

Die Ladyzhenskaya-Konstante in der numerischen  
Behandlung von Strömungsproblemen

Dissertation zur Erlangung des  
naturwissenschaftlichen Doktorgrades der  
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von  
Manuel Keßler  
aus  
Werneck

Würzburg 2000

Eingereicht am: 25.5.2000  
bei der Fakultät für Mathematik und Informatik

1. Gutachter: Prof. Dr. Manfred Dobrowolski
2. Gutachter: Prof. Dr. Christian Klingenberg

Tag der mündlichen Prüfung:

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Stokes-Gleichungen . . . . .                                    | 2         |
| 1.2      | PDG mit Nebenbedingungen . . . . .                              | 3         |
| 1.3      | Motivation der Untersuchungen . . . . .                         | 4         |
| 1.4      | Überblick . . . . .   | 5         |
| <b>2</b> | <b>Kontinuierliches Problem</b>                                 | <b>7</b>  |
| 2.1      | Stabilität der Stokes-Gleichungen . . . . .                     | 7         |
| 2.2      | Velte-Zerlegung des $H_0^{1,2}$ . . . . .                       | 11        |
| 2.3      | Äquivalenzen . . . . .  | 12        |
| 2.3.1    | Verwandtes Eigenwertproblem . . . . .                           | 12        |
| 2.3.2    | Kornsche Ungleichung . . . . .                                  | 14        |
| 2.3.3    | Friedrichssche Ungleichung . . . . .                            | 17        |
| 2.3.4    | Mehrfacher Zusammenhang . . . . .                               | 19        |
| 2.4      | Analytische Beweise . . . . .                                   | 20        |
| 2.4.1    | Kornsche Ungleichung . . . . .                                  | 20        |
| 2.4.2    | Friedrichssche Ungleichung . . . . .                            | 24        |
| 2.4.3    | Ladyzhenskaya-Ungleichung für Ellipsen und Ellipsoide . . . . . | 27        |
| 2.4.4    | Ladyzhenskaya-Konstante im periodischen Kanal . . . . .         | 30        |
| <b>3</b> | <b>Diskretes Problem</b>  | <b>33</b> |
| 3.1      | Finite Elemente . . . . .                                       | 34        |
| 3.1.1    | Unstetige Elemente . . . . .                                    | 35        |
| 3.1.2    | $C^0$ -Elemente . . . . .                                       | 35        |
| 3.1.3    | $C^1$ -Elemente . . . . .                                       | 37        |
| 3.1.4    | Nichtkonforme Elemente . . . . .                                | 37        |
| 3.1.5    | Bubble-Funktionen . . . . .                                     | 38        |
| 3.2      | Stabile Diskretisierung . . . . .                               | 38        |
| 3.2.1    | Konvergenz der diskreten Lösung . . . . .                       | 40        |
| 3.2.2    | Verletzung der Stabilitätsforderung . . . . .                   | 41        |
| 3.2.3    | Stabile Elemente . . . . .                                      | 43        |
| 3.2.4    | Mini-Element . . . . .  | 45        |
| 3.2.5    | Taylor-Hood-Element . . . . .                                   | 46        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.3      | Alternativen zu stabilen Finiten Elementen . . . . .    | 48         |
| 3.3.1    | Konvergenz der stabilisierten Diskretisierung . . . . . | 49         |
| 3.3.2    | Äquivalenz zum Mini-Element . . . . .                   | 51         |
| 3.3.3    | Anisotrope Stabilisierung . . . . .                     | 52         |
| 3.4      | Diskret divergenzfreie Elemente . . . . .               | 56         |
| 3.4.1    | Crouzeix-Raviart-Element . . . . .                      | 58         |
| 3.4.2    | Mini-Element . . . . .                                  | 59         |
| 3.4.3    | Staggered Grid . . . . .                                | 60         |
| <b>4</b> | <b>Numerik</b>  | <b>63</b>  |
| 4.1      | Verfahren . . . . .                                     | 63         |
| 4.2      | Konvergenz und Approximation . . . . .                  | 67         |
| 4.3      | Eigenwertverteilung . . . . .                           | 69         |
| <b>5</b> | <b>Schneller Stokes-Löser</b>                           | <b>71</b>  |
| 5.1      | Uzawa als indefiniter Löser . . . . .                   | 71         |
| 5.2      | CG-Uzawa . . . . .                                      | 73         |
| <b>6</b> | <b>Beispiele</b>  | <b>75</b>  |
| 6.1      | Exakte Beispiele . . . . .                              | 76         |
| 6.1.1    | Kreis . . . . .   | 76         |
| 6.1.2    | Ellipse . . . . .                                       | 77         |
| 6.1.3    | Ring . . . . .  | 79         |
| 6.1.4    | Limaçon . . . . .                                       | 81         |
| 6.2      | Näherungsergebnisse . . . . .                           | 83         |
| 6.2.1    | n-Eck . . . . .   | 83         |
| 6.2.2    | Rechteck . . . . .                                      | 85         |
| 6.2.3    | Winkel . . . . .  | 87         |
| 6.2.4    | Abgerundetes Quadrat . . . . .                          | 89         |
| 6.2.5    | Runder Winkel . . . . .                                 | 92         |
| 6.3      | Anisotrope Diskretisierungen . . . . .                  | 93         |
| 6.3.1    | Kanal mit Grenzschichtdiskretisierung . . . . .         | 93         |
| 6.3.2    | Knie . . . . .  | 94         |
| 6.4      | 3D-Numerik . . . . .                                    | 96         |
| 6.4.1    | Zylinder . . . . .                                      | 98         |
| 6.4.2    | Quader . . . . .  | 99         |
| 6.4.3    | Torte . . . . .   | 100        |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                             | <b>101</b> |
| <b>A</b> | <b>Implementierung</b>                                  | <b>109</b> |
| A.1      | C++ und MTL . . . . .                                   | 110        |
| A.2      | Unstrukturierte Dreiecksnetze . . . . .                 | 111        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| A.3      | Berechnung der Matrixelemente . . . . .                         | 112        |
| A.4      | Direkte Lösungsverfahren . . . . .                              | 114        |
| A.4.1    | Bandlöser und Bandbreitenreduktion nach Cuthill-McKee . . . . . | 115        |
| A.4.2    | Nested Dissection . . . . .                                     | 116        |
| A.4.3    | Minimum Degree . . . . .  | 118        |
| A.4.4    | Praktische Erfahrungen . . . . .                                | 120        |
| A.5      | Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .                          | 121        |
| A.5.1    | Direkte QR-Verfahren und LAPACK . . . . .                       | 121        |
| A.5.2    | Iterative Arnoldi-Verfahren und ARPACK . . . . .                | 123        |
| A.6      | Übergang zu 3D . . . . .  | 125        |
| A.7      | CGNS . . . . .  | 126        |
| <b>B</b> | <b>Notation und elementare Ungleichungen</b>                    | <b>129</b> |



# Kapitel 1

## Einführung

*Far better an approximate answer to the right question, which is often vague, than an exact answer to the wrong question, which can always be made precise.* — John W. Tukey

Diese Aussage trifft besonders auf die Numerische Analysis zu. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften der approximativen Lösung von Problemen, die nicht analytisch erfaßt werden können. Deshalb muß sich der Numeriker häufig mit Näherungen zufrieden geben, die zumindest qualitativ den Charakter der exakten Lösung erfassen sollten. Zur Eichung oder zum Abschätzen der Eignung der verwendeten Verfahren können geeignete Beispiele konstruiert werden, die sich auch analytisch fassen lassen. Die eigentlich interessierenden ursprünglichen Probleme allerdings entstammen häufig der Physik, dem Ingenieurwesen oder anderen Bereichen der “realen” Welt und verlangen vom Numeriker eine zumindest näherungsweise Lösung.

Die vorliegende Dissertation befaßt sich mit der quantitativen Stabilität der Stokes-Gleichungen, die die Strömung langsam fließender, hochviskoser Fluide beschreiben. Einerseits werden hierzu die kontinuierlichen Gleichungen untersucht, auf der anderen Seite spielt deren approximative Lösung mittels eines Finite-Elemente-Verfahrens eine wichtige Rolle. Neben qualitativen Stabilitätsaussagen, die bereits seit langem bekannt sind, werden hier nun quantitative Ergebnisse vorgestellt, die erstmals eine präzise Abschätzung der zu erwartenden Fehler a priori gestatten. Anhand der dabei gefundenen Erkenntnisse wurde ein neuer, robuster und schneller Stokes-Löser entwickelt, der auf dem bekannten Uzawa-Verfahren aufbaut und dieses ganz besonders bei schwierigen Problemen erheblich verbessert. Zahlreiche numerische Beispiele unterstreichen die theoretischen Ergebnisse und demonstrieren anschaulich die prognostizierten Eigenschaften.

## 1.1 Stokes-Gleichungen

Diese Arbeit befaßt sich wie bereits erwähnt mit den Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta \vec{u} + \nabla p &= \vec{f}, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= g, \end{aligned} \quad (1.1)$$

ergänzt durch geeignete Randbedingungen. Physikalisch werden durch die Stokes-Gleichungen langsame Strömungen hochviskoser Fluide beschrieben, wobei “langsam” und “hochviskos” geeignet zu definieren sind. Sie entstehen aus den allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{u} + \nabla (\rho \vec{u} \times \vec{u}) + \nabla p &\Leftrightarrow \mu \operatorname{div} \underline{U} = 0, \\ D \vec{u} + (D \vec{u})^T &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} = \underline{U}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} ((e + p) \vec{u}) &= 0, \\ \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 &= e, \end{aligned} \quad (1.2)$$

die sich wiederum aus den grundlegenden physikalischen Gesetzen der Impuls-, Massen- und Energieerhaltung sowie dem Newtonschen Schubspannungsansatz für die viskose Reibung ergeben. Je nach Strömungssituation und Fluid werden sie noch ergänzt durch verschiedene Materialgesetze, die den Druck  $p$ , die Dichte  $\rho$  und die innere Energie des Mediums  $\epsilon$  miteinander verknüpfen, eventuell unter Einbeziehung weiterer physikalischer Größen wie der Temperatur, von der dann wiederum die Viskosität  $\mu$  abhängen kann.

Es ist allgemein anerkannt, daß die Navier-Stokes-Gleichungen (1.2) physikalische Strömungen vollständig beschreiben, solange der Newtonsche Schubspannungsansatz Gültigkeit besitzt, was für viele interessierende Fluide in weiten Bereichen zutrifft. Allerdings sind sie wegen ihrer hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Terme und der Nichtlinearität einer vollständigen Lösung praktisch unzugänglich, was verschiedene Vereinfachungen je nach Strömungssituation erfordert. So kann häufig in guter Näherung davon ausgegangen werden, daß es sich um ein inkompressibles Fluid handelt, was für Flüssigkeiten und Gase bei Geschwindigkeiten deutlich unterhalb der Schallgeschwindigkeit zutrifft. In vielen Fällen ist das Problem dann auch isotherm, so daß eine weitere Unbekannte und die zugehörige Gleichung wegfallen. Es bleiben die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla p &\Leftrightarrow \mu \Delta \vec{u} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

deren Lösung immer noch schwierig genug ist, da sie durch die Nichtlinearität bei höheren Geschwindigkeiten zu chaotischem Verhalten und damit Turbulenz neigen. Wegen der dann auftretenden Zeit- und Längenskalen über viele Größenordnungen ist eine Diskretisierung, die alle physikalischen Phänomene auflöst, für die meisten technisch relevanten Strömungssituationen auf heutigen Computern und wohl auch in naher Zukunft nicht berechenbar, so daß häufig phänomenologische Modelle zur Beschreibung der Turbulenz eingesetzt werden.

Die hier untersuchten Stokes-Gleichungen (1.1) jedoch liegen am anderen Ende des Spektrums bei sehr kleinen Geschwindigkeiten, die es gestatten, den quadratischen Term in (1.3) zu vernachlässigen. Sind Randbedingungen und Gebiet nicht explizit zeitabhängig, bleibt dann auch die Strömung stationär und nach einer geeigneten Umskalierung des Druckes (mit  $\frac{1}{\mu}$ ) entstehen gerade die Stokes-Gleichungen (1.1). Sie beschreiben schleichende Strömungen und gelten, solange die Reynolds-Zahl klein bleibt, die sich aus der Entdimensionierung von (1.3) zu

$$\text{Re} = \frac{\rho l |\vec{u}|}{\mu} \quad (1.4)$$

ergibt mit einer für das Problem charakteristischen Länge  $l$  und einer charakteristischen Geschwindigkeit  $\vec{u}$ . Dies ist der Fall bei sehr langsamen Geschwindigkeiten (Sickerströmungen), sehr kleinen Körpern (Pustebelumenschirmchen) oder großen Viskositäten (Honig).

## 1.2 Partielle Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen

Von der mathematischen Seite bilden die Stokes-Gleichungen ein lineares elliptisches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit linearer lokaler Nebenbedingung. Sie bilden für diese Problemklasse gewissermaßen den Prototypen, an dem sich zahlreiche Phänomene studieren und dann auf allgemeinere Probleme übertragen lassen. Der Druck  $p$  kann dabei als Lagrange-Multiplikator der Nebenbedingung interpretiert werden.

Die eindeutige Existenz einer klassischen Lösung, d.h zweimal stetig differenzierbarer Geschwindigkeiten und stetig differenzierbaren Druckes, ist nur unter relativ starken Einschränkungen an die Glattheit von Rändern und Daten gesichert. Die variationelle Formulierung oder schwache Form

$$\begin{aligned} (D\vec{u}, D\vec{v}) \Leftrightarrow (p, \text{div } \vec{v}) &= (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \\ (\text{div } \vec{u}, q) &= (g, q) \quad \forall q \end{aligned} \quad (1.5)$$

hingegen gestattet die Untersuchung von Existenz und Eindeutigkeit in geeigneteren Räumen mit schwächeren Differenzierbarkeitseigenschaften und unter recht allgemeinen Voraussetzungen an Gebietsränder und Daten.

Das Stokes-System in der schwachen Form bildet für das Lagrange-Funktional

$$L(\vec{v}, q) = \frac{1}{2} (D\vec{v}, D\vec{v}) \Leftrightarrow (\operatorname{div} \vec{v}, q) \Leftrightarrow (\vec{f}, \vec{v}) + (g, q) \quad (1.6)$$

ein Sattelpunktproblem, wobei für die Lösung  $(\vec{u}, p)$  von (1.5) gilt

$$L(\vec{u}, q) \leq L(\vec{u}, p) \leq L(\vec{v}, p) \quad \forall \vec{v}, \forall q.$$

### 1.3 Motivation der Untersuchungen

Wie bei den meisten physikalisch motivierten mathematischen Problemen ist eine exakte Lösung nur in den seltensten Fällen möglich, so daß eine diskrete Näherungslösung gesucht wird. Dabei stellt sich selbstverständlich die Frage nach der Genauigkeit der berechneten diskreten Lösung, d.h. die zu erwartende Abweichung von der eigentlich gesuchten exakten Lösung. Bei der mathematischen Analyse taucht dabei die Ladyzhenskaya-Konstante  $\mathcal{L}$  auf, die eine Aussage über die Koerzivität der Bilinearform  $(\operatorname{div} \vec{v}, q)$  darstellt und eine Eigenschaft des zur Diskussion stehenden Gebietes ist. Sie ist definiert durch

$$\mathcal{L} \|q\|_{L_0^2} \leq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_{H_0^{1,2}}} \quad \forall q \in L_0^2. \quad (1.7)$$

Zur Notation sei auf Anhang B verwiesen. Die Existenz der Ladyzhenskaya-Konstanten  $\mathcal{L} > 0$  ist bereits für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis der Lösung von (1.5) erforderlich und ist deshalb bereits seit geraumer Zeit Gegenstand mathematischen Forschungsinteresses. Die wesentlichen Arbeiten hierzu sind in [Gal94a] aufgeführt und stammen von Cattabriga [Cat61], Ladyzhenskaya [Lad69], Nečas [Neč67], Babuška und Aziz [BA72], Solonnikov und Ščadilov [SŠ73], Ladyzhenskaya und Solonnikov [LS78], Amick [Ami77], Bogovskii [Bog79], [Bog80], Erig [Eri82], Piletskas [Pil83], [Pil84], Giaquinta und Modica [GM82], Solonnikov [Sol83], Kapitanskii und Piletskas [KP86], von Wahl [vW89], [vW90], Borchers und Sohr [BS90] und schließlich Galdi [Gal94a] selbst. Die verwandte Koerzivität der Bilinearform  $(\operatorname{rot} \vec{v}, \vec{w})$  wird behandelt von Griesinger [Gri90a], [Gri90b], Girault und Raviart [GR86], Borchers und Sohr [BS90] und von Wahl [vW89], [vW90].

Die darin angeführten Beweise unterscheiden sich außer in der Technik in den Regularitätsforderungen an das Gebiet  $\Omega$ . Im allgemeinsten Falle existiert danach bei beschränkten Gebieten die Ladyzhenskaya-Konstante für die Vereinigung endlich vieler Gebiete, die jeweils sternförmig bezüglich einer Kugel sind, oder anders ausgedrückt, Gebiete mit Lipschitz-Rand bzw. erfüllter Kegelbedingung. Bei unbeschränkten Gebieten existiert sie für das Äußere einer Kugel und wieder endlich viele sternförmige Gebiete oder auch den Halbraum. Im Falle von Ecken (oder Kanten in 3D) mit Innenwinkel  $0^\circ$  gilt generell  $\mathcal{L} = 0$ . Eine quantitative Aussage ist jedoch im Rahmen dieser Beweise kaum möglich, da die Entwicklung der Konstanten im Verlauf des Beweises – auch wenn er konstruktiv ist – sehr schnell verschwindet und die verwendeten Abschätzungen zum Teil relativ grob sind.

Selbst wenn es also gelänge, die Konstanten zu verfolgen, wäre das Ergebnis voraussichtlich um mehrere Größenordnungen zu pessimistisch. Die einzigen bekannten (scharfen) Werte gelten für den Kreis ( $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ) und die Kugel ( $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ) und stammen von Horgan und Payne [HP83] bzw. Velte [Vel90].

Quantitative Werte sind jedoch interessant im Hinblick auf die zeitliche und räumliche Entwicklung laminarer Einlaufströmungen ([HW78], [AP89] und [APS93] sowie [Gal94a] und [Gal94b]), so daß einigermaßen scharfe Abschätzungen durchaus nötig sind.

Das diskrete Gegenstück, die Babuška-Brezzi-Konstante, bestimmt nun jedoch als Faktor gerade die Größe des Fehlers, der durch die Diskretisierung verursacht wird. Ihre bloße Existenz ist wiederum ausreichend für qualitative Konvergenzaussagen. Für konkrete Fehlerabschätzungen ist jedoch auch eine quantitative Kenntnis dieser Konstanten sehr wünschenswert, worüber allerdings bislang nur sehr wenig bekannt ist. Wichtig ist die Größe der Konstanten jedoch nicht nur für Aussagen über den Diskretisierungsfehler, denn auch die Konvergenzraten zahlreicher iterativer Verfahren zur Lösung der bei der Diskretisierung entstehenden linearen Gleichungssysteme hängen von ihr ab.

Diese Erkenntnis stammt aus der vorangegangenen Diplomarbeit [Keß97], die für bestimmte Gebiete (sehr lang gestreckte Kanäle) eine rapide Abnahme der Konvergenzgeschwindigkeit des Uzawa-Verfahrens konstatierte. Die Vermutung lag nahe, die Ursache dafür in einer klein werdenden Babuška-Brezzi-Konstanten zu suchen. Da diese diskrete Konstante von ihrem kontinuierlichen Gegenstück abhängt, stand letztere damit ebenfalls im Mittelpunkt der Untersuchungen. Gleichzeitig sollte natürlich das Uzawa-Verfahren verbessert werden, um die Unzulänglichkeiten bei ungünstigen Gebieten zu beheben. Obwohl es nicht vollständig gelungen ist, den Einfluß ungünstiger Konstanten auszuschalten, wurde das Ziel jedoch weitgehend erreicht. Es wird vermutet, daß für diesen Anwendungszweck iterative Verfahren generell von den Konstanten abhängen, und deshalb keine qualitativen Fortschritte in dieser Richtung mehr möglich sind.

## 1.4 Überblick

Die anschließenden Kapitel beleuchten von verschiedenen Seiten die Problematik um die Stabilität der Stokes-Gleichungen und ihrer Diskretisierung im Finite-Elemente-Kontext.

- Kapitel 2 behandelt die analytischen Ergebnisse der Untersuchungen, eine Beweisskizze für die Existenz der Ladyzhenskaya-Konstanten und Zusammenhänge mit anderen funktionalanalytischen Ungleichungen, die ebenfalls bewiesen werden.
- Kapitel 3 diskutiert die Bedeutung der Ladyzhenskaya-Ungleichung in diskreten Räumen, die dort Babuška-Brezzi-Bedingung genannt wird. Verschiedene Möglichkeiten zur Finite-Elemente-Diskretisierung der betrachteten Stokes-Gleichungen werden mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen einander gegenübergestellt und Alternativen zur Erfüllung der Babuška-Brezzi-Bedingung aufgezeigt. Dabei wird auch auf anisotrope Diskretisierungen eingegangen.

- Kapitel 4 erläutert verschiedene Varianten für den numerischen Algorithmus zur Berechnung der Konstanten und betrachtet die zu erwartende Genauigkeit.
- Kapitel 5 stellt einen im Vergleich zum Uzawa-Verfahren erheblich verbesserten Ansatz zur iterativen Lösung der Stokes-Gleichungen vor, der auch bei sehr problematischen Gebieten noch brauchbare bis gute Konvergenzraten erzielt.
- Kapitel 6 enthält einige ausgewählte Beispiele zur Demonstration der Eignung der verschiedenen analytischen und numerischen Verfahren, die eine Bestimmung oder zumindest Abschätzung der Ladyzhenskaya-Konstanten und der Babuška-Brezzi-Konstanten erlauben.
- In Anhang A wird noch auf die konkrete Implementierung der verwendeten numerischen Verfahren eingegangen, die ausgefeilte aktuelle Algorithmen verwenden, um auch ohne Höchstleistungsrechner interessante Beispiele behandeln zu können.
- Anhang B zuletzt stellt die verwendete Notation und einige verwendete elementare Beziehungen zusammen.

Die zur numerischen Untersuchung entwickelten Programme sind in der Lage, auf einem handelsüblichen PC in vertretbarer Zeit allgemeine Eigenwertprobleme im Kontext der Ladyzhenskaya-Ungleichung mit bis zu  $10^5$  Unbekannten zu bearbeiten oder mit dem verbesserten Verfahren aus Kapitel 5 die Stokesgleichungen mit bis zu  $10^6$  Unbekannten zu lösen. Wie schon in der vorangegangenen Diplomarbeit [Kef97] hat sich erwartungsgemäß im Laufe der Arbeit wieder gezeigt, daß zahlreiche interessante Phänomene erst bei diesen Problemgrößen sichtbar werden und eine einfachere Implementierung beispielsweise in MATHEMATICA oder MATLAB sehr schnell an ihre Grenzen stößt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein Dank gilt Prof. Dobrowolski, der diese interessante Fragestellung nach Beendigung meiner vorangegangenen Diplomarbeit aufgeworfen hat und einem Physiker Gelegenheit gegeben hat, diese in einer Mathematik-Promotion weiter zu verfolgen. Seine Ideen haben meine Forschungen in wichtigen Momenten immer wieder vorangebracht. Außerdem hat er den Kontakt zu Dr. John Barrett vom Imperial College der University of London hergestellt, der mich bei einem achtmonatigen Aufenthalt in Großbritannien von universitärer Seite betreut und mir geholfen hat, bürokratische Hürden zu überwinden, und nicht zuletzt dafür gesorgt hat, daß sich die Studiengebühren in einem erträglichen Rahmen hielten. Weiterhin bin ich der Universität Würzburg dankbar, die mir durch ein Promotionsstipendium den finanziellen Freiraum geschaffen hat, mich ohne anderweitige Verpflichtungen zwei Jahre lang ausschließlich meiner Promotion zu widmen.

Schließlich danke ich sehr herzlich meiner Frau Bettina, die in den letzten Wochen oft zurückstehen mußte und mich in dieser Zeit immer mit Rat und Tat unterstützt hat.

# Kapitel 2

## Kontinuierliches Problem

In der Einführung wurde bereits die Ladyzhenskaya-Ungleichung und die zugehörige Konstante als Eigenschaft des Gebietes eingeführt, innerhalb dessen die Stokes-Gleichungen zu lösen sind. Ähnliche Ungleichungen treten auch bei anderen Sattelpunktproblemen auf, wie beispielsweise in der Strukturmechanik. Insbesondere die Ungleichung von Korn, die später noch näher diskutiert wird, ist entscheidend für die Lösbarkeit der elastischen Gleichungen in der linearen Näherung. Generell sind solche Ungleichungen Gradmesser für die Elliptizität der zugrundeliegenden Differentialgleichungssysteme.

### 2.1 Stabilität der Stokes-Gleichungen

Das Lösbarkeitsproblem der Stokes-Gleichungen (1.1) setzt sich wie fast immer aus zwei Komponenten zusammen: der Stabilität für die Existenz einer Lösung und die Eindeutigkeit. Zum Beweis betrachten wir das abstrakte Sattelpunktproblem

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= f(v) \quad \forall v \in V, \\ b(u, q) &= g(q) \quad \forall q \in X, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei die Bilinearformen  $a$  und  $b$  beschränkt und  $a$  zusätzlich gleichmäßig elliptisch sein soll ( $m > 0$ ):

$$\begin{aligned} m \|v\|_V^2 &\leq a(v, v), \\ |a(u, v)| &\leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \\ |b(v, q)| &\leq c_2 \|v\|_V \|q\|_X. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Funktionen  $u$  und  $v$  bzw.  $q$  stammen hierbei aus den Hilbert-Räumen  $V$  bzw.  $X$  und die beiden Bilinearformen  $a$  und  $b$  bilden  $V \times V$  bzw.  $V \times X$  nach  $\mathbb{R}$  ab. Die zugehörigen Operatoren seien  $A$  und  $B$ . Wir werden später den nachstehenden klassischen Satz aus der Funktionalanalysis benutzen.

**Satz 1.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1.  $\text{Im } B$  ist abgeschlossen in  $X'$ .
2.  $\text{Im } B^T$  ist abgeschlossen in  $V'$ .
3.  $(\ker B)^\perp = \{v' \in V' : v'(v) = 0 \forall v \in \ker B\} = \text{Im } B^T$
4.  $(\ker B^T)^\perp = \{q' \in X' : q'(q) = 0 \forall q \in \ker B^T\} = \text{Im } B$
5. Es gibt eine Konstante  $k_0$ , so daß für jedes  $g \in \text{Im } B$  ein  $v_g \in V$  existiert mit  $Bv_g = g$  und  $\|v_g\|_V \leq \frac{1}{k_0} \|g\|_{X'}$ .
6. Es gibt eine Konstante  $k_0$ , so daß für jedes  $f \in \text{Im } B^T$  ein  $q_f \in X$  existiert mit  $B^T q_f = f$  und  $\|q_f\|_X \leq \frac{1}{k_0} \|f\|_{V'}$ .

Offensichtlich sind die letzten beiden Bedingungen weiterhin äquivalent zu

$$k_0 \|v\|_{V \setminus \ker B} \leq \sup_{q \in X} \frac{b(v, q)}{\|q\|_X} \quad \forall v \in V \setminus \ker B \quad (2.3)$$

bzw.

$$k_0 \|q\|_{X \setminus \ker B^T} \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \quad \forall q \in X \setminus \ker B^T \quad (2.4)$$

mit der Quotientennorm

$$\|v\|_{V \setminus \ker B} = \inf_{v_0 \in \ker B} \|v + v_0\|_V$$

und analog  $\|q\|_{X \setminus \ker B^T}$ .

