Kapitel 1

Grundlagen der Hyperflächentheorie für beliebige Normalisierungen

In diesem Kapitel wollen wir einige allgemeine Definitionen, Eigenschaften und Sätze im Bereich Hyperflächentheorie angeben. Grundlage dafür sind hauptsächlich [GKM] und [BK], nach deren Notation wir uns richten.
In Abschnitt 1.1 geben wir gewisse Definitionen bei Vektorfeldern und Tensorfeldern an, in den Abschnitten 1.2 und 1.3 untersuchen wir die Größen, die direkt oder indirekt durch die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten definiert werden, und in Abschnitt 1.4 die Konormale. Danach klären wir in Abschnitt 1.5, wie Flächengrößen verschiedener Normalisierungen zusammenhängen. Schließlich betrachten wir in Abschnitt 1.6 die sogenannten Formeln von Lelieuvre und untersuchen weitere in diesem Zusammenhang stehende Fragen.
Wir legen eine n–dimensionale ($n \geq 2$), reelle, differenzierbare, orientierbare Mannigfaltigkeit[1] M zugrunde. Differenzierbar stehe, wenn nichts anderes erwähnt wird, für unendlich oft differenzierbar. $A := A^{n+1}$ sei ein $(n+1)$–dimensionaler affiner Raum[2], $V := V^{n+1}$ der zugehörige Vektorraum, D der kanonische (torsionsfreie, flache) lineare Zusammenhang auf A und det die übliche (bezüglich D parallele) Determinantenform.

Zur Notation: Eine Größe mit zwei Indizes eingeschlossen in runde Klammern bezeichne eine Matrix, z. B. $(S_i^j), (h_{ij})$. Die Indizes stehen für natürliche Zahlen zwischen 1 und n. δ_i^k ist das Zeichen für das **Kronecker–Symbol**, d. h.

$$\delta_i^k := \begin{cases} 1, & \text{für } i = k \\ 0, & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

δ_{ik} wird analog definiert. Für eine Größe mit zwei unteren Indizes G_{ij} (sie stellt die Koeffizienten einer 2–Form dar) bedeute (G^{ij}) die Inverse der Matrix (G_{ij}), wenn diese Inverse existiert. Es folgt:

$$\sum_{l=1}^{n} G^{il} G_{lk} = \delta_k^i$$

[1] Die Definitionen von Begriffen wie Mannigfaltigkeit, differenzierbar, Vektorfeld, usw. werden nicht mehr aufgeführt. Sie sind [GKM] zu entnehmen.

[2] Meist können wir bis Abschnitt 1.5 wie in [BK] statt A eine beliebige differenzierbare $(n+1)$–dimensionale Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ benutzen und dementsprechend verallgemeinern. $\tilde{M}$ muß aber einen torsionsfreien, flachen Zusammenhang D und eine bezüglich D parallele Determinantenform det besitzen.

Det steht für die übliche Determinante im $\mathbb{R}^n$. Oft benutzen wir die **Einsteinsche Summenkonvention**: Kommt bei einer Größe oder einem Produkt von Größen ein Index sowohl als oberer als auch als unterer Index vor, so wird über diesen Index summiert, d. h. er wird als Summationsindex gebraucht und das Summenzeichen dabei weggelassen, z. B. entspricht $h_{il}S^l_j$ der Summe $\sum_{l=1}^n h_{il}S^l_j$ oder $h_{ij}g^{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}g^{ij}$.

1.1 Vektorfelder und Tensorfelder

Dieser Abschnitt stellt einige zentrale Begriffe im Zusammenhang mit Vektorfeldern und Tensorfeldern zur Verfügung. Die Definitionen und Bezeichnungen sind aus [GKM] oder [BK] übernommen.

Für eine beliebige Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ (z. B. M oder A) bezeichne $\mathcal{F}\tilde{M}$ die Menge der auf $\tilde{M}$ differenzierbaren Funktionen, $\mathfrak{V}\tilde{M}$ die Menge der differenzierbaren Vektorfelder auf $\tilde{M}$ und, wenn F eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ist, $\mathfrak{V}_F$ die Menge der Vektorfelder längs F.
Sei $x : M \to A$ eine differenzierbare Abbildung und x_* die von x induzierte Abbildung zwischen den Tangentialbündeln $x_* : TM \to TA$, die durch

$$\forall X \in \mathfrak{V}M, f \in \mathcal{F}A : x_*(X)(f) = X(f \circ x)$$

festgelegt ist. Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Einschränkung $x_*|_{T_pM} =: x_*|_p : T_pM \to T_{x(p)}A \cong V$ eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen. $x_*(X)$ liegt in $\mathfrak{V}_x$. Ist $x_*|_p$ für alle $p \in M$ eine injektive (lineare) Abbildung, so nennt man x eine **Immersion**. Im weiteren sei x immer eine Immersion.
Wenn $\{\partial_i|_p, 1 \le i \le n\}$ eine Basis von T_pM ist (wir werden hier immer eine kanonische, von einer Karte induzierte Basis nehmen), wollen wir $x_i|_p$ für $x_*(\partial_i|_p)$ schreiben. Die $x_i|_p$ spannen den n–dimensionalen Unterraum $x_*[T_pM]$ von $T_{x(p)}A$ auf. Wir können die Basisvektoren zu einem **Basisfeld** $\partial_i : p \mapsto \partial_i|_p$ erweitern.

Eine differenzierbare r–fach $\mathcal{F}\tilde{M}$–lineare Abbildung $B : \mathfrak{V}\tilde{M}^r \to \mathfrak{V}\tilde{M}^s$ (mit $\mathfrak{V}\tilde{M}^0 := \mathcal{F}\tilde{M}$) heißt **$(r, s)$–Tensorfeld**, für $s = 0$ auch r–**Form**. Ein $(0, 0)$–Tensorfeld ist eine Funktion, ein $(0, 1)$–Tensorfeld ein Vektorfeld. Wir werden nur $s = 0, s = 1$ verwenden.
Aus gegebenen Tensorfeldern können wir andere Tensorfelder gewinnnen:
Sei $\tilde{\nabla}$ ein linearer Zusammenhang auf $\tilde{M}$, $X, X_1, \ldots, X_r, Y, Z \in \mathfrak{V}\tilde{M}$ und $s = 1, 0$. Dann ist $\tilde{\nabla}B$ folgendes $(r + 1,s)$–Tensorfeld[3]:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}B(X, X_1, \ldots, X_r) &:= \tilde{\nabla}_X B(X_1, \ldots, X_r)\\ &:= \tilde{\nabla}_X(B(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^r B(X_1, \ldots, \tilde{\nabla}_X X_i, \ldots, X_r).\end{aligned}$$

Ist $\tilde{\nabla}B = 0$, so nennt man B **parallel** bezüglich $\tilde{\nabla}$. Wichtig ist auch die **Spur**[4] eines $(r + 1, s + 1)$–Tensorfelds B, d. h. folgendes (r, s)–Tensorfeld:

$$tr_X B(\ldots, X, \ldots) := \text{ Spur der } \mathcal{F}\tilde{M}\text{–linearen Abbildung } X \mapsto B(\ldots, X, \ldots).$$

[3]Für $f \in \mathcal{F}\tilde{M}$ sei $\tilde{\nabla}_X f := X(f)$.
[4]In [GKM] wird dies Kontraktion genannt.

Wir schreiben kurz $tr\,B$, wenn $r = 1$ ist.
Der **Torsionstensor** wird durch

$$\tilde{\mathcal{T}}(X,Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y],$$

der **Krümmungstensor** durch

$$\tilde{R}(X,Y)Z := \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

definiert, wobei $[.\,,.] : \mathfrak{V}\tilde{M}^2 \to \mathfrak{V}\tilde{M}$ die Lie–Klammer sei, also die Abbildung mit

$$\forall f \in \mathcal{F}\tilde{M} : [X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Es gilt für Basisfelder ∂_i, ∂_j, die von einer Karte von $\tilde{M}$ induziert werden (wie wir es annehmen)

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 = \text{ Nullvektorfeld}^5.$$

Ist der Torsionstensor eines Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ immer 0, so nennt man diesen Zusammenhang **torsionsfrei**, ist $\tilde{R} = 0$, so heißt er **flach**.
In lokalen Koordinaten ist ein linearer Zusammenhang so auszudrücken: Sind $X = X^i \partial_i$ und $Y = Y^i \partial_i$ aus $\mathfrak{V}\tilde{M}$, dann ist

$$\tilde{\nabla}_X Y = X(Y^i)\partial_i + \tilde{\Gamma}_{ij}{}^k X^i Y^j \partial_k.$$

Die $\tilde{\Gamma}_{ij}{}^k$ nennt man **Christoffelsymbole**. Bei torsionsfreien Zusammenhängen gilt für sie:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}{}^k = \tilde{\Gamma}_{ji}{}^k$$

Weiter sei für $f \in \mathcal{F}\tilde{M}$ die 1–Form df mit

$$\forall X \in \mathfrak{V}\tilde{M} \;\; df(X) = X(f)$$

das **Differential** von f.

1.2 Die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten für allgemeine Normalen

In den Abschnitten 1.2–1.5 orientieren wir uns vor allem an [BK], daneben an [DNV], [NP1], [NP2] und [NoS].
Wir werden in diesem Abschnitt die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten angeben und einige daraus resultierende grundlegende Größen genauer besprechen.

Sei N ein transversales Vektorfeld längs x, also ein Vektorfeld, bei dem für alle $p \in M$ $N|_p$ ein zu den Vektoren aus $x_*[T_pM]$ transversaler (linear unabhängiger) Vektor ist. Wir bezeichnen ein solches transversales Vektorfeld im weiteren auch als **Normale**. $T_{x(p)}A$ läßt sich darum zerlegen in

$$T_{x(p)}A = x_*[T_pM] \oplus \mathbb{R}N|_p.$$

[5] Wir führen für das Nullvektorfeld keine neue Bezeichnung ein. Wenn das Zeichen 0 vorkommt, ist je nach Textzusammenhang die Zahl 0, die konstante Nullfunktion, der Nullvektor eines Vektorraums, das Nullvektorfeld oder die Nullform gemeint.

Man kann deshalb alle Vektoren aus $T_{x(p)}A$ darstellen als Linearkombination von $N|_p$ mit einem tangentialen Vektor, also auch die zweiten Ableitungen von x und die ersten Ableitungen von N. Damit erhält man die folgenden Ableitungsgleichungen[6] für alle $X, Y \in \mathfrak{V}M$[7]:

$$\begin{aligned}(D_X x_*(Y))_p &= x_*((\nabla_X Y)_p) + h_p(X_p, Y_p)N|_p,\\ (D_X N)_p &= -x_*(S_p(X_p)) + \tau_p(X_p)N|_p.\end{aligned}$$

Dies sind die **Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten**[8]. Da D torsionsfrei ist, wird so eindeutig ein torsionsfreier, linearer Zusammenhang ∇ auf M, eine symmetrische 2–Form h, ein $(1,1)$–Tensorfeld S und eine 1–Form τ festgelegt.
In lokalen Koordinaten kann man die Ableitungsgleichungen so schreiben:

$$\begin{aligned}x_{ij} &= \Gamma_{ij}{}^k x_k + h_{ij}N,\\ N_i &= -S_i^k x_k + \tau_i N.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $x_{ij} := D_{\partial_i} x_*(\partial_j)$, $\Gamma_{ij}{}^k \partial_k := \nabla_{\partial_i}\partial_j$, $h_{ij} := h(\partial_i, \partial_j)$, $N_i := D_{\partial_i}N$, $S_i^k \partial_k := S(\partial_i)$ und $\tau_i := \tau(\partial_i)$.

Definition 1.1 *Man nennt*

- ∇ *den (von N)* **induzierten Zusammenhang***,*
- h *die* **quadratische Grundform** *(bezüglich N),*
- S *den* **Shape–Operator***,*
- τ *die* **Normalzusammenhangsform***,*
- $H := \frac{1}{n} tr\, S$ *die* **Mittlere Krümmung** *und*
- $\mathcal{K} := Det\, S$ *die* **Gaußsche Krümmung**.

