Differentialgleichungen

in

Frécheträumen

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von

Gunther Dirr

aus

Ochsenfurt

Würzburg 2001

Eingereicht am:

bei der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

1. Gutachter: Prof. Dr. Uwe Helmke

2. Gutachter: Prof. Dr. Dietrich Flockerzi

Tag der mündlichen Prüfung:

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl II des Mathematischen Instituts der Universität Würzburg unter der Betreuung von Prof. Dr. U. Helmke.

Bei ihm möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich für seine nahezu unendliche Geduld, was die Abgabe meiner Arbeit anbelangte, bedanken. Auch für die große Freiheit, die er mir bei der Wahl des Themas gelassen hat, und für sein Vertrauen in mein selbständiges Arbeiten, bin ich ihm sehr dankbar. Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. D. Flockerzi, der sich sehr kurzfristig und unkompliziert als Zweitgutachter zur Verfügung gestellt hat. Auch meinen Kollegen und Mitarbeitern am Institut bin ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre zu Dank verpflichtet. Namentlich möchte ich hier insbesondere Knut Hüper, Martin Kleinsteuber, Jochen Trumpf, Richard Greiner und Oliver Roth nennen, die sich Zeit nahmen für hilfreiche Diskussionen und mich beim Korrekturlesen tatkräftig unterstützten. Auch unserer lieben Sekretärin Ingrid Böhm gilt mein herzlicher Dank für ihren seelischen und moralischen Beistand und nicht zu vergessen für die „Hektoliter“ Kaffee, die sie mir „zubereitet“ hat. Zum Schluss möchte ich mich noch bei der vielleicht wichtigsten Person — bei meiner Freundin Daniela — ganz herzlich bedanken, denn ohne ihr Verständnis und ihre Rücksichtnahme, ohne ihr Vertrauen in mich und ihre Sorge um mich wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Für meinen Bruder

Albrecht

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gewöhnliche Differentialgleichungen in unendlich-dimensionalen Räumen stehen in enger Beziehung zu partiellen Differentialgleichungen. Diese können nämlich oft als „gewöhnliche“ Differentialgleichungen in einem geeigneten unendlich-dimensionalen Funktionenraum interpretiert werden. Im Gegensatz zur endlich-dimensionalen Theorie gelten jedoch die bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze nicht mehr. So ist z.B. der Existenzsatz von Cauchy/Peano in Banachräumen falsch, d.h., das Anfangswertproblem

$$\dot{x} \;=\; f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

besitzt im Allgemeinen für stetiges f keine Lösung mehr (siehe [Dei85, Ch. 2, §8, Ex. 11]). Der Satz von Picard/Lindelöf [CL55, Ch. 1,Thm. 3.1] behält zwar in Banachräumen seine Gültigkeit, ist aber für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen ungeeignet, da die zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen in Banachräumen *nicht* mehr Lipschitz-stetige, sondern nur noch abgeschlossene und dicht-definierte Operatoren f liefern. Somit führt die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen im Kontext der Theorie der Banachräume zwangsläufig auf die Untersuchung stark *stetiger* Halbgruppen. Ferner greift die Theorie zunächst nur für sogenannte schwache/milde Lösungen, und daher muß die Existenz klassischer/glatter Lösungen durch zusätzliche Regularitätssätze gesichert werden.
Ein völlig anderer Zugang zur Existenz klassischer/glatter Lösungen besteht darin, die Regularität des Problems von Anfang an in die Definition des Lösungsraums zu packen. Dieser Ansatz führt aber zwangsläufig weg von Banachräumen hin zu Frécheträumen. Dies liegt daran, daß Räume von C^∞-Funktionen in natürlicher Weise die Topologie eines Fréchetraums tragen, aber keine Banachräume sind. Trotz der größeren Komplexität von Fréchetträumen bietet dieser Zugang aber konzeptionelle Vorteile, da er ohne nachträgliche Regularitätsuntersuchungen auskommt.
Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine derartige Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen in Fréchetträumen zu entwickeln. Im Mittelpunkt steht dabei die Formulierung und der Beweis eines allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für *nichtlineare* Anfangswertprobleme [5.2.2 und 5.2.3]. Bevor wir näher auf die Schwierigkeiten eingehen, die bei der Übertragung der endlich-dimensionalen Theorie auf Fréchetträume entstehen, wollen wir zunächst unsere Vorgehensweise am

Beispiel der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u \;=\; \partial_x u, \quad u(0,x) = u_0(x) \tag{2}$$

erklären. Die Startwerte dieser Gleichung u_0 seien Elemente eines geeigneten Fréchetraums E, z.B. $E = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. „Geeignet“ soll heißen, dass der Differentialoperator $u \mapsto Au = u'$ auf E eine für die Lösungstheorie „gutartige“ Abbildung darstellt. Dann können wir eine Lösung $u(t,x)$ als Kurve $t \mapsto u(t,\cdot)$ in E auffassen und somit (2) in die abstrakte Form eines Anfangswertproblems

$$\dot{u} \;=\; Au, \quad u(0) = u_0 \tag{3}$$

bringen. Wir werden zeigen, dass die Klasse der sogenannten zahmen Frécheträume „geeignet“ im obigen Sinne ist. Man beachte jedoch, dass die partielle Differentialgleichung (2) und die abstrakte gewöhnliche Differentialgleichung (3) im Allgemeinen *nicht* äquivalent sind, da Lösungen der ersteren z.B. für $t > 0$ an Regularität verlieren und somit aus dem Raum E „herauslaufen“ können.

Neben dem systematischen Einbau von Regularitätseigenschaften bietet unser Zugang insbesondere bei nichtlinearen Gleichungen auch beweistechnische Vorteile:

(a) Algebraische Operationen, wie z.B. Addition und Komposition von Abbildungen, können unbeschränkt ausgeführt werden, da die Problematik, einen geeigneten Definitionsbereich zu finden, die bei dicht-definierten Operatoren immer auftritt, verschwindet.

(b) Die höhere Regularität der Operatoren auf der rechten Seite von (1) erlaubt es, problemlos Ableitungen zu bestimmen und damit gerade bei nichtlinearen Gleichungen zusätzliche Informationen zu gewinnen.

Wir gehen nun näher auf die Beweisideen, die hinter den zentralen Sätzen 5.2.2 und 5.2.3 unserer Arbeit stehen, und auf die mit ihnen verbundenen Schwierigkeiten ein. Unser Ansatz besteht darin, die Lösung eines Anfangswertproblems durch eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zu erhalten. Diese Vorgehensweise ist keineswegs neu und liefert bei gewöhnlichen Differentialgleichungen in endlich-dimensionalen Räumen einen zum Iterationsverfahren von Picard/Lindelöf alternativen Zugang zu den bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätzen [siehe z.B. [Zei86] oder [CH82]]. In Frécheträumen stoßen wir jedoch auf die Schwierigkeit, dass der Satz über implizite Funktionen im Allgemeinen nicht gilt [siehe z.B. [Ham82, Part I, §5.5] oder Bemerkung 5.1.3(c)]. Die Lösung des Problems besteht darin, die nichtlineare Theorie auf die Klasse der *zahmen* Frécheträume zu beschränken, denn in ihnen gilt der Satz von Nash/Moser [siehe Satz 5.1.2]. Dieser bzw. der daraus folgende Satz über implizite Funktionen dient uns als adäquater Ersatz für den klassischen Satz über implizite Funktionen. Eine weitere Schwierigkeit liegt jedoch

darin, dass beim Satz von Nash/Moser die Invertierbarkeit der Linearisierung auf einer ganzen Umgebung gefordert ist. Will man daher den Satz von Nash/Moser wie beabsichtigt auf Differentialgleichungen anwenden, so muss man die Lösbarkeit gewisser linearer, zeitabhängiger Differentialgleichungen in E sichern.
Kapitel 1 und 2 haben grundlegenden Charakter und behandeln elementare Definitionen und Aussagen zur Differential- und Integralrechnung in Fréchetträumen. Als Vorbereitung auf die Untersuchung zeitvarianter Systeme behandeln wir in Kapitel 3 die Theorie linearer, *zeitunabhängiger* Gleichungen, genauer gesagt die zugehörige Halbgruppentheorie auf Fréchträumen. Viele der dort erwähnten Ergebnisse sind zwar nicht neu, aber in der Literatur nur für stark stetige und nicht für stark *differenzierbare* Halbgruppen formuliert. Da die Aussagen über stark differenzierbare Halbgruppen für unsere späteren Sätze eine tragende Rolle spielen sind die Beweise, obwohl sie im wesentlichen parallel zu denen von Hille/Yosida und Lumer/Phillips über stark stetige Halbgruppen verlaufen, vollständig ausgeführt. Die Notwendigkeit Halbgruppen in Fréchträumen zu untersuchen mag zunächst überraschen, da wir es mit stetigen linearen und nicht mit abgeschlossenen dicht-definierten Operatoren zu tun haben. Dies legt die Idee nahe, die zugehörigen Halbgruppen durch ihre Exponentialreihe zu berechnen. Jedoch zeigen schon einfache Beispiele, dass eine derartige Konstruktion fehlschlägt, da die Reihe nicht konvergiert [vgl. Beispiel 3.2.2]. Daher kommen andere Konstruktionsverfahren, wie z.B. Yosida-Approximationen oder Laplace-Transformationen zur Anwendung. Ferner zeigt Gleichung (2), dass lineare Anfangswertprobleme in Fréchträumen im Allgemeinen keine oder keine eindeutige Lösung besitzen, denn für die Wahl $E = \big\{u \in \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big) \bigm| u^{(n)}(0) = u^{(n)}(1) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\big\}$ hat (2) für „fast alle“ Startwerte keine Lösung und für $E = \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ ist (2) nicht mehr eindeutig lösbar.
Die wesentlich neuen Ergebnisse befinden sich in Kapitel 4 und 5. In Kapitel 4 untersuchen wir lineare *zeitabhängige* Gleichungen, deren eindeutige Lösbarkeit für die spätere Anwendung des Satzes von Nash/Moser entscheidend ist. Im Mittelpunkt stehen dabei die Sätze 4.2.1 und 4.2.2. Diese übertragen zwei bekannte Ergebnisse über abgeschlossene dicht-definierte Operatoren in Banachräumen auf den Fréchetraumfall, [siehe [Paz83, Ch. 5, Thm. 3.1, Thm. 6.1]]. Eine zu Satz 4.2.1 ähnliche Version findet man auch in [Wen85]. Satz 4.2.2 scheint jedoch neu zu sein. Unser Beweis orientiert sich an einer Konstruktion in [Tan59].
Anschließend kommen wir in Kapitel 5 zum *nichtlinearen* Teil unserer Theorie. In Abschnitt 5.1 referieren wir zunächst die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften zahmer Fréchträume und zitieren den Satz von Nash/Moser sowie den entsprechenden Satz über implizite Funktionen [vgl. [Ham82, Part I, Part II]]. In Abschnitt 5.2 stellen wir die zentralen Ergebnisse unserer Arbeit vor. Wir zeigen zunächst Satz 5.2.1, der nur der besseren Strukturierung der eigentlichen Resultate (Sätze 5.2.2 und 5.2.3) dient. Satz 5.2.2 behandelt den sogenannten *hyperbolischen* Fall, der wegen späterer Anwendungen auf hyperbolische partielle Differentialgleichungen so genannt wird. Eine dieser Anwendungen wird in Kapitel 6 ausführlicher

behandelt. Für nichtlineare partielle Differentialgleichungen der Form

$$\partial_t u = f(t, x, u, \partial_x u), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

wird unter schwachen Zusatzbedingungen ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen im Raum $\mathrm{H}_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ gezeigt. Die Methode lässt sich aber auch auf andere Typen partieller Differentialgleichungen, wie z.B. parabolische Gleichungen anwenden. Wir beweisen dazu den für den *parabolischen Fall* wichtigen Satz 5.2.3, führen aber keine konkrete Anwendung mehr aus.
Mit den erzielten Ergebnissen kann man auch problemlos Lösungssätze für partielle Differentialgleichungen auf kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand erhalten. Neue Schwierigkeiten entstehen jedoch, wenn die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit einen Rand besitzt. Die Verallgemeinerung unserer Resultate in diese Richtung ist ein offenes Problem. Ferner bieten sich im Rahmen der nichtlinearen Kontrolltheorie partieller Differentialgleichungen insbesondere die Übertragung der Theorie auf Fréchetmannigfaltigkeiten sowie die Sätze von Frobenius [Jur97, Ch. 2, Thm. 4] und Sussman [Jur97, Ch. 2, Thm. 1] als Gegenstand zukünftiger Untersuchungen an.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu der uns bekannten Literatur über *nichtlineare* Anfangswertprobleme in Frécheträumen, die relevante Ergebnisse für die Modellierung partieller Differentialgleichungen enthält. Diese beschränkt sich auf einige wenige Arbeiten. So befinden sich in dem Übersichtsartikel von [LS94] zwar eine Unmenge an Sätzen und Resultaten, jedoch sind die meisten entweder nur für lineare Gleichungen geeignet oder sie enthalten eine Lipschitz-artige Bedingung, die sie von der Anwendung auf partielle Differentialgleichungen ausschließen. In den Arbeiten [Lem86] und [Her92] von Lemmert bzw. Herzog findet man folgendes Ergebnis:

> *Let* $f : [0, T] \times F \to F$ *be continuous with* $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$, $(t, x), (t, y) \in [0, T] \times F$ *for a monotone row-finite matrix* L *with at most countable spectrum. Then problem* $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$, $u(0) = u_0$ *is uniquely solvable on* $[0, T]$.

Problematisch dabei erscheint uns die Bedingung, dass L höchstens abzählbares Spektrum besitzen darf, denn schon einfache Beispiele wie Gleichung (2) führen zu Matrizen L, die diese Bedingung nicht erfüllen. Insbesondere kann es passieren, dass ein Operator auf verschiedenen Räumen betrachtet, jeweils die gleiche Matrix L liefert. Somit ist die Matrix L allein ungeeignet, um die Lösbarkeit des Anfangswertproblems (1) zu untersuchen. Abschliessend seien noch die Arbeiten [Mos66a, Mos66b] und [Ham82] von Moser und Hamilton zu nennen. In [Mos66a, Mos66b] werden zwar Lösungen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen mittels *zahmer* Abschätzungen garantiert, jedoch werden keine Anfangswertprobleme, sonderen „reine Gleichungen“ untersucht, d.h., es existiert keine ausgezeichnete Variable t. Bei der Arbeit [Ham82] von Hamilton ist der gleiche Einwand möglich, bis auf eine Stelle [Part III, Example 2.2.1], an der ein Anfangswertproblem gelöst wird. Jedoch erscheint uns die dortige Vorgehensweise nicht sehr systematisch.

Kapitel 1

Funktionalanalytische Grundlagen

Kapitel 1 dient dazu, die Grundlagen aus der linearen Funktionalanalysis, die in der weiteren Arbeit benötigt werden, zusammenzustellen. Dabei verzichten wir durchgehend auf Beweise und verweisen auf die entsprechende Lehrbuchliteratur wie z.B. [Tre67], [Köt69], [Sch71], [Rud73], [Bou87], [MV92] u.a.

1.1 Fréchetträume

Definition 1.1.1. Sei E ein beliebiger reeller oder komplexer Vektorraum.

(a) Eine *Halbnorm* $\|\cdot\|$ *auf* E ist eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Für alle $x \in E$ gilt $\|x\| \geq 0$.

   (ii) Für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(b) Eine *Fundamentalsystem von Halbnorm* $\big(\|\cdot\|_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ *auf* E ist eine Familie von Halbnormen mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Für alle $x \in E \setminus \{0\}$ existiert ein $\alpha \in I$ mit $\|x\|_\alpha \neq 0$.

   (ii) Für alle $\alpha, \beta \in I$ existieren ein $\gamma \in I$ und $M \geq 0$ mit

$$\max\big\{\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta\big\} \leq M\|\cdot\|_\gamma.$$

Definition 1.1.2. Ein *lokal-konvexer Vektorraum* ist ein topologischer Vektorraum mit einer Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.

Satz 1.1.1. *(a) Jeder lokal-konvexe Vektorraum E besitzt ein Fundamentalsystem aus stetigen Halbnormen, das die Topologie von E erzeugt.*

(b) *Jedes Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ auf einem beliebigen reellen oder komplexen Vektorraum E erzeugt eine lokal-konvexe Topologie auf E, so dass die Mengen*
$$B_{r,\alpha} := \Big\{x \in E \;\Big|\; \|x\|_\alpha < r\Big\}, \quad \alpha \in I, \quad r > 0$$
eine Nullumgebungsbasis bilden.

Beweis: [Rud73, Ch. 1, Thm. 1.36, Thm. 1.37, Remark 1.38] ■

Konvention:
Sei E ein beliebiger lokal-konvexer Raum. Dann bezeichnen wir im Weiteren ein Fundamentalsystem auf E, das aus stetigen Halbnormen besteht und die Topologie von E erzeugt, als ein zu E *zugehöriges Fundamentalsystem.*

Definition 1.1.3. Sei E ein lokal-konvexer Raum und sei $\big(\|\cdot\|_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ ein zugehöriges Fundamentalsystem.

(a) Eine Teilmenge $B \subset E$ heißt *beschränkt* oder *stark beschränkt*, wenn für jedes $\alpha \in I$ ein $M \geq 0$ existiert mit $\|x\|_\alpha \leq M$ für alle $x \in E$.

(b) Eine Teilmenge $B \subset E$ heißt *schwach beschränkt*, wenn für jedes $l \in E^*$ ein $M \geq 0$ existiert mit $|l(x)| \leq M$ für alle $x \in E$.

Definition 1.1.4. Zwei Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ und $\big(|||\cdot|||_\beta\big)_{\beta\in J}$ auf E heißen *äquivalent*, wenn für jedes $\alpha \in I$ ein $\beta \in J$ und ein $M \geq 0$ existieren mit
$$\|x\|_\alpha \leq M|||x|||_\beta$$
für alle $x \in E$, und umgekehrt, wenn für jedes $\beta \in J$ ein $\alpha \in I$ und ein $M' \geq 0$ exitieren mit
$$|||x|||_\beta \leq M'\|x\|_\alpha$$
für alle $x \in E$.

Lemma 1.1.1. *Zwei Fundamentalsysteme auf E sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche lokal-konvexe Topologie auf E erzeugen.*

Beweis: ✓

Definition 1.1.5. Ein abzählbares Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in N$ und alle $x \in E$ die Abschätzung $\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}$ gilt.

Definition 1.1.6. Ein vollständiger metrisierbarer lokal-konvexer Vektorraum heißt *Fréchetraum.*

Satz 1.1.2. (a) *Jeder Fréchetraum E besitzt ein abzählbares monoton wachsendes Fundamentalsystem aus stetigen Halbnormen, das die Topologie von E erzeugt.*

(b) Jeder Fréchetraum E besitzt eine translationsinvariante Metrik, die die Topologie von E erzeugt.

Beweis: [Rud73, Ch. 1, Thm. 1.24, Remark 1.38] ■

1.2 Hauptsätze über lineare Abbildungen

Satz 1.2.1. *Seien E und F Fréchetträume und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige Fundamentalsysteme. Ferner sei $A : E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Abbildung A ist stetig.

(b) Die Abbildung A ist beschränkt, d.h., A bildet beschränkt Mengen auf beschränkte Mengen ab.

(c) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \geq 0$ mit

$$\|Ax\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$.

Beweis: [Rud73, Ch. 1, Thm. 1.32] und Satz 1.1.2 ■

Konvention:
Seien E und F beliebige reelle oder komplexe Fréchetträume. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{L}(E, F)$ die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Falls $E = F$ oder $F = \mathbb{R}$ bzw. $F = \mathbb{C}$, so benutzen wir die Abkürzungen $\mathrm{L}(E)$ bzw. E^*.

Bemerkung 1.2.1. Man beachte, dass die Räume $\mathrm{L}(E, F)$, also auch E^* im Allgemeinen *keine* natürliche Fréchetraumtopologie mehr tragen [siehe z.B. [Bou87, Ch. III, §1, Ex. 14]]

Definition 1.2.1. Seien E und F beliebige Fréchetträumen und seien $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige Fundamentalsysteme. Dann heißt eine Familie $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ von stetigen linearen Abbildungen *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \geq 0$ gibt, so dass für alle $x \in E$ und alle $\alpha \in I$ die Abschätzung $\|A_\alpha x\|_m \leq M\|x\|_n$ gilt.

Lemma 1.2.1. *Seien E und F beliebige Fréchetträumen und sei $B \subset E$ beschränkt. Ferner sei $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ eine gleichgradig stetige Familie von stetigen linearen Abbildungen. Dann ist auch die Menge $\big\{A_\alpha x \;\big|\; x \in E, \alpha \in I\big\}$ beschränkt.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Thm. 2.4] ■

Wir haben darauf verzichtet die folgenden Sätze in größtmöglicher Allgemeingültigkeit zu formulieren, um nicht weitere funktionalanalytische Begriffe, die wir später nicht mehr benötigen, einführen zu müssen.

Satz 1.2.2 (Satz von Banach/Steinhaus). *Sei E ein Fréchetraum und F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, die punktweise beschränkt ist, d.h., für jedes $x \in E$ ist die Menge $\Gamma(x) := \big\{A_\alpha x \;\big|\; \alpha \in I\big\}$ beschränkt. Dann ist die Familie $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ gleichgradig stetig.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Thm. 2.5] ■

Folgerung 1.2.1. *Sei E ein Fréchetraum und sei F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\big(A_k : E \to F\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen linearen Operatoren, die punktweise gegen $A : E \to F$ konvergiert. Dann ist $A : E \to F$ ein stetiger linearer Operator und die Folge $(A_k : E \to F)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf kompakten Teilmengen von E gleichmäßig gegen A.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Thm. 2.8] ■

Satz 1.2.3 (Satz von der offenen Abbildung). *Seien E und F Fréchetträume und sei $A : E \to F$ stetig und surjektiv. Dann ist die Abbildung A auch offen.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Thm. 2.11] ■

Folgerung 1.2.2 (Satz von der stetigen Inversen). *Seien E und F Fréchetträume und sei $A : E \to F$ stetig und bijektiv. Dann ist die Inverse A^{-1} stetig.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Cor. 2.12] ■

Satz 1.2.4 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien E und F Fréchetträume und sei $A : E \to F$ linear. Dann ist die Abbildung A genau dann stetig, wenn der Graph von A in $E \times F$ abgeschlossen ist.*

Beweis: [Rud73, Ch. 2, Thm. 2.15] ■

Satz 1.2.5. *(a) Sei E ein lokal-konvexer Raum und sei $U \subset E$ ein Unterraum. Ferner sei $x \in E$ nicht im Abschluss von U. Dann existiert ein $l \in E^*$ mit $l(x) = 1$ und $l|_U \equiv 0$.*

(b) *Sei E ein lokal-konvexer Raum und sei $x \in E$. Ferner gelte $l(x) = 0$ für alle $l \in E^*$. Dann gilt $x = 0$.*

Beweis: [Rud73, Ch. 3, Thm. 3.5] ■

Satz 1.2.6. *Sei E ein lokal-konvexer Raum. Dann ist eine Teilmenge $B \subset E$ genau dann (stark) beschränkt, wenn sie auch schwach beschränkt ist.*

Beweis: [Rud73, Ch. 3, Thm. 3.18] ■

Satz 1.2.7. *Sei E ein Fréchetraum und F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\left(A_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ eine* nicht *gleichgradig stetige Familie von stetigen, linearen Abbildungen. Dann ist die Menge aller $x \in E$, für die $\Gamma(x) := \{A_\alpha x \,|\, \alpha \in I\} \subset F$ unbeschränkt ist, von zweiter Kategorie.*

Beweis: [siehe Anhang] ■

Folgerung 1.2.3 (Prinzip der kondensierenden Singularitäten). *Sei E ein Fréchetraum und F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\left(A_{\alpha,n}\right)_{\alpha\in I_n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von* nicht *gleichgradig stetigen Familien von stetigen linearen Abbildungen. Dann existiert ein $x \in E$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\Gamma_n(x) := \{A_\alpha x \,|\, \alpha \in I_n\} \subset F$ unbeschränkt ist.*

Beweis: [siehe Anhang] ■

Definition 1.2.2. Sei E ein beliebiger Fréchetraum und $A : E \to E$ ein stetiger linearer Operator auf E. Dann heißt A *spektral beschränkt*, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß die Familie $(\lambda^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linearen Operatoren gleichgradig stetig ist. Wir bezeichnen mit $\mathrm{B}(E)$ die Menge aller spektral beschränkten Operatoren.

Definition 1.2.3. (a) Sei E ein komplexer Fréchetraum und sei $A : E \to E$ ein stetiger linearer Operator. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\rho &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda\mathbf{I})^{-1} \text{ existiert in } \mathrm{B}(E)\}\\ \rho_c &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda\mathbf{I})^{-1} \text{ existiert in } \mathrm{L}(E)\}\end{aligned}$$

und bezeichnen $\rho(A)$ und $\rho_c(A)$ als die *Resolvente* bzw. als die *klassische Resolvente* von A. Ferner nennen wir $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ und $\sigma_c(A) := \mathbb{C} \setminus \rho_c(A)$ das *Spektrum* bzw.das *klassische Spektrum* von A.

(b) Sei $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann heißt die Abbildung $\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A) := (\lambda\mathbf{I} - A)^{-1}$ *Resolventenabbildung* oder kurz *Resolvente* von A.

Bemerkung 1.2.2. In Banachräumen gilt $\rho(A) = \rho_c(A)$ und $\sigma(A) = \sigma_c(A)$.

Lemma 1.2.2. *Sei $A : E \to E$ spektral beschränkt. Dann existiert ein $\lambda_0 \geq 0$, so daß die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x}{\lambda^{k+1}}$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda > \lambda_0$ konvergiert. Insbesondere gilt $\sigma(A) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\lambda| \leq \lambda_0\right\}$ und

$$(A - \lambda\mathbf{I})^{-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x}{\lambda^{k+1}}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 2.3.2. ■

Folgerung 1.2.4. *Sei $A : E \to E$ stetig. Dann ist $\rho(A)$ eine offene (eventuell leere) Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Lemma 1.2.2 und der Identität

$$A - (\lambda + h)\mathbf{I} = (A - \lambda\mathbf{I})\Big(\mathbf{I} - h(A - \lambda\mathbf{I})^{-1}\Big). \tag{1.1}$$

■

Satz 1.2.8. *Die Abbildung $\lambda \mapsto R(\cdot, A)x$ ist für jedes $x \in E$ holomorph auf $\rho(A)$.*

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 1.2.2 und der Identität (1.1). ■

Weitere Ergebnisse und Literatur zum Spektralbegriff in Frécheträumen findet man z.B. in den Arbeiten [Mae61], [All65] und [Wro99].

Kapitel 2

Differential– und Integralrechnung in Fréchetràumen

Im folgenden Kapitel stellen wir die für die weitere Arbeit nötigen Hilfsmittel aus der Analysis in Fréchetträumen zusammen. Dabei haben wir den Schwerpunkt auf die Integrationstheorie gelegt, da wir in den uns bekannten Standardwerken keine geschlossene Darstellung des Lebesgue-Bochner-Integrals für Fréchetraum-wertige Abbildungen finden konnten. Den Abschnitt über die Differentialrechnung haben wir dagegen sehr kurz gehalten, denn hier können wir auf eine sehr umfangreiche Arbeit von Hamilton [Ham82] verweisen. Der abschließende Paragraph über holomorphe, Fréchetraum-wertige Abbildungen fasst einige wichtige Ergebnisse aus verschiedenen Quellen zusammen.

2.1 Integration

Im Mittelpunkt dieses Abschnittes steht die Integrationstheorie Fréchetraum-wertiger Abbildungen. Unser Ziel ist es, dem Leser eine geschlossene Darstellung des Lebesgue-Bochner-Integrals in Fréchetträumen zu geben. Dies erscheint uns notwendig und sinnvoll, da die meisten der folgenden Sätze und Ergebnisse zwar wohlbekannt aber *nicht* in der gängigen Lehrbuchliteratur zu finden sind.
Zu Beginn der 30er Jahre erweiterte Bochner in [Boc33] die Lebesguesche Theorie auf beliebige Banachraum-wertige Abbildungen. Kurz darauf veröffentlichte Dunford einen Artikel [Dun35], in dem er die Konstruktion des Lebesgue-Bochner-Integrals mittels L_1-Cauchy-Folgen beschreibt. Anschließend wurden von Birkhoff [Bir35], Gelfand [Gel38], Pettis [Pet38], Price [Pri40] u.a. noch allgemeinere Integrationstheorien für Banachraum-wertige Abbildungen entwickelt . Phillips [Phi40] und Rickart [Ric42] dagegen übertrugen Großteile der vorhandenen Theorie auf beliebige, lokal-konvexe Räume. Eine detailierte Übersicht über die Entwicklung der Integrationstheorie kann der Leser in einer Arbeit von Hildebrandt [Hil53] finden. Unser Aufbau jedoch orientiert sich stark an der exzellenten Darstellung des

Lebesgue-Bochner-Integrals bei Lang [Lan93b]. Als weitere Literatur dienten uns [HP57], [DS66], [GWS72], [Coh80] und [HS65].
Wir mussten leider an einigen Stellen auf die Beweise verzichten, um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen. Dies erscheint uns legitim, da die meisten Beweise völlig analog zu den entsprechenden Sätzen in [Lan93b] geführt werden können.

Messbare Räume und Abbildungen

Definition 2.1.1. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer nicht-leeren Menge Ω mit den Eigenschaften

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

heißt *σ-Algebra* über Ω. Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnen wir als *messbaren Raum* und die Elemente von $\mathcal{A}$ als *messbare Mengen.*

Lemma 2.1.1. *Sei $\mathcal{S}$ ein beliebiges System von Teilmengen einer nicht-leeren Menge Ω. Dann existiert eine eindeutige, kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ über Ω, die $\mathcal{S}$ enthält.*

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Lemma 2.1.1 erlaubt uns die folgende Definition.

Definition 2.1.2. (a) Sei $\mathcal{S}$ ein beliebiges System von Teilmengen einer nicht-leeren Menge Ω. Dann heißt die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält, die von $\mathcal{S}$ *erzeugte σ-Algebra.*

(b) Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ das System aller offenen Mengen von Ω. Dann heißt die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ die *Borel-σ-Algebra* oder die *σ-Algebra* der *Borel-Mengen.* Die Elemente von $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ bezeichnen wir als *Borel-messbare* Mengen oder kurz als *Borel-Mengen.*

Konvention: Falls wir im Weiteren nicht explizit etwas anderes voraussetzen, so fassen wir jeden topologischen Raum Ω im obigen Sinne auch als messbaren Raum $\big(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{O})\big)$ auf.

Definition 2.1.3. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{B})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt *$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar* oder kurz *messbar*, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Satz 2.1.1. *(a) Seien $f : \Omega \to \Omega'$ und $g : \Omega' \to \Omega''$ messbare Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ messbar.*

(b) *Seien Ω und Ω' topologische Räume. Ferner sei Ω mit einer beliebigen σ-Algebra $\mathcal{A}$ und Ω' mit der σ-Algebra der Borel-Mengen versehen. So ist $f : \Omega \to \Omega'$ genau dann messbar, wenn $f^{-1}(O)$ für jede offene Menge $O \in \mathcal{O}$ messbar ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ messbar, wenn $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen enthält.*

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Bemerkung 2.1.1. Wohlbekannte Beispiele zeigen, dass die Komposition $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer stetigen Funktion f und einer Lebesgue-messbaren, genauer gesagt einer Lebesgue-Borel-messbaren Funktion g im Allgemeinen *nicht* wieder Lebesgue-Borel-messbar sein muss [siehe z.B. [Hal74, Ch. IV, §19]]. Dies scheint im Widerspruch zu Satz 2.1.1 zu stehen. Jedoch erhalten wir bei genauer Betrachtung, dass der obige Satz für stetige Funktionen nur die Lebesgue-Borel-Messbarkeit, aber nicht die Lebesgue-Lebesgue-Messbarkeit liefert, und somit kann dieser auch nicht auf die Komposition $g \circ f$ angewandt werden. Insbesondere zeigt dies, dass stetige Funktionen im Allgemeien *nicht* Lebesgue-Lebesgue-messbar sind, wie man z.B. anhand der Cantor-Abbildung sieht [siehe z.B. [Hal74, Ch. IV, §19]].

Satz 2.1.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum und seien Ω_1 sowie Ω_2 topologische Räume. Ferner sei $\Omega_1 \times \Omega_2$ mit der σ-Algebra der Borel-Mengen versehen. Dann gilt:*

(a) *Wenn $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$ messbar ist, dann sind auch die Abbildungen $\mathrm{pr}_1 \circ f : \Omega \to \Omega_1$ und $\mathrm{pr}_2 \circ f : \Omega \to \Omega_2$ messbar, wobei pr_1 und pr_2 die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente bezeichnen.*

(b) *Falls sich zusätzlich jede offene Menge O in $\Omega_1 \times \Omega_2$ als abzählbare Vereinigung von Quadern, d.h., von Mengen der Form $O_1 \times O_2$, mit $O_1 \in \mathcal{O}_1$ und $O_2 \in \mathcal{O}_2$, darstellen läßt, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Folgerung 2.1.1. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum und E ein topologischer Vektorraum mit stetiger Halbnorm $\|\cdot\|$. Dann gilt:*

(a) *Falls $f : \Omega \to E$ messbar ist, so ist auch $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar.*

(b) *Jede komplexwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil messbar sind.*

(c) *Falls $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar sind, so sind auch $f + g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar.*

Beweis: Zu (a): Die Behauptung folgt aus Satz 2.1.1.

Zu (b): Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.1.2.

Zu (c): Die Behauptung folgt aus Satz 2.1.2 und der Stetigkeit der Addition bzw. der Multiplikation in $\mathbb{C}$. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Zusatzvoraussetzung in Satz 2.1.2 über die Darstellbarkeit der offenen Mengen als abzählbare Vereinigung von Quadern im Allgemeinen notwendig ist.

Beispiel 2.1.1. Sei Ω ein beliebiger topologischer Raum, dessen Kardinalität größer ist als $|2^{\mathbb{N}}|$, und sei $\mathcal{A}_\Omega$ die zugehörige σ-Algebra der Borel-Mengen. Dann lässt sich der Produktraum $\Omega \times \Omega$ kanonisch auf zwei Arten mit einer σ-Algebra versehen, ersten mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_\Omega \times \mathcal{A}_\Omega$ und zweitens mit der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{A}_{\Omega\times\Omega}$ bezüglich der Produktopologie. Obwohl in „vielen“ bekannten Fällen die beiden Konstruktionen die gleichen σ-Algebren liefern, gilt im Allgemeinen und insbesondere in unserem Beispiel nur die Inklusion

$$\mathcal{A}_\Omega \times \mathcal{A}_\Omega \subsetneqq \mathcal{A}_{\Omega\times\Omega} \tag{2.1}$$

[siehe [Coh80, Ex. 5.1.8]]. Wir bezeichnen nun mit Ω' den messbaren Raum $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A}_\Omega \times \mathcal{A}_\Omega)$ und mit Ω'' den messbaren Raum $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A}_{\Omega\times\Omega})$. Dann ist die Identität $\mathrm{id} : \Omega' \to \Omega''$ wegen (2.1) *nicht* messbar. Jedoch sieht man leicht, dass die Abbildungen $\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{id}$ und $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{id}$ messbar sind. Somit ist die Umkehrung von Satz 2.1.2(a) *nicht* ohne Zusatzvoraussetzung möglich. Um zu sehen, dass diese in unserem Fall *nicht* erfüllt ist, kann man z.B. die offene Menge $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$ mit $\Delta := \{(\omega, \omega) \in \Omega \times \Omega \mid \omega \in \Omega\}$ betrachten und [Coh80, Ex. 5.1.7] benutzen.

Satz 2.1.3. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum und sei E ein Fréchetraum. Ferner sei $\left(f_n : \Omega \to E\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen, die punktweise gegen $f : \Omega \to E$ konvergiert. Dann ist auch f messbar.*

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Bemerkung 2.1.2. Es genügt in Satz 2.1.3 vorauszusetzen, dass E ein vollständiger metrischer Raum ist [siehe [Lan93b, Ch. VI, §1]].

Maßräume und μ-messbare Abbildungen

Definition 2.1.4. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(a) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *σ-additiv*, wenn für jede Folge $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ von disjunkten, messbaren Mengen die Identität

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

erfüllt ist.

(b) Eine σ-additive Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt *positives Maß* auf Ω. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bezeichnen wir als *Maßraum*.

(c) Falls μ ein positives Maß auf der σ-Algebra der Borel-Mengen ist, so bezeichnen wir μ auch als *Borelmaß*.

Lemma 2.1.2. *(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und sei $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von messbaren Mengen. Dann gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und sei $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von messbaren Mengen. Ferner sei $\mu(A_1) \neq \infty$. Dann gilt

$$\mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Definition 2.1.5. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum.

(a) Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt *μ-Nullmenge* oder kurz *Nullmenge*.

(b) Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ von messbaren Mengen gibt mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Konvention: Wir sagen, dass eine Eigenschaft P auf einem Maßraum Ω *μ-fast überall* gilt, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, die alle $\omega \in \Omega$ enthält, die P *nicht* erfüllen, d.h., $\{\omega \in \Omega \mid \neg P\} \subset N$.

Bemerkung 2.1.3. Man beachte, dass die Menge $M := \{\omega \in \Omega \mid \neg P\}$ im Allgemeinen *nicht* in $\mathcal{A}$ liegen muß. Jedoch gehört M zur sogenannten *μ-Vervollständigung* $\widehat{A}$ von A, d.h.,

$$\widehat{A} := \left\{ A \cup \widehat{N} \subset \Omega \;\middle|\; A \in \mathcal{A},\ \exists N \in \mathcal{A} : \widehat{N} \subset N,\ \mu(N) = 0 \right\}.$$

Ferner kann man leicht zeigen, dass $\widehat{A}$ wiederum eine σ-Algebra über Ω bildet und μ sich zu einem positiven Maß $\widehat{\mu}$ auf $\widehat{A}$ fortsetzen lässt [siehe z.B. [Coh80, Ch. 1, §5]].

Definition 2.1.6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \subset \Omega$ eine messbare Menge und E ein beliebiger Fréchetraum.

(a) Eine endliche Folge $\big(A_k\big)_{k=1,\dots,N}$ von disjunkten, messbaren Mengen mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$$

heißt *endliche Partition* von A.

(b) Eine Abbildung $f : \Omega \to E$ heißt *μ-Treppenfunktion* oder kurz *Treppenfunktion*, wenn es eine messbare Menge A mit endlichem Maß und eine endliche Partition $\big(A_k\big)_{k=1,\dots,N}$ von A gibt, so dass folgendes gilt:

(i) $f|_{A_k}$ ist konstant für alle $k = 1, \dots, N$.

(ii) $f|_{\Omega \setminus A} \equiv 0$, d.h. der Träger von f ist in A enthalten.

Die Menge aller Treppenfunktionen von Ω nach E bezeichen wir mit $\mathrm{St}(\Omega, E)$.

Lemma 2.1.3. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) Falls $f : \Omega \to E$, $g : \Omega \to E$ und $\lambda : \Omega \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen sind, so auch $f + g$ und $\lambda \cdot f$.

(b) Falls $f : \Omega \to E$ eine Treppenfunktion und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf E ist, so ist auch $\|f\| : \Omega \to [0, \infty)$ eine Treppenfunktion.

Beweis: ✓

Folgerung 2.1.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann bildet die Menge der Treppenfunktionen $\mathrm{St}(\Omega, E)$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.1.3. ■

Definition 2.1.7. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $\|\cdot\|$ eine stetige Halbnorm auf E.

(a) Eine Abbildung $f : \Omega \to E$ heißt *μ-messbar bezüglich* $\|\cdot\|$, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $f_k : \Omega \to E$ gibt, die fast überall punktweise bezüglich $\|\cdot\|$ gegen f konvergiert, d.h.,

$$\lim_{k\to\infty} \|f(\omega) - f_k(\omega)\| = 0$$

für fast alle $\omega \in \Omega$.

(b) Eine Abbildung $f : \Omega \to E$ heißt *μ-messbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $f_k : \Omega \to E$ gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Die Menge aller μ-messbaren Abbildungen von Ω nach E bezeichnen wir mit $\mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$.

Bemerkung 2.1.4. (a) Jede μ-messbare Funktion $f : \Omega \to E$ verschwindet außerhalb einer σ-endlichen Teilmenge von Ω. Falls Ω ein topologischer Raum ist, impliziert dies jedoch *nicht*, selbst wenn $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen ist, dass der topologische Träger von f, d.h. der Abschluss des Trägers von f σ-endlich sein muss. Dazu betrachte man das folgende Beispiel.

Sei $\Omega = [0, 1]$ versehen mit der natürlichen Topologie, $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen und μ das Zählmaß auf $\mathcal{A}$. Dann ist die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \omega \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad \omega \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

μ-messbar. Der topologische Träger von f jedoch ist *nicht* σ-endlich, denn es gilt $\overline{\operatorname{supp}} f = [0, 1]$.

(b) Jede μ-messbare Funktion besitzt ein „fast“ separables Bild, d.h., zu jeder μ-messbaren Funktion $f : \Omega \to E$ gibt es eine Nullmenge N derart, dass $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Approximationseigenschaft von f durch Treppenfunktionen f_k. Denn daraus folgt

$$f(\Omega \setminus N) \subset \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k(\Omega \setminus N)},$$

und somit ist $f(\Omega \setminus N)$ als Teilmenge einer separablen Menge eines metrischen Raums wiederum separabel. Man beachte jedoch, dass das Bild von f im Allgemeinen *nicht* separabel sein muss.

Lemma 2.1.4. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Abbildung* $f : \Omega \to E$ *ist* μ*-messbar.*

(b) *Die Abbildung* $f : \Omega \to E$ *ist für alle* $n \in \mathbb{N}$ μ*-messbar bezüglich* $\|\cdot\|_n$.

Beweis: Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus den Definitionen 2.1.7(a) und (b). ■

Satz 2.1.4. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und seien* E_1*,* E_2 *und* F *Frécheträume. Ferner seien* $f : \Omega \to E_1$ *und* $g : \Omega \to E_2$ μ*-messbare Abbildungen und* $h : E_1 \times E_2 \to F$ *stetig mit* $h(0,0) = 0$*. Dann ist auch die Abbildung* $h \circ (f, g) : \Omega \to F$*,* $\omega \mapsto h\big(f(\omega), g(\omega)\big)$ μ*-messbar.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Folgerung 2.1.3. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und seien* E *und* F *Frécheträume über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Dann gilt:*

(a) *Falls* $f : \Omega \to E$*,* $g : \Omega \to E$ *und* $\lambda : \Omega \to \mathbb{K}$ μ*-messbar sind, so auch* $f + g$ *und* λf*.*

(b) *Falls* $f : \Omega \to E$ μ*-messbar und* $g : E \to F$ *mit* $g(0) = 0$ *stetig ist, so ist auch* $g \circ f : \Omega \to F$ μ*-messbar.*

(c) *Falls* $f : \Omega \to E$ μ*-messbar und* $\|\cdot\|$ *eine stetige Halbnorm auf* E *ist, so ist auch* $\|f\| : \Omega \to [0, \infty)$ μ*-messbar.*

Beweis: Zu (a): Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.1.4 und der Stetigkeit der Vektorraumoperationen auf E.

Zu (b): Die Behauptung ergibt sich aus Satz 2.1.4 mit $h(x, y) := g(x)$.

Zu (c): Die Behauptung folgt unmittelbar aus (c). ■

Bemerkung 2.1.5. Die Voraussetzungen $h(0,0) = 0$ und $g(0) = 0$ in Satz 2.1.4 bzw. Folgerung 2.1.3 werden nur benötigt, damit die approximierenden Treppenfunktionen außerhalb einer Menge endlichen Maßes verschwinden. Man kann auf diese verzichten, wenn der Maßraum σ-endlich ist.

Folgerung 2.1.4. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *ein Fréchetraum über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Dann bildet die Menge der* μ*-messbaren Abbildungen* $\mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$ *einen* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 2.1.3. ■

Bemerkung 2.1.6. Man beachte, dass der Begriff der μ-Messbarkeit nicht nur grundlegend für die spätere Definition eines Integrals ist, sondern nach Folgerung 2.1.4 auch bessere algebraische Eigenschaften besitzt als der Begriff der Messbarkeit, denn die Menge der messbaren Abbildungen bildet im Allgemeinen *keinen* Vektorraum [siehe [Coh80, Appendix E, Ex. 2]]. Dies kann man mit Hilfe des messbaren Raums Ω' aus Beispiel 2.1.1 und den Abbildungen $\mathrm{pr}_1 : \Omega' \to \Omega$ und $\mathrm{pr}_2 : \Omega' \to \Omega$ sehen, denn $(\mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)^{-1}(0) = \Delta$ ist *nicht* messbar.

Der folgende, zentrale Satz dieses Teilabschnittes klärt den Zusammenhang zwischen den Begriffen *messbar* und *μ-messbar*. Er zeigt, dass μ-messbare Abbildungen durch Messbarkeit und die Eigenschaften (a) und (b) aus Bemerkung 2.1.4 charakterisiert sind.

Satz 2.1.5. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist μ-messbar.

(b) Es gibt eine Nullmenge N und eine σ-endliche Menge A, so dass folgendes gilt:

  (i) $f|_{\Omega \setminus N}$ ist messbar.

  (ii) $f|_{\Omega \setminus A} \equiv 0$, d.h., der Träger von f liegt in A.

  (iii) $f(\Omega \setminus N)$ ist separabel.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §1] ∎

Folgerung 2.1.5. *Sei $\big(f_k : \Omega \to E\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die punktweise fast überall gegen $f : \Omega \to E$ konvergiert. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge N_ε mit $\mu(N_\varepsilon) \leq \varepsilon$, so dass $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\Omega \setminus N_\varepsilon$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 2.1.5 [vgl. [Lan93b, Ch. VI, §1]]. ∎

Bemerkung 2.1.7. Der Beweis in [Lan93b] zeigt außerdem, dass Satz 2.1.5 auch für *nicht* vollständige Räume gültig ist, denn die Vollständigkeit von E wird an keiner Stelle im Beweis benutzt.

Folgerung 2.1.6. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei E ein separabeler Fréchetraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist μ-messbar.

(b) *Es existiert eine Nullmenge N, so dass die Abbildung $f : \Omega \to E$ eingeschränkt auf $\Omega \setminus N$ messbar ist.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.1.5. ■

Folgerung 2.1.7. (a) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein topologischer, σ-endlicher Maßraum, dessen σ-Algebra die Borel-Mengen enthält. Ferner sei E ein separabler Fréchetraum. Dann ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \to E$ μ-messbar.*

(b) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein kompakter, σ-endlicher Maßraum, dessen σ-Algebra die Borel-Mengen enthält. Ferner sei E ein beliebiger Fréchetraum. Dann ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \to E$ μ-messbar.*

Beweis: Zu (a): Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.1.1 und Satz 2.1.5.

Zu (b): Da Ω kompakt und f stetig ist, ist auch das Bild von f kompakt. Daraus wiederum folgt die Separabilität von $\widetilde{E} := \operatorname{span} f(\Omega)$ und somit ergibt sich die Behauptung aus (a) angewandt auf die Abbildung $f : \Omega \to \widetilde{E}$. ■

Der abschließende Satz dieses Teilabschnittes zeigt, dass μ-Messbarkeit unter punktweiser Konvergenz erhalten bleibt.

Satz 2.1.6. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Ferner sei $\big(f_k : \Omega \to E\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen, die fast überall punktweise gegen $f : \Omega \to E$ konvergiert. Dann ist auch $f : \Omega \to E$ μ-messbar.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §1] ■

Integrierbare Abbildungen

Lemma 2.1.5. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \subset \Omega$ messbar. Ferner sei $f : \Omega \to E$ eine Treppenfunktion mit Partitionen $\big(B_k\big)_{k=1,\dots,N}$ und $\big(C_k\big)_{k=1,\dots,N'}$. Dann gilt:*

(a)
$$\sum_{k=1}^{N} f(B_k)\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{N'} f(C_k)\mu(C_k).$$

(b) *Die Abbildung $f_A := \chi_A \cdot f$ ist wiederum eine Treppenfunktion mit Partitionen $\big(A \cap B_k\big)_{k=1,\dots,N}$ bzw. $\big(A \cap C_k\big)_{k=1,\dots,N'}$, wobei χ_A die charakteristische Funktion von A bezeichne.*

Beweis: ✓

Mit Hilfe von Lemma 2.1.5 können wir nun ein wohldefiniertes Integral für Treppenfunktionen einführen.

Definition 2.1.8. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \to E$ eine Treppenfunktion und $\big(A_k\big)_{k=1,\dots,N}$ eine beliebige Partition von f. Dann heißt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{N} f(A_k)\mu(A_k) \in E$$

das *Integral* von f über Ω bezüglich μ. Falls A eine beliebige messbare Teilmenge von Ω ist, so definieren wir das *Integral* von f über A bezüglich μ mittels

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f_A \,\mathrm{d}\mu \in E.$$

Lemma 2.1.6. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $\int_\Omega : \mathrm{St}(\Omega, E) \to E$, $f \mapsto \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ ist linear.

(b) Falls $A \subset \Omega$ und $B \subset \Omega$ messbar und disjunkt sind, so gilt

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

für jede Treppenfunktion $f \in \mathrm{St}(\Omega, E)$

(c) Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen sind mit $f \leq g$, so gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Falls $\|\cdot\|$ eine beliebige Halbnorm auf E und $f : \Omega \to E$ eine Treppenfunktion mit Partition $\big(A_k\big)_{k=1,\dots,N}$ ist, so gilt

$$\Big\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \Big\| \leq \int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{\omega\in A} \|f(\omega)\| \cdot \mu(A)$$

mit $A := \bigcup_{k=1}^N A_k$.

Beweis: Die obigen Behauptungen sind unmittelbare Folgerungen aus Definition 2.1.8. ∎

Lemma 2.1.7. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein (monoton wachsendes) System von Halbnormen auf E. Dann liefert $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch*

$$\|f\|_{1,n} := \int_\Omega \|f\|_n \,\mathrm{d}\mu, \quad n \in \mathbb{N},$$

ein (monoton wachsendes) System von Halbnormen auf $\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)$.

Beweis: ✓

Das obige Lemma gibt nun Anlass zu folgender Definition.

Definition 2.1.9. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem auf E. Dann heißt $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ das zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige L_1-*Fundamentalsystem.*

Lemma 2.1.8. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* E *ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem* $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. *Ferner sei*

$$\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)_0 := \Big\{ f \in \mathrm{St}(\Omega, E, \mu) \;\Big|\; f(\omega) = 0 \ \mu\text{-fast überall} \Big\}$$

Dann gilt

$$\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ f \in \mathrm{St}(\Omega, E, \mu) \;\Big|\; \|f\|_{1,n} = 0 \Big\}$$

Beweis: Da $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem von E ist, ist die obige Behauptung offensichtlich erfüllt. ■

Somit definiert $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 1.1.1 eine eindeutige lokal-konvexe Topologie auf dem Quotientenraum $\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)/\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)_0$.

Lemma 2.1.9. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* E *ein Fréchetraum. Ferner seien* $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *äquivalente Fundamentalsysteme von* E. *Dann sind die zugehörigen* L_1-Fundamentalsystem *äquivalent, d.h., sie erzeugen die gleiche lokal-konvexe Topologie auf* $\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)/\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)_0$.

Beweis: Der Behauptung folgt leicht aus der Definition der Äquivalenz von Fundamentalsystenen [siehe 1.1.4]. ■

Definition 2.1.10. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ die (bis auf Isometrie) eindeutige *Vervollständigung* von $\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)/\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)_0$ bezüglich $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 2.1.7. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *ein Fréchetraum. Dann ist auch* $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ *ein Fréchetraum.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.1.2. ■

Aus Lemma 2.1.6 folgt, dass das Integral aus Definition 2.1.8 einen stetigen, linearen Operator von $\mathrm{St}(\Omega, E, \mu)$ nach E darstellt. Somit können wir diesen offensichtlich eindeutig auf die Vervollständigung $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ fortsetzen. Andererseits zeigen wir im Folgenden, dass sich das oben eingeführte Integral auch auf einen geeigneten Unterraum aller μ-messbaren Abbildungen erweitern lässt. Abschließend werden wir sehen, dass dieser in kanonischer Weise isomorph zu $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ ist.

Definition 2.1.11. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $\|\cdot\|$ eine beliebige stetige Halbnorm auf E.

(a) Eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt L_1-*Cauchy-Folge bezüglich* $\|\cdot\|$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon$$

für alle $k, l \geq N$.

(b) Eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt L_1-*Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_k - f_l\|_{1,n} < \varepsilon$$

für alle $k, l \geq N$.

(c) Wir sagen, eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ L_1-*approximiert* $f \in \mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$ *bezüglich* $\|\cdot\|$, wenn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L_1-Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|$ ist und fast überall punktweise bezüglich $\|\cdot\|$ gegen f konvergiert.

(d) Wir sagen, eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ L_1-*approximiert* $f \in \mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$, wenn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L_1-Cauchy-Folge ist und fast überall punktweise gegen f konvergiert. Die Menge aller μ-messbaren Funktionen, die sich L_1-*approximieren* lassen, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Bemerkung 2.1.8. (a) Die Voraussetzung $f \in \mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$ in Definition 2.1.11(d) ist überflüssig, den aus Definition 2.1.7 folgt, dass jede Abbildung, die L_1-approximierbar ist, auch μ-messbar ist.

(b) Nach Lemma 2.1.10 sind offensichtlich die Begriffe L_1-*Cauchy-Folge* und L_1-*approximierend* von der Wahl des Fundamentalsystems auf E unabhängig. Dies gilt somit auch für die Definition von $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Lemma 2.1.10 (Hauptlemma). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L_1-Cauchy-Folge von Treppenfunktionen.*

(a) Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die fast überall punktweise konvergiert.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine messbare Menge M_ε mit $\mu(M_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass die obige Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus M_\varepsilon$ konvergiert.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §3, Lemma 3.1] ■

Lemma 2.1.11. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ L_1-Cauchy-Folgen von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion f konvergieren. Dann gilt:*

(a) Die Grenzwerte der Folgen $\big(\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\big(\int_\Omega g_k \,\mathrm{d}\mu\big)_{k\in\mathbb{N}}$ existieren in E und sind gleich, d.h.,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Die Folge $(f_k - g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge bezüglich $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §3, Lemma 3.2] ■

Mit Hilfe von Lemma 2.1.11 können wir nun das in Definition 2.1.8 eingeführte Integral auf ganz $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ fortsetzen.

Definition 2.1.12. Sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Treppenfuktionen, die f L_1-approximiert. Dann definieren wir das *Integral* von f über Ω bezüglich μ mittels

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Die Elemente von $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ bezeichnen wir als *μ-integrierbare Abbildungen*. Falls A eine beliebige messbare Teilmenge von Ω ist, so definieren wir

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f_A \,\mathrm{d}\mu.$$

als das Integral von f über A bezüglich μ.

Bemerkung 2.1.9. Man beachte, $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ impliziert $f_A \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ für jede messbare Menge $A \subset \Omega$.

Das folgende Lemma zeigt, dass wir auch das System $\big(\|\cdot\|_{1,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von L_1-Halbnormen problemlos auf $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ erweitern können.

Lemma 2.1.12. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die f L_1-approximiert. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $\|f\|_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ μ-integrierbar.

(b) *Die Folge* $\left(\|f_k\|_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist für alle* $n \in \mathbb{N}$ *eine* L_1*-Cauchy-Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen* $\|f\|_n$ *konvergiert und es gilt*

$$\int_\Omega \|f\|_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_k\|_n \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §3, Lemma 3.3] ■

Lemma 2.1.13. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* E *ein Fréchetraum mit (monoton wachsendem) Fundamentalsystem* $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ferner sei für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Abbildung* $\|\cdot\|_{1,n} : \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu) \to [0, \infty)$*, definiert durch*

$$\|f\|_n := \int_\Omega \|f\|_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_k\|_n \,\mathrm{d}\mu,$$

wobei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine beliebige Folge von Treppenfunktionen sei, die* f L_1*-approximiert. Dann definiert* $\left(\|\cdot\|_{1,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein (monoton wachsendes) System von Halbnormen auf* $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 2.1.12. ■

Definition 2.1.13. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißt $\left(\|\cdot\|_{1,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ das zu $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige L_1-*Fundamentalsystem* auf $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Lemma 2.1.14. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* E *ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem* $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ferner sei*

$$\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)_0 := \left\{ f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu) \;\middle|\; f(\omega) = 0 \textit{ fast überall} \right\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu) \;\middle|\; \|f\|_{1,n} = 0 \right\}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt leicht aus der Abzählbarkeit des Fundamentalsystems. ■

Lemma 2.1.15. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *ein Fréchetraum. Ferner seien* $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\left(|||\cdot|||_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *äquivalente Fundamentalsysteme auf* E*. Dann sind auch die zugehörigen* L_1*-Fundamentalsysteme äquivalent.*

Beweis: Eine einfache Rechnung zeigt die Behauptung. ■

Satz 2.1.8. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Dann ist auch der Quotientenraum $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)/\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)_0$ ein Fréchetraum. Insbesondere ist der Raum $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)/\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)_0$ isometrisch isomorph zu $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §3, Thm. 3.4] ■

Konvention: Da uns Satz 2.1.10 erlaubt, die Räume $\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)/\mathcal{L}_1(\Omega, E, \mu)_0$ und $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ zu identifizieren, benutzen wir zur Vereinfachung der Notation im Weiteren nur noch die Bezeichnung $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Zum Schluß dieses Abschnittes betrachten wir zwei weitere Möglichkeiten, μ-integrierbare Funktionen einzuführen, und zeigen, dass diese scheinbar schwächeren Definitionen [siehe z.B. [GWS72]] mit dem von uns gewählten Zugang äquivalent sind.

Satz 2.1.9. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist μ-integrierbar.

(b) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ μ-integrierbar bezüglich $\|\cdot\|_n$, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge von Treppenfunktionen, die f bezüglich $\|\cdot\|_n$ L_1-approximiert.

(c) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist μ-messbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\|f\|_n$ μ-integrierbar.

(d) Die Abbildung $f : \Omega \to E$ ist μ-messbar und für jedes $l \in E^*$ ist die Abbildung $l \circ f$ μ-integrierbar.

Beweis: [GWS72] ■

Hauptsätze über integrierbare Abbildungen

Der folgende Satz zeigt, dass sich alle Eigenschaften aus Lemma 2.1.6 auf beliebige μ-integrierbare Abbildungen übertragen.

Satz 2.1.10. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $\int_\Omega : \mathrm{L}_1(\Omega, E) \to E$, $f \mapsto \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ ist linear und stetig.

(b) Seien A und B disjunkte, messbare Teilmengen von Ω. Dann gilt

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) *Seien $f, g \in \mathrm{L}_1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ und sei $f(\omega) \leq g(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) *Sei $\|\cdot\|$ eine stetige Halbnorm auf E. Dann gilt*

$$\Big\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \Big\| \leq \int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|f\| \cdot \mu(\operatorname{supp} f)$$

Konvention: Man beachte, dass in Satz 2.1.10 sowohl $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|f\|$ als auch $\mu(\operatorname{supp} f)$ den Wert ∞ annehmen können. In diesen Fällen treffen wir die Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Beweis: Man erhällt die Behauptungen (a)–(d), indem man die entsprechenden Aussagen in Lemma 2.1.6 mittels Definition 2.1.12 und den obigen Hilfssätzen auf μ-integrierbare Abbildungen übertragt. ■

Die beiden folgenden Sätze zeigen die Vertauschbarkeit von Integration und stetigen, linearen Abbildungen, insbesondere stetigen Projektionen.

Satz 2.1.11. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien E und F Frécheträume. Ferner sei $A : E \to F$ eine stetige, lineare Abbildung. Dann induziert A mittels $f \mapsto A \circ f$ eine stetige, lineare Abbildung von $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ nach $\mathrm{L}_1(\Omega, F)$ und für alle $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E)$ gilt*

$$\int_\Omega A \circ f \,\mathrm{d}\mu = A\Big(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\Big).$$

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §4, Thm. 4.1] ■

Satz 2.1.12. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien E_1 und E_2 Frécheträume. Ferner bezeichnen $\mathrm{pr}_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$ und $\mathrm{pr}_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$ die stetigen Projektionen auf E_1 bzw. E_2. Dann ist*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{L}_1(\Omega, E_1 \times E_2) &\to \mathrm{L}_1(\Omega, E_1) \times \mathrm{L}_1(\Omega, E_2), \\ f &\mapsto (\mathrm{pr}_1 \circ f, \mathrm{pr}_2 \circ f) \end{aligned}$$

ein stetiger, linearer Isomorphismus und für alle $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E_1 \times E_2)$ gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \Big(\int_\Omega \mathrm{pr}_1 \circ f \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega \mathrm{pr}_2 \circ f \,\mathrm{d}\mu\Big).$$

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §4, Thm. 4.2] ■

Lemma 2.1.16. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* E *ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem* $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$*. Dann existiert eine Nullmenge* N*, so dass folgendes gilt:*

(a) Die Menge $A_{n,c} := \{\omega \in \Omega \setminus N \mid \|f(\omega)\|_n \geq c\}$ *ist für jedes* $c > 0$ *und jedes* $n \in N$ *messbar und besitzt endliches Maß.*

(b) Die Menge $A_0 := \{\omega \in \Omega \setminus N \mid f(\omega) \neq 0\}$ *ist messbar und* σ*-endlich.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Lemma 5.1] ■

Bemerkung 2.1.10. Das obige Lemma 2.1.16 zeigt insbesondere, dass die Menge $\big\{\omega \in \Omega \bigm| \|f(\omega)\|_n \leq c \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\big\}$ ein σ-endliches Komplement besitzt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\Omega \setminus \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|f(\omega)\|_n \leq c \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|f(\omega)\|_n \leq c\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|f(\omega)\|_n > c\right\}.
\end{aligned}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass man im Allgemeinen auch nicht mehr, d.h., kein endliches Maß, erwarten kann.

Beispiel 2.1.2. Sei $\Omega := \mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß und sei $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ferner sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_k(\omega) := \frac{k}{1+\omega^2} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \mathbb{R} \,\middle|\, \|f(\omega)\|_n := \max_{1\leq k\leq n} |f_k(\omega)| \leq c\right\} = \emptyset.$$

Wir verallgemeinern nun Hauptlemma 2.1.10 auf beliebige Cauchy-Folgen im Raum $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Satz 2.1.13. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *ein Fréchetraum. Ferner sei* $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge, die in* $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ *gegen* f *konvergiert.*

(a) Dann gibt es eine Teilfolge $\big(f_{k_l}\big)_{l\in\mathbb{N}}$*, die* f L_1*-approximiert, d.h., die fast überall punktweise gegen* f *konvergiert.*

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ *gibt es eine messbare Menge* N *mit* $\mu(N) < \varepsilon$*, so dass die obige Teilfolge* $\big(f_{k_l}\big)_{l\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf* $\Omega \setminus N$ *gegen* f *konvergiert.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Thm. 5.2] ■

Folgerung 2.1.8. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *ein Fréchetraum. Ferner sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$*, die* $f \in \mathrm{M}(\Omega, E, \mu)$ L_1*-approximiert. Dann ist* $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ *und* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ *gegen* f*.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Definition 2.1.11 und Satz 2.1.13. ■

Bemerkung 2.1.11. Folgerung 2.1.8 besagt, dass jede Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$, die f L_1-approximiert, insbesondere auch gegen f in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ konvergiert. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Jedoch folgt aus Satz 2.1.13, dass jede Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ gegen f konvergiert, eine Teilfolge besitzt, die f L_1-approximiert.

Der folgende Satz von der monotonen Konvergenz und das anschließende Lemma von Fatou sind wohlbekannt. Trotzdem haben wir beide Ergebnisse in die Arbeit aufgenommen, da sie die entscheidenden Hilfsmittel zur Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue darstellen.

Satz 2.1.14 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge* μ*-integrierbarer, reellwertiger Funktionen. Ferner sei die Folge der Integrale* $\left(\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, d.h., es existiere ein* $M \geq 0$ *mit*

$$\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \leq M$$

für alle $k \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine* L_1*-Cauchy-Folge und konvergiert fast überall punktweise gegen eine* μ*-integrierbare Funktion* $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$*.*

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §5, Thm. 5.5] ■

Folgerung 2.1.9. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von* μ*-integrierbaren Funktionen. Ferner existiere ein* $g \in \mathrm{L}_1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ *mit* $|f_k| \leq g$ *fast überall für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Dann sind die Funktionen* $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *und* $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ μ*-integrierbar und es gilt*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu$$

bzw.

$$\int_\Omega \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §5, Cor. 5.6] ■

Lemma 2.1.17 (Lemma von Fatou). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen, μ-integrierbaren Funktionen mit $\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_1 < \infty$. Dann ist die Funktion $\liminf_{k\to\infty} f_k$ μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis: [Lan93b, Ch. VI, §5, Cor. 5.7] ■

Nachdem wir nun alle Hilfsmittel zur Verfügung haben, können wir, wie angekündigt, den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz auf Fréchetraum-wertige Abbildungen übertragen.

Satz 2.1.15 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Abbildungen, die fast überall punktweise gegen $f : \Omega \to E$ konvergiert. Ferner existiere eine Folge $\big(g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-integrierbaren, reellwertigen Funktionen, die die Folge $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall majorisiert, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt μ-fast überall die Abschätzung*

$$\|f_k(\omega)\|_n \leq g_n(\omega).$$

Dann ist die Abbildung f μ-integrierbar und $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ approximiert f in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Thm. 5.8] ■

Folgerung 2.1.10. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : \Omega \to E$ μ-messbar. Ferner existiere eine Folge $\big(g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrierbarer, reellwertiger Funktionen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung*

$$\|f(\omega)\|_n \leq g_n(\omega)$$

μ-fast überall gilt. Dann ist f μ-integrierbar. Insbesondere ist $f \in M(\Omega, E, \mu)$ genau dann μ-integrierbar, wenn $\|f\|_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ μ-integrierbar ist.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Cor. 5.9] ■

Folgerung 2.1.11. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Abbildungen, die fast überall punktweise gegen $f : \Omega \to E$ konvergiert. Ferner sei $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$ beschränkt, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein M mit*

$$\int_\Omega \|f_k\|_n \, \mathrm{d}\mu \leq M$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f μ-integrierbar.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 2.1.10 und dem Lemma von Fatou 2.1.17. ■

Folgerung 2.1.12. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien E_1, E_2 und F Fréchet-räume. Ferner sei $B : E_1 \times E_2 \to F$ eine stetige, bilineare Abbildung, $f : \Omega \to E_1$ μ-integrierbar und $g : \Omega \to E_2$ μ-messbar und wesentlich beschränkt, d.h.* $\operatorname{ess\,sup}_\Omega g < \infty$*. Dann ist $\omega \mapsto B\big(f(\omega), g(\omega)\big)$ μ-integrierbar.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Cor. 5.13] ■

Bemerkung 2.1.12. Die Voraussetzung der μ-Messbarkeit und wesentlichen Beschränktheit von g in Folgerung 2.1.12 kann man *nicht* durch μ-Integrierbarkeit von g ersetzen! Dies zeigen schon einfache Beispiele mit $E = E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$ und $B(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 \cdot \omega_2$.

Satz 2.1.16. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Abbildungen mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \|f_k\|_n \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

fast überall punktweise gegen eine μ-integrierbare Abbildung f und es gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15. ■

Folgerung 2.1.13. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine messbare Menge $A_{\varepsilon,n}$ mit endlichem Maß, so dass*

$$\Big\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu - \int_{A_{\varepsilon,n}} f \,\mathrm{d}\mu \Big\|_n < \varepsilon.$$

Beweis: Die Behauptung ist eine unmittelbar Folgerung aus dem Satz über die Monotone Konvergenz 2.1.14. ■

Die beiden abschließenden Sätze dieses Teilabschnitts beinhalten zwei wichtige Mittelwerteigenschaften μ-integrierbarer Abbildungen. Während Satz 2.1.17 „im Wesentlichen“ zeigt, dass das Integral $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ in der konvexen Hülle von $f(A)$ liegt, so liefert umgekehrt Satz 2.1.18 eine Aussage über die Lage von $f(\Omega)$ anhand der Werte $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu$, $A \in M(\Omega)$, wobei A alle messbaren Mengen von Ω durchläuft.