Damit beweisen wir die Stabilität des abstrakten Sattelpunktproblems (2.1) in

**Satz 2.** Seien die Bedingungen (2.2) der Stetigkeit und Koerzivität erfüllt,  $\text{Im } B$  abgeschlossen in  $X'$  und  $g \in \text{Im } B$ . Dann hat das Problem (2.1) eine eindeutige Lösung  $(u, p) \in V \times X \setminus \ker B^T$  und es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_V &\leq \frac{1}{m} \|f\|_{V'} + \frac{1}{k_0} \left(1 + \frac{c_1}{m}\right) \|g\|_{X'} , \\ \|p\|_{X \setminus \ker B^T} &\leq \frac{1}{k_0} \left(1 + \frac{c_1}{m}\right) \|f\|_{V'} + \frac{c_1}{k_0^2} \left(1 + \frac{c_1}{m}\right) \|g\|_{X'} . \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus Satz 1 und  $g \in \text{Im } B$  erhalten wir die Existenz eines  $u_g \in V$  mit  $Bu_g = g$  und  $\|u_g\|_V \leq \frac{1}{k_0} \|g\|_{X'}$ . Dann schreiben wir  $u = u_0 + u_g$  und nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist  $u_0$  durch

$$u_0 \in \ker B : \quad a(u_0, v) = f(v) \Leftrightarrow a(u_g, v) \quad \forall v \in \ker B$$

eindeutig bestimmt und kann abgeschätzt werden mittels

$$m \|u_0\|_V^2 \leq a(u_0, u_0) = f(u_0) \Leftrightarrow a(u_g, u_0) \leq \|f\|_{V'} \|u_0\|_V + c_1 \|u_g\|_V \|u_0\|_V .$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|u\|_V \leq \|u_0\|_V + \|u_g\|_V \leq \frac{1}{m} \|f\|_{V'} + \frac{1}{k_0} \left(1 + \frac{c_1}{m}\right) \|g\|_{X'} .$$

Für die Abschätzung in  $p$  benutzen wir

$$L(v) = f(v) \Leftrightarrow a(u, v)$$

und stellen fest, daß wegen  $L(v) = 0$  für alle  $v \in \ker B$  und unter erneuter Verwendung von Satz 1 gilt  $L \in \text{Im } B^T$ . Folglich existiert ein  $p \in X$  mit

$$b(v, p) = L(v) \quad \forall v \in V$$

und der Abschätzung

$$\|p\|_{X \setminus \ker B^T} \leq \frac{1}{k_0} \|L\|_{V'} \leq \frac{1}{k_0} (\|f\|_{V'} + c_1 \|u\|_V) .$$

Offensichtlich kann  $p$  nicht eindeutig sein, da mit  $p$  auch  $p + p_0$  mit  $p_0 \in \ker B^T$  das Problem (2.1) löst.  $\square$

**Anmerkung 1.** Nach Konstruktion des Beweises ist die Forderung der Elliptizität auf ganz  $V$  etwas zu strikt, tatsächlich genügt es, wenn (2.2) auf  $\ker B$  erfüllt ist.

Wir wenden Satz 2 auf das Stokes-Problem (1.5) an, wozu wir in  $d$  Dimensionen  $V = H_0^{1,2}(\Omega)^d$  und  $X = L^2(\Omega)$  setzen. Die Bilinearformen sind dann  $a(u, v) = (D\vec{u}, D\vec{v})$ ,  $b(v, q) = \Leftrightarrow (\text{div } \vec{v}, q)$ , ansonsten gilt für  $f(v) = (\vec{f}, \vec{v})$  und  $g(q) = (g, q)$  das reguläre  $L^2$ -Skalarprodukt. Die Bedingungen (2.2) sind dann trivialerweise erfüllt mit  $m = c_1 = c_2 = 1$ , und Voraussetzung (2.4) ist nun gerade die bereits erwähnte Ladyzhenskaya-Ungleichung (1.7)

$$\mathcal{L} \|q\|_{L_0^2} \leq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\text{div } \vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_{H_0^{1,2}}} \quad \forall q \in L_0^2 ,$$

wobei  $L_0^2 = L^2 \setminus \mathbb{R}$  im Sinne von

$$q \in L_0^2 \Leftrightarrow \int_{\Omega} q \, dx = 0 ,$$

denn nach dem Gaußschen Divergenzatz ist  $(\text{div } \vec{v}, 1) = 0$  für alle  $\vec{v} \in H_0^{1,2}$  und der  $L^2$  ist deshalb gerade nach den konstanten Funktionen ( $1 \in \ker B^T$ ) zu faktorisieren.

Zum Beweis dieser Ungleichung bzw. der Existenz einer solchen Konstante  $\mathcal{L}$  existieren im wesentlichen drei Ansätze. Eine Möglichkeit besteht aus einer direkten Berechnung

eines passenden Eigenwertproblems wie in [Vel90], die aber auf ganz spezielle Gebiete eingeschränkt ist. Eine zweite wie in [Gal94a] konstruiert über singuläre Kerne explizit eine Funktion  $\vec{v}$  mit  $\operatorname{div} \vec{v} = q$  und zeigt dann die Existenz einer Konstanten  $\mathcal{L}$ , für die (1.7) gilt. Wie bereits in der Einleitung angedeutet verschwindet im Fortgang dieses Beweises sehr schnell die Größenordnung von  $\mathcal{L}$  und ihre Abhängigkeit von der Gebietsform, so daß am Ende lediglich die Existenz der Konstanten übrigbleibt. Die dritte Alternative schließlich stützt sich auf die Äquivalenz von (1.7) mit anderen Ungleichungen, die leichter zugänglich sind, und für die Beweise existieren, die zumindest eine einigermaßen scharfe Abschätzung der Konstanten ermöglichen. Im Abschnitt 2.4 werden wir auf diese Vorgehensweise noch ausführlich eingehen.

Zur Vereinfachung der Notation und der im Laufe der Beweise entstehenden Konstanten wird die wegen der Poincaré-Ungleichung (siehe Anhang B) in  $H_0^{1,2}$  äquivalente Norm  $|\cdot|_1$  durch die Definition

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = (D\vec{u}, D\vec{v}), \quad |\vec{v}|_1 = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})_1} = \|D\vec{v}\| \quad (2.5)$$

eingeführt. Ohne die Konstante  $\mathcal{L}$  umzubenennen, ist bei den nachfolgenden Referenzen anstelle der Ungleichung (1.7) deshalb stets die äquivalente Ungleichung gemeint.

$$\mathcal{L} \|q\|_{L_0^2} \leq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q)}{|\vec{v}|_1} \quad \forall q \in L_0^2 \quad (2.6)$$

Wir erklären außerdem den Raum

$$V_0 = H_{\operatorname{div}} = \{\vec{v} \in H_0^{1,2} \mid \operatorname{div} \vec{v} = 0\} \quad (2.7)$$

mit seinem orthogonalen Komplement  $V_0^\perp$  bezüglich des  $(\cdot, \cdot)_1$ -Skalarproduktes. Die Ungleichung (2.6) können wir dann auch anders formulieren, nämlich

$$|\vec{v}|_1 \leq C \|\operatorname{div} \vec{v}\| \quad \forall v \in V_0^\perp, \quad (2.8)$$

mit dem Zusammenhang  $\mathcal{L}^2 = \frac{1}{C}$ . Weiterhin existiert nach Satz 1 für jedes  $q \in L_0^2$  ein  $\vec{v} \in H_0^{1,2}$  mit  $\operatorname{div} \vec{v} = q$ , so daß mit derselben Konstante  $C$  wie in (2.8) gilt

$$|\vec{v}|_1^2 \leq C \|q\|^2 \quad (2.9)$$

**Anmerkung 2.** Die rechte Seite der Ungleichung (2.6) ist nun gerade die Definition der  $|\cdot|_{-1}$ -Norm von  $\nabla q$ . Zusammen mit der Abschätzung  $\|\operatorname{div} \vec{v}\| \leq |\vec{v}|_1$ , die wegen der Nullrandbedingung durch partielle Integration bewiesen werden kann, ergibt sich damit die Normäquivalenz

$$\mathcal{L} \|q\| \leq |\nabla q|_{-1} \leq \|q\|$$

zwischen der Norm einer  $L_0^2$ -Funktion und der  $|\cdot|_{-1}$ -Norm ihres Gradienten.

## 2.2 Velte-Zerlegung des $H_0^{1,2}$

Im folgenden sei die Raumdimension  $d = 2$  oder  $3$ . Für  $d = 2$  wird der Operator  $\text{rot}$  für skalar- und vektorwertige Felder erklärt durch

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \hat{\leftarrow} \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \\ \text{rot } q &= \left( \begin{array}{c} \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \hat{\leftarrow} \frac{\partial q}{\partial x_1} \end{array} \right), \end{aligned}$$

so daß die Anwendung auf ein vektorwertiges Feld ein skalares Feld ergibt und umgekehrt. Da in der Regel aus dem Kontext klar hervorgeht, ob es sich um die skalar- oder vektorwertige Form handelt, wird auf einen Unterschied in der Notation verzichtet. Für  $d = 3$  ist der Operator  $\text{rot}$  die bekannte Rotation mit jeweils vektorwertigem Definitions- und Wertebereich. Das Gebiet  $\Omega$  sei hier als einfach zusammenhängend vorausgesetzt.

Damit läßt sich das  $(\cdot, \cdot)_1$ -Skalarprodukt auch folgendermaßen schreiben

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = (\text{rot } \vec{u}, \text{rot } \vec{v}) + (\text{div } \vec{u}, \text{div } \vec{v}), \quad (2.10)$$

wie man für  $d = 2, 3$  leicht mittels partieller Integration von glatten Funktionen und den üblichen Grenzübergang verifiziert. Dadurch motiviert führen wir einen weiteren Raum  $V_1$  ein,

$$V_1 = H_{\text{rot}} = \{ \vec{w} \in H_0^{1,2} \mid \text{rot } \vec{w} = 0 \}, \quad (2.11)$$

der nach (2.10) offensichtlich senkrecht auf  $V_0$  steht (im Sinne des  $(\cdot, \cdot)_1$ -Skalarproduktes), so daß der volle Raum  $H_0^{1,2}$  in insgesamt drei orthogonale Teilräume zerfällt [Vel90]

$$H_0^{1,2} = V_0 \oplus V_1 \oplus V_\beta, \quad V_0^\perp = V_1 \oplus V_\beta. \quad (2.12)$$

Der Teilraum  $V_\beta$ , der sich als der interessanteste herausstellen wird, kann auch noch durch eine weitere Eigenschaft charakterisiert werden. Dazu betrachten wir die Beziehung

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = (p, \text{div } \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}, \quad (2.13)$$

ausgehend von einer gegebenen Funktion  $p \in L_0^2$ . Die rechte Seite ist ein beschränktes lineares Funktional in  $\vec{v}$  und nach dem Rieszschen Darstellungssatz hat (2.13) daher eine eindeutige Lösung  $\vec{u}$ . Setzt man nun ein  $\vec{v} \in V_0 = \ker \text{div}$  ein, sieht man sofort  $(\vec{u}, \vec{v})_1 = 0$  und damit  $\vec{u} \in V_0^\perp$ . Man kann zeigen [GR81], daß die durch (2.13) definierte Abbildung  $p \rightarrow \vec{u}$  einen Isomorphismus von  $L_0^2$  nach  $V_0^\perp$  darstellt. Die Charakterisierung von  $H$  erfolgt nun durch den folgenden

**Satz 3.** *Für ein gegebenes  $p \in L_0^2$  gehört die durch (2.13) eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{u} \in V_0^\perp$  zu dem Teilraum  $V_\beta$  genau dann, wenn  $p$  harmonisch ist.*

*Beweis.* Sei zunächst  $\vec{u} \in V_\beta$ . Dann ist nach Definition von  $V_\beta$  (2.12)  $\vec{u}$  orthogonal zu allen  $\vec{v} \in V_1$ . Sei insbesondere für ein glattes  $\phi \in C_0^\infty$  die Funktion  $\vec{v} = \nabla\phi$ . Eingesetzt in (2.13) erhalten wir  $0 = (p, \Delta\phi)$ . Nach dem Lemma von Weyl ist  $p$  damit harmonisch.

Sei nun  $p$  harmonisch. Dann gilt wieder für glattes  $\phi$  die Beziehung

$$0 = (\Delta p, \phi) = (p, \Delta\phi) = (p, \operatorname{div} \nabla\phi) = (u, \nabla\phi)$$

Da die Menge  $\{\nabla\phi \mid \phi \in C_0^\infty\}$  jedoch dicht in  $V_1$  liegt, ist  $\vec{u} \in V_1^\perp$  und damit  $\vec{u} \in V_\beta$ .  $\square$

Diese Eigenart des interessanten Teilraumes  $V_\beta$ , mit harmonischen Funktionen im Zusammenhang zu stehen, wird auch im nächsten Abschnitt 2.3 bei verwandten Ungleichungen wieder auftauchen.

**Anmerkung 3.** *Man beachte den Unterschied der Zerlegung (2.12) zur klassischen Helmholtz-Zerlegung in einen rotationsfreien Raum  $V_0^H = \{\nabla\phi\}$  und einen divergenzfreien Raum  $V_1^H = \{\operatorname{rot}\psi\}$ . Der dritte Teilraum  $V_\beta$  taucht hierbei nicht auf. Dies liegt an den unterschiedlichen Randbedingungen. Während die Helmholtz-Zerlegung für den vollen Raum  $H^{1,2}(\Omega)^n$  gilt, haben wir in  $H_0^{1,2}(\Omega)^n$  die Nullrandbedingung (in einem Spursinne), die auf die Teilräume  $V_0$  und  $V_1$  übertragen wird. Diese beiden können jedoch noch nicht den vollen  $H_0^{1,2}$  ausschöpfen und es bleibt ein "kleiner" Restraum übrig. Die Bezeichnung "klein" ist dadurch gerechtfertigt, daß der Raum durch eine niederdimensionale Bedingung bestimmt wird. Jedes harmonische  $p$  ist durch seine Werte auf dem Rand bereits vollständig festgelegt, so daß schon hierdurch klar wird, daß die Eigenschaften von  $H$  durch die Charakteristika des Randes bestimmt werden. Des weiteren deutet sich an, daß die Randeigenschaften nicht nur lokal wirken, sondern auch global eingehen, denn lokale Besonderheiten breiten sich über die Harmonizitätseigenschaft sofort über das ganze Gebiet aus. Diese Vermutungen bestätigen sich in den Beweisen aus Abschnitt 2.4.*

**Anmerkung 4.** *Es sei darauf hingewiesen, daß Problem (2.13) auf der einen Seite formal gerade der ersten der Stokes-Gleichungen (1.5) entspricht, auf der anderen Seite aber auch die Eulergleichung zu der sup-Maximierung aus (2.6) darstellt. Mit der obigen Argumentation zur eindeutigen Lösbarkeit von (2.13) erhalten wir das wichtige Ergebnis, daß das Maximum angenommen wird und der Operator sup folglich auch durch max ersetzt werden könnte.*

## 2.3 Äquivalenzen

### 2.3.1 Verwandtes Eigenwertproblem

Die Velte-Zerlegung aus dem vorigen Abschnitt 2.2 zusammen mit der Formulierung (2.8) der Ladyzhenskaya-Ungleichung führt zu der Beziehung

$$\|\operatorname{div} \vec{v}\|^2 \leq |\vec{v}|_1^2 \leq C \|\operatorname{div} \vec{v}\|^2 \quad \forall \vec{v} \in V_0^\perp$$

oder alternativ zu

$$1 \leq \frac{|\vec{v}|_1^2}{\|\operatorname{div} \vec{v}\|} \leq C \quad \forall \vec{v} \in V_0^\perp. \quad (2.14)$$

Die untere Schranke 1 wird hierbei für alle Funktionen  $\vec{v} \in V_1$  angenommen. Setzt man die Eulergleichungen für die Maximierung von (2.14) an, so erhält man das Eigenwertproblem

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = \lambda (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}. \quad (2.15)$$

**Anmerkung 5.** Zunächst haben wir in (2.15) lediglich  $\forall \vec{v} \in V_0^\perp$ . Setzen wir jedoch eine Eigenfunktion  $\vec{u} \in V_0^\perp$  mit Eigenwert  $\lambda$  und ein  $\vec{v} \in V_0$  ein, so ist  $0 = \lambda \cdot 0$  trivial erfüllt. Genauso gilt die Gleichung für alle  $\vec{u} \in V_0$  formal mit  $\lambda = \infty$ .

**Lemma 4.** Das Eigenwertproblem (2.15) hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\lambda = 1$  und  $\lambda = \infty$  sind Eigenwerte unendlicher Vielfachheit, die zu den Eigenräumen  $V_1$  bzw.  $V_0$  gehören.
2. Alle anderen Eigenwerte liegen im Intervall  $]1, C]$  und gehören zu Eigenfunktionen aus  $V_\beta$ .

*Beweis.* Sei  $\vec{u}$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda = 1$ . Einsetzen von  $\vec{v} = \vec{u}$  in (2.15) und Vergleich mit (2.10) ergibt  $\|\operatorname{rot} \vec{u}\| = 0$  und damit  $\vec{u} \in V_1$ . Ist  $\vec{u}$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda = \infty$  heißt dies  $(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}) = 0$  für alle  $\vec{v} \in H_0^{1,2}$ , insbesondere wieder für  $\vec{v} = \vec{u}$  und daher  $\|\operatorname{div} \vec{u}\| = 0$  und  $\vec{u} \in V_0$ . Sei nun  $\lambda$  ein beliebiger anderer Eigenwert. Nach (2.14) finden wir  $\lambda \in ]1, C]$ , da  $\lambda = 1$  bereits behandelt ist. Wir schreiben (2.15) in der äquivalenten Form

$$(\operatorname{rot} \vec{u}, \operatorname{rot} \vec{v}) = (\lambda \Leftrightarrow 1) (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2},$$

wobei  $\lambda \Leftrightarrow 1 \neq 0$ . Mit einem glatten  $\phi \in C_0^\infty$  setzen wir nun  $\vec{v} = \nabla \phi$  ein, wodurch die linke Seite verschwindet, und erhalten  $0 = (\operatorname{div} \vec{u}, \Delta \phi)$ . Wie in Satz (3) ist damit  $\operatorname{div} \vec{u}$  harmonisch und durch Vergleich mit (2.13) folgern wir  $\vec{u} \in V_\beta$ .  $\square$

Ganz analog können wir unter Berücksichtigung von (2.10) allerdings auch schreiben

$$1 \leq \frac{|\vec{w}|_1^2}{\|\operatorname{rot} \vec{w}\|} \leq D \quad \forall \vec{w} \in V_1^\perp \quad (2.16)$$

mit dem zugehörigen Eigenwertproblem

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = \mu (\operatorname{rot} \vec{u}, \operatorname{rot} \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2} \quad (2.17)$$

Wir sehen sofort, daß die beiden Probleme (2.15) und (2.17) vollständig äquivalent sind, daß die Eigenfunktionen identisch sind und die zugehörigen Eigenwerte über  $\mu = \frac{\lambda}{\lambda-1}$  bzw.  $\lambda = \frac{\mu}{\mu-1}$  zusammenhängen. In Analogie zu Lemma 4 erhalten wir

**Lemma 5.** *Das Eigenwertproblem (2.17) hat die folgenden Eigenschaften:*

1.  $\lambda = 1$  und  $\lambda = \infty$  sind Eigenwerte unendlicher Vielfachheit, die zu den Eigenräumen  $V_0$  bzw.  $V_1$  gehören.
2. Alle anderen Eigenwerte liegen im Intervall  $]1, D]$  und gehören zu Eigenfunktionen aus  $V_\beta$ .

**Anmerkung 6.** *In zwei Dimensionen sind die Konstanten  $C$  und  $D$  identisch, wie man leicht durch die Abbildung  $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$  definiert durch  $u_1 \rightarrow v_2, u_2 \rightarrow -v_1$  sehen kann, die die Operatoren  $\operatorname{div}$  und (skalarwertiges)  $\operatorname{rot}$  gerade gegeneinander austauscht. Diese Äquivalenz von  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  in zwei Dimensionen bildet auch die Grundlage der späteren Äquivalenzbeweise, vor allem in Punkt 2.3.3.*

Nach [Mik73] bilden diese Eigenvektoren für genügend glatte Gebiete eine vollständige Basis des  $H_0^{1,2}$  in zwei und drei Dimensionen. Eigenwerte von (2.15) sind 1 und  $\infty$ , jeweils von unendlicher Vielfachheit, und alle anderen Eigenwerte sind von diesen Extrema getrennt, d.h. liegen im Intervall  $[C_0, C]$  mit  $C_0 > 1$ . Dies bedeutet, daß in (2.6) eine kritische Druckfunktion existiert, für die Gleichheit gilt, oder anders ausgedrückt, in

$$\mathcal{L} = \inf_{q \in L_0^2} \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q)}{|\vec{v}|_1 \|q\|}$$

könnte der  $\inf$ -Operator auch durch  $\min$  ersetzt werden. (Wie im vorigen Punkt bereits bemerkt, gilt dies ebenfalls für  $\max$  anstelle von  $\sup$ .) Genügend glatt bedeutet hierbei im wesentlichen einen  $C^2$ -Rand. Wie die Situation bei weniger glatten Rändern beispielsweise mit Ecken aussieht, darüber macht Mikhlin keine Aussage. Es stünde zu vermuten, daß zumindest für ebene konvexe Polygonegebiete diese Behauptung ebenfalls zutrifft, da die Stokes-Gleichungen dann 2-regulär sind [KO76], [Gri78]. Die Abschätzung aus Satz 13 und die experimentellen Ergebnisse der Gebiete mit Ecken aus Kapitel 6 deuten jedoch eher darauf hin, daß in diesem Fall die kritische Druckfunktion gerade nicht mehr in  $L_0^2$  liegt und entsprechend das zugehörige Geschwindigkeitsfeld nicht mehr in  $H_0^{1,2}$ . Eine abschließende Entscheidung dieser Frage ist deshalb im Moment noch nicht möglich.

### 2.3.2 Kornsche Ungleichung

Die Theorie der linearen elastischen Gleichungen stützt sich in ihren Aussagen auf eine ähnliche Ungleichung wie (2.8), die erstmals von Korn [Kor06] aufgestellt wurde. Sein eigener Beweis [Kor09] ist jedoch zumindest zweifelhaft.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} D(\vec{u}) &= (D\vec{u}, D\vec{u}) = |\vec{u}|_1^2, \\ S(\vec{u}) &= \frac{1}{4} (D\vec{u} + D\vec{u}^T, D\vec{u} + D\vec{u}^T) \end{aligned}$$

kann man die Kornsche Ungleichung schreiben als

$$D(\vec{u}) \leq K \cdot S(\vec{u}), \quad (2.18)$$

wobei die Konstante  $K$  nur von dem Gebiet  $\Omega$  und zusätzlichen Bedingungen, die reine Rotationen ausschließen, abhängt. Bei Nullrandbedingungen (erster Fall) läßt sich durch partielle Integration leicht zeigen, daß  $K = 2$  unabhängig vom Gebiet ist. Fordert man hingegen

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (2.19)$$

(zweiter Fall), wird man sehen, daß zumindest in zwei Dimensionen die Ungleichungen von Korn (2.18) und Ladyzhenskaya (2.6) äquivalent sind. Auch für die Ungleichung von Korn gibt es wieder verschiedene äquivalente Formulierungen, die sich insbesondere in einer unterschiedlichen Definition der Bilinearformen  $D(\vec{u})$  und  $S(\vec{u})$  und damit der Konstante  $K$  widerspiegeln.

Nach [HK71] entspricht auch (2.18) wieder einem Eigenwertproblem, nämlich

$$(2 \Leftrightarrow \kappa) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \Leftrightarrow \kappa \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (2.20)$$

mit den Randbedingungen

$$\vec{u} = 0 \quad (2.21)$$

im ersten Fall und

$$\left[ (2 \Leftrightarrow \kappa) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \kappa \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] n_j = 0 \quad (2.22)$$

mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  am Rand im zweiten Fall. Der Eigenwert  $\kappa$  taucht dabei in natürlicher Weise als Lagrange-Parameter der Nebenbedingung (2.19) auf. Die beiden Probleme (2.20) und (2.15) unterscheiden sich abgesehen von einer trivialen Umskalierung nur in den Randbedingungen, so daß sich in zwei Dimensionen folgende Äquivalenz beweisen läßt.

**Satz 6.** *Sei  $\vec{u}$  eine nichttriviale Lösung von (2.20) mit dem Eigenwert  $\kappa$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$ . Dann existiert ein nichttriviales Vektorfeld  $\vec{v}$ , das Lösung von (2.15) zum Eigenwert  $\frac{\kappa}{\kappa-2}$  ist. Das Feld  $\vec{v}$  ergibt sich aus*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \kappa \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + 2(1 \Leftrightarrow \kappa) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Leftrightarrow 2(1 \Leftrightarrow \kappa) \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (2.23)$$

oder mit den entsprechenden Differentialoperatoren geschrieben

$$D\vec{v} = \kappa (D\vec{u}^T \Leftrightarrow D\vec{u}) + 2(1 \Leftrightarrow \kappa) D\vec{u}^T \Leftrightarrow 2(1 \Leftrightarrow \kappa) \operatorname{div} \vec{u} \cdot I,$$

und der Randbedingung  $\vec{v} = 0$  ( $I$  ist einfach der vektorielle Einheitsoperator). Auch die umgekehrte Richtung gilt, wobei der Zusammenhang der Eigenfunktionen  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ebenfalls durch (2.23) bestimmt ist.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Existenz eines Vektorfeldes mit den geforderten Beziehungen (2.23). Dazu sei

$$H_{ij} = \kappa \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + 2(1 \Leftrightarrow \kappa) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Leftrightarrow 2(1 \Leftrightarrow \kappa) \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Die direkte Berechnung von vier Ableitungen  $\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}$  zeigt für jede Eigenfunktion  $\vec{u}$  von (2.18) und ihren Eigenwert  $\kappa$

$$\frac{\partial H_{i1}}{\partial x_2} \Leftrightarrow \frac{\partial H_{i2}}{\partial x_1} = 0$$

in  $\Omega$ , was mit dem einfachen Zusammenhang von  $\Omega$  die Integrabilität und damit die Existenz der  $v_i$  gemäß  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = H_{ij}$  sichert. Einsetzen der  $v_i$  nach (2.23) in die starke Form des Problems (2.15)

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

ergibt nach einigen Umformungen gerade den behaupteten Zusammenhang  $\lambda = \frac{\kappa}{\kappa-2}$  und die Eigenfunktionseigenschaft, falls  $\kappa \neq 2$ . Der Fall  $\kappa = 2$  wird separat behandelt, ist aber noch einfacher und wird deshalb nicht aufgeführt. Er führt zu dem erwarteten Wert  $\lambda = \infty$ .

Zum Nachweis der Randbedingung  $\vec{v} = 0$  bilden wir die Tangentialableitung  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} t_j$  mit der Randtangente  $\vec{t}$  und erhalten nach Einsetzen der Kornschen Randbedingung im zweiten Fall (2.22) das Ergebnis  $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ . Da die  $v_i$  durch (2.23) ohnehin nur bis auf eine Konstante bestimmt sind, kann diese Konstante so gewählt werden, daß  $\vec{v}$  auf dem Rand verschwindet.

Der Beweis der umgekehrten Richtung verläuft ganz genauso durch Inversion von (2.23).  $\square$

Wie man leicht sieht, entspricht Korns Konstante  $K$  dann gerade dem maximalen Eigenwert  $\kappa_{\max}$  und hängt mit der Ladyzhenskaya-Konstanten über  $\mathcal{L} = \sqrt{\frac{2}{K}}$  zusammen.

**Anmerkung 7.** Auch wenn Korns Ungleichung für beliebig viele Dimensionen  $d \geq 1$  gültig ist (für  $d = 1$  ist sie trivial), kann die Äquivalenz nach Satz 6 nur für ebene Gebiete gezeigt werden. Die formale Übertragung der Beziehung (2.23) führt zu nicht-integrablen  $H_{ij}$ . Generell gibt es keinen Ansatz, der alle ersten Ableitungen der  $u_i$  linear kombiniert, um daraus die ersten Ableitungen der  $v_i$  zu erhalten, also keinen Tensor  $T_{ijkl}$  mit

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = T_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l},$$

der die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Man sieht dies durch eine prinzipiell simple, aber etwas aufwendige Rechnung schon am Beispiel der dreidimensionalen Kugel, wo die Eigenfunktionen der Probleme (2.15) und (2.20) explizit bestimmt werden können.

### 2.3.3 Friedrichssche Ungleichung

Eine weitere verwandte Ungleichung stammt von Friedrichs [Fri37] und schätzt den Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen der komplexen Ebene gegeneinander ab durch

$$\int_{\Omega} f^2 dA \leq \Gamma \int_{\Omega} g^2 dA \quad (2.24)$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} f dA = 0,$$

wobei  $\Gamma$  wieder eine Konstante ist, die die Form des Gebietes charakterisiert. Hierbei ist  $w(z) = f + ig$  der Real- bzw. Imaginärteil einer analytischen Funktion  $w(z)$  und die komplexe Ebene wird über  $z = x + iy$  mit dem zweidimensionalen Raum identifiziert. Es sei daran erinnert, daß  $f$  und  $g$  harmonisch und zueinander konjugiert sind. Eine offensichtlich äquivalente Formulierung ist deshalb auch

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dA \leq \Gamma \int_{\Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 dA \quad (2.25)$$

für alle harmonischen Funktionen  $h$  unter der Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x} dA = 0. \quad (2.26)$$

Die Ladyzhenskaya-Ungleichung in der Form (2.8) zusammen mit (2.10) läßt sich nun auch so schreiben

$$\|\text{rot } \vec{v}\|^2 \leq (C \Leftrightarrow 1) \|\text{div } \vec{v}\|^2 \quad (2.27)$$

wobei wieder  $\vec{v} \in H_0^{1,2}$  und damit  $\int_{\Omega} \text{div } \vec{v} = 0$ .

