Kapitel 4

Deformationen von zweidimensionalen Affinminimalflächen

Dieses Kapitel weicht in gewisser Weise vom bisherigen, sehr allgemein gehaltenen Rahmen ab: Bis jetzt haben wir beliebige Relativnormalen für n-dimensionale Hyperflächen betrachtet. Hier wollen wir uns aber auf die Dimension $n = 2$ und die Blaschkesche Affinnormale beschränken. Wir untersuchen also nur Blaschke–Immersionen und dort speziell Affinminimalflächen.

Nach Abschnitt 4.1, in dem wir einige besondere Eigenschaften von 2–dimensionalen Hyperflächen behandeln, zeigen wir in Abschnitt 4.2, wie man Affinminimalflächen durch ganz bestimmte, als Konormalen geeignete Abbildungen darstellen kann, vergleichbar mit der Weierstraßschen Darstellung von euklidischen Minimalflächen. Dazu benutzen wir die Formeln von Lelieuvre und die Eigenschaft $\Delta\eta = 0$ der Konormalen einer Affinminimalfläche. Dies führt u. a. zum Begriff der Konjugierten einer Affinminimalfläche, die wir in Abschnitt 4.3 besprechen werden. Der Hauptteil des Kapitels folgt dann in Abschnitt 4.4: Wir geben eine Methode an, wie man aus einer gegebenen Affinminimalfläche durch Änderung ihrer Konormalen andere Affinminimalflächen gewinnt, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Wir werden hierzu die Begriffe Konjugierte (siehe Abschnitt 4.3) und Assoziierte bei euklidischen Minimalflächen, vergleiche [Pab2], auf Affinminimalflächen übertragen und die affinen Bäcklund–Transformationen aus [Buy], [Ant] und [NoS] verallgemeinern. Schließlich stellen wir Flächengrößen der deformierten Affinminimalflächen durch entsprechende Größen der ursprünglichen Fläche dar (Abschnitt 4.5) und geben einige Beispiele an (Abschnitt 4.6).
Elliptische und hyperbolische Flächen wollen wir, soweit es möglich ist, gemeinsam behandeln.

4.1 Besonderheiten im zweidimensionalen Fall

Wir werden in diesem Abschnitt Satz 1.13 bzw. dessen Korollar für den 2–dimensionalen Fall umformulieren, die isotherme Parametrisierung für h einführen und ihre Auswirkung auf den Levi–Cività–Zusammenhang beschreiben.

4.1.1 Die Integrabilitätsbedingungen für die Formeln von Lelieuvre

Das Korollar von Satz 1.13 sagt aus, daß eine 2–Form h und eine reguläre Abbildung η mit (1.18) eine relativnormalisierte Fläche x induzieren, die η als Konormale und h als quadratische Grundform besitzt. Außerdem wurde in Abschnitt 1.6.2 erwähnt, daß x eine Blaschke–Immersion[1] ist, wenn noch $\Delta\eta = f\eta$ gilt. Wichtig als Voraussetzung von Satz 1.13 ist aber (1.18). Wir werden beweisen, daß im zweidimensionalen Fall die genannte Integrabilitätsbedingung aus $\Delta\eta = f\eta$ und $|det(\eta, \eta_1, \eta_2)| = \sqrt{|Det\, h|}$ folgt.

Die Bedingung (1.18) ist äquivalent zu (1.19) und somit auch zu

$$\hat{\Gamma}_{ml}^{\ \ j} h^{mi} - \overline{\Gamma}_{ml}^{\ \ j} h^{mi} - \hat{\Gamma}_{pl}^{\ \ i} h^{pj} + \overline{\Gamma}_{pl}^{\ \ i} h^{pj} = 0. \tag{4.1}$$

Lemma 4.1 *Zu vorgegebener Abbildung $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$, einer symmetrischen, regulären 2–Form h, einer Funktion $q \neq 0$ und dem Vektorfeld $X := -2grad_h(\log|q|)$, für die*

$$\begin{array}{rcl} \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) & \neq & 0 \\ \Delta\eta & = & D_X\eta + f\,\eta \\ |\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)| & = & q^{-2}\sqrt{|Det\, h|} \end{array} \tag{4.2}$$

gilt, gibt es eine relativnormalisierte Immersion x, die η als Konormale und h als quadratische Grundform hat.
Diese Immersion ist bis auf eine additive Konstante $x_0 \in \mathbb{R}^3$ eindeutig.
Die x_i haben folgende Form

$$x_i = \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)^{-1}(h_{i1}\,\eta \wedge \eta_2 + h_{i2}\,\eta_1 \wedge \eta) \tag{4.3}$$

und die Relativnormale

$$N = \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)^{-1}\eta_1 \wedge \eta_2.$$

Bemerkung: Wir können, wenn nötig durch Verwendung von $-\eta$ für η, erreichen, daß

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = sign\, Det\, h \cdot q^{-2}\sqrt{|Det\, h|}$$

gilt und daß so wegen (1.14) $det(x_1, x_2, N) = q^2\sqrt{|Det\, h|}$ positiv ist.

Beweis von Lemma 4.1: Da $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$ ist, bekommen wir analog zu Abschnitt 1.4 für η folgende Ableitungsgleichungen, die $\overline{\nabla}$ und $\overline{h}$ festlegen:

$$\eta_{ij} = \overline{\Gamma}_{ij}^{\ \ k}\eta_k - \overline{h}_{ij}\eta$$

[1] Zumindest ist die durch η definierte Normale N ein konstantes Vielfaches der Blaschkeschen Affinnormale. Durch entsprechende Multiplikation erreicht man $N = N_b$. Man beachte die Folgerung am Ende von Abschnitt 1.6.2.

Wir müssen nur zeigen, daß (1.18) bzw. (4.1) erfüllt ist. Dann ist das Korollar zu Satz 1.13 anwendbar. Weil $n = 2$ ist, brauchen wir (4.1) nur für $i = 1, j = 2$ und $l = 1, 2$ zu beweisen. Sei nun erst einmal $l = 1$: Es gilt

$$\begin{aligned}
& \hat{\Gamma}_{k1}{}^{2} h^{k1} - \hat{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} - \overline{\Gamma}_{k1}{}^{2} h^{k1} + \overline{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} \\
= \quad & \hat{\Gamma}_{k1}{}^{2} h^{k1} - \hat{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} - \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_{1k})}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} h^{k1} + \frac{\overline{det}(\eta, \eta_{1k}, \eta_2)}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} h^{k2} \\
\overset{(4.2)}{=} \quad & \hat{\Gamma}_{k1}{}^{2} h^{k1} - \hat{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} \\
& + \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_{2k} h^{k2} - \hat{\Gamma}_{ij}{}^{k} h^{ij} \eta_k + 2h^{ij} \partial_i (\log |q|) \eta_j - f\eta)}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} \\
& + \frac{\partial_k (\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)) - \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_{2k})}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} h^{k2} \\
= \quad & \hat{\Gamma}_{k1}{}^{2} h^{k1} - \hat{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} - \hat{\Gamma}_{ij}{}^{2} h^{ij} + 2h^{i2} \partial_i (\log |q|) \\
& + \frac{\partial_k (\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2))}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} h^{k2} \\
= \quad & -\hat{\Gamma}_{k1}{}^{1} h^{k2} - \hat{\Gamma}_{k2}{}^{2} h^{k2} + 2h^{k2} \partial_k (\log |q|) \\
& + \partial_k (\log |\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)|) h^{k2} \\
\overset{(2.5)}{=} \quad & -h^{k2} \partial_k (\log |\omega_h|) + 2h^{k2} \partial_k (\log |q|) + h^{k2} \partial_k (\log |\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)|) = 0,
\end{aligned}$$

weil nach der Voraussetzung $\log |\omega_h| - 2 \log |q| = \log |\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)|$ gilt.
Analog kann man (4.1) auch für $l = 2$ zeigen.
(4.3) folgt aus (1.20). #

Im zweidimensionalen Fall folgen damit die Integrabilitätsbedingungen der Formeln von Lelieuvre (1.18) für relativnormalisierte Immersionen also bereits aus

$$\Delta \eta = D_X \eta + f \eta \quad \text{und} \quad |\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)| = q^{-2} \sqrt{|Det(h_{ij})|}.$$

Wenn man $q \equiv 1$ setzt, erhält man die Aussage für Blaschke–Immersionen:

Lemma 4.2 *Zu vorgegebener Abbildung $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ und einer symmetrischen, regulären 2–Form h, für die*

$$\begin{aligned}
\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) &\neq 0 \\
\Delta \eta &= f \, \eta \\
|\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)| &= \sqrt{|Det \, h|}
\end{aligned}$$

gilt, gibt es eine Blaschke–Immersion x, die η als Konormale und h als quadratische Grundform hat. Diese Blaschke–Immersion ist bis auf eine additive Konstante $x_0 \in \mathbb{R}^3$ eindeutig.

Bemerkung: Im Unterschied zu [LNW] - dort wird gezeigt, daß unter der Bedingung (1.18) die beiden Aussagen $\Delta \eta = f \eta$ und $tr \, K_Y = 0$ äquivalent sind - haben wir bewiesen, daß im Fall $n = 2$ schon aus $\Delta \eta = f \eta$ die Bedingung (1.18) folgt. Daß das gilt, wird auch am Ende von [LNW] erwähnt.

4.1.2 Isotherme Parametrisierung der quadratischen Grundform

Ab jetzt befassen wir uns nur mit zweidimensionalen regulären Hyperflächen, die sich wenigstens lokal so parametrisieren lassen, daß die quadratische Grundform dieses Aussehen hat:

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \varepsilon E \end{pmatrix}$$

mit $\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $E \neq 0$. Man nennt diese Parametrisierung **isotherm**. Wir wollen die Parameter mit u, v bezeichnen. Ist $\varepsilon = 1$, so ist die Fläche **elliptisch**, bei $\varepsilon = -1$ **hyperbolisch**. Wir nehmen im folgenden immer diese isotherme Parametrisierung.

Die Christoffelsymbole des Levi–Cività–Zusammenhangs einer isotherm parametrisierten 2–Form h haben eine einfache Form. Mit (1.4) können wir sie berechnen: Es gilt erst einmal für die 8 $\hat{\Gamma}_{ijk}$–Terme:

$$\hat{\Gamma}_{111} = \frac{\partial_1 E}{2},\ \hat{\Gamma}_{121} = \frac{\partial_2 E}{2},\ \hat{\Gamma}_{221} = -\varepsilon\frac{\partial_1 E}{2},$$
$$\hat{\Gamma}_{112} = -\frac{\partial_2 E}{2},\ \hat{\Gamma}_{122} = \varepsilon\frac{\partial_1 E}{2},\ \hat{\Gamma}_{222} = \varepsilon\frac{\partial_2 E}{2}.$$

Daraus ergeben sich die Christoffelsymbole $\hat{\Gamma}_{ij}{}^{l} = h^{lk}\hat{\Gamma}_{ijk}$ als

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{11}{}^{1} &= \frac{\partial_1 E}{2E},\ \hat{\Gamma}_{12}{}^{1} = \frac{\partial_2 E}{2E},\ \hat{\Gamma}_{22}{}^{1} = -\varepsilon\frac{\partial_1 E}{2E},\\ \hat{\Gamma}_{11}{}^{2} &= -\varepsilon\frac{\partial_2 E}{2E},\ \hat{\Gamma}_{12}{}^{2} = \frac{\partial_1 E}{2E},\ \hat{\Gamma}_{22}{}^{2} = \frac{\partial_2 E}{2E}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Insbesondere erhalten wir

$$h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{1}{E}(\hat{\Gamma}_{11}{}^{k} + \varepsilon\hat{\Gamma}_{22}{}^{k}) = 0,\ \text{für } k = 1, 2. \tag{4.5}$$

Dies gilt für alle Normalisierungen, wenn h in isothermen Parametern vorgegeben ist.

4.2 Die Weierstraßsche Darstellung einer Affinminimalfläche

Wir werden hier zeigen, daß eine Affinminimalfläche durch eine „harmonische" Abbildung η beschrieben werden kann.

Wegen (4.5) und (2.13) erfüllt die Konormale η einer elliptischen ($\varepsilon = 1$) bzw. einer hyperbolischen ($\varepsilon = -1$) Blaschke–Immersion in isothermen Parametern folgende Differentialgleichung:

$$\Delta\eta = \frac{1}{E}(\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22}) = -2H\,\eta,$$

das heißt

$$\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = -2EH\eta. \tag{4.6}$$

Für eine Affinminimalfläche gilt also unabhängig von E:

$$\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$$

η sei eine Abbildung $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ mit $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$.
Setzt man nun

$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) =: \varepsilon E = \varepsilon h_{11} = h_{22},\ h_{12} = 0, \tag{4.7}$$

sowie nach (4.3)

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)^{-1}(h_{11}\eta \wedge \eta_2 + h_{12}\eta_1 \wedge \eta) = \frac{1}{\varepsilon E} E\eta \wedge \eta_2 = \varepsilon \eta \wedge \eta_2, \\ x_2 &= \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)^{-1}(h_{21}\eta \wedge \eta_2 + h_{22}\eta_1 \wedge \eta) = \frac{1}{\varepsilon E}\varepsilon E \eta_1 \wedge \eta = -\eta \wedge \eta_1, \end{aligned} \tag{4.8}$$

so induzieren x_1 und x_2 eine Blaschke–Immersion, wenn

$$\Delta\eta = \frac{1}{E}(\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22}) = f\eta$$

gilt. Das folgt aus Lemma 4.2.