Definition 2.1.14. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Fréchetraum und $f : \Omega \to E$ messbar. Dann bezeichnen wir

$$\operatorname{ess\,conv} f(B) := \bigcap_{\substack{N \subset B \\ \mu(N)=0}} \operatorname{conv} f(B \setminus N)$$

als die *wesentliche konvexe Hülle* von $f(B)$.

Satz 2.1.17. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Fréchetraum. Ferner sei f μ-integrierbar und A eine messbare Menge mit $0 < \mu(A) < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu \in \operatorname{ess\,conv} f(A).$$

Beweis: Dies zeigt man leicht mit Hilfe eines geeigneten, trennenden, linearen Funktionals. ■

Satz 2.1.18. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, E ein Fréchetraum und $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$. Ferner sei B eine abgeschlossene Teilmenge von E, so dass für jede messbare Teilmenge A mit $0 < \mu(A) < \infty$ die Inklusion*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu \in B$$

erfüllt ist. Dann gilt $f(\omega) \in B$ μ-fast überall.

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. VI, §5, Thm. 5.15] ■

Bemerkung 2.1.13. Falls Ω *nicht* σ-endlich ist, so ist die Aussage von Satz 2.1.18 im Allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $\Omega := \{0, 1\}$ mit $\mu(\{0\}) = 0$ und $\mu(\{1\}) = \infty$. Somit gibt es *keine* messbare Teilmenge A mit $0 < \mu(A) < \infty$. Also sind die Voraussetzungen des Satzes insbesondere für die Nullfunktion und $B = \{1\}$ erfüllt. Jedoch ist die Nullfunktion *nicht* fast überall gleich 1.

Das obige Beispiel legt jedoch die Vermutung nahe, dass man auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von Ω verzichten kann, wenn zusätzlich $0 \in B$ gilt. Dies ist in der Tat der Fall, wie man leicht sieht, indem man die Abbildung f auf ihren Träger $\operatorname{supp} f$ einschränkt.

Einige spezielle Eigenschaften Lebesgue-integrierbarer Abbildungen

Zum Schluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch einige wichtige Eigenschaften des klassischen Borel- bzw. Lebesgue-Maßes/-Integrals auf $\mathbb{R}^n$, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen.

Aus Folgerung 2.1.7 wissen wir, dass jede stetige Abbildung $f : \Omega \to E$ μ-messbar ist, falls Ω σ-endlich und μ ein Borelmaß ist. Im Fall $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ zeigt der folgende Satz, dass wir auch rechts- bzw. linksseitige Stetigkeit zulassen können.

Satz 2.1.19. *Jede rechts- bzw. linksseitig stetige Abbildung $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to E$ ist messbar.*

Beweis: Die Behauptung erhält man wie für reellwertige Funktionen mittels äquidistanter Partitionen von (a, b) und stückweiser konstanter Approximationen von f. ■

Definition 2.1.15. Sei Ω ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum und sei μ ein Maß auf Ω, dessen σ-Algebra die σ-Algebra der Borel-Mengen enthält. Dann heißt μ *regulär*, wenn jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ endliches Maß besitzt und für jede messbare Menge A die Identität

$$\sup\left\{\mu(K) \;\middle|\; K \subset A \text{ kompakt}\right\} = \mu(A) = \inf\left\{\mu(U) \;\middle|\; A \subset U \text{ offen}\right\}$$

erfüllt ist.

Lemma 2.1.18. *Sei Ω ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum mit regulärem Maß μ. Dann ist jede stetige Abbildung mit kompaktem Träger μ-integrierbar.*

Beweis: Sei φ stetig mit kompaktem Träger. Da μ regulär ist, gilt $\mu\big(\overline{\operatorname{supp}}\,\varphi\big) < \infty$. Dann ist offensichtlich $\big(g_n := c_n\chi_A\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sup_{\omega\in\Omega} \|\varphi\|_n < \infty$ und $A := \overline{\operatorname{supp}}\,\varphi$ eine Folge von reellwertigen μ-integrierbaren Abbildungen mit $\|\varphi(\omega)\|_n \leq g_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega$. Somit erhält man die Behauptung unmittelbar aus Folgerung 2.1.10. ■

Satz 2.1.20. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum mit regulärem Borelmaß μ und E ein beliebiger Fréchetraum. Dann liegt die Menge $\mathrm{C}_c(\Omega, E)$ aller stetigen Abbildungen mit kompaktem, topologischem Träger dicht in $\mathrm{L}_1(\Omega, E, \mu)$.*

Beweis: analog zu [Lan93b, Ch. IX, Thm. 3.1] ■

Folgerung 2.1.14. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und E ein beliebiger Fréchetraum. Dann liegt $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ dicht in $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n, E, \mu)$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.1.20 und der Regularität von λ. ■

Satz 2.1.21. *Sei G eine lokal-kompakte, topologische Gruppe*[1] *mit regulärem, translationsinvariantem*[2] *Maß μ und E ein beliebiger Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $f \in \mathrm{L}_1(G, E, \mu)$, $h \in G$ und $f_h : G \to E$ definiert durch $f_h(g) := f(g + h)$. Dann ist f_h μ-integrierbar mit*

$$\int_G f_h \,\mathrm{d}\mu = \int_G f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\lim_{h\to 0} \int_G \|f_h - f\|_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Beweis: Die μ-Integrierbarkeit und die Identität

$$\int_G f_h \,\mathrm{d}\mu = \int_G f \,\mathrm{d}\mu$$

sind für Treppenfunktionen offensichtlich erfüllt. Somit folgt die Behauptung für beliebige μ-integrierbare Abbildungen aus Definition 2.1.11. Die Aussage

$$\lim_{h\to 0} \int_G \|f_h - f\|_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

zeigt man leicht mittels Satz 2.1.20. ■

Folgerung 2.1.15. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und E ein beliebiger Fréchetraum. Ferner sei $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n, E, \lambda)$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $f_h : \mathbb{R}^n \to E$ definiert durch $f_h(g) := f(g + h)$. Dann ist f_h λ-integrierbar mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_h \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_h - f\|_n \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.1.21 und der Regularität des Lebesgue-Maßes. ■

[1]Man beachte, dass topologische Gruppen *per Definition* Hausdorff-Räume sind.

[2]Ein translationsinvariantes reguläres Maß wird in der Literatur oftmals auch als *Haarmaß* bezeichnet.

Definition 2.1.16. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und λ das Lebesgue-Maß. Dann sagen wir, dass sich eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von messbaren Mengen *kontrolliert auf* $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ *zusammenzieht*, wenn es eine Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\alpha > 0$ gibt mit

(a) $A_k \subset \omega_0 + B_{r_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\lambda(A_k) \geq \alpha\lambda(B_{r_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) $r_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Satz 2.1.22. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und E ein beliebiger Fréchetraum. Ferner sei $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n, E, \lambda)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen, die sich kontrolliert auf 0 zusammenzieht. Dann gilt für fast alle $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(A_k)} \int_{\omega_0 + A_k} \|f - f(\omega_0)\|_n \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Insbesondere gilt für fast alle $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda(A_k)} \int_{\omega_0 + A_k} f \, \mathrm{d}\lambda = f(\omega_0).$$

Beweis: [Rud87, Ch. 7, Thm. 7.10] und [HP57, Ch. III, Thm. 3.8.5] ■

Folgerung 2.1.16. *Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und sei E ein beliebiger Fréchetraum. Ferner sei $f \in \mathrm{L}_1\big((a, b), E, \lambda\big)$ und $F_c : (a, b) \to E$ definiert durch*

$$F_c(t) := \int_c^t f \, \mathrm{d}\lambda$$

mit $c \in (a, b)$. Dann ist F_c absolut stetig und fast überall differenzierbar. Ferner gilt $F_c'(t) = f(t)$ für fast alle $t \in (a, b)$.

Beweis: Die absolute Stetigkeit von F_c zeigt man wie für reellwertige Abbildungen. Die Identität $F_c'(t) = f(t)$ erhält man aus Satz 2.1.22. Denn es gilt μ-fast überall

$$\left\| \frac{F_c(t+h) - F_c(t)}{h} - f(t) \right\|_n \;\leq\; \frac{1}{|h|} \int_{[t,t+h]} \big\|f - f(t)\big\|_n \, \mathrm{d}\lambda \;\to\; 0$$

für $h \to 0$. ■

Bemerkung 2.1.14. Die „Umkehrung“ der obigen Folgerung, d.h., die Aussage, dass jede absolut stetige Abbildung $f : (a, b) \to E$ fast überall differenzierbar ist mit $f' \in \mathrm{L}_1\big((a, b), E, \lambda\big)$, gilt im Allgemeinen nur in endlich-dimensionalen Räumen, wie Beispiel 2.1.3 zeigt. Falls in einem unendlich-dimensionalen Raum E die obige „Umkehrung“ gilt, so bezeichnet man diese Eigenschaft von E in der Literatur auch als *Radon-Nikodym-Eigenschaft* [siehe z.B. [Rie68]].

Die beiden folgenden deutlich schwächeren Aussagen sind in beliebigen Fréchet-räumen erfüllt.

Folgerung 2.1.17. *Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und E ein beliebiger Fréchetraum. Ferner sei $f : (a,b) \to E$ absolut stetig und fast überall differenzierbar mit $f' \in \mathrm{L}_1\big((a,b), E, \lambda\big)$. Dann gilt*

$$f(t) = f(c) + \int_c^t f' \, \mathrm{d}\lambda$$

für alle $t \in (a,b)$.

Beweis: Man betrachte die Abbildung $g(t) := f(t) - f(c) - \int_c^t f' \, \mathrm{d}\lambda$. Dann gilt nach Folgerung 2.1.16 $g'(t) = 0$ für μ-fast alle $t \in (a,b)$. Somit erhält man die Behauptung durch Anwendung beliebiger linearer Funktionale und dem Hauptsatz über Lebesgue-integrierbare Abbildungen. ■

Satz 2.1.23 (Hauptsatz der Differentialrechnung- und Integralrechnung). *Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ und sei E ein beliebiger Fréchetraum.*

(a) Sei $f : (a,b) \to E$ stetig und $F_c : (a,b) \to E$ definiert durch

$$F_c(t) := \int_c^t f \, \mathrm{d}\lambda,$$

mit $c \in (a,b)$. Dann ist F_c stetig differenzierbar und für alle $t \in (a,b)$ gilt $F_c'(t) = f(t)$.

(b) Sei $f : (a,b) \to E$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $c \in (a,b)$ die Identität

$$f(t) := f(c) + \int_c^t f' \, \mathrm{d}\lambda$$

Beweis: Zu (a): Die Behauptung zeigt man wie für reellwertige Abbildungen.

Zu (b): Dies ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 2.1.17. ■

Das abschließende Beispiel zeigt, dass absolut stetige Abbildungen $f : [0,1] \to E$ in unendlich-dimensionalen Räumen im Allgemeinen *nicht* fast überall differenzierbar sind.

Beispiel 2.1.3. Sei $E := \mathrm{L}_1\big([0,1], \mathbb{R}, \lambda\big)$ der Banachraum aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $[0,1]$ und sei $f : [0,1] \to E$ definiert durch $f(t) := \chi_{[0,t]}$, wobei $\chi_{[0,t]}$ die charakteristische Abbildung von $[0,t]$ bezeichne. Dann gilt:

(a) Die Abbildung f ist absolut stetig.

(b) Der Differenzenquotient

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{\chi_{[t,t+h]}}{h}, \quad h > 0$$

an einer beliebigen Stelle $t \in [0,1]$ hat die Eigenschaft, dass das Maß des Trägers gegen 0 geht für $h \to 0$. Damit müsste die Ableitung an der Stelle t die Nullfunktion sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu

$$\left\| \frac{\chi_{[t,t+h]}}{h} \right\|_1 = 1$$

für alle $h > 0$ und somit ist f nirgends differenzierbar.

2.2 Differentialrechnung

Im folgenden Abschnitt stellen wir den von uns benutzen Differentiationsbegriff vor und listen einige elementare Eigenschaften auf. In Fréchetträumen oder allgemeiner in lokal-konvexen Räumen existiert eine „Unmenge“ an *nicht* äquivalenten Differenzierbarkeitskonzepten [siehe z.B. [FB66], [FK88], [Kel74] oder [AS67]]. Dies liegt, etwas vage formuliert, an dem großen Freiheitsgrad, den man bei der Wahl der Halbnormen im Zähler bzw. im Nenner des Differenzenquotienten hat. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen, besteht darin, sich auf Richtungsableitungen zu beschränken. Ferner existiert speziell bei Fréchetträumen eine weitere Schwierigkeit, was die Einführung höherer Ableitungen anbelangt. Denn der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen zwischen zwei Fréchetträumen trägt im Allgemeinen keine natürliche Fréchetraumtopologie mehr, sondern nur noch lokal-konvexe Topologien und somit besteht die Gefahr, die Klasse der Fréchetträume bei der Definition höherer Ableitungen zu verlassen. Eine Lösung dieses Problems erhält man dadurch, dass man die Ableitung „$\mathrm{D}f$“ einer Abbildung $f : U \subset E \to F$ *nicht* als Abbildung von U nach $L(E,F)$, sondern von $U \times E$ nach F auffasst. Dieses Konzept hat sich als sehr erfolgreich herausgestellt. Denn einerseits ist die Klasse der in diesem Sinne differenzierbaren Abbildungen in Bezug auf Anwendungen „reichhaltig“ genug, und andererseits „klein“ genug, um sinnvolle Ergebnisse, wie z.B. den Satz von Nash/Moser [siehe Abschnitt 5.1], zu erhalten. Eine ausführliche Darstellung der Theorie, an der sich auch unsere Zusammenfassung orientiert, findet der Leser in [Ham82].

Definition und Eigenschaften

Definition 2.2.1. Seien E und F reelle Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $f : U \to F$ eine beliebige Abbildung von U nach F.

(a) Dann heißt f *differenzierbar an der Stelle $x \in U$ in Richtung $h \in E$*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \quad =: \quad \mathrm{D}f(x)h.$$

für reelles t existiert. Wir bezeichnen $\mathrm{D}f(x)h$ als die *Richtungsableitung* von *f an der Stelle x in Richtung h.*

(b) Die Abbildung f heißt *stetig differenzierbar auf U*, wenn für alle $x \in U$ und alle $h \in E$ die Richtungsableitung $\mathrm{D}f(x)h$ existiert und die Abbildung $\mathrm{D}f : U \times E \to F$, $(x,h) \mapsto \mathrm{D}f(x)h$ stetig ist. Ferner bezeichnen wir die Menge aller stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach F mit $\mathrm{C}^1(U,E)$.

Bemerkung 2.2.1. Man beachte, dass die obige Definition der Differenzierbarkeit, falls E ein unendlich-dimensionaler Banachraum ist, *nicht* mit der üblichen Fréchet-Differenzierbarkeit übereinstimmt, sondern nur Gateaux-Differenzierbarkeit liefert [siehe z.B. [Dei85, Ch. 2, §7.7]].

Beispiel 2.2.1. Sei $E := \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ und $f \in \mathrm{C}^\infty\big([0,1]\times\mathbb{R}^{m+1},\mathbb{R}\big)$. Dann zeigt man leicht, dass die Abbildung $F : \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big) \to \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ definiert durch

$$F(x)(t) \;:=\; f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\big)$$

stetig differenzierbar ist.

Beispiel 2.2.1 lässt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Beispiel 2.2.2. Sei M eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und seien V und W Vektorraumbündel über M. Ferner sei D eine kovariante Ableitung auf M. Dann ist jeder (nichtlineare) Differentialoperator von $\mathrm{C}^\infty(M,V)$ nach $\mathrm{C}^\infty(M,W)$ stetig differenzierbar [vgl. [Ham82, Part I, Ex. 3.1.7]].

Beide Beispiele liefern sogar C^∞-Abbildungen im Sinne von Definition 2.2.3.

Lemma 2.2.1. *Seien E und F Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen und konvex. Ferner seien $x \in U$, $x \pm h \in U$ und $f : U \to F$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $t \in [-1,1]\setminus\{0\}$ die Identität*

$$\frac{1}{t}\Big(f(x+th)-f(x)\Big) \quad = \quad \int_0^1 \mathrm{D}f(x+\tau t h)h \,\mathrm{d}\tau.$$

Beweis: [Ham82, Part I, Lemma 3.2.4] ■

Satz 2.2.1. *Seien E und F Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $f : U \subset E \to F$ stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x \in U$ die Abbildung $\mathrm{D}f(x) : E \to F$ stetig und linear.*

Beweis: [Ham82, Part I, Lemma 3.2.3,Thm. 3.2.5] ∎

Lemma 2.2.2. *Seien E und F Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen und konvex. Die Abbildung $f : U \to F$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn es eine stetige Abbildung $A : U \times U \times E \to F$, $(x_1, x_2, h) \mapsto A(x_1, x_2)h$ gibt, die in h linear ist und die Identität*

$$f(x_2) - f(x_1) \quad = \quad A(x_1, x_2)(x_2 - x_1)$$

für alle $x_1, x_1 \in U$ erfüllt. Insbesondere gilt dann $\mathrm{D}f(x)h = A(x, x)h$ für alle $x \in U$ und alle $h \in E$.

Beweis: [Ham82, Part I, Lemma 3.3.1] ∎

Folgerung 2.2.1. *Jede stetig differenzierbare Abbildung ist insbesondere stetig.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 2.2.2. ∎

Satz 2.2.2 (Kettenregel). *Seien E, F, und G Fréchetträume und seien $U \subset E$ und $V \subset F$ offen. Ferner seien $f : U \to V$ und $g : V \to G$ stetig differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f : U \to V$ stetig differenzierbar und es gilt*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(x)h \quad = \quad \mathrm{D}g\big(f(x)\big)\mathrm{D}f(x)h$$

für alle $x \in U$ und alle $h \in E$.

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.3.4] ∎

Folgerung 2.2.2. *Sei E ein Fréchetraum und seien $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ und $\big(B(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ Familien stetiger, linearer Abbildungen von E in sich. Ferner seien die Abbildungen $(t, x) \mapsto A(t)x$ und $(t, x) \mapsto B(t)x$ stetig differenzierbar. Dann sind auch die Abbildungen $(t, x) \mapsto B(t)A(t)x$ und $(t, x) \mapsto A(t)B(t)x$ stetig differenzierbar.*

Beweis: Man betrachte die Abbildungen

$$f : [\alpha, \beta] \times E \to E, \qquad f(t, x) := A(t)x$$

$$g : [\alpha, \beta] \times E \to E, \qquad g(t, x) := B(t)x$$

$$G : [\alpha, \beta] \times E \to [\alpha, \beta] \times E, \qquad G(t, x) := \big(t, B(t)x\big)$$

Dann gilt $(f \circ G)(t, x) = f\big(t, g(t, x)\big) = A(t)B(t)x$. Somit folgt die Behauptung unmittelbar aus der Kettenregel 2.2.2. Für $(t, x) \mapsto B(t)A(t)x$ erhält man die Aussage völlig analog. ∎

Partielle Ableitungen

Definition 2.2.2. Seien E_1, E_2 und F reelle Fréchetträume und sei $U_1 \times U_2 \subset E_1 \times E_2$ offen. Ferner sei $f : U_1 \times U_2 \to F$ eine beliebige Abbildung.

(a) Dann heißt f *partiell differenzierbar nach* x_1 *an der Stelle* $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ *in Richtung* $h \in E$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + th, x_2) - f(x_1, x_2)}{t} \quad =: \quad \mathrm{D}_1 f(x_1, x_2)h$$

für reelles t existiert. Wir bezeichnen $\mathrm{D}_1 f(x_1, x_2)h$ als die *partielle Richtungsableitung von* f *nach* x_1 *an der Stelle* (x_1, x_2) *in Richtung* h. Entsprechend definieren wir die *partielle Richtungsableitung von* f *nach* x_2 *an der Stelle* (x_1, x_2) *in Richtung* k durch den Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + tk) - f(x_1, x_2)}{t} \quad =: \quad \mathrm{D}_2 f(x_1, x_2)k.$$

(b) Die Abbildung $f : U_1 \times U_2 \to F$ heißt *stetig partiell differenzierbar nach* x_1 *auf* $U_1 \times U_2$, wenn für alle $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ und alle $h \in E$ die partielle Richtungsableitung $\mathrm{D}_1 f(x_1, x_2)h$ existiert und die Abbildung $\mathrm{D}_1 f : U_1 \times U_2 \times E \to F$ stetig ist. Analog definieren wir die stetige partielle Differenzierbarkeit von f nach x_2.

Bemerkung 2.2.2. Die obige Definition besitzt eine offensichtliche Verallgemeinerung auf Abbildungen von mehr als zwei Variablen, auf die wir der Einfachheit halber hier verzichtet haben. Trotzdem wollen wir den Leser darauf aufmerksam machen, dass die folgenden Sätze entsprechend auch für Abbildungen mehrerer Variabler ihre Gültigkeit behalten.

Satz 2.2.3. *Seien* E_1, E_2 *und* F *Fréchetträume und sei* $U_1 \times U_2 \subset E_1 \times E_2$ *offen. Dann ist die Abbildung* $f : U_1 \times U_2 \to F$ *genau dann stetig differenzierbar, wenn* f *stetig partiell differenzierbar ist. Insbesondere gilt dann*

$$\mathrm{D}f(x_1, x_2)(h, k) \quad = \quad \mathrm{D}_1 f(x_1, x_2)h \; + \; \mathrm{D}_2 f(x_1, x_2)k$$

für alle $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ *und alle* $(h, k) \in E_1 \times E_2$.

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.4.3] ■

Folgerung 2.2.3. *Seien* E, F *und* G *Fréchetträume und sei* $U \subset E$ *offen. Ferner sei* $A : U \times F \to G$, $(x, h) \mapsto A(x)h$ *stetig, linear in* h *und stetig partiell differenzeibar in* x. *Dann ist* A *stetig differenzierbar.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.2.3. ■

Höhere Ableitungen

Definition 2.2.3. Seien E und F reelle Fréchetträume und $U \subset E$ offen. Ferner sei $f : U \to F$ stetig differenzierbar.

(a) Dann heißt $f : U \to E$ *zweifach stetig differenzierbar auf* U, wenn die Abbildung $\mathrm{D}f : U \times E \to F$ stetig partiell nach x differenzierbar ist, d.h., wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{D}f(x+tk)h - \mathrm{D}f(x)h}{t} \quad =: \quad \mathrm{D}^2 f(x)(h,k)$$

für alle $x \in U$ und alle $(h,k) \in E \times E$ existiert und die Abbildung $\mathrm{D}^2 f : U \times E \times E \to F$, $(x,h,k) \mapsto \mathrm{D}^2 f(x)(h,k)$ stetig ist.

(b) Sei $k \geq 2$. Dann heißt die Abbildung $f : U \to F$ *k-fach stetig differenzierbar auf* U, wenn sie $(k-1)$-*fach stetig differenzierbar auf* U ist und die Abbildung $\mathrm{D}^{k-1} f : U \times E^{k-1} \to F$, $(x, h_1, \ldots, h_{k-1}) \mapsto \mathrm{D}^{k-1} f(x)(h_1, \ldots, h_{k-1})$ stetig partiell differenzierbar nach x ist. Wir bezeichnen mit $\mathrm{C}^k(U,F)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Menge aller k-fach bzw. beliebig oft stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach E.

Satz 2.2.4. *Seien E, F und G Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $A : U \times F \to G$, $(x,h) \mapsto A(x)h$ stetig differenzierbar und linear in h. Dann ist die Abbildung $\mathrm{D}_1 f : U \times E \times E \to F$, $(x,h,k) \mapsto \mathrm{D}_1 f(x)(h,k)$ bilinear in (h,k).*

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.4.5] ■

Satz 2.2.5. *Sei $f : U \to F$ zweifach stetig differenzierbar. Dann ist $\mathrm{D}^2 f : U \times E \times E \to F$, $(x,h,k) \mapsto \mathrm{D}^2 f(x)(h,k)$ bilinear in (h,k). Ferner gilt für alle $x \in U$ und alle $(h,k) \in E \times E$ die Darstellung*

$$\mathrm{D}^2 f(x)(h,k) \quad = \quad \lim_{s,t \to 0} \frac{f(x+th+sk) - f(x+th) - f(x+sk) + f(x)}{st}.$$

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.5.2, Thm. 3.5.3] ■

Folgerung 2.2.4. *(a) Sei $f : U \to F$ zweifach stetig differenzierbar. Dann ist die zweite Ableitung symmetrisch in h und k, d.h.*

$$\mathrm{D}^2 f(x)(h,k) \quad = \quad \mathrm{D}^2 f(x)(k,h)$$

für alle $x \in U$ und alle $(h,k) \in E \times E$.

(b) Sei $f : U \to F$ k-fach stetig differenzierbar. Dann ist die k-te Ableitung multilinear und symmetrisch in $(h_1, \ldots, h_k)$.

Beweis: [Ham82, Part I, Cor. 3.5.4, Thm. 3.6.2] ■

Satz 2.2.6. *Seien E, F und G Frécheträume und seien $U \subset E$ und $V \subset F$ offen. Ferner seien $f : U \to V$ und $g : V \to G$ k-fach stetig differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f : U \to G$ k-fach stetig differenzierbar.*

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.5.5, Thm. 3.6.4] ■

Satz 2.2.7. *Seien E und F Frécheträume und sei $U \subset E$ offen und konvex. Ferner seien $x \in U$, $x + h \in U$ und $f : U \to F$ zweifach stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$f(x+h) \;=\; f(x) \;+\; \mathrm{D}f(x)h \;+\; \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x+th)(h,h)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: [Ham82, Part I, Thm. 3.5.6] ■

2.3 Holomorphe Abbildungen

In diesem Abschnitt stellen wir einige elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen, die wir später benötigen, zusammen. Bei der Auswahl der Sätze haben wir uns auf Fréchetraum-wertige Abbildungen einer komplexen Veränderlichen beschränkt.
Alle Ergebnisse aus der klassischen Funktionentheorie, auf die wir zurückgreifen, sind in Standardlehrbüchern wie z.B. [Rud87] oder [Lan93a] nachzulesen. Resultate zu Fréchetraum-wertigen, holomorphen Abbildungen findet man z.B. in [Rud73] und [Kom64]. Die Monographien [HP57] und [Her89] behandeln die allgemeinere Theorie holomorpher Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen, komplexen Vektorräumen.

Definition 2.3.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum.

(a) Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt *komplex differenzierbar* an der Stelle $\lambda \in U$ mit *Ableitung* $f'(\lambda)$, wenn der Grenzwert

$$f'(\lambda) := \lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

existiert.

(b) Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt *holomorph*, wenn f für alle $\lambda \in U$ komplex differenzierbar ist.

Auch der Begriff des Kurvenintegrals lässt sich problemlos auf Fréchetraum-wertige Abbildungen übertragen.

Definition 2.3.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum.

(a) Eine *Kurve in* $U \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\Gamma : [a, b] \to U$.

(b) Sei $f : U \to E$ holomorph und sei Γ eine Kurve in U. Dann heißt

$$\int_\Gamma f(\mu)\,\mathrm{d}\mu := \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

das *Kurvenintegral von* f *längs* Γ.

(c) Sei Γ eine Kurve in U und sei $\lambda \notin \Gamma([a, b])$. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\lambda) := \int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda}\,\mathrm{d}\mu$$

die *Windungszahl von* Γ *um* λ.

Bemerkung 2.3.1. Nach Lemma 2.1.18 existiert das Integral

$$\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

für jede stetige Abbildung $f : U \to E$ und jede Kurve $\Gamma : [a, b] \to U$. Somit ist insbesondere für jede holomorphe Abbildung $f : U \to E$ das Kurvenintegral von f längs Γ wohldefiniert.

Satz 2.3.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Die Abbildung $f : U \to E$ ist holomorph.

(b) Die Abbildung $f : U \to E$ ist schwach holomorph auf U, d.h., für jedes $x^* \in E^*$ ist die Abbildung $f_{x^*} : U \to \mathbb{C}$, $f_{x^*}(\lambda) := \langle x^*, f(\lambda)\rangle$ holomorph.

(c) Die Abbildung $f : U \to E$ ist stetig und für jede offene Kreisscheibe $\mathbb{D}_r$ mit $\overline{\mathbb{D}}_r \subset U$ und alle $\lambda \in \mathbb{D}_r$ gilt

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(\mu)}{\mu - \lambda}\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $f : U \to E$ holomorph und sei $x^* \in E^*$. Dann ist die Abbildung $f_{x^*} : U \to \mathbb{C}$, $f_{x^*}(\lambda) := \langle x^*, f(\lambda)\rangle$ offensichtlich komplex differenzierbar auf U und es gilt $f'_{x^*}(\lambda) = \langle x^*, f'(\lambda)\rangle$. Also ist $f : U \to \mathbb{C}$ schwach holomorph.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $f : U \to E$ schwach holomorph auf U. Wir zeigen zuerst, dass f auch stetig ist. Sei also $\lambda \in U$ und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E. Wähle ein $r > 0$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}_{2r}$ um λ ganz in U liegt. Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{f_{x^*}(\mu) - f_{x^*}(\lambda)}{\mu - \lambda} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\mu-\lambda)} \int\limits_{\partial\mathbb{D}_{2r}} \left(\frac{f_{x^*}(\nu)}{\nu-\mu} - \frac{f_{x^*}(\nu)}{\nu-\lambda}\right) \mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial\mathbb{D}_{2r}} \frac{f_{x^*}(\nu)}{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)} \,\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

für alle $x^* \in E^*$ und alle $\mu \in \mathbb{D}_{2r} \setminus \{\lambda\}$. Daraus folgt die Abschätzung

$$\left|\frac{f_{x^*}(\mu) - f_{x^*}(\lambda)}{\mu - \lambda}\right| \le \frac{\max_{\nu\in\partial\mathbb{D}_{2r}} |f_{x^*}(\nu)|}{r}$$

für alle $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_r \setminus \{\lambda\}$, d.h., die Menge

$$\left\{ \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \;\middle|\; \mu \in \overline{\mathbb{D}}_r \setminus \{\lambda\} \right\}$$

ist schwach beschränkt und somit nach Satz 1.2.6 auch stark beschränkt. Daher existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $M \ge 0$ mit

$$\left\|\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}\right\|_n \le M$$

für alle $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_r \setminus \{\lambda\}$. Daraus folgt

$$\Big\|f(\mu) - f(\lambda)\Big\|_n \le |\mu - \lambda| M$$

für alle $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_r$, d.h., $f : U \to E$ ist stetig.

Aus der Stetigkeit von f erhalten wir nun die gewünschte Darstellung wie folgt. Sei $\mathbb{D}_r$ eine beliebige, offene Kreisscheibe mit $\overline{\mathbb{D}}_r \subset U$. Dann folgt aus der schwachen Holomorphie von f die Identität

$$f_{x^*}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f_{x^*}(\mu)}{\mu - \lambda} \,\mathrm{d}\mu \tag{2.2}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{D}_r$ und alle $x^* \in E^*$. Da f stetig, also insbesondere integrierbar ist, folgt aus Satz 2.1.11 die Darstellung

$$\Big\langle x^*, f(\lambda)\Big\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big\langle x^*, \int\limits_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}\,\mathrm{d}\mu\Big\rangle$$

für alle $\lambda \in \mathbb{D}_r$ und alle $x^* \in E^*$. Somit gilt nach Satz 1.2.5 die Identität

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}\,\mathrm{d}\mu$$

für alle $\lambda \in \mathbb{D}_r$.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $f : U \to E$ stetig mit Integraldarstellung wie in (c). Ferner sei $\lambda \in U$ und $\mathbb{D}_r$ eine offene Kreisscheibe um λ mit $\overline{\mathbb{D}}_r \subset U$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\mu-\lambda)}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\left(\frac{f(\nu)}{\nu-\mu}-\frac{f(\nu)}{\nu-\lambda}\right)\mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\nu)}{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}\,\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

für alle $\nu \in \mathbb{D}_r \setminus \{\lambda\}$. Aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 folgt

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)^2}\,\mathrm{d}\nu,$$

d.h., f ist in jedem Punkt $\lambda \in U$ komplex differenzierbar, also holomorph. ∎

Satz 2.3.2 (Cauchyscher Integralsatz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner sei $f : U \to E$ holomorph und Γ eine geschlossene, nullhomologe Kurve in U, d.h., $\mathrm{ind}_\Gamma(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt*

$$\int\limits_\Gamma f(\mu)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Beweis: Sei $f : U \to E$ holomorph und Γ eine geschlossene, nullhomologe Kurve in U. Nach Satz 2.3.1 und dem Cauchyschen Integralsatz der klassischen Funktionentheorie gilt

$$\Big\langle x^*, \int\limits_\Gamma f(\mu)\,\mathrm{d}\mu\Big\rangle = \int\limits_\Gamma \Big\langle x^*, f(\mu)\Big\rangle\,\mathrm{d}\mu = 0$$

für alle $x^* \in E^*$. Somit folgt aus Satz 1.2.5

$$\int_\Gamma f(\mu)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Satz 2.3.3 (Cauchysche Integralformel). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner sei $f : U \to E$ holomorph und Γ eine geschlossene, nullhomologe Kurve in U. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar, d.h., alle höheren Ableitungen $f^{(n)}$ existieren und sind holomorph. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in U$ die Darstellung*

$$\operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Sei $f : U \to E$ holomorph. Dann ist f insbesondere schwach holomorph und es gilt

$$f'_{x^*}(\lambda) = \Big\langle x^*, f'(\lambda)\Big\rangle$$

für alle $\lambda \in U$ und alle $x^* \in E^*$. Damit ist auch $f' : U \to E$ schwach holomorph, also nach Satz 2.3.1 holomorph. Mittels Induktion folgt nun, dass alle Ableitungen von f holomorph sind und die Identität

$$f^{(n)}_{x^*}(\lambda) = \Big\langle x^*, f^{(n)}(\lambda)\Big\rangle$$

für alle $\lambda \in U$ und alle $x^* \in E^*$ erfüllen. Ferner erhalten wir mit Hilfe der klassischen Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_\Gamma(\lambda)\Big\langle x^*, f^{(n)}(\lambda)\Big\rangle &= \operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) f^{(n)}_{x^*}(\lambda) \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_{x^*}(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \Big\langle x^*, \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu\Big\rangle
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in U$ und alle $x^* \in E^*$, und somit folgt aus Satz 1.2.5

$$\operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu.$$

für alle $\lambda \in U$. ■

Satz 2.3.4 (Satz von Morera). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner sei $f : U \to E$ stetig und für jedes Dreieck $\Delta \subset U$ gelte*

$$\int_{\partial\Delta} f(\mu)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Dann ist $f : U \to E$ holomorph.

Beweis: Sei $x^* \in E^*$ und erfülle $f : U \to E$ die obigen Voraussetzungen. Dann ist $f_{x^*} : U \to \mathbb{C}$, $f_{x^*}(\lambda) := \langle x^*, f(\lambda)\rangle$ stetig, und es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f_{x^*}(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \Big\langle x^*, \int_{\partial\Delta} f(\mu)\,\mathrm{d}\mu \Big\rangle = 0$$

für jedes beliebige Dreieck $\Delta \subset U$. Aus der klassischen Version des Satzes von Morera folgt somit die Holomorphie von f_{x^*}, also die schwache Holomorphie von f. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.3.1. ∎

Satz 2.3.5 (Satz von Liouville). *Sei E ein komplexer Fréchetraum und sei $f : \mathbb{C} \to E$ holomorph. Ferner sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) Die Abbildung f ist beschränkt, d.h., $f(\mathbb{C})$ ist eine beschränkte Teilmenge von E.

(b) Es existiert eine stetige Norm $\|\cdot\|$ auf E und eine Konstante $M \geq 0$ mit $\|f(\lambda)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dann ist f konstant.

Beweis: Zu (a): Sei $f : \mathbb{C} \to E$ beschränkt und holomorph. Dann ist auch $f_{x^*} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_{x^*}(\lambda) := \langle x^*, f(\lambda)\rangle$ für jedes $x^* \in E^*$ beschränkt und holomorph, und somit nach dem Satz von Liouville aus der klassischen Funktionentheorie konstant. Daraus folgt

$$\Big\langle x^*, f(\lambda)\Big\rangle = \Big\langle x^*, f(0)\Big\rangle$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x^* \in E^*$, also $f(\lambda) = f(0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h., f ist konstant.

Zu (b): Sei $f : \mathbb{C} \to E$ holomorph und sei $\|\cdot\|$ eine stetige Norm auf E mit $\|f(\lambda)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Ferner sei $\mathbb{D}_r$ eine beliebige Kreisscheibe um λ. Nach Satz 2.3.3 gilt

$$\begin{aligned}
\Big\|f'(\lambda)\Big\| &= \Big\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda)^2}\,\mathrm{d}\mu\Big\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{M}{|\mu-\lambda|^2}\,|\mathrm{d}\mu| \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2\pi r \;=\; \frac{M}{r} \;\to\; 0
\end{aligned}$$

für $r \to \infty$. Daraus folgt $\|f'(\lambda)\| = 0$, also $f'(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und somit ist f konstant. ■

Satz 2.3.6 (Identitätssatz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner seien $f : U \to E$ und $g : U \to E$ holomorphe Abbildungen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Abbildungen f und g sind identisch auf U.

(b) Die Menge $\{\lambda \in U \mid f(\lambda) = g(\lambda)\}$ hat einen Häufungspunkt in U.

(c) Es gibt ein $\lambda \in U$ mit $f^{(n)}(\lambda) = g^{(n)}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Während die Implikationen (a) $\Longrightarrow$ (b) und (a) $\Longrightarrow$ (c) offensichtlich erfüllt sind, erhalten wir die Aussagen (b) $\Longrightarrow$ (a) und (c) $\Longrightarrow$ (a) durch Anwendung des klassischen Identitätssatzes auf die Abbildungen $f_{x^*} : U \to \mathbb{C}$, $x^* \in E^*$ in Verbindung mit Satz 1.2.5. ■

Satz 2.3.7 (Maximumprinzip). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner sei $f : U \to E$ holomorph und $\|\cdot\|$ eine stetige Halbnorm auf E. Dann gilt:*

(a) Falls $\|f(\cdot)\|$ ein lokales Maximum bei $\lambda \in U$ hat, so ist $\|f\|$ lokal konstant um $\lambda \in U$.

(b) Falls $\|f(\cdot)\|$ ein globales Maximum bei $\lambda \in U$ hat, so ist $\|f\|$ konstant auf U.

Beweis: Zu (a): Sei $\mathbb{D}_r$ eine offene Kreisscheibe um $\lambda \in U$ derart, dass $\|f(\cdot)\|$ eingeschränkt auf $\overline{\mathbb{D}}_r$ ein globales Maximum bei λ hat. Dann gilt für alle $r' \leq r$ die Abschätzung

$$\|f(\lambda)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial \mathbb{D}_{r'}} \left\| \frac{f(\mu)}{\mu - \lambda} \right\| |\mathrm{d}\mu| \leq \max_{\mu \in \partial \mathbb{D}_{r'}} \|f(\mu)\| \leq \|f(\lambda)\|.$$

Daraus folgt, dass $\|f(\cdot)\|$ auf $\overline{\mathbb{D}}_r$ konstant ist.

Zu (b): Aus (a) und der Stetigkeit von $\|f(\cdot)\|$ folgt, dass die Menge $V := \{\mu \in U \mid \|f(\mu)\| = \|f(\lambda)\|\}$ offen und abgeschlossen ist. Da U zusammenhängend ist, gilt somit $U = V$. ■

Bemerkung 2.3.2. Man beachte, dass in Satz 2.3.7 (a) bzw. (b) *nicht* behauptet wird, die Abbildung f sei (lokal) konstant. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies im Allgemeinen auch falsch ist.

Beispiel 2.3.1. Sei $E := \mathbb{C}^2$ versehen mit $\|(\lambda_1, \lambda_2)\| := \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$ und sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^2$, $f(\lambda) := (1, \lambda)$. Dann besitzt $\|f(\cdot)\|$ bei $\lambda = 0$ ein globales Maximum, aber f ist offensichtlich nicht konstant auf $\mathbb{D}$.

Folgerung 2.3.1 (Schwaches Maximumprinzip). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt, E ein komplexer Fréchetraum und $\|\cdot\|$ eine stetige Halbnorm auf E. Ferner sei $f : \overline{U} \to E$ stetig und $f : U \to E$ holomorph. Dann gilt*

$$\max_{\lambda \in U} \Big\| f(\lambda) \Big\| = \max_{\lambda \in \partial U} \Big\| f(\lambda) \Big\|.$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Kompaktheit von $\overline{U}$ und Satzes 2.3.7 (b). ■

Definition 2.3.3. Sei E ein komplexer Fréchetraum und sei $\big(x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in E. Dann heißt

$$r := \sup \left\{ \widetilde{r} \geq 0 \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k \text{ konvergiert für } |\lambda| \leq \widetilde{r} \right\} \in [0, \infty]$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$ in E.

Lemma 2.3.1. *Sei E ein komplexer Fréchetraum, $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E und $\big(x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in E. Ferner seien r_1, r_2 und r_3 definiert durch*

$$\begin{aligned} r_1 &:= \sup \left\{ |\lambda| \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k \text{ konvergiert} \right\} \in [0, \infty], \\ r_2 &:= \sup \left\{ |\lambda| \;\middle|\; \big(\lambda^k x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt} \right\} \in [0, \infty] \\ r_3 &:= \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|x_k\|_n} \Big) \right)^{-1} \in [0, \infty]. \end{aligned}$$

Dann gilt $r_1 = r_2 = r_3 = r$, wobei r den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$ im Sinne von Definition 2.3.3 bezeichne.

Beweis: Zu $r = r_1$: Aus Definition 2.3.3 folgt sofort $r \leq r_1$. Somit genügt es, $r_1 \leq r$ zu zeigen. Sei also $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$ existiert. Dann ist $\big(\lambda^k x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt. Somit gibt es für jedes

$n \in \mathbb{N}$ eine Konstante $M \geq 0$, so dass für alle $l \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{l} \mu^k x_k \right\|_n &= \left\| \sum_{k=0}^{l} \lambda^k \Big(\frac{\mu}{\lambda} x_k \Big)^k \right\|_n \\ &\leq \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{|\mu|}{|\lambda|} \right)^k \|\lambda^k x_k\|_n \\ &\leq M \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{|\mu|}{|\lambda|} \right)^k \end{aligned} \tag{2.3}$$

erfüllt ist. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < |\lambda|$. Daraus folgt $r_1 \leq r$.

Zu $r = r_2$: Sei $\lambda \in \mathbb{D}_r$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$ und somit ist $\big(\lambda^k x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt. Daraus folgt $r \leq r_2$. Sei nun umgekehrt die Folge $\big(x_k \lambda^k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt. Dann erhalten wir aus Abschätzung (2.3), dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < |\lambda|$ konvergiert, also $r_1 \leq r$.

Zu $r = r_3$: Sei o.B.d.A. $r \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$. Dann ist $\big(\lambda^k x_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante M mit

$$\|\lambda^k x_k\|_n \leq M$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$\sqrt[k]{\|x_k\|_n} \cdot |\lambda| \leq \sqrt[k]{M}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|x_k\|_n} \leq |\lambda|^{-1}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lambda \in \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$ beliebig gewählt war, erhalten wir insgesamt

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|x_k\|_n} \leq |r|^{-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $r \leq r_3$.
Sei nun o.B.d.A. $r_3 \neq 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \widetilde{r} < r_3$ die Abschätzung

$$\|x_k\|_n \leq \widetilde{r}^{-k}$$

für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit existiert für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $M \geq 0$ mit

$$\left\| \sum_{k=0}^{l} x_k \lambda^k \right\|_n = \sum_{k=0}^{l} \|x_k\|_n |\lambda|^k \leq M \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{|\lambda|}{\widetilde{r}} \right)^k$$

für alle $l \in N_0$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < r_3$, also $r_3 \leq r$. ∎

Bemerkung 2.3.3. Falls $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, können wir in der obigen Definition von r_3 das Supremum „$\sup_{n\in\mathbb{N}}$“ durch den Grenzwert „$\lim_{n\to\infty}$“ ersetzen, d.h.,

$$r_3 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\|x_k\|_n}\right)\right)^{-1} \in [0,\infty].$$

Satz 2.3.8. *Sei $U\subset\mathbb{C}$ offen und sei E ein komplexer Fréchetraum. Dann gilt:*

(a) Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k x_k$ in E stellt im Inneren ihres Konvergenzkreises eine holomorphe Abbildung dar.

(b) Jede holomorphe Abbildung $f: U\to E$ ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.

Beweis: Zu (a): Sei o.B.d.A. $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k$ eine Potenzreihe um 0 mit Konvergenzradius $r>0$. Dann gilt

$$\left\langle x^*, \sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\langle x^*, x_k\rangle\lambda^k$$

für alle $\lambda\in\mathbb{D}_r$ und alle $x^*\in E^*$. Somit ist die Abbildung $\mathbb{D}_r\ni\lambda\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}x_k\lambda^k$ offensichtlich schwach holomorph, also nach Satz 2.3.1 holomorph.

Zu (b): Sei $f: U\to E$ holomorph und sei $\lambda_0\in U$. Ferner sei $\mathbb{D}_r\subset U$ eine Kreisscheibe um λ_0. Dann erhalten wir aus Satz 2.3.1 die Darstellung

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}\,\mathrm{d}\mu\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda_0)}\left(1-\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\right)^{-1}\mathrm{d}\mu\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\mu)}{\mu-\lambda_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\right)^{k}\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

für alle $\lambda\in\mathbb{D}_r$. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes von Lebesgue 2.1.15

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\mu\,(\lambda-\lambda_0)^k$$

für alle $\lambda\in\mathbb{D}_r$. Somit ist f in eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k x_k$ um λ_0 entwickelbar und es gilt

$$x_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{f(\mu)}{(\mu-\lambda_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\mu$$

für alle $k\in\mathbb{N}_0$. ∎

Bemerkung 2.3.4. Der obige Beweis zeigt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um $\lambda_0 \in U$, wie in der klassischen Funktionentheorie, durch den Radius der maximalen Kreisscheibe $\mathbb{D}_r$ um λ_0, die ganz in U liegt, nach unten abgeschätzt werden kann.

Definition 2.3.4. Sei E ein reeller Fréchetraum. Eine Abbildung $f : (a, b) \to E$ heißt *reell analytisch*, wenn f lokal in eine reelle Potenzreihe entwickelbar ist.

Satz 2.3.9. *Sei E ein reeller Fréchetraum und sei $\widehat{E}$ seine Komplexifizierung. Ferner sei $f : (a, b) \to E$ reell analytisch. Dann existiert eine zusammenhängende Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von (a, b) und eine eindeutige, holomorphe Fortsetzung $\widehat{f} : U \to \widehat{E}$ von f auf U.*

Beweis: Da f lokal in eine reelle Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(t - t_0)^k x_k$ entwickelbar ist, können wir f offensichtlich lokal auf eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Aus dem Identitätssatz 2.3.6 folgt nun, dass diese lokalen Fortsetzungen eine eindeutige, holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}$ von f definieren. ■

Bemerkung 2.3.5. Man beachte, Satz 2.3.9 besagt *nicht*, dass es eine eindeutige Fortsetzung $\widehat{f}$ von f gibt, sondern dass es eine Umgebung U gibt, auf der die Fortsetzung $\widehat{f} : U \to \widehat{E}$ eindeutig ist.

Definition 2.3.5. (a) Sei $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und perfekt, d.h., A besitzt keine isolierten Punkte, und sei E ein komplexer Fréchetraum. Dann heißt $f : A \to E$ *holomorph*, wenn es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von A und eine holomorphe Fortsetzung von f auf U gibt.

(b) Sei E ein reeller Fréchetraum. Dann heißt $f : [a, b] \to E$ *reell analytisch*, wenn es ein offenes Intervall (c, d) um $[a, b]$ und eine reell analytische Fortsetzung von f auf (c, d) gibt.

Satz 2.3.10. *(a) Sei $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und perfekt und sei E ein komplexer Fréchetraum. Ferner seien $f_1 : U_1 \to E$ und $f_2 : U_2 \to E$ holomorphe Fortsetzungen von $f : A \to E$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von A mit $f_1|_U = f_2|_U$.*

(b) Sei E ein reeller Fréchetraum und seien $f_1 : (c_1, d_1) \to E$ und $f_2 : (c_2, d_2) \to E$ reell analytische Fortsetzungen von $f : [a, b] \to E$. Dann existiert ein offenes Intervall $(c, d) \subset \mathbb{R}$ um $[a, b]$ mit $f_1|_{(c,d)} = f_2|_{(c,d)}$.

Beweis: Zu (a): Seien $f_1 : U_1 \to E$ und $f_2 : U_2 \to E$ holomorphe Fortsetzungen von $f : A \to E$. Ferner sei U die Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten von $U_1 \cap U_2$, die mit A einen nicht-leeren Durchschnitt besitzen. Dann ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von A und aus dem Identitätssatz 2.3.6 folgt $f_1|_U = f_2|_U$.

Zu (b): Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Teil (a) und Satz 2.3.9. ■

Abschließend betrachten wir noch einige Anwendungen der obigen Ergebnisse auf Potenzreihen stetiger, linearer Operatoren.

Definition 2.3.6. Seien E und F komplexe Fréchetträume und sei $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen, linearen Operatoren von E nach F. Dann heißt

$$r := \sup\left\{\widetilde{r} \geq 0 \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x \text{ konvergiert für alle } x \in E \text{ und } |\lambda| \leq \widetilde{r}\right\} \in [0,\infty]$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$.

Bemerkung 2.3.6. Wir müßten eigentlich den Raum $\mathrm{L}(E,F)$ mit einer geeigneten Topologie versehen, um von Konvergenz der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$ reden zu können. Im Allgemeinen jedoch, genauer gesagt, wenn E nicht normierbar ist, sind die kanonischen, lokal konvexen Topologien τ_s, τ_c und τ_b von $\mathrm{L}(E,F)$ [siehe z.B. [Bou87, Sch71]] *nicht metrisierbar*, also insbesondere keine Fréchetraum-Topologien. Daher haben wir es vorgezogen in Definition 2.3.6, die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$ auf die punktweise Konvergenz zurückzuführen, ohne explizite Angabe der zugehörigen Topologie τ_s. Somit stellt sich die Frage, ob die obige Potenzreihe bezüglich der stärkeren Topologien τ_c und τ_b kleinere Konvergenzradien hat. Das folgende Lemma 2.3.2 zeigt jedoch, dass dies in Fréchetträumen nicht möglich ist. Insbesondere bedeutet dies für Banachräume E und F, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$ in der Banachalgebra $\mathrm{L}_b(E,F)$ mit dem Konvergenzradius im Sinne von Definition 2.3.6 übereinstimmt.

Lemma 2.3.2. *Seien E und F komplexe Fréchetträume und sei $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen, linearen Operatoren von E nach F. Ferner seien r_1 und r_2 definiert durch*

$$\begin{aligned} r_1 &:= \sup\left\{|\lambda| \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x \text{ konvergiert für alle } x \in E\right\} \in [0,\infty], \\ r_2 &:= \sup\left\{|\lambda| \;\middle|\; \Big(\lambda^k A_k\Big)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ ist gleichgradig stetig}\right\} \in [0,\infty]. \end{aligned}$$

Dann gilt $r_1 = r_2 = r$, wobei r den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$ im Sinne von Definition 2.3.6 bezeichne.

Beweis: Zu $r = r_1$: Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.3.1.

Zu $r = r_2$: Sei o.B.d.A. $r > 0$ und $\lambda \in \mathbb{D}_r$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x$ für alle $x \in E$ und somit ist $\big(\lambda^k A_k x\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere für alle $x \in E$ beschränkt.

Somit folgt aus dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2, dass $\left(\lambda^k A_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig stetig ist. Daher gilt $r \le r_2$.
Sei nun o.B.d.A. $r_2 > 0$ und $\lambda \in \mathbb{D}_{r_2}$. Dann ist offensichtlich die Folge $\left(\lambda^k A_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig stetig und somit ist $\left(\lambda^k A_k x\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach Lemma 1.2.1 für alle $x \in E$ beschränkt. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k x$ nach Lemma 2.3.1 für alle $x \in E$ und alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < |\lambda|$, also $r_2 \le r$. ■

Satz 2.3.11. *Seien E und F komplexe Fréchetträume und sei $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen, linearen Operatoren von E nach F. Ferner besitze die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x$$

für jedes $x \in E$ einen positiven Konvergenzradius $r_x > 0$. Dann besitzt auch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$$

einen positiven Konvergenzradius $r > 0$ im Sinne von Definition 2.3.6.

Beweis: Nach Lemma 2.3.2 genügt es zu zeigen, dass ein $\lambda \neq 0$ existiert, so dass $\left(\lambda^k A_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig stetig ist. Daher betrachten wir in $\mathrm{L}(E,F)$ die Folge von Familien

$$\mathcal{F}_n := \Big((1/n)^k A_k\Big)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Angenommen, keine der Familien $\mathcal{F}_n$ wäre gleichgradig stetig. Dann existiert nach dem Prinzip der kondensierenden Singularitäten 1.2.3 ein $x_0 \in E$, so dass die Folgen

$$\mathcal{F}_n(x_0) := \Big((1/n)^k A_k x_0\Big)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

in F unbeschränkt sind. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x_0$$

einen positiven Konvergenzradius $r_{x_0} > 0$ besitzt. Folglich ist $\mathcal{F}_n$ mindestens für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichgradig stetig. Somit ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.3.2. ■

Bemerkung 2.3.7. In *nicht-Baireschen*, lokal-konvexen Räumen ist Satz 2.3.11 im Allgemeinen falsch. Ein Beispiel dafür findet man in Kapitel 3, Abschnitt 3.1.

Satz 2.3.12. *Seien E und F komplexe Frécheträume und sei $\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen, linearen Operatoren von E nach F. Ferner besitze die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k$$

einen positiven Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt:

(a) *Die Abbildung $\mathbb{D}_r \ni \lambda \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k x$ ist für jedes $x \in E$ holomorph.*

(b) *Die Abbildung $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k x$, $x \in E$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{D}_r$ stetig und linear.*

(c) *Die Familie $\left(x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k x \;\middle|\; \lambda \in K\right)$ von stetigen linearen Abbildungen ist für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{D}_r$ gleichgradig stetig.*

(d) *Die Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k x$ ist auf $\mathbb{D}_r \times E$ beliebig oft differenzierbar [3].*

Beweis: Zu (a): Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.3.8.

Zu (b): Die Aussage folgt aus dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2 angewandt auf die Folge $\big(\sum_{k=0}^{l}\lambda^k A_k\big)_{l\in\mathbb{N}_0}$ von stetigen, linearen Abbildungen.

Zu (c): Sei $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E und sei $K \subset \mathbb{D}_r$. Da jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{D}_r$ in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}_{\widetilde{r}}$ mit $\widetilde{r} < r$ enthalten ist, können wir o.B.d.A. $K = \overline{\mathbb{D}}_{\widetilde{r}}$ annehmen. Ferner können wir ein $s > 0$ mit $\widetilde{r} < s < r$ wählen. Dann ist nach Lemma 2.3.2 die Folge $\big(s^k A_k\big)_{k\in N_0}$ gleichgradig stetig, d.h., für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|s^k A_k x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k x\right\|_m &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda}{s}\Big)^k s^k A_k x\right\|_m \\
&\leq M\|x\|_n \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|\lambda|}{s}\right)^k \\
&\leq \frac{Ms}{s-\widetilde{r}}\|x\|_n,
\end{aligned}$$

[3] siehe Bemerkung 2.3.8

für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \overline{\mathbb{D}_{\widetilde{r}}}$ und somit ist $\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x \;\middle|\; \lambda \in \overline{\mathbb{D}_{\widetilde{r}}} \right)$ gleichgradig stetig.

Zu (d): Sei $\Phi : \mathbb{D}_r \times E \to E$ definiert durch

$$\Phi(\lambda, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x.$$

Dann existieren nach Satz 2.3.3 und Satz 2.3.12 (a)–(c) alle partiellen Ableitungen und es gilt

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial\lambda^m \partial x^n}(\lambda, x) \cdot (h_1, \dots, h_n) \ = \ = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \lambda^k A_{k+m} x & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \lambda^k A_{k+m} h_1 & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n \geq 2 \end{cases}$$

für $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ und $(\lambda, x) \in \mathbb{D}_r \times E$. Somit genügt es nach Satz 2.2.3 zu zeigen, dass alle partiellen Ableitungen stetig sind. Da ferner alle Ableitungen von Φ Potenzreihen in λ sind, also die gleiche Gestalt wie Φ besitzen, können wir uns darauf beschränken, die Stetigkeit von Φ zu beweisen. Sei nun $\left(\| \cdot \|_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E und seien $x, y \in E$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{D}_r$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\|\Phi(\mu, y) - \Phi(\lambda, x)\|_m \ \leq \ \|\Phi(\mu, y) - \Phi(\mu, x)\|_m + \|\Phi(\mu, x) - \Phi(\lambda, x)\|_m.$$

Nach (c) existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|\Phi(\mu, x) - \Phi(\mu, y)\|_m \leq M \|x - y\|_n$$

für alle $x, y \in E$ und alle $\mu \in \overline{\mathbb{D}_{\widetilde{r}}}$ mit $|\lambda| < \widetilde{r} < r$. Daraus folgt

$$\|\Phi(\mu, y) - \Phi(\lambda, x)\|_m \ \leq \ M \|y - x\|_n + \|\Phi(\mu, x) - \Phi(\lambda, x)\|_m$$

für alle $x, y \in E$ und alle $\mu \in \overline{\mathbb{D}_{\widetilde{r}}}$. Somit erhalten wir die Stetigkeit von Φ auf $\mathbb{D}_r \times E$ unmittelbar aus (a). ■

Bemerkung 2.3.8. Die Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k x$ ist nicht nur beliebig oft differenzierbar sondern sogar holomorph auf $\mathbb{D}_r \times E$. Da der Begriff *holomorph* von uns jedoch nur für Abbildungen einer komplexen Veränderlichen definiert wurde, haben wir die entsprechende Holomorphie-Aussage in Satz 2.3.12 „unterschlagen“ und verweisen den interessierten Leser diesbezüglich auf [HP57] oder [Her89].

Lemma 2.3.3. *Seien E, F und G komplexe Fréchetträume. Ferner seien $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k : E \to F$ und $\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l B_l : F \to G$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien $r_a > 0$ bzw. $r_b > 0$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l A_l x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \mu^l \lambda^{k-l} B_l A_{k-l} x$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{D}_{r_a}$ und alle $\mu \in \mathbb{D}_{r_b}$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{D}_{r_a}$, $\mu \in \mathbb{D}_{r_b}$ und $x \in E$. Ferner sei $\big(\| \cdot \|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $K \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{\infty} \mu^k \lambda^l B_k A_l x - \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{k} \mu^l \lambda^{k-l} B_l A_{k-l} x \Big\|_m \\
= \; & \Big\| B_0 \sum_{l=K+1}^{\infty} \lambda^l A_l x + \mu B_1 \sum_{l=K}^{\infty} \lambda^l A_l x + \cdots + \\
& \mu^{K-1} B_{K-1} \sum_{l=2}^{\infty} \lambda^l A_l x + \mu^K B_K \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sei nun $s > 0$ so gewählt, dass $|\mu| < s < r_b$ gilt. Dann ist die Folge $\big(s^k B_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach Lemma 2.3.2 gleichgradig stetig, d.h., für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|s^k B_k x\|_m \leq M \|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $k \in N_0$. Dies liefert uns die folgende Abschätzung, in der $[\cdot]$ die Gaußsche Klammerfunktion bezeichnet.

$$\Big\| B_0 \sum_{l=K+1}^{\infty} \lambda^l A_l x + \cdots + \mu^K B_K \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \quad =$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\| B_0 \sum_{l=K+1}^{\infty} \lambda^l A_l x + \Big(\frac{\mu}{s}\Big) s B_1 \sum_{l=K}^{\infty} \lambda^l A_l x + \cdots + \\
&\quad \Big(\frac{\mu}{s}\Big)^{K-1} s^{K-1} B_{K-1} \sum_{l=2}^{\infty} \lambda^l A_l x + \Big(\frac{\mu}{s}\Big)^{K} s^{K} B_{K} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \\
&\leq \Big\| B_0 \sum_{l=K+1}^{\infty} \lambda^l A_l x + \cdots + \Big(\frac{\mu}{s}\Big)^{K-[K/2]} s^{K-[K/2]} B_{K-[K/2]} \sum_{l=[K/2]+1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \\
&+ \Big\| \Big(\frac{\mu}{s}\Big)^{K+1-[K/2]} s^{K+1-[K/2]} B_{K+1-[K/2]} \sum_{l=[K/2]}^{\infty} \lambda^l A_l x + \cdots + \Big(\frac{\mu}{s}\Big)^{K} s^{K} B_{K} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \\
&\leq M \Big\| \sum_{l=K+1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_n + \cdots + \Big(\frac{|\mu|}{s}\Big)^{K-[K/2]} M \Big\| \sum_{l=[K/2]+1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_n \\
&+ \Big(\frac{|\mu|}{s}\Big)^{K+1-[K/2]} M \Big\| \sum_{l=[K/2]}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_n + \cdots + \Big(\frac{|\mu|}{s}\Big)^{K} M \Big\| \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_n .
\end{aligned}
$$

Da weiterhin die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l A_l x$ konvergiert, ist $\big(\sum_{l=L}^{\infty} \lambda^l A_l x\big)_{L \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt. Somit existiert erstens zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $L' \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\Big\| \sum_{l=L}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \leq \varepsilon$$

für alle $L \geq L'$ und zweitens zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein M' mit

$$\Big\| \sum_{l=L}^{\infty} \lambda^l A_l x \Big\|_m \leq M'$$

für alle $L \in N_0$. Damit erhalten wir insgesamt die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{\infty} \mu^k \lambda^l B_k A_l x - \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{k} \mu^l \lambda^{k-l} B_l A_{k-l} x \Big\|_m \\
&\quad \leq M\varepsilon \sum_{k=0}^{K-[K/2]} \Big(\frac{|\mu|}{s}\Big)^k + MM' \sum_{k=K+1-[K/2]}^{\infty} \Big(\frac{|\mu|}{s}\Big)^k
\end{aligned}
$$

für alle $K \in \mathbb{N}_0$ mit $[K/2] \geq L'$. Daraus folgt

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{\infty} \mu^k \lambda^l B_k A_l x = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{k} \mu^l \lambda^{k-l} B_l A_{k-l} x.$$

Andererseits liefert die Stetigkeit der B_k die Identität

$$\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{\infty}\mu^k\lambda^l B_k A_l x = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k B_k\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l A_l x\right)$$

und somit gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k B_k\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l A_l x\right) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{k}\mu^l\lambda^{k-l}B_l A_{k-l}x.$$

■

Satz 2.3.13. *Seien E, F und G komplexe Fréchetträume. Ferner seien $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k : E\to F$ und $\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l B_l : F\to G$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien $r_a > 0$ bzw. $r_b > 0$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k B_k\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l A_l x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\lambda^k B_l A_{k-l}x$$

für alle $x\in E$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \min\{r_a, r_b\}$, d.h., das Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k B_k\right)\circ\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l A_l\right)$$

lässt sich für $|\lambda| < \min\{r_a, r_b\}$ als Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k C_k$ mit

$$C_k = \sum_{l=0}^{k} B_l A_{k-l}$$

für alle $k\in\mathbb{N}_0$ darstellen.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 2.3.3. ■

Kapitel 3

Lineare Halbgruppen in Frécheträumen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wiederholen wir einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften aus der Theorie linearer Halbgruppen in Frécheträumen. Dabei betonen wir insbesondere die jeweiligen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur Theorie in Banachräumen. Im zweiten Abschnitt werden infinitesimale Generatoren von C^∞-Halbgruppen charakterisiert. Dabei zeigt sich, dass die Theorie exponentiell gleichgradig stetiger C^∞-Halbgruppen sehr ähnlich zur Theorie stark stetiger Halbgruppen in Banachräumen ist, während lokal gleichgradig stetige C^∞-Halbgruppen in Frécheträumen neuer Beweismethoden bedürfen.
Als Vorlage und Orientierung für dieses Kapitel benutzten wir vorwiegend die Monographien [Paz83], [HP57], [DS66], [Kat66] und [Yos71]. Ausführliche Literatur zum Thema *Lineare Halbgruppen* findet der Leser in der Bibliographie am Ende der Arbeit. Als weitere wichtige Referenzen erwähnen wir: [Miy59], [BB67], [Kōm68], [Kre71], [Ōuc73], [Kis76], [Dav80] und [Lun95].

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Im Weiteren bezeichne E einen beliebigen Fréchetraum und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein zugehöriges Fundamentalsystem.

Definition 3.1.1. (a) Eine *reelle* 1-*Parameter-Familie* $\big(T(t)\big)_{t\in I}$ *von stetigen linearen Operatoren* auf E ist eine Abbildung $T : I \to L(E)$ eines offenen oder abgeschlossenen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in die Menge aller stetigen, linearen Operatoren auf E.

(b) Eine *reelle* 1-*Parameter-Halbgruppe* $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *von stetigen, linearen Operato-*

ren auf E ist eine 1-Parameter-Familie mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} \text{(HG1)} & T(0) = \mathbf{I} \\ \text{(HG2)} & T(t) \circ T(s) = T(t+s) \quad \text{für alle } t, s \geq 0. \end{array}$$

(c) Eine *reelle 1-Parameter-Gruppe* $\Big(T(t)\Big)_{t \in \mathbb{R}}$ *von stetigen, linearen Operatoren* auf E ist eine 1-Parameter-Familie mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} \text{(G1)} & T(0) = \mathbf{I} \\ \text{(G2)} & T(t) \circ T(s) = T(t+s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Der Einfachheit halber verwenden wir im weiteren oftmals nur die Bezeichnung „Halbgruppe auf E“ und verzichten auf die Zusätze „reelle 1-Parameter“ sowie „von stetigen, linearen Operatoren“.

Bemerkung 3.1.1. Sowohl die obigen als auch die folgenden Definitionen besitzen offensichtlich eine Verallgemeinerung auf lokal konvexe Räume [siehe z.B. [Yos71], [Kom64], [Kōm68], [Kis76]].

Wir unterscheiden im Folgenden verschiedene Klassen von Halbgruppen aufgrund ihres Konvergenzverhaltens[1] für $t \to 0^+$ bzw. ihres Wachstumsverhaltens für $t \to \infty$.

Definition 3.1.2. Eine reelle 1-Parameter-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ von stetigen, linearen Operatoren auf E heißt

(a) *gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen* oder kurz C_b*-Halbgruppe*, wenn die Abbildungen $T(t)(\cdot)$ für $t \to 0^+$ gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von E gegen $\mathbf{I}$ konvergieren.

(b) *gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen* oder kurz C_c*-Halbgruppe*, wenn die Abbildungen $T(t)(\cdot)$ für $t \to 0^+$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von E gegen $\mathbf{I}$ konvergieren.

(c) *stark stetig* oder kurz C^0*-Halbgruppe*, wenn für jedes $x \in E$ die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ in $t = 0$ stetig ist.

(d) *stark differenzierbar* oder kurz C^∞*-Halbgruppe*, wenn für jedes $x \in E$ die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ in $t = 0$ differenzierbar ist.

(e) *stark analytisch* oder kurz C^ω*-Halbgruppe*, wenn für jedes $x \in E$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ analytisch[2] auf $[0, \varepsilon)$ ist.