**Satz 7.** Die Ungleichungen (2.24) und (2.27) sind äquivalent, insbesondere hängen die Konstanten über  $C = 1 + \Gamma$  zusammen.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß (2.27) aus (2.24) folgt. Dazu bilden wir zu einem beliebigen Vektorfeld  $\vec{v}$  die Helmholtz-Zerlegung  $\vec{v} = \nabla \phi + \text{rot } \psi$ , so daß sich  $\text{div } \vec{v} = \Delta \phi$  und  $\text{rot } \vec{v} = \Delta \psi$  ergeben. Mögliche Bestimmungsgleichungen für (die nicht eindeutigen)  $\phi$  und  $\psi$  lauten dann

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \text{div } \vec{v} \quad \text{in } \Omega, & \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial \Omega, \\ \Delta^2 \psi &= 0 \quad \text{in } \Omega, & \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega. \end{aligned}$$

Mit dieser Festlegung sind  $\phi$  und  $\psi$  (bis auf eine Konstante) eindeutig bestimmt. Sei nun  $V$  die harmonisch Konjugierte zu  $\Delta \psi$ . Damit erhalten wir nach mehrfacher partieller

Integration und unter Verwendung der Randbedingungen an  $\psi$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{v})^2 dA &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{v} \Delta \psi dA = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \Delta \psi dA = \\ &= \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( v_1 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \Leftrightarrow v_2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) dA = \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( v_1 \frac{\partial V}{\partial x} + v_2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) dA = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} V dA. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe Anhang B) ergibt

$$\sqrt{\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{v})^2 dA} \sqrt{\int_{\Omega} (\Delta \psi)^2 dA} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{v})^2 dA \leq \sqrt{\int_{\Omega} V^2 dA} \sqrt{\int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{v})^2 dA}$$

und nach Verwendung der Friedrichs-Ungleichung (2.24) mit  $f = V$  und  $g = \Delta \psi$  finden wir die Behauptung

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{v})^2 dA \leq \Gamma \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{v})^2 dA.$$

Zum Beweis der anderen Richtung verwenden wir die Ladyzhenskaya-Ungleichung in der Fassung (2.9). Danach existiert zu jedem harmonischen  $f$  ein Vektorfeld  $\vec{v}$  mit der Eigenschaft  $\operatorname{div} \vec{v} = f$ , das die Bedingung (2.27) erfüllt. Ganz ähnlich wie zuvor wird nun in Richtung auf die zu  $f$  harmonisch Konjugierte  $g$  umgeformt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^2 dA &= \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{v} dA = \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 \right) dA = \\ &= \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial y} v_1 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} v_2 \right) dA = \int_{\Omega} g \operatorname{rot} \vec{v} dA, \end{aligned}$$

und wieder mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\sqrt{\int_{\Omega} f^2 dA} \sqrt{\int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{v})^2 dA} = \int_{\Omega} f^2 dA \leq \sqrt{\int_{\Omega} g^2 dA} \sqrt{\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{v})^2 dA},$$

und mit (2.27) kommen wir zu

$$\int_{\Omega} f^2 dA \leq (C \Leftrightarrow 1) \int_{\Omega} g^2 dA,$$

also der gewünschten Behauptung. □

**Anmerkung 8.** Eine weitere Äquivalenz besteht nun selbstverständlich auch zwischen der Ungleichung von Friedrichs (2.24) und der von Korn (2.18). Bei der hier verwendeten Definition der Konstanten gilt damit der Zusammenhang  $K = 2(1 + \Gamma)$ . Der direkte Beweis (ohne Umweg über die Ladyzhenskaya-Ungleichung) findet sich in [Hor75] und ist Satz 6 ganz ähnlich.

**Anmerkung 9.** *Da die Ungleichungen von Friedrichs und Ladyzhenskaya äquivalent sind, müssen für die kritischen Funktionen, bei denen die maximalen Konstanten auftreten, alle verwendeten Abschätzungen scharf sein. Daraus ergibt sich die interessante Konsequenz, daß für ein kritisches Feld  $\vec{v}$  mit  $|\vec{v}|_1^2 = C \|\operatorname{div} \vec{v}\|^2$  die Funktionen  $\operatorname{div} \vec{v}$  und  $\operatorname{rot} \vec{v}$  gerade harmonisch konjugiert zueinander sind.*

### 2.3.4 Mehrfacher Zusammenhang

Die vorigen Äquivalenzen gelten immer nur für einfachen Zusammenhang des Gebietes. Über mehrfach zusammenhängende Gebieten wird hier keine Aussage gemacht, an Beispiel 6.1.3 speziell wird aber deutlich werden, daß die Äquivalenz dann wohl nicht mehr gilt. Speziell für die Ladyzhenskaya-Ungleichung kann man jedoch leicht zeigen, daß die Konstante nicht größer sein kann als die Konstante für ein Gebiet  $\Omega_0 \subsetneq \Omega$ , bei dem der mehrfache Zusammenhang des Gebietes  $\Omega$  durch entsprechende Schnitte (eine Nullmenge) aufgehoben wurde, und dies sogar unabhängig von der Dimension. Am einfachsten läßt sich das an der Fassung (2.9) erkennen. Die Räume  $L_0^2$  für die beiden Gebiete  $\Omega$  und  $\Omega_0$  sind offensichtlich identisch (bzw. die Einschränkung der  $L_0^2$ -Funktionen von  $\Omega$  auf  $\Omega_0$ ). Durch die Aufhebung der Nullrandbedingung am Schnitt beim Übergang von  $\Omega_0$  zu  $\Omega$  ist allerdings der Raum  $H_0^{1,2}(\Omega)^d$  echt größer als der Raum  $H_0^{1,2}(\Omega_0)^d$  bzw. gilt umgekehrt

$$H_0^{1,2}(\Omega_0)^d \subsetneq H_0^{1,2}(\Omega)^d,$$

wieder im Sinne der auf  $\Omega_0$  eingeschränkten Funktionen.

Damit ist die Einschränkung jedes  $p \in L_0^2(\Omega)$  auf  $\Omega_0$  ein zulässiges  $p|_{\Omega_0} = p_0 \in L_0^2(\Omega_0)$  gleicher Norm  $\|p\|_\Omega = \|p_0\|_{\Omega_0}$ . Daher existiert für diese  $p_0$  nach (2.9) ein  $v_0 \in H_0^{1,2}(\Omega_0)^d$  mit  $|v_0|_1^2 \leq C_0 \|p_0\|^2$ , das sich auf der Nullmenge des Schnittes wegen der Nullrandbedingung stetig durch Null fortsetzen läßt, so daß  $v|_{\Omega_0} = v_0$  und dabei mit gleicher Norm  $|v|_{1,\Omega} = |v_0|_{1,\Omega_0}$  in  $H_0^{1,2}(\Omega)^d$  bleibt. Daher gilt

$$|v|_1^2 \leq C \|p\|^2$$

mit derselben Konstanten  $C = C_0$  wie im aufgeschnittenen Gebiet  $\Omega_0$ . Wegen  $\mathcal{L}^2 = \frac{1}{C}$  haben wir damit folgenden Satz bewiesen.

**Satz 8.** *Die Ladyzhenskaya-Konstante  $\mathcal{L}$  eines mehrfachen zusammenhängenden Gebietes  $\Omega$  ist nicht kleiner als die Konstante  $\mathcal{L}_0$  des zu einfachem Zusammenhang aufgeschnittenen Gebietes  $\Omega_0$ .*

**Anmerkung 10.** *Allerdings ist hierbei nicht ausgeschlossen, daß für das mehrfach zusammenhängende Gebiet möglicherweise eine deutlich bessere Konstante  $C \ll C_0$  existiert, was sich tatsächlich beispielsweise bei einem schmalen Ring in einem Faktor 2 äußert, d. h.  $C_0 \approx 2C$ .*

**Anmerkung 11.** *Das Gebiet  $\Omega_0$  muß selbstverständlich immer noch zusammenhängend sein. Es ist offensichtlich, daß ein zerfallendes Gebiet prinzipiell keine Ladyzhenskaya-Ungleichung erfüllen kann.*

## 2.4 Analytische Beweise

In diesem Abschnitt finden sich Beweise für die jeweiligen Ungleichungen, die einfach genug sind, um die Entwicklung der Konstanten zu verfolgen, und dadurch gestatten, aus der Form des Gebietes Schranken für die Konstanten zu berechnen.

### 2.4.1 Kornsche Ungleichung

Die erste Untersuchung von (2.18) stammt von Korn selbst [Kor06], [Kor08], [Kor09], ist aber sehr lang und kompliziert und zumindest zweifelhaft. Der erste brauchbare Beweis stammt von Friedrichs [Fri47], später kamen einige weitere hinzu, z. B. von Payne und Weinberger [PW61], Fichera [Fic72], Duvaut und Lions [DL76] oder Nitsche [Nit81].

Ein Beweis, der eine sinnvolle Abschätzung der Konstanten in Abhängigkeit von Parametern des Gebietes gestattet, stammt von Oleinik [Ole91] und ist hier nur kurz skizziert. Für die Details sei auf die Literatur verwiesen.

**Satz 9.** *Sei  $\Omega$  sternförmig bezüglich einer Kugel  $Q_1$  mit Radius  $R_1$  und habe selbst den Durchmesser  $R$ . Weiterhin sei der Abstand zwischen  $Q_1$  und  $\partial\Omega$  mindestens  $\gamma$ . Unter der Nebenbedingung*

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx = 0 \quad (2.28)$$

des zweiten Falles gilt dann Korns Ungleichung (2.18) mit den Konstanten

$$\begin{aligned} D(\vec{u}) &\leq C_1 \left( \frac{R}{R_1} \right)^d \left( 1 + \frac{R^2}{\gamma^2} \right) S(\vec{u}) & d \geq 3, \\ D(\vec{u}) &\leq C_2 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 \left( \ln \frac{3R}{R_1} + \frac{R_1^2}{\gamma^2} \right) S(\vec{u}) & d = 2, \end{aligned}$$

wobei  $C_1$  bzw.  $C_2$  nicht vom Gebiet  $\Omega$  abhängen.

Offensichtlich genügt es, Satz 9 für glatte Funktionen  $u_i$  zu beweisen. Außerdem kann ohne Einschränkung  $R_1 = 1$  gewählt werden, da Korns Ungleichung unabhängig vom Maßstab ist. Der Beweis besteht nun aus mehreren Schritten. Wir beschränken uns hier auf den Fall  $d = 2$ , da für  $d \geq 3$  keine Äquivalenz zur eigentlich interessierenden Ladyzhenskaya-Ungleichung besteht.

**Lemma 10.** *Seien die Voraussetzungen von Satz 9 mit Ausnahme der Nebenbedingung (2.28) erfüllt. Dann gilt ( $d = 2$ )*

$$D(\vec{u}) \leq C_3 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 \ln \frac{3R}{R_1} S(\vec{u}) + C_4 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 D(\vec{u}, Q_1) \quad (2.29)$$

mit von  $\Omega$  unabhängigen Konstanten  $C_3$  und  $C_4$ . Hierbei ist

$$D(\vec{u}, Q_1) = \int_{Q_1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

nur über  $Q_1$  zu integrieren.

*Beweisskizze.* Zunächst führen wir die Notation

$$s_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

für die symmetrische Ableitung von  $\vec{u}$  ein und legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel  $Q_1$ . Außerdem wird der interessante Anteil von  $\vec{u}$  abgespalten durch  $\vec{w} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}$ ,  $\vec{w} = \vec{u}$  auf dem Rand  $\partial\Omega$ ,  $\Delta\vec{w} = 0$ . Der Anteil  $\vec{v}$  entspricht dann dem ersten Fall mit der Nebenbedingung (2.21) und kann deshalb leicht durch eine kleine Konstante (d. h. 2) abgeschätzt werden. Der weitere Fortgang stützt sich auf die Identität

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} s_{ik}(V) + \frac{\partial}{\partial x_k} s_{ij}(V) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} s_{jk}(V) \right) \quad (2.30)$$

für beliebige zweimal differenzierbare Vektorfunktionen  $V_i$ . Diese Identität wird nun geschickt entlang eines Strahls ausgehend vom Ursprung  $O$  zu einem Punkt  $P$  des Gebietsrandes integriert, wobei von der elementaren Ungleichung

$$\int_0^a f^2(t) t dt \leq C \left[ \int_{\frac{a}{4}}^a (t \Leftrightarrow a)^2 t |f'|^2 dt + a^2 \ln 3a \int_0^{\frac{3a}{4}} t |f'|^2 dt + a^2 \int_0^1 t f^2(t) dt \right]$$

(für  $a > 1$ ) Gebrauch gemacht wird. Die entstehende Ungleichung für das Strahlintegral wird nun über alle Winkel integriert, so daß das gesamte Gebiet  $\Omega$  abgedeckt wird, und wir erhalten die Behauptung (2.29).  $\square$

Der Beweis von Satz 9 schreitet voran mit einem weiteren Zwischenschritt gemäß

**Lemma 11.** *Seien wieder die Voraussetzungen von Satz 9 mit Ausnahme der Nebenbedingung (2.28) erfüllt. Dann existiert eine schiefsymmetrische Matrix  $A$ , so daß ( $d = 2$ )*

$$D(\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{x}) \leq C_5 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 \left( \ln \frac{3R}{R_1} + \frac{R_1^2}{\gamma^2} \right) S(\vec{u}),$$

wobei  $C_5$  wieder unabhängig von  $\Omega$  ist.

*Beweisskizze.* Dieses Lemma schätzt hauptsächlich den Anteil  $D(\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{x}, Q_1)$  ab. Hierzu wird erneut die Identität (2.30) verwendet und zur Anwendung der Poincaré-Ungleichung die Matrix der Mittelwerte

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{Q_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx$$

für den interessanten Anteil  $\vec{w}$  wie zuvor definiert. Einige weitere Umformungen betreffen die Abschätzung von  $S(\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{x})$  durch  $S(\vec{u})$ . Die gesuchte Matrix  $A$  schließlich ist gerade der schiefsymmetrische Anteil von  $\tilde{A}$ , d. h.  $A = \frac{1}{2}(\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A}^T)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 9.* Jetzt kommt auch die Nebenbedingung (2.28) ins Spiel. Es ist

$$D(\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{x}) = D(\vec{u}) + D(A\vec{x}) \Leftrightarrow 2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx.$$

Da  $A$  schiefsymmetrisch ist und die Nebenbedingung (2.28) gilt, verschwindet der letzte Term und es ist  $D(\vec{u}) \leq D(\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{x})$ . Die Anwendung von Lemma 11 vervollständigt den Beweis.  $\square$

Es gilt also

$$K \leq C_2 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 \left( \ln \frac{3R}{R_1} + \frac{R_1^2}{\gamma^2} \right) \leq 4C_2 \left( \frac{R}{R_1} \right)^2 \ln \left( 3e \frac{R}{R_1} \right), \quad (2.31)$$

wobei für die hintere Abschätzung  $R_1$  temporär um die Hälfte verkleinert wurde, um dadurch  $\gamma \geq R_1$  abschätzen zu können. Eine etwas mühsame Berechnung aller auftretenden Konstanten ergibt  $C_2 \lesssim 32$ . Im Vergleich mit exakt bekannten Konstanten stellt sich heraus, daß (2.31) – zumindest ohne den logarithmischen Term – die richtige Ordnung für manche Gebiete angibt, beispielsweise für Ellipsen oder im 3D-Fall auch für Ellipsoide. Die Konstante  $4C_2$  liegt jedoch erheblich zu hoch und die Abschätzung (2.31) ist dadurch nicht sehr scharf. Immerhin ist deutlich zu sehen, daß für Gebiete mit großem Verhältnis  $\frac{R}{R_1}$  die Konstante  $K$  beliebig groß werden könnte, was in [Ole91] für flache Gebiete (Schalen) auch gezeigt wird.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis stammt von Dafermos [Daf68] und behandelt Korns Konstante für die Vereinigung zweier Gebiete. Zusammen mit Satz 9 erhalten wir die Existenz der Konstante und die Richtigkeit der Ungleichung für allgemeine Gebiete mit der Kegelbedingung oder Gebiete mit Lipschitzrand, die sich bekanntlich durch Vereinigung von sternförmigen Gebieten zusammensetzen lassen. Der folgende Satz verschärft das Resultat von Dafermos etwas, maximal um einen Faktor  $\frac{1}{2}$ .

**Satz 12.** *Sei  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  die Vereinigung zweier Teilgebiete mit nichtleerer Schnittmenge  $\Omega_s = \Omega_1 \cap \Omega_2$ . In jedem der Teilgebiete gelte Korns Ungleichung mit den Konstanten  $K_1$  bzw.  $K_2$ . Dann gilt Korns Ungleichung auch für ganz  $\Omega$  und mit der Abkürzung*

$$K_s = \frac{1}{|\Omega_s|} \left( \sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} \right)^2$$

lautet eine obere Schranke für die Konstante

$$K \leq \min \{ K_1 + |\Omega_1| K_s, K_2 + |\Omega_2| K_s \},$$

wobei  $|\Omega_1|$ ,  $|\Omega_2|$  und  $|\Omega_s|$  jeweils für die Volumina der Gebiete stehen.

*Beweis.* Der passende Funktionenraum für Korns Ungleichung im zweiten Fall mit der Nebenbedingung (2.22) ist

$$H_K(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in H^{1,2}(\Omega)^d \mid \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx = 0 \right\}.$$

Sei nun  $\vec{u} \in H_K(\Omega)$ . Wir bilden damit

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \frac{1}{2|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \leftrightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx, \\ \bar{u}_i &= \omega_{ij} x_j, \\ v_i &= u_i \leftrightarrow \bar{u}_i.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir sofort  $S_\Omega(\vec{v}) = S_\Omega(\vec{u})$ , und da  $\vec{u} \in H_K(\Omega)$  und außerdem  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  konstant und schiefsymmetrisch ist,

$$D_\Omega(\vec{v}) = D_\Omega(\vec{u}) + D_\Omega(\overset{\leftrightarrow}{\vec{u}}) \geq D_\Omega(\vec{u})$$

mit der Notation  $S_\Omega(\cdot)$  und  $D_\Omega(\cdot)$  aus Punkt 2.3.2. Nach Konstruktion ist  $\vec{v} \in H_K(\Omega_1)$  und folglich gilt

$$D_{\Omega_1}(\vec{v}) \leq K_1 S_{\Omega_1}(\vec{v}) \leq K_1 S_\Omega(\vec{u}).$$

Wir fahren fort mit der Bildung von

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \leftrightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx, \\ \bar{v}_i &= \bar{\omega}_{ij} x_j,\end{aligned}$$

und schließen damit einerseits

$$S_{\Omega_2}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) = S_{\Omega_2}(\vec{v}) \leq S_\Omega(\vec{u})$$

und andererseits

$$D_{\Omega_2}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) = D_{\Omega_2}(\vec{v}) \leftrightarrow D_{\Omega_2}(\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}).$$

Wiederum ist nach Konstruktion  $\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}} \in H_K(\Omega_2)$  und daher mit Korn's Ungleichung

$$D_{\Omega_2}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) \leq K_2 S_{\Omega_2}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) \leq K_2 S_\Omega(\vec{u}).$$

Damit haben wir

$$D_{\Omega_2}(\vec{v}) \leq K_2 S_\Omega(\vec{u}) + D_{\Omega_2}(\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}),$$

und wenn wir berücksichtigen, daß  $\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}$  linear ist, ergibt sich

$$D_{\Omega_2}(\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_s|} D_{\Omega_s}(\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}).$$

Mit der Cauchy-Ungleichung (optimales  $\epsilon$  bereits eingesetzt) und den bisherigen Ergebnissen können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}D_{\Omega_s}(\overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) &\leftrightarrow c D_{\Omega_s}(\vec{v}) \leq \left(1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \leftrightarrow c\right) D_{\Omega_s}(\vec{v}) + \left(1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\right) D_{\Omega_s}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) \leq \\ &\leq \left(1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \leftrightarrow c\right) D_{\Omega_1}(\vec{v}) + \left(1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\right) D_{\Omega_2}(\vec{v} \leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{\vec{v}}) \leq \\ &\leq \left((\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2 \leftrightarrow c\right) S_\Omega(\vec{u})\end{aligned}$$

mit einer beliebigen Zahl  $c < 1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$ . Insbesondere ist  $|\Omega_s| < |\Omega_2|$  und damit  $c = \frac{|\Omega_s|}{|\Omega_2|}$  zulässig.

Alles zusammengefaßt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} D_\Omega(\vec{u}) &\leq D_\Omega(\vec{v}) = D_{\Omega_1}(\vec{v}) + D_{\Omega_2}(\vec{v}) \Leftrightarrow D_{\Omega_s}(\vec{v}) \leq \\ &\leq \left( K_1 + K_2 + \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_s|} \left( (\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2 \Leftrightarrow \frac{|\Omega_s|}{|\Omega_2|} K_1 \right) \right) S_\Omega(\vec{u}) \leq \\ &\leq \left( K_2 + \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_s|} (\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2 \right) S_\Omega(\vec{u}), \end{aligned}$$

und ganz genauso selbstverständlich mit den Rollen von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  vertauscht.  $\square$

### 2.4.2 Friedrichssche Ungleichung

Die Ungleichung von Friedrichs (2.24) wurde von ihm selbst in [Fri37] für Gebiete mit stückweisem  $C^1$ -Rand und einer endlichen Zahl von Ecken bewiesen, wobei die Innenwinkel der Ecken nach unten beschränkt sein müssen. Der Beweis ist allerdings etwas unübersichtlich – nicht zuletzt durch die komplexe Notation –, insbesondere bei Gebieten mit Ecken kann die Entwicklung der Konstanten wiederum kaum verfolgt werden. Allerdings zeigt er für eine Ecke durch explizite Konstruktion einer Funktionenfolge eine untere Schranke für  $\Gamma$ , die der Einfachheit halber hier für ein ‘‘Tortengstück’’ mit Radius 1 und Innenwinkel  $\alpha$  wie in Abbildung 2.1 wiedergegeben wird.

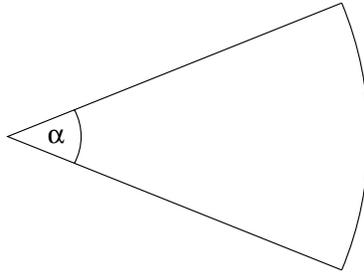


Abbildung 2.1: Tortengebiet mit Innenwinkel  $\alpha$

**Satz 13.** *Für das Tortengebiet mit Innenwinkel  $\alpha$  gilt die Schranke*

$$\Gamma \geq \frac{1 + M}{1 \Leftrightarrow M} \tag{2.32}$$

mit der Abkürzung  $M = \frac{|\sin \alpha|}{\alpha}$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $\alpha < \pi$ . Wir verwenden in Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  die Funktionenfolge für  $0 < \eta < 1$

$$h_\eta = \sqrt{2\eta} r^{\eta-1} \cos(\phi(\eta \Leftrightarrow 1)) \quad (2.33)$$

mit den harmonisch Konjugierten

$$h_\eta^* = \sqrt{2\eta} r^{\eta-1} \sin(\phi(\eta \Leftrightarrow 1)).$$

Eine elementare Integration über das Tortengebiet ergibt

$$\begin{aligned} \|h_\eta\|^2 &= \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{1 \Leftrightarrow \eta} \sin(\alpha(1 \Leftrightarrow \eta)) \right), \\ \|h_\eta^*\|^2 &= \frac{1}{2} \left( \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{1 \Leftrightarrow \eta} \sin(\alpha(1 \Leftrightarrow \eta)) \right), \end{aligned}$$

mit dem Verhältnis ( $\beta = \alpha(1 \Leftrightarrow \eta)$ )

$$\Gamma_\eta = \frac{\|h_\eta\|^2}{\|h_\eta^*\|^2} = \frac{\beta + \sin \beta}{\beta \Leftrightarrow \sin \beta}$$

und dem Grenzwert

$$\Gamma_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \Gamma_\eta = \frac{1 + M}{1 \Leftrightarrow M}.$$

Obwohl die Grenzfunktion  $h_0$  gerade nicht mehr in  $L^2$  ist, gibt es doch für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\eta > 0$  mit  $h_\eta \in L^2$ , so daß  $\Gamma_\eta > \Gamma_0 \Leftrightarrow \epsilon$  und insgesamt  $\Gamma \geq \Gamma_0$ . Für  $\pi < \alpha < 2\pi$  vertauschen sich gerade die Rollen von  $h_\eta$  und  $h_\eta^*$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Die Konstruktion (2.33) zeigt, daß für  $\eta \rightarrow 0$  der Beitrag zu  $\|h_\eta\|$  außerhalb eines kleinen Bereiches um den Ursprung vernachlässigbar ist. Bei einem beliebig geformten Gebiet mit der Kegeleigenschaft kann deshalb jede Ecke separat als Tortengebiet betrachtet werden und der Beitrag durch den Rest des Gebietes für hinreichend kleines  $\eta$  abgeschätzt werden. Damit gilt Satz 13 für alle Gebiete mit Ecken und minimalem Innenwinkel  $\alpha$ .

Für sternförmige Gebiete kann ein etwas einfacherer Beweis [HP83] angegeben werden, der es gestattet, aus der Gebietsform eine obere Schranke für  $\Gamma$  abzuleiten, die für zahlreiche interessante Gebiete fast scharf ist. Im Unterschied zu der Normalisierungsbedingung (2.26) verwenden wir hier allerdings

$$h(0,0) = 0, \quad (2.34)$$

denn

$$\|h\|^2 \leq \|h \Leftrightarrow h(0,0)\|^2$$

für jedes  $h$  mit der Eigenschaft  $\int_\Omega h dx = 0$ . Die gesuchte Konstante  $\Gamma$  ist damit nicht größer als die Konstante  $\bar{\Gamma}$ , die wir mit unserer Nebenbedingung (2.34) bestimmen.

