Kapitel 3

Minimalflächen in der Relativgeometrie

In diesem Kapitel untersuchen wir verschiedene - in 3.1 definierte - Volumina genauer. Nach einem Überblick über Ergebnisse bezüglich Minimalflächen in Abschnitt 3.2 und vorbereitenden Abschnitten über Variationsrechnung (in 3.3) und Integralformeln (in 3.4) berechnen wir für die in Abschnitt 3.1 definierten Volumina die 1. und z. T. auch die 2. Variation. Und zwar tun wir dies zuerst für die zentroaffine Normale (Abschnitt 3.5), dann für alle Normalen der im Abschnitt 2.2 definierten Familien (in den Abschnitten 3.7 und 3.8), nachdem wir vorher in Abschnitt 3.6 allgemeine Ausdrücke für die Integranden der 1. und 2. Variation dieser Volumina für beliebige Relativnormalen hergeleitet haben.

Wir gehen vor allem der Frage nach, ob das Verschwinden der Mittleren Krümmung auch bei anderen Relativnormalen das Verschwinden der 1. Variation des von der Normalen erzeugten Volumens nach sich zieht, wie dies bei der euklidischen Normale und der Blaschkeschen Affinnormale der Fall ist. Bei den Normalen der Manhartschen Familie ist das so, bei den Normalen der zentroaffinen Familie gilt dies dagegen i. a. nicht.

3.1 Volumina

Sei N eine Relativnormale mit quadratischer Grundform h und Konormale η, G eine reguläre 2–Form und W eine kompakte Teilmenge von U.

Die Volumenelemente der Definitionen 1.1 und 1.8 induzieren bestimmte Volumina. Diese wollen wir für verschiedene Relativnormalen im folgenden behandeln und u. a. ihre 1. Variation berechnen.

Definition 3.1 *Wir nennen*

$$V_N = \int_W \omega du = \int_W det(x_1, \ldots, x_n, N)du$$

das **von N erzeugte Volumen** *von $x[W]$,*

$$V_G = \int_W \sqrt{|Det\, G|}du$$

das **von der 2–Form G erzeugte Volumen**, *als Sonderfall*

$$V_h = \int_W \omega_h du = \int_W \sqrt{|Det\, h|} du$$

das **von h erzeugte Volumen** *und*

$$V_\eta = \int_W \bar{\omega} du = \int_W \overline{det}(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n) du$$

das **von η erzeugte Volumen**.

Zwischen Volumina und Relativnormalen besteht ein enger Zusammenhang: Zu jedem Volumen gibt es (bis aufs Vorzeichen, siehe die folgende Bemerkung) genau eine Relativnormale, die es erzeugt (siehe [Man1]), und jede Relativnormale erzeugt ein Volumen.
Die Betrachtung bestimmter Volumina ist der eigentliche Grund für die Definition der Manhartschen Familie (in [Man1] wurden, wie bereits erwähnt, N_{II} und N_{III} über Volumina definiert), der zentroaffinen Familie (siehe Abschnitt 2.2.5) und der Normalen N_h und N_η (Abschnitt 2.3).

Bemerkung: Ein Volumen sollte nicht negativ sein. Wir müßten daher die Volumina mit Beträgen definieren. Wir rechnen aber mit dieser Definition weiter. Gleichheit von Volumina bedeute Gleichheit bis auf das Vorzeichen.
Die Volumenelemente, d. h. die Integranden in der Definition 3.1, verschwinden nicht auf U, haben also stets ein Vorzeichen. Wir können also durch Umparametrisieren oder Verwenden von $-N$ dafür sorgen, daß sie positiv sind[1].

Spezialfälle:

1.) Das **euklidische Volumen** ist das von der ersten euklidischen Grundform g erzeugte Volumen V_g. Es ist mit V_{N_e} identisch wegen (2.7).

2.) Das von der Blaschkeschen Affinnormalen erzeugte Volumen V_{N_b} nennen wir **Affinvolumen**. Es fällt wegen Definition 2.3 mit dem von h_b und dem von η_b erzeugten Volumen zusammen. Bei der Blaschkeschen Affinnormale gilt also $V_N = V_h = V_\eta$.

3.) Das von der zentroaffinen quadratischen Grundform h_c induzierte Volumen, das ist wegen Abschnitt 2.3 auch das von $(N_c)_h = N_c^{\frac{1}{2}}$ induzierte Volumen, bezeichnen wir als das **zentroaffine Volumen**.

    Warum man dieses Volumen und nicht das von N_c erzeugte als zentroaffines Volumen nimmt, wird etwas deutlicher durch 3.2.4 und 3.5: Es gibt bezüglich V_N keine Minimalflächen, bezüglich V_h schon.

4.) Für eine Normale $N = N_\alpha$ der Manhartschen Familie gilt:

$$\omega = det(x_1, \ldots, x_n, N) = |\mathcal{K}_e|^\alpha det(x_1, \ldots, x_n, N_e) =: |\mathcal{K}_e|^\alpha \omega_e$$

[1] Wir können jedes einzelne Volumenelement positiv normieren, nicht unbedingt alle gleichzeitig. Mit (1.14) gilt: $\omega \cdot \bar{\omega} = Det\, h$. Ist $sign\, Det\, h = -1$, n gerade, so haben $\omega, \bar{\omega}$ verschiedene Vorzeichen

Das von N erzeugte Volumen ist demnach

$$\int_W \omega du = \int_W |\mathcal{K}_e|^\alpha \omega_e du.$$

Wir nennen es N_α–**Volumen**. Ist $\mathcal{K}_e$ konstant, so ist V_N ein konstantes Vielfaches von V_{N_e}.

5.) Für eine Normale $N = N_c^\alpha$ der zentroaffinen Familie erhält man:

$$\omega = det(x_1, \ldots, x_n, N) = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha det(x_1, \ldots, x_n, N_c) =: |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha \omega_c$$

Es gilt daher

$$\int_W \omega du = \int_W |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha \omega_c du = \int_W |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{\alpha - \frac{1}{2}} \omega_{h_c} du.$$

Dieses Volumen nennen wir N_c^α–**Volumen**. Auch hier ist V_N ein konstantes Vielfaches von V_{N_c} bzw. von V_{h_c}, wenn $\tilde{\mathcal{K}}_c$ eine Konstante ist.

6.) Nach der Definition von N_h, N_η in Abschnitt 2.3 ist für eine beliebige Relativnormale N das von N_h erzeugte Volumen V_{N_h} das von h erzeugte Volumen V_h und das von N_η erzeugte Volumen V_{N_η} das von η erzeugte Volumen V_η.

3.2 Bisherige Ergebnisse über Minimalflächen

Wir wollen hier einige Ergebnisse zusammenstellen, die sich mit Minimalflächen bzw. der 1. Variation von Volumina bei ganz bestimmten Relativnormalen beschäftigen.

3.2.1 Euklidische Minimalflächen

Euklidische Minimalflächen erhält man als Lösungen eines Variationsproblems, nämlich als diejenigen Flächen, die das kleinste euklidische Volumen unter allen Vergleichsflächen haben. Das Problem ist sehr alt. Schon Lagrange (1760)[2] hat es für $n = 2$ gestellt. Er gab eine Differentialgleichung für Flächen, die als Graphen dargestellt sind, an. Meusnier hat kurze Zeit später die Ergebnisse geometrisch gedeutet und den Zusammenhang mit der heute als der euklidischen Mittleren Krümmung H_e bekannten Funktion gefunden, und zwar:

$$x \text{ minimiert das von } N_e \text{ induzierte Volumen } \Rightarrow H_e \equiv 0.$$

Genauer: die 1. Variation von V_{N_e} verschwindet genau für $H_e \equiv 0$. Es gibt auch Flächen mit verschwindendem H_e, die nicht minimal gegenüber Vergleichsflächen sind. Nitsche gibt Beispiele dieser instabilen Minimalflächen, siehe [Nit], die Paragraphen 111 und 119.

3.2.2 Affinminimalflächen

Bereits Darboux (1894/96) und Franck (1914/20) haben sich - teilweise unter einer anderen Bezeichnung - mit diesen Flächen beschäftigt, siehe [Bl2], S. 178. Blaschke (1923) hat die bis dorthin bekannten Ergebnisse in [Bl2] zusammengefaßt.

[2]Die historischen Daten stammen aus [dCa], S. 151, [Bl1], S. 236, und [Nit], S. 3.

Es gilt: Die 1. Variation des von der Blaschkeschen Affinnormalen N_b induzierten Volumens verschwindet - analog zu euklidischen Minimalflächen - genau für $H_b \equiv 0$.

Von minimalem Volumen läßt sich aber in der Regel nicht sprechen. Calabi hat in [Cal1] bewiesen, daß bei $n = 2$ und bei definitem h die 2. Variation immer ≤ 0 ist. Er schlug vor, diese Flächen Maximalflächen zu nennen. In [VV] wird ein Beispiel einer Fläche mit indefinitem h gegeben, bei der die 2. Variation verschiedene Vorzeichen hat.

3.2.3 II–Minimalflächen

Glässner hat das Volumen $V_{II} = V_{h_e}$ für $n = 2$ untersucht, siehe [Gl]. Dieses Volumen ist nach Definition auch das von N_{II} induzierte Volumen, siehe [Man1] und Unterabschnitt 2.2.3. Glässner stellte fest, daß die 1. Variation genau für $2H_e + \frac{1}{2}\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) \equiv 0$ verschwindet, vergleiche [Gl], 2.2.b. Dieser Ausdruck scheint nichts mit einer Mittleren Krümmung zu tun zu haben. In Wirklichkeit ist er aber (bis auf einen Faktor) die Mittlere Krümmung bzgl. $N_{\frac{1}{2}} = N_{II}$, siehe [Man3] oder 3.7.2.

3.2.4 Zentroaffine Minimalflächen

Bei 3.2.1 und 3.2.2 ergeben sich Minimalflächen nur, wenn die jeweilige Mittlere Krümmung H gleich 0 ist. Dies ist bei der zentroaffinen Normalen N_c nicht möglich. H_c ist immer gleich 1. Wang untersuchte daher das von h_c induzierte Volumen in [Wang]. Die 1. Variation verschwindet genau dann, wenn $tr(\hat{\nabla}T) \equiv 0$ ist. Er schlug vor, $\hat{\nabla}T$ als neuen Shape–Operator zu benutzen, weil die Spur die gleiche Rolle spielt, wie die Spur von S bei N_e oder N_b.

3.3 Grundlegendes über Variationsrechnung

Bevor wir die gerade definierten Volumina untersuchen, geben wir noch einige Informationen im Zusammenhang mit Variationsrechnung an, so z. B. Vergleichsflächen, Definition und Bedeutung der 1. und 2. Variation, Schreibweisen, Stetigkeit.

V sei eines der oben definierten Volumina V_N, V_h oder V_η. Wir geben notwendige Bedingungen dafür an, daß x auf W das kleinste bzw. größte Volumen V unter allen Vergleichsflächen hat. Als Vergleichsflächen nehmen wir eine Schar von Flächen, die in Richtung der Normale von x abweichen und dies ausschließlich im Innern von W: Sei f eine beliebige differenzierbare Funktion, die zusammen mit ihren ersten Ableitungen auf dem Rand von W verschwindet, d. h.

$$f|_{\partial W} = 0,\ \partial_i(f)|_{\partial W} = 0,\ 1 \leq i \leq n. \tag{3.1}$$

Wir definieren für[3] $t \in \mathbb{R}$ eine **Vergleichsfläche** durch

$$x_t := x + tfN.$$

[3]Wir brauchen aber t nur in einer Umgebung von $t = 0$. In der Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.3 stellen wir fest, daß zumindest da x_t regulär ist.

Die partiellen Ableitungen von x_t (nach den u^i) erhalten wir durch Differenzieren der rechten Seite:

$$x_{ti} = (x_t)_*(\partial_i) = x_i + t\partial_i(f)N + tfN_i = x_i - tfS_i^l x_l + t\partial_i(f)N \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} x_{tij} &= D_{\partial_j} x_{ti} = x_{ij} + t\partial_j\partial_i(f)N + t\partial_i(f)N_j + t\partial_j(f)N_i + tfN_{ij} \\ &= x_{ij} - t\partial_i(f)S_j^l x_l - t\partial_j(f)S_i^l x_l - tf\partial_j(S_i^l)x_l - tfS_i^l x_{lj} + t\partial_j\partial_i(f)N \\ &= \Big(\Gamma_{ij}{}^l - t\partial_i(f)S_j^l - t\partial_j(f)S_i^l - tf\partial_j(S_i^l) - tfS_i^k\Gamma_{kj}{}^l\Big)x_l \\ &\quad + \Big(h_{ij} - tfS_i^k h_{kj} + t\partial_j\partial_i(f)\Big)N \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wir berechnen das Volumen von x_t

$$V(t) := \int_W \tilde{\omega}_t du,$$

wobei $\tilde{\omega}_t$ eines der Volumenelemente von x_t ist.

$V = V(0)$ kann hier nur ein Extremum sein, wenn $V'(0) := \partial_t|_{t=0}(V(t))$, die sogenannte **1. Variation** von V, für beliebige Funktionen f mit Eigenschaft (3.1) verschwindet. Dies ist allerdings nur eine notwendige Bedingung: Wenn $V'(0)$ für ein f nicht 0 wird, kann dieses Volumen nicht extremal sein. Dennoch werden wir Flächen, für die die 1. Variation eines Volumens verschwindet, als „Minimalflächen" bezeichnen.

Daneben berechnen wir noch die **2. Variation**, also $V''(0)$. Ist $V'(0) = 0$ und hat $V''(0)$ für verschiedene Funktionen f verschiedene Vorzeichen, so ist dies auch ein Hinweis, daß das Volumen nicht extremal ist. Weiter stellen wir jedoch keine Untersuchungen an, ob und inwieweit das behandelte Volumen wirklich ein Minimum oder Maximum oder sogar ob es ein relatives oder absolutes Minimum (Maximum) ist. Da

$$\partial_t V(t) = \partial_t \int_W \tilde{\omega}_t du = \int_W \partial_t(\tilde{\omega}_t)du$$

gilt, werden wir jeweils zuerst die Ableitung des Integranden nach t berechnen und dann integrieren. Dabei greifen wir auf die Ergebnisse von Abschnitt 3.4 zurück.

Schreibweise: Die Größen der Vergleichsfläche x_t indizieren wir mit $_t$, d. h. h_{et} ist die euklidische quadratische Grundform von x_t. Für die Ableitung nach t schreiben wir $'$ statt ∂_t, also $\omega'_{ht} = \partial_t(\omega_{ht})$. Außer bei der Ableitung nach t lassen wir 0 weg, so schreiben wir ω_h für ω_{h0}, aber ω'_{h0} für $\partial_t|_{t=0}(\omega_{ht})$.

Lemma 3.2 *Sei G_t eine reguläre, symmetrische 2–Form für jedes t in einer Umgebung von 0. Außerdem sei G_t stetig und zweimal stetig differenzierbar in t. (G_t^{ij}) sei die Inverse zu (G_{tij}). Dann gilt:*

1.) $-\partial_t(G_t^{ij}) = G_t^{im}G_t^{js}\partial_t(G_{tms})$

2.) $\partial_t(Det\, G_t) = G_t^{ij}\partial_t(G_{tij})Det\, G_t$ *oder*

$\partial_t(\log|Det\, G_t|) = G_t^{ij}\partial_t(G_{tij})$

3.) $\partial_t^2(\log|Det\, G_t|) = G_t^{ij}\partial_t^2(G_{tij}) - G_t^{im}G_t^{js}\partial_t(G_{tms})\partial_t(G_{tij})$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial_t^2(Det\, G_t)}{Det\, G_t} = G_t^{ij}\partial_t^2(G_{tij}) - G_t^{im}G_t^{js}\partial_t(G_{tms})\partial_t(G_{tij}) + \frac{\partial_t(Det\, G_t)^2}{(Det\, G_t)^2}$$

Beweis: 1.) und 2.) sind analog zu Lemma 1.3 zu beweisen. 3.) folgt nach Ableiten von 2.) zusammen mit 1.). #

Bemerkung: Wegen

$$\begin{aligned} g_{tij} &= \langle x_{ti}, x_{tj} \rangle \\ &\overset{(3.2)}{=} \langle x_i + t\partial_i(f)N + tfN_i, x_j + t\partial_j(f)N + tfN_j \rangle \\ &= g_{ij} + t\partial_j(f)\langle x_i, N\rangle + tf\langle x_i, N_j\rangle + t\partial_i(f)\langle N, x_j\rangle + t^2\partial_i(f)\partial_j(f)\langle N, N\rangle \\ &\quad + t^2\partial_i(f)f\langle N, N_j\rangle + tf\langle N_i, x_j\rangle + t^2\partial_j(f)f\langle N_i, N\rangle + t^2 f^2\langle N_i, N_j\rangle \end{aligned} \tag{3.4}$$

ist g_t stetig in t und damit in einer Umgebung von $t = 0$ noch positiv definit. Weil sich nun aber die euklidische Normale von x_t eindeutig aus

$$\langle x_{ti}, N_{et}\rangle = 0,\ det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, N_{et}) = \sqrt{Det\, g_t}$$

ergibt, ist sie in einer Umgebung von $t = 0$ stetig wegen $Det\, g_t \neq 0$. Die Größen bezüglich N_{et}, etwa $\mathcal{K}_{et}$, h_{et}, $grad_{h_{et}}(\mathcal{K}_{et})$ sind alle aus den in t stetigen x_t, x_{ti}, x_{tik}, N_{et}, g_t durch stetige Funktionen berechenbar und damit stetig in t. Auch N_{bt}, die Blaschkesche Affinnormale von x_t, ist wegen ihrer Darstellung mit N_{et}, $\mathcal{K}_{et}$ und h_{et} stetig in t in einer Umgebung von $t = 0$. Für die Differenzierbarkeit nach t gilt Analoges. Die Differenzierbarkeit nach den anderen Variablen bleibt unberührt. Da $Det\, h_e \neq 0$ ist, ist h_{et} wenigstens für t in einer Umgebung von 0 regulär. Die bis hier zusammengestellten Eigenschaften regulärer Flächen gelten damit auch für diese Flächen x_t.

3.4 Integralformeln zur Vereinfachung von Variationsausdrücken

Wir geben nun einige, teilweise den Greenschen Formeln ähnliche, Formeln für Integrale an, die wir zur Berechnung der 1. und 2. Variation in den nächsten Abschnitten einsetzen.

f sei ab jetzt in diesem Kapitel eine differenzierbare Funktion mit Eigenschaft (3.1). Die folgenden Hilfssätze und einige spätere Rechnungen mit Integralen haben eines gemeinsam: Es wird partielle Integration angewandt. Dabei tritt eigentlich ein Randterm auf. Da dieser aber f oder $\partial_j(f)$ als Faktor enthält, verschwindet er jedesmal. Wir werden dies im weiteren nicht mehr erwähnen.