Wegen (4.7) und (1.14) gilt für ω:

$$det(x_1, x_2, N) = E$$

Bemerkung: Wir können auch

$$E = h_{11} = -\varepsilon\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)$$

setzen, um $|\bar{\omega}| = |\omega_h|$ zu erfüllen. Die Vorzeichen in (4.8) ändern sich dann entsprechend und es gilt $det(x_1, x_2, N) = -E$.
Wir werden aber weiter mit (4.7) rechnen. Das bedeutet aber nicht notwendig, daß $E > 0$ ist. Wir richten uns also nicht immer nach der Vereinbarung aus Abschnitt 2.2.3, nach der $det(x_1, x_2, N)$ wie $det(x_1, x_2, N_e)$ positiv sein soll. Wir können dies gewährleisten, wenn wir $sign\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon$ voraussetzen. Das kann aber nicht garantiert werden. Besonders bei den Deformationen in Abschnitt 4.4 gibt es immer wieder Vorzeichenänderungen.
Um sicherzustellen, daß $det(x_1, x_2, N) = E > 0$ ist, müßten wir von η auf

$$\eta' := \varepsilon\, sign\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)\ \cdot \eta$$

übergehen, mit η ändert sich gegebenenfalls auch die Blaschkesche Affinnormale N, die durch

$$N = \frac{1}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}\eta_1 \wedge \eta_2$$

aus η berechnet wird.
Wir werden das im weiteren außer acht lassen und jeweils η verwenden. N ist somit manchmal $-N_b$. Das hat aber keine Auswirkungen auf die Differentialgleichung $\Delta\eta = 0$.

Die Integrabilität von x_1, x_2, also die Frage, ob $x_{12} = x_{21}$ gilt, kann in isothermer Parametrisierung leichter gezeigt werden als in Lemma 4.1: Mit (4.8) gilt

$$\begin{aligned} x_{12} &= \varepsilon(\eta_2 \wedge \eta_2 + \eta \wedge \eta_{22}) = \varepsilon\eta \wedge \eta_{22} \\ x_{21} &= -(\eta_1 \wedge \eta_1 + \eta \wedge \eta_{11}) = -\eta \wedge \eta_{11} \\ x_{12} = x_{21} &\Leftrightarrow \eta \wedge \varepsilon\eta_{22} = -\eta \wedge \eta_{11} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\eta_{22} + \eta_{11} = \hat{f}\eta \end{aligned}$$

Man kann so Lemma 4.2 für isotherme Parameter anpassen:

Lemma 4.3 *Gibt man eine Abbildung* $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ *mit* $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$ *und* $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = f\,\eta$ *vor, ist*

$$x = \int \varepsilon\eta \wedge \eta_2 du - \int \eta \wedge \eta_1 dv$$

eine elliptische (für $\varepsilon = 1$*) bzw. hyperbolische (für* $\varepsilon = -1$*) Blaschke–Immersion in isothermer Parametrisierung mit quadratischer Grundform*

$$E = h_{11} = \varepsilon\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon h_{22}, h_{12} = 0$$

und Konormale η*.*

Beweis: η ist eine reguläre Abbildung. Durch (4.7) legt man eine symmetrische, reguläre quadratische Grundform in isothermen Parametern fest, die

$$|\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)| = \sqrt{|Det\, h|}$$

erfüllt. Da $\Delta\eta = \hat{f}\eta$ ist, sind die Voraussetzungen von Lemma 4.2 vorhanden. #

Setzen wir $f = 0$, so folgt dieser Satz:

Satz 4.4 *Gibt man eine Abbildung* $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ *mit* $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$ *und* $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$ *vor, ist*

$$x = \int \varepsilon\eta \wedge \eta_2 du - \int \eta \wedge \eta_1 dv$$

eine elliptische bzw hyperbolische Affinminimalfläche in isothermer Parametrisierung mit

$$E = h_{11} = \varepsilon\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)$$

und Konormale η*.*

Beweis: Man setzt in Lemma 4.3 $f = 0$ ein. #

Wir werden Funktionen f, die die Differentialgleichung $\partial_1\partial_1(f) + \varepsilon\partial_2\partial_2(f) = 0$ für $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ erfüllen, als ε–**harmonisch**[2] bezeichnen, ebenso Abbildungen, für die das komponentenweise gilt[3]. Ist $\varepsilon = +1$, so ist ε–harmonisch mit dem üblichen Begriff harmonisch identisch.

Beispiele: $f_1(u, v) = u^2 + v^2$ ist ε–harmonisch für $\varepsilon = -1$, $f_2(u, v) = u^2 - v^2$ dagegen ε–harmonisch für $\varepsilon = 1$.
$\eta(u, v) = (1, u^2 + v^2, u^2 - v^2)$ ist weder für $\varepsilon = 1$ noch $\varepsilon = -1$ ε–harmonisch.

Es gibt auch Abbildungen, die sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = -1$ ε–harmonisch sind, siehe das Beispiel in 4.6.1. Ist η so eine Abbildung, so folgt nicht, daß η eine Affinminimalfläche induziert, die zugleich elliptisch und hyperbolisch ist, das ist nicht möglich. In diesem Fall erzeugt η (bis auf additive Konstante) je eine elliptische und eine hyperbolische Affinminimalfläche, je nachdem, was man in (4.8) für ε einsetzt.

[2] Wir schreiben nicht 1–harmonisch oder (-1)–harmonisch, sondern ε–harmonisch für $\varepsilon = 1$ bzw. für $\varepsilon = -1$.

[3] Für jede Komponente der Abbildung soll selbstverständlich die gleiche Art von Differentialgleichung gelten.

Wir wollen den elliptischen und hyperbolischen Fall - soweit möglich - gemeinsam behandeln, obwohl natürlich diese beiden Differentialgleichungen, was die Theorie, die Lösungen und deren Verhalten anbelangt, zu verschiedenen Ergebnissen führen.

Die Differentialgleichung $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$ bedeutet für

- $\varepsilon = 1$: η ist (komponentenweise) harmonisch, also Imaginärteil einer holomorphen Kurve[4] $\Phi : \xi \mapsto \Phi(\xi) \in \mathbb{C}_3$ mit $\xi := u + iv, \overline{\xi} := u - iv$ als komplexe Parameter. η erhält man als
$$\eta = \frac{1}{2i}(\Phi - \overline{\Phi}).$$
Die Gleichung $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$ entspricht bei Φ
$$\overline{det}(\overline{\Phi} - \Phi, \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}}) \neq 0.$$
Siehe [Cal2], [Bö], [NoS], dort wird (im elliptischen Fall) mit diesen komplexen Asymptotenparametern gerechnet.
Weil Φ holomorph ist, verschwindet die Ableitung nach $\overline{\xi}$: $\Phi_{\overline{\xi}} = 0$. Ebenso ist[5] $\overline{\Phi}_\xi = 0$. η ist somit Summe von zwei Abbildungen, von denen jede nur von ξ oder $\overline{\xi}$, nicht aber von beiden Variablen abhängig ist. Darum wurde Φ gleich als $\Phi(\xi)$ und nicht als $\Phi(\xi, \overline{\xi})$ angegeben.

- $\varepsilon = -1$: Nach der Umparametrisierung[6]
$$\tilde{u} = u - v,\ \tilde{v} = u + v,$$
$$u = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}),\ v = \frac{1}{2}(-\tilde{u} + \tilde{v})$$
kann man die Ableitungen von $\tilde{\eta}(\tilde{u}, \tilde{v}) := \eta(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ in den beiden Parametrisierungen so ausdrücken
$$\tilde{\eta}_{\tilde{u}} = \frac{1}{2}(\eta_u - \eta_v),\ \tilde{\eta}_{\tilde{v}} = \frac{1}{2}(\eta_u + \eta_v),$$
$$\eta_u = \tilde{\eta}_{\tilde{u}} + \tilde{\eta}_{\tilde{v}},\ \eta_v = -\tilde{\eta}_{\tilde{u}} + \tilde{\eta}_{\tilde{v}}.$$
Es gilt die Differentialgleichung
$$\tilde{\eta}_{\tilde{u}\,\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{4}\Big(\eta_{11}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) - \eta_{22}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))\Big) = 0.$$

[4] Es gibt beliebig viele solcher Kurven Φ, die sich aber nur durch einen konstanten, reellen Vektor ζ unterscheiden. Selbstverständlich kann man η auch als Realteil einer holomorphen Kurve $\Psi : \xi \mapsto \Psi(\xi) \in \mathbb{C}_3$ auffassen. Hierbei gilt: $\Psi = -i\Phi$.

[5] $\overline{\Phi}$ bezeichne die Funktion mit $\overline{\Phi}(\overline{\xi}) = \overline{(\Phi(\xi))}$. Wir kürzen manchmal aber auch nur $\overline{\Phi}(\overline{\xi})$ damit ab.

[6] Diese Parametertransformation führt isotherme Parameter in Asymptotenparameter über. Man kann auch eine andere derartige Transformation nehmen. Nur können sich dann einige Einzelheiten, wie Vorzeichen, in den Abschnitten 4.3, 5.6.1 ändern. Meist schreiben wir die Ableitungen mit Zahlenindizes, um aber Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir hier z. T. η_u statt η_1.

Daraus folgt, daß $\tilde{\eta}$ eine Translationsfläche[7] ist, also eine Summe

$$\eta(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v})) = U(\tilde{u}) + V(\tilde{v})$$

von zwei Abbildungen U, V, die jeweils nur von einer der beiden Variablen abhängig sind. Dies ist ein Analogon zum Fall $\varepsilon = 1$. U und V sind nicht eindeutig bestimmt, oder besser, sie sind nur bis auf einen konstanten Summanden $\hat{\zeta}$ eindeutig. Zum Beispiel sind $\hat{U} := U + \hat{\zeta}$, $\hat{V} := V - \hat{\zeta}$ ebenso möglich, denn $U + V = \hat{U} + \hat{V}$.

Die Regularität von η entspricht

$$\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_{\tilde{u}}, \tilde{\eta}_{\tilde{v}}) = \overline{det}(U + V, U', V') = \frac{1}{2}\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0.$$

Wenn wir die Vereinbarung aus 2.2.3 beachten wollen, müssen wir < 0 verlangen.

Bemerkungen:

1.) Lemma 4.3 und Satz 4.4 sagen aus, daß nicht mehr h **und** η, die mit einer Bedingung wie (1.18) gekoppelt sind, vorgegeben werden müssen, um dann wie in Satz 1.13 eine Fläche daraus zu erhalten, sondern **nur** noch η, das eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt. h muß man nicht mehr angeben, man erhält es automatisch durch (4.7). Die mit Hilfe von (4.8) festgelegte Fläche ist eine isotherm parametrisierte Blaschke–Immersion.

Will man allerdings zu einer gegebenen Funktion $\tilde{H}$ eine Blaschke–Immersion gewinnen, die $\tilde{H}$ als Mittlere Krümmung besitzt, muß man wegen (4.6) für die Konormale eine Lösung der Differentialgleichung

$$\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = -2\varepsilon\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)\tilde{H}\eta$$

finden mit $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$.

Der einfachste Fall ist $\tilde{H} = 0$: Die Konormale einer Affinminimalfläche in isothermen Parametern erfüllt $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$ und $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$ und umgekehrt, jede Abbildung η, die dies erfüllt, ist Konormale einer Affinminimalfläche in isothermen Parametern. Die Affinminimalflächen, die von einer Konormalen erzeugt werden, unterscheiden sich nur durch einen konstanten Vektor. Wir werden wegen der (fast) eineindeutigen Beziehung zwischen ε–harmonischen Konormalen und Affinminimalflächen in isothermer Parametrisierung hauptsächlich mit Konormalen rechnen. Die zugehörigen Flächen erhält man mit Satz 4.4.

---

[7] Der Begriff Translationsfläche ist hier allgemeiner als in 2.4.7. Dort stellten wir Translationsflächen als Graphen dar. Hier dagegen müssen $U(\tilde{u})$ oder $V(\tilde{v})$ nicht von der Gestalt $(\tilde{u}, 0, f_1(\tilde{u}))$ bzw. $(0, \tilde{v}, f_2(\tilde{v}))$ sein.