Seien $\{\partial_i\}$ feste Basisfelder. Dann bezeichnet

$$\omega := det(x_1, \ldots, x_n, N)$$

das **von der Normalen erzeugte Volumenelement**[9] *und*

$$\omega_h := \sqrt{|Det(h_{ij})|}$$

das **von der quadratischen Grundform erzeugte Volumenelement**.

[6] Bei manchen Autoren sind diese Größen auch anders definiert, so ist z. B. in [Hei] der Normalenanteil $-h_p(X_p, Y_p)N|_p$, die quadratische Grundform hat also ein anderes Vorzeichen als in unserer Definition.
[7] Bei solchen Formeln haben wir in der Regel auf die explizite Angabe eines Allquantors verzichtet und nur verbal erwähnt, daß die entsprechende Gleichung für alle Vektorfelder gelten möge.
[8] In [NP2] werden diese Gleichungen für Kodimension ≥ 1 definiert.
[9] In [BK] wird statt diesem jeweils eine Volumenform eingeführt. Das hier definierte Volumenelement ist ein Spezialfall, die Volumenform, in die man die ∂_k eingesetzt hat.

Verschiedene Normalen induzieren i. a. auch verschiedene Größen. Die Regularität von h aber ist unabhängig von der Wahl des transversalen Vektorfeldes N, siehe [BK]. Ist h regulär für alle $p \in M$, so heißt auch x **regulär**. Im folgenden sei x immer regulär. Unter dieser Voraussetzung können wir auf h folgende Definition und den Hilfssatz anwenden:

Definition 1.2 *Sei G eine reguläre, symmetrische 2–Form auf M. Für eine 1–Form φ auf M sei $G^*(\varphi)$ dasjenige Vektorfeld mit*

$$\forall X \in \mathfrak{V}M : G(G^*(\varphi), X) = \varphi(X).$$

Ist ψ eine 2–Form, so bezeichne $G^{**}(\psi)$ diese Funktion:

$$G^{**}(\psi) = tr(X \mapsto G^*(\psi(., X)))$$

In lokalen Koordinaten schreibt man

$$G^*(\varphi) = G^{ij}\varphi_i\partial_j \quad und \quad G^{**}(\psi) = G^{ij}\psi_{ij}.$$

Ist $f \in \mathcal{F}M$, so bezeichnen wir

$$grad_G(f) := G^*(df)$$

als den **Gradienten** *von f bezüglich G.*

Bemerkung: In lokalen Koordinaten ergibt sich:

$$grad_G(f) = G^{ij}\partial_j(f)\partial_i$$

Dieser Gradient entspricht in der Regel nicht dem üblichen Gradientenbegriff als einem n–dimensionalen Vektor, dessen i–te Komponente $\partial_i(f)$ ist. Dies ist nur in Spezialfällen so, und zwar, wenn $G_{ij} = \delta_{ij}$ ist und man die ∂_i mit den i–ten Einheitsvektoren identifiziert. Dann wollen wir diesen Gradienten $grad_\delta$ nennen.
Da G regulär ist, gilt:

$$grad_\delta(f) = 0 \Leftrightarrow grad_G(f) = 0$$

$grad_G(f)$ ist ein Vektorfeld, man kann es auf eine differenzierbare Funktion g anwenden. Dann erhält man in lokalen Koordinaten

$$grad_G(f)(g) = G^{ij}\partial_i(f)\partial_j(g).$$

Wir setzen für G meist die quadratische Grundform bezüglich einer Normalen ein, manchmal auch die 1. euklidische Grundform, siehe Abschnitt 2.2.1. Es gilt immer

$$G^*(G(., X)) = X \quad \text{und} \quad G^{**}(G) \equiv konst. = n$$

und für zwei 1–Formen τ, σ

$$\tau(G^*(\sigma)) = G(G^*(\tau), G^*(\sigma)) = \sigma(G^*(\tau)).$$

Lemma 1.3 *Sei G eine reguläre, symmetrische 2–Form und $X, Y \in \mathfrak{V}M$. Dann gilt:*

1.) $-X(G^{ij}) = G^{im}G^{js}X(G_{ms})$
2.) $X(Det\,G) = G^{ij}X(G_{ij})Det\,G$ *oder* $X(\log|Det\,G|) = G^{ij}X(G_{ij})$

Beweis: 1.) Weil $G^{is}G_{sm} = \delta^i_m$ ist, erhält man

$$X(G^{is}G_{sm}) = 0 = X(G^{is})G_{sm} + G^{is}X(G_{sm}).$$

Es folgt sofort:

$$X(G^{ij}) = X(G^{is})G_{sm}G^{mj} = -G^{is}X(G_{sm})G^{mj}$$

2.) Wir bezeichnen die Matrix, bei der nur die i–te Zeile von (G_{jk}) nach X differenziert ist, mit G_i. Damit gilt $X(Det\,G) = \sum_i Det\,G_i$. Die Determinante von G_i erhält man, indem man nach der i–ten Zeile entwickelt. Die i–te Spalte der Adjunkten von (G_{jk}) hat die Form $Det\,G \cdot (G^{ij})_{j=1,\dots,n}$ und stimmt mit der i–ten Spalte der Adjunkten von G_i überein. Daher ist $Det\,G_i = Det\,G \sum_j G^{ij}X(G_{ij})$. #

Unter den transversalen Vektorfeldern gibt es einige, die durch eine Eigenschaft ausgezeichnet sind:

Definition 1.4 *Eine Normale, für die die Normalzusammenhangsform τ identisch verschwindet, deren Ableitungen also stets tangential sind, nennt man* **Relativnormale**.

Bemerkungen: 1.) Mit den Anfängen der Relativgeometrie sind Namen wie E. Müller, W. Süss, A. Duschek und A. Norden verbunden, siehe [Sch], S. 210, [SSV], S. 44–45.

2.) Eine Eigenschaft von Relativnormalen ist folgende: Die von ihr erzeugte Volumenform ω_{Form} (siehe [BK] und Fußnote zu Definition 1.1) ist parallel bezüglich ∇. Man sagt: $(M, \nabla, \omega_{Form})$ bilden eine äquiaffine Struktur. In [NoS], S. 32, wird eine Relativnormale auch ,,äquiaffines transversales Vektorfeld" genannt. Wir verwenden den Begriff ,,äquiaffin" nur im Zusammenhang mit der Blaschkeschen Affinnormalen.

Beispiele für Normalen: Die **euklidische Normale**, die **Blaschkesche Affinnormale** und die **zentroaffine Normale** sind Relativnormalen. Mehr über Relativnormalen folgt in Kapitel 2. Dort werden auch die gerade erwähnten Normalen ausführlicher behandelt. Die **Laplace–Normalen** aus [Hei] sind, mit Ausnahme der Blaschkeschen Affinnormale, keine Relativnormalen.

Wenn man nur ∇, h, S und τ vorgibt, kann man unter bestimmten Bedingungen eine Immersion x finden, die diese Größen als induzierten Zusammenhang, quadratische Grundform, Shape–Operator und Normalzusammenhangsform besitzt. Dazu müssen aber wenigstens die folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt sein. Diese ergeben sich, indem man die Vertauschbarkeit von $D_X D_Y x_*(Z)$ mit $D_Y D_X x_*(Z)$ bzw. $D_X D_Y N$ mit $D_Y D_X N$ untersucht, wobei D als flach vorausgesetzt war.
Es gilt für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{V}M$[10]:

$$\left.\begin{array}{rcll} R(X,Y)Z &=& h(Y,Z)S(X) - h(X,Z)S(Y) & \text{(Gauß)} \\ \nabla_X h(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) &=& \nabla_Y h(X,Z) + \tau(Y)h(X,Z) & \text{(Codazzi für } h\text{)} \\ (\nabla_X S)(Y) - (\nabla_Y S)(X) &=& \tau(X)S(Y) - \tau(Y)S(X) & \text{(Codazzi für } S\text{)} \\ (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X) &=& h(X, S(Y)) - h(Y, S(X)) & \text{(Ricci)} \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

[10] In [NP2] werden die Integrabilitätsbedingungen für höhere Kodimension angegeben.

Bemerkung: Wir bezeichnen die ausführliche Darstellung der Gauß–Gleichung

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{V}M : R(X,Y)Z = h(Y,Z)S(X) - h(X,Z)S(Y)$$

als *die* Gauß–Gleichung. Setzt man aber für X, Y, Z jeweils die Basisfelder ∂_i ein, erhält man n^4 Gleichungen der Form

$$R^l_{ijk} = h_{jk}S^l_i - h_{ik}S^l_j,$$

wenn $R^l_{ijk}\partial_l = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$ bezeichnet. Einige sind trivial (z. B. sind für $i = j$ beide Seiten 0), andere redundant[11], insgesamt hat man deshalb $\frac{1}{2}n^3(n-1)$ „lokale Gauß–Gleichungen". Bei den anderen Gleichungen in (1.1) verhält es sich ähnlich.

Die Gleichungen sind, wie erwähnt, nur notwendige Bedingungen an die Größen. Unter bestimmten Voraussetzungen kann man x rekonstruieren. Es ergeben sich Fundamentalsätze wie in [BK], [NoS], S. 73–77, oder [DNV], siehe auch Kapitel 5.

1.3 Weitere Flächengrößen: Levi–Cività–Zusammenhang, Tschebyschewvektorfeld und konjugierter Zusammenhang

Aus den durch die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten definierten Größen lassen sich weitere herleiten. Wir geben hier die kubische Form, den Levi–Cività–Zusammenhang, den Laplace–Beltrami–Operator, den Differenztensor, die Tschebyschewform, das Tschebyschewvektofeld und den zu ∇ konjugierten Zusammenhang an.

Das (3,0)–Tensorfeld

$$C(X,Y,Z) := (\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z)$$

nennen wir die **kubische Form**. Sie ist nach der Codazzi–Gleichung für h totalsymmetrisch.
Der **Levi–Cività–Zusammenhang** $\hat{\nabla}$ von h ist derjenige torsionsfreie Zusammenhang, bezüglich dem h parallel ist, d. h. der Zusammenhang, für den

$$\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X = [X,Y] \quad \text{und} \quad X(h(Y,Z)) = h(\hat{\nabla}_X Y, Z) + h(Y, \hat{\nabla}_X Z)$$

gilt. Für die Christoffelsymbole von $\hat{\nabla}$ bedeutet die Parallelität von h

$$\partial_i(h_{jk}) = \hat{\Gamma}_{ij}{}^l h_{lk} + \hat{\Gamma}_{ik}{}^l h_{lj}. \tag{1.2}$$

$\hat{\nabla}$ ist deshalb festgelegt durch

$$\begin{aligned} h(\hat{\nabla}_X Y, Z) \;=\; & \frac{1}{2}\Big(X(h(Y,Z)) + Y(h(X,Z)) - Z(h(X,Y)) \\ & +h([Z,X],Y) + h([Z,Y],X) + h([X,Y],Z)\Big) \end{aligned} \tag{1.3}$$

[11] Da R schiefsymmetrisch ist, folgt aus der Gleichung mit $i = 1$, $j = 2$ die Gleichung für $i = 2$, $j = 1$.

oder lokal mit der Basis $\{\partial_i\}$

$$\hat{\Gamma}_{ij}{}^k = h^{kl}\hat{\Gamma}_{ijl}, \quad \hat{\Gamma}_{ijl} = \frac{1}{2}(\partial_i h_{jl} - \partial_l h_{ij} + \partial_j h_{il}). \tag{1.4}$$

Mit $\hat{\nabla}$ lassen sich weitere Größen definieren:
Sei $f \in \mathcal{F}M$, dann bezeichne der **Laplace–Beltrami–Operator von** f folgende Funktion:

$$\Delta(f) := h^{**}(Y(X(f)) - \hat{\nabla}_Y X(f)).$$

Es gilt wegen $\hat{\nabla} h = 0$

$$\begin{aligned} Y(X(f)) - \hat{\nabla}_Y X(f) &= Y(h(grad_h(f), X)) - h(grad_h(f), \hat{\nabla}_Y X) \\ &= h(\hat{\nabla}_Y grad_h(f), X) \end{aligned}$$

Daher kann man $\Delta(f) = tr\, h^*(Y(X(f)) - \hat{\nabla}_Y X(f))$ auch so ausdrücken, vgl. [NoS], S. 240–242:

$$\Delta(f) := tr(\hat{\nabla} grad_h(f)) \tag{1.5}$$

Bemerkung: Ähnlich wie beim Gradienten ist auch hier zu erwähnen, daß $\Delta(f)$ nicht notwendig dem üblichen Laplace–Operator $\sum_i \partial_i \partial_i(f)$ entspricht, dies ist nur für $h_{ij} = \delta_{ij}$ der Fall.

