aufgedrängt hat (vgl. auch [Cohen 1883, §§34f.]).

Dass die Schwierigkeiten mit der unendlichkleinen Größe, ihrer Grundlegung und ihrer Bedeutung für die systematische Philosophie so alt sind, wie die systematische Philosophie selbst, zeigt der Rückblick auf die alten Griechen.

Für den zweiten Teil finden sich hier Nikolaus von Kues, Galileo Galilei und Blaise Pascal wieder. Sie alle haben ihren unleugbaren Beitrag zur Entdeckung der Infinitesimal-Mathematik geleistet und besitzen einen festen Platz in der Geschichte derselben. Diese drei Wissenschaftler sollen die gesamtwissenschaftliche Forderung nach der Einbeziehung der intensiven Größen alludieren. Von Kues als universalgelehrter Theologe, Galileo Galilei als Naturforscher und Physiker sowie Blaise Pascal als Mathematiker und Philosoph sind drei Beispiele für die unterschiedlichen möglichen Zugänge. Es wird sich aber nie endgültig beweisen lassen, ob die (Entdeckung der) Infinitesimal-Rechnung bloß aus einem mathematischen, vielleicht nur einem zahlentheoretischen Interesse entstanden ist oder, wie Cohen es behauptet, auch mindestens die Geometrie und die Naturwissenschaften einen unbestreitbaren und in der Historie unverzichtbaren Anteil in Anspruch nehmen. Es lässt sich aber aufzeigen, dass das Infinite und das Infinitesimale schon in den Anfängen Teil der Philosophiegeschichte und dann stetige Begleiter sind. Mit den folgenden Beiträgen soll die wissenschaftshistorische Motivation Cohens angedeutet werden, die mit dazu führte, dass die Infinitesimal-Mathematik in Cohens Philosophie diese zentrale Rolle einnimmt und durch den Ursprungsgedanken mit jeder möglichen Wissenschaft verbunden ist (vgl. Kap. 1.5).

2.1 Das antike Griechenland

Insbesondere für das philosophische Interesse an der Infinitesimal-Mathematik bedarf es eines Blicks auf die Entwicklung hin zur Differential- und Integralrechnung. Diese wurden nicht zufälligerweise aus dem Nichts und zudem nahezu zeitgleich von Newton und Leibniz erfunden, sondern ihre Anfangsgründe lassen sich bis zu den alten Griechen zurück verfolgen, deren Einfluss sich über die Entdeckung bis zur heutigen Zeit nachzeichnen lässt.

Prominente Beispiele wie Zenos Paradoxon ‚Achilles und die Schildkröte' dienen nicht nur in den folgenden Kapiteln mehrfach zur anschaulichen Diskussion des Unendlichkeitsbegriffs. Auch die ‚Größenlehre Eudoxos', die ‚indivisiblen' Scheiben als methodische Bestimmung von Kegelvolumina oder auch die archimedische Exhaustionsmethode zur Bestimmung der ‚Quadratur des Kreises' und das in jeder Epoche wiederkehrende ‚Tangentenproblem' beschäftigen sich mit der Vorstellung unendlichkleiner Größen.

Spätestens mit dem Urteil des Ursprungs (vgl. Kap. 3.2) wird sich zeigen, dass es für die Philosophie Cohens nicht unerheblich ist, Erkenntnistheorie stets mit dem Infinitesimal-Begriff in Verbindung bringen zu können. Dass sich diese Verbindungen aufzeigen lassen, soll hier in kurzen Rückblicken dargestellt werden. Diese Rückblicke, also auch der Rückblick zu den alten Griechen, sollen demnach weder geschichtswissenschaftlich noch lückenlos aufgearbeitet werden. Sie sollen beispielhaft einige Problemfelder und den stetigen Einfluss bestimmter Epochen und philosophischer bzw. mathematischer Strömungen beleuchten.

Aber es lohnt nicht nur ein Blick auf die ersten Versuche und die Grenzen für diese frühe Zeit der Infinitesimal-Mathematik, sondern auch ein Blick auf den Wert und Einfluss der Mathematik für und auf die Philosophie. Da die Mathematik durch ihren apodiktischen Charakter unabdingbar in nahezu jeder Epoche der Philosophie zum Tragen kommt, gilt es das richtige Maß an Mathematik für ein philosophisches System zu gewährleisten. Wie man etwa beim absolut Unendlichen im Sinne eines von der Existenz Gottes abhängigen Unendlichen durch das Fehlen von Maß und Grenze einer Konkretisierung und formaler Durchdringung entbehren muss und deshalb einen Werteverlust erfährt, bedeutet fehlendes und unrichtiges Maß nämlich generell einen Wertverlust. Und die Pythagoreische Philosophie ist dafür ein paradigmatisches Beispiel.

2.1.1 Die Pythagoreer

Es ist die Eleganz durch Präzision und die Sicherheit der Mathematik, die die Pythagoreer fasziniert. Sie sehen in den Zahlen die wahren Bausteine der Welt und sprechen den Zahlen von eins bis zehn besondere (Erzeugungs-)Kraft und Bedeutung zu, allen voran der vollkommenen und umfassenden Zehn. Hier wird dem geistigen Vermögen des Zahlenspiels zu voreilig alle Macht sowie der Quantität ein Übermaß an Konstitutionsvermögen zugesprochen; die Enträtselung der Natur endet bei den Pythagoreern in unmethodischer Zahlenmystik, in der beispielsweise die Zahl Eins mit göttlichem Charakter versehen wird, die Zahl Vier die Gerechtigkeit bestimmt oder der Zahl Sieben eine besondere Bedeutung für die menschliche Entwicklung zugesprochen wird, da sich nach sieben Monaten Zahnwuchs, nach 14 Jahren die Pubertät und mit 21 Jahren die Reife einstellt. So vielversprechend das pythagroreische Projekt die Harmonie der Welt in der Ordnung der Zahlenverhältnisse und das kosmologische Geheimnis in einem Urgesetz und nicht wie damals üblich in einem Urstoff (Wasser, Luft etc.) sucht, wird den natürlichen Zahlen eine beliebig anmutende Gewichtung zugesprochen, die sogar auf qualitative Bereiche der Ethik und Psyche anwendbar sein soll. Diese Hypostasierung bedeutet ein unrechtmäßiges Vermischen nicht nur philosophischer und mathematischer Methoden, sondern auch der qualitativen und quantitativen Methoden innerhalb der Philosophie und der Mathematik.

Der ausgezeichnete Wert der Mathematik, den Galilei mit den Worten „Die Mathematik ist das Alphabet, mit dem Gott die Welt geschrieben hat“ [Galilei 1623, Kap. IV] rühmte, soll jedoch nicht geschmälert werden, sondern es steht jedem Unterfangen, Philosophie und Mathematik zu kombinieren, was hier insbesondere für die Infinitesimalmathematik gilt, die Warnung vor, nicht in „ein bedeutungsloses, krampfhaftes Zusammenschweißen der heterogensten Dinge zu Gunsten einer Lieblingsidee“ zu verfallen, wie Odebrecht das pythagoreische Vorhaben treffend umschreibt [Odebrecht 1906, 6].

Die Suche nach Gesetzmäßigkeiten von Wahrnehmung beginnt bei den Pythagoreern vorerst mit der Quantifizierung, d.h. Extensivierung der Empfindungen. Die Extensivität als Spiel der (natürlichen) Zahlen leistet jedoch allein eine Verhältnismäßigkeit der Erkenntniswerte von Tatsachen der Wahrnehmung und wirft die Frage auf, wie die objektiven bzw. realen Grundlagen für diese relationalen Zusammenhänge erbracht werden können. Während Cohen dem bei Kant entlehnten Denkmittel der Realität diese Übersteigung der reinen Anschauung zuspricht, dass sie „alle *Extension* überwindet, [...] indem sie neben dem Grundsatze der extensiven Grösse einen solchen der *intensiven* möglich macht“ [Cohen 1883, § 32], ist für die alten Griechen – denen es an Kenntnis der Prinzipien der Differentialrechnung mangelt – das alleinige Konstitutionsmerkmal im Reich der Zahlen und Größen die Extension, d.h. die Quantität.

So waren für die Pythagoreer die Zahlen „*reale* Kräfte, die auf die Natur und in der Natur wirkten. ‚Zahl' war das Prinzip alles Seienden. Die Struktur der realen Welt war für sie ein Abbild der höheren Welt der Zahlen. Zahlentheorie war Metaphysik." [Bedürftig 2015, 31] Diese Prämisse der Pythagoreer, ein an der Erkenntnis orientiertes Ur*gesetz* an aller Anfang zu stellen, ist ganz im Cohenschen Sinne. Er honoriert deren Philosophie als eine der ersten aufgezeichneten idealistischen, eigenständigen Theorien, deren Paradoxa von Zahl und Sein „die wissenschaftliche Philosophie einleiten" [Cohen 1914, 189].

Die Grenzen dieser Theorie wurden nicht nur durch die Entdeckung von Inkommensurabilitäten, sondern alsbald an Problemen, die sich direkt auf das Unendlich(klein)e bezogen, aufgezeigt. Das prominenteste Beispiel für die Inkommensurabilität – reelle Zahlen werden kommensurabel genannt, wenn sie einen gemeinsamen Teiler und damit ein rationales Verhältnis besitzen – stellt das Verhältnis von Diagonale und Seite des Pentagons dar; für eine Paradoxie des Unendlichen soll hier „Achilles und die Schildkröte", ein nicht eigentliches Beispiel der Mathematik, sondern eines, das Raum, Zeit und Bewegung beinhaltet, näher beleuchtet werden: Es postuliert, dass der schnelle Läufer Achilles eine Schildkröte mit einem anfänglichen Vorsprung nicht einholen kann. Denn sobald Achilles die Anfangsposition der Schildkröte erreicht hat, hat die Schildkröte sich schon abgesetzt, somit einen Vorsprung erlaufen und sobald Achilles diesen Vorsprung einholt, wird sich die Schildkröte wiederum ein Stück abgesetzt haben und so fort im kontinuierlichen, unendlichen Prozess. Wie für das Verhältnis von Seite und Diagonale im Pentagon kann auch hier mit rein quantitativen Mitteln kaum eine befriedigende Antwort erlangt werden, da mit dem unendlichen Prozess noch nicht umgegangen werden kann. Wie es sich zeigen wird, liegt das Problem in der notwendigen Voraussetzung der Kontinuität, eines *qualitativen* Denkgesetzes!

Die Beschäftigung Zenons mit dem Problem der Größen und des Kontinuums findet sich auch auf unterschiedliche Weise bei den beiden bedeutungsvollsten Schulen im antiken Griechenland, der Platons und der seines Schülers Aristoteles, wieder.

2.1.2 Aristoteles

Aristoteles' Ansatz, der die Existenz eines Endresultats für das obige Zenonsche Paradoxon ausschließt und damit Unendlichkeit durch scheinbares Vermeiden einer qualitativen Kategorisierung nur in ihrer Potentialität zulässt, findet eine Antwort auf das Paradoxon, da er eben Nichtkontinuierliches nicht zu Kontinuierlichem übergehen lässt. Damit wäre der Fehler obiger Argumentation in der Unterteilung des kontinuierlichen Rennverlaufs („Zeitkontinuums") in Zeitpunkten. Dass mit unendlich vielen Zeitpunkten der kontinuierliche Rennverlauf beschrieben werden könnte, steht genauso im Widerspruch zur Aristotelischen Auffassung.

Damit ist aber noch keine befriedigende Lösung für das Paradoxon des Unendlichen gefunden, da Aristoteles dieses nicht mathematisch behandelt, weil er mit den begrenzten Mitteln der Extension dieser Problematik ausweichen muss und strikt die Qualität des Kontinuums von Quantitäten trennt und somit aber auch das Prinzip der Infinitesimal-Mathematik aus seiner Philosophie ausschließen muss. Es ist eben „die Zahl lediglich ein praktisches Mittel zur Vergleichung der Dinge“ und damit „könnte ihr in der Tat Objektivität nicht zugesprochen werden.“ [Cohen 1914, 132] Das Unendlichkleine als die Infinitesimalzahl aber soll sich dieser ausschließlichen Bedeutung der Zahl widersetzen und durch seine Idealität diese Art von Paradoxien durchschaubar machen.

Das Unendlichkleine kann bei Aristoteles keiner aktualen Größe entsprechen, ihm kann sich nur durch *potentiell* unendlich viele Bestimmungsmöglichkeiten angenähert werden. Das Unendlichkleine verharrt demnach als Grenzwert. Cohen sieht darin eine „Verlegenheit“, die sich ebenso im Kantischen Anschauungsbegriff vorfinden lässt. Bei Eudoxos Exhaustionsmethode, die in Aristoteles „Metaphysik“ aufgeführt ist und die auch Nikolaus von Kues, einem bedeutenden Wegweiser für Differential- und Integralmathematik, als Orientierung diente, „werden die Verlegenheiten bezüglich des Universalmittels der Anschauung [das in der Definition Kants (s. Kap. 1.3 und KrV B202f.) das (aktual) Unendlichkleine nicht fassen kann (Anm. d. Autors)] an den Special-Problemen fühlbar“, es bleibt aber für diese Verlegenheiten trotzdem festzuhalten, dass sie „zu den Anfängen des Unendlichkleinen“ [Cohen 1883, § 35] führten. Der Clou der Exhaustionsmethode besteht in der Idee, eine krummlinige Figur, z.B. einen Kreis oder eine Parabel, durch geradlinige Figuren möglichst genau zu erschöpfen und durch die meist einfach zu berechnenden Maße von regelmäßigen Polygonen näherungsweise zu berechnen. Archimedes näherte den Flächeninhalt eines Kreises an, indem er den Kreis durch regelmäßige Polygone ein- und umschrieb, um auf diese Weise das Gesamtergebnis abzuschätzen. Je eckenreicher die Polygone, desto genauer konnte das Integral ermittelt werden. Archimedes nutzte dieses Integrationsverfahren und berechnete mittels eines 96-Ecks eine Abschätzung von Pi und auch das bestimmte Integral einer Parabel. In der mittelalterlichen, von der Philosophie Aristoteles’ geprägten Wissenschaft war (bis zur Entdeckung der Infinitesimal-Analysis) dies das Verfahren um ‚Integral‘-Mathematik zu betreiben: Beispielsweise berechnete Ludolph van Ceulen um 1600 mit Hilfe eines 2^{62}-Ecks in 30-jähriger Rechenarbeit π bis auf 35 Stellen genau (vgl. [Wußing 2008, 231]).

Um aber ein endgültiges Flächenmaß und eine allgemein gültige Methode zu entwickeln, reicht die Annäherung dieser Grenzmethode nicht aus. Dies beschreibt einen Mangel der Anschauung, da diese nur als Beziehung des Bewusstseins auf ein Gegebenes fungiert, das einer qualitativen Prüfung des Denkens unzulänglich bleibt. Bei Kants erstem Grundsatz der Axiome der Anschauung („Alle Anschauungen sind extensive Größen" und als eine extensive Größe definiert Kant „diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht, (und also notwendig vor dieser vorhergeht)" [Kant KrV, B 202f.]) wird deutlich, dass das Unendlichkleine keine extensive Größe sein kann, da sie als mathematischer Begriff, der ja mitunter das Reziprok des Unendlichen darstellt, eine ganzheitliche Vorstellung bedeutet, welche nicht mit Teilen derselben in Verbindung gebracht werden kann. Der Begriff des Unendlichen, der dem Unendlichkleinen wie -großen zukommt, verlangt nach einem kontinuierlichen Fortgang, dessen Sukzessivität nicht umfassend erfahrbar und damit formal vollendbar ist. Das Infinite(simale) ist keine klassische Maßgröße, die ihre Tauglichkeit in der Vergleichung beweist, sie ist keine extensive Größe der Anschauung. Sie kann eben deshalb nicht eine anschauliche Vorstellung sein, da es nicht möglich ist, „von einem Punkte alle Teile nach und nach zu erzeugen, und dadurch allererst diese Anschauung zu verzeichnen" [Kant KrV, B203f.].

Diese „Paradoxien in den Anfangsgründen der Grenzwertanalysis [...] als Konflikte zwischen Denken und Anschauung" waren auch für Laugwitz und insbesondere Schmieden Ausgangspunkt für ihre (infinitesimal-)mathematische Forschungen und „so provozierten diese die neue Infinitesimalmathematik" [Laugwitz 1986, 241], die dann für die Nonstandard-Analysis und die Smooth Infinitesimal Analysis, welche die Infinitesimal-Mathematik aus dem Heurismus in die Wohldefiniertheit erhoben, wegweisend waren. An der Gegenüberstellung von quantitativen Grenzmethoden und der qualitativen Infinitesimal-Mathematik wird sich auch die Cohensche unvermeidliche Neuordnung der Kantischen Begriffe Denken, Anschauung und Empfindung festsetzen (s. auch Kapitel 3.1).

Die Grenzmethode, die zwar vielleicht eine anschauliche aber doch unvollständige Vorstellung liefert, beleuchtet die Problemstellung des Infinite(simale)n, das ein Unbegrenztes bedeutet. Jene komplexe Stellung veranlasste Aristoteles dazu, das Unbegrenzte als verabsolutiertes Prinzip zu setzen, denn „von Unbegrenztem aber kann es keinen Anfang geben, denn der wäre ja schon eine Grenze an ihm. Außerdem sei es auch ungeworden und unvergänglich, da es eben doch ein Anfangsgrund sei; denn ein Gewordenes müsse notwendig ein Ende nehmen, und ein Ende gibt es auch bei jedem Verfall. Deshalb – wie wir ja sagen – gibt es offenbar von diesem Anfang keinen Anfang, sondern es scheint Anfang alles übrigen zu sein und alles zu umfassen und sämtliches zu lenken" [Aristoteles 1995, 58]. Während also bei den Pythagoreern die Eins mit göttlichem Charakter ausgezeichnet wurde, tritt bei Aristoteles das Unbegrenzte an diese Stelle. Dieses Unbegrenzte ist aber mit negativen Eigenschaften besetzt, da es auf Grund seiner bloßen Potentialität eine Unvollständigkeit in sich birgt – das Aristotelische Unendliche entbehrt trotz des göttlichen Prinzips jeglicher erkenntnistheoretischer Vollkommenheit. Das Aristotelische Unbegrenzte ist ohne ontologischen Gehalt, denn erst in der Synthesis mit der Grenze entsteht ein Werden, ein Zum-Sein-gelangen. Im Unendlichen liegt das Sein in seiner Potentialität: Bei Aristoteles liegt das Interesse an der Notwendigkeit in der Entwicklung, die auf ein Ergebnis hinstrebt – im Gegensatz zu Platon. Bei Platon, und was noch wichtiger ist, bei Cohen, liegt dieses in den Anfängen des Denkens, in der idealistischen Grundlegung (vgl. [Cohen 1914, 504]).

Cohen kritisiert an Aristoteles „sein inneres logisches *Mißverhältniss zur Mathematik* [...,] [denn man] versteht die Mathematik nicht, wenn man sie in ihrer Reinheit nicht *eo ipso* als [*die* Möglichkeit für (Anm. d. Autors)] das methodische Werkzeug der Naturwissenschaft erkennt." Aristoteles erkennt den hypothetischen Schluss nicht an, weil er darin „Unbestimmtheit wittert" [Cohen 1914, 568] und das daraus resultierende Missverständnis der Platonischen Idee „erklärt sich aus dem *Mißverhältnis des Aristoteles zur Mathematik* und zu der auf der Mathematik begründeten Naturwissenschaft." [Cohen 1914, 20]

2.1.3 Platon

Der hypothetische Schluss und die Ideen Platons sind für Cohen wichtige Ausgangspunkte. Cohens Schrift „Platons Ideenlehre und die Mathematik" ist wie „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte" ein Werk, das sich nicht direkt mit der Kantischen Philosophie befasst, sondern ein Thema in den Vordergrund stellt, das das Cohensche philosophische System prägt und im Lichte der „Logik der reinen Erkenntnis" zu interpretieren ist. Während zweiteres Werk das Infinitesimale zur Konstitution des Realen und Objektivierung der Empfindung in den Mittelpunkt stellt, beschäftigt sich „Platons Ideenlehre und die Mathematik" vor allem mit dem Postulat: „Die Idee ist Hypothesis" – wobei die mathematische Hypothesis und keinesfalls die klassische erfahrungswissenschaftliche Hypothese gemeint ist.

Der idealistische Standpunkt Platons ist nicht nur für Cohen, sondern auch in der Mathematikhistorie des Infinitesimalen bedeutend: Beispielsweise die metaphysisch-idealistische Position Cantors (s. Kap. 4.4) oder Gödel als platonischer Realist (vgl. [Bedürftig 2015, 127f.]), aber auch „the geometry of Nicholas of Cusa, of Kepler, of Galileo, it was largely under the Platonic view of rational transcendentalism, rather than of naturalistic description." [Boyer 1959, 304] Das Beispiel des Unendlich(klein)en ist dabei ein Prototyp für die Diskussion der Idee und wird uns die Attraktivität der Cohenschen *funktionalen* Deutung der Idee, die sie durch die Gleichsetzung mit der Hypothesis erhält, näher bringen.

Die Platonische Position soll hier alsgleich in der Cohenschen *erkenntniskritischen* Lesart bzw. Modifikation vorgestellt werden, die die axiomatische Methode zentriert, die Platon als einer der Ersten philosophisch funktionalisierte. Die Ideen sind in der Platonischen Philosophie den Dingen nicht immanent. Dies findet sich beispielsweise in der Position Cantors wieder. Im Gegensatz dazu sollen bei Cohen die Ideen, insbesondere um den drohenden Chorismos zu vermeiden, nicht als transzendente Entitäten, eben nicht als an und für sich ohne Bezug auf das Denken Seiendes, interpretiert werden – aber auch nicht subjektivistisch-skeptizistisch. Denn die Idee „soll nicht etwa zu einer ‚bloß-regulativen' im Kantischen Sinne depotenziert, sondern vielmehr umgekehrt diese durch den Rekurs auf jene überschritten und erweitert werden." [Edel 2010, 168]

Die Ideen des Guten, Schönen, der Einheit etc. wie die mathematischen Ideen der Verhältnismäßigkeit, der Zahlenmäßigkeit, der Kreisförmigkeit etc. sind bei Platon unabhängige Urbilder, die alles Materielle durchdringen. Die sinnlichen Dinge sind nicht, „sondern werden und vergehen, scheinen und erscheinen. Die Idee hingegen ist, was jene scheinen." Die Ideen geben dem Sinnlichen ihre grundlegende Bestimmung, so sind die Ideen „Gradmesser alles Seienden", „Kriterien alles Wahren" und „Prinzipien alles Erkennens" [Cohen 1878, 342 & 347]. Für Cohen sind die Ideen nicht mehr transzendente, unabhängig von den sinnlichen Dingen existierende Wesenheiten. Die entscheidende Bedeutung erfahren die Ideen dadurch, dass sie und mit ihnen nicht *er*funden, sondern *ge*funden werden und wird. Hier kommt ihr axiomatischer Gehalt ins Spiel und dies soll am Beispiel der Peano-Axiome, die ihre Geltung im Rückgriff auf ihre Voraussetzung erhalten, exemplarisch verdeutlicht werden:

Die Peano-Axiome sind seit 1889 die gängige axiomatische Formalisierung der natürlichen Zahlen in nahezu jeder mathematischen Position (außer beispielsweise bei den Ultrafinitisten) und somit Maß für mathematisch-logische oder mathematisch-philosophische Untersuchungen. Diese Axiome sind durch den jahrhundertelangen Umgang mit den natürlichen Zahlen entstanden und mussten zuvor als Hypothese auf Isomorphie zu dem gewöhnlichen Umgang mit natürlichen Zahlen und auf Konsistenz und Widerspruchsfreiheit geprüft werden. Sie bedienen sich an der erkenntniskritischen Bestimmung der natürlichen Zahlen und dienen rückwirkend als Richtschnur für diese. Axiome sind also nicht nur Grundlegung *für*, sondern vor allem auch *durch* das Feld, auf das sie sich beziehen. Das wiederum zeigt, dass das reine, hypothetische Denken eines vorliegenden Faktums damit immer schon einer latenten Grundlegung bedarf und niemals zu einer Abgeschlossenheit oder gar Absolutheit vordringen kann, sondern in jeglicher Hinsicht offen für Revision bleiben muss.

So stehen auch die Ideen im Lichte einer Wahrheitsgeltung, d.h. eines „Sein[s] der Geltung, welches als Dasein nicht wiederum rückwärts aufgefaßt werden darf" [Cohen 1878, 351], sondern deren Verdienst die *objektive* Geltung in der *Wissenschaft* und damit ein erkenntniskritisches ist. „Die Methode, das Gesuchte als gefunden anzunehmen, um durch Folgerungen und deren Verknüpfungen es wiederzufinden", bringt nicht nur den regressiven Charakter des Beweisens, sondern auch die Cohensche Beschreibung der Hypothesis ins Spiel, die „letzter Anker" sowie

„zureichende Voraussetzung gesetzmäßigen Seins“ [Cohen 1878, 361ff.] ist. Aber reflektiert sich die Hypothese selbst, um ihre ‚Letztbegründung‘, ihren ‚Fixstern‘ am Ideenhimmel zu suchen, gelangen wir in einen unendlichen, d.h. unabschließbaren Prozess: „Das, wovon das Denken seinen Ausgang nimmt [. . .] ist niemals Grundlage im Sinne eines absoluten Anfangs oder metaphysischen Seinsprinzips, sondern immer nur Hypothesis, Voraussetzung des Denkens oder: *Grundlegung*.“ [Edel 2010, 192f.] Diese Grundlegung ist im erkenntnistheoretischen Sinne zu verstehen, insoweit als sogar auf der Ebene mathematischer Theorien, die bewusst von subjektiven Einflüssen absehen und als ideell konstruiertes, vorerst anwendungsfreies Theoriekonstrukt entworfen werden, stets die Aussage in Geltung bleibt: „Jede mathematische Theorie, sei sie auch noch so krude, findet irgendwo ihre Anwendung“. Hier wird also nach hypothetischer Methode ein Erkenntniselement des mathematischen Denkens erkannt, das wiederum als Hypothesis fungiert.

Es gilt, dass „der Geltungscharakter der Idee nicht von ihrer Funktion als Hypothesis abgetrennt werden kann: Das Sein der Geltung hat die Idee nur insofern, als sie als Hypothesis fungiert.“ [Edel 2010, 172 (Anm. 16)] Das heißt, erst in der Bedeutung der Idee als Hypothesis erhält die Idee ihren selbstständigen Gehalt; sie ist funktional als Erkenntnismittel auf das zu Erkennende gerichtet und betrifft die Sphären der Erkenntnis und des Denkens: „*[I]n der Hypothesis durchdringen sich die beiden Motive des Idealismus*.“ [Cohen 1878, 362] „Die *allgemeinste Grundbedingung* für die Organisation der *Welt des Denkbaren* ist die Idee, in der Bestimmung oder gedacht als Hypothesis. Nicht ein spezieller Grundsatz, und sei es auch der ‚oberste Grundsatz‘ selbst, noch weniger aber die Kategorie, die Anschauung oder gar ein gegebenes Mannigfaltiges, sondern die Idee, gedacht als Hypothesis, fungiert als die ‚*erste Möglichkeit* zum Bedingen‘ – wie in aller Theoriebildung, so auch in jener Feststellung objektiver Realität, welche ‚Auflösung der Verschiedenheit der Dinge in Unterschiede der Ideen‘ ist und sich als transzendental-funktionale Geltungsbegründung der in der Wissenschaft gegebenen Erkenntnis vollzieht.“ [Edel, 207] Sie ist aber als deduktives Element der Hingabe keinesfalls etwas, das Voraussetzungen, die die Hypothesis erst erschaffen muss, zu übersteigen sucht. Sie ist ein durch das Denken Bedingendes, das dann zwar dem Vorwurf der Transzendenz entsagt, aber auch der Philosophie Platons im Original nicht mehr entspricht. Da bei Platon die Erkenntnis der Geometrie das ewig Seiende sucht, d.h. „objektive Realität auf dem Wege einer Geltungsanalyse der wissenschaftlichen Erkenntnis“ [Edel, 222] zum Vorschein kommt, so wird die Ideenlehre zur „Antizipation der *Tendenz der transzendentalen Methode*, wenngleich nur dieser Tendenz, zum Behuf der Feststellung der objektiven Realität“ [Cohen 1878, 350] erhoben.

Wie oben schon angedeutet, hat das Unendliche als ideeller Prototyp auch eine besondere Wertigkeit in der philosophischen Diskussion. Lange wurde in der Mathematik versucht, die mit dem kontinuierlichen, unendlichen Fortschreiten und dem gleichzeitigen Wunsch einer extensiven Quantifizierung verbundenen Antinomien und Paradoxien mit der Grenzwertmethode zu berichtigen – die Konzentration lag dabei auf dem Aristotelischen potentiellen Unendlichkeitsbegriff. Es sind aber die der Platonischen Tradition folgenden Mathematiker, die die Ideen von Indivisibilien oder Infinitesimalien entwickeln konnten [vgl. Boyer 1959, 27][4]!

Mit den Cantorschen Ordnungszahlen – ohne geschichtlich vorgreifen zu wollen – erhält das Unendliche zwar eine ‚spezielle' quantitative Note, kann sich in einer ganzheitlichen Bestimmung natürlicherweise aber nicht von seinem qualitativen Charakter lösen, wie schon in entgegengesetzter Weise im rein potentiellen Gewährleisten des Unendlichen auch Aristoteles und seine Nachfolger in diesem prinzipiellen und dadurch unerreichbaren Hafen des Unendlichen keinen Anker setzen können. Durch Aristoteles' „Unbewegten Beweger" erhält das Unendliche einen Absolutheitsanspruch, in welchem es nicht nur Vollkommenheit und höchstes Prinzip wird, sondern sogar Religion verantworten soll. Immer wenn das Unendliche in den Wissenschaften auftaucht, ist diese ideelle Erkenntnisleistung als problematischer Gegenstand in der Argumentation vorhanden, da die Natur nicht versucht, was unmöglich zu leisten ist, wie Aristoteles erkannt hat, sondern das Fassbare der Natur nur durch seine Begrenzung existiert. Nun scheint dies in der Mathematik keine sonderbare Thematik zu sein, da die mathematische Sprache (nur) als ein funktionales Hilfsmittel gilt. Genauso würde kein Mathematiker zum Beispiel auf der Existenz eines exakten rechten Winkels außerhalb unseres Verstandes beharren. Trotzdem begeben wir uns mit der Unendlichkeit und der Infinitesimalrechnung in ein delikates Feld der Mathematik, das schwerlich sich dem engen Verbund ihrer metaphysischen Grundlegung entreißen lässt. In der Terminierung des Unendlichen überträgt sich das Ärgernis der Unmöglichkeit unendlich genauer Messbarkeit, die zuvor nur in der *Anwendung* der mathematischen Gesetze in der Natur unüberwindbar schien, in die reine Mathematik und sogar in die mathematische Logik, wie der Grundlagenstreit Anfang des 20. Jahrhunderts zeigen wird (vgl. Kap. 6.1).

2.2 Wegbereiter der Infinfinitesimal-Methode

Die Geschichte zeigt, dass Philosophie und Mathematik in der Terminierung des Unendlichkeitsbegriffs in stetiger Wechselwirkung stehen. Während im (Cohenschen) philosophischen Ansatz die Prinzipien interessieren, die den verschiedenen

[4] Hier muss die Jahreszahl der Veröffentlichung Boyers „The History Of The Calculus" betont werden, da der Autor ebenda das Infinitesimale zudem auch als „a notion which the modern arithmetization of analysis has had cause to reject" ansieht, so auch „the ‚intensive' infinitely small magnitude which appeared in idealistic philosophy in the nineteenth century" [Boyer 1959, 28], da er in der damaligen mathematischen Tradition der Weierstrassschen Differential- und Integral-Mathematik der Epsilontik steht. Erst neun Jahre später erfährt die Infinitesimal-Mathematik durch Laugwitz und Schmieden (vgl. [Laugwitz 1958] & Kap. 6.2) wieder eine Rehabilitation.

Zugängen zur Infinitesimal-Methode zu Grunde liegen, und diese Prinzipien auf Gegenstandsbezogenheit und -konstituierung in Bezug auf Vorraussetzung und Geltung des in der Wissenschaft vorgefundenen Sachverhalts untersucht werden, scheint das mathematische Interesse an der Entwicklung exakter(er) Algorithmen dazu nahezu disjunkt zu sein. Es sind aber gerade die prinzipiellen Voraussetzungen der Differentialmathematik, die das Wechselspiel zwischen Mathematik und Philosophie befeuern. Deshalb musste Cohen, der sich in seiner „Infinitesimalschrift" vehement und mit – wie sich zeigen wird – guten Gründen gegen eine rein formallogische Grundlegung der Differentialmathematik stellt, große Kritik von Seiten führender Wissenschaftler in der mathematischen Forschung, die dem Logizismus und Formalismus zugeordnet werden, einstecken. Beide Parteien, die Marburger Schule mit Cohen und die Riege der Mathematiker um Hilbert, Frege, Russell und Cantor, standen aber vor dem gleichen Problem: dem Problem einer stichhaltigen Grundlegung der Differential- und Integralmathematik.

In Bezug auf die Anliegen Cohens gilt, dass zwar Leibniz einen erfolgreichen Umgang mit infinitesimalen Größen aufzeigte, weswegen noch heute die Differential- und Integralmathematik unter dem Titel der ‚Infinitesimal-Mathematik' bekannt ist, jedoch fehlte ein *umfassendes, grundlegendes* Konzept. Erst durch die Algebra war es möglich, ein Zahlensystem zu finden, das die inifnitesimalen Größen beinhaltet. Dieses Konzept wurde schon von Leibniz angedacht, von Hahn 1907 [vgl. Hahn 1907] erstmals verwirklicht (da die Anwendung auf die Analysis nicht möglich schien, kam diese Arbeit leider nicht zu ihrer verdienten Würdigung) und mit Laugwitz, Schmieden und Robinson durch die Nonstandard-Mathematik in die mathematischen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschungen eingeführt. Auch im Grundlagenstreit sorgte die Thematik der Grundlegung der Mathematik des Unendlichen für Zündstoff und zeigte, dass die Mathematik ohne Philosophie keinen fruchtbaren Boden findet, genauso wie die Philosophie – jedenfalls nach Auffassung der Neukantianer – ohne die Wissenschaften nur karg und aufgabenlos verödet.

Jenes „Wechselspiel" lässt sich bei den vielen Vertretern, die Beiträge zur Entdeckung der Infinitesimal-Methode lieferten, zweifellos auffinden. Sei es im alten Greichenland, in der vorgriechischen Wissenschaft der Ägypter oder Babylonier (vgl. [Boyer 1959, 14ff.]) oder den mittelalterlichen Vertretern. Die Wissenschaft des Unendlichen war im Wesen auch stets mit Religion verbunden, sei es bei den frühen Kirchvätern Origenes (184/185–253/254) oder Augustinus (354–430), genauso wie in der Spätscholastik beispielsweise bei Albertus Magnus (1200–1280). Die Unendlichkeit wurde oftmals als ein Attribut Gottes interpretiert oder musste (ob der Finanzierung durch die Glaubensinstitutionen) zumindest in Einklang mit der Religion gebracht werden können. Auf jeden Fall durfte kein ideeller Begriff entstehen, der in Konkurrenz zu den Gottesvorstellungen auftreten würde, wodurch die Aristotelische Haltung große Bestätigung finden konnte (vgl. [Cohn 1896, Kap. 2]).

Mit demselben Hintergrund und auch durch den Einfluss der Aristotelischen Lehre fanden religiöse Diskussionen im Judentum durch Ibn-Gabirol (1021/22–1070) und später Maimonides (um 1136–1204) statt. Auch in der Arabischen Welt wurden Ewigkeit, Grenzenlosigkeit und Materialität des Unendlichen durch Aristoteliker wie Ibn-Sina (um 980–1037) und deren Gegner aus den Schulen der Mutakallimum diskutiert. Die Gegner, Gazali (1058–1111) sei zu nennen, waren Skeptizisten, die sich nicht nur gegen aristotelische Auffassungen, sondern generell gegen die Philosophie wandten, da sie ihre Religion durch diese Grundlagenwissenschaft gefährdet sahen (vgl. [Cohn 1986, 69ff.] oder [Bell 2005, Kap. 1.2]).

Mit dem Ende des Mittelalters und ab der Frühen Neuzeit kann man allmählich von einer Antizipation der Differential- und Integralrechnung sprechen. Dass der Umgang mit der Unendlichkeit meist mit philosophischen und metaphysischen Begründungen einhergegangen ist, soll an den folgenden drei Philosophen, Naturwissenschaftlern und Mathematikern verdeutlicht werden, die entscheidenden Einfluss auf Newton beziehungsweise dessen Lehrer Barrow und auf Leibniz hatten: Nikolaus von Kues (1401 – 1461), Galileo Galilei (1564 – 1642) und Blaise Pascal (1623 – 1662) haben nicht nur die Welt der Mathematik beeinflusst, sondern wirken auch in den Werken Hermann Cohens mehr oder weniger maßgebend nach. Obwohl noch einige exzellente Konzepte von wegweisenden Wissenschaftlern wie beispielsweise Simon Stevin (1548–1620), Johann Kepler (1571–1630), Bonaventura Cavalieri (1598–1647), René Descartes (1596–1650) oder Evangelista Torricelli (1608–1647) vorgestellt werden müssten (hierzu sei auf [Boyer 1959, Kap. 4] oder [Bell 2005, Kap. 2] verwiesen), um die Stationen der Begriffsentwicklungen von der Differential- und Integral-Mathematik ausreichend aufzuzeigen, soll hier nur auf die drei genannten Vorreiter eingegangen werden, um das eigentliche Ziel der vorliegenden Arbeit nicht aus den Augen zu verlieren.

2.2.1 Nikolaus von Kues

Während Nikolaus von Kues in Cohens „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ nur programmatisch für eine ausstehende „wichtige“ Untersuchung erwähnt wird, die sich damit beschäftigen soll, „wie das theologische Interesse am Unendlichen mit diesem Grundbegriff [sc. des Unendlichkleinen] der wissenschaftlichen Renaissance sich verbündet, um [...] die Discussion des Infinitesimalen zu fördern“ [Cohen 1883, § 35 (Anm. 3)], kommt ihm in der „Logik der reinen Erkenntnis“ der Titel des „Begründer[s] der deutschen Philosophie“ [Cohen 1914, 32] zu. Cohen behauptet, dessen Platonischer Weg zur Mathematik als Angelpunkt für Gewissheit in der Erkenntnis löse die mittelalterliche, Aristotelisch geprägte Scholastik ab und leite die Renaissance ein.

Er fokussiert sich dabei auf die Cusanischen Kernsätze: „Wir haben nichts Gewisses als unsere Mathematik“ und: „*Die Unendlichkeit selbst nenne ich das Maß von allem.*“ [Cohen 1914, 32]. Mit jenen wird der Unendlichkeit ein ideelles Prinzip zugeordnet, mit dem das Unendliche konkretes Element der Mathematik sowie Mittel und Instrument für das Endliche wird. Mit diesem ideellen Prinzip wird das Denken wieder zum ontolgischen Ursprung: „Das Sein ruht [nämlich] nicht in sich selbst; sondern das Denken erst lässt es entstehen. Nicht was ist, ist das Sein, sondern was war, macht das Sein aus. Nicht auf die Vergangenheit etwa wird dadurch das Sein zurückversetzt; sondern auf einen *Ursprung seiner selbst* soll es verwiesen werden.“ [Cohen 1914, 31] Dieser Abschied von der Aristotelischen Philosophie hin zum Platonischen Idealismus erlaubt dem Mathematiker Nikolaus von Kues, „a champion of the actual infinite“, ein mathematisches Konzept mit einer unendlichen Größe zu entwickeln, die er als ‚nicht vergrößerbar‘ definiert, und mit einem entsprechenden ‚nicht verkleinerbaren‘ Infintesimum [Bell 2005, 61f.]. Cohen geht sogar noch weiter: „Der mathematische Begriff des *Unendlichen* wird ihm [sc. von Kues] der Angelpunkt wissenschaftlicher Erkenntnis. So geht von ihm der zwar in seinen Kanälen verschüttete, nichtsdestoweniger aber sicherlich gerade Weg zu *Galilei* und *Leibniz*.“ [Cohen 1914, 32]

Nikolaus von Kues, der wiederum vor allem von Oresme (um 1326–1383) und Richard Suiseth („the Calculator“, bl. 1340–1354) beeinflusst wurde, nahm auf viele nachfolgende Mathematiker und Philosophen Einfluss – in Bezug auf die Infinitesimal-Mathematik sind insbesondere J. Kepler und Galileo Galilei zu nennen.

2.2.2 Galileo Galilei

Bei Galilei erhält die prinzipielle Bedeutung des Unendlichen eine wichtige Erweiterung, da er der Einheit durch die Kontinuität des Bewusstseins Verwandschaft mit der Unendlichkeit bescheinigt. Die Einheit wird bei Galilei, sofern sie die Unendlichkeit in sich enthält, von der diskreten zur „*continuirliche[n] Bestimmtheit*“, in der „das *Bewusstsein des Denkens* sich bethätigt, im Unterschiede von dem der Empfindung, und selbst der Anschauung.“ [Cohen 1883, § 44] Seine Methodik löst das sinnlich Gegebene als ein kontinuierlich Gegebenes in seine unendlichkleinen Elemente auf, die er als ‚*non quantas*‘ oder ‚Atome‘ bezeichnet. Diese Qualität der Unendlichkeit und der Kontinuität erlaubt es uns, eine sinnliche Gegebenheit zu realisieren. Es zeigt sich auch an den Galileischen Gesetzen der Trägheit, dass „der infinitesimale Gedanke sich schöpferisch erwiesen hat“. Es geht auf die „*Consequenz der Continuität*“ zurück, denn die „*Beharrung* in Richtung und Geschwindigkeit ist daher nicht als ‚Naturthatsache‘ zu bezeichnen“, sie ist auch „keine ‚Denknotwendigkeit‘ im Sinne der Aristotelischen Metaphysik; aber sie ist eine *Erkenntniss-Bedingung* im Sinne derjenigen *Grundlagen der mathe-*

matischen Naturwissenschaft, deren Fundamentirung durch *Newton* vollzogen und durch *Kant* systematisirt – von *Galilei* aber begonnen wurde.“ Noch deutlicher wird der „*schöpferische*“ Grundgedanke des Unendlichkleinen bei den Galileischen Fallgesetzen: Für die Beschleunigung, die sich ohne die Infinitesimalien nicht erfassen lässt, verweist Galilei auf die Intension – als Gegensatz zur Extension – als Motiv der Kraft, die eben nicht sinnlich erfasst werden kann, sondern das sinnlich Gegebene zur Realität bringt: Bei Galilei wird der *Gedanke* des Natur*gesetzes* anstelle von Naturnotwendigkeit gesetzt [Cohen 1883, §§ 47–48].

2.2.3 Blaise Pascal

Zuletzt soll noch auf Blaise Pascal – stellvertretend für eine Riege französischer Mathematiker wie Roberval, Descartes oder Fermat – eingegangen werden. Denn: „Blaise Pascal in a sense represents the highest development of the method of infinitesimals carried out under the traditions of classical geometry“ – und er ließ Leibniz mit seiner Entdeckung „ein Licht aufgehen“ [Boyer 1959, 147 & 203]. Pascal brachte für die Integration von x^n einen zahlentheoretischen Ansatz durch das Pascalsche Dreieck ins Spiel, um den jeweiligen Summengliedern die entsprechenden x-Koeffizienten zuzuordnen (s. [Boyer 1959, 147-153]). „Ein nachgelassenes Manuskript Pascals enthielt das charakteristische Dreieck, und Leibniz, der es einsehen konnte, sah die Verallgemeinerungsfähigkeit“ [Laugwitz 1986, 202].

Erwähnenswert ist zudem, dass Pascal in „De l’esprit géométrique“ für jeden Zahlenraum jedem Unendlichgroßen ein reziprokes Unendlichkleines zusprach. Jeder großen Zahl, bspw. 100000, korrespondiert eine kleine, demnach 1/100000, sodass die Vorstellung von unbestimmt großen Zahlen die von unbestimmt kleinen Zahlen impliziert und umgekehrt. [vgl. Boyer 1959, 151] Dieser Forderung liegt ein Verständnis von Kontinuität zu Grunde, das eher der Leibnizschen denn der Newtonschen Auffassung entspricht, wie sich in den Kapiteln 4.1 und 4.2 zeigen wird.

Natürlich ist diese arithmetische Annäherung an die Infinitesimalrechnung nur einer von vielen möglichen Ansätzen. Dies zeigt sich deutlich bei Pascal. Seine Vielseitigkeit der infintesimal-mathematischen Forschungen soll hier kurz erwähnt werden, denn nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung hantierte Pascal mit unendlichkleinen Größen. Zudem stellt er in seinen Schriften über die Zykloide auch die geometrischen Bestimmungen in den Vordergrund. Es verdeutlicht aber dennoch, dass das Zusammenwirken von Geometrie, Zahlenlehre und Mechanik „in der *Mechanik*“ nicht zwingend nötig war, „um die Entdeckung des Differentials zu zeitigen“, wie es Cohen 1883 [Cohen 1883, § 34] im Gegensatz zur Logik der reinen Erkenntnis noch fordert. Es zeigt vielmehr die Notwendigkeit dieser qualitativen Einheit für *jede* Wissenschaft und verschärft die Cohensche Würdigung der Erkenntnisleistung des reinen Denkens ungemein.

Dieses reine, mathematische Denken fungiert bei den drei aufgeführten Wegbereiteren und auch bei beiden Entdeckern der Infinitesimal-Rechnung in einem philosophisch begründetem (naturwissenschaftlichen) System. Die Zahlbegriffe spielen eine gewichtige Rolle - in den Worten Leibniz': „Sed nihil est quod numerum non patiatur. Itaque numerus quasi figura quaedam Meatphysica est, et Arithmetica est quaedam Statica universi, qua rerum potentiae explorantur.[5]" [Leibniz 1840, 162] Diese funktionalen Begriffe treten in der Geschichte der Mathematik und der Philosophie am kraftvollsten in Erscheinung, wenn sie dabei als systematische auftreten.

Cohen legt großen Wert auf die Anerkennung des philosophisch-systematischen Ansatzes der Gelehrten Leibniz und Newton; es sei „ein beredtes Zeugniss für den erkenntnisskritischen Grund des Differentialbegriffs, dass derselbe im Zusammenhange eines philosophischen *Systems* entdeckt worden ist." [Cohen 1883, § 50] Ausgehend davon erklärt er seine primäre Aufgabe, die darin besteht, den Infinitesimalbegriff als einen Grundbegriff des wissenschaftlichen Bewusstseins geltend zu machen.

[5]Dagegen gibt es nichts, dass der Zahl nicht unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt, und die Arithmetik eine Art Statik des Universums, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen. (Übersetzungen sämtlicher fremdsprachiger Zitate in Hermann Cohens „Infinitesimalschrift" finden sich in der 2013 erschienen Ausgabe im Turia u. Kant Verlag, Wien)

3 Hermann Cohens Infinitesimal-Logik

Eine Vielzahl von Vorreitern bereitete den Boden für die großartigen Wissenschaftler Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und Isaac Newton (1643 – 1727), die nahezu gleichzeitig und wohl unabhängig voneinander die Infinitesimalrechnung entwickelten, die die Differential- und Integral-Mathematik als wichtigste Zweige der Analysis ermöglichten. Damit läuteten sie eine Wende in den Naturwissenschaften ein: Es war nun die Objektivierung von Empfindungen möglich. Diese sind nun nicht mehr nur auf die psycho-physikalische Ebene bezogen, sondern die Disziplinierung des Unendlichen durch das Endliche erlaubte Vorstellungen, die individuellem Empfinden zugerechnet wurden, durch exakte mathematische Methoden, die mit diesen ‚veränderlichen' Größen umgehen konnten, greifbar zu machen. Die Natur konnte durch diese neue Methodik genauer und gründlicher interpretiert werden. Neben dem Beispiel der Akustik (s. Kap. 1.3) könnte man auch die Farbenlehre herbeiziehen, die durch Wellengleichungen der Spektralfarben und bis zu unendlich vielen Kombinationen von Lichtstrahlen ohne Ausnahmeregeln exakt charakterisiert werden können.

Damit wird mit der Infinitesimal-Rechnung für Cohen die unendlichkleine Größe Ausdruck der Empfindung. In seiner „Infinitesimalschrift" wird dieser Aspekt im Zusammenhang mit Kants zweitem Grundsatz, dem der „Antizipationen der Wahrnehmung", verhandelt: „Das Prinzip derselben ist: In allen Erscheinungnen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe, d.i. einen Grad." [Kant KrV, B207] Dieser Grundsatz Kants wird wie der erste, der die „Axiomen der Anschauung" auslegt, von Cohen verworfen. Die Radikalität dieser Ablehnung wird erst in Cohens „Logik der reinen Erkenntnis" deutlich, ist aber auch schon in seinem Werk von 1883 zu erahnen. Statt vom Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung spricht Cohen dort vom Grundsatz der intensiven Größe oder der intensiven Realität, lässt aber offen, wie dieser in seiner neuen Fassung lauten soll. Auch für den Anschauungbegriff wird dort klar, dass dieser nicht mehr original Kantisch zu verstehen ist, denn „Anschauung im Sinne des erkenntnisskritischen Terminus darf nämlich nicht gedacht werden als eine concrete, auf einen Gegenstand bezogene Erkenntniss, sondern lediglich als ein Erkenntniss*mittel*, als das *Element* einer Methode." [Cohen 1883, § 24] Klar ist auf jeden Fall, dass mit Cohens Untersuchungen zum Prinzip der Infinitesimal-Methode und seiner Geschichte zentrale Neuerungen verbunden sind. Die wichtigsten mit der Infinitesimal-Mathematik verbundenen Anstoßpunkte sollen im Folgenden beschrieben werden und zur Infinitesimal-Logik Cohens in seinem 1902 erstmals erschienen Werk der „Logik der reinen Erkenntnis" hinführen.

3.1 Cohen als Kant-Interpret und Neukantianer

3.1.1 Philosophiegeschichtsphilosophie

Wie es sich andeutete, erfährt die für den Neukantianismus paradigmatische Aussage Windelbands „Kant verstehen heißt über ihn hinausgehen" [Windelband 1883, IV] auch bei Cohen besondere Bedeutung. Wie schon in seiner Platon-Modifikation geht es nicht darum, ob die ‚vergangenen' Werke Platons oder Kants ‚richtig' interpretiert werden, sondern darum, Einflüsse nachzuzeichnen, Systeme zu verbessern und zu erweitern. Philosophie entsteht wie die Infinitesimal-Mathematik und jede andere Wissenschaft nicht aus dem Nichts, sondern fügt sich in ein ‚Weltverständnis' oder besser wissenschaftliches ‚Weltbewusstsein' ein, das durch die Fakta der Wissenschaft bedingt ist. Dies bedeutet nichts anderes, als dass jede Philosophie in Relation zur Geschichte entstehen muss, sei es in Relation zur Geschichte der Philosophie oder der (Einzel-)Wissenschaft(en), wobei diese nur durch gegenseitige Hilfe im ‚Weltbewusstsein', das sich in jener Kausalität kontinuierlich ausgestaltet, geltend gemacht werden können. Denn ein beliebiges vorliegendes Problem, das es zu lösen gilt, hat in der Möglichkeit der Erfassbarkeit und der damit verbundenen Formulierbarkeit schon seinen Ansatz, seinen Platz im Bewusstsein und damit seine zumindest latente Basierung gefunden, da ohne Referenz der Aussagen kein Sinn zu finden ist. Beurteilt man danach die „philosophiegeschichtsphilosophischen"[6] Werke Cohens, so geht es nicht darum, ob ein endgültiges, absolutes Verständnis der Kantischen Philosphie bzw. generell Historie vorliegt, sondern inwieweit die vorliegenden Ideen mit dem stetigen unausweichlichen Fortschritt der Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte in Einklang gebracht werden können: „Ein universell an der Philosophiegeschichte Ausgebildeter [sc. Cohen] stößt bei seinen Studien (spätestens mit [seinem Lehrer] Trendelenburg) auf Kant – und sucht diesen Kant nun in sein Bild von Philosophiegeschichte sinnvoll einzuordnen." [Lembeck 1994, 19]

Dieses Verhältnis ist beispielhaft für den Weg jeder Wissenschaft, so war die Newtonsche Mechanik ein Meilenstein in der Physik und Wegbereiter (mit zahlreichen anderen Ergebnissen des wissenschaftlichen Progressus) der Relativitätstheorie, für die sie nun einen Spezialfall darstellt. Damit hat das Vermächtnis Newtons jedoch nicht seine Gültigkeit im Ganzen eingebüßt, sondern wurde vornehmlich zu einem breiteren und vielschichtigeren System erweitert und in dieses eingliedert. Durch neue Probleme entstehen neue Theorien und umgekehrt. Entsprechend entstehen auch neue Einzelwissenschaften, worin wiederum ein gegeseitiges Bedingen für eine Erweiterung des kategorialen Denkens liegt. So geht es auch in der Phi-

[6] Den Begriff der „Philosophiegeschichtsphilosophie" wird dem Werk „Philosophiegeschichte als Philosophie. Zu Kants Philosophiegeschichtsphilosophie" von H. Lübbe (in: Einsichten. Gerhard Krüger zum 60. Geburtstag, Frankfurt a. M. 1962, S. 204-229) entlehnt.

losophie darum, ‚richtige' Gedanken zu bewahren, die den notwendigen Rahmen neuer Fortschritte bilden können; der Nutzen besteht „einmal für die Richtung der Probleme; dann aber auch für die Ausrüstung des Denkens. Es ist nur halb wahr, dass in der Philosophie ein Jeder von vorne anfangen müsse." [Cohen 1885, VIII] Denn „von vorne anfangen" bedeutet in der erwähnten „latenten Basierung" zurückzuschreiten, d.h. sich des Ursprungs bewusst zu werden, was wiederum nur im Zurückschreiten in einem System, das zwangsläufig eine Historie referentieller Begriffe vorzuweisen hat, funktioniert.

D.h. jeder philosophische Gedanke muss notwendigerweise auf die Historie und damit, um Wissenschaftlichkeit aufrecht zu erhalten, auf die Fakta der Wissenschaften Bezug nehmen. Cohen bedient sich, wie oben aufgezeigt, mit der Philosophie Kants an einem sehr bedeutendem und einflussreichem Faktum der Wissenschaft und versucht zu integrieren und zu erweitern. Kants Philosophie stellt dabei zentrale Knotenpunkte dar, keine Frage, es werden für ein möglichst einheitliches sowie umfassendes Netz aber viele weitere Knoten geknüpft, sei es durch die jahrtausende alten Ideen Platons bis hin zum bis heute aktuell diskutierten Prinzip der Infinitesimal-Methode. Mit Cohens Bezugnahme auf die Historie der Wissenschaft erfährt die Kantische transzendentale Methode eine Verbreiterung. Das gänzlich umfassende Netz wird zum Grundlegungsauftrag der Philosophie und bedarf selbstverständlich unendlich vieler Knoten. Darin zeigt sich dann nicht nur die *Unmöglichkeit* der vollkommenen Philosophie als eines abgeschlossenen Systems (wie noch bei Kant), sondern vor allem liegt darin erst die Möglichkeit der philosophischen Wissenschaft begraben. Und um dabei überhaupt von einem ‚System' und von ‚Einheit(lichkeit)' sprechen zu können, bedarf es wohl dieser historisch-kausalen Kontinuität, die als *Denkgesetz* schon im *kleinsten* wissenschaftlichen Anspruch innewohnt.

Die Kantische Philosophie wird bei Cohen selbstverständlich insbesondere durch Sachverhalte erweitert, die durch die Integration des Prinzips der Infinitesimal-Methode bedingt sind. Die Differential- und Integralmathematik mit der infinitesimalen Größe in die Philosophie zu integrieren ist bei Kant schon ansatzweise, aber - für die Prägnanz dieser neuen Errungenschaft der Mathematik - sehr spärlich vorzufinden. Auch der Streit über die Realität des Infinitesimalen ist schon im Gange, so schreibt Kant: „Der Begriff des unendlich Kleinen, darauf die Mathematik so öfters hinauskommt, wird mit einer angemaßten Dreistigkeit so geradezu als erdichtet verworfen, anstatt daß man eher vermuten sollte, daß man noch nicht genug davon verstände, um ein Urteil darüber zu fällen. Die Natur selbst scheint gleichwohl nicht undeutliche Beweistümer an die Hand zu geben, daß dieser Begriff sehr wahr sei. Denn wenn es Kräfte gibt, welche eine Zeit hindurch kontinuierlich wirken, um Bewegungen hervorzubringen, wie allem Ansehen nach die Schwere ist, so muß die Kraft, die sie im Anfangsaugenblicke oder in

Ruhe ausübt, gegen die, welche sie in einer Zeit mitteilt, unendlich klein sein“ [Kant 1905, Vorrede]. Nur selten aber nimmt Kant so deutlich Stellung zu diesem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gebiet, obwohl insbesondere Newton aber auch Leibniz als die bedeutendsten Naturwissenschaftler ihrer Zeit großen Einfluss auf die Philosophie Kants nehmen, wie Cohen bemerkt: „Newton gibt ihm die Haltung und die Fassung; aber die logisch-systematische Begründung saugt er aus Leibniz.“ [Cohen 1914, 596]

Um seiner Vorstellung von Transzendentalphilosophie zu genügen, muss Cohen, wenn er das Infinitesimale zum Werkzeug der Philosophie machen will, diesem Infinitesimalen gleichsam eine philosophische Grundlegung schaffen. Damit gibt es nun zwei Richtungen, aus denen das Infinitesimale als Werkzeug der Mathematik seinen Platz in einem philosophischen System zu finden hat. Einerseits muss, wie eben veranschlagt, die infinitesimale Größe durch das philosophische System erfasst und begründet sein; andererseits gilt es für dieses Werkzeug – als Mittel unserer Fähigkeit des (wissenschaftlichen) Erkennens – die methodische Aufgabe in selbigem System zu finden.

Für sein, angesichts des Umfangs kühnes Vorhaben hat Cohen mit mehreren Schwierigkeiten im Rückblick auf Kant zu kämpfen. Dieser Kampf, der zu seinem eigenen „System der Philosophie“ führt, lässt sich am Verlauf seiner Veröffentlichungen nachvollziehen. Während Cohen beispielsweise in seiner Schrift von 1883 noch nach „dem *Verhältniss von Anschauung und Denken im Differentialbegriff*“ [Cohen 1883, § 20] fragt, hat er sich in der „Logik der reinen Erkenntnis“ von diesem Dualismus verabschiedet. Cohens „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ ist hier als eine „Projektschrift“ (s. Kap. 1) zu verstehen, in der Cohen seinen Forschungsstand in einer Art Übergangsschrift präsentiert.