Die Abbildung $\eta : U \to \mathbb{R}_3$ eine Fläche zu nennen, ist nicht abwegig, siehe [NP1]. Bei regulären Flächen x gilt für die Konormale $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$, die Ableitungen von η spannen also einen n–dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}_3$ auf, η ist damit eine Immersion. $-\eta$ ist, als transversales Vektorfeld, die zentroaffine Normale. Die Ableitungsgleichung (1.15) entspricht der Ableitungsgleichung von Gauß, $\overline{\nabla}$ ist der von $-\eta$ induzierte Zusammenhang und $\overline{h}$ die quadratische Grundform. Nur regulär als Fläche im Sinne von Abschnitt 1.2 muß η nicht sein. Genau dann, wenn die Gaußsche Krümmung $\mathcal{K}$ von x nicht verschwindet, ist $\overline{h}$ und damit η als Fläche regulär. Regulär als Konormale im Sinne von Abschnitt 1.6.1 ist die Konormale einer regulären Fläche x aber immer.

2.) Die im Satz 4.4 gegebene Darstellung einer Affinminimalfläche durch eine ε–harmonische Abbildung η (vgl. [Bl2], S. 178, [Sch], S.188, [NoS], S. 203–209, 211, [Buy], [Li], [Cal3]) ist das Analogon zur **Weierstraßschen Darstellung** einer euklidischen Minimalfläche, siehe [Pab2]. Unterschiede dieser zur euklidischen Weierstraßschen Darstellung sind:

a) Nicht x selbst, sondern die Konormale η ist ε–harmonisch.

b) Beim euklidischen Fall kommt nur die elliptische Differentialgleichung vor, beim affinen Fall die elliptische oder die hyperbolische.

c) Hier gilt $\Delta\eta = \Delta_h \eta = 0$. Δ ist der in Abschnitt 1.3 definierte von h induzierte Laplace–Beltrami–Operator. Für x gilt $\Delta x = \Delta_h x = nN \neq 0$. Ist N nicht die Blaschkesche Affinnormale (oder ein konstantes Vielfaches), kommt noch ein tangentialer Anteil hinzu. Dies ändert aber nichts daran, daß $\Delta_h x \neq 0$ ist. Bei euklidischen Minimalflächen handelt es sich bei Δ in $\Delta x = \Delta_g x = 0$ um den von g induzierten Laplace–Operator Δ_g.

d) Bei euklidischen Minimalflächen gilt für die Ableitung Φ_ξ der holomorphen Kurve $\langle \Phi_\xi, \Phi_\xi \rangle = 0$, $\langle \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}} \rangle \neq 0$. Für die holomorphe Kurve Φ einer elliptischen Affinminimalfläche gibt es neben $\overline{det}(\overline{\Phi} - \Phi, \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}}) \neq 0$ keine weiteren Einschränkungen.

3.) Das Zeichen $\int$ steht hier weniger für ein Integral, sondern für eine **Stammfunktion**. Das heißt $f = \int (f_1 du + f_2 dv)$ ist eine Funktion, für die $\partial_1(f) = f_1, \partial_2(f) = f_2$ gilt. Notwendig muß hier $\partial_2(f_1) = \partial_1(f_2)$ erfüllt werden. Selbstverständlich liefert auch das Kurvenintegral

$$f(u,v) = \int_{(u_0,v_0)}^{(u,v_0)} f_1(\tilde{u}, v_0) d\tilde{u} + \int_{(u,v_0)}^{(u,v)} f_2(u, \tilde{v}) d\tilde{v}$$

eine Stammfunktion, wenn die Punkte und ihre Verbindungslinien in U liegen, aber manche Werte werden nicht erreicht: $\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v_0)} 0 d\tilde{u} + \int_{(u,v_0)}^{(u,v)} 0 d\tilde{v} = 0$, obwohl $f = 1$ auch eine Stammfunktion ist. Das ganze gilt auch für x bzw. η komponentenweise.

4.3 Die Konjugierte

Wir übertragen nun den Begriff Konjugierte aus [Pab2] auf Affinminimalflächen und stellen die Konjugierte analog zu 4.2 durch eine holomorphe Kurve bzw. eine Translationsfläche dar.
Diese Konjugierten werden in [Ant] und [Buy], die sich auf Chern, Terng (1980) beziehen, unter dem Begriff „Affine Bäcklund–Transformationen" behandelt.

Sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ eine Abbildung mit

- $\eta_{11} + \varepsilon \eta_{22} = 0$ und
- $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$.

Es existiert (bis auf additive Konstante, siehe unten, nur die Ableitungen $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ sind eindeutig) genau eine Abbildung $\overline{\eta} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$ mit

$$\overline{\eta}_1 = \varepsilon \eta_2 \quad \text{und} \quad \overline{\eta}_2 = -\eta_1,$$

die **Konjugierte**[8] oder **Adjungierte**[9] zu η. Es gilt nämlich

$$\overline{\eta}_{12} = \varepsilon \eta_{22} = -\eta_{11} = \overline{\eta}_{21}.$$

Außerdem ist $\overline{\eta}$ ε–harmonisch wie η:

$$\overline{\eta}_{11} + \varepsilon \overline{\eta}_{22} = \varepsilon \eta_{21} + \varepsilon(-1)\eta_{12} = 0.$$

Bezeichnung: Wir werden den Begriff Konjugierte oder Adjungierte und ab 4.4.4 Assoziierte sowohl für die Konormale als auch für die dadurch mit Satz 4.4 bestimmte Fläche verwenden. Meist allerdings bezieht sich der Begriff auf die Konormale.

Nach Satz 4.4 induziert η eine Affinminimalfläche x in isothermen Parametern. Diese ist mit $\overline{\eta}$ so darstellbar:

$$x = \int \eta \wedge \overline{\eta}_1 du + \int \eta \wedge \overline{\eta}_2 dv$$

Ist $\overline{\eta}$ eine Adjungierte, so auch $\overline{\eta} + \zeta$ mit $\zeta =$ konstant. In 4.2 haben wir η durch eine holomorphe Kurve Φ bzw. die Abbildungen U und V einer Variablen dargestellt. Mit diesen Abbildungen kann man auch $\overline{\eta}$ beschreiben:

- $\varepsilon = 1$: η ist Imaginärteil einer holomorphen Kurve Φ, also $2i\eta = \Phi - \overline{\Phi}$. Eine Adjungierte ist der Realteil von Φ und somit auszudrücken durch

  $$\overline{\eta} = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}).$$

  Man kann auch sagen, $\overline{\eta}$ ist Imaginärteil von $i\Phi$, weil $Re\Phi = Im(i\Phi)$ ist. Es existieren aber viele Kurven Φ, die η als Imaginärteil haben. Sie unterscheiden sich durch einen konstanten Summanden $\zeta \in \mathbb{R}_3$. Darum ist die Adjungierte nicht eindeutig bestimmt, mit $\overline{\eta}$ ist auch $\overline{\eta} + \zeta$, ζ konstant, eine Adjungierte.

  Für die Regularität von $\overline{\eta}$ ist darauf zu achten, daß

  $$\overline{det}(\overline{\Phi} + \Phi, \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}}) \neq 0$$

  ist. Dies entspricht $\overline{det}(\overline{\eta}, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) \neq 0$.

- $\varepsilon = -1$: $\overline{\eta}$ entspricht in den neuen Parametern $\tilde{u}, \tilde{v}$ (siehe Abschnitt 4.2) der Translationsfläche

  $$\tilde{\overline{\eta}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \overline{\eta}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = U(\tilde{u}) - V(\tilde{v}).$$

[8] Wir werden mehr die Bezeichnung Adjungierte benutzen, um Verwechslungen mit konjugiert komplex oder dem konjugierten Zusammenhang auszuschließen.

[9] Für $\varepsilon = 1$ entsprechen obige Gleichungen den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen. $\overline{\eta}$ ist eine harmonische Abbildung, die als Realteil einer holomorphen Funktion geeignet ist, deren Imaginärteil η ist.

Die Adjungierte ist, wie im elliptischen Fall, nur bis auf einen konstanten Summanden eindeutig. Auch $\overline{\eta}+\zeta$ ist eine Adjungierte von η: Ist $\hat{U}=U+\frac{1}{2}\zeta$, $\hat{V}=V-\frac{1}{2}\zeta$, so ergibt dies zwar auch $\hat{U}+\hat{V}=U+V$, aber $\hat{U}-\hat{V}=U-V+\zeta$.

Für die Regularität von $\overline{\eta}$ müssen wir

$$\overline{det}(\tilde{\overline{\eta}},\tilde{\overline{\eta}}_{\tilde{u}},\tilde{\overline{\eta}}_{\tilde{v}})=-\overline{det}(U-V,U',V')=\frac{1}{2}\overline{det}(\overline{\eta},\overline{\eta}_1,\overline{\eta}_2)\neq 0$$

fordern.

Nun zeigen wir noch, wie man $\overline{\eta}$ auf andere Art ausdrücken kann, ohne η direkt zu benutzen:

Geht man von einer regulären, relativnormalisierten Fläche x in isothermen Parametern aus, läßt sich η nach Lemma 1.16 so darstellen:

$$\begin{aligned}
\eta &= x_1\wedge x_2\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}\\
\eta_1 &= h_{11}N\wedge x_2\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}+h_{12}x_1\wedge N\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}=EN\wedge x_2\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}\\
\eta_2 &= h_{21}N\wedge x_2\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}+h_{22}x_1\wedge N\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}=\varepsilon Ex_1\wedge N\frac{1}{det(x_1,x_2,N)}
\end{aligned}$$

Ist N die Blaschkesche Affinnormale, so gilt wegen $det(x_1,x_2,N)=E$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= N\wedge x_2,\\
\eta_2 &= -\varepsilon N\wedge x_1.
\end{aligned}$$

Für eine Adjungierte $\overline{\eta}$ von η ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_1 &= \varepsilon\eta_2=-N\wedge x_1,\\
\overline{\eta}_2 &= -\eta_1=-N\wedge x_2.
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\overline{\eta}=-(\int N\wedge x_1du+\int N\wedge x_2dv).$$

Daher ist es verständlich, daß $\overline{\eta}$ - bis aufs Vorzeichen - zuweilen (in [Bö], [Bl2], S. 182, [Sch], S. 188) als

$$\overline{\eta}=-\int N\wedge dx$$

dargestellt wird.

4.4 Deformationen von Affinminimalflächen – Modifikationen der Konormale

Wir stellen jetzt verschiedene Möglichkeiten vor, aus einer gegebenen Affinminimalfläche x durch Modifikation der Konormalen η eine andere Affinminimalfläche zu erhalten.

Sei ε festgelegt, d. h. η sei die reguläre Konormale einer entweder elliptischen ($\varepsilon = 1$) oder hyperbolischen ($\varepsilon = -1$) Affinminimalfläche x, die bezüglich ihrer (Blaschkeschen) quadratischen Grundform h isotherm parametrisiert sei. Mit (4.7) gilt also für die Blaschkesche Affinnormale N, die Konormale η und h:

$$0 \neq \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon h_{11} = h_{22} = \varepsilon det(x_1, x_2, N),\ h_{12} = 0$$

Außerdem erfüllt η die Differentialgleichung

$$\eta_{11} + \varepsilon \eta_{22} = 0$$

und die Größen $\overline{\nabla}$ und $\overline{h}$ sind bestimmt durch die Ableitungsgleichung

$$\eta_{ij} = \overline{\Gamma}_{ij}^{\ k} \eta_k - \overline{h}_{ij} \eta.$$

Die veränderte Konormale wollen wir jeweils mit $\tilde{\eta}$ bezeichnen, die daraus hervorgehende Fläche und die Flächengrößen werden wir analog kennzeichnen.
x_0 sei ein konstanter Vektor in $\mathbb{R}^3$, $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ ein konstanter Vektor in $\mathbb{R}_3$.