Definition 1.5 *Das (2,1)–Tensorfeld K, definiert durch*

$$K_Y X := \nabla_Y X - \hat{\nabla}_Y X,$$

nennen wir den **(symmetrischen) Differenztensor**[12].

Der Differenztensor ist symmetrisch, weil ∇ und $\hat{\nabla}$ torsionsfrei sind. In lokalen Koordinaten schreiben wir:

$$K_{ij}^k = \Gamma_{ij}{}^k - \hat{\Gamma}_{ij}{}^k.$$

Da $\hat{\nabla} h = 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} C(X,Y,Z) &= \nabla_X h(Y,Z) - \hat{\nabla}_X h(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) \\ &= X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad -X(h(Y,Z)) + h(\hat{\nabla}_X Y, Z) + h(Y, \hat{\nabla}_X Z) + \tau(X)h(Y,Z) \\ &= -h(K_X Y, Z) - h(Y, K_X Z) + \tau(X)h(Y,Z) \end{aligned}$$

Eine Folgerung daraus und aus der Codazzi–Gleichung für h ist

$$-2h(K_X Y, Z) + \tau(X)h(Y,Z) + \tau(Y)h(X,Z) - \tau(Z)h(Y,X) = C(X,Y,Z). \tag{1.6}$$

Bei Relativnormalen gilt daher

$$-2h(K_X Y, Z) = C(X,Y,Z).$$

[12] Es ist nicht zu erwarten, daß das (2,1)–Tensorfeld K mit der Funktion $\mathcal{K}$, der Gaußschen Krümmung, verwechselt wird.

Die Symmetrie von $h(K_X Y, Z)$ bedeutet dort für die lokalen Funktionen

$$h_{im} K^m_{jk} = h_{jm} K^m_{ik}. \tag{1.7}$$

Nun erweitern wir Δ auf x durch

$$\begin{aligned}\Delta x &:= h^{ij}(D_{\partial_i} x_*(\partial_j) - x_*(\hat{\nabla}_{\partial_i}\partial_j)) = h^{ij}(x_*(K_{\partial_i}\partial_j) + h(\partial_i, \partial_j)N) \\ &= h^{ij} K^k_{ij} x_k + nN\end{aligned}$$

Definition 1.6 *Wir legen die* **Tschebyschewform** $\hat{T}$ *fest durch*

$$\hat{T}(X) := \frac{1}{n} tr K_X$$

und das **Tschebyschewvektorfeld**[13] T *durch*

$$T := h^*(\hat{T}).$$

Der lineare Zusammenhang ∇ ist i. a. kein Levi–Cività–Zusammenhang bezüglich h, es gilt damit nicht $\nabla h = 0$. Mit einer ähnlichen Gleichung jedoch definiert man den Zusammenhang $\overline{\nabla}$

$$X(h(Y,Z)) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_X Z).$$

In lokalen Koordinaten ergibt sich

$$\partial_i(h_{jk}) = {\Gamma_{ij}}^l h_{lk} + {\overline{\Gamma}_{ik}}^l h_{lj}. \tag{1.8}$$

$\overline{\nabla}$ heißt der **zu ∇ konjugierte Zusammenhang**. Es gilt, siehe [BK], [DNV],

$$\begin{aligned}\overline{\nabla} \text{ torsionsfrei} &\Leftrightarrow \nabla h \text{ symmetrisch}, \\ \overline{\nabla} \text{ torsionsfrei} &\Rightarrow \hat{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \overline{\nabla}).\end{aligned}$$

Bei Relativnormalen ist $C = \nabla h$, deshalb ist ∇h symmetrisch und $\overline{\nabla}$ torsionsfrei[14]. Will man $\overline{\nabla}$ mit den anderen Größen darstellen, erhält man wegen (1.6)

$$\begin{aligned}h(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= X(h(Y,Z)) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X h(Y,Z) + h(\nabla_X Y, Z) \\ &= C(X,Y,Z) - \tau(X)h(Y,Z) + h(\nabla_X Y, Z) \\ &= -2h(K_X Y, Z) + \tau(Y)h(X,Z) - \tau(Z)h(X,Y) + h(\nabla_X Y, Z)\end{aligned}$$

und daher

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - 2K_X Y + \tau(Y)X - h^*(\tau)h(X,Y). \tag{1.9}$$

[13] Eine Verwechslung mit dem Torsionstensor ist ausgeschlossen, da T ein Vektorfeld, der Torsionstensor ein (2,1)–Tensorfeld ist. Im übrigen kommt der Torsionstensor nicht mehr vor, er wurde nur angegeben, um torsionsfrei zu definieren. Alle linearen Zusammenhänge, die noch erwähnt werden, sind, mit Ausnahme von $\overline{\nabla}$, torsionsfrei. Ab dem 2. Kapitel werden nur noch Relativnormalen untersucht, dann ist sogar $\overline{\nabla}$ torsionsfrei.

[14] Das ist genau bei Relativnormalen so. Ist ∇h symmetrisch, dann gilt nach Codazzi für h

$$\tau(X)h(Y,Z) = \tau(Y)h(X,Z).$$

Weil dies für alle Vektorfelder gilt und $n \geq 2$ ist, ist τ notwendig $= 0$.

1.4 Die Konormale: Ableitungsgleichungen und daraus resultierende Größen

Hier gehen wir zum Dualraum $T^*_{x(p)}A$ von $T_{x(p)}A$ bzw. zum Bündel $T^*A := \cup_{p\in M} T^*_{x(p)}A$ über und kommen zu einer wichtigen 1–Form längs x, der Konormalen. Wir geben Ableitungsgleichungen, vergleichbar mit denen von Gauß und Weingarten, an und stellen Eigenschaften der dadurch definierten Größen zur Verfügung.

Sei $T^*_{x(p)}A$ der Dualraum von $T_{x(p)}A$, den wir im weiteren mit V^* identifizieren wollen, dem Dualraum von V. Sei N eine Normale, dann ist durch

$$\begin{aligned} \eta_p(x_*(X_p)) &= 0, \text{ für alle } X \in \mathfrak{V}M, &(1.10)\\ \eta_p(N_p) &= 1 &(1.11)\end{aligned}$$

eindeutig ein Element aus $T^*_{x(p)}A$ und somit auch eine 1–Form η festgelegt.

Definition 1.7 *Die 1–Form $\eta : p \mapsto \eta_p$ längs x, die für alle $p \in M$ (1.10), (1.11) erfüllt, heißt die* **Konormale**.

Durch Differentiation von (1.10), (1.11) erhält man

$$\begin{aligned} D_Y\eta(x_*X) &= Y(\eta(x_*X)) - \eta(D_Y x_*X) = -h(Y,X), &(1.12)\\ D_Y\eta(N) &= Y(\eta(N)) - \eta(D_Y N) = -\tau(Y). &(1.13)\end{aligned}$$

Sei $\overline{det}$ die zu det **duale Determinantenform**, d. h. die Determinantenform, für die mit[15] $X_i \in V, \xi_k \in V^*, 1 \le i,k \le n+1$,

$$\overline{det}(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})det(X_1,\dots,X_{n+1}) = Det_{n+1}\begin{pmatrix} \xi_1(X_1) & \dots & \xi_1(X_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n+1}(X_1) & \dots & \xi_{n+1}(X_{n+1})\end{pmatrix}$$

gilt, wenn Det_{n+1} die übliche Determinante in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. $\overline{det}$ ist wie det parallel bzgl. D. Wir wollen für die Basisfelder $\{\partial_i\}$ $D_{\partial_i}\eta$ mit η_i, $D_{\partial_k}D_{\partial_i}\eta$ mit η_{ki} bezeichnen. Aus (1.10)–(1.13) kann man folgern:

$$\overline{det}(\eta,\eta_1,\dots,\eta_n)det(x_1,\dots,x_n,N) = Det_{n+1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ -h_{11} & \dots & -h_{1n} & -\tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -h_{n1} & \dots & -h_{nn} & -\tau_n \end{pmatrix}$$

$$= Det(h_{ij}) = sign\, Det(h_{ij})\, \omega_h^2.$$

Definition 1.8 *Die Funktion*

$$\bar{\omega} := \overline{det}(\eta,\eta_1,\dots,\eta_n)$$

bezeichnet das **von der Konormalen induzierte Volumenelement**.

[15] Man kann das selbstverständlich auch erweitern und Vektorfelder und Formen einsetzen.

Nennen wir $\varepsilon := sign\, Det(h_{ij})$, so ergibt sich dieser Zusammenhang zwischen den in den Definitionen 1.1 und 1.8 festgelegten Volumenelementen:

$$\bar{\omega} \cdot \omega = \varepsilon\, \omega_h^2 \tag{1.14}$$

Wenn h regulär ist, muß nach (1.14)

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$$

sein. Deshalb sind $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n$ linear unabhängig für jedes $p \in M$. Bezeichnen wir $\{D_{X_p}\eta \,|\, X_p \in T_pM\} \subset T^*_{x(p)}A \cong V^*$ mit $D_{T_pM}\eta$, so können wir $T^*_{x(p)}A$ wie folgt zerlegen:

$$V^* \cong T^*_{x(p)}A = D_{T_pM}\eta \oplus \mathbb{R}\,\eta_p.$$

Also kann man alle Vektoren von $T^*_{x(p)}A$, unter anderen $(D_Y D_X \eta)_p$, als Linearkombination darstellen und erhält folgende Ableitungsgleichungen für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{V}M$:

$$(D_Y D_X \eta)_p = D_{(\nabla^*{}_Y X)_p}\eta - \overline{h}_p(Y_p, X_p)\eta_p \tag{1.15}$$

Da D flach ist, wird so ein torsionsfreier, linearer Zusammenhang ∇^* und eine symmetrische 2–Form $\overline{h}$ definiert.

Lemma 1.9 *Die in (1.15) definierten Größen ∇^* und $\overline{h}$ kann man so mit den bekannten Größen darstellen:*

1.) $\nabla^*{}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \tau(Y)X = \nabla_X Y - 2K_X Y - h(X,Y)h^*(\tau)$
$= \hat{\nabla}_X Y - K_X Y - h(X,Y)h^*(\tau)$

2.) $\overline{h}(X,Y) = h(Y, S(X)) + \overline{\nabla}_X \tau(Y) = h(Y, S(X)) + \nabla^*{}_X\tau(Y) - \tau(X)\tau(Y)$

Beweis: Nach (1.10)–(1.13) gilt

$$\begin{aligned}
h(\nabla^*{}_X Y, Z) &= -(D_{(\nabla^*{}_X Y)}\eta)(x_*(Z)) + \overline{h}(X,Y)\eta(x_*(Z)) \\
&= -(D_X D_Y \eta)(x_*(Z)) \\
&= -X((D_Y\eta)(x_*(Z))) + (D_Y\eta)(D_X x_*(Z)) \\
&= -X(-h(Y,Z)) + (D_Y\eta)(x_*(\nabla_X Z) + h(X,Z)N) \\
&= X(h(Y,Z)) - h(Y, \nabla_X Z) - h(X,Z)\tau(Y) \\
&= h(\overline{\nabla}_X Y, Z) - h(X,Z)\tau(Y).
\end{aligned}$$

Wegen (1.6) bzw. (1.9) folgt

$$h(\nabla^*{}_X Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) - 2h(K_X Y, Z) - h(X,Y)\tau(Z).$$

Damit ist 1.) bewiesen. Aus

$$\begin{aligned}
-\tau(\nabla^*{}_X Y) - \overline{h}(X,Y) &= (D_{(\nabla^*{}_X Y)}\eta)(N) - \overline{h}(X,Y)\eta(N) \\
&= (D_X D_Y \eta)(N) \\
&= X((D_Y\eta)(N)) - (D_Y\eta)(D_X N) \\
&= X(-\tau(Y)) - (D_Y\eta)(-x_*(S(X)) + \tau(X)N) \\
&= -X(\tau(Y)) + \tau(X)\tau(Y) - h(Y, S(X))
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\overline{h}(X,Y) &= -\tau(\nabla^*{}_X Y) + X(\tau(Y)) - \tau(X)\tau(Y) + h(Y,S(X)) \\
&= (\nabla^*{}_X \tau)(Y) - \tau(Y)\tau(X) + h(Y,S(X)) \\
&\overset{1.)}{=} -\tau(\overline{\nabla}_X Y) + \tau(Y)\tau(X) + X(\tau(Y)) - \tau(X)\tau(Y) + h(Y,S(X)) \\
&= (\overline{\nabla}_X \tau)(Y) + h(Y,S(X))
\end{aligned}
$$