Es sei nun  $\Omega$  sternförmig bezüglich eines Kreises mit Radius  $r_K$  um den Ursprung. Der Rand  $\partial\Omega$  werde in Polarkoordinaten dargestellt durch eine Radiusfunktion über den Winkel  $r = f(\phi)$ . Da die Friedrichs-Ungleichung unabhängig vom Maßstab ist, kann der Radius von  $\Omega$  ohne Einschränkung zu 1 skaliert werden, so daß gilt  $r_K < f(\phi) \leq 1$ . Weiterhin seien  $h$  und  $h^*$  harmonisch konjugierte und  $h$  erfülle (2.34). Mit den Definitionen  $H = h^2 \Leftrightarrow h^{*2}$  und  $G = 2hh^*$  gilt

$$G(0,0) = 0, \quad H(0,0) \leq 0. \quad (2.35)$$

In Polarkoordinaten haben wir folglich

$$H(r, \phi) \Leftrightarrow H(0, \phi) = \int_0^r \frac{\partial H(\rho, \phi)}{\partial \rho} d\rho = \int_0^r \frac{1}{\rho} \frac{\partial G(\rho, \phi)}{\partial \phi} d\rho,$$

und mit (2.35)

$$H(r, \phi) \leq \int_0^r \frac{1}{\rho} \frac{\partial G(\rho, \phi)}{\partial \phi} d\rho.$$

Integration über  $\Omega$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{H(r, \phi)}{f^2(\phi)} dx &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\phi)} \frac{1}{f^2(\phi)} \left( \int_0^r \frac{1}{\rho} \frac{\partial G(\rho, \phi)}{\partial \phi} d\rho \right) r dr d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{f^2(\phi) \Leftrightarrow \rho^2}{\rho^2 f^2(\phi)} \frac{\partial G(\rho, \phi)}{\partial \phi} \rho d\rho d\phi \\ &\leq \Leftrightarrow \int_{\Omega} \frac{f'(\phi)}{f^3(\phi)} G(r, \phi) dx, \end{aligned}$$

(mit  $dx = r dr d\phi$ ) nach partieller Integration und Wegfall der Randterme, da  $r = f(\phi)$ . Nach Definition von  $H$  und  $G$  schließen wir weiter

$$\int_{\Omega} \frac{h^2}{f^2(\phi)} dx \leq \int_{\Omega} \frac{h^{*2}}{f^2(\phi)} dx + 2 \int_{\Omega} \frac{|Q(\phi)| |h| |h^*|}{f^2(\phi)} dx, \quad (2.36)$$

wobei

$$Q(\phi) = \frac{f'(\phi)}{f(\phi)}$$

gesetzt wurde. Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf (2.36) ist direkt möglich, da  $f(\phi)$  nach oben und unten beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\int_{\Omega} h^2 dx \leq \frac{2(1 + 2Q_{max}^2)}{r_K^2} \int_{\Omega} h^{*2} dx,$$

worin wir  $Q_{max}^2$  aus einfachen geometrischen Überlegungen durch  $\frac{1-r_K^2}{r_K^2}$  abschätzen können. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

**Satz 14.** Sei  $\Omega$  sternförmig bezüglich eines Kreises um den Ursprung mit Radius  $r_K$ . Das Gebiet  $\Omega$  habe den Radius  $R$ . Dann gilt für die Konstante der Friedrichsschen Ungleichung (2.24) die Abschätzung

$$\Gamma \leq 2 \left( \frac{2R^2}{r_K^2} \Leftrightarrow 1 \right).$$

Die genauere Abschätzung aus [HP83] verwendet bei der Anwendung der Cauchy-Ungleichung auf (2.36) winkelabhängige  $\epsilon$ -Faktoren und kann auf diese Weise etwas schärfere Schranken angeben. Sie kommt am Ende – abgesehen von einigen Schreibfehlern – auf das Ergebnis

$$\Gamma \leq \left( \sqrt{1 + Q_{max}^2} + Q_{max} \right)^2 \leq \frac{R^2}{r_K^2} \left( 1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{r_K^2}{R^2}} \right)^2 \leq 4 \frac{R^2}{r_K^2}, \quad (2.37)$$

oder mit dem Parameter  $p$  aus Abbildung 2.2

$$\Gamma \leq \max_{\phi} \left( \frac{r}{p} + \sqrt{\frac{r^2}{p^2} \Leftrightarrow 1} \right)^2. \quad (2.38)$$

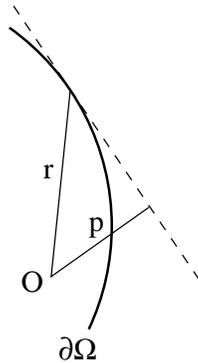


Abbildung 2.2: Geometrische Bedeutung des Parameters  $p$

Zwischen den Größen  $Q$ ,  $r$  und  $p$  besteht der Zusammenhang

$$Q^2 = \frac{r^2 \Leftrightarrow p^2}{p^2}.$$

### 2.4.3 Ladyzhenskaya-Ungleichung für Ellipsen und Ellipsoide

Eine Möglichkeit, die Gültigkeit von (2.6) direkt nachzuweisen, ist die exakte Lösung des Problems (2.15). Wie stets bei exakten Lösungen ist dies allerdings nur in ganz speziellen

Fällen möglich. Tatsächlich ist es bislang lediglich für den Kreis und die Kugel gelungen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (2.15) sind schon seit über hundert Jahren bekannt [CC98] und in [Vel90] erneut zusammengefaßt. Sie lauten für einen Radius von 1 in drei Dimensionen

$$\vec{v}_n(x) = (1 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2) \nabla P_n(x), \quad (2.39)$$

$$\lambda_n = 2 + \frac{1}{n}, \quad (2.40)$$

wobei  $P_n(\vec{x})$  die harmonischen Polynome  $n$ -ten Grades sind ( $n \in \mathbb{N}$ ), von denen es jeweils  $2n + 1$  linear unabhängige gibt. Die Funktionen im ebenen Fall sehen formal identisch aus, die Eigenwerte  $\lambda_n = 2$  sind alle identisch, und die  $P_n(\vec{x})$  sind die ebenen harmonischen Polynome  $n$ -ten Grades, von denen es jeweils zwei linear unabhängige gibt. Bekanntlich stellen die harmonischen Polynome eine vollständige Orthonormalbasis des Raumes der quadratintegriblen harmonischen Funktionen über der Einheitskugel dar. Folglich bilden die Eigenfunktionen (2.39) eine vollständige Basis für den Raum  $V_\beta$  aus Abschnitt 2.2. Somit läßt sich jede Funktion aus  $V_\beta$  in die Eigenfunktionen (2.39) entwickeln und die Konstante  $C$  aus Ungleichung (2.15) erhalten wir mit dem Rayleigh-Quotienten zu

$$C = \max_{\vec{v} \in H} \frac{|\vec{v}|_1^2}{\|\operatorname{div} \vec{v}\|^2} = \lambda_1 = \begin{cases} 3 & \text{in 3D} \\ 2 & \text{in 2D} \end{cases}, \quad (2.41)$$

und genauso für die Konstante  $D$  aus (2.17)

$$D = \sup_{\vec{v} \in H} \frac{|\vec{v}|_1^2}{\|\operatorname{rot} \vec{v}\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_n \Leftrightarrow 1} \right) = \begin{cases} 2 & \text{in 3D} \\ 2 & \text{in 2D} \end{cases}.$$

Die Verallgemeinerung auf Ellipsen bzw. Ellipsoide benutzt ebenfalls die harmonischen Polynome  $P_n(\vec{x})$ , die wieder jeweils Druckeigenfunktionen sind. Lediglich die Geschwindigkeitseigenfunktionen lassen sich nicht so einfach wie in (2.39) angeben, sondern setzen sich aus dem Faktor  $f = 1 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2$  für die Nullrandbedingung und einem passenden Polynom zusammen. Die Rechnung ist wiederum etwas technisch, aber nicht sonderlich anspruchsvoll und führt beispielsweise bei einer Ellipse mit den Radien  $a$  und  $b$  zu den Eigenfunktionen und Eigenwerten niedrigster Ordnung (wobei bei  $p$  und  $u$  Normierungsfaktoren weggelassen wurden)

| $p$                         | $u$  | $\lambda$  |
|-----------------------------|--|--|
| $x$                         | $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   | $\frac{a^2+b^2}{b^2}$                                      |
| $y$                         | $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   | $\frac{a^2+b^2}{a^2}$                                      |
| $x^2 \Leftrightarrow y^2$   | $f \begin{pmatrix} \frac{-x}{a^2+3b^2} \\ \frac{y}{3a^2+b^2} \end{pmatrix}$  | $\frac{(a^2+3b^2)(3a^2+b^2)}{8a^2b^2}$                     |
| $xy$                        | $f \begin{pmatrix} \frac{y}{3a^2+b^2} \\ \frac{x}{a^2+3b^2} \end{pmatrix}$   | $\frac{(a^2+3b^2)(3a^2+b^2)}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}$           |
| $x^3 \Leftrightarrow 3xy^2$ | $f \begin{pmatrix} \frac{a^4-b^4-2(3a^2+b^2)x^2+2(a^2+3b^2)y^2}{a^4+6a^2b^2+b^4} \\ \frac{4xy}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ | $\frac{(a^2+b^2)(a^4+6a^2b^2+b^4)}{b^2(5a^4+2a^2b^2+b^4)}$ |
| $3x^2y \Leftrightarrow y^3$ | $f \begin{pmatrix} \frac{4xy}{a^2+b^2} \\ \frac{a^4-b^4-2(3a^2+b^2)x^2+2(a^2+3b^2)y^2}{a^4+6a^2b^2+b^4} \end{pmatrix}$ | $\frac{(a^2+b^2)(a^4+6a^2b^2+b^4)}{a^2(a^4+2a^2b^2+5b^4)}$ |

Damit finden wir die Ladyzhenskaya-Konstante für die Ellipse zu

$$\mathcal{L}_{\text{Ellipse}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \quad (2.42)$$

für  $a \leq b$ . Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der Abschätzung der Friedrichs-Ungleichung nach (2.38), woraus wir entnehmen können, daß in diesem Fall die Abschätzung scharf ist. Des weiteren können wir daraus schließen, daß es keine allgemeingültige untere Schranke für  $\mathcal{L}$  gibt, denn für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein elliptisches Gebiet mit den Halbachsen  $\epsilon^2$  und 1, so daß  $\mathcal{L}_{\Omega_\epsilon} < \epsilon$ .

Eine ganz ähnliche Konstruktion führt im räumlichen Fall zu den analogen Eigenfunktionen und Eigenwerten niedrigster Ordnung

| $p$ | $u$   | $\lambda$                             |
|-----|---|---------------------------------------|
| $x$ | $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2c^2}$ |
| $y$ | $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{c^2a^2}$ |
| $z$ | $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2}$ |

und damit für  $a \leq b \leq c$  zu der Konstanten

$$\mathcal{L}_{\text{Ellipsoid}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}. \quad (2.43)$$

Auch in drei Dimensionen gibt es also wieder Gebiete mit beliebig kleiner Ladyzhenskaya-Konstante.

#### 2.4.4 Ladyzhenskaya-Konstante im periodischen Kanal

Auch für Rechtecke ist es möglich, eine exakte Lösung wie im vorigen Punkt 2.4.3 anzugeben, allerdings lediglich für andere Randbedingungen als den bisher verwendeten homogenen Dirichletrand.

Hierzu definieren wir periodische Randbedingungen an den beiden vertikalen Rändern  $x = \pm l$  aus Zeichnung 2.3. Der passende Sobolev-Raum hierzu lautet

$$H_{\text{per}} = \left\{ \vec{v} \in H^{1,2}(\Omega)^d \mid \vec{v} = 0 \text{ bei } y = \pm h, \vec{v}(\pm l, y) = \vec{v}(l, y) \forall y \in [-h, h] \right\}. \quad (2.44)$$

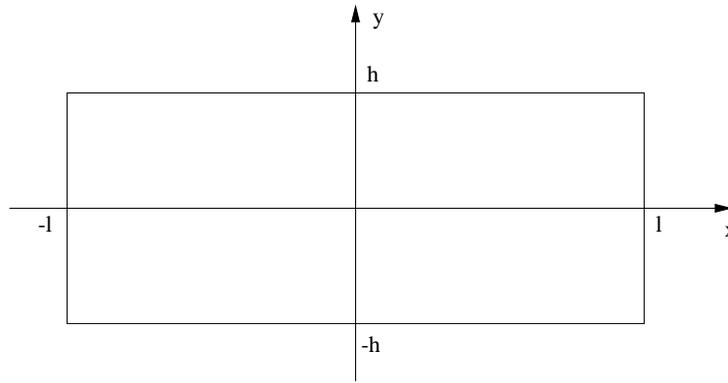


Abbildung 2.3: Rechteckiger Kanal

Es stellt sich heraus [Gou94], daß die Velte-Zerlegung aus Abschnitt 2.2 auch bei diesen Randbedingungen Gültigkeit besitzt, und daß die Eigenfunktionen aus (2.15) explizit angegeben werden können. Eine vollständige Orthogonalbasis für die quadratintegriblen harmonischen Funktionen bildet die Familie

$$\begin{aligned} e_0 &= y, \\ e_n^{sc} &= \sinh(ny) \cos(nx), \\ e_n^{ss} &= \sinh(ny) \sin(nx), \\ e_n^{cc} &= \cosh(ny) \cos(nx), \\ e_n^{cs} &= \cosh(ny) \sin(nx). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir nun ohne Einschränkung  $l = \pi$ . Die zugehörigen Eigenfunktionen aus  $H_{per}$  bzw. dem interessanten Anteil  $H$  dieses Raumes ergeben sich durch eine einfache Rechnung zu

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ h^2 \Leftrightarrow y^2 \end{pmatrix}, \\ \vec{v}_n^{sc} &= \begin{pmatrix} (\Leftrightarrow y \sinh(nh) \cosh(ny) + h \cosh(nh) \sinh(ny)) \sin(nx) \\ (y \cosh(nh) \sinh(ny) \Leftrightarrow h \sinh(nh) \cosh(ny)) \cos(nx) \end{pmatrix}, \\ \vec{v}_n^{ss} &= \begin{pmatrix} (y \sinh(nh) \cosh(ny) \Leftrightarrow h \cosh(nh) \sinh(ny)) \cos(nx) \\ (y \cosh(nh) \sinh(ny) \Leftrightarrow h \sinh(nh) \cosh(ny)) \sin(nx) \end{pmatrix}, \\ \vec{v}_n^{cc} &= \begin{pmatrix} (\Leftrightarrow y \cosh(nh) \sinh(ny) + h \sinh(nh) \cosh(ny)) \sin(nx) \\ (y \sinh(nh) \cosh(ny) \Leftrightarrow h \cosh(nh) \sinh(ny)) \cos(nx) \end{pmatrix}, \\ \vec{v}_n^{cs} &= \begin{pmatrix} (y \cosh(nh) \sinh(ny) \Leftrightarrow h \sinh(nh) \cosh(ny)) \cos(nx) \\ (y \sinh(nh) \cosh(ny) \Leftrightarrow h \cosh(nh) \sinh(ny)) \sin(nx) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned}\lambda_n^{sc} = \lambda_n^{ss} &= 2 \left( 1 + \frac{2nh}{\sinh(2nh)} \right)^{-1}, \\ \lambda_n^{cc} = \lambda_n^{cs} &= 2 \left( 1 \Leftrightarrow \frac{2nh}{\sinh(2nh)} \right)^{-1},\end{aligned}$$

jeweils für die Funktionen  $\vec{v}_n^{sc}$  und  $\vec{v}_n^{ss}$  bzw.  $\vec{v}_n^{cc}$  und  $\vec{v}_n^{cs}$ .

Die Ladyzhenskaya-Konstante für das Rechteckgebiet (wieder mit den ursprünglichen Bedeutungen von  $h$  und  $l$ ) ist dann einfach der größte Eigenwert, also

$$C = \frac{2}{1 \Leftrightarrow \frac{2\pi h}{l \sinh\left(\frac{2\pi h}{l}\right)}}.$$

Für langgestreckte Kanäle, d.h.  $h \ll l$  kann dies mit einer einfachen Reihenentwicklung des Sinus hyperbolicus grob abgeschätzt werden zu

$$C \approx \frac{5}{7} + \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{l}{h} \right)^2,$$

also auch beim Rechteck und diesen Randbedingungen  $C \rightarrow \infty$  für  $\frac{h}{l} \rightarrow 0$ .



# Kapitel 3

## Diskretes Problem

Außer den genannten Spezialfällen aus den vorangegangenen Punkten 2.4.3 und 2.4.4 ist es in der Regel nicht möglich, die Lösung der Stokes-Gleichungen (1.1) in geschlossener Form exakt anzugeben. Wie bei anderen Differentialgleichungen beschränkt man sich deshalb darauf, den Verlauf der Lösung näherungsweise zu ermitteln. Für diese Diskretisierung stehen verschiedene Verfahren zur Auswahl, die je nach Problem, Gebiet, verwendeter Computertechnologie und gewünschter Genauigkeit unterschiedlich geeignet sind. Bei den betrachteten elliptischen Differentialgleichungssystemen sind dies im wesentlichen Finite Differenzen, Finite Elemente und Finite Volumen sowie spektrale Verfahren. Alle führen nach der Diskretisierung der Stokes-Gleichungen auf ein lineares Gleichungssystem, das mit Algorithmen der numerischen linearen Algebra gelöst werden kann. Die konkrete Implementierung diverser Lösungsalgorithmen ist in Anhang A.4 detailliert beschrieben.

Wir werden uns hier auf Finite-Elemente-Verfahren zur Diskretisierung beschränken. Dies liegt vor allem daran, daß die mathematische Theorie hierfür am weitesten entwickelt ist. Sie ist der Theorie der Variationsgleichungen sehr ähnlich und zahlreiche funktionalanalytische Ergebnisse des kontinuierlichen Problems können deshalb im Kern unverändert übernommen werden. Tatsächlich kann man zeigen, daß gewisse Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Formulierungen äquivalent zu entsprechenden Finite-Elemente-Diskretisierungen sind, so daß die gefundenen Resultate in gewissem Umfang übertragbar sind.

Weiterhin schränken wir die zu diskretisierenden Differentialgleichungen auf die Stokes-Gleichungen (1.1) in den primitiven Variablen  $u$  und  $p$  ein. Eine Diskretisierung mit Stromfunktion  $\psi$  und Wirbelstärke  $\omega$  oder anderen Potentialen und Ableitungen der Geschwindigkeiten ist zwar in vielen Fällen möglich und in manchen auch sinnvoll, verursacht aber wieder andere Probleme als die hier zur Diskussion stehenden (z. B. bei der Behandlung der Randbedingungen) und bleibt in dieser Arbeit deshalb unberücksichtigt. Außerdem ist die Formulierung in primitiven Variablen vom physikalischen Standpunkt her am anschaulichsten, da direkt meßbare physikalische Größen rechnerisch bestimmt werden.

### 3.1 Finite Elemente

Diskrete Finite-Elemente-Räume können auf die unterschiedlichste Art und Weise konstruiert werden. Insbesondere wenn Singularitäten bekannten Typs auftreten, ist es auch möglich, speziell für diese Singularitäten Elemente anzugeben, die trotz singulärer Lösung sehr gute Konvergenz gegen die kontinuierliche Lösung garantieren.

Im allgemeinen werden Finite Elemente jedoch einfach als stückweise polynomiale Funktionen angesetzt. Generell bieten Elemente hoher Ordnung nur Vorteile bei hinreichend glatten Lösungen. Je nach Differentialgleichung müssen die Funktionen unterschiedliche globale Stetigkeitsforderungen erfüllen, um überhaupt Konvergenz gegen die kontinuierliche Lösung zu erlauben oder bei konformen Elementen gar im kontinuierlichen Suchraum zu liegen. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie die Poisson-Gleichung oder die Geschwindigkeiten im Stokes-Problem, ist für konforme Elemente lediglich Stetigkeit erforderlich, bei vierter Ordnung wie beispielsweise der biharmonischen Gleichung wird sogar ein stetig differenzierbarer Anschluß an den Elementgrenzen benötigt. Nichtkonforme Elemente besitzen weniger globale Glattheit, allerdings sind dann zusätzliche Konsistenzbedingungen zu erfüllen, wie beispielsweise bei dem bekannten Crouzeix-Raviart-Element die Stetigkeit der Elemente zumindest an den Kantenmitten.

Bei der Konstruktion einer geeigneten Basis für die gewünschten Elemente ist es unerlässlich, daß die gewählten Knoten die Funktion eindeutig bestimmen, also unisolvent sind. Ein rechentechnischer Gesichtspunkt ist die Größe des Trägers der einzelnen Basisfunktionen. Bei der Diskretisierung bzw. der Berechnung der Einträge der Steifigkeits- und Massenmatrix verschwinden alle Einträge, die zu Spalten- und Zeilenfunktionen mit disjunktem Träger gehören. Deshalb ist es sinnvoll, dafür zu sorgen, daß der Träger jeder Basisfunktion möglichst klein bleibt, damit die entstehenden Matrizen dünn besetzt und mit geeigneten Algorithmen schnell zu lösen sind. In Spezialfällen (beispielsweise auf einem Rechteck) ist es allerdings manchmal auch möglich, direkt eine Orthogonalbasis anzugeben, so daß die Steifigkeitsmatrix diagonal und folglich trivial zu lösen ist. Ansonsten sind möglichst lokale Basisfunktionen zu wählen.

Wir beschränken uns bei der folgenden Vorstellung der wichtigsten Finiten Elemente auf Dreieckselemente. Diese besitzen aber zumeist eine offensichtliche Verallgemeinerung auf Rechteckelemente und in drei Dimensionen auf Tetraeder- und Quaderelemente. Zur besseren Randapproximation werden gelegentlich auch isoparametrische Elemente verwendet, die beispielsweise durch quadratische Abbildungen aus den entsprechenden Standardelementen hervorgehen. Der Aufwand bei der Aufstellung der Systemmatrix wird dabei jedoch deutlich erhöht und lohnt sich nur bei Elementen hoher Ordnung.

Untersucht wurden im Laufe der Arbeit die stabilen Elemente  $\text{Mini}=\text{P}_1\text{Mini}_1$ ,  $\text{P}_1\text{P}_2$ ,  $\text{P}_1\text{Mini}_2$ ,  $\text{P}_2\text{Mini}_2$ ,  $\text{P}_1\text{P}_3$ ,  $\text{P}_2\text{P}_3$ , Crouzeix-Raviart,  $\text{P}_1\text{P}_1 \times 2$  (einmal verfeinerte Geschwindigkeitstriangulierung),  $\text{P}_1\text{P}_1 \times 3$ ,  $\text{P}_1\text{Mini}_3$  und  $\text{P}_2\text{Mini}_3$  sowie zum Test der künstlichen Stabilisierung aus Abschnitt 3.3 das von Haus aus nicht stabile  $\text{P}_1\text{P}_1$ -Element.

### 3.1.1 Unstetige Elemente

Elemente ohne jede Stetigkeitsforderung werden in der Regel mit einem auf einzelne Dreiecke beschränkten Träger konstruiert. Sie benutzen vollständige Polynome und geeignet viele Stützstellen innerhalb des Dreiecks, wobei lediglich zu beachten ist, daß diese Stützstellen das Polynom eindeutig bestimmen. Beispielsweise dürfen für lineare Polynome die drei Stützpunkte nicht kollinear sein. Das einfachste Element ist stückweise konstant, höhere Ordnungen können ebenfalls ganz einfach erstellt werden wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Sehr vorteilhaft ist bei diesen Elementen, daß die Basisfunktionen zweier Dreiecke disjunkte Träger haben. Die Massenmatrix ist deshalb (block-)diagonal und folglich trivial invertierbar. Allerdings eignen sie sich wegen fehlender Stetigkeitseigenschaften beispielsweise nicht für den Hauptteil elliptischer Systeme.

Bei Viereckselementen können entweder bilineare (biquadratische, ...) Funktionen angesetzt werden oder auch dieselben vollständigen Polynome wie bei Dreiecken. Letztere werden zweckmäßig über Funktionswert und Ableitungen am Mittelpunkt bestimmt.

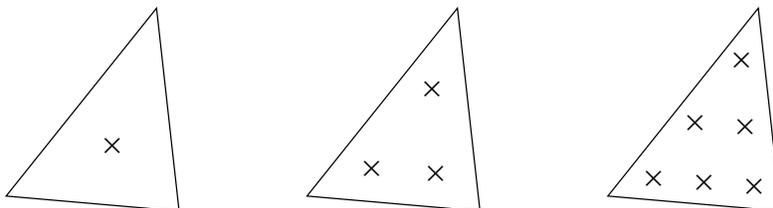


Abbildung 3.1: Unstetige polynomiale Elemente mit Lagrange-Knoten (Funktionsauswertung)

### 3.1.2 $C^0$ -Elemente

Stetige Elemente sind sehr leicht zu konstruieren. Die bekanntesten Vertreter sind die zweidimensionalen Verallgemeinerungen der Lagrange-Splines und bestehen aus vollständigen Polynomen  $n$ -ten Grades auf jedem Dreieck. Durch die Vorgabe der Werte an den in Abbildung 3.2 gezeigten Knotenpunkten sind die Funktionen auf jedem Dreieck eindeutig bestimmt, die Lage der Knoten auf den Ecken und Kanten sorgt automatisch für die notwendige Stetigkeit über Dreiecksgrenzen hinweg. Ab dem kubischen Element entstehen innere Knoten, die mittels statischer Kondensation eliminiert werden können, da die Träger aller zugehörigen Basisfunktionen disjunkt sind.

Eine andere Möglichkeit ergibt sich aus der Verallgemeinerung der Hermite-Splines. Sie bestehen aus denselben Funktionen, verwenden allerdings andere Knoten, nämlich einige Funktionswerte und einige Werte von Ableitungen der Funktion, wie in Abbildung 3.3 zu sehen. Das kubische Hermite-Elemente nutzt Funktionswerte ( $\times$ ) und die beiden ersten

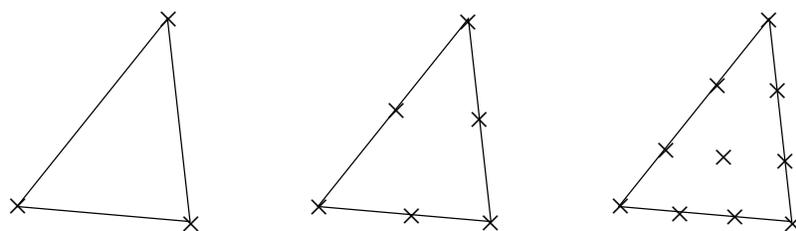


Abbildung 3.2: Lagrange-Elemente mit linearen, quadratischen und kubischen Polynomen

Ableitungen an den Ecken ( $\otimes$ ). Das Element vierter Ordnung verwendet zusätzlich die Funktionswerte auf den Kantenmitten und das Element fünfter Ordnung schließlich die Funktionswerte und alle ersten und zweiten Ableitungen an den Ecken ( $\otimes$ ) sowie zusätzlich die Normalableitung auf jeder Kantenmitte.

Sie liefern zwar die gleiche Approximationsordnung wie ihre Lagrange-Geschwister, ergeben jedoch je nach Glattheit der Funktion und der Triangulierung manchmal eine kleinere Konstante vor der Ordnung. Außerdem führen sie zum Teil zu erheblich weniger Unbekannten bei gleicher Ordnung und Triangulierung, da sie durch die Vorgabe von Ableitungen an Ecken und Kanten glatter sind. Auf der anderen Seite sorgt dies wieder für stärker besetzte Matrizen, so daß der Spareffekt an Matrixeinträgen nicht besonders ausgeprägt ist.

Die Konstruktion der Elemente für Vierecke erfolgt in der Regel als Tensorprodukt der entsprechenden eindimensionalen Ansätze, beispielsweise als bilineare oder biquadratische Elemente. Dadurch sind die Funktionen entlang der Diagonalen von höherer Ordnung, was aber nicht weiter stört. Teilweise können zu inneren Knoten gehörende Basisfunktionen auch weggelassen werden, ohne die Konvergenzordnung zu verschlechtern. Die Verallgemeinerung auf Tetraeder benutzt ebenfalls vollständige Polynome, bei Quadern wird der Tensorproduktansatz lediglich um eine weitere Dimension ergänzt.

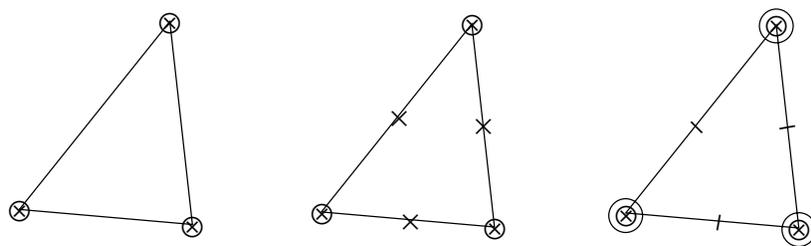


Abbildung 3.3: Hermite-Elemente aus Polynomen 3.-5. Ordnung

### 3.1.3 $C^1$ -Elemente

Stetig differenzierbare Elemente sind erheblich aufwendiger in der Konstruktion. Der einfachste Ansatz über ein ganzes Dreieck von Argyris benutzt vollständige Polynome fünfter Ordnung und ist in Abbildung 3.4 dargestellt, wobei für Funktionsauswertungen und Ableitungswerte dieselbe Notation wie im vorigen Punkt gilt. Es verwendet Knotenwerte und die ersten beiden Ableitungen an den Ecken sowie die Normalableitungen auf den Kantenmitten und fällt damit mit dem Hermite- $C^0$ -Element fünfter Ordnung zusammen. Das Element von Bell ist ganz ähnlich, verzichtet jedoch auf die Vorgabe der Normalableitungen auf den Kantenmitten und beschränkt dafür den Polynomraum auf solche Funktionen, deren Normalableitung auf jeder Kante nur ein Polynom dritter Ordnung ist (normalerweise vierter Ordnung). Selbstverständlich sind für beide Elemente wieder Verallgemeinerungen höherer Ordnung möglich.

Einen anderen Weg verfolgt das Hsieh-Clough-Tocher-Element. Es teilt das ursprüngliche Dreieck vom Schwerpunkt zu den Ecken und stellt in jedem der drei Unterdreiecke ein kubisches Polynom auf. Diese müssen an den inneren Kanten stetig differenzierbar zusammengesetzt sein. Die Vorgabe der Funktionswerte und der ersten Ableitungen an den Ecken zusammen mit der Normalableitung auf der Kantenmitte sichert den  $C^1$ -Anschluß nach außen. Auch hier kann man analog zum Bell-Element auf die Normalableitungen verzichten, wenn man den Raum der inneren Polynome auf Funktionen mit lediglich quadratischer Normalableitung auf jeder Kante einschränkt.

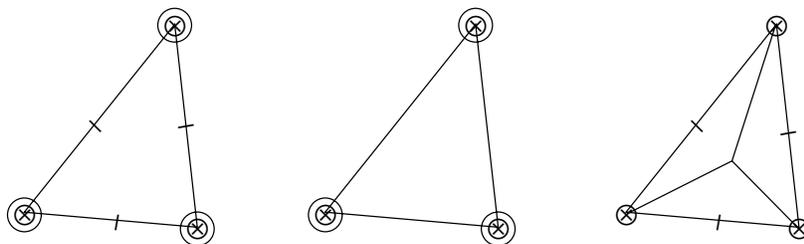


Abbildung 3.4: Argyris-, Bell- und Hsieh-Clough-Tocher-Element

Generell sind  $C^1$ -Elemente deutlich schwieriger zu handhaben und führen wegen der zahlreichen Ableitungen an Ecken als Knotenwerte teilweise zu stärker besetzten Matrizen als die  $C^0$ -Elemente gleicher Ordnung. Falls die Differentialgleichung es zuläßt, sollte deswegen auf ihren Einsatz verzichtet werden, ganz besonders bei Systemen von Differentialgleichungen wie der Stokesgleichung.

### 3.1.4 Nichtkonforme Elemente

Wie in Abschnitt 3.1 bereits angedeutet, liegen nichtkonforme Elemente nicht in dem Sobolev-Raum, in dem die kontinuierliche Differentialgleichung definiert ist. Damit trotz-

dem Konvergenz erzielt werden kann, müssen andere Konsistenzbedingungen erfüllt werden.