[1] Obwohl die Schreibweise $t \to 0$ für Halbgruppen keine Mißverständnisse verursachen sollte, da Halbgruppen nur für $t \geq 0$ definiert sind, benutzen wir dennoch die suggestivere Notation $t \to 0^+$, um den Leser an die Einschränkung $t \geq 0$ zu erinnern.

[2] vgl. Definition 2.3.5

(f) *stark messbar* oder kurz *$\mathcal{M}$-Halbgruppe*, wenn für jedes $x \in E$ die Abbildung $t \to T(t)x$, $t \in (0, \infty)$ Lebesgue-messbar[3] ist.

(g) *exponentiell gleichgradig stetig*, wenn es ein $\omega \geq 0$ gibt, so dass die 1-Parameter-Familie $\big(e^{-\omega t}T(t)\big)_{t\geq 0}$ gleichgradig stetig ist.

(h) *lokal gleichgradig stetig*, wenn für jedes $b \geq 0$ die 1-Parameter-Familie $\big(T(t)\big)_{t\in[0,b]}$ gleichgradig stetig ist.

Bemerkung 3.1.2. (a) Eine Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auf E ist genau dann gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen, wenn die Abbildung $T(t)(\cdot)$ bezüglich der starken Operatortopologie τ_b in $t = 0$ stetig ist [vgl. Bemerkung 2.3.6].

(b) Die starke Stetigkeit einer Halbgruppe läßt sich offensichtlich auch als gleichmäßige Stetigkeit auf endlichen Mengen deuten.

(c) Nach Definition 1.2.1 ist eine Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ genau dann exponentiell bzw. lokal gleichgradig stetig, wenn $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ für ein beliebiges Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von E die Bedingung (g′) bzw. (h′) erfüllt.

(g′) Es gibt eine Konstante $\omega \in \mathbb{R}$, so dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\|T(t)x\|_m \leq M e^{\omega t}\|x\|_n \qquad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } t \geq 0.$$

Dabei darf $M \geq 0$ von $m \in \mathbb{N}$ abhängen, $\omega \in \mathbb{R}$ jedoch nicht.

(h′) Zu jedem $b \geq 0$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existieren ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T(t)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq [0, b]$. Dabei darf $M \geq 0$ von $m \in \mathbb{N}$ und $b \geq 0$ abhängen.

Lemma 3.1.1. *[HP57, SV65] Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine stark messbare Halbgruppe auf E. Dann gilt:*

(a) Für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subset (0, \infty)$ ist $\Big(T(t)\Big)_{t\in[a,b]}$ gleichgradig stetig.

(b) Für jedes $x \in E$ ist die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ stetig auf $(0, \infty)$.

Beweis: Zu (a) Sei $[a, b] \subset (0, \infty)$ ein beliebiges kompaktes Intervall. Nach dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2 genügt es zu zeigen, dass die Mengen $\{T(t)x \mid t \in [a, b]\}$ für jedes feste $x \in E$ beschränkt sind.

[3]im Sinne von Definition 2.1.7

Angenommen $\{T(t)x \mid t \in [a,b]\}$ wäre für ein $x \in E$ unbeschränkt. Dann gibt es eine stetige Halbnorm $\|\cdot\|$ auf E und eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit

$$\|T(t_k)x\| \geq k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da $[a,b]$ kompakt ist, können wir annehmen, dass $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $c \in [a,b]$ konvergiert. Ferner folgt aus der Messbarkeit von $t \mapsto T(t)x$, $t \in (0,\infty)$ und aus Satz 2.1.5, dass es eine messbare Teilmenge $M \subset (0,c]$ gibt, so dass $\{T(s)x \mid s \in M\}$ beschränkt bleibt und $\lambda(M) \geq c/2$ gilt, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichne. Wir betrachten nun die Mengen

$$M_k := \Big\{t_k - s \;\Big|\; s \in M\Big\} \cap \Big(0,\infty\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich sind alle M_k messbar und es gilt $\lambda(M_k) \geq c/4$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\lambda\Big(\limsup_{k\to\infty} M_k\Big) = \lambda\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\geq k} M_l\Big) \geq \frac{c}{4},$$

also insbesondere $\limsup_{k\to\infty} M_k \neq \emptyset$. Sei nun $t_0 \in \limsup_{k\to\infty} M_k$ beliebig gewählt. Dann gilt $t_k - t_0 \in M$ und somit

$$\|T(t_0)T(t_k - t_0)x\| = \|T(t_k)x\| \geq k$$

für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\{T(t_0)T(s)x \mid s \in M\} = T(t_0)\{T(s)x \mid s \in M\}$ unbeschränkt. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zur Beschränktheit der Menge $\{T(s)x \mid s \in M\}$. Somit ist die Beschränktheit von $\big\{T(t)x \;\big|\; t \in [a,b]\big\}$ für alle $x \in E$, also die gleichgradige Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\in[a,b]}$ gezeigt.

Zu (b): Sei $t_0 \in (0,\infty)$ und sei $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem von E. Wir wählen $a, b \in (0,\infty)$ mit $0 < a < b < t_0$. Dann gelten für alle $s \in [a,b]$ und alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq b - t_0$ die Gleichungen

$$T(t_0)x = T(s)T(t_0 - s) \quad \text{und} \quad T(t_0 + h)x = T(s)T(t_0 + h - s).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(b-a)\Big(T(t_0+h)x - T(t_0)x\Big) &= \int_a^b T(t_0+h)x - T(t_0)x \,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b T(s)\Big(T(t_0+h-s)x - T(t_0-s)x\Big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

und somit erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\|_m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\|T(s)\Big(T(t_0+h-s)x - T(t_0-s)x\Big)\Big\|_m \,\mathrm{d}s.$$

Da $\big(T(s)\big)_{s\in[a,b]}$ nach Teil (a) gleichgradig stetig ist, existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T(s)x\|_m \leq M\|x\|_n$ für alle $x \in E$ und alle $s \in [a,b]$. Dies impliziert die Abschätzung

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\|_m \leq \frac{M}{b-a}\int_a^b \Big\|T(t_0+h-s)x - T(t_0-s)x\Big\|_n \,\mathrm{d}s.$$

Aus der Messbarkeit von $t \mapsto T(t)x$, $t \in (0,\infty)$ und aus Satz 2.1.21 folgt

$$\int_a^b \Big\|T(t_0+h-s)x - T(t_0-s)x\Big\|_n \,\mathrm{d}s \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0$$

und daher gilt $\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\|_m \to 0$ für $h \to 0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$. Somit haben wir gezeigt, dass $t \mapsto T(t)x$ in $t_0 \in (0,\infty)$ stetig ist. Da $t_0 \in (0,\infty)$ beliebig gewählt war, folgt daraus die Behauptung. ■

Bemerkung 3.1.3. Lemma 3.1.1 besagt *nicht*, dass eine stark messbare Halbgruppe lokal gleichgradig bzw. stark stetig ist, denn in beiden Aussagen von Lemma 3.1.1 ist die Stelle $t = 0$ ausgenommen. Beispiel 3.1.1 zeigt, dass dies im Allgemeinen falsch ist.

Lemma 3.1.2. *(a) Jede stark stetige Halbgruppe auf E ist lokal gleichgradig stetig.*

(b) Für jede stark stetige Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auf E ist die Abbildung $(t,x) \mapsto T(t)x$ stetig auf $[0,\infty) \times E$.

(c) Jede stark stetige Halbgruppe auf E ist auch gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen.

Beweis: Zu (a): Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine beliebige stark stetige Halbgruppe und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem auf E. Nach dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2 genügt es zu zeigen, dass die Mengen $\{T(t)x \mid t \in [0,b]\}$ für jedes $b \geq 0$ und jedes $x \in E$ beschränkt sind.
Angenommen $\{T(t)x \mid t \in [0,b]\}$ wäre für ein $b \geq 0$ und ein $x \in E$ unbeschränkt. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0,b]$ mit

$$\|T(t_k)x\|_{n_0} \geq k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aus der Stetigkeit von $T(t)$ folgt für $h \geq 0$ und für festes $t \geq 0$ die Abschätzung

$$\Big\|T(t+h)x - T(t)x\Big\|_m \;=\; \Big\|T(t)\Big(T(h)x - x\Big)\Big\|_m \leq M\Big\|T(h)x - x\Big\|_n,$$

d.h., $t \mapsto T(t)x$, $t \in [0,\infty)$ ist rechtsseitig stetig, also nach Satz 2.1.19 insbesondere messbar auf $(0,\infty)$. Somit impliziert Lemma 3.1.1, dass die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Dies steht jedoch im Widerspruch zur starken Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$, denn diese liefert für kleine $t \geq 0$ die Abschätzung

$$\|T(t)x\|_{n_0} \leq \|T(t)x - x\|_{n_0} + \|x\|_{n_0} \leq 1 + \|x\|_{n_0}.$$

Somit haben wir die Beschränktheit von $\big\{T(t)x \;\big|\; t \in [0,b]\big\}$ für jedes $b \geq 0$ und jedes $x \in E$ gezeigt und daraus folgt unmittelbar die lokale gleichgradige Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

Zu (b): Seien $x, y \in E$ und $t \in [0, \infty)$. Ferner sei $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem von E. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq t$ und alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\|T(t+h)x - T(t)y\|_m \\
&\leq \|T(t+h)x - T(t)x\|_m + \|T(t)x - T(t)y\|_m \\
&\leq \|T(t)(x-y)\|_m + \begin{cases} \|T(t)(T(h)x - x)\|_m & \text{für} \quad h \geq 0 \\ \|T(t+h)(x - T(-h)x)\|_m & \text{für} \quad h \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $T(t)$ existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $M' \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T(t)(x-y)\|_m \;\leq\; M'\|x-y\|_n.$$

$$\|T(t)(T(h)x - x)\|_m \;\leq\; M'\|T(h)x - x\|_n \quad \text{für } h \geq 0.$$

Ferner folgt aus der gleichgradigen Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auf $[0, 2t]$, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M'' \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|T(t+h)(x - T(-h)x)\|_m \;\leq\; M''\|T(-h)x - x\|_n \quad \text{für } h \leq 0$$

Somit erhalten wir für $M := \max\{M', M''\}$ die Abschätzung

$$\|T(t+h)x - T(t)y\|_m \leq M\Big(\big\|T(|h|)x - x\big\|_n + \big\|x - y\big\|_n\Big),$$

d.h., $(t, x) \mapsto T(t)x$ ist stetig auf $[0, \infty) \times E$.

Zu (c): Angenommen, $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ wäre stark stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen. Dann existiert eine Nullfolge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\big(T_k := T(t_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen $\mathbf{I}$ konvergiert. Andererseits folgt aus der starken Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$, dass $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $\mathbf{I}$ konvergiert. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zu Folgerung 1.2.1. Somit ist jede stark stetige Halbgruppe auch gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen. ■

Bemerkung 3.1.4. (a) In Banachräumen ist die lokale gleichgradige Stetigkeit einer Halbgruppe äquivalent zur lokalen Beschränktheit (bzgl. der Operatornorm), d.h. es gibt eine Konstante $M \geq 0$ und ein $b > 0$, so dass für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\|T(t)\| \leq M$$

gilt. Daraus folgt mit $\omega := b_0^{-1} \ln M$ die globale Abschätzung [siehe [Paz83, Ch. 1, Thm. 2.2]]

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$$

für alle $t \in [0, \infty)$. Somit ist auf Banachräumen jede stark stetige Halbgruppe auch exponentiell gleichgradig stetig. Dies ist in Frécheträumen im Allgemeinen nicht der Fall, wie die Beispiele 3.1.2 und 3.1.3 zeigen.

(b) Teil (c) des obigen Lemmas besagt, dass in Frécheträumen oder allgemeiner in tonnelierten lokal konvexen Räumen die Klasse der C_c-Halbgruppen mit der Klasse der C_0-Halbgruppen übereinstimmt.

Zur weiteren Untersuchung von Halbgruppen erweist sich das Konzept des infinitesimalen Generators als sehr nützlich. Es dient dazu, das „infinitesimale“ Verhalten der Halbgruppe bei $t = 0$ genauer zu beschreiben.

Definition 3.1.3. Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine reelle 1-Parameter-Halbgruppe von stetigen, linearen Operatoren auf E und sei $\mathrm{D}(A)$ die Menge aller $x \in E$, für die der Grenzwert (3.1) in E existiert. Dann heißt der lineare Operator $A : \mathrm{D}(A) \subset E \to E$, definiert durch

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \tag{3.1}$$

der *infinitesimale Generator* der Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

Obwohl der Definitionsbereich $\mathrm{D}(A)$ des infinitesimalen Generators im Allgemeinen nur ein echter Unterraum von E ist, zeigt Satz 3.1.1, dass er dennoch für stark stetige Halbgruppen „groß“ genug ist, um die Halbgruppe eindeutig zu charakterisieren. Zum Beweis von Satz 3.1.1 benötigen wir zunächst einige technische Ergebnisse, die im folgenden Lemma zusammengestellt sind.

Lemma 3.1.3. *Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Generator $A : \mathrm{D}(A) \to E$. Dann gilt:*

(a) Für alle $x \in E$ ist die Abbildung $t \mapsto \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau$ auf $[0, \infty)$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau = T(t)x.$$

(b) *Für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$ gilt $\int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \in \mathrm{D}(A)$ und*

$$A \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau = T(t)x - x.$$

(c) *Für alle $x \in \mathrm{D}(A)$ und alle $t \geq 0$ gilt $T(t)x \in \mathrm{D}(A)$ und*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Insbesondere vertauschen A und $T(t)$ auf $\mathrm{D}(A)$ für alle $t \geq 0$.

(d) *Für alle $x \in \mathrm{D}(A)$ und alle $s, t \geq 0$ gilt*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \,\mathrm{d}\tau = \int_s^t AT(\tau)x \,\mathrm{d}\tau.$$

(e) *Für alle $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $(0, \infty)$ gilt*

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \in \bigcap_{k=0}^\infty \mathrm{D}(A^k) =: \mathrm{D}^\infty(A).$$

Beweis: Zu (a): Die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung folgt unmittelbar aus Lemma 3.1.2 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnug 2.1.23.

Zu (b): Sei $h > 0$ und $x \in E$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(\tau+h)x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^h T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right). \end{aligned}$$

Aus Teil (a) folgt

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right) = T(t)x - x,$$

d.h.,

$$\int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \in \mathrm{D}(A) \quad \text{und} \quad A\int_0^t T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau = T(t)x - x.$$

Zu (c): Sei $h > 0$ und sei $x \in \mathrm{D}(A)$. Dann gilt

$$\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \;=\; \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \;=\; T(t)\frac{T(h)x - x}{h}.$$

Daraus folgt

$$AT(t)x \;:=\; \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \;=\; T(t)Ax$$

Für $t > 0$ und $-t < h < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\ &= \; T(t+h)\frac{x - T(-h)x}{h} \;=\; T(t+h)\frac{T(h)x - x}{-h}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sei nun $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E. Aus (3.2) und Lemma 3.1.2 folgt

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\|_m \\ &\le\; \left\|T(t+h)\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax\right)\right\|_m + \left\|\left(T(t+h) - T(t)\right)Ax\right\|_m \\ &\le\; M\left\|\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax\right)\right\|_n + \left\|\left(T(t+h) - T(t)\right)Ax\right\|_m \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax.$$

Daher stimmen die rechts- bzw linksseitigen Ableitungen von $t \mapsto T(t)x$ für $t > 0$ überein, d.h., $t \mapsto T(t)x$ ist differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Insbesondere ist die Ableitung $t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax$ nach Lemma 3.1.2 stetig auf $[0,\infty)$.

Zu (d): Seien $s, t \ge 0$ und sei $x \in \mathrm{D}(A)$. Dann folgt aus Teil (c) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 2.1.23 die Identität

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau.$$

Zu (e): Sei $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $(0,\infty)$ und sei $x_\varphi \in E$ definiert durch

$$x_\varphi := \int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Da φ kompakten Träger hat, ist x_φ für jedes $x \in E$ nach Lemma 2.1.18 wohldefiniert. Sei nun $h > 0$ und $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von E. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)x_\varphi - x_\varphi}{h} &= \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau+h)x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^\infty \varphi(\tau-h)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)}{h}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

und somit liefert Lemma 3.1.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(h)x_\varphi - x_\varphi}{h} - \int_0^\infty -\varphi'(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau\right\|_m &= \\
&= \left\|\int_0^\infty \left(\varphi'(\tau) - \frac{\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)}{-h}\right)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau\right\|_m \\
&\leq \int_0^\infty \left|\varphi'(\tau) - \frac{\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)}{-h}\right| \|T(\tau)x\|_m\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq M\int_0^\infty \left|\varphi'(\tau) - \frac{\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)}{-h}\right| \mathrm{d}\tau\|x\|_n.
\end{aligned}$$

Da der Träger von φ kompakt ist, konvergiert $\dfrac{\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)}{-h}$ für $h \to 0^+$ gleichmäßig gegen $\varphi'(\tau)$ auf $[0,\infty)$. Daraus folgt

$$Ax_\varphi := \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x_\varphi - x_\varphi}{h} = -\int_0^\infty \varphi'(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Mittels Induktion über $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$A^k x_\varphi := A\Big(A^{k-1}x_\varphi\Big) = (-1)^k\int_0^\infty \varphi^{(k)}(\tau)T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

■

Wir kommen nun zu dem schon angekündigten Satz 3.1.1, der die wichtigsten Eigenschaften des infinitesimalen Generators einer stark stetigen Halbgruppe auf E zusammenfaßt.

Satz 3.1.1. *(a) Der infinitesimale Generator $A : \mathrm{D}(A) \to E$ einer stark stetigen Halbgruppe auf E ist ein dicht-definierter, abgeschlossener, linearer Operator. Insbesondere ist*

$$\mathrm{D}^\infty(A) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{D}(A^k)$$

dicht in E.

(b) Der Operator $A : \mathrm{D}(A) \to E$ ist genau dann stetig, wenn $\mathrm{D}(A) = E$ gilt.

(c) Jede stark stetige Halbgruppe auf E ist eindeutig durch ihren infinitesimalen Generator bestimmt, d.h., zwei stark stetige Halbgruppen $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ und $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ auf E haben genau dann den gleichen infinitesimalen Generator, wenn $T(t) = S(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt.

Beweis: Zu (a): Die Linearität des Operators A folgt unmittelbar aus Definition 3.1.3.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit von A betrachten wir eine beliebige Folge $\big(x_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{D}(A)$ mit $x_k \to x$ und $Ax_k \to y$ für $k \to \infty$. Nach Lemma 3.1.3 gilt

$$\frac{T(h)x_k - x_k}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)Ax_k \,\mathrm{d}\tau.$$

Dann folgt aus Lemma 3.1.2 und dem Satz von Lebesgue 2.1.15

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)y \,\mathrm{d}\tau.$$

Somit erhalten wir wiederum aus Lemma 3.1.3 die Identität

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = y,$$

d.h., A ist abgeschlossen.

Zum Beweis, dass A dicht-definiert ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{D}^\infty(A)$ dicht in E liegt, denn $\mathrm{D}^\infty(A) \subset \mathrm{D}(A)$. Sei also $l \in E^*$ ein stetiges, lineares Funktional auf E mit $l|_{\mathrm{D}^\infty(A)} = 0$. Nach Satz 2.1.11 und Lemma 3.1.3 gilt

$$0 = l\left(\int_0^\infty \varphi(\tau)T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau\right) = \int_0^\infty \varphi(\tau)l\Big(T(\tau)x\Big)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

für alle $x \in E$ und alle $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $(0, \infty)$. Daraus folgt $l = 0$. Denn ist $l(x) \neq 0$ für ein $x \in E$, so ist aus Stetigkeitsgründen auch

$l\Big(T(\tau)x\Big) \neq 0$ in einer Umgebung von $\tau = 0$. Dann gibt es aber ein $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\Big(T(\tau)x\Big)\,\mathrm{d}\tau \neq 0.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Gleichung (3.3). Somit ist gezeigt, $l|_{\mathrm{D}^\infty(A)} = 0$ impliziert $l = 0$. Mit Satz 1.2.5 folgt daraus, dass $\mathrm{D}^\infty(A)$ dicht in E liegt.

Zu (b): Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Teil (a) und dem Satz vom abgeschlossenen Graphen 1.2.4.

Zu (c): Seien $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ und $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ zwei beliebige, stark stetige Halbgruppen auf E und seien A_T bzw. A_S ihre infinitesimalen Generatoren.

„$\Longrightarrow$“: Sei $A_T = A_S =: A$ und sei $x \in \mathrm{D}(A)$. Dann wählen wir ein beliebiges, aber festes $s \geq 0$ und betrachten die Abbildung $t \mapsto \varphi_s(t) := S(t)T(s-t)$ für $t \in [0, s]$. Aus Lemma 3.1.3 folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_s(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S(\tau)T(s-t)x\Big|_{\tau=t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S(t)T(s-\tau)x\Big|_{\tau=t} \\
&= A_S S(t)T(s-t)x - S(t)A_T T(s-t)x \\
&= A_S S(t)T(s-t)x - A_T S(t)T(s-t)x \;=\; 0,
\end{aligned}$$

und somit gilt $\varphi_s(0) = \varphi_s(s)$, also $T(s)x = S(s)x$ für alle $x \in \mathrm{D}(A)$. Da $\mathrm{D}(A)$ in E dicht ist, folgt daraus $T(s) = S(s)$.

„$\Longrightarrow$“: Sei $T(t) = S(t)$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt offensichtlich $A_T = A_S$. ■

Folgerung 3.1.1. *Der infinitesimale Generator einer* 1*-Parameter-Halbgruppe von stetigen, linearen Operatoren auf E ist genau dann ein stetiger linearer Operator auf E, wenn die Halbgruppe stark differenzierbar ist.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Teil (b) des obigen Satzes 3.1.1 und den Definitionen 3.1.2 und 3.1.3. ■

Die folgenden Beispiele sollen abschließend die in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe und einige Phänomene, die in Fréchеträumen aber nicht in Banachräumen auftreten können, illustrieren.

Beispiel 3.1.1. Dieses Beispiel zeigt, dass stark messbare Halbgruppen nur stetig auf $(0, \infty)$ aber *nicht* stark stetig sind.

Sei $E := l_2(\mathbb{N})$ und sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)_n := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}t}x_n + (\frac{n+1}{2})^2 t\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}t}x_{n+1} & \text{für} \quad n \ \text{ungerade} \\ \\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}t}x_n & \text{für} \quad n \ \text{gerade} \end{cases}$$

für alle $x \in l_2(\mathbb{N})$, d.h., $T(t)$ wird durch die unendliche 2×2-Block-Diagonalmatrix

$$T(t) \sim \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & & & & \\ & & & & 0 & \cdots \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & & & & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & \mathrm{e}^{-nt} & n^2 t\mathrm{e}^{-nt} & \\ & 0 & & & & \\ & & & 0 & \mathrm{e}^{-nt} & \\ & \vdots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dargestellt. Der zugehörige infinitesimale Generator A hat die Gestalt

$$\Big(Ax\Big)_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}x_n + (\frac{n+1}{2})x_{n+1} & \text{für} \quad n+1 \in 2\mathbb{N} \\ \\ -\frac{n}{2}x_n & \text{für} \quad n \in 2\mathbb{N} \end{cases},$$

für alle $x \in \mathrm{D}(A) = \{x \in l_2(\mathbb{N}) \mid Ax \in l_2(\mathbb{N})\}$, oder

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & -n & n^2 & \\ & 0 & & & & \\ & & & 0 & -n & \\ & \vdots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ferner verifiziert man leicht, dass für jedes $x \in l_2(\mathbb{N})$ die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ auf $(0, \infty)$ stetig, also messbar ist. Die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist jedoch *nicht* stark stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_2 &:= \sup_{\|x\|_2 = 1} \|T(t)x\|_2 \\ &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} n^2 t\mathrm{e}^{-nt} \\ &\approx \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{t} \ \rightarrow \ \infty \end{aligned}$$

für $t \rightarrow 0$ und dies steht, falls $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ stark stetig ist, im Widerspruch zu Lemma 3.1.2.

In Beispiel 3.1.2 und 3.1.3 geben wir zwei stark stetige Halbgruppen auf Fréchet-räumen an, die *nicht* exponentiell gleichgradig stetig sind.

Beispiel 3.1.2. Sei $E := \mathrm{C}(\mathbb{R})$ versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|x\|_n := \sup_{s\in[-n,n]} |x(s)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

und sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)(s) := x(s+t).$$

Dann ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ offensichtlich stark stetig. Ferner gilt für $\widehat{x}(s) := \mathrm{e}^{s^2}$ die Abschätzung

$$\|T(t)\widehat{x}\|_1 = \sup_{s\in[-1,1]} |\widehat{x}(s+t)| = e^{(t+1)^2}.$$

Daraus folgt aber sofort, dass die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *nicht* exponentiell gleichgradig stetig ist.

Beispiel 3.1.3. Sei $E := \sum_{\exp}(\mathbb{R})$ der Raum aller exponentiell fallenden Folgen in $\mathbb{R}$, d.h.,

$$\textstyle\sum_{\exp}(\mathbb{R}) := \Big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nk}|x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\Big\}$$

versehen mit dem Fundamentalsystem[4]

$$\|x\|_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{nk}|x_k|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)_k := \mathrm{e}^{kt}x_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [0,1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\|_n &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{nk}|(\mathrm{e}^{kt}-1)x_k| \\
&= \sup_{k\leq K} \mathrm{e}^{nk}|(\mathrm{e}^{kt}-1)x_k| \;+\; \sup_{k>K} \mathrm{e}^{nk}|(\mathrm{e}^{kt}-1)x_k| \\
&\leq |\mathrm{e}^{Kt}-1|\cdot\|x\|_n \;+\; \sup_{k>K} \mathrm{e}^{(n+1)k}|x_k| \\
&\leq |\mathrm{e}^{Kt}-1|\cdot\|x\|_n \;+\; \mathrm{e}^{-(K+1)}\|x\|_{n+2}.
\end{aligned}$$

[4]vgl. Kapitel 5, Definition 5.1.3

Da wir $K \in \mathbb{N}$ in der obigen Ungleichung beliebig groß wählen können, folgt daraus, dass die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ stark stetig ist. Dagegen erhalten wir für $t = m \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\|T(t)x\|_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{nk}|\mathrm{e}^{kt}x_k| = \|x\|_{n+m}.$$

Folglich kann $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *nicht* exponentiell gleichgradig stetig sein.

Das nächste Beispiel zeigt, dass lokal/exponentiell gleichgradig stetige Halbgruppen im Allgemeinen nicht stark stetig sind. Dies ist jedoch keine Besonderheit von Halbgruppen auf Frécheträumen, sondern tritt schon in unendlich-dimensionalen Banachräumen auf.

Beispiel 3.1.4. Sei $E := L_\infty(\mathbb{R})$ versehen mit der Standardnorm

$$\|x\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{s\in\mathbb{R}} |x(s)|$$

und sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)(s) := x(s+t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe von Isometrien, d.h.,

$$\|T(t)x\|_\infty = \|x\|_\infty$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$, und folglich ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ lokal/exponentiell gleichgradig stetig. Jedoch sieht man leicht, dass $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *nicht* stark stetig, ja nicht einmal stark messbar ist.

3.2 Erzeugung von linearen Halbgruppen

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die grundlegenden Eigenschaften von linearen Halbgruppen untersucht wurden, charakterisieren wir nun deren infinitesimale Generatoren. Wir beschränken uns jedoch auf stark differenzierbare Halbgruppen, da für unsere spätere Anwendung nur diese von Interesse sind. Für weitere Resultate über stark stetige Halbgruppen auf Frécheträumen verweisen wir auf die Arbeiten [Miy59], [Kom64], [Kōm68], [Moo69]-[Moo71b], [Yos71], [Oha72], [Ush72], [Ōuc73], [Kis76], [Vuv78] und [Cho85] sowie die Bemerkungen 3.2.1 und 3.2.5.
Die zentralen Aussagen dieses Abschnittes stellen die Sätze 3.2.1 bis 3.2.4 dar. Die beiden ersten Sätze behandeln *exponentiell* gleichgradig stetige C^∞-Halbgruppen, die Sätze 3.2.3 und 3.2.4 dagegen *lokal* gleichgradig stetige C^∞- bzw. C^ω-Halbgruppen. Im exponentiell gleichgradig stetigen Fall kann man auf die Hilfsmittel aus der Halbgruppentheorie in Banachräumen, wie z.B. die Resolvente und

die Laplace-Transformation sowie ihre reelle bzw. komplexe Umkehrformel [siehe [Wid71, Wid46]] zurückgreifen. Im lokal gleichgradig stetigen Fall benötigt man jedoch teilweise neue Konzepte, wie z.B. sogenannte asymptotische Resolventen [siehe [Ōuc73], [Vuv78] oder[Kōm68]].

Bevor wir jedoch mit der Theorie der C^∞-Halbgruppen in *Fréchetsräumen* fortfahren, erinnern wir zunächst an wohlbekannte Ergebnisse in *Banachräumen.* Für Halbgruppen auf Banachräumen sind die folgenden Aussagen äquivalent [siehe [Paz83, Ch. 1, Thm. 1.2]]:

(a) Die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen.

(b) Der infinitesimale Generator A der Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist ein stetiger, linearer Operator auf E.

(c) Die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist stark differenzierbar.

(d) Die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist stark analytisch.

(e) Es gibt einen stetigen, linearen Operator A auf E mit

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} \tag{3.4}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$.

In Fréchetsräumen ist die Situation dagegen deutlich komplizierter. So erhalten wir aus Definition 3.1.2 und Folgerung 3.1.1 die Gültigkeit der Implikationen (d) $\Longrightarrow$ (c) und (b) $\Longleftrightarrow$ (c). Lemma 3.2.1 und Satz 3.2.4 zeigen, dass auch (b) $\Longrightarrow$ (a) und (d) $\Longleftrightarrow$ (e) weiterhin richtig sind. Alle anderen der obigen Implikationen sind jedoch im Allgemeinen falsch, wie die Beispiele 3.2.1 und 3.2.2 am Ende dieses Abschnitts zeigen. Somit ist in Fréchetsräumen insbesondere *nicht* jede stark differenzierbare Halbgruppe durch die zugehörige Exponentialreihe (3.4) darstellbar.

Lemma 3.2.1. *Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine stark differenzierbare Halbgruppe auf E. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $(t,x) \mapsto T(t)x$ ist auf $[0,\infty) \times E$ beliebig oft stetig differenzierbar.

(b) Die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen.

Beweis: Zu (a): Sei $\Phi : [0,\infty) \times E \to E$ definiert durch $\Phi(t,x) := T(t)x$. Aus Lemma 3.1.3 bzw. der Linearität von Φ bezüglich x erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) = AT(t)x$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x) \cdot h = T(t)h$$

für alle $h \in E$ und alle $(t,x) \in [0,\infty) \times E$. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} : [0,\infty) \times E \times \to E,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} : [0,\infty) \times E \times E \to E$$

und somit die stetige Differenzierbarkeit von Φ folgen aus Lemma 3.1.2 bzw. Satz 2.2.3. Mittels Induktion erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial t^m \partial x^n}(t,x) \cdot (h_1,\ldots,h_n) \; &= \\ &= \begin{cases} A^m T(t)x & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n = 0 \\ A^m T(t)h_1 & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0, n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $(h_1,\ldots,h_n) \in E^n$ und alle $(t,x) \in [0,\infty) \times E$. Somit ist Φ beliebig oft stetig partiell differenzierbar, also nach Satz 2.2.3 beliebig oft stetig differenzierbar.

Zu (b): Sei $B \subset E$ eine beliebige beschränkte Teilmenge und sei $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem von E. Nach Lemma 3.1.3 gilt

$$\sup_{x\in B} \|T(t)x - x\|_m \;=\; \sup_{x\in B} \Big\| \int_0^t T(\tau)Ax \,\mathrm{d}\tau \Big\|_m \;\leq\; \sup_{x\in B} \int_0^t \|AT(\tau)x\|_m \,\mathrm{d}\tau.$$

Da $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ lokal gleichgradig stetig ist existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \geq 0$ mit

$$\sup_{x\in B} \int_0^t \|AT(\tau)x\|_m \,\mathrm{d}\tau \;\leq\; M \sup_{x\in B} \int_0^t \|x\|_n \,\mathrm{d}\tau.$$

für alle $t \in [0,1]$. Ferner folgt aus der Beschränktheit von B, dass es ein $M' \geq 0$ gibt mit

$$\sup_{x\in B} \|x\|_n \;\leq\; M'.$$

Daraus erhalten wir insgesamt die Abschätzung

$$\sup_{x\in B}\|T(t)x-x\|_m \;\leq\; M\sup_{x\in B}\int_0^t \|x\|_n\,\mathrm{d}\tau \;\leq\; MM't$$

und somit ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen. ■

Wir kommen nun zur angekündigten Charakterisierung stark differenzierbarer, exponentiell gleichgradig stetiger Halbgruppen und deren infinitesimaler Generatoren.

Vorüberlegung:
Sei E ein reeller Fréchetraum und sei $\widehat{E}=E\oplus \mathrm{i}E$ die Komplexifizierung von E. Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine reelle 1-Parameter-Halbgruppe auf E mit infinitesimalem Generator $A:\mathrm{D}(A)\to E$. Dann definiert

$$\widehat{T}(t)(x+\mathrm{i}y):=T(t)x+\mathrm{i}T(t)y,$$

eine 1-Parameter-Halbgruppe auf $\widehat{E}$, deren infinitesimaler Generator $\widehat{A}:\mathrm{D}(\widehat{A})\to E$ gerade die komplexe Fortsetzung von A ist, d.h., für alle $x+\mathrm{i}y\in \mathrm{D}(A)\oplus\mathrm{i}\,\mathrm{D}(A)$ gilt

$$\widehat{A}(x+\mathrm{i}y):=Ax+\mathrm{i}Ay.$$

Diese Vorüberlegung zeigt, dass wir im Weiteren o.B.d.A. annehmen dürfen, E sei ein komplexer Fréchetraum. Ferner benötigen wir noch zwei Definitionen, um die anschließenden Ergebnisse etwas kürzer und prägnanter formulieren zu können.

Konvention: Wir bezeichnen im Weiteren eine exponentiell gleichgradig stetige Halbgruppe vom Typ C^0, C^∞ bzw. C^ω kurz als $\mathrm{C}^0_{\mathrm{exp}}$-, $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$- bzw. $\mathrm{C}^\omega_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe.

Definition 3.2.1. Sei $U\subset\mathbb{C}$ und sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $f:U\times E\to E$ stetig. Dann heißt f *schwach wachsend* auf U, wenn es zu jedem $m\in\mathbb{N}$ ein $M\geq 0$, ein $k\in\mathbb{N}$ und ein $n\in\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f(\lambda,x)\|_m\leq M(1+|\lambda|)^k\|x\|_n.$$

für alle $x\in E$ und alle $\lambda\in U$.

Satz 3.2.1. *Sei E ein beliebiger Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Der Operator $A:E\to E$ ist der infinitesimale Generator einer $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe auf E.

(b) *Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner existiert ein zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalentes Fundamentalsystem $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in N}$ und ein $\omega \geq 0$, so dass folgendes gilt:*

   (i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$

   (ii) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$, alle $x \in E$ und alle $\lambda > \omega$ gilt die Abschätzung*

$$\left|\left|\left| R(\lambda, A)^k x \right|\right|\right|_n \leq \frac{|||x|||_n}{(\lambda - \omega)^k}.$$

(c) *Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner existiert ein $\omega \geq 0$ derart, dass folgendes gilt:*

   (i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$.

   (ii) *Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\left\| R(\lambda, A)^k x \right\|_m \leq \frac{M\|x\|_n}{(\lambda - \omega)^k}$$

   für alle $x \in E$, alle $\lambda > \omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

(d) *Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner existiert ein $\widehat{\omega} \geq 0$ derart, dass folgendes gilt:*

   (i) $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \widehat{\omega}\} \subset \rho(A)$.

   (ii) $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)x$ *ist auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$ schwach wachsend.*

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei A der infinitesimale Generator einer $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$. Dann ist A nach Folgerung 3.1.1 stetig und linear. Aus der exponentiell gleichgradigen Stetigkeit folgt, dass es ein $\omega \geq 0$ gibt, so dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|T(t)x\|_m \quad \leq \quad M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in E$ die Abschätzung

$$\sup_{t\geq 0} \mathrm{e}^{-\omega t}\|T(t)x\|_n < \infty,$$

d.h., die Abbildung

$$x \mapsto |||x|||_n := \sup_{t\geq 0} \mathrm{e}^{-\omega t}\|T(t)x\|_n$$

ist wohldefiniert und liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Halbnorm auf E. Ferner gilt

$$\|x\|_m \leq |||x|||_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$. Somit stellt $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalentes Fundamentalsystem dar, das die Abschätzung

$$\begin{aligned} |||T(t)x|||_n &= \sup_{s\geq 0} \mathrm{e}^{-\omega s}\|T(t+s)x\|_n \\ &= \mathrm{e}^{\omega t}\sup_{s\geq 0} \mathrm{e}^{-\omega(t+s)}\|T(t+s)x\|_n \;\leq\; \mathrm{e}^{\omega t}|||x|||_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

für alle $x \in E$ und alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wir betrachten nun die Laplace-Transformierte von $T(t)x$, d.h.,

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 und Abschätzung (3.5) folgt, dass $R(\lambda)x$ für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ existiert. Ferner gilt nach Lemma 3.1.3 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 2.1.23 für alle $x \in E$ und $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ die Identität

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{I} - A)R(\lambda)x &= (\lambda\mathbf{I} - A)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty (\lambda\mathbf{I} - A)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\Big)\,\mathrm{d}\tau \;=\; x. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $R(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - A)x = x$ für alle $x \in E$ und $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Somit existiert die Resolvente $R(\lambda, A)$ auf $\mathbb{C}_\omega$, also insbesondere auf (ω,∞) und es gilt die Darstellung $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$. Daraus folgt

$$\Big|\Big|\Big|R(\lambda, A)^k x\Big|\Big|\Big|_n = \left|\left|\left|\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}R(\lambda, A)x}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\right|\right|\right|_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-1)!} \left|\left|\left| \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}} \Big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} T(\tau)x \Big) \,\mathrm{d}\tau \right|\right|\right|_n \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left|\left|\left| \int_0^\infty (-\tau)^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda\tau} T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \right|\right|\right|_n \\
&\leq \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty \tau^{k-1} \mathrm{e}^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)\tau} \,\mathrm{d}\tau \, |||x|||_n \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty s^{k-1} \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s \frac{|||x|||_n}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k} \;=\; \frac{|||x|||_n}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ und alle $n, k \in \mathbb{N}$. Damit haben wir (a) $\Longrightarrow$ (b) gezeigt.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c): Dies folgt unmittelbar aus der Äquivalenz der Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $A : E \to E$ ein stetiger, linearer Operator, der die Voraussetzungen von (c) erfülle. Dann definieren wir für $\lambda > \omega$ die linearen Abbildungen

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A).$$

Die 1-Parameter-Familie $\big(A_\lambda\big)_{\lambda>\omega}$ wird *Yosida-Approximation* von A genannt und erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$A_\lambda \;=\; \lambda A R(\lambda, A) \;=\; \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda \mathbf{I} \tag{3.6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x \;=\; Ax \quad \text{für alle } x \in E. \tag{3.7}$$

Gleichung (3.6) folgt unmittelbar aus der Resolventenidentität

$$\lambda R(\lambda, A) = \mathbf{I} + A R(\lambda, A). \tag{3.8}$$

Gleichung (3.7) erhält man aus der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\Big\| A_\lambda x - Ax \Big\|_m &= \Big\| \lambda A R(\lambda, A)x - Ax \Big\|_m = \Big\| (\lambda R(\lambda, A) - \mathbf{I}) Ax \Big\|_m \\
&= \Big\| R(\lambda, A) A^2 x \Big\|_m \leq \frac{M \|A^2 x\|_n}{\lambda - \omega}.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun für $\lambda > \omega$ die Potenzreihe

$$T_\lambda(t) := \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k A_\lambda^k}{k!}. \tag{3.9}$$

Aus (3.6) und Voraussetzung (ii) ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{t^k A_\lambda^k x}{k!}\Big\|_m &= \frac{|t|^k}{k!}\Big\|\Big(\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda\mathbf{I}\Big)^k x\Big\|_m \\
&\leq \frac{|t|^k\lambda^k}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Big\|\lambda^l R(\lambda,A)^l x\Big\|_m \\
&\leq \frac{M|t|^k\lambda^k\|x\|_n}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Big(\frac{\lambda}{\lambda-\omega}\Big)^l \\
&\leq \frac{M|t|^k\lambda^k\|x\|_n}{k!}\Big(\frac{\lambda}{\lambda-\omega}+1\Big)^k \\
&\leq \frac{M\|x\|_n}{k!}\Big(\frac{2\lambda^2|t|}{\lambda-\omega}\Big)^k \;\leq\; \widetilde{M}_{\lambda,t}\|x\|_n
\end{aligned}$$

mit

$$\widetilde{M}_{\lambda,t} := M\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\Big(\frac{2\lambda^2|t|}{\lambda-\omega}\Big)^k < \infty.$$

Somit existiert nach Lemma 2.3.2 die Potenzreihe $T_\lambda(t)$ für alle $x \in E$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Aus Satz 2.3.12 und Satz 2.3.13 wiederum folgt, dass $\big(T_\lambda(t)\big)_{t>0}$ eine stark analytische Halbgruppe darstellt. Ferner erhalten wir für $t \geq 0$ die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\Big\|T_\lambda(t)x\Big\|_m &= \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A_\lambda^k x}{k!}\Big\|_m = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda\mathbf{I})^k x}{k!}\Big\|_m \\
&= \Big\|\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(-\lambda)^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{2k}R(\lambda,A)^k x}{k!}\Big)\Big\|_m \\
&\leq Me^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{t^k\lambda^{2k}}{\lambda-\omega}\Big)^k\|x\|_n = Me^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}}\|x\|_n \\
&= Me^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}t}\|x\|_n
\end{aligned} \tag{3.10}$$

und

$$\Big\|T_\mu(t)x - T_\lambda(t)x\Big\|_m = \Big\|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(T_\mu(s)T_\lambda(t-s)x\Big)\,\mathrm{d}s\Big\|_m$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t A_\mu T_\mu(s) T_\lambda(t-s)x - A_\lambda T_\mu(s) T_\lambda(t-s)x \,\mathrm{d}s \right\|_m \\
&= \left\| \int_0^t T_\mu(s) T_\lambda(t-s) \Big(A_\mu x - A_\lambda x \Big) \,\mathrm{d}s \right\|_m \\
&\leq t\mathrm{e}^{\frac{\mu\omega}{\mu-\omega}t} \mathrm{e}^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}t} \Big\| A_\lambda x - A_\mu x \Big\|_m .
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Somit existiert nach (3.7) der Grenzwert

$$
T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x \tag{3.12}
$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$ und definiert nach Folgerung 1.2.1 eine 1-Parameter-Halbgruppe von stetigen linearen Operatoren auf E. Ferner folgt aus (3.10) und (3.11), dass auf kompakten Teilmengen von $[0,\infty) \times E$ die Halbgruppen $\big(T_\lambda(t)\big)_{t\geq 0}$ gleichmäßig gegen $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ konvergieren. Daher ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ stark stetig.

Somit müssen wir noch die starke Differenzierbarkeit und die exponentiell gleichgradige Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ zeigen. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue 2.1.15 erhalten wir die Identität

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{T_\lambda(h)x - x}{h} \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h T_\lambda(\tau) A_\lambda x \,\mathrm{d}\tau \;=\; \frac{1}{h} \int_0^h T(\tau) A x \,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

für alle $x \in E$. Daraus folgt die starke Differenzierbarkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ unmittelbar aus der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto T(t)Ax$. Weiterhin liefert (3.10) die Abschätzung

$$
\|T(t)x\|_m \;=\; \lim_{\lambda\to\infty} \|T_\lambda(t)x\|_m \;\leq\; \lim_{\lambda\to\infty} M\mathrm{e}^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}t} \|x\|_n \;=\; M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|_n
$$

für alle $x \in E$ und $m \in \mathbb{N}$, d.h., $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist exponentiell gleichgradig stetig und somit ist der Beweis von (c) $\Longrightarrow$ (a) vollständig.

Zu (a) $\Longrightarrow$ (d): Aus dem Beweis der Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) folgt:

(i) $\mathbb{C}_\omega \subset \rho(A)$

(ii) Für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ und alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\left|\left|\left| R(\lambda, A)^k x \right|\right|\right|_n \leq \frac{|||x|||_n}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}.$$

Sei nun $\widehat{\omega} > \omega$. Aus der Äquivalenz der Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in N$ existieren mit

$$\begin{aligned}\left\| R(\lambda, A)x \right\|_m \;&\leq\; \left|\left|\left| R(\lambda, A)x \right|\right|\right|_m \;\leq\; \frac{|||x|||_m}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \\ &\leq\; \frac{|||x|||_m}{\widehat{\omega} - \omega} \;\leq\; \frac{M\|x\|_n}{\widehat{\omega} - \omega}\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$, d.h., die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist schwach wachsend auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$, also gilt (a) $\Longrightarrow$ (d).

(d) $\Longrightarrow$ (a): Sei $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}} \subset \rho(A)$ und sei $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ schwach wachsend auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$. Dann wählen wir ein festes $\omega > \widehat{\omega}$ und betrachten das uneigentliche Integral

$$\widehat{T}(t)x := \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.13}$$

Wir zeigen zuerst, dass (3.13) für alle $x \in E$ und alle $t > 0$ existiert. Durch sukzessive Anwendung der Resolventenidentität (3.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda^l R(\lambda, A) \;&=\; \lambda^{l-1}\Big(\mathbf{I} + AR(\lambda, A)\Big) \;=\; \cdots \;= \\ &=\; \sum_{j=0}^{l-1} \lambda^j A^{l-1-j} + A^l R(\lambda, A) \;=\; \sum_{j=0}^{l-1} \lambda^j A^{l-1-j} + R(\lambda, A)A^l\end{aligned} \tag{3.14}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \;&=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{\lambda^l R(\lambda, A)x}{\lambda^l} \,\mathrm{d}\lambda \\ &=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^l} \sum_{j=0}^{l-1} \lambda^j A^{l-1-j} x \,\mathrm{d}\lambda \\ &+\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^l} R(\lambda, A)A^l x \,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ferner liefert der Residuensatz die Identität

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^l}\sum_{j=0}^{l-1}\lambda^j A^{l-1-j}x\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{j=0}^{l-1}\lambda^{j-l}A^{l-1-j}x\,\mathrm{d}\lambda \;=\; \sum_{j=0}^{l-1}\frac{t^jA^jx}{j!}. \tag{3.16}$$

Sei nun $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm des Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $\sigma\geq\rho>0$. Da $\lambda\mapsto R(\lambda,A)$ schwach wachsend ist, existiert ein $M\geq 0$, ein $k\in\mathbb{N}$ und ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$\Big\|R(\lambda,A)x\Big\|_m \;\leq\; M(1+|\lambda|)^k\|x\|_n \tag{3.17}$$

für alle $x\in E$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$. Somit erhalten wir aus (3.15) und (3.16), angewandt für $l=k+2$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\sigma}^{\omega+\mathrm{i}\sigma}\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda \;-\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m\\
&\leq \left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\sigma}^{\omega+\mathrm{i}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\lambda^jA^{k+1-j}x\,\mathrm{d}\lambda \;-\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\lambda^jA^{k+1-j}x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m\\
&+ \left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\sigma}^{\omega-\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m \;+\; \left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega+\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m\\
&\leq \left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\sigma}^{\omega+\mathrm{i}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\lambda^jA^{k+1-j}x\,\mathrm{d}\lambda \;-\; \sum_{j=0}^{k+1}\frac{t^jA^jx}{j!}\right\|_m\\
&+ \left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\lambda^jA^{k+1-j}x\,\mathrm{d}\lambda \;-\; \sum_{j=0}^{k+1}\frac{t^jA^jx}{j!}\right\|_m\\
&+ \frac{M\|A^{k+2}x\|_n}{2\pi}\left(\;\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\sigma}^{\omega-\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\omega t}(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+2}}\,|\mathrm{d}\lambda| \;+\; \int\limits_{\omega+\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{\omega t}(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+2}}\,|\mathrm{d}\lambda|\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Daher gilt

$$\left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\sigma}^{\omega + \mathrm{i}\sigma} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda \;-\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \;\to\; 0 \tag{3.19}$$

für $\sigma, \rho \to \infty$. Da $\|\cdot\|_m$ beliebig gewählt war, folgt aus (3.19) die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\widehat{T}(t)x := \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $x \in E$ und alle $t > 0$. Ferner erhalten wir aus (3.16) und (3.18) die gleichmäßige Konvergenz von

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda$$

gegen $\widehat{T}(t)x$ auf kompakten Teilmengen von $(0, \infty) \times E$. Wir definieren nun mittels

$$T(t)x \;:=\; \begin{cases} \widehat{T}(t)x & \text{für} \quad t > 0 \\ x & \text{für} \quad t = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

eine 1-Parameter-Familie $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ und zeigen, dass diese eine $\mathbb{C}^{\infty}_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A darstellt. Als erstes untersuchen wir die Halbgruppeneigenschaften (HG1) und (HG2).

Zu (HG1): Die Eigenschaft (HG1) ist offensichtlich per Definition von $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ erfüllt.

Zu (HG2): Sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm des Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ und sei $\omega' > \omega$. Dann folgt aus dem obigen Beweis, dass auch das uneigentliche Integral

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega' - \mathrm{i}\rho}^{\omega' + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda$$

für $t > 0$ existiert. Ferner erhalten wir aus (3.15) und (3.16) die Identität

$$\begin{aligned} &\left\| T(t)x \;-\; \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega' - \mathrm{i}\rho}^{\omega' + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\ &= \left\| \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int\limits_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda, A) A^{k+2} x \,\mathrm{d}\lambda \;-\; \int\limits_{\omega' - \mathrm{i}\rho}^{\omega' + \mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda, A) A^{k+2} x \,\mathrm{d}\lambda \right) \right\|_m . \end{aligned}$$

Aus Satz 2.3.2 und Abschätzung (3.17) folgt somit

$$\left\| T(t)x \;-\; \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho}^{\omega'+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \;=\; 0.$$

Da $\|\cdot\|_m$ beliebig gewählt war, gilt also

$$T(t)x \;=\; \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho}^{\omega'+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.21}$$

Seien nun $t, s > 0$. Dann erhalten wir mit Hilfe des Residuensatzes folgende Umformungen

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)x \;&=\; \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) \left(\lim_{\rho'\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \mathrm{e}^{\mu s} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\lambda \\
&=\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s} R(\lambda, A)R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&=\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda} x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&=\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \left(\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu - \lambda} \,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \\
&-\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&=\; \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda(t+s)} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \\
&-\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&=\; T(t+s)x \;-\; \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Somit genügt es die Identität

$$\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)x\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \quad = \quad 0$$

zu zeigen. Sei also $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm des Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dem Residuensatz und Gleichung (3.15) folgt

$$\begin{aligned}
&\left\|\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)x\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m \\
\leq\ &\left\|\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)\mu^{k+2}}\left(\sum_{j=0}^{k+1}\mu^j A^{k+1-\mu}x\right)\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\mu\right\|_m \\
+\ &\left\|\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)\mu^{k+2}}R(\mu,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m \\
\leq\ &\left\|\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)\mu^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\mu^j A^{k+1-j}x\,;\mu=0,\mu=\lambda\right)\mathrm{d}\lambda\right\|_m \\
+\ &\left\|\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda\right)\frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu^{k+2}}R(\mu,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\mu\right\|_m \\
\leq\ &\Bigg\|\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}}{\lambda^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1}\lambda^j A^{k+1-j}x\,\mathrm{d}\lambda\ + \qquad\qquad (3.22)\\
&\quad+\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\mu^{k+1}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)}\sum_{j=0}^{k+1}\mu^j A^{k+1-j}x\right)_{\mu=0}\mathrm{d}\lambda\Bigg\|_m \\
+\ &\left\|\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\rho'\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'}\left(\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda\right)\frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu^{k+2}}R(\mu,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\mu\right\|_m .
\end{aligned}$$

Dabei bezeichne Γ_ρ die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_\rho := \Gamma_{\rho,1} + \Gamma_{\rho,2} + \Gamma_{\rho,3}$ mit

$$\Gamma_{\rho,1} : [-\omega, \rho] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\rho,1}(\tau) := -\tau + \mathrm{i}\rho,$$

$$\Gamma_{\rho,2} : [-\rho, \rho] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\rho,2}(\tau) := -\rho - \mathrm{i}\tau,$$

$$\Gamma_{\rho,3} : [-\rho, \omega] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\rho,3}(\tau) := \tau - \mathrm{i}\rho.$$

Man zeigt nun mit Hilfe des Residuensatzes die Identität

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(k+1)!} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\mu^{k+1}} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)} \sum_{j=0}^{k+1} \mu^j A^{k+1-j} x \right)_{\mu=0} \mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(k+1)!} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\mu^{k+1}} \left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{(\mu-\lambda)} \sum_{j=0}^{k+1} \mu^j A^{k+1-j} x \,\mathrm{d}\lambda \right)_{\mu=0} \\
&= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(k+1)!} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\mu^{k+1}} \left[\left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)} \,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{e}^{\mu s} \sum_{j=0}^{k+1} \mu^j A^{k+1-j} x \right]_{\mu=0} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(k+1)!} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\mu^{k+1}} \left(-\,\mathrm{e}^{\mu(t+s)} \sum_{j=0}^{k+1} \mu^j A^{k+1-j} x \right)_{\mu=0} \\
&= \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}(k+1)!} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\lambda^{k+1}} \left(\mathrm{e}^{\lambda(t+s)} \sum_{j=0}^{k+1} \lambda^j A^{k+1-j} x \right)_{\lambda=0} \\
&= -\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}}{\lambda^{k+2}} \sum_{j=0}^{k+1} \lambda^j A^{k+1-j} x \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (3.22) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu-\lambda} R(\mu,A)x \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
\leq\ & \left\| \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \left(\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)} \,\mathrm{d}\lambda \right) \frac{\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu^{k+2}} R(\mu,A)A^{k+2}x \,\mathrm{d}\mu \right\|_m \\
\leq\ & \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\infty}^{\omega'+\mathrm{i}\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda t}|}{|\mu-\lambda|} |\mathrm{d}\lambda| \right) \frac{M\mathrm{e}^{\omega' s}(1+|\mu|)^k}{|\mu|^{k+2}} \left\| A^{k+2}x \right\|_m |\mathrm{d}\mu| \\
\leq\ & \frac{M\mathrm{e}^{\omega' s}\|A^{k+2}x\|_m}{4\pi^2} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\infty}^{\omega'+\mathrm{i}\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\omega t}}{t|\mu-\omega-\mathrm{i}\rho|} + 2\mathrm{e}^{-\rho t} + \frac{\mathrm{e}^{\omega t}}{t|\mu-\omega+\mathrm{i}\rho|} \right) \frac{(1+|\mu|)^k}{|\mu|^{k+2}} |\mathrm{d}\mu|.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue 2.1.15 folgt daraus

$$\left\| \lim_{\rho\to\infty} \lim_{\rho'\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \int\limits_{\omega'-\mathrm{i}\rho'}^{\omega'+\mathrm{i}\rho'} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mu s}}{\mu-\lambda} R(\mu,A)x \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m = 0$$

und somit erfüllt $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auch die Eigenschaften (HG2). Wir kommen nun zur starken Stetigkeit bzw. starken Differenzierbarkeit.

Zur starken Stetigkeit[5]: Sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm des Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $h>0$. Dann folgt aus (3.15) die Identität

$$\begin{aligned}
T(h)x - x &= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{h^j A^j x}{j!} + \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x \,\mathrm{d}\lambda - x \\
&= h\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{h^j A^{j+1}x}{(j+1)!} \right) + \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Somit genügt es,

$$\lim_{h\to 0} \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m = 0$$

[5]Eigentlich müssten wir die starke Stetigkeit *nicht* explizit zeigen, da die starke Differenzierbarkeit diese impliziert. Jedoch lässt sich der Beweis der starken Differenzierbarkeit leichter nachvollziehen, wenn man zuvor den Beweis der starken Stetigkeit gelesen hat.

zu zeigen. Aus Satz 2.3.2 und der Holomorphie von $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ aud $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}}$ erhalten wir für $\widehat{\Gamma}_\rho : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $\widehat{\Gamma}_\rho(\tau) := \omega + \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau}$ die Identität

$$\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{R(\lambda,A)A^{k+2}x}{\lambda^{k+2}}\,\mathrm{d}\lambda \quad = \quad \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda,A)A^{k+2}x}{\lambda^{k+2}}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\quad= \left\| \lim_{\rho\to\infty} \left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda \;+\; \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{1}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda \right) \right\|_m \\
&\quad\leq \left\| \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \;+\; \left\| \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{R(\lambda,A)A^{k+2}x}{\lambda^{k+2}}\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\quad\leq \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h}-1| M(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|} \left\| A^{k+2}x \right\|_n |\mathrm{d}\lambda| \;+\; \left\| \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda,A)A^{k+2}x}{\lambda^{k+2}}\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\quad\leq M \left\| A^{k+2}x \right\|_n \left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h}-1|(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|}\,|\mathrm{d}\lambda| \;+\; \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|}\,|\mathrm{d}\lambda| \right) \\
&\quad= M \left\| A^{k+2}x \right\|_n \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h}-1|(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|}\,|\mathrm{d}\lambda|.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue 2.1.15 erhalten wir aus der obigen Abschätzung

$$\lim_{h\to 0} \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda,A)A^{k+2}x\,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \quad = \quad 0,$$

d.h., $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist stark stetig.

Zur starken Differenzierbarkeit: Sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm von $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$

und sei $h > 0$. Aus (3.15) folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \\
&= \frac{1}{h}\left(\sum_{j=0}^{k+2} \frac{h^j A^j x}{j!} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda - x\right) - Ax \\
&= h\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{h^j A^{j+2} x}{(j+2)!}\right) + \frac{1}{h} \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Somit genügt es,

$$\lim_{h\to 0} \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2h\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m = 0$$

zu zeigen. Wie im Beweis der starken Stetigkeit gilt für $\widehat{\Gamma}_\rho : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $\widehat{\Gamma}_\rho(\tau) := \omega + \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau}$ die Identität

$$\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2h\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&= \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}h} \left(\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1 - \lambda h}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{1 + \lambda h}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right) \right\|_m \\
&\le \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1 - \lambda h}{h} \, \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&+ \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}h} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m + \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+2}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h} - 1 - \lambda h|}{h} \, \frac{M(1+|\lambda|)^k \|A^{k+3}x\|_n}{|\lambda|^{k+3}} \, |\mathrm{d}\lambda| \\
&+ \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2h\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda, A)A^{k+3}x}{\lambda^{k+3}} \, \mathrm{d}\lambda \right\|_m + \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda, A)A^{k+3}x}{\lambda^{k+2}} \, \mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\leq \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h} - 1 - \lambda h|}{h} \, \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+3}} \, |\mathrm{d}\lambda| \\
&+ \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \left(\frac{1}{h} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+3}} \, |\mathrm{d}\lambda| + \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{(1+|\lambda|^k)}{|\lambda|^{k+2}} \, |\mathrm{d}\lambda| \right) \\
&= \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda h} - 1 - \lambda h|}{h} \, \frac{(1+|\lambda|^k)}{|\lambda|^{k+3}} \, |\mathrm{d}\lambda|
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 folgt wiederum

$$
\lim_{h\to 0} \left\| \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2h\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A)A^{k+3}x \, \mathrm{d}\lambda \right\|_m = 0
$$

und somit ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ stark differenzierbar mit infinitesimalem Generator A. Wir zeigen nun abschließend die exponentiell gleichgradige Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

Zur exponentiell gleichgradigen Stetigkeit: Sei o.B.d.A. $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm von $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus (3.15) folgt

$$
\begin{aligned}
\Big\|T(t)x\Big\|_m &= \left\| \sum_{j=0}^{k+1} \frac{t^j A^j x}{j!} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{k+2}} R(\lambda, A)A^{k+2}x \, \mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\leq \sum_{j=0}^{k+1} \frac{t^j \|A^j x\|_m}{j!} + \frac{M\mathrm{e}^{\omega t}\|A^{k+2}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{(1+|\lambda^k|)}{|\lambda^{k+2}|} \, |\mathrm{d}\lambda|. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Da A stetig ist, existieren ferner natürliche Zahlen m_j und n' sowie Konstanten $M_j \geq 0$ und $M' \geq 0$ mit

$$
\|A^j x\|_m \leq M_j \|x\|_{m_j} \qquad \text{bzw.} \qquad \|A^{k+2}x\|_n \leq M'\|x\|_{n'}
$$

für alle $x \in E$ und alle $j = 0, \ldots, k+1$. Mit Hilfe der Definitionen

$$\widehat{n} := \max\{m_0, \ldots, m_{k+1}, n'\}$$

und

$$\widehat{M} := \max\left\{ \sup_{t \geq 0} \mathrm{e}^{-\omega t} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{M_j t^j}{j!} \right), \frac{MM'}{2\pi} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\infty}^{\omega + \mathrm{i}\infty} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|} \, |\mathrm{d}\lambda| \right\}$$

erhalten wir aus (3.23) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| T(t)x \right\|_m &= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{t^j \|A^j x\|_m}{j!} + \frac{M \mathrm{e}^{\omega t} \|A^{k+2} x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\infty}^{\omega + \mathrm{i}\infty} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|} \, |\mathrm{d}\lambda| \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{M_j t^j}{j!} \right) \|x\|_{\widehat{n}} + \frac{MM' \mathrm{e}^{\omega t} \|x\|_{\widehat{n}}}{2\pi} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\infty}^{\omega + \mathrm{i}\infty} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda^{k+2}|} \, |\mathrm{d}\lambda| \leq \widehat{M} \mathrm{e}^{\omega t} \|x\|_{\widehat{n}}, \end{aligned}$$

d.h., $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ ist exponentiell gleichgradig stetig. Damit ist der Beweis der Implikation (d) $\Longrightarrow$ (a) und somit auch Beweis von Satz 3.2.1 vollständig. ■

Bemerkung 3.2.1. (a) In den Beweis von Satz 3.2.1 sind vorwiegend Ergebnisse von Yosida [Yos71], Miyadera [Miy59] und Oharu [Oha72] sowie Lemma 11.2.5 von Hille/Phillips [HP57] eingeflossen. Die Idee der Umnormierung dagegen stammt aus den Arbeiten von Moore [Moo69], Babalola [Bab74] und Choe [Cho85]. Man beachte, dass die Formulierung des besagten Lemmas in [HP57] missverständlich ist, denn das uneigentliche Integral

$$\widehat{T}(t)x = \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) x \, \mathrm{d}\lambda$$

existiert für $t = 0$, liefert aber in diesem Fall *nicht* den Wert x sondern $\frac{x}{2}$ und stimmt somit *nicht* mit der stetigen/differenzierbaren Fortsetzung $T(t)x$ von $\widehat{T}(t)x$ überein [siehe Gleichung (3.20)].

(b) Die Resolventenabschätzungen in (b) oder (c) sind äquivalent zur gleichgradigen Stetigkeit der Familie

$$\Big((\lambda - \omega)^k R(\lambda, A)^k \Big)_{\lambda > \omega, k \in \mathbb{N}}.$$

(c) Die Voraussetzungen an die Resolvente $R(\lambda, A)$ in Teil (c) und (d) sind gerade so gewählt, dass einmal die reelle und einmal die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation [siehe [Wid71, Wid46]] zur Konstruktion von

$\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ geeignet ist. Genau genommen, haben wir im Teil (c) $\Longrightarrow$ (a) nicht mit der reellen *Post/Widder-Umkehrformel*, sondern mit sogenannten *Yosida-Approximationen* gearbeitet. Ein Beweis mit Hilfe der reellen Post/Widder-Umkehrformel ist aber auch möglich. Ferner existieren die Yosida-Approximationen auch unter schwächeren Voraussetzungen, z.B. falls A nur abgeschlossen und dicht-definiert ist. Jedoch liefert die obige Konstruktion in diesem Fall nur eine $\mathrm{C}^0_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe [siehe z.B. [Yos71, Miy59]]. Die Implikation (d) $\Longrightarrow$ (a) war in der uns bekannten Literatur nicht vorhanden. Ihre Beweisidee geht auf das oben genanntes Lemma in [HP57] zurück.

(d) Das uneigentliche Integral

$$\widehat{T}(t)x = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\omega-\mathrm{i}\rho}^{\omega+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda,$$

das in (d) $\Longrightarrow$ (a) zur Definition von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ dient, ist im Allgemeinen *nicht* absolut konvergent und existiert somit *nicht* als Lebesgue-Integral. Ferner können wir auch *nicht* a priori voraussetzen, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{R(\lambda, A)A^{k+2}x}{\lambda^{k+2}}$$

längs $\omega + \mathrm{i}\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, denn der Exponent $k \in \mathbb{N}$ darf in Definition 3.2.1 sehr wohl von der Halbnorm $\|\cdot\|_m$ abhängen. Jedoch folgt nachträglich aus (b) die Existenz von

$$\int\limits_{\omega-\mathrm{i}\infty}^{\omega+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^2} R(\lambda, A)A^2 x \,\mathrm{d}\lambda$$

als Lebesgue-Integral.

(e) Die Beispiele 3.2.3 und 3.2.4 am Ende dieses Abschnitts zeigen, dass die Voraussetzung $\mathbb{C}_{\widehat{\omega}} \subset \rho(A)$ in Satz 3.2.1 (d) *nicht* auf $(\widehat{\omega}, \infty) \subset \rho(A)$ reduziert werden kann, bzw., dass die Bedingung (d) oftmals leichter zu verifizieren ist als (b) oder (c), da nur das Wachstum von $R(\lambda, A)$ und *nicht* das aller Potenzen $R(\lambda, A)^k$ abgeschätzt werden muss.

Folgerung 3.2.1. *Sei E ein beliebiger Fréchetraum und A der infinitesimale Generator einer $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$. Ferner sei $\widehat{\omega}$ wie in Satz 3.2.1 gewählt. Dann gelten die folgenden Darstellungen:*

(a)

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A_\lambda^k x}{k!} \right)$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$. Dabei ist die Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von $[0, \infty) \times E$ gleichmäßig.

(b)
$$T(t)x = \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\omega - \mathrm{i}\rho}^{\omega + \mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, \mathrm{d}\lambda, \quad \omega > \widehat{\omega}$$
für alle $x \in E$ und alle $t > 0$. Dabei ist die Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von $(0, \infty) \times E$ gleichmäßig.

Beweis: Beide Behauptungen folgen unmittelbar aus Satz 3.1.1 und dem Beweis von Satz 3.2.1. ■

Der folgende Satz charakterisiert eine wichtige Teilklasse der $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppen, sogenannte sektoriell analytische $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppen, und deren infinitesimale Generatoren.

Definition 3.2.2. (a) Sei $\varphi > 0$ und sei $\Delta := \big\{ z \in \mathbb{C} \;\big|\; |\arg z| < \varphi \big\}$ ein Sektor in $\mathbb{C}$. Ferner sei $\Delta_0 := \Delta \cup \{0\}$. Eine komplexe 1-Parameter-Familie $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$ heißt *sektoriell analytische Halbgruppe*, wenn folgendes gilt:

(SHG1) $T(0) = \mathbf{I}$

(SHG2) $T(z) \circ T(w) = T(z + w)$ für alle $z, w \in \Delta_0$.

(SHG3) $z \mapsto T(z)x$ ist für alle $x \in E$ holomorph auf Δ.

(b) Eine sektoriell analytische Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$ heißt *stark stetig*, wenn zusätzlich
$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Delta}} T(z)x = x$$
für alle $x \in E$ gilt.

(c) Eine sektoriell analytische Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$ heißt *stark differenzierbar*, wenn zusätzlich der Grenzwert
$$Ax := \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Delta}} \frac{T(z)x - x}{z}$$
für alle $x \in E$ existiert. Ferner bezeichnen wir A als den infinitesimalen Generator der Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$.