Lemma 3.3 *Folgende Integrale haben diese Werte:*

$$\begin{aligned} &1.) \int_W T(f)\omega du = -\int_W tr(\nabla T) f\omega du,\ 2.) \int_W \Delta(f)\omega du = n\int_W tr(\nabla T) f\omega du, \\ &3.) \int_W T(f)\omega_h du = -\int_W tr(\hat\nabla T) f\omega_h du,\ 4.) \int_W \Delta(f)\omega_h du = 0, \\ &5.) \int_W T(f)\bar\omega du = -\int_W tr(\overline{\nabla} T) f\bar\omega du,\ 6.) \int_W \Delta(f)\bar\omega du = -n\int_W tr(\overline{\nabla} T) f\bar\omega du, \\ &7.) \int_W T(f) f\omega du = -\frac{1}{2}\int_W tr(\nabla T) f^2\omega du, \end{aligned}$$

$$8.)\quad \int_W \Delta(f) f\omega du = \int_W (\frac{n}{2} tr(\nabla T) f^2 - grad_h(f)(f))\omega du,$$

$$9.)\quad \int_W T(f) f\omega_h du = -\frac{1}{2}\int_W tr(\hat{\nabla} T) f^2 \omega_h du,$$

$$10.)\quad \int_W \Delta(f) f\omega_h du = -\int_W grad_h(f)(f)\omega_h du.$$

Beweis: Gebraucht werden (2.1) – (2.5). Mit partieller Integration erhalten wir für die ersten zwei Integrale:

$$
\begin{aligned}
1.)\quad & \int_W T(f)\omega du = \int_W T^i \partial_i(f)\omega du \\
= & -\int_W (\partial_i(T^i)\omega + \partial_i(\omega)T^i) f du = -\int_W (\partial_i(T^i) + \Gamma_{il}{}^l T^i) f\omega du \\
= & -\int_W tr(\nabla T) f\omega du \\
2.)\quad & \int_W \Delta(f)\omega du = \int_W h^{ij}(\partial_i\partial_j(f) - \hat{\Gamma}_{ij}{}^k \partial_k(f))\omega du \\
= & \int_W (-\partial_i(h^{ij})\partial_j(f)\omega - h^{ij}\partial_i(\omega)\partial_j(f) - h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f)\omega) du \\
= & \int_W (-\partial_i(h^{ij})\partial_j(f) - h^{ij}\Gamma_{il}{}^l\partial_j(f) - h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f))\omega du \\
= & \int_W (h^{ij}\overline{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f) - h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f))\omega du \\
= & \int_W (h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f) - h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k\partial_k(f) - h^{ij}K_{ij}^k\partial_k(f))\omega du \\
= & \int_W (-h^{ij}K_{ki}^k\partial_j(f))\omega du \\
= & -n\int_W T(f)\omega du \overset{1.)}{=} n\int_W tr(\nabla T) f\omega du
\end{aligned}
$$

Nach dem gleichen Muster kann man 3.) – 6.) beweisen.
Bei 7.) folgt aus

$$
\begin{aligned}
& \int_W fT(f)\omega du = \int_W fT^l\partial_l(f)\omega du \\
= & \int_W (-\partial_l(f)T^l f - f^2\partial_l(T^l) - f^2 T^l \Gamma_{lk}{}^k)\omega du \\
= & \int_W (-fT(f) - f^2 tr(\nabla T))\omega du
\end{aligned}
$$

die Behauptung.
Nach partieller Integration ergibt sich (ähnlich wie bei 2.)) für 8.) zunächst:

$$\int_W \Delta(f) f\omega du = \int_W (-nT(f)f - h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f))\omega du$$

Setzen wir 7.) ein, haben wir die gewünschte Formel.
9.) und 10.) gehen analog zu 7.) und 8.). #

Bemerkung: Die verwendeten Spurterme hängen so zusammen:

$$\begin{aligned} tr(\nabla T) &= tr(\hat{\nabla} T) + tr(K_T) = tr(\hat{\nabla} T) + n\,\hat{T}(T) \\ &= tr(\hat{\nabla} T) + n\,h(T,T) \\ tr(\overline{\nabla} T) &= tr(\hat{\nabla} T) - n\,h(T,T) \end{aligned}$$

Nun kommen wir zu Integralen, die für die 2. Variation von Bedeutung sind.

Lemma 3.4 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} 1.) \quad & \int_W h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}^{\ \ k}\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_s(f))\omega du \\ = \quad & \int_W \Big((\Delta(f) - nT(f))(\Delta(f) + nT(f)) - (n-1)S(grad_h(f))(f) \\ & +2n(K_T\, grad_h(f))(f) + n\,tr(\nabla T) grad_h(f)(f)\Big)\omega du \\ 2.) \quad & \int_W h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}^{\ \ k}\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_s(f))\omega_h du \\ = \quad & \int_W \Big((\Delta(f) - nT(f))\Delta(f) - (n-1)S(grad_h(f))(f) \\ & +n(K_T\, grad_h(f))(f) + \frac{1}{2}n\,tr(\hat{\nabla} T) grad_h(f)(f)\Big)\omega_h du \end{aligned}$$

Beweis: Auch hier benutzen wir (2.1) – (2.5). Wir integrieren zuerst

$$\int_W h^{il}h^{jm}\partial_j\partial_i(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_s(f))\omega du$$

partiell (partInt1) und erhalten unter anderem den Ausdruck

$$\int_W -h^{il}h^{jm}\partial_i(f)(\partial_j\partial_l\partial_m(f) - \partial_j(\Gamma_{lm}^{\ \ s})\partial_s(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_j\partial_s(f))\omega du.$$

Dann schreiben wir $\Gamma_{jm}^{\ \ s}\partial_l\partial_s(f) + \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_j\partial_s(f) - \Gamma_{jm}^{\ \ s}\partial_l\partial_s(f)$ statt $\Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_j\partial_s(f)$ und ersetzen mit der Integrabilitätsbedingung von Gauß aus (1.1) $\partial_j(\Gamma_{lm}^{\ \ s})$ durch $\partial_l(\Gamma_{jm}^{\ \ s})$ und andere Summanden. Anschließend integrieren wir wieder partiell (partInt2), um den Term

$$\int_W h^{il}h^{jm}\partial_i\partial_l(f)(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ \ s}\partial_s(f))\omega du$$

zu bekommen. Ausführlich sieht dies so aus:

$$\begin{aligned} & \int_W h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}^{\ \ k}\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_s(f))\omega du \\ \overset{\text{partInt1}}{=} & \int_W \Big(- h^{il}h^{jm}(\partial_j\partial_l\partial_m(f) - \partial_j(\Gamma_{lm}^{\ \ s})\partial_s(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_j\partial_s(f))\partial_i(f) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\partial_j(h^{il})h^{jm} + h^{il}\partial_j(h^{jm}) + h^{il}h^{jm}\Gamma_{jk}{}^{k})(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}\Gamma_{ij}{}^{k}\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\Big)\omega du \\
\stackrel{(1.1)}{=} \quad & \int_W \Big(- h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_j\partial_m(f) - \partial_l(\Gamma_{jm}^{\ s})\partial_s(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_l\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}(\Gamma_{jk}{}^{s}\Gamma_{lm}^{\ k} - \Gamma_{lk}{}^{s}\Gamma_{jm}^{\ k} - h_{lm}S_j^s + h_{jm}S_l^s)\partial_s(f)\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}(\Gamma_{jm}^{\ s}\partial_l\partial_s(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_j\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-(\partial_j(h^{il})h^{jm} - h^{il}h^{js}\overline{\Gamma}_{js}^{\ m})(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}\Gamma_{ij}{}^{k}\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\Big)\omega du \\
\stackrel{\text{partInt2}}{=} \quad & \int_W \Big(h^{il}h^{jm}(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i\partial_l(f) \\
&+(\partial_l(h^{il})h^{jm} + h^{il}\partial_l(h^{jm}) + h^{il}h^{jm}\Gamma_{lk}{}^{k})(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}(\Gamma_{jk}{}^{s}\Gamma_{lm}^{\ k} - \Gamma_{lk}{}^{s}\Gamma_{jm}^{\ k})\partial_s(f)\partial_i(f) \\
&-(n-1)h^{ij}S_i^k\partial_j(f)\partial_k(f) \\
&-h^{il}h^{jm}(\Gamma_{jm}^{\ s}\partial_l\partial_s(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_j\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-(\partial_j(h^{il})h^{jm} - h^{il}h^{js}\overline{\Gamma}_{js}^{\ m})(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}\Gamma_{ij}{}^{k}\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\Big)\omega du \\
= \quad & \int_W \Big(h^{il}h^{jm}(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i\partial_l(f) \\
&+(-h^{jm}h^{kl}\overline{\Gamma}_{kl}^{\ i} + h^{il}\partial_l(h^{jm}))(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&+h^{il}h^{jm}\Gamma_{lm}^{\ k}(\partial_j\partial_k(f) - \Gamma_{jk}{}^{s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}\Gamma_{jm}^{\ k}(\partial_l\partial_k(f) - \Gamma_{lk}{}^{s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-(n-1)h^{ij}S_i^k\partial_j(f)\partial_k(f) \\
&-(\partial_j(h^{il})h^{jm} - h^{il}h^{js}\overline{\Gamma}_{js}^{\ m})(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}\Gamma_{ij}{}^{k}\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\Big)\omega du \\
= \quad & \int_W \Big((\Delta(f) - nT(f))(\Delta(f) + nT(f)) \\
&-(n-1)h^{ij}S_i^k\partial_j(f)\partial_k(f) \\
&+h^{il}\partial_l(h^{jm})(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&+h^{il}h^{jm}(K_{lm}^k + \hat{\Gamma}_{lm}^{\ k})(\partial_j\partial_k(f) - \Gamma_{jk}{}^{s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-2h^{il}h^{jm}K_{jm}^k(\partial_l\partial_k(f) - \Gamma_{lk}{}^{s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-\partial_j(h^{il})h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
&-h^{il}h^{jm}(K_{ij}^k + \hat{\Gamma}_{ij}{}^{k})\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\Big)\omega du
\end{aligned}
$$

Durch Umbenennung von Summationsindizes und Sortieren der Summanden ergibt das:

$$
\int_W h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^{k}\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\omega du
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \int_W \Big((\Delta(f) - nT(f))(\Delta(f) + nT(f)) \\
& -(n-1)h^{ij} S_i^k \partial_j(f)\partial_k(f) \\
& +h^{il}h^{jk}K_{lk}^m(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
& -h^{il}h^{jm}K_{ij}^k\partial_k(f)(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ \ s}\partial_s(f)) \\
& +(h^{il}\partial_l(h^{jm}) + h^{il}h^{jk}\hat{\Gamma}_{lk}^{\ \ m} - \partial_k(h^{ij})h^{km} - h^{km}h^{lj}\hat{\Gamma}_{kl}^{\ \ i}) \\
& \cdot(\partial_j\partial_m(f) - \Gamma_{jm}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f) \\
& -2h^{il}nT^k(\partial_l\partial_k(f) - \Gamma_{lk}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f)\Big)\omega du \\
\overset{(2.1),(2.3)}{=} \quad & \int_W \Big((\Delta(f) - nT(f))(\Delta(f) + nT(f)) \\
& -(n-1)h^{ij} S_i^k \partial_j(f)\partial_k(f) \\
& -2h^{il}nT^k(\partial_l\partial_k(f) - \Gamma_{lk}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f)\Big)\omega du
\end{aligned}
$$

Den dritten Term kann man durch partielle Integration noch anders ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
& \int_W -2h^{il}nT^k(\partial_l\partial_k(f) - \hat{\Gamma}_{lk}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f)\omega du \\
= \quad & \int_W \Big(2h^{il}nT^k\partial_l(f)\partial_i\partial_k(f)\omega + 2\partial_k(h^{il})nT^k\partial_l(f)\partial_i(f)\omega \\
& +2h^{il}n\partial_k(T^k)\partial_l(f)\partial_i(f)\omega + 2h^{il}nT^k\partial_l(f)\partial_i(f)\Gamma_{kj}^{\ \ j}\omega \\
& +2h^{il}nT^k\hat{\Gamma}_{lk}^{\ \ s}\partial_s(f)\partial_i(f)\omega\Big)du \\
= \quad & \int_W \Big(2h^{il}nT^k\partial_l(f)\partial_i\partial_k(f) - 2h^{sl}\hat{\Gamma}_{sk}^{\ \ i}nT^k\partial_l(f)\partial_i(f) \\
& +2h^{il}n\partial_k(T^k)\partial_l(f)\partial_i(f) + 2h^{il}nT^k\partial_l(f)\partial_i(f)\Gamma_{kj}^{\ \ j}\Big)\omega du \\
= \quad & \int_W \Big(2h^{il}nT^k\partial_l(f)(\partial_i\partial_k(f) - \hat{\Gamma}_{ik}^{\ \ s}\partial_s(f)) \\
& +2n\, tr(\nabla T)h^{il}\partial_l(f)\partial_i(f)\Big)\omega du
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für diesen Ausdruck

$$
\begin{aligned}
& \int_W -2h^{il}nT^k(\partial_l\partial_k(f) - \Gamma_{lk}^{\ \ s}\partial_s(f))\partial_i(f)\omega du \\
= \quad & \int_W \Big(2nT^kh^{il}K_{lk}^s\partial_s(f)\partial_i(f) + n\, tr(\nabla T)h^{il}\partial_i(f)\partial_l(f)\Big)\omega du.
\end{aligned}
$$

Schließlich kann man diese beiden Summenterme invariant schreiben:

$$
\begin{aligned}
S_i^k h^{ij}\partial_j(f)\partial_k(f) &= S(grad_h(f))(f), \\
K_{lk}^s T^k h^{il}\partial_i(f)\partial_s(f) &= (K_T\, grad_h(f))(f).
\end{aligned}
$$

Dadurch ist die Behauptung 1.) bewiesen.
Für 2.) geht man analog vor. #

Bemerkung: Man kann ebenso den Integranden des ersten Ausdrucks in Lemma 3.4 invariant schreiben: Dazu verwenden wir die 2–Form $\nabla\, df$. $X \mapsto h^*\nabla\, df(X,.)$ und $Y \mapsto h^*\nabla\, df(.,Y)$ sind (1,1)–Tensorfelder. Setzt man eines in das andere ein und bildet die Spur über dieses neue (1,1)–Tensorfeld, ergibt das in lokalen Koordinatenfunktionen:

$$h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f)) = tr_X(h^*\nabla\, df(., h^*\nabla\, df(X,.)))$$

3.5 Variation der Volumina der zentroaffinen Normalen

In diesem Abschnitt werden wir noch einmal die Ergebnisse von [Wang] in unserer Notation angeben. D. h. wir berechnen die 1. und 2. Variation der induzierten Volumina der zentroaffinen Normale. Wang beschränkte sich auf Flächen mit definiter quadratischer Grundform und arbeitete mit einer Orthonormalbasis für h. Dies ist nicht unbedingt notwendig. Wir lassen auch indefinite Formen h zu.

3.5.1 Die 1. Variation der Volumina

Zunächst betrachten wir N_c. Die zentroaffine Normale von x_t ist $o - x_t$, d. h. also

$$N_{ct} := o - x_t = o - (x + tfN_c) = o - (x + tf(o-x)) = (1-tf)(o-x) = (1-tf)N_c.$$

Da $S_{ci}^j = \delta_i^j$, $N_{ci} = -x_i$ gilt, bekommen die x_{ti} und x_{tik} eine einfachere Form als in (3.2), (3.3):

$$\begin{aligned} x_{ti} &= x_i + t\partial_i(f)N_c + tfN_{ci} = x_i - tfx_i + t\partial_i(f)N_c = (1-tf)x_i + t\partial_i(f)N_c \\ x_{tik} &= (1-tf)x_{ik} - t\partial_k(f)x_i - t\partial_i(f)x_k + t\partial_k\partial_i(f)N_c \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die 1. Variation der Volumina V_N, V_h und V_η, indem wir zuerst die Ableitung des jeweiligen Integranden $\omega_t, \omega_{ht}, \bar{\omega}_t$ nach t berechnen. Dann folgt die Integration mit den Hilfssätzen des vorigen Abschnitts.

Das von N_c erzeugte Volumen

Wir bekommen für den Integranden ω_t:

$$\begin{aligned} \omega_t &= det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, N_{ct}) = (1-tf)det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, N_c) \\ &= (1-tf)det((1-tf)x_1, \ldots, (1-tf)x_n, N_c) \\ &= (1-tf)^{n+1}det(x_1, \ldots, x_n, N_c) = (1-tf)^{n+1}\omega \\ &\Rightarrow \partial_t|_{t=0}(\omega_t) = -(n+1)f\omega = -(n+1)fH_c\omega \end{aligned}$$

Es folgt für die 1. Variation von V_N:

$$V_N'(0) = -(n+1)\int_W f\omega du$$

Da f eine beliebige Funktion mit Eigenschaft (3.1) und $\omega \neq 0$ ist, existiert also keine Fläche, deren Volumen V_{N_c} ein Extremum ist. Minimalflächen im Sinne der euklidischen, also Flächen, für die V_N minimal oder maximal wird, sind nicht möglich bei dieser Normalen. Gehen wir zu einem anderen Volumen.