3.1.2 Die antipsychologistische Wende

Wie in Kapitel 1.3 angedeutet ist die mathematische Strukturierung in der Philosophie Kants für eine Integration eines aktual Unendlich(klein)en wenig geeignet, weil es als inextensive Größe nicht unter die Axiome der Anschauung fallen kann. Da bei Kant die Mathematik jedoch an die reine Anschauung geknüpft ist, scheint es, dass das Unendlich(klein)e aus der Mathematik ausgeklammert wird. Um aber das Unendlichkleine nicht im Progressus, sondern in seiner inextensiven Eigentlichkeit zu repräsentieren, liegt für Cohen der Kulminationspunkt des Intensiven wie Infinitesimalen in der „Kritik der reinen Vernunft“ in jenem Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung von Kant, dessen Wortlaut - „In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe, d. i. einen Grad“ [Kant 1966, B 207] - in Cohens Werk über „[d]as Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ allerdings gar nicht zu finden ist. Wie einleitend bemerkt, lässt sich der Abschied von Kants Aufstellung der Tafeln der Urteile, Kategorien und Grundsätze in Cohens „Infinitesimalschrift" schon erahnen. Durch die notwendige Selbständigkeit der intensiven Realität bei Cohen und durch seine Aussage, es wäre ein „Vorurteil, daß dem Denken sein Stoff von der *Empfindung* gegeben werde und daß das Denken diesen Stoff nun zu bearbeiten habe" [Cohen 1914, 58], zeigt sich, dass jener Grundsatz keinesfalls in seiner ursprünglichen Form für dieses Vorhaben zur Geltung kommen kann. Mit seiner Kritik an der „quasi nachrichtentechnischen Deutung des Empfindungsbegriffs" lässt sich die „antipsychologistische Wende von Cohen" verbinden: „In seiner Studie zum ‚Prinzip der Infinitesimal-Methode und seiner Geschichte' setzte Cohen der psychologististischen Deutung von Kants Erkenntnistheorie die transzendentale Methode und den Aufweis des Infinitesimalen als eines Grundbegriffs entgegen, aus dem der Begriff der Realität allererst erzeugt wird." [Deuber-Mankowsky 2013, 10] Das Infintesimale als intensive Größe, als ideelles, apriorisches Korrelat der aposteriorischen Empfindung schafft den transzendentalen Begriff der Empfindung überhaupt, der objektiv und nicht-psychologisch ist, da (infinitesimal-)mathematisch und vom aktuellen Empfinden unabhängig. Dies ist der eminente Schritt der Transzendental-Philosophie, um einen Übergang vom subjektiv-psychologischen Bewusstwerden zur objektiven Kontinuität der intensiven Größe eines wissenschaftlichen Gegenstandes zu schaffen, ohne vom Übergang von unbewusster zu bewusster Empfindung/Wahrnehmung sprechen zu müssen: Das Reale hat Grade, nicht die Empfindung! Diesen Fehler versuchte Kant in der B-Redaktion zu korrigieren – in der A-Redaktion war die Antizipation der Wahrnehmung noch folgendermaßen definiert: „In allen Erscheinungen hat die Empfindung, und das *Reale*, welches ihr an dem Gegenstande entspricht, (realitas phaenomenon) eine *intensive Größe*, d. i. einen Grad." [Kant KrV, A 166]

Cohen verweist darauf, dass „wenn man von der wissenschaftlichen Einsicht absehen darf, ohne welche die Methode Kants, als die Fortsetzung der Methode *Newtons*, schlechterdings nicht verstanden werden konnte [. . .], so bietet [gerade] das Kapitel von der Empfindung [. . .] die breiteste und ergiebigste Angriffsfläche dar." [Cohen 1914, 419f.] Es lässt sich hier schon vermuten, was Cohen in Bezug auf Kants „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte" (dort setzt Kant die Methode des Unendlichkleinen mit der des Unteilbaren gleich, vgl. [Cohen 1883, § 77]) verdeutlicht: Kants Fehler liegt im Verkennen „der positiven realisirenden Bedeutung des Differential-Begriffs, welche aus den *letzten Gründen des Bewusstseins* entspringt. [. . .] *Damit aber ist die Gefahr entstanden, die Realität nicht für die Empfindung, sondern in der Empfindung zu begründen.*" [Cohen 1883, § 77]

„Die Analyse der Erkenntnis bewegt sich nicht in einem Gebiet, in dem von irgendwelchen existierenden Wirklichkeiten und ihrer kausalen Wechselwirkung die Rede ist, sondern sie entwickelt, vor allen solchen Annahmen über die Wirklichkeit der Dinge einen allgemeinen idealen Zusammenhang von Wahrheiten und dem Verhältnis ihrer wechselseitigen Abhängigkeit. Die reine Bedeutung dieser Wahrheitsbezüge gilt es zu sichern, ehe von ihnen irgendeine Anwendung auf existierende Dinge zu machen ist. Damit erhält die Erkenntniskritik gerade in ihrer Idealität eine streng *objektive* Wendung: sie handelt nicht von Vorstellungen und Vorgängen im denkenden Individuum, sondern vom Geltungszusammenhang zwischen Prinzipien und ‚Sätzen', der als solcher unabhängig von jeglicher Betrachtung des subjektiv-psychologischen Denkgeschehens festgestellt werden muß. In der Entwicklung der Philosophie des 19. Jahrhunderts hat sich dieser Grundgedanke der ‚transzendentalen' Methodik als besonders wirksam und fruchtbar erwiesen." [Cassirer 1912, 256f.] Bei Cohen drückt sich das in Bezug auf den Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung folgendermaßen aus: „Der Begriff der Empfindung führt auf den des ‚Reizes', dieser aber auf den allgemeinen Begriff der Bewegung zurück. So muß die ‚Natur' für die Erkenntnis als ein System von Bewegungsvorgängen, die in einem gesetzlichen Zusammenhang mit einander stehen, begriffen sein, ehe wir mit ihr wie mit einem festen Datum innerhalb der Begründung rechnen können. [...] Was Bewegung ‚ist', läßt sich nicht anders als in Größenbegriffen aussagen: diese aber setzen zu ihrem Verständnis ein Grundsystem der reinen Größenlehre voraus. So werden die Prinzipien und Axiome der Mathematik zum eigentlichen Fundament, das als feststehend angenommen werden muß, um irgendeiner naturwissenschaftlichen Aussage über die Wirklichkeit Halt und Sinn zu verleihen." [Cassirer 1912, 256]

Dieser Kantische Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung, der in der „Infinitesimalschrift" eine zentrale Rolle innehat, spielt in der „Logik der reinen Erkenntnis" kaum eine Rolle mehr. Cohen musste zwangsläufig mit mehreren Grundpfeilern der Kantischen Philosophie hadern. Dennoch würdigt Cohen in Bezug auf diesen Grundsatz und das Infinitesimale als Realitätseinheit „*das Neue, das Kant zu lehren hatte: Realität* liegt nicht in dem Rohen der sinnlichen *Empfindung* und auch nicht in dem Reinen der sinnlichen *Anschauung*, sondern muss als eine *besondere* Voraussetzung des *Denkens* geltend gemacht werden" [Cohen 1883, § 18]. Unmittelbar damit sind zwei weitere Kritikpunkte Cohens an der Philosophie Kants verbunden, deren Auswirkungen in den folgenden Kapiteln immer wieder zur Sprache kommen werden. Cohen nimmt die Kritik Stadlers am Kantischen Kontinuitätsbegriff und damit einhergend an Kants Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung auf. Stadler kritisiert die „Verwechslung der Continuität der intensiven Grösse mit der Continuität ihres Bewusstwerdens" [Stadler 1880, 583]. So soll weder der Grad noch weniger aber irgendeine Eigenschaft desselben, z. B. die Kontinuität, Teil eines allgemeinen erkenntnistheoretischen Grundsatzes sein, um so nicht in Gefahr zu geraten, Aspekte, für die eine philosophische Grundlage geschaffen werden soll, selbst zu solchen Grundlagen zu erheben. Hier muss die transzendentale Logik von der Psychologie abgegrenzt werden (vgl. auch [Schulthess 1984, 12*]). Cohens Logik der reinen Erkenntnis darf selbstverständlich kein Wissenschaftszweig der Psychologie, der Sprache, eines Formalismus' oder etwas Anderem sein.

Am Kontinuitätsbegriff und vor allem im Verhältnis der Diskretion durch das Urteil und dem Denkgesetz der Kontinuität findet sich auch die Kritik Cohens an Kant, dass dieser den Unterschied zwischen allgemeiner (formaler) Logik und der transzendentalen Urteilslogik „nicht deutlich genug hervorgehoben“ hat und dass Kants „allgemeine Logik selbst in ihrem historischen Ursprung eine Art von transcendentaler Logik sein wollte, [... und] metaphysisch war, indem ihr das Denken das Sein bedeutete“. Und Cohen kritisiert auch den „nur in seiner polemischen Tendenz nach klare[n] Begriff einer formalen Logik“, da diese mit der vollkommenen Abstraktion der Erkenntnisinhalte nur „Regeln“, keine „Gesetze“ bilden kann, da sie der metaphysischen Grundlegung ermangelt und dadurch keinen wissenschaftlichen Halt findet. Sie wäre dann ein Regelwerk ohne Rechtfertigung, da sie nicht in Hinblick auf ihren Geltungsbereich, sondern im „Vakuum“ funktioniert [Cohen 1885, 269]. Es wäre wie eine Philosophie ohne Rücksicht auf die Fakta der Wissenschaft(sgeschichte). Die transzendentale Logik wird bei Cohen ein selbständiges Instrument der Philosophie, das nicht bei Empfindungen, Raum und Zeit oder anderen Anschauungen ansetzt, sondern in den Fakta der einzelnen Wissenschaften. So ist es auch nicht korrekt zu sagen, die Cohensche Logik der reinen Erkenntnis wäre vollkommen unabhängig[7]; sie formiert sich an den einzelnen Wissenschaften, so wie die Logik sich durch die Entdeckung der Infinitesimal-Mathematik erweitern lassen muss und wie die kopernikanische Wende weniger durch das Fernglas, als mehr durch das Studium der Kegelschnitte ermöglicht worden ist (vgl. Kap. 1.3).

Damit kulminiert in der Philosophie auch die Möglichkeit einer jeden Einzelwissenschaft und für Cohen gilt hierbei: Die „Frage des Zusammenhangs der Wissenschaften – denn nur so wird man ihre angebliche Einheit zu verstehen haben – ist die Frage des Zusammenhangs ihrer Methoden.“ Man irrt darin, „die Wissenschaft nach den Inhalten [zu] denken“, da das wissenschaftliche Interesse an einem nächsten Gebiet seine Geltung durch „die Übertragung der ursprünglichen, grundsätzlichen Beziehung auf die anderen Gebiete“ erhält – und dies liegt im Methodenzwang[8] des erkennenden Denkens: „Das Denken der Logik ist das Denken

[7] s. [Mormann 2013, 11]: „The first thing to note is that for Cohen logic is independent of anything else: logic is neither a branch of psychology nor a branch of linguistics. The laws of logic, i.e., the laws of ‚pure thought‘ are neither psychological laws nor grammatical laws. Rather, according to Cohen, the laws of logic constitute the core of pure thought. Thoughts in Cohen's sense should not be confused with ‚sensations‘ (Empfindungen) or individual mental representations (Vorstellungen). Cohen vigorously rejected any dependence of logic on another realm.“

[8] Man könnte hier aus L. Wittgensteins Tractatus (3.03,17) zitieren, worin das „Unlogische

der Wissenschaft [... und] Logik handelt [...] von der Einheit des Denkens, als des Denkens der Erkenntnis.“ [Cohen 1914, 18f.]

Im Prinzip der „ursprünglichen, grundsätzlichen“ Bezugnahme steckt nicht nur der Verweis auf die oben gezeigte Notwendigkeit der Historie, sondern auch ein Kernpunkt der Entwicklung Cohens von der „Vernunftkritik“ zur „Erkenntnislogik“, wie Edel den Übergang Cohens von Kant-Interpretationen zu seinem eigenen systematischen Hauptwerk, der „Logik der reinen Erkenntnis“, umschreibt: „Das System dieser reinen Erkenntnisse aber ist als ein offenes, grundsätzlich niemals abschließbares System von Urteilen und Kategorien konzipiert, die zugleich als gegenstandserzeugende Methoden des reinen, im Prinzip des ‚Ursprungs‘ gegründeten Denkens aufgefasst werden. Ihre einheitsstiftende Funktion schließlich wird nicht mehr auf die Einheit der transzendentalen Apperzeption oder des Selbstbewusstseins zurückgeführt, sondern wurzelt in der ‚Erhaltung‘ von Sonderung und Vereinigung, die den Grundcharakter des Urteils ausmache.“ [Edel 2010, 11f.] Cohen rückt die Relevanz des philosophischen Gegenstands „Bewusstsein“ weg vom „Selbst“ hin zu der Wissenschaft. Und da die Methoden der Wissenschaft ihren Gegenstand bestimmen, unterliegt das Bewusstsein dem Denken der transzendentalen Logik, mit der Erhaltung von Sonderung und Vereinigung als Grundcharaktere des logischen Urteils.

Dieser methodische Hintergrund soll genauer beleuchtet werden, denn auf dem Grundgerüst der Fakta der Wissenschaft versucht Cohen Kantisch, d.h. transzendentalphilosophisch, „den Schatz des *Apriorismus* zu hüten“ [Cohen 1914, 585]. Die Methode Cohens ist die transzendentale und dieser Ansatz unterliegt dem kritischen Motiv Kants. Es ist diese notwendige „Selbstkritik“, der die Erkenntnis unterliegt (vgl. Kap. 1.6), die das *Reine* in der Vernunft aufdeckt, insofern sie die *Bedingungen der Gewißheit* entdeckt, auf denen die *Erkenntnis als Wissenschaft* beruht. Diese selbstreferentielle Kritik führt zum unweigerlichen Fortschritt der Wissenschaften, wodurch sich auch unweigerlich ihre Prinzipien, Grundsätze und ihre Grundbegriffe ändern.

Den Anker sieht Cohen im Urteil gegeben: „Nur das Urteil bildet das Quellgebiet der Logik. Weder die Kategorien, noch Grundsätze, Gesetze oder Prinzipien wurden dem Urteil gleichgestellt.“ Dies soll weder die Cohensche Urteilslogik oder gar das philosophische Streben überhaupt von der Notwendigkeit der Genese und des Fortschritts ausschließen – die Philosophie ist und bleibt eine unendliche Wissenschaft und freilich „soll auch die einzelne Art des Urteils keine definite Form darstellen; auch sie wird von den Veränderungen beeinflußt werden müssen, welche die Kategorien und die Grundsätze betreffen.“ Das Urteil ist „als eine *Richtung*, eine Tätigkeit des Denkens“ nicht so leicht der Frage „geworden oder angeboren?“ ausgesetzt, „[e]ntscheidend aber ist für das Urteil die *historische* Einsicht.“ [Cohen

denken“ auf Grund der Unmöglichkeit des „unlogischen Denkens“ verneint wird.

1914, 585f.] Diese historische Einsicht bildet sich in der Denkrichtung, die eine Motivation benötigt. Dieser Motivation als Richtungsweiser soll keine Vorverurteilung, kein Determinismus, angehängt werden können, und deshalb kommt ihr in der Cohenschen funktionalen Deutung der Erkenntnis eine schwere Gewichtung zu: Sie erlaubt Wissenschaft und so „ist es nicht historisches Vorurteil, sondern vielmehr historische Einsicht und zwar solche, durch welche der Begriff der Geschichte bedingt ist, wenn wir in den Arten des Urteils diejenigen *Motive des wissenschaftlichen Denkens* zu beglaubigen versuchen, welche den *Begriff und die Geschichte der Wissenschaft* begründet und fortgeführt haben.“ [Cohen 1914, 586f.]

In der Berücksichtigung der Historie und der Verflechtung von Wissenschaft und denkendem Subjekt zeigt sich ein weiterer Schritt im Übergangsprozess vom „Kant-Versteher“ zum „Über-Kant-Hinausgeher“: „Nach Cohen ist es nämlich *nicht* die Aufgabe transzendentaler Erkenntnistheorie, die Überbrückung jener nach der ‚klassischen‘ Auffassung bestehenden Kluft zwischen Subjekt und Objekt, den Prozess des Erkennens also, ihrerseits zu konstruieren. Der Prozeß des Erkennens der ‚wirklichen Dinge‘, bildlich gesprochen: die Überbrückung jener Kluft, vollzieht sich vielmehr in den einzelnen Wissenschaften selbst“ [Edel 2010, 96]. Diese Überbrückung ist durch die Prägnanz der geschichtlichen Entwicklung, d.h. des *Vollzugs* der einzelnen Wissenschaften, nur noch im Sinne Kants, nicht aber durch Kants philosophisches Programm möglich. In den Untersuchungen der Möglichkeitsbedingungen von Erfahrung wird durch den Cohenschen Ansatz demnach nicht nur die Psychologie (und Anthropologie) ausgeklammert (vgl. Kap. 2.3), sondern auch eine Übertragung vorliegender Problematik auf den Subjekt-Objekt-Dualismus vermieden. Durch das Faktum der Wissenschaft als Ausgangspunkt interessiert nicht mehr das Entstehen der Erkenntnis durch ein genetisch zu deutendes Zusammenspiel von Komponenten der Empfindung, Anschauung etc., sondern „[t]ranszendentale Erkenntnistheorie wird so zu strikt funktional orientierter Geltungsanalyse“[9]: Die Aufgabe steckt in der Legitimation des Wissenschaftsfaktums, das im Gegebensein eben „nicht auch schon philosophisch begründet oder erklärt“ ist, sondern die Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit, nach den Prinzipien ihrer Wissenschaftsgebiete aufwerfen, und „weil sie gegeben sind, könnnen sie mit Sinn Problem werden, und zwar ein solches, das nicht allein auf einer philosophischen Fiktion beruht.“ [Edel 2010, 98]

[9] Cohen betont schon in [Cohen 1883, § 88]: „‚[D]ie differentia specifica [artbildender Unterschied]‘ liegt erst und ausschliesslich in dem *Hinweis auf die Wissenschaft*, in welcher allein *Dinge gegeben* und für die philosophischen Fragen angreifbar vorhanden sind: nicht am Himmel sind Sterne *gegeben*, sondern in der Wissenschaft der *Astronomie* bezeichnen wir diejenigen Gegenstände als gegebene, welche wir von, wenngleich ernstlich gemeinten, Erzeugungen und Bearbeitungen des *Denkens* als in der Sinnlichkeit gegründet unterscheiden. Nicht im Auge liegt die Sinnlichkeit, sondern in den ‚raisons de l'astronomie [Vernunftgründen der Astronomie]‘. Das bedeutet *Descartes*' klassisches Beispiel von der Sonne.“

Die Infinitesimal-Mathematik ist dafür das beste Beispiel. Es wird sich zeigen, dass Leibniz und Newton ein gleiches Produkt, nämlich die Differential- und Integral-Mathematik, lieferten, trotz unterschiedlicher Aufstellungen von Prinzipien und Grundbegriffen in ihren philosophischen Ansätzen. Gleichzeitig kam es bei beiden Protagonisten dazu, dass sie auf Grund von unterschiedlichem Verständnis ihrer Philosophie der Mathematik und Philosophie der Naturwissenschaft neben der Infinitesimal-Methode eine weitere Methode zur Differential- und Integralrechnung lieferten, die von einer positiven Verwendung unendlichkleiner Größen absieht. Für Cohen gilt es, durch philosophische Grundlagenforschung den unterschiedlichen Methoden und Wissenschaften einen gemeinsamen Boden und Rahmen zu geben. Der geforderte Dialog mit den Einzelwissenschaften ist der Grund für sein dynamisches System und erweitert das kritische Motiv: Die Gesetzmäßigkeiten der verschiedenen Wissenschaften sind mit den Gesetzmäßigkeiten ihrer philosophischen Grundlage verbunden; und ebenso sind die Unregelmäßigkeiten, d.h. Paradoxien, Antinomien etc. der verschiedenen Wissenschaften mit Unregelmäßigkeiten in ihrer philosophischen Grundlage verbunden!

„Die Erkenntnisskritik zerlegt die Wissenschaft auf die *Voraussetzungen* und *Grundlagen*, die in ihren *Gesetzen* und für dieselben angenommen werden.“ [Cohen 1883, § 9] Damit bescheinigt Cohen schon, dass die Bedingungen der Möglichkeit der Erkenntnis sich in den Erkenntnistatsachen widerspiegeln müssen, da Bedingungen „in ihren Gesetzen“ immer auch das „für dieselben“ impliziert. So müssen sich die Kantischen Grundsätze und Kategorien nicht nur in der Vernunftkritik, sondern auch in den Gegenständen der Vernunft/eines Vernunftwesens realisieren und durch eine Geltungsanalyse, die auch deren funktionalen Bestandteile in ihren Fokus rückt, erforschbar sein.

Die Suche nach „Voraussetzungen und Grundlagen“ dabei bleibt Kantisch: Während Kant die Begriffe „Apriorität“ und „(Vernunft-)Urteil“ an oberste Stelle setzt, sind es bei Cohen „Geltung“ und „Erkenntnis“ [vgl. Edel 2010, 99]. Aber Cohen thematisiert „weder die Kantische Unterscheidung von Vernunft und Verstand noch die zwischen reiner und empirischer Erkenntnis (= Erfahrung). Der Unterschied zwischen analytischer (Denken) und synthetischer Erkenntnis (Erfahrung) wird gänzlich der Spontaneität des Erkenntnisapparats überantwortet, dergemäß [...] nur dasjenige a priori in den Dingen erkannt werden kann, was zuvor in sie hineingelegt wurde.“ [Lembeck 1994, 77]

Für Cohen liegt die Aufgabe der Philosophie nicht mehr darin, Erkenntnisvorgänge und Urteilsvermögen eines affizierten Subjekts zu erforschen, sondern nach der Möglichkeit von Urteilen, Kategorien, Prinzipien und Grundsätzen in einer Wissenschaft zu fragen. Es sind keine einzelnen Erkenntnisse von Einzelpersonen, die Bewusstsein überhaupt verständlich machen sollen; Man kann nur verstehen „was Bewußtsein ist, wenn man schon verstanden hat, wie Wissenschaft möglich wurde. Man versteht nicht die Struktur und somit nicht die Wirkungen der Melodien Mozarts, wenn man die Materie seines Gehirns oder seine Gemütsverfassung analysiert, ebensowenig wie man die Gültigkeit und Tragweite logischer und mathematischer Sätze verstehen kann, wenn man den Logiker oder Mathematiker [...] auf seine (individuelle) Verfassung hin untersucht." [Marx 1975, 199]

Dadurch, dass wie die Urteile, Gesetze, Prinzipien, Grundbegriffe etc. auch die Grundsätze bei Cohen dem wissenschaftlichen Progress unterliegen und keine fest und einheitlich formulierten, philosophischen Gesetze mehr gebildet werden können, verliert auch das folgende Kantische (von Cohen in „Kants Theorie der Erfahrung" aufgestellte) Gesetz seine Geltung: „Die Einheit des Bewusstseins ist [...] die Einheit der Grundsätze." [Cohen 1885, 589] Schon dort aber charakterisiert Cohen die Einheit des Bewusstseins dadurch, „dass wir Gesetze haben müssen, sofern wir Wissenschaft haben wollen – diesen schlichten Gedanken bedeutet die Einheit des Bewusstseins." [Cohen 1885, 591] „So haben die allgemeinen Naturgesetze ihre Einheit, in welcher die wissenschaftliche Erfahrung ihren Halt hat, von denen aus sie ihren Inhalt erweitern, aber nicht ihren Grund vertiefen kann; ausser in den allgemeinen Gesetzen selber." [Cohen 1885, 592] Es liefern die Grundsätze zwar einen Halt für die Wissenschaften, aber die Grundlegung wird von Cohen in ein System von Urteilen verschoben. In seiner Schrift über die Infinitesimal-Methode formuliert er für die Erkenntniskritik schon variabler: „[I]hre Aufgabe ist die Entdeckung der *synthetischen Grundsätze* oder derjenigen *Grundlagen* des Erkennens, auf welchen die *Wissenschaft* sich aufbaut und von deren Geltung sie abhängt." [Cohen 1883, § 9] Hier klingt schon das Aufgeben einer isolierten Wissenschaft der Philosophie in Cohens Logik der reinen Erkenntnis durch. Dort stellt „die Einheit des Bewußtseins eine [...] Abstraktion des Kulturbewußtseins dar. Der Mensch der Kultur ist zugleich auf Wissenschaft, auf Ethik und auf Ästhetik gerichtet. So wird die Einheit des gesamten Kulturbewußtseins ein prägnantes Problem." [Cohen 1914, 427] Und so verwundert nicht die neue Auslegung der Grundsätze in seiner Philosophie: Eine „Festlegung von Grundsätzen in dem Sinne, daß sie unveränderliche Grundlagen der Wissenschaft bilden, [ist abzuwehren]." [Cohen 1914, 585]

3.1.3 Die Idee des Ursprungs

Unser Kulturbewusstsein bestimmt unsere Erfahrungsgrundlage, die die Möglichkeit des Seins und damit die Möglichkeit des Gegenstandes beinhaltet. Um das Bewusstsein für die Aufgabe der Philosophie kritisch nutzbar zu machen, unterscheidet Cohen dazu zwischen der Bewusstheit und dem Bewusstsein. Das Bewusstsein ist durch seine Reinheit definiert, ihm gegenüber steht die Bewusstheit als etwas Mystisches, Instinktives, das die Möglichkeit des empirischen Bewusstseins hinterfragt. Das Bewusstsein erhält durch seine Faktizität somit erhebliche

Bedeutung, es ist „Bewusstsein des Gegenstandes“ [Cohen 1914, 426], die „Hypothesis des Idealismus“ [Cohen 1914, 252] und „*ist Wissenschaft*“ [Cohen 1914, 424].

Das Bewusstsein ist das Sammelsurium von allen möglichen Urteilen wissenschaftlicher Erkenntnis. Jede Erkenntnis erfordert dabei eine Systematik im selben Sinne, wie das menschliche Denken niemals vorurteilsfrei funktioniert. Dieses Gebilde von Vorurteilen, in die eine Vorstellung eingeordnet wird, ist ein umfassendes System von erfahrenem Wissen, d.i. eine Wissenschaft. Bezieht man sich auf ein Objekt, so besteht das Kennen dieses Objekts nicht aus der Gegebenheit eines isolierten, für sich gegebenen Gegenstandes, denn kein Gegenstand im Bewusstsein kann in der Erkenntnis derart separiert gedacht werden, dass er ohne vorherigen Abgrenzungsprozess, der tief in die Erfahrungswelt eindringt, erkannt wird. Dies äußert sich beispielsweise dadurch, dass ein Kind den Mond erstmals nicht sofort als ‚Mond‘ wahrnimmt, sondern sich in Kategorien zum Thema ‚Mond‘ eine schlechterdings zufällige, beschreibende ‚Studie‘ erstellt: Der Mond ist nicht essbar, nicht kaputtbar, er ist still, verändert seine Form, leuchtet am Himmel, ist nachtaktiv etc., womit sich das Kind des kritischen, konstruktiven Wesens des urteilenden reinen Denkens bedient. Es existieren in unserer Erfahrungswelt also keine ursprünglichen Gegenstände, wir brauchen ein System, in dem der Gegenstand seine Intentionalität erhält, d.h. wir orientieren den Gegenstand in unseren Erfahrungen. Die sich stellende Frage ist nun, wie obige kindlich-beschreibende Erkenntnis uns zu einem Begriff der Objektivität bringen kann oder wieso beispielsweise Kant in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ von Tafeln von Urteilen, Kategorien und Grundsätzen sprechen kann, die unsere Erkenntnis vergleichbar und *gesetz*mäßig macht. Paul Natorp, der mit H. Cohen das Haupt der Marburger Schule des Neukantianismus bildete, beschreibt hierzu treffend den Ausgangspunkt der Marburger Neukantianischen Philosophie, „daß der erklärende Grund zu dem, was daraus erklärt wird niemals in einem anderen Verhältnis stehen kann, als in dem des Allgemeinen und Einzelnen, des Gesetzes und dessen, was als Fall des Gesetzes erkannt wird.“ [Natrop 1887, 264] Es ist das Ideal des Falles des Gesetzes also nicht als ein sinnlich Affiziertes einzusehen, sondern als „ungenauer Ausdruck“, der mit wissenschaftlichen Methoden bearbeitet werden muss und zu dessen „Korrektur die Mathematik und die reine Naturwissenschaft von Kant herangezogen wurden, wie die mathematische Naturwissenschaft selbst zum Behufe dieser Korrektur sich ausgebildet hat.“ [Natrop 1887, 210]

Es liegt somit für jeden zu prüfenden Gedanken mit dem Fall des Gesetzes ein relationaler Grenzwert in den (stets relativen) Vorstellungen des Bewusstseins vor und für diese Prüfung, die auf Konsistenz und möglichst widerspruchsfreie Einordnung in den Wissenschaftskorpus abziehlt, orientiert sich die Marburger Schule vor allem an der Mathematik.

Die Erkenntnis eines Gegenstandes kann demnach als eine Gleichungsauflösung interpretiert werden, deren Unbekannte der Gegenstand x (= Fall des Gesetzes) ist und deren Gleichungen durch wissenschaftliche Vorbildung (= Gesetze) des Subjekts geregelt sind. Des Weiteren bildet das Gesetz nicht nur die Basis für das Erstellen und möglichst genaue Auflösen der mit unendlich vielen Nebenbedingungen versehenen Objekt/x-Gleichung, sondern damit auch den Grundsatz jeder Wissenschaft und damit einen basalen allgemeingültigen Anfangspunkt für (sogar jede) unserer Überlegungen. Die Welt ist Welt des Bewusstseins und die Erkenntnis auf dem Felde des Bewusstseins folgt den Denkgesetzen. Dies bedeutet für obiges noch einfaches Beispiel für Erkenntnis, dass Himmelsobjekte wie der Mond eben nicht durch bloße Sinnlichkeit am Himmelsbild, sondern nur in der Wissenschaft, demzufolge in der Astronomie (was jenes Kind in einem eben kindlichen Verständnis von Wissenschaft in seiner ‚Studie' betreibt) fassbar sind. Im Gegensatz zur Kantischen Lehre befindet sich hier der schon in der Wissenschaft erkannte Gegenstand in transzendental-logischer und gleichsam erkenntniskritischer Untersuchung mit dem Untersuchungsgegenstand der logischen Bedingungen eines wissenschaftlichen Objekts.

Die Unauflösbarkeit des immer in Relation als offenes Problem vorliegenden Falls des Gesetzes liegt darin, dass die Frage nach der Möglichkeit des gegebenen x im Bewusstsein eine transzendente Frage ist. Denn die Frage, „wie es zugehe, daß eine solche Bezogenheit des Bewußtseins auf ein Gegebenes stattfinde [,...] überschreitet die Grenzen der wissenschaftlichen Wißbegier", man könnte sich wiederum, da die Gegebenheit des x durch das Bewusstsein legitimiert ist, auch Fragen über das Woher des Bewusstseins stellen und dies wären dann eindeutig transzendente Fragen. Oder man könnte genauso ein abgeschlossenes System für die Philosophie wie für die Welt der Wissenschaft überhaupt fordern, um dann die Nebenbedingungen der x-Gleichung einzugrenzen. Dieser ‚Grenzfall' als Gegenstand ist in seinem Ursprung ein Fragezeichen, ein unergründetes Fleckchen in der Erfahrungslandschaft des Bewusstseins, eine Fehlermeldung und deshalb nur ein „x".

In der Funktionalisierung dieser x-Gleichungen liegt dann die Möglichkeit, ja gar die Voraussetzung eines Sachverhalts, an dem das Prinzip der Infinitesimal-Methode Anwendung in der Philosophie findet! Denn in der Möglichkeit der ‚korrekten' Approximation durch unendlich viele Gleichungen soll der Ursprung desjenigen Begriffs zur Definition gebracht werden, der das Problem bildet. „So wird das sogenannte [infinitesimale bzw. relative] Nichts zum Operationsmittel, um das jedesmalige Etwas, das in Frage steht, in seinem Ursprung und dadurch erst eigentlich zur Erzeugung und zur Bestimmung zu bringen" (vgl. Kap. 1.3 & 1.5, [Cohen 1914, 89]). Hierin wird der Ursprung zur primären Idee.

Cohen verankert sein transzendentales Motiv eben nicht nur im Kantischen

Kritizismus, das er von der Subjektivität der Sinnlichkeit befreien will. Denn „[s]o wenig die Sinnlichkeit die der menschlichen Leibesbeschaffenheit ist, so wenig ist auch das Denken das natürliche, willkürliche, noch auch ein künstliches, welches wie der gesunden Bildungen so auch aller sophistischen Verrenkungen fähig ist; sondern es ist lediglich dasjenige, welches als das legitime *Mittel des Erkennens* sich bewährt.“ [Cohen 1883, § 88] Die ‚wahre‘ Welt ist also die Welt des Bewusstseins und das Bewusstsein folgt den Denkgesetzen und wie Kap. 2.1 vermuten lässt, spricht hier Platon aus Cohens Philosophie, die er selbst in seiner „Infinitesimalschrift“ noch als „erkenntniskritischen Idealismus“ bezeichnet. Dabei gilt: „Das ist das Bestimmende der *Idee* im Idealismus: keine Dinge anders als in und aus Gedanken.“ [Cohen 1883, § 88] Dieser Einfluss wird in der „Logik der reinen Erkenntnis“ noch bestärkt: „In der Idee Platons gelangt das Denken zu seiner Reife. Die Naivetät des instinktiven, gleichsam mythischen Schaffens von Gedanken wird abgetan. Das Denken geht in sich, zieht sich selbst zur Rechenschaft. Es wird in seinem innerlichen Tun *dialogisch.* So wird das Denken, so wird die Logik *Dialektik.*“ Das Denken ist demnach kein naives Vorstellen, sondern „*das Denken erschafft die Grundlagen des Seins.* Die Ideen sind diese Grundlagen, diese *Grundlegungen.*“ [Cohen 1914, 20] Die Idee ist Hypothesis und der Denkvorgang ist gleichzeitig die Bestimmung des Denkinhalts: „*Der Stoff des Denkens ist nicht der Urstoff des Bewußtseins [...]; sondern der Stoff des Denkens kann nur Inhalt, das will sagen, nur Einheit sein.*“ [Cohen 1914, 59f.] Diese Einheit des Denkens ist als die Voraussetzung des kontinuierlichen Zusammenhangs des Denkens und Erkennens zu verstehen, der in der dialogischen Methodik liegt. Es liegt im Denken kein fertiger, wie ein Ding fassbarer Gedanke vor, „sondern das Denken selbst ist das Ziel und der Gegenstand seiner Tätigkeit. Diese Tätigkeit geht nicht in ein Ding über; sie kommt nicht außerhalb ihrer selbst.“ [Cohen 1914, 29] Wäre ein Denkproblem gänzlich abgeschlossen, wäre Leibniz’ Gesetz „conscientia non facit saltus“ außer Kraft. In einem unendlichen und stetigen Verlauf kann es kein fertiges Produkt geben, in der Einheit kann aber ein Inhalt als negatives Prinzip der zwangsläufig vorhandenen Mehrheit extrahiert werden. So wie Mehrheit und Einheit sich gegenseitig zu ihrer Berechtigung verhelfen, so gilt: „*Die Einheit der Erkenntnis, die es bildet, schließt nicht die Mehrheit von Erkenntnissen, von Gesetzen aus, sondern vielmehr ein.*“ [Cohen 1914, 71]

Das Denken als Abstraktion des erkennenden Bewusstseins ist nun logischerweise ein Faktum für philosophische Untersuchungen. Durch Platons Ideenlehre, die sich mit dem Kantischen Kritizismus am Faktum der Wissenschaft verbindet, steht das Denken bei Cohen an erster Stelle. „Das Denken bildet mit der Idee einen ursprünglichen und gegenüber dem nichtigen der bloßen Wahrnehmung *neuen* Inhalt, der sich *ausschließlich* dem Denken verdankt. Dessen Geltungswert, und nur dieser, gewährleistet die Realität der Dinge“ ([Lembeck 1994, 97] & [Cohen 1878, 366]). Nehmen wir Bezug auf den herausragenden Wert der Mathematik, die Natorp als Korrektorin ausmachte, so ist ein exakter rechter Winkel eben nur deshalb konstruierbar, weil er zuvor in Gedanken synthetisch erzeugt wurde; er ist in der Natur jedoch nicht erfahrbar. Trotzdem ist er auf Grund seiner Denkbarkeit in der Erkenntnis auf Natur anwendbar, er kann Natur vermitteln – dies zeigt sich durch analytische Geltungsprüfung. Dasselbe Prinzip liegt auch in den mathematischen Gleichungen vor, die Anwendung finden, wobei nun die Frage bleibt, wie – ohne einen unüberwindbaren Kantischen Subjekt-Objekt-Dualismus herauf zu beschwören – das Denken ein unmittelbar fassbares Anwendungsgebiet erschließt. Dies ist die Frage nach dem ‚Woher' des Anstosses der dem Denken seine Richtung vorgibt. Hierbei kritisiert Cohen die Kantischen Verhältnisbegriffe der Substanz und Kausalität und den Grundsatz der Analogien. Letzterer ist nicht geeignet um die Voraussetzung der Realität zu leisten, die benötigt wird, um den Verhältnisbegriffen ihren ‚Stoff' zu geben, den sie in Bezug setzen, d.h. A in Kausalität mit B setzen oder A als Subsatz von B zu identifizieren, können. „Und doch hält man jene in der Verbindung mit der Anschauung haltlosen Grundsätze für die Stützen des *Naturerkennens*, für zureichend, um *geometrische und Zahlengebilde zu physischen Körpern zu erfüllen*. Vielmehr bedarf es der ausdrücklichen und selbstständigen Setzung des A und des B, um ein Verhältnis unter ihnen gliedern zu können." [Cohen 1883, § 31] „Auf diesen Gedanken einer solchen ‚ausdrücklichen und selbständigen Setzung' bzw. eines in dieser Weise gesetzten Elementes im Denken als des Inhalts des ‚Denkmittels' der Realität, das daher – und dies zielt gegen die Kantische Koordination von Realitätskategorie und bejahendem Urteil – nicht lediglich auf ‹die logische Function des Jasagens› zu reduzieren, sondern in eine ‹positivere Situation› zu versetzen sei [Cohen 1883, § 31], hebt auch die Unterscheidung von Realität und Dasein ab, die überdies mit dem gleichen Argument operiert." [Edel 2010, 273] Das Dasein ist eine Bezugnahme auf, d.h. ein Verhältnis mit „de[m] Erkenntniswert, welcher den *Tatsachen der Wahrnehmung* beiwohnt". Das bedeutet, das ‚Dasein' ist nur Grundbegriff der Wirklichkeit. Wirklichkeit ist ein Begriff fern von Legitimation, steht der Notwendigkeit gegenüber, d.h. sie bedarf genauso der Hypothesis und des wissenschaftlichen Faktums, denn „[w]enn Wahrnehmung das zureichende *Kriterium der Objectivität* enthielte, so würde es aller weiteren kritischen Zurüstung nicht bedürfen: wir wüssten alsdann, wo wir sie fassen könnten, die unendliche Natur." [Cohen 1883, § 32]

Die von Cohen vermisste „selbständige Setzung" (s.o) muss ein entsprechendes Realitäts*urteil* leisten. Deren Setzung der Elemente bedeutet auf diese Weise dann die Rückgewinnung der Eigenständigkeit des Denkens, die mit Kant verloren ging. Es ist die Methode Cohens, dem Denken als Erzeugnis eben auch die Erzeugung zuzusprechen: „Die Tätigkeit selbst ist der Inhalt, den es zu erzeugen gilt" [Cohen 1914, 53]. Damit ergibt sich eine doppelte Bedeutung für das Denken: „Es bedeutet zum einen, daß dasjenige Denken, welches im angegebenen Sinne ‚rein' ist, das also keinen ‹Anfang in Etwas *außerhalb* seiner selbst›, keinen ‹Ursprung außerhalb seiner selbst› haben darf, gleichsam wesenhaft Hypothesis ist, d.h. in seiner spezifischen ‚Eigenart'und Leistung überhaupt nur dann erfasst, bestimmt und begriffen werden kann, wenn es nicht als Vorstellung (cf. [Cohen 1914, 22f.]), nicht als Verbindung (cf. [Cohen 1914, 24f.] und auch nicht als Synthesis (cf. [Cohen 1914, 25f.]) beschrieben, sondern formal wie inhaltlich als Hypothesis, als ‚Urbildung' oder – so lautet der Terminus, auf den die ‚Erkenntnislogik' nunmehr zurückgreift – als *Erzeugung* verstanden wird. Und es bedeutet zweitens, daß der ‚letzte'und ‚höchste' Grund seiner Geltung [. . .] weder ein psychologisches, [. . .] noch auch ein metaphysisches, etwa ‚außerhalb' des Denkens bzw. der Erkenntnis sistiertes Absolutes ist, sondern vielmehr *seinerseits* als Hypothesis, als eine ‚letzte' oder ‚höchste' *Grundlegung* verstanden werden muß." [Edel 2010, 397]

Dies hat weitreichende Folgen für die Begriffe ‚Denken' und ‚Logik' der Kantischen Philosophie. Die doppelte Bedeutung des Denkens garantiert seine Reinheit: Das Denken hat keinen Anfang außerhalb seiner selbst, daran lag „die Schwäche in der Grundlegung Kants", der dem Denken eine Anschauung vorausschickt: „Indem wir uns wieder auf den Boden der Kritik stellen, lehnen wir es ab, der Logik eine Lehre von der Sinnlichkeit voraufgehen zu lassen. *Wir fangen mit dem Denken an.* Das Denken darf keinen Ursprung haben ausserhalb seiner selbst, wenn anders seine Reinheit uneingeschränkt und ungetrübt sein muss." [Cohen 1914, 12f.] Einerseits bleibt das Denken ungetrübt, andererseits ist das Denken in seiner Doppelbedeutung immer inhaltsbezogen, denn „ohne Beziehung auf den Inhalt wird das Reine ‚sinnlos'." [Edel 2010, 396]

Das reine Denken als Erzeugen und Erzeugnis ist selbstständig, es muss - und damit erklären sich die logischen Paradoxien, denen die Selbstreferentialität zum Verhängnis wird, denen noch bspw. mit Typentheorien (vgl. Kap. 5.1) begegnet werden kann, aber in dieser Abschätzung *immer* ein mindestens infinitesimaler Fehler bestehen bleiben muss, solange sich das Denken nicht selbst überwindet – sich um seine Grundlegung sebst kümmern: „Und so kommt der Ausdruck des Anfangs, des Prinzips niemals von der Tagesordnung; und wie sehr sich die Richtungen vertiefen, der Ursprung bleibt doch immer das Problem. [...] So lange das Erzeugen nicht in dieser Prägnanz als das Erzeugen des Ursprungs gefaßt wurde, so lange konnte das Denken durch das Erzeugen nicht zu klarer methodischer Bestimmung gelangen." [Cohen 1914, 36] „Aber auch die *Kritik* kann nicht stichhalten. *Kant* konnte, musste sie herbeiziehen, weil er der Logik eine Lehre von der reinen Sinnlichkeit vorausschickte. Wir dürfen, wir müssen die Logik selbst zur Kritik, zur Geltung bringen." [Cohen 1914, 37] Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Wissenschaft der Logik die sich selbst gegebene Erkenntnis auf Grundsätze und Prinzipien zurückzuführen hat, um in axiomatischer Methode aus jenen die Kategorien und eine basale Urteilslogik zu konstruieren.

Dabei ist das methodische Vorgehen Cohens, um eine Grundlegung der Logik und damit der wissenschaftlichen Erkenntnis zu schaffen, dem Kantischen entgegengesetzt. Während Cohen analytisch von den Wissenschaften über die Grundsätze zu den Kategorien und den Urteilen vordringt, beginnt Kant sein Vorhaben mit der Tafel der Urteile und baut darauf die Kategorientafel auf, um damit die Tafel der Grundsätze des reinen Verstandes zu erklären. Von der Deduktion der Kategorien, die „Aussagen" und damit „Handlungen" sind, „*nicht angeborene Begriffe*, sondern vielmehr die Grundformen, die Grundrichtungen, die Grundzüge, in denen das Urteil sich vollzieht" [Cohen 1914, 47], wurde auf Grund der Gefahr des Psychologismus und des Subjektivismus Abstand genommen. An den Kategorien Kants kritisiert Cohen aber vor allem auch die Stellung, die die Kategorie zwischen Urteil und Aussagesatz einnimmt. Grundbegriffe und Urteilsformen könnten dem Schein der Abhängigkeit von Redeteilen und Ausdrucksformen des unklaren Urteils erliegen, sodass die Urteilslogik ihre Selbstständigkeit dadurch verlieren würde, dass ein Urteil erst in der Fixierung seines sprachlichen Ausdrucks zur Geltung gebracht wird. [vgl. Cohen 1914, 47] Ein weiterer Vorwurf liegt in der fehlenden Möglichkeit wissenschaftlicher Entwicklung und Revision. Eine Kategorie sei „vielleicht erst im Verlaufe der wissenschaftlichen Entwicklung zu ihrer tieferen Bedeutung gediehen, und daher auch erst deutliches Problem geworden. So konnte man sich in der angemessenen Urteilsunterlage irren, oder sie ganz verfehlen." [Cohen 1914, 51] Für Cohen gilt: „Die Kategorie ist das Ziel des Urteils, und das Urteil ist der Weg der Kategorie." Durch den Ausgang vom Faktum der Wissenschaft und der zwingenden Entwicklung des Faktums muss demnach auch für Urteilsarten eine „Richtung vorgezeichnet sein für die neue Ausprägung des Kategorienmotivs." Die Urteile und die Kategorien sind somit ineinander verflochten, unterliegen der Kritik der Logik, d.h. sie können nicht abgespalten als Richtlinien für ihren Gegenpart als Leitlinie dienen, wie noch bei Kant, „sondern *wir nehmen eine durchgängige Korrelation zwischen ihnen an.* Demnach kann nicht nur eine Urteilsart eine Mehrheit von Kategorien enthalten; sondern auch eine Kategorie kann zugleich in mehreren Urteilsarten enthalten sein. Die Verzweigung und Verästelung des Motivs erweitert zugleich seine Wurzelung." [Cohen 1914, 52]

Der Fortschritt der Wissenschaft bestimmt in Cohens Philosophie neue Grundlagen, die im Idealfall exaktere Prinzipien, Kategorien und Grundsätze mit sich bringen. „Damit ist schon gesagt, dass die Festlegung von Grundsätzen in dem Sinne, dass sie unveränderliche Grundlagen der Wissenschaft bilden, abgewehrt wurde." [Cohen 1914, 585] Grundsätze werden bei Cohen funktional gedeutet, sie verlieren den unmittelbaren Bezug zur Kantischen Ausrichtung. Ihr Ursprung, der Ansatzpunkt für einen Aufbau eines philosophischen Systems, liegt bei Cohen im *System der Urteile*, d.h. in der *Erkenntnislogik* und nicht mehr in einem *System* *der Grundsätze*. „Wie sehr wir nun aber auch nicht nur in deren Formulierungen abweichen, *sondern auch von ihrer Aufstellung überhaupt absehen müssen*, so halten wir nichtsdestoweniger ihren Geist in den reinen Erkenntnissen fest." ([Cohen 1914, 73], vgl. [Edel 2010, 407f.]) Diese Aussage Cohens sollte für den Übergang von dem „Prinzip der Infinitesimal-Methode und seiner Geschichte" und dem Titel „Erkenntniskritik" von 1883 zur „Erkenntnislogik" von 1902 berücksichtigt werden. Der weit gefasste Begriff der „Erkenntniskritik" stellt nicht nur die historische Begründung des philosophischen Systems Cohens dar, sondern bezeichnet auch den richtungsweisenden Anfang, Erkenntnisinhalte überhaupt und ihr Werden kritisch zu analysieren und zu verwerten. In der Schrift von 1883 stellt sich dann durch das Prinzip der Infinitesimal-Methode ein logisches Defizit und eine logische Notwendigkeit für das systematische Vorhaben Cohens heraus: Da nun „die Logik Logik der Wissenschaft" ist und vor allem „der mathematischen Naturwissenschaft", gilt für Cohen programmatisch, dass die Logik „vorzugsweise die Logik des Prinzips der Infinitesimalrechnung sein [muss]." [Cohen 1914, 34] Eine Logik der Wissenschaften soll nämlich den größten Verdienst in der mathematischen Naturwissenschaft in ihren Grundgesetzen verankern und geltend machen können, sonst, „[i]n einem anderen Sinne als es von *Kant* gemeint war, ließe sich dann das Wort mit einem anderen Rechte aussprechen, dass die Logik seit Aristoteles keinen Schritt vorwärts getan habe, wenn sie verabsäumt hätte, an dem gewaltigen Muster der Analysis des Unendlichen die einwandfreie Fruchtbarkeit des reinen Denkens zu kritisieren." [Cohen 1914, 34] Durch die zwingende „Reformierung" zur „Erkenntnislogik", die zwar die Ergebnisse von 1883 erweitert und verbessert, aber vor allem eingliedert, werden die reinen Erkenntnisse nun „in jenen Richtungslinien entworfen, welche in den Arten des Urteils verzeichnet werden." [Cohen 1914, 586] Dies steht den Grundsätzen nicht mehr zu, sie können keine „unveränderliche Grundlagen der Wissenschaft bilden", müssen immer im Werdegang der Wissenschaft durch Bezug auf die in ihnen vollzogenen Urteile charakterisiert werden: „Nur das Urteil bildet das Quellgebiet der Logik." [Cohen 1914, 585]

Für die „Logik der reinen Erkenntnisse" führt dies zu einem Absehen sowohl von den Kantischen vierteiligen Tafeln der Kategorien als auch der Grundsätze des reinen Verstandes. Übrig bleibt aber eine modifizierte Form der Kantischen Urteilstafel, die im Folgenden expliziert werden soll. Diese besteht immer noch aus vier Klassen mit jeweils drei Urteilen: Die erste Klasse besteht aus den Urteilen der Denkgesetze, die zweite Klasse aus den Urteilen der Mathematik, diese nimmt ihren Anfang - wie zu erwarten - in dem an das Prinzip der Infinitesimal-Methode angelehnte Urteil der Realität. Diesem, in der „Infinitesimalschrift" noch ansatzlos erscheinenden mathematischen Urteil der Realität, wird in dieser Tafel durch die erste Klasse ein Urteil der Denkgesetze zu Grunde gelegt: Das Urteil des Ursprungs, das ebenfalls an der Analysis des Unendlichen orientiert ist, aber die mathematische Wissenschaft im philosophischen System Cohens wieder in die Schranken ihrer Grundlagen verweist: der der Wissenschaft der Philosophie. Die mathematischen Urteile werden durch die Urteile der Mehrheit und der Allheit komplettiert. Die dritte und vierte Klasse bilden die Urteile der mathematischen Naturwissenschaft sowie die der Methodik und es ergibt sich folgendes Bild:

Urteile der Denkgesetze
Urteil des Ursprungs
Urteil der Identität
Urteil des Widerspruchs

Urteile der Mathematik
Urteil der Realität
Urteil der Mehrheit
Urteil der Allheit

Urteile der math. NW
Urteil der Substanz
Urteil des Gesetzes
Urteil des Begriffs

Urteile der Methodik
Urteil der Möglichkeit
Urteil der Wirklichkeit
Urteil der Notwendigkeit

3.2 Der Ursprung der Infinitesimal-Logik und die Urteile der Denkgesetze

Das folgende Kapitel rückt den vielleicht wichtigsten Begriff der Cohenschen Philosophie des 20. Jahrhunderts in den Mittelpunkt: den Ursprung. In der „Logik der reinen Erkenntnis" erhält das Urteil des Ursprungs eine ganz zentrale Rolle, denn es gilt, dem „*Prinzip der Infinitesimal-Methode* die ihm gebührende zentrale Stelle in der Logik" zuzuweisen. Die entscheidende logische Bedeutung des Infinitesimal-Prinzips sei, wie ein „Blick auf die Literatur" - im Sinne Cohens lässt sich dies bis heute postulieren (vgl. Kap. 6) - zeigt, noch „nicht erkannt". Selbst „*Kant* hat an diesem Wendepunkte die orientierende Fährte verlor[en]." Zwar sind „kräftige" Anzeichen vorhanden, dass der Zusammenhang der Realität mit dem Prinzip der Infintesimal-Analysis erkannt worden sei, „aber er ist nicht der Hebel der Kritik geworden. [...] Hätte das infinitesimale Prinzip die ihm zukommende Stellung in der

Kritik gefunden, so würde dem Denken die Sinnlichkeit nicht haben zuvorkommen können; so würde das reine Denken in seiner Selbstständigkeit nicht geschwächt worden sein.“ Diese Selbstständigkeit des Denkens vollzieht sich schöpferisch in der Infinitesimal-Methode und macht positive, schöpferische Bedeutung in der Mathematik geltend. Um dieses erzeugende Moment auch in der (Wissenschafts-)Logik geltend zu machen, gilt es „die unerläßliche und unersetzliche Bedeutung des Denkens, als Erzeugung, [. . .] aus der Analyse des Unendlichen zu gewinnen.“ [Cohen 1914, 34f.]

„Die Unendlichkeit selbst nenne ich das Maß von allem.“ Diese Aussage von Nikolaus von Kues (vgl. Kap. 1.2 und [Cohen 1914, 32]) nutzt Cohen programmatisch, um das ideelle Prinzip im Unendlichen zu bekräftigen. Dieser ideelle Umgang mit der nicht direkt fassbaren Unendlichkeit, welcher als Anstoss und ‚Frage(zeichen)‘ des Denkens an das Denken interpretiert werden muss, stellt eine Schablone bereit, die das Prinzip im Allgemeinen in den Vordergrund rückt. Das Unendliche ist der Anfang, das Chaos, das sich nicht zu Ende denken lässt und im Grunde genommen nur idealiter existiert, da dadurch, dass wir nicht ‚Nichts‘ denken können, wir notwendigerweise *denken müssen*, d.h. das unendliche Chaos mit unserem nur *endlichen* Vermögen ‚kosmo*logisieren*‘ müssen. Das Chaos können wir nicht anschaulich denken, was nichts anderes bedeutet, als dass „dem Ursprung [...] nichts gegeben sein [darf]. [. . .] Der Grund muß Ursprung werden. Wenn anders das Denken im Ursprung das Sein zu entdecken hat, so darf dieses Sein keinen, keinerlei andern Grund haben, als den das Denken ihm zu legen vermag. Als Denken des Ursprungs erst wird das reine Denken wahrhaft.“ [Cohen 1914, 36] Dieser Ursprung ist der Ursprung schlechthin, der die treibende Kraft jedes einzelnen Gedankens und der erste Ansatzpunkt für die Konstitution der Erkenntnis ist. Dies muss in der Erkenntniskritik, die Cohen als transzendentale Logik ausschreibt, Geltung erfahren; dies ist die neue Gestalt, die hier der Logik gegeben wird: „*Alle reinen Erkenntnisse müssen Abwandlungen des Prinzips des Ursprungs sein.* Andernfalls hätten sie keinen selbständigen, wie keinen reinen Wert. Die Logik des Ursprungs muß sich daher in ihrem ganzen Aufbau als solche vollziehen. *In allen reinen Erkenntnissen, die sie als Prinzipien beglaubigt, muß das Prinzip des Ursprungs durchwalten.* So wird die Logik des Ursprungs zur Logik der reinen Erkenntnis“ [Cohen 1914, 36].

Diese Logik des Denkens als Logik des Ursprungs hat eine entscheidende Veränderung in der Philosophie Cohens zur Folge. Es ist nicht nur so, dass Cohen die Grundstatuten der Kantischen Philosophie einreißt, sondern auch der Umgang mit der Mathematik ändert sich grundlegend. Die Urteile der Mathematik, die durch die Urteile der Realität, der Mehrheit und der Allheit gegeben sind, werden dem Urteil des Ursprungs und damit den Urteilen der Denkgesetze (die weiteren sind die Urteile der Identität und des Widerspruchs) untergeordnet, was „in gewisser Hinsicht im Widerspruch zu Einsichten aus der ‚Infinitesimalschrift‘ zu stehen scheint. Dort waren bereits die mathematischen Urteile als qualitäts- und realitätsbegründend ausgewiesen, das Infinitesimal als das ‚wahrhaft Seiende' [...] vorgestellt worden." [Lembeck 1994, 120f.] Bedenkt man, dass das Denkmittel der Realität, das direkt mit den mathematischen Wissenschaften der Integral- und Differentialmathematik verbunden ist, dort die „*Realisirung der Gegebenheit*" [Cohen 1883, § 33] verantwortet, so stellt sich die Frage, ob „nicht deshalb die Ursprungsfrage schon illegitim [ist], weil sie ein Denken vor dem mathematischen Denken ansetzt, obwohl doch die Philosophie ohne diese Wissenschaft gar ‚nicht anfangen' kann [...]?" [Lembeck 1994, 121]

Hier liegt nun das Problem der „Gegebenheit" vor, auf das Cohen in der „Logik der reinen Erkenntnis" vehement aufmerksam macht. Der Ausdruck ‚gegeben' ist „in der mathematischen Sprache entstanden" und darf nur so verstanden werden, dass – Cohen zitiert aus Euklids vierter Definition – etwas „entweder wirklich dargelegt werden, *oder gefunden werden*" kann, und „gefunden" können sie „nur vom Denken werden". [Cohen 1914, 82] Diese Selbständigkeit des Denkens, die der Mathematik Aufgaben stellt, bedeutet nicht weniger als die Selbständigkeit der Philosophie als transzendentaler Logik. „*Es darf nicht eine andere Disziplin, eine andere Untersuchungsart der Logik zur Seite gegeben werden.* [. . .] *Kant* konnte, mußte die Kritik herbeiziehen, weil er der Logik eine Lehre von der reinen Sinnlichkeit vorausschickte. Wir aber dürfen, wir müssen die Logik selbst als Kritik zur Geltung bringen. Denn sie bedeutet uns die Logik des Ursprungs." Auf Grund dieses möglichen Missverständnisses nimmt Cohen auch vom Begriff der „Erkenntniskritik" Abstand, obwohl der Begriff seine Berechtigung behält, da das „Denken des Ursprungs Denken der Erkenntnis [ist]" [Cohen 1914, 37f.] und diese Ursprungslogik als kritische verstanden werden muss.

Neben der Selbstständigkeit der Logik und des Denkens spielt wiederum eine weitere „Analogie zur Platonischen Dialektik" eine Rolle, nämlich der „Versuch Cohens der Platonischen Forderung nach philosophischer Begründung des (mathematischen) Hypothesis-Verfahrens im dialektischen Anhypotheton auf seine Weise gerecht zu werden. In der ‚Logik der reinen Erkenntnis' geht Cohen daher tatsächlich über die Problembestimmung der ‚Infinitesimalschrift' hinaus, freilich ohne daß er die Auffassung der Idee als Hypothesis deshalb aufgibt. Der Grund für diese Vertiefung in den ‚Ursprung' aber liegt im Einheitlichkeits-Anspruch des philosophischen Systems" [Lembeck 1994, 122]. Hierbei wird die Hypothesis wieder (im Gegensatz zur „Infinitesimalschrift") zum „letzte[n] Anker", d.h. zur „zureichende[n] Voraussetzung gesetzmäßigen Seins" (vgl. Kap. 1.1), indem Cohen den „vermeintliche[n] Methoden-Dualismus Platons überholt, weil Logon didonai und Hypotithesthai als ‚gleichbedeutend' [Cohen 1914, 211] erwiesen sind: Als Verfahrensmuster ein und desselben Rechtfertigungspostulates: Logon didonai als das ideale Ziel der ‚Rechenschaft'; Hypotithesthai als der unendliche Weg dorthin.[10]" [Cohen 1924, 309]

Aus dieser platonischen Herangehensweise Cohens versteht sich die scheinbar widersprüchliche Entstehung eines Etwas bzw. eines x aus dem „Nichts" [Cohen 1914, 84], aber auch gleichzeitig aus dem „dx" [Cohen 1914, 125], dem Infinitesimalen, dessen zu Grunde liegendes Prinzip nicht weniger bedeutet als „*aus dem Unendlichen das Endliche zu constituiren.*" [Cohen 1883, § 47] Nun gilt aber, dass einerseits das Nichts, andererseits das Unendliche das Etwas verantworten soll. Was ist der Hintergrund dieser Doppeldeutigkeit?