Das wollten wir zeigen. #

Bei Relativnormalen wird es einfacher. Da $\tau = 0$ ist, gilt

$$
\begin{aligned}
&\nabla^*{}_X Y = \overline{\nabla}_X Y = \hat{\nabla}_X Y - K_X Y, \\
&\overline{h}(X,Y) = h(Y,S(X)).
\end{aligned}
$$

Wir definieren einen zweiten Differenztensor

$$\bar{K}_X Y := \nabla^*{}_X Y - \hat{\nabla}_X Y = -K_X Y - h(X,Y)h^*(\tau) \text{ (nach Lemma 1.9).}$$

Bei Relativnormalen ist

$$\bar{K}_X Y = -K_X Y.$$

Mit $\bar{K}$ können wir Δ auf η verallgemeinern:

$$
\begin{aligned}
\Delta\eta &:= h^{ij}(D_{\partial_i} D_{\partial_j}\eta - D_{\hat{\nabla}_{\partial_i}\partial_j}\eta) = h^{ij}(D_{\bar{K}_{\partial_i}\partial_j}\eta - \overline{h}(\partial_i,\partial_j)\eta) \\
&= h^{ij}\bar{K}^k_{ij}\eta_k - h^{ij}\overline{h}_{ij}\eta
\end{aligned}
$$

Ein Hilfsmittel zur Darstellung bestimmter Vektorfelder bzw. Formen ist das $\wedge$–**Produkt**, siehe auch [LNW]. In unseren Beispielen, in denen meist zweidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$ behandelt werden, entspricht es dem üblichen Kreuzprodukt.
Seien $X_i \in V, \xi_k \in V^*, 1 \le i,k \le n$. Dann bezeichne $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ dasjenige Element aus V^* mit

$$\forall X \in V \quad (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(X) = det(X_1,\ldots,X_n,X)$$

und $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ dasjenige Element in V mit

$$\forall \xi \in V^* \quad \xi(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) = \overline{det}(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

Es folgt, daß $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ genau dann der Nullvektor in V^* ist, wenn $X_1,\ldots,X_n$ linear abhängig sind, analog gilt das auch bei $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$.

Bemerkung: Die Bezeichnung $\wedge$ stammt aus der Theorie der alternierenden Multilinearformen. $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)$ ist Element von $\Lambda^n V$. Vermöge $\iota(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(X) = det(X_1,\ldots,X_n,X)$ ist eine Bijektion $\iota : \Lambda^n V \to V^*$ definiert, wir identifizieren so $\Lambda^n V$ mit V^*. ι lassen wir in Zukunft weg. Analog gehen wir bei $\Lambda^n V^*$ und V vor.

Seien $X_1, \ldots, X_n \in V$ linear unabhängig, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V^*$ ebenfalls. Dann gilt nach obiger Definition von $\wedge$

$$\begin{aligned}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) &= det(X_1, \ldots, X_n, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \\ &= \overline{det}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)\end{aligned} \tag{1.16}$$

Aus (1.16) folgt aber

$$\begin{aligned}& (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)^2 \\ = \; & \overline{det}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot det(X_1, \ldots, X_n, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \\ = \; & Det \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \\ \xi_1(X_1) & \ldots & \xi_1(X_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_n(X_1) & \ldots & \xi_n(X_n) & 0 \end{pmatrix} \\ = \; & (-1)^n (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \cdot Det(\xi_i(X_k)).\end{aligned}$$

Wenn nun $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \neq 0$ ist, erhält man sofort

$$(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) = (-1)^n Det(\xi_i(X_k)). \tag{1.17}$$

Ist der Term aber $= 0$, so sind wegen (1.16) $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ und die X_i linear abhängig, und zwar gilt

$$\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n = \alpha^i X_i,$$

wobei $\alpha^j \neq 0$ ist für mindestens ein j, weil $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n \neq 0$ ist. Das bedeutet aber, daß man X_j als Linearkombination der restlichen X_i und $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ ausdrücken kann. In der Matrix $(\xi_i(X_k))$ ist darum die j–te Spalte eine Linearkombination der anderen Spalten und somit gilt $Det(\xi_i(X_k)) = 0$.
Sind die ξ_i oder die X_k linear abhängig, verschwinden beide Seiten von (1.17).
Die Formel (1.17) gilt also in jedem Fall.

Sind $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{V}_x$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 1–Formen längs x, so können wir obengenannte Abbildungen erweitern durch

$$(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) : p \mapsto (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)_p := (X_1|_p \wedge \ldots \wedge X_n|_p)$$

und

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) : p \mapsto (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)_p := (\xi_1|_p \wedge \ldots \wedge \xi_n|_p).$$

$(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)$ ist dann eine 1–Form längs x, $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)$ ist in $\mathfrak{V}_x$. Für die Ableitungen erhalten wir, wenn X, Y beliebig in $\mathfrak{V}_x$ sind:

$$\begin{aligned}& \sum_j det(X_1, \ldots, D_X X_j, \ldots, X_n, Y) + det(X_1, \ldots, X_n, D_X Y) \\ = \; & X(det(X_1, \ldots, X_n, Y)) = X((X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(Y)) \\ = \; & D_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(Y) + (X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(D_X Y) \\ = \; & D_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(Y) + det(X_1, \ldots, X_n, D_X Y)\end{aligned}$$

Es gilt damit

$$D_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = \sum_j (X_1 \wedge \ldots \wedge D_X X_j \wedge \ldots \wedge X_n).$$

Analog ist

$$D_X(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) = \sum_j (\xi_1 \wedge \ldots \wedge D_X \xi_j \wedge \ldots \wedge \xi_n).$$

1.5 Beziehungen zwischen Flächengrößen verschiedener Normalisierungen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt, welchen Einfluß ein Wechsel der Normalisierung auf die bis jetzt definierten Größen hat, d. h. wie sich Größen bezüglich einer Normalisierung durch die bezüglich einer anderen ausdrücken lassen.

Wir können, analog zu den Überlegungen vor den Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten, ein transversales Vektorfeld $\tilde{N}$ durch ein anderes transversales Vektorfeld N und ein tangentiales Vektorfeld $x_*(Z)$ eindeutig darstellen:

$$\tilde{N} = qN + x_*(Z)$$

q ist dabei stets $\neq 0$. Diese Funktion wird später noch von Bedeutung sein.

Definition 1.10 *Seien $\tilde{N}, N$ zwei Normalen mit den Konormalen $\tilde{\eta}$ bzw. η. Wir bezeichnen die nicht verschwindende Funktion*

$$\eta(\tilde{N}) = \frac{det(x_1, \ldots, x_n, \tilde{N})}{det(x_1, \ldots, x_n, N)}$$

als **Stützfunktion von $\tilde{N}$ bezüglich** *N.*

Bemerkung: Diese Stützfunktion soll nicht mit der euklidischen bzw. affinen Stützfunktion aus Abschnitt 2.2.4 verwechselt werden, die aber Spezialfälle dieser Definition sind.

Nun erweitern wir Lemma 1.6 aus [BK], in dem die Größen bezüglich einer Normalen $\tilde{N}$ durch die Größen bezüglich einer anderen Normalen N dargestellt werden:

Lemma 1.11 *Seien N und $\tilde{N}$ zwei transversale Vektorfelder mit $\tilde{N} = qN + x_*(Z)$. Dann gilt:*

1.) $\tilde{h} = \frac{1}{q} h$, 2.) $\tilde{h}^{**} = qh^{**}$, 3.) $\tilde{h}^{*} = qh^{*}$,

4.) $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{q} h(X, Y) Z$,

5.) $\tilde{\tau}(X) = X(\log\ |q|) + \tau(X) + \frac{1}{q} h(X, Z)$,

6.) $\tilde{S}(X) = \tilde{\tau}(X) Z + qS(X) - \nabla_X Z$

$$= X(\log\ |q|)Z + \tau(X)Z + \frac{1}{q}h(X,Z)Z + qS(X) - \nabla_X Z,$$

7.) $\tilde{C}(X,Y,V)$
$$= \frac{1}{q}C(X,Y,V) + \frac{1}{q^2}\Big(h(X,V)h(Y,Z) + h(X,Y)h(V,Z) + h(Y,V)h(X,Z)\Big),$$

8.) $$\tilde{\hat{\nabla}}_X Y = \hat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\Big(X(\log|q|)Y + Y(\log|q|)X - grad_h(\log|q|)h(X,Y)\Big),$$

9.) $$\tilde{\Delta}(f) = q\Delta(f) - \frac{n-2}{2}grad_h(q)(f),$$

10.) $\tilde{K}_X Y$
$$= K_X Y - \frac{1}{q}h(X,Y)Z + \frac{1}{2}\Big(X(\log|q|)Y + Y(\log|q|)X - grad_h(\log|q|)h(X,Y)\Big),$$

11.) $$n\tilde{\hat{T}}(Y) = n\hat{T}(Y) - \frac{1}{q}h(Z,Y) + \frac{n}{2}Y(\log|q|),$$

12.) $$n\tilde{T} = nqT - Z + \frac{n}{2}q\,grad_h(\log|q|),$$

13.) $\tilde{\omega} = q\omega,$ 14.) $\tilde{\omega}_{\tilde{h}} = \frac{1}{|q|^{n/2}}\omega_h,$

15.) $$\tilde{\overline{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - X(\log\ |q|)Y + \frac{1}{q}h(Y,Z)X,$$

16.) $\tilde{\eta} = \frac{1}{q}\eta,$ 17.) $\tilde{\bar{\omega}} = \frac{1}{q^{n+1}}\bar{\omega},$

18.) $$\tilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*{}_X Y - X(\log\ |q|)Y - Y(\log\ |q|)X,$$

19.) $$\tilde{\overline{h}}(X,Y) = \overline{h}(X,Y) - (\nabla^*_X Y)(\log\ |q|) + \frac{1}{q}X(Y(q)),$$

20.) $$\tilde{\bar{K}}_X Y = \bar{K}_X Y - \frac{1}{2}\Big(X(\log\ |q|)Y + Y(\log\ |q|)X + grad_h(\log\ |q|)h(X,Y)\Big).$$

Beweis: 1.)–6.), 16.) wurden in [BK] gezeigt.
Zu 7.): Einsetzen von $\tilde{\nabla}$, $\tilde{h}$, $\tilde{\tau}$ in die Definition der kubischen Form:

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}(X,Y,V) = \tilde{\nabla}_X \tilde{h}(Y,V) + \tilde{\tau}(X)\tilde{h}(Y,V) \\
= \ & \frac{1}{q}X(h(Y,V)) + X(\frac{1}{q})h(Y,V) - \frac{1}{q}h(\tilde{\nabla}_X Y, V) - \frac{1}{q}h(Y, \tilde{\nabla}_X V) \\
& + \frac{1}{q}(X(\log|q|) + \tau(X) + \frac{1}{q}h(X,Z))h(Y,V) \\
= \ & \frac{1}{q}X(h(Y,V)) - \frac{1}{q}h(\nabla_X Y - \frac{1}{q}h(X,Y)Z, V) - \frac{1}{q}h(Y, \nabla_X V - \frac{1}{q}h(X,V)Z) \\
& + \frac{1}{q}(\tau(X) + \frac{1}{q}h(X,Z))h(Y,V) \\
= \ & \frac{1}{q}C(X,Y,V) + \frac{1}{q^2}h(X,Y)h(Z,V) + \frac{1}{q^2}h(Y,Z)h(X,V) + \frac{1}{q^2}h(X,Z)h(Y,V)
\end{aligned}$$