Das von h_c induzierte Volumen

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_{tij}) \\
= & (1-tf)det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_{ij}) - t\partial_j(f)det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_i) \\
& -t\partial_i(f)det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_j) + t\partial_i\partial_j(f)det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_c) \\
= & (1-tf)det((1-tf)x_1,\dots,(1-tf)x_n,h_{ij}N_c) \\
& +(1-tf)\sum_l det((1-tf)x_1,\dots,t\partial_l(f)N_c,\dots,(1-tf)x_n,\Gamma_{ij}{}^m x_m) \\
& -t\partial_j(f)det((1-tf)x_1,\dots,t\partial_i(f)N_c,\dots,(1-tf)x_n,x_i) \\
& -t\partial_i(f)det((1-tf)x_1,\dots,t\partial_j(f)N_c,\dots,(1-tf)x_n,x_j) \\
& +t\partial_i\partial_j(f)det((1-tf)x_1,\dots,(1-tf)x_n,N_c) \\
= & (1-tf)^{n+1}h_{ij}\omega - (1-tf)^n t\partial_l(f)\Gamma_{ij}{}^l\omega \\
& +t(1-tf)^{n-1}t2\partial_i(f)\partial_j(f)\omega + t\partial_i\partial_j(f)(1-tf)^n\omega
\end{aligned}
$$

und daraus

$$
\begin{aligned}
h_{tij} &= \frac{det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_{tij})}{det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct})} = \frac{det(x_{t1},\dots,x_{tn},x_{tij})}{(1-tf)^{n+1}\omega} \\
&= h_{ij} + t(1-tf)^{-1}\partial_j\partial_i(f) + 2t^2(1-tf)^{-2}\partial_i(f)\partial_j(f) - t(1-tf)^{-1}\partial_l(f)\Gamma_{ij}{}^l \\
\partial_t|_0(h_{tij}) &= \partial_j\partial_i(f) - \partial_l(f)\Gamma_{ij}{}^l.
\end{aligned}
$$

Aus Lemma 3.2 kann man folgern

$$\partial_t(\log|\omega_{ht}|) = \partial_t(\log\sqrt{|Det\, h_t|}) = h_t^{ij}\partial_t(h_{tij})\frac{1}{2}.$$

Hier gilt also

$$\partial_t|_{t=0}(\omega_{ht}) = h^{ij}\partial_t|_{t=0}(h_{tij})\frac{\omega_h}{2} = (\Delta(f) - nT(f))\frac{\omega_h}{2}.$$

Wir können jetzt mit Hilfe von Lemma 3.3 $V_h'(0)$ berechnen:

$$V_h'(0) = \int_W \omega_{h0}' du = \frac{n}{2}\int_W tr(\hat{\nabla}T)f\omega_h du$$

Daher ist es verständlich, daß Wang als neuen Shape–Operator $\hat{\nabla}T$ vorschlug. Das Verschwinden der Spur von $\hat{\nabla}T$ zeigt das Verschwinden der 1. Variation eines Volumens an. Deshalb nennen wir Flächen mit $tr(\hat{\nabla}T) \equiv 0$ **zentroaffine Minimalflächen**.

Beispiel aus [Wang]: Die eigentlichen Affinsphären mit Zentrum o erfüllen diese Gleichung. Das sind Flächen, deren zentroaffine Normale ein konstantes Vielfaches der Blaschkeschen Affinnormale ist, siehe [NoS], S. 43. Weil jedoch das Blaschkesche Tschebyschewvektorfeld $T_b = 0$ ist, verschwindet auch T als konstantes Vielfaches hiervon[4]. Wir haben daher insbesondere $\hat{\nabla}T = 0$, also auch $tr(\hat{\nabla}T) = 0$.

[4]Man wende das Korollar zu Lemma 1.11 an.

Das von der Konormalen induzierte Volumen

Dieses Volumen wurde nicht von Wang untersucht. Man nimmt die Gleichung (1.14), die ebenso für x_t gilt, d. h. $|\omega_t \bar{\omega}_t| = \omega_{ht}^2$. Daraus folgt nach logarithmischer Ableitung nach t:

$$\frac{\partial_t(\bar{\omega}_t)}{\bar{\omega}_t} = 2\frac{\partial_t(\omega_{ht})}{\omega_{ht}} - \frac{\partial_t(\omega_t)}{\omega_t} \tag{3.5}$$

Für die zentroaffine Normale ist damit

$$\bar{\omega}_0' = (\Delta(f) - nT(f) + (n+1)f)\bar{\omega}.$$

Nach Lemma 3.3 ergibt das

$$V_\eta'(0) = \int_W \bar{\omega}_0' du = 0 + \int_W (n+1) f \bar{\omega} du.$$

Daraus folgt, daß es bezüglich dieses Volumens, wie bei V_N auch, keine extremalen Flächen gibt.

Ergebnis: Im Gegensatz zum Fall der euklidischen Normalen gibt die Mittlere Krümmung H_c von N_c keinen Aufschluß über die Minimalität eines Volumens. Sowohl das von N_c als auch das von η_c induzierte Volumen, das ist das von N_c^1 induzierte Volumen nach Abschnitt 2.3, wird nicht extremal (die 1. Variation verschwindet nicht). Das von h_c induzierte Volumen, d. h. nach Abschnitt 2.3 das von $N_c^{\frac{1}{2}}$ induzierte Volumen, wollen wir zentroaffines Volumen nennen. Seine 1. Variation verschwindet für $tr(\hat{\nabla} T) = 0$.

3.5.2 Die 2. Variation des von h_c induzierten Volumens

Wir berechnen nur die 2. Variation des von h_c erzeugten Volumens. Nur für dieses Volumen gibt es Flächen, für die die 1. Variation 0 wird, wie wir in 3.5.1 gezeigt haben.
Die 2. Variation der anderen Volumina können wir auch bestimmen, nur macht es für unsere Zwecke keinen Sinn, da die 1. Variation nicht verschwindet.

Leiten wir h_{tij} zweimal nach t ab, bekommen wir:

$$\partial_t^2|_{t=0}(h_{tij}) = 2f\partial_i\partial_j(f) + 4\partial_i(f)\partial_j(f) - 2f\Gamma_{ij}^{\ k}\partial_k(f)$$

Es gilt zunächst:

$$\partial_t^2(\log|\omega_{ht}|) = \frac{1}{2}\partial_t^2(\log|Det\, h_t|) = \frac{\omega_{ht}''}{\omega_{ht}} - \frac{(\omega_{ht}')^2}{(\omega_{ht})^2}$$

Daher folgt mit Lemma 3.2:

$$\begin{aligned}
\omega_{h0}'' &= -h^{il}h^{jm}\partial_t|_{t=0}(h_{tlm})\partial_t|_{t=0}(h_{tij})\frac{\omega_h}{2} + h^{ij}\partial_t^2|_{t=0}(h_{tij})\frac{\omega_h}{2} + \left(\frac{\omega_{h0}'}{\omega_h}\right)^2\omega_h \\
&= -\frac{1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}^{\ k}\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^{\ s}\partial_s(f))\omega_h \\
&\quad +\frac{1}{2}h^{ij}(2f\partial_i\partial_j(f) + 4\partial_i(f)\partial_j(f) - 2f\Gamma_{ij}^{\ k}\partial_k(f))\omega_h \\
&\quad +\frac{1}{4}(\Delta(f) - nT(f))^2\omega_h.
\end{aligned}$$

Dies ist zu integrieren. Nach Lemma 3.3 und 3.4 ergibt sich mit $S = id$:

$$\begin{aligned}
V_h''(0) &= \int_W \omega_{h0}'' du \\
&= \int_W \Big(-\frac{1}{2}(\Delta(f) - nT(f))\Delta(f) + \frac{n-1}{2} grad_h(f)(f) \\
&\quad -\frac{n}{2}(K_T\, grad_h(f))(f) - \frac{n}{4}\, tr(\hat{\nabla}T) grad_h(f)(f) \\
&\quad +f(\Delta(f) - nT(f)) + 2grad_h(f)(f) \\
&\quad +\frac{1}{4}(\Delta(f) - nT(f))^2\Big)\omega_h du \\
&= \int_W \frac{1}{4}\Big(-(\Delta(f))^2 + n^2(T(f))^2 - 2(n+1)f\Delta(f) \\
&\quad -2n(K_T\, grad_h(f))(f) - n\, tr(\hat{\nabla}T) grad_h(f)(f) \\
&\quad +2f^2 n\, tr(\hat{\nabla}T)\Big)\omega_h du
\end{aligned}$$

Für zentroaffine Minimalflächen, d. h. $tr(\hat{\nabla}T) \equiv 0$, hat man daher:

$$\begin{aligned}
V_h''(0) &= \int_W \frac{1}{4}\Big(-(\Delta(f))^2 + n^2(T(f))^2 - 2(n+1)f\Delta(f) \\
&\quad -2n(K_T\, grad_h(f))(f)\Big)\omega_h du
\end{aligned}$$

Beispiel von Wang: Die eigentlichen Affinsphären mit Zentrum o - für sie gilt $T = 0$ - haben als 2. Variation

$$\begin{aligned}
V_h''(0) &= \int_W \frac{1}{4}(-(\Delta(f))^2 - 2(n+1)f\Delta(f))\omega_h du \\
&= \int_W \frac{1}{4}(-(\Delta(f))^2 + 2(n+1)h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f))\omega_h du.
\end{aligned}$$

Ist h negativ[5] definit, dann ist $V_h''(0) \leq 0$. Wenn h allerdings positiv definit ist, kann das Vorzeichen von $V_h''(0)$ je nach Funktion positiv oder auch negativ sein. In dem Fall ist $V_h = V_h(0)$ bestimmt kein Extremum.

3.6 Variation der Volumina bei allgemeinen Relativnormalen

In diesem Abschnitt werden wir die Integranden der 1. und 2. Variation für eine beliebige Relativnormale bis auf einen Ausdruck, der nur von der Art der Normalen abhängt, bestimmen.
Um die 1. oder 2. Variation für eine spezielle Normale zu berechnen, setzt man den dieser Normale entsprechenden Ausdruck ein und integriert. Dies ist im wesentlichen der Inhalt der beiden nächsten Abschnitte.

[5]Wang beschränkt sich auf Flächen mit definitem h. Elliptisch und besonders hyperbolisch haben in [Wang] nicht diesselbe Bedeutung wie hier im 4. und 5. Kapitel, vgl. auch [NoS], S. 125.

Sei daher $N = qN_b + x_*(Z)$ eine beliebige Relativnormale und N_t die Relativnormale von x_t, die N entspricht, d. h. die Normale der gleichen Art (etwa die euklidische Normale von x_t, wenn N die euklidische Normale von x ist oder, wenn $N = N_\alpha$ ist, die Normale aus der Manhartschen Familie von x_t mit dem selben Index α). N_t kann man auch darstellen als Linearkombination der Blaschkeschen Affinnormale N_{bt} von x_t mit einem tangentialen Vektorfeld, nämlich

$$N_t = q_t N_{bt} + x_{t*}(Z_t).$$

Dabei ist q_t die Stützfunktion von N_t bezüglich N_{bt} und Z_t ergibt sich aus q_t, und zwar durch $Z_t = -grad_{h_{bt}}(q_t)$. Wir haben schon festgestellt, daß N_{bt}, h_{bt} stetig und genügend häufig differenzierbar in t sind, zumindest in einer Umgebung von $t = 0$. Um die 2. Variation ausrechnen zu können, müssen wir verlangen, daß q_t stetig in t und mindestens zweimal differenzierbar in $t = 0$ ist. Das ist aber für die Fälle, die hier behandelt werden, stets erfüllt.

Bezeichnung: Wir nennen $det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, x_{tij})$ nun d_{tij}. Ist h die quadratische Grundform von N, gilt:

$$d_{ij} := d_{0ij} = h_{ij}\omega \text{ und } d^{ij} = h^{ij}\frac{1}{\omega}.$$

Der folgende Hilfssatz vereinfacht einige der späteren Berechnungen:

Lemma 3.5 *Es gilt für die Ableitungen der d_{tij} und ihrer Determinante:*

1.)
$$\begin{aligned} & \partial_t|_{t=0}(det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, x_{tij})) =: d'_{0ij} \\ = \; & \partial_i\partial_j(f)\omega - {\Gamma_{ij}}^l\partial_l(f)\omega - f h_{ij}\, tr\, S\omega - f S_i^k h_{kj}\omega \end{aligned}$$

2.)
$$\partial_t|_{t=0}(\log|Det(d_{tij})|) = \Delta(f) - nT(f) - f(n+1)trS$$

3.)
$$\begin{aligned} & \partial_t^2|_{t=0}(det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, x_{tij})) =: d''_{0ij} \\ = \; & 2\omega f(trS{\Gamma_{ij}}^m - S_l^m {\Gamma_{ij}}^l)\partial_m(f) \\ & +\omega f^2((trS)^2 - S_l^m S_m^l)h_{ij} \\ & -2\omega f\, trS(-fS_i^k h_{kj} + \partial_i\partial_j(f)) \\ & +2\omega\partial_m(f)(\partial_i(f)S_j^m + \partial_j(f)S_i^m + f\partial_j(S_i^m) + fS_i^l{\Gamma_{lj}}^m) \end{aligned}$$

4.)
$$\begin{aligned} & \partial_t^2|_{t=0}(\log|Det(d_{tij})|) \\ = \; & -(n+1)f^2 S_l^m S_m^l \\ & +2h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\ & -h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \end{aligned}$$

Beweis: 1.) Man setzt x_{tk} und x_{tij} ein in

$$\partial_t(det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, x_{tij})) = \sum_k det(x_{t1}, \ldots, \partial_t(x_{tk}), \ldots, x_{tn}, x_{tij}) + det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, \partial_t(x_{tij})).$$

Aus (3.2), (3.3) erhält man

$$\begin{aligned} x'_{0k} &= \partial_k(f)N - fS_k^l x_l, \\ x'_{0ij} &= (-\partial_i(f)S_j^l - \partial_j(f)S_i^l - f\partial_j(S_i^l) - fS_i^k{\Gamma_{kj}}^l)x_l \\ & \quad +(-fS_i^k h_{kj} + \partial_j\partial_i(f))N. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \partial_t|_{t=0}(det(x_{t1}, \dots, x_{tn}, x_{tij})) \\
= & \sum_k det(x_1, \dots, x'_{0k}, \dots, x_n, x_{ij}) + det(x_1, \dots, x_n, x'_{0ij}) \\
= & \sum_k det(x_1, \dots, \partial_k(f)N - fS^l_k x_l, \dots, x_n, x_{ij}) \\
& +0 + det(x_1, \dots, x_n, \partial_i\partial_j(f)N - fS^k_i h_{kj}N) \\
= & h_{ij}(-fS^k_k)\omega - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)\omega + (\partial_i\partial_j(f) - fS^k_i h_{kj})\omega \\
= & \Big(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f) - fh_{ij}\, tr\, S - fS^k_i h_{kj}\Big)\omega
\end{aligned}$$

2.) Nach Lemma 3.2 gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t|_{t=0}(\log|Det(d_{tij})|) &= d^{ij}\partial_t|_{t=0}(d_{tij}) \\
&= h^{ij}\frac{1}{\omega}(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f) - fh_{ij}\, trS - fh_{ik}S^k_j)\omega \\
&= \Delta(f) - nT(f) - f(n+1)tr\, S.
\end{aligned}$$

3.) Man setzt x_{tk} und x_{tij} aus (3.2), (3.3) ein in die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
& \partial^2_t|_{t=0}(det(x_{t1}, \dots, x_{tn}, x_{tij})) = \partial_t|_{t=0}(\partial_t(det(x_{t1}, \dots, x_{tn}, x_{tij}))) \\
= & \partial_t|_{t=0}(\sum_l det(x_{t1}, \dots, \partial_t(x_{tl}), \dots, x_{tn}, x_{tij}) + det(x_{t1}, \dots, x_{tn}, \partial_t(x_{tij}))) \\
= & \sum_{l\neq m} det(x_1, \dots, x'_{0l}, \dots, x'_{0m}, \dots, x_n, x_{ij}) \\
& +0 + \sum_l det(x_1, \dots, x'_{0l}, \dots, x_n, x'_{0ij}) \\
& + \sum_l det(x_1, \dots, x'_{0l}, \dots, x_n, x'_{0ij}) + 0, \text{ da } \partial^2_t(x_{tl}) = \partial^2_t(x_{tij}) = 0 \\
= & \omega(fS^l_l{\Gamma_{ij}}^m - fS^m_l{\Gamma_{ij}}^l)\partial_m(f) + \omega(fS^m_m{\Gamma_{ij}}^l - fS^l_m{\Gamma_{ij}}^m)\partial_l(f) \\
& +\omega(f^2S^l_lS^m_m - f^2S^m_lS^l_m)h_{ij} - 2\omega fS^l_l(-fS^k_ih_{kj} + \partial_i\partial_j(f)) \\
& +2\omega\partial_m(f)(\partial_i(f)S^m_j + \partial_j(f)S^m_i + f\partial_j(S^m_i) + fS^l_i{\Gamma_{lj}}^m) \\
= & 2\omega f(trS{\Gamma_{ij}}^m - S^m_l{\Gamma_{ij}}^l)\partial_m(f) \\
& +\omega f^2((trS)^2 - S^m_lS^l_m)h_{ij} - 2\omega f\, trS(-fS^k_ih_{kj} + \partial_i\partial_j(f)) \\
& +2\omega\partial_m(f)(\partial_i(f)S^m_j + \partial_j(f)S^m_i + f\partial_j(S^m_i) + fS^l_i{\Gamma_{lj}}^m)
\end{aligned}$$

Wir können oben $\sum_{l\neq m}$ durch $\sum_{l,m}$ ersetzen, weil der Summand bei $l = m$ 0 wird.

4.) Nach Lemma 3.2 ist

$$\partial^2_t|_{t=0}(\log|Det(d_{tij})|) = d^{ij}\partial^2_t|_{t=0}(d_{tij}) - d^{il}d^{jm}\partial_t|_{t=0}(d_{tij})\partial_t|_{t=0}(d_{tlm}).$$

Den ersten Summanden erhält man mit 3.) als

$$d^{ij}\partial^2_t|_{t=0}(d_{tij})$$

$$\begin{aligned}
&= h^{ij}\Big(2f(trS\Gamma_{ij}{}^m - S_l^m\Gamma_{ij}{}^l)\partial_m(f) \\
&\quad +f^2((trS)^2 - S_l^m S_m^l)h_{ij} - 2f\,trS(-fS_i^k h_{kj} + \partial_i\partial_j(f)) \\
&\quad +2\partial_m(f)(\partial_i(f)S_j^m + \partial_j(f)S_i^m + f\partial_j(S_i^m) + fS_i^l\Gamma_{lj}{}^m)\Big) \\
&= -2f\,trS(\Delta(f) - nT(f)) + (n+2)f^2(trS)^2 - nf^2 S_l^m S_m^l \\
&\quad +2h^{ij}(-fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f) + fS_i^l\Gamma_{lj}{}^m\partial_m(f)),
\end{aligned}$$

den zweiten nach 1.) als

$$\begin{aligned}
& d^{il}d^{jm}\partial_t|_{t=0}(d_{tlm})\partial_t|_{t=0}(d_{tij}) \\
= \ & h^{il}h^{jm}(-f(h_{lm}\,tr\,S + S_l^k h_{km}) + \partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f)) \\
& (-f(h_{ij}\,tr\,S + S_i^k h_{kj}) + \partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
= \ & h^{il}h^{jm}f(h_{lm}\,tr\,S + S_l^k h_{km})f(h_{ij}\,tr\,S + S_i^k h_{kj}) \\
& -2h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f))f(h_{ij}\,tr\,S + S_i^k h_{kj}) \\
& +h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
= \ & h^{ij}f^2\,tr\,Sh_{ij}\,tr\,S + 2h^{ij}f^2\,tr\,SS_i^l h_{lj} + h^{il}S_l^j f^2 S_i^m h_{mj} \\
& -2h^{lm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))f\,tr\,S \\
& -2h^{il}fS_i^m(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f)) \\
& +h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
= \ & (n+2)f^2(trS)^2 + f^2 S_l^m S_m^l \\
& -2f\,tr\,S(\Delta(f) - nT(f)) \\
& -2h^{il}fS_i^m(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f)) \\
& +h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)).
\end{aligned}$$

Nach Subtraktion folgt 4.). #

Bemerkung: Das Volumenelement ω_t ist wegen

$$\omega_t = q_t\,det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, N_{bt})$$

und der Stetigkeit von q_t stetig in t. In einer Umgebung von $t = 0$ ist $\omega_t \neq 0$, da $\omega \neq 0$ ist. Das bedeutet

$$sign\,\omega_t = sign\,\omega.$$

Da $sign\,\omega_t$ in dieser Umgebung eine Konstante ist, gilt

$$\left|\int_W \omega_t du\right| = \int_W |\omega_t| du = sign\,\omega \int_W \omega_t du.$$

Es folgt damit

$$\partial_t^j\left(\int_W |\omega_t| du\right) = sign\,\cdot\omega\,\partial_t^j\left(\int_W \omega_t du\right),\ j = 1, 2.$$

Wir werden feststellen, daß

$$\int_W \partial_t^j|_{t=0}(\omega_t)du = \int_W F^j \cdot \omega du$$

ist mit Funktionen F^j, $j = 1, 2$, die je nach Ordnung der Ableitung und Art der Normalen eine andere Form haben. Insgesamt erhält man

$$\partial_t^j|_{t=0}\Big(\int_W |\omega_t| du\Big) = \int_W F^j \cdot |\omega| du.$$

Auch wenn wir ω_t nicht als positiv voraussetzen und $V(t)$ als $|\int \omega_t du|$ definieren würden, könnten wir mit den Ergebnissen aus 3.5, 3.7, 3.8 arbeiten, indem wir nur das Vorzeichen entsprechend ändern würden. Das ist ein weiteres Argument, der Einfachheit halber davon auszugehen, daß die Volumenelemente jeweils > 0 sind. Man sieht hier auch, daß das Vorzeichen der 2. Variation dasjenige von F^2, dem einen Faktor im Integranden, ist.