Das bekannteste nichtkonforme Element stammt von Crouzeix und Raviart und benutzt stückweise lineare Funktionen, die durch die Werte an den Kantenmitten bestimmt werden. Man kann zeigen, daß dieser stetige Anschluß an der Kantenmitte bei den verwendeten linearen Ansatzfunktionen für die Konvergenz ausreichend ist [CR73]. Bei der Verallgemeinerung dieses Elementes auf höhere Ordnung stößt man für geraden Polynomgrad auf Schwierigkeiten, da die natürlichen Stützstellen (die sechs Gauß-Punkte auf den Kanten bei zweiter Ordnung) nicht unisolvent sind. Tatsächlich existiert eine nichtkonforme Bubble, die an allen Stützstellen verschwindet. Eine geeignete Konstruktion für Crouzeix-Raviart-Elemente gerader Ordnung benutzt deshalb das entsprechende konforme Element, beispielsweise mit quadratischen Polynomen, und fügt gerade diese nichtkonforme Bubble als Basisfunktion hinzu.

### 3.1.5 Bubble-Funktionen

Wie wir im folgenden Abschnitt 3.2 sehen werden, sind für zahlreiche Finite Elemente die Räume etwas zu klein, um Konvergenz für die Stokes-Gleichungen zu gewährleisten. Es erweist sich als zweckmäßig, sie durch sogenannte Bubble-Funktionen zu ergänzen, die sich dadurch auszeichnen, daß sie höherer Ordnung sind als das zugrundeliegende Element und ihr Träger auf jeweils einzelne Dreiecke beschränkt ist. Im einfachsten Fall ist dies das Polynom dritten Grades, das gerade auf den Kanten verschwindet. Bubbles höherer Ordnung erzeugt man beispielsweise durch Multiplikation dieser Mini-Bubble mit Polynomen entsprechenden Grades. Das Hinzufügen dieser Bubbles verbessert die Konvergenzordnung des Elementes nicht, kann aber die Konstante vor der Ordnung etwas verringern. Da die Träger der Bubbles verschiedener Dreiecke disjunkt sind, können die zugehörigen Unbekannten durch statische Kondensation vorab dreiecksweise eliminiert werden, so daß insgesamt durch die Bubbles nur ein leicht erhöhter Rechenaufwand entsteht.

## 3.2 Stabile Diskretisierung

Analog zu der Stabilitätsforderung (2.6) existiert auch eine ähnliche Bedingung an Finite-Elemente-Diskretisierungen, die in diesem Kontext Babuška-Brezzi-Bedingung genannt wird. Wie bereits gesagt ist die Finite-Elemente-Theorie der Variationsformulierung sehr ähnlich, so daß im Unterschied zu (2.6) formal eigentlich nur die beteiligten Funktionsräume geändert werden

$$\mathcal{L}_h \|q_h\|_{Q_h} \leq \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div}_h \vec{v}_h, q_h)_h}{\|\vec{v}_h\|_{V_h}} \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (3.1)$$

und je nach Diskretisierung eventuell der Operator  $\operatorname{div}$  und das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  durch ihre diskreten Varianten ersetzt werden. Die Konstante  $\mathcal{L}_h$  muß dabei unabhängig von der Diskretisierungseinheit  $h$  nach unten beschränkt sein.

Die Bedingung (3.1) ist nun theoretisch für jedes Gebiet und jede Diskretisierung einzeln zu überprüfen. Tatsächlich ist es jedoch möglich, unter Voraussetzung der kontinuierlichen Ladyzhenskaya-Bedingung (2.6) für bestimmte Elemente allgemein die Existenz der Konstanten  $\mathcal{L}_h$  zu zeigen. Hierfür steht ein allgemeiner Beweisrahmen zur Verfügung, der in Punkt 3.2.3 vorgestellt wird und in den folgenden Punkten 3.2.4 und 3.2.5 auf zwei bekannte Elemente angewendet wird, um ihre Stabilität zu zeigen.

Es sei darauf hingewiesen, daß für die Diskussion von (3.1) stets die Betrachtung beider Räume  $V_h$  und  $Q_h$  erforderlich ist. Offensichtlich kann eine Vergrößerung des Raumes  $V_h$  oder Verkleinerung des Raumes  $Q_h$  die Konstante  $\mathcal{L}_h$  nur vergrößern und umgekehrt, so daß teilweise Ergebnisse von anderen Räumen übernommen werden können, falls beispielsweise zu einem bereits stabilen Element noch Bubbles hinzugefügt werden, um es noch etwas robuster zu machen.

Zusätzlich muß die Norm  $\|\cdot\|_{V_h}$  gewährleisten, daß der diskrete Laplace-Operator der Stokes-Gleichungen (1.1) gleichmäßig stetig und elliptisch ist, d. h. in der variationellen Formulierung

$$m \|\vec{v}_h\|_{V_h}^2 \leq (D_h \vec{v}_h, D_h \vec{v}_h)_h \leq M \|\vec{v}_h\|_{V_h}^2 \quad (3.2)$$

mit von  $h$  unabhängigen Konstanten  $m$  und  $M$ , da ansonsten die Konvergenz der diskreten Lösung gegen die kontinuierliche Lösung nicht gewährleistet ist. Die Forderung nach Stetigkeit gilt auch für den Operator  $\text{div}$ , also

$$(\text{div}_h \vec{v}_h, q_h)_h \leq c \|\vec{v}_h\|_{V_h} \|q_h\|_{Q_h} \quad (3.3)$$

mit ebenfalls von  $h$  unabhängiger Konstante  $c$ . Die Bedingungen (3.2) und (3.3) sind für konforme Diskretisierungen, d. h.  $V_h \subset H_0^{1,2}$  und  $Q_h \subset L_0^2$  durch die kontinuierlichen Gleichungen (2.2) gesichert, falls auch die Normen  $\|\cdot\|_{Q_h} = \|\cdot\|_{L_0^2}$  und  $\|\cdot\|_{V_h} = \|\cdot\|_{H_0^{1,2}}$ , die Operatoren  $\text{div}_h = \text{div}$  und  $D_h = D$  und das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_h = (\cdot, \cdot)$  der kontinuierlichen Räume übernommen werden. Bei nichtkonformen Diskretisierungen, die für manche Probleme durchaus Vorteile bieten können, sind sie jedoch zusätzlich zu (3.1) mit zu überprüfen.

Zur Vermeidung allzu vieler Indizes wird nachfolgend von konformen Diskretisierungen ausgegangen und die diskreten Normen, Operatoren und Skalarprodukte durch ihre kontinuierlichen Äquivalente ersetzt, nicht zuletzt auch um die Ähnlichkeit zu den kontinuierlichen Formulierungen hervorzuheben. Die gefundenen Ergebnisse gelten jedoch in ähnlicher Form auch für nichtkonforme Elemente, solange dies nicht explizit ausgeschlossen wird.

Die Diskussion bewegt sich also nun um die diskretisierte Formulierung der Stokes-Gleichungen (1.5)

$$\begin{aligned} (D\vec{u}_h, D\vec{v}_h) &\Leftrightarrow (p_h, \text{div } \vec{v}_h) = (\vec{f}, \vec{v}_h) & \forall v_h \in V_h, \\ (\text{div } \vec{u}_h, q_h) &= (g, q_h) & \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Konvergenz der diskreten Lösung

Zunächst ist die Konvergenz der diskreten Lösung gegen die kontinuierliche Lösung von (1.5) zu überprüfen. Das ist das Ergebnis [GR86] von

**Satz 15.** *Sei  $(\vec{u}, p)$  die Lösung der kontinuierlichen Stokes-Gleichungen (1.5) und  $(\vec{u}_h, p_h)$  die Lösung von (3.4) einer konformen Diskretisierung. Außerdem sei die Stabilitätsbedingung (3.1) erfüllt. Dann gilt*

$$|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 + \|p \Leftrightarrow p_h\| \leq c \left( \inf_{\vec{v}_h \in V_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p \Leftrightarrow q_h\| \right)$$

mit einer Konstanten  $c$  unabhängig von  $\vec{u}$  und  $p$ .

*Beweis.* Der Einfachheit halber sei  $g \equiv 0$ , der allgemeine Fall ergibt sich dann einfach durch Addition eines Elementes  $\vec{z}_h \in V_h$  mit  $(\operatorname{div} \vec{z}_h, q_h) = (g, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h$  und den formalen Übergang  $\vec{f} \rightarrow \vec{f} \Leftrightarrow \Delta \vec{z}_h$ .

Zunächst zeigen wir dazu, daß für  $X_h = \{\vec{v}_h \in V_h \mid (\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}$  gilt

$$|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 \leq c \left\{ \inf_{\vec{v}_h \in X_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p \Leftrightarrow q_h\| \right\}.$$

Mit einem beliebigen  $\vec{w}_h \in X_h$  testen wir die diskrete (3.4) und die kontinuierliche Stokes-Gleichung (1.5) mit  $\vec{v}_h = \vec{u}_h \Leftrightarrow \vec{w}_h$  (dies ist möglich wegen der konformen Diskretisierung) und erhalten

$$(D\vec{v}_h, D\vec{v}_h) = (D(\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w}_h), D\vec{v}_h) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q_h, \operatorname{div} \vec{v}_h)$$

für alle  $q_h \in Q_h$ , wobei wir  $\vec{v}_h \in X_h$  benutzt haben. Damit ist

$$|\vec{v}_h|_1 \leq |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w}_h|_1 + \|p \Leftrightarrow q_h\|$$

und weiterhin

$$|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 \leq 2 |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w}_h|_1 + \|p \Leftrightarrow q_h\|,$$

also die Behauptung mit der Konstanten  $c = 2$ .

Als nächstes beweisen wir

$$\inf_{\vec{w}_h \in X_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w}_h|_1 \leq \left( 1 + \frac{1}{\mathcal{L}_h} \right) \inf_{\vec{v}_h \in V_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1.$$

Dazu sei  $\vec{v}_h \in V_h$  beliebig,  $\vec{w}_h \in X_h$  die Projektion von  $\vec{v}_h$  auf  $X_h$  und  $\vec{z}_h = \vec{v}_h \Leftrightarrow \vec{w}_h$  der Projektionsvektor. Dann ist

$$(\operatorname{div} \vec{z}_h, q_h) = (\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h,$$

und wir können wegen  $\vec{z}_h \in V_h^\perp$  abschätzen

$$|\vec{z}_h|_1 \leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} \|\operatorname{div} \vec{z}_h\| = \frac{1}{\mathcal{L}_h} \|\operatorname{div} \vec{v}_h\| = \frac{1}{\mathcal{L}_h} \|\operatorname{div} (\vec{v}_h \Leftrightarrow \vec{u})\| \leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1,$$

so daß

$$|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w}_h|_1 \leq |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1 + |\vec{z}_h|_1 \leq \left(1 + \frac{1}{\mathcal{L}_h}\right) |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1.$$

Es bleibt die Abschätzung des Druckterms. Dafür benutzen wir

$$(\operatorname{div} \vec{v}_h, p_h \Leftrightarrow q_h) = \Leftrightarrow (D(\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h), D\vec{v}_h) + (\operatorname{div} \vec{v}_h, p \Leftrightarrow q_h) \quad \forall \vec{v}_h \in V_h, q_h \in Q_h$$

und verwenden die Babuška-Brezzi-Bedingung zu

$$\begin{aligned} \|p_h \Leftrightarrow q_h\| &\leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{1}{|\vec{v}_h|_1} ((D(\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h), D\vec{v}_h) + (\operatorname{div} \vec{v}_h, p \Leftrightarrow q_h)) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} (|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 + \|p \Leftrightarrow q_h\|). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\|p \Leftrightarrow p_h\| \leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} \left( |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 + (1 + \mathcal{L}_h) \inf_{q_h \in Q_h} \|p \Leftrightarrow q_h\| \right),$$

und mit der bereits bewiesenen Abschätzung für die Geschwindigkeiten ist Satz 15 bewiesen.  $\square$

Setzen wir die bestimmten Konstanten ein, so finden wir

$$|\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}_h|_1 + \mathcal{L}_h \|p \Leftrightarrow p_h\| \leq \frac{c}{\mathcal{L}_h} \left( \inf_{\vec{v}_h \in V_h} |\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}_h|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p \Leftrightarrow q_h\| \right).$$

Es ist also absehbar, daß mit klein werdender Babuška-Brezzi-Konstante in erster Linie die Druckapproximation schlecht werden wird, wohingegen die Geschwindigkeiten hier etwas weniger empfindlich sind.

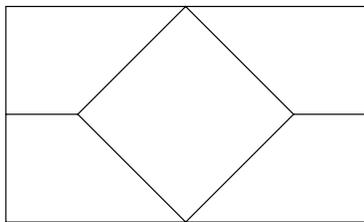
### 3.2.2 Verletzung der Stabilitätsforderung

Im Falle der Verletzung von (3.1) sind zwei grundlegend verschiedene Ursachen zu unterscheiden. Sollte auch die kontinuierliche Ungleichung (2.6) nicht erfüllt sein – z. B. bei inneren Winkeln von  $\alpha = 0$  im Gebiet – kann prinzipiell keine Diskretisierung die diskrete Gleichung erfüllen, da auch das kontinuierliche Problem nicht unbedingt (eindeutig) lösbar ist. Anders sieht es aus, wenn die Verletzung erst durch die Wahl des Finiten Elementes zustande kommt. Einige Beispiele für stabile Elemente finden sich in den folgenden Punkten 3.2.3-3.2.5.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | - | + | - | + | - | + | - |
| - | + | - | + | - | + | - | + |
| + | - | + | - | + | - | + | - |
| - | + | - | + | - | + | - | + |
| + | - | + | - | + | - | + | - |
| - | + | - | + | - | + | - | + |

Abbildung 3.5: Schachbrettmuster des instabilen Drucks beim  $Q_1P_0$  Element

Wie macht sich jedoch die Verletzung bemerkbar? Der einfachste Fall ist an einer Diskretisierung mit dem sogenannten  $Q_1P_0$  Element auf einem Quadratgitter zu sehen. Dieses verwendet stückweise bilineare Geschwindigkeiten und stückweise konstante Druckfunktionen. Es stellt sich heraus, daß ein nichttrivialer Druck  $p_h^S$  existiert, der in (3.1) zu  $(\operatorname{div} \vec{v}_h, p_h^S) = 0 \forall \vec{v}_h$  führt. Dieser besteht aus schachbrettartig angeordneten positiven und negativen Drücken wie in Abbildung 3.5, weshalb diese Nichterfüllung der Babuška-Brezzi-Bedingung auch als Schachbrett-Instabilität bezeichnet wird. Faktorisiert man den diskreten Raum  $Q_h$  nach diesem Schachbrettdruck, um den Kern des diskreten Gradienten trivial zu machen, wird (3.1) zwar erfüllt, allerdings nur mit einer Konstante  $\mathcal{L}_h$ , die vom Diskretisierungsparameter  $h$  anhängt [Bra92]. Andererseits läßt sich zeigen [For96], daß gerade dieses Element für die spezielle Triangulierung aus Zeichnung 3.6 die Babuška-Brezzi-Bedingung doch erfüllt, so daß auch die Triangulierung Einfluß auf die Stabilität einer Diskretisierung hat. Dies liegt daran, daß bei entsprechender Symmetrie des Gitters lineare Abhängigkeiten der Nebenbedingungen auftreten können.

Abbildung 3.6: Spezielles stabiles Gitter für das  $Q_1 \Leftrightarrow P_0$  Element

Eine andere Variante ungeeigneter Elemente macht sich dadurch bemerkbar, daß die Lösung  $\vec{u}_h = 0$  trivial wird. Dies liegt daran, daß die Anzahl der Nebenbedingungen, also die Dimension des Druckraumes  $|Q_h|$ , die Anzahl der Freiheitsgrade, also die Dimension des Geschwindigkeitsraumes  $|V_h|$ , übersteigt und ein Phänomen auftritt, das im Kontext der Diskretisierung der elastischen Gleichungen als *Locking* bezeichnet wird. Selbst wenn

die reine Abzählung von Dimensionen dies noch nicht zwingend erfordert, kann der zur Verfügung stehende Restraum so klein sein, daß die Approximationsfähigkeit verschwindet und die diskrete Lösung nichts mehr mit der kontinuierlichen Lösung gemein hat.

### 3.2.3 Stabile Elemente

Der Beweis von (3.1) gelingt in der Regel am einfachsten mit einem Beweisrahmen, der ursprünglich von Fortin [For77] stammt und in der Folge weiter vereinfacht und verallgemeinert wurde [GR86]. Zunächst wird hier die Existenz eines geeigneten Interpolationsoperators  $\Pi_h$  gefordert.

**Lemma 16.** *Für ein Gebiet  $\Omega$  sei die kontinuierliche Ladyzhenskaya-Bedingung (2.6) erfüllt. Dann ist die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung genau dann erfüllt, wenn ein Interpolationsoperator  $\Pi_h : H_0^{1,2} \rightarrow V_h$  existiert mit*

$$(\operatorname{div}(\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_h \vec{v}), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (3.5)$$

$$|\Pi_h \vec{v}|_1 \leq C |\vec{v}|_1 \quad \forall v \in H_0^{1,2} \quad (3.6)$$

mit einer Konstanten  $C > 0$  unabhängig von  $h$ .

**Anmerkung 12.** *Tatsächlich ist die kontinuierliche Ladyzhenskaya-Bedingung (2.6) zu strikt, es genügt bereits, wenn sie nicht auf dem vollen  $L_0^2$  erfüllt ist, sondern nur auf  $Q_h$ . Es reicht also schon*

$$k \|q_h\| \leq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q_h)}{|\vec{v}|_1} \quad \forall q_h \in Q_h.$$

*Beweis.* Falls ein solcher Operator  $\Pi_h$  existiert, haben wir

$$\sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h)}{|\vec{v}_h|_1} \geq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \Pi_h \vec{v}, q_h)}{|\Pi_h \vec{v}|_1} = \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q_h)}{|\Pi_h \vec{v}|_1}$$

wegen (3.5). Mit (2.6) und (3.6) folgt weiter

$$\sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h)}{|\vec{v}_h|_1} \geq \frac{1}{c} \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, q_h)}{|\vec{v}|_1} \geq \frac{\mathcal{L}}{c} \|q_h\|,$$

so daß gilt  $\mathcal{L}_h \geq \frac{\mathcal{L}}{c}$ .

Sei nun umgekehrt Bedingung (3.1) erfüllt, dann existiert für jedes  $\vec{v} \in H_0^{1,2}$  eine eindeutige Projektion  $\Pi_h \vec{v} \in (\ker \operatorname{div}_h)^\perp$  mit

$$(\operatorname{div} \Pi_h \vec{v}, q_h) = (\operatorname{div} \vec{v}, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Damit ergibt sich einfach

$$|\Pi_h \vec{v}|_1 \leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} \|\operatorname{div} \Pi_h \vec{v}\| \leq \frac{1}{\mathcal{L}_h} \|\operatorname{div} \vec{v}\|.$$

□

Die Konstruktion eines solchen Operators  $\Pi_h$  ist in der Regel direkt nur sehr schwer möglich. Man setzt ihn deshalb aus zwei einfacher zu findenden Operatoren  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  zusammen, gemäß dem folgenden

**Lemma 17.** *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 16. Weiterhin seien  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  lineare Interpolationsoperatoren mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} |\Pi_1 \vec{v}|_1 &\leq c_1 |\vec{v}|_1 && \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}, \\ (\operatorname{div} \Pi_2 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}, q_h) &= 0 && \forall q_h \in Q_h, \\ |\Pi_2 (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v})|_1 &\leq c_2 |\vec{v}|_1 && \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}. \end{aligned}$$

Dann gilt die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.1).

*Beweis.* Der zur Anwendung von Lemma 16 erforderliche Operator wird konstruiert mittels  $\Pi_h \vec{v} = \Pi_2 (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v}) + \Pi_1 \vec{v}$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \Pi_h \vec{v}, q_h) &= (\operatorname{div} \Pi_2 (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v}), q_h) + (\operatorname{div} \Pi_1 \vec{v}, q_h) = \\ &= (\operatorname{div} (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v}), q_h) + (\operatorname{div} \Pi_1 \vec{v}, q_h) = (\operatorname{div} \vec{v}, q_h) \end{aligned}$$

und schließlich

$$|\Pi_h \vec{v}|_1 \leq |\Pi_2 (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v})|_1 + |\Pi_1 \vec{v}|_1 \leq (c_1 + c_2) |\vec{v}|_1.$$

□

Der Beweis für ein konkretes Element läuft nun folgendermaßen ab.  $\Pi_1$  ist in der Regel ein universeller Approximationsoperator nach Clement [Cle75] oder Scott-Zhang [SZ90], wobei letzterer für unsere Anwendung wichtiger ist, da er die Nullrandbedingung erhält. Der Operator  $\Pi_2$  wird nun lokal auf einem Referenzpatch konstruiert, der aus einem oder mehreren Elementen besteht. Der Nachweis der (Pseudo-)Stetigkeit von  $\Pi_2$  ist normalerweise wenig anspruchsvoll, aber etwas technisch. Mit Lemma 17 folgt die Babuška-Brezzi-Bedingung.

Ein etwas anderer Ansatz wird in [GR86] verfolgt. Dort wird ein Unterraum der Geschwindigkeiten  $V_h$  konstruiert, der mit stückweise konstanten Drücken auf einzelnen Patches die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllt, und damit eine lokale Babuška-Brezzi-Bedingung auf den einzelnen Patches auf das gesamte Gebiet ausgedehnt. Der Nachteil hierbei ist, daß die Triangulierung sich in die Patches parzellieren lassen muß, was ihre Topologie einschränkt. Außerdem ist der lokale Nachweis durch die zumeist aus mehr als einem Element bestehenden Patches sehr technisch.

Zur Erinnerung hier das Ergebnis des Interpolationsoperators  $\Pi_C$  nach [Cle75], der über eine lokale  $L^2$ -Projektion auf die stetigen stückweise linearen Polynome definiert wird. Für reguläre Triangulierungen gilt dann

$$\|D^k (\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_C \vec{v})\|^2 \leq c h^{l-k} \|D^l \vec{v}\|^2 \quad 0 \leq k \leq l \leq 2, \quad (3.7)$$

wobei hier insbesondere der Fall  $k = l = 1$  interessiert.

Das formal gleiche Ergebnis (mit einer anderen Konstante  $c$ )

$$\|D^k(\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_{S-C}\vec{v})\|^2 \leq c h^{l-k} \|D^l\vec{v}\|^2 \quad 0 \leq k \leq l \leq 2 \quad (3.8)$$

erhält man für den Operator  $\Pi_{S-Z}$  nach [SZ90]. Dazu wird für jeden Knoten eine angrenzende Kante (in 2D) oder Fläche (in 3D) ausgewählt, die duale Basis der Restriktion der linearen Basisfunktionen auf diese Kante oder Fläche gebildet und aus dieser Dualbasis schließlich die Interpolierende bestimmt. Dieser Approximationsoperator hat den für unseren Fall wesentlichen Vorteil, die Nullrandbedingung aus dem Kontinuierlichen auch im Diskreten zu erhalten.

### 3.2.4 Mini-Element

Das Mini-Element aus [ABF83] besteht im einfachsten Fall aus jeweils linearen Funktionen für den Druck  $p$  und jede Komponente der Geschwindigkeiten  $u_x, u_y$  und in 3D  $u_z$ , wobei jeder Geschwindigkeitsraum durch die kleinsten Bubbles aus Punkt 3.1.5 ergänzt wird, also die kubische Bubble in 2D und die Bubble vierter Ordnung in 3D. Verallgemeinerungen auf höhere Ordnungen sind problemlos möglich.

Der Beweis der Stabilität beruht wesentlich auf der Stetigkeit der Druckfunktionen und der dadurch erlaubten Umformung

$$(q_h, \operatorname{div}(\Pi_h \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v})) = (\nabla q_h, \Pi_h \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}) \quad \forall q_h \in Q_h, \vec{v} \in H_0^{1,2},$$

sowie der Möglichkeit der lokalen Erfüllung von

$$(\nabla q_h, \Pi_h \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (3.9)$$

durch die Wahl einer geeigneten Bubblefunktion. Zusammen mit der Stetigkeit des Interpolationsoperators  $\Pi_h$  folgt nach Lemma 16 dann die Stabilität des Mini-Elementes.

Zur Konstruktion von  $\Pi_h$  gemäß Lemma 17 stellen wir fest, daß (3.9) sicher gilt, falls

$$\int_T (\Pi_h \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}) \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}$$

auf jedem Dreieck  $T$  erfüllt ist, denn die Gradienten der stückweise linearen Funktionen sind auf jedem Dreieck konstant. Der Operator  $\Pi_1$  aus Lemma 17 ist nun der bereits angesprochene Interpolationsoperator von Scott-Zhang, und  $\Pi_2$  ergänzt diesen um die passende Bubblefunktion. Dazu bilden wir

$$\Pi_2 \vec{v} = \Pi_1 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\alpha}(T) b_T \quad \text{auf } T$$

mit der Bubblefunktion  $b_T$  auf dem Dreieck  $T$  und den jeweiligen Koeffizienten  $\vec{\alpha}(T)$  der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten. Diese ergeben sich zu

$$\vec{\alpha}(T) = \frac{\int_T (\Pi_1 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}) \, dx}{\int_T b_T \, dx}.$$

Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung gewinnen wir

$$|\bar{\alpha}(T) b_T|_1 \leq \frac{c}{h} \|\Pi_1 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}\|_T,$$

und durch Summation über das gesamte Gebiet unter Verwendung von (3.8) die gewünschte Stabilität

$$|\Pi_2(\vec{v} \Leftrightarrow \Pi_1 \vec{v})|_1 \leq c |\vec{v}|_1,$$

die die Anwendung des Lemmas 17 gestattet.

Man kombiniert also einen genügend approximativen Raum, der einen Interpolationsoperator nach Scott-Zhang gestattet, mit einigen Basisfunktionen, die lokal manipuliert werden können. Dadurch wird die Orthogonalitätsrelation (3.5) der Interpolierenden in konstruktiv recht einfacher Weise gewährleistet. Diese Technik ist universell verwendbar und gestattet die Konstruktion zahlreicher stabiler Finiter Elemente.

### 3.2.5 Taylor-Hood-Element

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß stückweise quadratische Geschwindigkeiten und stückweise konstante Druckfunktionen ein stabiles Element bilden.  $\Pi_2$  wird dazu so konstruiert, daß die Interpolierende an den Ecken verschwindet und auf jeder Kante  $e$  gerade das Flußintegral gemäß

$$\int_e \Pi_2 \vec{v} ds = \int_e \vec{v} ds$$

reproduziert. (Überstrichene Größen beziehen sich nachfolgend auf dieses Element.)

Darauf aufbauend können wir zeigen, daß auch das Taylor-Hood-Element [HT73] (stückweise quadratische Geschwindigkeiten und stückweise lineare stetige Druckfunktionen) stabil ist, sofern keine Dreiecke in der Triangulierung vorhanden sind, die zwei Kanten auf  $\partial\Omega$  haben. Nach [BF91] haben wir für jeden diskreten Druck  $q_h$  und seine stückweise konstante  $L_0^2$ -Projektion  $\bar{q}_h$  sowie die Geschwindigkeit  $\vec{w}_h$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{w}_h, q_h) &= (\operatorname{div} \vec{w}_h, \bar{q}_h) + (\operatorname{div} \vec{w}_h, q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h) \\ &= \|\bar{q}_h\|^2 + (\operatorname{div} \vec{w}_h, q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h) \\ &\geq \|\bar{q}_h\|^2 \Leftrightarrow |\vec{w}_h|_1 \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|, \end{aligned}$$

wenn das Feld  $\vec{v}$  mit  $\operatorname{div} \vec{v} = \bar{q}_h$  und  $|\vec{v}|_1 \leq \frac{1}{\mathcal{L}} \|\bar{q}_h\|$  gewählt wird (dies ist möglich wegen der kontinuierlichen Ladyzhenskaya-Bedingung (2.6)).  $\vec{w}_h = \bar{\Pi}_h \vec{v}$  ist dabei die Interpolierende aus dem Beweis der Stabilität des zuvor angedeuteten  $P_2 \Leftrightarrow P_0$ -Elementes. Damit haben wir

$$|\vec{w}_h|_1 = |\bar{\Pi}_h \vec{v}|_1 \leq \bar{c} |\vec{v}| \leq \frac{\bar{c}}{\mathcal{L}} \|\bar{q}_h\|$$

und folglich

$$(\operatorname{div} \vec{w}_h, q_h) \geq \|\bar{q}_h\|^2 \Leftrightarrow \frac{\bar{c}}{\mathcal{L}} \|\bar{q}_h\| \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|.$$

Nun konstruieren wir wieder lokale Funktionen  $\vec{z}_h$ , die an allen Ecken verschwinden, und deren Normalkomponenten auf allen Kanten verschwinden. Die Tangentialkomponenten verschwinden ebenfalls auf allen Randkanten der Triangulierung. Auf den Mittelpunkten  $M$  der inneren (gerichteten) Kanten  $\vec{e}$  definieren wir hingegen

$$\vec{z}_h(M) \cdot \vec{e} = \Leftrightarrow |\vec{e}|^2 (\nabla q_h(M) \cdot \vec{e}),$$

so daß wir aus einer Dimensionsbetrachtung sofort  $|z_h|_1 \leq c \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|$  erhalten. Damit finden wir auf jedem Dreieck  $T$  und seinen Kantenmitten  $M$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{z}_h, q_h)_T &= \Leftrightarrow (\vec{z}_h, \nabla q_h)_T = \Leftrightarrow \sum_M \frac{|T|}{3} \vec{z}_h \cdot \nabla q_h(M) \\ &= \sum_{M \notin \partial\Omega} |\vec{e}|^2 \frac{|T|}{3} |\nabla q_h(M)|^2 \\ &\geq c \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|_T, \end{aligned}$$

denn  $\vec{z}_h \cdot \nabla q_h$  ist ein quadratisches Polynom auf jedem Dreieck und die letzte Abschätzung stammt erneut aus einer Dimensionsbetrachtung. Hierbei geht noch ein, daß  $\nabla q_h$  konstant ist und jedes Dreieck mindestens zwei Kanten hat, die nicht auf  $\partial\Omega$  fallen. Damit ist insgesamt

$$(\operatorname{div} \vec{z}_h, q_h) \geq c \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|.$$

Wir wählen  $\vec{v}_h = \vec{w}_h + \beta \vec{z}_h$  mit einem noch zu bestimmenden Parameter  $\beta$ . Damit ist

$$(\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h) \geq \|\bar{q}_h\|^2 \Leftrightarrow \frac{\bar{c}}{\mathcal{L}} \|\bar{q}_h\| \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\| + \beta c \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|^2,$$

und mit der Wahl  $\beta = \frac{1}{2} + \frac{\bar{c}^2}{2\mathcal{L}^2c}$  gilt

$$(\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h) \geq \frac{1}{2} \|\bar{q}_h\|^2 + \frac{c}{2} \|q_h \Leftrightarrow \bar{q}_h\|^2 \geq \frac{1}{2} \min(1, c) \|q_h\|^2.$$

Auf der anderen Seite können wir abschätzen

$$|\vec{v}_h|_1 \leq |\vec{w}_h|_1 + \beta |\vec{z}_h|_1 \leq \bar{c} \left( \frac{1}{\mathcal{L}} + \beta \right) \|q_h\|,$$

so daß wir auch für das Taylor-Hood-Element die Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\frac{(\operatorname{div} \vec{v}_h, q_h)}{|\vec{v}_h|_1} \geq \frac{\mathcal{L} \min(1, c)}{2\bar{c} (1 + \beta\mathcal{L})} \|q_h\|$$

bewiesen haben.