Es gilt, dass dasjenige Denken, welches im angegebenen Sinne „rein" ist, keinen „Anfang in Etwas *außerhalb* seiner selbst" haben kann [vgl. Kap. 1.5, 3.1] und dass die Logik, als „*Lehre vom Denken, welche an sich Lehre von der Erkenntnis ist*" [Cohen 1914, 13], keine (Hilfs-)Wissenschaft neben sich duldet [vgl. Kap. 2.4]. Somit ist klar, dass für Cohen jedes „Hinzufügen und Beilegen" zu dem Denken, sei es Sinnlichkeit, Empfindung oder Existenz als „unerlaubt" gilt. Zuallererst muss das Denkprinzip des Ursprungs walten, um eine Erzeugung zu bewirken. Diese Erzeugung, dieses Etwas, dieses Sein oder dieses x findet als Fragezeichen zum Denken und „*bedeutet nicht etwa die Unbestimmtheit, sondern die Bestimmbarkeit.* Es ist daher gleichbedeutend mit dem echten Sinne des Gegebenen. Denn im x liegt schon die Frage, woher es komme, worin es entspringe." [Cohen 1914, 83] Am „Anfang der Erkenntnis", in der „Aufstellung des Etwas", eben im Urteil gilt es nun den Ursprung des Etwas zu suchen, der im Etwas nicht liegen kann, da das Etwas schon, sobald es als x identifiziert werden kann, Bestimmbarkeit enthält. Und das „Urteil darf daher einen abenteuerlichen Umweg nicht scheuen, wenn anders es in seinem Ursprung das Etwas aufspüren will. Dieses Abenteuer des Denkens stellt das *Nichts* dar. *Auf dem Umweg des Nichts stellt das Urteil den Ursprung des Etwas dar.*" [Cohen 1914, 84]

Der *Vermittlungsbegriff* „Nichts" ist „[n]icht etwa die Aufrichtung eines Undings, welches den Widerspruch zum Etwas bezeichnen sollte, [...] vielmehr eine Ausgeburt tiefster logischer Verlegenheit die doch aber nicht bis zur Verzweiflung an der Erfassung des Seins sich entmutigen lässt." [Cohen 1914, 84f.] Diese logische Verlegenheit ist (natürlich) an die formallogische Verlegenheit des Denkens der Unendlichkeit geknüpft und lässt sich am unendlichen Urteil beschreiben. Das limitierende oder unendliche Urteil hat die Aufgabe einen unendlichen Inhalt zu beschreiben, stellt also eigentlich eine Unmöglichkeit dar. Unser Urteilsvermögen geht dieses Problem prinzipiell an, wenn es gilt, „den Ursprung desjenigen Begriffs zur Definition zu bringen, der das Problem bildet." [Cohen 1914, 89] So kann beispielsweise mit der Idee der Unsterblichkeit das Prinzip der Seele entwickelt werden

[10] Vgl. H. [Cohen 1924, 309]: Rechenschaft und Hypothese „ergänzen einander: die Rechenschaft fußt auf der Hypothese, und die Hypothesen zielen auf die Rechenschaft hin."

und daraus die Prinzipien der Vernunft und des Geistes abgeleitet werden.[11] Und so ist das Nichts „keineswegs ein selbständiger, abgeschlossener Inhalt. [...] Zur Entdeckung des Ursprungs bedurften wir des Nichts, wenigstens als eines Mittels. Es war kein absolutes Nichts, sondern nur ein relatives, auf einen bestimmten Entdeckungsweg gerichtetes. Es war ein Ursprungs-Etwas [... sowie ein] Kunstgriff". [Cohen 1914, 104f.] Es geht darum, das ‚Unbestimmbare' zu benennen, so wie das nicht ‚zu Ende denkbare' Unendliche, das dadurch, dass es den Begriff des Unendlichen erfährt, als eine Idee gleichsam zum Prinzip wird. Ein weiteres Beispiel ist das Unendlichkleine: „Das Unendlichkleine ist das instructivste Beispiel für die Fruchtbarkeit, den Plan und Wert des limitirenden Urtheils. Um das *Endliche* zu bestimmen, aus den Voraussetzungen und Gesetzlichkeiten, denen es entstammt und zugehört, letzlich zu *erzeugen*, dazu wird es nothwendig, eine Art *wissenschaftlichen Seins* zu erdenken, welche *zunächst* nur durch ihren *Unterschied vom Endlichen* zu charakterisiren ist." [Cohen 1883, § 42]

Das unendliche Urteil erlaubt es uns somit, prinzipiell alles miteinander in Beziehung zu setzen, und geht damit einher, dass „conscientia non facit saltus". Wie in Kap. 3.1 beschrieben, bildet jedes Urteil eine Einheit, d.h. es findet eine Diskretion statt, aber eben nicht ohne gleichzeitige Konkretisierung durch einen vorherigen Abgrenzungsprozess, der tief in die Erfahrungswelt eindringt. Dieser Abgrenzungsprozess ist von *limitativer* Art, mit der Möglichkeit unendlich vieler negativer, in Bezug auf die Identität der Urteile paarweise disjunkter Urteile. Dabei ist durch die Endlichkeit unseres Denkvermögens, d.h. die Unmöglichkeit, unendlich viele Urteile zu bilden, die immerwährende Aufgabe durch die Begriffe veranschaulicht. Durch diese limitativ urteilend entstandene Idee der Verschiedenheit wird der Ursprung einer Urteilshinsicht umschrieben in der Möglichkeit für jedes Etwas immer noch ein weiteres, abgrenzbares Nicht-Etwas zu finden, „was Platon auch so ausdrückt: ‚An jedem Begriff ist viel Seiendes, unzählig viel aber Nichtseiendes.'" [Lembeck 1994, 127]

Dies ist die radikal idealistische Position Cohens: „Das Sein selbst soll durch das Nichtsein, wobei die Grundlage die Idee des Unsein bildet, seinen Ursprung empfangen. Das Nichtsein ist [jedoch] nicht etwa ein Korrelativbegriff zum Sein; sondern das relative Nichts bezeichnet nur das Schwungbrett, mit dem der Sprung kraft der Kontinuität ausgeführt werden soll. Aber im Abstrich gegen dieses künstliche, abenteuerliche Gebild vollführt sich die *Sonderung*. Und so bewährt sich diese zugleich als *Einigung*." [Cohen 1914, 93] Das Schwungbrett ist „[d]er Muth des Denkens, dass für den Geist ein solcher Zusammenhang erreichbar sei", mit der man „getrost auf ein X ausgehen dürfe, durch dessen Begrenzung nicht etwa eine alberne, gegenstandslose Verneinung begangen, sondern eine Position behauptet

[11] Vgl. [Cohen 1914, 88]: Cohen kommentiert obiges mit den Worten „wie man auch über die Beweise denken mag, [...] so ist ihr Wert unbestreitbar"

und für dasjenige Element geltend gemacht wird, von welchem das Denken ausgehen muss.“ [Cohen 1883, § 41] Das ist, was das Urteil ausmacht, es hat in seinem Ursprung das Gesetz der Kontinuität für den Zusammenhang und die Idee des Nichts für das Sprungbrett, für den Motor des Denkens als die unendliche Aufgabe des Denkens. In diesem ursprünglichen Prinzip der Urteilsbildung findet eine Durchdringung statt. Das Denken des Seins durchdringt das Sein des Denkens. Das Mein wird dadurch dem Ich zur unendlichen Aufgabe. Es ist Grundlage der Durchdringung und Verbindung von Kontinuität und Diskretion, Unendlichkeit und Endlichkeit, Freiheit und Grenze. So bildet sich in der Erzeugung vereinigend die Sonderung und gleichsam sondernd die Vereinigung. Und in „der *Erhaltung* der beiden Richtungen vollzieht sich und besteht diejenige Vereinigung oder Einheit, welche das unendliche Urteil als das Urteil des Ursprungs darstellt.“ [Cohen 1914, 91]

So muss der letzte Grund seiner Geltung als eine letzte *Grundlegung* verstanden werden und die Grundlage des Urteils ist das Nichts, aber da seine Hypothesis Idee ist, liegt sie zugleich im Land der unbegrenzten Möglichkeiten, mit einer unendlichlichen Anzahl möglicher kategorialer Bestimmung: „Gemeinsam begründen Sein und Nichtsein so den Geltungswert der Erscheinungswelt. Auf diese Weise wird in einem großen Wurf beseitigt, was Platon noch als Problem der Idee des Seienden formulieren konnte – indem die Idee ihres ontologischen Status entkleidet und zur *Urteilshinsicht* depotenziert wird. Und dementsprechend wird auch die Existenz zu einer solchen Idee.“ [Lembeck 1994, 132]

Die Ursprungskategorie haben wir kennengelernt als Ausdruck für die unendliche Rechenschaftsforderung der Vernunft im Hypotithesthai. Der Ursprung ist also bei Cohen Kategorie für das Urteil des Ursprungs, was bedeutet, dass die Kategorien in erkenntniskritischer Analyse unmittelbar zur Idee führen, da in der Idee sich Urteilsinhalt und Urteilsform dort durchdringen, wo das Erzeugen und das Erzeugnis einerlei sind: „Die Kategorien münden in Ideen, da sie als die ‚Urteilsrichtungen‘ die Begriffe prägen, die den Anspruch erheben, im Urteil einen Gegenstand inhaltlich zu bestimmen.“ [Lembeck 1994, 129] Das Urteil des Ursprungs ist eine „Urteilsrichtung“ oder eine „Urteilshinsicht“, denn „mit der Frage nach dem Ursprung treten die einzelnen Dinge in einen Zusammenhang mit einander.“ [Cohen 1914, 79] Die Ursprungsbildung in Form eines unendlichen Urteils verweist auf das Systematisieren des Denkens. Das einzelne Ding erhält im System seine Bedeutung durch gleichzeitige Abgrenzung und Eingliederung. Das Systematisieren als der Systematisierungszwang des Denken basiert auf einem Grundgesetz des Denkens, der Kontinuität. Sie ist Voraussetzung des unendlichen Urteils, die „Kontinuität betrachten wir daher nicht als eine Kategorie, welche durch das unendliche Urteil des Ursprungs erzeugt würde; sondern es muß ihr, der Bedeutung des Urteils des Ursprungs gemäß, eine sich tiefer und weiter erstreckende

Bedeutung zuerkannt werden. Eine solche behauptet von altersher das Denkgesetz gegenüber der Kategorie. *Die Kontinuität ist ein Denkgesetz.*“ [Cohen 1914, 91] Die Kontinuität erhält somit eine primäre Stellung. Das Ursprungsurteil ist die Grundlegung des Urteils, ohne auf den Inhalt des Urteils zu referieren und damit eigentlich Ursprung jedes Gedanken. Trotzdem scheint es, als würde dieser Ursprung eines Urteils nicht in dem Sinne ursprünglich sein, wie es das Wort proklamiert. Dies liegt an dem Cohenschen Ideenbegriff, der es erlaubt, das Urteil des Ursprungs in seiner Formalität mit dem Inhalt in Bezug zu setzen. Denn das ‚Nichts‘, aus dem ein jedes Urteil entspringt, ist nur die Setzung eines Anfangs im unendlichen Urteil. Das Nichts ist eine Setzung nach dem Vorbild des Unendlichkleinen, nach dem aktual Unendlichkleinen der mathematischen Wissenschaft. Hier wird eine Leistung des Denkens beschrieben, die sich dem Denken eigentlich entzieht. Jeder Bewusstseinsinhalt ist in seiner Betrachtung diskret, d.i. ein Produkt der Abstraktion. Dieser Bewusstseinsinhalt ist aber in die Kontinuität des Bewusstseins eingeflochten, denn kein Gedanke aus dem Nichts ohne vorherige Motivation – kein Bewegtes ohne Beweger. Die Kontinuität des Bewusstseins ist durch das Denkgesetz der Kontinuität zwingend gegeben. Wir haben also einen kontinuierlichen Zusammenhang im Bewusstsein, der in der Betrachtung des bzw. eines Bewusstseinsinhalts durchbrochen wird, sobald die diskrete Einheit vorliegt. Der Bewusstseinsinhalt, wie er in seiner *Aktualität* entsteht, ist in der Betrachtung ein *historischer*. Dort lässt sich ein kontinuierlicher Verlauf nicht mehr nachzeichnen, da das unendliche Urteil als Grundlage eine Grundlegung schafft, die – mit den Worten Platons – eben „unzählig viel Nichtseiendes“ in den begriffenen Inhalt legt und mit dem unzählig Vielen die Diskretisierungsleistung des Denkens überfordert. Das Endliche ist immer zumindest ein unendlichkleiner Fehler! Dies ist nicht unmittelbar als der Fehler eines Ganzen als Summe seiner Teile anzusehen, sondern als ein Fehler in der Unmöglichkeit der Fassbarkeit aller Teile. Ersterer Fehler kommt erst noch dazu. In diesem Sinne existiert das eigentliche Unendliche eigenständig und vor aller Potentialität sowie das Ganze vor dem Teil bzw. dessen Einheit. Die in ihrer Aktualität eigentliche Unendlichkeit ist zwar nur durch die Potentialität für den menschlichen Geist erfassbar. Jedoch erst durch das idealistische Setzen von Aktualität oder Absolutheit lässt sich die Potentialität erfassen.

Dies ist die Eigenschaft unseres Denkens: Das Unendliche existiert doppelt im Urteil des Ursprungs: Es existiert in den unendlichen Möglichkeiten der Motivation und in einem Unendlichkleinen als dem ‚Nichts‘, aus dem die Motivation Inhalte entspringen lässt. Dieses aktual Unendliche ist aber nur in seiner Potentialität *nachvollziehbar*, trotzdem aber *begreifbar (formal begrifflich fassbar)*: So, dass mit dem Denkmittel der Kontinuität das Endliche *antizipierend* überschritten werden kann [s.u. & vgl. Kap. 1.2]. Die Antizipation in ihrer Undeutlichkeit beschreibt bestens eine Unzulänglichkeit des Denkens – dort, wo die formale Logik versagen muss.

Dass die Urteilstafel Cohens nicht formallogisch zu deuten sind, wird insbesondere auch bei anderen beiden Urteilen der Denkgesetze, den Urteilen der Identität und des Widerspruchs, deutlich. Alle drei Urteile sind grundlegend für unser Denken und zeichnen das *qualitative* Denken aus.

Das transzendental-logische Urteil der Identität ist ein Urteil der Denkgesetze, für das Cohen im Rückgriff auf die Mathematik Bolzanos[12] zwischen Gleichheit und Identität unterscheidet: „*Gleichheit wird hier zu einer Art unter der Gattung der Verschiedenheit.* Die Identität aber entspringt aus einer Vergleichung, die keine ist, nämlich aus der Vergleichung eines Dinges *lediglich mit sich selbst.*“ [Cohen 1914, 103]

Die Identität bezieht sich demnach auf die Denkleistung ‚Selbiges‘ zu identifizieren. Diese Leistung vollzieht sich im Urteil als Erhaltung des Inhalts, denn die „Idee ist ein Doppelwert. Sie bezeichnet und stempelt das wahrhafte Sein. Aber der Prägestock liegt im Denken, im reinen Denken. Die *Hypothesis* bildet die Verbindung: die *Grundlegung wird Grundlage.* Die Idee fordert daher vor allem die *Erhaltung,* als den Bestand der Unveränderlichkeit. Ohne Sicherung der Unveränderlichkeit des reinen Denkens gäbe es keine Bürgschaft für das wahrhafte Sein.“ [Cohen 1914, 94] Es liegt kein Akt des Vergleichens vor, da dieser eines anderen, zu vergleichenden Elements bedarf. Es geht nicht um ein Urteil der Form $A = B$, auch nicht $A = A$, denn „man hat kein Recht die Identität als ein *Denkgesetz* zu proklamieren, wenn man sie als Gleichheit formuliert.“ [Cohen 1914, 102] Denn dann hätte das Element seinen Halt aus der Gegenüberstellung aus formallogischen Gründen und wäre *stets* der Willkür der Vergleichung ausgesetzt. Das Denkgesetz der Identität bedeutet Erhaltung des in seinem Ursprung entdeckten Elements in seiner Selb(ständ)igkeit, nicht in seiner Ähnlichkeit mit sich selbst. Es ist eine Versicherung im kontinuierlichen Denken, so „bedeutet die Identität die *Affirmation des Urteils*“, sie ist die Ankerkette des endziel- und endlos treibenden Denkens. [Cohen 1914, 97] „*Die Kontinuität verbürgt den Zusammenhang des Elements mit seinem Ursprung. Die Identität dagegen den Zusammenhalt des Elementes in sich selbst*; trotz der Verschiedenheit, trotz der Mehrheit seiner Erscheinungen in Vorstellungen des Bewußtseins.“ Kontinuität und Identität sind eben keine Verhältnisse, sondern jedes ist „Grundlage und Voraussetzung zu jedem Verhältnis, insbesondere aber auch zu solchen Verhältnissen, welche die Mathematik zu stiften vermag.“ [Cohen 1914, 103]

Und genauso wie „*die Kontinuität das Urteil von der Empfindung scheidet, so*

[12] Bolzano: „Ich verstehe also unter Einerleiheit (Identitas) einen Begriff, der aus der Vergleichung eines Dinges (lediglich) mit sich selbst entspringt. Der Einerleiheit setz ich kontradiktorisch entgegen die Verschiedenheit. Die Verschiedenheit teile ich abermals in die zwei kontradiktorischen Spezies: Gleichheit und Ungleichheit. Sonach setzt Gleichheit die Verschiedenheit voraus.“ ([Bolzano 1804, 44] & vgl. [Cohen 1914, 102f.])

scheidet die Identität das Urteil von der Vorstellung. Die Veränderungen, denen die Vorstellung unterliegen mag, tangieren das Urteil nicht. [... Es] bedeutet die Identität Tautologie: nämlich dadurch, daß durch Dasselbe ($\tau\alpha\grave{\upsilon}\tau\acute{o}$) das Denken zum Logos wird.“ [Cohen 1914, 95]

Durch das Urteil der Identität steht „die grundsätzliche Forderung, daß A, als Erzeugnis des Urteils, in Identität verharre“. Diese Verharrung würde aber ins Wanken geraten, „wenn nicht durch den Widerspruch die Kompetenz der Identität verstärkt würde.“ Cohen vergleicht diesen Prozess mit einer Schiffsfahrt. Der Anspruch, dass das Erzeugnis des Urteils in Identität verharrt, ist hierbei eine Fahrt, die einem sicheren Stern am Himmel folgt, der durch das Denkgesetz der Kontinuität gegeben ist. Diese Fahrt ist aber ebenso durch die Kenntnis der Klippen gesichert und diese bildet das Denkgesetz des Widerspruchs. „Die Identität ist das Gut, ist der Wert. Der Widerspruch ist der Schutz, das Recht.“ [Cohen 1914, 108f. & 118]

Der Sinn dieser Verneinung im Urteil des Widerspruchs ist die „*Sicherung der Identität gegen die Gefahr des non-A*“. Das *Abdizieren* im Urteil des Widerspruchs geht nicht auf das Prädikat ‚non-A‘, denn dies ist „keineswegs schon ein [geschlossener] Inhalt, sondern es beansprucht nur, ein solcher zu sein. Die Verneinung aber abdiziert ihm diesen Wert. *Es gibt kein non-A*, und es darf kein non-A geben, welches im Unterschiede von dem Nichts des Ursprungs, einen geschlossenen Inhalt hätte.“ [Cohen 1914, 107]

Das Urteil der Negation ist eben kein Urteil des Mangels, wie Cohen durch seine Kritik der Aristotelischen Privation klarstellt. Die Aristotelische Privation spricht „*nur ein[en] Tatbestand bezüglich des A*“ aus, es ist also kein Urteil, das *nicht* das A thematisiert, sondern das non-A, da mit dem Mangel des A das Prädikat ‚A‘ abgesprochen wird. „Für Aristoteles aber war es eine Hauptaktion seiner Metaphysik, das non-A in privativer Bedeutung lebensfähig zu machen: es sollte das *Potentielle* [...] im Unterschiede vom *Aktuellen* [...] bedeuten.“ Die Abdiktion geht dann nicht mehr auf die Identität von A, sondern auf ein Ideal, auf ein metaphysisches Ursprungsbild. Es scheint somit, dass bei Aristoteles die Verneinung nicht im Urteil stattfinde, sondern den Dingen immanent wäre und diese mit einem Ursprungsbild als einem „absoluten Prius“, welches ein Gewesenes darstellt, verglichen werden. Aber „*[n]icht das absolute Ursprungsbild ist die Norm des Nicht-Seienden, sondern das Urteil mit seinem Denkgesetze des Widerspruchs.*“ [Cohen 1914, 109f.] Da Aristoteles damit die Negation mit dem Mangel vermischt und Unwahrheiten so als Mängel bezeichnet werden, unterstellt Cohen der Aristotelischen Philosophie im Skeptizismus enden zu müssen (vgl. [Cohen 1914, 115]). Dort, wo Aristoteles ein metaphysisches einzig-wahres Ur(sprungs)bild setzt - wofür ihn die Philosophie des Mittelalters so gerne zitiert (vgl. Kap. 2.2) - vermisst Cohen die Selbständigkeit der menschlichen Erkenntnis. Aufgrund dieses Gedanken eines metaphyisischen

Ursprungsbildes ist das Unendliche in der aristotelischen Philosophie nur in seiner Potentialität denkbar (vgl. Kap. 2.1).

Für das Urteil des Widerspruchs als dem Urteil der Verneinung muss gelten: „*Dem scheinbaren Nichts muß das echte Nicht entgegentreten.*“ [Cohen 1914, 105] „Das Nichts hat die Bildung eines Substantivs; denn obwohl es ein Unding ist, ist es doch ein Operationsbegriff. Das Nicht dagegen bezieht sich nur auf die Tätigkeit des Urteils selbst. [... Es] geht und ficht die Tätigkeit des Urteils selbst an. [. . .] Die Verneinung ist *nicht*, wie man gemeint hat, *ein Urteil über ein Urteil*, sondern vielmehr, wenn man so wollen möchte, ein *Urteil vor dem Urteil.*“ [Cohen 1914, 105f.] Es handelt sich dementsprechend nicht um ein unselbständiges Urteil, das eigentlich aus zwei Urteilen besteht und dem Urteil der Identität nachfolgt, sondern es ist eine „*selbständige*, unentbehrliche Leistung, *die der Verneinung, als Widerspruch*, obliegt“ [Cohen 1914, 106]. Wie beim Urteil des Ursprungs und der Identität haben wir ein qualitatives Urteil vorliegen, das dem Denken die Grundlage gibt. Das ist der herausragende Zug der Cohenschen Philosphie, die „mit dem Denken anfängt“. „Die Erzeugung des reinen Denkens darf nicht mit dem *Ding* selbst anfangen; ebensowenig aber auch darf sie mit dem *Seienden* beginnen. Aus dem scheinbaren Nichts muß das Etwas hergeleitet werden, um einen wahrhaften Ursprung zu empfangen.“ Wir haben hier eben „*nicht eigentliche Kategorien, sondern an deren Statt stehen die Denkgesetze.*“ Genauso wie bei der Kontinuität haben wir hier Voraussetzungen für das Denken, die für jeden Denkinhalt notwendige Bedingung sind. Ohne diese Bedingungen lässt sich kein Gedanke denken:

„Und indem wir die Qualität nunmehr als Grundlage erkennen, die doch unverkennbar reine Grundlgegung ist, so haben wir uns auf den Platonischen Weg begeben, der von der Grundlegung zum Sein führt. Solche erzeugende Bedeutung sprechen wir also der Qualität zu, und demgemäß den Arten des Urteils, die sie unter sich faßt. Kein Sein, kein Gegenstand, keine Erkenntnis vor ihr. Aber alles Sein, aller Gegenstand, alle reine Erkenntnis durch sie und aus ihr.“ [Cohen 1914, 119f.]

3.3 Die Urteile der Mathematik

Das Urteil des Ursprungs sowie die Urteiele der Identität und des Widerspruchs sind Urteile des reinen Denkens, die allesamt als Voraussetzungen für jede Art von Erkenntnis und damit von Grundlegung dienen. Diesen Urteilen des Denkens und insbesondere dem des Ursprungs kommen dabei die Führung der Qualitäten zu. Die Qualitäten bilden somit „den ersten Schritt, den das reine Denken zu tun habe.“ Mit einem qualitativen Urteil beginnt alles, es „gibt keinen Körper und keinen Gegenstand und kein Sein vor der Qualität.“ [Cohen 1914, 120] Das Urteil des Ursprungs ist die Basis und mit dem Ausdruck des Ursprungs wird die Selbständigkeit der Erkenntnis und die Souveränität des Denkens fixiert. Es gibt keine Vor*gabe* durch ein immer schon und ohnehin vorhandenes Ding, das es dann erst zu erklären gilt. „Das *Gegebene* ist ein Vorurteil der Empfindung und der Vorstellung. Das Urteil bedeutet [uns immer ein] reines Denken; daher muss jedes *letzte* Element desselben vielmehr ein *erstes* sein. Und dieser Formalismus des Ursprungs hat seine Sachlichkeit in dem [nun folgenden] Urteil der *Realität* bewährt.“ [Cohen 1914, 587] D.h., das Urteil der Realität soll den Übergang vom bloß Qualitativen zum quantifizierbaren ‚Ding‘ leisten.

Es ist diese Unterscheidung von qualitativen Urteilen, die als Voraussetzung des Ursprungsurteils bedürfen, auf der einen Seite und der quantitativen sachlichen Urteile, die Realität verantworten, auf der anderen Seite, die dem in der Infinitesimalschrift erschienen Kapitel zur Grundlegung der Erkenntniskritik nun den system-philosophischen Rahmen gibt. Der Wert des Prinzips der Infinitesimal-Methode wurde dort als unumgängliches Mittel zur Verbindung von Qualität zur Quantität in unseren Urteilen vorgestellt. Da durch die qualitativen Urteile der Denkgesetze „die allgemeinen Grundrechte des reinen Denkens verbürgt sind, kann die vorbildliche Art des reinen Denkens, kann [nun] das Denken der Mathematik beginnen“, das in der Bedeutung der „Mathematik für die mathematischen Naturwissenschaft“ zu nehmen ist [Cohen 1914, 121]. Das mathematische Urteil interessiert in seiner Anwendbarkeit auf die Natur, in welcher es stets die methodische Führung in Anspruch nimmt. Im mathematischen Urteil sollen Inhalte erzeugt werden und zur Geltung gelangen, „[k]ein Gebilde darf daher als *gegeben* letztlich betrachtet werden; sondern, wie die Bewegung in ihrem Fortschritt bestimmt werden muss, so muss auch das mathematische Denken diesem rastlosen Laufe folgen, und an das Werden sich anklammern, und in seine Spuren seine Siegel drücken.“ [Cohen 1914, 122]

Das *dynamische* System Cohens macht so auch vor der reinen Mathematik keinen Halt - es setzt sich den damaligen statischen Ansätzen von Grundlegungen innerhalb der Wissenschaft der Mathematik entgegen - und zeichnet ein Bild der mathematischen Grundlegung, das ganz im Zeichen der kontinuierlichen Bewegung steht. Der Fortschritt ist somit ursprünglich, was aber nicht heißen soll, dass die Mathematik durch eine solche philosophische Grundlegung einer Relationalität unterliegt. Nein, diese Grundlegung hat ihren Urpsrung und ihre feste Bestimmtheit durch die nun folgenden mathematischen Urteile der Cohenschen Philosophie und *„jeder Fortschritt derselben muss [zudem] stets von Neuem in demselben Ursprung entspringen“* [Cohen 1914, 123].

Das erste mathematische Urteil ist das der Realität und symptomatisch für Cohen steht es in direktem Bezug zur Differential- und Integralrechnung. Um Cohens Verständnis für den Realisierungsakt zum Ausdruck zu bringen, sei nochmals (wie in Kapitel 1.1) Cournot zitiert, der „nicht bloß einen geistreichen Kunstgriff“ in der Infinitesimal-Methode sieht, sondern den *„natürliche[n] Ausdruck der Entste-*

hungsart physisischer Größen, welche nach Elementen wachsen, die kleiner sind, als jede endliche Größe". Es gilt demnach „daß die unendlichkleinen Größen *in der Natur* existieren" und man „bei dieser Vorstellungsart sehr passend die Funktion $f'(x)$ die *erzeugende oder ursprüngliche* Funktion und $f(x)$ die *abgeleitete* Funktion nennen" könnte [Cournot 1845, 41f.]. Dies soll hier im Urteil der Realität verallgemeinert werden.

Dass das Urteil des Ursprungs darin obwalten muss, sieht Cohen sowohl durch Newton als auch Leibniz bestätigt. Bei Newtons Fluxionstheorie zeigt sich, dass die Fluente, die die lineare Bewegung darstellt, durch den Begriff der Fluxion, bei dem sich Newton in seiner Notation der Null bedient (das $\overset{0}{x}$, vgl. Kap. 1.2), ihren Anfang und ihren Fortgang nehme und damit das ‚relative Nichts' den Anfang bildet. Genauso finden wir bei Leibniz das Differential als das Unendlich-Kleine bestimmt (im Gegensatz zu den Indivisiblen, vgl. Kap. 1.2) und mit dx bezeichnet, welches der Grund war, dass „[n]icht jenes Unendliche der metaphysisch-theologischen Spekulation, sondern das Unendlichkleine [...] fortan als der Archimedische Punkt erkannt werden" soll. Es soll für Cohen sogar „der Zentralpunkt der gesamten Mathematik werden", was er selbst mit den Worten kommentiert: „[A]ls ob es eine Ironie wäre auf das Unendliche" [Cohen 1914, 125].

Da Cohen die Eigenständigkeit des Denkens in den Vordergrund stellt, gilt es, das dx als ein *Positives* und *Selbständiges* zu interpretieren: Wie ein Etwas erst realisiert werden muss, um diesem einen Zahlbegriff anzuhängen, gilt für das freilich von x abhängige dx, dass aber für das dx „diese Bedeutung der Realität zu urgieren [ist]: daß es ein Seiendes, vielmehr das Seiende bedeute, auch wenn x nicht wäre; oder genauer dass dx das Seiende bedeute, *damit* x und *sofern* x in die Bedeutung desselben gehoben werden könne." [Cohen 1914, 135f.] Diese Einstellung hat weitreichende Konsequenzen für das Verständnis der Wissenschaft der Mathematik.

Hierbei verweist Cohen auch auf seine daraus resultierende Unterscheidung der mathematischen Kontinuität und der Kontinuität als Denkgesetz in Hinsicht auf die bereits vorgestellten qualitativen Urteile in Kapitel 3.1: Letzteres bedeutet den Zusammenhang des x mit seinem dx, also des Etwas mit seinem Nichts als Ursprung, während in der Mathematik die Stetigkeit den Zusammenhang der Infinitesimalien, d.h. der dx, bedeutet. Damit ist im Gebiete der mathematischen Urteile die Kontinuität eine Folgerung aus der Differenzierbarkeit, was sich dann auch deduktiv durch die Beweisbarkeit dieser mathematischen Aussage verifizieren lässt! Auch aus erkenntnistheoretischer Sicht versucht Cohen einen Nachweis zu liefern und verweist auf Leibniz, der „an dem Unendlichkleinen das *Gesetz der Kontinuität* entdeckt und behauptet" hat. „So führt die Realität zur Kontinuität und enthält sie in sich. *Und auf diesem Zusammenhang der Realitäten beruht die Ableitung des Gegenstands.* Diese Kontinuität der Realität ist reine Erkenntnis, und zwar nicht als Denkgesetz, sondern als reine Erkenntnis der Mathematik.“ [Cohen 1914, 136f.]

Dass damit enorme Angriffe auf die damals anerkannte Philosophie der Mathematik verbunden waren, war Cohen wohl klar; und dass dies von den führenden Mathematikern nicht unkommentiert blieb, zeigt sich in den folgenden Kapiteln. Dass aber diese Wertschätzung des Unendlichkleinen als „Realitätseinheit“ nicht völlig von der Hand zu weisen ist, belegt Cohen mit mehreren Fakta der Wissenschaft(en). Es führt beispielsweise zuallererst kein Weg an der Vorstellung des Unendlichkleinen (auch in der Grenzmethode) vorbei, wenn Bewegung berechnet werden soll. Entsprechend lässt sich Bewegung ohne das Mittel der Realität nicht beschreiben. Damit ist das Prinzip der Infinitesimal-Methode Grund für die Verbindung von Mathematik und Naturwissenschaft und somit auch der Ursprung für die Disziplin der neuzeitlichen mathematischen Naturwissenschaft.

Ein weiteres Argument für die ursprüngliche Einheit des Unendlichkleinen gibt ihm, Cohen, Galilei (vgl. Kap. 2.2), den er mit den Worten zitiert: „[D]ie wahre Einheit sei die Unendlichkeit“ [Cohen 1914, 137]. Klar ist, dass diese wahre Einheit keine potentielle sein kann, da dazu die Vorstellung der Mehrheit benötigt wird. Mit gleichem Argument kann es auch nicht die Einheit des ‚Einen‘ (= 1) sein. Von dieser wurde schon in der Antike die „monadische Einheit“ unterschieden, die sich in der „*Absolutheit und Ursprünglichkeit der Realität*“ [Cohen 1914, 137] enthüllt. Diese Absolutheit ist befreit von Vorurteilen, was die (Zahl-)Einheit der Mehrheit nicht von sich behaupten kann. So ist es auch „nicht von ungefähr, dass *Leibniz*, der Entdecker des Unendlichkleinen zugleich der nachdrücklichste Verfechter dieser Einheit ist. Nur die[se] Einheit erzeugt und gewährleistet nach ihm das wahrhafte Sein. So bedeutet [auch] uns die Realität die wahrhafte Einheit.“ [Cohen 1914, 138] Dies führt zu folgendem Fazit: „*Es gibt kein anderes Mittel, die Naturgesetze zu formulieren; nein, nicht allein zu formulieren, sondern kein anderes auch, sie zu begründen, den Grund für sie zu legen und denselbigen auch zu bearbeiten, als welches in dem Unendlichkleinen gesichert und ausgestaltet ist.*“ [Cohen 1914, 134]

Es ist der methodische Wert der Realität wie auch des Ursprungs, der herausragt. Zuerst setzt die Qualität ein, dann folgt die Quantität. Cohen gibt mit der Kategorie des Ursprungs die Voraussetzung, das Unendlichkleine den *ersten* Gegenstand der Mathematik werden zu lassen. Im Unendlichkleinen verbinden sich Qualität und Quantität und der gewünschte Übergang wird so *methodisch* gerechtfertigt. Gleichsam ist der Ursprung die Wurzel, aus der jeder Fortschritt, jede Fortführung einer Motivation, sei sie in- oder extrinsisch, entspringen kann. Genauso wie jeder Ursprung ein Etwas impliziert und das Etwas durch die Urteilshinsicht/-richtung schon Kontinuität und Bewegung impliziert: „Die absoluten Einheiten des Unendlichkleinen lassen keine Kluft und keinen Sprung und keinen Abstand bestehen; Kontinuität durchwaltet in ihnen das Seiende, [...] [f]reilich handelt es sich dabei nicht mehr um *Zuordnungen*, als eigentliches Ziel; sondern um *stetige Neuerzeugung des Ursprungs*." [Cohen 1914, 165f.] D.h. das Unendlichkleine muss auch mit jeder Zahl verbunden sein, was folgende Konsequenz für die Philosophie der Mathematik nach sich zieht: „*Demgemäß erzeugt das Urteil der Realität die Zahl, als Kategorie. [...A]ls Prinzip der mathematischen Naturwissenschaft, als Erkenntnis für den Gegenstand bestimmen wir die Zahl als Kategorie*." [Cohen 1914, 138] Zwar erhält es erst in der Rechnung mit den endlichen Zahlen Sinn und Bedeutung - es kann mit sich selbst nichts anfangen - aber es ist in *Rücksicht* auf die endlichen Zahlen erzeugt worden: „*In der infinitesimal-Methode wird x als die endliche Zahl, schon in Mehrheit vorausgesetzt; denn es wird diesem x die Variabilität zugedacht.* Darin besteht der Unterschied von [einer Variablen] x und [einer Konstanten] A, sowie der von x und 1, daß in x, weil die *Bestimmbarkeit*, deshalb die Variabilität gedacht wird. Diese aber ist der algebraische Begriff der Mehrheit." [Cohen 1914, 167]

Dieser Punkt bildet auch den Ansatz für den Sprung von den qualitativen zu den quantitativen Urteilen, ohne die Kraft der Urteile des Ursprungs, der Identität, des Widerspruchs und der Realität zu überschätzen und zuvor auf nicht gegebene Inhalte oder psychologische Ausdrücke zu referieren. In den unendlichen Ordnungen des Unendlichkleinen, die der absolute Ursprung der Zahl in sich enthält und die von der Realität enthüllt werden, verrät sich im „eignen Begriffe die Forderung, welche über ihre [sc. der Zahl] absolute Einheit hinausgeht. Und so ergibt sich auf der höchsten Spitze ihrer Entwicklung die Möglichkeit, weil die Notwendigkeit, ihres Zusammenhangs mit der endlichen Zahl, also mit der Mehrheit." [Cohen 1914, 148] Mit dem Urteil der Einheit der Mehrheit liegt nun das nächste selbständige Urteil der Mathematik dar.

Es bleibt die Selbständigkeit gewahrt, dadurch, dass wir „auch die Mehrheit in der *Tätigkeit* erzeugen, in der sie sich vollzieht [. . .] und das symbolische Zeichen derselben, +, muss, wie die Aufgabe, so die Lösung enthalten." [Cohen 1914, 148] Diese Selbständigkeit konnte Kant mit der Trennung von Anschauung und Denken (s. Kap. 1.3) nicht leisten, so ist „der Schematismus ein Zeichen davon, dass Kant in den Kategorien an sich die Realisierung nicht als zulänglich anerkannt hat." [Cohen 1914, 151]

Die Verschiedenheit als Begriff der Wirklichkeit erhält bei Cohen deshalb ihre Bestimmung im Urteil der Mehrheit und muss sich nicht der Gegebenheit der Anschauung fügen. Diese Mehrheit entsteht antizipierend und dies (nur) mit Hilfe der Kategorie der Zeit: Die Zeit kann das realisierte (bestimmte) Etwas ($= A$, im Gegensatz zum variablen und bestimmbaren x) als (vergangenes) Faktum nutzen (unmittelbar und nicht projektiv) und das Urteil der Mehrheit mit der Antizipation, eben jenem „Charakteristikum der Zeit", ein Mehr im Sinne von ‚+ dasgleiche nochmal usw.' setzen. Dabei setzt das Urteil der Mehrheit „*in der Ersonderung* *der Vergangenheit von der ursprünglichen Tat der Zukunft*“ [Cohen 1914, 154f.]. Damit ermöglicht sich Inhalt und Verschiedenheit - selbstverständlich aber nur im Rahmen der *mathematischen* Urteile, also kein substanziell oder gar physisch bestimmter und unterschiedener Inhalt.

Es liegt also schon im Begriff der Zahl, da er in seiner Abstraktion ein Gattungsbegriff ist, die Vorstellung einer Menge der Zahlen. „*Alle Abstraction erstrebt Gemeinsamkeiten*, Gattungen, Arten, nicht Individuen festzustellen.“ Das ist auch die Bedingung der Möglichkeit, Gleichungen mit Unbekannten zu bilden und zu lösen. Das Zählen „setzt und befestigt *discrete Einheiten*.“ Aber in „der That liegt in der Zahl, sofern sie das *Princip der Discretion* zu sein scheint, zugleich die Ueberwindung derselben.“ Die Zahl ist eine Aufgabe, ist wie auch das Infinitesimale als Idee Hypothesis, d.h. funktionale Aufgabe, und im Umgang mit ihr liegt die Überwindung der Diskretion. Sollte die Möglichkeit der ohne Ende fortlaufenden Addition oder die durch sich aufdrängenden Funktionalisierungen (Subtraktion, Multiplikation, Division) entstehenden negativen Zahlen oder rationalen Zahlen noch nicht Indiz genügend sein, so unterbricht zweifelsohne „die *Irrationalzahl* thatsächlich die Bestimmtheit der endlichen Discretion, führte sie daher auch zu ihrem Surrogat für die anschaubare Endlichkeit, dem Begriffe der *Grenze*. In dem Begriffe der Irrationalzahl liegt somit die Aufforderung zum Verlassen der Discretion. [. . .] *In der Irrationalzahl ist bereits das Princip der Continuität der treibende Gedanke, und der legitimirende.*“ [Cohen 1883, § 43]

Dabei ist die Unerschöpflichkeit unendlicher Prozesse durch Mehrheiten von Einheiten keine Unzulänglichkeit des Denkens – nein, das Urteil der Mehrheit hat genau in dieser Unbestimmtheit ihr Ziel und so ihren selbständigen Wert. Egal ob konvergent oder divergent, in dem Ziel des Abschluss bzw. der Vollendung der Reihe stoßen wir auf eine Grenze, d.h. die Logik verlangt nach neuen Begriffen, denn „*[d]ie Vollendung der Reihe, das ist der Begriff der Reihe.* So tritt an die Stelle der Mehrheit hier die *Allheit*.“ [Cohen 1914, 178f.] Die Allheit ist eine ungezählte Zahl, ein unendlicher Zusammenschluss, der in der Mathematik, insbesondere der Algebra integriert werden muss. Es soll der Fokus dabei nicht nur auf den endlichen Gliedern liegen, sondern insbesondere auf dem Begriff der Zusammenfassung. Hier stellt sich Cohen dem Vorwurf der Kritiker der Infinitesimal-Mathmematik entgegen, die darin einen „Widerspruch“ sehen, „daß das Unabgezählte eine Zahl bilden könnte“. Der Zahl der Mehrheit widerspricht es auch - aber: „[W]ir stehen nicht mehr bei der Mehrheit, die Allheit erzeugt die Erweiterung des Zahlbegriffs dadurch, daß sie einer fiktiven Sonderung und Antizipation die Bedeutung nicht sowohl eines Abschlusses, als vielmehr eines *Zusammenschlusses* zu geben mag.“ [Cohen 1914, 180] Dieses Urteil des Zusammenschlusses gilt es nun als ein selbständiges und unumgängliches auszuzeichnen.

Ein Problem, das nur ein Urteil der Allheit zu lösen vermag, bescheinigt Cohen der Algebra, da diese „den Zusammenschluss, den die Allheit der Reihe bedeutet, nur durch ihre Operations-Symbolik definieren, aber nicht in der *Ausrechnung* darstellen [kann]. *Diesem Mangel der Algebra soll die Infinitesimalrechnung abhelfen.* Die Ausrechnung und Ausnutzung der algebraischen Formeln ist ihr Problem. *Sie besteht demgemäß in der Verbindung des Infinitesimalen mit dem Unendlichen der Allheit.*" [Cohen 1914, 182] Da die Infinitesimalrechnung nun dem Begriff der Allheit ihre mathematische Selbstständigkeit gewährt, hat die Allheit infinitesimale Realität zur Voraussetzung. Dies heißt nichts anderes, als dass Cohen die Grenzwertanalysis in der Infinitesimalanalysis erzeugt sieht. Hierin postuliert Cohen 1902 schon das Programm einer algebraischen Erweiterung der reellen Zahlen, wie es dann mit der Nonstandard-Mathematik über 50 Jahre später publik wurde: „Die Infinitesimalrechnung will nichts anderes als nur ein Mittel, nur das zulängliche Mittel sein für die Bestimmung des Endlichen. Ihre Kontinuität durchströmt die Diskretion, und löst sie auf; aber nur um sie um so gediegener wieder aufzubauen. So verhält es sich auch bei dem unendlichen Zusammenschluß, den die unendliche Reihe bedeutet." [Cohen 1914, 179]

Das Urteil der Allheit, d.h. des unendlichen Zusammenschlusses, sieht Cohen auch unumgänglich mit der Kategorie des Raumes verbunden. Nur in der Voraussetzung dieses Urteils wird räumliche Erkenntnis möglich, denn erst in der von der Endlichkeit entrückten Allheit bildet sich der Zahlbegriff zu der fortgeschrittenen Art von reiner Erkenntnis aus, die auch Grundlage für das Integral und damit der Inhaltserzeugung ist. Die Mehrheit war für die Vermittlung von Verschiedenheit eingetreten. Die Verschiedenheit des ‚Mehr' war aber auf die Summation, das + reduziert. Erst im unendlichen Zusammenschluss findet die Abgrenzung statt, die es erlaubt *„den Inhalt des von A verschiedenen B zu erzeugen."* [Cohen 1914, 184]

Die mathematische Legitimation sieht Cohen in der Integralrechnung, die aus der Berechnung von Flächen*inhalten* und Volumina entstanden ist und unendliche Summationen zum Abschluss bringen soll. Nimmt man integrierend Bezug, dann kommt neben der Kategorie der Zeit dann auch die Kategorie des Raumes mit ins Spiel. „Mit dem Raum wird eigentlich zum ersten Male der korrelative Wert des Denkens für das Sein zu einem prägnanten Ausdruck gebracht" [Cohen 1914, 188], da sich der Bezug des Inneren und Äußeren im Denken erklärt. Generell gilt, dass dem reinen Denken nichts gegeben sein darf, wir haben es bei der Kategorie des Raumes demnach nicht mit der Kantischen reinen Anschauung zu tun, die zwar den „mystischen Abschweifungen" seines Vorbilds Newton, der den Raum als *„Sensorium Gottes"* sieht, Einhalt boten, aber dem Denken seine Selbständigkeit nimmt. Der Raum ist in unseren bisherigen Gedanken immer schon mitgedacht, so wie er in jeder Empfindung und Vorstellung schon konstituierend vorhanden war. „Schaltete die Zeit allein, so würde zwar die *Anlage* zum Inhalt bereitet werden, ein Inhalt selbst aber würde sich nicht bilden." Die Kategorie der Zeit hat die Einheiten der Mehrheit erzeugt, diese Mehrheit aber ist eine „abschlußlose Relativität", der die Allheit zu Hilfe kommt. Sie bringt den „Zusammenschluß". Und darin, im Urteil der Allheit, vollzieht sich der Zusammenschluss zum Raum als Kategorie. Damit sind Raum und Zeit unmittelbar mit einander verstrickt: „Jetzt rauschen Zukunft und Vergangenheit nicht in einem wechselnden Vorbei. *Der Raum hält diese Einheiten fest* [. . .]. Das *Beisammen*, vielmehr *das Zusammen ist die neue Leistung*, die dem Raum obliegt; die der Raum vollführt." Und das „*Beisammen vollzieht die Erhaltung*", „*bedeutet das Äußere*" und „bildet den Inhalt". [Cohen 1914, 192–195]

Die Zeit als Kategorie, die durch die Einheit der Mehrheit schon bestimmt ist, entbehrt der Vergegenständlichung, sie könnte nicht außerhalb ihrer Funktionalität gedacht werden, da sie nicht in einem ‚Beisammen' fassbar wäre. Nun aber ist der Zeit ihr ‚Raum' gegeben in dem sie sich ausdehnen kann (und Natur gestaltet werden kann), während die Zeit in der Einheit und der Möglichkeit für die Antizipation dem Raum Fundament für dessen Ausdehnung liefert. Die Zeit als der ‚Wechsel', das ‚Vorbei', erhält mit dem Raum seinen Fixpunkt, womit sich das Innere zum Äußeren verwandelt, indem der Raum dem Aufbau im Inneren der Zeit mit dem ‚Beisammen' seinen Inhalt liefert. „So ergiebt sich der Raum als das *entscheidende Mittel, den Inhalt zu erzeugen.* Und es ist der unendliche Raum, dem diese Leistung gelingt." Darin liegt die Selbständigkeit des Urteils der Allheit. Die Einheiten $0, 1, 2, 3, ...$ brauchen den Begriff $\mathbb{N}$ um sich ‚räumlich' von den Einheiten $0, 1, -1, 2, -2, ...$ der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder den Einheiten der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu unterscheiden. „Wenn der Raum lediglich sich mit der Mehrheit verbinden müsste, [. . . würde er] *als eine Art der Zeit erscheinen.* Die Allheit dagegen durchläuft die unendliche Reihe der Einheiten, faßt sie in einem Beisammen zusammen, überwindet das Vorbei der Zeit, und erzeugt so den Raum." [Cohen 1914, 197f.]

3.4 Die Urteile der mathematischen Naturwissenschaft und der Methodik

Wir haben die Urteile der Denkgesetze und der Mathematik kennengelernt, wobei die Mathematik für die Sprache der reinen Logik Buchstaben in Form von „Zahlen in Zeit und Raum [liefert]; mehr kann sie nicht leisten." [Cohen 1914, 219] Um Substanz und im Anschluss Gesetz und Begriff zu fundieren, liegt es nun an den Urteilen der mathematischen Naturwissenschaft. Wie bei Kants Substanzbegriff gilt auch bei Cohen: „*[I]n Gleichungen vollziehen sich die Bestimmungen, welche die mathematische Naturwissenschaft von den Kräften, also von der Substanz zustande bringt.* Sie sind die Sätze [...] zu denen die Buchstaben der Mathematik verbunden werden. Bei ihnen also, in ihnen liegt das Wesen der Dinge" [Cohen 1914, 217]. Für diese Fundierung gilt es, sich von dem Vorurteil des fixen Dinges der geschlossenen Gegebenheiten mathematischer Urteile lösen. D.h. die Urteile der Mathematik müssen miteinander verbunden werden und so auch Raum und Zeit. Dafür muss insbesondere die Möglichkeit der „Veränderung“ berücksichtigt werden und so rückt der Begriff der Bewegung in den Mittelpunkt, denn „Bewegung ist der Terminus, der alle Probleme der mathematischen Naturwissenschaft umfaßt, sie alle vereinigt. Man kann die mathematische Naturwissenschaft als die *Wissenschaft der Bewegung* bezeichnen.“ [Cohen 1914, 223f.]

Schon im Urteil des Ursprungs und der Realität ist Bewegung als Grundstein in der ‚(Urteils-)Richtung‘ zu erkennen, so auch beim Übergang vom dx zum x, aber es handelt sich dabei um eine „rein abstrakte Schaffung“; „die Bewegung ist hier[bei] nur ein Gleichnis.“ Wohingegen es sich bei der ‚bewegten‘ Zeit in der Erzeugung der Mehrheit nur um „*Nachbildung*“ handelt. [Cohen 1914, 228] Die Antizipation und die Zeit werden der Bewegung nicht gerecht, obwohl es scheint, als würde die Zeit die Bewegung enthalten. Der methodische Wert der Bewegung liegt nämlich viel höher, da „die Bewegung eine Zusammenfassung und Vereinigung der mathematischen Methoden bilde[t]“ und eine „solche Vereinigung der Methoden kann den Raum nicht gänzlich ausschließen.“ Bei der Bewegung „geht die Auflösung des Beisammen, als die Auflösung des Raumes, in die Zeit zurück.“ [Cohen 1914, 231f.] Der Raum wird also nicht ausgeklammert, er bildet auch „*kein fixes Bild* mehr, sondern er wird zum *Projektionsfeld*, zum Schauplatz für die Veränderungen, welche in methodischen Operationen an und auf ihm zur Vollziehung kommen.“ Dies ist der neue methodische Wert der Kategorie der Bewegung, sie verbindet die mathematischen Urteile und löst damit das ihr gegebene Problem der Veränderung. In diesem „Projektionsfeld für Veränderungen“ gilt es nun ein Gegengewicht zu schaffen, um die Bewegung nicht in bloßer Raum-Zeit-Relation entschwinden zu sehen. Einer solchen Darstellung, d.i. keine kategorische Erhaltung in Korrelation zur Bewegung, entspräche eine Koordinatendarstellung ohne die Fixpunkte der Achsen. Es braucht „das Sein für die Bewegung“, als einen „positiven Betrag“ für eine „Inhaltsbildung“: „Und so erkennen wir die korrelative Bedeutung der Substanz an dieser *Immanenz der Erhaltung in der Bewegung*.“ Substanz dient also zur Vereinigung von Bewegung und Erhaltung: „Dadurch erst soll es möglich werden, einen festen Punkt zu bestimmen. [...] Nicht der Raum ist es, der die Erhaltung darstellt; noch auch das Sein schlechthin, geschweige das absolute Sein; sondern die Erhaltung selbst, als Kategorie, ist mit der Bewegung nicht nur vereinbar, sondern ihr immanent, oder vielmehr nicht immanent, sondern eben nur ihr korrelativ. *Und in dieser rein logischen Vereinigung vollzieht sich der Inhalt; besteht der Inhalt.*“ [Cohen 1914, 233–236]

Hierin liegt die Geltung des Ursprungsurteils, das in der Auflösung des Beisammen konstitutiv die kontinuierliche Neubildung des erzeugenden Punktes für seine Richtungslinie grundelegt. Sowie die Kontinuität in den Urteilen des Ursprungs und der Realität zur Prägnanz kommt, so kommt sie auch in der Betätigung selbiger Urteile im Urteil der Substanz für die Begriffe wie Geradlinigkeit, Gleichförmigkeit und Beharrung zu tragen. So war es auch die Infinitesimalrechnung, die „ein für allemal die Illusion von einer ewigen Antinomie des Denkens in diesem Schlupfwinkel zerstört", der auch im Paradoxon von Zenos Pfeil dem Altertum gegeben war, wo Beharrung in Ruhe (Ruhe als komplettes Entsagen und Auflösen der Bewegung) anstatt in infinitesimale Realität aufgelöst wurde. [Cohen 1914, 245] Die Substanz ist sozusagen das Korrelat zur Bewegung, „in welcher die Realität, der Buchstabe, in den Satz der Gleichung eintritt. Die Bewegung aber hatte die Beharrung zur Voraussetzung. Und in der Beharrung liegt die neue Leistung der Substanz." [Cohen 1914, 254] Die Substanz ist demnach die Vorausseztung für die Veränderung und so auch für das Verhältnis von Raum und Zeit; sie ist aber nicht das Verhältnis selbst. So ist als das Zugrundegelegte die Bezeichnung „*Unbekannte*" oder „x" „*der genaue Ausdruck für die Substanz*". [Cohen 1914, 222]

Um diesen Buchstaben, der „in den Satz der Gleichung eintritt", funktional deuten zu können, benötigt es ein nächstes Urteil, das des Gesetzes mit den dazugehörigen Kategorien der Kausalität und der Funktion. Die Leistung des Urteils des Gesetzes liegt in einer relationalen Synthesis, die auf der Voraussetzung der infinitesimalen Kontinuität getätigt wird, um diese Buchstaben einer Abhängigkeit zu unterwerfen, d.h. in *kausale* Verbindung zu setzen. Das Gesetz soll die infinitesimalen Realitäten mit der Substanz vereinbaren – „[d]iesen Zusammenhalt [. . .] fordert der Gang der Wissenschaft". Und „das Vermögen mit ihnen [sc. den infinitesimalen Realitäten] zu arbeiten, bezeichnet die *Funktion*, die fundamentale Methode der mathematischen Naturwissenschaft." Die Funktion stellt als Kategorie die mathematische Grundlage für die Kausalität: „*Die Kausalität wird zur Funktion gebändigt.*" [Cohen 1914, 589] Liegt die klassische Funktion $y = f(x)$ vor, so ist die Kausalität, also das Wirken des x auf ein y, durch die Funktion f beschrieben. Es ist x die Substanz und $f(x)$ ist die der Substanz entsprechende Bewegung und so gilt es, die „*Substanz in der Bewegung*", „nicht nur *für* die Bewegung" zu erhalten. „In dieser Bedeutung der Erhaltung der Funktion besteht die Leistung der eigenen Kategorie der Kausalität." [Cohen 1914, 285f.] Es darf aber die Unmittelbarkeit von x und y nicht vergessen werden, die auf Grund der infinitesimalen Kontinuität gegeben ist. In der Funktion wird die Verschiedenheit von y und x „herabgedrückt". Indem y sich als $f(x)$ denken lässt, „entsagt es für den Zweck der Rechnungsoperation dem Anspruch der Verschiedenheit, und unterwirft sich der Gleichartigkeit mit x". [ebd., 283] Dabei muss klar sein: „$Y = f(x)$ bedeutet an sich nur eine einseitige Abstraktion", es ist also noch nicht möglich „einen Gegenstand in dieser bloßen *Vor*bedingung zu vertreten", da die Möglichkeit fehlt, Gegenseitigkeit, Wirkung mit Gegenwirkung und den *Zweck* aufzuzeigen. [Cohen 1914, 338]

Mit dem Urteil des Gesetzes ist es durch die Funktion der Kontinuität nun zwar möglich Bezugspunkte zu schaffen, in denen gegenseitiges Aufeinandereinwirken und somit ein Bewegungszusammenhang formalisiert werden kann. Es liegen aber erst Einzelpunkte vor und diese „Vereinzelung muß überwunden werden, wenn es zum Gegenstande kommen soll.“ Denn der Gegenstand braucht seinen Halt, er kann eben nicht aus dem Nichts entstehen, sondern unterliegt einer Urteilshinsicht. „Und diese Überwindung leistet das System; die Reaktion ist hinwiederum nur das Mittel, das System zu erzeugen und dadurch den Gegenstand. Denn freilich gibt es kein anderes methodisches Mittel, den Gegenstand zu erzeugen als die Funktion der Kausalität. [...] Aber wir sehen jetzt genau, daß auch sie doch nur *Vor*bedingung ist. Das System erst vermag das Ding, den Gegenstand zum Zusammenschluß zu bringen.“ [Cohen 1914, 337]

Was nun Gegenstand und System unter den allgemeinen Titel des Begriffes bringt, ist der Zweck, der bei Allem vorherrscht. Der Zweck als „*Richtung* auf die Methoden der Forschungsarbeit hin“ [Cohen 1914, 369] ist das „*ewige Fragezeichen*“ [Cohen 1914, 352], das ständige Problem, das alles und jeden Begriff zur endlosen Aufgabe ständiger Anpassung (unter anderem der Kategorien und der Methoden) macht. „Er bewahrt die Eigentümlichkeit des Problems, und weist für die Bearbeitung desselben auf den notwendigen Zusammenhang mit den einzig fruchtbaren Methoden hin. Dieser Zusammenhang zwischen Zweck und Kausalität, an deren entscheidende[n] Methode, die nicht ersetzt werden kann, die Anpassung zu erfolgen hat, ergibt sich aus dem *Zusammenhange des Zwecks mit den Kategorien des Gegenstandes und des Systems unter dem allgemeinen Titel des Begriffs.*“ [Cohen 1914, 362] So gilt, die „*Begriffe selbst, die reinen Voraussetzungen, die reinen Erkenntnisse, sie bilden ein System.* Kein System ist abgeschlossen, wie kein Begriff. Neue Aufgaben wachsen aus den neuen Lösungen heraus. Aber auch die neuen Aufgaben müssen in die alten Lösungen hineinwachsen. Das fordert das System.“ [Cohen 1914, 395] Der Zweck ist also keine Ergänzung, die der Kausalität zugeordnet wird, sondern der Zweck ist das selbständige Problem, dem methodisch, d.h. qua Kausalität, entgegen zu kommen ist.

Dieses systematische und vor allem methodische Denken, das zwanghaft versucht, Lösungen für nie endende Aufgaben zu finden, Lösungen, die im selben Moment ihres Erfolgs nicht zur Genugtuung, sondern nur zur nächsten Aufgabe führen, braucht für seine Forschung eine Klassifizierung seiner Urteile. Die Urteile der Methodik der Forschung unterteilt Cohen in die der Möglichkeit, der Wirklichkeit und der Notwendigkeit.

In den bisherigen neun Urteilen und den darauf aufbauenden Kategorien hatten wir die Anleitung für das konstitutive Denken. Das Denken wird, um alle seine Möglichkeiten zu umfassen, nun mit dem ‚nicht Undenkbaren‘ konfrontiert. Dabei geht es nicht mehr, ja, *darf* es nicht mehr um die bloße Konstitution wie in den bisherigen naiven Urteilen gehen, da mit der Möglichkeit, die im ‚nicht Undenkbaren' liegt, die Methode zur Erzeugung neuer Gegenstände, d.i. *konstruktive Forschung*, gegeben sein muss.