(d) Eine sektoriell analytische Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$ heißt *exponentiell gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{\Delta'} \subset \Delta_0$ ein $\omega \geq 0$ gibt, so dass die 1-Parameter-Familie
$$\Big(\mathrm{e}^{-\omega |\mathrm{Re}\, z|} T(z) \Big)_{z \in \overline{\Delta'}}$$
gleichgradig stetig ist.

(e) Eine sektoriell analytische Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ heißt *lokal gleichgradig stetig*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Delta_0$ die 1-Parameter-Familie

$$\Big(T(z)\Big)_{z\in K}$$

gleichgradig stetig ist.

Bemerkung 3.2.2. (a) Sektoriell analytische Halbgruppen sind im Allgemeinen *nicht* stark analytisch im Sinne von Definition 3.1.2. Sie verhalten sich vielmehr wie analytische Halbgruppen auf Banachräumen [siehe [Paz83, Ch. 2, Def. 5.1, Thm. 5.2]].

(b) Wie in Definition 3.1.2 lassen sich auch in diesem Fall die obigen Bedingungen in (d) und (e) mit Hilfe eines Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt umformulieren:

(d′) Zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{\Delta'} \subset \Delta_0$ gibt es ein $\omega \geq 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|T(z)x\|_m \leq M\mathrm{e}^{\omega|\mathrm{Re}\, z|}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \overline{\Delta'}$.

(e′) Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Delta_0$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T(z)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in K$.

Satz 3.2.2. *Sei E ein beliebiger Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Der Operator $A : E \to E$ ist der infinitesimale Generator einer sektoriell analytischen $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe auf E.

(b) Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner gibt es ein zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalentes Fundamentalsystem $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in N}$ sowie Konstanten $\omega \geq 0$, $\delta > 0$ und $M \geq 0$ mit

(i) $\mathbb{C}_{\omega,\delta} := \big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\arg(\lambda-\omega)| < \frac{\pi}{2}+\delta\big\} \subset \rho(A)$.

(ii) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$, alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$ ist die Abschätzung

$$\Big|\Big|\Big|R(\lambda, A)^k x\Big|\Big|\Big|_n \leq \frac{M|||x|||_n}{|\lambda-\omega|^k}.$$

erfüllt.

(c) *Der Operator $A : E \to E$ ist der infinitesimale Generator einer $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$. Ferner existiert ein zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalentes Fundamentalsystem $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in N}$ und ein $\widehat{\omega} \geq 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\widehat{M} \geq 0$ existiert mit*

$$\Big|\Big|\Big| AT(t)x \Big|\Big|\Big|_n \leq \frac{\widehat{M}\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{t}$$

für alle $x \in E$ und alle $t > 0$.

(d) *Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner existieren Konstanten $\widehat{\omega} \geq 0$ und $\delta > 0$, so dass folgendes gilt:*

  (i) *$\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta} \subset \rho(A)$.*

  (ii) *$(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)x$ ist auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$ schwach wachsend.*

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $\Delta := \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\arg z| < \varphi\big\}$ und sei A der infinitesimale Generator einer sektoriell analytischen $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$. Dann ist A insbesondere der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe und somit nach Folgerung 3.1.1 stetig und linear. Sei nun $0 < \varphi' < \min\{\varphi, \frac{\pi}{2}\}$ und Δ' der zugehörige Teilsektor von Δ. Dann existiert nach Voraussetzung ein $\omega \geq 0$, so dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|T(z)x\|_m \leq M\mathrm{e}^{\omega \operatorname{Re} z}\|x\|_n \tag{3.24}$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \overline{\Delta'}$. Somit erhalten wir mittels der Definition

$$|||x|||_n := \sup_{z\in\overline{\Delta'}} \mathrm{e}^{-\omega \operatorname{Re} z}\|T(z)x\|_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ein zu $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalentes Fundamentalsystem $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auf E und es gilt

$$\begin{aligned} |||T(z)x|||_n &= \sup_{w\in\overline{\Delta'}} \mathrm{e}^{-\omega \operatorname{Re} w}\|T(z+w)x\|_n \\ &\leq \mathrm{e}^{\omega \operatorname{Re} z} \sup_{w\in\overline{\Delta'}} \mathrm{e}^{-\omega \operatorname{Re}(z+w)}\|T(z+w)x\|_n \;\leq\; \mathrm{e}^{\omega \operatorname{Re} z}|||x|||_n \end{aligned} \tag{3.25}$$

für alle $x \in E$, alle $z \in \overline{\Delta'}$ und alle $n \in N$. Wir betrachten nun, wie in Satz 3.2.1, die Laplace-Transformierte

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau$$

von $T(z)x$. Dann existiert $R(\lambda)x$ nach (3.25) für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Ferner liefert Satz 2.3.2 für die Kurven

$$\Gamma_+ : [0,\infty) \to \mathbb{C}, \quad \Gamma_+(\tau) := \tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'} \qquad \text{und} \qquad \Gamma_- : [0,\infty) \to \mathbb{C}, \quad \Gamma_-(\tau) := \tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'}$$

die Identität

$$R(\lambda)x \;=\; \int\limits_{\Gamma_+} \mathrm{e}^{-\lambda z} T(z)x \,\mathrm{d}z \;=:\; R_+(\lambda)x$$

und

$$R(\lambda)x \;=\; \int\limits_{\Gamma_-} \mathrm{e}^{-\lambda z} T(z)x \,\mathrm{d}z \;=:\; R_-(\lambda)x$$

Daraus ergeben sich die Abschätzungen:

(i) Für $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left| R_-(\lambda)x \right|\!\right|\!\right|_n &= \left|\!\left|\!\left| \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(\omega+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'} T(\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'})x \,\mathrm{d}\tau \right|\!\right|\!\right|_n \\ &\leq |||x|||_n \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega\tau\cos\varphi' - \rho\tau\cos(\psi-\varphi')} \mathrm{e}^{\omega\tau\cos\varphi'} \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{|||x|||_n}{\rho\cos(\psi-\varphi')} \;\leq\; \frac{M|||x|||_n}{\rho} \end{aligned} \tag{3.26}$$

mit $M^{-1} := \min\left\{ \cos\varphi', \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi') \right\}$.

(ii) Für $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ mit $\rho > 0$ und $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left| R_+(\lambda)x \right|\!\right|\!\right|_n &\leq |||x|||_n \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega\tau\cos\varphi' - \rho\tau\cos(\psi+\varphi')} \mathrm{e}^{\omega\tau\cos\varphi'} \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{|||x|||_n}{\rho\cos(\psi+\varphi')} \;\leq\; \frac{M|||x|||_n}{\rho} \end{aligned} \tag{3.27}$$

mit $M^{-1} := \min\left\{ \cos\varphi', \cos(\varphi'-\frac{\pi}{2}) \right\}$.

Ferner erhalten wir für $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$ die Abschätzung

$$\left|\!\left|\!\left| \mathrm{e}^{-\lambda\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'}} T(\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'})x \right|\!\right|\!\right|_n \;\leq\; \mathrm{e}^{-\rho\tau\cos(\frac{\pi}{2}+\delta-\varphi')} |||x|||_n. \tag{3.28}$$

für alle $x \in E$ und alle $\tau \geq 0$. Somit existiert für alle $x \in E$ und alle $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$ das uneigentliche Integral

$$R_-(\lambda)x \;=\; \int\limits_{\Gamma_-} \mathrm{e}^{-\lambda z} T(z)x \,\mathrm{d}z \tag{3.29}$$

und erfüllt nach (3.28) die Abschätzung

$$\left|\left|\left|R_-(\lambda)x\right|\right|\right|_n \quad \leq \quad \frac{|||x|||_n}{\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\delta-\varphi')}. \tag{3.30}$$

Analog zeigt man die Existenz von

$$R_+(\lambda)x \quad = \quad \int\limits_{\Gamma_+} \mathrm{e}^{-\lambda z}T(z)x\,\mathrm{d}z \tag{3.31}$$

und die Abschätzung

$$\left|\left|\left|R_+(\lambda)x\right|\right|\right|_n \quad \leq \quad \frac{|||x|||_n}{\rho\cos(\varphi'-\frac{\pi}{2}-\delta)} \tag{3.32}$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$. Ferner erhält man wie in Satz 3.2.1, die Identität

$$(\lambda - A)R_-(\lambda)x = R_-(\lambda)(\lambda - A)x = x$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$ sowie

$$(\lambda - A)R_+(\lambda)x = R_+(\lambda)(\lambda - A)x = x$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$. Somit existiert die Resolvente auf $\mathbb{C}_{\omega,\delta}$ und es gilt

$$R_-(\lambda) = R(\lambda, A) \qquad \text{und} \qquad R_+(\lambda) = R(\lambda, A)$$

für $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ bzw. $\lambda = \omega + \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$ mit $\rho > 0$ und $0 \leq \delta < \varphi'$. Insbesondere gilt also $\mathbb{C}_{\omega,\delta} \subset \rho(A)$. Ferner erhalten wir aus den Abschätzungen (3.26) – (3.32) für jedes feste $\delta < \varphi'$ ein $M \geq 0$ mit

$$\left|\left|\left|R(\lambda, A)x\right|\right|\right|_n \leq \frac{M|||x|||_n}{|\lambda - \omega|}$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k > 1$ folgt die Abschätzung

$$\left|\left|\left|R(\lambda, A)^k x\right|\right|\right|_n \leq \frac{M|||x|||_n}{|\lambda - \omega|^k}$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ analog zu Satz 3.2.1 mit Hilfe der Darstellungen (3.31) und (3.29). Damit ist (a) $\Longrightarrow$ (b) gezeigt.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c): Sei A ein stetiger, linearer Operator, der (c) erfüllt, und sei $\widehat{\omega} > \omega$. Dann gilt

$$\left|\left|\left|R(\lambda, A)\right|\right|\right|_n \leq \frac{M|||x|||_n}{|\lambda - \omega|} \leq \frac{M|||x|||_n}{|\widehat{\omega} - \omega|\cos\delta}$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)x$ schwach wachsend auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$. Daher existiert nach Satz 3.2.1 eine eindeutige $\mathrm{C}^{\infty}_{\exp}$-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auf E mit infinitesimalem Generator A und es gilt die Darstellung

$$T(t)x := \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\omega}-\mathrm{i}\rho}^{\widehat{\omega}+\mathrm{i}\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, \mathrm{d}\lambda$$

für alle $x \in E$ und alle $t > 0$. Da $\lambda \mapsto R(\lambda, A)x$ für jedes feste $x \in E$ holomorph auf $\mathbb{C}_{\omega,\delta}$ ist, folgt aus Satz 2.3.2 die Identität

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, \mathrm{d}\lambda = 0,$$

wobei $\widehat{\Gamma}_\rho$ die zusammengesetzte Kurve $\widehat{\Gamma}_\rho := \widehat{\Gamma}_{\rho,1} + \widehat{\Gamma}_{\rho,2} + \widehat{\Gamma}_{\rho,3}$ mit

$$\widehat{\Gamma}_{\rho,1} : [0, \rho] \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{\Gamma}_{\rho,1}(\tau) := \widehat{\omega} + \mathrm{i}\tau,$$

$$\widehat{\Gamma}_{\rho,2} : [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} + \delta] \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{\Gamma}_{\rho,2}(\tau) := \widehat{\omega} + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau},$$

$$\widehat{\Gamma}_{\rho,3} : [-\rho, 0] \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{\Gamma}_{\rho,3}(\tau) := \widehat{\omega} - \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}$$

bezeichne. Ferner folgt aus der Resolventenabschätzung in (b) die Ungleichung

$$\left|\left|\left| \int\limits_{\widehat{\Gamma}_{\rho,2}} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, \mathrm{d}\lambda \right|\right|\right|_n \leq M \mathrm{e}^{\widehat{\omega} t} |||x|||_n \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \frac{\rho \mathrm{e}^{t\rho\cos\tau}}{|\widehat{\omega} - \omega + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|} \, \mathrm{d}\tau \;\to\; 0$$

für $\rho \to \infty$ und $t > 0$. Somit erhalten wir für $t > 0$ die Darstellung

$$T(t)x \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, \mathrm{d}\lambda, \tag{3.33}$$

wobei $\widehat{\Gamma}_\infty$ die Kurve

$$\widehat{\Gamma}_\infty : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{\Gamma}_\infty(\tau) := \begin{cases} \widehat{\omega} + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)} & \text{für} \quad \tau \geq 0 \\ \widehat{\omega} + |\tau| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)} & \text{für} \quad \tau \leq 0 \end{cases}$$

bezeichne. Ferner erhalten wir für $t > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\infty} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \right|\!\right|\!\right|_n &\leq \frac{M|||x|||_n}{2\pi} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\infty} \frac{|\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}|}{|\lambda - \omega|} \,|\mathrm{d}\lambda| \\
&\leq \frac{M\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t\tau\sin\delta}|\widehat{\omega} + \tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|}{|\widehat{\omega} - \omega + \tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|} \,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{M\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{t\pi\sin\delta} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\tau}|\widehat{\omega}\sin\delta + \tau' t^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|}{|(\widehat{\omega} - \omega)\sin\delta + \tau' t^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|} \,\mathrm{d}\tau' \leq \frac{\widehat{M}\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{t}
\end{aligned}$$

mit

$$\widehat{M} := \frac{M}{\pi\sin\delta}\left(\sup_{\sigma\geq 0} \frac{|\widehat{\omega}\sin\delta + \sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|}{|(\widehat{\omega} - \omega)\sin\delta + \sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta)}|}\right) < \infty.$$

Aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 und Lemma 3.1.3 folgt

$$\begin{aligned}
AT(t)x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\infty} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\left|\!\left|\!\left| AT(t)x \right|\!\right|\!\right|_n \leq \frac{\widehat{M}\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{t}$$

für alle $x \in E$, alle $t > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist der Beweis von (b) $\Longrightarrow$ (c) vollständig.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a): Nach Voraussetzung erzeugt A eine $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ und es gibt ein $\widehat{\omega} \geq 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\widehat{M} \geq 0$ existiert mit

$$\left|\!\left|\!\left| AT(t)x \right|\!\right|\!\right|_n \leq \frac{\widehat{M}\mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}|||x|||_n}{t} \tag{3.34}$$

für alle $x \in E$ und alle $t > 0$. Ferner folgt aus Lemma 3.2.1, dass die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ beliebig oft stetig differenzierbar ist und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}T(t)x = A^k T(t)x$$

für alle $x \in E$, alle $t \geq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Aus (3.34) und der Ungleichung $k^k \leq \mathrm{e}^k k!$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left(\left|\left|\left| \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} T(t)x \right|\right|\right|_n \right)^{1/k} &= \left(\left|\left|\left| \frac{1}{k!} \Big(AT(\frac{t}{k})x \Big)^k \right|\right|\right|_n \right)^{1/k} \\ &= \left(\frac{\widehat{M}^k k^k}{k! t^k} \, \mathrm{e}^{\widehat{\omega} t} |||x|||_n \right)^{1/k} \leq \frac{\widehat{M}\mathrm{e}}{t} \Big(\mathrm{e}^{\widehat{\omega} t} |||x|||_n \Big)^{1/k}\end{aligned} \tag{3.35}$$

für alle $x \in E$, alle $t > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Somit lässt sich für alle $x \in E$ die Abbildung $0 < t \mapsto T(t)x$, $t > 0$ lokal in eine Potenzreihe

$$T(t')x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t'-t)^k}{k!} T^{(k)}(t)x, \quad |t'-t| < \frac{t}{\widehat{M}\mathrm{e}}$$

entwickeln, d.h., $0 < t \mapsto T(t)x$ ist für jedes $x \in E$ reell analytisch. Daher existiert nach Satz 2.3.9 und Abschätzung (3.35) eine eindeutige holomorphe Fortsetzung

$$\widehat{T}(z)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} T^{(k)}(t)x, \quad |z-t| < \frac{t}{\widehat{M}\mathrm{e}} \tag{3.36}$$

auf den Sektor $\Delta' := \big\{ z \in \mathbb{C} \;\big|\; |\arg z| < \varphi' \big\}$ mit $\varphi' := \arctan(\widehat{M}\mathrm{e})^{-1}$.

Sei nun $\varphi < \varphi'$ und Δ der zugehörige Teilsektor von Δ'. Dann definiert (3.36) eine komplexe 1-Parameter-Familie $\big(T(z)\big)_{z \in \Delta_0}$, die offensichtlich als holomorphe Fortsetzung von $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ die Halbgruppeneigenschaften (SHG1) und (SHG2) erfüllt. Somit müssen wir noch zeigen, dass $\big(\widehat{T}(z)\big)_{z \in \Delta_0}$ stark differenzierbar und exponentiell gleichgradig stetig ist.

Zur starken Differenzierbarkeit: Sei $z = t + \mathrm{i}s \in \Delta$. Dann gilt

$$|\mathrm{Im}\, z| = |s| \leq \frac{\alpha t}{\widehat{M}\mathrm{e}} = \frac{\alpha \mathrm{Re}\, z}{\widehat{M}\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \quad \alpha := \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi'} < 1. \tag{3.37}$$

Somit folgt aus (3.35) und (3.37) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left|\widehat{T}(z)x - x - zAx\right|\!\right|\!\right|_n &= \left|\!\left|\!\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} T^{(k)}(t)x - x - zAx\right|\!\right|\!\right|_n \\
&\leq \left|\!\left|\!\left|T(t)x - x - tAx\right|\!\right|\!\right|_n + \left|\!\left|\!\left|\mathrm{i}s\big(AT(t)x - Ax\big)\right|\!\right|\!\right|_n \\
&+ \left|\!\left|\!\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}s)^k}{k!} A^k T(t)x\right|\!\right|\!\right|_n \\
&\leq \left|\!\left|\!\left|T(t)x - x - tAx\right|\!\right|\!\right|_n + s\left|\!\left|\!\left|A\big(T(t)x - x\big)\right|\!\right|\!\right|_n \\
&+ s^2\left|\!\left|\!\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}s)^k}{(k+2)!} A^k T(t) A^2 x\right|\!\right|\!\right|_n \\
&\leq \left|\!\left|\!\left|T(t)x - x - tAx\right|\!\right|\!\right|_n + s\left|\!\left|\!\left|A\big(T(t)x - x\big)\right|\!\right|\!\right|_n \\
&+ s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left|\!\left|\!\left|\frac{A^k T(t) A^2 x}{k!}\right|\!\right|\!\right|_n \left(\frac{\alpha t}{\widehat{M}\mathrm{e}}\right)^k \\
&\leq \left|\!\left|\!\left|T(t)x - x - tAx\right|\!\right|\!\right|_n + s\left|\!\left|\!\left|A\big(T(t)x - x\big)\right|\!\right|\!\right|_n + s^2 \mathrm{e}^{\widehat{\omega} t} \frac{|\!|\!|A^2 x|\!|\!|_n}{1-\alpha},
\end{aligned}$$

also gilt für alle $x \in E$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left|\frac{\widehat{T}(z)x - x}{z} - Ax\right|\!\right|\!\right|_n &\leq \frac{|t|}{|z|}\left|\!\left|\!\left|\frac{T(t)x - x - tAx}{t}\right|\!\right|\!\right|_n \\
&+ \frac{|s|}{|z|}\left|\!\left|\!\left|A\big(T(t)x - x\big)\right|\!\right|\!\right|_n + \frac{|s|^2 \mathrm{e}^{\widehat{\omega} t} |\!|\!|A^2 x|\!|\!|_n}{|z|(1-\alpha)} \to 0
\end{aligned}$$

für $z \to 0$, d.h. $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ ist stark differenzierbar mit infinitesimalem Generator A.

Zur exponentiell gleichgradigen Stetigkeit: Sei $z = t + \mathrm{i}r \in \Delta$. Dann folgt aus (3.35) und (3.37) die Abschätzung

$$\left|\!\left|\!\left|\widehat{T}(z)x\right|\!\right|\!\right|_m = \left|\!\left|\!\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} T^{(k)}(t)x\right|\!\right|\!\right|_m = \left|\!\left|\!\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}s)^k}{k!} T^{(k)}(t)x\right|\!\right|\!\right|_m$$

$$\begin{aligned} &\leq \left|\left|\left|T(t)x\right|\right|\right|_m + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left|\left|\frac{T^{(k)}(t)x}{k!}\right|\right|\right|_m \Big(\frac{\alpha t}{\widehat{M}\mathrm{e}}\Big)^k \\ &= \left|\left|\left|T(t)x\right|\right|\right|_m + \frac{\alpha \mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}}{1-\alpha}|||x|||_m. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Da $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ nach Voraussetzung exponentiell gleichgradig stetig ist, gibt es ein $\omega' \geq 0$, so dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M' \geq 0$ und ein $n' \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|||T(t)x|||_m \leq M'\mathrm{e}^{\omega' t}|||x|||_{n'} \tag{3.39}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$. Sei ferner o.B.d.A. $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Dann folgt aus (3.38) und (3.39) die Abschätzung

$$\left|\left|\left|\widehat{T}(z)x\right|\right|\right|_m \leq M'\mathrm{e}^{\omega' t}|||x|||_{n'} + \frac{\alpha \mathrm{e}^{\widehat{\omega}t}}{1-\alpha}|||x|||_m \leq M\mathrm{e}^{\omega t}|||x|||_n$$

mit

$$M := \max\{M', \frac{\alpha}{1-\alpha}\}, \quad \omega := \max\{\omega', \widehat{\omega}\} \quad \text{und} \quad n := \max\{n', m\},$$

d.h., $\big(\widehat{T}(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ ist exponentiell gleichgradig stetig. Somit ist der Beweis der Implikation (c) $\Longrightarrow$ (a) vollständig.

Zu (a) $\Longrightarrow$ (d): Wir haben schon (a) $\Longrightarrow$ (b) gezeigt. Somit existiert ein $\omega \geq 0$ mit $\mathbb{C}_{\omega,\delta} \subset \rho(A)$. Sei nun $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm von $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $\widehat{\omega} > \omega$. Dann folgt aus (b) die Abschätzung

$$\left\|R(\lambda,A)x\right\|_m \leq M'\left|\left|\left|R(\lambda,A)x\right|\right|\right|_l \leq \frac{M'M|||x|||_l}{|\lambda-\omega|} \leq \frac{M''M\|x\|_n}{|\widehat{\omega}-\omega|\cos\delta}.$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$. Dabei sind M' und M'' geeignete Konstanten, die auf Grund der Äquivalenz von $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren. Somit ist $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)$ schwach wachsend auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$, also gilt (a) $\Longrightarrow$ (d).

Zu (d) $\Longrightarrow$ (a): Sei $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ und sei $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)x$ schwach wachsend auf $\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$. Ferner sei $\omega > \widehat{\omega}$ und $\Gamma_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Gamma_\infty : (-\infty,\infty) \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_\infty(\tau) := \begin{cases} \omega + \tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}} & \text{für} \quad \tau \geq 0 \\ \omega + |\tau|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}} & \text{für} \quad \tau \leq 0 \end{cases}$$

Dann gilt für $\lambda \in \Gamma_\infty\big([0,\infty)\big)$ und $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ mit $r > 0$ und $|\psi| < \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Big\|\mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\Big\|_m &\leq M\Big|\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}(\omega+\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}})}\Big|\cdot\Big|1+\omega+\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}\Big|^k\|x\|_n \\ &\leq M\mathrm{e}^{\omega r\cos\psi}\mathrm{e}^{\tau r\cos(\psi+\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2})}|1+\omega+\tau|^k\|x\|_n \\ &= M\mathrm{e}^{\omega r\cos\psi}\mathrm{e}^{-\tau r\sin(\psi+\frac{\delta}{2})}|1+\omega+\tau|^k\|x\|_n.\end{aligned}$$

Analog erhält man für $\lambda \in \Gamma_\infty\big((-\infty,0]\big)$ und $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ mit $r > 0$ und $|\psi| < \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung

$$\Big\|\mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\Big\|_m \leq M\mathrm{e}^{\omega r\cos\psi}(1+\omega+|\tau|)^k\mathrm{e}^{|\tau|r\sin(\psi-\frac{\delta}{2})}\|x\|_n.$$

Somit existiert nach dem Satz von Lebesgue 2.1.15 das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma_\infty}\mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta := \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |\arg z| < \frac{\delta}{2}\big\}$. Dies ermöglicht die Definition

$$T(z)x := \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\infty}\mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda & \text{für } z \in \Delta \\ x & \text{für } z = 0\end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ eine sektoriell analytische $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A liefert. Die Eigenschaft (SHG3), d.h., die Holomorphie der Abbildung $\Delta \ni z \mapsto T(z)x$ für jedes $x \in E$, folgt leicht mit Hilfe von Satz 2.3.4. Betrachten wir also die Eigenschaften (SHG1) und (SHG2).

Zu (SHG1): Die Eigenschaft $T(0) = \mathbf{I}$ ist per Definition erfüllt.

Zu (SHG2): Sei $\omega' > \omega$ und Γ'_∞ definiert durch

$$\Gamma'_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma'_\infty(\tau) := \begin{cases}\omega' + \tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}} & \text{für } \tau \geq 0 \\ \omega' + |\tau|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}} & \text{für } \tau \leq 0\end{cases}$$

Ferner sei $\Gamma_\rho := \Gamma_\infty|_{[-\rho,\rho]}$ und $\Gamma'_\rho := \Gamma'_\infty|_{[-\rho,\rho]}$. Dann folgt aus Satz 2.3.2 die Identität

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma'_\rho} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda \;+\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega'+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}}^{\omega+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda$$

$$+\;\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{-\Gamma_\rho} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda \;+\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega+\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}}^{\omega'+\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda \;=\; 0$$

für alle $x \in E$, alle $z \in \Delta$ und alle $\rho > 0$. Weiterhin erhalten wir für $z \in \Delta$ die Abschätzung

$$\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega'+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}}^{\omega+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}^{\omega'} \left|\mathrm{e}^{(\tau+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}})r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\right| \left\|R(\tau+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}},A)x\right\|_m \mathrm{d}\tau$$

$$\leq \mathrm{e}^{\rho r\cos(\psi+\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2})}\frac{M\|x\|_n}{2\pi}\int\limits_{\omega}^{\omega'} \mathrm{e}^{\tau r\cos\psi}\left|1+\tau+\rho\right|^k \mathrm{d}\tau$$

$$\leq \mathrm{e}^{-\rho r\sin(\psi+\frac{\delta}{2})}\frac{M\|x\|_n}{2\pi}\int\limits_{\omega}^{\omega'} \mathrm{e}^{\tau r\cos\psi}\left|1+\tau+\rho\right|^k \mathrm{d}\tau \;\to\; 0$$

für $\rho \to \infty$. Analog ergibt sich

$$\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\omega'+\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}}^{\omega+\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda\right\|_m$$

$$\leq \mathrm{e}^{\rho r\sin(\psi-\frac{\delta}{2})}\frac{M\|x\|_n}{2\pi}\int\limits_{\omega}^{\omega'} \mathrm{e}^{\tau r\cos\psi}\left|1+\tau+\rho\right|^k \mathrm{d}\tau \;\to\; 0$$

für $\rho \to \infty$. Somit erhalten wir insgesamt die Identität

$$\begin{aligned}
T(z)x &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\rho} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'_\rho} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta$. Daraus folgt mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{aligned}
T(z)T(w)x &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'_\infty} \mathrm{e}^{\mu w} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big)^2 \int\limits_{\Gamma_\infty} \int\limits_{\Gamma'_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} \mathrm{e}^{\mu w} R(\lambda, A) R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big)^2 \int\limits_{\Gamma_\infty} \int\limits_{\Gamma'_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} \mathrm{e}^{\mu w} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda} x \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big)^2 \int\limits_{\Gamma_\infty} \left(\int\limits_{\Gamma'_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mu w}}{\mu - \lambda} \,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda \\
&- \Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big)^2 \int\limits_{\Gamma'_\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda w}}{\mu - \lambda} \,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{e}^{\mu z} R(\mu, A)x \,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda(z+w)} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda = T(z+w)x
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $z, w \in \Delta$, d.h., $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ erfüllt auch die Eigenschaft (SHG2).

Zur starken Differenzierbarkeit: Sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm des Fundamentalsystems $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann erhalten wir, wie in Satz 3.2.1 die Identität

$$\begin{aligned}
&\frac{T(z)x - x}{z} - Ax \\
&= \frac{1}{z}\left(\sum_{j=0}^{k+2} \frac{z^j A^j x}{j!} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda - x\right) - Ax \\
&= z\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z^j A^{j+2} x}{(j+2)!}\right) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta$. Somit genügt es für festes $x \in E$ die Aussage

$$\left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \to 0$$

für $z \to 0$ zu zeigen. Analog zu Beweis 3.2.1 erhalten wir mit $\widehat{\Gamma}_\rho : [-\frac{\pi+\delta}{2}, \frac{\pi+\delta}{2}] \to \mathbb{C}$, $\widehat{\Gamma}_\rho(\tau) := \omega + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$ die Identität

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta$ sowie die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z} - 1 - \lambda z}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{1 + \lambda z}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\le \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z} - 1 - \lambda z}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&+ \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\Gamma_\infty} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m + \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\infty} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+2}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\infty} \left| \frac{\mathrm{e}^{\lambda z} - 1 - \lambda z}{z} \right| \frac{M(1 + |\lambda|)^k \|A^{k+3} x\|_n}{|\lambda|^{k+3}} \,|\mathrm{d}\lambda| \\
&+ \left\| \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z} \int_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m + \left\| \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{R(\lambda, A) A^{k+3} x}{\lambda^{k+2}} \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{\lambda z} - 1 - \lambda z}{z}\right| \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+3}} \,|\mathrm{d}\lambda| \\
&+ \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \left(\frac{1}{z} \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{(1+|\lambda|)^k}{\lambda^{k+3}} \,\mathrm{d}\lambda \;+\; \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\widehat{\Gamma}_\rho} \frac{(1+|\lambda|)^k}{\lambda^{k+2}} \,\mathrm{d}\lambda \right) \\
&= \frac{M\|A^{k+3}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z} - 1 - \lambda z}{z} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+3}} \,|\mathrm{d}\lambda|
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta$. Somit folgt aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 für festes $x \in E$ die gewünschte Aussage

$$\left\| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}z} \int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+3}} R(\lambda, A) A^{k+3} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \quad \to \quad 0$$

$\Delta \ni z \to 0$, d.h., $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ ist stark differenzierbar.

Zur exponentiell gleichgradigen Stetigkeit: Sei o.B.d.A. $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und sei $\|\cdot\|_m$ eine beliebige Halbnorm von $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt für alle $z \in \Delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big\|T(z)x\Big\|_m &= \left\| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A) x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&= \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j A^j x}{j!} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) A^{k+1} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} + \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma_{r,1}} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) A^{k+1} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&+ \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma_{r,2}} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) A^{k+1} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m \\
&+ \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma_{r,3}} \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}}{\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) A^{k+1} x \,\mathrm{d}\lambda \right\|_m ,
\end{aligned}$$

wobei $\Gamma_{r,1}$, $\Gamma_{r,2}$ und $\Gamma_{r,3}$ die Kurven

$$\Gamma_{r,1} : (-\infty, -r^{-1}] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{r,1}(\tau) := \omega + |\tau| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}$$

$$\Gamma_{r,2} : [-\tfrac{\pi+\delta}{2}, \tfrac{\pi+\delta}{2}] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{r,2}(\tau) := \omega + r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$$

$$\Gamma_{r,3} : [r^{-1}, \infty) \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{r,3}(\tau) := \omega + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}$$

bezeichne. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| T(z)x \Big\|_m \;&\leq\; \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} \;+\; \frac{M\|A^{k+1}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{r,1}} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda z}|(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+1}}\, |\mathrm{d}\lambda| \\
&+\; \frac{M\|A^{k+1}x\|_n}{2\pi} \left(\int\limits_{\Gamma_{r,2}} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda z}|(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+1}}\, |\mathrm{d}\lambda| \;+\; \int\limits_{\Gamma_{r,3}} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda z}|(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^{k+1}}\, |\mathrm{d}\lambda| \right) \\
&\leq\; \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} \;+\; \frac{\widetilde{M}\|A^{k+1}x\|_n}{2\pi} \left(\int\limits_{\Gamma_{r,2}} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda z}|}{|\lambda|}\, |\mathrm{d}\lambda| \;+\; 2\int\limits_{\Gamma_{r,3}} \frac{|\mathrm{e}^{\lambda z}|}{|\lambda|}\, |\mathrm{d}\lambda| \right)
\end{aligned}$$

mit

$$\widetilde{M} := M \sup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{\omega,\delta/2}} \frac{(1+|\lambda|)^k}{|\lambda|^k} < \infty.$$

Somit erhalten wir für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \in \Delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big\| T(z)x \Big\|_m \;&\leq\; \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} \;+\; \frac{\widetilde{M}\|A^{k+1}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi+\delta}{2}}^{\frac{\pi+\delta}{2}} \frac{|\mathrm{e}^{(\omega + r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}) r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}|}{r|\omega + r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|}\, \mathrm{d}\tau \\
&+\; \frac{\widetilde{M}\|A^{k+1}x\|_n}{\pi} \int\limits_{r^{-1}}^{\infty} \frac{|\mathrm{e}^{(\omega + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}) r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}|}{|\omega + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}|}\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq\; \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} \;+\; \frac{\widetilde{M}\mathrm{e}^{\omega r \cos\psi}\|A^{k+1}x\|_n}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi+\delta}{2}}^{\frac{\pi+\delta}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\cos(\tau+\psi)}}{|r\omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|}\, \mathrm{d}\tau \\
&+\; \frac{\widetilde{M}\mathrm{e}^{\omega r \cos\psi}\|A^{k+1}x\|_n}{\pi} \int\limits_{r^{-1}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\tau r \sin(\psi + \frac{\delta}{2})}}{|\omega + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\delta}{2}}|}\, \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} + \frac{\widetilde{M} e^{\omega r \cos\psi} \|A^{k+1}x\|_n}{2\pi \cos\frac{\delta}{2}} \int\limits_{-\frac{\pi+\delta}{2}}^{\frac{\pi+\delta}{2}} e^{\cos(\tau+\psi)}\, d\tau$$

$$+ \frac{\widetilde{M} e^{\omega r \cos\psi} \|A^{k+1}x\|_n}{\pi} \int\limits_{\sin(\psi+\frac{\delta}{2})}^{\infty} \frac{e^{-\tau'}}{\tau' |\tau'^{-1} r\omega \sin(\psi+\frac{\delta}{2}) + e^{i\frac{\pi+\delta}{2}}|}\, d\tau'$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{|z|^j \|A^j x\|_m}{j!} + \frac{\widetilde{M} e^{\omega r \cos\psi} \|A^{k+1}x\|_n}{2\pi \cos\frac{\delta}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{\cos\tau}\, d\tau$$

$$+ \frac{\widetilde{M} e^{\omega r \cos\psi} \|A^{k+1}x\|_n}{\pi \cos\frac{\delta}{2}} \int\limits_{\sin(\psi+\frac{\delta}{2})}^{\infty} \frac{e^{-\tau'}}{\tau'}\, d\tau'$$

Sei nun $\varphi' < \frac{\delta}{2}$ und Δ' der zugehörige Teilsektor von Δ. Dann folgt aus der obigen Abschätzung für alle $z \in \Delta'$ die Ungleichung

$$\Big\| T(z)x \Big\|_m \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\big(\operatorname{Re} z\big)^j \|A^j x\|_m}{j!\big(\cos\varphi'\big)^j} + \overline{M} e^{\omega \operatorname{Re} z} \|A^{k+1}x\|_n$$

mit

$$\overline{M} := \frac{\widetilde{M}}{\pi \cos\frac{\delta}{2}} \max \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{\cos\tau}\, d\tau \,,\ \int\limits_{\sin(\frac{\delta}{2}-\varphi')}^{\infty} \frac{e^{-\tau'}}{\tau'}\, d\tau' \right\}.$$

Ferner existieren, wie in Satz 3.2.1, natürliche Zahlen m_j und n' sowie Konstanten $M_j \geq 0$ und $M' \geq 0$, so dass

$$\|A^j x\|_m \leq M_j \|x\|_{m_j} \qquad \text{bzw.} \qquad \|A^{k+1}x\|_n \leq M' \|x\|_{n'}$$

für alle $x \in E$ und alle $j = 0, \ldots, k$. Mit Hilfe der Definitionen

$$\widehat{n} := \max\{m_0, \ldots, m_{k+1}, n'\}$$

und

$$\widehat{M} := \max \left\{ \overline{M} M',\ \sup_{z \in \overline{\Delta'}} e^{-\omega \operatorname{Re} z} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{M_j \big(\operatorname{Re} z\big)^j}{j!\big(\cos\varphi'\big)^j} \right) \right\}$$

erhalten wir für alle $z \in \overline{\Delta'}$ die Abschätzung

$$\Big\| T(z)x \Big\|_m \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\big(\operatorname{Re} z\big)^j \|A^j x\|_m}{j!\big(\cos\varphi'\big)^j} + \overline{M} e^{\omega \operatorname{Re} z} \|A^{k+1}x\|_n$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{M_j \big(\operatorname{Re} z\big)^j}{j!\big(\cos\varphi'\big)^j} \right) \|x\|_{\widehat{n}} + \overline{M} M' e^{\omega \operatorname{Re} z} \|x\|_{\widehat{n}} \leq \widehat{M} e^{\omega \operatorname{Re} z} \|x\|_{\widehat{n}},$$

d.h., $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ ist exponentiell gleichgradig stetig. Somit ist (d) $\Longrightarrow$ (a) gezeigt, also Satz 3.2.2 vollständig bewiesen. ■

Bemerkung 3.2.3. (a) Der Beweis des obigen Satzes verläuft über weite Passagen analog zu den Sätzen 7.7 [Kap.1] und 5.2 [Kap. 2] in [Paz83], die die Situation in Banachräumen behandeln. Weitere Ergebnisse über (sektoriell) analytische Halbgruppen in Banachräumen findet man z.B. in den Monographien [HP57], [Kat66] und [Lun95]. Literatur zur Theorie der (sektoriell) analytischen Halbgruppen auf Fréchet- bzw. lokal-konvexen Räumen sind z.B. die Arbeiten [Moo71a], [Moo71b] und [Yos71]. Neu an Satz 3.2.2 ist wie in Satz 3.2.1 die Implikation (d) $\Longrightarrow$ (a).

(b) Die obige Abschätzung in (c) impliziert offensichtlich die gleichgradige Stetigkeit der Familie

$$\left(\left(\widehat{M}^{-1}t\mathrm{e}^{-\omega t}AT(t)\right)^k\right)_{t>0,\, k\in\mathbb{N}}.$$

Umgekehrt folgt aus der gleichgradigen Stetigkeit der obigen Familie analog zum Beweis von (c) $\Longrightarrow$ (a) die Fortsetzbarkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ zu einer sektoriell analytischen Halbgruppe [siehe auch [Moo71b]].

(c) Die „Konstruktion“ im Teil (d) $\Longrightarrow$ (a) liefert nur eine sektoriell analytische $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe auf $\Delta = \big\{z\in\mathbb{C}\;\big|\;|\arg z| < \frac{\delta}{2}\big\}$ und nicht, wie man erwarten könnte, auf $\widehat{\Delta} := \big\{z\in\mathbb{C}\;\big|\;|\arg z| < \delta\big\}$. Man kann jedoch für jedes $0<\varepsilon<\delta$ die Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ mittels der Definition

$$T(z)x \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^+} \mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda & \text{für}\quad -\frac{\varepsilon}{2} < \arg z < \delta-\varepsilon \\ x & \text{für}\quad z=0 \\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} \mathrm{e}^{\lambda z}R(\lambda,A)x\,\mathrm{d}\lambda & \text{für}\quad -\delta+\varepsilon < \arg z < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

zu einer sektoriell analytischen $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe auf $\Delta_\varepsilon := \big\{z\in\mathbb{C}\;\big|\;|\arg z| < \delta-\varepsilon\big\}$ fortsetzen. Dabei bezeichne Γ_ε^+ und Γ_ε^- die Kurven

$$\Gamma_\varepsilon^+ : (-\infty,\infty)\to\mathbb{C}, \qquad \Gamma_\varepsilon^+(\tau) := \begin{cases} \omega+\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} & \text{für}\quad \tau\geq 0 \\ \omega+|\tau|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta-\frac{\varepsilon}{2})} & \text{für}\quad \tau\leq 0 \end{cases}$$

und

$$\Gamma_\varepsilon^- : (-\infty,\infty) \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_\varepsilon^-(\tau) := \begin{cases} \omega + \tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta-\frac{\varepsilon}{2})} & \text{für} \quad \tau \geq 0 \\ \omega + |\tau| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} & \text{für} \quad \tau \leq 0 \end{cases}.$$

(d) Die Frage nach hinreichenden Bedingungen an den Operator A zur Erzeugung einer sektoriell analytischen, lokal gleichgradig stetigen Halbgruppe scheint ein offenes Problem zu sein.

Folgerung 3.2.2. *Sei E ein beliebiger Fréchetraum und A der infinitesimale Generator einer sektoriell analytischen $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta_0}$. Ferner seien δ, $\widehat{\omega}$ und Γ_∞ wie in Satz 3.2.2 gewählt. Dann gilt*

$$T(z)x = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda z} R(\lambda, A)x \,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $x \in E$ und alle $z \in \Delta' := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\arg z| < \frac{\delta}{2} \right\}$. Dabei ist die Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von $\Delta' \times E$ gleichmäßig.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.1.1 und dem Beweis von Satz 3.2.2. ■

In den beiden folgenden Sätzen beschäftigen wir uns mit lokal gleichgradig stetigen C^∞- bzw. C^ω-Halbgruppen. Einfache Beispiele zeigen, dass die Methoden der Laplace-Transformation in diesem Fall nicht anwendbar sind. So kann z.B. der infinitesimale Generator einer lokal gleichgradig stetigen C^∞-Halbgruppe eine leere Resolventenmenge besitzen [siehe Beispiel 3.1.2]. Daher benötigen wir als ein weiteres Hilfsmittel den Begriff der sogenannten asymptotischen Resolvente.

Definition 3.2.3. Sei $A : E \to E$ ein stetiger, linearer Operator und sei $\omega \geq 0$. Dann heißt eine 1-Parameter-Familie $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda > w}$ von stetigen, linearen Operatoren *asymptotische Resolvente* von A, wenn folgendes gilt:

(a) Die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda)x$ ist für jedes feste $x \in E$ beliebig oft differenzierbar.

(b) $R(\lambda)A = AR(\lambda)$ und $R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$ für alle $\lambda, \mu > \omega$.

(c) Für $S(\lambda) := (\lambda \mathbf{I} - A)R(\lambda) - I$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} S(\lambda)x \right\|_m \leq Mc^k \mathrm{e}^{-c\lambda} \|x\|_n$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda \in (\omega, \infty)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.2.4. (a) Man beachte, dass asymptotische Resolventen *nicht* eindeutig sind. So ist z.B. die Familie $\big(R(\lambda) + \mathrm{e}^{-c\lambda}\mathbf{I}\big)_{\lambda>\omega}$ für jedes $c > 0$ eine asymptotische Resolvente von A, falls $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda>\omega}$ eine derartige ist. Insbesondere ist die Resolvente $R(\lambda, A)$ selbst auch eine asymptotische Resolvente, falls ein $\omega \geq 0$ existiert mit $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$.

(b) Definition 3.2.3 geht auf eine Arbeit von S. Ōuchi [Ōuc73] zurück und wurde dort etwas allgemeiner für abgeschlossene Operatoren auf folgenvollständigen, lokal-konvexen Räumen formuliert. Das zugehörige Resultat in [Ōuc73] beinhaltet dementsprechend auch den stark stetigen und nicht nur den stark differenzierbaren Fall [siehe auch [Kōm68], [Vuv78]].

(c) Problematisch im Zusammenhang mit Anwendungen (z.B auf partielle Differentialgleichungen) erscheint uns der Nachweis der Existenz einer asymptotischen Resolventen, ohne apriori zu wissen, dass A eine stark stetige Halbgruppe erzeugt.

Satz 3.2.3. *Sei E ein beliebiger Fréchetraum mit Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Der Operator $A : E \to E$ ist der infinitesimale Generator einer C^∞-Halbgruppe auf E.

(b) Der Operator $A : E \to E$ ist linear und stetig. Ferner existiert eine asymptotische Resolvente $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda>\omega}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} R(\lambda)x\right\|_m \leq \frac{k!M\|x\|_n}{(\lambda-\omega)^{k+1}}$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda > \omega$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei A der infinitesimale Generator einer C^∞-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$. Dann ist A nach Folgerung 3.1.1 stetig und linear. Für festes $c > 0$ definieren wir die 1-Parameter-Familie $\big(R_c(\lambda)\big)_{\lambda>0}$ mittels

$$R_c(\lambda)x \quad := \quad \int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau} T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau.$$

Dann existiert $R_c(\lambda)x$ nach Lemma 2.1.18 für alle $x \in E$. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue 2.1.15 zeigt man, dass $\lambda \mapsto R_c(\lambda)x$ für jedes feste $x \in E$ beliebig oft stetig differenzierbar ist und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} R_c(\lambda)x \quad = \quad (-1)^k \int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\tau^k T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau. \tag{3.40}$$

Ferner erhalten wir aus Lemma 3.1.3 die Gleichungen

$$\begin{aligned} AR_c(\lambda)x &= A\int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \;=\; \int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}AT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau \;=\; R_c(\lambda)Ax \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_c(\lambda)R_c(\mu)x &= \int_0^c\int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{e}^{-\mu\sigma}T(\tau+\sigma)x\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^c\int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{e}^{-\mu\sigma}T(\tau+\sigma)x\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma \;=\; R_c(\mu)R_c(\lambda)x \end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda, \mu > 0$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 2.3.2 folgt weiterhin

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{I} - A)R_c(\lambda)x &= \int_0^c (\lambda\mathbf{I} - A)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}T(\tau)x\Big)\,\mathrm{d}\tau \;=\; x - \mathrm{e}^{-\lambda c}T(c)x \end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $\lambda > 0$. Daraus folgt

$$S_c(\lambda) \;:=\; (\lambda\mathbf{I} - A)R_c(\lambda) - \mathbf{I} \;=\; -\mathrm{e}^{-c\lambda}T(c)$$

und

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}S_c(\lambda)x\right\|_m \;\leq\; Mc^k\mathrm{e}^{-c\lambda}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $\Big(R_c(\lambda)\Big)_{\lambda>0}$ eine asymptotische Resolvente von A. Ferner folgt aus (3.40) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}R_c(\lambda)x\right\|_m &= \left\|\int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\tau^kT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau\right\|_m \;\leq\; M\|x\|_n\int_0^c \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\tau^k\,\mathrm{d}\tau \\ \leq\; M\|x\|_n\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\tau^k\,\mathrm{d}\tau &= \frac{M\|x\|_n}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau'}(\tau')^k\,\mathrm{d}\tau' \;=\; \frac{k!M\|x\|_n}{\lambda^{k+1}} \end{aligned}$$

für alle $x \in E$, alle $\lambda > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit ist (a) $\Longrightarrow$ (b) gezeigt.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $A : E \to E$ ein stetiger, linearer Operator mit asymptotischer Resolvente $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda>\omega}$. Ferner erfülle $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda>\omega}$ die Abschätzung in (b). Dann ist

A nach [Ōuc73, Thm. 2.1] der infinitesimale Generator einer lokal gleichgradig stetigen C^0-Halbgruppe auf E. Da A jedoch auf ganz E definiert ist, ist die erzeugte Halbgruppe nicht nur stark stetig, sondern nach Folgerung 3.1.1 auch stark differenzierbar. Somit ist auch die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (a) gezeigt. ∎

Bemerkung 3.2.5. (a) Falls für $\omega \geq 0$ die Resolvente $R(\lambda, A)$ auf (ω, ∞) existiert und wir $R(\lambda) := R(\lambda, A)$ wählen, so ist die obige Abschätzung in (b)

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} R(\lambda, A)x \right\|_m \leq \frac{k! M \|x\|_n}{(\lambda - \omega)^{k+1}}$$

äquivalent zu

$$\left\| R(\lambda, A)^{k+1} x \right\|_m \leq \frac{M \|x\|_n}{(\lambda - \omega)^{k+1}},$$

denn es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} R(\lambda, A)x = (-1)^k k! M R(\lambda, A)^{k+1} x$$

Somit ist die Aussage (b) in Satz 3.2.3 offensichtlich eine Verallgemeinerung der Aussage (c) in Satz 3.2.1.

(b) Vergleichen wir Satz 3.2.3 insgesamt mit Satz 3.2.1, so stellen wir fest, dass die zu (b) und (d) analogen Aussagen im obigen Fall fehlen. Der Beweis in [Ōuc73] zeigt, dass es im Allgemeinen *kein* äquivalentes Fundamentalsystem $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass eine Abschätzung der Form

$$\left|\left|\left| R(\lambda)^k x \right|\right|\right|_n \leq M \frac{|||x|||_n}{(\lambda - \omega)^k}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$, alle $x \in E$ und alle $\lambda > \omega$ erfüllt ist. Denn gäbe es ein derartiges Fundamentalsystem, so würde die Konstruktion von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ [siehe [Ōuc73]] eine exponentiell gleichgradig stetige Halbgruppe liefern. Die Frage, ob es eine zu (d) analoge Bedingung an die asymptotische Resolvente gibt, die die Existenz einer C^∞-Halbgruppe garantiert, ist dagegen offen.

Zum Schluss dieses Abschnittes kommen wir noch zu stark analytischen Halbgruppen und deren infinitesimalen Generatoren. Von den verschiedenen Charakterisierungsmöglichkeiten, die einem in Banachräumen zur Verfügung stehen [siehe [Paz83, Ch. 1, Thm. 1.2]], hat sich in Frécheträumen nur eine als geeignet erwiesen und zwar die Voraussetzung, dass die zugehörige Exponentialreihe auf ganz E konvergiert.

Zum Beweis von Satz 3.2.4 benötigen wir noch das folgende Lemma über das Konvergenzverhalten der Exponentialreihe.

Lemma 3.2.2. *Sei E ein komplexer Fréchetraum und $A : E \to E$ ein stetiger, linearer Operator. Ferner besitze die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k x}{k!} \tag{3.41}$$

für jedes $x \in E$ einen positiven Konvergenzradius $r_x > 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe (3.41) für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h., der Konvergenzradius von (3.41) im Sinne von Definition 2.3.6 ist $r = \infty$.

Beweis: Setze $r := \sup\Big\{|\lambda| \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k x}{k!} \quad \text{konvergiert für alle } x \in E\Big\}$. Nach Satz 2.3.11 gilt $r > 0$. Angenommen $r < \infty$. Dann folgt aus Satz 2.3.13

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k}{k!}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l A^l x}{l!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^k A^k x}{l!(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^k A^k x}{k!}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < r$. Somit konvergiert die Potenzreihe (3.41) für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 2r$. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zur Definition von r, also $r = \infty$. ■

Satz 3.2.4. *Eine Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist genau dann stark analytisch, wenn ihr infinitesimaler Generator A ein stetiger, linearer Operator auf E ist und die Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} \tag{3.42}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Insbesondere gilt dann die Darstellung

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} \tag{3.43}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$.

Beweis: „$\Longrightarrow$": Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine stark analytische Halbgruppe auf E mit infinitesimalem Generator A. Dann existiert per Definition für jedes $x \in E$ eine analytische Abbildung $\varphi_x : (-r_x, r_x) \to E$ mit $\varphi_x(t) = T(t)x$ für alle $t \in [0, r_x)$. Da φ analytisch ist, gilt

$$\varphi_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \varphi_x^{(k)}(0)}{k!}$$

für $|t| < r_x$. Aus Lemma 3.1.3 folgt $\varphi_x^{(k)}(0) = A^k x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k A^k x}{k!}$$

für $|\lambda| < r_x$ und die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.2.2.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine 1-Parameter-Halbgruppe auf E mit infinitesimalem Generator $A : E \to E$. Ferner existiere die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Dann definiert

$$S(t)x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}, \quad x \in E$$

eine 1-Parameter-Familie von stetigen, linearen Operatoren und aus Satz 2.3.13 folgt

$$\begin{aligned} S(t) \circ S(s)x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l A^l x}{l!} \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{t^l s^{k-l} A^k x}{l!(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+s)^k A^k x}{k!} \;=\; S(t+s)x \end{aligned}$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Somit ist $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ eine stark analytische Halbgruppe. Da A offensichtlich der infinitesimale Generator von $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ ist, erhalten wir aus Satz 3.1.1 die Identität $S(t) = T(t)$ für alle $t \geq 0$, d.h. $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist stark analytisch und für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$ gilt die Darstellung

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}.$$

■

Folgerung 3.2.3. *Jede stark analytische Halbgruppe auf E läßt sich zu einer stark analytischen, reellen und, falls E komplex ist, zu einer stark analytischen, komplexen*[6] *1-Parameter-Gruppe auf E fortsetzen.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.2.4 und Darstellung (3.43). ■

[6] Die offensichtliche Verallgemeinerung der Definition 3.1.1(c) auf komplexe Parameter überlassen wir dem Leser.

Die abschließenden Beispiele sollen zum einen die Notwendigkeit mancher Voraussetzung aus den vorhergehenden Lemmata und Sätzen verdeutlichen und zum anderen einige einfache Anwendungen liefern.

Beispiel 3.2.1 zeigt, dass Halbgruppen, die auf beschränkten Mengen gleichmäßig stetig sind, in Frécheträumen im Allgemeinen *nicht* stark differenzierbar sind.

Beispiel 3.2.1. Sei $E := \sum(\mathbb{C})$ der Raum aller schnell fallenden Folgen in $\mathbb{C}$, d.h.,

$$\sum(\mathbb{C}) := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} k^n |x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|x\|_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} k^n |x_k|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

und sei $B \subset E$ beschränkt. Dann gilt für alle $x \in B$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\|_n &= \sup_{k\in\mathbb{N}} k^n |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1||x_k| \\
&\leq \sup_{k\leq K} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1| k^n |x_k| \; + \; \sup_{k>K} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1| k^n |x_k| \\
&\leq \|x\|_n \sup_{k\leq K} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1| \; + \; 2 \sup_{k>K} k^n |x_k| \\
&\leq M \sup_{k\leq K} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1| \; + \; \frac{2}{(K+1)} \|x\|_{n+1} \\
&\leq M \sup_{k\leq K} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k t} - 1| \; + \; \frac{2M'}{(K+1)},
\end{aligned}$$

d.h., die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen. Andererseits erhalten wir für $x = \big(\mathrm{e}^{-k/2}\big)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(h)x - x}{h} \right\|_0 &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^k h} - 1|}{h} |x_k| \; = \; \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^k |x_k|}{h} \left| \int_0^h \mathrm{e}^{ie^k \tau} \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^{k/2}}{h} | \int_0^h \mathrm{e}^{ie^k \tau} \, \mathrm{d}\tau | \; \to \; \infty
\end{aligned}$$

für $h \to 0$. Somit ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *nicht* stark differenzierbar.

Beispiel 3.2.2 verdeutlicht, dass stark differenzierbare Halbgruppen in Fréchetträumen im Allgemeinen *nicht* stark analytisch sind.

Beispiel 3.2.2. Sei $E := \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ der Raum aller C^∞-Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, deren Ableitungen beschränkt sind, d.h.,

$$\mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sup_{s\in\mathbb{R}} |x^{(n)}(s)| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|x\|_n := \max_{0\le l\le n} \sup_{s\in\mathbb{R}} |x^{(l)}(s)|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)(s) := x(s+t), \quad t \ge 0.$$

Dann gilt für $h > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - x' \right\|_0 &= \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right| \\
&= \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h x'(s+\tau) - x'(s)\,\mathrm{d}\tau \right| \\
&\le \|x\|_2 \frac{1}{h} \int_0^h \tau \,\mathrm{d}\tau \;\to\; 0
\end{aligned}$$

für $h \to 0$. Analog zeigt man für $n > 0$ die Aussage

$$\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - x' \right\|_n \;\to\; 0$$

für $h \to 0$. Somit ist die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ stark differenzierbar und $Ax = x'$ ist ihr infinitesimaler Generator. Die Halbgruppe ist jedoch *nicht* stark analytisch, denn wäre dies der Fall, so folgt aus Satz 3.2.4 die Identität

$$x(s+t) = T(t)x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^k x)(s)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x^{(k)}(s)}{k!}$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R})$. Dies impliziert aber, dass alle $x \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ analytisch sind, was sicherlich falsch ist. Daher ist $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ nicht stark analytisch.

Das nächste Beispiel zeigt, dass es in Satz 3.2.1 (d) *nicht* genügt zu fordern, dass $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)$ nur auf $(\widehat{\omega}, \infty) \subset \mathbb{R}$ schwach wachsend ist.

Beispiel 3.2.3. Sei $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2\}$ und sei $E := \mathrm{C}(\Gamma, \mathbb{C})$ der Raum aller stetigen Abbildungen von Γ nach $\mathbb{C}$ versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|x\|_n := \sup_{\substack{z\in\Gamma\\|z|\le n}} |x(z)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)(z) := \mathrm{e}^{tz}x(z), \quad t \ge 0.$$

Dann zeigt man leicht, dass $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ eine stark analytische Halbgruppe mit infinitesimalem Generator $\big(Ax\big)(z) = z\,x(z)$ ist. Ferner gilt $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, also insbesondere $(0, \omega) \subset \rho(A)$. Weiterhin erhalten wir für $\lambda \in (0, \infty)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Big\|R(\lambda, A)x\Big\|_n &= \sup_{\substack{z\in\Gamma\\|z|\le n}} \big|(\lambda - z)^{-1}x(z)\big| \\ &\le \|x\|_n \sup_{z\in\Gamma} \big|\lambda - z\big|^{-1} = \|x\|_n \begin{cases} 2(\lambda^2 + 4\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} & \text{für} \quad \lambda \ge 1 \\ \lambda^{-1} & \text{für} \quad 0 < \lambda \le 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Somit ist $(\lambda, x) \mapsto R(\lambda, A)$ schwach wachsend auf $(1, \infty)$. Der infinitesimale Generator A erzeugt jedoch *keine* exponentiell gleichgradig stetige Halbgruppe.

Beispiel 3.2.4. Sei

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{u} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} \big(1 + \|\xi\|^2\big)^n |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|\widehat{u}\|_n := \left(\int_{\mathbb{R}} \big(1 + \|\xi\|^2\big)^n |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner sei $E := \widehat{E}^n$ und $A(\xi)$ eine $n \times n$-Polynommatrix, d.h., ihre Einträge sind Polynome in ξ. Dann definiert

$$\Big(\widehat{A}\widehat{u}\Big)(\xi) := A(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

einen stetigen linearen Operator von E nach E. Durch geeignete Wahl von $A(\xi)$ erhält man sehr unterschiedliches Wachstumsverhalten der Resolvente $R(\lambda, \widehat{A})$. Genauere Details kann man in [Oha72] nachlesen.

Beispiel 3.2.5 zeigt, dass Satz 3.2.4 in *nicht-Baireschen* Räumen im Allgemeinen *falsch* ist.

Beispiel 3.2.5. Sei E die Menge aller rationalen Funktionen $\frac{p}{q}$, deren Pole in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ liegen, d.h.,

$$E := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; p, q \;\text{ Polynome} \right\},$$

versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|x\|_n := \sup_{s\in[-n,n]} |x(s)|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\Big(T(t)x\Big)(s) := x(s+t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dann zeigt man, wie in Beispiel 3.2.2, dass die Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ stark differenzierbar ist mit infinitesimalem Generator $Ax = x'$. Ferner sieht man leicht, dass $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auch stark analytisch ist, denn alle rationalen Funktionen $x = \frac{p}{q} \in E$ sind reell-analytisch und somit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x^{(k)}(\cdot)}{k!}$$

für alle $x \in E$. Jedoch hängt der Konvergenzradius r_x von der Lage der Polstellen von $x = \frac{p}{q}$ in $\mathbb{C}$ ab. Es gilt

$$r_x = \min\big\{ |\mathrm{Im}\,\lambda| \;\big|\; \lambda \;\text{ Polstelle von } x \big\}.$$

Somit ist Satz 3.2.4 in beliebigen lokal-konvexen Räumen *falsch*. Ein weiteres Beispiel erhält man z.B. durch leichte Modifikation des obigen, indem man $E := \{x \in \mathrm{C}(S^1, \mathbb{R}) \mid x \;\text{ analytisch auf } S^1\}$ [7] und $T(t)x(\lambda) := x(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\lambda)$ wählt.

[7] vgl. Definition 2.3.5

Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen in Frécheträumen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns eingehend mit linearen Differentialgleichungen, genauer gesagt, mit linearen Anfangswertproblemen in Frécheträumen, d.h. mit Problemen der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.1}$$

und

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s. \tag{4.2}$$

In Abschnitt 4.1 behandeln wir den zeitunabhängigen Fall (4.1), in Abschnitt 4.2 den zeitabhängigen Fall (4.2). Während Satz 4.1.1 in Abschnitt 4.1 unmittelbar aus der Theorie der stark differenzierbaren Halbgruppen in Kapitel 3 folgt, stellen die Sätze 4.2.1 und 4.2.2 in Abschnitt 4.2 die eigentlichen zentralen Ergebnisse dieses Kapitels dar.
Unser Ausgangspunkt war die zahlreiche Literatur über lineare Anfangswertprobleme und Halbgruppen auf Banachräumen, wie z.B. die Monographien [HP57], [DS66], [Kat66], [Yos71], [Kre71], [Paz83] und [Lun95], sowie die beiden Übersichtsartikel [Kis76] und [LS94]. Daneben erwiesen sich insbesondere die Arbeiten [Wen85], [Yos65], [KT62], [Tan59, Tan60b, Tan60a] und [Kat53] bei der Untersuchung zeitabhängiger Gleichungen als sehr hilfreich.

4.1 Lineare zeitunabhängige Differentialgleichungen

Bevor wir die Lösbarkeit (linearer) Anfangswertprobleme in Frécheträumen genauer betrachten, sollten wir zunächst den zugrundeliegenden Lösungsbegiff exakt formulieren.

Definition 4.1.1. Sei $U \subset E$ offen und sei $f : [\alpha, \beta] \times U \to E$ stetig. Dann bezeichnen wir $\varphi : [s, s+\varepsilon] \to E$ als *(klassische) Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \geq \alpha, \tag{4.3}$$

wenn folgendes gilt:

(AWP1) $\varphi(t) \in U$ für alle $t \in [s, s+\varepsilon]$ und $\varphi(s) = x$.

(AWP2) Die Abbildung φ ist stetig differenzierbar und erfüllt (4.3), d.h., $\dot{\varphi}(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ für alle $t \in [s, s+\varepsilon]$.

Bemerkung 4.1.1. Man beachte, dass eine (klassische) Lösung von (4.3) im obigen Sinne in $t = s$ differenzierbar ist. Falls der Operator A in (4.1) bzw. die Operatoren $A(t)$ in (4.2) nur abgeschlossen und dicht-definiert sind, schwächt man diese Forderung oftmals ab und verlangt nur Stetigkeit in $t = s$, um einen reichhaltigeren Lösungsbegriff zu bekommen [siehe [Paz83], Ch. 4, Def. 2.1]. Da wir jedoch lineare Operatoren betrachten, die auf ganz E definiert sind, erscheint uns in diesem Fall die obige Definition geeigneter.

Satz 4.1.1. *Sei $A : E \to E$ der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ und sei $b : [0, \infty) \to E$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = x, \quad t \geq 0 \tag{4.4}$$

für alle $x \in E$ eine eindeutige Lösung $\varphi_x : [0, \infty) \to E$ mit der Darstellung

$$\varphi_x(t) \;=\; T(t)x \;+\; \int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.5}$$

Ferner existiert für jedes $T \geq 0$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\varphi_x(t)\|_m \;\leq\; M \left(\|x\|_n + \int_0^t \|b(\tau)\|_n \,\mathrm{d}\tau \right) \tag{4.6}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in [0, T]$.

Beweis: Zur Existenz: Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ die von A erzeugte C^∞-Halbgruppe. Dann definieren wir für $x \in E$ die Abbildung

$$\varphi_x(t) \;=\; T(t)x \;+\; \int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad t \geq 0.$$

Nach Lemma 3.1.2 ist $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ lokal gleichgradig stetig. Somit ist die Abbildung $\tau \mapsto T(t-\tau)b(\tau)$ stetig, also insbesondere auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 2.3.2 sowie aus Lemma 3.1.3 folgt nun die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung

$$t \mapsto \int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0$$

und die Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \;=\; A\int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; b(t).$$

Somit erhalten wir insgesamt $\varphi(0) = x$ und

$$\dot{\varphi_x}(t) \;=\; AT(t)x \;+\; A\int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; b(t) \;=\; A\varphi_x(t) \;+\; b(t),$$

d.h. φ_{x_0} ist eine Lösung des Anfangswertproblems (4.4).

Zur Eindeutigkeit: Sei $\psi : [0,\beta] \to E$ eine weitere Lösung von (4.4). Dann ist $\varphi_x - \psi$ eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Somit genügt es zu zeigen, dass (4.7) nur die triviale Lösung besitzt. Sei also $\psi : [0,\beta] \to E$ eine Lösung von (4.7). Dann gilt für $0 \leq s \leq t < \beta$ die Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(T(t-s)\psi(s)\Big) \;=\; -AT(t-s)\psi(s) \;+\; T(t-s)A\psi(s) \;=\; 0.$$

Daraus folgt $\psi(t) = T(t)\psi(0) = 0$ für alle $t \in [0,\beta]$ und somit ist die Lösung von (4.5) eindeutig.

Zur Abschätzung (4.6): Nach Lemma 3.1.2 existiert zu jedem $T \geq 0$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T(t)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in [0,T]$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|\varphi_x(t)\|_m \;&\leq\; \|T(t)x\|_m \;+\; \left\|\int_0^t T(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_m \\ &\leq\; M\left(\|x\|_n \;+\; \int_0^t \|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\right)\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in [0, T]$. Somit ist der Beweis von Satz 4.1.1 vollständig. ■

Bemerkung 4.1.2. Satz 4.1.1 ist in einem gewissen Sinne umkehrbar, d.h., aus der Voraussetzung, die homogene Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0$$

sei „uniformly correct solvable“ [siehe [Kis76], p. 305], folgt, dass A der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe ist. Ähnliche Ergebnisse für Banachräume kann man auch in [Paz83, Ch. 4] nachlesen.

Folgerung 4.1.1. *Sei $A : E \to E$ der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ und sei $b : [\alpha, \infty) \to E$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(\alpha) = x, \quad t \geq \alpha \tag{4.8}$$

für alle $x \in E$ eine eindeutige Lösung $\varphi_x : [\alpha, \infty) \to E$ mit der Darstellung

$$\varphi_x(t) \;\; = \;\; T(t - \alpha)x \; + \int\limits_a^t T(t - \tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.9}$$

Beweis: Da $\varphi_x : [\alpha, \infty) \to E$ genau dann eine Lösung von (4.8) ist, wenn $\widehat{\varphi}_x(t) := \varphi_x(t + \alpha)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \widehat{b}(t), \quad x(0) = x, \quad t \geq 0$$

mit $\widehat{b}(t) := b(t + \alpha)$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.1.1. ■

Folgerung 4.1.2. *Sei $A : E \to E$ der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t \geq 0}$ und sei $b \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}, E)$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \Big\{ (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\Big|\; t \geq s \Big\} \times E \to E$$

$$\Phi_{t,s}(x) \;\; := \;\; T(t - s)x \; + \int\limits_s^t T(t - \tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s. \tag{4.10}$$

Ferner ist Φ $(k+1)$*-fach stetig differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^l}{\partial t^l}\Phi_{t,s}(x) &= A^l\Phi_{t,s}(x) + \sum_{j=0}^{l-1} A^j b^{(l-1-j)}(t), \\
\frac{\partial^l}{\partial s^l}\Phi_{t,s}(x) &= (-A)^l T(t-s)x - \sum_{j=0}^{l-1}(-A)^j T(t-s) b^{(l-1-j)}(s), \\
\frac{\partial^l}{\partial x^l}\Phi_{t,s}(x)h &= \begin{cases} T(t-s)h & \text{für} \quad l=1 \\ 0 & \text{für} \quad l \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

für alle $1 \leq l \leq k+1$.