Ein anderer Beweis aus [GR86] verwendet eine Technik, die alle um einen Eckpunkt liegenden Dreiecke zu einem Makroelement vereinigt. Girault/Raviart zeigen dann, daß für

dieses Makroelement eine lokale Babuška-Brezzi-Bedingung gilt, indem wieder innere Knoten passend gewählt werden ähnlich wie die Bubbles im Mini-Element. Diese Eigenschaft wird dann über das ganze Gebiet (das sich in solche Makroelemente parzellieren lassen muß) ausgedehnt, unter Verwendung eines Resultates, daß ein Element stabil ist, falls es eine solche lokale Bedingung erfüllt und zusätzlich der Geschwindigkeitsraum zusammen mit stückweise (d. h. hier auf Makroelementen) konstanten Druckfunktionen eine stabile Diskretisierung darstellt.

**Anmerkung 13.** *Mit Viereckselementen ist der Beweis erheblich einfacher, da in diesem Fall lediglich zwei Vierecke zu einem solchen Makroelement zusammengesetzt werden müssen und damit die etwas unangenehme Behandlung der Topologie einer unstrukturierten Triangulierung entfällt.*

Ergänzt man das stückweise quadratische Element zusätzlich um Bubble-Funktionen, so ist der Beweis mit einer Technik wie beim Mini-Element sehr einfach. Die Praxis zeigt, daß durch diesen Kunstgriff, der wegen der möglichen statischen Elimination der zusätzlichen Freiheitsgrade bei den Geschwindigkeiten keinen großen zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet, die Approximation des Druckes bis zu einem Faktor 4 genauer werden kann, selbstverständlich ohne die Ordnung zu verbessern. Sichtbar wird dies an einer Vergrößerung der Babuška-Brezzi-Konstanten.

### 3.3 Alternativen zu stabilen Finiten Elementen

Alternativ zur Verwendung stabiler Finiten Elemente wie in Abschnitt 3.2 kann man eine künstliche Kompressibilität einführen, die auch als Strafterm bezeichnet wird. Die Stokes-Gleichungen (1.1) ändern sich dadurch (für  $g = 0$ ) in

$$(D\vec{u}, D\vec{v}) + t^2 (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2} \quad (3.10)$$

mit dem Strafparameter  $t$ . Man kann zeigen [BF91], daß die Lösung  $\vec{u}$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Lösung von (1.1) konvergiert, ebenso wie der Ausdruck  $\Leftrightarrow t^2 \operatorname{div} \vec{u}$  gegen den Druck  $p$ . Die Gleichungen (3.10) stellen ein elliptisches System dar, das ohne große Probleme mit klassischen Methoden gelöst werden kann, wie z. B. CG-Verfahren oder Mehrgitter-Algorithmen. Problematisch ist allenfalls, daß für großes  $t$  und damit gute Approximation der eigentlichen Lösung von (1.1) die Kondition des entstehenden linearen Gleichungssystems sehr schlecht wird und die iterative Lösung damit einerseits lange dauert und andererseits anfällig für Rundungsfehler wird.

**Anmerkung 14.** *Es sei darauf hingewiesen, daß die Penalisierung (3.10) im Kontinuierlichen oder auch im Diskreten angewendet werden kann. Allerdings sind die Diskretisierung eines penalisierten Problems und die Penalisierung eines diskreten Problems unterschiedlich. In numerischen Experimenten hat sich gezeigt, daß die Penalisierung des diskreten Problems vorteilhafter ist.*

Eine weitere Möglichkeit stellt eine Stabilisierung der Druckgleichung dar, die im einfachsten Fall folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} (D\vec{u}_h, D\vec{v}_h) \Leftrightarrow (p_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) &= (\vec{f}, \vec{v}_h) \quad \forall \vec{v}_h, \\ (q_h, \operatorname{div} \vec{u}_h) \Leftrightarrow \omega h^2 (\nabla q_h, \nabla p_h) &= (g, q_h) \quad \forall q_h. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dieser Kunstgriff ( $\omega$  ist ein Stabilisierungsparameter) erhält die Konsistenzordnung der diskreten Gleichungen auf Kosten eines leicht höheren Faktors, gestattet aber die Verwendung prinzipiell beliebiger Finiten Elemente für Geschwindigkeiten  $V_h$  und Drücke  $Q_h$ , insbesondere beispielsweise die sehr einfachen stückweise linearen (auf Simplizes) oder bi-/trilinearen (auf Rechtecken oder Quadern) Ansatzfunktionen. Ein Nachteil ist darin zu sehen, daß durch den Stabilisierungsterm eine parasitäre Neumann-Randbedingung an den Druck entsteht, die die Genauigkeit der Druckapproximation am Rand erheblich verschlechtert. Sind primär gerade diese Randdrücke gefragt, um beispielsweise den Auftrieb oder Druckwiderstand eines Körpers zu berechnen, ist deshalb ohne Maßnahmen zur Erhaltung der Randgenauigkeit (beispielsweise durch zusätzliche Terme wie in [For96]) eine solchermaßen stabilisierte Diskretisierung nicht sinnvoll.

Durch diese Stabilisierung wird ein Konsistenzfehler zweiter Ordnung eingeführt und sie ist deshalb lediglich für die angeführte Kombination stückweise linearer Geschwindigkeiten und Druckfunktionen geeignet. Nach [BF91] und [For96] kann dieses Manko durch einen anderen Stabilisierungsterm behoben werden, der sich ergibt, indem das Lagrange-Funktional (1.6) durch das Quadrat der ersten Gleichung von (3.11) ergänzt wird. Die Eulergleichungen für dieses ergänzte Funktional lauten dann

$$\begin{aligned} (D\vec{u}_h, D\vec{v}_h) \Leftrightarrow (p_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) + \omega h^2 \left( \Leftrightarrow \Delta \vec{u}_h + \nabla p_h \Leftrightarrow \vec{f}, \Delta \vec{u}_h \right)_h &= (\vec{f}, \vec{v}_h) \quad \forall \vec{v}_h, \\ (q_h, \operatorname{div} \vec{u}_h) \Leftrightarrow \omega h^2 \left( \Leftrightarrow \Delta \vec{u}_h + \nabla p_h \Leftrightarrow \vec{f}, \nabla q_h \right)_h &= (g, q_h) \quad \forall q_h, \end{aligned}$$

wobei die Skalarprodukte  $(\cdot, \cdot)_h$  nur dreiecksweise sinnvoll definiert sind. Im Falle der linearen Elemente reduziert sich diese Fassung bis auf einen kleinen Konsistenzfehler in der rechten Seite auf (3.11).

### 3.3.1 Konvergenz der stabilisierten Diskretisierung

Durch den zusätzlichen Stabilisierungsterm  $\omega h^2 (Dq_h, Dp_h)$  bzw.  $\Leftrightarrow \omega h^2 \Delta p_h$  in klassischer Formulierung erhalten wir Konvergenz unabhängig von einer Stabilitätsbedingung im Sinne von (3.1). Dies zeigt eine Variante des Ergebnisses aus [BF91].

**Satz 18.** *Die Diskretisierung (3.11) konvergiert für konforme Geschwindigkeiten und stetige Druckfunktionen, die beide mindestens die stetigen stückweise linearen Polynome enthalten, gegen die kontinuierliche Lösung  $(\vec{u}, p)$  der 2-regulären Stokesgleichung (1.5) gemäß*

$$\|\vec{u}_h \Leftrightarrow \vec{u}, p_h \Leftrightarrow p\|_{\Phi} \leq ch \left( \sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) \left( \|\vec{u}\|_{2,2} + \|p\|_{1,2} \right)$$

mit der Definition

$$\Phi((\vec{u}_h, p_h), (\vec{v}_h, q_h)) := (\nabla \vec{u}_h, \nabla \vec{v}_h) \Leftrightarrow (\nabla \cdot \vec{v}_h, p_h) + (\nabla \cdot \vec{u}_h, q_h) + \omega h^2 (\nabla p_h, \nabla q_h)$$

und der zugehörigen Norm  $\|\cdot\|_{\Phi} := \sqrt{\Phi(\cdot, \cdot)}$ .

*Beweis.* Die Bilinearform  $\Phi$  ist elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch bezüglich  $h$ . Außerdem ist sie offensichtlich äquivalent zur  $H_0^{1,2}$ -Norm der Geschwindigkeit und der  $L_0^2$ -Norm des Druckes. Wegen der Elliptizität existiert nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung  $(\vec{u}_h, p_h) \in (V_h \times Q_h)$  des Problems (3.11). Seien nun  $I_h(\vec{u})$  und  $I_h(p)$  die Interpolanden von  $\vec{u}$  und  $p$  in  $V_h$  beziehungsweise  $Q_h$ , beispielsweise nach Clement [Cle75] oder (vorzugsweise) Scott-Zhang [SZ90]. Dann ist

$$\begin{aligned} & \Phi((\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p)), (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p))) = \\ & = \Phi((\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p \Leftrightarrow I_h(p)), (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p))) + \\ & \quad + \Phi((\vec{u}_h \Leftrightarrow \vec{u}, p_h \Leftrightarrow p), (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p))). \end{aligned}$$

Den vorderen Term schätzen wir ab durch

$$\begin{aligned} & |\Phi((\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p \Leftrightarrow I_h(p)), (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p)))| = \\ & = |(\nabla(\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u})), \nabla(\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}))) \Leftrightarrow (\nabla \cdot (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u})), p \Leftrightarrow I_h(p))| + \\ & + |(\nabla \cdot (\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u})), p_h \Leftrightarrow I_h(p)) + \omega h^2 (\nabla(p \Leftrightarrow I_h(p)), \nabla(p_h \Leftrightarrow I_h(p)))| \leq \\ & \leq |\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u})|_1^2 + |\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u})|_1 \|p \Leftrightarrow I_h(p)\| + \\ & \quad + \|\vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u})\| |p_h \Leftrightarrow I_h(p)|_1 + \omega h^2 |p \Leftrightarrow I_h(p)|_1^2 \leq \\ & \leq c_2 h (|\vec{u}|_2 + |p|_1) (|\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u})|_1 + (\omega + 1) h |p_h \Leftrightarrow I_h(p)|_1) \leq \\ & \leq c_2 h (|\vec{u}|_2 + |p|_1) \left( \sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) \sqrt{|\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u})|_1^2 + \omega h^2 |p_h \Leftrightarrow I_h(p)|_1^2}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung von der Youngschen Ungleichung Gebrauch gemacht wurde. Die Konstante  $c_2$  stammt von dem verwendeten Interpolationsoperator. Der hintere Term ergibt

$$\begin{aligned} & |\Phi((\vec{u}_h \Leftrightarrow \vec{u}, p_h \Leftrightarrow p), (\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p)))| = \\ & = |\omega h^2 (\Leftrightarrow \nabla p, \nabla(p_h \Leftrightarrow I_h(p)))| \leq \\ & = h \sqrt{\omega} |p|_1 \sqrt{\omega h^2 |p_h \Leftrightarrow I_h(p)|_1^2} \leq \\ & \leq h \sqrt{\omega} |p|_1 \sqrt{|\vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u})|_1^2 + \omega h^2 |p_h \Leftrightarrow I_h(p)|_1^2}. \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir

$$\begin{aligned} & \| \vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p_h \Leftrightarrow I_h(p) \|_{\Phi} = \\ & = \sqrt{ | \vec{u}_h \Leftrightarrow I_h(\vec{u}) |_1^2 + \omega h^2 | p_h \Leftrightarrow I_h(p) |_1^2 } \leq \\ & \leq ch \left( \sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) ( | \vec{u} |_2 + | p |_1 ) . \end{aligned}$$

Die Interpolationsordnung

$$\| \vec{u} \Leftrightarrow I_h(\vec{u}), p \Leftrightarrow I_h(p) \|_{\Phi} \leq ch ( | \vec{u} |_2 + | p |_1 )$$

und die Dreiecksungleichung vervollständigen die Argumentation.  $\square$

### 3.3.2 Äquivalenz zum Mini-Element

Wie sich herausstellt, ist die stabilisierte Diskretisierung (3.11) für stückweise lineare Geschwindigkeiten  $V_h$  und Drücke  $Q_h$  und ein geeignetes  $\omega$  vollständig äquivalent zu dem bekannten Mini-Element aus Punkt 3.2.4. Da die Bubble-Funktionen, die das Mini-Element gegenüber einer stückweise linearen Diskretisierung zusätzlich hat, disjunkte Träger haben, lassen sie sich durch statische Kondensation eliminieren. Sie tragen ja auch nicht zu einer Verbesserung der Konsistenz- oder Konvergenzordnung bei, sondern sorgen lediglich für die Erfüllung von (3.1) und sind damit in der Lösung physikalisch eigentlich uninteressant.

Die analytische Begründung dafür verläuft wie folgt. Zunächst wird eine beliebige Funktion  $v_h \in V_h$  in ihren linearen und den Bubbleanteil zerlegt

$$\vec{v}_h = \vec{v}_l + \vec{v}_b \quad \vec{v}_l \in P_1, \vec{v}_b \in B.$$

Nach partieller Integration folgt damit

$$(D\vec{v}_l, D\vec{w}_b) = \sum_{t \in \tau_h} \int_t D\vec{v}_l D\vec{w}_b dx = \Leftrightarrow \sum_{t \in \tau_h} \Delta \vec{v}_l \vec{w}_b = 0 \quad \forall \vec{v}_l \in P_1, \vec{w}_b \in B,$$

da  $\vec{w}_b$  auf dem Rand jedes Dreiecks verschwindet und  $\vec{v}_l$  über dem Dreieck linear ist. Mit der Testfunktion  $\vec{b}_t \in B$  erhalten wir aus (3.11) den Koeffizienten dieser Bubblefunktion  $\beta_t$

$$\beta_t \delta_t = \int_t (f \Leftrightarrow \nabla p_h) \vec{b}_t dx$$

mit dem Formfaktor

$$\delta_t = \int_t | D \vec{b}_t |^2 dx.$$

Unter der zusätzlichen (technischen) Annahme, daß  $f$  stückweise konstant ist, finden wir weiter

$$\beta_t \delta_t = \gamma_t \left( \vec{f} \Leftrightarrow \nabla p_h \right)$$

mit einem zweiten Formfaktor

$$\vec{\gamma}_t = \int_t \vec{b}_t dx.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung von (3.11) liefert mit der Zerlegung der Lösung  $\vec{u}_h = \vec{u}_l + \vec{u}_b$

$$(\operatorname{div} \vec{u}_l, q_h) + \sum_{t \in \tau_h} \frac{\vec{\gamma}_t}{\delta_t} \left( \vec{f} \Leftrightarrow \nabla p_h \right) \Big|_t \cdot \int_t \vec{b}_t \nabla q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Q_h,$$

und weiter

$$(\operatorname{div} \vec{u}_l, q_h) + \sum_{t \in \tau_h} \alpha_t \cdot \int_t \left( \vec{f} \Leftrightarrow \nabla p_h \right) \nabla q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_t = \frac{\gamma_t^2}{\delta_t} \mu(t) \sim h^2.$$

Verswindet nun  $\vec{f}$  oder nimmt man einen weiteren kleinen Konsistenzfehler der Ordnung  $h$  in Kauf, so erhalten wir gerade die zweite Gleichung von (3.11), wobei für den linearen Anteil  $\vec{u}_l$  wieder

$$(D\vec{u}_l, D\vec{v}_l) + (\operatorname{div} \vec{v}_l, p_h) = (\vec{f}, \vec{v}_l) \quad \forall \vec{v}_l \in P_1$$

gilt und der Stabilisierungsparameter  $\omega = \frac{\gamma_t^2}{\delta_t}$  beträgt.

Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Matrixeinträge der verschiedenen Basisfunktionen direkt berechnen und die Bubblevariablen daraus symbolisch eliminieren. Daran ist auch etwas leichter zu sehen, welche Dreiecke zulässig sind, damit die Äquivalenz vollständig ist und keine kleinen Terme höherer Ordnung auftreten. Dies ist sicher für Triangulierungen der Fall, die ausschließlich aus ähnlichen Dreiecken bestehen, insbesondere erhalten wir für die natürliche Triangulierung eines Rechtecks durch Parzellierung in Quadrate und anschließende Teilung durch eine Diagonale in beliebiger Richtung den Faktor  $\omega = \frac{1}{160}$ . In der Praxis stellt sich diese Stabilisierung als noch etwas schwach heraus, bessere Ergebnisse erreicht man in der Regel mit Stabilisierungsparametern in der Größenordnung  $\omega \approx 0,02 \dots 0,2$ .

### 3.3.3 Anisotrope Stabilisierung

In vielen Fällen ist das qualitative Verhalten der Strömung bereits a priori bekannt. Beispielsweise treten – insbesondere bei höheren Geschwindigkeiten und den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen – an festen Rändern stets Grenzschichten auf, innerhalb derer das Fluid auf kleinem Raum von der Ruhe direkt an der Wand auf nahezu die volle Geschwindigkeit beschleunigt wird, was große Gradienten zur Folge hat. Sinnvollerweise

können solche Gebiete derart diskretisiert werden, daß diese großen Gradienten durch sehr kleine Knotenabstände berücksichtigt werden. In der Richtung quer dazu sieht die Situation hingegen ganz anders aus, denn dort ist die Strömung nahezu gleichförmig und kleine Knotenabstände deshalb weder notwendig noch sinnvoll. Eine angepaßte Diskretisierung besteht folglich zumindest in der Nähe des Randes aus sehr langen schmalen Elementen mit der Längsseite parallel zur benachbarten Wand. Sie ist also hochgradig anisotrop. Eine solche Triangulierung ist in Abbildung 3.7 dargestellt.

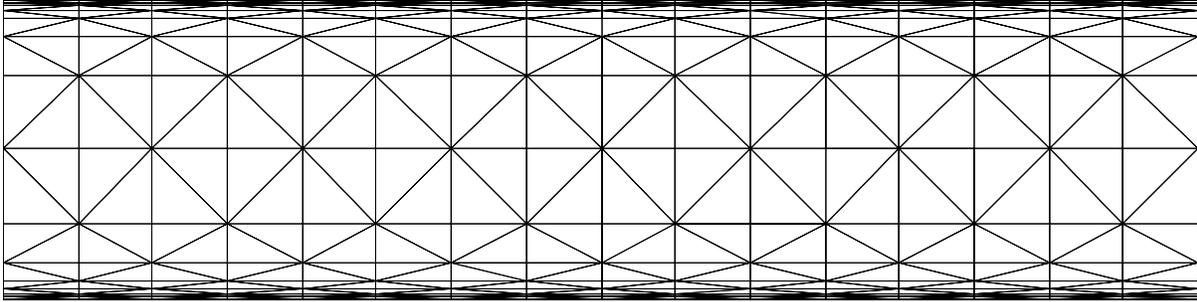


Abbildung 3.7: Kanaltriangulierung mit Grenzschichtauflösung

Die künstliche Stabilisierung (3.11) ist im Gegensatz dazu ganz offensichtlich völlig isotrop, so daß sich die Frage stellt, inwieweit sich hier Probleme ergeben können. In Anbetracht der Äquivalenz des Mini-Elementes mit dieser künstlichen Stabilisierung ist diese Fragestellung auch bei allen anderen stabilen Elementen gerechtfertigt. Für eine erste Abschätzung hat sich dabei die lokale Fourier-Analyse bewährt.

Hierzu nehmen wir als Gebiet  $\Omega$  die ganze Ebene an und verwenden die Basisfunktionen

$$u_{kl} = e^{i(kx+ly)} \quad k, l \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

um das Verhalten der Differentialoperatoren in Abhängigkeit von den Frequenzen  $k$  und  $l$  studieren zu können. Wir behalten dabei der Einfachheit halber die komplexe Notation, um erst zuletzt in Real- und Imaginärteil zu zerlegen.

Wie später noch gezeigt wird, kann die Babuška-Brezzi-Bedingung auch in der Form

$$\mathcal{L}_h = \inf_{p_h} \frac{\sqrt{(p_h, \operatorname{div} (\Leftrightarrow \Delta)^{-1} \nabla p_h)}}{\|p_h\|} \quad (3.13)$$

geschrieben werden, wobei die Inversion des Laplace-Operators auf der ganzen Ebene zu erfolgen hat. Glücklicherweise sind die Funktionen (3.12) gerade die Eigenfunktionen aller beteiligten Differentialoperatoren, was sich auch auf ihre diskreten Ausführungen überträgt, die wir jetzt in (3.13) einsetzen werden. Welche spezielle Diskretisierung dafür gewählt wird, ist hier zunächst zweitrangig, zumal die lokale Fourier-Analyse ohnehin nur

einen Überblick verschaffen soll bzw. als Motivationsgrundlage dient. Der Einfachheit halber wählen wir deshalb die Sterne der Finiten Differenzen niedrigster Ordnung, die sich schreiben lassen als

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\Delta_h &= \frac{1}{h_x^2} \begin{bmatrix} \Leftrightarrow 1 & 2 & \Leftrightarrow 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{h_y^2} \begin{bmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 2 \\ \Leftrightarrow 1 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x_h} &= \frac{1}{2h_x} \begin{bmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial y_h} &= \frac{1}{2h_y} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \Leftrightarrow 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

wobei anisotrope Gitter durch unterschiedliche Maschenweiten  $h_x$  und  $h_y$  bereits berücksichtigt sind. Angewendet auf die Basisfunktionen (3.12) finden wir

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\Delta_h u_{kl} &= 4 \left( \frac{\sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right)}{h_x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{lh_y}{2}\right)}{h_y^2} \right) u_{kl}, \\ \frac{\partial}{\partial x_h} u_{kl} &= \frac{\sin(kh_x)}{h_x} u_{kl}, \\ \frac{\partial}{\partial y_h} u_{kl} &= \frac{\sin(lh_y)}{h_y} u_{kl},\end{aligned}$$

so daß der zentrale Operator im Zähler von (3.13)

$$\operatorname{div}_h (\Leftrightarrow\Delta_h)^{-1} \nabla_h u_{kl} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\sin^2(kh_x)}{h_x^2} + \frac{\sin^2(lh_y)}{h_y^2}}{\frac{\sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right)}{h_x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{lh_y}{2}\right)}{h_y^2}} u_{kl} = \lambda_{kl} u_{kl}$$

die Eigenwerte  $\lambda_{kl}$  hat. Die diskreten Funktionen ohnehin nur an den Gitterpunkten definiert sind, beschränken sich die zulässigen Frequenzen  $k$  und  $l$  nach dem Nyquist-Theorem auf

$$|k| \leq \frac{\pi}{h_x}, \quad |l| \leq \frac{\pi}{h_y}.$$

Die extremalen Werte nimmt die Funktion  $\lambda_{kl}$  nun gerade an den Ecken dieses Definitionsbereiches an, nämlich

$$\begin{aligned}\lambda_{00} &= 1, \\ \lambda_{\frac{\pi}{h_x}0} = \lambda_{0\frac{\pi}{h_y}} = \lambda_{\frac{\pi}{h_x}\frac{\pi}{h_y}} &= 0,\end{aligned}$$

woraus wir leicht die Instabilität dieser Diskretisierung ablesen können, da  $\mathcal{L}_h = 0$  verschwindet.

Fügen wir den klassischen Stabilisierungsterm  $\omega \Delta \cdot$  hinzu, erhalten wir stattdessen die neuen Eigenwerte

$$(\operatorname{div}_h (\Leftrightarrow \Delta_h))^{-1} \nabla_h \Leftrightarrow \omega \Delta) u_{kl} = \left( \lambda_{kl} + 4\omega \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{kh_x}{2} \right)}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \left( \frac{lh_y}{2} \right)}{h_y^2} \right) \right) u_{kl} = \bar{\lambda}_{kl} u_{kl}$$

mit den wieder an den Ecken auftretenden Extremalwerten

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{00} &= 1, \\ \bar{\lambda}_{\frac{\pi}{h_x} 0} &= \frac{4\omega}{h_x^2}, \\ \bar{\lambda}_{0 \frac{\pi}{h_y}} &= \frac{4\omega}{h_y^2}, \\ \bar{\lambda}_{\frac{\pi}{h_x} \frac{\pi}{h_y}} &= 4\omega \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right). \end{aligned}$$

Diese werfen die Frage auf, wie  $\omega$  im Falle stark unterschiedlicher Maschenweiten, beispielsweise  $h_x \ll h_y$  sinnvoll zu wählen ist. Zum einen sollen hochfrequente Moden in beiden Richtungen stabilisiert werden, zum anderen verschlechtert eine starke Überstabilisierung die Konvergenzkonstante mitunter erheblich.

Die Lösung liegt darin, für die  $x$ - und  $y$ -Richtung verschiedene Stabilisierungskonstanten zu verwenden. Ideal wäre die Form

$$\omega \left( h_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3.14)$$

für die angesprochenen Rechteckgitter. Diesen Ansatz können wir verallgemeinern auf schräg verlaufende, verzerrte und sogar völlig unstrukturierte Gitter, indem wir einen ortsabhängigen positiv definiten Tensor  $M_{ij}$  einführen, der diese Anisotropie repräsentiert, und den Stabilisierungsterm schreiben als

$$\omega \operatorname{div} \underline{M} \nabla. \quad (3.15)$$

Wie sieht nun eine sinnvolle Definition von  $M_{ij}$  aus? In dem oben dargestellten Fall eines achsenparallelen Tensorproduktgitters sollte er sich zu

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} h_x^2 & \\ & h_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

vereinfachen, was einen Zusammenhang mit einer Art von Trägheitstensor nahelegt. Eine Möglichkeit besteht deshalb in der Definition

$$M_{ij} = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{\mathcal{N}} x_i x_j \quad (3.17)$$

mit der Menge  $\mathcal{N}$  aller Nachbarknoten zu dem betrachteten Knoten. Damit bekommen wir im Rechteckfall genau (3.16), bis auf einen unerheblichen Zahlenfaktor von  $\frac{3}{4}$ . Eine andere Wahl, die eher dem Geist einer Finite-Elemente-Diskretisierung entspricht, ist

$$M_{ij} = \frac{\int_C x_i x_j dx}{\int_C dx} \quad (3.18)$$

mit allen an den betrachteten Knoten angrenzenden Zellen  $C$ . Diese Vorschrift überträgt sich auch besser auf den Fall unstrukturierter Gitter, da (3.17) in ungünstigen Fällen, beispielsweise wenn sich Nachbarknoten auf einer Seite ballen, zu sehr verzerrt wird. In den gerechneten Beispielen von Abschnitt 6.3 wird deshalb genau dieser Ansatz benutzt.

Mit dieser anisotropen Stabilisierung allein ist allerdings noch nicht die Unabhängigkeit des Verfahrens von großen Seitenverhältnissen der einzelnen Elemente gesichert, denn die auftretenden Konstanten bestehen nicht nur aus der Babuška-Brezzi-Konstanten, sondern auch aus der Approximationsfähigkeit der benutzten Elemente. Glücklicherweise ist hier die Situation etwas günstiger, da der Interpolations- und Approximationsfehler nach [DA92] für viele Elemente zumindest bei Triangulierungen ohne sehr große Winkel optimal oder nahezu optimal ist. Damit sind auch stark anisotrope Diskretisierungen gut geeignet zur Approximation entsprechend gerichteter Lösungen.