Wir verändern η so zu $\tilde{\eta}$, daß auch hier $\tilde{\eta}_{11} + \varepsilon \tilde{\eta}_{22} = 0$, also die gleiche Differentialgleichung wie für η, gilt. Auf diese Art und Weise erhalten wir nach Satz 4.4 vermöge

$$\tilde{x} = \int \tilde{\eta} \wedge \varepsilon \tilde{\eta}_2 du + \int \tilde{\eta} \wedge (-\tilde{\eta}_1) dv.$$

neue Affinminimalflächen in isothermer Parametrisierung, wenn $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \neq 0$ ist. Letzteres ist allerdings nicht in allen Fällen sicher, zumal dort, wo wir nicht $\tilde{\eta}$, sondern nur $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ vorgeben. In so einem Fall muß man erst $\tilde{\eta}$ als Stammfunktion

$$\tilde{\eta} = \int (\tilde{\eta}_1 du + \tilde{\eta}_2 dv)$$

berechnen. Das ist nur möglich, wenn $\tilde{\eta}_{12} = \tilde{\eta}_{21}$ gilt. Bei

$$\tilde{\eta}_1 = (0, 1, 0),\ \ \tilde{\eta}_2 = (0, 0, 1)$$

etwa ist eine mögliche Stammfunktion $\tilde{\eta}$ gleich $(0, u, v)$, aber für dieses $\tilde{\eta}$ gilt immer $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = 0$. Darum werden wir bei allen Deformationen zunächst die Ableitungen $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ betrachten und sicherstellen, daß sie - als notwendige Bedingung zu $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \neq 0$ - linear unabhängig sind[10], und anschließend den Ausdruck $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ untersuchen. Auf diese Weise verhindert man zwar nicht immer Singularitäten, wie das obige Beispiel zeigt, aber man erreicht die Regularität von $\tilde{\eta}$ zumindest auf einer gewissen offenen Menge, indem man einen geeigneten konstanten Vektor[11] ζ zu $\tilde{\eta}$ addiert. Im oben angegebenen Beispiel ist $\tilde{\eta}$ immer singulär, $\tilde{\eta} + \zeta$ mit $\zeta = (c, 0, 0)$, $c \neq 0$, immer regulär.

Mit dem Ausdruck $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ liegt auch schon wegen (4.7) die (Blaschkesche) quadratische Grundform $\tilde{h}$ (in isothermen Parametern) fest. Anschließend bestimmen wir die

[10] Das ist meist der Fall bzw. führt im 2. Teil von 4.4.4 und in 4.4.5 zu einer Bedingung an die benutzten Funktionen a_i^j.

[11] Es existiert für einen Punkt $p \in U$ sicher ein Vektor $\zeta \in \mathbb{R}_3$ mit $\overline{det}(\zeta, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)|_p \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ gilt dies auch noch in einer Umgebung von p.

Fläche $\tilde{x}$ aus ihren Ableitungen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ gemäß Satz 4.4 und geben noch die Blaschkesche Affinnormale $\tilde{N}$ an.

Zu beachten ist zusätzlich, daß einige dieser veränderten Konormalen nur durch die Ableitungen $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ festgelegt sind und sowohl $\tilde{\eta}$ als auch $\tilde{\eta} + \zeta$ diese Ableitungen haben, die Konormalen darum nicht eindeutig sind. Die Unterschiede werden in 4.4.1 behandelt.

Bemerkung: Diese Methode ist nicht zu verwechseln mit dem Vorgehen in Lemma 1.11 bzw. Lemma 2.1. Dort wurde untersucht, wie Größen bzgl. einer Normalen der Fläche x durch Größen bzgl. einer anderen Normalen derselben Fläche x ausgedrückt werden können. Hier aber betrachten wir nicht Größen verschiedener Normalisierungen, sondern nur bezüglich der Blaschkeschen Affinnormale, allerdings von verschiedenen Flächen $x, \tilde{x}$.

4.4.1 Addition eines konstanten Vektors

Sei $\tilde{\eta} = \eta + \zeta$, ζ konstant. Es gilt für die Ableitungen[12]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\eta}_2$ sind also immer linear unabhängig. Für die Regularität von $\tilde{\eta}$ müssen wir

$$\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \;=\; \overline{det}(\eta + \zeta, \eta_1, \eta_2) \overset{!}{\neq} 0$$

fordern. Dann können wir nach Satz 4.4 die Fläche $\tilde{x}$ aus deren Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \tilde{\eta} \wedge \varepsilon \tilde{\eta}_2 = (\eta + \zeta) \wedge \varepsilon \eta_2 = x_1 + \zeta \wedge \varepsilon \eta_2 = x_1 + \zeta \wedge \overline{\eta}_1 \\
\tilde{x}_2 &= -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = -(\eta + \zeta) \wedge \eta_1 = x_2 - \zeta \wedge \eta_1 = x_2 + \zeta \wedge \overline{\eta}_2 \\
\tilde{x} &= \int (x_1 + \zeta \wedge \overline{\eta}_1) du + \int (x_2 + \zeta \wedge \overline{\eta}_2) dv = x + \zeta \wedge \overline{\eta} + x_0
\end{aligned}$$

$\tilde{N}$ erhalten wir als

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} = \frac{\eta_1 \wedge \eta_2}{\overline{det}(\eta + \zeta, \eta_1, \eta_2)} = \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\eta + \zeta, \eta_1, \eta_2)} N.$$

4.4.2 Multiplikation mit einer Konstanten

Wir untersuchen $\tilde{\eta} = r \cdot \eta$, $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) &= \overline{det}(r\eta, r\eta_1, r\eta_2) = r^3 \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow r \neq 0
\end{aligned}$$

[12] Die Schreibweise ist so zu verstehen: Abbildungen wie η_j fassen wir als Zeilenvektoren auf, die drei Komponentenfunktionen haben. $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ entspricht also einer Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten. Die rechte Seite besteht aus einem Produkt einer 2×2–Matrix mit einer 2×3–Matrix, also auch aus einer 2×3–Matrix.

ist $\tilde{\eta}$ und somit auch $\tilde{x}$ für alle $r \in \mathrm{I\!R}\backslash\{0\}$ regulär. $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$ sind rasch zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \tilde{\eta} \wedge \varepsilon \tilde{\eta}_2 = r\eta \wedge \varepsilon r \eta_2 = r^2 x_1 \\
\tilde{x}_2 &= -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = -r\eta \wedge r\eta_1 = r^2 x_2 \\
\tilde{x} &= \int (r^2 x_1) du + \int (r^2 x_2) dv = r^2 x + x_0 \\
\tilde{N} &= \frac{\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} = \frac{r\eta_1 \wedge r\eta_2}{\overline{det}(r\eta, r\eta_1, r\eta_2)} = \frac{1}{r} N
\end{aligned}$$

4.4.3 Adjungierte

$\tilde{\eta}$ sei eine Adjungierte von η wie in 4.3, also $\tilde{\eta} = \overline{\eta}$.
Wie schon erwähnt, ist die Adjungierte nicht eindeutig festgelegt. Aber alle Adjungierten zu η unterscheiden sich nur durch einen konstanten Vektor $\zeta \in \mathrm{I\!R}_3$. Die folgenden Aussagen gelten für alle Adjungierten. Für die Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$\overline{\eta}_1$ und $\overline{\eta}_2$ sind also linear unabhängig. Für die Regularität muß noch

$$\overline{det}(\overline{\eta}, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) = \overline{det}(\overline{\eta}, \varepsilon\eta_2, -\eta_1) = \varepsilon \overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2) \overset{!}{\neq} 0$$

vorausgesetzt werden. Dann erhalten wir für $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \overline{\eta} \wedge \varepsilon \overline{\eta}_2 = -\varepsilon \overline{\eta} \wedge \eta_1 \\
\overline{x}_2 &= -\overline{\eta} \wedge \overline{\eta}_1 = -\varepsilon \overline{\eta} \wedge \eta_2 \\
\overline{x} &= \int (-\varepsilon \overline{\eta} \wedge \eta_1) du + \int (-\varepsilon \overline{\eta} \wedge \eta_2) dv \\
&= -\varepsilon \Big(\overline{\eta} \wedge \eta - \int (\overline{\eta}_1 \wedge \eta) du - \int (\overline{\eta}_2 \wedge \eta) dv \Big) \\
&= -\varepsilon \Big(\overline{\eta} \wedge \eta + \int (\eta \wedge \overline{\eta}_1) du + \int (\eta \wedge \overline{\eta}_2) dv \Big) = -\varepsilon (\overline{\eta} \wedge \eta + x + x_0) \\
\overline{N} &= \frac{\overline{\eta}_1 \wedge \overline{\eta}_2}{\overline{det}(\overline{\eta}, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)} = \frac{\eta_1 \wedge \eta_2}{\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)} = \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)} N
\end{aligned}$$

Neben der Tatsache, daß $\overline{N}$ an entsprechenden Punkten stets die gleiche Richtung wie N hat, gilt für Adjungierte noch dies:
Zu jeder Adjungierten $\overline{\eta} = \overline{\eta}_0 + \zeta$ von η gibt es eine zugehörige Affinminimalfläche $\overline{x}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $p \in U$ jeweils der Differenzvektor der Flächenpunkte $x(p)$ und $-\varepsilon\overline{x}(p)$ tangential sowohl zu x als auch zu $\overline{x}$ ist (nicht jede mit Hilfe von Satz 4.4 aus $\overline{\eta}$ entstehende Immersion $\overline{x} + x_0$ muß dies erfüllen). Es gilt

$$x(p) - (-\varepsilon \overline{x}(p)) = -\overline{\eta} \wedge \eta|_p - x_0.$$

Bei geeignet gewähltem x_0 ist $x - (-\varepsilon\overline{x})$ ein Vielfaches von $\overline{\eta} \wedge \eta$ und daher sowohl zu x als auch zu $\overline{x}$ tangential, denn es gilt $\eta(\overline{\eta} \wedge \eta) = \overline{\eta}(\overline{\eta} \wedge \eta) = 0$. Darüber hinaus kann man für einen festen Punkt diesen Differenzvektor wählen, siehe [Buy]. Eine solche Abbildung von η auf eine bestimmte Adjungierte nennen wir eine **Affine Bäcklund–Transformation** (mehr zu Affinen Bäcklund–Transformationen in [Ant] und [Buy]).

4.4.4 Assoziierte

Wir übertragen nun den Begriff Assoziierte aus [Pab2] auf Affinminimalflächen.

Für $\varepsilon = 1$ gilt, wie in 4.2 erwähnt, daß η Imaginärteil einer holomorphen Kurve Φ ist mit $\overline{det}(\overline{\Phi} - \Phi, \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}}) \neq 0$. $\overline{\eta}$ ist der Realteil von Φ, das ist der Imaginärteil von $i\Phi$.
Man erhält demnach durch die Transformation $\Phi \mapsto i\Phi$ der holomorphen Kurve eine neue Konormale, wenn $\overline{det}(\overline{\Phi} + \Phi, \Phi_\xi, \overline{\Phi}_{\overline{\xi}}) \neq 0$ gilt.
Noch weitere bekommt man, wenn man Φ statt nur mit i mit einer beliebigen komplexen Zahl $c \neq 0$ multipliziert, also die Transformation $\Phi \mapsto c\Phi$ durchführt. Da $c \neq 0$ als $c = re^{i\varphi}$ mit $r \neq 0, r \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \varphi < \pi$ dargestellt werden kann, ergibt das eine 2–parametrige Schar von Affinminimalflächen:

- die aus $\Phi \mapsto r\Phi$, $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, und
- die aus $\Phi \mapsto e^{i\varphi}\Phi$, $0 \leq \varphi < \pi$, entstehenden.

Die Multiplikation mit r wurde in 4.4.2 besprochen. Sei jetzt $r = 1$. Dann ist

$$e^{i\varphi}\Phi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\Phi = (\cos\varphi\, Re\Phi - \sin\varphi\, Im\Phi) + i(\cos\varphi\, Im\Phi + \sin\varphi\, Re\Phi).$$

Für den Imaginärteil gilt:

$$Im(e^{i\varphi}\Phi) = \cos\varphi\, Im\Phi + \sin\varphi\, Re\Phi.$$

$\tilde{\eta} := Im(e^{i\varphi}\Phi)$ entspricht somit

$$\tilde{\eta} = \cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\overline{\eta}.$$

Wir werden nun einige Eigenschaften von $\tilde{\eta}$ untersuchen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ &= \cos\varphi \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\eta}_2$ sind für alle φ linear unabhängig. Um Regularität zu erhalten, muß noch

$$\begin{aligned} \overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) &= \overline{det}(\tilde{\eta}, \eta_1, \eta_2) = \cos\varphi\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) + \sin\varphi\,\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2) \overset{!}{\neq} 0 \\ &\Leftrightarrow \tan\varphi \neq -\frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)},\ \text{für}\ \cos\varphi \neq 0, \\ &\quad \text{oder}\ \ \overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2) \neq 0,\ \text{für}\cos\varphi = 0, \end{aligned}$$

erfüllt sein. Für $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_2 = (\cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\overline{\eta}) \wedge (-\sin\varphi\,\eta_1 + \cos\varphi\,\eta_2) \\ &= \cos\varphi\,\sin\varphi\, x_2 + \cos^2\varphi\, x_1 + \sin^2\varphi\,\overline{x}_1 - \sin\varphi\,\cos\varphi\,\overline{x}_2 \\ \tilde{x}_2 &= -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = (\cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\overline{\eta}) \wedge (-\cos\varphi\,\eta_1 - \sin\varphi\,\eta_2) \\ &= -\cos\varphi\,\sin\varphi\, x_1 + \cos^2\varphi\, x_2 + \sin^2\varphi\,\overline{x}_2 + \sin\varphi\,\cos\varphi\,\overline{x}_1 \\ \tilde{x} &= \cos^2\varphi\, x + \sin^2\varphi\,\overline{x} \\ &\quad + \cos\varphi\sin\varphi\Big(\int(x_2 - \overline{x}_2)du + \int(-x_1 + \overline{x}_1)dv\Big) + x_0 \\ \tilde{N} &= \frac{\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} = \frac{\eta_1 \wedge \eta_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \eta_1, \eta_2)} = \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{\cos\varphi\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) + \sin\varphi\,\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)} N \end{aligned}$$