Beweis: Nach Folgerung 4.1.1 ist $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ offensichtlich die eindeutige Lösung von (4.10). Ferner folgt aus der lokal gleichgradigen Stetigkeit von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$, dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 2.3.2 und Lemma 3.1.3 die $(k+1)$-fache stetige (partiell) Differenzierbarkeit von Φ. Die obigen Gleichungen für die partiellen Ableitungen erhält man leicht mittels Induktion. ∎

Definition 4.1.2. Die Abbildung $\Phi_{t,s}$ heißt der von (4.10) erzeugte *(Pseudo-)Halbfluss*. Falls $b : \mathbb{R} \to E$ konstant ist, d.h., falls (4.10) *autonom* ist, setzen wir $\Phi_t := \Phi_{t,0}$ und bezeichen Φ_t als den zugehörigen *Halbfluss*.

Folgerung 4.1.3. *Sei* $A : E \to E$ *der infinitesimale Generator einer* $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$*-Halbgruppe und sei* $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ *die eindeutige Lösung des Anfangwertproblems (4.10). Dann existiert ein* $\omega \geq 0$*, so dass zu jedem* $m \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \quad \leq \quad M\mathrm{e}^{\omega(t-s)}\left(\|x\|_n + \int_s^t \mathrm{e}^{-\omega(s-\tau)}\|b(\tau)\|_n \,\mathrm{d}\tau\right)$$

für alle $x_0 \in E$ *und alle* $t \geq s$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Definition 3.1.2 und Bemerkung 3.1.3. ∎

4.2 Lineare zeitabhängige Differentialgleichungen

Im Mittelpunkt des folgenden Abschnitts stehen Evolutionsgleichungen, d.h. lineare, zeitabhängige Anfangswertprobleme der Form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.11}$$

und deren Lösbarkeit. Wie im zeitunabhängigen Fall untersuchen wir auch hier zuerst das homogene System

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.12}$$

und erhalten anschließend mit Hilfe der Variation der Konstanten die Lösung des inhomogenen Systems. Da die Gleichung (4.12) zeitabhängig ist, können wir *nicht* erwarten, dass sich die Lösung mittels einer Halbgruppe in der Form $t \mapsto T(t-s)x$ darstellen lässt. Jedoch sollte unter gewissen Voraussetzungen, ähnlich wie im endlichdimensionalen Fall, eine Familie von linearen Operatoren $\big(U(t,s)\big)_{s\leq t}$ existieren, so dass $t \mapsto U(t,s)x$ die eindeutige Lösung von (4.12) liefert. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 4.2.1. (a) Sei $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Eine Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ von stetigen linearen Operatoren heißt *Evolutionsfamilie* oder *Evolutionssystem*, wenn folgendes gilt

(ES1) $U(t,t) = \mathbf{I}$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$.

(ES2) $U(t,s) \circ U(s,r) = U(t,r)$ für alle $\alpha \leq r \leq s \leq t \leq \beta$.

(b) Ein Evolutionssystem $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ heißt

(i) *stark stetig* oder kurz C^0-*Evolutionssystem*, wenn die Abbildung $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ für jedes $x \in E$ stetig ist.

(ii) *stark differenzierbar* oder kurz C^1-*Evolutionssystem*, wenn die Abbildung $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ für jedes $x \in E$ differenzierbar ist.

(c) Wie bezeichnen ferner $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ als das zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionssystem, wenn $t \mapsto U(t,s)x$ für jedes $x \in E$ und jedes $s \in [\alpha,\beta]$ die eindeutige Lösung von (4.12) darstellt.

Bemerkung 4.2.1. Evolutionssysteme werden in der Literatur oftmals auch Fundamentalsysteme genannt. Wir bevorzugen jedoch den Begriff Evolutionssystem, da erstens die Bezeichnung Fundamentalsystem schon vergeben ist und zweitens im Hinblick auf partielle Differentialgleichungen der Begriff Evolutionssystem gebräuchlicher ist.

In den beiden folgenden Sätzen geben wir hinreichende Kriterien für die Existenz eines zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörigen Evolutionssystems und somit für die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (4.12) an. Satz 4.2.1 nennt man oftmals den „hyperbolischen“ und Satz 4.2.2 den „parabolischen“ Fall. Die Bezeichnungen sind durch die späteren Anwendungen auf partielle Differentialgleichunen entstanden.

4.2.1 Der hyperbolische Fall

Satz 4.2.1. *Sei $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b \in \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(H1) *Für jedes $t \in [\alpha,\beta]$ ist $A(t)$ der infinitesimale Generator eine stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T_t(s)\big)_{s\geq 0}$.*

(H2) *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\Big\|T_{t_k}(s_k)\cdots T_{t_2}(s_2)T_{t_1}(s_1)x\Big\|_m \quad\leq\quad M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle endlichen Partitionen $\alpha = t_0 \leq \cdots \leq t_k = \beta$ von $[\alpha,\beta]$ und alle $s_1,\ldots,s_k$ mit $0 \leq s_j \leq t_{j+1} - t_j$.

(H3) *Die Abbildung $t \mapsto A(t)x$ ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen, d.h., für jedes $t \in [\alpha,\beta]$, jedes $\varepsilon > 0$, jede beschränkte Menge B und jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$\Big\|A(t+h)x - A(t)x\Big\|_n \leq \varepsilon$$

für alle $x \in B$ und alle $|h| < \delta$.

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ ist gleichgradig stetig, d.h., für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq$ und ein $n \in N$ mit

$$\|U(t,s)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(b) Die Abbildungen $t \mapsto U(t,s)x$ und $s \mapsto U(t,s)x$ erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \quad U(s,s)x = x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x, \quad U(t,t)x = x$$

für alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(c) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ ist die zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionsfamilie.

(d) *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.13}$$

mit $b \in \mathrm{C}\big([a,b], E\big)$ *hat für jedes* $x \in E$ *und jedes* $s \in [\alpha, \beta]$ *eine eindeutige Lösung* $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ *mit der Darstellung*

$$\Phi_{t,s}(x) \;=\; U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.14}$$

Ferner existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \;\leq\; M\left(\|x\|_n + \int_s^t \|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.15}$$

für alle $x \in E$ *und alle* $t \in [\alpha, \beta]$.

Vorbemerkung:
Der Übersichtlichkeit wegen gliedern wir den folgenden Beweis in mehrere Teilschritte. In Schritt 1 ersetzen wir die Familie $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ durch stückweise konstante Familien und „konstruieren" die zugehörigen Evolutionsfamilien. In Schritt 2 zeigen wir, dass die so erhaltene Folge und Evolutionsfamilien gegen eine Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ konvergiert. Abschließend weisen wir in Schritt 3 nach, dass diese die gewünschten Eigenschaften (a)–(d) besitzt.

Beweis:
Schritt 1: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine äquidistante Partition von $[\alpha, \beta]$ mit den Stützstellen

$$t_{k,j} := \alpha + \frac{j(\beta-\alpha)}{k}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Ferner definieren wir stückweise konstante Familien $\big(A_k(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ und Evolutionsfamilien $\big(U_k(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ wie folgt:

$$A_k(t) \;:=\; \begin{cases} A(t_{k,j}) & \text{für} \quad t_{k,j} \leq t < t_{k,j+1} \\[2ex] A(\beta) & \text{für} \quad t = \beta \end{cases}$$

und

$U_k(t,s) \;:=$

$$\begin{cases} T_{t_{k,j}}(t-s) & \text{für} \quad t_{k,j} \leq s \leq t < t_{k,j+1} \\[3ex] T_{t_{k,j}}(t-t_{k,j'})\left(\displaystyle\prod_{i=j+1}^{j'-1} T_{t_{k,i}}\Big(\frac{\beta-\alpha}{k}\Big)\right)T_{t_{k,j}}(t_{k,j+1}-s) & \text{für} \quad \begin{cases} t_{k,j} \leq s < t_{k,j+1} \\[2ex] t_{k,j'} \leq t < t_{k,j'+1}. \end{cases} \end{cases}$$

Da die Halbgruppen $\big(T_{k,j}(s)\big)_{s\geq 0}$ nach Voraussetzung stark differenzierbar, also insbesondere stark stetig sind, liefert die obige „Konstruktion“ eine Folge von stark stetigen Evolutionsfamilien $\big(U_k(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq \beta}$. Aus Voraussetzung (H1) und Lemma 3.1.3 erhalten wir zusätzlich die Eigenschaften:

(i) Die Familie
$$\Big(U_k(t,s)\Big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta,\ k\in\mathbb{N}}$$
ist gleichgradig stetig, d.h., für jedes $m\in\mathbb{N}$ existiert ein $M\geq 0$ und ein $n\in\mathbb{N}$ mit
$$\|U_k(t,s)x\|_m \leq M\|x\|_n \tag{4.16}$$
für alle $x\in E$ alle $\alpha\leq s\leq t\leq\beta$ und alle $k\in\mathbb{N}$.

(ii) Für alle $x\in E$ und alle $k\in\mathbb{N}$ gilt
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U_k(t,s)x &= A_k(t)U_k(t,s)x \quad \text{für} \quad t\neq t_{k,j},\ j=0,\dots,k,\\ \frac{\partial}{\partial s}U_k(t,s)x &= -U_k(t,s)A_k(s)x \quad \text{für} \quad s\neq t_{k,j},\ j=0,\dots,k.\end{aligned}$$

Schritt 2: Wir zeigen nun, dass die Folge von Abbildungen $\big((t,s)\mapsto U_k(t,s)x\big)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x\in E$ gleichmäßig konvergiert. Dazu betrachten wir die Differenz $U_{k'}(t,s)x-U_k(t,s)x$. Aus (ii) erhalten wir die Identität
$$\begin{aligned}U_{k'}(t,s)x-U_k(t,s)x &= -\int_s^t \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(U_{k'}(t,\tau)U_k(\tau,s)x\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_s^t U_{k'}(t,\tau)\Big(A_{k'}(\tau)-A_k(\tau)\Big)U_k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Ferner ist nach (i) die Menge
$$\Big\{U_k(t,s)x\ \Big|\ a\leq s\leq t\leq b, k\in\mathbb{N}\Big\}$$
für jedes $x\in E$ beschränkt. Somit folgt aus (H3) und der Kompaktheit von $[\alpha,\beta]$, dass für jedes $\varepsilon>0$ und jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $\delta>0$ existiert mit
$$\Big\|\big(A(\tau')-A(\tau)\big)U_k(t,s)x\Big\|_n \leq \varepsilon$$

für alle $|\tau' - \tau| < \delta$, alle $\alpha \le s \le t \le \beta$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Big\|U_{k'}(t,s)x - U_k(t,s)x\Big\|_m &\le \int_s^t \Big\|U_{k'}(t,\tau)\Big(A_{k'}(\tau) - A_k(\tau)\Big)U_k(\tau,s)x\Big\|_m \,\mathrm{d}\tau \\ &\le M\int_s^t \Big\|\Big(A_{k'}(\tau) - A_k(\tau)\Big)U_k(\tau,s)x\Big\|_n \,\mathrm{d}\tau \\ &\le M\varepsilon(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

für $\max\{\frac{\beta-\alpha}{k'}, \frac{\beta-\alpha}{k}\} < \delta$. Somit haben wir gezeigt, dass $\big((t,s) \mapsto U_k(t,s)x\big)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in E$ gleichmäßig konvergiert.

Schritt 3: Wir definieren nun mittels

$$U(t,s)x := \lim_{k\to\infty} U_k(t,s)x, \quad x \in E$$

eine Familie von linearen Abbildungen auf $\alpha \le s \le t \le \beta$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\big((t,s) \mapsto U_k(t,s)x\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

(iii) $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ ist eine stark stetige Evolutionsfamilie.

(iv) $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ ist gleichgradig stetig, d.h., für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \ge 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big\|U(t,s)x\Big\|_m \le M\|x\|_m$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$.

Ferner erhalten wir aus (ii) die Gleichungen

$$U_k(t,s)x = x + \int_s^t A_k(\tau)U_k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \tag{4.17}$$

und

$$U_k(t,s)x = x + \int_s^t U_k(t,\sigma)A_k(\sigma)x\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.18}$$

für alle $x \in E$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Aus (H3) folgt wiederum die gleichmäßige Konvergenz der Folgen $\big((t,s) \mapsto A_k(t)U_k(t,s)x\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\big((t,s) \mapsto U_k(t,s)A_k(s)x\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen

$(t,s) \mapsto A(t)U(t,s)x$ bzw. $(t,s) \mapsto U(t,s)A(s)x$. Somit erhalten wir aus (4.17) und (4.18) die Gleichungen

$$U(t,s)x \;=\; x + \int_s^t A(\tau)U(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \tag{4.19}$$

und

$$U(t,s)x \;=\; x + \int_s^t U(t,\sigma)A(\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \tag{4.20}$$

für alle $x \in E$. Da die Abbildungen $t \mapsto A(t)U(t,s)x$ und $s \mapsto U(t,s)A(s)x$ stetig sind, liefert der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 2.3.2 die stetige Differenzierbarkeit von $t \mapsto U(t,s)x$ bzw. $s \mapsto U(t,s)x$. Ferner erfüllen diese die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x \;=\; A(t)U(t,s)x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x \;=\; U(t,s)A(s)x$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$. Somit ist $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ stark differenzierbar. Sei nun $\varphi : [s,\beta] \to E$ eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems (4.12), d.h., eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(s) = x, \quad t \ge s.$$

Dann ist die Abbildung $\sigma \to U(t,\sigma)\varphi(\sigma)$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}U(t,\sigma)\varphi(\sigma) \;=\; -U(t,\sigma)A(\sigma)\varphi(\sigma) + U(t,\sigma)A(\sigma)\varphi(\sigma) \;=\; 0.$$

Daraus folgt

$$U(t,s)x \;=\; U(t,s)\varphi(s) = U(t,t)\varphi(t) = \varphi(t)$$

für alle $s \le t \le \beta$. Somit ist $t \mapsto U(t,s)x$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (4.12), d.h., $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ ist die zu $\big(A(t)\big)_{t \in [\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionsfamilie. Dann kann aber die inhomogene Gleichung (4.13) auch höchstens eine Lösung besitzen. Aus der gleichgradigen Stetigkeit von $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 2.3.2 erhält man wie in Satz 4.1.1, dass

$$\Phi_{t,s}(x) \;=\; U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

die eindeutige Lösung von (4.13) darstellt und die Abschätzung (4.15) erfüllt. Somit ist der Beweis von Satz 4.2.1 vollständig. ■

Bemerkung 4.2.2. (a) Der obige Beweis orientiert sich vorwiegend an [Paz83, Ch. 5, Th. 3.1]. Wir mussten jedoch einige leichte Modifikationen vornehmen, da dort nur der stark stetige Fall auf Banachräumen behandelt wird. Ein sehr ähnliches Ergebnis für lokal-konvexe Räume kann man in [Wen85] finden.

(b) Bedingung (H2) ist im Allgemeinen schwierig zu verifizieren. Es gibt jedoch ein einfaches hinreichendes Kriterium an die Halbgruppen $\big(T_t(s)\big)_{s\geq 0}$, das (H2) impliziert und zwar die Bedingung, dass alle Halbgruppen sogenannte ω-Kontraktionshalbgruppen sind. Diese Kriterium ist oftmals im Zusammenhang mit hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen hilfreich.

Definition 4.2.2. Eine Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ heißt *ω-Kontraktionshalbgruppe* auf E bezüglich $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es ein $\omega \geq 0$ gibt mit

$$\|T(t)x\|_n \leq \mathrm{e}^{\omega t}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Folgerung 4.2.1. *Sei $\big(T_t(s)\big)_{s\geq 0}$ für jedes $t \in [\alpha,\beta]$ eine ω-Kontraktionshalbgruppe bezüglich $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist Voraussetzung (H2) aus Satz 4.2.1 erfüllt.*

Beweis: Da alle $\big(T_t(s)\big)_{s\geq 0}$ ω-Kontraktionshalbgruppen bezüglich $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, gilt

$$\|T_t(s)x\|_n \leq \mathrm{e}^{\omega s}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$, alle $n \in \mathbb{N}$, alle $s \geq 0$ und alle $t \in [\alpha,\beta]$. Daraus folgt

$$\Big\|T_{t_k}(s_k)\cdots T_{t_2}(s_2)T_{t_1}(s_1)x\Big\|_n \;\leq\; \mathrm{e}^{\omega(s_1+\cdots+s_k)}\|x\|_n \;\leq\; \mathrm{e}^{\omega(\beta-\alpha)}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$, alle $k,n \in \mathbb{N}$, alle $s_1,\ldots,s_k \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^k s_j \leq \beta-\alpha$ und jede endliche Partition $\alpha = t_1 \leq \cdots \leq t_k = \beta$ von $[\alpha,\beta]$, d.h., es gilt (H1). ■

Bemerkung 4.2.3. (a) Man beachte, dass nach Definition 4.2.2 jede ω-Kontraktionshalbgruppe insbesondere exponentiell gleichgradig stetig ist. Der Beweis der obigen Folgerung 4.2.1 wäre auch möglich, wenn ω von der jeweiligen Halbnorm $\|\cdot\|_n$ abhängen würde. Dann wäre jedoch die zugehörige Halbgruppe im Allgemeinen *nicht* mehr exponentiell gleichgradig stetig, sondern nur noch *quasi*-exponentiell gleichgradig stetig [siehe z.B [Bab74], [Vuv71]].

(b) Jede stark differenzierbare Halbgruppe auf einem Banachraum ist eine ω-Kontraktionshalbgruppe, denn es gilt

$$\|T(t)x\| \;=\; \|\mathrm{e}^{tA}x\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|t}\|x\|,$$

d.h., $\omega = \|A\|$, wobei A den infinitesimalen Generator von $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ bezeichnet.

Folgerung 4.2.2. *Sei $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\infty)}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b \in \mathrm{C}\big([\alpha,\infty), E\big)$. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(H1′) *Für jedes $t \in [\alpha,\infty)$ ist $A(t)$ der infinitesimale Generator eine stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T_t(s)\big)_{s\geq 0}$.*

(H2′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset [\alpha,\infty)$ ist die Voraussetzung (H2) aus Satz 4.2.1 erfüllt.*

(H3′) *Die Abbildung $t \mapsto A(t)x$ sei lokal gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen, d.h., für jedes $t \in [\alpha,\infty)$, jedes $\varepsilon > 0$, jede beschränkte Menge B und jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$\Big\|A(t+h)x - A(t)x\Big\|_n \leq \varepsilon$$

für alle $x \in B$ und alle $|h| < \delta$.

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ ist lokal gleichgradig stetig, d.h., für jedes $\beta \geq \alpha$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|U(t,s)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(b) Die Abbildungen $t \mapsto U(t,s)x$ und $s \mapsto U(t,s)x$ erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x = A(t)U(t,s)x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x.$$

für alle $\alpha \leq s \leq t < \infty$.

(c) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ ist die zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\infty)}$ zugehörige Evolutionsfamilie.

(d) *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.21}$$

besitzt für jedes $x \in E$ *und jedes* $s \in [\alpha, \infty)$ *eine eindeutige Lösung* $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ *mit der Darstellung*

$$\Phi_{t,s}(x) \quad = \quad U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.22}$$

Ferner existiert für jedes $\beta \geq \alpha$ *und jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \quad \leq \quad M\left(\|x\|_n + \int_s^t \|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.23}$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

Falls ferner ein $\alpha' \geq \alpha$ *existiert, so dass die Bedingung*

$(\mathrm{H2})_{\mathrm{e}}$ *Es existiert ein* $\omega \geq 0$*, so dass für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$\left\|T_{t_k}(s_k)\cdots T_{t_2}(s_2)T_{t_1}(s_1)x\right\|_m \quad \leq \quad M\mathrm{e}^{\omega(s_1+\cdots+s_k)}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$*, alle* $k \in \mathbb{N}$*, jede endliche „Partition"* $\alpha' = t_0 \leq \cdots \leq t_k < \infty$ *von* $[\alpha', \infty)$ *und alle* $s_1, \ldots, s_k$ *mit* $0 \leq s_j \leq t_{j+1} - t_j$.

erfüllt ist, so gelten zusätzlich die Abschätzungen:

(a′) *Für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\|U(t,s)x\|_m \quad \leq \quad M\mathrm{e}^{\omega(t-s)}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t < \infty$.

(d′) *Für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \quad \leq \quad M\mathrm{e}^{\omega(t-s)}\left(\|x\|_n + \int_s^t \mathrm{e}^{\omega(s-\tau)}\|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\right)$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t < \infty$.

Beweis: Aus Satz 4.2.1 folgt, dass auf jedem kompaktem Intervall $[\alpha, \beta]$ eine eindeutige Evolutionfamilie $\big(U_\beta(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ mit den Eigenschaften (a)–(d) aus Satz 4.2.1 existiert, d.h., $U_\beta(t,s) = U_{\beta'}(t,s)$ für alle $\alpha \le s \le t \le \min\{\beta, \beta'\}$. Somit liefert

$$U(t,s) \quad := \quad U_\beta(t,s) \quad \text{für} \quad \alpha \le s \le t \le \beta$$

eine wohldefinierte Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t < \infty}$ mit den gewünschten Eigenschaften (a)–(d). Ferner ist diese eindeutig bestimmt, da auf jedem kompakten Intervall $[\alpha, \beta]$ die zugehörige Evolutionfamilie nach Satz 4.2.1 eindeutig ist. Abschätzung (a′) erhalten wir analog zur Abschätzung (a) aus Satz 4.2.1 mit Hilfe von $(\mathrm{H2})_\mathrm{e}$. Abschätzung (d′) dagegen folgt unmittelbar aus (a′) und (4.22). ∎

Folgerung 4.2.3. *Sei $\big(A(t)\big)_{t \in [\alpha,\infty)}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b \in \mathrm{C}^k\big([\alpha,\infty), E\big)$ mit $k \ge 1$. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(H1′) *Für jedes $t \in [\alpha, \infty)$ ist $A(t)$ der infinitesimale Generator einer stark differenzierbaren Halbgruppe $\big(T_t(s)\big)_{s \ge 0}$.*

(H2′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, \infty)$ ist die Voraussetzung (H2) aus Satz 4.2.1 erfüllt.*

(H3″) *Die Abbildung $(t,x) \mapsto A(t)x$ ist k-fach stetig differenzierbar.*

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t < \infty}$ mit den Eigenschaften (a)–(c) aus Folgerung 4.2.2. Ferner gilt:

(d″) *Die Abbildung*

$$\Phi : \Big\{(t,s) \in [\alpha,\infty) \times [\alpha,\infty) \;\Big|\; t \ge s\Big\} \times E \to E,$$

$$\Phi_{t,s}(x) \quad := \quad U(t,s)x \;+\; \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \ge s \tag{4.24}$$

und $(k+1)$-fach stetig differenzierbar. Ferner gilt

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l}\Phi_{t,s}(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{l-1} A^{(j)}(t)\frac{\partial^{l-1-j}}{\partial t^{l-1-j}}\Phi_{t,s}(x) \;+\; b^{(l-1)}(t),$$

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\Phi_{t,s}(x) \quad = \quad -\sum_{j=0}^{l-1} \frac{\partial^j}{\partial s^j}U(t,s)xA(s)^{(l-1-j)}x \;-\; \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\partial^j}{\partial s^j}U(t,s)b^{(l-1-j)}(s),$$

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l}\Phi_{t,s}(x)h \quad = \quad \begin{cases} U(t,s)h & \text{für} \quad l = 1 \\[2ex] 0 & \text{für} \quad l \ge 2 \end{cases}$$

für alle $1 \leq l \leq k+1$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Implikation (H3″) $\Longrightarrow$ (H3′). Sei also $(t,x) \mapsto A(t)x$ k-fach stetig differenzierbar. Somit ist insbesondere $(t,x) \mapsto A'(t)x$ stetig. Nach dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2 ist die Familie $\big(A'(t)\big)_{\alpha \leq t \leq \beta}$ für jedes $\beta \geq \alpha$ gleichgradig stetig. Daher existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede beschränkte Menge $B \subset E$ ein $M \geq 0$ mit

$$\|A'(t)x\|_n \leq M$$

für alle $x \in B$ und alle $t \in [\alpha, \beta]$. Daraus folgt für jedes $t < \beta$, jede beschränkte Menge $B \subset E$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\Big\|A(t+h)x - A(t)x\Big\|_n \;\leq\; \int_0^h \|A'(t+\tau)x\|_n \,\mathrm{d}\tau \;\leq\; M|h|$$

für alle $x \in B$ und alle $h \in [\alpha - t, \beta - t]$. Somit ist $\big(A(t)\big)_{\alpha \leq t \leq \beta}$ gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen und nach Folgerung 4.2.2 existiert eine eindeutige Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \leq s \leq t < \infty}$ mit den Eigenschaften (a)–(c). Ferner erhalten wir aus Folgerung 4.2.2 (d), dass die Abbildung $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems 4.24 darstellt. Somit müssen wir nur noch die $(k+1)$-fache stetige Differenzierbarkeit zeigen. Aus Satz 4.2.1 bzw. Folgerung 4.2.2 folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s)x = A(t)U(t,s)x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x.$$

für alle $\alpha \leq s \leq t \leq \infty$. Für $k \geq 1$ ergibt sich die Behauptung leicht mittels Induktion. ■

4.2.2 Der parabolische Fall

Satz 4.2.2. *Sei* $\big(A(t)\big)_{t \in [\alpha,\beta]}$ *eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei* $b \in \mathrm{C}\big([\alpha,\beta], E\big)$. *Ferner existiere ein Fundamentalsystem* $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$, *so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(P1) *Es gibt Konstanten* $\omega \geq 0$ *und* $\delta > 0$, *so dass folgendes gilt:*

(i) $\mathbb{C}_{\omega,\delta} := \big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\big\} \subset \rho\big(A(t)\big)$ *für alle* $t \in [\alpha, \beta]$.

(ii) Für alle $n \in N$ *existiert ein* $M \geq 0$ *mit*

$$\Big\|R\big(\lambda, A(t)\big)x\Big\|_n \;\leq\; \frac{M\|x\|_n}{|\lambda - \omega|}$$

für alle $x \in E$, *alle* $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$ *und alle* $t \in [\alpha, \beta]$.

(P2) *Es gibt ein* $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$*, so dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ein* $L \geq 0$ *existiert mit*

$$\Big\| \big(A(t) - A(t')\big) R\big(\lambda, A(s)\big) x \Big\|_n \quad \leq \quad L|t - t'| \cdot \|x\|_n$$

für alle $x \in E$ *und alle* $t, t', s \in [\alpha, \beta]$.

(P3) *Die Abbildung* $t \mapsto A(t)x$ *ist für jedes* $x \in E$ *stetig differenzierbar.*

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \leq s \leq t \leq \beta}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \leq s \leq t \leq \beta}$ *ist gleichgradig stetig. Insbesondere existiert für* $\widehat{\omega} > \omega$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $\widehat{M} \geq 0$ *mit*

$$\|U(t,s)x\|_n \leq M \mathrm{e}^{(\widehat{\omega} + L\widehat{M})(t-s)} \|x\|_n \tag{4.25}$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(b) Die Abbildungen $t \mapsto U(t,s)x$ *und* $s \mapsto U(t,s)x$ *erfüllen die Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \quad U(s,s)x = x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x, \quad U(t,t)x = x$$

für alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(c) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \leq s \leq t \leq \beta}$ *ist die zu* $\big(A(t)\big)_{t \in [\alpha,\beta]}$ *zugehörige Evolutionsfamilie.*

(d) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s \tag{4.26}$$

besitzt für jedes $x \in E$ *und jedes* $s \in [a,b]$ *eine eindeutige Lösung* $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ *mit der Darstellung*

$$\Phi_{t,s}(x) \quad = \quad U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau) b(\tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{4.27}$$

Ferner existiert für $\widehat{\omega} > \omega$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $\widehat{M} \geq 0$ *mit*

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \\ &\leq \quad M \mathrm{e}^{(\widehat{\omega} + L\widehat{M})(t-s)} \left(\|x\|_n + \int_s^t \mathrm{e}^{(\widehat{\omega} + L\widehat{M})(s-\tau)} \|b(\tau)\|_n \, \mathrm{d}\tau \right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

Vorbemerkungen/Vorüberlegungen:

(a) Wir gliedern den Beweis in mehrere Teilschritte. In Schritt 1 führen wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \quad U(s,s)x = x$$

auf eine „gutartigere“ Integralgleichung zurück. Anschließend zeigen wir in Schritt 2, dass diese Integralgleichung eine (eindeutige) Lösung besitzt. In Schritt 3 geben wir mit Hilfe von Teil 2 eine Lösung $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ der obigen Gleichung an und weisen die meisten der Eigenschaften (a)–(c) nach. In Schritt 4 verfahren wir ähnlich wie in Schritt 1 und 2 und konstruieren eine Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)x = -A(t)V(t,s)A(s)x, \quad V(t,t)x = x.$$

Daraus folgen die Eindeutigkeit von $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ und die übrigen Eigenschaften (a)–(c) In Schritt 5 zeigen wir abschließend Eigenschaft (d), d.h., die eindeutige Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung und die zugehörige Abschätzung.

(b) Voraussetzung (P1) impliziert, dass $A(t)$ für jedes $t \in [\alpha,\beta]$ der infinitesimale Generator einer sektoriell analytischen Halbgruppe ist [siehe Satz 3.2.2 und Folgerung 4.2.6].

(c) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass (P2) für alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega,\delta}$ erfüllt ist, ja sogar, dass die Konstante $L \ge 0$ unabhängig von $\lambda \in \mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$ gewählt werden kann, falls $\widehat{\omega} > \omega$. Denn für alle $x \in E$, alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\widehat{\lambda} \in \mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big\|\big(A(t)-A(t')\big)R\big(\widehat{\lambda},A(s)\big)x\Big\|_n \\
=\ & \Big\|\big(A(t)-A(t')\big)R\big(\lambda,A(s)\big)\big(\lambda\mathbf{I}-A(s)\big)R\big(\widehat{\lambda},A(s)\big)x\Big\|_n \\
\le\ & L|t-t'|\Big\|\big(\widehat{\lambda}\mathbf{I}-A(s)+(\lambda-\widehat{\lambda})\mathbf{I}\big)R\big(\widehat{\lambda},A(s)\big)x\Big\|_n \\
\le\ & L|t-t'|\Big\|x+(\lambda-\widehat{\lambda})R\big(\widehat{\lambda},A(s)\big)x\Big\|_n \\
\le\ & L|t-t'|\left(1+\frac{M|\widehat{\lambda}-\lambda|}{|\widehat{\lambda}-\omega|}\right)\|x\|_n \ \le\ \widehat{L}|t-t'|\cdot\|x\|_n
\end{aligned}$$

mit

$$\widehat{L} := L \sup_{\widehat{\lambda}\in\mathbb{C}_{\widehat{\omega},\delta}}\left(1+\frac{M|\widehat{\lambda}-\lambda|}{|\widehat{\lambda}-\omega|}\right) < \infty.$$

Somit erfüllt auch die Familie $\big(A(t) - \widehat{\omega}\mathbf{I}\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ die Voraussetzungen (P1)–(P3). Daher können wir weiterhin annehmen, dass ein $\varepsilon < 0$ existiert mit $\mathbb{C}_{\varepsilon,\delta} \subset \rho\big(A(t)\big)$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$. Somit existiert insbesondere $A(s)^{-1}$ für alle $s \in [\alpha,\beta]$ und die Voraussetzung (P2) ist für $\lambda = 0$ erfüllt. Ferner gelten dann gemäß Satz 3.2.2 die Abschätzungen

$$\|T_t(s)x\|_n \;\leq\; M\|x\|_n \tag{4.29}$$

und

$$\|A(t)T_t(s)x\|_n \;=\; \|A(t)T_t(s)x\|_n \;\leq\; \frac{\widehat{M}\|x\|_n}{s} \tag{4.30}$$

für alle $x \in E$, alle $s > 0$ und alle $t \in [\alpha,\beta]$.

(d) Aus (P3) folgt, dass $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ gleichgradig stetig ist, d.h., für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $\widetilde{M} \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|A(t)x\|_m \;\leq\; \widetilde{M}\|x\|_n \tag{4.31}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \in [\alpha,\beta]$.

Konvention:
Im Folgenden bezeichen wir mit $M, M_1, M_2, \ldots, \widehat{M}, \widehat{M_1}, \widehat{M_2}, \ldots$ und $\widetilde{M}, \widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}, \ldots$ beliebige Konstanten, die an verschiedenen Stellen im Beweis *nicht* notwendigerweise übereinstimmen müssen. Wir versuchen jedoch den Leser auf die Abschätzungen, die wir an den entsprechenden Stellen im Beweis benutzt haben, d.h. auf die Ungleichungen (4.29), (4.30) bzw. (4.31) durch die obige Notation aufmerksam zu machen.

Beweis: Schritt 1: Angenommen $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ sei das zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionssystem und es gebe ein Familie $\big(R(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$ von stetigen, linearen Abbildungen, so dass die Darstellung

$$U(t,s)x \;:=\; T_s(t-s)x \;+\; \int_s^t T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ gilt. Dann erhalten wir durch rein formales Differenzieren

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x \;=\; A(s)T_s(t-s)x \;+\; R(t,s)x \int_s^t A(\tau)T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Daraus folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} U(t,s)x - A(t)U(t,s)x = \Big(A(s) - A(t)\Big) T_s(t-s)x$$

$$+ \quad R(t,s)x + \int\limits_s^t \Big(A(\tau) - A(t)\Big) T_\tau(t-\tau) R(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau.$$

Somit ergibt sich für $\big(R(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ die Integralgleichung

$$R(t,s)x \quad = \quad K(t,s)x \; + \int\limits_s^t K(t,\tau) R(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \tag{4.32}$$

mit

$$K(t,s)x := \Big(A(t) - A(s)\Big) T_s(t-s)x$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$.

Schritt 2: Wir zeigen nun, dass die Integralgleichung (4.32) für jedes $x \in E$ eine eindeutige Lösunge besitzt. Dazu setzen wir zunächst $\Delta := \big\{(t,s) \in [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \;\big|\; t \ge s\big\}$ und bezeichnen mit $\mathrm{C}(\Delta, E)$ den Raum aller stetigen Abbildungen von Δ nach E. Ferner versehen wir $\mathrm{C}(\Delta, E)$ mit dem Fundamentalsystem

$$|||\varphi|||_n := \sup_{(t,s)\in\Delta} \|\varphi(t,s)\|_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus der Vollständigkeit von E die Vollständigkeit von $\mathrm{C}(\Delta, E)$, d.h., auch $\mathrm{C}(\Delta, E)$ ist ein Fréchetraum. Wir „konstruieren“ nun eine Lösung von (4.32) mittels sukzessiver Approximation. Dazu zeigen wir zunächst, dass für jedes $x \in E$ die Abbildung $(t,s) \mapsto K(t,s)x$ in $\mathrm{C}(\Delta, E)$ liegt. Wir beschränken uns auf den Fall $t > s$. Den Fall $t = s$ erhält man völlig analog. Sei also $|h| < t - s$, $|k| < t - s$ und $(t,s), (t+h, s+k) \in \Delta$. Dann gilt

$$\Big\| K(t+h, s+k)x - K(t,s)x \Big\|_m \tag{4.33}$$

$$\le \quad \Big\| K(t+h, s+k)x - K(t, s+k)x \Big\|_m \; + \; \Big\| K(t, s+k)x - K(t,s)x \Big\|_m.$$

Den ersten Term der rechten Seite von (4.33) können wir wie folgt abschätzen

$$
\begin{aligned}
&\Big\|K(t+h,s+k)x - K(t,s+k)x\Big\|_m \\
&= \Big\|\Big(A(t+h) - A(s+k)\Big)T_{s+k}(t+h-s-k)x \\
&\quad - \Big(A(t) - A(s+k)\Big)T_{s+k}(t-s-k)x\Big\|_m \\
&\leq \Big\|\Big(A(t+h) - A(t)\Big)T_{s+k}(t+h-s-k)x\Big\|_m \\
&+ \Big\|\Big(A(t) - A(s+k)\Big)\Big(T_{s+k}(t+h-s-k)x - T_{s+k}(t-s-k)x\Big)\Big\|_m \\
&\leq \Big\|\Big(A(t+h) - A(t)\Big)A(s+k)^{-1}T_{s+k}(t+h-s-k)A(s+k)x\Big\|_m \\
&+ \Big\|\Big(A(t) - A(s+k)\Big)\int\limits_0^h A(s+k)T_{s+k}(t+\tau-s-k)x\,\mathrm{d}\tau\Big\|_m
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir aus (P2) und der gleichgradigen Stetigkeit von $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\Big\|K(t+h,s+k)x - K(t,s+k)x\Big\|_m \\
&\leq L|h|\Big\|T_{s+k}(t+h-s-k)A(s+k)x\Big\|_m \\
&+ 2\widetilde{M}_1\int\limits_0^h \Big\|A(s+k)T_{s+k}(t+\tau+-s-k)x\Big\|_n\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq LM\widetilde{M}|h|\cdot\|x\|_n + 2M\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2|h|\cdot\|x\|_{n'}.
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Term der rechten Seite von (4.33) ergibt sich die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\Big\|K(t,s+k)x - K(t,s)x\Big\|_m \\
&= \Big\|\Big(A(t)-A(s+k)\Big)T_{s+k}(t-s-k)x - \Big(A(t)-A(s)\Big)T_s(t-s)x\Big\|_m \\
&\le \Big\|\Big(A(s)-A(s+k)\Big)T_{s+k}(t-s-k)x\Big\|_m \\
&+ \Big\|\Big(A(t)-A(s)\Big)\Big(T_{s+k}(t-s-k)x - T_s(t-s)x\Big)\Big\|_m \\
&\le \Big\|\Big(A(s)-A(s+k)\Big)A(s+k)^{-1}T_{s+k}(t-s-k)A(s+k)x\Big\|_m \\
&+ \Big\|\Big(A(t)-A(s)\Big)\Big(T_{s+k}(t-s-k)x - T_{s+k}(t-s)x\Big)\Big\|_m \\
&+ \Big\|\Big(A(t)-A(s)\Big)\Big(T_{s+k}(t-s)x - T_s(t-s)x\Big)\Big\|_m \\
&\le L|k|\Big\|T_{s+k}(t-s-k)A(s+k)x\Big\|_m \\
&+ 2\widetilde{M}_1\int_0^k \Big\|A(s+k)T_{s+k}(t-s-\sigma)x\Big\|_n \,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \Big\|\Big(A(t)-A(s)\Big)\int_0^{t-s}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(T_{s+k}(\sigma)T_s(t-s-\sigma)\Big)x\,\mathrm{d}\sigma\Big\|_m \\
&\le LM\widetilde{M}|k|\cdot\|x\|_n \;+\; 2M\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2|k|\cdot\|x\|_{n'} \\
&+ 2\widetilde{M}_1\Big\|\int_0^{t-s} T_{s+k}(\sigma)\Big(A(s+k)-A(s)\Big)A(s)^{-1}T_s(t-s-\sigma)A(s)x\,\mathrm{d}\sigma\Big\|_n \\
&\le LM\widetilde{M}|k|\cdot\|x\|_n \;+\; 2M\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2|k|\cdot\|x\|_{n'} \;+\; 2LM_1M_2\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2(\beta-\alpha)|k|\cdot\|x\|_{n''}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt insgesamt, dass die Abbildung $(t,s)\mapsto K(t,s)x$ für jedes $x\in E$ stetig ist. Wir betrachten nun für festes $x\in E$ die rekursiv definierte Folge

$$
K_{k+1}(t,s)x \;:=\; \int_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau, \quad k\in\mathbb{N}_0
$$

mit

$$K_0(t,s)x := K(t,s)x$$

für alle $(t,s) \in \Delta$ und zeigen mittels Induktion, dass die Abbildungen $(t,s) \mapsto K_k(t,s)x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ in $\mathrm{C}(\Delta, E)$ liegen. Für $k = 0$ haben wir dies schon nachgewiesen. Sei also $(t,s) \mapsto K_k(t,s)x$ stetig. Dann sind die Familien

$$\Big(K(t,s)\Big)_{\alpha \le s \le t \le \beta} \quad \text{und} \quad \Big(K_k(t,s)\Big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$$

gleichgradig stetig. Daher ist $\tau \mapsto K(t,\tau)K_k(\tau,s)x$ stetig, also insbesondere auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Somit ist die Abbildung

$$(t,s) \quad \mapsto \quad K_{k+1}(t,s)x := \int\limits_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \tag{4.34}$$

wohldefiniert. Sei nun o.B.d.A. $s < t$, $0 \le h$, $0 \le k < t-s$ und $(t,s), (t+h, s+k) \in \Delta$. Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| \int\limits_{s+k}^{t+h} K(t+h,\tau)K_k(\tau,s+k)x \,\mathrm{d}\tau - \int\limits_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&\le \left\| \int\limits_{s+k}^{t} K(t+h,\tau)K_k(\tau,s+k)x \,\mathrm{d}\tau - \int\limits_{s+k}^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&+ \left\| \int\limits_{t}^{t+h} K(t+h,\tau)K_k(\tau,s+k)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m + \left\| \int\limits_{s}^{s+k} K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&\le \left\| \int\limits_{s+k}^{t} K(t+h,\tau)\Big(K_k(\tau,s+k) - K_k(\tau,s)\Big)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&+ \left\| \int\limits_{s+k}^{t} \Big(K(t+h,\tau) - K(t,\tau)\Big)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m + C\big(|h| + |k|\big)\|x\|_n,
\end{aligned}$$

wobei die gleichgradige Stetigkeit der beiden Familien

$$\Big(K(t,s)\Big)_{\alpha \le s \le t \le \beta} \quad \text{und} \quad \Big(K_k(t,s)\Big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$$

die Existenz der Konstanten $C \geq 0$ sicherstellt. Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
& \left\| \int\limits_{s+k}^{t} K(t+h,\tau)\Big(K_k(\tau,s+k) - K_k(\tau,s)\Big)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
& + \quad \left\| \int\limits_{s+k}^{t} \Big(K(t+h,\tau) - K(t,\tau)\Big)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
& \leq \quad C \int\limits_{s+k}^{t} \left\| \Big(K_k(\tau,s+k) - K_k(\tau,s)\Big)x \right\|_n \mathrm{d}\tau \\
& + \quad \left\| \int\limits_{s+k}^{t} \Big(A(t+h) - A(t)\Big)A(\tau)^{-1}T_\tau(t+h-\tau)A(\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
& + \quad \left\| \int\limits_{s+k}^{t} \Big(A(t) - A(\tau)\Big)\Big(T_\tau(t+h-\tau) - T_\tau(t-\tau)\Big)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
& \leq \quad C \int\limits_{s+k}^{t} \left\| \Big(K_k(\tau,s+k) - K_k(\tau,s)\Big)x \right\|_n \mathrm{d}\tau \\
& + \quad L|h| \int\limits_{s+k}^{t} \left\| T_\tau(t+h-\tau)A(\tau)K_k(\tau,s)x \right\|_m \mathrm{d}\tau \\
& + \quad \left\| \int\limits_{s+k}^{t} \Big(A(t) - A(\tau)\Big) \int\limits_{0}^{h} A(\tau)T_\tau(t+\tau'-\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau' \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
& \leq \quad C \int\limits_{s+k}^{t} \left\| \Big(K_k(\tau,s+k) - K_k(\tau,s)\Big)x \right\|_n \mathrm{d}\tau \\
& + \quad (\beta-\alpha)CLM\widetilde{M}|h| \cdot \|x\|_{n'} \; + \; 2(\beta-\alpha)CM\widetilde{M_1}\widetilde{M_2}|h| \cdot \|x\|_{n''}.
\end{aligned}
$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung $(t,s) \mapsto K_k(t,s)x$ auf Δ folgt nun

$$
\left\| \int\limits_{s+k}^{t+h} K(t+h,\tau)K_k(\tau,s+k)x \,\mathrm{d}\tau - \int\limits_{s}^{t} K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \right\|_m \quad \to \quad 0
$$

für $(h,k) \to 0$. Somit haben wir nachgewiesen, dass die Abbildung

$$(t,s) \quad \mapsto \quad K_{k+1}(t,s)x := \int_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau$$

stetig ist. Wir beweisen nun, dass die Reihe

$$(t,s) \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{\infty} K_k(t,s)x$$

in $\mathrm{C}(\Delta, E)$ konvergiert. Dazu zeigen wir zunächt mittels Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $L \geq 0$ und $\widehat{M} \geq 0$ existieren mit

$$\Big\| K_k(t,s)x \Big\|_n \quad \leq \quad \frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+1}(t-s)^k \|x\|_n}{k!} \tag{4.35}$$

für alle $x \in E$, alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Für $k = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big\| K_0(t,s)x \Big\|_n \quad &\leq \quad \Big\| \Big(A(t) - A(s)\Big) T_s(t-s)x \Big\|_n \\
&\leq \quad \Big\| \Big(A(t) - A(s)\Big) A(s)^{-1} A(s) T_s(t-s)x \Big\|_n \\
&\leq \quad L|t-s| \Big\| A(s) T_s(t-s)x \Big\|_n \\
&\leq \quad L|t-s| \frac{\widehat{M}\|x\|_n}{|t-s|} \quad = \quad L\widehat{M}\|x\|_n.
\end{aligned}$$

Sei nun (4.35) für ein $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| K_{k+1}(t,s)x \Big\|_n \quad &= \quad \Big\| \int_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \Big\|_n \\
\leq \quad L\widehat{M} \int_s^t \Big\| K_k(\tau,s)x \Big\|_n \mathrm{d}\tau \quad &\leq \quad L\widehat{M} \int_s^t \frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+1}(\tau-s)^k \|x\|_n}{k!} \,\mathrm{d}\tau \\
= \quad \frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+2}\|x\|_n}{k!} \int_s^t (\tau-s)^k \,\mathrm{d}\tau \quad &= \quad \frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+2}(t-s)^{k+1}\|x\|_n}{(k+1)!},
\end{aligned}$$

d.h., die Ungleichung (4.35) ist auch für $k+1$ und somit für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Daraus folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $L \geq 0$ und $\widehat{M} \geq 0$ existieren, so dass die Abschätzung

$$|||K_k(\cdot,\cdot)x|||_n \;=\; \sup_{(t,s)\in\Delta}\Big\|K_k(t,s)x\Big\|_n \;\le\; \frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+1}(\beta-\alpha)^k\|x\|_n}{k!} \tag{4.36}$$

für alle $x \in E$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Daher konvergiert die Reihe

$$(t,s) \;\mapsto\; \sum_{k=0}^{\infty} K_k(t,s)x =: R(t,s)x \tag{4.37}$$

in $\mathrm{C}(\Delta, E)$, d.h., die Reihe konvergiert gleichmäßig und ihr Grenzwert $(t,s) \mapsto R(t,s)x$ ist stetig. Nach dem Satz von Banach/Steinhaus 1.2.2 ist die Abbildungen $x \mapsto R(t,s)x$ für alle $(t,s) \in \Delta$ stetig und linear. Ferner gilt nach (4.35) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|R(t,s)x\|_n \;&=\; \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} K_k(t,s)x\Big\|_n \\ &\le\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(L\widehat{M}\big)^{k+1}(t-s)^k\|x\|_n}{k!} \;=\; L\widehat{M}\mathrm{e}^{L\widehat{M}(t-s)}\|x\|_n\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Somit liefert Definition (4.37) eine stark stetige Familie von stetigen linearen Operatoren. Aus Definition (4.34) erhalten wir weiterhin die Identität

$$\begin{aligned}&K(t,s)x + \int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\ &=\; K_0(t,s) + \int_s^t K(t,\tau)\sum_{k=0}^{\infty} K_k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\ &=\; K_0(t,s) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_s^t K(t,\tau)K_k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\ &=\; K_0(t,s) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k(t,s)x \;=\; R(t,s)x,\end{aligned}$$

d.h., die Familie $\big(R(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ ist eine Lösung[1] der Integralgleichnug (4.32).

[1]Die Eindeutigkeit von $\big(R(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$, die im Weiteren nicht benutzt wird, folgt nachträglich aus der Eindeutigkeit von $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$.

Schritt 3: Ausgehend von Gleichung (4.32) definiert man

$$U(t,s)x \;:=\; T_s(t-s)x \;+\; \int_s^t T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau$$

für alle $x \in E$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Wir zeigen nun, dass die Abbildung $t \mapsto U(t,s)x$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x \;=\; A(t)U(t,s)x, \quad U(s,s)x = x \tag{4.38}$$

erfüllt. Dazu bestimmen wir zunächst die Ableitung der Abbildung

$$\theta \;\mapsto\; \int_s^t T_\tau(\theta-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Sei o.B.d.A. $0 < h < t-s$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h}\left(\int_s^t T_\tau(\theta+h-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau - \int_s^t T_\tau(\theta-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_s^t A(\tau)T_\tau(\theta-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&= \left\| \frac{1}{h}\int_s^t\int_0^h A(\tau)\Big(T_\tau(\theta+\tau'-\tau) - T_\tau(\theta-\tau)\Big)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&= \left\| \frac{1}{h}\int_s^t\int_0^h\int_0^{\tau'} A(\tau)^2 T_\tau(\theta+\tau''-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau''\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau \right\|_m \\
&\le \frac{LM\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\widehat{M}\|x\|_n}{h}\int_s^t\int_0^h\int_0^{\tau'} \mathrm{e}^{L\widehat{M}(\tau-s)}\,\mathrm{d}\tau''\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{LM\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\widehat{M}\|x\|_n}{h}\left(\frac{(\mathrm{e}^{L\widehat{M}(t-s)}-1)h^2}{2L\widehat{M}}\right) \\
&= \frac{M\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2(\mathrm{e}^{L\widehat{M}(\alpha-\beta)}-1)\|x\|_n}{2}\cdot h \;\to\; 0
\end{aligned}$$

für $h \to 0$, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_s^t T_\tau(\theta-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \;=\; \int_s^t A(\tau)T_\tau(\theta-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x \\
&= A(s)T_s(t-s)x \;+\; R(t,s)x \;+\; \int_s^t A(\tau)T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= A(t)U(t,s)x \;-\; \Big(A(t)-A(s)\Big)T_s(t-s)x \\
&- \int_s^t \Big(A(t)-A(\tau)\Big)T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \;+\; R(t,s)x \\
&= A(t)U(t,s)x.
\end{aligned}
$$

Somit ist $t \mapsto U(t,s)x$ für jedes $x \in E$ eine Lösung von (4.38). Ferner erhalten wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\Big\|U(t,s)x\Big\|_n &= \left\|T_s(t-s)x \;+\; \int_s^t T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau\right\|_n \\
&\le \Big\|T_s(t-s)x\Big\|_n \;+\; \int_s^t \Big\|T_\tau(t-\tau)R(\tau,s)x\Big\|_n\,\mathrm{d}\tau \\
&\le M\|x\|_n \;+\; LM\widehat{M}\|x\|_n \int_s^t \mathrm{e}^{L\widehat{M}(\tau-s)}\,\mathrm{d}\tau \qquad (4.39)\\
&= M\|x\|_n \;+\; LM\widehat{M}\|x\|_n \frac{\mathrm{e}^{L\widehat{M}(t-s)}-1}{L\widehat{M}} \;=\; M\mathrm{e}^{L\widehat{M}(\alpha-\beta)}\|x\|_n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in E$ und alle $n \in \mathbb{N}$. D.h., die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ ist insbesondere gleichgradig stetig. Bevor wir mit Schritt 4 fortfahren, zeigen wir noch, dass $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ auch stark stetig ist. Sei o.B.d.A. $s < t$ und seien $|h| < t-s$,

$|k| < t - s$ und $(t+h, s+k) \in \Delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\| U(t+h, s+k) - U(t,s)x \Big\|_m \\
&\quad\le \Big\| U(t+h, s+k) - U(t, s+k)x \Big\|_m + \Big\| U(t, s+k) - U(t,s)x \Big\|_m \\
&\quad= \Big\| \int_0^h \frac{\partial}{\partial \tau} U(t+\tau, s+k)x \, \mathrm{d}\tau \Big\|_m + \Big\| U(t, s+k) - U(t,s)x \Big\|_m \\
&\quad= \Big\| \int_0^h A(t+\tau)U(t+\tau, s+k)x \, \mathrm{d}\tau \Big\|_m + \Big\| U(t, s+k) - U(t,s)x \Big\|_m \\
&\quad= |h| M \widetilde{M} \mathrm{e}^{L\widehat{M}(\beta-\alpha)} \|x\|_n + \Big\| U(t, s+k) - U(t,s)x \Big\|_m
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Da die Abbildung $s \mapsto U(t,s)x$ für jedes $x \in E$ und jedes $t \in [\alpha, \beta]$ stetig ist, folgt aus der obigen Abschätzung die starke Stetigkeit der Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ und somit auch die starke Stetigkeit von $\big(A(t)U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$.

Schritt 4: Wir kommen nun zur Eindeutigkeit der Lösungsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$. Dazu zeigen wir zunächst, dass es eine Familie $\big(V(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ von stetigen linearen Operatoren gibt, die die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} V(t,s)x = -V(t,s)A(s)x, \quad V(t,t)x = x \tag{4.40}$$

für alle $x \in E$ erfüllt. Daraus werden wir leicht die Eindeutigkeit von $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ und die Identität

$$U(t,s) = V(t,s)$$

für alle $\alpha \le s \le t \le \beta$ erhalten. Ähnlich wie in Teil 1 benutzen wir für $\big(V(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ den Ansatz

$$V(t,s)x = T_s(t-s)x + \int_s^t Q(t,\tau)T_s(\tau - s)x \, \mathrm{d}\tau.$$

Daraus folgt durch rein formales Differenzieren

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial s} V(t,s)x + V(t,s)A(s)x \\
&= \frac{\partial}{\partial s} T_s(t-s)x \ - \ Q(t,s)x \ + \int_s^t Q(t,\tau)\frac{\partial}{\partial s} T_s(\tau - s)x \,\mathrm{d}\tau \\
&+ \ T_s(t-s)A(s)x \ + \int_s^t Q(t,\tau)T_s(\tau-s)A(s)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\Big) T_s(t-s)x \ + \int_s^t Q(t,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \tau}\Big) T_s(\tau-s)x \,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir für die Familie $\big(Q(t,s)\big)_{\alpha \le s \le t \le \beta}$ die Integralgleichung

$$
Q(t,s)x \ = \ H(t,s)x \ + \int_s^t Q(t,\tau)H(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \tag{4.41}
$$

mit

$$
H(t,s)x := \Big(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\Big) T_s(t-s)x
$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$. Wir zeigen nun wie in Teil 1, dass sich (4.41) mittels sukzessiver Approximation lösen lässt. Dazu müssen wir zuerst die Abbildung $(t,s) \mapsto H(t,s)x$ etwas genauer untersuchen. Sei o.B.d.A. $s < t$ und $(t, s+k) \in \Delta$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{T_{s+k}(t-s-k)x - T_s(t-s)x}{k} \\
&= \ -\frac{1}{k}\int_0^k A(s+k)T_{s+k}(t-s-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \ \frac{1}{k}\int_s^t \frac{\partial}{\partial \sigma}\Big(T_{s+k}(\sigma-s)T_s(t-\sigma)x\Big) \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \ -\frac{1}{k}\int_0^k A(s+k)T_{s+k}(t-s-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \ \frac{1}{k}\int_s^t T_{s+k}(\sigma-s)\Big(A(s+k) - A(s)x\Big)T_s(t-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Aus der gleichgradigen Stetigkeit von $\big(T_s(t)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ und der Stetigkeit der Abbildungen $s \mapsto A(s)x$ und $(t,s) \mapsto T_s(t)x$ folgt

$$\frac{1}{k}\int\limits_0^k A(s+k)T_{s+k}(t-s-\sigma)x\,\mathrm{d}\sigma \quad\rightarrow\quad A(s)T_s(t-s)$$

für $k \to 0$. Für den zweiten Term in der obigen Gleichung erhalten wir aus der Differenzierbarkeit von $s \mapsto A(s)x$ sowie aus der starken bzw. gleichgradigen Stetigkeit von $\big(T_s(t)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| T_{s+k}(\sigma-s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k}T_s(t-\sigma)x\right\|_m\\
&\le\ M\left\|\frac{A(s+k)-A(s)}{k}A(s)^{-1}T_s(t-\sigma)A(s)x\right\|_m\\
&\le\ M^2L\|A(s)x\|_m\ \le\ M^2\widetilde{M}L\|x\|_n
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $(t, s+k) \in \Delta$. Ferner gilt

$$T_{s+k}(\sigma-s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k}T_s(t-\sigma)x \quad\rightarrow\quad T_s(\sigma-s)A'(s)T_s(t-\sigma)x$$

für $k \to 0$. Somit folgt aus dem Satz von Lebesgue 2.1.15 die Aussage

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int\limits_s^t T_{s+k}(\sigma-s)\Big(A(s+k)-A(s)x\Big)T_s(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\\
&\rightarrow\quad \int\limits_s^t T_s(\sigma-s)A'(s)T_s(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

für $k \to 0$. Damit ergeben sich die Darstellungen

$$\frac{\partial}{\partial s}T_s(t-s)x \;=\; -A(s)T_s(t-s) \;+\; \int\limits_s^t T_s(\sigma-s)A'(s)T_s(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

und

$$\begin{aligned}
H(t,s)x &= \Big(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\Big)T_s(t-s)x\\
&= \int\limits_s^t T_s(\sigma-s)A'(s)T_s(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}\tag{4.42}$$

für alle $x \in E$. Aus (4.42) erhält man nun leicht die Stetigkeit der Abbildung $(t,s) \mapsto H(t,s)x$ für jedes $x \in E$. Wir betrachten nun, ähnlich wie in Teil 1, die rekursiv definierte Folge

$$H_{k+1}(t,s)x \;:=\; \int_s^t H_k(t,\tau)H(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{4.43}$$

mit

$$H_0(t,s)x := H(t,s)x$$

für alle $x \in E$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Offensichtlich liefert die obige Definition eine Folge von Abbildungen in $\mathrm{C}(\Delta, E)$. Wir zeigen nun mittels Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\Big\| H_k(t,s)x \Big\|_n \;\leq\; \frac{C^{k+1}(t-s)^k \|x\|_n}{k!} \tag{4.44}$$

für alle $x \in E$, alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Für $k=0$ erhalten wir aus der obigen Rechnung

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_s^t T_{s+k}(\sigma - s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k} T_s(t-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \right\|_n \\
&\leq \left\| \int_s^{\frac{t+s}{2}} T_{s+k}(\sigma - s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k} A(s)^{-1}A(s)T_s(t-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \right\|_n \\
&+ \left\| \int_{\frac{t+s}{2}}^t T_{s+k}(\sigma - s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k} A(s)^{-1}A(s)T_s(t-\sigma)x \,\mathrm{d}\sigma \right\|_n \\
&\leq LM \int_s^{\frac{t+s}{2}} \Big\| A(s)T_s(t-\sigma)x \Big\|_n \,\mathrm{d}\sigma \\
&+ \left\| \int_{\frac{t+s}{2}}^t T_{s+k}(\sigma - s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k} A(s)^{-1}\Big(-\frac{\partial}{\partial\sigma} T_s(t-\sigma)x\Big) \,\mathrm{d}\sigma \right\|_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq\ LM\widehat{M}\|x\|_n \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \frac{1}{t-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma \ +\ \left\| T_{s+k}(t-s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k}A(s)^{-1}x \right\|_n \\
&+\ \left\| T_{s+k}\Big(\frac{t-s}{2}\Big)\frac{A(s+k)-A(s)}{k}A(s)^{-1}T_s\Big(\frac{t-s}{2}\Big)x \right\|_n \\
&+\ \left\| \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^{t} A(s+k)T_{s+k}(\sigma-s)\frac{A(s+k)-A(s)}{k}A(s)^{-1}T_s(t-\sigma)x\,\mathrm{d}\sigma \right\|_n \\
&\leq\ LM\widehat{M}\|x\|_n \ +\ LM\|x\|_n \ +\ LM^2\|x\|_n \ +\ LM\widehat{M}\|x\|_n
\end{aligned}$$

für alle $x \in E$ und alle $(t,s),(t,s+k) \in \Delta$. Daraus folgt

$$\left\| H(t,s)x \right\|_n \ = \ \left\| \int\limits_s^t T_s(\sigma-s)A'(s)T_s(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right\|_n \leq C\|x\|_n$$

mit

$$C := LM(2\widehat{M}+1+M).$$

Damit ist (4.44) für $k=0$ gezeigt. Der restliche Induktionbeweis kann völlig analog zu Teil 1 geführt werden. Aus Abschätzung (4.44) folgt nun, dass die Reihe

$$(t,s) \ \mapsto \ \sum_{k=0}^{\infty} H_k(t,s)x \ =:\ Q(t,s)x \tag{4.45}$$

für jedes $x \in E$ gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $(t,s) \mapsto Q(t,s)x$ konvergiert und dass für alle $n \in N$ ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\|Q(t,s)x\|_n \ \leq \ C\mathrm{e}^{C(t-s)}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $(t,s) \in \Delta$. Somit erhalten wir mittels Definition (4.45) eine stark stetige Familie $\big(R(t,s)\big)_{(t,s)\in\Delta}$ von stetigen linearen Abbildungen. Ferner folgt aus Definition (4.43) die Identität

$$\begin{aligned}
&H(t,s)x + \int_s^t Q(t,\tau)H(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= H_0(t,s) + \int_s^t \sum_{k=0}^{\infty} H_k(t,\tau)H(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= H_0(t,s) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t K_k(t,\tau)K(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= H_0(t,s) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t,s)x \;=\; Q(t,s)x,
\end{aligned}$$

d.h., die Familie $\big(Q(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ ist eine Lösung der Integralgleichnug (4.41). Wir definieren nun die Familie $\big(V(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ mittels

$$V(t,s)x \;:=\; T_s(t-s)x \;+\; \int_s^t Q(t,\tau)T_s(\tau-s)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Dann folgt aus der starken bzw. gleichgradigen Stetigkeit von $\big(Q(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ und $\big(T_s(t-s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ die Differenzierbarkeit von $s\mapsto V(t,s)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)x \\
&= \frac{\partial}{\partial s}T_s(t-s)x \;-\; Q(t,s)x \;+\; \int_s^t Q(t,\tau)\frac{\partial}{\partial s}T_s(\tau-s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= -V(t,s)A(s)x \;+\; \Big(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\Big)T_s(t-s)x \\
&+ \int_s^t Q(t,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial \tau}\Big)T_s(\tau-s)x\,\mathrm{d}\tau \;-\; Q(t,s)x \\
&= -V(t,s)A(s)x,
\end{aligned}$$

d.h., $s\mapsto V(t,s)x$ ist für jedes $x\in E$ eine Lösung von (4.40). Damit können wir nun leicht die eindeutige Lösbarkeit von (4.38) zeigen. Sei $\varphi:[s,\beta]\to E$ eine Lösung von (4.38), so gilt

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}V(t,\sigma)\varphi(\sigma) \;=\; -V(t,\sigma)A(\sigma)\varphi(\sigma) \;+\; V(t,\sigma)A(\sigma)\varphi(\sigma) \;=\; 0.$$

Daraus folgt $\varphi(t) = V(t,s)x$, d.h., (4.38) ist eindeutig lösbar. Daher erhalten wir aus Teil 3 folgende Aussagen:

(i) $U(t,s)x = V(t,s)x$ für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$.

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x$ für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le s \le t \le \beta$.

(iii) $U(t,s)U(s,r)x = U(t,r)$ für alle $x \in E$ und alle $\alpha \le r \le s \le t \le \beta$, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(U(t,s)U(s,r)x\Big) = 0$$

für alle $\alpha \le r \le s \le t \le \beta$.

Somit haben wir insgesamt nachgewiesen, dass $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ die Eigenschaften (a)–(c) erfüllt.

Schritt 5: Wir müssen abschließend noch zeigen, dass

$$\Phi_{t,s}(x) \;:=\; U(t,s)x \;+\; \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

die eindeutig Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt. Die Eindeutigkeit von $\Phi_{t,s}(x)$ folgt unmittelbar aus der eindeutigen Lösbarkeit der homogenen Gleichung. Ferner erhält man die Differenzierbarkeit der Abbildung

$$t \mapsto \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

und ihre Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; A(t)\int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; b(t)$$

wie in Satz 4.1.1. Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t,s}(x) \;&=\; A(t)U(t,s)x \;+\; A(t)\int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; b(t)\\ &=\; A(t)\Phi_{t,s}(x) \;+\; b(t),\end{aligned}$$

d.h., $\Phi_{t,s}(x)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Gleichung. Zum Beweis der Abschätzungen (4.25) und (4.28) müssen wir beachten, dass wir durch den Übergang von $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zu $\big(A(t)-\widehat{\omega}\mathbf{I}\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ mit $\widehat{\omega}>\omega$ o.B.d.A. annehmen konnten, dass die Abschätzungen (4.29) bis (4.31) erfüllt sind. Man kann jedoch leicht zeigen, dass $\big(\mathrm{e}^{-\widehat{\omega}(t-s)}U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ genau dann das eindeutige zu $\big(A(t)-\widehat{\omega}\mathbf{I}\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionssystem ist, wenn $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t\le\beta}$ das eindeutige zu $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ zugehörige Evolutionssystem ist. Daher gilt nach (4.39) für $\widehat{\omega}>\omega$ und jedes $n\in\mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\Phi_{t,s}(x)\|_n &\le \|U(t,s)x\|_n + \left\|\int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_n\\ &\le M\mathrm{e}^{(\widehat{\omega+L M})(t-s)}\Big(\|x\|_n + \int_s^t \mathrm{e}^{(\widehat{\omega}+L\widehat{M})(s-\tau)}\|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\Big)\end{aligned}$$

für alle $x\in E$ und alle $\alpha\le s\le t\le\beta$. Somit ist der Beweis von Satz 4.2.2 vollständig. ∎

Bemerkung 4.2.4. (a) Der Beweis des obigen Satzes orientiert sich vorwiegend an den Artikeln [Tan59, Tan60b, Tan60a, KT62] von H. Tanabe und H. Kato sowie an [Paz83, Ch. 5, Thm. 6.1]. Jedoch behandeln alle genannten Arbeiten nur den Banachraumfall.

(b) Die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung $s\mapsto T_s(t-s)x$, die wir mittels der Identität

$$\begin{aligned}&T_{s+h}(t-s)-T_s(t-s)\\ &\quad= \int_0^{t-s} T_{s+h}(\sigma)\Big(A(s+h)-A(s)\Big)T_s(t-s-\sigma)x\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

gezeigt haben, kann man auch aus der Integraldarstellung

$$T_s(t-s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}R\big(\lambda,A(s)\big)x\,\mathrm{d}\lambda$$

und aus der stetigen Differenzierbarkeit der Abbildung $t\mapsto R\big(\lambda,A(t)\big)x$ erhalten [siehe Folgerung 3.2.2].

(c) Die Abschätzungen (4.35) und (4.44) zeigen, dass man die Abbildungen $x \mapsto K(t,s)x$ und $x \mapsto H(t,s)x$ zu stetigen linearen Abbildungen von $\widehat{E}_n$ nach $\widehat{E}_n$ fortsetzen kann. Dabei bezeichne $\widehat{E}_n$ die Vervollständigung von E bezüglich $\|\cdot\|_n$. Somit konvergieren die Folgen $\big(K_k(t,s)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\big(H_k(t,s)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ auch in den Banachräumen $L(\widehat{E}_n)$.

(d) Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x \quad = \quad -U(t,s)A(s)$$

bezeichnet man auch als die zu (4.38) adjungierte oder duale Gleichung, denn die Abbildung $s \mapsto U^*(t,s)y^*$ liefert offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(s) \quad = \quad -A^*(s)y(s), \quad y(t) = y^*, \quad s \leq t.$$

Somit ist die Beweisidee, die Eindeutigkeit von (4.38) mittels der Existenz einer Lösung von (4.40) zu zeigen, eine abstrakte Version des Satzes von Holmgren [siehe [LS94, Thm. 10a/b]]. Alternativ kann man die eindeutige Lösbarkeit von (4.38) auch mittels [Lun95, Lemma 6.1.2] zeigen.