Das ‚nicht Undenkbare' ist in der Cohenschen Philosophie das Feld des Bewusstseins: Die Kantische Einheit des Bewusstseins wurde, wie in Kap. 3.1 beschrieben, zum Sammelbecken aller möglichen wissenschaftlichen Urteile und damit „[a]lle[r] noch so verschiedenen Probleme" erweitert und die „*Möglichkeit stellt sich [damit] als der Ort dar, der das Bewußtsein als Kategorie entstehen läßt.*" [Cohen 1914, 420] Im Cohenschen kritischen Wissenschafts- bzw. Kulturbewusstsein erhält das Denken „*außerhalb* desselben Bestand und Gewähr" [Cohen 1914, 455]. Und das Denken erhält genau dann außerhalb seiner Selbst „Bestand und Gewähr", wenn es sich forschend betätigt, d.h. wenn im Bewusstsein *positive Kritik* gegenüber dem Denken geäußert wird, womit gilt: „[D]ie Möglichkeit betrifft das Verhältnis zur Forschung. *Das Urteil der Möglichkeit ebnet die Disposition für den Anfang und Ansatz der wissenschaftlichen Forschung.* Hierzu ist auf Schritt und Tritt Kritik notwendig" [Cohen 1914, 429]. Der Forschungsanstoß obliegt dem Zweck und damit dem Bewegungszwang des forschenden Denkens, und dort zeigt sich der Zusammenhang von Bewusstsein und Möglichkeit in der Hypothese als Instrument der Kritik, dem „Kunstgriff, dessen Möglichkeit in diesem seinem Werte als Kunstgriff besteht." Das heißt, der Umfang der Urteile der Möglichkeit ist in den Möglichkeiten der Hypothesen des kritisierenden Bewusstseins gegeben. Die Möglichkeit der Hypothese äußert sich darin, dass während die bisherigen naiven Urteile *separiert* Geltungsanspruch erheben, in den kritischen Urteilen eine „*Vereinbarung der Mittel*" stattfindet und der Urteilslogik zu höchster Potenz verholfen wird [Cohen 1914, 432]. Der Ursprung für jedes Urteil und jede Kategorie als dessen Voraussetzung gelingt in der Voraussetzung der Möglichkeit als „der allgemeine Schacht, aus dem die Forschung ihre Werkzeuge heraufholt, sofern sie als Werkzeuge der Kritik zu fungieren haben. *Und es hat sich in dem Bewußtsein ein Quell der Möglichkeit herausgestellt, dessen Tiefe dem Ursprung entsprechen dürfte.*" [Cohen 1914, 455]

Ein grundlegendes Werkzeug der Forschung ist die Kategorie des Maßes, die sich in der Möglichkeit der notwendigen Verhältnismäßigkeit eines jeden Gedankens ausdrückt und als dieses kritisches Mittel eben grundlegend auch die nichtkritischen, konstitutiven Kategorien der Zahl und Größe als ihre Werte legitimieren kann. Dies spiegelt die Cohensche Philosophie der Mathematik wider, denn gemäß der Ursprungstheorie wird im Maß Endlichkeit und Unendlichkeit durchdrungen, da die prägnante Bedeutung des Maßes durch das Unendliche gegeben ist. Als Beispiel nennt Cohen Newtons Unterströmen der Fluxion durch die Fluente („*In dieser Unterströmung liegt das Maß.*" [Cohen 1914, 446]). Dass „*dieselben Verhältnisse*, welche im *Endlichen* gelten, auch im *Unendlichen* gelten", was die Grundlage für

Differential- und Integral-Analysis bildet, sind die Verhältnisse „*d[ies]es Maßes; und keine anderen.*“ [Cohen 1914, 446] Die eigentliche Leistung der Kategorie des Maßes liegt wie die der Hypothese „in der Begründung der Möglichkeit für neue Wege.“ [Cohen 1914, 476]

Das Urteil der Möglichkeit ebnet den Boden für das Urteil der Wirklichkeit. Im Urteil der Möglichkeit wirkt das Bewusstsein kritisierend auf das reine Denken, für die Wirklichkeit muss sich aber sofort die Frage stellen, ob das reine Bewusstsein nur zum reinen Denken ein Verhältniss hat, oder ob das reine Bewusstsein seinen Wirkungsradius ausdehnen kann bzw. muss, d.h. auf weitere Mittel der Erkenntnis angewiesen ist, um *kritisch* auf Exemplare von *Einzel*gegenständen zuzugreifen, was die Aufgabe des Urteils der Wirklichkeit ist. Das Einzelne muss als ein Isoliertes gelten können, das trotzdem unter das Allgemeine subsumiert wird!

Ein solches weiteres Mittel wäre die Empfindung, die bei Cohen eine Sonderrolle erfährt, da sie durch die Verbindung mit dem Infinitesimalen bzw. der intensiven Größe in Kants Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung eine zentrale Position im philosophischen System trägt. Im Rückblick auf Kant wurde schon darauf hingewiesen, dass „*die Realität nicht für die Empfindung, sondern in der Empfindung zu begründen*“ [Cohen 1883, § 77] ist. Empfindung kann in Cohens Philosophie eben kein selbständiger Garantieschein für Realität sein, da es ein „fundamentale[s] Voruteil [ist], daß dem Denken sein Stoff von der *Empfindung* gegeben werde“, denn für das Denken gilt der Satz, „*daß die Tätigkeit den Inhalt erzeuge.*“ [Cohen 1914, 58f.] Die immerwährende Einheit aus dem Erkenntnis und der Erkenntnis ist der Gehalt des reinen Denkens und der Prüfstein kritischer Analyse! „In der Empfindung antwortet das Bewusstsein auf den Reiz, den das Ding ausübt, in dem das Ding sich bethätigt“ [Cohen 1883, § 105], sie ist damit „das Symptom des Subjectiven“ und diese Subjektivität soll korrigiert werden: „So sehen wir überall, dass *Wissenschaft* darin sich bezeugt: der Empfindung zu der ihr fehlenden Objectivirung anderweit zu verhelfen.“ [Cohen 1883, § 106] Im Cohenschen Verständnis von Transzendentalphilosophie zeigt sich die Quelle der Wirklichkeit nun nicht in der Empfindung, sie ist nur *Mittel* der Erfahrung und es ist klar, dass das wissenschaftliche Denken, „das reine Denken, gar nichts Anderes will und tut als der Empfindung zu Hilfe zu kommen; ihren Anspruch anzuerkennen und aus eigener Kraft zu befriedigen. *Das wird der neue Gegensatz: daß die Empfindung selbst nicht leisten könne, was sie fordert.*“ [Cohen 1914, 436] Besonders deutlich wird die Überschätzung der Empfindungsleistung, wenn man auf den Ursprung einer jeden einzelnen Empfindung blickt: Es ist immer eine Unterschieds-Empfindung, weniger ein Empfindungs-Unterschied. Würden wir keinen noch so kleinen Unterschied realisieren, könnten wir keine Empfindung „spüren“, was nichts anderes bedeutet, als dass „die Empfindung also eine *Unterscheidung*, also eine *Kritik*, eine *Abschätzung* [ist]. Das ist und bleibt die Art des Bewußtseins.“ [Cohen 1914, 450f.]

Das reine Bewusstsein verbürgt die Möglichkeit, somit auch die Möglichkeit der Anspruchsbegründung der Empfindung; und „die Begründung dieses Anspruchs kann nur dadurch erfolgen, daß *alle Elemente des reinen Denkens auf ihre Vereinbarung für diesen Anspruch geprüft* und abgeschätzt werden; das kritisierende Bewußtsein lässt sie alle Revue passieren.“ [Cohen 1914, 453] Es existiert demnach keine Unmittelbarkeit der Empfindung, auf die das Bewusstsein rekurrieren muss, die Empfindung ist immer indirekt.

Wie eine Kernaussage der „Infinitesimalschrift“ verdeutlicht, sehen wir mit der Unterschieds-Empfindung (sei der Unterschied auch noch so klein) die infinitesimale Realität als Bürgen, weil sie „sich uns nunmehr auch als Maß erwiesen“ hat. Dieses Maß garantiert uns Wissenschaftlichkeit nach den Grundsätzen des reinen Denkens und grenzt das Bewusstsein von der „mystischen, instinktiven“ (vgl. Kap. 3.1), nur beschreibbaren Bewusstheit genauer ab. „*Wo die Empfindung als ein selbständiges Datum angenommen wird, da wird Bewußtsein mit Bewußtheit verwechselt.* Freilich ist die Empfindung eine Erscheinung der Bewußtheit; wer wird das in Abrede stellen wollen? Damit aber ist zugleich ausgesprochen, daß man bei diesem Moment nicht stehen bleiben darf, weil man damit schlechterdings nichts anfangen kann. Ein solches Moment der Bewußtheit ist das *Denken* auch, und zwar in allen seinen Formen; aber es bleibt nicht ein solches; sondern es wird *reines* Denken.“ [Cohen 1914, 456]

Mit der Funktion des reinen Denkens an der – in der möglichen Realisierbarkeit gegründeten – Empfindung wird über die Kluft des stets unvereinbar scheinenden Dualismus von objektivem reinen Denken und dem subjektiven Empfinden eine Brücke erbaut. *Diese Brücke hat als Vorbild die Infinitesimalrechnung.* Es beschreibt im Wesentlichen die Möglichkeit, Impulse der Empfindung wahrzunehmen, (Empfindungs-)Nuancen festzustellen, die nicht durch das gewöhnliche quantitative Zahlenmaß auffindbar und beschreibbar sind, sondern der Qualität der unendlichkleinen Größe bedürfen. Es ist klar, dass für Cohen nicht nur die Qualität des Kontinuierlichen ausreicht, um beispielsweise das approximative Bestimmen einer Grenzwertanalyse dem Wert des Infinitesimalen gleichzusetzen, sondern dass hier explizit die infinitesimale Realität, die den quantitativen Anspruch des Ursprungs in sich trägt, das Erkennen beschreiben muss.

Könnte das Beispiel des durch Differentialmathematik entschlüsselten Farbspektrums noch durch die Gegenüberstellung einzelner Farbtöne als approximatives Erkennen verstanden werden, so ist der Übergang vom Nicht-Erkennen zum Erkennen als Impuls (oder in den Worten Kants als Affektion) wohl ein nicht-approximativer Unterschied. Hier spielt auch die Kantische Definition der intensiven Größe eine Rolle, „die nur als Einheit apprehendiert“ werden kann und deshalb nicht „durch sukzessive Synthesis“ gebildet ist, „also nicht von den Teilen zum Ganzen geht“ [Kant KrV, B210]. Übt das Reale Einfluss auf den Sinn aus, so ist diesem ein Grad inne; aber nicht in der Weise, dass das reale Objekt schon ist und dann intensive Größe erhält, sondern durch den Wert der intensiven Größe, der dem Objekt eigen werden kann, wird es zum realen Objekt. Nur weil das Reale intensive Größe hat, kann sie dem Empfinden beigelegt werden – das ist der Kern der Cohenschen transzendentalen Logik und *das* Thema seiner „Infinitesimalschrift", dass Wissenschaft darin sich bezeugt, „der Empfindung zu der ihr fehlenden Objectivierung anderweit zu verhelfen." [Cohen 1883, § 105]

Nun ist die Empfindung bei Cohen nicht der Grundstein aller Wirklichkeit, sondern auf die intensive Größe im Kantischen Grundsatz der Antizipation der Wahrnehmung bezogen. Die Empfindung ist ein Problem, ein „Fragezeichen" [Cohen 1914, 451] und kann ‚lernen', indem sie durch das reine Denken funktionalisiert wird; so lässt uns die (wissenschaftliche) Erkenntnis „Dinge mit ganz anderen Augen sehen", wie ein schönes Sprichwort besagt. In Bezug auf das Erkenntnis der Wissenschaft gilt: „Alles Erkennen stellt, positiv gewendet, als solches darauf ab, mehr zu leisten als was die Empfindung und die bloße Wahrnehmung vermögen, und das heißt zumindest, das, was die Wahrnehmung bzw. die Empfindung (dieses ‚an sich Subjektive') darbieten – und damit in einem weiten Sinne auch diese selbst –, zu *objektivieren*, es (sie) zu verwandeln und zu transfomieren in eine transsubjektive Gestalt. So gesehen ist also alles Erkennen als solches eine ‚Entkräftigung', eine Objektivierung der Empfindung bzw. Wahrnehmung." [Edel 2010, 242]

Das Erkannte als Faktum der Wissenschaft ist Gegenstand des transzendentalen Ansatzes Cohens, es wird also nicht das Subjektive der Empfindung im Prozess thematisiert. Die Realität der Erkenntnis als Realität der Empfindung anzusehen, wäre eine Hypostasierung der Empfindung; sie ist und bleibt zwar immer Mittel der Erfahrung, ist aber als Auslöser ein Fragezeichen, das Fluidum oder die Versuchung, die unselbständig im Rahmen der Logik der reinen Erkenntnis funktioniert und dort objektiviert wird – so wie die Wissenschaft der Neurologie versucht dem ‚wahren' Liebesempfinden der Romantiker (als Musterbeispiel für Subjektivismus) durch den Verweis auf das Fungieren von Hormonen und Neurotransmittern den Reiz dieses Subjektiven oder gar die ‚schicksalsbestimmte Einzigartigkeit' zu nehmen.

Dies lässt sich auch am folgenden Beispiel ablesen: Während das Farbspektrum meist gänzlich sinnlich erfahrbar ist, stellt sich bei anderen Sinnesorganen eine tiefere Problematik. Wie in Kapitel 1.3 schon angedeutet, muss es möglich sein, die Ultraschallortung zu den Empfindungen zu zählen, obwohl sie dem Menschen nicht als unmittelbare Wahrnehmung gegeben sind, da uns dafür kein entsprechendes Sinnlichesorgan gegeben ist. Obwohl die Subjektivität von vornherein fehlt, muss sie in selbem Maße Geltung erfahren dürfen wie die Schallwellen, die das menschliche Ohr verlautbar macht, allein wegen des fließenden Übergangs im Spektrum des Schalls. Sie sind genauso Gegenstand *einer* Wissenschaft und auf

Grund der Messbarkeit ver*gleich*bar. Sie werden durch Bezug auf Gleichheit durch Bestimmung ihrer Größe systematisch zu einem gleichen Einzelgegenstand in der Wissenschaft der Akustik. Diese Vereinzelung drückt sich in der *kritischen* mathematischen Gegenständlichkeit aus, die Qualität und Quantität verbindet und das System der sinnlichen Erfahrung erweitert aber ihre Einheit erhält: Der Gegenstand erhält im System Geltung durch seine errechnete Größe.

Denken ist Denken der Einheit und diese Einheit ist eine systematische. Der sinnliche Reiz als das Fragezeichen der Empfindung wird erst durch das Denken zur Einheit, damit wird das Einzelne zur Bestimmung gebracht. Das Einzelne ist noch keine Einheit, keine Eins: „Das Einzelne ist weder Eins noch Zwei; denn Eins ist auch nur das Korrelat zu Zwei. [...] Die Zahl ist doch nur der Buchstabe für den Satz, den das System der Reaktion bildet. Jetzt aber gilt es im Unterschiede vom System und also auch von der Zahl die *Isolierung* durchzusetzen. Das ist die neue Aufgabe, welche die Empfindung dem Denken stellt. *Das Einzelne ist die Kategorie*, welche den Anspruch, den die Empfindung stammelt, zur *Aussprache* bringt.“ [Cohen 1914, 473] Durch den Reiz des Einzelnen der Empfindung habhaft zu werden, bedeutet, es festhalten, um seiner sicher zu bleiben. Damit wird der Empfindung jedoch keine Selbständigkeit zugesprochen, sondern ein Anspruch, den es in der Arbeit der wissenschaftlichen Forschung aller Art zu beglaubigen gilt. „Nicht als Empfindung darf die Empfindung ihren Anspruch durchsetzen; denn als Empfindung wäre sie nur Bewußtheit. Durch Empfindung kann das Einzelne nicht zur Bestimmung gebracht werden. Nur durch das reine Denken und die reine Erkenntnis kann auch dieser Anspruch des Einzelnen so befriedigt, wie formuliert werden.“ [Cohen 1914, 472]

Im Urteil der Wirklichkeit wurden quantitative wie qualitative Unterscheidungen zur Erzeugung des Einzelnen durch die Größe realisiert. Das Einzelne aber als Summe qualitativer Unterschiede als Be*sonderung* auszuzeichnen, ist erst durch die Notwendigkeit zu vollziehen: Das Einzelne muss erst zum allgemeinen Fall erhoben werden, weil nur durch Vorherrschen eines Allgemeinen eine solche Besonderung in Gegenüberstellung einer Summe von Einzelnem beurteilt werden kann. In dieser Besonderung des allgemeinen Falls kann das Einzelne erst lebendig werden, da dort das Urteil des Einzelnen und der Allgemeinheit vereint werden können. Das Einzelne ist Ausgangspunkt einer einzelnen Gesetzmäßigkeit. Diese einzelne Gesetzmäßigkeit kann aber nur als Deduktion eines allgemeinen Gesetzes systematisiert Geltung erlangen. Die Deduktion kann jedoch kein Urteilssystem erschöpfen und schon gar nicht erschaffen. Das Einzelne verifiziert sich erst im Allgemeinen, während gleichzeitig das Allgemeine durch das Einzelne als die Ausnahme verifiziert wird: „*rückwärts auf die reinen Erkenntnisse und die Prinzipien, vorwärts auf das Einzelne*“ [Cohen 1914, 532]. Das wird durch das kritische Urteil der Notwendigkeit möglich und gleichzeitig der Gradmesser für die Wissenschaft, die als heterogene nun vom ‚Fehler der absoluten Notwendigkeit' befreit wurde. Notwendigkeit nämlich sucht die Wirklichkeit als Voraussetzung. Das Einzelne der Wirklichkeit ist die Vorgabe des Einzelfalls, der zum allgemeinen führen soll.

„Wenn anders also es außer den reinen Erkenntnissen noch allgemeine Gesetze geben muß, welche im eigentlichen Sinne als Naturgesetze gedacht werden, so muß es eine eigene Art des Urteils geben, welche diese besondere Art des Gesetzes zur Erzeugung bringt. *Diese Aufgabe und diese Leistung weisen wir der Notwendigkeit* zu." [Cohen 1914, 518f.] So wie das Einzelne der Wirklichkeit aus seiner Isolierung befreit und zur Erzeugung gebracht wird, wird auch das einzelne Gesetz durch die Notwendigkeit zur Erzeugung gebracht und dieses Urteil vereinigt Sonderung und Vereinigung, denn: Ohne vorherige Synthesis keine Analysis und umgekehrt, ebenso verhält es sich mit Induktion und Deduktion.

Wir haben das Einzelurteil im Urteil der Wirklichkeit mit der auf Grundlage des Maßes bestimmten Größe aufgezeigt. Die Zahl, die Allheit durch den Raum, und das System waren Voraussetzungen für die Größe wie auch die Funktion. Diese müssen alle „in Vollzug treten, wenn das Einzelne zur Bestimmung kommen soll. Diese aber bringen das Einzelne wieder in Gefahr, seinen Eigenwert zu verlieren, und in ein Allgemeines sich zu verwandeln", weswegen das Allgemeinurteil ausgezeichnet werden muss. Denn „[d]ieses Allgemeine, der Ansatz des Schlusses, erzeugt als sein Korrelat das *Besondere*. Mit dem Besonderen erst entsteht die Möglichkeit, das *Einzelne* mit dem Allgemeinen zu vereinbaren [... und] *so wird der Eigenwert des Einzelnen noch genauer durch das Besondere festgestellt*." [Cohen 1914, 593f.]

3.5 Ergänzende Bemerkungen zu Cohens Philosophie der Mathematik

In Herrmann Cohens Philosophie der Mathematik liegt eine Trennung vor zwischen der Mathematik als Prüfstein einer kritischen Philosophie, die in der Mathematik die Methode sieht, die die Naturwissenschaft erst zur Wissenschaft macht, und der Mathematik als Gegenstand ihrer eigenen Wissenschaft. Während in erster Bedeutung die Mathematik die Urteilsbildung reiner Erkenntnis sowie Kategorien, Prinzipien und Gesetze der transzendentalen Logik formt und demnach rein funktional zur Geltung kommt, liegt in der zweiten Bedeutung die Mathematik als ein Wissenschaftsfaktum vor und muss sich ihrer Abhängigkeit von den ihrer Wissenschaft unzugänglichen (z.B. philosophischen) Voraussetzungen und, noch schlimmer, einer Abhängigkeit von empirischen Daten, an denen die Methoden der Mathematik gefunden und zur Anwendung kommen werden, beugen.

Der Cohensche Aufbau der Mathematik ist wie der Aufbau seines philosophischen Systems und damit der Aufbau einer jeder darauf aufgebauten (Einzel-)Wissenschaft ein konstruktiver. In den folgenden Kapiteln wird sich zeigen, dass Cohens Philosophie der Mathematik am ehesten denen des Konstruktivismus und Intuitionismus zuzuordnen ist. Eine grundlegende mathematische Position zu Lebzeiten Cohens zu finden, die den Vorgaben Cohens in den entscheidenden Punkten folgt, ist undenkbar. Es hat erstmal über 50 Jahre gedauert, bis das Infinitesimale als eigenständige mathematische Einheit ernstzunehmende Beachtung im Forschungsdiskurs der Mathematik gefunden hat. Und erst in der heutigen Zeit findet man Ansätze in der nicht-standardisierten „synthetischen Geometrie", die mit der Philosophie Cohens in Verbindung gebracht werden können - insbesondere die „Smooth Infinitesimal Analysis" Bells (s. Kap. 6).

Das Novum bei Cohen ist, dass die Ermöglichung der Zahlentheorie ihren Ursprung in der infinitesimalen Realitätseinheit findet, denn es „erzeugt das Urteil der Realität die Zahl, als Kategorie" (vgl. 2.3). Diese Realitätseinheit ist Ausgangspunkt sowohl der Unterschiedserkennung, die Voraussetzung einer Mehrheit ist, als auch der Antizipationsleistung, die in der Reihenfortführung steckt, die die Zahl erst ermöglicht. Cohen orientiert sich am Vollzug, d.h. dem Entfalten des Erkenntnisakts. Den Anfang bildet die ‚Endknospe', d.h. das dx, und diese erwächst zu einem bestimmbaren x. Hierin zeigt sich dann auch die Leistung der Zahl: die Diskretion, die in der Bestimmung, d.h. im Trennen und Zuordnen, sich verhält. Der Hintergrund ist ein von Cohen mehrfach betonter – nämlich die Mathematik als eine Mathematik der Naturwissenschaft, oder allgemeiner ausgedrückt, als ein Instrument der Wissenschaften anzusehen. Dieser Aspekt muss in der Gegenüberstellung der Cohenschen Philosophie der Mathematik mit seinen Vorgängern, Zeitgenossen und Kritikern sowie seinen Nachfolgern berücksichtigt werden.

So müssen auch philosophische Prinzipien und mathematische Axiome anhand ihres methodischen Unterschieds getrennt werden, sonst wäre es wie „der verhängnisvolle Fehler *Newtons* im Titel seines Werkes, daß er die Prinzipien als *mathematische* bezeichnete; und doch unweigerlich Begriffe der sogenannten *Metaphysik* mit einbeziehen mußte." [Cohen 1914, 208]

Die Zahl (aber auch jedes andere Faktum der Mathematik) ist kein Gegenstand eines naiven Urteils. Jede mögliche Zahl der mathematischen Wissenschaft ist nämlich von tiefergehenden Zahlbegriffen abhängig. Sogar Cohens „Realitätseinheit", das Infinitesimale, muss einen *Ursprung* haben und wird sich als ‚Zahl', das heißt als Gegenstand der Mathematik, unweigerlich in einem *System* wiederfinden (Beispiele dazu finden sich in Kap. 6.2–4). Was damit gesagt werden soll, ist, dass jede Definition mathematischer Gegenstände von den Prinzipien der Philosophie und von *allen* Urteilen der Cohenschen Urteilstafel abhängig ist. Für die scheinbar unkomplizierten natürlichen Zahlen wurde schon auf die tiefgreifende Axiomatisierung Peanos verwiesen (vgl. Kap 2.1.3). Die Zahl ist bei Cohen nicht mehr eine unantastbare Idee des Platonischen Ideenhimmels, sondern eine „hypothetische". Und für ihre Definition gilt damit: „Indem unaufhörlich der Grund vertieft, also das Niveau der Forschung tiefer gelegt wird, wird die Erkenntnis demgemäß reiner; wird daher das Fundament der Wissenschaft gesicherter.“ (vgl. Kap. 1.2 und [Cohen 1914, 305])

So wird auch spätestens im Urteil der Notwendigkeit deutlich, dass Mathematik Kritik braucht. Die Kategorie der Größe ist Voraussetzung des mathematischen Systems, das auf dem Feld der Möglichkeit mit der Kategorie des Maßes als Voraussetzung entsteht. Der *variable* Begriff der ‚(Zahl-)Größe‘ und damit die Mathematik braucht Kritik, denn es ist eine Wissenschaft mit Forschung, die Leistungen der Synthesis und Analytik in Vereinigung und Diskretion sowie Induktion und Deduktion verbindet. Ohne Kritik würde der Gödelsche Unvollständigkeitssatz nicht existieren und eine rein axiomatische Wissenschaft wäre geboren. Dass dann aber die Leistung im Axiom keine formallogische der Mathematik sein kann, sondern sich dem Urteil der Notwendigkeit beugen muss, liegt daran, dass bei Cohen der logische Schluss nicht (mehr) nur mit der Deduktion gleichgesetzt wird. Der Wert der Kritik in der Mathematik lässt sich mit dem Beginn der Axiomatisierung(en) nachvollziehen. Schon die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen ist keine Selbstverständlichkeit und schon gar nicht die der Geometrie. Diese Axiomatisierungen unterliegen erkenntniskritischen Überlegungen. Wie die Philosophie, so lernt auch die Mathematik dazu.

Axiome sind dabei „das allgemeine Trostmittel für den ersten Anfang des philosophischen Nachdenkens; es bekräftigt uns die Richtung auf die reine Erkenntnis, als das einzige Ziel der Logik.“ „*Axiome sind also dazu da, daß Lehrsätze aus ihnen abgeleitet werden.*“ Cohen bemerkt die Krux des Axioms, das einerseits den allgemeinen Fall bilden soll, während es „doch vielmehr das Allgemein bilde[t], das sich in den *einzelnen Lehrsätzen* zum *Einzelnen* entfaltet.“ [Cohen 1914, 517f.] Der Sinn der Notwendigkeit in dem Axiom ist nicht vorwärts, sondern ‚abwärts‘. „Die *Ableitung* ist der Weg, auf den es ankommt.“ Dass die Axiome Gültigkeit vertreten, die keiner Prüfung bedürfen und den Axiomen eine Unbeweisbarkeit als ihr Geschick zukommt, ist „eine logische Unreife, welche schon durch die Idee, als Hypothesis, erledigt sein sollte. [...] Die Axiome haben Notwendigkeit; nicht weil diese ihrem Inhalt, insoweit er ausgedrückt ist, beiwohnt, sondern weil sie neuen Inhalt hervorzubringen vermögen. *Die Notwendigkeit ist faktitativ.* Dieser *erzeugenden* Notwendigkeit unterstellt sich die Allgemeinheit.“ [Cohen 1914, 547f.]

Diese Bemerkungen seien schon vorweggeschickt. Weitere wichtige Begriffe der Cohenschen Philosophie (der Mathematik) sollen nun in Verbindung und Abgrenzung der Begründer der Infinitesimal-Mathematik, der Kritiker Cohens und den Entwicklungen der aktuellen Mathematik diskutiert werden.

4 Die Begründung der Infinitesimal-Methode

Im nun folgenden Kapitel werden zuerst die Positionen Leibniz' und Newtons vorgestellt. Beide sollen größtenteils in der Cohenschen Lesart präsentiert werden, um insbesondere hervorzuheben, dass und inwieweit bei beiden Gelehrten eine Integration *positiver* infinitesimaler Größen in die Wissenschaft durchaus vorgesehen war, denn dieser Aspekt ist eminent wichtig für die Philosophie Cohens und wird sich als ein Hauptkritikpunkt an selbiger herauskristallisieren. Denn wie bereits erwähnt, steht die Auffassung, die Infinitesimalien als eigentliche Größen zu akzeptieren, den Positionen der großen Kritiker Cohens (s. Kapitel 5) entgegen. Diese Ambivalenz wird zwar weder von Leibniz noch von Newton aufgelöst, die Interpretationen Cohens erhalten jedoch ein wissenschaftshistorisches und wissenschafttheoretisches Fundament.

Dies gelingt vor allem, da mit Leibniz und Newton das Augenmerk nun nicht nur auf den herausragenden Mathematikern und Physikern liegt, die die Differential- und Integralrechnung begründeten, sondern auch auf zwei herausragenden Philosophen, die großen Einfluss auf Kant und Cohen ausübten. Für den Wissenschaftstheoretiker Cohen wird dieser Zusammenhang zu einem „beredte[n] Zeugniss für den erkenntnisskritischen Grund des Differentialbegriffs" und er betont, „dass derselbe im Zusammenhange eines philosophischen *Systems* endeckt worden ist." [Cohen 1883, § 50]

Dieses vierte Kapitel fährt hiermit mit der im zweiten Kapitel begonnenen, auf die Philosophie Cohens ausgerichteten Darstellung philosophischer Diskussionen der Prinzipien in der Geschichte der Infinitesimal-Mathematik fort. Neben den Kapiteln 4.1 und 4.2, die sich mit Leibniz und Newton beschäftigen, soll in Kapitel 4.3 mit Cauchy und Weierstraß kurz auf die Entwicklung von der Infinitesimal- hin zur Grenzwert-Methode eingegangen werden.

4.1 Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz war bisher unter anderem schon im ersten Kapitel zum Anschauungsbegriff Thema: Weil Leibniz sein dx bewusst als ein Infinitesimales, d.h. als ein Unendlichkleines, bezeichnet, würdigt Cohen diesen Fortschritt Leibniz' gegenüber den Vorgängern, insbesondere gegenüber Galilei, da jener nur das Unteilbare, das Indivisible, zum Gegenstand hat und nicht das Unendlichkleine. Diese Abgrenzung der mathematischen Größe dx vom Begriff der ‚Teilbarkeit' führte zur Kritik Cohens am Kantischen Anschauungsbegriff (vgl. Kap. 1.3).

Es findet hier aber nicht nur eine Abgrenzung von der extensiven Anschaulichkeit statt, sondern auch eine Auszeichnung der Positivität beziehungsweise der ‚Bestrebung', welche mit dem Differential verbunden wird und welche in der Philosophie Cohens so wichtig ist. Es ist dabei hervorzuheben, dass Leibniz selbst diesen für Cohen zentralen Punkt im Rückblick auf die Wissenschaftsgeschichte anspricht: Er kritisiert in Bezug auf die Arbeiten Galileis, dass es den Ausdruck der „*embryonalen Impetuosität*“ benötigt ([Cohen 1883, § 49] und vgl. [Leibniz 1962, Bd. 4, 159]), um das Infinitesimale in seiner *erzeugenden Positivität* zu verstehen. Im Begriff des Impetus, der den „Andrang der Bewegung, dieses Entspringen der Kraft“ verdeutlicht, liegt für Cohen die Möglichkeit der Infinitesimal-Methode. Zuvor war es nur möglich, das sinnliche Bestreben zu beschreiben, es konnte jedoch noch nicht zur begrifflichen Fixation gebracht werden. Ohne diese Vorstellung des erst entstehenden (embryonalen), sich entwickelnden Impulses konnte Galilei nur Intension im Blick haben und nicht das Ursprungs- und Realitätsurteil im Sinne Cohens [Cohen 1914, 262].

Dieses ‚positive Werden‘, dieses ‚Bestreben‘, das Cohen in der Mathematik mit der Infinitesimal-Methode zum Ausdruck gebracht sieht, ist auch Bestandteil der Leibnizschen Philosophie, insbesondere der Leibnizschen Monadenlehre. Dort wird die Wirklichkeit in ihre letzten, noch so kleinen substantiellen Elemente zergliedert: die Monaden. Diese sind punktförmige *Kraft*zentren und unterliegen dem positiv erzeugenden Streben, einen individuellen Gehalt im lückenlosen, kontinuierlichen monadischen Aufbau des Universums zu präsentieren. Jede Monade ist in ihrer Autonomität unverwechselbar, spiegelt das Universum auf ihre einmalige Weise und ist potentiell ein Spiegel des ganzen Universums. Den Zusammenhang bzw. die Kontinuität des aus lauter abgeschlossenen Monaden bestehenden Leibnizschen Universums liefert dabei eine vollkommene, prästabilierte (von Gott gegebene) Harmonie (s.u.).

Der ausgezeichnete Wert der positiven Schöpfung, die der Monade anheftet, zeigt sich schon darin, dass sie bei Cohen zum Vorwurf gegen Kants Synthesisbegriff verwendet wird. Es ist diese Selbstständigkeit der monadischen Einheit gegenüber der Einheit, die sich aus der Bestimmung des Denkens als Synthesis bei Kant ergibt. Der Kantischen muss die Mehrheit (Mannigfaltigkeiten der Anschauung) „gegeben“ sein, sie entspringt nicht dem Urteil der Realität und nimmt somit dem Denken seine Selbstständigkeit – das ‚Gegebensein‘ „bezeichnet die Schwäche durch welche Kant mit seinem englischen Jahrundert zusammenhängt [. . . und ein] Zeichen derselben dürfte sich auch bei *Newton* erkennen lassen.“ [Cohen 1914, 27] Für Cohen ist damit klar, „daß der rechte Weg durch Leibniz angebahnt und eingeschlagen worden ist.“ [Cohen 1914, 318] Es gilt bei Leibniz jedoch Verflechtungen zur Psychologie aber auch zur theologischen Metaphysik, die sich in der Leibnizschen göttlichen Urmonade oder auch der gottgegebenen prästabilierten Harmonie verankert, zu lösen.

Die Monade vertritt bei Leibniz Kraft und Substanz zugleich, was zwar ermöglicht, dass Substanz „*erstlich* nicht mehr das allgemeine Sein“ ist, „sondern sie steht im innersten Verkehr mit der Bewegung“. Nun soll die Substanz, da sie auf das Bewusstsein bezogen ist, bei Leibniz aber auch noch „*Geist*" bedeuten. Diese Mischung der Probleme zeigt „eine verhängnisvolle Unklarheit", da damit eine ungewünschte Verflechtung mit der Psychologie vorliegt, denn die Kraft „sollte [so auch] in der Monade *Denken und Wollen* harmonisieren." [Cohen 1914, 262f.]

Des Weiteren sollte die Monade zudem „Einfachheit" bedeuten: In der Leibnizschen Monadologie ist ein Körper aus Einfachem zusammengesetzt und dieses Einfache repräsentieren die Monaden. Dass die Monade diese Zusammensetzung erklärt, verdrängt jedoch zwangsläufig den Ursprungsgedanken, in dem vorzugsweise die Realisierung begründet wird. „So wird die Monade in der That nur zum Hilfsmittel des *phaenomenon bene fundatum*", aber „*die Monade sollte das die Dinge realisirende Princip sein, nicht das den Raum phänomenalisirende.*" [Cohen 1883, § 51]

Nicht nur die Bedeutung der „Einfachheit" für die Monade, sondern auch die Vermischung von Substanz, Kraft und Geist ließen den Ursprungsgedanken im Dunkeln, aber in Ansätzen sieht Cohen diesen bei Leibniz vorliegen: Denn indem nun „Leibniz seinem Grundgedanken nachsann, nämlich die Substanz als Kraft zu bestimmen, da war er auf dem Wege nach dem Ursprung." Jedoch, der „Unterschied zwischen Substanz und Kraft liegt in der *Tendenz des Ursprungs*, in der Tendenz der Erzeugung. Die Substanz soll nicht als an und für sich gegeben gedacht werden dürfen. Was sie erzeugt, das ist ihr Sein." [Cohen 1914, 295]

Es bleibt auch festzuhalten, dass Leibniz dabei „das Wort der Intensio gelegen kommen" [Cohen 1914, 295] musste und indem die Intensio die Erhaltung der Bewegung vertritt und zum Prinzip der Kraft wird, fungiert schon bei Leibniz das Unendlichkleine als die Cohensche intensive Realitätseinheit!

Sowohl die Monadologie, die alles in die Grundbestandteile zerlegt, als auch die Einführung der intensiven Größe dx in die Mathematik werden zu Orientierungspunkten für Cohens Philosophie. Wenn Cohen Leibniz als „philosophischen Systematiker" auszeichnet, sieht er bei ihm die Metaphysik als *notwendigen* Bezugspunkt für mathematische wie mechanische Problemlösungen. So sei es „[n]icht schlechthin im Interesse der Lösung und Erweiterung der rein mathematischen Probleme" zur Einführung der infinitesimalen Größe dx gekommen, „sondern im Zusammenhang derjenigen Erwägungen, welche der Sicherung der *Realität* der Dinge in seinem Denken gewidmet waren." [Cohen 1883, § 50] Cohen fasziniert dabei auch der idealistische Zug Leibniz', der zur Entdeckung der Differential- und Integralmathematik führte: die logische Gesetzmäßigkeit des Universums, die im Denkgesetz des Grundes verankert ist und die die doppelte Richtung des wissenschaftlichen Idealismus darlegt: „*nur in der Grundlegung die Grundlage anzuerkennen; in der Grundlegung aber auch der Grundlage sicher und gewiß zu sein.*" [Cohen 1914, 305]

Dabei gilt: „Der Grund darf nicht sowohl ein Besitztitel, als vielmehr ein Aufgaben-

Recht des Denkens sein. *Das Denkgesetz des Grundes muß das Idealgesetz des Denkens bedeuten.*“ [Cohen 1914, 305] In diesem Idealgesetz des Grundes erkennt Cohen die Kraft der Hypothesis und damit die Tendenz seines erkenntniskritischen Idealismus.

Leibniz stellt sich mit dieser Handhabung ideeller Prinzipien und dieser (A-)Priorisierung vernunftmäßiger logischer Gesetzmäßigkeit für das Erkennen nicht nur gegen die in der arstitotelischen Tradition stehenden Mathematiker, sondern auch gegen die angelsächsischen Empiristen und deren Vorstellung eines empiristischen, psychologistischen Kausalitätsbegriff: „Die Kausalität ist nicht [mehr] die Gewohnheit, sondern die Ursprungskraft des Geistes. So hält *Leibniz* solchen Verächtern und Verdächtigern der Vernunft [v.a. Hume aber auch Newton (Anm. d. A.)] das Denkgesetz des Grundes, des zureichenden Grundes entgegen.“ [Cohen 1914, 309] Dieser Grund, bei Leibniz „raison“, befreit mit dem in seinem Worte liegenden Doppelsinn der zureichenden Vernunft den Rationalismus von der psychologischen Gewohnheit. Ja sogar die Kontinuität wäre ohne die Kontinuität des Bedingens, die sich im Gesetz des Grundes findet, aussichtslos: „Die Buchstaben müssen Sätze; die Elemente Gleichungen bilden. So strebt alles Denken den Gesetzen, also auch das Denkgesetz selbst einem besonderen *Denkgesetze des Gesetzes* zu“ [vgl. Cohen 1914, 304f.], das bei Leibniz die „neue Nüanzierung“ des „Denkgesetzes des Grundes“ erhält. Das Vertiefen des Grundes ist das „Aufgaben-Recht des Denkens“, das den Fortschritt der Forschung und somit Fundament der Wissenschaft bedeutet. Leibniz nutzt das Denkgesetz des Grundes hierbei noch in der Bedeutung der Kategorie der Kausalität, um es als Prinzip für den Übergang von der Mathematik zur Naturwissenschaft in der reinen Vernunft habhaft zu machen: „Mais pour passer de la mathématique à la physique il faut encore un autre principe, c’est le principe de la raison sufisante.“ [vgl. Cohen 1914, 306]

Während die Aristotelische Philosophie das Kontinuierliche und Unendliche der vernunftmäßigen Abstraktion und somit auch der mathematischen Behandlung unzugänglich macht (vgl. Kap. 1.1), ja sogar eine Unnatürlichkeit im Unendlichen sieht, da diesem „die Vollständigkeit und das Ziel fehlt, nach denen die Natur ständig strebt“ [Aristoteles 2000, 715b], liegt bei Leibniz in der Kontinuität und dem Unendlich(klein)en „*der Zusammenhang von Sein und Denken*“ [Cohen 1883, § 53], insoweit sogar, als dass in der infiniten Wissenschaft die Bestimmung der finiten liegt: „Duasque habet partes: scientiam finiti [...] et scientiam infiniti, *ubi interventu infiniti finitum determinatur.*[13]“ ([Leibniz 1962, Bd. 7, 53], vgl. [Cohen 1883, § 57]). Denn sie stehen für eine Gesetzmäßigkeit ein und auch wenn diese mathematischen Begriffe als Idealitäten isoliert scheinen, so wird ihre Nützlichkeit

[13]Sie [sc. die allgemeine Mathematik] besitzt zwei Teile: Die Wissenschaft des Endlichen [...] und die Wissenschaft des Unendlichen, *in der man das Endliche mittels des Unendlichen bestimmt.*

damit nicht eingeschränkt, da die aktualen Dinge diesen Gesetzmäßigkeiten folgen müssen. Darin übertrifft Leibniz dann sogar Descartes (in erkenntniskritischer Hinsicht), indem er den mathematischen Gesetzen sogar die Möglichkeit einräumt, die Realität der Phänomene von Träumereien zu unterscheiden: „Ainsi quoique les méditations mathématiques soint *idéales*, cela ne diminue rien de leur utilité, parce que les *choses actuelles ne sauroient s'écarter de leurs règles; et on peut dire en effet, que c'est en cela que consiste la réalité des phénomènes*, qui les distingue des *songes*." ([Leibniz 1840, Teil 1, 189f.], vgl. [Cohen 1883, § 54])

Leibniz habe also die Bedeutung der Idee als Hypothesis gekannt (vgl. auch [Cohen 1914, 305] und Kap. 1.4) und sie in der individuellen Selbständigkeit erwählt, um eine vollkommene Vernunftmäßigkeit des Universums als Voraussetzung seiner Metaphysik zu gewährleisten. Damit setzt er sich von den damals gängigen Theorien ab, indem er so beispielsweise auch Bewegung als etwas Relatives, vom Standpunkt des Betrachters Abhängiges charakterisiert. Er stellt dabei die Gesetze des Grundes, der Kraft und der Kontinuität in den Mittelpunkt, alle als ideelle Vorstellungen. Diese finden sich auch in der Zusammenfassung der folgenden fünf Hauptgedanken Leibniz' wieder:

1. Der Gedanke der vollkommenen Vernunftmäßigkeit des Universums, das heißt seiner logischen Gesetzlichkeit;
2. der Gedanke der selbständigen Bedeutung des Individuellen im Universum;
3. der Gedanke der vollkommenen [prästabilierten] Harmonie der Dinge;
4. der Gedanke der quantitativen und qualitativen Unendlichkeit des Universums;
5. der Gedanke der mechanistischen Naturerklärung.[14]

Parallelen zum Cohenschen erkenntniskritischen Idealismus sind nicht zu übersehen. Insbesondere die schon angesprochenen Punkte eins bis drei sind hervorzuheben. In der prästablierten Harmonie findet die Analogisierung des Bewusstseins mit der erfassten Materie statt, womit sie als Voraussetzung für die Realität gilt. Für die Realisierung ist das Prinzip der Infinitesimal-Methode tragend, das sich in der Monadologie aber auch im Gedanken der qualitativen Unendlichkeit wiederfindent. Obwohl es nicht real existiert, hat das Unendlich(klein)e bei Leibniz somit Geltung in der Natur. Auch in den Punkten vier und fünf sieht man einen Charakterzug der Cohenschen Philosophie, es führt jedoch auch zu einem Vorwurf durch Cohen, da Leibniz in Bezug auf das Infinitesimale eine Trennlinie zwischen dem mathematischen und dem naturwissenschaftlichen Erkenntnisursprung zieht.

[14][Kabitz 1909, 128ff.] und [Störig 1981, 353]

Zwar durchbricht Leibniz die mittelalterliche Tradition der aristotelischen Scholastik und nicht ohne Grund wird diesem Wandel die Möglichkeit der Entdeckung der Infinitesimal-Methode zugeschrieben (vgl. Kap. 1.2 & Kap. 2.1.3). Dieses Programm der vollkommen(en) logischen Gesetzmäßigkeit der Welt geht jedoch in seinen meist strikt formallogischen Tendenzen (s.u.) für Cohen zu weit: „[G]erade Leibniz leidet auch zumeist an der Ueberschätzung der Logik, welche ihm als das Muster und als die einzige Instanz *apriorischer Vernunft* gilt.“ Leibniz ist versucht „die Gesetze der Logik unmittelbar und *als solche* auf die Probleme der Mathematik zu erstrecken“ [Cohen 1883, § 5], d.h. formale Logik auf transzendentallogische Aufgabenstellungen anzuwenden. Leibniz wird es bei Cohen zum Vorwurf, dass er „die Mathematik und alle Naturerkenntnis in die Paragraphos der Logik zwingen [will]“, eben auch dort, wo „jene aber [...] auf eigenem Grunde, aus nichtlogischen Prinzipien [erwachsen]“ [Cohen 1883, 50]. Und damit habe Leibniz den klassischen Fehler eines Logizisten begangen, obwohl er trotzdem mit seiner Philosophie auf das große erkenntnistheoretische Problem, den Übergang von subjektinvarianter formaler Logik auf die Wissenschaft im Allgemeinen zu erklären, aufmerksam gemacht hat.

Es liegt hierbei ein äußerst ambitionierter Versuch Leibniz’ vor, der für Cohen ohne transzendentallogische Argumentation und die Kantische Begriffswelt nicht realisierbar ist. Für ihn fehlt dem Leibnizschen Versuch die Unterscheidung zwischen Kategorie und Idee sowie zwischen Grundsatz und Prinzip und somit die Unterscheidung vom realisierenden Grundsatz des Unendlichen und dem regulativen Prinzip des Einzelnen (s. [Cohen 1883, § 52]) – und dieser Ansatz, der die mathematischen Idealitäten im Endeffekt bezugslos erscheinen lässt, kann dem Cohenschen erkenntniskritischen Idealismus nicht genügen.

Für die Kritik an den logizistischen Tendenzen muss erwähnt werden, dass zwischen dem Infinitesimalen der Monade und dem Infinitesimalen, das bei Leibniz in der Mathematik Anwendung findet, zu trennen ist; diese Problematik äußere sich in fehlender „*Präcisirung der Vernunft selbst zunächst in mathematischer Naturwissenschaft*“ [Cohen 1883, § 54], die erst mit Kant zur Reife gelangt, die Leibniz aber trotz seines zumindest in der Tendenz vorhandenen erkenntniskritischen Ansatzes verwehrt blieb. Wie Leibniz zwischen der mathematischen und der metaphysischen Bedeutung des Unendlichkleinen unterscheidet, so unterscheidet er auch zwischen mathematischen und metaphysischen Methoden in den Grundlagenrechtfertigungen zur Infinitesimal-Methode. Zum Vorwurf wird ihm wiederum, dass er versucht, dieser unvereinbaren Zweigleisigkeit in der Trennung von philosophischer Begründung einerseits und mathematischer Begründung andererseits mit formallogischen Argumenten entgegenzukommen.

So verwundert es nicht, dass ein weiterer großer Krtikpunkt Cohens an der Leibnizschen Philosohphie darin liegt, dass diese Zweigleisigkeit die systematische

Rechtfertigung des Infinitesimalbegriffs unmöglich macht. Er habe zwar den Zusammenhang und die Richtung der Probleme erkannt, die durch den Infinitesimal-Begriff bezeichnet werden, aber nicht unter dieser Voraussetzung versucht die systematische Rechtfertigung dieses Begriffes zu leisten (s. [Cohen 1883, § 16]). Cohen kritisiert dazu vor allem den Terminus des Differentials selbst und verweist auf C. I. Gerhardt, der in „Die Entdeckung der höheren Analysis“ [Gerhardt 1855, 60f.] anmerkt, dass Leibniz anfänglich die dx und dy als gewöhnliche konstante Größen auffasste. Und „diese Erbschaft des Zahl-Charakters beeinträchtigt, verdunkelt die positive, realisirende Bedeutung des Unendlichkleinen.“ Er hat, wie schon beschrieben, die erzeugende Bedeutung seines Begriffs zwar genügend hervorgehoben, „aber er mochte andererseits den Vortheil nicht verschmähen, der für die öffentliche Meinung in der Einerleiheit seines Verfahrens mit der *Grenz-Methode* lag.“ ([Cohen 1883, § 61]; die Leibnizsche Grenzmethode unterscheidet sich aber in Teilen von der heute lange Zeit gelehrten Weierstraßschen, s. Kap. 4.3)

Es ist der Begriff der Differenz, genauer der Begriff der Grenze der Differenzen, die einen rein mathematischen Hintergrund suggeriert, aber im Fehlen des erkenntniskritischen Bodens somit das Infinitesimale in seiner Geltung beschneidet.

Leibniz beschränkt sich in der mathematischen Anwendung der Infinitesimalien auf die reine Zahlenlogik, er verfolgt mit seinem Logizismus natürlich ein ganz anderes, wie wir auch am Grundlagenstreit sehen werden, äußerst kritisch zu betrachtendes Ziel. Die Zahl hat für ihn eine eminent wichtige, metaphysische Bedeutung, so gilt für Leibniz: *„[N]ihil est quod numerum non patiatur. Itaque numerus quasi figura quaedam Metaphysica est, et Arithmetica est quaedam Statica universi, qua rerum potentiae explorantur.“*[15] ([Leibniz 1840, Teil 1, 162] vgl. [Cohen 1883, § 50]) Dass die Differentialien von Leibniz auch als „Fiktionen“ [Leibniz 1962, Bd. 4., 90] bezeichnet werden, stellt ihn vor ein Problem des Maßes. Einerseits ist das Differential Maß- und Realitätsgebend sowie Gegenstand der mathematischen Gleichungen mit reellen Zahlen, andererseits ist es nicht mit selbigen Zahlen vergleichbar und sogar zu vernachlässigen. Und so zeigt sich an den Begriffen des Unendlichkleinen und des Unendlichen auch ein Problem im Übergang von der Realität zur Wirklichkeit und damit, wie an diesen Begriffen „das *Problem des Ich* hängt, [ja] in ihm enthalten ist. Somit können wir an diesem historischen Punkte den Zusammenhang uns vergegenwärtigen, in welchen bei *Kant die intensive Grösse* und die *Realität der Empfindung* gestellt sind. Es giebt in der That keinen intimeren Zusammenhang als zwischen dem sogenannten realen Gegenstande und der Empfindungs-Einheit.“ [Cohen 1883, § 60] Genau in diesem Punkt liegt auch das Problem Leibniz’ innerhalb der Mathematik die Infinitesimalien zu integrie-

[15] *Es gibt nichts, dass der Zahl nicht unterworfen wäre.* Die Zahl ist daher gewissermaßen ein *metaphysische Grundgestalt*, und die *Arithmetik* eine Art *Statik des Universums*, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen.

ren, denn auf Grund des messenden *Subjekts* kann jedes Maß immer nur einen endlichen Grad an Genauigkeit besitzen.

Hier eignet sich das Leibnizsche Beispiel der unzählbar vielen tropfenförmigen Wellenschläge, die trotz ihres scheinbar unhörbaren Platschens das Meeresrauschen erzeugen. Es muss dabei Realität von realer Existenz getrennt werden - was bekannterweise erst bei Kant geschieht - denn zur Realität gelangt dieses Phänomen erst durch die erwähnte schöpferische und dadurch realisierende Kraft des Unendlichkleinen, das das Denkgesetz der Kontinuität idealerweise nutzt. Trotzdem ist die Vorstellung sehr vieler dieser sehr kleinen Monaden von Wellenschlägen als einer idealen zu kennzeichnen. die fernab realer Existenz, aber dank der vorhergehenden mathematischen Kontinuität und dem Prinzip der Infinitesimal-Methode erst denk- und realisierbar ist. Es bleibt das Problem des Übergangs, der Schwelle der Erfahrung, also der Punkt, in dem die eigentlich unhörbaren Platscher eines einzelnen Tropfens in der Summe zum Meeresrauschen werden.

Der Weg dieser Sicherung der Realität, die von der Monade ausgehend durch das Differential erfolgt, „*geht durch den Begriff des Intensiven hindurch*; sein Ursprung aber liegt in dem Leibnizischen Urgesetz, dem Gesetz der Continuität." [Cohen 1883, § 51] Cohen sieht in Leibniz' Gesetz der Kontinuität, das der prästablierten Harmonie innewohnt, als „ein *Naturgesetz* [...], nichtsdestoweniger aber eine *Idee*, eine nothwendige Idee, und als solche eine *ewige Wahrheit*". Damit kann die Frage nach der Realität des Infinitesimalen nur „nach ihrem Charakter, *ihrem Geltungswerte als realisirende Idee*" [Cohen 1883, § 52] gestellt werden und nicht nach ihrer Existenz in der Welt der Sinnesdaten. Wir haben hier in Bezug auf das realitätsgebende Quale des Differentials demnach keine ontologische Fragestellung, sondern eine über den Sinn von Wahrheit bzw. Geltung. Für Leibniz ist das Unendliche, welches Idee und Gesetz „ebensosehr der *Vernunft* als der *Natur*" ist, ein Kunstprodukt aus dem Gesetz der Kontinuität. Demnach ist und bleibt unsere allgegenwärtige Geltungsfrage auf eine nicht wirklich existierende Vorstellung des Denkens gerichtet: Wieso hat „das Unendliche, obzwar es selbst nicht existirt, dennoch und gerade desshalb in der Natur Geltung" [Cohen 1883, § 53]?

Das Unendliche basiert auf dem Prinzip der Kontinuität und dieses Prinzip hat nicht nur als Idee Geltung in der Vernunft, sondern als Denk*gesetz* auch in der Natur. Für Cohen ist Kontinuität keine Kategorie, sondern muss für das Denken, „für das Urteil als das Gesetz der Operationen" ausgezeichnet werden. Es kann zwar keine tiefere Bedeutung als das Urteil des Ursprungs haben, aber dieses ist stets durch den Zusammenhang bedingt. Während das (relative!) Nichts nur in Bezug auf das Etwas, nämlich in dessen Abwehr, interpretiert werden darf, so ist das Kontinuum als Denkgesetz mit dem Urteil des Ursprungs verknüpft und kann durch kein Nichts unterbrochen werden – und wiederum wehren das Kontinuum und das Nichts gemeinsam das fälschliche Vorurteil des Gegebenen ab. [Cohen 1914, 91f.] Spricht Cohen bei der ersten Klasse seiner Urteilstafel von den „Urteilen der Denkgesetze“, so findet sich dort kein Urteil des Denkgesetzes der Kontinuität wieder. Die Kontinuität (als Denkgesetz) ist nämlich (nur) Möglichkeitsbedingung, die jedem Urteil vorausgeht – sie bildet den Gegenpart zum *Diskretum* eines Urteils!

Das Neue an Cohens Gesetz der Kontinuität gegenüber seinen Vorgängern liegt darin, dass es nicht mehr nur den Zusammenhang des Endlichen bedeuten und sich auf die Anschauung beziehen soll, sondern „*jetzt soll die Kontinuität prinzipiell die Anschauung verschmähen*“. Die Kontinuität, die im Zusammenhange mit dem Unendlichkleinen von Leibniz erdacht ist, geht der Ausdehnung und damit der Anschauung voraus: „*Imo extensione prius*[16], so bezeichnet Leibniz das Unendlichkleine. *Also im reinen Denken allein ist es gegründet, und kraft desselben vermag es den Grund des Endlichen zu bilden.*“ [Cohen 1914, 125f.] Dies entspricht der Cohenschen Philosophie darin, dass der Ursprung und keine Empfindung oder Anschauung der Grund sein kann.

Wie das positive Werden des Unendlichkleinen ist auch die Kontinuität der infinitesimalen Elemente Ausdruck der Leibnizschen Monadenlehre. Seine „systematische Quintessenz, die *prästabilirte Harmonie*“ beruht auf „dieser Ansicht, die *bei aller Analogisirung des Bewusstseins mit der Materie* zugleich hinwiederum *die Dinge in das Unendliche dieser kleinen Vorstellungen auflöst*. Denn diesem Unendlichen im Bewusstsein entspricht in der Natur der Dinge die *Monade*, als der *Ankergrund des Realen*.“ [Cohen 1883, § 51] So baut die Leibnizsche Monadenlehre auch auf dem Prinzip seiner Infinitesimal-Methode auf: Die verschiedenen Unendlichkeiten sind maßgebend für die Monaden, die als einzelne Vertreter einer grenzenlosen Mannigfaltikeit von Kombinationen ein mögliches Netz der Realität aufspannen. Selbst in den kleinsten Zwischenräumen liegt im Sein das Werden, welches eben in der unendlichen Potentialität gebiert. Darin gibt Cohen „Leibniz [. . .] Recht, daß in *jeder Monade das Universum* enthalten sei. Ohne die Einheit des Gegenstandes keine Einheit der Natur.“ Kritik erfährt Leibniz an der fehlenden Unterscheidung von Kausalität (Urteil des Gesetzes) und System (Urteil des Begriffs), denn der „Gegenstand aber hat seine Einheit nicht schon in der Kausalität, sondern durchaus erst im System.“ [Cohen 1914, 339]

Kehren wir zum Ursprung der Leibnizschen Infinitesimalien zurück, dem Kunstprodukt „Gesetz der Kontinuität“. Dieses ist eine conditio sine qua non, vor Raum und Zeit, und alle rationalen Produkte (die immer entweder durch Abstraktion oder Kollektion erfolgen) fallen in ein Abhängigkeitsverhältnis zur Kontinuität und das „Intensive ist die nächste Frucht des Princips der Continuität.“ Solange Sukzession negativ erfolgt (ohne Sprung), reicht die Methode der Grenzen aus, um

[16] Aus [Leibniz 1962, Bd. 6, 235]: „ In rebus corporeis esse aliquid praeter extensionem, imo extensione prius“, d.h. für Leibniz gilt, dass es „in körperlichen Dingengen etwas außer der Ausdehnung, ja sogar vor der Ausdehnung gibt.“

das Stetigkeitsprinzip zu umschreiben. „Fassen wir aber die Infinitesimalmethode in ihrer principiellen Strenge, als Entfaltung des Stetigkeitsprincips, so ist die Ueberwindung der auf der Extension beruhenden Grösse damit vollzogen.“ [Cohen 1883, § 58] Wie Leibniz schon richtig erkannte, gibt es „*indivisibilia seu inextensa*“[17] und „*[s]ensus* enim dijudicare non potest, corpus aliquod unum continuum contiguumve sit, an multorum dicontiguorum hiantium acervus“[18] ([Leibniz 1962, Bd. 6, 68 & 77] und [Cohen 1883, § 58]). Es existiert mit den Extensionen nur eine Art sinnliche Vergleichsgröße, die zur relativierenden Beschreibung von Gegenständen dient. Was uns aber der Realität näher bringt, sind die Inextensionen, da wir sie in ihrer Unzulänglichkeit als Äußerung des Gegenstandes erfahren. Das Differential ist „*die im Intensiven beruhende, durch das Inextensive vermittelte Grösse*“ [Cohen 1883, § 58].

Kontinuität ist demnach eine Gesetzmäßigkeit *vor* dem Urteil. Geht es um die Beschreibung (Mathematisierung), in dem Sinne, dass ‚Kontinuität‘ Gegenstand mathematischer Ordnung wird, so unterscheidet Cohen neben dem Denkgesetz eine zweite Bedeutung der Kontinuität: Erstere, obige Bedeutung dient „dem Ursprungsbegriff der Quantität“ und ist als Ganzes gegeben, um das Prinzip des Ursprungs zu bewahren, also den Zusammenhang des dx mit seinem x. In dieser Bedeutung kann das Kontinuum nicht aus Punkten bestehen, Punkte und Teile des Kontinuums entstehen erst durch die Wissenschaft der Mathematik. So liegt eine zweite Bedeutung in der reinen Mathematik, in der Qualität des Denkens, nämlich in dem Zusammenhang der dx, der infinitesimalen Elemente. Diese zweite Bedeutung war schon für die Bestimmung des Urteils der Realität von Nutzen (vgl. Kap. 3.2), für welche nun gilt: „Man ist nicht mehr angewiesen auf einen andern, fraglichen Zusammenhang; nur dieser innerlichste und intimste wird gefordert. [...] Alle sonstigen Zusammenhänge beruhen und bestehen in Vergleichen, die Sprünge machen und Lücken lassen. Die Kontinuität der infinitesimalen Elemente dagegen bedeutet den *stetigen* Zusammenhang, die *Kontinuität der Realität*.“ [Cohen 1914, 136f.]