Wir wollen die so entstehenden Konormalen bzw. die dadurch erzeugten Affinminimalflächen (siehe Bezeichnung in Abschnitt 4.3) analog zum euklidischen Fall **Assoziierte** (siehe [Pab2]) nennen und folgendermaßen bezeichnen:

$$^{\varphi}\eta := Im(e^{i\varphi}\Phi),$$

wenn Φ die zu η gehörige holomorphe Kurve ist, und

$$^{\varphi}x := \int {}^{\varphi}\eta \wedge {}^{\varphi}\eta_2 \, du - \int {}^{\varphi}\eta \wedge {}^{\varphi}\eta_1 \, dv.$$

Zu erwähnen ist noch, daß auch die Assoziierte $^{\varphi}\eta$ wie Φ und $\overline{\eta}$ nicht eindeutig ist. Mit Φ ist auch $\Phi + \zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}_3$ konstant, eine solche holomorphe Kurve und $\overline{\eta}$ ist nur bis auf einen konstanten Summanden festgelegt, siehe auch 4.3. Man bekommt also in Abhängigkeit von $\overline{\eta}$ verschiedene Assoziierte $^{\varphi}\eta + \tilde{\zeta}$ zum gleichen Argument φ, die sich wieder durch einen konstanten Summanden unterscheiden: neben $\tilde{\eta} = \cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\overline{\eta}$ auch $\cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,(\overline{\eta} + \zeta) = \tilde{\eta} + \sin\varphi\,\zeta$.
Eine Adjungierte $\overline{\eta}$ und eine Assoziierte $^{\frac{\pi}{2}}\eta$ sind somit bis auf eine additive Konstante identisch.

Bemerkung: Nennen wir nur $\tilde{\eta} = \cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\overline{\eta}$ eine Assoziierte, sind damit zwar für $\varphi \neq 0$ alle Konormalen $\tilde{\eta} + \tilde{\zeta}$ ebenfalls Assoziierte, für $\varphi = 0$ aber nur η (da $\sin\varphi = 0$ gilt). Wir nennen darum auch die Konormalen $\eta + \zeta$, ζ konstant, Assoziierte.

Ähnlich kann man auch für $\varepsilon = -1$ vorgehen. Wir betrachten die umparametrisierte Abbildung $U + V$. Analog zur Transformation der holomorphen Kurve Φ in $re^{i\varphi}\Phi$, d. h.

$$Im(\Phi) = \frac{1}{2i}(\Phi - \overline{\Phi}) \mapsto Im(re^{i\varphi}\Phi) = \alpha\Phi + \beta\overline{\Phi} = c\frac{1}{2i}(\Phi - \overline{\Phi}) + s\frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}),$$

wobei $c = r\cos\varphi$, $s = r\sin\varphi$, $\alpha = \frac{1}{2}(-ic+s)$, $\beta = \frac{1}{2}(ic+s)$ ist, ändern wir $U+V$ nicht nur in $U - V$ um, sondern multiplizieren mit $\alpha, \beta \neq 0$, wir wenden somit die Transformation

$$U + V \mapsto \alpha U + \beta V = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(U+V) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(U-V)$$

an. Nennt man $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) =: c$, $\frac{1}{2}(-\alpha+\beta) =: s$, ergibt sich

$$\tilde{\eta} = c\,\eta - s\,\overline{\eta}.$$

Für die Ableitungen der so entstandenen Konormale $\tilde{\eta}$ erhält man

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \overline{\eta}_2 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, daß $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ nur linear unabhängig sind, wenn $c^2 - s^2 \neq 0$ oder $c \neq \pm s$ gilt. Das wollen wir im weiteren für c, s voraussetzen. Für α, β heißt das $\alpha\beta \neq 0$. Außerdem muß noch

$$\begin{aligned} \overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) &= (c^2 - s^2)\overline{det}(\tilde{\eta}, \eta_1, \eta_2) = (c^2 - s^2)(c\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) - s\,\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)) \overset{!}{\neq} 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{s}{c} \neq \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)}, \text{ für } c \neq 0, \text{ oder } \overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2) \neq 0, \text{ für } c = 0 \end{aligned}$$

gelten. Nun berechnen wir $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_2 = -(c\eta - s\overline{\eta}) \wedge (-s\overline{\eta}_2 + c\eta_2) \\
&= cs\, x_2 + c^2 x_1 + s^2 \overline{x}_1 + sc\, \overline{x}_2 \\
\tilde{x}_2 &= -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = -(c\eta - s\overline{\eta}) \wedge (c\eta_1 - s\overline{\eta}_1) \\
&= cs\, x_1 + c^2 x_2 + s^2 \overline{x}_2 + sc\, \overline{x}_1 \\
\tilde{x} &= c^2 x + s^2 \overline{x} + cs\Big(\int (x_2 + \overline{x}_2) du + \int (x_1 + \overline{x}_1) dv \Big) + x_0 \\
\tilde{N} &= \frac{\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} = \frac{\eta_1 \wedge \eta_2}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \eta_1, \eta_2)} = \frac{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}{c\,\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) - s\,\overline{det}(\overline{\eta}, \eta_1, \eta_2)} N
\end{aligned}$$

Wegen 4.4.2 können wir c, s noch normieren, so daß $c^2 - s^2 = \pm 1$ ist. Man kann deshalb $c = \pm\cosh\varphi$, $s = \sinh\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ nehmen (so erhält man mit $\varphi = 0$ und positivem Vorzeichen η) oder $c = \sinh\varphi$, $s = \pm\cosh\varphi$ (für $\varphi = 0$ und Vorzeichen $-$ bekommt man $\overline{\eta}$). Auch hier wollen wir die aus den so veränderten Konormalen entstehenden Affinminimalflächen **Assoziierte** nennen.
Wie bei $\varepsilon = 1$ sind die Assoziierten wie $\overline{\eta}$ und U, V nicht eindeutig. Ist $\tilde{\eta}$ eine Assoziierte, so ist auch $\tilde{\eta} + \tilde{\zeta}$ eine Assoziierte, weil neben $-U + V$ auch $-U + V + \zeta$ eine Adjungierte ist. Man erhält für $c, s \in \mathbb{R}$, $c^2 - s^2 \neq 0$, sowohl die Assoziierte $\tilde{\eta} = c\eta - s\overline{\eta}$ als auch $c\eta - s(\overline{\eta} + \zeta) = \tilde{\eta} - s\zeta$.
Gilt $s = 0$, erhält man aber nicht $\eta + \zeta$. Wir nennen trotzdem, wie bei den elliptischen Assoziierten, diese Konormalen $\eta + \zeta$ auch Assoziierte.

Bei euklidischen Minimalflächen beschreibt ein Punkt $x(p)$ unter Assoziierung eine Ellipse, d. h. die Kurve $\varphi \in [0, 2\pi] \mapsto {}^{\varphi}x(p) \in \mathbb{R}^3$ für den festen Punkt $p \in U$ ist eine Ellipse, siehe [Pab2].
Bei Affinminimalflächen kann man das bei der Konormalen beobachten:
Die Kurve $\varphi \in [0, 2\pi] \mapsto {}^{\varphi}\eta|_p \in \mathbb{R}_3$ ist für $\varepsilon = 1$ eine Ellipse[13], für $\varepsilon = -1$ besteht die Punktmenge $\{c\eta|_p - s\overline{\eta}|_p \,|c, s \in \mathbb{R}, c^2 - s^2 = \pm 1\}$ aus 4 Hyperbelästen, dabei liegen $\eta|_p$ und $\overline{\eta}|_p$ - anders als beim elliptischen Fall - auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten.
Diese Quadriken degenerieren nur, wenn $\overline{\eta} = a\,\eta$ ist. Das gilt aber auf keiner offenen Teilmenge von U. Sonst wäre $\varepsilon\eta_2 = \overline{\eta}_1 = \partial_1(a)\eta + a\eta_1$ und daher $a = 0$, insbesondere wäre $\overline{\eta}$ nicht regulär.

4.4.5 Verallgemeinerung der bisherigen Fälle

Wir wollen nun zeigen, wie man allgemein aus η die Konormalen der Flächen gewinnt, deren Normale $\tilde{N}$ stets die gleiche Richtung hat wie N. Dazu legen wir die Ableitungen $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$ der veränderten Konormalen etwas allgemeiner als bei den Assoziierten fest und geben Bedingungen an die verwendeten Funktionen a_i^j an.

Die Fälle in 4.4.1–4.4.4 beinhalteten Änderungen von η, die die Richtung der Affinnormale N gleich ließen. Es galt immer $\tilde{N} = f\eta_1 \wedge \eta_2$. Man kann einen allgemeinen Ansatz für $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$

[13] Wir haben ${}^{\varphi}\eta$ nur für $\varphi < \pi$ definiert und nehmen die beiden Hälften $\varphi \mapsto \pm{}^{\varphi}\eta|_p$.

durchführen, indem man $\tilde{\eta}$ durch seine Ableitungen $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ so festlegt, daß $\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 = f\eta_1 \wedge \eta_2$ gilt. Das ist für

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

offensichtlich der Fall, mehr noch, es ist dafür sogar der allgemeinste Fall. Setzt man

$$\tilde{\eta}_k = b_k \eta + a_k^i \eta_i$$

an, so hat $\tilde{N}$ nur dann die Richtung von N, wenn $b_k = 0$, für $k = 1, 2$, ist. Denn man erhält:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 &= (b_1 a_2^1 - b_2 a_1^1)\eta \wedge \eta_1 + (b_1 a_2^2 - b_2 a_1^2)\eta \wedge \eta_2 + (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1)\eta_1 \wedge \eta_2 \\ &= (b_1 a_2^2 - b_2 a_1^2)\varepsilon x_1 - (b_1 a_2^1 - b_2 a_1^1) x_2 + fN \end{aligned}$$

Weil x_1, x_2 und N linear unabhängig sind, ist $\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2$ nur dann ein Vielfaches von N, wenn $(b_1 a_2^1 - b_2 a_1^1) = (b_1 a_2^2 - b_2 a_1^2) = 0$ erfüllt ist. Außerdem soll die lineare Unabhängigkeit von $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ gewährleistet sein. Diese Bedingungen ($\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 = fN \neq 0$) gelten nur, wenn $b_1 = b_2 = 0$ ist.
Denn wäre $b_1 \neq 0, b_2 = 0$ in einem Punkt, so würde $a_2^1 = a_2^2 = 0$ und damit auch $\tilde{\eta}_2 = 0$ folgen.
Wären $b_1, b_2 \neq 0$ in einem Punkt, so würde $a_1^k = \frac{b_1}{b_2} a_2^k$ und somit $\tilde{\eta}_1 = \frac{b_1}{b_2}\tilde{\eta}_2$ gelten.
In beiden Fällen wären $\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\eta}_2$ nicht linear unabhängig. Dies wollen wir aber immer ausschließen.
Damit kommen allenfalls die in (4.9) definierten $\tilde{\eta}$ als Konormalen in Frage für Flächen, deren Blaschkesche Affinnormale die gleiche Richtung wie N hat.