3.6.1 Die Integranden der 1. Variation der drei induzierten Volumina

Wir werden hier die Ableitungen der drei Volumenelemente nach t für $t = 0$, d. h. $\omega_0', \omega_{h0}', \bar{\omega}_0'$, darstellen durch die Flächengrößen bezüglich N und einen Ausdruck, der nur von der Stützfunktion q_t von N_t bezüglich N_{bt} abhängt. Dazu nutzen wir die Beziehungen der drei Volumenelemente aus, die durch (2.9) und (3.5) gegeben sind.

Zunächst behandeln wir ω_t und ω_{ht}: Wir haben zwei Gleichungen, die sowohl ω_t als auch ω_{ht} enthalten. Wir eliminieren zuerst ω_{ht} und lösen nach ω_t auf. Im einzelnen geht das so: Wir erhalten h_{tij} aus

$$h_{tij} = \frac{det(x_{t1}, \ldots, x_{tn}, x_{tij})}{\omega_t} = \frac{d_{tij}}{\omega_t} \tag{3.6}$$

und nach Lemma 3.5

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{h0}'}{\omega_h} &= \partial_t|_0(\log|\omega_{ht}|) = \partial_t|_{t=0}(\log\sqrt{|Det\, h_t|}) = \frac{1}{2}\partial_t|_{t=0}(\log\frac{|Det\, d_t|}{|\omega_t|^n}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_t|_{t=0}(\log|Det\, d_t|) - \frac{n}{2}\partial_t|_{t=0}(\log|\omega_t|) \\
&= (-(n+1)f\, tr\, S + \Delta(f) - nT(f) - n\frac{\omega_0'}{\omega})\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Das ist die eine Gleichung. Die andere erhalten wir aus (2.9), d. h. $|\omega_t| = |q_t^{\frac{n+2}{2}}\omega_{ht}|$. Nach logarithmischer Ableitung gilt

$$\frac{\omega_t'}{\omega_t} = \frac{n+2}{2}\frac{q_t'}{q_t} + \frac{\omega_{ht}'}{\omega_{ht}}. \tag{3.7}$$

Setzen wir ω_{h0}' aus der ersten Gleichung in (3.7) ein und lösen nach ω_0' auf[6], erhalten wir

$$\omega_0' = \frac{q_0'}{q_0}\omega + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f tr\, S + \Delta(f) - nT(f))\omega. \tag{3.8}$$

Mit (3.7) folgt dann sofort:

$$\omega_{h0}' = -\frac{n}{2}\frac{q_0'}{q_0}\omega_h + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f tr\, S + \Delta(f) - nT(f))\omega_h \tag{3.9}$$

[6] Dies ist stets möglich, denn $-\frac{n}{2} \neq 1$.

Bemerkung: Das Vorgehen ist eine Verallgemeinerung dessen, was normalerweise zur Berechnung der 1. Variation von V_N bei $N = N_b$ angewandt wird. Nur ist dort die zweite Gleichung einfacher: Man setzt in die erste Gleichung statt (3.7) bzw. (2.9) dort $|\omega_t| = |\omega_{ht}|$ ein, siehe etwa [VV].

Jetzt können wir mit (3.5) $\bar{\omega}_0'$ berechnen:

$$\bar{\omega}_0' = -(n+1)\frac{q_0'}{q_0}\bar{\omega} + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f\,tr\,S + \Delta(f) - nT(f))\bar{\omega} \tag{3.10}$$

Es bleibt allerdings ein Quotient $\frac{q_0'}{q_0}$ stehen, den man nicht kennt, wenn man keine näheren Angaben hat, um welche Normale es sich handelt. Kennt man q_t, kann man einsetzen und erhält den Integranden der 1. Variation. Ist N z. B. die Blaschkesche Affinnormale, so ist $q_t \equiv 1$ und der Quotient verschwindet. In den folgenden Abschnitten 3.7, 3.8 werden wir die entsprechenden Ausdrücke für die Manhartsche und die zentroaffine Familie ausrechnen. Wir hätten auch schon bei N_c so rechnen können, aber die einfache Form der Größen ($N_{ct} = (1-tf)N_c$, $S_i^k = \delta_i^k$) legt es nahe, es wie in Abschnitt 3.5 zu tun. Wir werden aber in Abschnitt 3.8 N_c als Spezialfall erhalten.

3.6.2 Integranden der 2. Variation

Wir betrachten nun den Integranden der 2. Variation des von der Normalen induzierten Volumens: Dabei gehen wir wie in 3.6.1 vor mit einer Ableitungsstufe höher: Aus zwei Gleichungen, die ω_0'' und ω_{h0}'' enthalten, eliminieren wir ω_{h0}'' und lösen nach ω_0'' auf.

Zuerst bestimmen wir $\partial_t|_0(\frac{\omega_{ht}'}{\omega_{ht}})$ mit Lemma 3.5:

$$\begin{aligned}
& \partial_t^2|_{t=0}(\log|\omega_{ht}|) \\
= \; & \frac{1}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\,h_t|) = \frac{1}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log\frac{|Det\,d_t|}{|\omega_t|^n}) \\
= \; & \frac{1}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\,d_t|) - \frac{n}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log|\omega_t|) \\
= \; & -\frac{n+1}{2}f^2 S_l^m S_m^l \\
& + h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& - \frac{1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& - \frac{n}{2}\partial_t|_{t=0}(\frac{\omega_t'}{\omega_t})
\end{aligned}$$

Das ist die eine Gleichung, die ω_0'' und ω_{h0}'' enthält. Setzen wir sie in die nach t abgeleitete Gleichung (3.7) ein[7], bekommen wir

$$\partial_t|_{t=0}(\frac{\omega_t'}{\omega_t}) = \frac{n+2}{2}\partial_t|_{t=0}(\frac{q_t'}{q_t}) + \partial_t|_{t=0}\left(\frac{\omega_{ht}'}{\omega_{ht}}\right)$$

[7]Dies ist die zweite Gleichung. Es ist die Verallgemeinerung von $|\omega_0''| = |\omega_{h0}''|$, siehe 3.6.1.

$$= \frac{n+2}{2}\partial_t|_{t=0}(\frac{q'_t}{q_t}) - \frac{n+1}{2}f^2 S_l^m S_m^l$$
$$+h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))$$
$$-\frac{1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)))$$
$$-\frac{n}{2}\partial_t|_{t=0}(\frac{\omega'_t}{\omega_t})$$

Lösen wir nach ω''_0 auf, so ergibt das

$$\omega''_0 = \partial_t|_0(\frac{q'_t}{q_t})\omega + (\frac{\omega'_0}{\omega})^2\omega - \frac{n+1}{n+2}f^2 S_l^m S_m^l\omega$$
$$+\frac{2}{n+2}h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))\omega$$
$$-\frac{1}{n+2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))\omega. \tag{3.11}$$

Das ist der Integrand der 2. Variation des von N erzeugten Volumens. Wir können mit den nach t abgeleiteten Gleichungen (3.7) und (3.5) noch die Integranden für die anderen Volumina berechnen. Aus

$$\partial_t\left(\frac{\omega'_t}{\omega_t}\right) = \frac{n+2}{2}\partial_t\left(\frac{q'_t}{q_t}\right) + \partial_t\left(\frac{\omega'_{ht}}{\omega_{ht}}\right)$$

folgt

$$\frac{\omega''_{h0}}{\omega_h} = \partial_t|_{t=0}(\frac{\omega'_t}{\omega_t}) - \frac{n+2}{2}\partial_t|_{t=0}(\frac{q'_t}{q_t}) + \left(\frac{\omega'_{h0}}{\omega_h}\right)^2$$
$$= -\frac{n}{2}\partial_t|_0(\frac{q'_t}{q_t}) + (\frac{\omega'_{h0}}{\omega_h})^2 - \frac{n+1}{n+2}f^2 S_l^m S_m^l$$
$$+\frac{2}{n+2}h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))$$
$$-\frac{1}{n+2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)). \tag{3.12}$$

Analog geht dies bei $\bar{\omega}$.

3.7 Anwendung auf die Normalen der Manhartschen Familie

Wir werden in diesem Abschnitt die 1. Variation von V_N, V_h und V_η und die 2. Variation von V_N für Normalen der Manhartschen Familie bestimmen, indem wir die Ausdrücke $\frac{q'_0}{q_0}$ und $\partial_t|_{t=0}(\frac{q'_t}{q_t})$ berechnen, in die Gleichungen (3.8), (3.9), (3.10) und (3.11) von Abschnitt 3.6 einsetzen und mit Hilfe der Ergebnisse des Abschnitts 3.4 integrieren.
Für die Berechnung der Stützfunktion q_t benutzen wir eine Eigenschaft der Stützfunktion bei Normalen der Manhartschen Familie: Sie ist eine bestimmte Potenz der euklidischen Gaußschen Krümmung.

3.7.1 Die 1. Variation der induzierten Volumina

Sei $N = N_\alpha$ eine Normale der Manhartschen Familie. N_t ist in diesem Fall die Normale $N_{\alpha t}$ der Manhartschen Familie von x_t mit dem Index α. Wir möchten ja das Volumen von x_t, das V_{N_α} entspricht, bestimmen, also $V_{N_{\alpha t}}$, und dann dieses Volumen nach t ableiten, also $\partial_t|_{t=0}(V_{N_{\alpha t}})$ berechnen. Für x_t als einer (für t in einer Umgebung von 0) regulären Fläche gelten die bis jetzt beschriebenen Eigenschaften, also auch die Beziehung (2.14) der Stützfunktion q_t von N_t bezüglich N_{bt} zur euklidischen Gaußschen Krümmung $\mathcal{K}_{et}$ für eine Normale der Manhartschen Familie:

$$|q_t| = |\mathcal{K}_{et}|^\gamma$$

Es gilt nach logarithmischer Ableitung nach t:

$$\frac{q_0'}{q_0} = \partial_t|_{t=0}(\log|q_t|) = \partial_t|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|^\gamma) = \gamma\frac{\mathcal{K}_{e0}'}{\mathcal{K}_e}$$

$\mathcal{K}_{et}$ ist aber auszudrücken mit Hilfe der Grundformen $II_t = h_{et}$ und g_t, nämlich

$$\mathcal{K}_{et} = \frac{Det\, h_{et}}{Det\, g_t}.$$

Es gilt daher:

$$\frac{\mathcal{K}_{e0}'}{\mathcal{K}_e} = \partial_t|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|) = \partial_t|_{t=0}(\log|Det\, h_{et}|) - \partial_t|_{t=0}(\log\, Det\, g_t)$$

Wir müssen also nur die beiden Summanden $\partial_t|_0(\log|Det\, h_{et}|)$ und $\partial_t|_0(\log|Det\, g_t|)$ bestimmen. Erst einmal berechnen wir den Summanden mit g_t. Dazu verwenden wir:

Lemma 3.6 *Man kann diese Skalarprodukte so mit den lokalen Funktionen und* $q_e = |\mathcal{K}_e|^\alpha$ *ausdrücken:*

$$\begin{aligned}
\langle N, N\rangle &= q_e^2 + h^{ij}\partial_j(\log|q_e|)h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)g_{im}\\
\langle x_i, N\rangle &= -h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)g_{im}\\
\langle N_i, N\rangle &= h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)S_i^j g_{jm}\\
\langle x_j, N_i\rangle &= -S_i^k g_{jk}\\
\langle N_j, N_i\rangle &= S_j^m S_i^k g_{km}
\end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen $N = q_e N_e - h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)x_m$ nach Definition 2.4 und $N_i = -S_i^j x_j$ ein. #

Wegen (3.4) und Lemma 3.6 gilt

$$\begin{aligned}
g_{0ij}' &= \partial_j(f)\langle x_i, N\rangle + \partial_i(f)\langle x_j, N\rangle + f\langle x_i, N_j\rangle + f\langle x_j, N_i\rangle\\
&= -\partial_j(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)g_{im} - \partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)g_{jm} - fS_j^k g_{ki} - fS_i^k g_{kj}.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.2 folgt damit die Darstellung des Summanden $\partial_t|_0(\log\, Det\, g_t)$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t|_{t=0}(\log|Det\, g_t|) = g^{ij}g_{0ij}'\\
=\ &g^{ij}(-\partial_j(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)g_{im} - \partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)g_{jm} - fS_j^k g_{ki} - fS_i^k g_{kj})\\
=\ &-2(\partial_j(f)h^{kj}\partial_k(\log|q_e|) + f\, tr\, S)
\end{aligned}$$

Nun kommen wir zu $\partial_t|_0(\log|Det\, h_{et}|)$: h_{et} erhalten wir aus

$$h_{etij} = \frac{det(x_{t1},\ldots,x_{tn},x_{tij})}{det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{et})} = \frac{d_{tij}}{\sqrt{Det\, g_t}}. \tag{3.13}$$

Mit Lemma 3.5 ist

$$\begin{aligned}
\partial_t|_{t=0}(\log|Det\, h_{et}|) &= \partial_t|_{t=0}(\log\frac{|Det\, d_t|}{\sqrt{Det\, g_t}^n}) \\
&= \partial_t|_{t=0}(\log|Det\, d_t|) - \frac{n}{2}\partial_t|_{t=0}(\log\, Det\, g_t) \\
&= -f(n+1)trS + \Delta(f) - nT(f) - \frac{n}{2}\partial_t|_{t=0}(\log\, Det\, g_t).
\end{aligned}$$

Wir haben jetzt die beiden Summanden berechnet. $\partial_t|_0(\log|K_{et}|)$ ergibt sich als

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{K}'_{e0}}{\mathcal{K}_{e0}} &= \Delta(f) - nT(f) - (n+1)ftr\, S - \frac{n+2}{2}\partial_t|_{t=0}(\log\, Det\, g_t) \\
&= \Delta(f) - nT(f) + ftr\, S + (n+2)\partial_l(f)h^{kl}\partial_k(\log|q_e|).
\end{aligned}$$

Für $\gamma \neq 0$ kann man dies wegen (2.15) so darstellen:

$$\frac{q'_0}{q_0} = \gamma\frac{\mathcal{K}'_{e0}}{\mathcal{K}_{e0}} = \gamma(\Delta(f) - nT(f) + ftr\, S) + 2\alpha nT(f) \tag{3.14}$$

Ist $\gamma = 0$, das ist genau für $N = N_b$ der Fall, so kann man i. a. q_e nicht als Potenz von $q \equiv 1$ ausdrücken (es sei denn, $|\mathcal{K}_e| \equiv 1$). Hier fällt einerseits der ganze Ausdruck rechts weg, denn $T = T_b = 0$. Andererseits ist $q'_0 = 0$, weil $q_t \equiv 1$ für jedes t gilt. Daher kann man die Darstellung (3.14) auch für $\gamma = 0$ nehmen.

Wenn man (3.14) in (3.8) einsetzt, d. h.

$$\begin{aligned}
\omega'_0 &= \gamma(\Delta(f) - nT(f) + ftr\, S)\omega + 2\alpha nT(f)\omega \\
&\quad + \frac{1}{n+2}(-(n+1)ftr\, S + \Delta(f) - nT(f))\omega \\
&= \alpha(\Delta(f) + nT(f))\omega + (\alpha-1)f\, tr\, S\omega,
\end{aligned}$$

und integriert, erhält man nach Anwendung des Lemmas 3.3

$$\begin{aligned}
V'_N(0) &= \int_W \omega'_0 du = \int_W (\alpha-1)f\, tr\, S\omega du \\
&= \int_W (\alpha-1)fnH\omega du.
\end{aligned}$$

Das in 3.2.1 und 3.2.2 Erwähnte gilt also allgemein für - fast - die ganze Familie: Für alle Normalen N_α der Manhartschen Familie, außer für $N_1 = N_{III}$, verschwindet die 1. Variation des von N_α erzeugten Volumens genau dann, wenn $H = H_\alpha$ identisch 0 ist.

Definition 3.7 *Wir wollen Flächen, für die für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ die Mittlere Krümmung $H = H_\alpha$ bezüglich N_α identisch verschwindet, N_α–**Minimalflächen** bzw. N_α–**minimal** nennen.*

Wir werden dies auch für $\alpha = 1$ tun, obwohl hier die 1. Variation immer verschwindet. In 3.7.3 werden wir darauf noch kurz eingehen.