4.2 Isaac Newton

Leibniz und Newton entwickelten zeitgleich und wohl unabhängig von einander gültige Rechenweisen, die uns die Infinitesimal-Analysis erlauben. Es sollen hier aber keine Prioritätsrechte geprüft, sondern die Grundlagen ihres geistigen Vermächtnisses gegenübergestellt werden. Dazu findet man in ihren unterschiedlichen Werken verschiedene Zugänge. Wie bei Leibniz findet man auch bei Newton in

[17] Unteilbares oder Unausgedehntes

[18] *[d]ie Wahrnehmung* kann nicht entscheiden, ob ein Körper eine Einheit ist, die ungeteilt zusammenhängt oder deren Teile aneinandergrenzen.

seinen metaphysischen Grundlegungen ein Schwanken zwischen rein mathematischen Interpretationen und mechanischen, d.h. naturwissenschaftlichen Interpretationen vor. Während Leibniz eine weitere, mit seiner Monadentheorie unvereinbare, scheinbar speziell für die reine Mathematik ausgestaltete Methode präsentiert, nämlich die Differenzenmethode, und damit sich für Cohen als Logizist angreifbar macht, so findet auch bei Newton die Fluxionsmethode in jenem Gebiet weniger Anspruch als seine Methode der ersten und letzten Verhältnisse, die wie bei Leibniz dem Schein unterliegt, in der Grenzmethode verwirkliche sich logische Strenge, was Cohen in seiner „Infinitesimalschrift" mit der Unterstellung eines „Mangel[s] an Unterscheidung von Logik und Erkenntnisskritik" und „eigene[r] Unklarheit bezüglich der sogenannten logischen Strenge und Schärfe" quittiert. [Cohen 1883, § 67] Die Fragen dabei sind: Welche Ansätze nutzt Cohen, um seine Vorstellungen zu stützen? Was sind die prinzipiellen Voraussetzungen für ihre für die damalige Zeit überraschend sowohl auf Erden als auch im Himmel anwendbare und damit im Widerspruch zur aristotelischen Philosophie stehenden Theorien? Und worin sieht Cohen bei Newton „die Anleitung zur transscendentalen Methode" Kants ([Cohen 1883, Vorwort] & vgl. Kap. 2.3)?

Zuallererst ist es ein Verdienst dieser beiden so vielseitig Gelehrten Leibniz und Newton, die Strenge der Mathematik in die Grundlagenwissenschaft der Philosophie übertragen zu haben, aber so wundert es doch, dass ihnen die Verbindung von Metaphysik, Mathematik und den Naturwissenschaften nicht gelingen konnte. Leibniz und Newton verwenden die bzw. orientieren sich an der Infinitesimal-Methode in allen drei Disziplinen, führen aber für die Mathematik eine andere, *statische*, an der Grenzwertmethode orientierte Grundlegung für die Verwendung und den Begriff des Unendlichkleinen ein, ohne diese Verschiedenheit wieder in ihrem philosophischen Standpunkt zu einer Einheit zu bringen. Mit seiner Fluxionstheorie konnte Newton zwar seine Methode der ersten und letzten Verhältnisse illustrieren, entfernte sich damit aber von der Theorie der Infinitesimalien: „1703 Newton wrote about infinitesimals in these terms: ‚Math. quantities I here consider not as consisting of indivisibles, either parts least possible' ‚or infinitely small. (...) each time it can conveniently so be done, it is preferable to express [fluxions] by finite lines visible to the eye rather than by infinitely small ones.(...) and I wanted to show that in the method of fluxions there should be no need to introduce infinitely small figures into geometry.' Judging by these quotes, it may seem that after 1703, Newton rejects infinitesimals. Augustus De Morgan claimed this in 1852." Und auch später wurde vermutet, dass sich Newton „offenbar in Gegensatz zu Leibniz stellen" wollte, wobei zu bemerken ist, dass es „aber *Leibniz* keineswegs fern [lag], die Größen als etwas Fließendes zu betrachten." [Kowalewski 1996, Anm. 1(S. 57)]

Dieses Schwanken findet sich, wie erwähnt, sowohl bei Newton als auch bei Leibniz. Es ist beispielweise so, dass Leibniz an einer Stelle schreibt, dass es nichts Absurderes gäbe, als die Idee einer aktual unendlichen Zahl, an anderer aber, dass er das aktual Unendliche in der Natur überall vorhanden sieht, es von ihm akzeptiert wird und es sogar „dumm“ wäre zu sagen, dass die Natur das aktual Unendliche verabscheue (vgl. [Bedürftig 2015, 272f.]). Man könnte Leibniz mit Hinblick auf seine zwischenzeitliche Bevorzugung der Differenzenmethode aber auch Newton mit Hinblick auf seine Methoden der ersten und letzten Verhältnisse unterstellen, dass sie zwar in den Naturwissenschaften aktual unendliche Größen akzeptieren, aber nicht in der reinen Mathematik. Für Cohen aber können Mathematik und Naturwissenschaft nicht unabhängig von einander konzipiert werden; schon allein die Infinitesimal-Analysis solle als Rechtfertigung dafür genügen, denn in ihren vielseitigen Anwendungen in den unterschiedlichsten Wissenschaften zeigt sich die Rückführung der durch sie neu gewonnenen Erkenntnisse auf das *eine zentrale* Prinzip ihrer Methode, nämlich schon im Unendlichkleinen allseitige Gesetzmäßigkeiten erforschen zu können.

Die verschiedenen Einzelwissenschaften müssen bei Cohen derselben Kritik (der Erkenntnis) unterliegen. Es existiert keine Einzelwissenschaft außerhalb des Wissenschaftskosmos, insofern als keine Einzelwissenschaft als unabhängiges Selbsterzeugnis vorliegt. Sie besitzen damit die gemeinsame Abhängigkeit von *einer* Philosophie. *Im Grunde* sieht sich Cohen bei Newton und Leibniz bestätigt, denn „[b]ei Leibniz, wie bei Newton ist der Infinitesimalbegriff ein *Ausdruck ihres systematischen Grundgedankens*, ihrer idealistischen Auffassung der Realität.“ [Cohen 1883, § 67] Der Begriff entspringt also aus seiner erkenntniskritischen Fundierung. Dieser erkenntniskritische Ansatz ist laut Cohen in der Tendenz auch bei beiden Gelehrten schon vorzufinden. Sowohl in Leibniz’ Monaden- als auch in Newtons Fluxionsmethode bescheinigt er eine Art dieser erkenntniskritischen Begründung, „in welcher die Quelle ihres Begriffs lag“ und welche die Durchdringung des Endlichen und Unendlichen ermöglichte [Cohen 1883, § 67]. Diese Begründung versucht Cohen anhand der Positionen beider Begründer der Infinitesimal-Mathematik zu leisten, indem er in seiner Art die transzendentallogischen Urteile gliedert und somit die Prinzipien der (Infinitesimal-)Methoden unter diese Urteile fasst: „*[D]ie Arten der Prinzipien liegen in den Arten des Urteils.* Aus dem Gesichtspunkte der Arten der Erkenntnisse müssen die Arten des Urteils bestimmt werden.“ [Cohen 1914, 74] Denn nur der Rückblick auf den Ausgang in den wissenschaftlichen Erkenntnissen gibt eine Gesetzmäßigkeit vor, an denen ihre Prinzipien nachvollzogen werden müssen, um sie dann wieder in entgegengesetzter Richtung prüfend zu hinterfragen.

Paradigmatisch sind die Newtonschen Vorstellungen in der Fluxionstheorie. Hierin scheint Cohen einen Anstoß zu finden, Raum und Zeit nicht als Kantische apriorische Anschauungsformen anzusehen. So hebt Cohen dort vor allem hervor, dass Newton weder den Raum in empirisch-dogmatischer Gegebenheit voraussetzt, noch auch die Zeit. „Ebenso stellt er [sc. Newton] für die Betrachtung des Raumes den, wie wir heute sagen müssen, *transscendentalen* Gesichtspunkt auf“, da er nicht nur den Größen, sondern auch dem Raum und somit (bewegten) Körpern die Erzeugung aus kontinuierlichen Zuwächsen bescheinigt: „Hinc fit, ut in sequentibus considerem *Quantitates tanquam genitas continuo Incremento, ut Spatium*, quod Corpus aut quaelibet res mota describit.“[19] ([Newton 1744, Bd. 1, 54], vgl. [Cohen 1883, § 64]) Und „wenngleich der Körper und die bewegte Sache hier noch als für sich gegeben und angenommen scheinen, so wird doch die ganze Untersuchung zu keinem andern Behufe angestellt, als um jene selbst erst zu *objectiviren*.“ [Cohen 1883, § 64] Der Raum (und die Zeit) werden nun zu Kategorien mathematischer Urteile (vgl. Kap. 3.3), die der gesetzmäßigen Grundlegung des kontinuierlichen Wachsens unterliegen. Dies geschieht bei Newton durch die Begriffe der ‚Fluxion‘ und der ‚Fluente‘:

Newton „betrachte[t] hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht durch Aneinandersetzen von Teilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten; Flächen durch Bewegung von Linien; Körper durch Bewegung von Flächen; Winkel durch Rotation von Seiten; Seiten durch stetiges Fließen; und ebenso ist es in anderen Fällen. Diese Erzeugungen finden in der Natur tatsächlich statt, und man kann sie täglich bei der Bewegung der Körper beobachten.“ Newton schreibt weiter: „Indem ich nun in Betracht zog, daß in gleichen Zeiten wachsende und wachsend erzeugte Größen je nach der größeren oder kleineren Geschwindigkeit, mit der sie wachsen und erzeugt werden, größer oder kleiner ausfallen, suchte ich nach einer Methode zur Bestimmung der Größen aus der Geschwindigkeit der Bewegung oder des Wachsens, wodurch sie erzeugt werden. Diese Bewegungs- oder Wachstumsgeschwindigkeiten nannte ich *Fluxionen*, und die erzeugten Größen nannte ich *Fluenten*“ [Kowalewski 1996, 3].

Wir haben demnach als Erzeugnis die Fluenten, die in ihrer Unbestimmtheit die Bewegung von Größen erlauben und diese haben ihre Erzeugung, d.h. ihren Urspung im Vorherrschen der Fluxion. Die Kennzeichnung der Fluxion findet man bei Newton entweder mit einem Punkt über der Variablen oder aber mit einer kleinen Null über der Variabeln (vgl. Kap. 1.3), um – in Cohens Worten – „ihren Anfang [. . .] als Ursprung zu kennzeichnen, und gleichsam zu beglaubigen“, womit demnach „*das Urteil des Ursprungs*, und der Umweg mit dem Nichts“ gebildet wird, „um der Bewegung einen legitimen Grund zu legen. Und so erkennen wir in dem Begriffe der Fluxion das leuchtendste *Beispiel* unserer ersten Art des Urteils.“ [Cohen 1914, 124] Es ist aber nicht nur die Null über dem x, die für das Cohensche

[19]Infolgedessen betrachte ich *die Quantitäten als von stetigem Zuwachs erzeugt [genitus], wie der Raum*, der von einem Körper einer beliebigen bewegten Sache beschrieben wird.

Ursprungsurteil das Nichts bedeuten soll, sondern aus Newtons Ausführung wird deutlich, dass es für ihn keinen externen Anfang geben kann, auf den man sich *konkret* beziehen kann, denn die Fluxion „entspringt in sich selbst." [Cohen 1914, 262] Somit sind zum Beispiel die Geschwindigkeiten die Urbilder von Energie, die wir überall, sogar in Punkten, vorfinden. Wie bei Leibniz ist hier die intensive Realität eine treibende Kraft.

Für die Fluente ist die Fluxion eine *Unter*strömung und „*[i]n dieser Unterströmung liegt das Maß*". Wie Leibniz, der die Gleichheit als eine unendlichkleine Ungleichheit bezeichnet und der Gleichheit somit in ihrer Funktion als Maß ihre sowieso nicht vorhandene, aber oft propagierte Vollkommenheit nimmt, so sieht auch Newton Dinge nicht als unmittelbar diskret vergleichbare an, sondern als *Veränderungen.* Die Gleichheit ist nicht das echte Maß, sondern nur ein fiktives Vergleichen im Rahmen möglicher Diskretisierung im Endlichen. Auch Cohen schreibt: „Wenn schon die Gleichheit nicht ein *Abbild* etwaiger gleicher Dinge ist, sondern vielmehr die *Voraussetzung* für solche, so liegt darin schon das Prinzip, *die Gleichheit über sich selbst hinauszuführen.*" Diese Hinausführung geschieht in der Fluxion, sie ist das Maß, welches nicht nur im Endlichen, sondern auch im Unendlichen gilt und so „beruht die ganze Methodik des Rechnens auf diesem neuen Gebiete in demselben Prinzip des Maßes, welches dieses ganze Gebiet erzeugt hat." [Cohen 1914, 445f.] Damit liefert die Infinitesimal-Analysis das Maß, das das Endliche in seinem innersten Werden begreifbar macht.

Die Fluxionstheorie Newtons existiert, wie erwähnt, parallel zu seiner Methode der ersten und letzten Verhältnisse. Letztere Methode ist eine Grenzmethode, über die Newton schreibt, dass dort die Demonstrationen zwar „contractiores" werden, aber diese Hypothese sei dennoch „durior" und werde als „minus geometrica" [Newton 1964, Bd. 2, S. 39] geschätzt. Deshalb habe er die Methode der Grenzen vorgezogen. „Nichtsdestoweniger [aber] hat er sie erweitert, seine Fluxion ihr einverleibt" [Cohen 1883, § 65]. Dieser Versuch der Angleichung bringt Newton in Schwierigkeiten, eine geeignete Definition für das „letzte Verhältnis" im Grenzbereich zu verfassen, so schreibt er in seinen „Mathematische[n] Prinzipien der Naturlehre" [Newton 1963, 54]: „Man kann den Einwand machen, dass es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr stattfinde. Aus demselben Grunde könnte man aber behaupten, daß ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht hat, nicht die letzte nachdem er ihn erreicht hat, existiere sie garnicht mehr." Es liegt das Problem also in der Verwendung der Begriffe der Größe und des Verhältnisses, die der Diskretion entbehren, was Newton folgendermaßen löst: „Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man weder diejenige, mit welcher der Körper sich bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst mit der der Körper den Punkt berührt und mit der die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnis verschwindender Größen das zu verstehen, mit dem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende. Ebenso ist das erste Verhältnis entstehender Größen das, mit dem sie entstehen.“ In der Analogisierung mit den und der Erklärung durch die ersten Verhältnissen ist für Cohen klar, dass wir das letzte Verhältnis „als die *Endigung* der Fortsetzung des ersten Verhältnisses“ betrachten und diese Methode „zugleich und vorzugsweise Methode der *ersten*, nicht lediglich der letzten Verhältnisse ist.“ [Cohen 1883, § 65]

Newton distanziert sich im darauffolgenden Absatz in dieser doch inextensiven Größenlehre von extensiven Vorstellungen, sowohl bei der Null, als auch bei den Differenzen, denn jene „letzten Verhältnisse, mit denen die Grössen verschwinden, *revera* nicht die Verhältnisse der letzten Grössen seien, sondern die Grenzen, denen die Verhältnisse sich continuierlich nähern, welche sie jedoch nicht früher erreichen können, als bis die Grössen ins Unendliche verkleinert sind.“ Wichtig ist dabei auch der Einwurf Newtons, der in dem Wort „revera [in Wahrheit]“ steckt, und sich gegen den Einwand richtet, „dass nun doch Alles aus Untheilbarem bestände; womit zugleich die Fluxion widerlegt und erledigt wäre. Das Untheilbare hat eben nicht die ausgesprochen geometrische und mechanische, die erzeugende Bedeutung“ [Cohen 1883, § 65], was Newton ebenda anhand der unendlichen Größen verdeutlicht: „Deutlicher ist die Sache bei unendlich großen Größen einzusehen. Werden zwei Größen, deren Unterschied gegeben ist, ins Unendliche vermehrt, so ist ihr letztes Verhältnis gegeben, nämlich das der Gleichheit; jedoch werden damit nicht die letzten oder allergrößten Größen, deren Verhältnis jenes ist, gegeben.“ Die erzeugende Bedeutung der Fluxion lässt sich auch am Begriff des Moments verdeutlichen, den Newton immer wieder einstreut, der aber einer strengen Definition entbehrt. Das „momentum“ bedeutet in der Schrift „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ die in der Zeiteinheit durch die Bewegung beschriebene Größe ([Cohen 1883, § 63] und [Newton 1744, Bd. 1, 19]), in den „Mathematische[n] Prinzipien der Naturlehre“ sind die Momente „als Geschwindigkeiten, Bewegungen, Veränderungen und *Fluxionen* der Grössen zu verstehen, oder als beliebige *endliche* Grössen, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind.“ ([Cohen 1883, § 65] u. [Newton 1963, 243]) Zu letzterer Beschreibung des Moments notierte Newton in Bezug auf Leibniz’ Methode, dass diese sich von seiner kaum unterscheide, nur in der Form der Worte und Zeichen und in der „*Idee der Erzeugung der Grössen*“, wobei Cohen in der Idee der Erzeugung der Größen den Unterschied der beiden „dem Hauptgedanken nach nicht bemerkbar“ findet [Cohen 1883, § 65].

Es mag genügen, auf die prinzipielle Übereinstimmung mit Leibniz hinzuweisen, die Newton laut Cohen in dem Satze zum Ausdruck bringt: „*[H]ae geneses in rerum natura locum vere habent.*“[20] [Newton 1744, Bd. 1, 203f.] Denn „[d]arin spricht sich klar und leitend die Tendenz aus, mit der Idee des Unendlichkleinen verbundene mystische Vorstellung abzuweisen [...]. Um so lebendiger aber vermag er [sc. Newton] den fruchtbaren, den schöpferischen Gedanken in der Fluxion festzuhalten. In dem Fluxus liegt sogar auch die *Zeit* begründet. In diesem Sinne kann Newton sagen: Figurarum et quantitatum generatio per Motum continuum *magis naturalis est.*[21][Newton 1744, Bd. 1, 363].“ [Cohen 1883, § 66]

Die Unterschiede der Leibnizschen Indivisibilen und der Newtonschen Fluxion, insbesondere in Bezug auf den Realitätsgedanken, sind eher gering. Nicht für die Rechnung, sondern für die Begründung dieser Art von Mathematik, d.h. für die Philosophie der Differential- und Integral-Mathematik bestehen die Unterschiede, so zitiert Cohen aus Newtons „Mathematische Prinzipien der Naturlehre“ [Newton 1963, 598], wo sich Newton zur Leibnizschen Methode mit den Worten äußerte: „welche von meiner kaum weiter abwich, als in der Form der Worte und Zeichen, und der *Idee der Erzeugung der Grössen.*“ [Cohen 1883, § 65] Es wird mit dem Terminus der Fluxion „in dem Inkrement der *fictive* Charakter der Zahl überwunden, dagegen das Erzeugende, Realisirende, welches in der deshalb unvermeidlichen Annahme eines absoluten Punktes der Bewegung, des *Momentes* liegt, hervorgehoben und als das Princip der neuen Methode fixirt.“ [Cohen 1883, § 62] Dieser fiktive Charakter der Zahl findet sich noch bei Leibniz, der für das Differential eine Differenzenmethode angibt, wo das dx als Konstante gedacht wird und so seiner Potenz und vor allem seiner positiven Wirkung beraubt wird. So moniert Cohen im Vergleich Leibniz mit Newton, dass Leibniz in seinen Niederschriften, die der Zahlentheorie angehören, der „methodisch-begrifflichen Schwierigkeiten noch nicht Herr geworden war: dass es dazu eben unumgänglich der *mechanischen* Voraussetzungen bedurfte.“ [Cohen 1883, § 61] Das Unendlichkleine wurde somit eine in ihrer negativen Bestimmung fiktive Größe und somit ihrer positiven, realisierenden Bedeutung beraubt. Cohen kritisiert hier die Grenzmethode Leibniz’ und in dieser Hinsicht deren Unvereinbarkeit mit der Monadentheorie. Leibniz’ Differenzenmethode ist eine geometrische und hat eher den Hang zur Statik denn Newtons Methode der ersten und letzten Verhältnisse, die von Anfang an an der Theorie der Fluxion (und der Bewegungsgesetze) angelehnt ist. Da Newton n-dimensionale geometrische Gebilde als bewegt betrachtet, gilt es diese als $(n-1)$-dimensionale Bewegungsobjekte zu interpretieren, deren Ausdehnung durch die fehlende Dimension entsteht: durch die Zeitdimension. Cohen betont, dass Newton damit nicht nur die „echten *Kräfte* und das wirkliche *Sein* der *Natur* bestimmen“ wollte, sondern

[20] Diese Erzeugungen finden in der Natur tatsächlich statt.

[21] Die Erzeugung der Figuren und Quantitäten durch eine kontinuierliche Bewegung *ist natürlicher.*

dass der *Hilfs*begriff der Bewegung „als der *fundamentale* und *universelle Natur-Begriff*“ sich darstellt. Er betont auch, dass die idealistische Grundvoraussetzung für die Fluxionsmethode die Ableitung der Raumgröße aus der Zeitgröße ist. Wie bei Galilei die Fallräume aus den Geschwindigkeiten, werden hier die Fluente aus der Fluxion erzeugt, was den „realisirenden Charakter des Unendlichkleinen schon in der Prägnanz des Terminus bethätigt“ [Cohen 1883, § 62], da diese Bewegung die Fluxion als ein unteilbares Moment (Einheit!) zu Grunde legt. Für Cohen ist das Problem der Grenzen bei Newton besser gelöst, da dieser seine Bewegungsgesetze zentriert: Mit „dem Terminus der Fluxion wird in dem Increment der *fictive* Charakter der Zahl überwunden, dagegen das Erzeugende, Realisirende, welches in der deshalb unvermeidlichen Annahme eines absoluten Punktes der Bewegung, des *Momentes* liegt, hervorgehoben und als das *Princip* der neuen Methode fixirt.“ [Cohen 1883, § 62] Bei Newton ist die Fluxion auch in der *Methode der Verhältnisse* noch gewahrt, insofern diese nicht schlechthin die der letzten, sondern die der *ersten* Verhältnisse ist.“ Jedoch „ist bei Leibniz das Differential ein Ausdruck der *intensiven Realität*, nur dass er dieselbe als *einfache Substanz* und *Monade* denkt.“ [Cohen 1883, § 67]

Man sieht sowohl bei Newton als auch bei Leibniz Tendenzen, sich von der Rechnung mit Infinitesimalien wegzubewegen, für ihre Philosophie bleiben sie aber trotzdem prinzipielle Grundlagen und damit soll noch die Beeinflussung der Philosophie Kants zum Thema werden, über die Cohen sagt: „Newton gibt ihm die Haltung und die Fassung; aber die logisch-systematische Begründung saugt er aus Leibniz.“ [Cohen 1914, 596] Am Geltungswert der prinzipiellen Grundlagen bei Newton findet sich nicht nur der große Einfluss auf Kant wieder, sondern auch eine weitere Definitionsgrundlage für Cohens erkenntniskritischen *Idealismus/Realismus*. Denn Newton wehrt sich gegen den Vorwurf der Plausibiltät rein aus Hypothesen mit seinem Ausspruch „Hypotheses non fingo“, aber er „hat nichtsdestoweniger die Hypothese zum *Prinzip* gemacht“. So liegt eine der Grundfragen vor, die schon bei Leibniz zur Diskussion standen, nämlich wie sich die Prinzipien der Metaphysik zu denen der Mechanik verhalten; auch Newton kann sich diesen Fragen nicht entziehen, obwohl er sich scheinbar auf die Prinzipien der Mathematik beschränkt; „aber durch die Beziehung derselben auf die Philosophia naturalis erledigt sich diese Beschränkung von selbst.“ Die Idee als *Prinzip* (oder eben Hypothesis) zeugt von systematischer Philosophie reiner Erkenntnisse. „Von der Tatsache dieser Prinzipien ist [auch] *Kant* ausgegangen. Wie er von seiner Jugend an seine ganze Entwickelung hindurch es als die Aufgabe der Philosophie erklärt, ‚*die Methode Newtons*‘ auf die Metaphysik zu übertragen, so vollzieht sich seine Reife in der Fortbildung und genaueren Festsetzung dieses Verhältnisses zwischen der Metaphysik und der Methode Newtons. Die Methode Newtons hat zum *System* Newtons geführt [,... zum] System der Prinzipien, also das System der Methoden reiner Naturwissenschaft. [. . .] Sie wurde zur *Kritik*, und zwar zuvörderst zur *Kritik des Systems der Methoden, der Prinzipien Newtons*." [Cohen 1914, 7f.] „Man sieht, wie Kant auch dem blödesten Auge und dem unwissenschaftlichsten Geiste, der den echten Realismus in der Newton'schen Wissenschaft zu erkennen, noch nicht ausgebildet ist, die Einsicht zutrauen konnte, daß sein Idealismus zugleich Realismus sei. Selbst die Position der Empfindung hatte er befestigt, soweit es irgend mit der Methodik des Apriorismus vereinbar war." [Cohen 1914, 462f.]

Newton setzt die Gesetzmäßigkeit als einzigen sowie Urgrund von wissenschaftlicher Wahrheit und schließt erkenntniskritisch aus den unendlichkleinen Veränderungen der durch die Bewegung hervorgebrachten Größe auf die Größe selbst. Er liefert damit sogar den Anstoß für die Transzendentalphilosophie Kants: „Seit Newton gibt es eine *auf Principien* erbaute, ihrer Grundlagen und Voraussetzungen bewusste und nach mathematischer Methode sich fortzeugende Wissenschaft. Es war nun erst das Object gegeben, auf welches die *transscendentale Frage nach der Möglichkeit apriorischer Erkenntnis* gerichtet werden konnte." [Cohen 1883, § 10] Genau diese Methode ist die *Transzendentale Methode* des Neu*kantianers* Cohen. Und diese „Forschungsmethode" Newtons ist ihm die „*vorbildliche*" [Cohen 1883, § 64].

Des Weiteren gilt: „In der Tat handelt es sich in der Methode der Fluxionen um nichts anderes, als um die *Erzeugung der Größen* [. . . , so] dass wir *Kant* auch in dieser kapitalen Einzel-Frage als Newtonianer erkennen müssen." [Cohen 1883, § 64] In Newtons Theorie wird deutlich, dass er, wenn er sowohl Größen als auch den Raum durch stetiges Wachstum erzeugt sieht, seine methodischen Untersuchungen am naturwissenschaftlichen Gegenstand anstellt, um jenen zu objektivieren. Weder Zeit noch Raum werden vorausgesetzt und das Gesetz des kontinuierlichen Flusses garantiert die Idealität und Reinheit der Begriffe ‚Größe', ‚Raum' und auch der ‚Zeit', die dargestellt wird „an der Größe, an welcher sie gemessen wird: *aequabili Incremento vel Fluxu*[22]." [Cohen 1883, § 64]

4.3 Karl Weierstraß und Augustin-Louis Cauchy

Wie eingangs erwähnt, kommen wir mit A. Cauchy und K. Weierstraß nun zu den Anfängen einer (Philosophie der) Mathematik, die dem Begriff des Infinitesimalen weitaus weniger Beachtung schenkt als zuvor. Diese (Philosophie der) Mathematik befindet sich am Scheitelpunkt der Parabel, mit der P. Zellini den Verlauf seiner kurzen Geschichte der Unendlichkeit beschreibt. Für Zellini hat sich die anfängliche Bedeutung des Unendlichen im alten Griechenland in der abendländischen Geistesgeschichte zu einer ganz anderen, algebraisierten verändert, die erst mit Entdeckung von Paradoxa in der Mengenlehre und auf Grund der Fol-

[22] Gleichförmiger Zuwachs oder Fließen

gen des Grundlagenstreits sich in der heutigen Zeit nun wieder dem Anfang (aber in neuer Weise) annähert [Zellini 2010, 251f.]. Das Interesse an der Differential- und Integralrechnung in der Zeit, als Cauchy und Weierstraß wirkten, war davon geprägt, die teils sehr markanten Widersprüche in den unterschiedlichen Definitionen, Grundlagen und methodischen Herangehensweisen bei Newton und Leibniz zu umgehen. Den von Zellini beschriebenen Algebraisierungen lag auch Unmut gegenüber den metaphysischen Voraussetzungen der Begründer der Infinitesimal-Analysis zu Grunde – diese mit Widersprüchen behafteten Grundlagen aus der Philosophie der Mathematik aber auch aus einer wie bei Leibniz mit religiösen Elementen versehenen Metaphysik sollten möglichst von der Mathematik ferngehalten werden. Dadurch wurde das Augenmerk, in erster Linie mit Weierstraß, weniger mit Cauchy wie sich noch zeigen wird, nicht mehr auf die Infinitesimal-, sondern auf die Grenzwertmethode gelegt. Durch die Weierstraßsche Grenzwertmethode schien die Voraussetzung für diese „kohärente [...] Definition des aktual Unendlichen“ [Zellini 2010, 252] gefunden, die den Anspruch der Mathematiker um unter anderem Hilbert, Frege und Russell befeuerte, die Differential- und Integralmathematik aus der Abhängigkeit der Philosophie zu befreien und einer formallogischen Definition zu unterwerfen. „Die[se] Entwicklung, bei der das Infinitesimal zusehends ins Abseits geriet, gipfelte im Werk von Weierstraß“ [Zellini 2010, 159], und diese Art der Grenzmethode, nämlich die Epsilontik, war zugleich bestimmend für die kommenden Jahrzehnte der Mathematik in der Welt der Wissenschaft.

„Besonders die Vorlesungen von Weierstraß in Berlin in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts sorgten dafür, daß eine *für alle* lehrbare, strenge Begründung der Analysis aus dem Grenzwertbegriff sich durchsetzte. Damit konnten die Infinitesimalien eliminiert werden.“ [Laugwitz 1986, 220] Diese Methode Weierstraß’ ist für die Lehre der Analysis auch heute noch Normalität, so geschätzt und populär wurden seine Vorstellungen seines auf Cauchys Analysis aufbauenden Grenzwertbegriffs. Weierstraß’ Differential- und Integralmathematik setzte sich rasch durch – in der Zeit, in der auch Cohen sein Werk „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ veröffentlichte, das auf Grund seiner Gegenläufigkeit zum damals aktuellen Zeitgeist schwer kritisiert wurde. Zwar finden weder Cauchy noch Weierstraß in diesem Cohenschen Werk Erwähnung, dafür aber sehr deutliche Kritik an der Grenzwertmethode und deren formallogischen Grundlagen, denen er in ihrer axiomatischen Begründung der Methode sogar einen Zirkelschluss vorwirft (s.u.)!

Kommen wir nun zu Cauchy, dessen Interpretation des Unendlichkleinen und -großen durchaus diskussionswürdig ist, denn: „Cauchy stands in the history of the Calculus not as a man who broke with tradition and swept away old and rotten foundations to make room for next and sound ones but rather as a link between the past and the future. The elements of his theory can be traced back to Newton and to Leibniz (and beyond) but he provided a synthesis of the doctrine of limits on the one hand and of the doctrine of infinitely small and large quantities on the other by assingning a central role to the notion of a variable which tends to a limit, in particular to the limit zero.“ [Robinson 1966, 276] Mit diesen Worten versucht Robinson ebenda mit mehreren Textpassagen gegen die allgemeine Meinung vorzugehen, dass „infinitely small and infinitely large quanities would have no place among the ideas of Cauchy, who is generally regarded as the founder of the modern approach, or that they might, at most, arise as figures of speech, as in ‚x‘ tends to infinity’. However, this expectation is mistaken.“ Diesem Ansatz stimmt größtenteils auch Laugwitz zu, denn bei Cauchy sind die Umgangsweisen mit dem Unendlichkleinen und -großen nicht eindeutig, so schreibt Cauchy zu den Eigenschaften dererlei Größen: „Ist k eine von Null verschiedene endliche Größe und bezeichnet ϵ eine variable Zahl, die mit dem Absolutbetrag von α unbegrenzt abnimmt, dann ist die allgemeine Gestalt der unendlich Kleinen n-ter Ordnung $k\alpha^n$ oder allenfalls $k\alpha^n(1 \pm \epsilon)$. In den Formeln werden α und ϵ als eigenständige Entitäten behandelt; im Text benutzt Cauchy die Sprachen der Variablen und Grenzen einerseits und die der unendlich Kleinen und Großen andererseits parallel zueinander.“ Laugwitz ergänzt aber ähnlich liberal wie Robinson: „Die Mehrdeutigkeit der sprachlichen Ausdrucksweise erlaubt es dem Leser, seine eigene Hintergrundauffassung zu haben: Auf diese kommt es für die tatsächliche Rechnung nicht an. Cauchy ist liberal.“ [Laugwitz 1986, 213]

So sei auch die Weierstraßsche Interpretation der Cauchyschen Analysis möglich und wohl auch legitim, in der die infinitesimalen Größen durch (Null-)Folgen *ersetzt* werden.

Entgegen der Weierstraßschen Grenzmethode interpretiert Robinson Cauchy dergestalt, dass unendlichkleine und -große Quantitäten bei Cauchy nicht Elemente einer fomalen Sprache sind, „which describes the system under consideration [...] but [they] are regarded as basic entities as a special kind. If one tries to make this notion precise in contemporary terms one might perhaps describe a variable as a function whose range is numerical while its domain may be any ordered set without last element. However, Cauchy evidently does not wish to base the notion of a variable on the notion of a function; [. . .] he defines the notion of a function in terms which involve the notion of a variable.“ [Robinson 1966, 270] Robinson „will die Infinitesimalien von Cauchy als Variable interpretieren, welche gegen Null konvergieren.“ [Laugwitz 1986, 212] Dies passt vor allem zu Cauchys Unterscheidung von Zahlen und Größen: Nur die rationalen positiven und negativen extensiven Quantitäten/Zahlen nennt er Größen, die anderen nennt er variable Größen. „Wenn die nacheinander einer Variablen zugeschriebenen Werte sich unbegrenzt einem festen Wert nähern, so daß sie sich schließlich so wenig wie man will von ihm unterscheiden, dann heißt dieser Wert die Grenze (la limite) der anderen.

Beispielsweise ist eine irrationale Zahl die Grenze von Brüchen.“ [Laugwitz 1986, 211] Dass die komplexen Zahlen somit bei Cauchy keine positive Selbstständigkeit in ihrem Sein erlangen konnten und damit dem Schein der Subjektivität verfielen, wurde auch von Cohen in [Cohen 1914, 131f. & 431] kritisch gesehen. Es könne doch für die Zahl kein Richtstein sein, ob sie „sich bequemer und natürlicher auf die Betrachtung der Dinge anpassen läßt. Bleibt sie denn nicht trotzdem nur ein Mittel der Anpassung und der Vergleichung für die Dinge, *die ohne sie da sind*, und gesichert sind? *Liegt denn nicht aber vielmehr darin allein die Objektivität eines Begriffes*, daß er ein *selbständiges* und *zulängliches* Mittel der Sicherung und der Erzeugung, in welcher letzteren die erste besteht, für den Gegenstand ist? Besteht nicht darin allein die Bedeutung eines Begriffs als *Erkenntnis*? Das will sagen daß er *Erkenntnis* ist?“ So gilt: Je unnatürlicher die Zahlen, desto objektiver, was wiederum den unendlich großen und kleinen Zahlgrößen ihre objektive Realität zuerkennt. Cohen kritisiert an Cauchy auch, dass er die komplexen Zahlen „selbst als *einzelne Zahlgegenstände* angesehen, und deshalb in Frage gezogen hat.“ Die komplexe Zahl ist aber „in erster Linie“ kein Einzelgegenstand; „darüber entscheiden die naiven Kategorien; sie konstituieren den Begriff des Gegenstandes, von dem der Einzelgegenstand ein Exemplar bildet.“ Für den forschenden Mathematiker liegt mit der Imaginärzahl hier auch ein Urteil der Möglichkeit vor, denn wenn „das *Imaginäre* zu solcher Erzeugung neuer Zahlgebilde dienlich ist, so entspricht es der Kategorie der Möglichkeit. *Es ist möglich, das heißt: es ermöglicht neue Erkenntnisse.* Es ist ein neuer Weg, der damit erschlossen wird zur Entdeckung neuer Begriffe, neuer Gegenstände; einer neuen Art von Gegenständen.“ [Cohen 1914, 432] Die mathematischen Größen sind Zeugen strukturellen Denkens, das Anwendung findet bzw. finden muss.

Zurück zur Infinitesimaltheorie Cauchys: Robinson bezieht sich in seiner Interpretation mehr auf die beschreibenden Aussagen Cauchys, Laugwitz versucht sich in seiner Interpretation mehr an „expliziten Beispielen“ zu orientieren und so hält er folgende Interpretation für „angemessener“: Bei Cauchys Infinitesimalien handelt es sich um „eigenständige mathematische Entitäten, welche durch Folgen dargestellt werden (können).“ [Laugwitz 1986, 212]

Es sei nun zur Position Cauchys folgendes Fazit festgehalten: Wie schon bei Leibniz und Newton hat die Differential- und Integralrechnung weder in prinzipieller noch methodischer Hinsicht einen festen und schon gar keinen eindeutigen Boden. Die Parallelität der Infinitesimal- und der Grenzmethode wird in der Verschmelzung aufzuheben versucht, was aber mehr in der Theorie denn in der Praxis gelingt, wie sich an den unterschiedlichen Interpretationen Laugwitz’ und Robinsons zeigt. Wie Laugwitz betont, ist das Grundlagenproblem bei Cauchy ein theoretisches, denn in der Anwendung sind die Methoden gleichwertig.

Umso weniger verwunderlich ist, dass die Auflösung dieser Mehrdeutigkeiten für Wissenschaftler, wie Weierstraß, Hilbert, Frege oder Cantor, die der Mathematik als einer Logik frönten, nur in der Grenzwertmethode mit ihrer formallogischen Schärfe ihre Richtigkeit finden kann. Es soll nun kurz die Methode der Epsilontik veranschaulicht werden, um das dahinterliegende prinzipielle Interesse zu präsentieren. Dieses besteht grob gesagt darin, mit den Begriffen einer möglichst ‚naiven' Mathematik zu operieren, d.h. ohne selbständige Begrifflichkeiten, die einem ‚einfachen' formallogischen Rahmen sprengen würden, wie beispielsweise das Infinite und Infinitesimale. Die grafische Deutung der Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches D_f liegt in der Existenz genau einer, nicht senkrecht zu f verlaufenden Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Steigung dieser Tangente bezeichnet die „Ableitung". Das Differenzenquotienten-Verfahren versucht die Steigungen von Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ mit variablem $x \in D_f$ durch die Grenzwertbetrachtung $x \to x_0$ an die Steigung der Tangente anzunähern:

Eine Funktion f heißt differenzierbar an einer Stelle x_0 falls der Differentialquotient

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Um diese Art von Grenzwertbestimmung das ‚Hinbewegen', also dem „$x \to x_0$" die ‚bloß intuitive Vorstellung' des Fließens, zu nehmen, hat Weierstraß die Epsilon-Umgebung eingeführt. So muss die Variable x nur noch in einer bestimmten Umgebung von x_0 liegen. Dieser Argumentation liegt folgende Kontinuitätsbestimmung (in der ϵ -δ- Schreibweise) vor:

Eine Funktion f nennt man stetig im Punkt x_0, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Es werden hierbei ‚noch so kleine' Umgebungen betrachtet. Für die ϵ-Umgebung von x_0 gilt, dass alle Funktionswerte in ihr enthalten sind, wenn man die δ-Umgebung für die x-Werte entsprechend klein wählt. Die unendlichkleine Größe ist hier nur negativ erschlossen; sie ist nur in der Annäherung erschlossen. Der Begriff wird dadurch vermieden, dass er in den unendlichen Urteilen über ϵ und δ ‚versteckt' wird; er bleibt aber unumgänglich, was an der unmittelbaren Kongruenz der Begriffe Unendlichkeit und Grenze liegt: In Bezug auf die Allheit, deren Urteil nicht das abzählbare der Mehrheit umfasst, sondern „einer fiktiven Sonderung und Antizipation die Bedeutung nicht sowohl eines Abschlusses, als vielmehr eines *Zusammenschlusses* zu geben vermag", erklärt Cohen den Zusammenhang von Unendlichkeit und Grenze. Die natürlichen Zahlen als Menge $\mathbb{N}$ aufzufassen ist ein Urteil der Einheit der Allheit und hat eine Antizipation einer unendlichen Anzahl als Prädikat. Wird eine konvergente Reihe betrachtet, so haben deren unendliche Glieder einen endlichen Reihenwert. „Diesen endlichen Wert bezeichnet die mathematische Sprache mit dem Terminus der *Grenze. So treten im Werte der unendlichen Summe Allheit und Grenze zusammen.* Der unendliche Abschluss vermag, wenngleich nicht ohne die Ausnahme der divergenten Reihe, zum endlichen Werte der Grenze zu führen.“ [Cohen 1914, 180] Ein faktisches Urteil der Allheit, bspw. die Ordinalzahl ω_1 der Menge der natürlichen Zahlen antizipierend als Grenze der fortgezählten Einheiten $1, 2, 3...$, die durch das Urteil der Mehrheit ermöglicht sind, bedingt das Denkgesetz der Gleichheit – und dies beruht auf dem kritischen Urteil der Wirklichkeit und widerstrebt der geforderten „naiven“ (s.o.) Mathematik.

Das Problem der Gleichheit ist ein Problem der Grenzmethode, denn diese „besteht in dem Gedanken, dass der elementare Begriff der *Gleichheit* durch den exacten Begriff der *Grenze* ergänzt werden müsse. Es wird somit *erstlich* der Begriff der Gleichheit vorausgesetzt. Gleichheit aber liegt schon nicht mehr innerhalb der [formalen] Logik. Was der Gleichheit logisch entspricht, heisst *Identität.* Gleichheit bezeichnet ein Verhältnis von *Grössen.* Auf diesen Unterschied hat bereits *Carnot* hingewiesen, indem er égalité als rapport von identité als relation unterscheidet [Carnot 1797, § 42]. Mithin setzt die Grenz-Methode *zweitens* den Begriff der *Grösse* voraus. Auch dieser Begiff liegt jenseits der [formalen] Logik.“ [Cohen 1883, § 2]

Indessen wird in dem vorausgesetzten Größenbegriffe „zugleich die *Voraussetzung der Grenz-Grösse* gemacht.“ [Cohen 1883, § 2] Dieser Vorwurf des Zirkelschlusses ist natürlich ein brachialer Vorstoß Cohens, der sich explizit gegen „die Mathematiker“ (seit D'Alembert) [Cohen 1883, § 2] richtet. Vor allem, da Cohen ihnen „Irrtümer“ [Cohen 1914, 101], Verkennen des „Grundgedanke[ns]“ [Cohen 1914, 135] und Überschreitung ihrer Kompetenzen als Mathematiker und Logiker [Cohen 1883, §§ 2–4] vorwirft, da sie versucht sind, mit formaler Logik im Grenzstreit von Anschauung und Denken zu vermitteln. „Die Gleichheit bedeutet ein extensives Verhältnis angenommener Einheiten, deren Erzeugung in der Anschauung sich vollzieht. Die extensive Gleichheit ist demgemäß Gleichartigkeit“, was Cohen mit dem Leibnizschen Ausspruch, dass Gleichheit eine unendlichkleine Ungleichheit ist, bestätigt sieht. Die Grenzmethode ist ohne Frage extensiver Natur, das ist ja auch die Maßgabe für ihre Grundlegung in der formalen Logik. Es gilt aber, „dass die angenommene *logische* Kraft der Grenz-Methode lediglich in dem allerdings logischen Grundgesetze der *Continuität des Bewusstseins* beruht, von welchem sie jedoch für das Bewusstsein der Sinnlichkeit, für die Gebilde und Grössen der Anschauung Anwendung macht. Ueber diese *übergreifende* Anwendung muß der interne mathematische Gebrauch der Grenze sich klar werden: dass derselbe nur durch die *Erkenntnisskritik* gerechtfertigt werden kann, als in welcher jene weitere, angewandte Bedeutung der Continuität zur Basirung gelangt. *Gemäss derselben aber geht die extensive Grösse in die intensive über.*“ [Cohen 1883, §

68] Das Denkgesetz der Kontinuität ist also die Brücke, die die Kluft zwischen der Gleichheit und der Grenze überwindet, sie ist das Prinzip der Realität, das in der Grenzmethode nicht vorhanden ist; es ist die Kontinuität des Bewusstseins, die uns die unendlichkleine Ungleichheit zur „Identität/Gleichheit" macht, nicht die antizipierende Leistung der fortlaufenden extensiven Größen. So bleibt die Grenze ein negativer, das Infinitesimale aber ein positiver Begriff und die „Realität bleibt somit nicht blosser *Begriff*, sondern sie hat *Gegebenheit* zu vertreten; und dadurch gelangt sie zu ihrer vollen erkenntnisskritischen Bedeutung; *Realität bedeutet intensive Grösse.*" [Cohen 1883, § 68] Die in der Infinitesimalschrift begonnene Auszeichnung der Realität setzt sich auch in der Logik der reinen Erkenntnis fort. Auch wenn sich Cohen dann dort vom Kantischen Anschauungsbegriff entfernt, so bleibt der obige Vorwurf trotzdem bestehen. Die formale Logik der Grenzwert-Analytiker kann nach der Cohenschen Philosophie nicht in erkenntniskritischen Problemstellungen – wie der zwischen Gleichheit und Identität oder extensiven Grenzgrößen und intensiven Zahlen – vermitteln.

5 Die Kritiker Cohens

Die drei großen Kritiker seitens der Mathematik sind Georg Cantor, Gottlob Frege und Bertrand Russell. Die ausnahmslos negative Kritik von Seiten führender Kräfte des Fachbereichs der Mathematik sind selbstverständlich als ein herber Schlag für die Theorien Cohens zu werten. Insbesondere deswegen, da er in seinem wissenschaftstheoretischen Aufbau seines philosophischen Systems ausdrücklich auf den gegenseitigen Dialog mit den Einzelwissenschaften verweist. Die Erweiterungen und Verbesserungen der Einzelwissenschaften sollen zu Erweiterungen und Verbesserungen in der Philosophie führen und umgekehrt. Dass er sich nun laut seinen Kritikern dem Fortschritt in der Mathematik entgegenstellt und sich mit Problemstellungen beschäftigt, die als „nahezu erledigt" [Frege 1885_1, 101] angesehen werden und sein Festhalten an den eigentlichen infinitesimalen Größen als „mysticism" [Russell 1903, § 303] verurteilt wird, hat im System Cohens weitreichende Folgen: Seine Philosophie zentriert nicht nur die Infinitesimal-Methode und somit die eigentliche infinitesimale Größe, sondern baut auch auf deren herausragender Bedeutung und herausragenden Wert für die Mathematik und die mathematische Naturwissenschaft auf. Da dies, die Bedeutung und der Wert für die Mathematik und die mathematische Naturwissenschaft, nun bestritten wird, konterkariert es sein *ganzes philosophisches System*. Wenn die eigentliche infinitesimale Größe und die Infinitesimal-Methode für die Einzelwissenschaften nutzlos und sogar, wie ihm vorgeworfen wird, im Gegensatz zu vorherrschenden Ansätzen, nämlich der Grenzwertmethoden, voller Widersprüche sind, dann sind sie es auch für die Philosophie!

5.1 Georg Cantor

Die Grenzwertbestimmungen sind auch für den herausragendsten Schüler Weierstraß' bedeutend, der als Begründer der Mengenlehre und auch als außergewöhnlicher Zahlentheoretiker auf mathematischer und philosophischer Ebene bekannt und berühmt wurde: Georg Cantor. Zu seiner Lebzeit wurde er vor allem auf Grund seiner Zahlentheorie, insbesondere für die Rechfertigungen für transfinite Zahlen durch die Cantorschen Diagonalverfahren gerühmt, seine Ausführungen zur Mengenlehre brauchten ihre Zeit, um anerkannt zu werden, was ihm wohl damals sehr nahe ging und zu psychischen Problemen führte (vgl. A. Fraenkel in [Cantor 1932, 453–469]: A. Fraenkel verweist dort hauptsächlich auf einen Disput Cantors mit Kronecker, aber auch das mangelnde Interesse der Philosophen wird indirekt kritisiert. Dies wird auch unter anderem Cohen zum Vorwurf, der scheinbar (aber vor allem *leider*) kaum eine Notiz von den Cantorschen Errungenschaften genommen hat).

Wie bei (fast) allen großen wegweisenden Mathematikern finden wir mit Cantor einen bekennenden Anhänger des Platonismus vor. Da er sich für die Selbstständigkeit unendlichgroßer Größen ausspricht, könnte in ihm, als Zeitgenosse Cohens, ein Mitstreiter in gemeinsamer Sache vermutet werden; auch, da Cantor die Werke Cohens, zumindestens „Platons Ideenlehre und die Mathematik“ und „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“, gelesen und letzteres auch kommentiert hat. Doch gerade in Bezug auf die „Infinitesimalschrift“ sieht er „die wesentlichen Voraussetzungen des Verfs. ebenso wie seine Resultate als unzulässig“ an. Dies scheint weniger verwunderlich, sobald man sich seine Position zu den unendlichkleinen Größen klar macht, die er in der Rezension zu Cohens „Infinitesimalschrift“ folgendermaßen zum Ausdruck bringt: „Was die sogenannten unendlich kleinen Zahlen oder Differentiale anbetrifft, so gehören sie nicht zu der Sphäre des Seienden, sondern sie sind nichts als Modi des Nichtseienden, Veränderlichen oder Werdenden. Daher können sie unter keinen Umständen als eigentliche Größen aufgefasst werden“ [Cantor 1884, 267].

Cantor, der sich für die Akzeptanz aktual *unendlichgroßer* Zahlen (Kardinal- und Ordnungszahlen (s.u.)) stark macht, schlägt eine strikte Trennung von unendlichkleinen und -großen Größen vor – wie sich an seiner philosophischen Einstellung zur Mathematik zeigt, kann das Prinzip der Invertierbarkeit für seine hyperreellen Zahlen, d.h. Cantors transfinite ‚Mengenkompositionen‘, nicht gelten. Unendlichkleine Größen sind für ihn keine eigentlichen Größen, sie können nicht als vollendete Größen existieren, sondern nur in ihrer Potentialität. Für unendlichgroße Größen ist dies aber möglich, auch wenn Cantor sich damit gegen Gauß stellt, dessen Argumentation, das Unendliche sei nur eine „facon de parler“, Cantor zwar noch als Argument gegen Cohens eigentliche unendlichkleine Größen brachte, es für die unendlichgroßen Größen aber ablehnt. Cantor erkennt in seinem Schlussabschnitt seiner kritischen Rezension zu Cohens *Inifnitesimalschrift* immerhin die ihm ‚entgegengesetzte‘ Überzeugung Cohens an, pocht aber auf die ‚Unselbständigkeit‘ infinitesimaler Größen und schließt mit den Worten: „[S]o wollen wir vielmehr *nur dort* den Gebrauch des Vollendetunendlichen fern gehalten wissen, wo nachweisbar nichts anderes vorliegt, als ein veränderliches Endliches, wie *beispielsweise* bei den *Differentialien*.“ [Cantor 1884, 267f.]

Wie aber kommt es in Bezug auf das Unendlichkleine zu dieser großen Differenz zwischen Cantor und Cohen? Ein Grund ist sicher der Zahn der Zeit, zum einen erinnert Cantors Beschreibung eines Differentials als ein „veränderliches Endliche[s]“ an Cauchy (s. Kap. 4.3) und er ist zum anderen – das darf nicht unbeachtet bleiben – ein Schüler Weierstraß’ und in dessen Lehre wird das Unendlichkleine *nur* mit den Differentialien der (Weierstraßschen) *Grenzwertmethode* identifiziert. So sieht Cantor genau darin eine Verwechslung der aktualen und potentiellen Unendlichkeit und den „Horror infiniti“. Er verweist zurecht auf die Differentiale der Grenzwertberechnung, bei welcher „nur veränderliche, beliebig klein anzunehmende Hilfsgrößen“

vorliegen, die „aus den Endresultaten der Rechnungen gänzlich verschwinden und darum schon von Leibniz als bloße Fiktionen charakterisiert werden“. In der Grenzwertmethode liegen eben keine „*bestimmte[n]* unendlich kleine[n] Größen“ [Cantor 1932, 374] vor. Die Infinitesimal-Methode, wie sie Cohen anhand der Fluxions- und der Monadentheorie Newtons und Leibniz’ interpretiert, spielt für Cantor im Großen und Ganzen keine Rolle.

Vor der Diskussion der Gemeinsamkeiten beider sei noch kurz auf einen Brief Cantors aus dem Jahre 1887, der unter anderem an Weierstraß gerichtet war, verwiesen, der die damalige sehr schwierige Situation im Umgang mit den aktualen Infinitesimalien verdeutlichen soll. In jenem Brief versucht sich Cantor in einem Beweis des Satzes: „*Von Null verschiedene lineare Zahlgrößen* Ψ *(d.h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, gibt es nicht, d.h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße.*“ [Cantor 1932, 407] Mit diesem Beweis soll auf die Unmöglichkeit und den intrinsischen Widerspruch aktual unendlichkleiner Größen verwiesen werden. Der Beweis nimmt eine solch existierende Größe ζ an, für die gilt $\forall n \quad \zeta * n < 1$. Dann schreibt Cantor, dass man „nun aus dem Begriff der linearen Größe und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre“ beweisen kann, dass „alsdann auch $\zeta * \omega$ kleiner ist als *jede noch so kleine endliche Größe*, wenn ω irgendeine *noch so große transfinite Ordnungszahl* (d.h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet. Dies heißt aber doch, daß ζ auch durch *keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung endlich* gemacht werden, also sicherlich nicht *Element* endlicher Größen sein kann. Somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen, welcher derartig ist, daß nach ihm jede lineare Größe als integrierender Teil von andern, im besonderen von endlichen linearen Größen gedacht werden muß. Es bleibt also nichts übrig, als die Voraussetzung fallen zu lassen, wonach es eine Größe ζ gäbe, die für jede endliche ganze Zahl n kleiner wäre als $1/n$, und hiermit ist unser Satz bewiesen.“ Dieser Beweis findet sich deshalb in Gänze hier wieder, da er verdeutlicht, dass für Cantor die erste Voraussetzung die aktual unendlich*große* Größe ist. Es lässt sich an diesem Beweis wohl leicht einsehen, dass mit der Voraussetzung aktual unendlich*kleiner* Größen und entsprechender Modifikationen derselbe Beweis sich ebenso zur Herleitung der Nicht-Existenz aktual unendlichgroßer Größen umwandeln lässt. E. Zermelo, ein Bewunderer Cantors, kommentiert diesen Beweis 1932 ebenfalls mit den Worten: „Die Nicht-Existenz ‚aktual-unendlichkleiner Größen‘ läßt sich ebensowenig beweisen, wie die Nicht-Existenz der Cantorschen Transfiniten, und der Fehlschluß ist in beiden Fällen ganz der nämliche, indem den neuen Größen gewisse Eigenschaften, der gewöhnlichen ‚endlichen‘ zugeschrieben werden, die ihnen nicht zukommen können. Es handelt sich hier um die sogenannten ‚*nicht-archimedischen*' Zahlsysteme bzw. Körper, deren Existenz heute als einwandfrei nachgewiesen betrachtet werden kann" (in [Cantor 1932, 439 (Anm. 1)]).

Diese Abneigung gegen selbständige Infinitesimalien macht Cantor auch auf den Versuch (dessen Triftigkeit dahingestellt sei) seines Kollegen Gutberlets hin deutlich. In einem Brief [Cantor 1932, 393f. (Anm.)] an K. Laßwitz schreibt er, dass er widerspreche, dass „aus den ‚Differentialien' (welche [nach Cantors Meinung (Anm. d. A.)] nur als beliebig klein *werdende* Größen aufzufassen sind und die alle die *Null* zur gemeinschaftlichen Grenze haben [. . .]), [...] Stützen für das aktual Unendliche zu gewinnen" sind. In dieser Zeit um die Jahrhundertwende ist dieser Versuch Gutberlets jedoch nicht der einzige, dem heftigst widersprochen wird (s. Anm. 1 der Einleitung). Das Kapitel 6.2 zur ‚Grundlagenkrise der Mathematik' soll die vorherrschende Abneigung und den oftmals polemischen Ton diesbezüglicher Streitigkeiten andeuten.

In genanntem Brief findet sich aber auch ein gemeinsames Interesse und Vorgehen Cohens und Cantors, denn letzterer schlägt in die gleiche Kerbe wie Cohen (vgl. Kap. 3.3), indem er die Bildung von aktualen Unendlichkeiten mit der Bildung von endlichen Irrationalzahlen identifiziert: „[S]ie gleichen einander ihrem innersten Wesen nach; denn jene wie diese sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modifikationen (ἀφωρισμένα) des aktualen Unendlichen." Wie die irrationalen Zahlen durch Näherungsbrüche beschrieben und dann als bestimmt und vollendet angesehen worden sind, sollen nun auch die aktualen Unendlichkeiten anerkannt werden; und diese aktualen Unendlichkeiten haben „ebensowenig Spuren der [. . .] zustrebenden Zahlen" an sich, wie die Irrationalzahlen von den rationalen Näherungsbrüchen. „Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst *neue Irrationalitäten*" [Cantor 1932, 395f.]. Dies ist auf die gemeinsame platonische bzw. idealistische Position beider zurückzuführen (vgl. insb. Kap. 1.2!).

Cantor brachte diese platonische Position oft zum Ausdruck. „Er war überzeugt, dass mathematische Begriffe nicht nur subjektive, immanent reale Elemente der Kognition sind, sondern auch transsubjektive Realität besitzen. Daher rührt seine These, dass ein Mathematiker die mathematischen Gegenstände nicht bildet oder erfindet, sondern sie entdeckt." Wie Cohen beruft sich Cantor auf das Newtonsche „hypothesis non fingo", also darauf, dass die Gesetze der Erkenntnis und der Erkenntnisgegenstände nicht erfunden werden, sondern „wie zuverlässige Schreiber entnehmen und beschreiben wir sie, wie sie von der Sprache der Natur selbst hervorgebracht und vorgetragen werden." So war Cantor sogar davon überzeugt, dass seine mengentheoretischen Begriffe, also auch die aktualen Unendlichkeiten und das Kontinuum „in der wirklichen, materiellen Welt existieren" [vgl. Bedürftig 2015, 72f.]. Insbesondere letzteres, die Annahme einer ontologischen Realität unabhängig vom Subjekt, übersteigt den konstruktiven Gehalt des transzendentalen Idealismus Cohens deutlich. Seine Forderung einer unabhängigen ontologischen Realität wird auf Grund der auftretenden Widersprüche im Grundlagenstreit kritisiert. Trotzdem sind die Aussagen Cantors denen Cohens, die wir im letzten Kapitel kennenlernten, nicht allzu fern. Es stellen sich beide gegen die in der Mathematikerwelt vorherrschende Abneigung gegenüber den eigentlichen Zahlen, deren Existenz unmittelbar mit einer *festen, unendlichen* Größe abhängig ist, und es wird vor allem die Verkennung des Nicht-Diskreten kritisiert und dass die Beweise wider der Möglichkeit aktualer Unendlichkeiten „*von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorteile ist.*“ [Cantor 1932, 372]

Doch Cantors obige Kritik an Cohens „Infinitesimalschrift“ lässt die grundlegenden Positionen unvereinbar fern von einander erscheinen, man könnte fast sagen, dass sie durch die ganze (reelle) Zahlenwelt getrennt sind, da die erzeugende, bedeutungsgebende Gewalt in der Mathematik bei Cohen im Unendlichkleinen, bei Cantor, vielleicht auch aus Gründen seiner Nähe zum Klerus (s.u.), im Unendlichgroßen liegt. Trotz allem bleiben sie durch den Idealismus und somit durch den schöpferischen Wert der Mathematik verbunden. Auch in den „Historische[n] Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ [Cantor 1932, 357–367] hebt Cantor diese erzeugenden Fähigkeiten der Mathematik heraus, sie sei, „wenn man sie in ausgedehnterem Maße auf physikalische Daten anwendet, wahrhaft schöpferisch und läßt auf Tatsachen schließen, die teils der Beobachtung entgangen sind, teils aber auch ein so kompliziertes Gewebe haben, daß die Empirie [...] aus eigenem Antriebe schwerlich zu ihrer Entdeckung gelangt sein würde“ und nennt beispielhaft die Atomgeschichte der Chemie. Die Mathematik ist für Cantor ein Erkenntnismittel des vernünftigen Wesens, so ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung zwangsweise diese Art Rechnung, die die Arbeitsweise der abschätzenden Vernunft sein muss, wofür er Laplace zitiert mit den Worten: „[S]ie [sc. die Wahrscheinlichkeitsrechnung] lehrt dasjenige mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinkt fühlt [... und] läßt keine Willkür bei der Wahl von Ansichten zu, da sie zeigt, welche von ihnen die glaubwürdigste sei.“ [Cantor 1932, 357 & 366]

Das Unendlichkleine wird bei Cantor in dieser idealistischen Hinsicht vernachlässigt und zur ‚einfachen‘ potentiellen Größe degradiert. Die zu Grunde liegende Cantorsche Unterscheidung der potentiellen und aktualen Unendlichkeit soll nun nochmals verdeutlicht werden: Das potentiell Unendliche ist bei Cantor im Allgemeinen „eine *unbestimmte* Größe [...], die unzählig vieler Bestimmungen fähig ist" und entweder über alle Grenzen hinauswächst oder „unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt (was z.B. die legitime Vorstellung eines sogenannten Differentials ist)" [Cantor 1932, 401]. Das potentiell Unendliche ist demnach das *uneigentlich* Unendliche, das Unselbständige, das nur eine geborgte Realität hat, indem es stets auf ein aktual Unendliches hinweist, durch welches es erst möglich wird. Es muss dabei aber auch auf die Vermehrbarkeit des aktual Unendlichen hinweisen, was dann den Begriff ‚Quantum' rechtfertigt und dann aber – in den Worten Cohens – von einer qualitativen Quantität zeugt.