8.) folgt sofort nach Einsetzen von $\tilde{h}$ in (1.3).
Zu 9.):

$$\tilde{\Delta}(f) = \tilde{h}^{**}(X(Y(f)) - \tilde{\hat{\nabla}}_X Y(f))$$

$$
\begin{aligned}
&= qh^{**}(X(Y(f)) - \hat{\nabla}_X Y(f)) \\
&\quad + \frac{q}{2} h^{**}(X(\log|q|)Y(f) + Y(\log|q|)X(f) - grad_h(\log|q|)(f)h(X,Y)) \\
&= q\Delta(f) - \frac{n-2}{2} grad_h(q)(f)
\end{aligned}
$$

10.) erhält man durch Subtraktion von 4.) und 8.), 11.) als Spur von 10.) und 12.) wegen $n\tilde{T} = n\tilde{h}^*(\tilde{\hat{T}})$. 13.), 14.) folgen aus ihrer jeweiligen Definition:

$$\tilde{\omega} = det(x_1, \ldots, x_n, qN + x_*(Z)) = q\omega,\ \tilde{\omega}_{\tilde{h}} = \sqrt{|Det(\frac{1}{q}h)|}.$$

Zu 15.): Nach der Definition von $\overline{\nabla}$ gilt

$$
\begin{aligned}
& \tilde{h}(\tilde{\overline{\nabla}}_X Y, V) + \tilde{h}(Y, \tilde{\nabla}_X V) - X(\tilde{h}(Y,V)) = 0 \\
= \ & \frac{1}{q} h(\tilde{\overline{\nabla}}_X Y, V) + \frac{1}{q} h(Y, \nabla_X V - \frac{1}{q} h(X,V)Z) - \frac{1}{q} X(h(Y,V)) - X(\frac{1}{q}) h(Y,V) \\
= \ & \frac{1}{q} h(\tilde{\overline{\nabla}}_X Y, V) - \frac{1}{q} h(\overline{\nabla}_X Y, V) - \frac{1}{q^2} h(Y,Z)h(X,V) - X(\frac{1}{q}) h(Y,V) \\
\Rightarrow \ & \tilde{\overline{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{q} h(Y,Z)X - X(\log|q|)Y
\end{aligned}
$$

Zu 17.): Nach 16.) erhält man für Basisfelder ∂_k

$$
\begin{aligned}
\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n) &= \frac{1}{q} \overline{det}(\eta, \frac{1}{q}\eta_1 + \partial_1(\frac{1}{q})\eta, \ldots, \frac{1}{q}\eta_n + \partial_n(\frac{1}{q})\eta) \\
&= \frac{1}{q^{n+1}} \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n).
\end{aligned}
$$

18.) und 19.) ergeben sich durch Koeffizientenvergleich aus den Ableitungsgleichungen der Konormalen (1.15) wegen $\eta = q\tilde{\eta}$:

$$
\begin{aligned}
& D_X D_Y \eta = D_X(Y(q)\tilde{\eta} + qD_Y\tilde{\eta}) \\
& = X(Y(q))\tilde{\eta} + Y(q)D_X\tilde{\eta} + X(q)D_Y\tilde{\eta} + qD_X D_Y\tilde{\eta} \\
& = X(Y(q))\tilde{\eta} + Y(q)D_X\tilde{\eta} + X(q)D_Y\tilde{\eta} + qD_{\tilde{\nabla}^*_X Y}\tilde{\eta} - q\tilde{\overline{h}}(X,Y)\tilde{\eta} \\
& = D_{\nabla^*_X Y}\eta - \overline{h}(X,Y)\eta \\
& = \nabla^*_X Y(q)\tilde{\eta} + qD_{\nabla^*_X Y}\tilde{\eta} - q\overline{h}(X,Y)\tilde{\eta}
\end{aligned}
$$

Wir benutzten nur $\eta = q\tilde{\eta}$ und nicht die Tatsache, daß η und $\tilde{\eta}$ Konormalen einer Immersion sind.
20.) folgt nach Subtraktion von 18.) und 8.). #

Korollar: Ist N eine Normale und $\tilde{N} = cN$, $c \neq 0$, ein konstantes Vielfaches von N, so sind die Größen bezüglich $\tilde{N}$ konstante Vielfache der Größen bezüglich N.

Beweis: Man setzt in die Formeln von Lemma 1.11 $q = c = konst.$ und $Z = 0$ ein. #

Bemerkung: Es gilt für die in Δx und $\Delta\eta$ vorkommenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^{ij}(\tilde{K}^l_{ij}) &= qh^{ij}(K^l_{ij} - \frac{1}{q}h_{ij}Z^l + \frac{1}{2}(\partial_i(\log|q|)\delta^l_j + \partial_j(\log|q|)\delta^l_i - h^{lm}\partial_m(\log|q|)h_{ij})) \\
&= qh^{ij}K^l_{ij} - nZ^l - \frac{n-2}{2}h^{lm}\partial_m(q) \\
\tilde{h}^{ij}(\tilde{\bar{K}}{}^l_{ij}) &= qh^{ij}(\bar{K}^l_{ij} - \frac{1}{2}(\partial_i(\log|q|)\delta^l_j + \partial_j(\log|q|)\delta^l_i + h^{lm}\partial_m(\log|q|)h_{ij}) \\
&= qh^{ij}\bar{K}^l_{ij} - \frac{n+2}{2}h^{lm}\partial_m(q)
\end{aligned}$$

In Abschnitt 2.2.2 gehen wir noch einmal auf diese Formeln ein.

1.6 Die Formeln von Lelieuvre

In diesem Abschnitt geht es vor allem um die Frage, inwieweit eine Immersion x durch ihre Konormale bestimmt ist. Wir kommen erst zu den eigentlichen Formeln von Lelieuvre, d. h. zur Darstellung der Linearisierung einer Immersion und ihrer Normalen durch die Konormale, die quadratische Grundform und die Normalzusammenhangsform. Diese Formeln kommen für $n = 2$ und Blaschkescher Affinnormale schon in [Bl2] vor. In [LNW] (vgl. auch [NoS], S. 68–73) werden sie auf beliebige Dimension und Relativnormalen verallgemeinert. Daneben wird eine Integrabilitätsbedingung an η, h angegeben. Wir wollen die Ergebnisse aus [LNW] kurz wiederholen und gleichzeitig auf beliebige Normalen erweitern. In 1.6.2 untersuchen wir die Integrabilitätsbedingung (1.18) näher und in 1.6.3 geben wir eine Umkehrung von Lemma 1.12 an.

1.6.1 Darstellung einer Fläche durch ihre Konormale

Lemma 1.12 (Formeln von Lelieuvre) *Sei x eine (reguläre) Immersion, N eine Normale von x und die ∂_k Basisfelder. Dann sind die Linearisierung x_* von x und die Normale N durch die zugehörige Konormale η, h und τ eindeutig darstellbar. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
x_i &= \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)^{-1} \sum_j h_{ij}\, \eta_1 \wedge \ldots \eta_{j-1} \wedge \eta \wedge \eta_{j+1} \ldots \eta_n \\
N &= \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)^{-1} (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n + \sum_j \tau_j\, \eta_1 \wedge \ldots \eta_{j-1} \wedge \eta \wedge \eta_{j+1} \ldots \eta_n).
\end{aligned}$$

Beweis: Grundlage für dieses Lemma sind die Gleichungen (1.10)–(1.13). N und die x_i wie oben angegeben erfüllen

$$\eta(x_i) = 0,\ \eta_j(x_i) = -h_{ji},\ \eta(N) = 1,\ \eta_j(N) = -\tau_j.$$

Es gilt sogar: Die Gleichungen (1.10), (1.12), sowie (1.11), (1.13) sind jeweils eindeutig nach $x_*(Y)$ bzw. N auflösbar, denn wegen $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ sind $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n$ linear unabhängig. #

Für den kommenden Satz verwenden wir für M eine offene, einfach zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ für A. Die ∂_k seien die kanonischen Basisfelder auf $\mathbb{R}^n$, *det* die kanonische Determinantenform auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbb{R}_{n+1}$ der Dualraum von $\mathbb{R}^{n+1}$. Man kann dies auch verallgemeinern, doch sollte ein Integralbegriff oder eine Stammfunktion vorhanden sein, so daß sichergestellt ist, daß eine Immersion x existiert mit $x_*(\partial_i) = B(\partial_i)$, wenn B eine Abbildung wie im Beweis ist, für die die Integrabilitätsbedingung $D_Y B(X) - D_X B(Y) = B([Y,X])$ gilt. Ab dem nächsten Kapitel beschränken wir uns sowieso auf diesen Fall.

Satz 1.13 *Zu einer vorgegebenen, differenzierbaren Abbildung $\eta : U \to \mathbb{R}_{n+1}$, für die stets $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ gilt, einer symmetrischen, regulären 2–Form h und einer 1–Form τ gibt es genau dann eine Immersion x, die η als Konormale, h als quadratische Grundform und τ als Normalzusammenhangsform hat, wenn*[16]

$$\nabla^*{}_X h(Y,Z) = \nabla^*{}_Y h(X,Z) \tag{1.18}$$

gilt. Die Immersion x ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Beweis: Wir gehen analog zu [LNW] vor. Den Beweis übernehmen wir im Prinzip bis auf die Änderungen hinsichtlich τ. Auf die Rechnungen mit den Integrabilitätsbedingungen, aus denen (1.18) folgt, hat τ keine Auswirkungen.
Wir definieren die differenzierbare Abbildung $B : p \in U \mapsto B_p$, wobei $B_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine lineare Abbildung ist, durch

$$\begin{aligned} \eta(B(Y)) &= 0 \\ D_X \eta(B(Y)) &= -h(X,Y) \end{aligned}$$

für Vektorfelder X, Y auf U und die Abbildung $\mathcal{N} : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{N}) &= 1 \\ D_Y \eta(\mathcal{N}) &= -\tau(Y) \end{aligned}$$

für Vektorfelder Y auf U.
Die $B_i := B(\partial_i)$ und $\mathcal{N}$ sind eindeutig festgelegt und haben die Form der x_i und von N in Lemma 1.12. Aus der Definition von B und $\mathcal{N}$ folgt auch

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) det(B_1, \ldots, B_n, \mathcal{N}) = Det_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -h_{11} & \ldots & -h_{1n} & -\tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -h_{n1} & \ldots & -h_{nn} & -\tau_n \end{pmatrix}$$

$$= Det(h_{ij}) \neq 0.$$

Damit ist $det(B_1, \ldots, B_n, \mathcal{N}) \neq 0$ und die B_i und $\mathcal{N}$ sind linear unabhängig. Ist B integrierbar, d. h. gibt es ein $x : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_*(X) = B(X)$, dann ist x eine Immersion und $\mathcal{N}$ ein transversales Vektorfeld.
Es bleibt allein noch zu beweisen, daß B integrierbar ist, also daß die Integrabilitätsbedingung

$$D_Y B(X) - D_X B(Y) = B([Y,X])$$

[16] Wie bei (1.15) wird der torsionsfreie Zusammenhang ∇^* und die 2–Form $\overline{h}$ wegen $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ durch Ableitungsgleichungen von η eindeutig festgelegt. Wir gehen im Beweis darauf ein.

für alle Vektorfelder X, Y auf U gilt. Wir zeigen, daß diese Gleichung sowohl in η als auch in $D_Z\eta$ eingesetzt gilt, d. h.

$$\eta(D_Y B(X) - D_X B(Y)) = \eta(B([Y, X]))$$

und

$$D_Z\eta(D_Y B(X) - D_X B(Y)) = D_Z\eta(B([Y, X]))$$

für $Z \in \mathfrak{V}U$. Da $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n$ für alle $p \in U$ $\mathbb{R}_{n+1}$ aufspannen, reicht das.
Aus der Definition von B folgt

$$\eta(D_Y(B(X)) = 0 - D_Y\eta(B(X)) = h(Y, X)$$

und durch Vertauschen

$$\eta(D_Y B(X) - D_X B(Y)) = \eta(B([Y, X])),$$

denn h ist symmetrisch und $\eta(B([Y, X])) = 0$. Dieser Teil gilt demnach ohne Einschränkung.
Weil $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ ist, sind $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n$ linear unabhängig für jedes $p \in U$. Mit denselben Überlegungen wie bei (1.15) ergibt sich eine Ableitungsgleichung für η, die einen torsionsfreien linearen Zusammenhang ∇^* und eine symmetrische 2–Form $\overline{h}$ festlegt. Wir erhalten erst einmal

$$\begin{aligned}
-X(h(Z, Y)) &= X(D_Z\eta(B(Y))) \\
&= D_X D_Z\eta(B(Y)) + D_Z\eta(D_X(B(Y))) \\
&= (D_{\nabla^*{}_X Z}\eta - \overline{h}(Z, X)\eta)(B(Y)) + D_Z\eta(D_X(B(Y))) \\
&= -h(\nabla^*{}_X Z, Y) + D_Z\eta(D_X(B(Y))),
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
D_Z\eta(D_X(B(Y))) &= -X(h(Z, Y)) + h(\nabla^*{}_X Z, Y) \\
&= -\nabla^*{}_X h(Z, Y) - h(Z, \nabla^*{}_X Y).
\end{aligned}$$