Wir können nun auch die 1. Variation der anderen Volumina berechnen. Setzt man nämlich den in (3.14) für $\frac{q_0'}{q_0}$ erhaltenen Ausdruck in (3.9) und in (3.10) ein, ergibt das

$$\begin{aligned}
\omega_{h0}' &= -\frac{n}{2}\gamma(\Delta(f) - nT(f) + f\, tr\, S)\omega_h - \frac{n}{2}2\alpha n T(f)\omega_h \\
&\quad + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f\, tr\, S + \Delta(f) - nT(f))\omega_h \\
&= \frac{-n\alpha+1}{2}\Delta(f)\omega_h - \frac{n\alpha+1}{2}nT(f)\omega_h - \frac{n\alpha+1}{2}f\, tr\, S\omega_h, \\
\bar{\omega}_0' &= -(n+1)\gamma(\Delta(f) - nT(f) + f\, tr\, S)\bar{\omega} - (n+1)2\alpha nT(f)\bar{\omega} \\
&\quad + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f\, tr\, S + \Delta(f) - nT(f))\bar{\omega} \\
&= (-(n+1)\alpha + 1)(\Delta(f) - nT(f))\bar{\omega} - (n+1)2\alpha nT(f)\bar{\omega} - (n+1)\alpha f\, tr\, S\bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Integriert man diese Terme, so erhält man nach Lemma 3.3

$$\begin{aligned}
V_h'(0) = \int_W \omega_{h0}' du &= \int_W -\frac{n\alpha+1}{2}(nT(f) + f tr\, S)\omega_h du \\
&= \int_W \frac{n\alpha+1}{2}(tr(\hat{\nabla}T) - H)nf\omega_h du, \\
V_\eta'(0) = \int_W \bar{\omega}_0' du &= \int_W -\alpha(n+1)(2nT(f) + f\, tr\, S)\bar{\omega} du \\
&= \int_W -\alpha(n+1)(H - 2tr(\overline{\nabla}T))nf\bar{\omega} du.
\end{aligned}$$

Für die anderen Volumina gilt daher Entsprechendes wie bei V_N. Die 1. Variation von V_h verschwindet genau dann, wenn $tr(\hat{\nabla}T) - H = 0$ ist, außer bei $\alpha = -\frac{1}{n}$, dort verschwindet die 1. Variation immer. Das ist aber schon bekannt, denn aus Abschnitt 2.3 wissen wir, daß

$$(N_{-\frac{1}{n}})_h = N_1 = N_{III}$$

ist, und das von N_{III} induzierte Volumen hat stets eine verschwindende 1. Variation.
Die 1. Variation von V_η verschwindet für $H - 2tr(\overline{\nabla}T) \equiv 0$, außer bei $\alpha = 0$. Das von der euklidischen Konormale erzeugte Volumen ist das von

$$(N_0)_\eta = N_1 = N_{III}$$

erzeugte Volumen.

Ergebnis: Wie beim euklidischen und äquiaffinen Fall verschwindet bei Normalen der Manhartschen Familie die 1. Variation des von der Normalen erzeugten Volumens, wenn die Mittlere Krümmung bzgl. dieser Normalen identisch 0 ist.

3.7.2 N_α–Minimalflächen und Mittlere Krümmung

Wir werden nun die Mittlere Krümmung H_α durch euklidische Größen darstellen, Gleichzeitigkeitsprobleme untersuchen und die Mittlere Krümmung bezüglich N_h und N_η ausrechnen.

Wie wir in 3.7.1 gesehen haben, verschwindet die 1. Variation des von $N = N_\alpha$ erzeugten Volumens genau für $H = 0$. Dabei ist H die Mittlere Krümmung bezüglich der Normalen N aus der Manhartschen Familie, nicht notwendig H_e. Wir können aber H mit euklidischen Größen ausdrücken. Wegen (1.5), (2.12) gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) &= tr(\hat{\nabla}_e\, grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)) = -2n\, tr(\hat{\nabla}_e T_e) \\
n\hat{T}_e(grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)) &= nT_e(\log|\mathcal{K}_e|) \\
&= -\frac{1}{2} grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) = -2n^2 h_e(T_e, T_e)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1 und Definition 2.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
& nH = tr\, S = q_e tr\, S_e + tr(\hat{\nabla}_e q_e grad_{h_e}(\log|q_e|)) + q_e tr\, K_e grad_{h_e}(\log|q_e|) \\
& = q_e n H_e + q_e tr(\hat{\nabla}_e grad_{h_e}(\log|q_e|)) + grad_{h_e}(\log|q_e|)(q_e) + q_e n T_e(\log|q_e|) \\
& = q_e(nH_e + tr(\hat{\nabla}_e grad_{h_e}(\log|q_e|)) + grad_{h_e}(\log|q_e|)(\log|q_e|) + nT_e(\log|q_e|)) \\
& = |\mathcal{K}_e|^\alpha (nH_e - 2\alpha n\, tr(\hat{\nabla}_e T_e) - 2\alpha(1-2\alpha)n^2 h_e(T_e, T_e)) \\
& = |\mathcal{K}_e|^\alpha (nH_e + \alpha\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\alpha(1-2\alpha) grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|)) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Man vergleiche (3.15) mit (3.11) in [Man3].
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $n = 2$ hat man bis auf einen nicht verschwindenden Faktor genau den Ausdruck, den Glässner für II–Minimalflächen errechnete, siehe 3.2.3. Beispiele für II–Minimalflächen sind in [Gl] und [Man2] angegeben.

Man kann jetzt auch die Fälle näher betrachten, in denen Flächen gleichzeitig N_α– und N_β–Minimalflächen sind für zwei verschiedene reelle Zahlen α, β: Der Ausdruck in (3.15) muß dann für beide Zahlen 0 werden, es folgt deshalb:

$$\begin{aligned}
nH_e + \alpha\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\alpha(1-2\alpha) grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0 \\
nH_e + \beta\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\beta(1-2\beta) grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0
\end{aligned}$$

Zieht man die zweite von der ersten Gleichung ab und teilt durch $\alpha - \beta \neq 0$, so ergibt das:

$$\begin{aligned}
nH_e + \alpha\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\alpha(1-2\alpha) grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0 \\
\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}(1-2(\alpha+\beta)) grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0
\end{aligned}$$

Beispiele: Eine Fläche, die gleichzeitig euklidische und II–Minimalfläche ist, muß die Gleichungen für $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
H_e &= 0 \\
\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0
\end{aligned}$$

Eine euklidische und zugleich Affinminimalfläche erfüllt sie mit $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{n+2}$:

$$\begin{aligned}
H_e &= 0 \\
\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{n}{2(n+2)} grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0
\end{aligned}$$

Für eine II– und Affinminimalfläche setzt man $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{n+2}$ ein:

$$\begin{aligned} nH_e + \frac{1}{2}\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0 \\ \Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) + \frac{1}{n+2} grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 0 \end{aligned}$$

In [Gl] werden Beispiele für $n = 2$ angegeben.

Nun untersuchen wir, welche Flächen N_α–Minimalflächen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. Das gilt bereits, wenn eine Fläche für drei verschiedene Zahlen α_i, $i = 1, 2, 3$, N_{α_i}–Minimalfläche ist. Denn die drei Gleichungen

$$nH_e + \alpha_i\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\alpha_i(1-2\alpha_i)grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) \equiv 0, i = 1, 2, 3,$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1(1-2\alpha_1) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2(1-2\alpha_2) \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3(1-2\alpha_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nH_e \\ \Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) \\ -\frac{1}{2}grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sind genau dann erfüllt, wenn

$$H_e = \Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) = grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) \equiv 0$$

gilt. Denn die Matrix ist genau dann regulär, wenn die α_i verschiedene Zahlen sind. Der Vektor rechts der Matrix muß also der Nullvektor sein, d. h. die Komponentenfunktionen verschwinden. Mit diesen Funktionen verschwindet jedoch der Ausdruck

$$nH_e + \alpha\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) - \frac{1}{2}\alpha(1-2\alpha)grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|)$$

für jedes α.

Beispiel: Für $n = 2$ ist die Wendelfläche eine N_α–Minimalfläche für jedes α. Das folgt aus der Bemerkung in 2.4.1, vgl. [Gl], Satz 11.

Sei N eine beliebige Relativnormale mit der quadratischen Grundform h. Wir berechnen nun die Mittlere Krümmung $H_h = tr\, S_h$ von N_h in Größen bezüglich N. Es gilt wegen (2.10) und Abschnitt 2.3 mit $q = \eta_b(N)$

$$N_h = \tilde{q}N + x_*(\tilde{Z}), \tilde{Z} = -grad_h(\tilde{q}) = -\tilde{q}\, grad_h(\log|\tilde{q}|) = \tilde{q}\frac{n+2}{2}grad_h(\log|q|) = n\tilde{q}T.$$

Deshalb erhalten wir nach Lemma 2.1 für die Mittlere Krümmung von N_h:

$$\begin{aligned} trS_h &= \tilde{q}\, tr\, S - tr(\nabla n\tilde{q}T) = \tilde{q}\, tr\, S - n\tilde{q}\, tr(\nabla T) - nT(\tilde{q}) \\ &= \tilde{q}\, trS - n\tilde{q}\, tr(\hat{\nabla}T) - n\tilde{q}\, trK_T - n\tilde{q}T(\log|\tilde{q}|) \\ &= \tilde{q}\, trS - n\tilde{q}\, tr(\hat{\nabla}T) - n\tilde{q}n\hat{T}(T) + n\tilde{q}n\hat{T}(T) \\ &= \tilde{q}\, trS - n\tilde{q}\, tr(\hat{\nabla}T) = \tilde{q}n(H - tr(\hat{\nabla}T)) \end{aligned}$$

Bei Normalen $N = N_\alpha$ der Manhartschen Familie ist das fast der Integrand von $V_h'(0)$. Es gilt damit (außer für $\alpha = -\frac{1}{n}$): Die 1. Variation von V_h ist genau dann 0, wenn die Mittlere Krümmung von N_h identisch verschwindet.
Wir können analog die Mittlere Krümmung von N_η berechnen:

$$trS_\eta = \bar{q}n(H - 2tr(\overline{\nabla}T))$$

Die 1. Variation von V_η verschwindet (außer für $\alpha = 0$) genau dann, wenn $trS_\eta = 0$ ist. Das ist kein Zufall. Bei allen Normalen $N = N_\alpha$ der Manhartschen Familie (außer $\alpha = 1$) ist das Verschwinden der Mittleren Krümmung mit dem Verschwinden der 1. Variation des von N erzeugten Volumens äquivalent. N_h ist - wie N - auch aus der Manhartschen Familie und erzeugt das von h induzierte Volumen, dessen 1. Variation genau für $tr(\hat{\nabla}T) - H = 0$ verschwindet. Also muß die Mittlere Krümmung von N_h ein Vielfaches von $H - tr(\hat{\nabla}T)$ sein. Genauso ist es beim von der Konormalen erzeugten Volumen.

Für zentroaffine Minimalflächen gilt das nicht, dort verschwindet die 1. Variation von V_h, vergleiche 3.5, wenn $tr(\hat{\nabla}T) \equiv 0$ ist. Die Mittlere Krümmung der Normalen $(N_c)_h$ verschwindet nach den obigen Berechnungen aber genau dann, wenn $H - tr(\hat{\nabla}T) = 1 - tr(\hat{\nabla}T) \equiv 0$ ist. Beide können nicht zusammen verschwinden. Das ist schon ein Hinweis, daß das Verschwinden der Mittleren Krümmung nicht immer das Verschwinden der 1. Variation des von der Normalen induzierten Volumens impliziert. Bei den Normalen der zentroaffinen Familie ist das so, vergleiche Abschnitt 3.8.

Bemerkung: Ist $N = N_b$, so ist $\alpha = \frac{1}{n+2}$ und $T = 0$. Es gilt

$$V_N'(0) = V_h'(0) = V_\eta'(0) = -\frac{n+1}{n+2}\int_W fnH\omega du,$$

was nicht überraschen kann, denn bei N_b stimmen V_N, V_h und V_η überein. Nicht nur bei N_b, sondern auch bei N_{bt} ist das so.
Betrachten wir jetzt den Fall, daß $|\mathcal{K}_e| = c$ konstant ist. Für eine Normale $N = N_\alpha$ gilt dort ebenfalls $T = 0$, auch bei $\alpha \neq \frac{1}{n+2}$, vgl. (2.12) und (2.15), und es folgt:

$$V_N'(0) = \int_W (\alpha - 1)c^\alpha nH_e f\omega du$$

$V_N'(0)$ ist ein konstantes Vielfaches von $V_{N_e}'(0)$. Das scheint selbstverständlich zu sein, weil sich die Volumina V_N und V_{N_e} nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Bei der zweiten Ableitung ist es aber nicht so, dazu mehr in 3.7.3.
Wir führen diesen Vergleich von $V_N'(0)$ und $V_{N_e}'(0)$ durch, obwohl es sich eigentlich i. a. um verschiedene Variationen mit verschiedenen Vergleichsflächen handelt. Wir lassen dies außer acht. Für $V_N'(0)$ berechnen wir das von N_t erzeugte Volumen der Vergleichsfläche $x + tfN$, bei $V_{N_e}'(0)$ das von N_{et} erzeugte Volumen der Fläche $x + tfN_e$. Es gilt $N = c^\alpha N_e$. Verwenden wir bei der Variation von V_{N_e} die Funktion $c^\alpha f$, sind die Vergleichsflächen gleich: $x + tfN = x + tc^\alpha fN_e$. Daraus folgt aber nicht, daß auch für die Normalen $N_t = c^\alpha N_{et}$ gilt.

3.7.3 Die 2. Variation des von der Normalen induzierten Volumens

Bei der zweiten Variation gehen wir ähnlich wie in 3.7.1 vor: Wir stellen $\partial_t|_{t=0}\left(\frac{q'_t}{q_t}\right)$ nach (2.14) durch h_{et} und g_t dar, setzen dies in (3.11) ein und integrieren.

Wir berechnen zuerst den Summanden mit g_t von

$$\partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|) = \gamma\partial_t^2|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|) = \gamma\Big(\partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\, h_{et}|) - \partial_t^2|_{t=0}(\log\ Det\, g_t)\Big).$$

Hierzu leiten wir für g''_{0ij} (3.4) zweimal nach t ab und verwenden Lemma 3.6. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\partial_t^2|_{t=0}(g_{tij}) &= 2\partial_i(f)\partial_j(f)\langle N,N\rangle + 2\partial_i(f)f\langle N,N_j\rangle + 2\partial_j(f)f\langle N,N_i\rangle + 2f^2\langle N_i,N_j\rangle \\
&= 2\partial_i(f)\partial_j(f)(q_e^2 + h^{sl}h^{km}\partial_l(\log|q_e|)\partial_m(\log|q_e|)g_{sk}) \\
&\quad +2\partial_i(f)fh^{sm}\partial_m(\log|q_e|)S_j^l g_{sl} + 2\partial_j(f)fh^{sm}\partial_m(\log|q_e|)S_i^l g_{sl} \\
&\quad +2f^2S_i^lS_j^m g_{lm}
\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
g^{ij}\partial_t^2|_{t=0}(g_{tij}) &= 2g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)(q_e^2 + h^{sl}h^{km}\partial_l(\log|q_e|)\partial_m(\log|q_e|)g_{sk}) \\
&\quad +4g^{ij}\partial_i(f)fh^{sm}\partial_m(\log|q_e|)S_j^l g_{sl} \\
&\quad +2g^{ij}f^2S_i^lS_j^m g_{lm}.
\end{aligned}$$

Daneben gilt, wenn man g'_{0ij} aus 3.7.1 verwendet:

$$\begin{aligned}
& g^{il}g^{jm}\partial_t|_{t=0}(g_{tij})\partial_t|_{t=0}(g_{tlm}) \\
=\ & g^{il}g^{jm}(\partial_j(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{is} + \partial_i(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{js} + fS_i^k g_{kj} + fS_j^k g_{ki}) \\
& (\partial_m(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ls} + \partial_l(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ms} + fS_l^k g_{km} + fS_m^k g_{kl}) \\
=\ & g^{il}(\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|) + fS_i^m) \\
& (\partial_m(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ls} + \partial_l(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ms} + fS_l^k g_{km} + fS_m^k g_{kl}) \\
& +g^{jm}(\partial_j(f)h^{kl}\partial_k(\log|q_e|) + fS_j^l) \\
& (\partial_m(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ls} + \partial_l(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ms} + fS_l^k g_{km} + fS_m^k g_{kl}) \\
=\ & (\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|) + fS_i^m)(\partial_m(f)h^{ki}\partial_k(\log|q_e|) + fS_m^i) \\
& +g^{il}(\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|) + fS_i^m)(\partial_l(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ms} + fS_l^k g_{km}) \\
& +(\partial_j(f)h^{kl}\partial_k(\log|q_e|) + fS_j^l)(\partial_l(f)h^{kj}\partial_k(\log|q_e|) + fS_l^j) \\
& +g^{jm}(\partial_j(f)h^{kl}\partial_k(\log|q_e|) + fS_j^l)(\partial_m(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ls} + fS_m^k g_{kl}) \\
=\ & 2(\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|) + fS_i^m)(\partial_m(f)h^{ki}\partial_k(\log|q_e|) + fS_m^i) \\
& +2g^{il}(\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|) + fS_i^m)(\partial_l(f)h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)g_{ms} + fS_l^k g_{km})
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das nach Lemma 3.2

$$\begin{aligned}
\partial_t^2|_{t=0}(\log\ Det\, g_t) &= -g^{il}g^{jm}\partial_t|_{t=0}(g_{tij})\partial_t|_{t=0}(g_{tlm}) + g^{ij}\partial_t^2|_{t=0}(g_{tij}) \\
&= -2\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f)h^{si}\partial_s(\log|q_e|) \\
&\quad -4\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)fS_m^i - 2f^2S_i^mS_m^i \\
&\quad +2g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2.
\end{aligned}$$

Nun kommen wir zum anderen Summanden: Aus Lemma 3.5 folgt

$$
\begin{aligned}
& \partial_t^2|_0(\log|Det\, h_{et}|) = \partial_t^2|_{t=0}(\log \frac{|Det\, d_t|}{\sqrt{Det\, g_t}^n}) \\
= \;& \partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\, d_t|) - \frac{n}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log Det\, g_t) \\
= \;& -(n+1)f^2 S_l^m S_m^l \\
& +2h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m {\Gamma_{ij}}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& -h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& -\frac{n}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log\; Det\, g_t).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir damit für $\partial_t^2|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|)$:

$$
\begin{aligned}
& \partial_t^2|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|) = \partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\, h_{et}|) - \partial_t^2|_{t=0}(\log\; Det\, g_t) \\
= \;& -(n+1)f^2 S_l^m S_m^l \\
& +2h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m {\Gamma_{ij}}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& -h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& -\frac{n+2}{2}\partial_t^2|_{t=0}(\log\; Det\, g_t) \\
= \;& f^2 S_l^m S_m^l \\
& +2h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m {\Gamma_{ij}}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& -h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& +(n+2)\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f)h^{si}\partial_s(\log|q_e|) \\
& +2(n+2)\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)fS_m^i \\
& -(n+2)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2
\end{aligned}
$$