In Bezug auf die potentielle Unendlichkeit, als die „veränderliche endliche, über alle hinaus wachsende Größe" und die aktuale Unendlichkeit, als ein „in sich festes, konstantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum" [Cantor 1932, 374] gilt, dass das potentielle Unendliche von obiger Vermehrbarkeit ausgeschlossen ist. Aus seinen Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung entnehmbar ist die platonische Interpretation der Mathematik; für das Potentielle gilt nämlich, dass es „ausschließlich als *Beziehungsbegriff*, als *Hilfsvorstellung* unseres Denkens Bedeutung hat, für sich aber keine *Idee* bezeichnet" und es fungiert *nur* als „Erkenntnismittel und Instrument unseres Geistes" [Cantor 1932, 373f.].

Für die aktualen Unendlichkeiten definiert Cantor folgende Größen: Unter der Kardinalzahl versteht Cantor die *Mächtigkeit* einer Menge, d.h. Anzahl der Elemente einer Menge, als Zahl, die sowohl Abstraktion von der Beschaffenheit der Elemente ist als auch Abstraktion von der Ordnung ihres Gegebenseins. D.h. ein Rangverhältnis ist ausgeblendet und dadurch wird das Paradoxon aufgelöst, dass „zwei Mengen, von denen die eine ein *Teil* oder *Bestandteil* der anderen [beide Mengen aber äquivalent sind] ist, *völlig gleiche Kardinalzahlen* haben"; und im „*Verkennen dieser Tatsache*" sieht Cantor „das Haupthindernis, welches der Einführung unendlicher Zahlen von alters her entgegengebracht worden ist". [Cantor 1932, 379]

Des Weiteren unterscheidet Cantor dann die Ordnungszahl oder auch Ordinalzahl, die ein Allgemeinbegriff wohlgeordneter Mengen ist und jeweils isomorphe Mengen kategorisiert und an einer (An-)Ordnung (= Ordnungstyp) im Allgemeinbegriff orientiert ist. D.h. in der Anordnung einer Menge werden die Positionen bzw. Ränge des Rangverhältnisses mit natürlichen Zahlen belegt, im Sinne von *erstens, zweitens, drittens,...*. (Die Kardinalzahl dagegen zeigt die Anzahl der Elemente einer Menge im Sinne von *eins, zwei, drei,...* an.) Die Ordnungszahl ist „Anzahl einer wohlgeordneten Menge" und „in der Natur vorkommend" [Cantor 1932, 388]. „Zwei geordneten Mengen kommt dann und nur dann *ein und derselbe Ordnungstypus* zu, wenn sie zueinander im Verhältnis der *Ähnlichkeit* [= Isomorphie] oder *Konformität* stehen" [Cantor 1932, 379].

Daraus folgt, dass die Kardinal- und Ordnungszahlen bei endlichen Mengen gleich sind. D.h., es liegt eine Begriffsbildung vor, deren Sinn und Bedeutung erst durch die vielfältigeren Möglichkeiten eines hyperreellen Zahlenraums Geltung erfahren. Und diese Begriffe führen zu neuen „einfachen“ Gegenständen: „Die Kardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind *einfache* Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine *wahre Einheit* ($\mu o \nu \acute{\alpha} \varsigma$), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von Einsen *einheitlich* verbunden ist.“ Beim Ordnungstypus liefern die begrifflich unterschiedenen Einsen „die Materie, während die unter diesen bestehende Ordnung das der Form entsprechende ist“ [Cantor 1932, 380].

Im Verweis auf den Umgang mit seinen mengentheoretisch gebildeten transfiniten Zahlen zweifelt Cantor auch am intuitiven Zählbegriff, der den Zahlen zugrunde liegen soll und bringt das Beispiel „Tausendmal Million“ als endliche Größe, die bei ihm vorzugsweise nach demselbem Prinzip wie eine transfinite Zahl vorgestellt wird (vgl. hierzu auch Freges $1000^{1000^{1000}}$, s. Kap. 5.2), womit dem Unendlichkeitsbegriff nochmehr Geltungskraft zugesprochen wird. Weiterhin wird bemerkt, „*daß die transfiniten Zahlen und Ordnungstypen im Reiche des Möglichen ebensowohl existieren, wie die endlichen Zahlen und daß im Transfiniten sogar ein weitaus größerer Reichtum an Formen und an ‚species numerorum‘ vorhanden und gewissermaßen aufgespeichert ist, als in dem verhältnismäßig kleinen Felde des unbeschränkten Endlichen. Daher standen die transfiniten Spezies den Intentionen des Schöpfers und seiner absolut unermeßlichen Willenskraft ganz ebenso verfügbar zu Gebote, wie die endlichen Zahlen.*“ [Cantor 1932, 402ff. Anm. 1] Das Transfinite ist notwendig auf ein Absolutes bezogen, auf „das wahrhaft Unendliche“, das sich der „menschliche[n] Fassungskraft und [...] mathematische[n] Determination“ entzieht [Cantor 1932, 405]. Hier muss auf einige Schwierigkeiten der Interpretation der Cantorschen Philosophie hingewiesen werden, die höchstwahrscheinlich durch den Einfluss der Kirche entstanden sind. Cantor als ein Verfechter der aktualen Unendlichkeiten als *verschiedene, eigenständige* Unendlichkeiten, denen er eben nicht nur eine Nähe zu den endlichen Größen einräumte, sondern auch ihre Bestimmungsgewalt, musste sich nicht nur gegenüber namhaften Mathematikern, sondern auch gegenüber der kirchlichen Institution (Pantheismusvorwurf) rechtfertigen. Gegenüber der Kirche, die den Unendlichkeitsbegriff als einen metaphysischen, nicht erfahrbaren und absoluten, gerne für ihre Lehre beansprucht(e), genügte das Festhalten an einer allen aktualen und potentiellen Unendlichkeiten überragenden absoluten Unendlichkeit; so verteidigt Cantor gegenüber dem Theologen Kardinal Franzelin das „Infinitum creatum“ und unterscheidet zwischen dem absoluten „Infinitum aeternum increatum sive Absolutum“ und dem „Infinitum creatum sive Transfinitum“. Letzeres ist nur überall dort Bestandteil der Natura creata, wo auf die „aktual-unendliche Zahl der geschaffenenen Einzelwesen sowohl im Weltall wie auch schon auf unserer Erde und, aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in jedem noch so kleinen, ausgedehnten Teil des Raumes, worin ich mit *Leib-*

niz ganz übereinstimme“ [Cantor 1932, 399], Bezug genommen wird. Der mögliche Einfluss der Theologie sei aber nur eine Randnotiz.

Zuletzt sei im Hinblick auf die Unterscheidung der Potentialität und Aktualität nochmal auf die Parallelität bei Cantor und Cohen hingewiesen, die darin besteht, dass beide erst durch die Eigenständigkeit unendlicher Größen eine Erkenntnis zulassen, die einen systematischen Einheitsbegriff zentriert. M.a.W., wenn Cohen die mathematischen Urteile mit der Realitätseinheit, mit der Einheit der *Mehrheit* und mit der Einheit der *Allheit* versieht, so kommt die Einheit immer in Hinblick auf ihr *Gebiet* bzw. auf ihren *Weg* zur Definition. Die Einheit lässt sich erst durch das Bestimmte und Eigentliche systematisieren. Da Cantor, wie gezeigt, mit der Konzentration auf das Unendlich*große* einen anderen Weg wie Cohen verfolgt, kann hier nur von einer Affinität und nicht von Kongruenz gesprochen werden. Cantor schreibt: „Der Begriff ω beispielsweise enthält *nichts Schwankendes*, nichts *Unbestimmtes, nichts Veränderliches, nichts Potenzielles*, er ist kein *ἄπειρον*, sondern ein *ἀφωρισμένον* und das gleiche gilt von allen andern transfiniten Zahlen.“ [Cantor 1932, 390] Das uneigentlich Unendliche ist ein Veränderliches, die Grenze aber ein Unveränderliches, eine feste Größe, demnach „kann von beiden Unendlichkeitsbegriffen nur das *Transfinitum* als *seiend* und unter Umständen und in gewissem Sinne auch als *feste Grenze* gedacht werden“ [Cantor 1932, 391]. Das potentiell Unendliche ist eben nur ein „Hilfs- und Beziehungsbegriff“, das auf „ein zugrunde liegendes *transfinitum* hinweist“, das ihm erst den nötigen Boden gibt, was Cantor auch Herbart zum Vorwurf macht: „Die weite Reise, welche *Herbart* seiner ‚*wandelbaren Grenze*‘ [des bei ihm allein akzeptierten potentiell Unendlichen (Anm. d. A.)] vorschreibt, ist *eingestandernermaßen nicht* auf einen endlichen Weg beschränkt; so muß denn ihr *Weg* ein *unendlicher*, und zwar, weil er *seinerseits nichts Wandelndes*, sondern überall fest ist, ein *aktualunendlicher Weg* sein. Es fordert also *jedes potentiale Unendliche* (die wandelnde Grenze) ein *Transfinitum* (den sicheren Weg zum Wandeln) *und kann ohne letzteres nicht gedacht werden*“ [Cantor 1932, 391ff.].

Wie bei Cohen haben wir damit eine erzeugende Bedeutung im aktual Unendlichen und die Abhängigkeit der Grenzgrößen von dem Begriff eines eigentlichen, aktual Unendlichen, nur dass Cantor das Unendlichkleine von eben jenen aktualen Unendlichkeiten ausgrenzt. Aber: *Nur durch* das aktual Unendliche können Einheiten und damit wieder andere Unendlichkeiten erkannt werden. Diese Begriffe zeigen ein Vermögen unserer Erkenntnis auf, die Unendlichkeit nicht im Sinne beispielsweise Herbarts als unbestimmtes, unfertiges Zählen zu einer wandelbaren, ins Jenseits verrückbaren Grenze zu bestimmen, sondern dass ein Verständnis von Kontinuität - ausgedrückt im aktual Unendlichen - eben erst den Boden liefert, auf dem ein potentiell Unendliches gedacht bzw. erfasst werden kann. Durch den Gebrauch extensiver Größen allein kann keine Herbartsche „wandelbare Grenze“

erfasst und bestimmt werden, denn der Weg zu diesem Grenzbegriff kann kein endlicher sein.

Diese Unterscheidung der Unendlichkeiten findet sich nach Cantor sowohl bei den alten Griechen, „ebenso [...] bei den Neueren, mit Ausnahme vielleicht von Kant, Herbart und den Materialisten, Empiristen, Positivisten etc.“ [Cantor 1932, 391]. Die Zahl ω ist nicht innerhalb der Zahlenreihe $1, 2, 3, ..$ oder als Maximum derselben zu suchen, sondern ist nur Minimum aller unendlichen Ordnungszahlen. Dieser Vergleich von unendlichen Größen, auch generell die Unterscheidung verschiedener Unendlichkeiten, anstatt die Unendlichkeit als einen verabsolutierten Begriff zu nehmen, wird nicht nur Mathematikern wie Kronecker, sondern auch Philosophen zum Vorwurf. Cantor unterstellt wiederum vor allem Kant eine Vermischung/Verwechslung transfinitärer (vermehrbarer) und absoluter (mathematisch undeterminierbarer) akutaler Unendlichkeiten und „die falsche Vorstellung“, es „sei das Absolute die ideale Grenze des Endlichen, während in Wahrheit diese Grenze nur als ein Transfinitum, und zwar als das Minimum alles Transfiniten [...] gedacht werden kann.“ Er polemisiert, dass im Kapitel über die „Antinomien der reinen Vernunft“ „kaum jemals mehr [...] zur Diskretisierung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten geschehen sein“ soll – die Verwendung des Unendlichkeitsbegriffs nennt er „vage“ und „distiktionslos“. Doch Ernst Zermelo als Herausgeber merkt richtigerweise an, dass Cantor der Kantischen Lehre „nicht gerecht zu werden“ scheint, da Kant seinen Unendlichkeits*begriff* in Bezug auf das *Weltganze* anwendet, um die Antinomie von Diskretion und Kontinuität (das Weltganze ist sowohl endlich als unendlich) aufzuzeigen, wobei eine Mathematisierung des Unendlichkeitsbegriffs redundant ist und in Kants Lehre von den Antinomien „ein Einblick in die ‚dialektische‘ Natur des menschlichen Denkens zum Ausdruck kommt“ und dies ganz unabhängig von einem Urteil über die Kantische Theorie der Mathematik. „Und ein eigentümliches Schicksal fügte es, daß gerade die „Antinomien der Mengenlehre“, deren mindestens formale Analogie mit den Kantischen nicht wohl in Abrede gestellt werden kann, ein ganzes Menschenalter hindurch der Ausbreitung und Anerkennung der Cantorschen Leistungen im Wege gestanden haben.“ (Zermelo in: [Cantor 1932, 377f.])

Eine weitere Kritik Cantors an der Philosophie soll ein Novum der Cohenschen Philosophie verdeutlichen: „Bei allen Philosophen fehlt jedoch das *Prinzip des Unterschiedes* im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und zu verschiedenen Mächtigkeiten führt.“ [Cantor 1932, 391] Diese 1887 getätigte Kritik Cantors trifft auf jeden Fall nicht mehr auf Cohens „Logik der reinen Erkenntnis“ zu. Die unterschiedlichen Unendlichkeiten werden von Cohen nicht erwähnt, diese sind aber auch mathematische und keine philosophischen Gegenstände. Cohen liefert aber die Grundlage für die Möglichkeit unterschiedlicher Unendlichkeiten, denn jede (mathematische) Einheit, die durch das *Urteil der Einheit der Allheit*

Gegenstand wurde, lässt sich in einem *Urteil der Einheit der Mehrheit* wieder als Einheit in ein höherstufiges System eingliedern. Die mathematischen Urteile sind durch die Begriffe der *Realität*, *Mehrheit* und *Allheit* einem *Interesse(nsgebiet)* untergeordnet. Damit ist sowohl die Mathematik aus der Starre des ‚natürlichen Zählens' befreit als auch die Philosophie von einer verabsolutierten Mathematik.

5.2 Gottlob Frege

Auch Frege zählt zu den namhaften Zeitgenossen und Kritikern Cohens. Wie schon bei Cantor und Cohen ist es auch bei Frege und Cohen so, dass es wohl zu keinem (von Frege zwar noch angedachten [Frege 1885_1, 325]) „Gedankenaustausch" gekommen ist. Dies ist sehr zu bedauern, da auch Frege ein großer und wirkungsvoller Denker seiner Zeit war. Während das Gros der Philosophen und so auch Cohen, wenn sie von Logik sprachen, die Aristotelische Syllogistik im Sinne hatten, stellte Frege die Weichen für eine umfassendere und tiefergehende systematische formale Logik, die die Aristotelische Syllogistik zu einem bloßen Spezialfall machen soll. Frege verfolgte in dieser Zeit ein sehr ambitioniertes Ziel, mit dem er zwar auf Grund seiner Radikalität scheitern musste, aber es trotzdem schaffte, mit seinem Projekt einen Meilenstein in der Geschichte der mathematischen Logik zu setzten. Seine Formalisierungen und seine philosophische Herangehensweise waren wegweisend und brachten manchen Zeitgenossen und Nachfolger – und das trotz des sofortigen kuriosen Scheiterns des Fregeschen Projekts durch die Russelschen Antinomien – zum Träumen. Sein Ziel bestand darin, in erster Linie die arithmetischen, in zweiter *alle* mathematischen Begriffe explizit und gänzlich mit Hilfe seiner formalen Logik zu definieren. Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff ‚formal' jedoch nicht immer voll und ganz zutreffend ist, da die mit nichtformalen Elementen versehene Mengenlehre Cantors eine Grundstatute in seinen Axiomatisierungen bildet.

In seinen „Grundlagen der Arithmetik", die kurz nach Cohens „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte" erschienen, unternimmt Frege den Versuch, der Arithmetik eine logische Grundlegung zu geben, um mit deduktiven Schlussweisen die gesamte Arithmetik vollständig und widerspruchsfrei zu erschließen. Die Vorarbeit dazu lieferte seine sehr bekannte „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens" [Frege 1879], die „heute als Beginn der mathematischen Logik" gilt [Bedürftig 2015, 430]. In den „Grundlagen der Arithmetik" sollten dann eben „alle arithmetischen Sätze allein aus Definitionen rein logisch abgeleitet werden können und demzufolge auch abgeleitet werden müssen", und die Grundsätze, auf denen sich die Arithmetik dann aufbaut, „müssen sich auf alles Denkbare erstrecken; und einen solchen allgemeinsten Satz zählt man doch wohl mit Recht der Logik zu." Frege geht als Logizist sogar so weit, dass nicht nur die Arithmetik auf einer Logik *auf*gebaut werden soll, sondern es gilt: „[E]s ist keine scharfe Grenze zwischen Logik und Arithmetik zu ziehen; vom wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus betrachtet sind beide [sogar] eine einheitliche Wissenschaft. Wenn man der Logik die allgemeinsten Grundsätze und vielleicht die allernächsten Folgerungen zuweist, der Arithmetik hingegen die weitere Ausbildung, so ist das so, als ob man von der Geometrie eine eigene Wissenschaft der Axiome abtrennen wollte.“ [Frege 1885_2, 94]

Diese Zitate zeigen sofort auf, dass Cohen und Frege keine Brüder im Geiste werden konnten. So äußert sich Cohen in seiner „Infinitesimalschrift“ auch als Gegner des Logizismus und zudem sieht er in der Infinitesimal-Methode eine Methode, die auf dem Gebiet der *transzendentalen, nicht der mathematischen oder formalen Logik* basiert. Des Weiteren operiert Cohen mit eigentlichen, d.h. aktualen Größen, die auf Grund ihrer Inextensivität nicht im Fregeschen Sinne arithmetisierbar sind. Frege dagegen war der Meinung, eine Lösung gefunden zu haben, dieses Problem der Inextensivität infinit(esimal)er Größen zu umgehen.

Frege kritisiert diese Schrift Cohens - und das kurz vor der Veröffentlichung seiner Grundlagen der Arithmetik – mit deshalb scheinbar guten Gründen, denn für ihn war klar, dass die „arithmetischen Probleme des Differentials [. . .] jetzt übrigens wohl nahezu erledigt“ seien [Frege 1885_1, 327]. Frege wehrt sich demnach auch vor allem gegen Cohens Aussage, es „würde auf Widersprüche führen [. . . , wenn] man das Differential durchaus als extensive Größe gelten lassen wollte“, und man hätte sich damit in die „bekannten Schwierigkeiten verwickelt“, die dem Differential anhaften [Frege 1885_1, 326]. Ähnlich wie Cantor kritisiert auch Frege Cohens Vorstellung, dass die infinitesimale Größe eine eigentliche Größe sei. Die Gründe Freges sind teilweise ähnlich, unterscheiden sich aber doch von denen Cantors, denn Frege sieht die Infinitesimalrechnung, wie es sich in seinem Werk „Grundlagen der Arithmetik“ zeigt, in das Gebiet und *nur* in das Gebiet der Arithmetik und damit in seine mathematische Logik eingeordnet. Die Motivation hinter dieser Vorstellung liegt in der Rückführung der gesamten arithmetischen Sätze auf die Logik.

Die drei Grundsätze seines Werks „Grundlagen der Arithmetik“, dessen Thesen die Cohenschen für „wohl nahezu erledigt“ erklären sollen, sollen hier als Orientierungspunkte gelten, um ein paar Unterschiede beider Philosophen zu verdeutlichen. Der erste Grundsatz lautet:

> a) „es ist das Psychologische [„Vorstellung“] von dem Logischen [„Vorstellungen von Begriffen“], das Subjektive von dem Objektiven scharf zu trennen“;

Dieser erste Grundsatz ist bezeichnend für Frege. Seine Zeit steht im Kampf mit dem aufkommenden Psychologismus, was Frege auch dazu veranlasst in Bezug auf die „Infinitesimalschrift“ Cohens wenigstens in dem „vereinzelten“ Fall „[zu]zustimmen, daß die Erkenntnis nicht als psychischer Vorgang den Gegenstand der Erkenntnistheorie bildet, und daß demnach Psychologie und Erkenntnistheorie scharf zu sondern ist.“ [Frege 1884, 102] Dies stellt tatsächlich eine gemeinsame Position beider dar. Aber während Frege mit rein logischen Mitteln dem Psychologismus entgegnet, schlägt Cohen einen transzendental-logischen Mittelweg vor, der die Positionen des Fregeschen Logizismus und des Psychologismus einander eher als Extrempositionen gegenüberstellt. Psychologie, darin herrscht zwischen Frege und Cohen Einigkeit, „entwirft [nur] die *Beschreibung des Bewusstseins* aus seinen Elementen“. Diesen Elementen, nämlich Reizen, Empfindungen, Anschauungen etc. fehlt es an der Kraft der Fundamentierung, sie müssen in ihrer beschreibenden Funktion „hypothetische sein – und bleiben, dieweil dasjenige, womit in Wahrheit das Bewusstsein beginnt und worin es entspringt, kein mit Bewusstsein Operierender auszugraben und festzustellen vermag.“ [Cohen 1883, § 7] In Freges „Grundlagen der Arithmetik“ scheinen obige Elemente keine Rolle zu spielen. Denn die analytischen apriorischen „Ur“-Wahrheiten seiner Arithmetik sind die der „allgemeinen logischen Gesetzte und [...] Definitionen“, „die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind“ [Frege 1884, 4].

Diese Priorisierung logischer „Urwahrheiten“ steht im krassen Gegensatz zu Cohens Aussage, dass die Wissenschaft der Logik vorausgehe. Cohen verweist auf die Einseitigkeit des Logizismus (vgl. [Cohen 1883, §§ 4–7]), diesem fehle der Übergang zur Wissenschaft im Allgemeinen. Denn, was soll eine Wissenschaft *bloßer* Objektivität denn schon *selbständig* leisten ohne Zugang zu den Gegenständen, in denen sich auch die Mittel des Bewusstseins realisieren, die Erkenntnis erst ermöglichen? Überspitzt gesagt, das was dem Psychologismus an Objektivität fehlt, fehlt dem Fregeschen Logizismus an Subjektivität.

Cohen präferiert deshalb die transzendentale Logik, die die Trennung zwischen dieser idealen Anwendung der arithmetischen Prinzipien ermöglicht und parallel die Arithmetik als selbständige Wissenschaft existieren lässt. Dass dies eigentlich auch im Sinne Freges sein müsste, könnte man mit seinem dritten Grundsatz (Punkt c), s.u.) vermuten; es scheitert aber an seinem Credo, dass Logik und Arithmetik „eine einheitliche Wissenschaft“, sozusagen eine vollkommene Wissenschaft ergeben. Denn in der Erkenntnislogik Freges ist „Objektivität eine Unabhängigkeit von unserem Empfinden, Anschauen und Vorstellen“ [Frege 1884, §26]. Frege kritisiert Cohen deswegen dafür, dass ihm die Empfindung das eigentliche Fragezeichen der Mathematik darstelle, mehr noch als die Anschauung (vgl. [Cohen 1883, §105]) und quittiert dies mit den Worten: „Im Gegenteil! mit der Empfindung hat die reine Mathematik nichts zu tun.“ [Frege 1885_1, 328] Hierbei unterstellt Frege Cohen aber zu Unrecht, Psychologisches in die Mathematik einschleusen zu wollen. Die Rolle der Empfindung im Erkenntnisakt und in Cohens Interpretation des Kantischen Grundsatzes der Antizipation der Wahrnehmung wurde (s. Kapitel 1.3 und 3.1) als eine *nicht positive* formuliert!

Nun zu Freges zweitem Grundsatz:

> b) „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden“;

Wie zu Grundsatz a) festgestellt, ist die Arithmetik bei Frege keine klassische Wissenschaft, sondern als eine Art Erkenntnislogik eine *Prima Philosophia*, die als *selbsterklärende* es erlaubt, ihre Begriffe zu vereinzeln, und deshalb zu folgendem Urteil Freges führt: „Er [sc. Cohen] irrt in der Meinung, daß zunächst allein die geschichtliche Einsicht eröffnen könne, was als eine logische Voraussetzung der Wissenschaft in Anspruch zu nehmen sei [...]. Im Gegenteil: jene logischen Grundlagen werden wohl immer erst spät entdeckt, nachdem schon ein erheblicher Umfang des Wissens erreicht ist. Der geschichtliche Ausgangspunkt erscheint vom logischen Standpunkte aus meistens als etwas Zufälliges.“ [Frege 1885_1, 326]

Wir finden bei Frege also eine sehr statische Philosophie vor. Hierbei bleibt natürlich die Frage, wie Frege zu den Zufälligkeiten in ‚seiner‘ Wissenschaft der Logik steht, da er vor allem gleichzeitig die Prämisse: „Alle erkennen dieselben Axiome“ [Frege 1884, 25] in den Raum stellt und bis zu seinen Veröffentlichungen trotzdem Jahrhunderte vergangen sind, bis die ‚richtige‘ logische Axiomatisierung des Infinitesimal-Begriffs erkannt wurde. Ist nicht die Genese der Wissenschaften, so auch der ständige Zuwachs an mathematischen Größen, die Erweiterung von Systemen, ja, die Vergrößerung unseres Wissens im Allgemeinen die Möglichkeit für neue Axiomatisierungen bzw. Grundlegungen?

Auch in Grundsatz b) scheiden sich die Geister Freges und Cohens wieder darin, was die Interpretation des Ursprungs ihrer Prinzipienwissenschaften angeht. Die Kontextabhängigkeit eines Begriffs basiert bei Frege nur in den logischen Abhängigkeiten, während für Cohen das Faktum der Wissenschaft, damit die Genese des Begriffs als ein Begriff der Wissenschaft eine Rolle spielt. Und dies impliziert immer auch eine geschichtliche Interpretation. Wie in Kapitel 3.1–3.3 aufgezeigt, ist durch das Ursprungsurteil in jeder Begriffsentstehung eine Einordnung in ein ‚Weltbild‘ notwendig, die uns Cohen als eine modifizierte Monadentheorie präsentiert. Dies führt bei Frege und Cohen zu Meinungsverschiedenheiten, die auch am Begriff des Infinitesimalen deutlich werden. Für Frege gilt: „Schon der Übergang von der Qualität des Urteils zu der qualitativen Realität und der intensiven Größe bei Kant scheint mir fragwürdig. Jedenfalls kann der Gegensatz von gemeinen und infinitesimalen Zahlen nicht als ein solcher des Extensiven und Intensiven aufgefaßt werden. Es ist hier nicht genügend unterschieden zwischen dem Arithmetischen und dessen Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Die Infinitesimalrechnung ist in ihrem Wesen rein arithmetisch, und zur Definition oder Rechtfertigung ihrer Grundbegriffe darf man nicht auf Geometrie oder Mechanik zurückgehen, wenngleich der geschichtliche Ausgangspunkt in geometrischen und mechanischen Aufgaben gelegen hat.“ [Frege 1885_1, 327] Ob die Infinitesimal-Mathematik im Zuge umfassender systematischer Überlegungen entstanden ist beziehungsweise sein könnte, die kaum oder ganz ohne die Geometrie und Mechanik entstehen konnten, darüber lässt sich durchaus streiten. Dass aber die infinit(esimal)en Größen doch eine Ausnahmestellung in der Arithmetik innehaben, wird sich mit den Russellschen Antinomien und dem Grundlagenstreit und seinen Auswirkungen zeigen.

Kommen wir noch zum dritten der drei Fregeschen Grundsätze und einer damit verbundenen Kritik an Kant:

> c) „der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten“, da wenn ein Begriff zum Objekt wird, er „notwendig verändert“ wird. [Frege 1884, 9]

Wie Cohen kritisiert auch Frege den Kantischen Anschauungsbegriff. Dabei spielen in der Fregeschen Argumentation vor allem die großen Zahlen eine große Rolle. Denn für Frege gilt: „[T]rotzdem ist $1000^{1000^{1000}}$ ein Gegenstand, dessen Eigenschaften wir erkennen können, obgleich er nicht anschaulich ist.“ Wie im Hinblick auf die Empfindung gilt ihm auch hierbei: Stützt man sich bei Definitionen auf die Anschauung, „so führen wir etwas Fremdartiges in die Arithmetik ein“ [Frege 1884, 62].

Am berühmtesten ist wohl Freges dahingehende Kritik an Kants Vorstellung von Zahl und Arithmetik, dass $7 + 5$ für Frege nur durch allgemeine logische Gesetze und auf Grund von der Definition von 12 und damit durch ein analytisches Urteil zustande kommen kann. Er untermauert dies durch den gebräuchlichen Umgang mit großen Zahlen: Betrachtet man $135664 + 37863$, so scheint der Ausdruck „Anschauung“ aber „auch nicht recht zu passen“ und lässt vermuten, dass Kant, der bei $7 + 5$ gleich 12 von einem synthetischen Urteil spricht, „offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt“ hat. [Frege 1884, 12]

Der Haupteinwand gegen Kant ist: „Kant scheint den Begriff durch beigeordnete Merkmale bestimmt zu denken“, so dass ein zugeordnetes Merkmal durch ein synthetisches Urteil entstanden sei. In der Arithmetik würde Frege dem gerne widersprechen, da für ihn das rein logische Beweisen analytisch ist, auch wenn dadurch neue Merkmale dazukommen, denn diese „sind in der That in den Definitionen enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balkon im Hause.“ [Frege 1884, 56] Wichtig ist ihm, dass die Arithmetik als analytisches Urteilen wahrgenommen wird, denn ihre Gesetze „behaupten nicht einen Zusammenhang zwischen Naturerscheinungen, sondern einen solchen zwischen Urtheilen; und zu diesen gehören auch die Naturgesetze.“ [Frege 1884, 55] Es wird also das Ziel verfolgt, die Arithmetik als eine Form der formalen Logik darzustellen, „Rechnen wäre [dann] Schlussfolgern“ [Frege 1884, 55].

Frege kritisiert die Auffassung, die Zahl bloß vom Begriff abhängig und am

Gegenstand ablesbar zu charakterisieren, da dann die Zahlen keine selbständigen, wiedererkennbaren und unterscheidbaren Gegenstände darstellen. Denn: „Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen“ [Frege 1884, 40] und Zahlen sind eben keine bloßen Eigenschaften eines Begriffs und so auch nicht „bildartig“ vorstellbar. Zahlen müssen auch ohne einen mit der Zahl verbunden Gegenstand verwendet werden können. Als Beispiel gibt Frege an, dass die Aussage „Die Zahl der Jupitermonde ist vier“ eine Gleichung ist, „die behauptet, dass der Ausdruck ‚die Zahl der Jupitermonde‘ denselben Gegenstand bezeichne wie das Wort ‚vier‘“ [Frege 1884, 41]. D.h., dass das „ist“ im obigen Beispiel als Gleichheitszeichen und nicht als bloße Kopula von Subjekt und Prädikat verstanden werden kann. Das Zahlwort müsse außerhalb eines Kontextes keine Vorstellbarkeit (ihres Inhalts) haben, es sei ein Attribut des Denkens, über das Vorstellbare hinaus trotzdem logisch(en) richtigen Schlussweisen zu folgen. „Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Theile ihren Inhalt.“ [Frege 1884, 41]

Es gilt also bei Definitionen „einen beurtheilbaren Inhalt aufzusuchen, der in eine *Gleichung* verwandelt werden kann, deren Seiten dann eben die neuen Zahlen sind. Mit anderen Worten: wir müssen den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für solche Zahlen festsetzen.“ [Frege 1884, 62] Dies bringt für Frege auch Erkenntnisse in Bezug auf das Unendlichkleine, denn es „kommt darauf an, den Sinn einer Gleichung wie $df(x) = g(x)dx$ zu definieren, nicht aber darauf, eine von zwei verschiedenen Punkten begrenzte Strecke aufzuweisen, deren Länge dx wäre.“ [Frege 1884, 41] Hier wird der Konflikt zwischen Anschauung und Denken von Frege schon angesprochen. Ein aktuales Unendlichkleines ist ihm nur als Bestandteil einer Gleichung, in etwa als Sinnstifter ohne Anspruch auf Bedeutung möglich, deshalb muss das Unendlichkleine als bloßes Zeichen potentiell bleiben. Frege bemerkt so auch zur Vorstellung von Zeichen, dass sie für den (reinen) Mathematiker austauschbar und nicht als Anschauliches verstanden werden, dass Zeichen zwar ihren Inhalt (mit-)erfassen und (mit-)erklären, dieser aber separat erfasst wurde. „Es genügt [ihm allein] zu wissen, wie der in den Zeichen versinnlichte Inhalt logisch zu behandeln ist, und wenn man Anwendungen auf die Physik machen will, wie der Übergang zu den Erscheinungen geschehen muss.“ [Frege 1884, 19] Diese von Frege initiierte philosophische Position des Logizismus geht davon aus, dass die Grundlagen der Mathematik *in Gänze quantifizierbar* und streng logisch sind. D.h., aus einem endlichen formallogischen Axiomensystem soll *alle* Mathematik widerspruchsfrei abgeleitet werden können. Diese Position, der auch Bertrand Russell folgt und die die Logik allein zur Philosophie der Mathematik macht, hat mit der Veröffentlichung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze einen enormen Rückschlag erhalten (s. Kap. 6.1).

5.3 Bertrand Russell

Bertrand Russell zählt zu den schärfsten Kritikern Cohens. In seinem Werk „The Principles of Mathematics“ aus dem Jahre 1903 diskutiert Russell die „Infinitesimalschrift“ Cohens an mehreren Stellen und bezeichnet die vorgefundenen Cohenschen Theorien als „undue mysticism“, „now generally abandoned“, „mathematically useless“ und „unnecessary, erroneous, and selfcontradictory“ [Russell 1903, §§ 303, 309, 324]. Dass diese sehr deutliche Mißbilligung sowohl aus philosophischer als auch aus mathematischer Sichtweise größtenteils zu entkräften ist, darauf haben in erster, philosophischer Hinsicht schon früh unter anderem Natorp und J. Cohn (s.u.) hingewiesen, in Bezug auf die Mathematik gibt es einen Hinweis durch P. Schulthess auf die Nonstandard-Analysis und damit auf „die Möglichkeit einer Analysis die widerspruchsfrei mit unendlichkleinen Größen operiert, wodurch denn auch Russells statement entkräftet wird“ [Schulthess 1984, 40* Anm. 85], sowie auch durch Jean Petitot [Petitot 1994].

Diese grundverschiedenen Vorstellungen zu infinitesimalen Größen, die Cohen und Russell pflegen, resultieren aus gegensätzlichen Einstellungen, die die Grundlagenforschung in der Mathematik betreffen. Denn wie Frege zählt auch Russell zu den Logizisten, wobei Russell m.E. noch rigider den logizistischen Positivimus zu verteidigen versucht. Um obige Polemik einordnen zu können, sei hier schon bemerkt, dass in den vorliegenden Diskussionen bereits der Grundlagenstreit der Mathematik aufkeimt, der zwischen Logizisten wie Formalisten auf der einen Seite und den dem Neukantianismus nahestehenden Intuitionisten wie Konstruktivisten auf der anderen Seite geführt wurde. So wundert es nicht, dass es Cohen zum Vorwurf wird, ein Verfechter einer „constructive theory, by an undue mysticism, inherited from Kant“ [Russell 1903, § 303], zu sein. Beispielsweise wird Cohen in §317 [Russell 1903] die konstruktivistische Position, wiederum mit dem Verweis auf Kant, zum Vorwurf, da er die Anzahl mit der Zeit verbindet, die zum Zählen benötigt wird, was Russell als Logizist vehement bestreitet.

Es sei hier schon erwähnt, dass die Marburger Schule später durch Verweise der Gegner des Formalismus und Logizismus sogar ein unmittelbarer Teil des Grundlagenstreits wurde. Näheres dazu findet sich im nächsten Kapitel, hier soll nur die Prägnanz der Grundlagendiskussion in der Diskussion um die durch die Infinitesimal-Methode berührten Begriffe betont werden.

Vorerst lohnt sich ein Rückblick auf die Antinomie nicht-reflexiver Klassen, die sogenannte „Russellsche Antinomie“, die Frege zum Problem wurde. Im Jahre 1902 wies Russell Frege auf eine Stelle in den „Grundgesetze[n] der Arithmetik“ hin, „in der ich auf Schwierigkeiten gestoßen bin. Sie behaupten (S.17), dass auch eine Funktion sich als unbestimmtes Element verhalten kann. Früher habe ich das geglaubt, jetzt aber scheint mir solche Ansicht fragwürdig wegen des folgenden Widerspruches. Sei w die folgende Eigenschaft: Eine Eigenschaft zu sein, die man über sie selbst aussagen kann. Kann man jetzt die Eigenschaft w über sie selbst aussagen? Aus jeder möglichen Antwort folgt ihr Gegenteil. Wir müssen also in der Folge sagen, dass w keine Eigenschaft ist. Auf ähnliche Weise existiert keine Klasse (als ein Ganzes), die aus solchen Klassen besteht, die nicht zu sich selbst gehören. Ich ziehe daraus den Schluss, dass unter bestimmten Bedingungen definierbare Zusammenfassungen keine fertigen Gesamtheiten bilden.“ [Heijenoort 1967, S. 124f.]

Damit setzte Russell selbst den ersten großen Nadelstich gegen die Position des Logizismus und brachte Frege in große Schwierigkeiten, was dieser in seiner brieflichen Antwort mitteilte: „Ihre Entdeckung des Widerspruches hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufbauen dachte in's Wanken gerät. [. . .] Jedenfalls ist ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint.“ [Frege 1976, Bd. 2, 212f.] Russell hielt nichtsdestotrotz an der Fregeschen Rückführung der Arithmetik auf die formale Logik (und die Mengenlehre) fest und bringt in „The Principles of Mathematics“ [Russell 1903, unter anderem Kap. IV & X] mit den Ideen zur Typentheorie eine Lösung, die oben genannte Antinomie zu umgehen. Die Ausführung dieses Konzepts veröffentlichte Russell mit seinem Lehrer N. Withehead in den „Principia Mathematica“ ([Russell 1910]). „Die Hauptannahme dieser Theorie ist, dass die Gesamtheit aller Eigenschaften, die man untersuchen kann, eine unendliche Hierarchie von Typen bildet: Die Eigenschaften des ersten Typs sind Eigenschaften von Individuen, Eigenschaften des zweiten Typs sind Eigenschaften der Eigenschaften des ersten Typs, usw. In dieser Hierarchie gibt es keine Eigenschaften, die gleichzeitig Individuen und Eigenschaften von Individuen besitzen können. Die Folge ist, dass es in dieser Hierarchie keine einheitliche Gleichheitsrelation gibt. Es gibt vielmehr eine Gleichheit von Individuen, dann eine Gleichheit von Eigenschaften des ersten Typs, usw.“ [Bedürftig 2015, 102]. Damit können selbstreferentielle Aussagen obiger Antinomie umgangen werden. Diese Typisierung als Einteilung von Klassen der Erkenntnisobjekte, als eine Hierarchisierung des Erkenntnisvollzuges, der sein Resultat in gleichem, nicht selbigem, sondern nachfolgendem(!), Erkenntnisvollzug wiederum in nächster Ebene einbezieht, spielt in der Diskussion um die Begriffe der Unendlichkeit, des Unendlichkleinen und der Kontinuität, vor allem auch im Hinblick auf die Streitpunkte mit Cohen eine erhebliche Rolle.

So ist die Cohensche Philosophie eine des Ursprungs, die mit dem Denken beginnt. Bringt Cohen den Begriff der Kontinuität ins Spiel, dann wird dieser erkenntnistheoretisch im Sinne der Eleaten behandelt, welche die Kontinuität in einem Zusammenhang „derjenigen Erwägungen an[siedeln], welche das *Sein aus dem Denken* ableiten.“ Wir sprechen dann von der Kontinuität des Bewusstseins und diese ist „ein *Special*-Ausdruck des *allgemeinen Gesetzes der Einheit des Bewusstseins*.“ [Cohen 1883, § 40] Damit ist die Kontinuität eine allgegenwärtige, vorrangige Grundlage der Erkenntnis. Führt man sich vor Augen, dass das Denken stets Einheiten bildet, da jeder Begriff ein Abstraktum und damit eine Diskretion darstellt, die Grenzen setzen, so ist Kontinuität *das* Mittel des Denkens, das gleichwie *vor allem* „vor“-zeitig und nicht erst in nachfolgender, zweiter Ebene für den Zusammenhang dieser Einheiten zuständig ist; und da dieser Zusammenhang als unerlässlich für die Cohensche Prämisse der Einheit des Bewusstseins gilt, so muss der Kontinuität eine ganz entscheidende Rolle in der Erkenntniskritik zukommen. Cohen bezieht sich dabei auf Leibniz, der sich selbst „mit Vorliebe als *Auteur du principe oder de la loi de la continuité*“ bezeichnet und von dem man sagen dürfe, dass „sein logisches Prioritätsrecht an der Entdeckung der Infinitesimalrechnung in diesem Prinzip besteht.“ [Cohen 1914, 91] Cohen verweist auf eine Aussage Leibniz’, die die Kontinuität als *Gesetz der Denkoperationen* identifiziert: „Chacune de ces substances contient dans sa nature *legem continuationeis seriei suarum operationum*.“ Damit soll obige Beschreibung in der Hinsicht verdeutlicht werden, dass jedes Urteil, auch die Denkoperation des Urteils des Ursprungs als Voraussetzung des, in dem beschriebenen erkenntniskritischen Sinne verstandenen, Kontinuitätsbegriffs bedarf: „Die Kontinuität betrachten wir daher nicht als eine Kategorie, welche durch das unendliche Urteil des Ursprungs erzeugt würde; sondern es muß ihr, der Bedeutung des Urteils des Ursprungs gemäß eine sich tiefer und weiter erstreckende Bedeutung zuerkannt werden. Eine solche behauptet von altersher das Denkgesetz gegenüber der Kategorie. *Die Kontinuität ist ein Denkgesetz*.“ [Cohen 1914, 91] Diese Bezugnahme auf die (prägnanteren) Ausführungen in der „Logik der reinen Erkenntnis“ fußt selbstverständlich auf der „Infinitesimalschrift“. Somit bleibt die Kritik an den von Russell geäußerten Vorwürfen, die sich auf letzteres Werk beziehen, ohne unrechtmäßige Bezugnahme.

Dass der Denkanstoss der infinitesimalen Einheit aus und in der Einheit des Bewusstseins entspringt, ist schon das Gedankengut der früheren „Infinitesimalschrift“, wobei, bevor der Russellsche Kontinuitätsbegriff diskutiert wird, hier schon auf einen möglichen Stolperstein in der Cohenschen Formulierung hingewiesen werden muss, was die Rolle des Unendlichkleinen im Hinblick auf die *vorausgesetzte* Kontinuität betrifft: Denn „[s]chwierig ist es auch, wenn Cohen das dx selbst als die wahre ‚Einheit‘ bezeichnet. Doch wird auch das in bestimmtem Sinne verständlich. Die Einheit überhaupt wird durch die Infinitesimalmethode, wie gesagt, relativiert, indem jede Maßeinheit einer bestimmten Wertordnung in einer anderen unendlichklein, jedes für eine Ordnung Unendlichkleine in einer anderen Ordnung endliche Maßeinheit sein kann, also jedes x wieder als dx, jedes dx als x fungieren kann. Am Ende hat Cohen eben dies sagen wollen, obwohl die Ausdrucksweise gegen Mißverstand nicht genügend geschützt ist. Es kann leicht die verkehrte Meinung entstehen, als ob das Endliche durch das Unendlichkleine gemessen werden sollte, während gerade das Hinausgehen über die Forderung der Meßbarkeit es ist, was durch das Infinitesimalverfahren ermöglicht wird." In diesem „Verfahren mit dem Infinitesimalen drückt [sich] prägnant die souveräne Macht des Denkens über das Sein aus, der keine absolute Schranke sich entgegenstellen kann." [Natorp 1910, 219]

Russells Kontinuitätsbegriff, den er dem Cohenschen gegenüberstellt, folgt einer anderen Motivation. Während für Cohen die transzendental-logische Frage nach der Möglichkeitsbedingung der Erkenntnis maßgebend ist – der Weg vom Denken zum Sein – so finden wir bei Russell eine *positivistische* Analyse des somit ‚nur' mathematischen Bestands, die am Sein dieses Bestandes die Denkmöglichkeiten zu umfassen versucht. Russells Vorstellung von Kontinuität – er betont, dass es ein spezieller Kontinuitätsbegriff sei und es auch jedem frei stehe, unter Kontinuität etwas anderes zu verstehen – ist eine, die sich rein arithmetisch begründet, scheinbar „free [...] from contradicitons" und von „purely ordinal notion". Russell nutzt hierbei für seine Typsierung auch die Errungenschaften Cantors und dessen Unterscheidung von Kardinal- und Ordinalzahlen. Die Ordinalzahl „is simply the name of the class *progression*, or of the generating relations of series of this class" [Russell 1903, §291] und steht damit für die unendlich-großen Zahlen in Relation zur mathematischen Induktion, somit einer Progression ohne letzten Term und ist hiermit nominalistisch definiert. „The salient points in the definition of the continuum are (1) the connection with the doctrine of limits [Russell bezieht sich auf die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit von Weierstraß (s. Kap. 4.3)], (2) the denial of infinitesimal segments. These two points being borne in mind, the whole philosophy of the subject becomes illuminated." [Russell 1903, §335] „The arithmetical continuum is an object selected by definition, consisting of elements in virtue of the definition, and known to be embodied in at least one instance, namely the segments of the rational numbers." [Russell 1903, §326]

Bei Russell besteht die Existenz des Kontinuums in der Zusammensetzung aus Teilen, Teilen, die gezählt werden können. In Kombination mit der Grenzwertmethode bleiben die infinitesimalen Größen für seine Definition außen vor. Diese Position steht der Leibnizschen und damit der von Cohen entgegen, letztere sind für Russell aber „only possible in regard to such continua as those of space and time." [Russell 1903, §326] Die Mathematik soll eben nicht mehr wie beispielsweise bei Cohen als ein mögliches Bindeglied zwischen Philosophie und Naturwissenschaft fungieren, sondern mit Hilfe der formalen Logik eigenständig werden. Ein Kontinuitätsbegriff kann für die Mathematik demnach nur durch die Arithmetik selbst geliefert werden: Russell vertritt (wie Cantor) die Kontinuumshypothese, die besagt:

„Für jede unendliche Menge reeller Zahlen gilt, dass sie entweder dieselbe Mächtigkeit wie die Menge aller natürlichen Zahlen oder aller reellen Zahlen hat.“[23]

Die Kontinuumshypothese hängt damit unmittelbar mit dem diskussionswürdigen Unendlichkeitsaxiom zusammen, denn es werden Elemente, die nicht alle bestimmbar sind, zu einer aktual unendlichen Menge zusammengefasst, für die es keine strukturelle Analyse für konstruktive/-istische Zusammenfassungen gibt. Dass jede (natürliche) Zahl einen Nachfolger besitzt, ist eine Folgerung aus dem Unendlichkeitsaxiom, das die Existenz einer Menge fordert, das die leere Menge und zu jedem Element einen Nachfolger enthält, der sich von seinen Vorgängern unterscheidet; dies ist sowohl für die Kontinuumshypothese als auch für die Typentheorie unumgänglich. Für die Typentheorie zumindest insoweit, als dass die Unendlichkeit von Klassen eine Voraussetzung für die Axiomatisierung darstellt. Man muss dann Russell hier vorwerfen, dass diese Voraussetzung jedoch *keine rein formallogische* sein kann, dies widerspräche dem Begriff der Unendlichkeit[24]! So bestehen die Widersprüche des Unendlichen nicht unbedingt aus den von Russell scharf kritisierten Voraussetzungen Cohens, sondern, wie J. Cohn zu Russells Ausführungen schreibt, es ist „[i]n Wahrheit das unvollendbare Vollendete in sich widersprechend.“ [Cohn 1908, 518 (Anm. 23)] Mit der „Verabsolutierung“ des aktual Unendlichen in den Ordinalzahlen und seiner davon ausgehenden Kritik wird Russell den Kantischen Denkmotiven Cohens nicht gerecht. Russell bezieht sich auf Kant nur im Lichte der Hypothese, dass das Kontinuum aus Teilen besteht (Kontinuumshypothese) und „on the supposition that there may be an actual infinite“ und dass dann „the necessity of time remains unproved“, wenn wir uns die Zahl als bloße „Schematisierung“ denken. Russell versucht das Problem des Kontinuums zu einem bloßen Problem der Arithmetik zu machen. Der Begriff der Kontinuität, den Cohen als Möglichkeitsbedingung der Erkenntnis diskutiert, wird ausgeschlossen. Das Problem der Kontinuität wird ihm zum Problem der Unendlichkeit von Mengen. Dies lässt sich besonders gut an seiner ‚Auflösung‘ des Zenonschen Paradoxon *Achilles und die Schildkröte* zeigen:

Für das Zenonsche Paradoxon *Achilles und die Schildkröte* sieht sich Russell vor die Wahl gestellt, dem Paradoxon Cantors, dass in unendlichen Reihenfolgen Teilfolgen existieren, die dieselbe Zahl an Folgenglieder besitzen, zuzustimmen oder

---

[23] Diese Formulierung entspricht nicht der originalen von Russell, ist aber äquivalent in ihrer Verallgemeinerung, die besagt: „Jede Familie von Teilmengen einer unendlichen Menge A ist gleichmächtig entweder zu einer Teilmenge der Menge A oder mit der Menge aller möglichen Teilmengen der Menge A.“ Diese und weitere äquivalente Formulierungen finden sich in [Bedürftig 2015, 298fff.].

[24] Russell versucht zwar diese Schwierigkeit (ebenso auch für das Auswahlaxiom) dadurch zu umgehen, dass man von Existenzsätzen im absoluten Sinne absieht und mit der Prämisse der Mathematik als rein formaler Wissenschaft vom Unendlichkeitsaxiom nur in Bedingungssätzen gesprochen werden darf, insofern, als nicht ein Satz S gilt, der das Unendlichkeitsaxiom A fordert, sondern nur der Satz „$A \to S$“ gilt; die nicht formallogische Voraussetzung im Aufbau einer Mathematik die vollständig in die Logik eingegliedert werden soll, bleibt jedoch bestehen.

dem Paradoxon Zenons, der in Verneinung des ersteren zu der Konklusion kommt, dass Achilles die Schildkröte nie einholen kann. Richtig bzw. richtungsweisend könne nur die erstere arithmetische Zugangsweise sein.

Russell übersetzt diese seine arithmetischen Vorstellung so, dass „it is seen to be concerned with the one-one correlation of two infinite classes. If Achilles were to overtake the tortoise, then the course of the tortoise would be part of that of achilles; but, since each is at each moment at some point of his course, simultaneity establishes a one-one correlation between the positions of Achilles and those of the tortoise. Now it follows from this that the tortoise, in any given time, visits just as many places as Achilles does; hence – so it is hoped we shall conclude – it is impossible that the tortoise's path should be part of that of Achilles. This point is purely ordinal, and may be illustrated by Arithmetic. Consider, for example, $1+2x$ and $2+x$, and let x lie one and only one value of $2+x$, and vice versâ. Hence as x grows from 0 to 1, the number of values assumed by $1+2x$ will be the same as the number assumed by $2+x$. But $1+2x$ started from 1 and ends at 3, while $2+x$ started from 2 and ends at 3. Thus there should be half as many values of $2+x$ as of $1+2x$. This very serious difficulty has been resolved [... (unter anderem durch das Zeigen der Gleichmächtigkeit durch das erste Diagonalverfahren)] by Cantor; but as it belongs rather to the philosophy of the infinite than to that of the continuum" [Russell 1903, §331].

Man findet hier eine Begriffsverschiebung vor, die suggeriert, dass das Paradoxon *Achilles und die Schildkröte* nur ein Paradoxon der Unendlichkeit sei, das sich unabhängig von vielen Themen der Kontinuität und auch des Unendlichkleinen zeigt und damit selbstverständlich von jeglicher Dynamik unberührt bleibt. Kontinutität wird nur in Bezug auf die Kontinuumshypothese relevant und das Unendlichkleine gar nicht mit einbezogen. So kommt es auch zu folgender Aussage: „There is no such thing as an infinitesimal stretch; if there were, it would not be an element of the continuum" [Russell 1903, §324]. Dies entspricht eben der Vorstellung der Kontinuumshypothese, dass die reellen Zahlen jedes Kontinuum erschöpfend beschreiben. Russell macht dies auch in Bezug auf die intensive Größe des Infinitesimalen bei Cohen deutlich: „I must confess, it seems evident that intensive magnitude is something wholly different from infinitesimal extensive magnitude: for the latter must always be smaller than finite extensive magnitudes, and must therefore be of the same kind with them; while intensive magnitudes seem never in any sense smaller than any extensive magnitudes. Thus the metaphysical theory and philosophically, destitute of grounds in its favour." [Russell 1903, §323]

So auch scheinen in Russells Augen mehrere Philosophen, insbesondere Cohen, die Differentiale dx und dy des Differentialquotienten fälschlicherweise als „seperate entities", „real infinitesimals" und „intensively real elements of which the continuum is composed“ [Russell 1903, §316] anzusehen. Letzteres ist bei Cohen selbstverständlich in erkenntniskritischem Sinne derart gedacht, dass die Infinitesimalien als Ansätze von Hypothesen dem Denkgesetz der Kontinuität entspringen, somit Teil der *mathematischen* Kontinuität in einem vor-, nicht nachträglichen Sinne sind. (Man beachte die Unterscheidung Cohens zwischen dem transzendentallogischem und dem mathematischen Kontinuitätsbegriff (s. Kap 4.1).) In diesem Punkt sind Russells sehr statisches und Cohens dynamisches Weltbild nicht vereinbar.

Wie aufgezeigt, finden sich in der Diskussion des Infinitesimal-Begriffs für die methodische Herangehensweisen an diesen Begriff zwei entgegengesetzte Standpunkte in der Philosophie der Mathematik: Ein großer Streitpunkt entsteht dabei auch beim Begriff der Gleichheit, den Cohen als eine Voraussetzung für den Begriff der Grenze ansieht, da Gleichheit ein Verhältnis von Größen bestimmt und damit nicht dem Begriff „Identität“ der formalen Logik gleichzusetzen ist: „Gleichheit und Grösse setzen die *Anschauung* voraus.“ [Cohen 1883, § 3] Anschauung soll hier, wie in Kap. 3.1 und 3.3 beschrieben, unter Berücksichtigung der „Logik der reinen Erkenntnis“ verstanden werden. Hierzu sei auch nochmals auf Natorps Stellungnahme zur Kritik Russells verwiesen: „Die Kritik welche B. Russell [...] übt, setzt durchweg Russells eigene Philosophie der Mathematik voraus [...]. Nicht das ist ihr [sc. Cohens „Infinitesimalschrift“] zum Vorwurf zu machen; eher, daß auf die bedeutende Weiterentwicklung, welche die *Mathematik* des Unendlichen seit *Cantor* (durch *Veronese*) erfahren hat, keine Rücksicht genommen wird. Doch, von allem Prinzipiellen abgesehen, beruht diese Kritik fast durchweg auf Mißverständnissen, welche durch die schwierige Darstellung *Cohens* doch nur zum Teil erklärlich sind. (Z. B. wenn *Cohen* in §2 sagt, durch das Grenzverfahren werde der elementare Begriff der Gleichheit ergänzt und korrigiert, so will er auf die einfache Tatsache hinweisen, daß auf Grund des Grenzverfahrens ein Wert nicht bloß, wie in der Elementarmathematik, durch eine Gleichung, sondern durch ein System von Ungleichungen bestimmt wird.) Durchweg liegt bei *Russell* die irrige Vorstellung zugrunde, als solle das Infinitesimale, das als inextensiv von Cohen fort und fort bezeichnet wird, gleichwohl eine extensive Quantität, eine ‚Distanz‘, die nicht Null und doch auch nicht endlich sei, bedeuten, was die Meinung *Cohens* jedenfalls nicht ist. Zu bedauern ist auch, daß *Russell* sich ausschließlich an die Schrift d. J. 1883 gehalten hat; aus Cohens ‚Logik‘ (1902) würde er ersehen haben, daß der in der älteren Schrift noch nicht völlig aufgegebene *Kantische* Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken von keinem gründlicher als eben von *Cohen* überwunden ist.“ [Natorp 1910, 221f. (Anm. 1)]

Da bei Gleichheit und Größe ein rein begriffliches, nicht mehr philosophisches Problem dadurch entstehen könnte, dass marginale Unterschiede von „Grenzgrößen“, die trotzdem das Urteil der Gleichheit zulassen, beispielsweise wenn der Ausdruck $\lim_{n\to\infty}\ (2 - 1/n)$ „gleich“ 2 gesetzt wird, dadurch umgangen werden, dass man diesen marginalen Unterschied dadurch vom Begriff der „Größe“ zu befreien versucht, indem man diesen Unterschied als „kleiner als jede angebbare Größe“ definiert, so soll doch klar betont werden, dass dieser Unterschied trotzdem eines Mittels bedarf insofern, als dass die formale Logik der Logizisten einen *transzendentallogischen* Erklärungsgrund benötigt. Der Begriff „Unendlichkeit“ bedarf einer Antizipation eines Progressus, sei er auch mit anderer Wertigkeit als der der Zahl bestimmt, so liegt doch in der unendlichen Fortführbarkeit des Zählens eine unumgängliche Leistung, die nicht allein dem Teil des Denkens zugeordnet werden kann, der der Logik angehört, die wir formal bzw. mathematisch nennen. (In der „Infinitesimalschrift“ fungiert als dieses Mittel noch das Erkenntnismittel der Anschauung.)

Auch die Setzung unendlicher Ordinalzahlen im Hinblick auf die Menge der natürlichen Zahlen erfordert diese erkenntnistheoretisch relevanten Leistungen. Dies macht folgende Aussage Russells, der dabei ohne den Begriff der Gleichheit auszukommen versucht, höchst zweifelhaft: „The absolutely simplest instance of a limit is ω considered as the limit of the ordinal numbers. There is here certainly no kind of equality. Yet in all cases where limits are defined by progressions – and these are the usual cases – we have a series of the type presented by the finite ordinals together with ω. [. . .] Magnitude is certainly *not* involved in the sense, which is undoubtedly that intended by Cohen [. . . ; e]ven in the case of segments, the limit is an actual segment, not the magnitude of a segment; and what is relevant is only that the segments are classes, not that they are quantities.“ [Russell 1903, §319] Durch die Setzung von ω ist die nicht-formallogische Vermittlung nur scheinbar ausgemerzt, denn sie bleibt im Begriff der Ordinalzahl enthalten. Hierbei bleibt weiterhin zu betonen, dass der Begriff ‚Klasse‘ aus transzendentallogischen Gründen entstanden ist und einen Metabegriff darstellt! Dies zeigt sich deutlich auch im Umgang mit dem Differentialquotienten dy/dx, der keinen Bruch darstellt, sondern die dx, dy sind „nothing but typographical parts of one symbol“, die „by diminishing“ für dy/dx eine reelle Zahl stellen und dies „can be made to approach as near as we like“ [Russell 1903, §321]. Hier jedoch sind die von Cohen analysierten Erkenntnisleistungungen exakt beschrieben. Eine Annäherung, die so nah an den Grenzwert reicht, wie wir es wollen, beschreibt ein Gleichheitsverhältnis, das sich um einen Wert unterscheidet, der nicht durch eine reelle Zahl beschrieben werden kann, sondern nur durch ein im Grenzverhältnis sublimiertes Unendlichkleines – das, was für Cohen die inextensive, die intensive Größe bedeutet.