Folgerung 4.2.4. *Sei $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\infty)}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b \in \mathrm{C}\big([\alpha,\infty),E\big)$. Ferner existiere ein Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(P1′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset [\alpha,\infty)$ ist die Voraussetzung (P1) aus Satz 4.2.2 erfüllt.*

(P2′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset [\alpha,\infty)$ ist die Voraussetzung (P2) aus Satz 4.2.2 erfüllt.*

(P3) *Die Abbildung $t \mapsto A(t)x$ ist für jedes $x \in E$ stetig differenzierbar.*

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ ist lokal gleichgradig stetig, d.h., für jedes $\beta > \alpha$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \geq$ und ein $n \in N$ mit

$$\|U(t,s)x\|_m \leq M\|x\|_n$$

für alle $x \in E$ und alle $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

(b) Die Abbildungen $t \mapsto U(t,s)x$ *und* $s \mapsto U(t,s)x$ *erfüllen die Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \quad U(s,s)x = x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x, \quad U(t,t)x = x$$

für alle $\alpha \leq s \leq t \leq \infty$

(c) Die Familie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha \leq s \leq t < \infty}$ *ist die zu* $\big(A(t)\big)_{t \in [\alpha,\infty)}$ *zugehörige Evolutionsfamilie.*

(d) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t) + b(t), \quad x(s) = x, \quad t \geq s$$

besitzt für jedes $x \in E$ *und jedes* $s \in [a,\infty)$ *eine eindeutige Lösung* $t \mapsto \Phi_{t,s}(x)$ *mit der Darstellung*

$$\Phi_{t,s}(x) \;=\; U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ferner existiert für jedes $\beta > \alpha$ *und jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ein* $M \geq 0$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\|\Phi_{t,s}(x)\|_m \;\leq\; M\left(\|x\|_n + \int_s^t \|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\right)$$

für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

Falls ferner die Abschätzungen in (P1) und (P2) aus Satz 4.2.2 auf ganz $[\alpha,\infty)$ *erfüllt sind, so existieren zusätzlich für* $\widehat{\omega} > \omega$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *Konstanten* $M \geq 0$ *und* $\widehat{M} \geq 0$*, so dass die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:*

(a′) Für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t < \infty$ *gilt*

$$\|U(t,s)x\|_n \;\leq\; M\mathrm{e}^{(\widehat{\omega}+L\widehat{M})(t-s)}\|x\|_n. \tag{4.46}$$

(d′) Für alle $x \in E$ *und alle* $\alpha \leq s \leq t < \infty$ *gilt*

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{t,s}(x)\|_n \\ &\leq\; M\mathrm{e}^{(\widehat{\omega}+L\widehat{M})(t-s)}\Big(\|x\|_n \;+\; \int_s^t \mathrm{e}^{(\widehat{\omega}+L\widehat{M})(s-\tau)}\|b(\tau)\|_n\,\mathrm{d}\tau\Big). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit von $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t<\infty}$ folgen analog zu Folgerung 4.2.2 aus Satz 4.2.2. Die Abschätzungen (4.46) und (4.47) erhält man dagegen unmittelbar aus (4.25) bzw. (4.28). ■

Folgerung 4.2.5. *Sei $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\infty)}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b\in \mathrm{C}^k\big([\alpha,\infty),E\big)$, $k\in\mathbb{N}$. Ferner existiere ein Fundamentalsystem, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(P1′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta]\subset[\alpha,\infty)$ ist die Voraussetzung (P1) aus Satz 4.2.2 erfüllt.*

(P2′) *Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta]\subset[\alpha,\infty)$ ist die Voraussetzung (P2) aus Satz 4.2.2 erfüllt.*

$(\mathrm{P3})_{\mathrm{k}}$ *Die Abbildung $t\mapsto A(t)x$ ist für jedes $x\in E$ k-fach stetig differenzierbar.*

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\le s\le t<\infty}$ mit den Eigenschaften (a)–(c) aus Folgerung 4.2.4. Ferner gilt:

(d'') *Die Abbildung $\Phi:\big\{(t,s)\in[\alpha,\infty)\times[\alpha,\infty)\,\big|\, t\ge s\big\}\times E\to E$ definiert durch*

$$\Phi_{t,s}(x) \;:=\; U(t,s)x \;+\; \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t)+b(t). \quad x(s)=x, \quad t\ge s \tag{4.48}$$

Ferner ist Φ $(k+1)$-fach stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l}\Phi_{t,s}(x) \;=\; \sum_{j=0}^{l-1} A^{(j)}(t)\frac{\partial^{l-1-j}}{\partial t^{l-1-j}}\Phi_{t,s}(x) \;+\; b^{(l-1)}(t),$$

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\Phi_{t,s}(x) \;=\; -\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial^j}{\partial s^j}U(t,s)xA(s)^{(l-1-j)}x \;-\; \sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial^j}{\partial s^j}U(t,s)b^{(l-1-j)}(s),$$

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l}\Phi_{t,s}(x)h \;=\; \begin{cases} U(t,s)h & \text{für}\;\; l=1\\[2ex] 0 & \text{für}\;\; l\ge 2.\end{cases}$$

für alle $1\le l\le k+1$.

Beweis: Nach Folgerung 4.2.4 existiert eine eindeutig bestimmte Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t<\infty}$ mit den Eigenschaften (a)–(c). Ferner erhalten wir aus Folgerung 4.2.4(d),dass die Abbildung $t\mapsto \Phi_{t,s}(x)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems 4.48 ist. Somit müssen wir nur noch die $(k+1)$-fache stetige Differenzierbarkeit zeigen. Aus Satz 4.2.2 bzw. Folgerung 4.2.4 folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x = A(t)U(t,s)x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x.$$

für alle $\alpha\leq s\leq t\leq\infty$. Somit ergibt sich die Behauptung leicht mittels Induktion.

■

Folgerung 4.2.6. *Sei $\big(A(t)\big)_{t\in[\alpha,\beta]}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren und sei $b\in \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$. Ferner existiere ein Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(P1″) *Es existiert ein Sektor $\Delta\subset\mathbb{C}$, so dass für jedes $t\in[\alpha,\beta]$ der Operator $A(t)$ der infinitesimale Generator einer sektoriell analytischen $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{exp}}$-Halbgruppe $\big(T_t(z)\big)_{z\in\Delta_0}$ ist. Ferner gibt es ein $\omega\geq 0$, so dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $M\geq 0$ existiert mit*

$$\Big\|T_t(z)x\Big\|_n \;\leq\; M\mathrm{e}^{\omega\operatorname{Re}z}\|x\|_n$$

für alle $x\in E$ und alle $z\in\Delta$.

(P2″) *Es existiert ein $\lambda>\omega$, so dass $\lambda\in\rho\big(A(s)\big)$ für alle $s\in[\alpha,\beta]$. Ferner existiert für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $L\geq 0$ mit*

$$\Big\|\big(A(t)-A(t')\big)R\big(\lambda,A(s)\big)x\Big\|_n \;\leq\; L|t-t'|\cdot\|x\|_n$$

für alle $x\in E$ und alle $t,t',s\in[\alpha,\beta]$.

(P3) *Die Abbildung $t\mapsto A(t)x$ ist für jedes $x\in E$ stetig differenzierbar.*

Dann existiert genau eine stark differenzierbare Evolutionsfamilie $\big(U(t,s)\big)_{\alpha\leq s\leq t\leq\beta}$, die Eigenschaften (a)–(d) aus Satz 4.2.2 erfüllt.

Beweis: Nach Satz 4.2.2 genügt es zu zeigen, dass (P1″) und (P2″) die Voraussetzungen (P1) bzw. (P2) implizieren. Dies folgt aber unmittelbar aus Satz 3.2.2.

■

Kapitel 5

Existenz- und Eindeutigkeitssätze in zahmen Frécheträumen

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen zwei Existenz- und Eindeutigkeitssätze für *nichtlineare*, gewöhnliche Differentialgleichungen in Frécheträumen. Obwohl beide Sätze nicht in beliebigen, sondern nur in sogenannten *zahmen* Frécheträumen gültig sind, ist ihr potentieller Anwendungsbereich trotzdem sehr umfangreich, wie die Beispiele zahmer Frécheträume in Kapitel 5.1 zeigen. Insbesondere liefern sie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für gewisse nichtlineare, partielle Differentialgleichungen [siehe Kapitel 6].
Bevor wir jedoch in Abschnitt 5.2 zur exakten Formulierung der Ergebnisse und deren Beweise kommen, wollen wir zunächst in Abschnitt 5.1 die Klasse der zahmen Frécheträume näher untersuchen.

5.1 Zahme Frécheträume

Im folgenden Abschnitt stellen wir die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften zahmer Frécheträume und deren Abbildungen zusammen. Dabei haben wir uns vorwiegend an der exzellenten Arbeit [Ham82] von R.S. Hamilton orientiert. Einen etwas anderen Zugang findet man bei Sergeraert [Ser72]. Beide Artikel basieren auf den Pionierarbeiten von J. Nash und J. Moser. Weitere Literatur zum Thema *zahme Frécheträume* sind z.B. in [ŁZ79] und [Dub82].

Definition 5.1.1. (a) Sei E ein beliebiger Fréchetraum und sei $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ein monoton wachsendes Fundamentalsystem. Das Paar $\left(E, \left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ bezeichnen wir als *graduierten Fréchetraum*.

(b) Zwei monoton wachsende Fundamentalsysteme $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\|\!|\cdot|\!\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von E heißen *zahm äquivalent* vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$, wenn für alle

$n \geq b$ Konstanten M und M' existieren, so dass die Abschätzungen

$$\|x\|_n \leq M|||x|||_{n+r} \qquad \text{und} \qquad |||x|||_n \leq M'\|x\|_{n+r}$$

für alle $x \in E$ erfüllt sind.

Konvention:
Damit im Weiteren die Notation nicht zu schwerfällig wird, unterdrücken wir bei der Bezeichnung eines graduierten Fréchetraums, sofern keine Missverständnisse auftreten können, die Angabe des zugehörigen Fundamentalsystems, d.h., wir schreiben nur E statt $\Big(E, \big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.

Definition 5.1.2. (a) Seien E und F graduierte Fréchetträume. Dann heißt eine lineare Abbildung $A : E \to F$ *zahm* vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$, wenn es zu jedem $n \geq b$ ein $M \geq 0$ gibt, so dass die Abschätzung

$$\|Ax\|_n \quad \leq \quad M\|x\|_{n+r}$$

für alle $x \in E$ erfüllt ist.

(b) Zwei graduierte Fréchetträume E und F heißen *zahm isomorph* vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$, wenn es einen Isomorphismus $I : E \to F$ gibt, so dass I und I^{-1} zahm vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$ sind.

Bemerkung 5.1.1. (a) Jede zahme lineare Abbildung ist offensichtlich nach Satz 1.2.1 auch stetig.

(b) Die Komposition von zahmen linearen Abbildungen ist wieder zahm.

(c) Man beachte, dass auf einem „echten“ Fréchetraum, d.h. ein Fréchetraum der *kein* Banachraum ist, immer monoton steigende Fundamentalsysteme existieren, die *nicht* zahm äquivalent sind, z.B. sind die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(\|\cdot\|_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zahm äquivalent. Somit sind die graduierten Fréchetträume $\Big(E, \big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ und $\Big(E, \big(\|\cdot\|_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ nicht zahm isomorph. Allgemein gilt:

Die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind genau dann zahm äquivalent, wenn die Identität*

$$\mathbf{I} : \Big(E, \big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \to \Big(E, \big(|||\cdot|||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

ein zahmer Isomorphismus ist.

Die folgenden Beispiele sollen dem Leser die obigen Begriffe etwas veranschaulichen.

Beispiel 5.1.1. Sei $E := \sum(\mathbb{C})$ der Raum aller schnell fallenden Folgen in $\mathbb{C}$, d.h.,

$$\sum(\mathbb{C}) := \Big\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{k=1}^{\infty} k^n |x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_{p,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned}
\|x\|_{1,n} &:= \sum_{k=1}^{\infty} k^n |x_k|, \quad \text{für} \quad p = 1 \\
\|x\|_{p,n} &:= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{np} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty \\
\|x\|_{\infty,n} &:= \sup_{k\in\mathbb{N}} k^n |x_k|, \quad \text{für} \quad p = \infty
\end{aligned}$$

sind zahm äquivalent, denn es gilt

$$\|x\|_{\infty,n} \;\le\; \|x\|_{p,n} \;\le\; \|x\|_{1,n} \;\le\; M\|x\|_{\infty,n+2}$$

für alle $x \in E$ mit $M := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty$.

Beispiel 5.1.2. Sei $E := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller komplexen Folgen. Dann sind die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_{p,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned}
\|x\|_{1,n} &:= \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \text{für} \quad p = 1 \\
\|x\|_{p,n} &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty \\
\|x\|_{\infty,n} &:= \sup_{1\le k\le n} |x_k|, \quad \text{für} \quad p = \infty
\end{aligned}$$

zahm äquivalent vom Grad $r = 0$ zur Basis $b = 1$, denn es gilt

$$\|x\|_{\infty,n} \;\le\; \|x\|_{p,n} \;\le\; \|x\|_{1,n} \;\le\; n\|x\|_{\infty,n}$$

für alle $x \in E$.

Beispiel 5.1.3. Sei M eine r-dimensionale, kompakte, orientierbare C^{∞}-Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand), g eine Riemannsche Metrik auf M und D die zu g zugehörige kovariante Ableitung auf M [siehe z.B. [Lan95]]. Ferner sei $E := \mathrm{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$

der Raum aller C^∞-Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$. Dann betrachten wir auf E die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_{p,n}\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,n} &:= \left(\sum_{k=0}^{n}\int_M \|\mathrm{D}^k f\|^p\,|\mathrm{d}\omega_g|\right)^{1/p}, \quad \text{für} \quad 1\le p<\infty \\ \|f\|_{\infty,n} &:= \|f\|_{\sup,n} := \max_{0\le k\le n}\Big(\sup_{x\in M}\|\mathrm{D}^k f(x)\|\Big), \quad \text{für} \quad p=\infty.\end{aligned}$$

Dabei bezeichne D^k die k-te kovariante Ableitung und $\mathrm{d}\omega_g$ die eindeutig durch g bestimmte Volumenform auf M. Sei $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^r$ eine Karte von M. Aus dem Sobolevschen Einbettungsatz [siehe z.B. [Ada75, Th. 5.4] folgen die lokalen Abschätzungen

$$\|f|_U\|_{1,n} \;\le\; M_p\|f|_U\|_{p,n} \;\le\; M_\infty\|f|_U\|_{\infty,n} \;\le\; M_1\|f|_U\|_{1,n+r}.$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe einer geeigneten Partition der Eins die globalen Abschätzungen

$$\|f\|_{1,n} \;\le\; M'_p\|f\|_{p,n} \;\le\; M'_\infty\|f\|_{\infty,n} \;\le\; M'_1\|f\|_{1,n+r},$$

d.h., die Fundamentalsysteme $\big(\|\cdot\|_{p,n}\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind zahm äquivalent [vgl. [Ham82, Part II, Ex. 1.1.4]].

Beispiel 5.1.4. Sei $E := \mathrm{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ der Raum aller C^∞-Abbildungen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ und sei F der Raum aller geraden C^∞-Abbildungen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$, d.h.,

$$F := \Big\{x \in \mathrm{C}^\infty\big([-1,1],\mathbb{R}\big) \;\Big|\; x(t)=x(-t)\Big\}.$$

Ferner seien beide Räume mit dem Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_{\sup,n}\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ versehen. Dann ist die Abbildung $f : E \to F$, definiert durch $f(x)(t) := x(t^2)$, ein stetiger Isomorphismus von E nach F und es gilt mit geeigneten Konstanten $M_n \ge 0$ die Abschätzung

$$\|f(x)\|_{\sup,n} \le M_n\|x\|_{\sup,n}$$

für alle $x \in E$. Somit ist f zahm vom Grad $r=0$ zur Basis $b=0$. Für die Umkehrabbildung $f^{-1} : F \to E$, $f^{-1}(y)(t) = y(\sqrt{t})$ erhalten wir jedoch

$$\|f^{-1}(y)\|_{\sup,n} \le M'\|y\|_{\sup,2n}$$

als bestmögliche Abschätzung, d.h., f^{-1} ist nicht zahm. Daher folgt im Allgemeinen aus der Zahmheit von f *nicht* die Zahmheit von f^{-1}.

Definition 5.1.3. Sei X ein beliebiger Banachraum. Dann bezeichnen wir mit $\sum_{\exp}(X)$ den Raum aller exponentiell fallenden Folgen mit Werten in X, d.h.,

$$\sum\nolimits_{\exp}(X) := \left\{ x \in X^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nk} \|x_k\| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Der Raum $\sum_{\exp}(X)$ heißt der zu X zugehörige *Standardraum.*

Lemma 5.1.1. *(a) Der Standardraum $\sum_{\exp}(X)$ aus Definition 5.1.3, versehen mit dem Fundamentalsystem*

$$\|x\|_{1,n} \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nk} \|x_k\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist ein graduierter Fréchetraum.

(b) Die Fundamentalsysteme $\left(\|\cdot\|_{p,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\|x\|_{p,n} \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nkp} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \textit{für} \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|x\|_{\infty,n} \;:=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{nk} |x_k|, \quad \textit{für} \quad p = \infty,$$

sind zahm äquivalent auf $\sum_{\exp}(X)$ und erfüllen die Abschätzungen

$$\|x\|_{\infty,n} \;\le\; \|x\|_{p,n} \;\le\; \|x\|_{1,n} \;\le\; M\|x\|_{\infty,n}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$ mit $M := \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k}$.

Beweis: Zu (a): Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Vollständigkeit von X.

Zu (b): Die Abschätzungen ergeben sich aus den entsprechenden Ungleichungen für die l_p-Norm [vgl. Beispiel 5.1.1]. ■

Definition 5.1.4. (a) Seien E und F graduierte Fréchetäume. Dann heißt E ein *zahmer, direkter Summand* von F, wenn es zahme lineare Abbildungen $J : E \to F$ und $L : F \to E$ gibt mit $L \circ J = \mathbf{I}$.

(b) Ein Unterraum U eines graduierten Fréchetraums E heißt *zahm spaltend*, wenn es eine zahme Projektion $P : E \to E$ auf U gibt, d.h., eine zahme lineare Abbildung $P : E \to E$ mit $P^2 = P$ und $\mathrm{Im}P = U$.

Definition 5.1.5. Ein graduierter Fréchetraum E heißt *zahm*, wenn er ein zahmer direkter Summand eines Standardraums $\sum_{\exp}(X)$ ist.

Lemma 5.1.2. *(a) Ein graduierter Fréchetraum ist genau dann zahm, wenn er zahm isomorph zu einem zahm spaltenden Unterraum eines Standardraums ist.*

(b) Ein zahmer direkter Summand eines zahmen Fréchetraums ist zahm.

(c) Das kartesische Produkt von endlich vielen zahmen Fréchetedräumen ist zahm.

Beweis: Zu (a) „$\Longrightarrow$“: Sei E zahm und seien $J : E \to \sum_{\exp}(X)$ sowie $L : \sum_{\exp}(X) \to E$ die zugehörigen zahmen Abbildungen aus Definition 5.1.4. Dann betrachten wir $U := \mathrm{Im} J$ und $P : E \to E$, $P := J \circ L$. Offensichtlich ist P eine zahme Projektion auf U. Ferner sind $J : E \to U$ und $J^{-1} = L|_U$ zahm, d.h. E ist zahm isomorph zu U.

Zu (a) „$\Longleftarrow$“: Sei E zahm isomorph zu $U \subset \sum_{\exp}(X)$ mittels $I : E \to U$. Setze $J : E \to \sum_{\exp}(X)$, $J := I$ und $L : \sum_{\exp}(X) \to E$, $L := I^{-1} \circ P$, wobei P eine zahme Projektion auf U sei. Dann sind J und L zahm und es gilt $L \circ J = \mathbf{I}$.

Zu (b): Dies folgt unmittelbar aus Definition 5.1.4.

Zu (c): Offensichtlich genügt es die Behauptung für zwei zahme Fréchetedräume zu zeigen. Seien also E_1 und E_2 zahme direkte Summanden von $\sum_{\exp}(X_1)$ bzw. $\sum_{\exp}(X_2)$. Dann sieht man leicht, dass $E_1 \times E_2$ ein zahmer direkter Summand von $\sum_{\exp}(X_1) \times \sum_{\exp}(X_2) \cong \sum_{\exp}(X_1 \times X_2)$ ist. Somit ist $E_1 \times E_2$ zahm. ∎

Die Beispiele 5.1.4 bis 5.1.9 sollen verdeutlichen wie „reichhaltig“ die Klasse der zahmen Fréchetedräume auch in Bezug auf Anwendungen ist.

Beispiel 5.1.5. Jeder Banachraum X ist ein zahmer Fréchetraum. Denn X ist zahm isomorph zum Unterraum $U := \big\{x \in \sum_{\exp}(X) \;\big|\; x_k = 0 \text{ für alle } k > 1\big\}$ und U wiederum ist zahm spaltend.

Beispiel 5.1.6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, Y ein beliebiger Banachraum und $\alpha : \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative, μ-messbare Gewichtsfunktion. Ferner sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathrm{L}_p^\infty(\Omega, \mu, Y, \alpha)$ der Raum aller μ-messbaren Abbildungen $f : \Omega \to Y$ mit

$$\|f\|_{p,n} \;:=\; \left(\int\limits_\Omega \mathrm{e}^{np\alpha} \|f\|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \;<\; \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathrm{L}_p^\infty(\Omega, \mu, Y, \alpha)$ ein zahmer Fréchetraum. Dies sieht man wie folgt. Man setze $X := \mathrm{L}_p(\Omega, \mu, Y)$ und

$$\chi_k : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \chi_k(\omega) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \omega \in \alpha^{-1}\big([k, k+1)\big) \\[2ex] 0 & \text{für} \quad \omega \notin \alpha^{-1}\big([k, k+1)\big). \end{cases}$$

Ferner definieren wir

$$J : \mathrm{L}_p^\infty(\Omega, \mu, Y, \alpha) \to \textstyle\sum_{\exp}(X), \qquad J(f)_k := \chi_k \cdot f$$

und

$$L : \textstyle\sum_{exp}(X) \to \mathrm{L}_p^\infty(\Omega, \mu, Y, \alpha) \qquad L\Big((f_k)_{k\in N}\Big) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot f_k.$$

Damit erhalten wir mittels Lemma 5.1.1 die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\Big\|J(f)\Big\|_{1,n} &\leq M\Big\|J(f)\Big\|_{p,n} = M\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nkp}\|J(f)_k\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq M\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nkp} \int_\Omega \chi_k\|f\|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\
&\leq M\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{np\alpha}\|f\|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = M\|f\|_{p,n}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\Big\|L\Big((f_k)_{k\in\mathbb{N}}\Big)\Big\|_{p,n} &= \left(\int_\Omega \mathrm{e}^{np\alpha}\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k \cdot f_k\Big\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{n\alpha}\chi_k \cdot f_k\Big\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_\Omega \|\mathrm{e}^{n\alpha}\chi_k \cdot f_k\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{n(k+1)}\|f_k\|_p = \mathrm{e}^n\Big\|(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{1,n}
\end{aligned}$$

d.h., die Abbildungen J und L sind zahm mit $L \circ J = \mathbf{I}$. Somit ist $\mathrm{L}_p^\infty(\Omega, \mu, Y, \alpha)$ ein zahmer Fréchetraum. Als Spezialfall ergibt sich z.B., dass der Raum der schnell fallenden Folgen $\sum(\mathbb{C})$ aus Beispiel 5.1.1 zahm ist. Denn für die Wahl $\Omega = \mathbb{N}$ versehen mit dem Zählmaß μ, $Y = \mathbb{C}$ und $\alpha(\omega) = \log\omega$ erhalten wir $\sum(\mathbb{C}) = \mathrm{L}_1(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{R}, \alpha)$.

Beispiel 5.1.7. Sei $\mathrm{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$ der Raum aller 2π-periodischen C^∞-Funktionen versehen mit einem der Fundamentalsysteme aus Beispiel 5.1.3. Dann sieht man leicht mittels Fourier-Transformation, dass $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$ und $\sum(\mathbb{C})$ zahm isomorph sind [siehe z.B. [MV92, Kap. III. Bsp. 29.5]]. Somit ist $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$ ein zahmer Fréchetraum. Da ferner $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$ und $C^{\infty}(S^1)$ zahm isomorph sind, ist auch $C^{\infty}(S^1)$ zahm.

Sehr viel allgemeiner gilt:

Beispiel 5.1.8. Sei M eine endlich dimensionale, kompakte, orientierbare C^{∞}-Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand), g eine Riemannsche Metrik auf M und D die zu g zugehörige kovariante Ableitung auf M [siehe z.B. [Lan95]]. Ferner sei $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ der Fréchetraum aller C^{∞}-Abbildungen aus Beispiel 5.1.3 und $C_0^{\infty}(M,\mathbb{R})$ der abgeschlossene Unterraum

$$C_0^{\infty}(M,\mathbb{R}) \;:=\; \Big\{ f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \;\Big|\; D^k f|_{\partial M} = 0 \text{ für alle } k \in N_0 \Big\}.$$

Dann sind die beiden Räume $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ und $C_0^{\infty}(M,\mathbb{R})$ zahm. Dies zeigt man, indem man M in einen geeigneten $\mathbb{R}^m$ einbettet, die C^{∞}-Funktionen von M zu C^{∞}-Funktionen mit kompaktem Träger auf ganz $\mathbb{R}^m$ fortsetzt und anschließend mittels Fourier-Transformation nach $L_1^{\infty}(\mathbb{R}^m,\lambda,\mathbb{R},\alpha)$ abbildet. Dabei bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^m$ und $\alpha : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ sei definiert durch $\alpha(\omega) := \log(1+|\omega|)$. Die genaueren Details kann der Leser in [Ham82, Part II, Ch. 1.3] nachlesen. Dort findet man auch eine Verallgemeinerung auf beliebige Vektorraumbündel V über M, d.h., auch die Räume $C^{\infty}(M,V)$ der glatten Schnitte von V über M sind zahme Fréchetträume.

Beispiel 5.1.9. Sei $H(\mathbb{C})$ der Raum aller ganzen Funktionen versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|f\|_n \;:=\; \left(\int\limits_{\partial \mathbb{D}_{r_n}} |f(z)|^2 \, dz \right)^{1/2}, \quad r_n := e^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $H(\mathbb{C})$ nach Lemma 5.1.1 vermöge

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \quad \mapsto \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

zahm isomorph zu $\sum_{\exp}(\mathbb{C})$ und somit ein zahmer Fréchetraum.

Die beiden nächsten Beispiele sollen zeigen, dass nicht jeder wichtige Fréchetraum notwendigerweise zahm ist.

Beispiel 5.1.10. Die Räume $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $C(\mathbb{R})$ aus den Beispielen 5.1.2 bzw. 3.1.2 versehen mit den Fundamentalsystemen

$$\|x\|_n \;:=\; \max_{1\le k\le n} |x_k|, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$\|f\|_n \;:=\; \sup_{|x|\leq n} |f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}$$

sind *nicht* zahm. Denn jeder zahme Fréchetraum besitzt nach Lemma 5.1.2 ein monoton wachsendes Fundamentalsystem aus *Normen*. Somit existiert insbesondere auf jedem zahmen Fréchetraum mindestens eine stetige Norm. Dies ist aber bei den Räumne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ nicht der Fall.

Beispiel 5.1.11. Sei $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ der Raum aller holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$. Dann ist $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|f\|_n \;:=\; \sup_{|x|\leq 1-\frac{1}{n}} |f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}$$

ein graduierter Fréchetraum. $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ ist zahm isomorph zu

$$\Big\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{k=1}^{\infty} r_n^{(k-1)}|a_k| < \infty \text{ für alle } r_n = 1-\tfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

d.h., zu einem Potenzreihenraum vom endlichen Typ [siehe [MV92, Kap. III, §29], [Pie72]]. Beide Räume sind *nicht* zahm, da ihre Fundamentalsysteme nicht die Eigenschaft (DN) aus Lemma 5.1.3 erfüllen [siehe z.B. [MV92, Kap. III, Satz 29.3]].

Das folgende Lemma zeigt, dass das Fundamentalsystem eines zahmen Fréchetraums starke Zusatzeigenschaften besitzt.

Lemma 5.1.3. *(a) Jeder zahme Fréchetraum E besitzt eine Familie $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ von* Glättungsoperatoren*, d.h., eine Familie von stetigen, linearen Abbildungen mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein $b \in \mathbb{N}$, so dass die Abschätzungen (i) und (ii) erfüllt sind.*

(i) Für alle $m, n \geq b$ mit $n \geq m$ existiert ein $M \geq 0$ mit

$$\|S_t x\|_n \;\leq\; M\mathrm{e}^{(n-m)t}\|x\|_{m+2r}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$.

(ii) Für alle $m, n \geq b$ mit $n \geq m$ existiert ein $M' \geq 0$ mit

$$\|x - S_t x\|_m \;\leq\; M'\mathrm{e}^{(m-n)t}\|x\|_{n+2r}$$

für alle $x \in E$ und alle $t \geq 0$.

(b) *Das Fundamentalsystem eines zahmen Fréchetraums E erfüllt die* verallgemeinerte Interpolationsungleichung, *d.h., es existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l, m, n \geq b$ mit $n \geq m \geq l$ ein $M \geq 0$ existiert mit*

$$\text{(IPU)} \qquad \|x\|_m^{n-l} \;\leq\; M\|x\|_{l+2r}^{n-m}\|x\|_{n+2r}^{m-l}$$

für alle $x \in E$.

(c) *Das Fundamentalsystem eines zahmen Fréchetraums E besitzt eine* dominierende Norm,*d.h., es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq b$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \geq 0$ existiert mit*

$$\text{(DN)} \qquad \|x\|_m^2 \;\leq\; M\|x\|_{b+r}\|x\|_n$$

für alle $x \in E$.

(d) *Das Fundamentalsystem eines Standardraums $\sum_{\exp}(X)$ erfüllt die Aussagen (a)–(c) für $r = 0$ und $b = 0$.*

Beweis: Da nach Lemma 5.1.2 jeder zahme Fréchetraum zahm isomorph zu einem zahm spaltenden Unterraum eines Standardraums ist, genügt es die obigen Behauptungen für Standardräume zu zeigen.

Zu (a): Sei X ein beliebiger Banachraum und $\sum_{\exp}(X)$ der zugehörige Standardraum. Ferner sei $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine C^∞-Funktion mit $\varphi(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\varphi(t) = 1$ für $t \geq 1$. Wir definieren nun

$$\Big(S(t)x\Big)_k \;:=\; \varphi(t-k)x_k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$. Dann gilt für $n \geq m \geq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|S_t x\|_n \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nk}\|\varphi(t-k)x_k\| \;\leq\; \sum_{k=1}^{[t]} \mathrm{e}^{nk}\|x_k\| \\ &\leq\; \sum_{k=1}^{[t]} \mathrm{e}^{nk}\|x_k\| \;\leq\; \mathrm{e}^{(n-m)t}\sum_{k=1}^{[t]} \mathrm{e}^{mk}\|x_k\| \;\leq\; \mathrm{e}^{(n-m)t}\|x\|_m\end{aligned}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$ und alle $t \geq 0$. Analog erhalten wir mit $M' := \mathrm{e}^{n-m}$ die Abschätzung

$$\|x - S_t x\|_m \;\leq\; M'\mathrm{e}^{(m-n)t}\|x\|_m$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$ und alle $t \geq 0$. Somit liefert Definition (5.1) eine Familie von Glättungsoperatoren mit den gewünschten Eigenschaften.

Zu (b): Aus Teil (a) erhalten wir für $0 \leq l \leq m \leq n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|x\|_m &\leq \|S_t x\|_m + \|x - S_t x\|_m \\ &\leq \mathrm{e}^{(m-l)t}\|x\|_l + M'\mathrm{e}^{(m-n)t}\|x\|_n \leq M'\Big(\mathrm{e}^{(m-l)t}\|x\|_l + \mathrm{e}^{(m-n)t}\|x\|_n\Big)\end{aligned}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$ und alle $t \geq 0$. Für $x \neq 0$ wählen wir nun

$$t := \frac{1}{n-l}\Big(\log\|x\|_n - \log\|x\|_l\Big).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_m^{n-l} &\leq (M)^{l-n}\Big(\mathrm{e}^{(m-l)t}\|x\|_l + \mathrm{e}^{(m-n)t}\|x\|_n\Big)^{n-l} \\ &= (M')^{l-n}\left(\|x\|_l\left(\frac{\|x\|_n}{\|x\|_l}\right)^{\frac{m-l}{n-l}} + \|x\|_n\left(\frac{\|x\|_n}{\|x\|_l}\right)^{\frac{m-n}{n-l}}\right)^{n-l} \\ &= (2M')^{l-n}\|x\|_l^{n-m}\|x\|_n^{m-l}\end{aligned}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X) \setminus \{0\}$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, da für $x = 0$ die Interpolationsungleichnug in (b) offensichtlich erfüllt ist.

Zu (c): Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann wählen wir $l = 0$ und $n = 2m$. Aus der Interpolationsungleichung aus Teil (b) folgt

$$\|x\|_m^{2m} \leq (2M')^{2m}\|x\|_0^m\|x\|_{2m}^m$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$. Somit gilt

$$\|x\|_m^2 \leq (2M')^2\|x\|_0\|x\|_{2m}$$

für alle $x \in \sum_{\exp}(X)$, d.h., $\sum_{\exp}(X)$ besitzt die Eigenschaft (DN).

Zu (d): Siehe die Bemerkung zu Beginn des Beweises. ■

Bemerkung 5.1.2. Die obige Eigenschaft, dass jeder zahme Fréchetraum eine Familie von Glättungsoperatoren besitzt, die im Beweis des Satzes von Nash/Moser eine entscheidende Rolle spielt, wird in der Arbeit [Ser72] von P. Sergeraert zur Definition zahmer Fréchetträume benutzt. Die Frage, ob die beiden Definitionen äquivalent sind, scheint nicht vollständig geklärt zu sein, wie der Artikel [Vog87] von D. Vogt nahe legt.

Definition 5.1.6. Seien E und F graduierte Fréchetträume und sei $U \subset E$ offen.

(a) Eine Abbildung $f : U \to F$ erfüllt eine *zahme Abschätzung* auf U vom Grad r zur Basis b, wenn es Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für jedes $n \geq b$ ein $M \geq 0$ existiert mit

$$\|f(x)\|_n \quad \leq \quad M\Big(1 + \|x\|_{n+r}\Big)$$

für alle $x \in U$.

(b) Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt *zahm auf* U, wenn f stetig ist und für jedes $x \in U$ eine Umgebung $U_x \subset U$ existiert, so dass f eine zahme Abschätzung auf U_x erfüllt.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt k-fach *zahm differenzierbar* oder kurz C^k-zahm, wenn f k-fach stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen $\mathrm{D}^l f : U \times E^l \to F$, $0 \leq l \leq k$ zahm sind.

Das folgende Lemma zeigt, dass die obige Definition für lineare Abbildungen mit Definition 5.1.2 übereinstimmt und dass die Zahmheit von Abbildungen unter Komposition erhalten bleibt. Weitere Eigenschaften zahmer Abbildungen kann man z.B. in [Ham82, Part II] nachlesen.

Lemma 5.1.4. *(a) Eine lineare Abbildung ist genau dann zahm, wenn sie eine zahme lineare Abbildung ist.*

(b) Die Komposition von zahmen Abbildungen ist zahm.

Beweis: Zu (a) „$\Longrightarrow$“: Sei $A : E \to F$ linear und zahm. Somit existieren eine Nullumgebung U sowie Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq b$ ein $M \geq 0$ existiert mit

$$\|Ax\|_n \quad \leq \quad M\Big(1 + \|x\|_{n+r}\Big).$$

Sei o.B.d.A. $r \geq 0$ und $U = B_{\varepsilon,b'} := \big\{x \in E \;\big|\; \|x\|_{b'} < \varepsilon\big\}$. Dann gilt für $x \neq 0$ und $n \geq \max\{b, b'\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_n \quad &= \quad \frac{2\|x\|_{b'}}{\varepsilon}\left\|A\Big(\frac{\varepsilon x}{2\|x\|_{b'}}\Big)\right\| \\
&\leq \quad \frac{2M\|x\|_{b'}}{\varepsilon}\left(1 + \left\|\frac{\varepsilon x}{2\|x\|_{b'}}\right\|_{n+r}\right) \\
&\leq \quad \frac{2M\|x\|_{b'}}{\varepsilon} + M\|x\|_{n+r} \\
&\leq \quad M\Big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\Big)\|x\|_{n+r},
\end{aligned}$$

d.h., A ist eine zahme lineare Abbildung.

Zu (a) „$\Longleftarrow$“: Sei nun $A : E \to F$ eine zahme lineare Abbildung. Dann ist A nach Satz 1.2.2 offensichtlich auch stetig. Daher genügt es zu zeigen, dass A eine zahme Abschätzung auf E erfüllt. Nach Voraussetzung existieren Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq b$ ein $M \geq 0$ existiert mit

$$\|Ax\|_n \leq M\|x\|_{n+r}$$

für alle $x \in E$. Daraus folgt

$$\|Ax\|_n \leq M\Big(1 + \|x\|_{n+r}\Big)$$

für alle $x \in E$, d.h., A erfüllt eine zahme Abschätzung auf ganz E und somit ist A insbesondere eine zahme Abbildung.

Zu (b): Seien E, F und G graduierte Fréchetträume sowie $U \subset E$ und $V \subset F$ offen. Ferner seien $f : U \to V$ und $g : V \to G$ zahme Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen wiederum stetig. Somit genügt es zu zeigen, dass $g \circ f$ für jedes $x_0 \in U$ eine zahme Abschätzung erfüllt. Sei also $x_0 \in U$ gegeben mit $y_0 := f(x_0) \in V$. Dann existieren Umgebungen U_{x_0} und V_{y_0} von x_0 bzw. y_0 sowie Zahlen $r, r' \in \mathbb{Z}$ und $b, b' \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq b$ und jedes $n' \geq b'$ Konstanten $M \geq 0$ und $M' \geq 0$ existieren mit

$$\|f(x)\|_n \leq M\Big(1 + \|x\|_{n+r}\Big)$$

für alle $x \in U_{x_0}$ und

$$\|g(y)\|_{n'} \leq M'\Big(1 + \|y\|_{n'+r'}\Big)$$

für alle $y \in V_{y_0}$. Da f stetig ist, können wir $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$ annehmen. Ferner seien o.B.d.A. $r, r' \geq 0$. Dann folgt für $n \geq \max\{b, b'\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Big\|(g \circ f)(x)\Big\|_n &\leq M'\Big(1 + \|f(x)\|_{n+r'}\Big) \\ &\leq M'\bigg(1 + M\Big(1 + \|x\|_{n+r+r'}\Big)\bigg) \\ &\leq M'(1 + M)\Big(1 + \|x\|_{n+r+r'}\Big)\end{aligned}$$

für alle $x \in U_{x_0}$. Somit ist $g \circ f$ eine zahme Abbildung. ∎

Lemma 5.1.5. *Seien E, F und G graduierte Frécheträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $\big(A(x)\big)_{x\in U}$ ein Familie von linearen Operatoren von F nach G. Weiterhin erfülle die von $\big(A(x)\big)_{x\in U}$ erzeugte Abbildung $(x,h) \mapsto A(x)h$ auf $U \times B_{\delta,m_0}$ eine zahme Abschätzung vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu jedem $n \geq \max\{b, m_0\} - r$ ein $M' \geq 0$, so dass die Abschätzung*

$$\big\|A(x)h\big\|_n \quad \leq \quad M'\Big(\|x\|_{n+r}\|h\|_{\max\{b,m_0\}+r} + \|h\|_{n+r}\Big)$$

für alle $x \in U$ und alle $h \in E$ gilt.

Beweis: Setze $b' := \max\{b, m_0\}$. Dann gilt $\frac{\delta}{2}\|h\|_{b'}^{-1}h \in B_{\delta,m_0}$ für alle $h \in F \setminus \{0\}$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\delta A(x)h}{2\|h\|_{b'}}\right\|_n &\leq M\left(1 + \|x\|_{n+r} + \left\|\frac{\delta h}{2\|h\|_{b'}}\right\|_{n+r}\right) \\
&\leq M\left(1 + \|x\|_{n+r} + \frac{\delta\|h\|_{n+r}}{2\|h\|_{b'}}\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in U$ und alle $h \in F \setminus \{0\}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big\|A(x)h\big\|_n &\leq M\left(\frac{2\|h\|_{b'}}{\delta} + \frac{2\|h\|_{b'}\|x\|_{n+r}}{\delta} + \|h\|_{n+r}\right) \\
&\leq M\Big(1 + \frac{2}{\delta}\Big)\Big(\|x\|_{n+r}\|h\|_{b'} + \|h\|_{n+r}\Big)
\end{aligned}$$

für alle $x \in U$, alle $h \in E$ und alle $n \geq b' - r$. ■

Beispiel 5.1.12. Sei $E := \mathrm{C}^\infty\big([0,1]\big)$ der Raum aller C^∞-Funktionen auf $[a,b]$ versehen mit dem Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_{\sup,n}\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Beispiel 5.1.3 und sei $f : E \to E$ definiert durch $f(x) := \exp\circ x$. Dann ist f eine zahme Abbildung. Denn für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^k(\exp\circ x)(t) &= \sum_{\substack{1\leq l\leq k,\ k_i\geq 0,\\ \sum_{i=1}^{l} k_i = k}} \exp^{(l)}\big(x(t)\big)x^{(k_1)}(t)\cdots x^{(k_l)}(t) \\
&= \exp\big(x(t)\big) \sum_{\substack{1\leq l\leq k,\ k_i\geq 0,\\ \sum_{i=1}^{l} k_i = k}} x^{(k_1)}(t)\cdots x^{(k_l)}(t)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_n &= \max_{0\le k\le n}\sup_{t\in[0,1]}\Big|\mathrm{D}^k\big(\exp\circ x\big)(t)\Big| \\
&\le \Big\|\exp\circ x\Big\|_0\cdot\Big(1+\max_{1\le k\le n}\sum_{\substack{1\le l\le k,\ k_i\ge 0,\\ \sum_{i=1}^{l} k_i=k}}\|x\|_{k_1}\cdots\|x\|_{k_l}\Big) \\
&\le \Big\|\exp(x)\Big\|_0\cdot\Big(1+M\max_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le k}\|x\|_0^{l-1}\|x\|_k\Big)
\end{aligned}$$

In den letzten zwei Umformungen in der obigen Abschätzung haben wir die Interpolationsungleichung

$$\|x\|_m^{n-l} \;\le\; M\|x\|_l^{n-m}\|x\|_n^{m-l}$$

benutzt [siehe [Ham82, Part II,Thm. 2.2.1] oder Lemma 5.1.3]. Sei nun $x_0\in E$. Somit erhalten wir für alle $x\in E$ mit $\|x-x_0\|_0\le 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_n &= \mathrm{e}^{1+\|x_0\|_0}\cdot\Big(1+M\max_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le k}\|x\|_0^{l-1}\|x\|_n\Big) \\
&\le M'\mathrm{e}^{1+\|x_0\|_0}\Big(1+\|x\|_n\Big),
\end{aligned}$$

d.h., f erfüllt eine zahme Abschätzung in einer Umgebung von x_0. Da f offensichtlich stetig auf E ist, folgt daraus die Zahmheit von f.

Das obige Beispiel ist ein Spezialfall der folgenden sehr viel allgemeineren Situation.

Beispiel 5.1.13. Sei M eine kompakte, Riemannsche C^∞-Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und seien V und W Vektorbündel über M. Ferner sei $\varphi: V\to W$ eine C^∞-Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Fasern V_p von V in die zugehörigen Fasern W_p von W abgebildet werden, d.h., $\varphi(V_p)\subset W_p$ für alle $p\in M$. Dann ist die nichtlineare Vektorbündelabbildung $f:\mathrm{C}^\infty(M,V)\to\mathrm{C}^\infty(M,W)$, definiert durch $f(x):=\varphi\circ x$, zahm. Ferner ist auch jeder nichtlineare, partielle Differentialoperator von $\mathrm{C}^\infty(M,V)\to\mathrm{C}^\infty(M,W)$ zahm. [Beweis siehe [Ham82, Part II, Thm. 2.2.6 und Cor. 2.2.7]].

Beispiel 5.1.14. Sei $E=F=\mathrm{H}(\mathbb{C})$ versehen mit dem Fundamentalsystem aus Beispiel 5.1.9 und sei $f: E\to E$, definiert durch $f(x):=\exp\circ x$. Dann ist die Abbildung f stetig aber *nicht* zahm. Denn wäre f zahm, so gäbe es eine Nullumgebung $U=\big\{x\in E\;\big|\;\|x\|_{n_0}<\delta\big\}$ und Zahlen $r\in\mathbb{Z}$ sowie $b\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\ge b$ ein $M\ge 0$ existiert mit

$$\|f(x)\|_n \;\le\; M\Big(1+\|x\|_{n+r}\Big) \tag{5.2}$$

für alle $x \in U$. Wir betrachten nun die Folge $x_k \in E$ mit

$$x_k(z) := \left(\frac{z}{\mathrm{e}^{n_0} + 1}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $x_k \in U$, falls $k \in \mathbb{N}$ genügend groß ist. Andererseits erhalten wir für festes $k \in \mathbb{N}$ und festes $r \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung

$$\frac{\|f(x_k)\|_n}{1 + \|x_k\|_{n+r}} \;\to\; \infty \quad \text{für} \quad n \;\to\; \infty.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu (5.2). Somit ist f *nicht* zahm.

Definition 5.1.7. Seien E, F und G graduierte Frécheträume und sei $U \subset E$ offen. Eine Familie $\big(A(x)\big)_{x \in U}$ von stetigen, linearen Abbildungen von F nach G heißt C^k-*zahm*, wenn $(x, y) \to A(x)y$ eine C^k-zahme Abbildung ist.

Satz 5.1.1. *Seien E, F und G zahme Frécheträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $\big(A(x)\big)_{x \in U}$ eine C^k-zahme Familie von stetigen, linearen Abbildungen. Weiterhin seien die linearen Abbildungen $A(x)$ für jedes $x \in E$ bijektiv und die zugehörige Familie $\big(A(x)^{-1}\big)_{x \in U}$ von Umkehrabbildungen sei zahm. Dann ist $\big(A(x)^{-1}\big)_{x \in U}$ auch C^k-zahm.*

Beweis: [siehe [Ham82, Part II, Thm. 3.1.1]] ■

Wir haben nun alle Definitionen und Begriffe soweit zusammen, um den Satz von Nash/Moser in sehr allgemeiner Version formulieren zu können.

Satz 5.1.2 (Satz von Nash/Moser). *Seien E und F zahme Frécheträume und sei $U \subset E$ offen. Ferner sei $f : U \to F$ C^2-zahm und die Familie von linearen Abbildungen $\big(\mathrm{D}f(x)\big)_{x \in U}$ besitze eine zahme Familie von Umkehrabbildungen. Dann ist f lokal, C^2-zahm invertierbar, d.h., für jedes $x \in U$ existiert eine Umgebung U_x und eine C^2-zahme Abbildung $g_x : f(U_x) \to U_x$ mit $g_x = \big(f|_{U_x}\big)^{-1}$. Ferner gilt $\mathrm{D}g_x(y)k = \Big(\mathrm{D}f\big(g_x(y)\big)\Big)^{-1}k$ für alle $y \in f(U_x)$.*

Beweis: [siehe z.B. [Ham82, Part III, Thm. 1.1.1] und [ŁZ79]] ■

Bemerkung 5.1.3. (a) In [Ham82] findet man eine C^∞-Version des Satzes von Nash/Moser. Die obige C^2-Variante ist dagegen in [ŁZ79] enthalten. Genauer gesagt, ist die Version in [ŁZ79] etwas allgemeiner, da schwächere Bedingungen an das Wachstumsverhalten von $\big(\mathrm{D}f(x)^{-1}\big)_{x \in U}$ gestellt werden. Die C^2-Zahmheit der lokalen Umkehrabbildungen, die in [ŁZ79] nicht gezeigt wird, erhält man unmittelbar aus Satz 5.1.1.

(b) Beispiel 5.1.14 zeigt, dass die Voraussetzung der Zahmheit von f entscheidend ist. Denn die Abbildung $x \mapsto \exp \circ x$ erfüllt alle anderen Voraussetzungen des Satzes, ist aber um $x = 0$ *nicht* lokal invertierbar.

(c) E. Dubinsky versucht in [Dub82] sich von der Klasse der zahmen Fréchеträume zu lösen und mit ähnlichen Beweistechniken die obigen Ergebnisse auf andere Klassen von Fréchеträumen zu übertragen. Dies gelingt ihm z.B. für die Klasse der Potenzreihenräume vom endlichen Typ [siehe [MV92] oder [Pie72]].

(d) Zahlreiche Anwendungsbeispiele des Satzes von Nash/Moser kann man unter anderem in [Ham82] oder in den Orginalarbeiten [Nas56] und [Mos66a, Mos66b] J. Nash bzw. J. Moser finden.

Satz 5.1.3 (Satz über implizite Funktionen). *Seien E, F und G zahme Fréchеträume und sei $U \times V \subset E \times F$ eine offene Umgebung von (x_0, y_0). Ferner sei $f : U \times V \to G$ C^2-zahm mit $f(x_0, y_0) = 0$ und die Familie von linearen Abbildungen $\big(\mathrm{D}_1 f(x,y)\big)_{(x,y)\in U\times V}$ sei zahm invertierbar. Dann existiert eine offene Umgebung $U_0 \times V_0$ von (x_0, y_0) und eine C^2-zahme Abbildung $\varphi : V_0 \to U_0$, so dass für alle $(x, y) \in U_0 \times V_0$ gilt*

$$f(x,y) = 0 \iff x = \varphi(y).$$

Insbesondere ist

$$f\big(\varphi(y), y\big) = 0$$

für alle $y \in V_0$ erfüllt und es gilt

$$\mathrm{D}\varphi(y) \quad = \quad -\Big(\mathrm{D}_1 f\big(\varphi(y), y\big)\Big)^{-1} \mathrm{D}_2 f\big(\varphi(y), y\big).$$

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$F : E \times F \to G \times F, \qquad (x,y) \mapsto \big(f(x,y), y\big).$$

Die Abbildung F ist offensichtlich C^2-zahm mit Ableitung

$$\mathrm{D}F(x,y)(h,k) \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 f(x,y) & \mathrm{D}_2 f(x,y) \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Familie von linearen Abbildungen $\big(\mathrm{D}F(x,y)\big)_{(x,y)\in U\times V}$ invertierbar und es gilt

$$\Big(\mathrm{D}F(x,y)\Big)^{-1}(h,k) \quad = \quad \begin{pmatrix} \Big(\mathrm{D}_1 f(x,y)\Big)^{-1} & -\Big(\mathrm{D}_1 f(x,y)\Big)^{-1} \mathrm{D}_2 f(x,y) \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Da nach Voraussetzung die Abbildungen $(x, y, k) \mapsto \mathrm{D}_2 f(x, y)k$ und $(x, y, h) \mapsto \Big(\mathrm{D}_1 F(x, y)\Big)^{-1} h$ zahm sind, folgt aus Lemma 5.1.4 die Zahmheit von

$$(x, y, h, k) \mapsto \Big(\mathrm{D}F(x, y)\Big)^{-1}(h, k),$$

d.h., die Familie $\big(\mathrm{D}F(x, y)\big)_{(x,y)\in U\times V}$ ist zahm invertierbar. Daher existiert nach dem Satz von Nash/Moser 5.1.2 eine Umgebung von $U_0 \times V'$ und eine C^2-zahme Abbildung $G : F(U_0 \times V') \to U_0 \times V_0'$ mit

$$G \circ F = \mathbf{I}_{U_0\times V_0'} \quad \text{und} \quad F \circ G = \mathbf{I}_{F(U_0\times V_0')}. \tag{5.3}$$

Ferner ist $V_0 := F(U_0 \times V_0') \cap \{0\} \times F$ eine offene Nullumgebung in F, da $F(0, 0) = (0, 0)$ und $F(U_0 \times V_0')$ offen. Wir definieren nun

$$\varphi : V_0 \to U_0 \qquad \varphi(y) := G_1(0, y), \quad y \in V_0.$$

Dann ist φ offensichtlich C^2-zahm und erfüllt für alle $y \in V_0$ die Identität

$$f\big(\varphi(y), y\big) \;=\; F_1\big(\varphi(y), y\big) \;=\; F_1\big(G_1(0, y)), y\big) \;=\; F_1\big(G(0, y)\big) \;=\; 0.$$

Umgekehrt folgt aus $f(x, y) = 0$ und $(x, y) \in U_0 \times V_0$ mittels (5.3) sofort $x = \varphi(y)$. Die Darstellung der Ableitung von φ erhält man unmittelbar aus Satz 2.2.3 und der Identität

$$f\big(y, \varphi(y)\big) = 0$$

für alle $y \in V_0$. ■

Bemerkung 5.1.4. Verallgemeinerungen des obigen Satzes, wie z.B. eine C^∞-Version oder eine, bei der nur „approximative“ Invertierbarkeit der Linearisierung gefordert wird, findet man in [Ham82, Part III, Ch. 3.3].

5.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir kommen nun zu zwei zentralen Ergebnissen unsere Arbeit, d.h, zu zwei Existenz- und Eindeutigkeitssätzen über gewöhnliche, *nichtlineare* Differentialgleichungen in Frécheträumen.

Beiden Sätzen liegt die aus dem Endlich-dimensionalen wohlbekannte Beweisidee, die eindeutige Lösbarkeit eines Anfangswertproblems auf eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zurückzuführen [CH82, Zei86], zugrunde. In unserem Fall jedoch kommt an Stelle des klassischen Satzes über implizite Funktionen der Satz von Nash/Moser, genauer gesagt, Satz 5.1.3 zum Einsatz. Problematisch dabei ist, dass die Invertierbarkeit der Linearisierung auf einer ganzen Umgebung benötigt wird.

Dies führt unter anderem dazu, dass wir die eindeutige Lösbarkeit einer linearen, zeitabhängigen Differentialgleichung garantieren müssen – was im Allgemeinen in Frécheträumen nicht trivial ist. In Kapitel 4 haben wir dafür zwei unterschiedliche Lösungsansätze vorgestellt, die im Folgenden zu zwei verschiedenen Existenz- und Eindeutigkeitssätzen führen.

Zum Beweis unserer Resultate benötigen wir noch einige Hilfssätze.

Lemma 5.2.1. *Sei E ein zahmer Fréchetraum. Dann sind die Räume $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ und $\mathrm{C}_0^k\big([\alpha,\beta],E\big) := \big\{x \in \mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big) \bigm| x(0)=0\big\}$, versehen mit dem Fundamentalsystem*

$$|||x|||_{k,n} \ := \ \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|x^{(l)}(t)\|_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ zahme Frécheträume.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ versehen mit $\big(|||\cdot|||_{k,n}\big)_{n\in N}$ offensichtlich ein lokal-konvexer Vektorraum mit abzählbarem Fundamentalsystem. Ferner folgt aus der Vollständigkeit von E die Vollständigkeit von $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$. Somit sind $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ und als abgeschlossener Unterraum auch $\mathrm{C}_0^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ Frécheträume. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ und $\mathrm{C}_0^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ zahm sind. Da E zahm ist, exisieren ein Standardraum $\sum_{\exp}(X)$ sowie zahme lineare Abbildungen $J : E \to \sum_{\exp}(X)$ und $L : \sum_{\exp}(X) \to E$ mit $L \circ J = \mathbf{I}$. Seien O.B.d.A. beide vom Grad $r \in \mathbb{N}_0$ zur Basis $b = 0$. Dann betrachten wir den Banachraum $\widehat{X} := \mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],X\big)$, versehen mit der Norm

$$|||x||| \ := \ \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|x^{(l)}(t)\|$$

und definieren die Abbildungen

$$\widehat{J} : \mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big) \to \textstyle\sum_{\exp}(\widehat{X}), \qquad \widehat{J}(x)(t) := J\big(x(t)\big),$$

bzw.

$$\widehat{L} : \textstyle\sum_{\exp}(\widehat{X}) \to \mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big), \qquad \widehat{L}(x)(t) := L\big((x(t)\big).$$

Dann sind $\widehat{J}$ und $\widehat{L}$ zahme lineare Abbildungen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
|||\widehat{J}(x)|||_n &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nj} \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left\| \Big(J\big(x(t)\big)\Big)_j^{(l)} \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-j} \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \mathrm{e}^{(n+1)j} \left\| \Big(J\big(x^{(l)}(t)\big)\Big)_j \right\| \\
&\le \sum_{k=j}^{\infty} \mathrm{e}^{-j} \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} M \left\| x^{(l)}(t) \right\|_{n+1+r} \\
&= M \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-j} \right) |||x|||_{k,n+1+r}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left| \widehat{L}\Big((x_j)_{j\in\mathbb{N}} \Big) \right|\right|\right|_{k,n} &= \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left\| L\Big(\big(x_j^{(l)}(t) \big)_{j\in\mathbb{N}} \Big) \right\|_n \\
&\le \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} M' \left\| \big(x_j^{(l)}(t) \big)_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{n+r} \\
&= M' \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{(n+r)j} \left\| x_j^{(l)}(t) \right\| \\
&\le M' \sum_{j=1}^{\infty} \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \mathrm{e}^{(n+r)j} \left\| x_j^{(l)}(t) \right\| \\
&= M' \left|\left|\left| (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \right|\right|\right|_{n+r}.
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big(\widehat{L}\circ\widehat{J}\Big)(x)(t) \;&=\; \widehat{L}\Big(\widehat{J}(x)\Big)(t) \;=\; L\Big(\big(\widehat{J}(x)\big)(t)\Big) \\
&=\; L\Big(J\big((x)(t)\big)\Big) \;=\; \big(L\circ J\big)\big((x)(t)\big) \;=\; x(t)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\alpha,\beta]$, d.h., $\widehat{L}\circ\widehat{J} = \mathbf{I}$. Somit haben wir gezeigt, dass $\mathrm{C}^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ ein zahmer Fréchetraum ist. Die entsprechende Behauptung für $\mathrm{C}_0^k\big([\alpha,\beta],E\big)$ erhält man, indem man $\widehat{X} := \mathrm{C}_0^k\big([\alpha,\beta],X\big)$ wählt. ■

Konvention:
Sei $U \subset E$. Wir bezeichnen im Weiteren mit $\mathrm{C}^k\big([0,1],U\big)$ und $\mathrm{C}_0^1\big([0,1],U\big)$ die Teilmengen

$$\mathrm{C}^k\big([0,1],U\big) \;:=\; \Big\{ x\in\mathrm{C}^k\big([0,1],E\big) \;\Big|\; x(t)\in U \text{ für alle } t\in[0,1] \Big\}$$

bzw.

$$\mathrm{C}_0^k\big([0,1],U\big) \;:=\; \Big\{x \in \mathrm{C}_0^k\big([0,1],E\big) \;\Big|\; x(t) \in U \text{ für alle } t \in [0,1]\Big\}.$$

Lemma 5.2.2. *Seien E und P graduierte Fréchetträume und sei $U \times V \subset E \times P$ offen. Ferner sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $f : [0,\beta]\times U\times V \to E$, $(t,x,p) \mapsto f(t,x,p)$ k-fach zahm differenzierbar. Dann ist die Abbildung $F : \mathrm{C}^1\big([0,1],U\big) \times V \times [0,\beta] \to \mathrm{C}\big([0,1],E\big)$ definiert durch*

$$F(x,p,\lambda)(t) \;:=\; \dot{x}(t) - \lambda f(\lambda t, x(t), p)$$

eine C^k-zahme Abbildung und es gilt

$$\mathrm{D}_x F(x,p,\lambda)h(t) \;=\; \dot{h}(t) - \lambda \mathrm{D}_x f(\lambda t, x(t), p)h(t),$$

$$\mathrm{D}_p F(x,p,\lambda)q(t) \;=\; -\lambda \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q,$$

$$\mathrm{D}_\lambda F(x,p,\lambda)(t) \;=\; -f(\lambda t, x(t), p) \;-\; \lambda t \mathrm{D}_t f(\lambda t, x(t), p)$$

für alle $(x,p,\lambda) \in \mathrm{C}^1\big([0,1],U\big) \times V \times [0,\beta]$ und alle $(h,q) \in \mathrm{C}^1\big([0,1],E\big) \times P$. Falls zusätzlich $0 \in U$, so gelten die obigen Aussagen auch für die Abbildung $F_0 : \mathrm{C}_0^1\big([0,1],U\big) \times V \times [0,\beta] \to \mathrm{C}\big([0,1],E\big)$ mit

$$F_0(x,p,\lambda)(t) \;:=\; \dot{x}(t) - \lambda f(\lambda t, x(t), p).$$

Beweis: Da $U \subset E$ offen ist, ist $\mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{C}^1\big([0,1],E\big)$, wobei $\mathrm{C}^1\big([0,1],E\big)$ mit dem Fundamentalsystem aus Lemma 5.2.1 versehen sei. Wir zeigen nun zunächst, dass F stetig ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big| F(x+h, p+q, \lambda+\mu) - F(x,p,\lambda) \Big|\Big|\Big|_{0,m} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\| \dot{h}(t) - (\lambda+\mu) f\big((\lambda+\mu)t, x(t)+h(t), p+q\big) \;+\; \lambda f\big(\lambda t, x(t), p\big) \Big\|_m \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \|\dot{h}(t)\|_m \;+\; |\mu| \sup_{t\in[0,1]} \Big\| f\big(\lambda t, x(t), p\big) \Big\|_m \\
&+\; |\lambda+\mu| \sup_{t\in[0,1]} \Big\| f\big(\lambda t, x(t), p\big) - f\big((\lambda+\mu)t, x(t)+h(t), p+q\big) \Big\|_m \\
&\le |||h|||_{1,m} \;+\; |\mu| \sup_{t\in[0,1]} \Big\| f\big(\lambda t, x(t), p\big) \Big\|_m \\
&+\; |\lambda+\mu| \sup_{t\in[0,1]} \Big\| (f\big(\lambda t, x(t), p\big) - f\big((\lambda+\mu)t, x(t)+h(t), p+q\big) \Big\|_m.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen zu jedem $(t, x, p, \lambda) \in [0,1] \times U \times V \times [0, \beta]$ ein $\delta > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass die Abschätzung

$$\Big\| f(\lambda t', x', p') - f(\lambda t, x, p) \Big\|_m \;\le\; \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $(t', x', p', \lambda') \in [0,1] \times U \times V \times [0, \beta]$ mit

$$\Big\| (t', x', p', \lambda') - (t, x, p, \lambda) \Big\|_n \;:=\; \max \Big\{ |t' - t|, \|x' - x\|_n, \|p' - p\|_n, |\lambda' - \lambda| \Big\} \le \delta$$

erfüllt ist. Dabei dürfen die Konstanten δ und n von (t, x, p, λ) abhängen. Dies drücken wir, falls nötig, durch die Bezeichnungen $\delta(t, x, p, \lambda)$ bzw. $n(t, x, p, \lambda)$ aus. Da ferner die Menge $K := \big\{ (t, x(t), p, \lambda) \;\big|\; t \in [0,1], \lambda \in [0, \beta] \big\} \subset [0,1] \times U \times V \times [0, \beta]$ kompakt ist, existieren endlich viele $(t_1, \lambda_1), \dots, (t_N, \lambda_N) \in [0,1] \times [0, \beta]$, so dass

$$\bigcup_{k=1}^{N} B_{\delta_k, n_k}\big((t_k, x(t_k), p, \lambda_k) \big)$$

mit

$$\delta_k \;:=\; \frac{1}{2} \delta(t_k, x(t_k), p, \lambda_k) \qquad \text{und} \qquad n_k \;:=\; n(t_k, x(t_k), p, \lambda_k)$$

eine offene Überdeckung von K liefert. Wir wählen nun

$$\delta^* \;:=\; \min \big\{ \delta_k \;\big|\; k = 1, \dots, N \big\} \qquad \text{und} \qquad n^* \;:=\; \max \big\{ n_k \;\big|\; k = 1, \dots, N \big\}.$$

Dann erhalten wir für $|||(h, q, \mu)|||_{n^*} := \max \Big\{ |||h|||_{n^*}, \|q\|_{n^*}, |\mu| \Big\} \;\le\; \delta^*$ und $(t, x(t), p, \lambda) \in B_{\delta_k, n_k}\big((t_k, x(t_k), p, \lambda_k) \big)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \Big\| \big((t, x(t) + h(t), p + q, \lambda + \mu \big) - \big(t_k, x(t_k), p, \lambda_k \big) \Big\|_n \\
\le\;& \Big\| \big(t, x(t) + h(t), p + q, \lambda + \mu \big) - \big(t, x(t), p, \lambda \big) \Big\|_n \\
+\;& \Big\| \big(t, x(t), p, \lambda \big) - \big(t_k, x(t_k), p, \lambda_k \big) \Big\|_n \\
\le\;& \delta^* + \delta_k \;\le\; \delta(t_k, x(t_k), p, \lambda_k).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \Big\| \Big(f\big(\lambda t, x(t), p \big) - f\big((\lambda + \mu) t, x(t) + h(t), p + q \big) \Big) \Big\|_m \\
\le\;& \Big\| \Big(f\big(\lambda t, x(t), p \big) - f\big(\lambda t_k, x(t_k), p \big) \Big) \Big\|_m \\
+\;& \Big\| \Big(f\big(\lambda t_k, x(t_k), p \big) - f\big((\lambda + \mu) t, x(t) + h(t), p + q \big) \Big) \Big\|_m \\
\le\;& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\sup_{t\in[0,1]} \Big\|\Big(f\big(\lambda t, x(t), p\big) - f\big((\lambda+\mu)t, x(t)+h(t), p+q\big)\Big)\Big\|_m \;\leq\; \varepsilon$$

für $|||(h,q,\mu)|||_{n^*} \;\leq\; \delta^*$. Damit haben wir gezeigt, dass F stetig ist. Sei nun $k \geq 1$. Dann gilt für $h \in \mathrm{C}^1\big([0,1],E\big)$ und $\tau \geq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|F(x+\tau h,p,\lambda) - F(x,p,\lambda) - \tau\Big(\dot h - \lambda \mathrm{D}_x f\big(\lambda\cdot, x(\cdot), p\big)h\Big)\Big|\Big|\Big|_{0,m} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\|\lambda f(\lambda t, x(t)+\tau h(t), p) - \lambda f(\lambda t, x(t), p) - \tau\lambda \mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t), p\big)h(t)\Big\|_m \\
&= |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \left\| \int_0^\tau \mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t)+\sigma h(t), p\big)h(t) - \mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t), p\big)h(t)\,\mathrm{d}\sigma \right\|_m \\
&\leq |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \int_0^\tau \Big\|\mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t)+\sigma h(t), p\big)h(t) - \mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t), p\big)h(t)\Big\|_m \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann können wir wie zuvor im Beweis der Stetigkeit $\tau \geq 0$ so klein wählen, dass die Abschätzung

$$\Big\|\mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t)+\sigma h(t), p\big)h(t) - \mathrm{D}_x f\big(\lambda t, x(t), p\big)h(t)\Big\|_m \;\leq\; \varepsilon$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $\sigma \in [0,\tau]$ erfüllt ist. Daraus folgt

$$\Big|\Big|\Big|F(x+\tau h,p,\lambda) - F(x,p,\lambda) - \tau\Big(\dot h - \lambda \mathrm{D}_x f\big(\lambda\cdot, x(\cdot), p\big)h\Big)\Big|\Big|\Big|_{0,m} \;\leq\; |\lambda|\varepsilon\tau.$$

Die entsprechende Abschätzung für $\tau \leq 0$ zeigt man völlig analog. Somit ist die partielle Ableitung von F nach x gegeben durch

$$\mathrm{D}_x F(x,p,\lambda)h(t) \;=\; \dot h(t) - \lambda \mathrm{D}_x f(\lambda t, x(t), p)h(t)$$

Die Stetigkeit von $(x,p,\lambda,h) \mapsto \mathrm{D}_x F(x,p,\lambda)h$ erhält man analog zur Stetigkeit von F. Sei nun $q \in P$ und $\tau \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|F(x,p+\tau q,\lambda) - F(x,p,\lambda) + \tau\lambda \mathrm{D}_p f(\lambda\cdot, x(\cdot), p)q\Big|\Big|\Big|_m \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\|\lambda f\big(\lambda t, x(t), p+\tau q\big) - \lambda f\big(\lambda t, x(t), p\big) - \tau\lambda \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q\Big\|_m \\
&= |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \left\| \int_0^\tau \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p+\sigma q)q - \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q\,\mathrm{d}\sigma \right\|_m \\
&\leq |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \int_0^\tau \Big\|\mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p+\sigma q)q - \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q\Big\|_m \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Wie im Beweis der Stetigkeit von F können wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\tau > 0$ wählen, so dass die Abschätzung

$$\Big\| \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p + \sigma q)q - \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q \Big\|_m \ \le \ \varepsilon$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $\sigma \in [-\tau, \tau]$ erfüllt ist. Somit erhalten wir

$$\Big|\Big|\Big| F(x, p + \tau q, \lambda) - F(x, p, \lambda) + \tau\lambda \mathrm{D}_p f(\lambda \cdot, x(\cdot), p)q \Big|\Big|\Big|_m \ \le \ |\lambda|\varepsilon|\tau|,$$

d.h., die partielle Ableitung von F nach p ist durch

$$\mathrm{D}_p F(x,p,\lambda)q(t) \ = \ -\lambda \mathrm{D}_p f(\lambda t, x(t), p)q$$

gegeben. Die Stetigkeit von $(x,p,\lambda,q) \mapsto \mathrm{D}_p F(x,p,\lambda)q$ ergibt sich auch in diesem Fall analog zur Stetigkeit von F. Auf den Beweis der partiellen Differenzierbarkeit nach λ verzichten wir, da dieser völlig identisch zu den beiden vorhergehenden geführt werden kann. Als partielle Ableitung nach λ erhalten wir

$$\mathrm{D}_\lambda F(x,p,\lambda)(t) \ = \ -f(\lambda t, x(t), p) - \lambda t \mathrm{D}_t f(\lambda t, x(t), p).$$

Somit haben wir gezeigt, dass F stetig partiell differenzierbar ist, also nach Satz 2.2.3 stetig differenzierbar ist. Falls $k \ge 2$, so erhalten wir auf die gleiche Art und Weise die k-fach stetige Differenzierbarkeit von F.