Allerdings induzieren nicht alle durch (4.9) definierten $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ eine reguläre, ε–harmonische Abbildung $\tilde{\eta}$. Dazu müssen die a_i^k gewissen Bedingungen genügen. Diese Bedingungen an die a_i^k werden wir jetzt angeben:

Für die Regularität muß notwendig

$$a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \neq 0 \tag{4.10}$$

gelten. Außerdem sollen $\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\eta}_2$ integrabel sein und die daraus entstehende Stammfunktion $\tilde{\eta}$ ε–harmonisch. Das heißt, $\tilde{\eta}_{12} = \tilde{\eta}_{21}$ und $\tilde{\eta}_{11} + \varepsilon\tilde{\eta}_{22} = 0$ muß erfüllt sein. Das bedeutet ausführlich:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{12} - \tilde{\eta}_{21} &= \partial_2 a_1^1 \eta_1 + a_1^1 \eta_{12} + \partial_2 a_1^2 \eta_2 + a_1^2 \eta_{22} \\ &\quad -\partial_1 a_2^1 \eta_1 - a_2^1 \eta_{11} - \partial_1 a_2^2 \eta_2 - a_2^2 \eta_{21} \\ &= \partial_2 a_1^1 \eta_1 + a_1^1 (\overline{\Gamma}_{12}{}^l \eta_l - \overline{h}_{12}\eta) + \partial_2 a_1^2 \eta_2 + a_1^2 (\overline{\Gamma}_{22}{}^l \eta_l - \overline{h}_{22}\eta) \\ &\quad -\partial_1 a_2^1 \eta_1 - a_2^1 (\overline{\Gamma}_{11}{}^l \eta_l - \overline{h}_{11}\eta) - \partial_1 a_2^2 \eta_2 - a_2^2 (\overline{\Gamma}_{21}{}^l \eta_l - \overline{h}_{21}\eta) \\ &= (\partial_2 a_1^1 - \partial_1 a_2^1 + a_1^1 \overline{\Gamma}_{12}{}^1 + a_1^2 \overline{\Gamma}_{22}{}^1 - a_2^1 \overline{\Gamma}_{11}{}^1 - a_2^2 \overline{\Gamma}_{21}{}^1)\eta_1 \\ &\quad +(\partial_2 a_1^2 - \partial_1 a_2^2 + a_1^1 \overline{\Gamma}_{12}{}^2 + a_1^2 \overline{\Gamma}_{22}{}^2 - a_2^1 \overline{\Gamma}_{11}{}^2 - a_2^2 \overline{\Gamma}_{21}{}^2)\eta_2 \\ &\quad -(a_1^1 \overline{h}_{12} + a_1^2 \overline{h}_{22} - a_2^1 \overline{h}_{11} - a_2^2 \overline{h}_{21})\eta \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde\eta_{11} + \varepsilon\tilde\eta_{22} &= \partial_1 a_1^1\eta_1 + a_1^1\eta_{11} + \partial_1 a_1^2\eta_2 + a_1^2\eta_{21} \\
&\quad +\varepsilon\partial_2 a_2^1\eta_1 + \varepsilon a_2^1\eta_{12} + \varepsilon\partial_2 a_2^2\eta_2 + \varepsilon a_2^2\eta_{22} \\
&= (\partial_1 a_1^1 + \varepsilon\partial_2 a_2^1 + a_1^1\overline{\Gamma}_{11}{}^1 + a_1^2\overline{\Gamma}_{21}{}^1 + \varepsilon a_2^1\overline{\Gamma}_{12}{}^1 + \varepsilon a_2^2\overline{\Gamma}_{22}{}^1)\eta_1 \\
&\quad +(\partial_1 a_1^2 + \varepsilon\partial_2 a_2^2 + a_1^1\overline{\Gamma}_{11}{}^2 + a_1^2\overline{\Gamma}_{21}{}^2 + \varepsilon a_2^1\overline{\Gamma}_{12}{}^2 + \varepsilon a_2^2\overline{\Gamma}_{22}{}^2)\eta_2 \\
&\quad -(a_1^1\overline{h}_{11} + a_1^2\overline{h}_{21} + \varepsilon a_2^1\overline{h}_{12} + \varepsilon a_2^2\overline{h}_{22})\eta \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Da η, η_1, η_2 linear unabhängig sind, muß jeder Faktor davor 0 werden. Das ergibt sechs Gleichungen für die Funktionen a_i^j, die wir wegen $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$, d. h. $\overline{\Gamma}_{11}{}^k + \varepsilon\overline{\Gamma}_{22}{}^k = 0$, $\overline{h}_{11} + \varepsilon\overline{h}_{22} = 0$ so schreiben können:

$$
\begin{aligned}
\partial_2 a_1^1 - \partial_1 a_2^1 + (a_1^1 - a_2^2)\overline{\Gamma}_{12}{}^1 + (a_1^2 + \varepsilon a_2^1)\overline{\Gamma}_{22}{}^1 &= 0 && (4.11)\\
\partial_2 a_1^2 - \partial_1 a_2^2 + (a_1^1 - a_2^2)\overline{\Gamma}_{12}{}^2 + (a_1^2 + \varepsilon a_2^1)\overline{\Gamma}_{22}{}^2 &= 0 && (4.12)\\
(-\varepsilon a_1^2 - a_2^1)\overline{h}_{11} + (a_1^1 - a_2^2)\overline{h}_{12} &= 0 && (4.13)\\
\partial_1 a_1^1 + \varepsilon\partial_2 a_2^1 + (a_1^1 - a_2^2)\overline{\Gamma}_{11}{}^1 + (a_1^2 + \varepsilon a_2^1)\overline{\Gamma}_{21}{}^1 &= 0 && (4.14)\\
\partial_1 a_1^2 + \varepsilon\partial_2 a_2^2 + (a_1^1 - a_2^2)\overline{\Gamma}_{11}{}^2 + (a_1^2 + \varepsilon a_2^1)\overline{\Gamma}_{21}{}^2 &= 0 && (4.15)\\
(a_1^2 + \varepsilon a_2^1)\overline{h}_{21} + (-\varepsilon a_1^1 + \varepsilon a_2^2)\overline{h}_{22} &= 0 && (4.16)
\end{aligned}
$$

Nur wenn die a_i^j die Bedingungen (4.10)–(4.16) erfüllen, wird durch (4.9) eine reguläre, ε–harmonische Abbildung $\tilde\eta$ bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt. Wenn für dieses $\tilde\eta$ auch noch $\overline{det}(\tilde\eta, \tilde\eta_1, \tilde\eta_2) \neq 0$ gilt, kann man Satz 4.4 anwenden und erhält aus $\tilde\eta$ eine Affinminimalfläche.

Einige dieser Bedingungen werden wir uns nun genauer ansehen.
Die Gleichungen (4.13), (4.16) bilden ein lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{pmatrix} \overline{h}_{11} & \overline{h}_{12} \\ \overline{h}_{21} & \overline{h}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon a_1^2 - a_2^1 \\ a_1^1 - a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}
$$

(4.17) ist erfüllt, wenn

$$
a_1^1 = a_2^2 \text{ und } a_1^2 = -\varepsilon a_2^1 \tag{4.18}
$$

gilt. Das ist sogar die einzige Lösung des Gleichungssystems (4.17) für $rg\ \overline{h} = 2$. Durch Einsetzen der Lösung (4.18) in (4.11), (4.12), (4.14), (4.15) erhält man für $l = 1, 2$:

$$
\partial_2 a_1^l = \partial_1 a_2^l \tag{4.19}
$$

$$
\partial_1 a_1^l + \varepsilon\partial_2 a_2^l = 0 \tag{4.20}
$$

Aus (4.19) folgt, daß Funktionen a^l existieren mit

$$
\partial_i a^l = a_i^l.
$$

Nach (4.20) sind diese a^l ε–harmonisch:

$$
\partial_1\partial_1(a^l) + \varepsilon\partial_2\partial_2(a^l) = 0
$$

Außerdem sind die beiden Funktionen wegen (4.18) auf diese Weise gekoppelt:

$$
\partial_1(a^1) = \partial_2(a^2),\ \partial_2(a^1) = -\varepsilon\partial_1(a^2). \tag{4.21}
$$

Wir werden zwei Funktionen a^1, a^2, die so verbunden sind, **konjugiert ε–harmonisch** zueinander nennen. Ist eine davon ε–harmonisch, so ist es auch die andere. Und zwar erhält man mit (4.21) aus $\partial_1\partial_1 a^1 + \varepsilon\partial_2\partial_2 a^1 = 0$:

$$\partial_1\partial_1 a^2 + \varepsilon\partial_2\partial_2 a^2 = -\varepsilon\partial_1\partial_2 a^1 + \varepsilon\partial_2\partial_1 a^1 = 0$$

Ist $rg\,\overline{h} = 2$, folgen die Bedingungen (4.18)–(4.21) notwendig aus (4.11)–(4.16).

Satz 4.5 *Ist x eine elliptische ($\varepsilon = 1$) bzw. hyperbolische ($\varepsilon = -1$) Affinminimalfäche in isothermer Parametrisierung, a^1 eine beliebige, ε–harmonische Funktion mit $(\partial_1 a^1)^2 + \varepsilon(\partial_2 a^1)^2 \neq 0$ und a^2 eine zu a^1 konjugiert ε–harmonische Funktion, erhält man vermöge*

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 a^1 & \partial_1 a^2 \\ \partial_2 a^1 & \partial_2 a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

eine neue Konormale $\tilde{\eta}$ und damit eine Affinminimalfläche $\tilde{x}$, deren Blaschkesche Affinnormale die gleiche Richtung hat wie die von x, außer $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = 0$. Für $rg\ \overline{h} = 2$ sind das die einzigen solchen Flächen.

Beweis: $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ sind nach (4.9) definiert, also hat $\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2$ die gleiche Richtung wie N bzw. $\eta_1 \wedge \eta_2$. Weil $a_i^k = \partial_i a^k$ ist, gilt (4.19), und da a^1, a^2 konjugiert ε–harmonisch zueinander sind und beide ε–harmonisch, sind (4.18), (4.20) erfüllt. Zusammen gelten (4.11)–(4.16). Aus $(\partial_1 a^1)^2 + \varepsilon(\partial_2 a^1)^2 \neq 0$ folgt auch (4.10). $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$ sind also linear unabhängig und integrabel, die daraus entstehende Konormale $\tilde{\eta}$ ist ε–harmonisch. Daher kann man Satz 4.4 benutzen, wenn $\tilde{\eta}$ regulär ist, d. h. wenn $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \neq 0$ gilt. #

Wir nennen eine[14] gemäß Satz 4.5 mit der Funktion a^1 gebildete Konormale $\tilde{\eta}$ **verallgemeinerte Assoziierte** und bezeichnen $\tilde{\eta}$ mit ${}^{a^1}\eta$. Die bisher betrachteten Deformationen ergeben sich als Spezialfälle: Wir erhalten

- $\eta + \zeta$ als ein ${}^{u}\eta$, also durch Wahl von $a^1(u,v) = u$ bei Satz 4.5,
- $r\eta$ als ein ${}^{ru}\eta$,
- $\overline{\eta}$ als ein ${}^{-v}\eta$ und
- ${}^{\varphi}\eta$ als ein ${}^{a^1}\eta$ mit $a^1(u,v) = \cos\varphi\, u - \sin\varphi\, v$.

Wenn $rg\,\overline{h} < 2$ gilt, können wir noch allgemeinere Deformationen betrachten, denn es gibt noch andere Lösungen für (4.17) als $a_1^1 - a_2^2 = 0$, $a_1^2 + \varepsilon a_2^1 = 0$.
Wenn die Funktionen a_i^j (4.10)–(4.16) erfüllen (und nicht unbedingt (4.18)), bezeichnen wir eine durch (4.9) festgelegte Abbildung $\tilde{\eta}$ mit ${}^{a_1^1,a_1^2}_{a_2^1,a_2^2}\eta$. Ist $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \neq 0$, wird mit Satz 4.4 eine Affinminimalfläche erzeugt. Die verallgemeinerten Assoziierten, die wir weiter oben definiert haben, sind Spezialfälle hierzu: Haben a^1, a^2 die Voraussetzungen von Satz 4.5, ist ein ${}^{a^1}\eta$ ein ${}^{\partial_1 a^1,\partial_1 a^2}_{\partial_2 a^1,\partial_2 a^2}\eta$.

Folgerung: a^1, a^2 und b^1, b^2 sollen die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllen. Dann gilt für verallgemeinerte Assoziierte der Konormalen η einer Affinminimalfläche:

[14] Wie bei den Assoziierten ist auch ${}^{a^1}\eta$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt.

${}^{a^1}({}^{b^1}\eta)$ und ${}^{b^1}({}^{a^1}\eta)$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

Beweis: Wir zeigen dies, indem wir die Ableitungen in der Form von (4.9) betrachten. Der Beweis besteht in der Untersuchung der 2×2–Matrizen. Wir bezeichnen $\partial_j(a^i)$ mit a^i_j, $\partial_k(b^l)$ mit b^l_k.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} {}^{a^1}({}^{b^1}\eta)_1 \\ {}^{a^1}({}^{b^1}\eta)_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ -\varepsilon a^2_1 & a^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ -\varepsilon b^2_1 & b^1_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^1_1 b^1_1 - \varepsilon a^2_1 b^2_1 & a^1_1 b^2_1 + a^2_1 b^1_1 \\ -\varepsilon a^2_1 b^1_1 - \varepsilon a^1_1 b^2_1 & -\varepsilon a^2_1 b^2_1 + a^1_1 b^1_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ -\varepsilon b^2_1 & b^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ -\varepsilon a^2_1 & a^1_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^{b^1}({}^{a^1}\eta)_1 \\ {}^{b^1}({}^{a^1}\eta)_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen. #

4.5 Darstellung der Flächengrößen von verallgemeinerten Assoziierten durch Größen der ursprünglichen Fläche

Wir stellen in diesem Abschnitt die Flächengrößen $h, \overline{h}, \mathcal{K}, S, K$ einer Fläche $\tilde{x}$, die nach Satz 4.5 gebildet wird, durch Größen der Fläche x dar.