Weiter bekommt man, weil ∇^* torsionsfrei ist,

$$D_Z\eta(B([Y, X])) = D_Z\eta(B(\nabla^*{}_Y X - \nabla^*{}_X Y)) = -h(\nabla^*{}_Y X - \nabla^*{}_X Y, Z).$$

Zusammen gilt

$$\begin{aligned}
&D_Z\eta(D_Y B(X) - D_X B(Y)) - D_Z\eta(B([Y, X])) \\
&= -\nabla^*{}_Y h(X, Z) - h(Z, \nabla^*{}_Y X) + \nabla^*{}_X h(Y, Z) + h(Z, \nabla^*{}_X Y) + h(\nabla^*{}_Y X - \nabla^*{}_X Y, Z) \\
&= \nabla^*{}_X h(Y, Z) - \nabla^*{}_Y h(X, Z).
\end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn $\nabla^*{}_X h(Y, Z) - \nabla^*{}_Y h(X, Z) = 0$ gilt.
Sei (1.18) erfüllt und seien x, $\tilde{x}$ zwei Immersionen mit

$$x_*(X) = \tilde{x}_*(X) = B(X)$$

für alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{V}U$. Dann ist $x - \tilde{x}$ konstant. #

Bezeichnung: Eine Abbildung $\eta : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{n+1}$ mit $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ wollen wir auch **regulär** nennen. Die Konormale einer regulären Immersion erfüllt dies notwendig wegen (1.14). Für eine nicht reguläre Abbildung η kann man Satz 1.13 nicht anwenden.

(1.18) bedeutet für die lokalen Funktionen:

$$\begin{aligned} &\partial_m h_{lp} - \Gamma^{*\,k}_{mp} h_{kl} - \Gamma^{*\,k}_{ml} h_{kp} - \partial_p h_{ml} + \Gamma^{*\,k}_{pm} h_{kl} + \Gamma^{*\,k}_{pl} h_{km} \\ &= \partial_m h_{lp} - \Gamma^{*\,k}_{ml} h_{kp} - \partial_p h_{ml} + \Gamma^{*\,k}_{pl} h_{km} = 0 \end{aligned}$$

Da h bezüglich $\hat{\nabla}$ parallel ist, also (1.2) gilt, kann man das äquivalent umschreiben zu:

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma}_{ml}^{\ k} h_{kp} - \Gamma^{*\,k}_{ml} h_{kp} - \hat{\Gamma}_{pl}^{\ k} h_{km} + \Gamma^{*\,k}_{pl} h_{km} = 0 \\ &\text{oder } \bar{K}^k_{pl} h_{km} = \bar{K}^k_{ml} h_{kp} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Bemerkung: Die Blaschkesche Affinnormale ist diejenige Relativnormale, für die stets

$$|\omega| = |\omega_h|$$

und damit nach (1.14)

$$|\omega_h| = |\bar{\omega}|$$

gilt. Sie wird in 2.2.2 genauer behandelt, die Definition wurde für das Korollar vorgezogen.

Korollar: 1.) Zu einer vorgegebenen regulären Abbildung $\eta : U \to \mathbb{R}_{n+1}$ und einer symmetrischen, regulären 2–Form h gibt es genau dann eine relativnormalisierte Immersion x, die η als Konormale und h als quadratische Grundform hat, wenn

$$\nabla^*{}_X h(Y, Z) = \nabla^*{}_Y h(X, Z)$$

gilt. Die x_i haben dann folgende Form

$$x_i = \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)^{-1} \sum_j h_{ij}\, \eta_1 \wedge \ldots \eta_{j-1} \wedge \eta \wedge \eta_{j+1} \ldots \eta_n \tag{1.20}$$

und die Relativnormale

$$N = \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)^{-1} (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n). \tag{1.21}$$

2.) Zu einer symmetrischen, regulären 2–Form h mit $\varepsilon := sign\, Det(h_{ij})$ und einer vorgegebenen Abbildung $\eta : U \to \mathbb{R}_{n+1}$ mit $|\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)| = \sqrt{|Det(h_{ij})|} \neq 0$, gibt es genau dann eine Blaschke–Immersion x, die η als Konormale und h als quadratische Grundform hat, wenn

$$\nabla^*{}_X h(Y, Z) = \nabla^*{}_Y h(X, Z)$$

gilt. Die x_i haben dann folgende Form

$$x_i = \varepsilon \left(\sqrt{|Det(h_{ij})|} \right)^{-1} \sum_j h_{ij}\, \eta_1 \wedge \ldots \eta_{j-1} \wedge \eta \wedge \eta_{j+1} \ldots \eta_n$$

und die Blaschkesche Affinnormale

$$N = \varepsilon \left(\sqrt{|Det(h_{ij})|} \right)^{-1} (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n).$$

Beweis: 1.) Anwendung von Satz 1.13 und Lemma 1.12 mit $\tau = 0$.
2.) Anwendung vom 1. Teil des Korollars unter der Bedingung

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \varepsilon \sqrt{|Det(h_{ij})|}.$$

Die Bedingung $|\bar{\omega}| = |\omega_h|$ ist auch für

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) = -\varepsilon \sqrt{|Det(h_{ij})|}$$

erfüllt. Man erhält dann das Negative der angegebenen x_i, N.

#

1.6.2 Betrachtungen zu den Formeln

Wir untersuchen hier zum einen, wie die in Satz 1.13 und die in (1.1) angegebenen Integrabilitätsbedingungen in Verbindung stehen, zum anderen, inwieweit Satz 1.13 bzw. (1.18) noch gilt, wenn man von η, h zu $q\eta, sh$ übergeht.
Wir brauchen hier keine besonderen Bedingungen an A, M wie bei Satz 1.13 zu stellen.

Für eine gegebene Immersion x kann man die Größen ∇ und S nach Lemma 1.9 mit Hilfe von h, τ, ∇^* und $\overline{h}$ darstellen[17]:

$$\begin{aligned} h(\nabla_X Y, Z) &= \nabla^*{}_X h(Z, Y) + h(\nabla^*{}_X Y, Z) - h(X, Y)\tau(Z) && (1.22) \\ h(S(X), Y) &= -\nabla^*{}_X \tau(Y) + \overline{h}(X, Y) + \tau(X)\tau(Y). && (1.23) \end{aligned}$$

Gibt man nun wie beim Satz 1.13 η, h und τ vor, wird durch sie eine Immersion x induziert. Die Größen ∇ und S von x müssen (1.22), (1.23) erfüllen, es gilt sogar: (1.22), (1.23) sind eindeutig nach ∇, S auflösbar. Die durch diese Gleichungen festgelegten Größen ∇, S sind notwendig der induzierte Zusammenhang und der Shape–Operator von x.

Eigenartig ist die Tatsache, daß vier Integrabilitätsbedingungen, nämlich die von (1.1), bei Angabe von h, τ, ∇ und S gelten müssen, bei Angabe von η, h und τ scheinbar nur zwei, und zwar die Regularitätseigenschaft $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ und (1.18).
Aber eigentlich ist damit mehr ausgesagt:
Aus $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ folgt die lineare Unabhängigkeit von η und den η_i in jedem Punkt. Dadurch ergibt sich wie bei (1.15) eine Ableitungsgleichung

$$D_X D_Y \eta = D_{\nabla^*{}_X Y} \eta - \overline{h}(X, Y)\eta,$$

[17] (1.23) ist die 2. Aussage von Lemma 1.9, (1.22) folgt aus dem Beweis dieses Lemmas. Beide Gleichungen wurden ohne die Codazzi–Gleichung für h bewiesen, denn es soll gerade in Lemma 1.14 gezeigt werden, daß Codazzi für h gilt, wenn man ∇ und S durch (1.22), (1.23) festlegt. Aus dem Grund wird statt (1.22) nicht $\nabla^*{}_X Y = \nabla_X Y - 2K_X Y - h(X, Y)h^*(\tau)$ genommen, denn hier wird die Codazzi–Gleichung bei der Herleitung benutzt.

die den linearen Zusammenhang ∇^* und die 2–Form $\overline{h}$ eindeutig festlegt. Da D torsionsfrei ist, ist $\overline{h}$ symmetrisch und ∇^* torsionsfrei, d. h.

$$\nabla^*{}_X Y - \nabla^*{}_Y X = [X, Y] \text{ und } \overline{h}(X, Y) = \overline{h}(Y, X). \tag{1.24}$$

Außerdem ist D flach, dies bedeutet für η

$$D_X D_Y D_Z \eta - D_Y D_X D_Z \eta - D_{[X,Y]} D_Z \eta = 0.$$

Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned}
0 &= D_X(D_{\nabla^*{}_Y Z}\eta - \overline{h}(Y,Z)\eta) - D_Y(D_{\nabla^*{}_X Z}\eta - \overline{h}(X,Z)\eta) \\
&\quad -D_{\nabla^*{}_{[X,Y]} Z}\eta + \overline{h}([X,Y],Z)\eta \\
&= D_{\nabla^*{}_X \nabla^*{}_Y Z}\eta - \overline{h}(X, \nabla^*{}_Y Z)\eta - X(\overline{h}(Y,Z))\eta - \overline{h}(Y,Z) D_X \eta \\
&\quad -D_{\nabla^*{}_Y \nabla^*{}_X Z}\eta + \overline{h}(Y, \nabla^*{}_X Z)\eta + Y(\overline{h}(X,Z))\eta + \overline{h}(X,Z) D_Y \eta \\
&\quad -D_{\nabla^*{}_{[X,Y]} Z}\eta + \overline{h}([X,Y],Z)\eta \\
&= D_{R^*(X,Y)Z}\eta - \overline{h}(Y,Z) D_X \eta + \overline{h}(X,Z) D_Y \eta \\
&\quad +(-X(\overline{h}(Y,Z)) + \overline{h}(\nabla^*{}_X Y, Z) + \overline{h}(Y, \nabla^*{}_X Z))\eta \\
&\quad +(Y(\overline{h}(X,Z)) - \overline{h}(\nabla^*{}_Y X, Z) - \overline{h}(X, \nabla^*{}_Y Z))\eta \\
&\Leftrightarrow R^*(X,Y)Z = \overline{h}(Y,Z)X - \overline{h}(X,Z)Y \text{ und} \qquad (1.25) \\
&\quad\ \ \nabla^*{}_X \overline{h}(Y,Z) = \nabla^*{}_Y \overline{h}(X,Z). \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Somit folgen[18] aus $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ die Bedingungen (1.24)–(1.26).

Lemma 1.14 *Gibt man η, h und τ mit $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ und (1.18) vor und definiert ∇ und S durch (1.22), (1.23), so gelten für h, ∇, S und τ die Integrabilitätsbedingungen (1.1).*

Beweis: Wegen $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ gilt für $\nabla^*, \overline{h}$ (1.24)–(1.26).
Schon an (1.22) sieht man, daß wegen (1.18) und (1.24) der Zusammenhang ∇ torsionsfrei ist. Wir verwenden dies und schreiben die Integrabilitätsbedingungen von (1.1) um, indem wir (1.22) und (1.23) einsetzen.
1.) Zunächst beweisen wir die Ricci–Gleichung:

$$\begin{aligned}
& h(X, S(Y)) - h(Y, S(X)) \\
\overset{(1.23)}{=} \ & \tau(\nabla^*{}_Y X) + \overline{h}(Y,X) - Y(\tau(X)) + \tau(X)\tau(Y) \\
& -\tau(\nabla^*{}_X Y) - \overline{h}(X,Y) + X(\tau(Y)) - \tau(X)\tau(Y) \\
\overset{(1.24)}{=} \ & X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau([X,Y]) \\
= \ & X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
= \ & \nabla_X \tau(Y) - \nabla_Y \tau(X).
\end{aligned}$$

[18] Genauer gilt: Aus $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ folgt nur, daß diese $n+1$ Formen linear unabhängig in jedem Punkt sind und man Ableitungsgleichungen für die η_{ik} wie oben bzw. bei (1.15) bilden kann. Damit werden dann ∇^* und $\overline{h}$ festgelegt, die automatisch (1.24)–(1.26) erfüllen.