Abschließend müssen wir noch zeigen, dass F k-fach zahm differenzierbar ist. Sei also $(x,p,\lambda) \in \mathrm{C}^1\big([0,1], U\big) \times V \times [0,\beta]$ gegeben. Aus der C^k-Zahmheit von f folgt, dass es für jedes (t,x,p,λ) Konstanten $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $n \ge b$ ein $M \ge 0$ existiert mit

$$\Big\| f\big(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{p}, \widetilde{\lambda}\big) \Big\|_n \ \le \ M\Big(1 + \|\widetilde{x}\|_{n+r} + \|\widetilde{p}\|_{n+r}\Big)$$

für alle $\|(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{p}, \widetilde{\lambda}) - (t,x,p,\lambda)\|_n \le \delta$. Dabei dürfen die Konstanten δ, m, r und b von $(t, x(t), p, \lambda)$ und M zusätzlich von n abhängen. Wir drücken dies, falls nötig, durch die Bezeichnungen $\delta\big(t,x,p,\lambda\big), \ldots b\big(t,x,p,\lambda\big)$ bzw. $M\big(t,x,p,\lambda,n\big)$ aus. Aus der Kompaktheit von $K := \big\{(t, x(t), p, \lambda) \ \big| \ t \in [0,1], \lambda \in [0,\beta]\big\}$ folgt, dass es endlich viele $(t_1, \lambda_1) \ldots, (t_N, \lambda_N) \in [0,1]$ gibt, so dass

$$\bigcup_{k=1}^{N} B_{\delta_k, m_k}\big((t_k, x(t_k), p, \lambda_k)\big)$$

mit

$$\delta_k \ := \ \frac{1}{2}\delta(t_k, x(t_k), p, \lambda_k) \qquad \text{und} \qquad m_k \ := \ m(t_k, x(t_k), p, \lambda_k)$$

eine offene Überdeckung von K bildet. Wir wählen nun

$$\begin{aligned}
\delta^* &:= \min\big\{\delta_k \;\big|\; k=1,\ldots,N\big\},\\
m^* &:= \max\big\{m_k \;\big|\; k=1,\ldots,N\big\},\\
r^* &:= \max\big\{r(t_k,x(t_k),p,\lambda_k) \;\big|\; k=1,\ldots,N\big\},\\
b^* &:= \max\big\{b(t_k,x(t_k),p,\lambda_k) \;\big|\; k=1,\ldots,N\big\}
\end{aligned}$$

und

$$M^*(n) := \max\big\{M(t_k,x(t_k),p,\lambda_k,n) \;\big|\; k=1,\ldots,N\big\}.$$

Dann gilt für alle $(\widetilde{x},\widetilde{p},\widetilde{\lambda}) \in \mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)\times V\times[0,\beta]$ mit

$$\Big|\Big|\Big|(\widetilde{x},\widetilde{p},\widetilde{\lambda})-(x,p,\lambda)\Big|\Big|\Big|_{0,m^*} \le \delta^*$$

und alle $n \ge b^*$ die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big|\Big|\Big|F(\widetilde{x},\widetilde{p},\widetilde{\lambda})\Big|\Big|\Big|_{0,n} &= \sup_{t\in[0,1]}\Big\|\dot{\widetilde{x}}-\widetilde{\lambda}f\big(\widetilde{\lambda}t,\widetilde{x}(t),\widetilde{p}\big)\Big\|_n\\
&\le |||\widetilde{x}|||_{1,n} + |\widetilde{\lambda}|\sup_{t\in[0,1]}\Big\|f\big(\widetilde{\lambda}t,\widetilde{x}(t),\widetilde{p}\big)\Big\|_n\\
&\le |||\widetilde{x}|||_{1,n} + |\widetilde{\lambda}|\sup_{t\in[0,1]}M^*(n)\Big(1+\|\widetilde{x}(t)\|_{n+r^*}+\|\widetilde{p}\|_{n+r^*}\Big)\\
&\le |||\widetilde{x}|||_{1,n} + \beta M^*(n)\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r^*}+\|\widetilde{p}\|_{n+r^*}\Big),
\end{aligned}$$

d.h., F ist zahm. Für $k \ge 1$, ergibt sich die Zahmheit der Ableitungen $\mathrm{D}^l F$, $1 \le l \le k$ aus der Zahmheit der Ableitungen $\mathrm{D}^l f$, $1 \le l \le k$ und analogen Kompaktheitsargumenten.

Die Behauptung für $F_0 : \mathrm{C}^1_0\big([0,1],U\big)\times V\times[0,\beta] \to \mathrm{C}\big([0,1],U\big)$ erhält man leicht aus dem obigen Beweis, indem man an den entsprechenden Stellen den Raum $\mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)$ durch den Raum $\mathrm{C}^1_0\big([0,1],U\big)$ ersetzt. ■

Satz 5.2.1. *Seien E und P zahme Frécheträume und sei $U\times V\subset E\times P$ offen. Ferner sei $f:[\alpha,\beta]\times U\times V\to E$ eine C^2-zahme Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(E) *Für alle* $\widetilde{x} \in \mathbb{U} := \left\{\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([\alpha,\beta],U\big) \mid \widetilde{x}(\alpha) = x_0\right\}$, *alle* $\widetilde{k} \in \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$ *und alle* $p \in V$ *besitzt das lineare Anfangswertproblem*

$$\dot{\widetilde{h}}(t) \;=\; \mathrm{D}_x f(t,\widetilde{x}(t),p)\widetilde{h}(t) + \widetilde{k}(t), \quad \widetilde{h}(\alpha) = x_0, \quad t \geq \alpha \tag{5.4}$$

eine eindeutige Lösung $\widetilde{h} = \widetilde{h}(\widetilde{x},p,\widetilde{k})$ *auf* $[\alpha,\beta]$. *Ferner sei (5.4) auch auf jedem Teilintervall der Form* $[\alpha,\gamma]$ *eindeutig lösbar.*

(S) *Die Lösung von (5.4) hängt stetig von* $\widetilde{x}$, p *und* $\widetilde{k}$ *ab, d.h., für alle* $(\widetilde{x},p,\widetilde{k}) \in \mathbb{U}\times V\times \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$, *alle* $\varepsilon > 0$ *und alle* $m \in \mathbb{N}$ *existiert ein* δ *und ein* $n \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\left|\!\left|\!\left|\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}',p',\widetilde{k}') - \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x},p,\widetilde{k})\right|\!\right|\!\right|_{0,m} \;\leq\; \varepsilon$$

für alle $(\widetilde{x}',p',\widetilde{k}') \in \mathbb{U}\times V\times \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$ *mit*

$$\begin{aligned}&\left|\!\left|\!\left|(\widetilde{x}',p',\widetilde{k}') - (\widetilde{x},p,\widetilde{k})\right|\!\right|\!\right|_{0,n}\\ &:= \;\max\left\{|\!|\!|\widetilde{x}'-\widetilde{x}|\!|\!|_{0,n}, \|p'-p\|_n, |\!|\!|\widetilde{k}'-\widetilde{k}|\!|\!|_{0,n}\right\} \;\leq\; \delta.\end{aligned}$$

(Z) *Es gibt eine Nullumgebung* $\mathbb{W} \subset \mathrm{C}\big([\alpha,\beta],E\big)$ *sowie Konstanten* $r \in \mathbb{Z}$ *und* $b \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $n \geq b$ *ein* $M \geq 0$ *existiert mit*

$$\left|\!\left|\!\left|\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x},p,\widetilde{k})\right|\!\right|\!\right|_{0,n} \;\leq\; M\Big(1 + |\!|\!|\widetilde{x}|\!|\!|_{0,n+r} + \|p\|_{n+r} + |\!|\!|\widetilde{k}|\!|\!|_{0,n+r}\Big)$$

für alle $(\widetilde{x},p,\widetilde{k}) \in \mathbb{U}\times V\times \mathbb{W}$.

Dann ist das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; f(t,x(t),p_0), \quad x(\alpha) = x_0, \quad t \geq \alpha \tag{5.5}$$

für jedes $p_0 \in V$ *lokal eindeutig lösbar, d.h., für jedes* $p_0 \in V$ *existiert ein* $\varepsilon_0 > 0$, *eine Umgebung* V_0 *von* p_0 *und eine Abbildung* $\varphi : [\alpha,\alpha+\varepsilon_0]\times V_0 \to E$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Abbildung* φ *ist stetig partiell differenzierbar nach* t *mit*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,p) \;=\; f\big(t,\varphi(t,p),p\big)$$

für alle $t \in [\alpha,\alpha+\varepsilon_0]$ *und es gilt* $\varphi(\alpha,p) = x_0$ *für alle* $p \in V_0$, *d.h., die Abbildung* $t \mapsto \varphi(t,p)$ *ist eine Lösung des Anfangswertproblems (5.5).*

(b) Falls $\psi : [\alpha, \alpha + \varepsilon'] \to E$ eine weitere Lösung von (5.5) zum Parameter $p \in V_0$ ist, so gilt $\psi(t) = \varphi(t,p)$ für alle $t \in [\alpha, \alpha + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon'\}]$.

Ferner ist die Abbildung φ zweifach zahm differenzierbar.

Vorüberlegung:
Sei φ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) \;=\; f(t, x(t), p), \quad x(\alpha) = x_0, \quad t \geq \alpha$$

auf $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$ und sei $\lambda > 0$. Dann gilt für die Abbildung $\psi : [0, \lambda^{-1}\varepsilon] \to E$, $\psi(t) := \varphi(\lambda t + \alpha) - x_0$ die Identität

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \lambda\dot{\varphi}(\lambda t + \alpha) \;=\; \lambda f\bigl(\lambda t + \alpha, \varphi(\lambda t + \alpha), p\bigr) \\ &= \lambda f\bigl(\lambda t + \alpha, \psi(t) + x_0, p\bigr), \end{aligned}$$

d.h., ψ ist auf $[0, \lambda^{-1}\varepsilon]$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) \;=\; \lambda g(\lambda t, y(t), p), \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0 \tag{5.6}$$

mit

$$g : [0, \beta - \alpha] \times \bigl(U - x_0\bigr) \times V \to E, \qquad g(t, y, p) := f(t + \alpha, y + x_0, p).$$

Beweis: Wir betrachten nun die Abbildung $F_0 : \mathrm{C}^1_0\bigl([0,1], U_0\bigr) \times V \times (-\gamma, \gamma) \to \mathrm{C}\bigl([0,1], E\bigr)$, definiert durch

$$F_0(y, p, \mu)(t) := \dot{y}(t) - \mu^2 g\bigl(\mu^2 t, y(t), p\bigr)$$

mit $U_0 := U - x_0$ und $\gamma := (\beta - \alpha)^{1/2}$, und beweisen im Weiteren, dass F_0 die Voraussetzungen des Satzes 5.1.3 über implizite Funktionen erfüllt. Aus Lemma 5.1.2 und 5.2.1 wissen wir, dass $\mathrm{C}^1_0\bigl([0,1], E\bigr) \times P \times \mathbb{R}$ und $\mathrm{C}\bigl([0,1], E\bigr)$ zahme Fréchetträume sind. Ferner ist F_0 nach Lemma 5.2.2 eine zweifach zahm differenzierbare Abbildung. Somit müssen wir noch zeigen, dass die Linearisierung $\mathrm{D}_y F_0$ von F_0 in einer Umgebung $\mathbb{U}_0$ von $(0, p_0, 0)$ zahm invertierbar ist. Nach Lemma 5.2.2 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_y F_0(y, p, \mu) h(t) &= \dot{h}(t) - \mu^2 \mathrm{D}_y g\bigl(\mu^2 t, y(t), p\bigr) h(t) \\ &= \dot{h}(t) - \mu^2 \mathrm{D}_x f\bigl(\mu^2 t + \alpha, y(t) + x_0, p\bigr) h(t), \end{aligned}$$

d.h., wir müssen erstens nachweisen, dass die Gleichung

$$\dot{h}(t) \;=\; \mu^2 \mathrm{D}_x f\bigl(\mu^2 t + \alpha, y(t) + x_0, p\bigr) h(t) + k(t) \tag{5.7}$$

für alle $(y, p, \mu) \in \mathbb{U}_0$ und alle $k \in \mathrm{C}\big([0,1], E\big)$ eine eindeutige Lösung $h = h(y, p, \mu, k) \in \mathrm{C}_0^1\big([0,1], E\big)$ besitzt, und zweitens, dass die zugehörige Abbildung $(y, p, \mu, k) \rightarrow h(y, p, \mu, k)$ zahm ist. Dazu wählen wir

$$\mathbb{U}_0 \;:=\; \mathrm{C}_0^1\big([0,1], U_0\big) \times V \times (-\gamma, \gamma)$$

Falls $\mu = 0$, so existiert offensichtlich für alle $(y, p) \in \mathrm{C}_0^1\big([0,1], U_0\big) \times V$ und alle $k \in \mathrm{C}\big([0,1], E\big)$ eine eindeutige Lösung h von (5.7) mit

$$h(t) \;:=\; \int_0^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Falls $\mu \neq 0$, so definieren wir für $y \in \mathrm{C}_0^1\big([0,1], U_0\big)$ und $k \in \mathrm{C}\big([0,1], E\big)$ die Abbildungen

$$\Delta : [0,1] \rightarrow E, \qquad \Delta(t) \;:=\; \mathrm{D}_x f\big(\mu^2 t + \alpha, y(t) + x_0, p\big) x_0,$$

$$\widetilde{x}_\mu : [\alpha, \alpha + \mu^2] \rightarrow U_0, \qquad \widetilde{x}_\mu(t) \;:=\; y\big(\mu^{-2}(t - \alpha)\big) + x_0$$

und

$$\widetilde{k}_\mu : [\alpha, \alpha + \mu^2] \rightarrow E, \qquad \widetilde{k}_\mu(t) \;:=\; \mu^{-2} k\big(\mu^{-2}(t - \alpha)\big) - \Delta\big(\mu^{-2}(t - \alpha)\big).$$

Ferner wählen wir zwei beliebige C^1- bzw. C^0-Fortsetzungen von $\widetilde{x}_\mu$ und $\widetilde{k}_\mu$ auf $[\alpha, \beta]$ und bezeichnen diese der Einfachheit halber wieder mit $\widetilde{x}_\mu$ und $\widetilde{k}_\mu$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{\widetilde{h}}(t) = \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}_\mu(t), p\big)\widetilde{h}(t) + \widetilde{k}_\mu(t), \quad \widetilde{h}(\alpha) = x_0, \quad t \geq \alpha \tag{5.8}$$

nach (E) eine eindeutige Lösung $\widetilde{h} = \widetilde{h}(\widetilde{x}_\mu, p, \widetilde{k}_\mu)$ auf $[\alpha, \beta]$ und nach (Z) existiert für alle $n \geq b$ ein $M \geq 0$ mit

$$\left|\left|\left|\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}_\mu, p, \widetilde{k}_\mu)\right|\right|\right|_{0,n} \;\leq\; M\Big(1 + |||\widetilde{x}_\mu|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r} + |||\widetilde{k}_\mu|||_{0,n+r}\Big) \tag{5.9}$$

für alle $(\widetilde{x}_\mu, p, \widetilde{k}_\mu) \in \mathbb{U} \times V \times \mathbb{W}$. Wir definieren nun

$$h : [0,1] \rightarrow E, \qquad h(t) \;:=\; \widetilde{h}(\mu^2 t + \alpha) - x_0.$$

Dann gilt $h \in \mathrm{C}_0^1\big([0,1],E\big)$ und

$$\begin{aligned}
\dot{h}(t) &= \mu^2\dot{\widetilde{h}}(\mu^2 t+\alpha) \\
&= \mu^2\Big(\mathrm{D}_x f\big(\mu^2 t+\alpha,\widetilde{x}_\mu(\mu^2 t+\alpha),p\big)\widetilde{h}(\mu^2 t+\alpha)+\widetilde{k}_\mu(\mu^2 t+\alpha)\Big) \\
&= \mu^2\mathrm{D}_x f\big(\mu^2 t+\alpha,y(t)+x_0,p\big)h(t) \\
&+ \mu^2\mathrm{D}_x f\big(\mu^2 t+\alpha,y(t)+x_0,p\big)x_0+k(t)-\mu^2\Delta(t) \\
&= \mu^2\mathrm{D}_x f\big(\mu^2 t+\alpha,y(t)+x_0,p\big)h(t)+k(t),
\end{aligned}$$

d.h., $h = h(y,p,\mu,k)$ ist wegen der Eindeutigkeit von $\widetilde{h}$ die eindeutige Lösung von (5.7). Ferner erhalten wir aus Lemma 5.2.2, dass die Abbildung $(\widetilde{x},p,\mu,\widetilde{k}) \to \mathrm{D}_x f(\mu^2\cdot+\alpha,\widetilde{x},p)\widetilde{k}$ eine zahme Abschätzung in einer Umgebung von $(0,p_0,0)$ erfüllt. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(\widetilde{x},p,\mu,\widetilde{k}) \to \mathrm{D}_x f(\mu^2\cdot+\alpha,\widetilde{x},p)\widetilde{k}$ eine zahme Abschätzung auf $\mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)\times V\times(-\gamma,\gamma)\times\mathbb{W}$ erfüllt, d.h., es gibt Konstanten $r' \in N_0$ und $b' \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq b'$ ein $\widehat{M}$ existiert mit

$$\Big|\Big|\Big|\mathrm{D}_x f(\mu^2\cdot+\alpha,\widetilde{x},p,)\widetilde{k}\Big|\Big|\Big|_{0,n} \;\leq\; \widehat{M}\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r'}+\|p\|_{n+r'}+|||\widetilde{k}|||_{0,n+r'}\Big)$$

für alle $(\widetilde{x},p,\mu,\widetilde{k}) \in \mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)\times V\times(-\gamma,\gamma)\times\mathbb{W}$. Weiterhin sei $\mathbb{W} = B_{\widehat{\delta},m_0}(0)$ und $b' \geq m_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus Lemma 5.1.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|\mathrm{D}_x f(\mu^2\cdot+\alpha,\widetilde{x},p,)\widetilde{k}\Big|\Big|\Big|_{0,n} \\
&\leq \widehat{M}'\left(|||\widetilde{k}|||_{0,b'+r'}\Big(|||\widetilde{x}|||_{0,n+r'}+\|p\|_{n+r'}\Big)+|||\widetilde{k}|||_{0,n+r'}\right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

mit

$$\widehat{M}' := \widehat{M}\Big(1+\frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)$$

für alle $n \geq b'$ und alle $(\widetilde{x},p,\mu,\widetilde{k}) \in \mathrm{C}^1\big([0,1],U\big)\times V\times(-\gamma,\gamma)\times\mathrm{C}\big([0,1],E\big)$. Analog erhalten wir aus (5.9) die Abschätzung

$$\Big|\Big|\Big|\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}_\mu,p,\widetilde{k}_\mu)\Big|\Big|\Big|_{0,n} \;\leq\; M'\left(|||\widetilde{k}_\mu|||_{0,b+r}\Big(|||\widetilde{x}_\mu|||_{0,n+r}+\|p\|_{n+r}\Big)+|||\widetilde{k}_\mu|||_{0,n+r}\right)$$

für alle $n \geq b$ und alle $(\widetilde{x}_\mu, p) \in \mathbb{U} \times V$ und alle $\widetilde{k}_\mu \in \mathrm{C}\big([\alpha,\beta], E\big)$. Ferner sei o.B.d.A. $r \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left| \dot{h}(y,p,\mu,k) \right|\!\right|\!\right|_{0,n} &= \mu^2 \sup_{t\in[\alpha,\alpha+\mu^2]} \left\| \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}_\mu, p, \widetilde{k}_\mu)(t) \right\|_n \\
&\leq \mu^2 M' \Bigg(\Big(|||\widetilde{x}_\mu|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r} \Big) |||\widetilde{k}_\mu|||_{0,b+r} + |||\widetilde{k}_\mu|||_{0,n+r} \Bigg) \\
&\leq \mu^2 M' \Bigg(\Big(|||y|||_{0,n+r} + \|x_0\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} \Big) \Big(\mu^{-2} |||k|||_{0,b+r} + |||\Delta|||_{0,b+r} \Big) \Bigg) \\
&+ \mu^2 M' \Big(\mu^{-2} |||k|||_{0,n+r} + |||\Delta|||_{0,n+r} \Big) \\
&\leq M' \max\{1,\mu^2\} \Big(|||y|||_{0,n+r} + \|x_0\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} \Big) \times \\
&\quad \times \Bigg(|||k|||_{0,b+r} + \left|\!\left|\!\left| \mathrm{D}_x f(\mu^2 \cdot + \alpha, y(\cdot) + x_0, p) x_0 \right|\!\right|\!\right|_{0,b+r} \Bigg) \\
&+ M' \max\{1,\mu^2\} \Bigg(|||k|||_{0,n+r} + \left|\!\left|\!\left| \mathrm{D}_x f(\mu^2 \cdot + \alpha, y(\cdot) + x_0, p) x_0 \right|\!\right|\!\right|_{0,n+r} \Bigg) \\
&\leq M' \max\{1,\mu^2\} \Big(|||y|||_{0,n+r} + \|x_0\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} \Big) |||k|||_{0,b+r} \\
&+ M' \widehat{M}' \max\{1,\mu^2\} \Big(|||y|||_{0,n+r} + \|x_0\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} \Big) \times \\
&\quad \times \Bigg(\|x_0\|_{0,b'+r'} \Big(|||y|||_{0,b+r+r'} + \|x_0\|_{b+r+r'} + \|p\|_{b+r+r'} \Big) + \|x_0\|_{0,b+r+r'} \Bigg) \\
&+ M' \max\{1,\mu^2\} |||k|||_{0,n+r} \; + \; M' \widehat{M}' \max\{1,\mu^2\} \|x_0\|_{0,n+r+r'} \\
&+ M' \widehat{M}' \max\{1,\mu^2\} \|x_0\|_{0,b'+r'} \Big(|||y|||_{0,n+r+r'} + \|x_0\|_{n+r+r'} + \|p\|_{n+r+r'} \Big) \\
&\leq M_0 \|x_0\|_{n+r+r'} \; + \; M_1 \Big(|||y|||_{n+r+r'} + \|x_0\|_{n+r+r'} + \|p\|_{n+r+r'} \Big) \; + \; M_2 |||k|||_{n+r}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
M_0 &:= M' \widehat{M}' \max\{1,\mu^2\} \\
M_1 &:= M' \max\{1,\mu^2\} \Bigg(|||k|||_{0,b+r} + \widehat{M}' \Big(\widehat{M}_1 + \|x\|_{0,b'+r'} \Big) \Bigg)
\end{aligned}
$$

und

$$\widehat{M_1} := \Big(\|x_0\|_{b'+r'}\Big(|||y|||_{0,b+r+r'} + \|x_0\|_{b+r+r'} + \|p\|_{b+r+r'}\Big) + \|x_0\|_{b+r+r'}\Big)$$

$$M_2 := M' \max\{1, \mu^2\}$$

für alle $(y, p, \mu, k) \in \mathrm{C}^1_0\big([0,1], U_0\big) \times V \times (-\gamma, \gamma) \times \mathrm{C}\big([0,1], E\big)$. Sei nun $C \geq 0$ und

$$\Big|\Big|\Big|(y, p, \mu, k)\Big|\Big|\Big|_{b+r+r'} \leq C.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\Big|\Big|h(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{1,n} &= \Big|\Big|\Big|h(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n} + \Big|\Big|\Big|\dot{h}(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\| \int_0^t \dot{h}(y,p,\mu,k)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big\|_n + \Big|\Big|\Big|\dot{h}(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n} \\
&\leq 2\Big|\Big|\Big|\dot{h}(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|h(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{1,n} \\
&\leq 2M_1\Big(|||y|||_{n+r+r'} + \|x_0\|_{n+r+r'} + \|p\|_{n+r+r'}\Big) \qquad (5.11)\\
&+ 2M_0\|x_0\|_{n+r+r'} + 2M_2|||k|||_{n+r}
\end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante M_1 in folgender Weise von $C \geq 0$ ab

$$M_1 := M' \max\{1, \mu^2\}\bigg(C + \|x_0\|_{b'+r'}\widehat{M'}\Big(2C + \|x_0\|_{b'+r+r'} + 2\Big)\bigg).$$

Somit existiert für jedes $(y, p, \mu, k) \in \mathrm{C}^1_0\big([0,1], U_0\big) \times V \times (-\gamma, \gamma) \times \mathrm{C}\big([0,1], E\big)$ eine Umgebung auf der die Abbildung $(y, p, \mu, k) \mapsto h(y, p, \mu, k)$ eine zahme Abschätzung erfüllt. Zum Beweis der zahmen Invertierbarkeit von $\mathrm{D}_y F_0$ müssen wir abschließend noch die Stetigkeit der Abbildung $(y, p, \mu, k) \mapsto h(y, p, \mu, k)$ zeigen. Für $\mu \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|h(y',p',\mu',k') - h(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{1,m} \\
&\leq 2\Big|\Big|\Big|\dot{h}(y',p',\mu',k') - \dot{h}(y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,m} \\
&\leq 2\sup_{t\in[\alpha,\beta]}\Big\|(\mu')^2\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}'_{\mu'}, p', \widetilde{k}'_{\mu'})(t) - \mu^2\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}_\mu, p, \widetilde{k}_\mu)(t)\Big\|_{0,m}
\end{aligned}$$

Somit folgt die Stetigkeit von $(y,p,\mu,k) \mapsto h(y,p,\mu,k)$ unmittelbar aus (S), denn

$$\Big|\Big|\Big|(y',p',\mu',k') - (y,p,\mu,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n} \;\;\to\;\; 0$$

impliziert

$$\Big|\Big|\Big|(\widetilde{x}'_{\mu'},p',,\widetilde{k}'_{\mu'}) - (\widetilde{x}_{\mu},p,\widetilde{k}_{\mu})\Big|\Big|\Big|_{0,n} \;\;\to\;\; 0.$$

Für $\mu = 0$ erhalten wir mit Hilfe von (5.10) und (5.11) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|h(y',p',\mu',k') - h(y,p,0,k)\Big|\Big|\Big|_{1,n} \\
&\leq\; 2\Big|\Big|\Big|\dot{h}(y',p',\mu',k') - \dot{h}(y,p,0,k)\Big|\Big|\Big|_{0,n} \\
&\leq\; \sup_{t\in[0,1]}\Big\|(\mu')^2\mathrm{D}_x f\big((\mu')^2 t+\alpha, y'(t)+x_0,p'\big)h(y',p',\mu',k')(t)\Big\|_{0,n} \\
&+\; \sup_{t\in[0,1]}\Big\|k'(t)-k(t)\Big\|_{0,n} \\
&\leq\; |\mu'|^2\widehat{M}'\Big|\Big|\Big|h(y',p',\mu',k')\Big|\Big|\Big|_{0,b'+r'}\Big(|||y'|||_{0,n+r'} + \|x_0\|_{n+r'} + \|p'\|_{n+r'}\Big) \\
&+\; |\mu'|^2\widehat{M}'\Big|\Big|\Big|h(y',p',\mu',k')\Big|\Big|\Big|_{0,n+r'} \;+\; |||k'-k|||_{0,n} \\
&\leq\; 2|\mu'|^2\widehat{M}'M_3\Big(1+|||y'|||_{0,n+r'} + \|x_0\|_{n+r'} + \|p'\|_{n+r'}\Big)\times \\
&\qquad \times\Big(|||y'|||_{0,n+r+2r'} + \|x_0\|_{n+r+2r'} + \|p'\|_{n+r+2r'} + \|k'\|_{n+r+r'}\Big) \;+\; |||k'-k|||_{0,n}
\end{aligned}$$

mit

$$M_3 \;:=\; \max\{M_0,M_1,M_2\}.$$

Daher gilt

$$\Big|\Big|\Big|h(y',p',\mu',k') - h(y,p,0,k)\Big|\Big|\Big|_{1,n} \;\;\to\;\; 0$$

für $(y',p',\mu',k') \;\to\; (y,p,0,k)$, d.h., die Abbildung $(y,p,\mu,k) \mapsto h(y,p,\mu,k)$ ist auch für $\mu=0$ stetig und somit ist $\mathrm{D}F_0$ zahm invertierbar. Nach Satz 5.1.3 existiert nun zu jedem $p_0 \in V$ ein $\varepsilon > 0$, eine Umgebung V_0 von p_0 und eine C^2-zahme Abbildung $\phi : V_0 \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{C}^1_0\big([0,1],U_0\big)$ mit

$$F_0\big(\phi(p,\mu),p,\mu)\big) \;=\; 0$$

für alle $(p,\mu) \in V_0 \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, d.h., $\phi(p,\mu)$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) \;=\; \mu^2 f\big(\mu^2 t, y(t), p\big), \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0$$

auf $[0,1]$. Wir wählen nun ein festes $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ und definieren

$$\varphi : [\alpha, \alpha + \varepsilon_0] \times V_0 \to U, \qquad \varphi(t,p) \;:=\; \phi(p,\varepsilon_0)\big(\varepsilon_0^{-2}(t-\alpha)\big) + x_0.$$

Dann ist $t \mapsto \varphi(t,p)$ gemäß unserer Vorüberlegung eine Lösung des Anfangswertproblems (5.5) auf $[\alpha, \alpha + \varepsilon_0]$. Ferner folgt durch nochmaliges Differenzieren von (5.5) nach t bzw. p und aus der C^2-Zahmheit von ϕ bzw. f die C^2-Zahmheit von φ. Die lokale Eindeutigkeit von $\varphi(\cdot,p)$ erhält man aus der eindeutigen Lösbarkeit von $F_0(y,p,\mu) = 0$ bei festem (p,μ) aus einer Umgebung von $(0,p_0,0)$. ■

Bemerkung 5.2.1. Falls E und P Banachräume sind, so genügt es in Satz 5.2.1 die stetige partielle (Fréchet-) Differenzierbarkeit von f nach x zu fordern [siehe z.B. [Zei86]]. Insbesondere kann man auf die Differenzierbarkeit nach t verzichten. Auch in zahmen Fréchetträum ist es möglich die Voraussetzungen an die Differenzierbarkeit von f abzuschwächen, jedoch benötigt man dazu eine allgemeinere Versionen des Satzes 5.1.3 [siehe Bemerkung 5.1.3 und 5.1.4].

Folgerung 5.2.1 (Zahme Abhängigkeit von den Anfangswerten). *Seien E und P zahme Fréchetträume und sei $U \times V \subset E \times P$ offen. Ferner sei $f : (\alpha,\beta) \times U \times V \to E$ eine C^2-zahme Abbildung und zu jedem $(s_0,x_0,p_0) \in (\alpha,\beta) \times U \times V$ existiere eine Umgebung $(s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(E′) *Für alle $(s,x,p) \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0$, alle $\widetilde{x} \in \mathbb{U}_{(s,x)} := \big\{\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s,s+\varepsilon_0],U\big) \mid \widetilde{x}(s) = x\big\}$, und alle $\widetilde{k} \in \mathrm{C}\big([s,s+\varepsilon_0],E\big)$ besitzt das lineare Anfangswertproblem*

$$\dot{\widetilde{h}}(t) \;=\; \mathrm{D}_x f(t,\widetilde{x}(t),p)\widetilde{h}(t) + \widetilde{k}(t), \quad \widetilde{h}(s) = x, \quad t \geq s \tag{5.12}$$

eine eindeutige Lösung $h = h(\widetilde{x},s,x,p,k)$ auf $[s,s+\varepsilon_0]$. Ferner sei (e5.50) auch auf jedem Teilintervall der Form $[s,s+\varepsilon']$ mit $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$ eindeutig lösbar.

(S′) *Die Lösung von (5.12) hängt stetig von $\widetilde{x}$, s, x, p und $\widetilde{k}$ ab, d.h., für alle $(s,x,p) \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0$, alle $\widetilde{x} \in \mathbb{U}_{(s,x)} := \big\{\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s,s+\varepsilon_0],U\big) \mid \widetilde{x}(s) = x\big\}$, alle $\widetilde{k} \in \mathrm{C}\big([s,s+\varepsilon_0],E\big)$, alle $\widetilde{\varepsilon} > 0$ und alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $\widetilde{\delta} > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\sup_{t\in[0,\varepsilon_0]} \Big\| \dot{h}(\widetilde{x}',s',x',p',\widetilde{k}')(t+s') - \dot{h}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})(t+s) \Big\|_m \;\leq\; \widetilde{\varepsilon}$$

für alle $(s',x',p') \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0$, *alle* $\widetilde{x}' \in \mathbb{U}_{(s,x)} := \big\{\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s,s+\varepsilon_0],U\big) \;\big|\; \widetilde{x}(s)=x\big\}$, *und alle* $\widetilde{k}' \in \mathrm{C}\big([s,s+\varepsilon_0],E\big)$ *mit*

$$\max\Big\{ \sup_{t\in[0,\varepsilon_0]} \|\widetilde{x}'(t+s')-\widetilde{x}(t+s)\|_n, |s'-s|, \|x'-x\|_n, \ldots$$

$$\ldots, \|p'-p\|_n, \sup_{t\in[0,\varepsilon_0]} \|\widetilde{k}'(t+s')-\widetilde{k}(t+s)\|_n\Big\} \;\le\; \widetilde{\delta}.$$

(Z′) *Es gibt Konstanten* $m_0\in\mathbb{N}$, $\widehat{\delta}>0$, $r\in\mathbb{Z}$ *und* $b\in\mathbb{N}$, *so dass für alle* $n\ge b$ *ein* $M\ge 0$ *existiert mit*

$$|||\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})|||_{0,n} \;\le\; M\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r}+\|x\|_{n+r}+\|p\|_{n+r}+|||\widetilde{k}|||_{0,n+r}\Big)$$

für alle $(s,x,p)\in(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0$, *alle* $\widetilde{x}\in\mathbb{U}_{(s,x)} := \big\{\widetilde{x}\in\mathrm{C}^1\big([s,s+\varepsilon_0],U\big) \;\big|\; \widetilde{x}(s)=x\big\}$, *und alle* $\widetilde{k}\in\mathbb{W}_s := \big\{\widetilde{k}\in\mathrm{C}\big([s,s+\varepsilon_0],E\big) \;\big|\; |||\widetilde{k}|||_{0,m_0}<\widehat{\delta}\big\}$.

Dann ist das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; f(t,x(t),p_0), \quad x(s_0)=x_0, \quad t\ge s_0 \tag{5.13}$$

für jedes $(s_0,x_0,p_0)\in(\alpha,\beta)\times U\times V$ *lokal eindeutig lösbar, d.h., für jedes* (s_0,x_0,p_0) *existiert ein* $\delta_1>0$, *ein* $\varepsilon_1>0$ *eine Umgebung* $U_1\times V_1$ *von* (x_0,p_0) *und eine Abbildung*

$$\Phi : \big\{(t,s) \;\big|\; s_0-\delta_1<s<s_0+\delta_1,\; s\le t\le s+\varepsilon_1\big\}\times U_1\times V_1 \;\to\; E$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Abbildung Φ *ist stetig partiell differenzierbar nach* t *mit*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t,s}(x,p) \;=\; f\big(t,\Phi_{t,s}(x,p),p\big)$$

für alle $s\le t\le s+\varepsilon_1$ *und es gilt* $\Phi_{s,s}(x,p)=x$ *für alle* $(s,x,p)\in(s_0-\delta_1,s_0+\delta_1)\times U_1\times V_1$, *d.h., die Abbildung* $t\mapsto\Phi_{t,s}(x,p)$ *ist eine Lösung des Anfangswertproblems (5.13).*

(b) Falls $\psi:[s,s+\varepsilon']\to E$ *eine weitere Lösung von (5.13) zum Anfangswert* $(s,x)\in(s_0-\delta_1,s_0+\delta_1)\times U_1$ *und Parameter* $p\in V_1$ *ist, so gilt* $\psi(t)=\Phi_{t,s}(x,p)$ *für alle* $t\in[s,s+\min\{\varepsilon_1,\varepsilon'\}]$.

Ferner ist die Abbildung Φ *zweifach zahm differenzierbar und besitzt die (Pseudo-) Halbfluss-Eigenschaft*[1], *d.h.,*

$$\Phi_{t,s}\big(\Phi_{s,r}(x,p),p\big) \;=\; \Phi_{t,r}(x,p)$$

für alle alle $p\in V_1$, *alle* $r,s\in(s_0-\delta_1,s_0+\delta_1)$ *und alle* $t\in[s,s+\varepsilon_1]$ *mit* $r\le s\le t\le r+\varepsilon_1$ *und* $\Phi_{s,r}(x,p)\in U_1$.

[1] vgl. Definition 4.1.2

Beweis: Sei $(s_0, x_0, p_0) \in (\alpha, \beta) \times U \times V$ gegeben. Dann gibt es Konstanten $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$ sowie offene Umgebungen U_0 und V_0 von x_0 bzw. p_0, so dass die Voraussetzungen (E′), (S′) und (Z′) auf $(s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) \times U_0 \times V_0$ mit $\varepsilon_0 > 0$ erfüllt sind. Ferner existiere o.B.d.A. eine Nullumgebung $\widehat{U}_0$ mit $\widehat{U}_0 + U_0 \subset U$. Dies können wir immer erreichen, indem wir U_0 geeignet verkleinern. Wir definieren nun

$$\widehat{P} \;:=\; \mathbb{R} \times E \times P, \qquad \widehat{V}_0 \;:=\; (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) \times U_0 \times V_0$$

und

$$\widehat{f}_0 : [0, \varepsilon_0] \times \widehat{U}_0 \times \widehat{V}_0 \to E, \qquad \widehat{f}_0(t, y, \widehat{p}) \;:=\; f(t + s, y + x, p)$$

mit $\widehat{p} := (s, x, p)$. Weiterhin betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) \;=\; \widehat{f}_0\big(t, y(t), \widehat{p}\big), \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{5.14}$$

Aus den Voraussetzungen (E′), (S′) und (Z′) folgt mittels Satz 5.2.1, dass (5.14) für jedes $\widehat{p} \in \widehat{V}_0$ lokal eindeutig lösbar ist. Insbesondere existiert für $\widehat{p}_0 = (s_0, x_0, p_0)$ ein $\varepsilon_1 > 0$, eine Umgebung $\widehat{V}_1 = (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1) \times U_1 \times V_1$ und eine Abbildung $\varphi : [0, \varepsilon_1] \times \widehat{V}_1 \to E$, so dass $t \mapsto \varphi(t, \widehat{p})$ die eindeutige Lösung von (5.14) auf $[0, \varepsilon_1]$ darstellt. Wir definieren nun die Abbildung

$$\Phi : \big\{(t, s) \;\big|\; s_0 - \delta_1 < s < s_0 + \delta_1,\; s \leq t \leq s + \varepsilon_1\big\} \times U_1 \times V_1 \;\;\to\;\; E$$

mittels

$$\Phi_{t,s}(x, p) \;\;:=\;\; \varphi\big(t - s, (s, x, p)\big) + x \;=\; \varphi(t - s, \widehat{p}) + x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t,s}(x, p) \;&=\; \dot{\varphi}(t - s, \widehat{p}) \;=\; \widehat{f}_0\big(t - s, \varphi(t - s, \widehat{p}), \widehat{p}\big) \\ &=\; f\big(t, \varphi(t - s) + x, p\big) \;=\; f(t, \Phi_{t,s}(x, p), p), \end{aligned}$$

d.h., $t \mapsto \Phi_{t,s}(x, p)$ ist eine Lösung von (5.13) auf $[s, s + \varepsilon_1]$. Ferner ist $t \mapsto \Phi_{t,s}(x, p)$ lokal eindeutig auf $[s, s + \varepsilon_1]$ im Sinne von Behauptung (b), da $t \mapsto \varphi(t, \widehat{p})$ lokal eindeutig auf $[0, \varepsilon_1]$ ist. Somit müssen wir abschließend noch die C^2-Zahmheit und die Halbflusseigenschaft von Φ zeigen. Während die C^2-Zahmheit unmittelbar aus der C^2-Zahmheit von φ folgt, erhält man die Halbfluß-Eigenschaft von Φ leicht aus der lokalen Eindeutigkeit. ■

Folgerung 5.2.2 (Globale Eindeutigkeit). *Seien E und P zahme Frécheträume und sei $U \times V \subset E \times P$ offen. Ferner erfülle $f : (\alpha, \beta) \times U \times V \to E$ die Voraussetzungen von Folgerung 5.2.1. Dann existiert zu jedem $(s, x, p) \in U \times V$ ein offenes,* maximales Existenzintervall *$I_{\max}(s, x, p) \subset (\alpha, \beta)$ und eine eindeutige, globale Lösung $\varphi : I_{\max}(s, x, p) \to E$ von (5.13).*

Beweis: Die Behauptung folgt wie im Endlich-dimensionalen unmittelbar aus der lokalen Eindeutigkeit, also aus Folgerung 5.2.1 [siehe z.B. [Ama90, Ch. II, Thm. 7.6]]. ∎

Wir zeigen in den beiden folgenden Sätzen, dass die offensichtlich beweiserzeugenden Voraussetzungen (E), (S) und (Z) in Satz 5.2.1 bzw. (E′), (S′ und (Z′) in Folgerung 5.2.1 durch leichter verifizierbare Bedingungen an die Familien

$$\Big(\mathrm{D}_x f(t,x,p)\Big)_{(t,x,p)\in[\alpha,\beta]\times U\times V}$$

von stetigen linearen Operatoren bzw. an die zugehörigen Halbgruppen ersetzt werden können. Dabei unterscheiden wir wie in Kapitel 4 zwei Fälle, einen hyperbolischen und einen parabolischen Fall.

5.2.1 Der hyperbolische Fall (nichtlinear)

Satz 5.2.2. *Sei E und P zahme Frécheträume und sei $U\times V\subset E\times P$ offen. Ferner sei $f:(\alpha,\beta)\times U\times V\to E$ eine C^2-zahme Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(NLH1) Für jedes $(s_0,x_0,p_0)\in(\alpha,\beta)\times U\times V$ ist $\mathrm{D}_x f(s_0,x_0,p_0)$ der infinitesimale Generator einer C^∞-Halbgruppe $\big(T_{(s_0,x_0,p_0)}(\tau)\big)_{\tau\geq 0}$.

(NLH2) Zu jedem $(s_0,x_0,p_0)\in(\alpha,\beta)\times U\times V$ existiert eine Umgebung $(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0$ von (s_0,p_0), eine Nullumgebung $W_0\subset E$ sowie Konstanten $\varepsilon_0>0$, $r\in\mathbb{Z}$ und $b\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\geq b$ ein $M\geq 0$ existiert mit

$$\begin{aligned}&\Big\|T_{(t_l,x_l,p)}(\tau_l)\cdots T_{(t_1,x_1,p)}(\tau_1)k\Big\|_n\\ &\leq\; M\Big(1+\max_{1\leq j\leq l}\|x_j\|_{n+r}+\|p\|_{n+r}+\|k\|_{n+r}\Big)\end{aligned}$$

für alle $x_j\in U$, alle $p\in V_0$, alle $k\in W_0$, alle $s\in(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)$, alle endlichen Partitionen $s=t_0\leq\cdots\leq t_l=s+\varepsilon_0$ von $[s,s+\varepsilon_0]$ und alle $\tau_1,\ldots,\tau_l$ mit $0\leq\tau_j\leq t_{j+1}-t_j$.

Dann ist das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; f(t,x(t),p_0),\quad x(s_0)=x_0,\quad t\geq s_0 \tag{5.15}$$

für jedes $(s_0,x_0,p_0)\in(\alpha,\beta)\times U\times V$ lokal eindeutig lösbar und der zugehörige, lokale Halbfluss $\Phi_{t,s}(x,p)$ ist zweifach zahm differenzierbar [vgl. Folgerung 5.2.1].

Beweis: Gemäß Folgerung 5.2.1 genügt es nachzuweisen, dass f die Eigenschaften (E′), (S′) und (Z′) lokal auf $(\alpha,\beta)\times U\times V$ erfüllt. Sei also $(s_0,x_0,p_0)\in(\alpha,\beta)\times U\times V$ gegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung (NLH2) eine Umgebung $(s_0-\delta_0,s_0+$

$\delta_0) \times V_0$, eine Nullumgebung $W_0 \subset E$ sowie Konstanten $\varepsilon_0 > 0$, $r \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq b$ ein $M \geq 0$ existiert mit

$$\begin{aligned} &\Big\| T_{(t_l,x_l,p)}(\tau_l) \cdots T_{(t_1,x_1,p)}(\tau_1) k \Big\|_n \\ \leq \;& M\Big(1 + \max_{1\leq j\leq l} \|x_j\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} + \|k\|_{n+r}\Big) \end{aligned} \tag{5.16}$$

für alle $x_j \in U$, alle $p \in V_0$, alle $k \in W_0$, alle $s \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$, alle endlichen Partitionen $s = t_0 \leq \cdots \leq t_l = s + \varepsilon_0$ von $[s, s+\varepsilon_0]$ und alle $\tau_1, \ldots, \tau_l$ mit $0 \leq \tau_j \leq t_{j+1} - t_j$. Wir zeigen nun, dass die Eigenschaften (E′), (S′) und (Z′) auf $\mathbb{U}_0 := (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) \times U_0 \times V_0$ mit $U_0 := x_0 + W_0$ erfüllt sind.

Zu (E′): Sei $(s, x, p) \in \mathbb{U}_0$ und $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s, s+\varepsilon_0], U\big)$. Ferner sei o.B.d.A. $W_0 = B_{\widehat{\delta}, m_0}$, $b \geq m_0$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aus (5.16) analog zu Lemma 5.1.5 für alle $n \geq b$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| T_{(t_l,x_l,p)}(\tau_l) \cdots T_{(t_1,x_1,p)}(\tau_1) k \Big\|_n \\ \leq \;& M'\Big(\big(\max_{1\leq j\leq l} \|x_j\|_{n+r} + \|p\|_{n+r}\big)\|k\|_b + \|k\|_{n+r}\Big) \end{aligned}$$

mit

$$M' = M\Big(1 + \frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)$$

für alle $x_j \in U$, alle $p \in V_0$, alle $k \in E$, alle $s \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$, alle endlichen Partitionen $s = t_0 \leq \cdots \leq t_l = s + \varepsilon_0$ von $[s, s+\varepsilon_0]$ und alle $\tau_1, \ldots, \tau_l$ mit $0 \leq \tau_j \leq t_{j+1} - t_j$. Daraus erhalten wir für alle $n \geq b$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| T_{(t_l,\widetilde{x}(t_l),p)}(\tau_l) \cdots T_{(t_1,\widetilde{x}(t_1),p)}(\tau_1) k \Big\|_n \\ \leq \;& M'\Big(1 + \sup_{t\in[s,s+\varepsilon_0]} \|\widetilde{x}(t)\|_{n+r} + \|p\|_{n+r}\Big)\|k\|_{n+r} \end{aligned} \tag{5.17}$$

für alle $k \in E$, alle endlichen Partitionen $s = t_0 \leq \cdots \leq t_l = s + \varepsilon_0$ von $[s, s+\varepsilon_0]$ und alle $\tau_1, \ldots, \tau_l$ mit $0 \leq \tau_j \leq t_{j+1} - t_j$. Damit erfüllt die Familie

$$\Big(A_{(\widetilde{x},p)}(t) := \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)\Big)_{[s,s+\varepsilon_0]}$$

von linearen Operatoren die Bedingungen (H1) und (H2) aus Satz 4.2.1. Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildung $t \mapsto \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)k$ auch die Eigenschaft $(H3)$

besitzt, d.h., die Abbildung $t \mapsto \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)k$ muss auf beschränkten Mengen von E gleichmäßig stetig sein. Dies ergibt sich jedoch wie in Folgerung 4.2.3 unmittelbar aus der stetigen Differenzierbarkeit von $t \mapsto \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)k$. Somit folgt aus Satz 4.2.1, dass es eine eindeutige, zu $\big(A_{(\widetilde{x},p)}(t)\big)_{[s,s+\varepsilon_0]}$ zugehörige Evolutionsfamilie

$$\big(U_{(\widetilde{x},p)}(t,\tau)\big)_{s\le\tau\le t\le s+\varepsilon_0}$$

gibt. Ferner erhalten wir aus Satz 4.2.1, dass die Gleichnug

$$\dot{\widetilde{h}}(t) \;=\; \mathrm{D}_x f(t,\widetilde{x}(t),p)\widetilde{h}(t) + \widetilde{k}(t), \quad \widetilde{h}(s) = x, \quad t \ge s$$

für jedes $\widetilde{k} \in \mathrm{C}\big([s,s+\varepsilon_0],E\big)$ eine eindeutige Lösung $\widetilde{h} = \widetilde{h}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})$ auf $[s,s+\varepsilon_0]$ mit

$$\widetilde{h}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})(t) \;=\; U_{(\widetilde{x},p)}(t,s)x \;+\; \int\limits_s^t U_{(\widetilde{x},p)}(t,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.18}$$

besitzt. Damit ist die Eigenschaft (E′) auf $\mathbb{U}_0$ erfüllt.

Zu (S′): Wie zuvor zeigt man leicht, dass für jedes $(\widetilde{x},s,p) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$ eine eindeutige, zu

$$\Big(A_{(\widetilde{x},s,p)}(t) := \mathrm{D}_x f\big(t+s,\widetilde{x}(t),p\big)\Big)_{[0,\varepsilon_0]}$$

zugehörige Evolutionsfamilie

$$\Big(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\Big)_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0}$$

existiert. Ferner gilt wegen der Eindeutigkeit für alle $(s,p) \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$ und alle $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s,s+\varepsilon_0],U\big)$ die Identität

$$U_{(\widetilde{x},p)}(t+s,\tau+s) \;=\; U_{(\widetilde{x}(\cdot+s),s,p}(t,\tau) \tag{5.19}$$

für alle $0 \le \tau \le t \le \varepsilon_0$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k}) \;&\mapsto\; \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k}) \\ &:= \; A_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot)\left(U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int\limits_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \;+\; \widetilde{k}\end{aligned} \tag{5.20}$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0\times\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ und zeigen, dass diese stetig ist. Seien also $(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k}),(\widetilde{x}',s',x',p',\widetilde{k}')\in\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0\times\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,\varepsilon_0]}\Big\|\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}',s',x',p',\widetilde{k}')(t)-\dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})(t)\Big\|_m\\
&\leq\quad\sup_{t\in[0,\varepsilon_0]}\Bigg\|A_{(\widetilde{x}',s',p')}(t)\Bigg(U_{(\widetilde{x}',s',p')}(t,0)x'+\int_0^t U_{(\widetilde{x}',s',p')}(t,\tau)\widetilde{k}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Bigg)\\
&\qquad\qquad-A_{(\widetilde{x},s,p)}(t)\Bigg(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,0)x+\int_0^t U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Bigg)\Bigg\|_m\\
&+\quad\sup_{t\in[0,\varepsilon_0]}\Big\|\widetilde{k}'(t)-\widetilde{k}(t)\Big\|_m
\end{aligned}$$

Analog zu Lemma 5.2.2 zeigt man nun, dass die Abbildung

$$(\widetilde{x},s,p,\widetilde{k})\ \mapsto\ A_{(\widetilde{x},s,p)}\widetilde{k}=\mathrm{D}_xf\big(\,\cdot+s,\widetilde{x},p\big)\widetilde{k}\tag{5.21}$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0\times\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ stetig ist. Daher genügt es die Stetigkeit der Abbildung

$$(\widetilde{x},s,x,p,\widetilde{k})\ \mapsto\ U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x+\int_0^{(\cdot)}U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\tag{5.22}$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0\times\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nachzuweisen. Aus (5.17) und der Konstruktion von $\big(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\leq\tau\leq t\leq\varepsilon}$ in Satz 4.2.1 [siehe Ungleichung (4.16)] erhalten wir für alle $n\geq b$ die Abschätzung

$$\Big\|U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k\Big\|_n\ \leq\ M'\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r}+\|p\|_{n+r}\Big)\|k\|_{n+r}\tag{5.23}$$

für alle $(\widetilde{x},s,p)\in\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0$, alle $(t,\tau)\in\Delta:=\big\{(t,\tau)\ \big|\ 0\leq\tau\leq\varepsilon_0,\tau\leq t\leq\varepsilon_0\big\}$, und alle $k\in E$. Somit folgt die Stetigkeit von (5.22) wie in Lemma 5.2.2 aus der Stetigkeit der Abbildung

$$(\widetilde{x},s,p,k,t,\tau)\ \mapsto\ U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0\times E\times\Delta_0$ nach E. Diese wiederum erhalten wir aus (5.23), der Stetigkeit von (5.21) und der Identität

$$
\begin{aligned}
&U_{(\widetilde{x}',s',p')}(t',\tau')k - U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(U_{(\widetilde{x}',s',p')}\big(t', t'-\sigma(t'-\tau')\big) U_{(\widetilde{x},s,p)}\big(t-\sigma(t-\tau),\tau\big)k \right) \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^1 U_{(\widetilde{x}',s',p')}\big(t', t'-\sigma(t'-\tau')\big)\Big((t'-\tau')A_{\widetilde{x}',s',p'}\big(t'-\sigma(t'-\tau')\big) \\
&\qquad -(t-\tau)A_{\widetilde{x},s,p}\big(t-\sigma(t-\tau)\big)\Big) U_{(\widetilde{x},s,p)}\big(t-\sigma(t-\tau),\tau\big)k \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die Abbildung $(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \mapsto \dot{h}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k})$ von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], E\big)$ stetig ist. Daraus folgt insbesondere, dass (S′) auf $\mathbb{U}_0$ erfüllt ist.

Zu (Z′): Aus (5.20) erhalten wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big| \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \Big|\Big|\Big|_{0,n} \\
&\le \Big|\Big|\Big| A_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot)\left(U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \Big|\Big|\Big|_{0,n} + |||\widetilde{k}|||_{0,n}
\end{aligned}
$$

für alle $(\widetilde{h}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], E\big)$. Ferner dürfen wir annehmen, dass die Abbildung

$$
(\widetilde{x}, s, p, \widetilde{k}) \;\mapsto\; A_{(\widetilde{x},s,p)}\widetilde{k} = \mathrm{D}_x f\big(\,\cdot + s, \widetilde{x}, p\big)k
$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0 \times E$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], E\big)$ für $n \ge b'$ eine zahme Abschätzung der Form

$$
\Big\| A_{(\widetilde{x},s,p)}k\|_n \;\le\; \widetilde{M}\Big(1 + |||\widetilde{x}|||_{0,n+r'} + \|p\|_{n+r'} + \|k\|_{n+r'}\Big)
$$

auf $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0 \times W_0$ erfüllt. Weiterhin sei o.B.d.A. $W_0 = B_{\widehat{\delta, m_0}}$, $b' \ge m_0$ und $r' \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir für $n \ge b'$ die Abschätzung

$$
\Big\| A_{(\widetilde{x},s,p)}k\|_n \;\le\; \widetilde{M}\Big(1 + \frac{2}{\delta}\Big)\Big(\big(|||\widetilde{x}|||_{0,n+r'} + \|p\|_{n+r'}\big)\|k\|_{b'} + \|k\|_{n+r'}\Big)
$$

für alle $(\widetilde{x}, s, p)\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$ und alle $k \in E$. Daraus folgt für $n \geq b'$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
& \left|\!\left|\!\left| A_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot)\left(U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \right|\!\right|\!\right|_{0,n} \\
\leq \quad & \widetilde{M}'\Big(|||\widetilde{x}|||_{0,n+r'} + \|p\|_{n+r'} \Big) \left|\!\left|\!\left| U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|\!\right|\!\right|_{0,b'} \\
+ \quad & \widetilde{M}' \left|\!\left|\!\left| U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|\!\right|\!\right|_{n+r'} \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\widetilde{M}' \quad = \quad \widetilde{M}\Big(1 + \frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)
$$

für alle $(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], E\big)$. Ferner liefert die Konstruktion von $\big(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\leq\tau\leq t\leq\varepsilon_0}$ in Satz 4.2.1 [siehe Ungleichung (4.16)] und (NLH2) für alle $n \geq b$ die Abschätzung

$$
\Big\| U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \Big\|_n \quad \leq \quad M\Big(1 + |||\widetilde{x}|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r} + \|k\|_{n+r}\Big)
$$

für alle $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big)$, alle $p \in V_0$, alle $k \in W_0$ und alle $(t,\tau) \in \Delta$. Weiterhin sei $W_0 = B_{\widehat{\delta},m_0}(0)$, $b \geq m_0$ und $r \geq 0$. Dann erhalten wir für alle $n \geq b$ die Abschätzung

$$
\Big\| U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \Big\|_n \quad \leq \quad M'\Big(\big(|||\widetilde{x}|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r}\big)\|k\|_b + \|k\|_{n+r}\Big) \qquad (5.25)
$$

für alle $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big)$, alle $p \in V_0$, alle $k \in E$ und alle $(t,\tau) \in \Delta$. Aus der Kombination von (5.24) und (5.25) folgt nun, dass die Abbildung $(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \mapsto h(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k})$ die geforderte zahme Abschätzung auf $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0], W_0\big)$ erfüllt. Daher besitzt die Abbildung (5.18) die Eigenschaft (Z′) auf $\mathbb{U}_0$.

Somit ist der Beweis der Eigenschaften (E′), (S′) und (Z′) aus Folgerung 5.2.1 auf $\mathbb{U}_0$ vollständig. Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun unmittelbar aus Folgerung 5.2.1. ■

5.2.2 Der parabolische Fall (nichtlinear)

Satz 5.2.3. *Seien E und P zahme Fréchetträume und $U \times V \subset E \times P$ offen. Ferner sei $f : (\alpha,\beta) \times U \times V \to E$ eine C^2-zahme Abbildung und für jedes $(s_0, x_0, p_0) \in (\alpha,\beta) \times U \times V$ existiere eine Umgebung $(s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit folgenden Eigenschaften:*

(NLP1) Es existieren Konstanten $\omega_0 \geq 0$ *und* $\widetilde{\delta}_0 > 0$*, so dass folgendes gilt:*

(i) $\mathbb{C}_{\omega_0,\widetilde{\delta}_0} := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\arg(\lambda - \omega_0)| < \frac{\pi}{2} + \widetilde{\delta}_0\right\} \subset \rho\big(\mathrm{D}_x f(t,x,p)\big)$ *für alle* $(t,x,p) \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0 + \varepsilon_0) \times U \times V_0$.

(ii) Es gibt eine Nullumgebung $W_0 \subset E$ *sowie Konstanten* $r \in \mathbb{Z}$ *und* $b \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $n \geq b$ *ein* $M \geq 0$ *existiert mit*

$$\Big\|R\big(\lambda, \mathrm{D}_x f(t,x,p)\big)k\Big\|_n \;\leq\; \frac{M\Big(1 + \|x\|_{n+r} + \|p\|_{n+r} + \|k\|_n\Big)}{|\lambda - \omega_0|}$$

für alle $(t,x,p,k) \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0 + \varepsilon_0) \times U \times V_0 \times W_0$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega_0,\widetilde{\delta}_0}$.

(NLP2) Es gibt ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}_{\omega_0,\widetilde{\delta}_0}$*, so dass für alle* $n \geq b$ *ein* $L \geq 0$ *existiert mit*

$$\begin{aligned} &\Big\|\Big(\mathrm{D}_x f(t',x',p) - \mathrm{D}_x f(t,x,p)\Big)R\big(\lambda_0, \mathrm{D}_x f(t'',x'',p)\big)k\Big\|_n \\ &\leq\; L\Big(|t'-t| + \|x'-x\|_{n+r}\Big) \times \\ &\qquad \times\Big(1 + \max\left\{\|x\|_{n+r}, \|x'\|_{n+r}, \|x''\|_{n+r}\right\} + \|p\|_{n+r} + \|k\|_n\Big) \end{aligned}$$

für alle $(t,x,p), (t',x',p), (t'',x'',p) \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0 + \varepsilon_0) \times U_0 \times V_0$ *und alle* $k \in W_0$.

(NLP3) Sei $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big)$ *und sei* $\big(T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(\tau)\big)_{\tau\geq 0}$ *die von* $\mathrm{D}_x f(t+s, \widetilde{x}(t), p)$ *erzeugte, sektoriell analytische* $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$*-Halbgruppe*[2]*. Dann erfüllt die eindeutige Lösungsfamilie*[3] $\big(R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\leq\tau\leq t\leq\varepsilon_0}$ *der Integralgleichung*

$$R(t,\tau)k \;=\; K_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \;+\; \int_\tau^t K_{\widetilde{x},s,p}(t,\sigma)R(\sigma,\tau)k\,\mathrm{d}\sigma$$

mit $\quad K_{\widetilde{x},s,p}(t,\tau)k$

$$= \;\Big(\mathrm{D}_x f(t+s, \widetilde{x}(t), p) - \mathrm{D}_x f(\tau+s, \widetilde{x}(\tau), p)\Big)T_{(\widetilde{x},s,p,\tau)}(t-\tau)k$$

eine zahme Abschätzung vom Grad $r' \in \mathbb{Z}$ *zu Basis* $b' \in \mathbb{N}$*, d.h., es gibt eine Nullumgebung* $W_0' \subset E$*,so dass für alle* $n \geq b'$ *ein* $\widetilde{M} \geq 0$ *existiert*

[2]Die Existenz der Halbgruppe $\big(T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(\tau)\big)_{\tau\geq 0}$ folgt unmittelbar aus Satz 3.2.2 und den Voraussetzung in (NLP1).

[3]Die eindeutige Lösbarkeit der obigen Integralgleichung erhält man aus Satz 4.2.2.

mit

$$\left|\left|\left| R_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\cdot)k \right|\right|\right|_{0,n} := \sup_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0} \left\| R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \right\|_n$$
$$\le \widetilde{M}\Big(1 + |||\widetilde{x}|||_{0,n+r'} + \|p\|_{n+r'} + \|k\|_{n+r'}\Big)$$

für alle $(\widetilde{x}, s, p) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0], U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$ *und alle* $k \in W_0'$.

Dann ist das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), p_0), \quad x(s_0) = x_0, \quad t \ge s_0 \tag{5.26}$$

für jedes $(s_0, x_0, p_0) \in (\alpha,\beta)\times U \times V$ *lokal eindeutig lösbar und der zugehörige lokale Halbfluss* $\Phi_{t,s}(x,p)$ *ist zweifach zahm differenzierbar [vgl. Folgerung 5.2.1].*

Beweis: Wir führen den Beweis wie in Satz 5.2.2 auf die Folgerung 5.2.1 zurück, d.h., wir müssen zeigen, dass f lokal die Eigenschaften (E′), (S′) und (Z′) besitzt. Sei also $(s_0, x_0, p_0) \in (\alpha,\beta) \times U \times V$ gegeben. Dann existiert nach Voraussetzung eine Umgebung $(s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times \times V_0$ von (s_0, p_0), eine Nullumgebung W_0 und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass (NLP1) - (NLP3) gelten. Wir zeigen nun, dass f die Eigenschaften (E′), (S′) und (Z′) auf $\mathbb{U}_0 := (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0$ mit $U_0 := x_0 + W_0$ erfüllt.