Für $\partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|)$ bedeutet das

$$
\begin{aligned}
& \partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|) = \gamma\partial_t^2|_{t=0}(\log|\mathcal{K}_{et}|) \\
= \;& \gamma f^2 S_l^m S_m^l \\
& +2\gamma h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m {\Gamma_{ij}}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& -\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& +\gamma(n+2)\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f)h^{si}\partial_s(\log|q_e|) \\
& +2\gamma(n+2)\partial_i(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)fS_m^i \\
& -\gamma(n+2)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2.
\end{aligned}
$$

Ersetzen wir mit (2.15) für $\gamma \neq 0$ einige Terme der Form $h^{lj}\partial_j(\log|q_e|)$ durch $\frac{\alpha 2}{\gamma(n+2)}nT^l$, so ist

$$
\begin{aligned}
& \partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|) = \gamma f^2 S_l^m S_m^l \\
& +2\gamma h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m {\Gamma_{ij}}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
& -\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) \\
& +2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f) + 4\alpha\partial_i(f)nT^m fS_m^i \\
& -\gamma(n+2)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2.
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie bei (3.14) gilt dies nicht nur für $\gamma \neq 0$: Für $\gamma = 0$ ($N = N_b$) wird der Ausdruck rechts 0, da $T = T_b = 0$ gilt. Da $q_t \equiv 1$ ist, ist mit q_0'' und q_0' auch die linke Seite 0. Deshalb kann man die Darstellung für $\gamma = 0$ ebenfalls nehmen. Damit haben wir den Term $\partial_t|_{t=0}(\frac{q_t'}{q_t})$ vollständig berechnet. Setzen wir ihn in (3.11) ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_0''}{\omega} &= \gamma f^2 S_l^m S_m^l \\
&\quad +2\gamma h^{ij}(fS_i^m \partial_j\partial_m(f) - fS_l^m \Gamma_{ij}{}^l \partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
&\quad -\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
&\quad +2\alpha nT(f)\partial_i(f)h^{si}\partial_s(\log|q_e|) + 4\alpha\partial_i(f)nT^m fS_m^i \\
&\quad -\gamma(n+2)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2 \\
&\quad -\frac{n+1}{n+2}f^2S_l^mS_m^l + \Big(\alpha(\Delta(f) + nT(f)) + (\alpha-1)f\, tr\, S\Big)^2 \\
&\quad +\frac{2}{n+2}h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
&\quad -\frac{1}{n+2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
&= (\alpha-1)f^2S_l^mS_m^l \\
&\quad +2\alpha h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f)) \\
&\quad -\alpha h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
&\quad +2\alpha nT(f)\partial_i(f)h^{si}\partial_s(\log|q_e|) + 4\alpha\partial_i(f)nT^mfS_m^i \\
&\quad -(n+2)\gamma g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2 + \Big(\alpha(\Delta(f) + nT(f)) + (\alpha-1)f\, tr\, S\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Das muß man integrieren. Vorher werden wir den zweiten Summanden des Integrals mit partieller Integration noch vereinfachen, denn dieser ist fast $\partial_j(h^{ij}fS_i^m\partial_m(f)\omega)$:

$$
\begin{aligned}
&\int_W h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f) - fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f) + \partial_m(f)\partial_j(f)S_i^m + f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))\omega du \\
=\; &\int_W \Big(- h^{ij}fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)\omega + \partial_j\Big(h^{ij}fS_i^m\partial_m(f)\omega\Big) \\
&-\partial_j(h^{ij})fS_i^m\partial_m(f)\omega - h^{ij}fS_i^m\partial_m(f)\Gamma_{jl}{}^l\omega\Big)du \\
\overset{(2.2)}{=}\; &\int_W (-h^{ij}\Gamma_{ij}{}^l fS_l^m\partial_m(f)\omega + 0 + h^{ij}\overline{\Gamma}_{ij}{}^k fS_k^m\partial_m(f)\omega)du \\
=\; &\int_W -2fnT^kS_k^m\partial_m(f)\omega du
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Die Gleichung (3.16) gilt auch für andere Relativnormalen. Setzen wir (3.16) ein und verwenden Lemma 3.4, so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
V_N''(0) &= \int_W \omega_0'' du \\
&= \int_W \Big((\alpha-1)f^2S_l^mS_m^l + 2\alpha h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \\
&\quad -4\alpha fnT^kS_k^m\partial_m(f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\alpha(\Delta(f) - nT(f))(\Delta(f) + nT(f)) \\
& +\alpha(n-1)h^{ij}S_i^k\partial_k(f)\partial_j(f) \\
& -2\alpha h^{il}nT^m K_{lm}^s\partial_s(f)\partial_i(f) - \alpha n\, tr(\nabla T)h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f) \\
& +2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f) + 4\alpha\partial_i(f)nT^m f S_m^i \\
& -(n+2)\gamma g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)|\mathcal{K}_e|^{2\alpha} \\
& +(\alpha(\Delta(f) + nT(f)) + (\alpha-1)f tr\, S)^2\Big)\omega du. \\
= & \int_W \Big((\alpha-1)f^2 S_l^m S_m^l + \alpha(n+1)h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \\
& -2\alpha h^{il}nT^m K_{lm}^s\partial_s(f)\partial_i(f) - \alpha n\, tr(\nabla T)h^{il}\partial_l(f)\partial_i(f) \\
& +2\alpha^2 nT(f)h^{km}\partial_k(\log|\mathcal{K}_e|)\partial_m(f) \\
& -(n+2)\gamma g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)|\mathcal{K}_e|^{2\alpha} \\
& +\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2 + 2\alpha^2\Delta(f)nT(f) + \alpha(\alpha+1)n^2T(f)^2 \\
& +2\alpha(\alpha-1)(\Delta(f) + nT(f))f\, tr\, S + (\alpha-1)^2 f^2(tr\, S)^2\Big)\omega du.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Für $H = 0$ erhalten wir in invarianter Schreibweise

$$
\begin{aligned}
V_N''(0) = & \int_W \Big((\alpha-1)f^2 tr(S\circ S) + \alpha(n+1)S(grad_h(f))(f) \\
& -2\alpha n(K_T grad_h(f))(f) - \alpha n\, tr(\nabla T)grad_h(f)(f) \\
& +2\alpha^2 nT(f)grad_h(f)(\log|\mathcal{K}_e|) \\
& -(n+2)\gamma\, grad_g(f)(f)|\mathcal{K}_e|^{2\alpha} \\
& +\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2 + 2\alpha^2\Delta(f)nT(f) + \alpha(\alpha+1)n^2T(f)^2\Big)\omega du.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Das ist die 2. Variation einer N_α–Minimalfläche in den Größen bezüglich $N = N_\alpha$. Dieses Integral ist i. a. nicht immer positiv, wie der Name Minimalfläche es andeutet. Es kann auch verschwinden, es gibt sogar Fälle, in denen verschiedene Vorzeichen auftreten je nach verwendeter Funktion f. In dem Fall ist V_N sicher kein Extremum. Wir werden $V_N''(0)$ später für Spezialfälle betrachten.

Zuerst formen wir aber für $\gamma \neq 0$ das Integral $\int_W h^{ij}S_j^m\partial_m(f)\partial_i(f)\omega du$ etwas um. Es gilt zum einen mit Lemma 2.1

$$
S(X) = q_e S_e(X) + \nabla_X grad_h(\log|q_e|) - X(\log|q_e|)grad_h(\log|q_e|),
$$

zum anderen ergibt sich für die Matrix (h_e^{ij})

$$
(h_e^{ij}) = (h_{eij})^{-1} = ((S_{em}^l)(g_{ij}))^{-1} = (g_{ij})^{-1}(S_{em}^l)^{-1}
$$

und daher $(h_e^{ij})(S_{em}^l) = (g^{ij})$. So erhalten wir, da $h^{ij} = q_e h_e^{ij}$ ist,

$$
\begin{aligned}
h^{ij}S_j^m = & \; h^{ij}q_e S_{ej}^m + h^{ij}(\partial_j(h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)) + \Gamma_{js}{}^m h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)) \\
& -h^{ij}\partial_j(\log|q_e|)h^{sm}\partial_s(\log|q_e|) \\
= & \; q_e^2 g^{im} + h^{ij}(\partial_j(h^{mk}\partial_k(\log|q_e|)) + \Gamma_{js}{}^m h^{ks}\partial_k(\log|q_e|)) \\
& -h^{ij}\partial_j(\log|q_e|)h^{sm}\partial_s(\log|q_e|).
\end{aligned}
$$

Für $\gamma \neq 0$ schreiben wir nach (2.15) statt $grad_h(\log|q_e|)$ nur $\frac{n\alpha 2}{\gamma(n+2)}T$. Integrieren wir partiell, läßt sich der mittlere Term von $\int_W h^{ij} S_j^m \partial_m(f)\partial_i(f)\omega du$ weiter verändern:

$$\begin{aligned}
&\int_W h^{ij}(\partial_j(T^m) + \Gamma_{js}{}^m T^s)\partial_i(f)\partial_m(f)\omega du \\
= &\int_W \Big(- \partial_j(h^{ij})T^m \partial_i(f)\partial_m(f) - h^{ij}T^m \partial_j\partial_i(f)\partial_m(f) \\
&-h^{ij}T^m\partial_i(f)\partial_j\partial_m(f) - h^{ij}T^m\partial_i(f)\partial_m(f)\Gamma_{js}{}^s \\
&+h^{ij}\Gamma_{js}{}^m T^s \partial_i(f)\partial_m(f)\Big)\omega du \\
= &\int_W \Big(- h^{ij}T^m\partial_j\partial_i(f)\partial_m(f) + h^{ij}T^m\partial_s(f)\partial_m(f)\overline{\Gamma}_{ji}{}^s \\
&-h^{ij}T^m\partial_i(f)\partial_j\partial_m(f) + h^{ij}\Gamma_{js}{}^m T^s\partial_i(f)\partial_m(f)\Big)\omega du \\
= &\int_W \Big(- (\Delta(f) + nT(f))T(f) \\
&+h^{ij}(\Gamma_{js}{}^m T^s \partial_m(f) - T^m\partial_j\partial_m(f))\partial_i(f)\Big)\omega du
\end{aligned}$$

Den zweiten Summanden kennen wir aus dem Beweis von Lemma 3.4:

$$\begin{aligned}
&\int_W h^{ij}(\Gamma_{js}{}^m T^s\partial_m(f) - T^m\partial_j\partial_m(f))\partial_i(f)\omega du \\
= &\int_W \Big(h^{ij}K_{js}^m T^s\partial_m(f)\partial_i(f) + \frac{1}{2}h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)tr(\nabla T)\Big)\omega du
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das für $\gamma \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\int_W h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m\omega du = \int_W g^{ij}\partial_j(f)\partial_i(f)q_e^2\omega du \\
&+\frac{n\alpha}{\gamma(n+2)}\int_W \Big(- 2(\Delta(f) + nT(f))T(f) + 2h^{ij}\partial_i(f)K_{js}^m\partial_m(f)T^s \\
&+h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)tr(\nabla T) - 2h^{ij}\partial_j(\log|q_e|)\partial_i(f)T(f)\Big)\omega du. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt bei $trS = 0$

$$0 = \Big(\sum_k S_k^k\Big)^2 = \sum_k (S_k^k)^2 + 2\sum_{k<l} S_k^k S_l^l.$$

Deshalb ist für $n = 2$

$$S_m^l S_l^m = (S_1^1)^2 + S_1^2 S_2^1 + S_2^1 S_1^2 + (S_2^2)^2 = -2S_1^1S_2^2 + 2S_1^2S_2^1 = -2Det\,S = -2\mathcal{K}.$$

Spezialfälle:

1.) $N = N_e$:
Wir setzen $\alpha = 0$, $\gamma = -\frac{1}{n+2}$ in (3.18) ein: Für euklidische Minimalfächen gilt

$$V_N''(0) = \int_W (-f^2 S_l^m S_m^l + g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f))\omega du.$$

$\nabla = \nabla_e$ ist der Levi–Cività–Zusammenhang von g. Nach partieller Integration erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} V_N''(0) &= \int_W \Big(- f^2 S_l^m S_m^l - \partial_i(g^{ij})\partial_j(f)f - g^{ij}\partial_i\partial_j(f)f - g^{ij}\partial_j(f)f\Gamma_{li}{}^l\Big)\omega du \\ &= \int_W \Big(- f^2 S_l^m S_m^l - g^{ij}\partial_i\partial_j(f)f + g^{ij}\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)f\Big)\omega du \\ &= \int_W \Big(- f S_l^m S_m^l - \Delta_g(f)\Big)f\omega du \end{aligned}$$

mit dem von g induzierten Laplace–Operator Δ_g.

Ist $n = 2$, so folgt für die 2. Variation von V_N

$$\begin{aligned} V_N''(0) &= \int_W (2f^2\mathcal{K} + ||x_*(grad_g(f))||^2)\omega du \\ &= \int_W (2f^2\mathcal{K} - \Delta_g(f)f)\omega du, \end{aligned}$$

wenn $||x_*(X)||^2 = \langle x_*(X), x_*(X)\rangle = g(X,X)$ die euklidische Norm bezeichnet.

Die Untersuchung, ob $V_N''(0)$ positiv oder negativ ist, führt zu einem Eigenwertproblem, siehe [Bl1], Paragraph 116, [Nit], Paragraph 108. Beide verweisen auf die Gesammelten Abhandlungen von H. A. Schwarz.

2.) $N = N_b$:
Wir setzen $\alpha = \frac{1}{n+2}$, $\gamma = 0$, $T = 0$ in (3.18) ein: Für Affinminimalflächen ist damit

$$V_N''(0) = \frac{n+1}{n+2}\int_W (-f^2 S_l^m S_m^l + h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m - \frac{1}{(n+2)}\Delta(f)^2)\omega du.$$

Wie in Unterabschnitt 3.2.2 erwähnt, hat Calabi bewiesen, daß für $n = 2$, h definit dieser Ausdruck ≤ 0 ist, weitere Untersuchungen gibt es etwa bei [Kra1], [Kra2]. In [VV] wird anhand der Wendelfläche gezeigt, daß die Ungleichung für indefinites h nicht immer gilt: $V_N''(0)$ hat verschiedene Vorzeichen für verschiedene f und kann kein Extremum sein. Für uneigentliche Affinsphären, d. h. Flächen mit $S = 0$, ist $V_N''(0)$ auf alle Fälle nichtpositiv.

3.) $N \neq N_b$ und $|\mathcal{K}_e| =: c \neq 0$, c konstant. Dann ist $T = 0$. Aus Lemma 1.11 folgert man, indem man $Z = 0$, $q_e = c^\alpha$ einsetzt:

$$h^{ij} = c^\alpha h_e^{ij}, S_l^m = c^\alpha S_{el}^m, \Delta(f) = c^\alpha \Delta_e(f), \omega = c^\alpha \omega_e$$

Nach (3.19) erhalten wir:

$$\int_W h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \omega du = \int_W g^{ij}\partial_j(f)\partial_i(f)q_e^2\omega du$$

Für $V_{N_e}''(0)$ ergibt sich mit (3.17), (3.19):

$$V_{N_e}''(0) = \int_W \Big(- f^2 S_{el}^m S_{em}^l + h_e^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_{ej}^m + f^2(tr\, S_e)^2\Big)\omega_e du.$$

Daher gilt, wenn wir (3.17) benutzen:

$$\begin{aligned}
V_N''(0) &= \int_W \Big((\alpha-1)f^2 S_l^m S_m^l + \alpha(n+1)h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \\
&\quad -(n+2)\gamma g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)|\mathcal{K}_e|^{2\alpha} \\
&\quad +\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2 + 2\alpha(\alpha-1)\Delta(f)f\,tr\,S + (\alpha-1)^2 f^2(tr\,S)^2\Big)\omega du \\
&= \int_W \Big((\alpha-1)f^2 S_l^m S_m^l - (\alpha-1)h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \\
&\quad +\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2 + 2\alpha(\alpha-1)\Delta(f)f\,tr\,S + (\alpha-1)^2 f^2(tr\,S)^2\Big)\omega \\
&= (\alpha-1)\int_W \Big(f^2 S_l^m S_m^l - h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m - f^2(tr\,S)^2\Big)\omega du \\
&\quad +\alpha(\alpha-1)\int_W \Big(\Delta(f)^2 + 2\Delta(f)f tr\,S + f^2(tr\,S)^2\Big)\omega du \\
&= -(\alpha-1)c^{3\alpha}V_{N_e}''(0) + \alpha(\alpha-1)\int_W (\Delta(f)+f\,tr\,S)^2\omega du
\end{aligned}$$

Damit ist - anders als bei der 1. Ableitung - $V_N''(0)$ i. a. kein konstantes Vielfaches von $V_{N_e}''(0)$. Das gilt für ein beliebiges f nur, wenn $\alpha = 0$, d. h. $N = N_e$, oder $\alpha = 1$ ist. Schon in 3.7.2 sind wir darauf eingegangen. Wenn es überhaupt möglich ist, die verschiedenen Variationen zu vergleichen, sollte man bedenken, daß für $|K_e|^\alpha = c^\alpha$ zwar die Volumina $V_N = c^\alpha V_{N_e}$ und die Normalen $N = c^\alpha N_e$ konstante Vielfache voneinander sind. Für $t \neq 0$ muß das nicht mehr erfüllt sein, $|K_{et}|$ muß also nicht konstant c sein.

4.) $N = N_{III}$: Wir setzen $\alpha = 1$ und (3.19) in (3.17) ein. Das vereinfacht die Gleichung, es gilt

$$\begin{aligned}
V_N''(0) &= \int_W \Big((n+1)h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m \\
&\quad -2h^{il}nT^m K_{lm}^s\partial_s(f)\partial_i(f) - n\,tr(\nabla T)h^{il}\partial_l(f)\partial_i(f) \\
&\quad +2nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f) \\
&\quad -(n+1)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2 \\
&\quad +2\Delta(f)nT(f) + 2n^2T(f)^2\Big)\omega du \\
&= \int_W \Big((n+1)g^{ij}\partial_j(f)\partial_i(f)q_e^2 \\
&\quad -\frac{2(n+1)}{n+1}(\Delta(f)+nT(f))nT(f) \\
&\quad +\frac{n2(n+1)}{n+1}h^{ij}\partial_j(f)K_{is}^m\partial_m(f)T^s \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{n+1}h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)tr(\nabla T) \\
&\quad -\frac{2n(n+1)}{n+1}T(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f) \\
&\quad -2h^{il}nT^m K_{lm}^s\partial_s(f)\partial_i(f) - n\,tr(\nabla T)h^{il}\partial_l(f)\partial_i(f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +2nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_e|)\partial_m(f) \\
& -(n+1)g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)q_e^2 \\
& +2\Delta(f)nT(f)+2n^2T(f)^2\Big)\omega du \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

für jede Fläche, auch wenn $tr\, S \neq 0$ ist. Bei N_{III} ist damit sowohl die 1. als auch die 2. Variation stets 0 und daher keine Aussage möglich über die Minimalität des Volumens V_{III}.