Die Ricci–Gleichung ist also erfüllt.

2.) Nun kommen wir zu Codazzi für h:

$$\begin{aligned}
& \nabla_X h(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) - \nabla_Y h(X,Z) - \tau(Y)h(X,Z) \\
= \quad & X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\
& -Y(h(X,Z)) + h(\nabla_Y X, Z) + h(X, \nabla_Y Z) \\
& +\tau(X)h(Y,Z) - \tau(Y)h(X,Z) \\
\overset{(1.22)}{=} \quad & X(h(Y,Z)) - \nabla^*{}_X h(Y,Z) - h(\nabla^*{}_X Y, Z) + h(X,Y)\tau(Z) \\
& -\nabla^*{}_X h(Y,Z) - h(\nabla^*{}_X Z, Y) + h(X,Z)\tau(Y) \\
& -Y(h(X,Z)) + \nabla^*{}_Y h(X,Z) + h(\nabla^*{}_Y X, Z) - h(X,Y)\tau(Z) \\
& +\nabla^*{}_Y h(X,Z) + h(\nabla^*{}_Y Z, X) - h(Y,Z)\tau(X) \\
& +\tau(X)h(Y,Z) - \tau(Y)h(X,Z) \\
= \quad & \nabla^*{}_Y h(X,Z) - \nabla^*{}_X h(Y,Z).
\end{aligned}$$

Codazzi für h folgt damit aus (1.18).

3.) Zum Beweis der Codazzi–Gleichung für S benutzen wir zusätzlich (1.25) und (1.26):

$$\begin{aligned}
& h(\nabla_X(S(Y)), Z) - h(\nabla_Y(S(X)), Z) - h(S([X,Y]), Z) \\
\overset{(1.22)}{=} \quad & X(h(Z, S(Y))) - h(\nabla^*{}_X Z, S(Y)) - h(X, S(Y))\tau(Z) \\
& -Y(h(Z, S(X))) + h(\nabla^*{}_Y Z, S(X)) + h(Y, S(X))\tau(Z) \\
& -h(S([X,Y]), Z) \\
\overset{(1.23)}{=} \quad & X\left(-Y(\tau(Z)) + \tau(\nabla^*{}_Y Z) + \overline{h}(Y,Z) + \tau(Y)\tau(Z)\right) \\
& -\left(-Y(\tau(\nabla^*{}_X Z)) + \tau(\nabla^*{}_Y \nabla^*{}_X Z) + \overline{h}(Y, \nabla^*{}_X Z) + \tau(Y)\tau(\nabla^*{}_X Z)\right) \\
& -\left(-Y(\tau(X)) + \tau(\nabla^*{}_Y X) + \overline{h}(Y,X) + \tau(Y)\tau(X)\right)\tau(Z) \\
& -Y\left(-X(\tau(Z)) + \tau(\nabla^*{}_X Z) + \overline{h}(X,Z) + \tau(X)\tau(Z)\right) \\
& +\left(-X(\tau(\nabla^*{}_Y Z)) + \tau(\nabla^*{}_X \nabla^*{}_Y Z) + \overline{h}(X, \nabla^*{}_Y Z) + \tau(X)\tau(\nabla^*{}_Y Z)\right) \\
& +\left(-X(\tau(Y)) + \tau(\nabla^*{}_X Y) + \overline{h}(X,Y) + \tau(X)\tau(Y)\right)\tau(Z) \\
& +[X,Y](\tau(Z)) - \tau(\nabla^*{}_{[X,Y]} Z) - \overline{h}([X,Y], Z) - \tau([X,Y])\tau(Z) \\
\overset{(1.18),(1.24)}{=} \quad & X(\overline{h}(Y,Z)) - \overline{h}(Y, \nabla^*{}_X Z) - Y(\overline{h}(X,Z)) + \overline{h}(X, \nabla^*{}_Y Z) - \overline{h}([X,Y], Z) \\
& +\tau(R^*(X,Y)Z) \\
& -\tau(X)\nabla^*{}_Y \tau(Z) + \tau(Y)\nabla^*{}_X \tau(Z) \\
\overset{(1.25),(1.26)}{=} \quad & \tau(Y)\nabla^*{}_X \tau(Z) - \tau(X)\nabla^*{}_Y \tau(Z) + \tau(\overline{h}(Y,Z)X - \overline{h}(X,Z)Y) \\
\overset{(1.23)}{=} \quad & \tau(X)h(S(Y), Z) - \tau(Y)h(S(X), Z).
\end{aligned}$$

Somit gilt auch Codazzi für S.

4.) Für die Gauß–Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
& h(R(X,Y)Z, V) = h(\nabla_X \nabla_Y Z, V) - h(\nabla_Y \nabla_X Z, V) - h(\nabla_{[X,Y]} Z, V) \\
\overset{(1.22)}{=} \quad & X(h(\nabla_Y Z, V)) - h(\nabla_Y Z, \nabla^*{}_X V) - h(X, \nabla_Y Z)\tau(V) \\
& -Y(h(\nabla_X Z, V)) + h(\nabla_X Z, \nabla^*{}_Y V) + h(Y, \nabla_X Z)\tau(V)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-[X,Y](h(Z,V)) + h(\nabla^*{}_{[X,Y]}V,Z) + h([X,Y],Z)\tau(V) \\
\stackrel{(1.22)}{=}\; & X\left(Y(h(V,Z)) - h(\nabla^*{}_Y V,Z) - h(Y,Z)\tau(V)\right) \\
&-Y(h(\nabla^*{}_X V,Z)) + h(\nabla^*{}_Y \nabla^*{}_X V,Z) + h(Y,Z)\tau(\nabla^*{}_X V) \\
&-\tau(V)\left(Y(h(X,Z)) - h(\nabla^*{}_Y X,Z) - h(Y,Z)\tau(X)\right) \\
&-Y\left(X(h(V,Z)) - h(\nabla^*{}_X V,Z) - h(X,Z)\tau(V)\right) \\
&+X(h(\nabla^*{}_Y V,Z)) - h(\nabla^*{}_X \nabla^*{}_Y V,Z) - h(X,Z)\tau(\nabla^*{}_Y V) \\
&+\tau(V)\left(X(h(Y,Z)) - h(\nabla^*{}_X Y,Z) - h(X,Z)\tau(Y)\right) \\
&-[X,Y](h(Z,V)) + h(\nabla^*{}_{[X,Y]}V,Z) + h([X,Y],Z)\tau(V) \\
\stackrel{(1.24)}{=}\; & -h(R^*(X,Y)V,Z) \\
&-h(Y,Z)\nabla^*{}_X\tau(V) + h(X,Z)\nabla^*{}_Y\tau(V) - \tau(V)(h(X,Z)\tau(Y) - h(Y,Z)\tau(X)) \\
\stackrel{(1.25)}{=}\; & -\overline{h}(Y,V)h(X,Z) + \overline{h}(X,V)h(Y,Z) \\
&-h(Y,Z)\nabla^*{}_X\tau(V) + h(X,Z)\nabla^*{}_Y\tau(V) - \tau(V)(h(X,Z)\tau(Y) - h(Y,Z)\tau(X)) \\
\stackrel{(1.23)}{=}\; & h(Y,Z)h(S(X),V) - h(X,Z)h(S(Y),V).
\end{aligned}
$$

Damit ist auch die Gauß–Gleichung erfüllt.

Für den Beweis von Ricci und Codazzi für h reicht es, mit (1.22), (1.23) die Gleichungen umzuformen und (1.24) und (1.18) zu benutzen. Für 4.) benötigt man noch (1.25) und für 3.) zusätzlich (1.26). #

Bemerkung: In dem Beweis wurden nur die Bedingungen (1.18), (1.24)–(1.26) verwendet, um für die durch (1.22), (1.23) definierten ∇ und S die Eigenschaften (1.1) zu beweisen. Es wurde außer acht gelassen, daß es sich bei (1.18) um eine Integrabilitätsbedingung handelt, daß also η, h, τ wegen (1.18) nach Satz 1.13 eine Immersion x induzieren. Deren Flächengrößen sind gerade ∇, h, S, τ und erfüllen (1.1), wie in Abschnitt 1.2 erwähnt. Dadurch verkürzt sich der Beweis natürlich.

Die Umkehrung von Lemma 1.14 gilt ebenso:

Lemma 1.15 *Sind die symmetrische 2–Form h, der torsionsfreie Zusammenhang ∇, S und τ gegeben, für die die Bedingungen von (1.1) erfüllt sind, so genügen die durch (1.22) und (1.23) definierten Größen ∇^* und $\overline{h}$ den Bedingungen (1.24), (1.18), (1.25) und (1.26).*

Beweis: (1.22) kann man auch so schreiben:

$$
\begin{aligned}
h(\nabla^*{}_X Z, Y) &= X(h(Z,Y)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(X,Y)\tau(Z) \\
&= \nabla_X h(Y,Z) + h(\nabla_X Z, Y) - h(X,Y)\tau(Z)
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 1.9 gilt wegen Codazzi für h (d. h. (1.6) oder (1.9)) sogar:

$$\nabla^*{}_X Z = \hat{\nabla}_X Z - K_X Z - h(X,Z)h^*(\tau)$$

Damit sieht man sofort, daß ∇^* torsionsfrei ist, es gilt:

$$\nabla^*{}_X Y - \nabla^*{}_Y X = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Weiter ergibt sich wegen (1.23)

$$\begin{aligned}
& \overline{h}(X,Y) - \overline{h}(Y,X) \\
= \; & h(S(X),Y) - \tau(\nabla^*{}_X Y) + X(\tau(Y)) - \tau(X)\tau(Y) \\
& -h(S(Y),X) + \tau(\nabla^*{}_Y X) - Y(\tau(X)) + \tau(Y)\tau(X) \\
= \; & h(S(X),Y) - \tau(\nabla_X Y) + X(\tau(Y)) \\
& -h(S(Y),X) + \tau(\nabla_Y X) - Y(\tau(X)).
\end{aligned}$$

Aus der Ricci–Gleichung folgt die Symmetrie von $\overline{h}$ und damit (1.24).
Im Beweis des vorigen Lemmas haben wir in 2.) schon die Äquivalenz von Codazzi für h und (1.18) gezeigt.
Wir benutzen nun 4.) aus dem Beweis von Lemma 1.14. Nur mit Hilfe von (1.18) und (1.24) folgt

$$\begin{aligned}
h(R(X,Y)Z,V) = & -h(R^*(X,Y)V,Z) \\
& -h(Y,Z)\nabla^*{}_X\tau(V) + h(X,Z)\nabla^*{}_Y\tau(V) \\
& -\tau(V)(h(X,Z)\tau(Y) - h(Y,Z)\tau(X))
\end{aligned}$$

Das ist aber wegen der Gauß–Gleichung mit $h(Y,Z)h(S(X),V) - h(X,Z)h(S(Y),V)$ identisch. Diese Differenz kann man mit (1.23) als

$$\begin{aligned}
& -\overline{h}(Y,V)h(X,Z) + \overline{h}(X,V)h(Y,Z) - h(Y,Z)\nabla^*{}_X\tau(V) + h(X,Z)\nabla^*{}_Y\tau(V) \\
& -\tau(V)(h(X,Z)\tau(Y) - h(Y,Z)\tau(X))
\end{aligned}$$

schreiben. Daraus ergibt sich (1.25).
Aus 3.) im Beweis von Lemma 1.14 folgt nur mit (1.18), (1.24)

$$\begin{aligned}
& h(\nabla_X(S(Y)),Z) - h(\nabla_Y(S(X)),Z) - h(S([X,Y]),Z) \\
= \; & \nabla^*{}_X\overline{h}(Y,Z) - \nabla^*{}_Y\overline{h}(X,Z) \\
& +\tau(R^*(X,Y)Z) - \tau(X)\nabla^*{}_Y\tau(Z) + \tau(Y)\nabla^*{}_X\tau(Z)
\end{aligned}$$

Nach Codazzi für S ist das mit $\tau(X)h(S(Y),Z) - \tau(Y)h(S(X),Z)$ identisch und das nach (1.23) mit

$$\tau(Y)\nabla^*{}_X\tau(Z) - \tau(X)\nabla^*{}_Y\tau(Z) + \tau(\overline{h}(Y,Z)X - \overline{h}(X,Z)Y).$$

Zusammen mit (1.25) folgt (1.26). #

Die beiden Hilfssätze zeigen also eine Äquivalenz der Integrabilitätsbedingungen (1.1) für ∇, h, S, τ mit den Bedingungen (1.18), (1.24)–(1.26) für ∇^*, $\overline{h}$, h, τ, wenn ∇^*, $\overline{h}$, ∇, S über (1.22), (1.23) zusammenhängen und ∇ torsionsfrei ist.
Wie erwähnt, haben wir nur die Bedingungen an diese Größen untersucht, ohne direkt auf die Existenz einer Immersion x einzugehen. Im 5. Kapitel verwenden wir Lemma 1.15: Wir schließen daraus, daß (1.1) erfüllt ist, daß Satz 1.13 (in Zusammenhang mit DGL KON) anwendbar ist.