Es zeigt sich jedoch in der Praxis, daß viele Finite-Elemente-Verfahren wenig kritisch auf anisotrope Triangulierungen reagieren. Von den bisher betrachteten Elementen ist ausschließlich das Mini-Element betroffen, und auch nur, wenn das gesamte Kanalgebiet mit solchen anisotropen Elementen belegt wird. Ist nur der Rand anisotrop, wie in Abbildung 3.7 dargestellt, so ergeben sich keine Probleme. Gleiches gilt wegen der Äquivalenz natürlich auch für die klassisch stabilisierte Version des  $P_1P_1$ -Elementes. Somit ist die anisotrope Stabilisierung nach (3.15) und (3.18) nur in seltenen Fällen erforderlich, funktioniert dafür aber eben auch bei diesen kritischen Triangulierungen. Alternativ dazu kann man auch ein anderes Element verwenden wie beispielsweise das  $P_1P_2$ -Element, das nur wenig aufwendiger ist, aber dafür auch die Fehlerordnung in den Geschwindigkeiten verbessert und bei anisotroper Triangulierung ebenfalls unkritisch ist.

### 3.4 Diskret divergenzfreie Elemente

Eine andere Möglichkeit der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes besteht in der Wahl eines gänzlich anderen Raumes, sowohl im Kontinuierlichen als auch im Diskreten. Die Stokesgleichungen (1.5) werden hierzu ersetzt durch

$$(D\vec{u}, D\vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V_0, \quad (3.19)$$

wobei  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  beide aus dem bekannten

$$V_0 = \{\vec{v} \in H_0^{1,2} \mid \operatorname{div} \vec{v} = 0\}$$

stammen. Aus dem Sattelpunktproblem wird dadurch eine “einfache” elliptische Differentialgleichung die der normalen elliptischen Konvergenztheorie zugänglich ist.

Die Diskretisierung von (3.19) erfordert nun eine diskrete Approximation von  $V_0$ . Diese ist in aller Regel nichtkonform im Sinne von  $W_h \not\subset V_0$ , da die Divergenzfreiheit nicht überall erfüllt wird. Anderenfalls wären nach [For96] ganz spezielle Triangulierungen oder Finite Elemente hoher Ordnung erforderlich. Die Konstruktion von  $W_h$  geschieht so, daß ein normaler Finite-Elemente-Raum  $V_h$  durch eine diskrete Nebenbedingung der Divergenzfreiheit eingeschränkt wird. Dies kann beispielsweise durch einen weiteren Finite-Elemente-Raum  $Q_h$  geschehen, der mittels

$$W_h = \left\{ \vec{v}_h \in V_h \mid \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}_h q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \right\}$$

den diskret divergenzfreien Raum  $W_h$  bestimmt. Selbstverständlich darf  $Q_h$  hier wieder nicht zu groß gewählt werden, da  $W_h$  ansonsten seine Approximationseigenschaften verliert und nur noch aus der Nullfunktion besteht. Bei genauerer Betrachtung stellt sich sogar heraus, daß die Kombination  $V_h$ - $Q_h$  gerade wieder die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllen muß, damit  $W_h$  geeignet ist.

Der Vorteil der Formulierung (3.19) besteht jedoch darin, daß erheblich weniger Unbekannte zu bestimmen sind, nämlich  $|V_h| \Leftrightarrow |Q_h|$  anstelle von  $|V_h| + |Q_h|$  in der Standarddiskretisierung (3.4). Bei einigen Finiten Elementen kann für den Raum  $W_h$  genauso wie im Normalfall für  $V_h$  eine lokale Basis angegeben werden, so daß auch die Berechnung der Matrixeinträge nicht wesentlich aufwendiger ausfällt und die entstehenden linearen Gleichungssysteme ähnlich dünn besetzt sind.

Nachteilig ist auf der anderen Seite eine erheblich schlechtere Kondition der Systemmatrix, die nun etwa  $h^{-4}$  beträgt anstelle von  $h^{-2}$  bei der Standarddiskretisierung, was je nach Lösungsmethode zu drastisch schlechteren Konvergenzraten oder auch zum Auftreten von Rundungsfehlern führen kann. Dies liegt daran, daß – in etwas versteckter Form – durch (3.19) die biharmonische Gleichung der Stromfunktion diskretisiert wird. Mit Mehrgitterverfahren läßt sich dieses Problem zwar prinzipiell lösen, allerdings ist die korrekte Formulierung der Restriktions- und Prolongationsoperatoren insbesondere bei unstrukturierten oder adaptiven Gittern etwas heikel.

Zusätzlich kommen bei inhomogenen Randbedingungen – wie sie in der Praxis fast immer auftreten – oder auch bei mehrfachem Zusammenhang des Gebietes eine oder mehrere nichtlokale Basisfunktionen hinzu. Diese führen zu nicht ganz so einfach zu berechnenden Matrixeinträgen und sorgen auch, je nach Randbedingung, für ziemlich voll besetzte Reihen und Spalten in der Systemmatrix, die beispielsweise bei strukturierten Gittern nicht mit dem normalen Stern gespeichert werden können. Bei Löchern im Gebiet ist um jedes Loch ein zusätzlicher Wirbel zu bilden, der einer nichtverschwindenden Stromfunktion im Loch (wenn außerhalb des gesamten Gebietes die Stromfunktion zu 0 gewählt wird) entspricht. Bei inhomogenen Randbedingungen, beispielsweise einer Einströmbedingung für einen Kanal, müssen alle Ein- und Ausströmränder durch Strompfade miteinander verbunden werden. Dies liegt daran, daß lokale divergenzfreie Funktionen prinzipiell nur rotierende

Geschwindigkeitsfelder approximieren können. Der potentialtheoretische Anteil als Gradient einer Funktion hingegen verlangt nach nichtlokalen Basisfunktionen. Je nachdem, ob es sich um Dirichlet-Ränder mit vorgegebenen Geschwindigkeiten oder um Neumann-artige Ränder mit gegebener Druckdifferenz handelt, ist der Koeffizient einer solchen nichtlokalen Basisfunktion fest und geht nur in die rechte Seite ein oder erscheint als zusätzliche Variable in der Systemmatrix.

Ein weiteres Problem tritt erst in drei Dimensionen auf. Dort kann zwar relativ leicht ein Erzeugendensystem für  $V_h$  angegeben werden, diese elementaren Funktionen sind jedoch leider nicht linear unabhängig, so daß sie keine Basis bilden. Mittels graphentheoretischer Methoden kann man dann überzählige Funktionen eliminieren [Dob89], allerdings mit einem nicht unerheblichen Aufwand bei der Behandlung der Gittertopologie. Dadurch wird natürlich auch das Aufstellen der Systemmatrix erschwert und eine eventuell vorhandene einfache Besetzungsstruktur der Matrix gestört. Alternativ können alle Erzeugenden verwendet werden und ein iterativer Löser, der im orthogonalen Komplement des Kerns der dann nur semidefiniten Systemmatrix konvergiert, zusammen mit geeigneten Filtertechniken eingesetzt werden.

Dennoch ist in manchen Fällen eine Anwendung dieses Verfahrens insbesondere in zwei Dimensionen sinnvoll, so daß hier lokale Basisfunktionen für ein bekanntes divergenzfreies nichtkonformes Finites Element und eine neue lokale Basis für das diskret divergenzfreie Mini-Element angegeben werden. Ebenfalls in dieses Rahmen paßt die von den Finiten Differenzen bekannte Staggered-Grid-Diskretisierung, für die auch eine lokale, divergenzfreie Basis angegeben werden kann.

### 3.4.1 Crouzeix-Raviart-Element

Das bekannteste diskret divergenzfreie Element ist zwar auch kontinuierlich divergenzfrei, allerdings nichtkonform in der Diskretisierung der Geschwindigkeiten. Es geht hervor aus dem nichtkonformen  $P_1'$ -Element für die Geschwindigkeit und den stückweise konstanten Funktionen  $P_0$  für den Druck. Die Konvergenz dieses Elementes wurde von Crouzeix und Raviart [CR73] gezeigt unter Voraussetzung der Stetigkeit der Geschwindigkeiten an den Kantenmitten. Natürliche Knotenvariablen sind deshalb die Geschwindigkeiten an den Kantenmitten sowie der Druck in jedem Simplexmittelpunkt. Der Funktionsverlauf ist damit eindeutig bestimmt. Der Konvergenzbeweis ist etwas technisch, da die nichtkonformen Terme mitgeschleppt und abgeschätzt werden müssen, basiert ansonsten aber auf der klassischen Theorie aus Punkt 3.2.3.

Eine Basis in zwei Dimensionen für den divergenzfreien Unterraum von  $P_1'$  besteht aus zwei unterschiedlichen Typen von Funktionen, die in Abbildung 3.8 dargestellt sind. An jeder Kantenmitte befindet sich eine Basisfunktion mit einer Geschwindigkeit parallel zu dieser Kante und an jedem Eckpunkt ein Wirbel um diese Ecke durch die anliegenden Dreiecke, senkrecht zu ihren anliegenden Kantenmitten und umgekehrt proportional zur jeweiligen Kantenlänge. Wie man sich leicht überzeugen kann und durch Abzählen der Freiheitsgrade mit der Eulerformel bestätigt sieht, sind diese Funktionen linear unabhängig und erzeugen den  $V_h^{C-R}$ , bilden also eine Basis. Die Konstruktion eventueller nichtlokaler

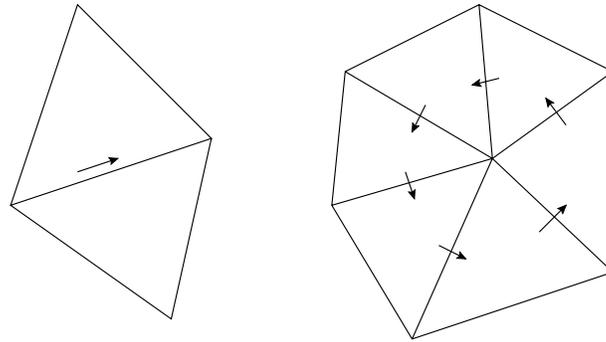


Abbildung 3.8: Basisfunktionen des nichtkonformen divergenzfreien Crouzeix-Raviart-Elementes

Basisfunktionen ist hier relativ anschaulich, da einfach der Fluß von Dreieck zu Dreieck weitergereicht wird.

Dieses Element ist relativ erfolgreich, da es einfach zu implementieren ist, kleine Systemmatrizen erzeugt und genaue Resultate liefert. Für manche Verfahren vorteilhaft ist die diagonale Massenmatrix der Drücke, die folglich trivial invertierbar ist. Wie bei praktisch allen Elementen mit unstetigem Druck gilt die Divergenzfreiheit pro Dreieck, da die elementweise konstanten Funktionen im Druckraum enthalten sind (hier spannen sie den gesamten Druckraum auf). Eine Verallgemeinerung dieses Elementes auf Viereckselemente ist leicht möglich und wird auch häufig angewendet.

### 3.4.2 Mini-Element

Ähnlich wie auch im Crouzeix-Raviart Element existieren für das diskret divergenzfreie Mini-Element aus Punkt 3.2.4 zwei qualitativ verschiedene Basisfunktionen, die in Abbildung 3.9 gezeigt werden. Die erste besteht aus zwei nebeneinanderliegenden Bubbles entgegengesetzter Richtung parallel zur gemeinsamen Kante, die zweite aus einer beliebigen Geschwindigkeit an einem Eckpunkt und den umliegenden Bubbles, die für die Rückströmung sorgen. Zur Definition letzterer gibt es mehrere Möglichkeiten, da jeweils zwischen zwei Bubbles eine beliebig skalierte Funktion des ersten Typs eingefügt werden kann, ohne die diskrete Divergenzfreiheit zu verletzen. Eine Möglichkeit besteht z. B. darin, durch die Bubble in jedem Dreieck die Divergenzfreiheit einzeln zu erfüllen, was gestattet, die Bubbles lokal und einzeln auszurechnen, ohne alle umliegenden Bubbles gleichzeitig behandeln zu müssen.

Man könnte versucht sein, die Basisfunktionen des ersten Typs ganz wegzulassen und sich am Ende auf die Werte an den Eckpunkten zu beschränken. Dies ist nicht möglich, denn diese Funktionen sorgen für die Verbindung zweier benachbarter Eck-Basisfunktionen. Der gleiche Effekt träte bei einer klassischen  $P_1$ -Diskretisierung des Poisson-Problems auf, wenn alle ungeraden Punkte nicht mitberechnet, sondern automatisch auf den negativen Wert des zugehörigen geraden Punktes gesetzt würden. Die Typ-I Funktionen können auch

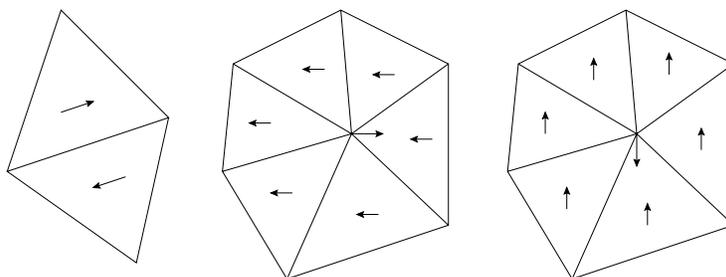


Abbildung 3.9: Basisfunktionen des diskret divergenzfreien Mini-Elementes

nicht statisch eliminiert werden, da sie kantenorientiert sind und sich benachbarte Basisfunktionen deshalb überlappen. Man sieht sofort, daß sich einfache Strömungsbilder wie die homogene lineare Strömung oder Potentialwirbel so nicht darstellen lassen. Sieht man sich die den Basisfunktionen entsprechende Stromfunktion an, wird dies auch klar, denn ohne die Typ-I Funktionen bleiben Löcher, beispielsweise in einer Diskretisierung konstanter Wirbelstärke.

### 3.4.3 Staggered Grid

Ein beliebtes, weil billiges Element ist das aus der Finite-Differenzen-Methode bekannte versetzte Gitter. Die beiden Geschwindigkeitskomponenten sind dabei so auf den Kanten eines Quadratgitters definiert, daß sie gerade senkrecht auf ihrer jeweiligen Kante stehen. Die Druckfunktionen sind an den Zellmitten lokalisiert. Abbildung 3.10 zeigt ein solches Gitter mit den jeweiligen Knotenvariablen. Auch für dieses Element kann eine diskret divergenzfreie Basis angegeben werden, und zwar sowohl in zwei (Abbildung 3.11) wie auch in drei Dimensionen [Dob89]. Wie bei allen diskret divergenzfreien Elementen treten die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Probleme auf. Dies betrifft die zusätzliche Einführung nichtlokaler Basisfunktionen für den Anteil der Potentialströmung bzw. der Rotation um Löcher im Gebiet sowie die Elimination überzähliger Basisfunktionen in drei Dimensionen.

Nach [Sto99b] kann für dieses Gitter eine echte diskrete Velte-Diskretisierung angegeben werden, wobei die diskreten Operatoren  $\text{div}_h$  und  $\text{rot}_h$  geeignet zu definieren sind. Das diskrete Äquivalent zum Eigenwertproblem (2.15) hat dann ebenfalls drei Teilräume zu den Eigenwerten  $1$ ,  $\infty$  und den interessanten "harmonischen" Druckraum mit Eigenwerten im Intervall  $]1, \mathcal{L}_h^2]$ . Mit einem geeigneten Start des Uzawa-Verfahrens kann dann gewährleistet werden, daß die Iteration vollständig in dem harmonischen Druckraum stattfindet und dafür ein optimaler Uzawa-Parameter angegeben werden [Sto99a]. Dies gilt auch für die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen, die in [DS98] behandelt wird. Eine solche diskrete Velte-Zerlegung gibt es generell für Elemente, für die  $\text{div } V_h \subseteq Q_h$  gilt. Dies trifft beispielsweise zu auf das stetige Lagrange-Element der Ordnung  $k$  für die Geschwindigkeiten und das unstetige Element der Ordnung  $k \Leftrightarrow 1$  für den Druckraum, wobei  $k \geq 4$ .

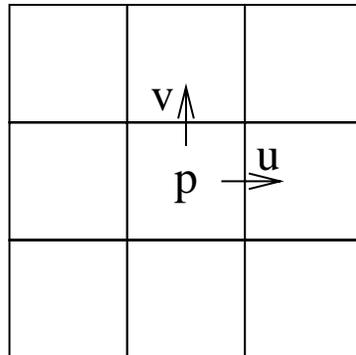


Abbildung 3.10: Definition der Knotenvariablen im Staggered Grid

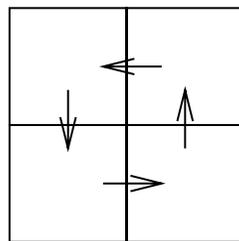


Abbildung 3.11: Divergenzfreie lokale Basisfunktion



# Kapitel 4

## Numerik

Die analytische Bestimmung der Ladyzhenskaya-Konstanten ist nur in ganz wenigen Fällen exakt möglich. Selbst für so einfache Gebiete wie das Quadrat ist keine analytische Lösung mehr zu finden. Man ist deshalb auf die Abschätzungen aus Abschnitt 2.4 angewiesen, die jedoch für verschiedene Gebietsklassen viel zu pessimistisch sind, insbesondere dann, wenn das Gebiet aus mehreren Teilgebieten mit Hilfe von Satz 12 zusammengesetzt werden muß, da speziell dieser Satz ziemlich grob abschätzt. Besonders auffällig ist dies bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten, die ja immer aufgeschnitten und aufgeteilt werden müssen.

Alternativ zu diesem analytischen Ansatz kann die Babuška-Brezzi-Konstante aus (3.1) auch numerisch bestimmt und damit die kontinuierliche Ladyzhenskaya-Konstante abgeschätzt werden. Dieser numerisch bestimmte Wert ist in aller Regel schlimmstenfalls bis auf einen kleinen Faktor gleich der Ladyzhenskaya-Konstanten, wie sich in Abschnitt 4.2 herausstellen wird.

### 4.1 Verfahren

Für die numerische Approximation der Ladyzhenskaya-Konstanten sind verschiedene Verfahren denkbar. Eine Möglichkeit besteht in der direkten Approximation der Bedingung (3.1). Hierbei ist zu beachten, daß die diskrete Stokesgleichung (3.4) wie schon im Kontinuierlichen gerade der Eulergleichung der sup-Maximierung in Bedingung (3.1) entspricht. Zu jedem gegebenen  $p_h$  erhalten wir also das zugehörige  $\vec{u}_h$  aus der Lösung von

$$(D\vec{u}_h, D\vec{v}_h) = (\operatorname{div} \vec{u}_h, p_h) \quad \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (4.1)$$

und den entsprechenden Wert

$$\lambda_{p_h} = \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}_h, p_h)}{|\vec{v}_h|_1 \|p_h\|} = \frac{(\operatorname{div} \vec{u}_h, p_h)}{|\vec{u}_h|_1 \|p_h\|} = \frac{|\vec{u}_h|_1}{\|p_h\|}, \quad (4.2)$$

wobei in der letzten Umformung die Bestimmungsgleichung (4.1) und die Definition der  $|\cdot|_1$ -Norm verwendet wurde.

Zur Formulierung des Verfahrens ist allerdings eine andere Schreibweise geeigneter. Die Matrizen  $A$  und  $B$  vertreten im Finite-Elemente-Raum die Operatoren  $\Leftrightarrow\Delta$  und  $\Leftrightarrow\text{div}$  und sind definiert durch

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^T A \mathbf{U} &= (D\vec{v}_h, D\vec{u}_h) & \forall \vec{u}_h, \vec{v}_h \in V_h, \\ \mathbf{Q}^T B \mathbf{U} &= (q_h, \text{div } \vec{u}_h) & \forall \vec{u}_h \in V_h, q_h \in Q_h,\end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{U}$  die Koeffizientenvektoren der Finite Elemente Funktionen  $v_h$  und  $u_h$  in der gewählten Basis  $\{v_h^i\}$  sind und entsprechend  $\mathbf{Q}$  der Koeffizientenvektor von  $q_h$  in der Basis  $\{q_h^j\}$  ist. Weiterhin benötigen wir die Massenmatrix der Druckfunktionen, definiert durch

$$\mathbf{Q}^T M \mathbf{P} = (q_h, p_h),$$

die damit gleichzeitig die  $\|\cdot\|$ -Norm im Druckraum vermittelt, genauso wie die Matrix  $A$  die  $|\cdot|_1$ -Norm im Geschwindigkeitsraum. Dank der Symmetrie und Elliptizität von 3.2 ist sichergestellt, daß  $A$  positiv definit und folglich invertierbar ist.

In einer implementierungstauglichen Schreibweise können wir nun die Lösung von (4.1) angeben durch

$$A \mathbf{U} = B^T \mathbf{P},$$

und damit auch die Normen aus der letzten Umformung von (4.2) mit

$$\begin{aligned}|u_h|_1 &= \sqrt{\mathbf{U}^T A \mathbf{U}} = \sqrt{\mathbf{U}^T B^T \mathbf{P}} = \sqrt{\mathbf{P}^T B A^{-1} B^T \mathbf{P}}, \\ \|p_h\| &= \sqrt{\mathbf{P}^T M \mathbf{P}},\end{aligned}$$

und finden schließlich für die Werte

$$\lambda_{p_h}^2 = \frac{\mathbf{P}^T B A^{-1} B^T \mathbf{P}}{\mathbf{P}^T M \mathbf{P}}.$$

Die Extrema der Werte  $\lambda_{p_h}$  lassen sich daher aus einer verallgemeinerten Eigenwertgleichung ermitteln und der gesuchte minimale Wert  $\mathcal{L}_h$  ergibt sich als die Wurzel des kleinsten Eigenwertes von

$$B A^{-1} B^T \mathbf{P} = \lambda^2 M \mathbf{P}. \quad (4.3)$$

**Anmerkung 15.** *Der diskrete Druckraum wird bei der Implementierung in aller Regel nicht nach den konstanten Funktionen faktorisiert, sondern der volle  $L^2$  diskretisiert. Bei der einfachen Lösung der Stokesgleichung ist dies bei praktisch allen Verfahren auch unkritisch, bei Bedarf kann am Ende durch Addition einer Konstanten das Integralmittel 0 erreicht werden.*

*Daraus ergibt sich jedoch die Konsequenz, daß die Matrix  $B$  nicht mehr vollen Rang besitzt und somit der linke Operator von (4.3) nur noch positiv semidefinit ist, d. h. es existiert ein verschwindender Eigenwert mit der konstanten Funktion als zugehörigem Eigenvektor. Dieser kleinste Eigenwert kann bei der Bestimmung von  $\mathcal{L}_h$  einfach ignoriert*

werden. Es stellt sich jedoch die Frage, ob dadurch möglicherweise andere Eigenwerte oder Eigenfunktionen verfälscht werden, denn schließlich ist ja die Norm  $\|\cdot\|$  eigentlich für Funktionen aus  $L_0^2$  definiert.

Glücklicherweise ist dies jedoch nicht der Fall, da Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten bei symmetrischen Problemen bekanntlich prinzipiell orthogonal sind und in unserem Fall daher alle interessierenden Eigenfunktionen orthogonal zu der konstanten Funktion sind. Dies bedeutet jedoch gerade, daß ihr Integralmittel verschwindet. Daher befinden sich die wichtigen Eigenfunktionen, obwohl ursprünglich im gesamten  $L^2$  gesucht, – bedingt durch Eigenschaften des Verfahrens – schließlich doch in  $L_0^2$ .

Die Lösung dieses verallgemeinerten Eigenwertproblems erfolgt mit Standardmethoden, entweder indem (4.3) direkt gelöst wird oder die positiv definite Massenmatrix  $M = LL^T$  zunächst Cholesky-zerlegt und anschließend in ein Standardproblem

$$L^{-1}BA^{-1}B^TL^{-T}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$$

mit  $\mathbf{X} = L^T\mathbf{P}$  transformiert wird. Hierbei ist zu beachten, daß die Matrix  $BA^{-1}B^T$  voll besetzt ist, und die Matrix  $M$  für Finite Elemente mit unstetigem Druck besonders einfach zu zerlegen ist, da sie dann (block-)diagonal ist. In der Praxis werden die Inversen selbstverständlich nicht explizit berechnet, sondern die entsprechenden Gleichungssysteme gelöst.

Eine zweite Möglichkeit besteht in der direkten Diskretisierung des zur Eulergleichung von (2.6) gehörenden Eigenproblems (2.15) oder auch (2.17). Zweckmäßigerweise verwendet man jedoch eher ersteres, weil sich dessen Matrixeinträge etwas einfacher berechnen lassen. Da die Eigenwerte im Bereich  $[1, \infty]$  liegen, empfiehlt es sich jedoch, das äquivalente inverse Problem

$$(\operatorname{div} \vec{u}_h, \operatorname{div} \vec{v}_h) = \eta (D\vec{u}_h, D\vec{v}_h) \quad \forall \vec{v}_h \in V_h$$

zu bearbeiten. Definieren wir nun wieder die Matrix  $D$  über

$$\mathbf{V}^T D\mathbf{U} = (\operatorname{div} \vec{v}_h, \operatorname{div} \vec{u}_h) \quad \forall \vec{u}_h, \vec{v}_h \in V_h,$$

die offensichtlich positiv semidefinit ist, können wir das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$D\mathbf{U} = \eta A\mathbf{U} \tag{4.4}$$

lösen, das genau (4.3) entspricht, allerdings im Raum der Geschwindigkeiten  $V_h$  formuliert ist statt im Druckraum  $Q_h$ .

Der Unterraum von  $V_h$  zum Eigenwert  $\eta = 0$  ist nun gerade das diskrete Äquivalent zum divergenzfreien Teilraum  $V_0 \subset H_0^{1,2}$  aus (2.7). Allerdings gilt  $\eta = 0$  dann und nur dann, wenn die zugehörige Eigenfunktion nicht nur diskret, sondern exakt divergenzfrei ist. In dieser Formulierung kann es deshalb sehr schwierig sein, zwischen der kritischen Eigenfunktion, die dem Wert  $\mathcal{L}_h$  und der passenden Druckeigenfunktion von (4.3) entspricht, und möglicherweise sehr vielen Funktionen zu unterscheiden, die nicht exakt, sondern nur

diskret divergenzfrei sind und deshalb eigentlich den genannten Raum  $V_0$  approximieren statt den interessanten Raum  $V_\beta \in H_0^{1,2}$  aus (2.12). Auf der anderen Seite des Spektrums entsteht dasselbe Problem mit dem Raum  $V_1 \subset H_0^{1,2}$  aus (2.11) und nur diskret, aber nicht exakt rotationsfreien Funktionen. Genau dasselbe Verhalten zeigt natürlich auch eine Diskretisierung von (2.17).

Diese Formulierung ist deshalb allenfalls dann sinnvoll einsetzbar, wenn sich aus dem diskreten Geschwindigkeitsraum ein ausreichend großer exakt divergenzfreier Teilraum finden läßt. Dies ist beispielsweise für die stückweise linearen nichtkonformen Geschwindigkeiten des Crouzeix-Raviart-Elementes der Fall. Für spezielle Triangulierungen können auch stückweise quadratische konforme Elemente verwendet werden, und das verallgemeinerte Taylor-Hood-Element eignet sich ebenfalls, allerdings erst ab einem Polynomgrad von mindestens vier. In drei Dimensionen funktioniert auch das verallgemeinerte Mini-Element, dieses aber sogar erst ab einem Polynomgrad von mindestens neun [For96].

Zu beachten ist bei diesem Ansatz auch, daß sich das Eigenwertproblem im Geschwindigkeitsraum  $V_h$  abspielt, der bei allen stabilen Elementen erheblich größer ist als der Druckraum  $Q_h$ . Auf der anderen Seite müssen keine Gleichungssysteme zur Aufstellung der Eigenwertmatrizen gelöst werden und die beteiligten Matrizen  $A$  und  $D$  sind für die gewöhnlich verwendeten lokalen Basisfunktionen sehr dünn besetzt. Aus diesen beiden Gründen bieten sich zur Lösung von (4.4) eigentlich nur iterative Verfahren an, wie die in Anhang A.5.2 beschriebene Arnoldi-Methode.