Zu (E′): Sei $(s,x,p) \in \mathbb{U}$ und $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1\big([s, s+\varepsilon_0], U_0\big)$. Dann definieren wir

$$\Big(A_{(\widetilde{x},p)}(t) := \mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)\Big)_{t\in[s,s+\varepsilon_0]}.$$

Nach (NLP1)(i) existieren Konstanten $\omega_0 \ge 0$ und $\widetilde{\delta}_0 > 0$ mit

$$\mathbb{C}_{\omega_0,\widetilde{\delta}_0} \subset \rho\Big(\mathrm{D}_x f\big(t, \widetilde{x}(t), p\big)\Big)$$

für alle $t \in [s, s+\varepsilon_0]$. Ferner sei o.B.d.A. $W_0 = B_{\widehat{\delta},m_0}$, $b \ge m_0$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aus (NLP1)(ii) wie in Lemma 5.1.5 für alle $n \ge b$ die Abbschätzung

$$\begin{aligned}\left\| R\big(\lambda, A_{(\widetilde{x},p)}(t)\big)k \right\|_n &= \left\| R\big(\lambda, \mathrm{D}_x f(t, \widetilde{x}(t), p)\big)k \right\|_n \\ &\le \frac{M'\Big(\big(|||\widetilde{x}|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r}\big)\|k\|_b + \|k\|_n\Big)}{|\lambda-\omega_0|} \\ &\le \frac{M'\Big(1 + |||\widetilde{x}|||_{n+r} + \|p\|_{n+r}\Big)\|k\|_n}{|\lambda-\omega_0|}\end{aligned} \tag{5.27}$$

mit

$$M' \;:=\; M\Big(1+\frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)$$

für alle $k \in E$, alle $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega_0,\widetilde{\delta}_0}$ und alle $t \in [s, s+\varepsilon_0]$. Somit besitzt die Familie $\big(A_{(\widetilde{x},p)}(t)\big)_{t\in[s,s+\varepsilon_0]}$ von stetigen, linearen Operatoren die Eigenschaft (P1) aus Satz 4.2.2. Da f zweifach stetig differenzierbar ist, gilt offensichtlich auch Voraussetzung (P3) aus Satz 4.2.2. Daher müssen wir nur noch (P2) nachweisen, um Satz 4.2.2 anwenden zu können.Aus (LNP2) erhalten wir analog zu Lemma 5.1.5 für alle $n \geq b$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(A_{(\widetilde{x},p)}(t') - A_{(\widetilde{x},p)}(t)\Big)R\big(\lambda_0, A_{(\widetilde{x},p)}(t'')\big)k\Big\|_n \\
&= \;\Big\|\Big(\mathrm{D}_x f(t', \widetilde{x}(t'), p) - \mathrm{D}_x f(t, \widetilde{x}(t), p)\Big)R\big(\lambda_0, \mathrm{D}_x f(t'', \widetilde{x}(t''), p)\big)k\Big\|_n \\
&\leq \; L'\Big(|t'-t| + \|\widetilde{x}(t') - \widetilde{x}(t)\|_{n+r}\Big)\Big(\big(|||\widetilde{x}|||_{n+r} + \|p\|_{n+r}\big)\|k\|_b + \|k\|_n\Big) \\
&\leq \; L'\Big(|t'-t| + |||\dot{\widetilde{x}}|||_{n+r}|t'-t|\Big)\Big(\big(|||\widetilde{x}|||_{n+r} + \|p\|_{n+r}\big)\|k\|_b + \|k\|_n\Big) \\
&\leq \; L'\Big(1 + |||\dot{\widetilde{x}}|||_{n+r}\Big)\Big(1 + |||\widetilde{x}|||_{n+r} + \|p\|_{n+r}\Big)|t'-t|\|k\|_n \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

mit

$$L' \;:=\; L\Big(1+\frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)$$

für alle $k \in E$ und alle $t, t', t'' \in [s, s+\varepsilon_0]$, d.h., $\big(A_{(\widetilde{x},p)}(t)\big)_{t\in[s,s+\varepsilon_0]}$ erfüllt auch Voraussetzung (P2) aus Satz 4.2.2. Daraus folgt die Existenz einer eindeutigen zu $\big(A_{(\widetilde{x},p)}(t)\big)_{[s,s+\varepsilon_0]}$ zugehörigen Evolutionsfamilie

$$\big(U_{(\widetilde{x},p)}(t,\tau)\big)_{s\leq\tau\leq t\leq s+\varepsilon_0}$$

Ferner ist die Gleichung

$$\dot{\widetilde{h}}(t) \;=\; \mathrm{D}_x f(t, \widetilde{x}(t), p)\widetilde{h}(t) + \widetilde{k}(t), \quad \widetilde{h}(s) = x, \quad t \geq s$$

für jedes $\widetilde{k} \in \mathrm{C}\big([s, s+\varepsilon_0], E\big)$ eindeutig lösbar auf $[s, s+\varepsilon_0]$ und die Lösung $\widetilde{h} = \widetilde{h}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k})$ hat die Form

$$\widetilde{h}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k})(t) \;=\; U_{(\widetilde{x},p)}(t,s)x \;+\; \int_s^t U_{(\widetilde{x},p)}(t,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (5.29)$$

Somit erfüllt f die Bedingung (E$'$) auf $\mathbb{U}_0$.

Zu (S$'$): Wie im Beweis von Satz 5.2.2 betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \;&\mapsto\; \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \\ &:= \; A_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot)\left(U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int\limits_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \;+\; \widetilde{k}\end{aligned} \tag{5.30}$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$. Dabei sei

$$\Big(A_{(\widetilde{x},s,p)}(t) := \mathrm{D}_x f\big(t+s, \widetilde{x}(t), p\big)\Big)_{[0,\varepsilon_0]}$$

und

$$\Big(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\Big)_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0}$$

die zugehörige Evolutionsfamilie, deren Existenz und Eindeutigkeit wie in (E$'$) gezeigt werden kann. Zum Beweis der Stetigkeit von (5.30) genügt es wiederum die Abbildung

$$(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \;\;\mapsto\;\; U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int\limits_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.31}$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times U_0 \times V_0 \times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ zu untersuchen. Sei nun $\widehat{\omega}_0 > \omega_0$. Dann folgt aus (5.27), (5.28) und Satz 4.2.2(a), dass für alle $n \ge b$ Konstanten $\widehat{M} \ge 0$ und $\widehat{M}' \ge 0$ existieren mit

$$\Big\|U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k\Big\|_n \;\;\le\;\; \widehat{M}\Big(1+\frac{2}{\widehat{\delta}}\Big)\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{n+r}+\|p\|_{n+r}\Big)\mathrm{e}^{(\widehat{\omega}_0+\widehat{L}\widehat{M}')(t-\tau)}\|k\|_n$$

und

$$\widehat{L} \;\;:=\;\; L'\Big(1+|||\dot{\widetilde{x}}|||_{n+r}\Big)\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{n+r}+\|p\|_{n+r}\Big)$$

für alle $(\widetilde{x}, s, p) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U_0\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta) \times V_0$, alle $k \in E$ und alle $(t,\tau) \in \Delta_0 := \big\{(t,\tau) \;\big|\; 0 \le \tau \le \varepsilon_0, \tau \le t \le \varepsilon_0\big\}$. Somit ist die Stetigkeit von

$$(\widetilde{x}, s, p, k, t, \tau) \;\;\mapsto\;\; U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0 \times E \times \Delta_0$ nach E hinreichend für die Stetigkeit von (5.31). Die Stetigkeit von $(\widetilde{x}, s, p, k, t, \tau) \mapsto U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$ erhält man wiederum wie in Satz 5.2.2 leicht mittels der Identität

$$U_{(\widetilde{x}',s',p')}(t',\tau')k - U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$$

$$= \int_0^1 U_{(\widetilde{x}',s',p')}\big(t', t'-\sigma(t'-\tau')\big)\Big((t'-\tau')A_{\widetilde{x}',s',p'}\big(t'-\sigma(t'-\tau')\big)$$

$$-(t-\tau)A_{\widetilde{x},s,p}\big(t-\sigma(t-\tau)\big)\Big)U_{(\widetilde{x},s,p)}\big(t-\sigma(t-\tau),\tau\big)k\,\mathrm{d}\sigma.$$

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die Abbildung (5.30) stetig ist. Dies impliziert, dass (S′) auf $\mathbb{U}_0$ erfüllt ist.

Zu (Z′): Wir betrachten nochmals die Abbildung

$$(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k}) \;\mapsto\; \dot{\widetilde{h}}(\widetilde{x}, s, x, p, \widetilde{k})$$

$$:= \; A_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot)\left(U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,0)x + \int_0^{(\cdot)} U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\tau)\widetilde{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \;+\; \widetilde{k}(\cdot)$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0\times \mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ nach $\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],E\big)$ und zeigen, dass diese zahm ist. Entsprechend dem Beweis der Eigenschaft (Z′) in Satz 5.2.2 genügt es, die Zahmheit der Abbildung

$$(\widetilde{x}, s, p, k) \;\mapsto\; U_{(\widetilde{x},s,p)}(\cdot,\cdot)k$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0\times E$ nach $\mathrm{C}\big(\Delta_0,E\big)$ zu untersuchen. Aus der Konstruktion von $\big(U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0}$ in Satz 4.2.2 erhalten wir die Darstellung

$$U_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$$

$$= \; T_{(\widetilde{x},s,p,\tau)}(t-\tau)k \;+\; \int_\tau^t T_{(\widetilde{x},s,p,\sigma)}(t-\sigma)R_{(\widetilde{x},s,p)}(\sigma,\tau)k\,\mathrm{d}\sigma \tag{5.32}$$

für alle $(\widetilde{x},s,p,k)\in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0\times E$, wobei $\big(T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(\tau)\big)_{\tau\ge0}$ die von $A_{(\widetilde{x},s,p)}(t) = \mathrm{D}_x f\big(t+s,\widetilde{x}(t),p\big)$ erzeugte, sektoriell analytische $\mathrm{C}^\infty_{\exp}$-Halbgruppe und $\big(R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0}$ die eindeutige Lösungsfamilie von

$$R(t,\tau)k \;=\; K_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \;+\; \int_\tau^t K_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\sigma)R(\sigma,\tau)k\,\mathrm{d}\sigma$$

mit

$$K_{\widetilde{x},s,p}(t,\tau)k \;=\; \Big(\mathrm{D}_x f(t+s,\widetilde{x}(t),p) - \mathrm{D}_x f(\tau+s,\widetilde{x}(\tau),p)\Big) T_{(\widetilde{x},s,p,\tau)}(t-\tau)k$$

ist. Da ferner die Abbildung

$$(\widetilde{x},s,p,k,t,\tau) \;\mapsto\; R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k$$

aufgrund der Konstruktion in Satz 4.2.2 stetig ist und $\big(R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)\big)_{0\le\tau\le t\le\varepsilon_0}$ nach (NLP3) für $n \ge b'$ die zahme Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| R_{(\widetilde{x},s,p)}(t,\tau)k \Big\|_n \\ &\le\; \widetilde{M}\Big(1 + |||x|||_{0,n+r} + \|p\|_{n+r} + \|k\|_{n+r}\Big) \end{aligned} \tag{5.33}$$

für alle $(\widetilde{x},s,p) \in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0$, alle $k \in W_0'$ und alle $(t,\tau) \in \Delta_0$ erfüllt, genügt es die Zahmheit der Abbildung

$$(\widetilde{x},s,p,k,t,\tau) \;\mapsto\; T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(\tau)k$$

von $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big) \times (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0) \times V_0 \times E \times \Delta_0$ nach E zu zeigen. Aus Folgerung 3.2.2 erhalten wir für $0 < \widetilde{\delta}_0 < \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{\omega}_0 > \omega_0$ die Darstellung

$$T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(t-\tau)k \;=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda\tau} R\big(\lambda, A_{\widetilde{x},s,p}(t)\big)k \,\mathrm{d}\lambda$$

mit

$$\Gamma_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_\infty(\sigma) := \begin{cases} \widehat{\omega}_0 + \sigma \mathrm{e}^{i\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}} & \text{für} \quad \sigma \ge 0 \\[2ex] \widehat{\omega}_0 + |\sigma| \mathrm{e}^{-i\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}} & \text{für} \quad \sigma \le 0. \end{cases}$$

Ferner definieren wir für $\tau \ne 0$ die folgenden Kurven

$$\Gamma_{\tau,1} : (-\infty, -\tau^{-1}] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\tau,1}(\sigma) := \widehat{\omega}_0 + |\sigma| \mathrm{e}^{-i\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}$$

$$\Gamma_{\tau,2} : [-\tfrac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}, \tfrac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}] \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\tau,2}(\sigma) := \widehat{\omega}_0 + \tau^{-1}\mathrm{e}^{i\sigma}$$

und

$$\Gamma_{\tau,3} : [\tau^{-1}, \infty) \to \mathbb{C}, \qquad \Gamma_{\tau,3}(\sigma) := \widehat{\omega}_0 + \sigma \mathrm{e}^{i\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}.$$

Dann folgt mittels (NLP1) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\left\|T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(\tau)k\right\|_n &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Gamma_\infty} \mathrm{e}^{\lambda\tau} R\big(\lambda, \mathrm{D}_x f(t+s,\widetilde{x}(t),p)\big)k\,\mathrm{d}\lambda\right\|_n \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Gamma_{\tau,1}+\Gamma_{\tau,2}+\Gamma_{\tau,3}} \mathrm{e}^{\lambda\tau} R\big(\lambda, \mathrm{D}_x f(t+s,\widetilde{x}(t),p)\big)k\,\mathrm{d}\lambda\right\|_n \\
&\leq \frac{M\mathrm{e}^{\widehat{\omega}_0\tau}}{\pi}\int\limits_{\tau^{-1}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sigma\tau\sin\frac{\widetilde{\delta}_0}{2}}}{\left|\sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}+\widehat{\omega}_0-\omega_0\right|}\,\mathrm{d}\sigma\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r}+\|p\|_{n+r}+\|k\|_n\Big) \\
&+ \frac{M\mathrm{e}^{\widehat{\omega}_0\tau}}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}^{-\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\cos\sigma}}{\tau|\tau^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}+\widehat{\omega}_0-\omega_0|}\,\mathrm{d}\sigma\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r}+\|p\|_{n+r}+\|k\|_n\Big) \\
&\leq \frac{M\mathrm{e}^{\widehat{\omega}_0\tau}}{2\pi\cos\frac{\widetilde{\delta}_0}{2}}\left(2\int\limits_{\sin\frac{\widetilde{\delta}_0}{2}}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sigma}}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{-\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}^{-\frac{\pi+\widetilde{\delta}_0}{2}}\mathrm{e}^{\cos\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right)\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r}+\|p\|_{n+r}+\|k\|_n\Big)
\end{aligned}
$$

für alle $(\widetilde{x},s,p)\in \mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0$, alle $k\in W_0$ alle $t\in[0,\varepsilon_0]$ und alle $\tau\geq 0$, d.h., die Abbildung

$$(\widetilde{x},s,p,k,t,\tau) \quad\mapsto\quad T_{(\widetilde{x},s,p,t)}(t-\tau)k$$

erfüllt eine zahme Abschätzung auf $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times V_0\times W_0\times\Delta_0$. Somit erhalten wir aus der Darstellung (5.32) und der Abschätzung (5.33) wie in Satz 5.2.2 eine zahme Abschätzung der Form

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\left|\dot{h}(\widetilde{x},s,x,p,k)\right|\right|\right|_{0,n} \\
&\leq\ M''\Big(1+|||\widetilde{x}|||_{0,n+r''}+\|x\|_{n+r''}+\|p\|_{n+r''}+\|k\|_{n+r''}\Big)
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

auf einer Umgebung von $(\widetilde{x}_0,s_0,x_0,p_0,0)$ mit $\widetilde{x}_0\equiv x_0$. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass (5.34) auf $\mathrm{C}^1\big([0,\varepsilon_0],U_0\big)\times(s_0-\delta_0,s_0+\delta_0)\times U_0\times V_0\times\mathrm{C}\big([0,\varepsilon_0],W_0\big)$ gilt. Daraus folgt jedoch, dass f die Eigenschaft (Z′) auf $\mathbb{U}_0$ besitzt.

Somit haben wir gezeigt, dass f die Vorausstzungen (E′), (S′) und (Z′) auf $\mathbb{U}_0$ erfüllt. Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus Folgerung 5.2.1. ■

Bemerkung 5.2.2. Die Frage, inwieweit die Voraussetzung (NLP3) in Satz 5.2.3 durch ein einfacheres Kriterium ersetzbar ist, konnten wir nicht endgültig klären. Hierin sehen wir einen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen.

Ein Anwendungsbeispiel für Satz 5.2.2 auf partielle Differentialgleichungen findet man im anschließenden Kapitel 6.

Kapitel 6

Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Im Schlusskapitel unserer Arbeit wollen wir an einem Beispielen die Anwendbarkeit unserer Ergebnisse auf partielle Differentialgleichungen verdeutlichen. Entscheidend für die „erfolgreiche“ Anwendung der Sätze 5.2.2 und 5.2.3 sind dabei zwei Voraussetzungen:

(a) Die partielle Differentialgleichung muß eine „ausgezeichnete“ Variable besitzten, so dass sich die Gleichung in einem geeigneten Funktionenraum in die abstrakte Form eines Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) \;=\; f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \tag{6.1}$$

bringen läßt. Wir bezeichnen diese Variable mit „t“, da sie in vielen Fällen die Zeit in einem physikalischen System repräsentiert.

(b) Es muß eine „gute“ Lösungstheorie für die Linearisierung

$$\dot{h}(t) \;=\; \mathrm{D}_x f\big(t, x(t)\big) h(t), \quad h(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \tag{6.2}$$

von (6.1) existieren, damit die zahme Lösbarkeit von (6.2) in einer Umgebung des Startwerts (t_0, x_0) garantiert werden kann.

Die Methoden zum Beweis der zahmen Lösbarkeit von (6.2) sind im Allgemeinen vom Typ der Linearisierung abhängig, wie das folgende Beispiel zeigt. So können wir in Beispiel 6.1 die lineare Gleichung nahezu „explizit“ lösen und erhalten dadurch die gewünschten Abschätzungen.

6.1 Nichtlineare Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten *nichtlineare*, partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$\partial_t u \;=\; f(t, \xi, u, \partial_\xi u), \quad u(0, \cdot) = u_0, \quad t \geq 0 \tag{6.3}$$

mit $f : (-\beta,\beta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(t,\xi,u,p) \mapsto f(t,\xi,u,p)$ und $u_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Wir wollen im Weiteren (6.3) in ein abstraktes Anfangswertproblem umformulieren und mittels Satz 5.2.2 eine lokale Lösung sichern. Dazu müssen wir zuerst einen geeigneten Lösungsraum E suchen. Bei einem konkreten Problem hängt die Wahl von E von den gegebenen Daten f und u_0 ab. Wir nehmen uns hier jedoch die Freiheit, erst E festzulegen und dann f und u_0 entsprechend zu wählen.

Sei also $E := \{u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) \mid \partial^\alpha u \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^m\}$ versehen mit dem Fundamentalsystem

$$\|u\|_n := \left(\sum_{\substack{0\le k\le n\\ |\alpha|=k}} \|\partial^\alpha u\|^2\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

wobei $\|\cdot\|$ die L_2-Norm auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne. Ferner sei $u_0 \in E$ und $f \in \mathrm{C}^{2,\infty}\big((-\beta,\beta)\times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m,\mathbb{R}\big)$, d.h., alle partiellen Ableitungen der Form $\partial_t^{k_t}\partial_x^{k_x}\partial_u^{k_u}\partial_p^{k_p} f$ mit $k_t \in \{0,1,2\}$, $k_u \in \mathbb{N}_0$ und $k_x, k_p \in \mathbb{N}_0^m$ existieren und sind stetig. Weiterhin erfülle f die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Abbildung f besitzt eine Faktorisierung $f(t,x,u,p) = a(x)\widetilde{f}(t,u,p)$ mit $a \in \mathrm{C}_b^\infty\big(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\big)$ und $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^{2,\infty}\big((-\beta,\beta)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\big)$.

(b) Für alle $t \in (-\beta,\beta)$ gilt $f(t,0,0) = 0$.

Dann definieren wir

$$F : (-\beta,\beta)\times E \to E, \qquad F(t,u)(\xi) := a(\xi) f\big(t, u(\xi), \partial_\xi u(\xi)\big),$$

mit $\partial_\xi u(\xi) := \big(\partial_1 u(\xi),\dots,\partial_m u(\xi)\big)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$. Somit können wir (6.3) auf die abstrakte Form[1]

$$\dot{u}(t) = F\big(t,u(t)\big), \quad u(0) = u_0, \quad t \ge 0 \tag{6.4}$$

bringen. Wir zeigen nun, dass F die Voraussetzungen von Satz 5.2.2 erfüllt.

Zur Zahmheit von E: Aus dem Sobolevschen Einbettungssatz [siehe z.B. [Ada75, Thm. 5.4]] folgt für die Sobolev-Räume $\mathrm{H}_2^k(\mathbb{R}^m)$ die Identität

$$E = \mathrm{H}_2^\infty(\mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0}^\infty \mathrm{H}_2^k(\mathbb{R}^m)$$

[1]Man beachte, dass wir *nicht* behaupten, die Gleichnugen (6.3) und (6.4) seien äquivalent.

und somit ist E offensichtlich vollständig. Ferner erhalten wir mittels Fouriertransformation, dass E zahm isomorph (vom Grad 0 zur Basis 0) zu einem zahm spaltenden Unterraum von

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{u} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \;\middle|\; \int\limits_{\mathbb{R}^m} \big(1 + \|\xi\|^2\big)^n |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

ist. Dabei sei $\|\xi\|^2 := |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_m|^2$ und $\widehat{E}$ mit dem Fundamentalsystem

$$\|\widehat{u}\|_n \;:=\; \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \big(1 + \|\xi\|^2\big)^n |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

versehen. Die Zahmheit von E folgt nun unmittelbar aus Lemma 5.1.2 und Beispiel 5.1.6, denn es gilt $\widehat{E} = \mathrm{L}_2^\infty(\mathbb{R}^m, \mathrm{d}\xi, \mathbb{C}, \alpha)$, wobei $\alpha(\xi) = \log \sqrt{1 + \|\xi\|^2}$ und $\mathrm{d}\xi$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne.

Wir beschränken uns im Weiteren auf den Fall $m = 1$ und $a \equiv 1$, da alle Beweisideen für den Fall $m > 1$ oder $a \in \mathrm{C}_b^\infty\big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\big)$ übernommen werden können, die Notation jedoch im Fall $m = 1$ deutlich übersichtlicher bleibt.

Zur Wohldefiniertheit von F: Wir müssen zeigen, dass $F(t, u) \in E$ für alle $(t, u) \in (-\beta, \beta) \times E$ erfüllt ist. Aus $f \in \mathrm{C}^{2,\infty}\big((-\beta, \beta) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$ folgt offensichtlich $F(t, u) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für alle $(t, u) \in (-\beta, \beta) \times E$. Somit genügt es nachzuweisen, dass $\partial_\xi^n F(t, u)$ für alle $(t, u) \in (-\beta, \beta) \times E$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ L_2-integrierbar ist. Sei also $u \in E$ gegeben. Dann gilt

$$\lim_{|\xi| \to \infty} u^{(n)}(\xi) \;=\; 0 \tag{6.5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies erhält man z.B. aus [Ada75, Cor. 3.19 und Cor. 5.15]. Ferner liefert die stetige Differenzierbarkeit von f nach u und p die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}} \Big| f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big) \Big|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(t, 0, 0) + \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) \right) \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_0^1 \partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) u(\xi) + \partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) u'(\xi) \,\mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_u f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big| \|u\|_0 + \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_p f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big| \|u'\|_0 \right)^2$$

$$\leq \Big(M_u \|u\|_0 + M_p \|u'\|_0 \Big)^2$$

Da nach (6.5) die Bilder $\big\{u(\xi) \bigm| \xi\in\mathbb{R}\big\}$ und $\big\{u'(\xi) \bigm| \xi\in\mathbb{R}\big\}$ beschränkt sind, folgen aus der Stetigkeit von f die Abschätzungen

$$M_u \quad := \quad \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_u f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big| < \infty$$

und

$$M_p \quad := \quad \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_p f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big| < \infty.$$

Somit ist $F(t,u)$ für jedes $t\in(-\beta,\beta)$ L_2-integrierbar. Ferner erhalten wir aus

$$\partial_\xi F(t,u)(\xi) \quad = \quad \partial_x f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)u'(\xi) \; + \; \partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)u''(\xi).$$

die Abschätzung

$$\big\|\partial_\xi F(t,u)\big\|_0 \;\leq\; \big\|\partial_x f(t,u,u')u'\big\|_0 \;+\; \big\|\partial_p f(t,u,u')u''\big\|_0$$

$$\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \Big|\partial_x f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\Big| \big\|u'\big\|_0 \;+\; \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \Big|\partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\Big| \|u''\|_0.$$

Die Stetigkeit von f und (6.5) wiederum liefern

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \big|\partial_x f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\big| < \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \big|\partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\big| < \infty.$$

Somit ist auch $\partial_\xi F(t,u)$ L_2-integrierbar. Für die höheren Ableitungen ergibt sich die L_2-Integrierbarkeit völlig analog, d.h., F ist wohldefiniert.

Zur Stetigkeit von F: Sei $(t_0, u_0) \in (-\beta, \beta) \times E$ gegeben. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\Big\| F(t,u) - F(t_0,u_0) \Big\|_0^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big| f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big) - f\big(t_0, u_0(\xi), u_0'(\xi)\big) \Big|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Bigg| \int_0^1 \partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) u(\xi) + \partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) u'(\xi) \,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad - \int_0^1 \partial_u f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) u_0(\xi) + \partial_p f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) u_0'(\xi) \,\mathrm{d}\tau \Bigg|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Bigg| \int_0^1 \partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) - \partial_u f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \,\mathrm{d}\tau \, u(\xi) \\
&\qquad + \int_0^1 \partial_u f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \,\mathrm{d}\tau \, \big(u(\xi) - u_0(\xi)\big) \\
&\qquad + \int_0^1 \partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) - \partial_p f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \,\mathrm{d}\tau \, u'(\xi) \\
&\qquad + \int_0^1 \partial_p f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \,\mathrm{d}\tau \, \big(u'(\xi) - u_0'(\xi)\big) \Bigg|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq \Big(M_u \|u\|_0 \;+\; M_u' \|u - u_0\|_0 \;+\; M_p \|u'\|_0 \;+\; M_p' \|u' - u_0'\|_0 \Big)^2
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
M_u &:= \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \tau \in [0,1]}} \Big| \partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) - \partial_u f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \Big| \\
M_u' &:= \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \tau \in [0,1]}} \Big| \partial_u f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \Big| \\
M_p &:= \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \tau \in [0,1]}} \Big| \partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big) - \partial_p f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \Big| \\
M_p' &:= \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \tau \in [0,1]}} \Big| \partial_p f\big(t_0, \tau u_0(\xi), \tau u_0'(\xi)\big) \Big|.
\end{aligned}
$$

Ferner erhalten wir aus dem Sobolevschen Einbettungssatz für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C \geq 0$, so dass die Abschätzung

$$\|u\|_{\sup,n} \;:=\; \max_{0\leq k\leq n} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |u^{(k)}(\xi)| \;\leq\; C\|u\|_{n+1} \tag{6.6}$$

für alle $u \in E$ erfüllt ist. Somit folgen aus der Beschränktheit von $\{u_0(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ und $\{u_0'(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$, der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf kompakten Mengen und der Sobolev-Ungleichung (6.6) die Abschätzungen

$$M_u' < \infty, \quad M_p' < \infty, \quad M_u \to 0 \qquad \text{und} \qquad M_p \to 0$$

für $(t,u) \to (t_0,u_0)$. Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} &\Big\| F(t,u) - F(t_0,u_0) \Big\|_0 \\ &\leq \Big(M_u\|u\|_0 \;+\; M_u'\|u-u_0\|_0 \;+\; M_p\|u'\|_0 \;+\; M_p'\|u'-u_0'\|_0 \Big) \;\to\; 0 \end{aligned}$$

für $(t,u) \to (t_0,u_0)$. Analog ergeben sich für $n \geq 1$ die Abschätzungen

$$\Big\| F(t,u) - F(t_0,u_0) \Big\|_n \;\to\; 0$$

für $(t,u) \to (t_0,u_0)$, d.h., F ist stetig.

Zur Differenzierbarkeit von F: Wir zeigen zuerst, dass die partiellen Ableitungen nach u und t existieren. Dazu sei $(t,u) \in (-\beta,\beta) \times E$ und $h \in E$. Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| F(t,u+\tau h) - F(t,u) - \tau\Big(\partial_u f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)h(\cdot) + \partial_p f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)h'(\cdot)\Big) \Big\|_0^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bigg| \tau \int_0^1 \partial_u f\big(t,u(\xi)+\sigma\tau h(\xi),u'(\xi)+\sigma\tau h'(\xi)\big) - \partial_u f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\,\mathrm{d}\sigma\, h(\xi) \\ &\qquad + \tau \int_0^1 \partial_p f\big(t,u(\xi)+\sigma\tau h(\xi),u'(\xi)+\sigma\tau h'(\xi)\big) - \partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\,\mathrm{d}\sigma\, h'(\xi) \bigg|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\leq\; |\tau|^2\Big(M_u\|h\|_0 \;+\; M_p\|h'\|_0 \Big)^2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} M_u &:= \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ \sigma\in[0,1]}} \Big| \partial_u f\big(t,u(\xi)+\sigma\tau h(\xi),u'(\xi)+\sigma\tau h'(\xi)\big) - \partial_u f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big) \Big| \\ M_p &:= \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ \sigma\in[0,1]}} \Big| \partial_p f\big(t,u(\xi)+\sigma\tau h(\xi),u'(\xi)+\sigma\tau h'(\xi)\big) - \partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big) \Big|. \end{aligned}$$

Aus (6.6) und der gleichmäßigen Stetigkeit von $\partial_u f$ bzw. $\partial_p f$ auf kompakten Mengen folgt nun

$$\frac{1}{|\tau|}\left\|F(t,u+\tau h)-F(t,u)-\tau\Big(\partial_u f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)h(\cdot)+\partial_p f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)h'(\cdot)\Big)\right\|_0$$
$$\leq \Big(M_u\|h\|_0 \;+\; M_p\|h'\|_0\Big) \;\to\; 0.$$

Die entsprechenden Abschätzungen für $n \geq 1$ zeigt man völlig analog. Somit ist F partiell differenzierbar nach u mit

$$\mathrm{D}_u F(t,u)h(\xi) \;=\; \partial_u f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)h(\xi)+\partial_p f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)h'(\xi).$$

Die Stetigkeit von $D_u F$ erhält man auf die gleiche Art und Weise wie die Stetigkeit von F. Wir betrachten nun die partielle Ableitung nach t. Für $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\|F(t+h,u)-F(t,u)-h\partial_t f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)\Big\|_0^2\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|h\int_0^1 \partial_t f\big(t+\sigma h,u(\xi),u'(\xi)\big)-\partial_t f\big(t,u(\xi),u'(\xi)\big)\,\mathrm{d}\sigma\right|^2\mathrm{d}\xi\\
&= |h|^2\int_{\mathbb{R}}\Bigg|\int_0^1\int_0^1 \partial_u\partial_t f\big(t+\sigma h,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)-\partial_u\partial_t f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\,\mathrm{d}\tau\, u(\xi)\\
&\qquad +\int_0^1 \partial_p\partial_t f\big(t+\sigma h,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)-\partial_p\partial_t f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\,\mathrm{d}\tau\, u'(\xi)\,\mathrm{d}\sigma\Bigg|^2\mathrm{d}\xi\\
&\leq |h|^2\Big(M_u\|u\|_0+M_p\|u'\|_0\Big)^2
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
M_u &:= \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ \tau,\sigma\in[0,1]}}\Big|\partial_u\partial_t f\big(t+\sigma h,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)-\partial_u\partial_t f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big|\\
M_p &:= \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ \tau,\sigma\in[0,1]}}\Big|\partial_p\partial_t f\big(t+\sigma h,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)-\partial_p\partial_t f\big(t,\tau u(\xi),\tau u'(\xi)\big)\Big|.
\end{aligned}$$

Bei den obigen Umformungen haben wir benutzt, dass die Identität $f(t,0,0)=0$ für alle $t\in(-\beta,\beta)$ die Identität $\partial_t f(t,0,0)=0$ für alle $t\in(-\beta,\beta)$ impliziert. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\partial_u\partial_t f$ bzw. $\partial_p\partial_t f$ erhalten wir

$$M_u \;\to\; 0 \qquad \text{und} \qquad M_p \;\to\; 0$$

für $h \to 0$, also gilt

$$\frac{1}{|h|}\Big\|F(t+h,u) - F(t,u) - h\partial_t f\big(t, u(\cdot), u'(\cdot)\big)\Big\|_0 \quad \to \quad 0$$

für $h \to 0$. Die entsprechenden Abschätzungen für $n \geq 1$ ergeben sich wiederum analog zu den obigen Rechnungen. Somit ist F auch stetig partiell differenzierbar nach t mit

$$D_t F(t,u)(\xi) \quad = \quad \partial_t f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big).$$

Aus Satz 2.2.3 folgt nun insgesamt die stetige Differenzierbarkeit von F. Da der Beweis, dass auch die zweite Ableitung von F existiert und stetig ist, mit dem obigen nahezu identisch ist, verzichten wir auf diesen.

Zur Zahmheit von F: Sei $(t_0, u_0) \in (-\beta, \beta) \times E$ gegeben. Dann wählen wir $(t,u) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U$ mit $0 < \delta < \min\{t_0 - \beta, t_0 + \beta\}$ und $U := u_0 + B_{1,2} = \big\{u \in E \;\big|\; \|u - u_0\|_2 < 1\big\}$. Wie zuvor im Beweis der Wohldefiniertheit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\big\|F(t,u)\big\|_0^2 \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \Big|f(t, u(\xi), u'(\xi))\Big|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq\; \left(\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big)\Big| \|u\|_0 + \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big)\Big| \|u'\|_0\right)^2
\end{aligned}$$

Aus (6.5), (6.6) und der Stetigkeit von f folgt, dass es Konstanten $M_u \geq 0$ und $M_p \geq 0$ gibt mit

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_u f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big)\Big| \;&\leq\; M_u \\
\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R},\\ \tau\in[0,1]}} \Big|\partial_p f\big(t, \tau u(\xi), \tau u'(\xi)\big)\Big| \;&<\; M_p.
\end{aligned}$$

für alle $(t,u) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U$. Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\big\|F(t,u)\big\|_0 \;\leq\; M_u\|u\|_0 + M_p\|u'\|_0 \;\leq\; \max\big\{M_u, M_p\big\}\|u\|_1$$

für alle $(t,u) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U$. Wir betrachten nun eine beliebige Ableitung von $F(t,u)$ nach ξ. Wie in Beispiel 5.1.12 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\partial_\xi^k F(t,u)(\xi) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{l} \sum_{\substack{k_i \geq 0,\\ \sum_{i=1}^{l} k_i = k}} \partial_u^j \partial_p^{l-j} f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big) u^{(k_1)}(\xi) \cdots u^{(k_j)}(\xi) u'^{(k_{j+1})}(\xi) \cdots u'^{(k_l)}(\xi)
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Dreiecksungleichung genügt es offensichtlich im Weiteren nur die einzelnen Terme

$$\partial_u^j \partial_p^{l-j} f\big(t, u(\cdot), u'(\cdot)\big) u^{(k_1)}(\cdot) \cdots u^{(k_j)}(\cdot) u'^{(k_{j+1})}(\cdot) \cdots u'^{(k_l)}(\cdot)$$

der obigen Summe zu untersuchen. Sei nun o.B.d.A. $k_l \neq 0$ und $l - j \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\Big\| \partial_u^j \partial_p^{l-j} f\big(t, u(\cdot), u'(\cdot)\big) u^{(k_1)}(\cdot) \cdots u^{(k_j)}(\cdot) u'^{(k_{j+1})}(\cdot) \cdots u'^{(k_l)}(\cdot) \Big\|_0 \\ &\leq\ M_{j,l}(t,u) \|u\|_{\sup,k_1} \cdots \|u\|_{\sup,k_j} \cdot \|u'\|_{\sup,k_j+1} \cdots \|u'\|_{\sup,k_{l-1}} \cdot \|u'\|_{k_l} \end{aligned} \tag{6.7}$$

mit

$$M_{j,l}(t,u) \ := \ \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \Big| \partial_u^j \partial_p^{l-j} f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big) \Big|.$$

Nach (6.5), (6.6) und der Stetigkeit von $\partial_u^j \partial_p^{l-j} f$ wegen existiert wiederum ein $M_{j,l} \geq 0$ mit

$$\sup_{\substack{(t,u) \in \\ (t-\delta, t+\delta) \times U}} \ \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \Big| \partial_u^j \partial_p^{l-j} f\big(t, u(\xi), u'(\xi)\big) \Big| \ \leq \ M_{j,l}$$

für alle $(t,u) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U$. Ferner erhalten wir aus der Interpolationsungleichung für das Fundamentalsystem $\big(\| \cdot \|_{\sup,n}\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$ [siehe [Ham82, Thm. 2.2.1]] die Abschätzungen

$$\big\|u\big\|_{\sup,k_i} \ \leq \ M \big\|u\big\|_{\sup,s_1}^{\frac{k_i}{s_1}} \big\|u\big\|_{\sup,0}^{\frac{s_1 - k_i}{s_1}}$$

für $1 \leq i \leq j$ und $s_1 := \sum_{i=1}^{j} k_i$ sowie

$$\big\|u'\big\|_{\sup,k_i} \ \leq \ M \big\|u'\big\|_{\sup,s_2}^{\frac{k_i}{s_2}} \big\|u'\big\|_{\sup,0}^{\frac{s_2 - k_i}{s_2}},$$

für $j + 1 \leq i \leq l - 1$ und $s_2 := \sum_{i=j+1}^{l-1} k_i$. Daraus folgt

$$\|u\|_{\sup,k_1} \cdots \|u\|_{\sup,k_j} \ \leq \ M^j \|u\|_{\sup,s_1} \|u\|_{\sup,0}^{j-1}$$

und

$$\|u'\|_{\sup,k_j+1} \cdots \|u'\|_{\sup,k_{l-1}} \ \leq \ M^{l-j-1} \|u'\|_{\sup,s_2} \|u'\|_{\sup,0}^{l-j-2}$$

Somit erhalten wir aus (6.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big\|\partial_u^j\partial_p^{l-j}f\big(t,u(\cdot),u'(\cdot)\big)u^{(k_1)}(\cdot)\cdots u^{(k_j)}(\cdot)u'^{(k_{j+1})}(\cdot)\cdots u'^{(k_l)}(\cdot)\Big\|_0\\
&\leq\ M_{j,l}M^{l-1}\|u\|_{\sup,s_1}\|u\|_{\sup,0}^{j-1}\cdot\|u'\|_{\sup,s_2}\|u'\|_{\sup,0}^{l-j-2}\cdot\|u'\|_{k_l}\\
&\leq\ M_{j,l}M^{l-1}\|u\|_{\sup,1}^{l-1}\cdot\|u\|_{\sup,s_1}\cdot\|u'\|_{\sup,s_2}\cdot\|u'\|_{k_l}\\
&\leq\ C^3M_{j,l}M^{l-1}\|u\|_2^{l-1}\cdot\|u\|_{s_1+1}\cdot\|u'\|_{s_2+1}\cdot\|u'\|_{k_l}\\
&\leq\ C^3M_{j,l}M'M^{l-1}\|u\|_2^{l-1}\cdot\|u\|_{s_1+1}\cdot\|u'\|_{s_2+k_l+1}\cdot\|u'\|_0\\
&\leq\ C^3M_{j,l}M'M^{l-1}\|u\|_2^{l}\cdot\|u\|_{s_1+1}\cdot\|u\|_{s_2+k_l+2}\\
&\leq\ C^3M_{j,l}(M')^2M^{l-1}\|u\|_2^{l}\cdot\|u\|_0\cdot\|u\|_{k+3}
\end{aligned}$$

für alle $(t,u)\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\times U$. Dabei haben wir in den letzten drei Umformungen die Interpolationsungleichung für das Fundamentalsystem $\big(\|\cdot\|_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ benutzt und dies durch die Konstante M' angedeutet [siehe [Ham82, Part II, Thm. 2.2.1] oder [Ada75, Ch. IV, Thm. 4.17]]. Somit erfüllt F eine zahme Abschätzung vom Grad $r=3$ zur Basis $b=0$ in einer $\|\cdot\|_2$-Umgebung von (t_0,u_0) und daraus folgt die Zahmheit von F. Analog zeigt man die Zahmheit der ersten und zweiten Ableitung.

Abschließend müssen wir noch die Eigenschaften (NLH1) und (NLH2) nachweisen.

Zu (NLH1): Mit Hilfe der Methode der Charakteristiken [siehe z.B. [Joh82, Eva98]] zeigt man leicht, dass die *lineare*, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\partial_t h(t,\xi)\ =\ \partial_p f\big(s_0,u_0(\xi),u_0'(\xi)\big)\partial_\xi h(t,\xi)\ +\ \partial_u f\big(s_0,u_0(\xi),u_0'(\xi)\big)h(t,\xi)$$

mit $h(0,\cdot)=h$ für $h\in E$, alle $(s_0,u_0)\in(-\beta,\beta)\times E$ eine eindeutige C^∞-Lösung $(t,\xi)\mapsto h_{(s_0,u_0)}(t,\xi)$ auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ besitzt. Dies ist aber äquivalent dazu, dass der lineare Operator $D_uF(s_0,u_0)$ der infinitesimale Generator einer C^∞-Halbgruppe [2] $\big(T_{(s_0,u_0)}(t)\big)_{t\geq0}$ ist. Ferner erhält man aus den Lösungen der charakteristischen Gleichungen die Darstellung

$$\begin{aligned}
T_{(s_0,u_0)}(t)h(\xi)\ &=\ h_{(s_0,u_0)}(t,\xi)\\
&=\ \exp\left(\int_0^t\partial_u f\big(s_0,u_0\big(\Phi_{\tau-t}(\xi;s_0,u_0)\big),u_0'\big(\Phi_{\tau-t}(\xi;s_0,u_0)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\right)h\big(\Phi_{-t}(\xi;s_0,u_0)\big),
\end{aligned}$$

[2] Genau genommen, ist $D_uF(s_0,u_0)$ sogar der Erzeuger einer C^∞-*Gruppe*. Da wir aber an „Vorwärtslösungen" interessiert sind, betrachten wir im Weiteren nur die zugehörige C^∞-Halbgruppe

wobei $\Phi_t(\xi; s_0, u_0)$ den Fluss der autonomen Differentialgleichung

$$\dot{\xi} \;=\; -\partial_p f\bigl(s_0, u_0(\xi), u_0'(\xi)\bigr) \tag{6.8}$$

bezeichnet. Man beachte, dass dieser für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, da die rechte Seite von (6.8) in ξ beschränkt, also insbesondere linear beschränkt ist. Somit haben wir gezeigt, dass f die Eigenschaft (NLH1) erfüllt.

Zu (NLH2): Sei $(s_0, u_0) \in (-\beta, \beta) \times E$ gegeben. Dann wählen wir wie zuvor $0 < \delta < \min\{s_0 - \beta, s_0 + \beta\}$, $U := u_0 + B_{1,2} = \bigl\{u \in E \bigm| \|u - u_0\|_2 < 1\bigr\}$ und $(s, u) \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \times U$. Ferner betrachten wir die zugehörige Halbgruppe $\bigl(T_{(s,u)}(t)\bigr)_{t \geq 0}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Bigl\|T_{(s,u)}(t)h\Bigr\|_0 \\
&= \left\| \exp\left(\int_0^t \partial_u f\bigl(s, u(\Phi_{\tau-t}(\cdot; s, u)), u'(\Phi_{\tau-t}(\cdot; s, u))\bigr)\, \mathrm{d}\tau \right) h\bigl(\Phi_{-t}(\cdot; s, u)\bigr) \right\|_0 \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \exp\left(\int_0^t \partial_u f\bigl(s, u(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u)), u'(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u))\bigr)\, \mathrm{d}\tau \right) \right| \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \Bigl| h\bigl(\Phi_{-t}(\xi; s, u)\bigr) \Bigr|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \\
&\leq M_{(s,u)} \left(\int_{\mathbb{R}} \bigl|h(\zeta)\bigr|^2 \bigl|\partial_\zeta \Phi_t(\zeta; s, u)\bigr|\, \mathrm{d}\zeta \right)^{1/2} \\
&\leq M_{(s,u)} \Bigl(\sup_{\zeta \in \mathbb{R}} \bigl|\partial_\zeta \Phi_t(\zeta; s, u)\bigr| \Bigr)^{1/2} \|h\|_0
\end{aligned} \tag{6.9}$$

mit

$$M_{(s,u)} \;:=\; \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \exp\left(\int_0^t \partial_u f\bigl(s, u(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u)), u'(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u))\bigr)\, \mathrm{d}\tau \right) \right|.$$

Wie im Beweis der Zahmheit von F erhalten wir eine Konstante $M \geq 0$ mit

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \Bigl| \partial_u f\bigl(s, u(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u)), u'(\Phi_{\tau-t}(\xi; s, u))\bigr) \Bigr| \;<\; M$$

für alle $(s, u) \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \times U$. Daraus folgt $M_{(s,u)} \leq \mathrm{e}^{Mt}$ für alle $(s, u) \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \times U$ und alle $t \geq 0$. Somit benötigen wir noch eine geeignete Abschätzung des

Terms $\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\big|\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u)\big|$. Wir wissen, dass $\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u)$ die zu (6.8) zugehörige Variationsgleichung

$$\partial_t\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u) \quad = \quad -\mathrm{D}_\zeta\partial_p f\big(s,u(\zeta),u'(\zeta)\big)\bigg|_{\zeta=\Phi_t(\zeta;s,u)}\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u) \qquad (6.10)$$

mit $\partial_\zeta\Phi_0(\zeta;s,u)=1$ für alle $\zeta\in\mathbb{R}$ und alle $t\in R$ erfüllt [siehe z.B. [Ama90, Ch. II,Thm. 9.2]]. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_\zeta\partial_p f\big(s,u(\zeta),u'(\zeta)\big)\bigg|_{\zeta=\Phi_t(\zeta;s,u)}\\
&= \partial_u\partial_p f\big(s,u(\Phi_t(\zeta;s,u)),u'(\Phi_t(\zeta;s,u))\big)u'(\Phi_t(\zeta;s,u))\\
&+ \partial_p^2 f\big(s,u(\Phi_t(\zeta;s,u)),u'(\Phi_t(\zeta;s,u))\big)u''(\Phi_t(\zeta;s,u)).
\end{aligned}$$

Somit liefern (6.5), (6.6) und die Stetigkeit von $\partial_u\partial_p f$ bzw. $\partial_p^2 f$ eine Konstante $M_p\geq 0$ mit

$$\max\Big\{\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\Big|\partial_u\partial_p f\big(s,u(\zeta),u'(\zeta))\big)\Big|,\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\Big|\partial_p^2 f\big(s,u(\zeta)),u'(\zeta))\big)\Big|\Big\} \quad \leq \quad M_p$$

für alle $(s,u)\in(s_0-\delta,s_0+\delta)\times U'$ und $U':=u_0+B_{1,3}=\big\{u\in E\;\big|\;\|u-u_0\|_3<1\big\}$. Daher folgt aus der Variationsgleichung (6.10) und dem Gronwall-Lemma [siehe z.B. [Ama90, Ch. II, Lemma 6.1]] die Abschätzung

$$\Big|\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u)\Big| \quad \leq \quad \mathrm{e}^{M_p t}|\partial\zeta\Phi_0(\zeta;s,u)| \;=\; \mathrm{e}^{M_p t}$$

für alle $(s,u)\in(s_0-\delta,s_0+\delta)\times U'$ alle $\zeta\in\mathbb{R}$ und alle $t\geq 0$. Damit erhalten wir insgesamt aus (6.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big\|T_{(s,u)}(t)h\Big\|_0 \quad &\leq \quad \mathrm{e}^{Mt}\Big(\sup_{\zeta\in\mathbb{R}}\big|\partial_\zeta\Phi_t(\zeta;s,u)\big|\Big)^{1/2}\|h\|_0\\
&\leq \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+M_p)t}\|h\|_0
\end{aligned}$$

für alle $(s,u)\in(s_0-\delta,s_0+\delta)\times U'$, alle $h\in E$ und alle $t\geq 0$. Daraus folgt

$$\Big\|T_{t_l,u_l}(\tau_l)\cdots T_{t_1,u_1}(\tau_1)h\Big\|_0 \quad \leq \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+M_p)\big(\sum\limits_{i=1}^{l}\tau_i\big)}\|h\|_0 \;\leq\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+M_p)\beta}\|h\|_0$$

für alle $u_i\in U'$, alle $h\in E$, alle $s\in(s_0-\frac{\delta}{2},s_0+\frac{\delta}{2})$, alle endlichen Partitionen $s=t_0\leq\cdots\leq t_l=s+\frac{\delta}{2}$ und alle $\tau_1,\ldots,\tau_l$ mit $0\leq\tau_j\leq t_{j+1}-t_j$. Somit erfüllt f eingeschränkt auf $(s_0-\delta,s_0+\delta)\times U'$ die Voraussetzung (NLH2) für $n=0$. Wir zeigen nun, dass (NLH2) auch für $n \geq 1$ auf $(s_0 - \delta, s_0 + \delta) \times U'$ gilt. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $n = 1$, da man die höheren Abschätzungen in ähnlicher Art und Weise erhält. Sei also $s \in (s_0 - \frac{\delta_0}{2}, s_0 + \frac{\delta_0}{2})$ und $u_j \in U'$ für $j = 1, \ldots, l$. Ferner sei $s = t_0 \leq \cdots \leq t_l = s + \frac{\delta}{2}$ eine endliche Partition von $[s, s + \frac{\delta_0}{2}]$ und es gelte $0 \leq \tau_j \leq t_{j+1} - t_j$ für $j = 1, \ldots, l$. Weiterhin definieren wir als abkürzende Schreibweise $\Phi^j_\tau(\xi) := \Phi_\tau(\xi; t_j, u_j)$ für $j = 1, \ldots, l$. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&T_{(t_l,u_l)}(\tau_l) \cdots T_{(t_1,u_1)}(\tau_1) h(\xi) \\
&\quad = T_{(t_l,u_l)}(\tau_l) \cdots T_{(t_2,u_2)}(\tau_2) \circ \\
&\qquad \circ \left(\exp\left(\int_0^{\tau_1} \partial_u f\big(t_1, u_1\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1}(\cdot)\big), u_1'\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1}(\cdot)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right) h\big(\Phi^1_{-\tau_1}(\cdot)\big) \right)(\xi) \\
&= \exp\left(\int_0^{\tau_l} \partial_u f\big(t_l, u_l\big(\Phi^l_{\tau-\tau_l}(\xi)\big), u_1'\big(\Phi^l_{\tau-\tau_l}(\xi)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right) \times \cdots \times \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^{\tau_1} \partial_u f\big(t_1, u_1\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_1'\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right) \times \\
&\quad \times h\big(\Phi^1_{-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big).
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun einen einzelnen Faktors des obigen Produkts. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\partial_\xi \left(\exp\left(\int_0^{\tau_j} \partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right) \right) \\
&\quad = \exp\left(\int_0^{\tau_j} \partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right) \times \\
&\qquad \times \partial_\xi \left(\int_0^{\tau_j} \partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\, \mathrm{d}\tau \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\int_0^{\tau_j} \partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\right)\times\\
&\quad\times\left(\int_0^{\tau_j} \partial_u^2 f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\times\right.\\
&\qquad\qquad u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\partial_\xi\Big((\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi))\Big)\\
&\qquad\quad+\ \partial_p\partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\times\\
&\qquad\qquad\left. u_j''\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\partial_\xi\Big((\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi))\Big)\,\mathrm{d}\tau\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\partial_\xi\Big(h(\Phi^1_{\tau_1}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi))\Big)\\
&\qquad = \ h'(\Phi^1_{\tau_1}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi))\partial_\xi\Big((\Phi^1_{-\tau_1}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi))\Big).
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_\xi\left(\exp\left(\int_0^{\tau_j}\partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\right)\right)\right\|_{\sup,0}\\
&\qquad\qquad\le \tau_j M_u \mathrm{e}^{M\tau_j + M_p\beta}\|u'\|_{\sup,1}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\Big\|h(\Phi^1_{-\tau_1}\circ\cdots\circ\Phi_{-\tau_l}(\cdot))\Big\|_0 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \big|h(\zeta)\big|^2\Big|\mathrm{D}_\zeta(\Phi^l_{\tau_l}\circ\cdots\circ\Phi^1_{\tau_1}(\zeta))\Big|\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\\
&\le \mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_p\beta}\|h\|_0.
\end{aligned}
$$

Dabei sei $M_u \geq 0$ so gewählt, dass die Abschätzung

$$
\max\left\{\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big|\partial_u^2 f(s,u(\xi),u'(\xi))\Big|,\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big|\partial_u\partial_p f(s,u(\xi),u'(\xi))\Big|\right\} \ \le\ M_u
$$

für alle $(s,u) \in (s_0-\delta, s_0+\delta) \times U'$ gilt. Daraus folgen die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \exp\Bigg(\int_0^{\tau_l} \partial_u f\big(t_l, u_l\big(\Phi^l_{\tau-\tau_l}(\xi)\big), u_l'\big(\Phi^l_{\tau-\tau_l}(\xi)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg) \times \cdots \times \\
&\quad \times \partial_\xi\Bigg(\exp\Bigg(\int_0^{\tau_j} \partial_u f\big(t_j, u_j\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_j'\big(\Phi^j_{\tau-\tau_j} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg)\Bigg) \times \\
&\quad \times \cdots \times \exp\Bigg(\int_0^{\tau_1} \partial_u f\big(t_1, u_1\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big), u_1'\big(\Phi^1_{\tau-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big)\big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg) \times \\
&\quad \times h\big(\Phi^1_{-\tau_1} \circ \cdots \circ \Phi_{-\tau_l}(\xi)\big) \Bigg\|_0 \\
\leq\ & \mathrm{e}^{M\tau_j} \cdots \mathrm{e}^{M\tau_{j+1}} \Big(\tau_j M_u \mathrm{e}^{M\tau_j + M_p\beta} \|u'\|_{\sup,1}\Big) \mathrm{e}^{M\tau_{j-1}} \cdots \mathrm{e}^{M\tau_1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}M_p\beta} \|h\|_0 \\
=\ & \tau_j M_u \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+3M_p)\beta} \|u_j'\|_{\sup,1} \|h\|_0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\Big\| \partial_\xi T_{(t_l,u_l)}(\tau_l) \cdots T_{(t_1,u_1)}(\tau_1) h \Big\|_0 \\
&\quad \leq\ M_u \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+3M_p)\beta} \|h\|_0 \Big(\max_{1\leq j\leq l} \|u_j'\|_{\sup,1}\Big) \left(\sum_{j=1}^{l} \tau_j \right) \ +\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+M_p)\beta} \|h'\|_0 \\
&\quad \leq\ C M_u \beta \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+3M_p)\beta} \|h\|_0 \max_{1\leq j\leq l} \|u_j'\|_3 \ +\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2M+M')\beta} \|h\|_1
\end{aligned}$$

Damit erfüllt f auch für $n = 1$ die Eigenschaft (NLH2) auf $(s_0-\delta, s_0+\delta)$. Die entsprechenden Abschätzungen für $n \geq 2$ erhält man analog zu den obigen Rechnungen. Man beachte dabei, dass sich die höheren Ableitungen von $\Phi_t(\xi; s, u)$ nach ξ wiederum mittels der Variationsgleichung (6.10) abschätzen lassen. So gilt z.B.

$$\begin{aligned}
&\partial_t \partial_\xi^2 \Phi_t(\xi; s, u) \\
&\quad = -\mathrm{D}_\xi \partial_p f(s, u(\xi), u'(\xi))\Big|_{\xi=\Phi_t(\xi;s,u)} \partial_\xi^2 \Phi_t(\xi; s, u) \\
&\qquad - \mathrm{D}_\xi^2 \partial_p f(s, u(\xi), u'(\xi))\Big|_{\xi=\Phi_t(\xi;s,u)} \Big(\partial_\xi \Phi_t(\xi; s, u)\Big)^2
\end{aligned}$$

und $\partial_\xi \Phi_0 \xi; s, u = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Daraus folgt mit Hilfe des Gronwall-Lemmas

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_\xi^2 \Phi_t(\xi; s, u)\right| \\
&\quad \leq \int_0^t \mathrm{e}^{M'(t-\tau)} \left| \mathrm{D}_\xi^2 \partial_p f(s, u(\xi), u'(\xi)) \Big|_{\xi=\Phi_\tau(\xi;s,u)} \Big(\partial_\xi \Phi_\tau(\xi; s, u)\Big)^2 \right| \mathrm{d}\tau \\
&\quad \leq \mathrm{e}^{2M_p t} \|u'\|_{\sup,1}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir insgesamt gezeigt, dass f alle Voraussetzungen des Satzes 5.2.2 erfüllt. Daher erhalten wir folgenden Satz.

Satz 6.1.1. *Sei* $E = \mathrm{H}_2^\infty(\mathbb{R}^m)$ *und* $f \in \mathrm{C}^{2,\infty}\big((-\beta, \beta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}\big)$. *Ferner erfülle* f *die folgenden Voraussetzungen:*

(a) Die Abbildung f *besitzt eine Faktorisierung* $f(t, x, u, p) = a(x)\widetilde{f}(t, u, p)$ *mit* $a \in \mathrm{C}_b^\infty\big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\big)$ *und* $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^{2,\infty}\big((-\beta, \beta) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}\big)$.

(b) Für alle $t \in (-\beta, \beta)$ *gilt* $f(t, 0, 0) = 0$.

Dann ist das Anfangswertproblem

$$\partial_t u \;=\; f(t, \xi, u, \partial_\xi u), \quad u(0, \cdot) = u_0, \quad t \geq 0 \tag{6.11}$$

lokal eindeutig (in E) lösbar. Ferner erzeugt (6.11) einen lokalen, C^2*-zahmen Halbfluss*[3].

[3]Man kann zeigen, dass (6.11) sogar einen lokalen, C^2-zahmen (Pseudo)-*Fluss* erzeugt [vgl. Fußnote, Seite 222]

Anhang

Wir liefern an dieser Stelle zwei Beweise aus Kapitel 1 nach, da wir Satz 1.2.7 und Folgerung 1.2.3 nur als Übungsaufgaben in [Bou87, Ch. III, §3, Ex. 10] gefunden haben und uns keine weitere Referenz bekannt ist.

Satz 1.2.7 *Sei E ein Fréchetraum und F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ eine* nicht *gleichgradig stetige Familie von stetigen, linearen Abbildungen. Dann ist die Menge aller $x \in E$, für die $\Gamma(x) := \{A_\alpha x \,|\, \alpha \in I\} \subset F$ unbeschränkt ist, von zweiter Kategorie.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V \subset F$ eine beliebige, abgeschlossene Nullumgebung in F. Dann definieren wir

$$B_{V,n} \;:=\; \big\{x \in E \;\big|\; A_\alpha x \in nV \text{ für alle } \alpha \in I\big\},$$

$$B \;:=\; \{x \in E \mid \Gamma(x) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Da $\big(A_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ nach Voraussetzung *nicht* gleichgradig stetig ist, existiert eine Nullumgebung V' von F derart, dass $B_{V',n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen und nirgends dicht ist. Somit ist

$$B_{V'} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{V',n}$$

von erster Kategorie. Aus $B \subset B_{V'}$ folgt, dass auch B von erster Kategorie und somit $E \setminus B$ von zweiter Kategorie ist, d.h., die die Menge aller $x \in E$, für die $\Gamma(x) := \{A_\alpha x \,|\, \alpha \in I\} \subset F$ unbeschränkt ist, ist von zweiter Kategorie. ■

Folgerung 1.2.3 (Prinzip der kondensierenden Singularitäten) *Sei E ein Fréchetraum und sei F ein beliebiger topologischer Vektorraum. Ferner sei $\big(A_{\alpha,n}\big)_{\alpha\in I_n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von* nicht *gleichgradig stetigen Familien von stetigen linearen Abbildungen. Dann existiert ein $x \in E$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\Gamma_n(x) := \{A_{\alpha,n} x \,|\, \alpha \in I_n\} \subset F$ unbeschränkt ist.*

Beweis: Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Teilmengen

$$C_n \;:=\; E \setminus \big\{x \in E \;\big|\; \Gamma_n(x) \text{ ist beschränkt}\big\} \subset E.$$

Aus dem obigen Satz folgt, dass alle C_n von zweiter Kategorie sind, und somit gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset,$$

d.h., es existiert ein $x \in E$, so dass die Mengen $\Gamma_n(x) := \{A_{\alpha,n}x \,|\, \alpha \in I_n\} \subset E$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt sind. ■

Literaturverzeichnis

[Ada75] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, London, 1975.

[All65] G.R. Allan. A spectral theory for locally convex algebras. *Proc. London Math. Soc.*, 15(3):399–421, 1965.

[Ama90] H. Amann. *Ordinary Differential Equations*, volume 13 of *Studies in Mathematics*. de Gruyter, Berlin, New York, 1990.

[AS67] V.I. Averbuh and O.G. Smolyanov. The theory of differentiation in linear topological spaces. *Russ. Math. Surveys*, 22(6):201–258, 1967.

[Bab74] V.A. Babalola. Semigroups of operators on locally convex spaces. *Transactions Amer. Math. Soc.*, 199:163–179, 1974.

[BB67] P.L. Butzer and H. Berens. *Semi-Groups of Operators and Application*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 145. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Bir35] G. Birkhoff. Integration of functions with values in a Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38:357–378, 1935.

[Boc33] S. Bochner. Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. *Fund. Math.*, 20:262–276, 1933.

[Bou87] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces, Ch. 1-5*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[CH82] S.-N. Chow and J.K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 251. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[Cho85] Y.H. Choe. C_0-semigroups on a locally convex space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 106:293–320, 1985.

[CL55] A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, London, 1955.

[Coh80] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser Verlag, Boston, 1980.

[Dav80] E. B. Davies. *One-Parameter Semigroups.* London Mathematical Society. Monographs 15. Academic Press Inc., London, 1980.

[Dei85] K. Deimlig. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[DS66] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operaters, Part I: General Theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. VII. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3rd edition, 1966.

[Dub82] E. Dubinsky. Nonlinear analysis in different kinds of Fréchet spaces. In *Nonlinear analysis and applications, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 80*, pages 91–116. Dekker, New York, 1982.

[Dun35] N. Dunford. Integration in general analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37:441–453, 1935.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics 19. AMS, Providence Rhode Island, 1998.

[FB66] A. Frölicher and W. Bucher. *Calculus in vector spaces without norm.* Lecture Notes in Math. 30. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.

[FK88] A. Frölicher and A. Kriegl. *Linear Spaces and Differentiation Theory.* Wiley Series in Pure and Applied Math. J. Wiley & Sons, Chichester (UK), 1988.

[Gel38] I.M. Gelfand. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. *Mat. Sbornik N. S. 4*, 46:235–286, 1938.

[GWS72] H. G. Garnir, M. De Wilde, and J. Schmets. *Analyse Fonctionnelle II: Mesure et Intégration dans l'Espace Euclidien* E_n. Mathematische Reihe Vol. 37. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1972.

[Hal74] P. R. Halmos. *Measure Theory.* Graduate Texts in Mathematics 18. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[Ham82] R.S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7(1):65–222, 1982.

[Her89] M. Hervé. *Analyticity in Infinite Dimensional Spaces.* Studies in Mathematics Vol. 10. de Gruyter, Berlin, New York, 1989.

[Her92] G. Herzog. *Über gewöhnliche Differential Gleichungen in Fréchetträumen.* PhD thesis, Universität Karsruhe, 1992.

[Hil53] T.H. Hildebrandt. Integration in abstract spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 59:111–139, 1953.

[HP57] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups.* AMS, Providence, Rhode Island, 1957.

[HS65] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 25. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1965.

[Joh82] F. John. *Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences Vol. 1. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 4th edition, 1982.

[Jur97] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 52. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1997.

[Kat53] T. Kato. Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, 5(2):208–234, 1953.

[Kat66] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 132. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.

[Kel74] H.H. Keller. *Differential Calculus in locally convex Spaces.* Lecture Notes in Math. 417. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[Kis76] J. Kisyński. Semi-groups of operators and some of their applications to partial differential equations. In J.W. Weil, editor, *Control Theory and Topics in Functional Analysis. Vol. III*, pages 305–405. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[Kom64] H. Komatsu. Semi-groups of operators in locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 16(3):230–262, 1964.

[Kōm68] T. Kōmura. Semigroups of operators in locally convex spaces. *Journal of Functional Analysis*, 2:258–296, 1968.

[Köt69] G. Köthe. *Topological Vector Spaces I.* Die Grundlehren der mathematischem Wissneschaften Vol. 159. Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[Kre71] S.G. Krein. *Linear differential equations in Banach spaces.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1971.

[KT62] T. Kato and H. Tanabe. On the abstract evolution equation. *Osaka Math. J.*, 14:107–133, 1962.

[Lan93a] S. Lang. *Complex Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 103. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1993.

[Lan93b] S. Lang. *Real and Functional Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 142. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1993.

[Lan95] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics 160. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1995.

[Lem86] R. Lemmert. On ordinary differential equations in locally convex spaces. *Nonlinear Analysis*, 10:1385–1390, 1986.

[LS94] S.G. Lobanov and O.G. Smolyanov. Ordinary differential equations in locally convex spaces. *Russ. Math. Survey*, 49(3):97–175, 1994.

[Lun95] A. Lunardi. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[ŁZ79] S. Łojasiewicz, Jr. and E. Zehnder. An inverse function theorem in Fréchet-spaces. *Journal of Functional Analysis*, 33:165–174, 1979.

[Mae61] F. Maeda. Remarks on spectra of operators on a locally convex space. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 41:1052–1055, 1961.

[Miy59] I. Miyadera. Semi-groups of operators in Fréchet space and application to partial differential equations. *Tohoku Math. Journal (2)*, 11:162–183, 1959.

[Moo69] R.T. Moore. Banach algebras of operators on locally convex spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75:68–73, 1969.

[Moo71a] R.T. Moore. Generation of equicontinuous semigroups by hermitian and sectorial operators. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(2):224–229, 1971.

[Moo71b] R.T. Moore. Generation of equicontinuous semigroups by hermitian and sectorial operators. II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(3):368–373, 1971.

[Mos66a] J. Moser. A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations I. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 20:265–315, 1966.

[Mos66b] J. Moser. A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations II. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 20:499–535, 1966.

[MV92] R. Meise and D. Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg, Brauenschweig, Wiesbaden, 1992.

[Nas56] J. Nash. The embedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–63, 1956.

[Oha72] S. Oharu. Semigroups of linear operators in a Banach space. *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.*, 7:205–260, 1971/72.

[Ōuc73] S. Ōuchi. Semi-groups of operators in locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 25(2):265–276, 1973.

[Paz83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Appl. Math. Sci. 44. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[Pet38] B.J. Pettis. On integration in vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44:277–304, 1938.

[Phi40] R.S. Phillips. Integration in a convex linear topological space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47:114–145, 1940.

[Pie72] A. Pietsch. *Nuclear Locally Convex Spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 66. Springer-Verlag, New York, Berlin, 2nd edition, 1972.

[Pri40] G.B. Price. The theory of integration. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47:1–50, 1940.

[Ric42] C.E. Rickart. Integration in a convex linear topological space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52:498–521, 1942.

[Rie68] M. Rieffel. The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131(2):466–487, 1968.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis.* Inter. Ser. in Pure and Appl. Math. McGraw-Hill Inc., New York, 2nd edition, 1973.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Inc., New York, 3rd edition, 1987.

[Sch71] H.H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Graduate Texts in Mathematics 3. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1971.

[Ser72] P.F. Sergeraert. Un thèoréme de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. scient. És. Norm. Sup.*, 5:599–660, 1972.

[SV65] K. Singbal-Vedak. A note on semigroups of operators on a locally convex space. *Proceedings Amer. Math. Soc.*, 16:696–702, 1965.

[Tan59] H. Tanabe. A class of the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math. J.*, 11:121–145, 1959.

[Tan60a] H. Tanabe. On the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math. J.*, 12:363–376, 1960.

[Tan60b] H. Tanabe. Remarks on the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math. J.*, 12:145–166, 1960.

[Tre67] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Pure and Applied Mathematics Vol. 25. Academic Press, New York, London, 1967.

[Ush72] T. Ushijima. On the generation and smoothness of semi-groups of linear operators. *Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo*, 19:65–127, 1972.

[Vog87] D. Vogt. Tame spaces and power series spaces. *Math. Z.*, 196:523–536, 1987.

[Vuv71] Yu.M. Vuvunikyan. Quasiexponential semigroups of endomorphisms a of locally convex space. *Siberian Math. Journal*, 12:200–207, 1971.

[Vuv78] Yu.M. Vuvunikyan. Asymptotic resolvent and theorems on generation of semigroups in locally convex spaces. *Math. Notes*, 22:732–737, 1978.

[Wen85] L. Wenzel. Evolutionsgleichungen in lokalkonvexen Räumen. *Math. Nachr.*, 123:145–155, 1985.

[Wid46] D. V. Widder. *The Laplace Transform.* Princeton Mathematical Series 6. Princeton University Press, Princeton, 1946.

[Wid71] D. V. Widder. *An Introduction to Transformation Theory.* Pure and Applied Mathematics 42. Academic Press, New York, London, 1971.

[Wro99] V. Wrobel. Spectral theory of closed linear operators on Banach spaces from a locally convex point of view. In *Generalized Functions, Operator Theory, and Dynamical Systems*, pages 79–95. 1999.

[Yos65] K. Yosida. Time dependent evolution equations in a locally convex space. *Math. Annalen*, 162, 1965.

[Yos71] K. Yosida. *Functional Analysis.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 123. Springer-Verlag, New York, Berlin, 3rd edition, 1971.

[Zei86] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1986.