Russell geht sogar noch weiter auf bzw. gegen die bei Cohen postulierte gegenseitige Bedingung von Größe, Grenze und (infinitesimalen) Grenzgrößen ein bzw. vor, wobei zum einen nur ein – wie oben beschrieben – begrifflicher Kniff angewendet wird, indem in der Grenzmethode der Wert des Unendlichkleinen nur sublimiert wird, er aber als ideelle Voraussetzung doch unvermeidbar bleibt, zum anderen der Fokus auf den logizistischen Aufbau gelegt wird und den infinitesimalen Größen ihre widerspruchsfreie Nutzung in der Mathematik abgesprochen wird, was aber mit der neueren Nonstandard oder Smooth Infinitesimal Analysis berichtigt wurde (s. Kap. 6.3-5).

Diese Schwierigkeiten im Umgang mit Grenzwerten, dem Kontinuitätsbegriff und dem unendlich Kleinen als inextensivem Wert sind auch Ursprung einer Grundlagenkrise in der Mathematik am Anfang des 20. Jahrhunderts.

6 Die Rehabilitierung des Infinitesimalen

6.1 Der Grundlagenstreit der Mathematik

Die tatsächlichen Konflikte des „Grundlagenstreits“ oder auch der „Grundlagenkrise“ in der Mathematik begannen schleichend, als 1907 der Mathematiker L.E.J. Brouwer seine Dissertation veröffentlichte, die einen Neuaufbau der Mathematik ausgehend von einem intuitionistischen Ansatz vorstellt. Dieser sieht die Zahlen als Produkt des menschlichen Geistes fernab einer streng platonischen Unabhängigkeit Cantors oder des Logizismus bei Russell bzw. Frege, und beinhaltet damit eine scharfe Kritik an deren Begründung der klassischen Mathematik. Aufgebauscht wurde dieser Streit hauptsächlich durch persönliche Anfeindungen beider Lager, auf die hier nur am Rande eingegangen wird; im Vordergrund steht die Gegenüberstellung der Theorien.

Für diese Gegenüberstellung sind die Referate des Formalisten John von Neumanns, des Logizisten Rudolf Carnaps und des Intuitionisten Arendt Heytings bestens geeignet, die auf der „Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften“ 1930 in Königsberg ihre entsprechenden Programme vorstellten. Bemerkenswert hierbei ist die Tatsache, dass dies die letzte Tagung vor der Veröffentlichung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze war und dass der dort anwesende Gödel sein Vorhaben in der abschließenden Diskussion bereits angekündigt hat. Mit der Veröffentlichung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze wird das Ende der persönlichen Streitigkeiten der befeindeten Lager verbunden.

Den ersten Vortrag hielt Rudolf Carnap über „[d]ie logizistische Grundlegung der Mathematik“, gefolgt von A. Heyting, der „[d]ie intuitionistische Grundlegung der Mathematik“ thematisierte; den Abschluss bildete J. v. Neumann, der grundlegend über den Hilbertschen Formalismus referierte. Es sind drei hochrangige Mathematiker und Logiker, die sich nach einem ein knappes viertel Jahrhundert andauernden Streit eher verhalten äußern – so eröffnet Carnap die Vortragsreihe mit den Worten: „Das Problem der logischen und erkenntnistheoretischen Grundlegung der Mathematik ist noch nicht vollständig gelöst. Das Problem beschäftigt die Mathematiker und Philosophen lebhaft; eine Unsicherheit in den Fundamenten dieser ‚sichersten aller Wissenschaften‘ ist ja im höchsten Grade beunruhigend. Verschiedene Versuche zur Lösung des Problems sind schon gemacht worden; doch kann von keinem gesagt werden, daß er wirklich alle bestehenden Schwierigkeiten hat überwinden können.“ [Carnap 1931, 91]

Carnap stellt in seinem Vortrag das Programm vor, das die Mathematik auf die Logik zurückführbar, also zum Teilgebiet der Logik machen soll. Dessen Position orientiert sich an Frege und Russell. Die mathematischen Begriffe sollen auf formallogische zurückgeführt werden und mit diesen verschmelzen. Davon ausgehend sollen durch pures logisches Deduzieren aus logischen Grundsätzen alle mathematischen Sätze abgeleitet werden. Diese Herangehensweise wurde schon in den Kapitel 5.2 und 5.3 kritisch betrachtet. Zwei weitere grundlegende Schwierigkeiten, die Carnap in seinem Aufsatz deutlich macht, sollen hier behandelt werden:

Die erste Schwierigkeit tritt zu Tage, wenn er auf eine konstruktivistische Tendenz des Logizismus verweist, die der intuitionistischen bzw. konstruktivistischen methodisch nahestehen soll. Carnap referiert dazu: „Das Wesentliche an der [...] logizistischen Methode der Einführung der reellen Zahlen ist, daß hier diese Zahlen nicht ‚*postuliert*', sondern ‚*konstruiert*' werden. Es wird nicht durch Postulate oder Axiome die Existenz von Gebilden angesetzt, die die Eigenschaften der reellen Zahlen haben, sondern es werden durch explizite Definitionen logische Gebilde konstruiert, die auf Grund dieser Definitionen diejenigen Eigenschaften haben, die man in der Arithmetik den reellen Zahlen beizulegen pflegt. Eine Begriffsbildung ist nicht eine Erschaffung, sondern nur eine Namengebung für etwas, das als vorhanden schon nachgewiesen sein muß; es gibt keine ‚schöpferischen Definitionen'. Diese ‚*konstruktivistische*' Auffassung gehört zu den Grundtendenzen des Logizismus. Ebenso werden in konstruktivistischer Weise die weiteren mathematischen Begriffe eingeführt, sowohl die Begriffe der Analysis (z. B. Konvergenz, Limes, Stetigkeit, Differentialquotient, Integral usw.) als auch die der Mengenlehre (vor allem die Begriffe der transfiniten Kardinal- und Ordinalzahlen)." [Carnap 1931, 94f.]

Spricht Carnap hier von einer „expliziten" Definition, dann ist eine bloße abkürzende Schreibweise gemeint, insofern, als dass jeder mathematische Begriff und mit entsprechenden Grundsätzen der formalen Logik, wie bspw. der modus ponens, „jeder beweisbare mathematische Satz" in einen Satz „rückübersetzbar" ist, „der nur aus logischen Grundzeichen besteht und in der Logik beweisbar ist." [Carnap 1931, 95]

Genau darin aber liegt der methodisch extreme Gegensatz zu den Theorien der Intuitionisten und der Marburger Neukantianer. In Cohens Urteil des Ursprungs, das den ersten und zentralen Bestandteil seiner Logik bildet, geht es vor allem darum, nichts (als das relative „Nichts") vorauszusetzen. D.h. die Leistung der Erkenntnis wird zuallererst als eine *synthetische* und damit *notwendig* als schöpferische ausgezeichnet! Der bloß analytischen Konstruktion der Logizisten entgegnet die Marburger Schule die Kantische Aussage: „[W]o der Verstand vorher nichts verbunden hat, da kann er auch nichts auflösen, weil er nur *durch ihn* als verbunden der Vorstellungskraft hat gegeben werden können." [Kant KrV, B 130] Die Logik, von der die Logizisten erwarten, dass sie der Wissenschaft der (reinen) Mathematik ihre philosophische Grundlegung abnehmen soll, steht vor folgendem Problem: Die Mathematik soll durch die Grundlage der Logik eine deduzierende Wissenschaft sein, da die Logik selbst eine deduzierende Wissenschaft ist. Gleichzeitig soll dieselbe Logik ihre eigenen Gesetze, ihre „expliziten Definitionen" der Deduktion aufstellen, was zu einem offenkundigen „Kreisgang der Begründung“ führen muss [Natorp 1910, 5ff.]. Es ist das analytische Konstruieren ein Dekonstruieren und, wie Natorp auch betont, deckt Analysis eine Synthesis auf und nicht wiederum eine Analysis [Natorp 1910, 8].

Carnap spricht sich zwar für den Logizismus aus, aber auch mit ihm verbundene Schwierigkeiten deutlich an. Eine hängt unmittelbar mit obigem nichtschöpferischem Definieren zusammen. Das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom als eigentlich *nicht*-formallogische Existenzsätze wurden schon im vorherigen Kapitel angesprochen, im Grundlagenstreit stand aber auch das Reduzibilitätsaxiom und der Zerfall der reellen Zahlen in verschiedene Ordnungen zur Diskussion. Diesen Zwiespalt vergleicht Carnap mit den Odysseeischen Sagengestalten Charybdis und Scylla. Das Reduzibilitätsaxiom wurde von Russell zwangsläufig eingeführt, um in der Typentheorie, die Antinomien der Selbstreferenz umgehen soll, nicht nur zwischen Eigenschaften und Eigenschaften von Eigenschaften usw. zu unterscheiden, sondern auch, um Antinomien zu umgehen, die darin bestehen, dass eine Eigenschaft erst durch einen Ausdruck definiert werden kann, der sich auf „alle Eigenschaften“ bezieht. Damit wird dann in der Typentheorie zwischen Ordnungen unterschieden: „[Z]ur ‚ersten Ordnung‘ rechnen wir solche Eigenschaften, in deren Definition der Ausdruck ‚alle Eigenschaften‘ nicht auftritt; zur ‚zweiten Ordnung‘ solche, in deren Definition der Ausdruck ‚alle Eigenschaften erster Ordnung‘ auftritt; zur ‚dritten Ordnung‘ solche, in deren Definition der Ausdruck ‚alle Eigenschaften zweiter Ordnung‘ auftritt; usw. [...] Hiernach kommt niemals in der Definition einer Eigenschaft eine Gesamtheit vor, zu der sie selbst gehört.“ [Carnap 1931, 100] Diese „verzweigte Typentheorie“ wird dann begleitet vom Reduzibilitätsaxiom, das besagt, dass Aussageformen höherer Ordnung innerhalb eines Typus zu einer solchen der ersten Ordnung rückübersetzt werden können.[25]

Das große Problem dabei ist nun wiederum der Umgang mit einer *Gesamt*menge, hier der mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, der in den mengentheoretischen Definitionen üblich ist. Der Ausdruck „für alle reellen Zahlen“ darf sich nun nämlich nur auf die reellen Zahlen einer bestimmten Ordnung beziehen. „Damit fallen aber viele der wichtigsten Begriffsbildungen und Sätze der Theorie der reellen Zahlen fort.“ [Carnap 1931, 101]

Solche Probleme will der Intuitionist vermeiden. Es sollen keine „willkürliche[n] Annahmen“ und „noch weniger künstliche Verbote, etwa um die logischen Paradoxien zu vermeiden“ [Heyting 1931, 115] Teil der Grundlegung der Mathematik sein, sondern sein gesetztes Ziel ist „Mathematik treiben als natürliche Funktion des Intellekts, als freie, lebendige Aktivität des Denkens.“ [Heyting 1931, 106] Der

[25] Die verzweigte Typentheorie wurde, wie Carnap in seinem Referat auch schon beschreibt, aufgegeben, da F. P. Ramsey mit dem eben sehr umstrittenen und von Russell selbst verworfenen Reduzibilitätsaxiom eine „im Wesentlichen“ äquivalente einfache Typentheorie 1926 veröffentlichte [s. Carnap 1931, 101fff.].

Logizist muss, da er Mathematik auf seine logische Sprache reduziert, „epistemologische“ oder „semantische“ Antinomien korrigieren, die sich in der Kombination mit „unserer üblichen Wortsprache“ ergeben, bspw. die Frage nach der kleinsten natürlichen Zahl, die in deutscher Sprache nicht mit weniger als 100 Buchstaben definiert werden kann [Carnap 1931, 99]. Für den Intuitionist „ist die Mathematik ein Erzeugnis des menschlichen Geistes. Entgegen seiner Widersacher gebraucht er die Sprache, sowohl die gewöhnliche wie die formalistische, nur zur Mitteilung, d.h. um andere oder sich selbst zum Nachdenken seiner mathematischen Gedanken zu veranlassen.“ [Heyting 1931, 106]

Hierin zeigt sich schon die Nähe zur Marburger Schule, denn auch dort wird darauf aufmerksam gemacht, dass der Zusammenhang von Sprache und Vernunft „eine gefährliche Ablenkung enthält. Die Logik konnte dadurch verleitet werden, [und genau dies ist die Krux in den kritisierten Positionen des Logizismus wie des Formalismus, bloß] auf die *Grammatik* sich zu stützen. Sie würde damit aber die Orientierung auf die reine Erkenntnis, als die Grundlagen der Wissenschaft, verlieren.“ [Cohen 1914, 46] Der Urteilslehre darf keine Begriffslehre vorausgehen; Grundbegriffe sollen nicht als Resultate oder letzte logizistische Wahrheiten, sondern als Handlungen begriffen werden. Der Grund, d.h. der Ursprung ist ein synthetischer. Zwar kann das Denken nur sprachlich vonstattengehen, d.h. das resultierende Vernünftige muss verlautbar sein, aber dies reicht umgekehrt nicht, um der Verlautbarkeit eine selbständige und vollständige Formung des Geistes zuzuschreiben: „[D]er Gehalt der Sprache ist der Inhalt der Vernunft. Die Formen dieses Inhalts aber, das sind letztlich die Erkenntnisse. Also können Formen der Sprache nicht im Gegensatz zu den Erkenntnissen die Formen der Vernunft bedeuten.“ [Cohen 1914, 14f.]

Genau dies wird der Vorwurf des Intuitionisten, wenn er die Sprache als bloßes Mittel der Mitteilung denunziert: „Eine solche sprachliche Begleitung ist [ihm] kein Bild der Mathematik, noch weniger die Mathematik selbst.“ [Heyting 1931, 106] Heyting unterscheidet deshalb zwischen Aussagen und Sätzen in der Mathematik: „[E]in Satz ist die Behauptung einer Aussage. Eine mathematische Aussage drückt eine bestimmte Erwartung aus; [. . .] vielleicht noch besser als das Wort ‚Erwartung‘ drückt das von den Phänomenologen geprägte Wort ‚Intention‘ aus, was hier gemeint ist [. . .]. Die Intention geht [. . .] nicht auf einen als unabhängig von uns bestehend gedachten Sachverhalt, sondern auf ein als möglich gedachtes Erlebnis“ [Heyting 1931, 113]. Ein mathematisches Problem ist demnach durch eine Intention gegeben, nach deren Erfüllung gesucht wird. Die Lösung des Problems liegt entweder im Beweis des Widerspruchs oder in dem tatsächlichen Finden durch konstruktive Mittel, i.d.S. dass mathematische Begriffe durch endlich viele Worte zu definieren sind (vgl. [Brouwer, 1912]).

Der Beweis führt demnach zu einer neuen Aussage, der „Beweisbarkeit der

Aussage". Dies allerdings wiederum in die formallogische Sprache einzugliedern – und außer der Versprachlichung bleiben keine anderen Möglichkeiten – „würde große Komplikationen nach sich ziehen; bei dem geringen praktischen Wert würde es sich wohl kaum lohnen, diese Einzelheiten zu verfolgen" [Heyting 1931, 115]. Dies kann aber nicht der Anstoßpunkt sein, an dem eine intuitionistische Logik gemessen werden kann, denn dann würde die Kritik denselben Zirkelschluss der Logizisten enthalten, die den methodischen Sachverhalt der mathematischen Logik aus denselben eigenen Methoden erklärbar machen wollen.

Eine formalistische bzw. formale Sprache der Mathematik kann nur *eine* Richtung, die vom Forschenden eingeschlagen wird, beschreiben. Sie formalisiert einen Rahmen für bestimmte Systeme, entwirft eben nur Modelle innerhalb der Mathematik, wird dem Grundlegungsauftrag aber nur in der *einen* Weise gerecht, die dieses *eine* Modell als das ‚wahre' verabsolutiert. Dann aber entbindet sie die Mathematik von Philosophie. Sie integriert diese als Selbsterzeugnis und hat zur Folge, dass auch Carnap eingestehen muss, dass mancher Logizist, der für die Wahrhaftigkeit der Mathematik mit dem Standpunkt eines unendlichen Geistes argumentieren muss, eine „theologische" [Carnap 1931, 102] Mathematik betreibt.

Die herausragende Bedeutung der Mathematik soll damit aber nicht beschnitten werden. Die „Denknotwendigkeiten" der Forschungserfolge werden eben auch bei Cohen nicht „erfunden", sondern „gefunden", um in den Worten Cantors (s. Kap. 5.1) zu sprechen, der damit jedoch mehr das Ablesen am Platonischen Ideenhimmel meint – ohne die Kantische Forderung nach dem Bezug zum „Felde der Erfahrung" [Kant, KrV A771]. Das Urteil des Ursprungs als eine *erste* Tat ist kein voraussetzungsloses, denn es braucht als Voraussetzung das *(relative) Nichts.* Forschungserfolge sind das in den systematischen Strukturen des Inbegriffs des menschlichen Wissens noch Unausgesproche, Umständlichde, Unvollständige oder Verquere. Diese Erfolge erweitern Systeme, ordnen deren Strukturen neu an, schaffen neue Begriffe und bringen neue Denknotwendigkeiten ins Spiel, die darauf warten, dass die Sprache sie aus ihrer bloßen Möglichkeit erlöst. So erwarten die natürlichen Zahlen die rationalen, diese die reellen, die reellen Zahlen erwarten die imaginären usw. (vgl. Kap. 1.2, 1.3); und in den Grundlegungen der Mathematik sollte Platz für das Finden dieser Denknotwendigkeiten in *allen* Richtungen sein.

Wie auch bei Cohen ist im Intuitionismus der Begriff der Einheit der „wichtigste Baustein", was den Aufbau der Arithmetik angeht. Zum Begriff der Einheit gehört „als architektonisches Prinzip die Reihe der ganzen Zahlen", wir sprechen also von der Einheit der Mehrheit. „Diese ganzen Zahlen müssen hier betrachtet werden als Einheiten, welche sich nur durch ihre Stellung in der Reihe von einander unterscheiden." Jene Definitionen lassen sich auch aus der Cohenschen „Logik der reinen Erkenntnis" entnehmen bzw. darin eingliedern, ohne den Intuitionisten hier etwas Fremdes zu unterstellen, denn auch Heyting verweist in seinem Referat auf die Marburger Schule. Die Prägnanz der Marburger im Grundlagenstreit soll hier sogar explizit betont werden, da Heyting sich in seinem Referat ausdrücklich auf diese mit den Worten bezieht: „Ich verzichte hier auf die weitere Zergliederung dieser Begriffe, welche schon Natorp in seinen „Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften“[26] durchgeführt hat in einer Weise, die, was die Hauptsachen betrifft, ziemlich gut mit der intuitionistischen Denkweise übereinstimmt.“ [Heyting 1931, 106]

Das Ziel der konstruktivistischen (und intuitionistischen) Mathematik ist eine Rückführung der Mathematik und der mathematischen Logik auf eine erkenntniskritische Prinzipienwissenschaft. Und wichtig ist auch, dass Mengen nicht als Inbegriff ihrer Elemente betrachtet, sondern „mit ihrer definierenden Eigenschaft identifiziert [werden]. Imprädikative Definitionen sind schon hierdurch unmöglich“ [Heyting 1931, 110].

Es soll hier aber nicht der Anschein erweckt werden, alle konstruktivistischen und intuitionistischen Positionen könnten in Einklang mit der Marburger Schule gebracht werden. Beispielsweise wird obige Konstruktionsvorgabe „mit endlich vielen Worten“ von der konstruktivistischen Position der Ultrafinitisten derart streng ausgelegt, dass sich als logische Konsequenz die Verneinung des aktual Unendlichen auftritt. Dies wäre dann nicht mehr im Sinne von Cohen, insoweit die Urteile der Realität und der Allheit nicht in die Mathematik einbezogen werden. Für Cohen müsste das aktual Unendliche, v.a. das Unendlichkleine, in dem Prinzip der Infinitesimal-Methode postuliert sein. Es bleiben aber grundlegende Gemeinsamkeiten, v.a. der Vorzug der Synthesis. Es bleibt festzuhalten, dass Theorien Cohens schon im zweiten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts mathematische Relevanz erhalten, sie also nicht als komplett „generally abandoned“, „mathematically useless“ oder „unnecessary“ [Russell 1903, §§ 303, 309, 324] zu bezeichnen sind.

Die Nähe der Intuitionisten zu Cohen wird auch im Umgang mit dem Erkenntnismittel des Denkens deutlich. Heyting äußert, dass die Intuitionisten „den ganzen Zahlen, und ähnlicherweise anderen mathematischen Gegenständen, eine Existenz unabhängig von unserem Denken, eine transzendente Existenz also, nicht zuschreiben. Vielleicht ist es wahr, daß jeder Gedanke auf einen als unabhängig von ihm bestehend gedachten Gegenstand Bezug nimmt; wir können das dahingestellt bleiben lassen. Jedenfalls braucht dieser Gegenstand nicht vom menschlichen Denken überhaupt unabhängig zu sein. Die mathematischen Gegenstände, wenn auch vielleicht unabhängig vom einzelnen Denkakt, sind ihrem Wesen nach durch

[26] Die Position Natorps ist der Cohens sehr ähnlich. Natorp äußert im Vorwort zu seinen Ausführungen in den „Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften“, dass diese dem „Führer“ der Marburger Schule folgen, dessen Gedanken zur „Logik der reinen Erkenntnis“ in seinem Werk „auf Schritt und Tritt“ zu „verspüren“ sind. [Natorp 1913, V] Es sei aber erwähnt, dass Natorps Ansatz nicht *derart* stark auf das Prinzip der Inifnitesimal-Methode und die Ausnahmestellung der qualitativen Größe ausgerichtet sind und sich in Nuancen von Cohen unterscheidet.

das menschliche Denken bedingt. Ihre Existenz ist nur gesichert, insoweit sie durch Denken bestimmt werden können; ihnen kommen nur Eigenschaften zu, insoweit diese durch Denken an ihnen erkannt werden können. Diese Möglichkeit der Erkenntnis offenbart sich uns aber nur durch das Erkennen selbst. Der Glaube an die transzendente Existenz, der durch die Begriffe nicht gestützt wird, muß als mathematisches Beweismittel zurückgewiesen werden. Hier liegt [...] der Grund für den Zweifel an dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten." [Heyting 1931, 106f.]

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, der für Intuitionisten keine Entsprechung im geistigen Operieren hat, da Unentscheidbarkeit ein untilgbarer Faktor bleibt, sobald mathematische Aussagen nicht unabhängig vom menschlichen Intellekt als zwangsläufig wahr oder falsch angenommen werden, ist, wie auch die Einschränkungen in Bezug auf die mit aktualen Unendlichkeiten operierende Mengenlehre Cantors, ein großer Streitpunkt in der Grundlagenkrise der Mathematik.

Trotz Gemeinsamkeiten beider Lager bildete dies den größten Streitpunkt der beiden Mathematiker Brouwer und Hilbert. Da die Intuitionisten Aspekte der klassischen Mathematik bemängelten und wahrscheinlich auch weil sein Lieblingsschüler H. Weyl sich vom Intuitionismus begeistert zeigte, äußerte sich Hilbert in einem Hamburger Vortrag über „Die Grundlagen der Mathematik" [Hilbert 1927] polemisch: „Ich staune [...] darüber, dass ein Mathematiker an der strengen Gültigkeit der Schlussweise des Tertium non Datur zweifelt. [...] Ich staune am meisten über die Tatsache, dass überhaupt auch im Kreise der Mathematiker die Suggestivkraft eines einzelnen temperamentvollen und geistreichen Mannes die unwahrscheinlichsten und exzentrischsten Wirkungen auszuüben vermag". Bereits zuvor hatte L.E.J. Brouwer versucht, seine Theorie polemisch zu rechtfertigen, indem er den Versuch des finitistischen Konsistenzbeweises mit einer verbrecherischen Politik verglich, die durch kein reprimierendes Gericht zu hemmen sei [Brouwer 1923].

Der von D. Hilbert installierte Forschungsansatz ist der des Formalismus, der in erster Linie eine „Neubegründung der Mathematik" schaffen sollte, „die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, [...] [um] die Grundlagenfragen der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem [...] jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng beweisbaren Formel" gemacht wird um dadurch den „ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik" [Hilbert 1929, 9] zu versetzen. Hilbert will die reine Mathematik nicht als ein Teilgebiet der Logik, sondern als *eigenständige* Wissenschaft aufbauen. Der formalistische Ansatz hat als Voraussetzung eine syntaktische Aufarbeitung durch Symbolketten und Regeln mit dem Ziel unmittelbar einleuchtender Axiomen. Seine Beweistheorie beschäftigt sich mittels *mathematischer* Methoden mit der Untersuchung der Mathematik als formalem Objekt, so wie „der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert" [Hilbert 1917, 414]. Da diese ‚Selbstkritik' für Cohen eine rein philosophische Methode ist, lässt sich auch für den Hilbertschen Formalismus obige

Kritik eines notwendigen Zirkelschlusses wiederholen.

Den Hilbertschen Formalismus unterstützt auch der dritte Referent, von Neumann, der in seiner Einleitung darauf hinweist – und das sollte betont werden, um nicht den Eindruck zu vermitteln, dass die Mathematik einer Beliebigkeit ausgesetzt ist, die von einem Wohlfühlfaktor in bestimmten Systemen abhängig ist –, dass diese Diskussion es mit sich brachte, „daß heute in den Grundlagenfragen immer mehr eindeutige mathematische Fragestellungen und nicht Geschmacksunterschiede zu untersuchen sind.“ [Neumann 1931, 116]

In seinem Referat über „Die formalistische Grundlegung der Mathematik“ gab J. v. Neumann vier zu lösende Aufgaben für die Hilbertsche finite Beweistheorie an [vgl. Neumann 1931, 118]:

1. Es sollen alle in der Mathematik und Logik verwendeten Grundsymbole, unter anderem $+$ oder $\rightarrow$ aufgezählt werden.

2. Alle durch „sinnvolle“ Kombination der Grundsymbole und Zeichen erreichbare Formeln sollen eindeutig gekennzeichnet werden, wobei „sinnvoll“ nicht ihre Richtigkeit implizieren muss.

3. Ein Beweisverfahren, das sukzessive alle Formeln herleitet, soll angegeben werden und

4. Es soll mit finit-kombinatorischen Mitteln gezeigt werden, dass nachrechenbare arithmetische Formeln, die der klassischen Mathematik entsprechen, äquivalent sind zu den nachrechenbaren arithmetischen Formeln, die durch das Beweisverfahren gewonnen werden.

Zu 2. sei noch zu bemerken, dass Zeichen oder Zahlzeichen wie $|; ||; |||$ im Sinne von $1; 2; 3$ oder auch Variablen a; b; c und beispielsweise einer einfachen Verkettung $| + || = |||$ $(1 + 2 = 3)$ oder Größer-Kleiner-Relationen eine finite, inhaltliche Wahrheit zugeordnet wird. Quantoren müssen sich über endliche Bereiche erstrecken, können potentiell unendlich, aber sicher nicht aktual unendlich sein, um dem finitären Anspruch zu genügen. Dabei erklärt sich der Finitismus auf Grund der apriorischen Unsicherheit des Unendlichkeitsbegriffs, auf Grund dessen die infinitistische Mathematik auf Basis finitistischer Methoden begründet und verifiziert werden soll. Hilbert hielt am Versuch seiner Konsistenzbeweise mit Hilfe von finiten Methoden trotz seiner Bedenken fest, denn er sah „das Unendliche [...] nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zuläßig – eine bemerkenswerte Harmonie zwischen Sein und Denken“ [Hilbert 1925, 155]. Dass das Unendliche keine Grundlage des „verstandesmäßigen Denkens“ darstellen soll, bleibt unklar, denn für Cantor und seine Mathematik, d.i. das „Cantorsche Paradies“, von dem Hilbert spricht, sei es der

Umgang mit transfiniten Zahlen, sei es die Mengentheorie, ist das „verstandesmäßige Denken“ des Unendlichen maßgebend.

Wie auch J. v. Neumann erklärt, sieht man im Hilbertschen Programm die Ergebnisse der Logizisten in den Punkten 1 bis 3 enthalten. Punkt 4 zeigt die Vorstellung Hilberts, jedes mathematische Problem könne gelöst werden und enthält gleichzeitig eine Zweiteilung der Mathematik, da nun das Unendliche von der apriorischen Exaktheit obiger finiter Beweistheorie ausgeklammert wird. Da aber „das Unendliche *in unserem Denken* einen wohlberechtigten Platz hat und die Rolle eines unentbehrlichen Begriffes einnimmt“ [Hilbert 1925, 165], müsse zwischen der finitistischen realen, auf konkrete Objekte sich beziehenden, Mathematik der Zeichen und der idealistischen (aber nicht realen!), infinitistischen Mathematik unterschieden werden. Eine Erklärung, wie genau eine Definition solcher Abgrenzung angegangen werden kann, wird von Hilbert aber nicht gegeben und darf in formalistischer Hinsicht stark bezweifelt werden – v.a. aus philosophischer Sicht der Marburger Schule. Zur weiteren Erläuterung sei noch die Herangehensweise Hilberts erwähnt, die sich auf eine Interpretation Kants beruft, die sich deutlich von der der Intuitionisten und von Cohen unterscheidet: „Schon Kant hatte gelehrt – und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre –, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern mußten. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind.“ Für Hilbert – und dies ist der bedeutende Unterschied – geht dem Denken die mathematische Anschauung voraus, was Cohen spätestens in der „Logik der reinen Erkenntnis“ verwarf und so auch Natorp. Er schreibt weiter: „Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. [... I]n der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist.“ [Hilbert 1925, 170f.] Die Zahl ist nur der Begriff für das vor dem Denken gegebene Zeichen, das Unendliche nur ein nachträglicher ergänzender Begriff, der nur im Denken seinen Platz hat. Damit widersetzt sich der Hilbertsche Formalismus dem Fregeschen wie auch Russellschen Logizismus. Im Hilbertschen Programm wird die Mathematik bzw. die mathematische Anschauung zum Ausgangspunkt. Dadurch werden mathematische Wahrheiten metaphysisch gedeutet und im Gegensatz zu den Logizisten und vor allem den Intuitionisten liegt eine sehr ergebnisorientierte Philosophie der Mathematik vor, die keine Unentscheidbarkeit dulden muss, da sie durch den Dualismus von Anschauung und Denken vom „menschlichen Denken“ abgesondert wird. So kann J. v. Neumann auch behaupten, dass die „klassische Mathematik ein in sich geschlossenes [...] Verfahren involviert“ [Neumann 1931, 117]. Diese Souveränisierung der Mathematik, die Cohen gerade an Kants Anschauungsbegriff tadelt (und der daraus resultierenden Souveränität dieser), führt dazu, eine absolute Wissenschaft in der Mathematik zu sehen, die ein Grundrecht auf den Satz vom ausgeschlossenen Dritten besitzt.

Gegen diese ‚klassische‘ Mathematik bringt der Intuitionist Brouwer seine Gegenbeispiele vor: Dessen Auffassung von Wahrheit und Beweisbarkeit erfordert eine andere Interpretation der Mathematik, die sich zum Beispiel beim Satz vom ausgeschlossenen Dritten, dargestellt durch $j = \neg p \vee p$, zeigt: Während in der klassischen Logik eine Aussage entweder als gültig oder nicht gültig angesehen wird, versteht ein Intuitionist eine Aussage als beweisbar oder widerlegbar und somit als tertium die effektive Unentscheidbarkeit. Betrachtet man die Formel $j = \neg p \vee p$, dann ist dies eine Aussage, die entweder einen Beweis von p oder den Beweis der Negation mit einer entsprechenden mathematischen Beweismethode für diese Forderung impliziert. So ist dies eine mathematische Aussage und kann nur mit mathematischen Argumenten verifiziert werden, womit eine Abhängigkeit der Logik von der Mathematik besteht.

Für Intuitionisten sind Paradoxien damit ein notwendiger Teil der Mathematik, den unsere menschliche Art der Erkenntnis mit sich bringt und der in die mathematische Sprache mitaufgenommen werden muss. Der Formalist sieht in den unentscheidbaren Phänomenen eine Schwäche des menschlichen Denken, die durch die wahre Formalisierung immer richtiggestellt werden kann. D.h. er muss davon ausgehen, dass die klassische Mathematik von einem konsistenten System umfasst wird – dies wurde von Gödel verneint.

Auch wenn Gödel Hilberts Projekt durch seine Unvollständigkeitssätze nicht als gescheitert ansah, denn dieser setzt nur die Existenz eines mit finiten Mitteln geführten Widerspruchsfreiheitsbeweises voraus und es wäre denkbar, dass „es finite Beweise gibt, die sich [...] [in der Peanoarithmetik] nicht darstellen lassen“ [Gödel 1931, 194], gilt der Grundlagenstreit mit Gödels Ergebnissen als beendet. Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz verneint die Frage, ob eine rekursiv aufzählbare Aussagenmenge, die die Peanoaxiome umfasst, alle wahren Aussagen der Arithmetik beweisen kann. Da die Peanoaxiome (immer noch) die gängige akzeptierte Axiomatisierung der natürlichen Zahlen darstellen, kann man auf dieser Grundlage aussagen, dass in jedem formalen System der Arithmetik, das zumindest eine Theorie der natürlichen Zahlen enthält, *immer* ein unentscheidbarer Satz aufzufinden ist. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt dann, dass es auch kein formales System der Arithmetik gibt, das die Theorie der natürlichen Zahlen enthält und innerhalb seiner selbst Widerspruchsfreiheit verifizieren kann.[27] Mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen ist nun klar, dass es keiner Form der „Metamathematik“, also einer Elementarsprache der Mathematik, bspw. dem obigen Aufbau des Hilbertschen Formalismus, gelingt, die Widerspruchsfreiheit eines Systems zu beweisen, das rekursiv aufzählbar und hinreichend stark, d.h. das natürliche Zahlensystem enthaltend, ist. Daraus folgt, dass eine funktionalistische, d.h. nach obigem logizistischen oder formalistischen Vorbild gestaltete, Erkenntnistheorie unsere Erkenntnismöglichkeit nicht vollständig ausschöpfen kann.

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze sollen hier aber keinesfalls als das Ende der logizistischen und formalistischen Logik präsentiert werden. Im Gegenteil. Wie sich in den Kapiteln 6.4 und 6.5 zeigen wird, sind die intuitionistischen und formalistischen Auseinandersetzungen immer noch aktuell. Die sehr ambitionierten Anstrengungen Freges, Russells, Hilberts etc. wurden in neuere Bahnen gelenkt und die Ziele modifiziert. Die Mathematik wie die Logik werden sich weiterhin mit ‚ihrer‘ und ‚der‘ Philosophie auseinandersetzen müssen und müssen ihre Selbständigkeit vorerst begraben. Damit wird eine Renaissance der Dialektik begünstigt wie Zellini mit Verweis auf Simone Weil bemerkt [Zellini 1980, 226]. Diese soll „Zenons Offenheit für das Unergründliche teile[n]“ und „das paradoxale Element gerade durch die formale Strenge der Hypothesen und Beweise“ stärken. In der notwendigen Auseinandersetzung mit den Paradoxa muss notwendig das Verhältnis der „ursprünglichen Prinzipien (Hypothesen) und der mit ihr verbundenen Wissenschaften“ geprüft werden.

Das Unendliche kann nicht in seiner Ganzheit, innerhalb eines vollständigen formalen Systems, hergeleitet, d.h. verstanden werden und „[e]s überrascht, dass eine vom Geist selbst geschaffene Konstruktion, das einfachste und klarste Faktum für den konstruktiven Geist, einen solchen Aspekt der Undurchsichtigkeit und Mangelhaftigkeit gewinnt, wenn er aus dem Blickwinkel der axiomatischen Methode betrachtet wird.“ [Weyl 1928, S. 220]

6.2 Detlef Laugwitz und Curt Schmieden

Mit D. Laugwitz und C. Schmieden kommen wir zu zwei Autoren, die mit ihrem Artikel „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung“ von 1958 einen Grundstein für die Nonstandard-Analysis (NSA), wie sie dann auch 1966 von A. Robinson begründet wurde, gelegt hatten. Die Erweiterung der Infinitesimalrechnung durch Laugwitz und Schmieden liegt in der Wiederaufnahme der Infinitesimalien in die Mathematik; diese waren, wie beschrieben, durch die Grenzwertanalysis und die Motive des Logizismus wie Formalismus des beginnenden 20. Jahrhunderts elimi-

[27] auch in [Veit 2012, 7ff.]

niert worden.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind in der Nonstandard-Mathematik nicht mehr die die Arithmetik umfassende Menge, die mit dem Begriff der Kontinuität gleichgesetzt wird, sondern $\mathbb{R}$ wird um die „hyperreellen" Zahlen zu einem nicht-archimedischen Körper ${}^*\mathbb{R}$ oder auch ${}^\Omega\mathbb{R}$ mengentheoretisch erweitert, der die unendlich großen und kleinen Zahlen enthält. Die Bezeichnung ${}^*\mathbb{R}$ soll hier nun zum einheitlichen Verständnis verwendet werden.

Laugwitz und Schmieden zeigen in obigem Artikel, dass es möglich ist, die Analysis und damit auch die Differenzierbarkeit und Stetigkeit mit hyperreellen *Zahlen*, im Artikel „Ω-Zahlen" genannt, zu definieren [Laugwitz 1958, 25]. Dies erfolgt anstatt der Epsilontik der Grenzwert-Analysis, da deren veränderliche *Größen* ϵ und δ zur Stetigkeitsbestimmung als „beliebige positive" Zahl nämlich einem „Element der Willkür" unterliegen [Laugwitz 1958, 1]. Die Zahlbereichserweiterung durch infinitesimale und infinite Größen soll aber nicht dazu führen, dass Elemente des alten Zahlbereichs verschwinden oder dessen Rechen- und Ordnungsstrukturen mit dieser Erweiterung nicht kompatibel bleiben. Dass die NSA damit kaum Schwierigkeiten hat, zeigt insbesondere das Robinsonsche Permanenzprinzip (s. Kap. 6.3).

Als einen Ansporn für diese Zahlbereichserweiterung nennen Laugwitz und Schmieden die Absicht, einen Beitrag zum Zahlbegriff zu leisten, indem mit neuen ideellen „Rechenzahlen" für den Kalkül eine begriffliche Lücke geschlossen wird, die die Cantorsche Unterscheidung von Ordinal- und Kardinalzahlen offen lässt. Man habe in der Mathematik „ja nicht nur mit Anzahlen und Zählzahlen zu tun." (vgl. [Laugwitz 1978, 12]). Dass dies mit einer Erweiterung des mathematischen Denkens um ideale Elemente geschehen soll, liege nahe, denn: „Die meisten heutigen Mathematiker halten die Methode der Adjunktion neuer, ‚idealer' Elemente für besonders geeignet." [Laugwitz 1986, 83]

Es ist aber nicht nur der Nutzen für den Kalkül, dass die neuen Elemente ihre Existenzberechtigung haben. So ist es „nun gerade eine Errungenschaft des Zugangs über die Adjunktion von Ω, daß keine ontologischen Entscheidungen über die Seinsweise der mathematischen Objekte im allgemeinen und des Unendlichen im besonderen getroffen werden müssen." Die Vorstellung des „Ideenhimmels", „in dem die mathematischen Wahrheiten darauf warten, entdeckt zu werden", empfindet Laugwitz als „naiv". [Laugwitz 1986, 101] Für Laugwitz gilt: „[I]ch sehe nach wie vor als Legitimationsbasis den Beitrag zur Klärung von Grundlagen und zum Verhältnis der Mathematik zu ihrer Geschichte, ihrer Lehre und ihrer Philosophie" [Laugwitz 1986, 236].

Laugwitz orientiert sich in seinen Schriften von 1978 und 1986 dabei im Gegensatz zur „dynamischen" Interpretation Newtons vor allem an der Leibnizschen Philosophie von Infinitesimal-Mathematik, die er als eine eher statische Auffassung ansieht, da sie die Funktionen und Differentiale als Teilmengen bzw. feste

Elemente einer Menge definiert. Dabei verweist er auf Zitate aus Leibniz' Briefen: Unendlichkeiten seien „Größen ..., die unveränderlich größer oder kleiner als die unsrigen sind. Auf diese Weise nämlich erhält man beliebig viele Grade unvergleichlicher Größen, sofern ein unvergleichlich viel kleineres Element, wenn es sich um die Feststellung eines unvergleichlich viel größeren handelt, bei der Rechnung außer acht bleiben kann.“ Die neuen Omegazahlen könne man im Sinne Leibniz' „– auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt – doch unbedenklich als ideale Begriffe brauchen“. Und „[g]anz allgemein kann man sagen, daß [auch] die Kontinuität überhaupt etwas Ideales ist, und es in der Natur nichts gibt, das vollkommen gleichförmige Teile hat; dafür aber wird auch das Reelle vollkommen von dem Ideellen und Abstrakten beherrscht: die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung.“ (vgl. [Laugwitz 1978, 70f.]) Letztere auch von Cohen genutzte Aussage, dass die Regeln des Endlichen im Unendlichen Geltung behalten, ist das für die Nonstandard-Mathematik Laugwitz' wichtige „Leibnizsche Prinzip“, das weiterhin besagt (um an die Position Cohens anzuknüpfen): „[U]nd umgekehrt gelten die Regen des Unendlichen für das Endliche, wie wenn es metaphysische Unendliche gäbe, obwohl man ihrer in Wirklichkeit nicht bedarf, und die Teilung der Materie niemals zu solchen unendlich kleinen Stücken gelangt.“ [Laugwitz 1986, 204f.]

Um das Vorgehen und die Position Laugwitz' (und Schmiedens) genauer zu beschreiben, sind im Falle der Nonstandard-Theorien vorerst ein paar mathematische Definitionen unabdingbar.

Für die Adjunktion der Omegazahlen zum Körper der reellen Zahlen sollen die neuen Elemente für eine erfolgreiche Adjunktion die Verhaltensweisen der üblichen Körperelemente (nicht 0, 1) behalten, mit allen Körperelementen verknüpft werden dürfen und die Kommutativ-, Assoziativ- und die Distributivgesetze müssen gelten. Die folgende kurze Beschreibung mit Hilfe der Adjunktion (s. [Laugwitz 1986, 83–91] ist nur eine von mehreren Möglichkeiten für eine solche Zahlbereichserweiterung. Laugwitz präsentiert bspw. noch eine weitere, kompliziertere, mengentheoretische Zahlbereichserweiterung mit Hilfe von Folgenringen (vgl. dazu [Laugwitz 1986, 91-104]).

„Unendlich groß“ ist das neue, „ideale“ Element Ω, das bei Laugwitz mit

$$\Omega > 1, \Omega > 2, \Omega > 3, ..., \Omega > 100, ...$$

durch unendlich viele Ungleichungen definiert ist. Das Unendlichkleine ist das Reziprok: Ω^{-1}.

Mit der Hinzunahme von Ω können nun weitere „Omegazahlen“ oder „Nonstandard-Zahlen“ durch Folgen definiert werden:

> Jede Folge $a(n) \in \mathbb{R}$, definiert für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen n, gibt ein Element des erweiterten Zahlbereichs $^*\mathbb{R}$ an.

Das „*Leibnizsche Prinzip*“ formuliert sich dann ähnlich:

> Was für eine Aussageform $A(n)$, formuliert in der Sprache des Körpers $\mathbb{R}$ und definiert für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen n, in der zugrundegelegten Theorie von $\mathbb{R}$ wahr ist, soll in der Form $A(\Omega)$ als wahrer Satz in die neue Theorie von $^*\mathbb{R}$ aufgenommen werden.

So lässt sich auch die folgende Ungleichung

$$0 < 1/(\Omega^{\Omega}) < 1/(\Omega) < ... < ..$$
$$.. < 1 < \Omega\sqrt{\Omega} < 2,5 < (1+\Omega^{-1})^{\Omega} < ..$$
$$.. < .... < \Omega < 2\Omega < \Omega! < ...$$

bestätigen, da für Aussagen $A(n)$, die für hinreichend große n wahr sind, $A(\Omega)$ nach dem Leibnizschen Prinzip wahr sein muss.

Diese neuen Nonstandard-Zahlen lassen sich somit problemlos in bekannte Körper eingliedern. Klar ist auch, dass es unendlich viele Nonstandard-Zahlen gibt. So lassen sich jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ infinitesimal benachbarte Zahlen in $^*\mathbb{R}$ durch $\gamma_{1,2} = r \pm \Omega^{-1}$ zuordnen. $\gamma_{1,2} \in {}^*\mathbb{R}$ sind dann *unendlich nahe* bei r, in Zeichen $r \approx \gamma_{1,2}$. Da $r \in \mathbb{R}$ eine „Standard“-Zahl ist, spricht man dann von Zahlen mit selbem Standardteil r. Diese Unterscheidung wird noch für Laugwitz' Interpretation des Zenonschen Paradoxon „Achilles und die Schildkröte“ wichtig (s.u.).

Für die Definiton der Differentiale nutzt Laugwitz besagte infinitesimale Nonstandard-Elemente auf folgende Weise:

$dy/dx = f'(x) + \sigma(x, dx)$ mit $\sigma(x, dx) \approx 0$ für $dx \approx 0$

oder

$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \sigma(x, dx)$ mit $\sigma(x, dx) \approx 0$ für $dx \approx 0$

„Graphisch bedeutet die Ableitbarkeit von $y = f(x)$ an der Stelle x: Alle Steigungen von Sekanten durch (x, y) und einen infinitesimal benachbarten Punkt $(x + dx, y + dy)$ des Graphen sind fast gleich einem festen Wert, nämlich $f'(x)$. Nichts hindert uns, die Gerade durch (x, y) mit der Steigung $f'(x)$ als Tangente an den Graphen zu bezeichnen.“ [Laugwitz 1986, 26f.] Damit existiert nun neben der philosophischen Rechtfertigung durch Cohen auch eine mathematische Rechtfertigung, die Grenzwertbestimmung für die Infinitesimal-Mathematik zu umgehen, ebenso die Vorstellung einer ϵ-Umgebung mit ϵ als einer „beliebigen“ Größe, die durch $0 < \epsilon < r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, approximativ definiert ist.

Entsprechend zur Definition des Differentialquotienten unterscheidet Laugwitz – fast schon im Cohenschen Jargon – seine *qualitative* Definition der *Stetigkeit*:

f heißt an der Stelle x stetig, wenn $f(\xi) \approx f(x)$ für alle $\xi \approx x$ mit $\xi \in {}^*\mathbb{R}$

von der *quantitativen*, die das ϵ-δ-Kriterium nutzt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Die ϵ-δ-Methode nennt er die empiristische, seine die idealistische.

Laugwitz betont hierbei, mit dem ϵ-δ-Kriterium leiste man „ja auch viel mehr als verlangt, täuscht damit auch im Grunde mehr vor als man realisieren kann, weil δ als Funktion von ϵ ja im allgemeinen gar nicht angegeben werden kann. Die qualitative Stetigkeit ist hier der angemessene Begriff." [Laugwitz 1986, 30]

Ein weiterer Vorteil ergibt sich dadurch, dass auf Grund der Verwendung der Nonstandard-Elemente zudem die einfache Stetigkeit für die Integrierbarkeit stetiger Funktionen ausreichend ist – die Grenzwert-Analysis benötigt dafür den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit, die nun „für die Theorie [...] aber redundant" ist. [Laugwitz 1986, 32]

Im Hinblick auf die Philosophie der Nonstandard-Mathematik beschreibt Laugwitz zwei große Probleme, die mit dem Stetigkeits- bzw. Kontinuitätsbegriff verbunden sind. Unausweichlich steht dabei die Kontinuumshypothese zur Diskussion, deren Postulation sich auch mit den Cohenschen Thesen im Widerspruch befindet.

Einerseits ist das Kontinuum dort eliminiert, wo die seinem Begriff widersprechende Teilung bzw. Zergliederung desselben möglich ist, andererseits auch dort, wo das Kontinuum in *einem* bestimmten, konstruierten *Zahl*system seine Identität erhalten soll. Ersteres rechtfertigt er mit Leibniz' genereller Beschreibung zum Kontinuum, die besagt, dass alles in kontinuierlichen, stetigen Übergängen existiert und sich vollzieht, also keine kleinsten (atomaren) Teile existieren. (Die Infinitesimal-Mathematik Laugwitz' und Schmiedens ist nicht nur durch die Leibnizsche Mathematik inspiriert, sondern wie bei Cohen ist mit der Infinitesimal-Methode Leibniz' ein Interesse an der Leibnizschen Monadenlehre unabdingbar. So definiert die Menge aller zum Punkt (zur Zahl) infinitesimal benachbarten Punkte (Zahlen) mit selbem Standard-Anteil die *Monade* eines Punktes (einer Zahl).) Da $\mathbb{R}$ aber seine Charakterisierung durch Zergliederung erhält und kleinste Teile existieren, wird die Kontinuumshypothese damit ad absurdum geführt. Um sich auch gegen die Möglichkeit einer letzten Instanz kleinster Teile auszusprechen, bezieht sich Laugwitz auf die Intuitionisten Weyl, Brouwer und Becker, die das Kontinuum andererseits unbedingt als „ein Medium freien Werdens" verstanden haben wollen, „in das die einzelnen konstruierten reellen Zahlen hineinfallen, das sich aber selbst nicht in eine Menge fertig seiender reeller Zahlen auflöst." So ist das in „der Anschauung gegebene Kontinuum [...] nicht identisch mit irgendeinem Zahlsystem." [Becker 1954, 343–346], [Laugwitz 1986, 10]

Der Anschauungsbegriff findet sich nicht nur bei Becker, sondern auch bei Laugwitz insbesondere im Zusammenhang mit dem Kontinuitätsbegriff wieder.

Laugwitz nennt für den Bereich des Denkens die Zahlen (und Funktionen) und für den Bereich der Anschauung das Kontinuum. Paradoxien entstehen für Laugwitz dann, wenn Anschauung und Denken auseinander klaffen. Richtig ist, „dass man aus der *Anschauung* nicht *logisch* deduzieren kann, dazu gehörte eine begriffliche Präzisierung der Anschauung.“ Aber Paradoxien dürfen nicht missbräuchlich zur Denunziation der Anschauung führen: „Man sollte [...] Schein und Anschauung nicht verwechseln“, da der „*Schein* trügen kann“ [Laugwitz 1986, 223].

Paradoxien der Mathematik sieht Laugwitz durch den Widerstreit mathematischer Anschauung und logischer Deduktion gegeben und jene sind ein Indiz dafür, dass „die zugrunde gelegten Begriffe auf etwas führen, was vom ursprünglich Gemeinten zu weit entfernt ist“. Es soll aber nicht unbedingt „der Anschauung allein die Schuld“ gegeben werden, „vielmehr könnten Paradoxien Anlässe zur *Korrektur der Begriffe* sein. In den Bereich der Anschauung ordnet Laugwitz das Kontinuum ein, in den Bereich des Denkens die Zahlen. Da „man aus der *Anschauung* nicht *logisch* deduzieren kann, muss die Zahlentheorie von einer Kontinuumslehre unterschieden werden. Laugwitz sieht darin „einen wesentlichen Beitrag zur Klärung von mathematischen Aspekten des Kontinuums, die gegenüber dessen grobschlächtiger Identifikation mit $\mathbb{R}$ an Umfang und Gehalt gewonnen haben.“ [Laugwitz 1986, 223 & 237]

Laugwitz beruft sich dabei auch auf Kant, wonach die „Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist, die Kontinuität derselben heißt. Raum und Zeit heißen quanta continua, weil kein Teil derselben gegeben werden kann, ohne ihn zwischen Grenzen (Punkten und Augenblicken) einzuschließen.“ Dabei sind Punkte und Augenblick als Diskretionen „bloße Stellen ihrer Einschränkung“, woraus „weder Raum noch Zeit zusammengesetzt werden [kann].“ [Laugwitz 1978, 24]

Dieser Dualismus äußert sich in Beispielen der Mathematik folgendermaßen: Für die Frage, ob es weniger Quadratzahlen als natürliche Zahlen gibt oder gleich viele, gibt es zwei Antworten. „Es kommt darauf an, ob man die Zahlen im Cantorschern Sinne als Anzahlen auffaßt oder wie in der Omegamathematik als Bestandteile des Kalküls.“ Geht man nach der Anzahl, so wird man sagen, dass es ebenso viele Quadratzahlen wie Wurzeln gibt, was bedeutet, dass es eine eindeutige Zuordnung n zu n^2 gibt. D.h. es muss ebensoviele Quadratzahlen wie natürliche geben. Mit den Omegazahlen wird man aber zu folgender intuitiveren Antwort kommen: Zähle ich die natürlichen Zahlen auf $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ und gleichzeitig die Quadratzahlen $(1, 4, 9, 25, ..)$, so gilt für ein hinreichend großes $\mu \in {}^*\mathbb{R}$: Bis zu $10^{2\mu}$ gibt es 10^{μ} Quadrate, also anteilig $10^{\mu} : 10^{2\mu} = 10^{-\mu} \approx 0$ (s. [Laugwitz 1986, 224f.]). Es kommt dabei eben auch darauf an, ob das Leibnizsche Prinzip als Voraussetzung akzeptiert wird oder nicht!

Der Dualismus von Anschauung und Denken führt weiterhin zu Laugwitz' Vorschlag, zwischen theoretischen und empirischen Punkten im Kontinuum zu unterscheiden.

Dies wird veranschaulicht am Paradoxon „Achilles und die Schildkröte". Jenes Paradoxon zeigt eine unendlich fortführbare Rechnung auf, die die Abstände zwischen Achilles und der Schildkröte zwar unendlichklein werden lässt, Achilles erreicht aber nie den Punkt, an dem sich die Schildkröte befindet. Setzt man für die entsprechende Gleichung Ω-Zahlen ein, lässt sich diese Paradoxie „durchschauen". Theoretische infinitesimal benachbarte Punkte dieser scheinbar unüberwindbaren Näherung bekommen dann gleiche Standardteile (= *empirische* Punkte), was bedeutet, dass sich eben Achilles und die Schildkröte nur noch theoretisch an verschiedenen Punkten befinden und dies durch diesen *theoretischen* Übergang im Bereich der Infinitesimalien erklärbar wird. Denn theoretische Punkte, die infinitesimal benachbart sind, gehören eben zum selben empirischen Punkt. Dies wiederum zeigt, dass sich das Laugwitzsche „anschauliche" Kontinuum, soweit man sich nur auf das prinzipiell messbare beschränkt, nicht genau begrifflich erfassen lässt. Man lasse aber den „‚Verstand' prüfen, welches Verhalten im Infinitesimalen zu Resultaten führt, welche mit dem empirisch Beobachteten („sinnlich Wahrgenommenen") übereinstimmt. Damit sind wir unversehens auf einem Weg zum Differentialkalkül als Hilfsmittel der Physik!" [Laugwitz 1986, 229f.]

Es ist aber nicht nur der vereinfachte Umgang durch Infinitesimalien in diesen Punkten der Stetigkeit der Grund, dass mit der NSA kein „uninteressanter Abklatsch der reellen Analysis" vorliegt. Schon im 1958 veröffentlichen Artikel wird darauf verwiesen, dass die „Standard"-Analysis „echt erweitert wird." Es lassen sich beispielsweise Funktionen, die die Eigenschaften von Diracs δ-Funktion haben, „ohne Erweiterung des Funktionsbegriffs einführen und auch ohne neue Begriffe behandeln, da die (Nichtstandard-)Begriffe der Stetigkeit, Differentation und Integration auch auf solche Funktionen anwendbar sind, die in unendlich kleinen Intervallen unendlich große Schwankungen ausführen." [Laugwitz 1958, 2] Laugwitz und Schmieden loben die NSA für diese für die Naturwissenschaften insbesondere wichtigen Beschreibungen von Deltafunktionen, die in der Standardanalysis so nicht möglich ist. Dirac beschreibt seine δ-Funktion, die in der Standard-Analysis als uneigentliche Funktionen gelten, folgendermaßen [Dirac 1947, 58ff.]: Die Funktion $\delta(x)$ soll die Bedingungen erüllen: $\delta(x)$ „vanishes everywhere exept inside a small domain, of length ϵ say, surrounding the origin $x = 0$, and which is so large inside this domain that its integral is unity", d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$. δ ist also eine Funktion, die bis auf einen unendlichkleinen Bereich nur unendlichkleine Werte oder den Wert 0 annimmt, in diesem unendlichkleinen Bereich aber unendlich groß werden kann. Solche Funktionen lassen sich in der NSA nun *explizit* darstellen (s. [Laugwitz 1978, 159-163] oder [Laugwitz 1986, 161–163]). Dies erlaubt es, dem Begriff des Impulses eine anschauliche mathematische Annäherung zu geben.

Es sei darauf verwiesen, dass – nach der Auseinandersetzung mit den Theorien Cohens – es wenig überraschend scheint, dass Infinitesimal-Mathematik eine bessere Methode für die Mathematisierung eines Begriffes des Impulses abgibt. In der Diskussion des Realitätsurteils, das durch die Infinitesimal-Methode inspiriert ist, genauer im Übergang vom Nicht-Erkennen zum Erkennen, spielt der Impuls eine nicht unwichtige Rolle (s. Kap. 3.2). Im historischen Rückblick verweist Cohen darauf, dass ohne die Vorstellung des sich entwickelnden Impulses Galilei nur Intension im Blick haben konnte, und nicht das Ursprungs- und Realitätsurteil im Sinne Cohens - und ihm ebenso die Entdeckung der Infinitesimal-Methode verwährt blieb (s. Kap. 4.1).

Sieht man von der unterschiedlichen Begriffssetzung im Dualismus von Anschauung und Denken ab, so ist die Position Laugwitz' und Schmiedens, im Gegensatz zu den Positionen der Kritiker Cantor, Frege und Russell, der Cohenschen schon sehr nahe: Die Kontinuität wird ihres von den Logizisten behaupteten „konstruktivistischen“ Gehalts (vgl. Kap. 4.2) entledigt und bildet eine qualitative Grundlage unseres Geistes. Des Weiteren – noch deutlicher äußert dies A. Robinson (s. Kap. 6.3) – spielt der logizistische, später auch der Gödelsche Positivismus keine Rolle. Auch der klassische, naive Platonismus muss weichen, denn für Laugwitz sind die obigen ideellen Definitionen keine Entdeckung, die eines Ideenhimmels bedürfen, sondern „*Erfindungen* geistiger Realität“, d.h. der Idealismus liegt wie bei Cohen in der Hypothese begründet. Die Anschauung ist bei Laugwitz ein intuitives, „ursprünglich Gemeinte[s]“ [Laugwitz 1986, 223] und besonders interessant, da dieser Anschauungsbegriff dem Kantischen in mathematischer Hinsicht genau entgegengesetzt ist. Laugwitz verbindet ihn im Gegensatz zu den Zahlen mit der Kontinuität, während bei Kant Anschauungen extensive Größen sind!

Das Infinitesimum erfährt mit den Nonstandard-Theorien nun wieder seine Rechtfertigung, da es widerspruchsfrei in verschiedenste mathematische Konzepte eingebettet werden kann. Ein großer Scheidepunkt bleibt dennoch Cohens Trennung des Ursprungs der Realität, als infinitesimales Urteil, von dem der Allheit: Beide, das Infinite, wie das Infinitesimale, sind in der Laugwitzschen Mathematik, was das entsprechende vorhergehende Urteil betrifft, gleichgestellt. Ebenso ist die Eigenständigkeit des Infinitesimalen nicht nur durch die Reziprokenbildung, sondern auch durch das mit unendlich vielen und damit von $\mathbb{N}$ abhängigen Ungleichungen definierte Ω beschränkt. Diese Thematik wird in den nächsten Kapiteln nochmals angesprochen.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass Laugwitz in der Diskussion des infintitesimal-mathematischen Zugangs von A. Robinson die große Rolle der Methode für die Mathematik betont. Robinson formuliert seine, von Laugwitz und Schmieden abweichende, Nonstandard-Mathematik unter der Berufung auf die Ergebnisse T. Skolems. Skolem zeigte 1933, dass die Peano-Arithmetik für $\mathbb{N}$ auch noch größere, zu $\mathbb{N}$ nicht isomorphe Modelle besitzt: Die Nonstandard-Modelle (s. [Hoffmann

2012, 366-389]). Und dieser Theorie der Modelle liegt eine bestimmte Auffassung der Bestimmung zugrunde: „Nichtstandard-Mathematik ist mehr eine Methode als ein Gebiet“ [Laugwitz 1978, 9]!