Die Affinminimalfläche x sei gegeben, η sei die zugehörige Konormale und $\tilde{\eta}$ eine verallgemeinerte Assoziierte. Die a^k_i sollen den Voraussetzungen des Satzes 4.5 genügen. $\tilde{\eta}$ kann man als Linearkombination von η, η_1 und η_2 schreiben:

$$\tilde{\eta} =: \beta\eta + \alpha^i \eta_i.$$

Ein Koeffizientenvergleich der Ableitungen $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ mit (4.9) ergibt

$$\partial_i(\beta) - \alpha^l \overline{h}_{li} = 0, \;\; a^k_i = \delta^k_i \beta + \partial_i(\alpha^k) + \alpha^l \overline{\Gamma}_{il}{}^k. \tag{4.22}$$

Wegen

$$\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = \beta Det(a^k_i) \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \neq 0$$

muß $\beta \neq 0$ sein.

Wie bereits gesehen, ist $\tilde{h}$ durch (4.7) festgelegt:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{12} &= 0, \\
\varepsilon \tilde{h}_{11} &= \tilde{h}_{22} = \overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \\
&= \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) \beta Det(a^j_i) \\
&= h_{22} \beta Det(a^j_i) = \varepsilon h_{11} \beta Det(a^j_i).
\end{aligned}$$

Man erhält demnach

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}\beta Det(a_i^j). \tag{4.23}$$

Bemerkung: Wie in Abschnitt 4.2 erwähnt, kann sich das Vorzeichen von h_{11} beim Übergang zu $\tilde{h}_{11}$ ändern. Das ist der Fall, wenn $\beta\, Det(a_i^j) < 0$ ist.

Nun ergibt sich wegen

$$\overline{h}_{ij} = -\frac{\overline{det}(\eta_{ij}, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}$$

und $\tilde{\eta}_{ij} = \partial_j(a_i^k)\eta_k + a_i^k \eta_{kj}$ für $\tilde{\overline{h}}_{ij}$ analog

$$\begin{aligned}
\tilde{\overline{h}}_{ij} &= -\frac{\overline{det}(\tilde{\eta}_{ij}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} = -\frac{\overline{det}(\tilde{\eta}_{ij}, \eta_1, \eta_2)}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \eta_1, \eta_2)} \\
&= -\frac{\overline{det}(\partial_j(a_i^k)\eta_k + a_i^k \eta_{kj}, \eta_1, \eta_2)}{\beta\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} = \frac{-a_i^k \overline{det}(\eta_{kj}, \eta_1, \eta_2)}{\beta\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)} \\
&= \frac{1}{\beta} a_i^k \overline{h}_{kj}.
\end{aligned}$$

Es gilt $(\tilde{\overline{h}}_{ij}) = (a_i^k)(\overline{h}_{kj})\frac{1}{\beta}$ und, weil nach (4.10) $rg\,(a_i^k) = 2$ ist, bleibt der Rang der 2–Form $\overline{h}$ bei den verallgemeinerten Assoziierten erhalten.

Mit $\overline{h}$ können wir nun die neue Gaußsche Krümmung berechnen:

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{Det\,\tilde{\overline{h}}}{Det\,\tilde{h}} = \frac{Det(a_i^k)Det\,\overline{h}}{\beta^2\beta^2 Det(a_i^k)^2 Det\,h} = \frac{\mathcal{K}}{\beta^4 Det(a_i^k)}$$

Wir erkennen also: Ist $\mathcal{K} = 0$, also x eine uneigentliche Affinsphäre, so ist das auch für $\tilde{x}$ der Fall.
Ist $\mathcal{K} \neq 0$, so bleibt das Vorzeichen von $\mathcal{K}$ im Fall $\varepsilon = 1$ erhalten, d. h. negativ, im Fall $\varepsilon = -1$ kann es sich ändern, aber nur, wenn $Det(a_i^k) < 0$ ist.

Für den Shape–Operator gilt nach Lemma 1.9 (also $\overline{h}_{il} = h_{lm}S_i^m$) und (4.23):

$$\tilde{S}_i^j = \tilde{h}^{jl}\tilde{\overline{h}}_{li} = h^{jl}\frac{a_i^k}{\beta^2 Det(a_i^j)}\overline{h}_{kl} = a_i^k S_k^j \frac{1}{\beta^2 Det(a_i^j)}$$

Nun kommen wir zu K_{ij}^k. Da wegen Codazzi für h, der Apolarität und $K = \hat{\nabla} - \overline{\nabla}$

$$\begin{aligned}
K_{11}^1 &= -\varepsilon K_{22}^1 = -K_{12}^2 = -K_{21}^2 = \hat{\Gamma}_{11}{}^1 - \overline{\Gamma}_{11}{}^1 \\
K_{11}^2 &= \varepsilon K_{21}^1 = \varepsilon K_{12}^1 = -\varepsilon K_{22}^2 = \hat{\Gamma}_{11}{}^2 - \overline{\Gamma}_{11}{}^2
\end{aligned}$$

gilt und das analog für $\tilde{K}$, reicht es, nur $\tilde{K}_{11}^1$, $\tilde{K}_{11}^2$ zu berechnen: Mit (4.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{11}^1 &= \tilde{\hat{\Gamma}}_{11}{}^1 - \tilde{\overline{\Gamma}}_{11}{}^1 = \frac{\partial_1(\tilde{E})}{2\tilde{E}} - \frac{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_{11}, \tilde{\eta}_2)}{\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)} \\
&\overset{(4.23)}{=} \frac{1}{2}\partial_1(\log|\beta|) + \frac{1}{2}\partial_1(\log|E|) + \frac{1}{2}\partial_1(\log|Det(a_i^k)|)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\overline{det}(\tilde\eta,(\partial_1(a_1^j)+a_1^l\overline{\Gamma}_{l1}{}^j)\eta_j-a_1^l\overline{h}_{l1}\eta,a_2^k\eta_k)}{\overline{det}(\tilde\eta,\eta_1,\eta_2)Det(a_i^k)}\\
\overset{(4.22)}{=}\; & \frac{\alpha^i\overline{h}_{i1}}{2\beta}+\hat\Gamma_{11}{}^1+\frac{1}{2}\partial_1(\log|Det(a_i^k)|)\\
& -\frac{a_2^2(\partial_1(a_1^1)+a_1^k\overline{\Gamma}_{k1}{}^1)-a_2^1(\partial_1(a_1^2)+a_1^k\overline{\Gamma}_{k1}{}^2)}{Det(a_i^k)}\\
& +\frac{a_2^k a_1^l\overline{h}_{l1}\overline{det}(\tilde\eta,\eta,\eta_k)}{\overline{det}(\tilde\eta,\eta_1,\eta_2)Det(a_i^k)}\\
=\; & \frac{\alpha^i\overline{h}_{i1}Det(a_i^k)}{2\beta Det(a_i^k)}+\frac{2\hat\Gamma_{11}{}^1Det(a_i^k)}{2Det(a_i^k)}+\frac{\partial_1(Det(a_i^k))}{2Det(a_i^k)}\\
& +\frac{-2\partial_1(a_1^1)a_2^2+2\partial_1(a_1^2)a_2^1-2a_1^ka_2^2\overline{\Gamma}_{k1}{}^1+2a_1^ka_2^1\overline{\Gamma}_{k1}{}^2}{2Det(a_i^k)}\\
& +\frac{a_1^k\overline{h}_{k1}(-a_2^2\alpha^1+a_2^1\alpha^2)}{\beta Det(a_i^k)}\\
=\; & \frac{(\alpha^1\overline{h}_{11}+\alpha^2\overline{h}_{21})(a_1^1a_2^2-a_1^2a_2^1)+2(a_1^1\overline{h}_{11}+a_1^2\overline{h}_{21})(-a_2^2\alpha^1+a_2^1\alpha^2)}{2\beta Det(a_i^k)}\\
& +\frac{2\hat\Gamma_{11}{}^1(a_1^1a_2^2-a_1^2a_2^1)+\partial_1(a_1^1)a_2^2+a_1^1\partial_1(a_2^2)-\partial_1(a_1^2)a_2^1-a_1^2\partial_1(a_2^1)}{2Det(a_i^k)}\\
& +\frac{-2\partial_1(a_1^1)a_2^2+2\partial_1(a_1^2)a_2^1-2a_1^1a_2^2\overline{\Gamma}_{11}{}^1-2a_1^2a_2^2\overline{\Gamma}_{21}{}^1+2a_1^1a_2^1\overline{\Gamma}_{11}{}^2+2a_1^2a_2^1\overline{\Gamma}_{21}{}^2}{2Det(a_i^k)}\\
=\; & \frac{-\overline{h}_{11}a_1^1a_2^2\alpha^1+\overline{h}_{21}a_2^1a_1^2\alpha^2-\overline{h}_{11}a_2^1a_1^2\alpha^1+\overline{h}_{21}a_1^1a_2^2\alpha^2-2\overline{h}_{12}a_2^2a_1^2\alpha^1+2\overline{h}_{11}a_2^1a_1^1\alpha^2}{2\beta Det(a_i^k)}\\
& +\frac{-\partial_1(a_1^1)a_2^2+a_1^1\partial_1(a_2^2)+\partial_1(a_1^2)a_2^1-a_1^2\partial_1(a_2^1)}{2Det(a_i^k)}\\
& +\frac{2K_{11}^1a_1^1a_2^2-2K_{21}^2a_2^1a_1^2-2a_1^2a_2^2\overline{\Gamma}_{21}{}^1+2a_1^1a_2^1\overline{\Gamma}_{11}{}^2}{2Det(a_i^k)}\\
\overset{(4.18)}{=}\; & \frac{-(\overline{h}_{11}a_1^1a_1^1+2\overline{h}_{12}a_1^1a_1^2+\overline{h}_{22}a_1^2a_1^2)\alpha^1}{2\beta Det(a_i^k)}\\
& +\frac{(\overline{h}_{11}a_1^1a_2^1+\overline{h}_{12}a_1^1a_2^2+\overline{h}_{21}a_1^2a_2^1+\overline{h}_{22}a_1^2a_2^2)\alpha^2}{2\beta Det(a_i^k)}\\
& +\frac{2K_{11}^1a_1^1a_1^1+2K_{22}^1a_1^2a_1^2-2(\overline{\Gamma}_{21}{}^1+\varepsilon\overline{\Gamma}_{11}{}^2)a_1^1a_1^2}{2Det(a_i^k)}\\
=\; & \frac{K_{ij}^1a_1^ia_1^j}{Det(a_i^k)}+\frac{\overline{h}_{ij}a_1^ia_2^j\alpha^2-\overline{h}_{ij}a_1^ia_1^j\alpha^1}{2\beta Det(a_i^k)}
\end{aligned}
$$

Analog ist

$$
\tilde K_{11}^2=\frac{a_1^ia_1^jK_{ij}^2}{Det(a_i^k)}+\frac{-a_1^ka_1^l\overline{h}_{kl}\alpha^2-\varepsilon a_1^ka_2^l\overline{h}_{kl}\alpha^1}{2\beta Det(a_i^k)}.
$$

4.6 Beispiele: Konkrete Flächen und ihre Assoziierten

Hier geben wir von einigen Affinminimalflächen die Assoziierten an, in 4.6.1 sogar verallgemeinerte Assoziierte.
Wir stellen wie in Abschnitt 2.4 x und die Vektorfelder als Spaltenvektoren dar, die Formen wie η, $\tilde{\eta}$ hingegen als Zeilenvektoren.

4.6.1 Paraboloid

Ein einfaches Beispiel für eine Affinminimalfläche ist ein elliptisches bzw. hyperbolisches Paraboloid, die wir jetzt gleichzeitig untersuchen werden. Das Paraboloid haben wir in 2.4.6 schon besprochen. Aus x in der in 2.4.6 gewählten isothermen Parametrisierung und der Blaschkeschen Affinnormale N

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2+\varepsilon v^2) \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kann man mit der Hilfe von Lemma 1.16 η berechnen. Es gilt:

$$\eta = \begin{pmatrix} -u \\ -\varepsilon v \\ 1 \end{pmatrix}^T, \; \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \; \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon$$

η ist ε–harmonisch für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = -1$.
Ob die durch η induzierte Fläche x elliptisch oder hyperbolisch ist, hängt nicht von dem ε in der zweiten Zeile bei η ab, sondern nur von der Wahl von ε in (4.8), d. h. für $x_1 = \eta \wedge \varepsilon \eta_2$.