Ergebnis: Bei der 2. Variation läßt sich keine einheitliche Tendenz bzgl. der Definitheit feststellen, siehe auch [Gl], S. 195. Es treten sogar für die relativ einfachen Ausdrücke bei N_b und N_e die verschiedensten Fälle auf: Es gibt Flächen, bei denen $V_N''(0)$ nur ein Vorzeichen hat, aber auch solche, bei denen das Vorzeichen je nach Funktion f wechselt. Der Fall $V_N''(0) = 0$ tritt bei $N = N_{III}$ immer auf.

3.8 Anwendung auf die Normalen der zentroaffinen Familie

Wir untersuchen jetzt die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{q_0'}{q_0}$ bzw. $\partial_t|_{t=0}\left(\frac{q_t'}{q_t}\right)$ bei Normalen der zentroaffinen Familie. Hierbei gehen wir analog zu Abschnitt 3.7 vor. Der Unterschied besteht im wesentlichen darin, daß wir die Stützfunktion q_t bzgl. N_{bt} aus (2.18), nicht aus (2.14) erhalten.

3.8.1 Die 1. Variation der induzierten Volumina

Sei also $N = N_c^\alpha$ aus der zentroaffinen Familie. N_t ist dann die Normale N_{ct}^α aus der zentroaffinen Familie von x_t mit dem Index α. Nach (2.18) gilt

$$\frac{q_0'}{q_0} = \partial_t|_{t=0}(\log|q_t|) = \partial_t|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|^\gamma) = \gamma\partial_t|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|) = \gamma\frac{\tilde{\mathcal{K}}_{c0}'}{\tilde{\mathcal{K}}_c}.$$

$\tilde{\mathcal{K}}_{ct}$ ist aber auszudrücken durch

$$\tilde{\mathcal{K}}_{ct} = \frac{Det(det(x_{t1},\ldots,x_{tn},x_{tij}))}{det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{ct})^{n+2}} = \frac{Det\, d_t}{det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{ct})^{n+2}}.$$

Dabei ist

$$N_{ct} = o - x_t = o-(x+tfN) = o-x-tfN = N_c - tfN.$$

Anders als in 3.5 ist N_{ct} i. a. nicht ein Vielfaches von N. Es folgt also:

$$\partial_t|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|) = \partial_t|_{t=0}(\log|Det\, d_t|) - (n+2)\partial_t|_{t=0}(\log|det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_c - tfN)|)$$

Wir kürzen $det(x_1,\ldots,x_n,N_c)$ durch ω_c ab. Es gilt

$$\omega = det(x_1,\ldots,x_n,N) = det(x_1,\ldots,x_n,q_cN_c) = q_c\omega_c.$$

Dabei bezeichne $q_c = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha$. Aus Definition 2.6 erhalten wir:

$$N = q_c N_c - x_*(grad_h(\log|q_c|))$$

Zur Berechnung von $\partial_t|_0(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|)$ bestimmen wir zuerst schrittweise den Summanden $\partial_t|_{t=0}(\log|det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{ct})|)$:

$$\begin{aligned}
& \partial_t|_{t=0}(det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_c)) \\
= & \sum_k det(x_1,\ldots,x'_{0k},\ldots,x_n,N_c) \\
= & \sum_k det(x_1,\ldots,\partial_k(f)N - fS^l_k x_l,\ldots,x_n,N_c) \\
= & -\partial_k(f)h^{kl}\partial_l(\log|q_c|)\omega_c - S^k_k f\omega_c \\
= & -grad_h(\log|q_c|)(f)\omega_c - f tr\, S\omega_c \\
& \partial_t|_{t=0}(tf\,det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N)) \\
= & f\,det(x_1,\ldots,x_n,N) + 0 = fq_c\omega_c \\
& \partial_t|_{t=0}(\log|det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{ct})|) \\
= & \partial_t|_{t=0}(det(x_{t1},\ldots,x_{tn},N_{ct}))\frac{1}{\omega_c} \\
= & -grad_h(\log|q_c|)(f) - f tr\, S - fq_c
\end{aligned}$$

Den anderen Summanden erhält man aus Lemma 3.5. Zusammen gilt damit

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{K}}'_{c0}}{\tilde{\mathcal{K}}_c} &= \Delta(f) - nT(f) - (n+1)f tr\, S - (n+2)(-grad_h(\log|q_c|)(f) - f tr\, S - fq_c) \\
&= \Delta(f) - nT(f) + f tr\, S + (n+2)grad_h(\log|q_c|)(f) + (n+2)q_c f.
\end{aligned}$$

Für $\gamma \neq 0$ kann man dies mit (2.19) so darstellen:

$$\frac{q'_0}{q_0} = \gamma\frac{\tilde{\mathcal{K}}'_{c0}}{\tilde{\mathcal{K}}_c} = \gamma(\Delta(f) - nT(f) + f tr\, S) + \gamma(n+2)q_c f + 2\alpha nT(f)$$

Mit den gleichen Überlegungen wie bei (3.14) gilt diese Gleichung auch für $\gamma = 0$: Ist $\gamma = 0$, das ist genau für $N = N_b$ der Fall, fällt einerseits der Ausdruck auf der rechten Seite weg, denn $T = T_b = 0$, andererseits ist $q'_0 = 0$. Obiger Ausdruck ist (3.14) ähnlich, nur der Summand $\gamma(n+2)q_c f$, der i. a. nicht verschwindet, ist jetzt dabei.
Wenn man den Ausdruck für $\frac{q'_0}{q_0}$ in (3.8) einsetzt, d. h.

$$\begin{aligned}
\omega'_0 &= \gamma(\Delta(f) - nT(f) + f tr\, S)\omega + 2\alpha nT(f)\omega + \gamma(n+2)fq_c\omega \\
&\quad + \frac{1}{n+2}(-(n+1)f tr\, S + \Delta(f) - nT(f))\omega \\
&= \alpha(\Delta(f) + nT(f))\omega + (\alpha-1)f\, tr\, S\omega + \gamma(n+2)q_c f\omega,
\end{aligned}$$

und integriert, erhält man nach Anwendung des Lemmas 3.3

$$\begin{aligned}
V'_N(0) &= \int_W \omega'_0 du = \int_W \Big((\alpha-1)f\, tr\, S + \gamma(n+2)q_c f\Big)\omega du \\
&= \int_W f\Big((\alpha-1)nH + \gamma(n+2)q_c\Big)\omega du \\
&= \int_W f\Big((\alpha-1)nH + \gamma(n+2)|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha\Big)\omega du.
\end{aligned}$$

Wir nennen

$$n\hat{H} := (\alpha - 1)nH + \gamma(n+2)|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha.$$

$V_N'(0)$ ist genau dann 0, wenn $\hat{H}$ verschwindet. Wir definieren analog zu Definition 3.7:

Definition 3.8 *Eine Fläche mit* $\hat{H} = \hat{H}_\alpha = 0$ *nennen wir* N_c^α–**Minimalfläche** *oder* N_c^α–**minimal**.

Wir können nun auch die 1. Variation der anderen Volumina berechnen. Setzt man nämlich $\frac{q_0'}{q_0}$ in (3.9) und in (3.10) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega_{h0}' &= \frac{-n\alpha+1}{2}\Delta(f)\omega_h - \frac{n\alpha+1}{2}nT(f)\omega_h - \frac{n\alpha+1}{2}f\,tr\,S\omega_h - \frac{n}{2}\gamma(n+2)fq_c\omega_h, \\
\bar{\omega}_0' &= (-(n+1)\alpha+1)(\Delta(f) - nT(f))\bar{\omega} - (n+1)2\alpha nT(f)\bar{\omega} - (n+1)\alpha f\,tr\,S\bar{\omega} \\
&\quad -(n+1)\gamma(n+2)fq_c\bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Integriert man das, so folgt

$$\begin{aligned}
V_h'(0) = \int_W \omega_{h0}' du &= \int_W (-\frac{n\alpha+1}{2}(nT(f) + f tr\,S) - \frac{n}{2}\gamma(n+2)fq_c)\omega_h du \\
&= \int_W (\frac{n\alpha+1}{2}(tr(\hat{\nabla}T) - H)nf - \frac{n}{2}\gamma(n+2)fq_c)\omega_h du, \\
V_\eta'(0) = \int_W \bar{\omega}_0' du &= \int_W (-\alpha(n+1)(2nT(f) + f\,tr\,S) - (n+1)\gamma(n+2)fq_c)\bar{\omega} du \\
&= \int_W (-\alpha(n+1)(H - 2tr(\overline{\nabla}T))nf - (n+1)\gamma(n+2)fq_c)\bar{\omega} du.
\end{aligned}$$

Die 1. Variation von V_h und von V_η verschwindet damit genau dann, wenn der jeweilige Integrand verschwindet. Die Integranden sind den an der gleichen Stelle in Abschnitt 3.7.1 auftretenden Ausdrücken ähnlich, der Unterschied besteht nur in dem Summanden mit q_c, der nicht verschwindet.

3.8.2 Mittlere Krümmung und $\hat{H}$

Wir drücken $\hat{H}$ in zentroaffinen Größen aus und betrachten Gleichzeitigkeitsprobleme.

Sehen wir von dem Fall $N = N_b$, d. h. $\gamma = 0$, ab. Dann haben wir eine andere Situation als bei N_e und N_b. Ist die Mittlere Krümmung H gleich 0, verschwindet die 1. Variation von V_N nicht, außer im Fall $N = N_b$, es ist sogar so, daß das Verschwinden von H anzeigt, daß es sich nicht um eine Minimalfläche handeln kann. In diesem Fall ist

$$V_N'(0) = \int_W f\gamma(n+2)|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha \omega du$$

und verschwindet nicht für beliebige f.
Nur wenn $\hat{H} \equiv 0$ ist, verschwindet die 1. Variation.

H ist die Mittlere Krümmung zur Normalen $N = N_c^\alpha$ aus der zentroaffinen Familie. Wir können analog zu Abschnitt 3.7.2 H mit zentroaffinen Größen ausdrücken. Mit (1.5), (2.17) ist

$$\begin{aligned}
\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= tr(\hat{\nabla}_c\, grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)) = -2n\, tr(\hat{\nabla}_c T_c) \\
n\hat{T}_c(grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)) &= n\, T_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) \\
&= -\frac{1}{2} grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = -2n^2\, h_c(T_c, T_c)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1 und Definition 2.6 ergibt sich analog zu den Rechnungen bei (3.15) mit $H_c = 1$

$$\begin{aligned}
nH &= |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha(n - 2\alpha n\, tr(\hat{\nabla}_c T_c) + 2\alpha(2\alpha-1)n^2 h_c(T_c, T_c)) \\
&= |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha(n + \alpha\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}\alpha(2\alpha-1) grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|))
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
n\hat{H} &= |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha(n+1)(2\alpha-1) \\
&\quad -2\alpha(\alpha-1)|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha\left(n\, tr(\hat{\nabla}_c T_c) - (2\alpha-1)n^2 h_c(T_c, T_c)\right) \\
&= |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha(n+1)(2\alpha-1) \\
&\quad +\alpha(\alpha-1)|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha\left(\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}(2\alpha-1) grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Man erkennt gleich, daß für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ $\hat{H}$ stets von 0 verschieden ist. Genauer: Für $\alpha = 0$ ist $n\hat{H} = -(n+1)$, für $\alpha = 1$ ist $n\hat{H} = |\tilde{\mathcal{K}}_c|(n+1)$. In beiden Fällen kann es keine Minimalflächen von V_N geben. Das haben wir auch schon in 3.5.1 gesehen. Das von $N_c = N_c^0$ induzierte Volumen und das von der zentroaffinen Konormalen induzierte Volumen, das ist das von $N_c^1 = (N_c)_\eta$ induzierte Volumen, können keine Extrema sein.

Jetzt untersuchen wir, ob zwischen $\hat{H} = \hat{H}_h$ bzgl. N_h und dem Integranden von $V_h'(0)$ auch ein Zusammenhang besteht, ähnlich wie zwischen der Mittleren Krümmung von N_h und dem Integranden von $V_h'(0)$ bei Normalen der Manhartschen Familie in 3.7.2. Wie in 3.7.2 werden wir sehen, daß sie Vielfache voneinander sind.
Genauso wie in 3.7.2 werden wir aber nicht vorgehen. Dort haben wir allgemein für eine beliebige Relativnormale H_h berechnet. $\hat{H}$ aber können wir nicht für beliebige Normalen mit Hilfe von Lemma 2.1 darstellen, wenigstens nicht in der Form, in der wir oben $\hat{H}$ definiert haben, weil diese Definition vom Index α der Normalen innerhalb der zentroaffinen Familie abhängt.
Aus diesem Grund stellen wir $\hat{H}_h$ und den Integranden beide durch die zentroaffinen Größen dar und vergleichen dies.
Zu dem Zweck drücken wir zunächst T und $tr(\hat{\nabla}T)$ mit zentroaffinen Größen aus: Nach (2.17) und Lemma 2.1 ist[8]

$$\begin{aligned}
T &= -(n+2)\gamma q_c T_c, \\
tr(\hat{\nabla}T) &= q_c \frac{n+2}{2n}\gamma\Big(\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) \\
&\quad -\frac{n-2}{2}\alpha\, grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\Big).
\end{aligned}$$

[8]Für T erhält man hier ein Vielfaches von T_c. Analog ist bei Normalen der Manhartschen Familie T ein Vielfaches von T_e.

Damit kann man den Integranden der 1. Variation von V_h so ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& \frac{n\alpha+1}{2}(tr(\hat{\nabla}T) - H) - \gamma\frac{n+2}{2}q_c \\
= \quad & |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha\Big(-(n+1)\alpha + \frac{n\alpha+1}{2n}\frac{n\alpha-1}{2}\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) \\
& -\alpha\frac{n\alpha+1}{4}\frac{n\alpha-1}{2}grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\Big)
\end{aligned}$$

Dies ist - bis auf einen Faktor, der nicht verschwindet - gerade $\hat{H}_h = \hat{H}_{\frac{-n\alpha+1}{2}}$, also $\hat{H}$ für die Normale $(N_c^\alpha)_h = N_c^{\frac{-n\alpha+1}{2}}$ aus der zentroaffinen Familie. Der Ausdruck entsteht, wenn man in (3.20) statt α nun $\frac{-n\alpha+1}{2}$ einsetzt. Die 1. Variation von V_h verschwindet also wie gewünscht dann und nur dann, wenn $\hat{H}_h$ verschwindet.
Man erkennt auch, daß dieser Ausdruck für $\alpha = -\frac{1}{n}$ und $\alpha = \frac{1}{n}$ nicht verschwindet. Diese Ausnahmen leiten sich von den Ausnahmen bei der 1. Variation von V_N her: Dort verschwindet $\hat{H}$ nicht für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ und es ist $(N_c^{-\frac{1}{n}})_h = N_c^1$ und $(N_c^{\frac{1}{n}})_h = N_c^0$.
Analog gilt für den Integranden der 1. Variation von V_η:

$$\begin{aligned}
& \alpha(H - 2tr(\hat{\nabla}T) + 2nh(T,T)) + \gamma\frac{n+2}{n}q_c \\
= \quad & |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha\Big(\frac{2(n+1)\alpha-1}{n} - \alpha\frac{(n+1)\alpha-1}{n}\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) \\
& +\alpha\frac{(2(n+1)\alpha-1)((n+1)\alpha-1)}{2n}grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\Big)
\end{aligned}$$

Das ist bis auf einen Faktor genau $\hat{H}_\eta$, also $\hat{H}$ für die Normale $(N_c^\alpha)_\eta = N_c^{-(n+1)\alpha+1}$. Dies ergibt sich, wenn man in (3.20) $-(n+1)\alpha+1$ einsetzt.
Ist $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{1}{n+1}$ verschwindet die 1. Variation von V_η nicht. Es gilt:

$$(N_c^0)_\eta = N_c^1,\ (N_c^{\frac{1}{n+1}})_\eta = N_c^0$$

Wie wir gesehen haben, gibt es - im Gegensatz zur Manhartschen Familie - einige Indizes α, für die die 1. Variation von V_N nicht verschwindet. Es ist daher nutzlos, Flächen zu suchen, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ N_c^α–Minimalflächen sind. Aber wir können Bedingungen dafür angeben, daß eine Fläche sowohl N_c^α– als auch N_c^β–Minimalfläche ist für zwei unterschiedliche Zahlen $\alpha, \beta \notin \{0,1\}$. Eine solche Fläche erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(n+1)(2\alpha-1) + \alpha(\alpha-1)\left(\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}(2\alpha-1)grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\right) &= 0, \\
(n+1)(2\beta-1) + \beta(\beta-1)\left(\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}(2\beta-1)grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Das kann man umformen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}(2\alpha-1)grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= -\frac{(n+1)(2\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)} \\
\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) + \frac{1}{2}(2\beta-1)grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= -\frac{(n+1)(2\beta-1)}{\beta(\beta-1)}
\end{aligned}$$

Dieses System linearer Gleichungen ist eindeutig lösbar, wenn α, β unterschiedlich und weder 0 noch 1 sind:

$$\begin{aligned} grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= 4n^2\, h_c(T_c, T_c) = (n+1)\left(\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ \Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= -2n\, tr(\hat{\nabla}_c T_c) = (n+1)\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)(1-\alpha-\beta)}{2\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)} \end{aligned}$$

Beispiel: Für $n = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{n+2}$ muß (vergleiche [Liu])

$$\begin{aligned} grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= 32 \\ \Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Die Wendelfläche ist also eine zentroaffine Minimalfläche und Affinminimalfläche. Das erhält man aus der Bemerkung in 2.4.1.

Betrachten wir nun noch ein paar Spezialfälle und vergleichen sie mit den Ergebnissen aus 3.5 und 3.7.

1.) $N = N_b$, d. h. $\alpha = \frac{1}{n+2}$: Hier ist $\gamma = 0$ und $T = 0$. Es ist

$$V_N'(0) = V_h'(0) = V_\eta'(0) = -\frac{n+1}{n+2}\int_W fnH\omega du.$$

Dies ist gerade das, was wir auch in 3.7 bekommen haben. Die 1. Variation verschwindet genau bei $H \equiv 0$.