6.3 Abraham Robinson

Während Laugwitz und Schmieden 1958 erstmals eine Mathematik vorschlugen, die die reellen Zahlen widerspruchsfrei um Infinitesimalien erweitert und auch die oftmals bezweifelten möglichen Anwendungen auf Fragen der Mathematik aufzeigte, so rechneten diese nur mit einem partiell geordneten Ring. Robinson gelang ein weiterer Durchbruch, indem er mit Hilfe der mathematischen Logik, insbesondere der Modelltheorie, einen angeordneten Körper $^*\mathbb{R}$ konstruierte, der ebenfalls die reellen Zahlen umfasst und infinitesimale wie infinite Größen zulässt. Zudem zeigte er mit dem Transferprinzip, dass in $^*\mathbb{R}$ keine Einschränkungen hingenommen werden müssen, sondern im Gegenteil, dass (prädikatenlogisch) sogar genau die Aussagen, die über $\mathbb{R}$ gelten, auch über $^*\mathbb{R}$ gelten müssen. $^*\mathbb{R}$ ist dann das (Nonstandard-)Modell, das die ‚Sprache‘ des Standardmodells $\mathbb{R}$ und die formulierten Axiome der reellen Zahlen in sich trägt, aber darüber hinaus nicht nur die Zeichen Ω oder Ω^{-1}, sondern auch Begriffe wie ‚infinit(esimal)‘, ‚endlich‘, ‚unendlich (groß)‘, ‚reell‘ etc. zulässt.

Während erste Kritiker einen einfachen, nutzlosen logischen Trick hinter diesen Überlegungen sahen, äußerten sich namhafte Mathematiker durchaus positiv. Kurt Gödel bewertete die NSA als eine fundamentale Vereinigung von Mathematik und Logik mit großer mathematischer wie philosophischer Prägnanz. Auch Imre Lakatos widerspricht den Kritikern: „Robinson's work [...] offers a rational reconstruction of the discredited infinitesimal theory which satisfies modern requirements of rigour and which is no weaker than Weierstrass's theory. This reconstruction makes infinitesimal theory an almost respectable ancestor of a fully-fledged, powerful modern theory, lifts it from the status of pre-scientific gibberish and renews interest in its partly forgotten, party falsified theory.“ (Lakatos in [Dauben 1988, 179]) Hier ist die Frage an diese neue (Infinitesimal-)Mathematik vor allem die, wie die neuen Zeichen und Begriffe philosophisch gedeutet werden und dass und wie die Mathematik mit der Einbeziehung der Infinitesimalien ihrem – in den Worten Galileis – Auftrag, die „Sprache der Natur“ zu sein, damit näher kommt und sich somit, ohne isoliert zu sein, in den Komplex der Einzelwissenschaften eingliedert und von dem „status of pre-scientific gibberish“ befreit.

Wie bei Laugwitz schon bemerkt, wo die Eigenständigkeit des Infinitesimalen nicht nur durch die Reziprokenbildung, sondern auch durch das mit unendlich vielen und damit von $\mathbb{N}$ abhängigen Ungleichungen definierte Ω beschränkt ist, ist auch bei Robinson das Infinitesimale nur ein in Relation zum Standardmodell hinzugezogenes. Für die Arithmetik besagt der Satz von Löwenheim-Skolem, dass die Annahme eines Standardmodells für eine Interpretation, die alle Peano-Axiome erfüllt, unausweichlich die Existenz eines zu $\mathbb{N}$ nicht isomorphen Nonstandard-Modells impliziert, das in unserem Fall ein Element (und dessen Reziprok) enthält, das größer ist als jede natürliche Zahl. „Die Struktur des Nichtstandardmodells beginnt [...] [aber] mit der Sequenz der natürlichen Zahlen." [Hoffmann 2012, 378 ff.] D.h., die infinite(simale)n Zahlen erhalten ihren Sinn nur durch die zuerst begonnene Konstruktion der natürlichen Zahlen. Aber, was im Hinblick auf Cohen zu bemerken ist, wird dies vor allem in der „*Methode*", wie Laugwitz in Bezug auf Robinson erwähnte (s.o.), ermöglicht.

Die insbesondere formallogische Herangehensweise an die Integration der hyperreellen Zahlen spiegelt sich auch in der Philosophie Robinsons wieder. Seinen anfänglich – von seinem Mentor A. Fraenkel gelehrten – Platonismus reguliert Robinson in einem Paper von 1964 mit dem Titel „Formalism 64". Darin positionierte sich Robinson philosophisch neu. Man sagt ihm danach eine Nähe zu Leibniz und Hilbert nach (vgl. [Dauben 1988, 184ff.]). Dauben, ein weiterer Vertreter der NSA und Nachfolger Robinsons, hebt diesbezüglich zwei Punkte aus Robinsons Schrift hervor:

„(i) Infinite totalities do not exist in any sense of the word (i. e., either really or ideally). More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, meaningless. (ii) Nevertheless, we should continue the business of Mathematics „as usual", i.e. we should act as if infinite totalities really existed." Robinson äußert zudem: „I cannot imagine that I shall ever return to the creed of the true platonist, who sees the world of the actual infinite spread out before him and believes that he can comprehend the incomprehensible." [Dauben 1988, 186] Dass sich in dieser Neupositionierung Robinsons Einstellung zur Philosophie der Mathematik festigte, sieht Dauben darin bestätigt, dass obige Punkte zehn Jahre später von Robinson in ähnlicher Weise wiederholt wurden: „(i) that mathematical theories which, allegedly, deal with infinite totalities do not have any detailed meaning, i.e. referece, and (ii) that this has no bearing on the question whether or not such theories should be developed and that, indeed, there are good reasons why we should continue to do mathematics in the classical fashion nevertheless." [Dauben 1988, 197 Anm. 27]

Hierin wird deutlich, dass die Nonstandard-Mathematik Laugwitz', der äußert, dass seine Sympathien „in gleichem Maße dem *Formalismus* und dem *Konstruktivismus*" gelten, nicht überall mit der Robinsons übereinstimmen kann. Die in oben beschriebener Abgrenzung zur Peano-Arithmetik entstandene Auszeichnung infiniter Totalitäten ist für Robinson „meaningless". Ihr Sinn ergibt sich nur durch die Möglichkeiten, die eine präzise formale Sprache bereitstellt. Dies fordert Robinson auch für das Leibnizsche (Denk-)Gesetz oder Prinzip der Kontinuität, das bei Laugwitz in Abgrenzung zur Zahlenlehre und dem Denken als *anschauungsbedingt* präsentiert wird.

Leibniz sieht das unendlichkleine Ω^{-1} als ein ideales Element an, das seine Rechtfertigung, wie auch Cohen immer wieder klarstellt, aus dem Prinzip der Kontinuität erhält. Robinson macht Leibniz genau diesen Ansatz zum Vorwurf und mit dafür verantwortlich, dass die Infinitesimal-Mathematik sich nicht ohne Weiteres durchsetzen konnte. Bemängelt wird das Fehlen einer „formal language which would have made it possible to give a precise expression of, an delimitation to, the laws which were supposed to apply equally to the finite numbers and to the extended system including infinitely small and infinitely large numbers as well.“ Der Vorwurf betrifft also vor allem den Übergang vom Endlichen ins Unendliche. Robinson kritisiert hier eben das Leibnizsche Prinzip, das besagt, dass was für die endlichen Zahlen gilt, auch für die unendlichen Zahlen gelte und vice versa. Diesem Postulat fehle der *Geltungsbereich*: So hat die Aussage, dass für alle $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft $b < na \in {}^*\mathbb{R}$ sowohl in $\mathbb{R}$ als auch ${}^*\mathbb{R}$ Gültigkeit. Interpretiert man unter selbigen Voraussetzungen das $n \in \mathbb{N}$ „in the ordinary sense such that $b < a+a+a+a...+a$ (n times) then this postulate is not true for ${}^*\mathbb{R}$“ (z.B. wenn a infinitesimal und b nicht) (vgl. [Robinson 1966, 266f.]).

Diese Kritik Robinsons trifft ebenso einen Grundlegungsaspekt im Übergang von der Philosophie zur Einzelwissenschaft der Mathematik. Das Denkgesetz der Kontinuität als philosophische Grundlage muss für den Formalisten Robinson, um für die Mathematik geltend gemacht zu werden, seine Bestimmung innerhalb der Mathematik finden, es muss in die definierten Methoden und die durch diese Methoden abstrahierten Gegenstandskonstitutionen eingegliedert werden und seinen Geltungsbereich klären. Für Robinson wird der Kontinuitätsbegriff nur innerhalb der Möglichkeiten der akzeptierten formallogischen Sprache interessant, die zu Grunde liegt. Ein Begriff der Kontinuität, als positiver, qualitativer, wie er hingegen für Laugwitz Ausgangspunkt für anschauungsbedingte Begriffe ist, findet bei Robinson keine Akzeptanz. Ein Kontinuum im intuitionistischen Sinne, das als „Medium freien Werdens“ nicht durch Gesetze eingeschränkt ist, wird in der Robinsonschen NSA abgelehnt. Hierin leben Streitpunkte der Grundlagenkrise wieder auf. So spricht auch Dauben von einer neuen mathematisch-philosophischen Grundlagen-„crisis“ ausgehend von Konstruktivisten um Errett Bishop, der sich mit folgenden Worten kritisch zur Herangehensweise der Nonstandard-Mathematik äußert: „There is a crisis in contemporary mathematics, and anybody who has not noticed it is being willfully blind. *The crisis is due to our neglect of philosophical issues*“ [Bishop 1975, 507].

Dauben wie Bishop sehen diese Diskussion mit der Infinitesimal-Mathematik verbunden, Bishop ruft diese Kritik in Verbindung der NSA aus, da er diese als eine formalistische Finesse mit einer fehlerhaften Konzentration auf die „Wahrheit“

statt auf die „Bedeutung“ ansieht. Es solle nicht nur darum gehen, mit aller Kraft nur um der Infinitesimalien willen eine neue Theorie zu installieren, sondern einfachere und „intuitivere“ Methoden mathematisch zu rechtfertigen. Robinson zeigt zwar, dass das Infinitesimale historisch immer ein intuitiver und natürlicher Zugang für die Mathematik und die Physik darstellte, was auch Laugwitz und Schmieden betonen. Die neue Grundlagen-„crisis“ bezüglich der Voraussetzungen philosophischer Untersuchungen zeigt jedoch, dass die formalistischen und intutionistischen Positionen, d.h. die Priorisierung von formalistischer „Wahrheit“ oder intuitionistischer „Bedeutung“, zu unterschiedlichen Theorien im Umgang mit infinitesimalen und infiniten Größen führen. Als Beispiel für die intuitionistische Position wird im nächsten Kapitel die Smooth Infinitesimal Analysis vorgestellt.

Dass der Mathematik mit dem Umgang mit Infinitesimalien nun aber kein bloßes innermathematisches oder wie von den Logizisten im Grundlagenstreit behauptetes rein logisches Problem vorliegt, sondern, wie die Geschichte zeigt, eines der philosophischen Einstellung, wird von Robinson mehrfach betont, so schreibt er z.B.: „[I]t might seem to us that the evolution of the foundations of the calculus amounts merely to the development of certain mathematical techniques, and the rejection or modification of such techniques on grounds of obvious inconsistency. This picture is incomplete. It ignores the fact that, from the seventeeth to the nineteeth century, the history of the Philosophy of Mathematics is largely identical with the history of the foundations of the calculus.“ [Robinson 1966, 280] Gleiches lässt auch Dauben verlauten, der sogar schon bei den vorsokratischen Pythagoreern, die sich mit inkommensurablen Größen beschäftigten, die dualen Konzepte der infinit(esimal)en Größen als zentralen Streitpunkt ansieht.

In einem Artikel zu Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?“ äußert Robinson: „Number systems, like hair styles, go in and out of fashion – it's underneath that counts.“ [Robinson 1973, 14]

Diese Aussage ist nicht nur sinnbildlich für die Geschichte der Infinitesimal-Mathematik, sondern auch für Robinsons Auffassung von Mathematik, insbesondere für die Modelltheorie.

Dauben meint, diese Aussage „might well be taken as the leitmotiv [sic!] of much of Robinson's mathematical career, for his surpassing interest [...] was model theory, and especially the ways in which mathematical logic could not only illuminate mathematics, but have very real and useful applications within virtually all of its branches. In discussing number systems, he wanted to demonstrate, as he put it, that ‚the collection of all number systems is not a finished totality whose discovery was complete around 1600, or 1700, or 1800, but that it has been and still is a growing and changing area, sometimes absorbing new systems and sometimes discarding old ones, or relegating them to the attic.‘ [Robinson 1973, 14]“ [Dauben 1988, 193].

Wie Laugwitz, der die Geschichte der Differential- und Integral-Mathematik nach Leibniz und Newton als „irrational“ [Laugwitz 1986, 240] bezeichnet, da er in der Grenzwertmethode eine gehaltliche Verarmung in diesem bedeutenden Zweig der Mathematik erkennt, so bedauert auch Abraham Robinson diese Entwicklung und macht seine Wertschätztung für die Leibnizsche Darstellung der Infinitesimalien stets deutlich. Zur *Infinitesimal*-Methode Leibniz' hält er fest, dass „neither he [sc. Leibniz] nor his disciples and successors were able to give a rational development leading up to a system of this sort. As a result, the theory of infinitesimals gradually fell into *disrepute* and was *replaced* eventually by the classical theory of limits.“ Zwar habe noch Lagrange versucht, mit der Taylorentwicklung eine entsprechende Grundlegung zu betreiben, aber mit Weierstraß und Cauchy setzte sich die Epsilontik durch und „significancen of subsequent developments in the history of non-archimedean fields was confined entirely to Algebra.“ Damit kam es zu einem Rückschritt zum „style of the mathematicans of antiquity by arguing in terms of quantity“. Die unendlichkleinen ideellen Elemente Leibniz' wurden ausgespart, aber mit der NSA wird nun eine Idee Leibniz' verwirklicht und der Schlüssel dieser Methode „is provided by the detailed analysis of the relation between mathematical languages and mathematical structures which lies at the bottom of contemporary model theory.“ [Robinson 1966, 2]

Dass die Entwicklung der Geschichte der Philosophie der Mathematik hin zur Epsilontik nun mit guten Gründen kritisiert werden kann, ist ein positives Zeichen für die Philosophie Cohens. Genauso auch die Erkenntnis, dass Streitpunkte der Grundlagenkrise, die auch von den Marburgern thematisiert wurden, immer noch diskutiert werden und diskutiert werden müssen. Robinson macht zudem für die Weiterentwicklung der Mathematik deutlich, dass, wie bereits angedeutet, der Rückblick auf die Geschichte unverzichtbar ist und für ihn somit auch die – in den Worten Cohens – Fakta der Wissenschaft ausschlaggebend sind.

Dies bedeutet auch, dass mathematische Axiome genau wie mathematische Methoden im ‚Weltbezug‘ stehen, in dem Sinne, dass sie keine separierten Gedanken, Entitäten, Ideen etc. sind, sondern in der Einheit des Bewusstseins durch Denknotwendigkeiten entstandene hypothetische Setzungen, die immer auf ihre Entstehung, ihren Stammbaum, ihr geistiges Umfeld im Sinne ihrer kulturellen Beeinflussung etc. zurückgeführt werden können – dank der Historie. Einerseits gilt, dass mathematische Theorien aus der Mode kommen können – die Infinitesimal-Mathematik ist das beste Beispiel – andererseits hat jede (mathematische) Theorie, sei sie auch noch so abstrus, Weltbezug, sonst würde ein Denkmittel existieren, das sich nur auf sich selbst bezieht. Dann aber wäre diese zustandekommende Erkenntnis außerhalb irgendeines Bezugs und somit ohne Geltungsanspruch. Umgekehrt macht es nach Cohen auch keinen Sinn, nach einer Welt außerhalb unseres geistigen Vermögens zu fragen, sie wäre ja nicht erschließbar.

Wie beschrieben finden wir bei Robinson wenig überraschend eine Nähe zu den Themen Cohens vor, insoweit beide Leibniz in ihre Philosophie einbeziehen. Auch wenn Robinson das Leibnizsche Kontinuitätsprinzip kritisiert, bestätigt Dauben: „Leibniz and Robinson shared a similar view of the ontological status of infinities and infinitesimals. They are not just fictions, but well-found[ed] ones – ‚fictiones bene fondatae', in the sense that their applications prove useful in penetrating the complexity of natural phenomena and help to reveal relationships in nature that purely empirical investigations would never produce." [Dauben 1988, 185]

Wie schon bei Laugwitz wird so auch bei Robinson der naive Platonismus Ziel der Kritik. Im historischen Rückblick auf l'Hospital, einen Schüler Leibniz', der sich den Differentialien mit Euklid und Archimedes mehr durch intuitiv erklärte Definitionen denn mit Hilfe strenger Axiomatisierung näherte, erwähnt Robinson: „Thus, the axiomatic approach implied a belief in the reality of the objects mentioned (e.g., differentials), which, as we have seen, Leibniz was unwilling to concede. It is interesting to contrast this with our present attitude according to which an axiom implies no ontological commitment (except possibly in set theory)." [Robinson 1966, 265]

Es geht also nicht um das bloße Entdecken an einem vorausgesetzten Ideenhimmel, sondern um die systematische Rechtfertigung: In einer Beschreibung Daubens über die Denkweise Robinsons in Bezug auf Cantors transfiniten Größen lässt sich dieser Idealismus wiederfinden: „There was an important lesson to be learned, Robinson believed, in the eventual acceptance of new ideas of number, despite their novelty or the controversies they might provoke. Ultimately, utilitarian realities could not be overlooked or ignored forever." [Dauben 1988, 194]

Es geht wie bei Cohen nicht um die Setzung selbst, sondern um die mit ihr verbundene Methode. Es geht um das ‚Wie' und nicht wie so oft um das ‚Dass' und eine damit an den Erfolg angeknüpfte Wahrheitstheorie. Dies schreibt Robinson auch zu seiner NSA, denn „what we have done is to introduce *new deductive procedures* rather than new mathematically entities. Whatever our outlook and in spite of Leibniz' position, it appears to us today that the infinitely small and infinitely large numbers of a non-standard model of Analysis are neither more nor less real than, for example, the standard irrational numbers. This is obvious if we introduce such numbers axiomatically; while in the genetic approach both standard irrationals and non-standard numbers are introduced by certain infinitary processes. This [... is ...] true [...] from the point of view of the empirical scientist." Zu Berkeleys damaliger Kritik an den Infinitesimalien und seinen Vorwürfen der Inkonsistenz bemerkt Robinson, dass: „It is in fact not surprising that a philosopher in whose system perception plays the central role, should have been unwilling to accept infinitary entities" [Robinson 1966, 280 (mit Verweis auf [Strong 1957])]. So gilt: „Like Leibniz (and Kant after him), Robinson rejected any empirical basis for knowledge about the infinite – whether in the form of infinitely large or infinitely small quantities, sets, whatever.“ [Dauben 1988, 185]

6.4 Smooth Infinitesimal Analysis

Seit der Nonstandard-Mathematik kann von einer Rehabilitierung des Infinitesimalen in der Mathematik gesprochen werden. Als zwei Varianten wurden bereits die Positionen Laugwitz’ (und Schmiedens) und Robinsons vorgestellt. Im nun folgenden letzten Kapitel soll kurz auf die „Smooth Infinitesimal Analysis“ (SIA) eingegangen werden. Die SIA ist wie die NSA eine Alternative zur klassischen Grenzwertanalysis. Während sich Robinson auf den Hilbertschen Formalismus bezieht, hat die SIA die intuitionistische Logik als Grundlage. Sie entstand ausgehend von der Kategorientheorie F. Lawveres und A. Kocks als Teilgebiet der *synthetischen* Geometrie. Eine Kategorie ist dabei vage formuliert „a mathematical system whose basic constituents are not simply mathematical ‚objects‘ (as sets are in set theory), but also ‚maps‘ (‚functions‘, ‚transformations‘, ‚correlations‘) between the said objects“ [Bell 2008, 12].

Im Gegensatz zur analytischen Geometrie, die algebraische Strukturen wie Modelle, Körper und Räume als definitorische Voraussetzung für die Definition geometrischer Axiome und Strukturen nimmt, aus denen dann deduziert werden kann, soll in der synthetischen Geometrie eine Theorie mit synthetischen, konstruktiven Methoden auf den *Beziehungen* elementarster geometrischer Objekte (Punkt, Gerade, Ebene,...) aufgebaut werden. Die Gegenüberstellung von NSA und SIA soll nur grob die Ausgangslage des methodischen Zugangs erklären, denn hier wird unter den verschiedenen Theorien der SIA nur der Ansatz John Bells in den Werken [Bell 2001], [Bell 2005] und [Bell 2008] diskutiert – und nur seine Sicht auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit der Nonstandard-Analysis beleuchtet. Es soll hier weniger auf die Relevanz der einzelnen Positionen in der ‚neuen‘, nicht standardisierten Mathematik mit Infinitesimalien eingegangen werden, als mehr auf bestimmte Inhalte der Diskussionspunkte, auch der neuen „Grundlagencrisis“, die mit einer Diskussion der Philosophie Cohens in Verbindung gebracht werden können.

So bekommt beispielsweise in der Rückbesinnung auf die Begründer der Infinitesimal-Methode insbesondere das Leibnizsche, von Cohen betonte „natura non facit saltus“ mit der SIA eine ganz neue Gewichtung. Bell bezieht sich nämlich auf den Intuitionismus, d.h. für seine Mathematik gilt: Das Kontinuum ist unzerlegbar, d.h. es kann nicht in zwei nichtleere disjunkte Teile zerlegt werden – „it remains indecomposable even if one pricks it with a pin“. Das inituitionistische Kontinuum hat „a syrupy nature, so that one cannot simply take away one point. If in addition Bar Induction is assumed, then, still more suprisingly, indecomposability is maintained even when all the rational points are removed from the continuum“

[Bell 2005, 280f.]. Dass in Ansehung eines intuitionistischen Zahlenstrahls nach dem Entfernen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die dicht in $\mathbb{R}$ liegen, die Unzerlegbarkeit aufrechterhalten wird, liegt daran, dass die ‚letzten' Teile einer derartigen Zerlegung immer mit Infinitesimalien enden wird! Und diese sind keine Punkte, sondern infinitesimale Geraden.

In Abgrenzung zum Modell $^*\mathbb{R}$ der NSA ist deswegen in der SIA von der „smooth-real line" $\mathbf{R}$ die Rede. Es werden dort nilpotente Infinitesimalien ϵ genutzt, für die gilt $\epsilon^2 = 0$, wobei ϵ infinitesimal und ungleich 0. Die Forderung solcher sonderbaren infinitesimalen Elemente für die Mathematik resultiert aus der Taylorformel. Denn für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $y = f(x)$ folgt aus $dy = f(x+dx) - f(x)$ mit besagter Taylorformel $dy = f'(x)dx + A(dx)^2$. A ergibt sich aus der Taylorformel und ist von x und dx abhängig. Damit diese Abhängigkeit eliminiert wird, soll dx durch nilpotente Infinitesimalien oder microquantities ausgedrückt werden, was heißt, dass dx so ‚klein' gewählt werden soll, dass $(dx)^2 = 0$.

Sei also $\Delta = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 0\}$ die Menge aller solcher Infinitesimalien und $dx, dy \in \Delta$, dann gilt für obige Gleichung $dy = f'(x)dx + A(dx)^2$, dass $dy = f'(x)dx = f(x + dx) - f(x)$ und es folgt daraus das „principle of infinitesimal affineness":

> Für alle $f : \Delta \to \mathbf{R}$ existiert genau ein $D \in \mathbf{R}$, sodass für alle $\epsilon \in \Delta$ gilt:
> $f(x + \epsilon) - f(x) = \epsilon D.$

Diese Gleichung entspricht der Differentationsgleichung $f(x+\epsilon)-f(x) = \epsilon f'(x)$ mit $f'(x)$ definiert als D. Dies gilt in der SIA somit aus der Möglichkeit der Existenz nilpotenter Infinitesimalien axiomatisch und „says that the graph of f is a straight line passing through $(0, f(0))$ with slope D. Thus any function on Δ is what mathematicians term affine, and so this postulate is naturally termed the principle of infinitesimal affineness, of microstraightness. It means that Δ cannot be bent or broken: it is subject only to translations and rotations – and yet is not (as it would have to be in ordinary analysis) identical with a point. Δ may be thought of as entity possessing position and attitude, but lacking true extension." [Bell 1998, 2]

Damit folgt auch: Jede Funktion ist „infinitesimally straight" [Bell 1998, 3] und da Linien nicht mehr aus Punkten, sondern aus infinitesimalen Segmenten zusammengesetzt sind, gilt weiterhin, dass alle Funktionen in $\mathbf{R}$ kontinuierlich und nicht durch diskrete Entitäten, bspw. durch Punkte, zu explizieren sind. Außerdem sind alle Funktionen beliebig oft differenzierbar!

Diese Voraussetzung der Existenz nilpotenter Infinitesimalien und die Folgerung allgemeiner Kontinuität aller Funktionen in $\mathbf{R}$, der smooth-real line im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ (s.o.), widerspricht nun jedoch dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Angenommen die Funktion f ist für jedes reelle x definiert durch $f(x) = 1$ für $x = 0$ und $f(x) = 0$ sonst. Würde man annehmen, dass der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, dann wäre jedes reelles x entweder gleich oder ungleich Null, sodass f, wäre f auf ganz $\mathbf{R}$ definiert, dann aber sicherlich der Voraussetzung der Stetigkeit widersprechen würde.

Es kann in der SIA also nicht die klassische, sondern es muss eine intuitionistische Logik zugrunde gelegt werden, wie sich aus obigem Widerspruch zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten erkennen lässt. Des Weiteren existieren in $\mathbf{R}$ Elemente, die von 0 nicht zu unterscheiden sind, aber auch nicht mit 0 identisch sind, dies sind die *nicht invertierbaren* Elemente von $\mathbf{R}$, die die nilpotenten Infinitesimalien (Δ) enthalten. Und ebenso, weil in diesem Aufbau die Invertierbarkeit für die Nonstandard-Elemente wegfällt, ergibt sich von selbst, dass in der SIA nicht mehr mit einem Körper, sondern mit einem Ring operiert wird.

Es gilt dabei: Die Menge „Δ can be described [...] [a]s a generic tangent vector" [Bell 2005, 285], insofern als dem infinitesimalen Urbild ein infinitesimales stetiges Liniensegment des Bildes zugeordnet wird. Mit der Aussage, dass „intensive magnitude possess[es] only location and direction" [Bell 2005, 286], bekommt die folgende Aussage Cohens Sinn: „Das Unendlichkleine bethätigt sich in der Tangente als das *erzeugende* Moment, und somit kommt positive, schöpferische Bedeutung in die *Begrenzung*. Der Punkt der Tangente, welcher die verschiedenen Bewegungen eines Punktes zu Einer Richtung vereinigt, erzeugt in dieser Richtung die Curve." [Cohen 1883, § 39] Bell hebt selbst das *erzeugende Moment* des Infinitesimalen hervor, denn mit Δ und dem microaffineness principle gilt: „$\mathbf{R}$, and hence all Euclidean spaces, may be seen as being ‚generated' by the infinitesimal object Δ". „Δ may be seen as an intensive magnitude of a certain kind. The microquantities that make up Δ may then be termed intensive quantities. If we think of $\mathbf{R}$ as the domain of extensive quantities, then an intensive quantity may be identified as an extensive microquantity, and [...] an extensive quantity as the ratio of two intensive quantities." [Bell 2005, 275f.] Bell nutzt hier ganz bewusst den Terminus „intensiv", um anzumerken: This „would seem to be consonant with Hermann Cohen's conception of the infinitesimal" [Bell 2005, 276 (Anm. 714)]. Bell richtet sich nach Cohens „Infinitesimalschrift" und kommt den Vorstellungen Cohens tatsächlich sehr nahe. Das Hochhalten der Kontinuität, das erzeugende Moment im Infinitesimalen, ihre Klassifizierung als intensive Größe und die nicht zwingende Invertierbarkeit der „Realitätseinheit" zeugen davon.

Man sieht zudem, dass das Infinitesimum hier sehr stark in den axiomatischen Aufbau der Analysis eingreift. Regeln für das Unendlichkleine, wie die Nilpotenz, werden benutzt, um das Endliche intuitiver und ‚smoother' zu beschreiben. Im Gegensatz zur NSA kann aber damit das Transferprinzip nicht mehr gelten, was wiederum Einschränkungen bedeutet und kritisch zu betrachten ist. Weitere Differenzen, die mitunter zeigen, dass die Diskussion philosophischer Grundlegungen unabdingbar sind, benennt Bell in [Bell 2005, 302]:

„

1.) In models of SIA, only smooth maps between objects are present. In models of NSA, all settheoretically definable maps (including, in particular, discontinuous ones) appear.

2.) The logic of SIA is intuitionistic [...] The logic of nonstandard analysis is classical [... (Bell verweist auf die nicht ausgearteten infinitesimalen Umgebungen von Null im Falle der intuitionistischen Logik)].

3.) In SIA, all curves are microstraight, and closed curves infinilateral polygons. Nothing resembling this is present in NSA.

4.) The nilpotency of the infinitesimals of SIA reduces the differential calculus to simple algebra. In NSA the use of infinitesimals is a disuised form of the classical limit method.

5.) The hyperreal line is obtained by augmenting the classial real line with infinitesimals (and infinite numbers), while the smooth real line comes already equipped with infinitesimals.

6.) In any model of nonstandard analysis, the hyperreal line $\mathbb{R}$ has exactly the same settheoretically expressible properties as does the classical real line: in particular $\mathbb{R}$ is an archimedean field in the sense of that model. This means that the infinitesimals (and infinite numbers) of NSA are not so in the sense of the model in which they ‚live‘, but only relative to the ‚standard‘ model with which the construction began. That is, speaking figuratively, an inhabitant of a model of NSA would be unable to detect the presence of infinitesimals or infinite numbers in $\mathbb{R}$. This contrasts with SIA in two ways. First, in models of SIA containing invertible infinitesimals, the real line is nonarchimedean with respect to the set of standard natural numbers, which is itself an object of the model. In other words, the presence of (invertible) infinitesimals and infinite numbers would be perfectly detectable by an inhabitant of the model. And secondly, the characteristic property, perfectly identifiable within the model.“

7 Ausblick

Nicht nur die zuletzt von Bell präsentierte Gegenüberstellung der NSA und SIA soll verdeutlichen, dass in diesem Teilgebiet der Mathematik, das sich mit infinitesimalen Größen beschäftigt, ein Interesse bzw. eine Notwendigkeit besteht, ihre methodische Grundlegung mit einem Rückgriff auf ein philosophisches System zu kombinieren. Es hat sich gezeigt, dass die Werke Cohens, die zu seiner Lebzeit dafür wenig Beachtung bekamen, nun wieder in den Diskurs aufgenommen werden können und im Falle von Bell auch aufgenommen wurden. Für das „dynamische System" Cohens und seine „Werdefakta" heißt dies wiederum, dass jenes „auf die Kompatibilität" mit den neuesten Errungenschaften dieser einzelnen Wissenschaften hin „geprüft werden muss" und gegebenenfalls modifiziert werden muss (vgl. Kap. 1.5). Dieser Dialog der Philosophie und der Einzelwissenschaft ist bei Cohen unabdinglich, denn: „Neue Probleme werden neue Voraussetzungen erforderlich machen." [Cohen 1914, 396]

Wie Cohens Philosophie keinen Abschluss finden kann und darf, so soll dieses Schlusskapitel nicht ‚vollenden', sondern es soll in einem ‚Ausblick' auf drei Punkte eingegangen werden, die auf die Möglichkeiten und Schwierigkeiten besagten Dialoges hinweisen.

Zuerst sei eine Kritik P. Ehrlichs an Bells obiger Gegenüberstellung von NSA und SIA erwähnt [Ehrlich 2007, 362f.]: Mit einem Verweis auf P. Giordano (vgl. [Giordano 2004]), der eine alternative Kategorientheorie bereitstellt, die sich auch mit der klassischen Logik verbinden lässt, kommt Ehrlich zu folgendem Fazit: „ [It] indicate[s] how misleading Bell's claim is that non-zero nilpotent infinitesimals are ‚possible' in SIA, unlike in NSA, because whereas ‚[t]he logic of SIA is intuitionistic ... the logic of NSA is classical.'" Und verbindet damit folgende Kritik: „Bell fails to discuss many of the important ways that infinitesimals are employed in contemporary mathematics, there is a host of alternative contemporary mathematical theories of continua Bell likewise ignores."

Diese Kritik sollte aus zwei Gründen erwähnt werden. Zum einen, weil sie treffend auf eine mathematisch-philosophische Diskursproblematik hindeutet, die auch schon für Cohen maßgebend ist: Wie kann der Spagat geschafft werden, das Wesen der Mathematik als eine der Philosophie nahestehenden Wissenschaft in die Philosophie derart zu integrieren, dass die Mathematik nicht bloß eingegliedert und ihrer Eigenständigkeit beraubt wird. Gleichzeitig gilt es aber auch, den Geltungsbereich der Mathematik als Teilgebiet eines Systems von Wissenschaften, das sich in der Philosphie begründet, so zu formulieren, dass diese nicht isoliert und ausgegrenzt wird. Denn einerseits wird mancher Mathematiker bzw. Philosoph dazu verleitet, sich „sicher" zu sein, „daß die klassische Mathematik ein in sich geschlossenes, nach feststehenden, allen Mathematikern bekannten Regeln vor sich gehendes Verfahren involviert" [Neumann 1931, 116f.]. Andererseits zeigt sich in der Geschichte der Entwicklung der Mathematik eine ständige Abhängigkeit von anderen Wissenschaften, den Naturwissenschaften, der Philosophie, mit Einzug des Logizismus und Formalismus von den Wissenschaften der Logik und der Sprache.

Diese Problematik ist für Cohen insofern maßgebend, als dass er Kant „dafür tadelt, daß er Mathematik nicht als Methode der Naturwissenschaft – ‚als ob ihn an der Mathematik etwas anderes anginge, als ihr methodisches Verhältnis zur Naturwissenschaft‘[28] –, sondern als selbständige Wissenschaft behandelt. Verhängnisvoll sei insbesondere die darin sich ausdrückende ‚Souveränisierung der Anschauung neben und vor dem Denken‘ geworden“ von der Cohen auf Grund seiner Integration des „Prinzips der Infinitesimal-Methode“ in der „Logik der reinen Erkenntnis“ sich zu lösen versucht [Holzhey 1997, XI*].

Jene Schwierigkeit in der Grenzziehung zwischen Philosophie und Mathematik zeigt auch Ehrlich deutlich auf, indem er auf ein von Bell angesprochenes Problem einer philosophischen Grundlage, nämlich den Vorzug der intuitionistischen Logik, die, wie seine Einstellung zur SIA zeigt, mit einem intutionistischen ‚Weltbild‘ und somit einer bestimmten philosphischen Einstellung verbunden ist, eine innermathematische Entgegnung findet. Wie die Geschichte zeigt, ist das Problem des Infinitesimalen prädestiniert für derartige Auseinandersetzungen. Es findet sich kaum ein Problem, an dem der Streit um Geltungs- bzw. Gebietsansprüche zwischen den Wissenschaften der Philosophie und der Mathematik deutlicher zu erkennen sind, als das des Infinitesimalen. Dieser Streit führte zu Cohens *Inifnitesimalschrift* und war dann auch der Grund für die große Kritik an seinem Werk und zeigt, dass nicht nur seine Interpretation der Infinitesimal-Methode in Frage gestellt werden kann, sondern auch schon die Möglichkeit bzw. das Anrecht dieser Interpretation.

Zum anderen soll mit dieser Kritik auf das Interesse der vorliegenden Arbeit eingegangen werden. Hier sind die Thesen Cohens, insbesondere die seiner 1883 veröffentlichten Schrift zum „Prinzip der Infinitesimal-Methode und seiner Geschichte“ und der „Logik der reinen Erkenntnis“ diskutiert und es soll aufgezeigt werden, wie diese in Zusammenhang mit aktuellen Diskussionen im Grenzgebiet Philosophie und Mathematik gebracht werden (können). Dass dies für die „Infinitesimalschrift“ in Ansätzen schon geschehen ist, zeigt Bell (vgl. Kap. 6.4), der (in [Bell 2005]) auch einen Weg durch die Geschichte der Philosophie der Mathematik hin zu seiner Theorie der SIA beschreibt. Er wird dabei, zu diesem wissenschaftshistorisch wie inhaltlich nahezu ausufernden Themenkomplex um die Begriffe der Kontinuität und das Infinitesimale, mit folgendem Vorwurf konfrontiert: Bell „fails to discuss many of the important ways that infinitesimals are employed in contemporary mathematics“ [Ehrlich 2007, 363]. Deswegen sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass die Absicht der vorliegenden Arbeit keinesfalls darin besteht, ein in irgendwelcher Weise vollständiges Bild zur Geschichte der Philosophie der

[28] vgl. [Cohen 1896]

Mathematik wiederzugeben, wie auch schon zu Beginn von Kapitel 2.2 angemerkt wurde. Es geht vielmehr darum, der hier präsentierten Lesart der Position Cohens einen Raum in der aktuellen Diskussion aufzuzeigen und auf die wiedererstarkte Aktualität seiner Thesen zu verweisen.

Die dabei hauptsächlich ins Feld geführten drei Mathematiker Laugwitz, Robinson und Bell geben selbstverständlich nur ein spärliches Bild des aktuellen Forschungsdiskurses der Mathematik ab. Jedoch ließ sich anhand dieser drei namhaften und wegweisenden Wissenschaftler deutlich erkennen, dass einige, für die Philosophie Cohens zentralen Themengebiete neues Interesse erfahren. Diese drei genannten Mathematiker in Kapitel sechs wurden den drei großen Kritikern Cohens, nämlich Cantor, Frege und Russell des fünften Kapitels gegenübergestellt. Deren äußerst negative Bewertung - stellvertretend sei nochmals Russell erwähnt, der Cohens Ansatz als „mathematically useless", „unnecessary, erroneous, and self-contradictory" [Russell 1903, §§ 309, 324] bezeichnet - wird somit entkräftet und die Theorien Cohens in ein positives Licht gerückt.

Das Infinitesimale und damit auch die Rechtfertigung für den Gebrauch infinitesimaler Größen in der Mathematik spielt im Gegensatz zur Lebzeit Cohens nun wieder eine verstärkte Rolle in der (Philosophie der) Mathematik. Cohen versucht seine Interpretation Kants mit den Begründern der Infinitesimal-Mathematik, nämlich Leibniz und Newton, zu einer Erkenntnistheorie zu verbinden, die mit der Vorstellung eigentlicher unendlichkleiner Größen hantiert. Mit den Infinitesimalien wurde damals aber etwas Metaphysisches oder Naturfremdes und Subjektives verbunden (vgl. Kap. 1.2), das durch die Epsilontik verhindert werden sollte. Der Einfluss der Metaphysik bzw. Philosophie sollte deshalb minimalisiert werden, der Gedanke einer eigentlichen unendlichkleinen Größe, wie er noch bei Newton und Leibniz zu finden ist, verbannt werden. Nun aber wird sowohl ein „Verfall dieser Denkweisen" [Laugwitz 1978, 10] als auch „[the] neglect of philosophical issues" im Wissenschaftsfeld der Mathematik beklagt [Bishop 1975, 507]. Angesichts dieses Eindrucks drängt sich eine Rückbesinnung auf die Position Cohens und der Marburger Schule geradezu auf.

Diese Rückbesinnung findet nicht nur in der Anmerkung Bells in seinem Werk „The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy" ([Bell 2005, 276 Anm. 714]) zur SIA statt. Eine explizite Bezugnahme auf Cohen sowie die Marburger Schule und die NSA findet sich schon 1994 bei J. Petitot (vgl. [Petitot 1994]), des Weiteren bei Mormann und Katz, die sich in Hinblick auf die NSA Robinsons für den Neukantianismus und deren Einbeziehung in die Mathematik aussprechen: „[T]he Marburg school developed a complex array of sophisticated, albeit not always crystal-clear, positions that sought to make sense of both infinitesimals and limit concepts. With the hindsight enabled by Robinson's non-standard analysis, the Marburg stance seems wiser than that of Russell, Carnap, and Qui-ne who unconditionally accepted the orthodox epsilontic doctrine, along with its simplistic philosophical ramifications stemming from a strawman characterisation of infinitesimals as a pseudo-concept“ [Mormann 2013, 3]!

Den zweiten Punkt des Ausblicks dreht sich um einen weiteren, zentralen Streitpunkt in der Mathematik, der so alt ist wie der Begriff des Unendlichen, also die Wissenschaft der Mathematik selbst: die Überwindung des Problems des Grenzübertritts von – in den Worten Cohens – extensiven Größen hin zu den intensiven und umgekehrt. Ebenso könnte von dem Grenzübertritt der quantitativen hin zu den qualitativen Größen gesprochen werden, der Standard- hin zu den Nonstandard-Zahlen oder - im geometrischen Sinn und in den Worten Laugwitz' – von den empirischen hin zu den theoretischen Punkten und umgekehrt (vgl. Kap. 6.2). Oder man könnte sich in Anlehnung an Leibniz' Beispiel der unendlich vielen unendlichkleinen Wellenschläge die Frage stellen: „Wie ist es denkbar, daß aus einer Summe von Nichtgeräuschen ein Geräusch wird? [...] Wie kann eine Summe von Nullen eine Eins ergeben? Der Verstand vermag auch hier nicht zu begreifen, was die Sinneswahrnehmung darbietet.“[29] Als eine mögliche Antwort der Mathematik, die diese Paradoxien „durchschaubar“ macht [Laugwitz 1986, 229], wurde die Adjunktion infinitesimaler Größen dargelegt. Für die Klärung dieser Form eines Grenzübertritts scheint nun nicht mehr nur Cohen das Denken und Rechnen mit Infinitesimalien zu Rate zu ziehen.

Das Infinitesimale löst damit dieses Problem jedoch nicht auf, sondern tritt als Vermittler auf. Man könnte dazu entgegnen, dass die Mathematik sich dann doch lieber nur mit extensiven Größen und Grenzwertprozessen beschäftigen sollte und somit auch auf das Infinitesimale verzichtet werden könnte. Aber auch die Grenzwertanalysis kann sich diesem Problem des Grenzübertritts nicht entziehen. Sie muss das plötzliche Verschwinden von Größen in ihrer Rechnung verantworten. Ein Epsilon, das im unendlichen Prozeß der Null angenähert wird, erreicht diesen Grenzwert jedoch nicht, wird also nie ganz Null - verschwindet aber aus der Rechnung. Damit müssen dann sogar „ontologisch[e] Entscheidungen über die Seinsweise der mathematischen Objekte im allgemeinen und des Unendlichen im besonderen getroffen werden“ [Laugwitz 1986, 101].

So scheint es zweifelhaft zu behaupten, dass „Weierstraß und Bolzano“ dieses Problem des Grenzübertritts „beherrschten“ [Seidengart 1994, 444]. Es scheint eher so, dass dieses tiefgründige Problem nur schwer in den Griff zu bekommen ist und jede Möglichkeit um ein besseres Verständnis dafür dankend angenommen werden sollte. Zuletzt in Kapitel 6.4 sollte zudem deutlich werden, dass die Mathematik nach einem besseren Verständins ringt und dass die Grenzwertanalysis keine befriedigendere Lösung im Bezug auf den Grenzübergang anbieten kann als die NSA

[29][Kranz 1950, 67]: Es sei angemerkt, dass Kranz von einer äuquivalenten Fragestellung eines einzelnen fallenden Hirsekorns und eines fallenden Sacks Hirse ausgeht.

oder SIA. Trotz gewisser Schwächen in Bezug auf die Philosophie der Mathematik in Cohens Werken ist es m.E. nicht der Fall, dass „Cohen das Thema des mathematischen Grenzübergang nicht gut durchdacht“ hätte [Seidengart 1994, 444], nur weil er den Grenzwertanalytikern vehement widerspricht.

Es ist sicherlich richtig, dass man Cohen – vor allem in Betrachtung der Fakta der Wissenschaft und damit folgt Punkt drei – eine Überschätzung der Infinitesimal-Methode ankreiden kann. Betrachtet man den Gang der Wissenschaft ‚Mathematik‘, der durch die Erfolge der Grenzwertanalysis geprägt ist, so sieht es eher danach aus, dass Cohen Anfang des 20. Jahrhunderts eine Philosophie präsentiert, die sich besagten Fakta entgegenstellt. Das Reale soll bei Cohen nämlich aus (infinitesimalen) Einheiten entstehen - nicht nur in der bloßen Möglichkeit der Grenzwerte. Jedoch hat erst seit Mitte des 20. Jahrhunderts die intensive Größe mit Erfolg Einzug in die Mathematik gefunden. An Laugwitz' Erklärung zum Paradoxon „Achilles und die Schildkröte“ lässt sich dann auch erkennen, dass die intensive Größe genutzt werden kann, um im oben beschriebenen Grenzübergang zu vermitteln. Dabei hat Cohen, wie Vuillemin schreibt, „begriffen, daß man die Irreduktibilität der Wahrnehmung nur dann durch das Mittel des Kalküls retten kann, wenn man den Grenzwerten den Status von wirklichen Teilen zuschreibt. Denn in diesem Fall unterscheiden sich in der Tat die summierten Einheiten von den endlichen Einheiten der extensiven Größen dadurch, daß sie unendlich klein sind und das Integral die Summe einer unendlichen Anzahl solcher Elemente erfordert“ [Vuillemin 1994, 162], was sich auch in der NSA und SIA widerspiegelt. Dies bringt es aber logischerweise mit sich, dass man dann „mit den mathematischen Schwierigkeiten der unendlichen kleinen Größen zu tun hat“, und dass dies aber nur mit einem „recht anachronistischem Rückgriff auf die non-standard Analyse“ lösbar wäre. [Vuillemin 1994, 162 Anm. 10] Diese nicht standardisierte Handhabung der Infinitesimalien wird „mathematisch noch unterschätzt. Speziell wird ihre [sc. Nonstandard-Zahlen] Bedeutung für die Auffassung fundamentaler Begriff nicht oder zögerlich anerkannt.“ [Bedürftig 2014, 421]

Auch wenn einige Kritik an Cohen nun entkräftet ist, so muss hier trotzdem im Hinblick auf das „dynamische System“ und das Messen mit den Einzelwissenschaften auf die (noch) geringe Relevanz dieses Teilbereichs der Mathematik hingewiesen werden.

Hierbei drängt sich folgendes Fazit auf: Hermann Cohens Philosophie, die den Begriff der infinitesimalen Größe zentriert und sich am Faktum der Wissenschaft misst, steht und fällt mit dem Erfolg des noch jungen Faktums der Wissenschaft, das den Teilbereich der Mathematik ausmacht, in dem sich die NSA und SIA einordnen lassen.

8 Literaturverzeichnis

Aristoteles (1995) „Physik. Vorlesung über die Natur“ in Philosophische Schriften in sechs Bänden, Bd. 6 (203b), Hamburg.

Aristoteles (2000) „De generatione animalium“, Buch V, Trier.

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2015) „Philosophie der Mathematik“, 3. Aufl., Berlin/Boston.

Becker, O. (1954) „Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung“, Freiburg/München.

Bell, J. L. (1998) „A Primer of Infinitesimal Analysis“, Cambridge: Cambridge University Press.

Bell, J. L. (2001) „The Continuum in smooth infinitesimal analysis“, in: „Reuniting the Antipodes— Constructive and Nonstandard Views of the Continuum“, ed. by Schuster, P., Berger, U. and Osswald, H., Dordrecht, S. 19–24.

Bell, J. L. (2005) „The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy“, Polimetrica, Mailand.

Bell, J. L. (2008) „A Primer of Infinitesimal Analysis“, 2nd ed., New York: Cambridge University Press.

Bernstein, F. (1904_1) „Über die Begründung der Differentialrechnung mit Hilfe der unendlichkleinen Größen.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 241–246

Bernstein, F. (1904_2) „Erklärung zu dem Aufsatz von K. Geissler: ‚Zur Auffassung der unendlichkleinen Größen.‘.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 346

Bishop, E. (1975) „The Crisis in Contemporary Mathematics“, „Proceedings of the American Academy Workshop in the Evolution of Modern Mathematics“ in: Historia Mathematica 2, S. 505–517.

Bolzano, B. (1804) „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie“, Prag.

Boyer, C. B. (1959) „The History of the Calculus and its Conceptual Development“, Dover.

Brouwer, L. E. J. (1912) „Intuitionisme en formalisme“, Groningen.

Brouwer, L. E. J. (1923) „Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschloßenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie“, in: Journal für reine und angewandte Mathematik 154, S. 1–8.

Cantor, G. (1884) „Rezension von: H. Cohen, ‚Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte‘“, in: Deutsche Literaturzeitung, 5. Jg., Nr. 8 (23. Februar), Berlin, Sp. 266–268.

Cantor, G. (1932) „Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts“, hrsg. v. Zermelo, E., Berlin.

Carnap, R. (1931) „Die logizistische Grundlegung der Mathematik“, Erkenntnis 2, No 1, S. 91–105.

Carnot, L. N. (1797) „Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal“, 4. veränderte Aufl. 1860, Paris.

Cassirer, E. (1912) „Hermann Cohen und die Erneuerung der kantischen Philosophie“, in „Kant-Studien“, Bd. 17, S. 252–274, Berlin.

Cohen, H. (1878) „Platons Ideenlehre und die Mathematik“, abgedruckt in: „Schriften zur Philosophie und Zeitgeschichte“, hrsg. v. A. Görland und E. Cassirer, Bd. 1, 336–366 (danach zitiert), Berlin 1928.

Cohen, H. (1883) „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“

Cohen, H. (1885) „Kants Theorie der Erfahrung“, 2. neubearbeitete Auflage, Berlin.

Cohen, H. (1896) „Einleitung mit kritischem Nachtrag“ zu F. A. Langes „Geschichte des Materialismus“, Leipzig, 1896, in dritter, erweiterter Bearbeitung 1914 in: Werke, Bd. 5, Teil II.

Cohen, H. (1914) „Logik der reinen Erkenntnis“ (System der Philosophie, Erster Teil), 2. Aufl., Berlin 1902, jetzt in: Cohen, H. : Werke, Bd. 6, Hildesheim/New York 1977.

Cohen, H. (1924) „Das soziale Ideal bei Platon und den Propheten“ in „Jüdische Schriften“, Bd. 1, hrsg. v. B. Strauß, Berlin.

Cohn, J. (1896) „Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant.“ (Unveränderter fotomechanischer Nachdruck Darmstadt: WBG 1960.), Leipzig.

Cournot, A. A. (1845) „Elementarlehrbuch der Theorie der Funktionen oder der Infinitesimalanalysis.“ übers. v. C. G. Schnuse, Darmstadt.

Dauben, J. W. (1988) „Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics“, in: „History and Philosophy of Modern Mathematics“, ed. by Aspray, W. and Kitcher, P., Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. XI, S. 177–200.

Deuber-Mankowsky, A. (2013) „Einleitung“ in: H. Cohen „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“, Turia u. Kant, Wien, S. 7–70.

Dirac, P. (1947) „The Principles of Quantum Mechanics“, 3. Aufl., Oxford.

Edel, G. (2010) „Von der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik“, 2. (vollständig überarbeitete) Aufl., Waldkirch.

Ehrlich, P. (2007) „The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy by John L. Bell“, in: „The Bulletin of Symbolic Logic“, Vol. 13.3, S. 361–63.

Flach, W. (1968) „Einleitung“ in: H. Cohen „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“, Suhrkamp, Frankfurt a. M., 11–38.

Frege, G. (1879) „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“, Halle.

Frege, G. (1884) „Grundlagen der Arithmetik – Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl“, Breslau.

Frege, G. (1885_1) „Rezension von: H. Cohen, ‚Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte‘, in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 87, S. 324–329.

Frege, G. (1885_2) „Über formale Theorien der Arithmetik“, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1885, Suppl. z. JZN, 19, N. F. Bd. 12 1885/86.

Frege, G. (1976) „Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel“, hrsg. von H. Hermes, F. Kambartel und F. Kaulbach, Hamburg.

Galilei G. (1623) „Il Saggiatore“, rist. anast. Roma.

Geissler, K. (1904_1) „Grundgedanken einer übereuklidischen Geometrie durch die Weitenbehaftungen des Unendlichen.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 233–240.

Geissler, K. (1904_2) „Zur Auffassung der unendlichkleinen Größen.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 341–345.

Geissler, K. (1904_3) „Berichtigung zur Erklärung von Herrn F. Bernstein in H. 6. S. 346.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 486f.

Geissler, K. (1904_4) „Zusatz von K. Geissler.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 478f.

Gerhardt, C. I. (1855) „Die Geschichte der höheren Analysis. Erste Abteilung. Die Entdeckung der höheren Analysis“, Halle.

Giordano, P. (2004) „Nilpotent infinitesimals and synthetic differential geometry in classical logic“ in „Reuniting the antipodes - constructive and nonstandard views of the continuum“, Kluwer Acad. Publ., 2001, S. 75–92 & in: „Infinitesimal differential geometry“, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, New Series, vol. 73 (2004), no. 2, S. 235–278.

Giovanelli, M. (2016) „Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode*: The History of an Unsuccessful Book“, Studies in History and Philosophy of Science Part A, Vol. 58, 9–23.

Gödel, K. (1931) „Über formal entscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“, in: Monatshefte für Mathematik und Physik 38, S. 173–198.

Hahn, H. (1907), „Über die nichtarchimedischen Größensysteme.“, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse (Wien. Ber.), 116: S. 601–655.

Heijenoort, J. v. (Hrsg.) (1967): „From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931“, Cambridge, Massachusetts.

Heyting, A. (1931) „Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik“, Erkenntnis 2, No 1, S. 106–115.

Hilbert, D. (1917) „Axiomatisches Denken“, Mathematische Annalen 78, S. 405–415.

Hilbert, D. (1925) „Über das Unendliche“, Mathematische Annalen 95, S. 161–190.

Hilbert, D. (1927) „Die Grundlagen der Mathematik“, Abh. aus dem mathematischen Seminar der Hamburger Universität 6, S. 65–85.

Hilbert, D. (1929) „Probleme der Grundlegung der Mathematik“, Mathematische Annalen 102, S. 1–9.

Holzhey, H. (1997) „Einleitung des Herausgebers“, in [Cohen 1914], S. VII*–XXV*.

Kabitz W. (1909) *Die Philosophie des jungen Leibniz*, 2. Aufl., Heidelberg.

Kant, I. (1746) „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte“, Königsberg.

Kant, I. (1781) „Kritik der reinen Vernunft“, hg. von R. Schmidt, Hamburg 21965, durchgesehener Nachdruck 1976 (zit.: KrV, nach der Paginierung der Originalausgaben von 1781 = A und 1787 = B).

Kant, I. (1905) „Versuch, den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen“, in „Kants gesammelte Schriften“ (Bd. II: Vorkritische Schriften II 1757-1777), Berlin.

Klein, F. (1904) „Bemerkung des Herausgebers.“ in: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 479f.

Kowalewski, G. (1996) „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“, Bd. 162, „Über die Analysis des Unendlichen“ von Leibniz, G. W. & Abhandlung über die Quadratur der Kurven“ von Newton, I., übers. mit Anm. und hg. v. Kowalewski, G., 2. Aufl., Hallstadt.

Kranz, W. (1950) „Die griechische Philosophie“, Wiesbaden.

Laugwitz, D. & Schmieden, C. (1958) „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Math. Zeitschrift 69, S. 1–39.

Laugwitz, D. (1978) „Infinitesimalkalkül: Kontinuum und Zahlen – eine Einführung in die Non-Standard-Analysis.“ BI Hochschultaschenbuch

Laugwitz, D. (1986) „Zahlen und Kontinuum – eine Einführung in die Infinitesimalmathematik.“ Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Leibniz, G. W. (1840) „Opera philosophica quae exstant Latina Gallica Germanica Omnia.“, hrsg. v. J.E. Erdmann, Berlin.

Leibniz, G. W. (1962) „Mathematische Schriften.“, hrsg. v. C I. Gerhardt., Hildesheim (Fotomech. Nachdr. d. Ausgabe Halle 1859).

Lembeck, K.-H. (1994) „Platon in Marburg. Platonrezeption und Philosophiegeschichtsphilosophie bei Cohen und Natorp:.“ in Studien Materialien zum Neukantianismus hg. v. Holzhey, H. und Orth, E. W., Bd. 3, Würzburg.

Lübbe, H. (1962) „Einsichten. Gerhard Krüger zum 60. Geburtstag“, Frankfurt a. M., S. 204-229.

Marx, W. (1975) „Cassirers Symboltheorie als Entwicklung und Kritik der Neukantianischen Grundlagen einer Theorie des Denkens und Erkennens. Uberlegungen zur Struktur transzendentaler Logik als Wissenschaftstheorie“, in: Archiv für Geschichte der Philosophie 57, 188–206 u. 304–339.

Mormann, Thomas & Mikhail Katz (2013) „Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science.“ in: „The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science“, Bd. 3 (2), S. 236–280.

Natorp, P. (1887) „Über objektive und subjektive Begründung der Erkenntnis“ in: Philosophische Monatshefte 23, 257–286; Reprint in: Erkenntnistheorie und Logik im Neukantianismus, eine Textauswahl, hg. von W. Flach und H. Holzhey, Hildesheim 1979, 139–168.

Natorp, P. (1910) „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften“, Leipzig/ Berlin.

Newton, I. (1736) „The method of fluxions and infinite series: with its application to the geometry of curve-lines“, ptd. by H. Woodfall, London.

Newton, I. (1744) „Opuscula mathematica, philosophica et philologica“, hrsg. v. Joh. Castillioneus, Lausanne u. Genf.

Newton, I. (1963) „Mathematische Prinzipien der Naturlehre“, übers. u. hg. v. J. Ph. Wolfers., Darmstadt.

Newton, I. (1964) „Opera quae exstant omnia“, Stuttgart-Bad Canstatt.

Neumann, J. v. (1931) „Die formalistische Grundlegung der Mathematik“, Erkenntnis 2, No 1, S. 116–121.

Odebrecht, R. (1906) „Hermann Cohens Philosophie der Mathematik“ (Diss.), Berlin.

Petitot, J. (1994) „Esthétique transcendentale et physique mathématique“, in „Neukantianismus. Perspektiven und Probleme“ hg. v. Holzhey, H. und Orth, W. O., Würzburg, Bd. 1, S. 185–213.

Robinson, A. (1966) „Non-Standard Analysis.“, 2. Auf., Amsterdam.

Robinson, A. (1973) „Numbers—What Are They and What Are They Good For?“, in: Yale Scientific Magazine 47: S. 14–16.

Russell, B. (1903) „The Principles of Mathematics“, Cambridge University Press.

Schulthess, P. (1984) „Einleitung“ in: H. Cohen „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte“ in [Cohen 1883] S. 7*–46*.

Seidengart, J. (1994) „Die philosophische Bedeutung des Unendlichkeitsbegirffs in Ernst Cassirers Neukantianismus“, in „Neukantianismus. Perspektiven und Probleme“ hg. v. Holzhey, H. und Orth, W. O., Würzburg, Bd. 1, S. 442–456.

Stadler, A. (1880) „Das Gesetz der Stetigkeit bei Kant“, in Philosophische Monatshefte XVI.

Störig, H. J. (1981) „Weltgeschichte der Philosophie“, durchg. und erg. Neuausgabe, Stuttgart.

Strong, E. W. (1957) „Mathematical reasoning and its objects“, George Berkeley Lectures, University of California Publications, S. 65–88.

Veit, B. (2012) „Das Paris-Harrington Theorem“, Diplomarbeit an der Universität Würzburg.

Vuillemin, J. (1994) „Die Möglichkeit der Erfahrung im Licht der zeitgenössischen Physik“, in „Neukantianismus. Perspektiven und Probleme“ hg. v. Holzhey, H. und Orth, W. O., Würzburg, Bd. 1, S. 159–173.

Weyl, H. (1928) „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“, München.

Whitehead, A. N. & Russel, B. (1910) „Principia Mathematica“, vol. I, Cambridge.

Windelband, W. (1883) „Präludien“, Bd. 1, Tübingen 1915.

Wittgenstein, L. „Tractatus Logico“

Wußing, H. (2008) „6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 2. Von Euler bis zur Gegenwart“, hrsg.v. H.W. Alten, A. Djafari Naini, H. Wesenmüller-Kock, 1. Auflage, Berlin.

Zellini, P. (2010) „Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit“, übers. v. Heinemann, E., München.