Nun berechnen wir die verallgemeinerten Assoziierten: Seien a^1, a^2 beliebige Funktionen, die die Voraussetzungen aus Satz 4.5 erfüllen. Wir bezeichnen $\partial_i(a^k)$ mit a_i^k. Dann bekommen wir für die hierdurch festgelegten verallgemeinerten Assoziierten $\tilde{\eta} := {}^{a^1}\eta$:

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -a_1^1 \\ -\varepsilon a_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -a_2^1 \\ -\varepsilon a_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} -a^1 \\ -\varepsilon a^2 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \zeta$$
$$\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = (1+\zeta_3)\varepsilon Det(a_i^k)$$

Die 3. Komponente von $\tilde{\eta}$ haben wir $1+\zeta_3$ gesetzt. Wir hätten auch eine andere Konstante nehmen können, aber so ist $\tilde{\eta}$ auch bei $\zeta = 0$ regulär. Für die Regularität muß die 3. Komponente $\neq 0$ sein, es muß also $\zeta_3 \neq -1$ gelten.
Damit lassen sich $\tilde{x}$, $\tilde{N}$ berechnen:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{\eta} \wedge \varepsilon \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} a_2^2 \\ -\varepsilon a_2^1 \\ a^1 a_2^2 - a^2 a_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_3 a_2^2 \\ -\varepsilon \zeta_3 a_2^1 \\ -\zeta_1 a_2^2 + \varepsilon \zeta_2 a_2^1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_2 = -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon a_1^2 \\ a_1^1 \\ -\varepsilon a^1 a_1^2 + \varepsilon a^2 a_1^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon \zeta_3 a_1^2 \\ \zeta_3 a_1^1 \\ \varepsilon \zeta_1 a_1^2 - \zeta_2 a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} a^1 + \zeta_3 a^1 \\ a^2 + \zeta_3 a^2 \\ \frac{1}{2}((a^1)^2 + \varepsilon (a^2)^2) - \zeta_1 a^1 - \zeta_2 a^2 \end{pmatrix} + x_0$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{1+\zeta_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{x}(u,v)$ ist die Abbildung $x(a^1(u,v), a^2(u,v))$, die man der Transformation

$$y \mapsto \begin{pmatrix} 1+\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\zeta_3 & 0 \\ -\zeta_1 & -\zeta_2 & 1 \end{pmatrix} y$$

unterworfen hat, $\tilde{\eta}(u,v)$ und $\eta(a^1(u,v), a^2(u,v))$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

Bemerkung: Man könnte hier den Eindruck gewinnen, daß eine verallgemeinerte Assoziierte einer Konormalen η immer die Form

$$\tilde{\eta}(u,v) = \eta(a^1(u,v), a^2(u,v)) + \zeta$$

mit einem konstanten Vektor ζ hat. Auf den ersten Blick sieht es aus, als seien die Ableitungen $\tilde{\eta}_i$ so einer Komposition $\tilde{\eta}$ wie in (4.9) gebildet, es gilt nämlich nach der Kettenregel

$$\tilde{\eta}_i(u,v) = \partial_i a^j \, \eta_j(a^1(u,v), a^2(u,v)).$$

In (4.9) steht aber - in ausführlicher Schreibweise - im Gegensatz zu diesem Ausdruck $\eta_j(u,v)$ auf der rechten Seite und das ist i. a. nicht mit $\eta_j(a^1(u,v), a^2(u,v))$ identisch. Gerade bei einem Paraboloiden ist dies jedoch so, da die η_j konstant sind.

Für die Konormale $\eta = (-u, -\varepsilon v, 1)$ eines Paraboloiden erhält man die folgenden Größen aus der Ableitungsgleichung (1.15):

$$\forall i,k,j : \overline{h}_{ik} = \overline{\Gamma}_{ik}{}^{j} = 0$$

Das Gleichungssystem (4.17) ist damit immer erfüllt, es muß nicht (4.18) gelten, und die Gleichungen (4.11), (4.12), (4.14), (4.15) sind mit (4.19) und (4.20) äquivalent.
Das bedeutet: Die a_i^k müssen nur die Bedingungen (4.19), (4.20) und (4.10) erfüllen. Man bekommt derartige a_i^k durch Wahl von zwei ε–harmonischen Funktionen a, b und $\partial_k a = a_k^1, \partial_k b = a_k^2$. Damit gelten (4.19), (4.20). Daneben muß $\partial_1(a)\partial_2(b) - \varepsilon\partial_2(a)\partial_1(b) \neq 0$ sein. a, b genügen also beinahe allen Bedingungen aus Satz 4.5, nur konjugiert ε–harmonisch zueinander müssen sie nicht sein. Man erhält:

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -\partial_1(a) \\ -\varepsilon\partial_1(b) \\ 0 \end{pmatrix}^T, \; \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_2(a) \\ -\varepsilon\partial_2(b) \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} -a \\ -\varepsilon b \\ 1 \end{pmatrix}^T + \zeta$$

$$\tilde{x}_1 = \tilde{\eta} \wedge \varepsilon \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \partial_2(b) \\ -\varepsilon \partial_2(a) \\ a\partial_2(b) - b\partial_2(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_3 \partial_2(b) \\ -\varepsilon \zeta_3 \partial_2(a) \\ -\zeta_1 \partial_2(b) + \varepsilon \zeta_2 \partial_2(a) \end{pmatrix}$$
$$\tilde{x}_2 = -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon \partial_1(b) \\ \partial_1(a) \\ -\varepsilon a \partial_1(b) + \varepsilon b \partial_1(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon \zeta_3 \partial_1(b) \\ \zeta_3 \partial_1(a) \\ \varepsilon \zeta_1 \partial_1(b) - \zeta_2 \partial_1(a) \end{pmatrix}$$

Durch Integration bekommt man noch allgemeinere Flächen als die weiter oben errechneten.

4.6.2 Die Ennepersche Minimalfläche

Wir werden nun die Ennepersche Minimalfläche als Beispiel einer hyperbolischen Fläche in folgender Parametrisierung betrachten:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{3}v^3 - uv^2 + u^2 v - u + v \\ \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}v^3 - uv^2 - u^2 v - u - v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}, \; N = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$x_1 = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 + 2uv - 1 \\ u^2 - v^2 - 2uv - 1 \\ 2u \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 - 2uv + 1 \\ -u^2 + v^2 - 2uv - 1 \\ -2v \end{pmatrix}$$

Für die Konormale erhält man:

$$\eta = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}^T, \; \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2u \end{pmatrix}^T, \; \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2v \end{pmatrix}^T$$
$$\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2) = -2(1 + u^2 + v^2)$$

Wir bestimmen die nach 4.4.4 definierten Assoziierten: Seien c, s zwei reelle Zahlen mit $c^2 - s^2 \neq 0$, z. B. $c = \pm \cosh \varphi$, $s = \sinh \varphi$ für eine reelle Zahl φ. Dann ist eine Assoziierte festgelegt durch:

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} c + s \\ c - s \\ -2cu - 2sv \end{pmatrix}^T, \; \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} s + c \\ s - c \\ -2su - 2cv \end{pmatrix}^T,$$
$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} (c+s)(u+v) \\ (c-s)(u-v) \\ -cu^2 - 2suv - cv^2 \end{pmatrix}^T + \zeta$$
$$\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = -2(c^2 - s^2)(cu^2 + cv^2 + 2suv + \zeta_1(u+v) + \zeta_2(u-v) + \zeta_3)$$

Ist $\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \neq 0$, kann man $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$ berechnen:

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} (c-s)(2su^2 + 2cuv + cu^2 - cv^2) \\ (c+s)(-2su^2 - 2cuv - cv^2 + cu^2) \\ 2u(c^2 - s^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta_2(su + cv) - \zeta_3(c - s) \\ -2\zeta_1(su + cv) - \zeta_3(c + s) \\ \zeta_1(c - s) + \zeta_2(c + s) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} (c-s)(-2sv^2-2cuv+cu^2-cv^2) \\ (c+s)(-2sv^2-2cuv+cv^2-cu^2) \\ -2v(c^2-s^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta_2(cu+sv)+\zeta_3(c-s) \\ -2\zeta_1(cu+sv)-\zeta_3(c+s) \\ -\zeta_1(c-s)+\zeta_2(c+s) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} (c-s)(\frac{2}{3}su^3+\frac{1}{3}cu^3+cu^2v-cuv^2-\frac{2}{3}sv^3-\frac{1}{3}cv^3) \\ (c+s)(-\frac{2}{3}su^3+\frac{1}{3}cu^3-cu^2v-cuv^2-\frac{2}{3}sv^3+\frac{1}{3}cv^3) \\ (c^2-s^2)u^2-(c^2-s^2)v^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \zeta_2su^2+2\zeta_2cuv-\zeta_3(c-s)(u-v)+\zeta_2sv^2 \\ -\zeta_1su^2-2\zeta_1cuv-\zeta_3(c+s)(u+v)-\zeta_1sv^2 \\ \zeta_1(c-s)u+\zeta_2(c+s)u-\zeta_1(c-s)v+\zeta_2(c+s)v \end{pmatrix} + x_0,$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{cu^2+cv^2+2suv+\zeta_1(u+v)+\zeta_2(u-v)+\zeta_3} \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.6.3 Eine elliptische Affinminimalfläche

Hier wollen wir noch eine nicht so triviale elliptische Affinminimalfläche angeben. Die folgende Fläche stimmt mit der Enneperschen Minimalfläche nicht nur auf der Parameterlinie $x(u,0)$ überein, auch die Normalen und Konormalen der beiden Flächen sind längs $(u,0)$ identisch. Wie man zu solchen Flächen kommt, zeigen wir in Abschnitt 5.6.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^3+u^2v+uv^2+\frac{1}{3}v^3-u+v \\ \frac{1}{3}u^3-u^2v+uv^2-\frac{1}{3}v^3-u-v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix},\ N = \frac{1}{1+u^2-v^2}\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1+(u+v)^2 \\ -1+(u-v)^2 \\ 2u \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1+(u+v)^2 \\ -1-(u-v)^2 \\ 2v \end{pmatrix}$$

Die Konormale ist gegeben durch:

$$\eta = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ 1-u^2+v^2 \end{pmatrix}^T,\ \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2u \end{pmatrix}^T,\ \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}^T$$

$$\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_2) = 2(1+u^2-v^2)$$

x ist daher nicht überall regulär, wir betrachten nur Punkte $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $v^2 < 1+u^2$. Sei $c := \cos\varphi$, $s := \sin\varphi$, $0 \leq \varphi < \pi$. Die Assoziierten $\tilde{\eta}$ erhalten wir als:

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} c-s \\ c+s \\ -2cu+2sv \end{pmatrix}^T,\ \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -c-s \\ c-s \\ 2su+2cv \end{pmatrix}^T,$$

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} (c-s)u-(c+s)v \\ (c+s)u+(c-s)v \\ -cu^2+2suv+cv^2 \end{pmatrix}^T + \zeta$$

$$\overline{det}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2) = 2(c^2+s^2)(cu^2-cv^2-2suv+\zeta_1(u+v)+\zeta_2(u-v)+\zeta_3)$$

Wenn $\overline{det}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2) \neq 0$ ist, ergibt sich für $\tilde{x}$ und $\tilde{N}$:

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} (2s^2+c^2+cs)u^2+(c^2-cs)v^2+(2c^2+2cs)uv \\ (2s^2+c^2-cs)u^2+(c^2+cs)v^2+(-2c^2+2cs)uv \\ 2(c^2+s^2)u \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 2\zeta_2 su + 2\zeta_2 cv - \zeta_3(c-s) \\ -2\zeta_1 su - 2\zeta_1 cv - \zeta_3(c+s) \\ \zeta_1(c-s) + \zeta_2(c+s) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} (c^2+cs)u^2 + (2s^2+c^2-cs)v^2 + (2c^2-2cs)uv \\ (-c^2+cs)u^2 + (-2s^2-c^2-cs)v^2 + (2c^2+2cs)uv \\ 2(c^2+s^2)v \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 2\zeta_2 cu - 2\zeta_2 sv + \zeta_3(c+s) \\ -2\zeta_1 cu + 2\zeta_1 sv - \zeta_3(c-s) \\ -\zeta_1(c+s) + \zeta_2(c-s) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2s^2+c^2+cs)u^3 + (c^2+cs)u^2v + (c^2-cs)uv^2 + \frac{1}{3}(2s^2+c^2-cs)v^3 \\ \frac{1}{3}(2s^2+c^2-cs)u^3 + (-c^2+cs)u^2v + (c^2+cs)uv^2 + \frac{1}{3}(-2s^2-c^2-cs)v^3 \\ (c^2+s^2)(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \zeta_2 su^2 + 2\zeta_2 cuv - \zeta_2 sv^2 - \zeta_3(c-s)u + \zeta_3(c+s)v \\ -\zeta_1 su^2 - 2\zeta_1 cuv + \zeta_1 sv^2 - \zeta_3(c+s)u - \zeta_3(c-s)v \\ (\zeta_1(c-s) + \zeta_2(c+s))u + (-\zeta_1(c+s) + \zeta_2(c-s))v \end{pmatrix} + x_0,$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{cu^2 - cv^2 - 2suv + \zeta_1(u+v) + \zeta_2(u-v) + \zeta_3} \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 1 \end{pmatrix}$$