2.) $N = N_c$, $\alpha = 0$: Der Shape–Operator ist die Identität und damit $tr\, S = n$. Es folgt mit $\gamma = \frac{-1}{n+2}$, $q_c = 1$, vergleiche 3.5,

$$\begin{aligned} V_N'(0) &= \int_W f(-n-1)\omega du = -(n+1)\int_W f\omega du, \\ V_h'(0) &= \int_W (\frac{1}{2}(tr(\hat{\nabla}T) - 1)fn - \frac{n}{2}(-1)f)\omega_h du = \int_W \frac{n}{2} tr(\hat{\nabla}T) f\omega_h du, \\ V_\eta'(0) &= \int_W (0 + (n+1)f)\bar{\omega} du. \end{aligned}$$

3.) Sei $N = N_c^\alpha \neq N_b$, $|\tilde{\mathcal{K}}_c| = c$, c konstant, d. h. $T = 0$. $n\hat{H}$ ist für jedes α konstant, und zwar gilt nach (3.20)

$$n\hat{H} = c^\alpha(n+1)(2\alpha - 1).$$

Es folgt deshalb: Nur für $\alpha = \frac{1}{2}$ verschwindet $V_N'(0)$, für die anderen α ist $n\hat{H}$ ungleich 0, d. h. die 1. Variation verschwindet nicht für beliebige f. So eine Fläche ist $N_c^{\frac{1}{2}}$–minimal, aber für die restlichen α nicht N_c^α–minimal. Außerdem ist - analog zu der Bemerkung aus 3.7.2 - die 1. Variation $V_N'(0)$ ein konstantes Vielfaches von $V_{N_c}'(0)$, nicht jedoch von $V'_{N_c^{\frac{1}{2}}}(0)$.

Ergebnis: Die Mittlere Krümmung hat bei den Normalen der zentroaffinen Familie nicht mehr die Bedeutung wie bei der Manhartschen Familie, sie zeigt i. a. nicht Minimalflächen an, diese Aufgabe übernimmt $\hat{H}$. Es gibt - ähnlich wie $N_1 = N_{III}$ bei der Manhartschen Familie - zwei Ausnahmefälle von Normalen: N_c^0 und N_c^1. Während die 1. Variation von $V_{N_{III}}$ für jede Fläche verschwindet, ist die 1. Variation von $V_{N_c^0}$ und $V_{N_c^1}$ stets ungleich 0 (außer für ganz bestimmte f).

3.8.3 Die 2. Variation

In Analogie zu Abschnitt 3.7.3 können wir auch die 2. Variation von V_N berechnen, zusätzlich bestimmen wir noch den Integranden der 2. Variation von V_h.

Für eine Normale $N = N_c^\alpha$ der zentroaffinen Familie kann man $\partial_t|_{t=0}(\frac{q_t'}{q_t})$ ausrechnen:

$$\partial_t|_{t=0}(\frac{q_t'}{q_t}) = \partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|) = \gamma\partial_t^2|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|) = \gamma\partial_t|_{t=0}(\frac{\tilde{\mathcal{K}}_{ct}'}{\tilde{\mathcal{K}}_{ct}})$$

Dabei gilt:

$$\partial_t^2|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|) = \partial_t^2|_{t=0}(\log|Det\, d_t|) - (n+2)\partial_t^2|_{t=0}(\log\,|det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct})|)$$

Von $\partial_t^2|_0(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|)$ rechnen wir den zweiten Summanden aus. Dazu verwenden wir $N = q_cN_c - x_*(grad_h(\log|q_c|))$ und $x_{0i}'' = 0$:

$$\begin{aligned}
& \partial_t^2|_{t=0}(det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_c)) \\
= & \sum_{i\neq j} det(x_1,\dots,x_{0i}',\dots,x_{0j}',\dots,x_n,N_c) \\
= & \sum_{i\neq j} det(x_1,\dots,\partial_i(f)N - fS_i^lx_l,\dots,\partial_j(f)N - fS_j^sx_s,\dots,x_n,N_c) \\
= & \sum_{i\neq j} \partial_i(f)det(x_1,\dots,-h^{ls}\partial_l(\log|q_c|)x_s,\dots,-fS_j^lx_l,\dots,x_n,N_c) \\
& + \sum_{i\neq j} \partial_j(f)det(x_1,\dots,-fS_i^lx_l,\dots,-h^{ls}\partial_l(\log|q_c|)x_s,\dots,x_n,N_c) \\
& + \sum_{i\neq j} f^2S_i^lS_j^s det(x_1,\dots,x_l,\dots,x_s,\dots,x_n,N_c) \\
= & \partial_i(f)f(h^{li}\partial_l(\log|q_c|)S_j^j - h^{lj}\partial_l(\log|q_c|)S_j^i)\omega_c \\
& +\partial_j(f)f(S_i^ih^{lj}\partial_l(\log|q_c|) - S_i^jh^{li}\partial_l(\log|q_c|))\omega_c \\
& +f^2(S_i^iS_j^j - S_i^jS_j^i)\omega_c \\
= & 2ftr\, Sgrad_h(f)(\log|q_c|)\omega_c - 2fS_i^jh^{li}\partial_l(\log|q_c|)\partial_j(f)\omega_c \\
& +f^2((tr\,S)^2 - S_i^jS_j^i)\omega_c \\
& \partial_t^2|_{t=0}(tf\,det(x_{t1},\dots,x_{tn},N)) \\
= & 2f\partial_t|_{t=0}(det(x_{t1},\dots,x_{tn},N)) \\
= & 2f\sum_i det(x_1,\dots,x_{0i}',\dots,x_n,N) \\
= & 2f\sum_i det(x_1,\dots,\partial_i(f)N - fS_i^lx_l,\dots,x_n,N) \\
= & -2f^2S_i^i\omega = -2f^2tr\,Sq_c\omega_c \\
& \partial_t^2|_{t=0}(\log\,|det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct})|) \\
= & \partial_t|_{t=0}(\frac{\partial_t(det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct}))}{det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct})}) \\
= & \frac{\partial_t^2|_{t=0}(det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct}))}{\omega_c} - \frac{\partial_t|_{t=0}(det(x_{t1},\dots,x_{tn},N_{ct}))^2}{\omega_c^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2f tr\, S grad_h(\log|q_c|)(f) - 2fh^{lj}\partial_l(\log|q_c|)S^i_j\partial_i(f)\\
&\quad + f^2((tr\, S)^2 - S^j_i S^i_j) + 2f^2 tr\, S q_c\\
&\quad -(grad_h(\log|q_c|)(f) + f tr\, S + f q_c)^2\\
&= -2fh^{lj}\partial_l(\log|q_c|)S^i_j\partial_i(f) - f^2 S^i_j S^j_i\\
&\quad - grad_h(\log|q_c|)(f)^2 - 2f q_c grad_h(\log|q_c|)(f) - f^2 q_c^2
\end{aligned}
$$

Der andere Summand ergibt sich aus Lemma 3.5 und wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|) = -(n+1)f^2 S^m_l S^l_m\\
&+2h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f) - fS^m_l{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j + f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f))\\
&-h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f))\\
&-(n+2)\Big(-2fh^{lj}\partial_l(\log|q_c|)S^i_j\partial_i(f) - f^2 S^i_j S^j_i\\
&-grad_h(\log|q_c|)(f)^2 - 2fq_c grad_h(\log|q_c|)(f) - f^2 q_c^2\Big)
\end{aligned}
$$

Für $\partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|)$ bedeutet das

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|) = \gamma\partial_t^2|_{t=0}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_{ct}|)\\
=\ &\gamma f^2 S^m_l S^l_m\\
&+2\gamma h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f) - fS^m_l{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j + f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f))\\
&-\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f))\\
&+2\gamma(n+2)fh^{lj}\partial_l(\log|q_c|)S^i_j\partial_i(f)\\
&+\gamma(n+2)grad_h(\log|q_c|)(f)^2\\
&+2\gamma(n+2)fq_c grad_h(\log|q_c|)(f) + \gamma(n+2)f^2q_c^2.
\end{aligned}
$$

Ersetzen wir mit (2.19) für $\gamma \neq 0$ einige Terme der Form $h^{lj}\partial_j(\log|q_c|)$ durch $\frac{\alpha 2}{\gamma(n+2)}nT^l$, so ist

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2|_{t=0}(\log|q_t|)\\
=\ &\gamma f^2 S^m_l S^l_m\\
&+2\gamma h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f) - fS^m_l{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j + f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f))\\
&-\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f))\\
&+4\alpha\partial_i(f)nT^m fS^i_m + 2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_c|)\partial_m(f)\\
&+4\alpha fq_c nT(f) + \gamma(n+2)f^2q_c^2.
\end{aligned}
$$

Wie bei (3.14) gilt dies auch für $\gamma = 0$. Denn dann wird der Ausdruck rechts 0, da $T = T_b = 0$ ist. q_0'' und q_0' sind auch 0. Damit haben wir den Term vollständig berechnet. Setzen wir ein in (3.11), erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{\omega_0''}{\omega}\\
=\ &\gamma f^2 S^m_l S^l_m\\
&+2\gamma h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f) - fS^m_l{\Gamma_{ij}}^l\partial_m(f) + 2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j + f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f))\\
&-\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f) - {\Gamma_{lm}}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_c|)\partial_m(f)+4\alpha\partial_i(f)nT^m fS^i_m \\
& +4\alpha f q_c nT(f)+\gamma(n+2)f^2q_c^2 \\
& +\Big(\alpha(\Delta(f)+nT(f))+(\alpha-1)f\,tr\,S+\gamma(n+2)fq_c\Big)^2 \\
& -\frac{n+1}{n+2}f^2S^m_lS^l_m \\
& +\frac{2}{n+2}h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f)-fS^m_l\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)+2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j+f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f)) \\
& -\frac{1}{n+2}h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f)-\Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f)-\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
= \;& (\alpha-1)f^2S^m_lS^l_m \\
& +2\alpha h^{ij}(fS^m_i\partial_j\partial_m(f)-fS^m_l\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)+2\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j+f\partial_j(S^m_i)\partial_m(f)) \\
& -\alpha h^{il}h^{jm}(\partial_l\partial_m(f)-\Gamma_{lm}{}^k\partial_k(f))(\partial_i\partial_j(f)-\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f)) \\
& +2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_c|)\partial_m(f)+4\alpha\partial_i(f)nT^m fS^i_m \\
& +4\alpha f q_c nT(f)+\gamma(n+2)f^2q_c^2 \\
& +\Big(\alpha(\Delta(f)+nT(f))+(\alpha-1)f\,tr\,S+(n+2)\gamma fq_c\Big)^2
\end{aligned}
$$

Das muß man integrieren. Mit (3.16) gilt:

$$
\begin{aligned}
V_N''(0) &= \int_W \omega_0''du \\
&= \int_W \Big((\alpha-1)f^2S^m_lS^l_m+2\alpha h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j-4\alpha fnT^kS^m_k\partial_m(f) \\
&\quad -\alpha(\Delta(f)-nT(f))(\Delta(f)+nT(f)) \\
&\quad +\alpha(n-1)h^{ij}S^k_i\partial_j(f)\partial_k(f) \\
&\quad -2\alpha h^{il}nT^mK^s_{lm}\partial_s(f)\partial_i(f)-\alpha n\,tr(\nabla T)h^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f) \\
&\quad +2\alpha nT(f)h^{km}\partial_k(\log|q_c|)\partial_m(f)+4\alpha fnT^m\partial_i(f)S^i_m \\
&\quad +4\alpha fq_cnT(f)+\gamma(n+2)f^2q_c^2 \\
&\quad +(\alpha(\Delta(f)+nT(f))+(\alpha-1)f tr\,S+\gamma(n+2)fq_c)^2\Big)\omega du \\
&= \int_W \Big((\alpha-1)f^2S^m_lS^l_m+\alpha(n+1)h^{ij}\partial_m(f)\partial_i(f)S^m_j \\
&\quad -2\alpha h^{il}nT^mK^s_{lm}\partial_s(f)\partial_i(f)-\alpha n\,tr(\nabla T)h^{il}\partial_l(f)\partial_i(f) \\
&\quad +2\alpha^2nT(f)h^{km}\partial_k(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\partial_m(f) \\
&\quad +4\alpha fq_cnT(f)+\gamma(n+2)f^2q_c^2 \\
&\quad +\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2+2\alpha^2\Delta(f)nT(f)+\alpha(\alpha+1)n^2T(f)^2 \\
&\quad +2\alpha(\Delta(f)+nT(f))((\alpha-1)f\,tr\,S+(n+2)\gamma fq_c) \\
&\quad +((\alpha-1)f\,tr\,S+\gamma(n+2)fq_c)^2\Big)\omega du
\end{aligned}
$$

Für $\hat{H}=0$ erhalten wir in invarianter Schreibweise

$$
\begin{aligned}
V_N''(0) &= \int_W \Big((\alpha-1)f^2tr(S\circ S)+\alpha(n+1)S(grad_h(f))(f) \\
&\quad -2\alpha n(K_Tgrad_h(f))(f)-\alpha n\,tr(\nabla T)grad_h(f)(f)
\end{aligned}
$$

$$+2\alpha^2 nT(f)grad_h(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(f)$$
$$+4\alpha nf|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha T(f)+\gamma(n+2)f^2|\tilde{\mathcal{K}}_c|^{2\alpha}$$
$$+\alpha(\alpha-1)\Delta(f)^2+2\alpha^2\Delta(f)nT(f)+\alpha(\alpha+1)n^2T(f)^2\Big)\omega du$$

Das ist die 2. Variation in den Größen bezüglich $N=N_c^\alpha$.
Wir untersuchen nun wieder bestimmte Normalen:

Spezialfälle:

1.) $N=N_b$: Setzt man $\alpha=\frac{1}{n+2}$, $\gamma=0$, $T=0$ in $V_N''(0)$ ein, so erhält man den Ausdruck aus 3.7.3, also für $H=\hat{H}=0$:

$$V_{N_b}''(0)=-\frac{n+1}{n+2}\int_W\Big(f^2tr(S\circ S)-S(grad_h(f))(f)+\frac{1}{n+2}\Delta(f)^2\Big)\omega du$$

Auch für $H\neq 0$ ist es derselbe Ausdruck für $V_{N_b}''(0)$ wie in 3.7.3.

2.) Für $N=N_c$, $\alpha=0$, hat man keinen Nutzen (zumindest für Extrema) von der 2. Variation des Volumens V_N, da ja die 1. Variation nicht verschwindet. Die 2. Variation des von h_c induzierten Volumens erhalten wir, indem wir $\alpha=\frac{1}{2}$ einsetzen. Dies können wir aber nicht mit dem Ergebnis aus 3.5.2 vergleichen, weil dieser Ausdruck in 3.5.2 die Größen bezüglich N_c, der hier die bezüglich $N_c^{\frac{1}{2}}$ verwendet. Darum rechnen wir nun die 2. Variation des von der quadratischen Grundform induzierten Volumens aus. Nach (3.12) ist

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{h0}''}{\omega_h} &= -\frac{n}{2}\gamma f^2S_l^mS_m^l\\
&\quad-\frac{n}{2}\gamma 2h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f)-fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)+2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m+f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))\\
&\quad+\frac{n}{2}\gamma h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f)-\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f)-\Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f))\\
&\quad-\frac{n}{2}4\alpha fnT^jS_j^i\partial_i(f)-\frac{n}{2}2\alpha nT(f)grad_h(f)(\log|q_c|)\\
&\quad-\frac{n}{2}4\alpha fq_cnT(f)-\frac{n}{2}\gamma(n+2)f^2q_c^2\\
&\quad+\Big(\frac{-n\alpha-1}{2}ftr\,S+\frac{-n\alpha+1}{2}\Delta(f)+\frac{-n\alpha-1}{2}nT(f)-\frac{n}{2}\gamma(n+2)fq_c\Big)^2\\
&\quad-\frac{n+1}{n+2}f^2S_l^mS_m^l\\
&\quad+\frac{2}{n+2}h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f)-fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)+2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m+f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))\\
&\quad-\frac{1}{n+2}h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f)-\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f)-\Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f))\\
&= \frac{-n\alpha-1}{2}f^2S_l^mS_m^l\\
&\quad+(1-n\alpha)h^{ij}(fS_i^m\partial_j\partial_m(f)-fS_l^m\Gamma_{ij}{}^l\partial_m(f)+2\partial_m(f)\partial_i(f)S_j^m+f\partial_j(S_i^m)\partial_m(f))\\
&\quad+\frac{n\alpha-1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f)-\Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f)-\Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f))\\
&\quad-2n^2\alpha fT^jS_j^i\partial_i(f)-n^2\alpha T(f)grad_h(f)(\log|q_c|)
\end{aligned}$$

$$-2n^2\alpha f q_c T(f)) - \frac{n}{2}\gamma(n+2)f^2 q_c^2$$
$$+\Big(\frac{-n\alpha-1}{2} f tr\, S + \frac{-n\alpha+1}{2}\Delta(f) + \frac{-n\alpha-1}{2} nT(f) - \frac{n}{2}\gamma(n+2)f q_c\Big)^2$$

Setzen wir nun $\alpha = 0$, $S_l^k = \delta_l^k$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega''_{h0}}{\omega_h} &= -\frac{n}{2}f^2 + h^{ij}(\partial_i\partial_j(f)f - \Gamma_{ij}{}^m\partial_m(f)f + 2\partial_i(f)\partial_j(f)) \\
&\quad -\frac{1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f)) \\
&\quad +\frac{n}{2}f^2 + (-\frac{n}{2}f + \frac{1}{2}\Delta(f) - \frac{n}{2}T(f) + \frac{n}{2}f)^2 \\
&= -\frac{1}{2}h^{il}h^{jm}(\partial_i\partial_j(f) - \Gamma_{ij}{}^k\partial_k(f))(\partial_l\partial_m(f) - \Gamma_{lm}{}^s\partial_s(f)) \\
&\quad +(\Delta(f) - nT(f))f + 2grad_h(f)(f) \\
&\quad \frac{1}{4}(\Delta(f) - nT(f))^2
\end{aligned}$$

Das ist der Integrand von $V_h''(0)$, den man auch in 3.5.2 erhalten hat.

Zusammenfassung: Die Ergebnisse aus 3.5 für N_c und für N_b aus 3.7 erhält man hier als Spezialfälle.
Auch hier kann man über die Definitheit der 2. Variation nichts Einheitliches sagen: Schon bei den einfachsten Volumenarten der zentroaffinen Familie ($V = V_{N_b}$, $V = V_{h_c}$) gibt es Flächen, bei denen die 2. Variation ein Vorzeichen hat (siehe 3.7.3 oder [Cal1] bzw. 3.5.2 oder [Wang]), aber auch solche mit wechselndem Vorzeichen (siehe 3.7.3 oder [VV] bzw. 3.5.2 oder [Wang]).