Nach dem Vergleich der Integrabilitätsbedingungen werden wir jetzt die Bedeutung von τ untersuchen und klären, inwieweit (1.18) noch gilt, wenn man η, h verändert.

Das Tripel (η, h, τ) mit den Voraussetzungen des Satzes 1.13 legt eindeutig die Linearisierung $x_*(X)$ einer Immersion x und die Normale N fest. Mit Hilfe von (1.10)–(1.13) kann man $x_*(X)$ und N aus η, h, τ errechnen, siehe Lemma 1.12. An τ werden allerdings keine Bedingungen gestellt. Das ist nicht verwunderlich, denn bei der Darstellung der x_i in Lemma 1.12 kommt τ nicht vor und nur für die x_i muß sichergestellt werden, daß sie integrierbar sind.
Das Tripel $(\eta, h, \tilde{\tau})$ legt wegen

$$\eta(\tilde{x}_*(X)) = 0, \quad D_Y\eta(\tilde{x}_*(X)) = -h(Y, X)$$

die gleiche Linearisierung $\tilde{x}_*(X) = x_*(X)$ fest, nur die Normalen unterscheiden sich:
Ist $\tilde{N} = qN + x_*(Z)$, so gilt wegen

$$\eta(\tilde{N}) = 1 = \eta(N)q + 0 = q\ , \ -\tilde{\tau}(X) = D_X\eta(\tilde{N}) = -\tau(X)q - h(X, Z)$$

$q \equiv 1$ und $Z = h^*(\tilde{\tau} - \tau)$. Ab jetzt werden wir uns deswegen auf Relativnormalen beschränken.

Das Paar (η, h), das dem Tripel $(\eta, h, 0)$ entsprechen soll, mit $\overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$ und (1.18) legt eindeutig nach dem Korollar von Satz 1.13 die Linearisierung einer Immersion und eine Relativnormale fest. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Änderungen dieser Größen auswirken.

Sei nun $\tilde{\eta} = q\eta,\ q \neq 0,\ \tilde{h} = sh,\ s \neq 0$. Den Zusammenhang $\tilde{\nabla}^*$ bezüglich $\tilde{\eta}$ erhält man wie im Beweis von Lemma 1.11. Es ist nur q durch $\frac{1}{q}$ zu ersetzen. Dann gilt für alle Vektorfelder X, Y, Z

$$\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}^*_X \tilde{h}(Y, Z) = \tilde{\nabla}^*_Y \tilde{h}(X, Z) \\
\Leftrightarrow\quad & s\tilde{\nabla}^*_X h(Y, Z) + X(s)h(Y, Z) = s\tilde{\nabla}^*_Y h(X, Z) + Y(s)h(X, Z) \\
\Leftrightarrow\quad & sX(h(Y, Z)) - sh(\tilde{\nabla}^*_X Y, Z) - sh(Y, \tilde{\nabla}^*_X Z) + X(s)h(Y, Z) \\
& = sY(h(X, Z)) - sh(\tilde{\nabla}^*_Y X, Z) - sh(X, \tilde{\nabla}^*_Y Z) + Y(s)h(X, Z) \\
\Leftrightarrow\quad & sX(h(Y, Z)) - sh(\nabla^*{}_X Y + X(\log\ |q|)Y + Y(\log\ |q|)X, Z) \\
& -sh(Y, \nabla^*{}_X Z + X(\log\ |q|)Z + Z(\log\ |q|)X) + X(s)h(Y, Z) \\
& = sY(h(X, Z)) - sh(\nabla^*{}_Y X + Y(\log\ |q|)X + X(\log\ |q|)Y, Z) \\
& -sh(X, \nabla^*{}_Y Z + Y(\log\ |q|)Z + Z(\log\ |q|)Y) + Y(s)h(X, Z) \\
\overset{(1.18)}{\Leftrightarrow}\quad & -sh(Y, X(\log\ |q|)Z) + X(s)h(Y, Z) = -sh(X, Y(\log\ |q|)Z) + Y(s)h(X, Z)
\end{aligned}$$

Weil man dies für beliebige Vektorfelder erhält, $n \geq 2$ ist und h regulär, folgt für alle Vektorfelder X

$$-sX(\log|q|) + X(s) = 0.$$

Das bedeutet

$$-\log|q| + \log|s| = \tilde{c} \equiv \text{konst.},$$

was aber

$$q = c\,s,\ \ c \equiv \text{konst.},\ c \neq 0,$$

zur Folge hat. Daher gilt auch für $(c\,s\,\eta, s\,h)$ die Bedingung (1.18), wenn sie bereits für (η, h) galt. Das Paar $(\tilde{\eta}, \tilde{h}) := (c\,s\,\eta, s\,h)$ induziert also nach Satz 1.13 ebenfalls eine Immersion $\tilde{x}$ mit einer Relativnormalen $\tilde{N}$.

Jetzt wollen wir untersuchen, wie sich die vom Paar (η, h) induzierte Immersion x und die Normale N von $\tilde{x}$, $\tilde{N}$ unterscheiden: Es gilt für $\tilde{x}$ wegen (1.10), (1.12):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\eta}(\tilde{x}_*(X)) = c\, s\, \eta(\tilde{x}_*(X)) = 0, \\
&-\tilde{h}(Y, X) = D_Y \tilde{\eta}(\tilde{x}_*(X)) = c\, s D_Y \eta(\tilde{x}_*(X)) + Y(c\, s)\eta(\tilde{x}_*(X)) \\
&= c\, s D_Y \eta(\tilde{x}_*(X)) = -sh(Y, X)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\tilde{x}_*(X) = \frac{1}{c} x_*(X)$. Sei $\tilde{N}$ dargestellt als $\tilde{N} = \tilde{q}N + x_*(\tilde{Z})$, dann gilt wegen (1.11), (1.13)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\eta}(\tilde{N}) = 1 = c\, s\, \eta(\tilde{N}) \Rightarrow \tilde{q} = \frac{1}{cs}, \\
&D_X \tilde{\eta}(\tilde{N}) = c\, s D_X \eta(\tilde{N}) + X(cs)\eta(\tilde{N}) = -c\, s\, h(X, \tilde{Z}) + X(\log\ |s|) = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgert man $\tilde{N} = \frac{1}{cs}(N + x_*(grad_h(\log\ |s|)))$.
Wenn wir $c = 1$ nehmen, heißt das aber, daß durch $(\tilde{\eta}, \tilde{h}) = (q\eta, qh)$ die (bis auf Translation) gleiche Immersion erzeugt wird, nur mit einer anderen Normalen.

Folgerung: Haben wir ein Paar (η, h) mit (1.18) zur Verfügung, so können wir durch Multiplikation mit einem geeigneten q dafür sorgen, daß das Paar $(\tilde{\eta}, \tilde{h})$ (1.18) und noch dazu

$$|\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)| = c\sqrt{|Det\, \tilde{h}|}, \quad c = \text{konst.},\ c > 0,$$

erfüllt, d. h. wir erhalten insbesondere eine Blaschke–Immersion, vgl. Korollar zu Satz 1.13. Nach [LNW] ist die zweite Eigenschaft, also die Gleichheit der Volumenelemente bis auf einen konstanten Faktor, unter der Voraussetzung von (1.18) mit

$$\tilde{\Delta}\tilde{\eta} = f\tilde{\eta}$$

äquivalent. Im Fall $n = 2$ ist diese Bedingung sogar hinreichend für (1.18), das beweisen wir in Abschnitt 4.1.

1.6.3 Darstellung der Konormalen durch die Flächengrößen

Als eine Umkehrung von Lemma 1.12 kann man auch η und η_i durch x_i, N, h, τ ausdrücken:

Lemma 1.16 *Ist x eine reguläre Hyperfläche, so ergeben sich die Konormale und ihre Ableitungen so:*

$$\eta = \frac{1}{det(x_1, \ldots, x_n, N)} x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, \tag{1.27}$$

$$\eta_k = (-\tau_k x_1 \wedge \ldots \wedge x_n + \sum_{j=1}^{n} h_{kj} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} \wedge N \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_n) \frac{1}{det(x_1, \ldots, x_n, N)}. \tag{1.28}$$

Beweis: Die Gleichungen (1.10)–(1.13), d. h.

$$\eta(N) = 1, \quad \eta(x_j) = 0, \quad \eta_k(N) = -\tau_k, \quad \eta_k(x_j) = -h_{kj},$$

werden von den in (1.27), (1.28) gegebenen Abbildungen erfüllt.

Es ist nur noch zu beweisen, daß $D_{\partial_i}\eta = \eta_i$ gilt, daß also die in (1.28) angeführten Abbildungen η_i wirklich die entsprechenden Ableitungen von η aus (1.27) sind:

$$\begin{aligned}
D_{\partial_k}\eta &= -\frac{\partial_k(det(x_1,\ldots,x_n,N))}{det^2(x_1,\ldots,x_n,N)}x_1\wedge\ldots\wedge x_n \\
&\quad +\frac{1}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}\sum_{j=1}^{n} x_1\wedge\ldots\wedge x_{j-1}\wedge x_{kj}\wedge x_{j+1}\wedge\ldots\wedge x_n \\
&= -\frac{\sum_{j=1}^{n} det(x_1,\ldots,x_{kj},\ldots,x_n,N)+det(x_1,\ldots,x_n,N_k)}{det^2(x_1,\ldots,x_n,N)}x_1\wedge\ldots\wedge x_n \\
&\quad +\frac{1}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}\sum_{j=1}^{n}\Big(h_{kj}x_1\wedge\ldots\wedge x_{j-1}\wedge N\wedge x_{j+1}\wedge\ldots\wedge x_n \\
&\quad +\Gamma_{kj}^{\ j}x_1\wedge\ldots\wedge x_{j-1}\wedge x_j\wedge x_{j+1}\wedge\ldots\wedge x_n\Big) \\
&= -\frac{\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{\ j}det(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n,N)+\tau_k det(x_1,\ldots,x_n,N)}{det^2(x_1,\ldots,x_n,N)}x_1\wedge\ldots\wedge x_n \\
&\quad +\frac{\sum_{j=1}^{n}\Big(h_{kj}x_1\wedge\ldots\wedge x_{j-1}\wedge N\wedge x_{j+1}\wedge\ldots\wedge x_n+\Gamma_{kj}^{\ j}x_1\wedge\ldots\wedge x_n\Big)}{det(x_1,\ldots,x_n,N)} \\
&= \frac{1}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}(-\tau_k\, x_1\wedge\ldots\wedge x_n) \\
&\quad +\frac{1}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}\Big(\sum_{j=1}^{n} h_{kj}x_1\wedge\ldots\wedge x_{j-1}\wedge N\wedge x_{j+1}\wedge\ldots\wedge x_n\Big).
\end{aligned}$$

Die η_k sind demnach die Ableitungen $D_{\partial_k}\eta$ von η. #