Da sich bei allen Finiten Elementen mit höherer Ordnung der Anteil Nichtnullelemente in den Matrizen  $A$  und  $D$  deutlich erhöht, bleibt für diesen Ansatz im wesentlichen nur das Crouzeix-Raviart-Element übrig. Obwohl dieses für glatte Lösungen keine besonders vorteilhaften Approximationseigenschaften hat (nur erster Ordnung), wurde es implementiert und einige Beispiele damit durchgerechnet. Bei guten adaptiven Triangulierungen hat es sich dabei als durchaus brauchbar erwiesen. Wie bei allen nichtkonformen Elementen gilt dann allerdings nicht mehr die Abschätzung (Anhang B)

$$\|\operatorname{div} \vec{u}_h\| \leq |\vec{u}_h|_1,$$

die durch partielle Integration unter Beachtung der Nullrandbedingung leicht bewiesen werden kann, sondern die schwächere Abschätzung

$$\|\operatorname{div} \vec{u}_h\| \leq \sqrt{d} |\vec{u}_h|_1$$

mit der Raumdimension  $d$ . Das hat zur Folge, daß die nichtverschwindenden Eigenwerte von (4.4) nicht mehr wie im konformen Fall im Intervall  $[\mathcal{L}_h, 1]$  liegen, sondern im Intervall  $[\mathcal{L}_h, \sqrt{d}]$ , und keine direkte Korrespondenz mehr gegeben ist zwischen den Eigenfunktionen von (4.4) und dem entsprechenden diskreten Äquivalent zu (2.17). Dies liegt daran, daß auch die Aufteilung (2.10) für nichtkonforme Diskretisierungen nicht mehr gültig ist.

## 4.2 Konvergenz und Approximation

Die numerische Berechnung der Babuška-Brezzi-Konstanten zur Abschätzung der kontinuierlichen Ladyzhenskaya-Konstanten mit Hilfe von (4.3) ist selbstverständlich nur dann sinnvoll, wenn eine Aussage über die Genauigkeit dieser Approximation möglich ist. Die eine Richtung dieser Aussage ist für stabile Elemente bereits in Satz 16 enthalten, an dessen Ende die Aussage

$$\mathcal{L} \leq c \mathcal{L}_h$$

steht, wobei die Konstante  $c$  für die Güte des verwendeten Interpolationsoperators  $\Pi_h$  steht. Sie ist für eine gegebene Diskretisierung nur sehr schwer auszurechnen. In der Praxis handelt es sich jedoch für die gebräuchlichen Finiten Elemente allenfalls um eine kleine Konstante. Für überstabile Elemente, die aus der Anreicherung von bereits stabilen Elementen hervorgehen, wie beispielsweise das quadratische Mini-Element für Geschwindigkeiten und stückweise lineare Drücke, scheint die Konstante in der Praxis von der Größenordnung  $1 + o(1)$  für  $h \rightarrow 0$  zu sein. Für die Abschätzung der anderen Richtung zuständig ist

**Satz 19.** *Für ein Gebiet  $\Omega$  und eine konforme Diskretisierung der Stokesgleichungen (3.4) seien sowohl die Ladyzhenskaya-Ungleichung (2.6) mit  $\mathcal{L}$  als auch die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.1) mit  $\mathcal{L}_h$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $h > 0$ , so daß gilt*

$$\mathcal{L}_h \Leftrightarrow \epsilon \leq \mathcal{L}.$$

**Anmerkung 16.** *Da keine Glattheit des Gebietes oder der Lösung gefordert ist, kann keine schärfere Aussage getroffen werden, insbesondere über eine Konvergenzordnung der Form  $\mathcal{L}_h = \mathcal{L} + O(h^\alpha)$ . Da in der anderen Richtung jedoch nicht einmal Konvergenz, sondern lediglich eine Konstante angegeben werden kann, ist dies auch nicht unbedingt erforderlich.*

*Beweis.* Bekanntlich ist der Raum  $C_0^\infty$  der glatten Funktionen dicht in  $L_0^2$ , so daß wir (2.6) in  $C_0^\infty$  betrachten. Sei nun  $p_\epsilon \in C_0^\infty$  (eigentlich genügt  $p_\epsilon \in C^{1+\kappa}(\bar{\Omega})$ ) mit  $\|p_\epsilon\| = 1$  und

$$|\nabla p_\epsilon|_{-1} \leq \mathcal{L} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da diese Funktion glatt ist, kann sie auch im Diskreten approximiert werden (je nach Diskretisierung mit unterschiedlicher Ordnung), d. h. es existiert ein  $h > 0$ , so daß es ein  $p_h \in Q_h$  gibt mit

$$\|p_h \Leftrightarrow p_\epsilon\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

und der Einfachheit halber ebenfalls  $\|p_h\| = 1$ . Nun ist aber die Norm  $|\nabla \cdot|_{-1}$  äquivalent zur  $L_0^2$ -Norm, so daß gilt

$$|\nabla p_h|_{-1} \leq |\nabla p_\epsilon|_{-1} + |\nabla (p_h \Leftrightarrow p_\epsilon)|_{-1} \leq \mathcal{L} + \frac{\epsilon}{2} + \|p_h \Leftrightarrow p_\epsilon\| \leq \mathcal{L} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da wir eine konforme Diskretisierung haben, gilt schließlich

$$\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_h \|p_h\| \leq \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}_h, p_h)}{|\vec{v}_h|_1} \leq \sup_{\vec{v} \in H_0^{1,2}} \frac{(\operatorname{div} \vec{v}, p_h)}{|\vec{v}|_1} = |\nabla p_h|_{-1} \leq \mathcal{L} + \epsilon.$$

□

Zusammengenommen stellen wir damit den Einschluß

$$\mathcal{L}_h \Leftrightarrow \epsilon(h) \leq \mathcal{L} \leq c \mathcal{L}_h \quad (4.5)$$

mit einer Funktion  $\epsilon(h)$  fest, für die gilt

$$\epsilon(h) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

und einer unbekanntenen, aber im praktischen Einsatz meist kleinen Konstante  $c$ .

Es ist offensichtlich, daß bei festgehaltenem Druckraum  $Q_h$  ein größerer Geschwindigkeitsraum  $V_h' \supsetneq V_h$  die Konstante  $\mathcal{L}_h$  allenfalls vergrößern kann. Damit wird klar, daß ein “besseres” Element, als nach (3.1) erforderlich, die Genauigkeit der Berechnung verbessert. Alternativ kann auch bei festgehaltener Drucktriangulierung die Diskretisierung der Geschwindigkeiten verfeinert werden, beispielsweise durch reguläre Verfeinerung. Gleichzeitig wird durch diese Maßnahme die Konstante  $c$  aus der Interpolation verkleinert, so daß man für ein ausreichend überstabiles Element oder verfeinerte Geschwindigkeiten guten Gewissens sagen kann

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_h.$$

Dies bestätigt sich auch bei den numerischen Beispielen aus Kapitel 6, für die  $\mathcal{L}$  explizit angegeben werden kann.

Halten wir allerdings die Druckdiskretisierung mit einem  $h_p$  fest und verfeinern anschließend lediglich den Geschwindigkeitsraum mit  $h_u \rightarrow 0$ , so können wir insbesondere die obere Abschätzung  $\mathcal{L} \leq c \mathcal{L}_h$  verbessern, denn es ist klar, daß für jeden diskreten Druck die diskreten Geschwindigkeiten wegen der Eigenschaften des Poisson-Problems gegen die zu dieser Druckfunktion passende kontinuierliche Funktion

$$(D\vec{u}, D\vec{v}) = (p_{h_p}, \operatorname{div} \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}$$

konvergieren. Damit wird aber auch der Ausdruck

$$\mathcal{L}_{h_u, h_p} = \sup_{\vec{v}_{h_u} \in V_{h_u}} \frac{(p_{h_p}, \operatorname{div} \vec{v}_{h_u})}{|\vec{v}_{h_u}|_1 \|p_{h_p}\|}$$

gegen  $|\nabla p_{h_p}|_{-1}$  konvergieren und das kontinuierliche Eigenwertproblem (2.15) folglich immer genauer approximiert. Daher können wir schließen

$$\mathcal{L} \leq \lim_{h_p \rightarrow 0} \lim_{h_u \rightarrow 0} \mathcal{L}_{h_u, h_p},$$

worin die beiden Limites so zu verstehen sind, daß für jedes  $h_p$  zunächst  $h_u \rightarrow 0$  gehen muß.

### 4.3 Eigenwertverteilung

Ohne den Ergebnissen der Beispiele aus Kapitel 6 vorzugreifen, seien hier einige Charakteristika der mit dem durch Gleichung (4.3) gegebenen Verfahren berechneten Eigenwertverteilungen vorgestellt. Wie bereits gezeigt, liegen alle nichtverschwindenden Eigenwerte im Bereich  $[\mathcal{L}_h^2, 1]$ . Allerdings sind diese nicht gleichmäßig über das gesamte Intervall verteilt. Es stellt sich heraus, daß die kleinen Eigenwerte, die besonders interessant sind, diskret liegen, und zwar häufig in etwa an den Stellen

$$\lambda_n^2 = n^2 \cdot \mathcal{L}_h^2 \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

für (je nach Größe von  $\mathcal{L}_h$ ) einige oder etliche Werte von  $n$ . Dabei können, je nach Triangulierung und Gebiet, einige Eigenwerte auch exakt oder nahezu exakt entartet sein. Falls nicht alle kleinen Eigenwerte durch (4.6) erfaßt werden, lassen sich meistens zwei oder mehr Reihen erkennen, für die die Beziehung (4.6) jeweils einzeln mit leicht unterschiedlichem  $\mathcal{L}_h$  gilt. Mit zunehmendem  $n$  rücken die Eigenwerte näher zusammen und gehen ab etwa  $\lambda^2 \approx 0,2 \dots 0,4$  in ein Kontinuum über, das ein Maximum bei etwa  $\frac{1}{2}$  annimmt. In der Nähe von 1 tauchen dann die annähernd rotationsfreien und gerade bei 1 schließlich die exakt rotationsfreien Funktionen auf, die den Raum  $V_1$  aus (2.11) approximieren. Qualitativ sieht das Spektrum also aus wie in Abbildung 4.1, wobei hier auf der Abszisse die Wurzeln der Eigenwerte von (4.3), also die  $\lambda_n$  aufgetragen sind, die schließlich entscheidend für die Babuška-Brezzi-Bedingung sind.

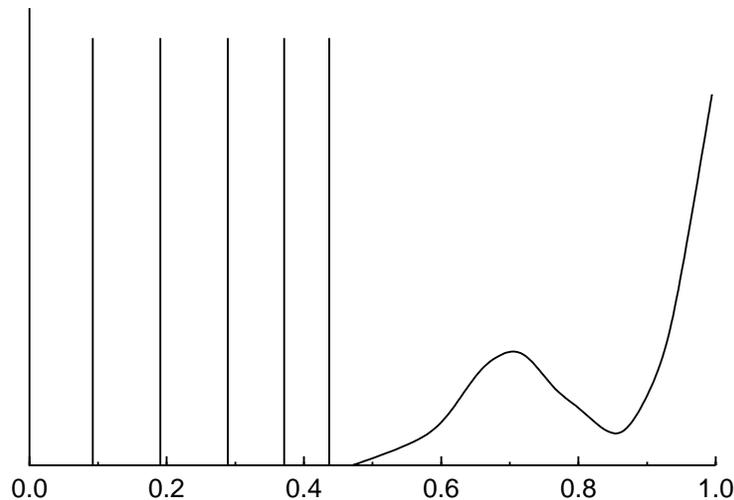


Abbildung 4.1: Qualitatives Spektrum des Eigenwertproblems (4.3)

Die Gesamtzahl der berechneten Eigenwerte hängt selbstverständlich vom verwendeten Element und der Triangulierung ab. Für zunehmend feinere Diskretisierungen verschieben sich die kleinen Eigenwerte leicht, da  $\mathcal{L}_h \rightarrow \mathcal{L}$  (qualitativ). Die grundsätzliche Charakteristik – kleine diskrete Eigenwerte, Kontinuum um  $\frac{1}{2}$ , rotationsfreie Funktionen bei 1 – bleibt jedoch immer gleich, lediglich die Höhe der Buckel beim Kontinuumsmaximum und besonders bei 1 erhöht sich beispielsweise bei Gitterverfeinerungen. Diese spezielle Eigenwertverteilung war unter anderem die Motivation für die Entwicklung des schnellen Stokes-Lösers, der auch bei ungünstigen Gebieten noch brauchbar arbeitet und im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

# Kapitel 5

## Schneller Stokes-Löser

In der vorangegangenen Diplomarbeit [Kef97] stellte sich heraus, daß die Konvergenzgeschwindigkeit des dort untersuchten Uzawa-Verfahrens ganz entscheidend von der Konstante  $\mathcal{L}_h$  aus (3.1) abhängt. Wie im Abschnitt 4.2 deutlich wurde, ist diese aber in der Größenordnung der kontinuierlichen Ladyzhenskaya-Konstante und damit bei stabilen Elementen nur bedingt abhängig von der Diskretisierung. Das heißt, daß bei ungünstigen Gebieten wie beispielsweise den in [Kef97] untersuchten langgestreckten Kanälen, prinzipiell schlechte Konvergenzraten zu erwarten sind. Es steht zu vermuten, daß dies mehr oder weniger auf alle iterativen Löser der Stokes-Gleichungen zutrifft, also beispielsweise auch auf Mehrgitterverfahren mit dem Vanka-Glätter oder elementweiser Relaxation. Allerdings können die Werte des Standard-Uzawa ganz erheblich verbessert werden.

### 5.1 Uzawa als indefiniter Löser

Das Uzawa-Verfahren [AHU58] dient ganz allgemein zur Lösung indefiniter linearer Gleichungssysteme mit Nebenbedingungen der Form

$$\begin{aligned} Ax + B^T y &= a, \\ Bx &= b. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Falls  $A$  invertierbar ist, kann  $x$  eliminiert werden und man erhält

$$BA^{-1}B^T y = BA^{-1}a \Leftrightarrow b, \tag{5.2}$$

wobei die Matrix  $BA^{-1}B^T$  positiv definit ist, in der Praxis aber nicht explizit berechnet wird. Stattdessen wird ein Startwert  $(x_0, y_0)$  iterativ verbessert mit der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} Ax_k &= a \Leftrightarrow B^T y_{k-1}, \\ y_k &= y_{k-1} + \alpha (Bx_k \Leftrightarrow b). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wie bei allen linearen Iterationsverfahren genügt es, zur Analyse der Konvergenzeigenschaften verschwindende rechte Seiten anzunehmen und sich so einige Schreiarbeit zu

ersparen. Die exakte Lösung ist dann logischerweise der Nullvektor und die  $(x_k, y_k)$  geben direkt den Fehler an. Wir sehen nach Elimination der  $x_k$  sofort

$$y_k = (I \Leftrightarrow \alpha BA^{-1}B^T) y_{k-1}, \quad (5.4)$$

und stellen fest, daß es sich um eine einfache Richardson-Iteration der Systemgleichung

$$BA^{-1}B^T y = 0$$

handelt, entsprechend einem Gradientenverfahren fester Schrittweite. Wir schließen, daß das Verfahren konvergiert für

$$0 < \alpha < \frac{2}{\|BA^{-1}B^T\|}.$$

Interessanterweise kann das Uzawa-Verfahren auch für das kontinuierliche Problem (1.5) sinnvoll definiert werden. Dazu schreiben wir die Iterationsvorschrift in der Form

$$\begin{aligned} (D\vec{u}_k, D\vec{v}) &= (\vec{f}, \vec{v}) + (p_k, \operatorname{div} \vec{v}) & \forall \vec{v} \in H_0^{1,2}, \\ (p_{k+1}, q) &= (p_k, q) \Leftrightarrow \alpha (\operatorname{div} \vec{u}_k \Leftrightarrow g, q) & \forall q \in L_0^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

woraus man unmittelbar sieht, daß diese Iteration für  $0 < \alpha < 2$  konvergiert. Die Diskretisierung dieses kontinuierlichen Uzawa-Verfahrens führt analog zu (5.4) zu der Iterationsvorschrift

$$y_k = (I \Leftrightarrow \alpha M^{-1}BA^{-1}B^T) y_{k-1}$$

mit der Massenmatrix der Druckfunktionen  $M$ . Diese Massenmatrix ist aber in der Regel von kleiner Kondition und mehr oder minder lediglich eine Skalierung mit  $h^2$ , so daß sich dadurch im Konvergenzverhalten kein qualitativer Unterschied ergibt. Es ist nur leichter, den Iterationsparameter  $\alpha$  sinnvoll zu wählen, da keine Kenntnis über die Norm von  $BA^{-1}B^T$  erforderlich ist. Tatsächlich ist hier die Wahl von  $\alpha \approx 1,5$  in den meisten Fällen optimal oder hinreichend nahe am Optimum.

Eine andere Verbesserung ersetzt die Richardson-Iteration durch ein echtes Gradientenverfahren, indem die Schrittweite  $\alpha_k$  iterationsabhängig gewählt wird nach der Vorschrift

$$\alpha_k = \frac{y_k^T y_k}{y_k^T BA^{-1}B^T y_k}. \quad (5.6)$$

Allerdings stellt sich heraus, daß auch diese Verbesserung nur marginal ist und gerade bei schwierigeren Gebieten kaum Verbesserung bringt, außer daß auch hier der Schrittweitenparameter automatisch gewählt wird und nicht vom Benutzer "erraten" werden muß.

Eine Beschleunigung um einen kleinen Faktor erhält man in der Regel, indem man die Geschwindigkeits-Poisson-Probleme der Stokes-Gleichungen durch die penalisierte Variante (3.10) ersetzt (Augmented-Lagrangian-Methode, [FG83]). Im Unterschied zur ausschließlichen Lösung des penalisierten Problems dient hier der Strafterm lediglich zur Konvergenzbeschleunigung und der Parameter  $t$  kann deshalb erheblich kleiner gewählt werden.

Dadurch bleibt die Kondition der Systemmatrix einigermaßen begrenzt und ist auch iterativ noch recht gut zu lösen. Wie in [Kef97] festgestellt, kann für  $t \approx 1 \dots 4$  eine etwa doppelt bis dreimal so schnelle Konvergenz erwartet werden wie ohne Penalisierung. Insbesondere kann durch eine solche Penalisierung die Konvergenz der *Geschwindigkeiten* erheblich beschleunigt werden, da durch den Strafterm diese sehr schnell (nahezu) divergenzfrei werden. Der *Druck* hingegen erfährt nur die angegebene mäßige Beschleunigung.

## 5.2 CG-Uzawa

Wie eigentlich immer bei langsamer Konvergenz empfiehlt es sich, zu konjugierten Richtungen überzugehen. Dazu wenden wir das klassische CG-Verfahren auf die reduzierte Systemgleichung (5.2) an, wobei wir die Matrix  $BA^{-1}B^T$  selbstverständlich nicht explizit bilden (sie ist in der Regel voll besetzt), sondern die im Algorithmus erforderliche Multiplikation mit dieser Matrix in drei Einzelschritte aufteilen: zunächst die Multiplikation mit  $B^T$ , dann die Lösung des Gleichungssystems mit der Matrix  $A$  und anschließend erneute Multiplikation mit  $B$ . Ansonsten bleibt das CG-Verfahren unverändert und gestaltet sich ausführlich zusammengeschrieben wie folgt.

Sei ein  $y_0$  gegeben. Wir berechnen  $Ax_1 = a \Leftrightarrow B^T y_0$  und die beiden Hilfsvektoren  $d_1 = \Leftrightarrow q_1 = Bx_1 \Leftrightarrow b$ . Die Iteration verläuft dann für  $k = 1, 2, \dots$  in den Schritten

$$\begin{aligned} p_k &= B^T d_k, \\ Ah_k &= p_k, \\ \alpha_k &= \frac{d_k^T q_k}{p_k^T h_k}, \\ y_k &= y_{k-1} \Leftrightarrow \alpha_k d_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k h_k, \\ q_{k+1} &= b \Leftrightarrow Bx_{k+1}, \\ \beta_k &= \frac{q_{k+1}^T q_{k+1}}{q_k^T q_k}, \\ d_{k+1} &= \Leftrightarrow q_{k+1} + \beta_k d_k. \end{aligned}$$

Der aufwendigste Teil dieser Iteration ist die Lösung eines Gleichungssystems mit der Matrix  $A$  in jedem Schritt. Je nach Typ der Matrix können hierbei verschiedene Verfahren zum Einsatz kommen, angefangen von direkten Verfahren über CG bis hin zu Mehrgitteralgorithmen. Das Verfahren konvergiert auch noch mit nur wenig schlechterer Geschwindigkeit, wenn die Lösung dieses Gleichungssystems in jedem Schritt tatsächlich nur näherungsweise erfolgt, solange diese Näherung “hinreichend” gut ist. Nähere Ausführungen zu diesem inexakten Uzawa-Verfahren und eine präzise Definition von “hinreichend” finden sich in [EH94].

Umgekehrt gibt es auch die Möglichkeit, den Uzawa-Algorithmus mit einer einfach zu invertierenden Näherungsmatrix  $C \approx A$  anzuwenden, nach Konvergenz den Defekt zu

berechnen und dann wiederholt die Defektgleichung – erneut mit Uzawa – zu lösen. So entspricht der Uzawa-Algorithmus einer inneren Iteration, die äußere Iteration zur Defektverbesserung kann dann wieder eine Richardson-Iteration, ein Gradientenverfahren oder ebenfalls CG sein. Dies ist allerdings offensichtlich nur dann sinnvoll, wenn das Uzawa-Verfahren schnell konvergiert und eine gut zu approximierende Matrix  $A$  vorliegt. Wenn  $A$  selbst einigermaßen genau und schnell gelöst werden kann, empfiehlt sich eher der vorher genannte Ansatz mit einer approximativen Lösung von  $A$  in jedem Uzawa-Schritt. Falls möglich, können hierbei sinnvollerweise auch etwas aufwendigere Vorkonditionierungen wie eine unvollständige Cholesky-Zerlegung oder ähnliche eingesetzt werden, da  $A$  mehrmals gelöst werden muß und die Kosten der Erstellung des Vorkonditionierers so verteilt werden.

Aus der Systemgleichung (5.2) können wir sofort die Konvergenzgeschwindigkeit des originalen Uzawa-Verfahrens wie auch der CG-Iteration ablesen. Die Kondition der Systemmatrix ist nun von der Größenordnung  $\mathcal{L}_h^{-2}$ , denn die Eigenwerte bezüglich der durch die Massenmatrix der Drücke  $M$  vermittelten Metrik liegen ja im Intervall  $[\mathcal{L}_h^2, 1]$  wie im Abschnitt (4.1) gezeigt. Die Massenmatrix  $M$  selbst hat in der Regel eine kleine Kondition und ändert hauptsächlich die Skalierung, so daß das Verhältnis der extremen Eigenwerte von  $BA^{-1}B^T$  auch in der euklidischen Metrik in der Größenordnung von  $\mathcal{L}_h^{-2}$  liegt. Das originale Uzawa-Verfahren hat somit eine Konvergenzrate in der Größenordnung

$$1 \Leftrightarrow \mathcal{L}_h^2,$$

wohingegen der CG-Uzawa-Algorithmus eine Konvergenzrate von

$$1 \Leftrightarrow \mathcal{L}_h$$

verspricht. Bei einem ungünstigen Gebiet, wie beispielsweise einem Kanal mit Seitenverhältnis 1:100 mit einer Konstanten in der Größenordnung von  $\mathcal{L}_h \approx 0,01$  erhalten wir daraus eine Verbesserung auf 230 Iterationen (CG-Uzawa) gegenüber utopischen 23000 Iterationen (Original Uzawa) für eine Dezimalstelle. Um auch bei anisotropen Diskretisierungen und sehr unterschiedlich großen Elementen ganz sicher zu gehen, daß die mögliche Konvergenzgeschwindigkeit auch erreicht wird, empfiehlt es sich, mit der Massenmatrix  $M$  vorzukonditionieren. Damit liegen die Eigenwerte in dieser Metrix – wie oben erwähnt – im Intervall  $[\mathcal{L}_h^2, 1]$  und die Konvergenzrate von mindestens  $1 \Leftrightarrow \mathcal{L}_h$  ist garantiert.

Tatsächlich ist die Konvergenz in der Praxis sogar noch erheblich besser. Mit der Eigenwertverteilung aus Abschnitt 4.3 und der Eigenschaft des CG-Verfahrens, extreme Eigenvektoren zuerst aus dem Fehler zu eliminieren, erhalten wir sogar Superkonvergenz. Nach einigen CG-Schritten (etwa 20-40) ist der Fehler in Richtung der Eigenvektoren zu den kleinsten Eigenwerten weitestgehend beseitigt und diese Eigenwerte stören die Iteration nicht weiter. Man sieht deutlich, daß die Konvergenz an dieser Stelle einen Knick macht und anschließend erheblich beschleunigt weiterläuft, denn es bleibt eine Netto-Kondition in der Größenordnung von meistens unter 30 übrig, und danach erfordert eine weitere Dezimalstelle lediglich noch etwa 10 Iterationen. Somit konnten alle bisher behandelten Gebiete mit weniger als 100 Iterationen zur Konvergenz (8 Dezimalstellen Gewinn) gebracht werden.

# Kapitel 6

## Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden ausgewählt, um die Genauigkeit der analytischen und numerischen Verfahren zur Bestimmung der Ladyzhenskaya-Konstanten zu überprüfen. Die erste Gruppe im Abschnitt 6.1 besteht aus Gebieten, für die ein exaktes Ergebnis berechnet werden kann – gegebenenfalls auf dem Umweg über die Korn- oder Friedrichs-Ungleichung –, so daß eine direkte Aussage über die Konvergenz der numerischen Verfahren möglich ist. Gleichzeitig kann über die Friedrichs-Ungleichung und Satz 14 mit der genaueren Abschätzung (2.37) oder (2.38) a priori eine Größenordnung angegeben werden, die mit dem exakten Ergebnis verglichen wird. Zur Erinnerung: die Konstanten hängen zusammen über

$$\mathcal{L}^2 = \frac{2}{K} = \frac{1}{1 + \Gamma}. \quad (6.1)$$

Die nächste Gruppe im Abschnitt 6.2 besteht aus etwas weniger synthetischen Beispielen, die eher in der Praxis auftauchen können, für die aber kein exaktes Ergebnis mehr angegeben werden kann. Wir benutzen hier wieder Satz 14 zur a priori-Abschätzung und zum Vergleich mit den numerischen Werten.

Die letzte Gruppe aus Abschnitt 6.4 schließlich umfaßt exemplarisch einige dreidimensionale Gebiete. Leider ist in drei Dimensionen keine echte Äquivalenz bekannt, so daß analytische Ergebnisse hier fehlen. Zum Vergleich ist deshalb – wo angebracht – die Konstante eines einbeschriebenen Ellipsoides nach (2.43) angegeben, die zumindest ein Gefühl für die Größenordnung vermittelt. Dennoch sind die Ergebnisse interessant und fordern eine weitere Untersuchung in dieser Richtung heraus.

Bei den Finite-Elemente-Rechnungen zur Bestimmung der Babuška-Brezzi-Konstanten verwenden wir bei allen nichtglatten Gebieten ein ganz einfaches adaptives Verfahren zur Verbesserung der Genauigkeit. Als Referenzfunktion dient hierbei die Eigenfunktion zum kleinsten nichtverschwindenden Eigenwert. Dazu wird für jede Kante im Gebiet als heuristischer Indikator das Produkt aus Kantenlänge und Tangens des Knickwinkels der diskreten Funktion senkrecht zur Kante gebildet, und die 25% Kanten mit dem größten Indikator werden halbiert. Damit keine allzu ungünstige Triangulierung entsteht, werden Dreiecke mit zwei zu halbierenden Kanten regulär verfeinert und alle Dreiecke mit einem stumpfen Innenwinkel durch diesen Winkel halbiert. Schließlich wird für die entstehende Triangu-

lierung durch Einfügen einiger weiterer Eckpunkte und Umlegen von Kanten wieder die Delauny-Eigenschaft sichergestellt. Wie an den Beispielen zu sehen ist, liefert dieses adaptive Verfahren nach einigen Verfeinerungsstufen ähnlich genaue Ergebnisse wie eine reguläre Verfeinerung mit insgesamt erheblich mehr Unbekannten, so daß der Rechenaufwand für eine gegebene Genauigkeit um ein Vielfaches reduziert wird. Da damit die Angabe einer sinnvollen Maschenweite  $h$  sehr schwierig wird, ist jeweils sowohl die kleinste Kantenlänge angegeben als auch die Gesamtzahl der Dreiecke, aus der eine mittlere Maschenweite  $\bar{h}$  berechnet werden kann, wobei die angegebene Maschenweite  $h_{\min}$  auf eine Gesamtfläche des jeweiligen Gebietes von 1 normiert ist.

Die Auswahl der Finiten Elemente beruht auf den Kriterien Rechenaufwand und Genauigkeit. Die implementierten Varianten wurden bereits in Abschnitt 3.1 aufgeführt. Zur Approximation des Druckes stehen demnach stückweise konstante, lineare und quadratische Polynome zur Verfügung, wobei die beiden letzteren stetig angesetzt sind. Unstetige lineare Elemente wurden ebenfalls getestet, waren aber im gegebenen Anwendungsfall nicht konkurrenzfähig. Für die Geschwindigkeiten ist das lineare nichtkonforme Element (Crouzeix-Raviart) oder stückweise quadratische und kubische Polynome – jeweils durch die passenden Bubbles angereichert – am besten geeignet. Die Bubbles sorgen für eine deutliche Verbesserung der berechneten Druckfunktionen, die ohne Bubbles noch etwas oszillieren. Diese Oszillationen sind schwache Resterscheinungen der Schachbrettinstabilität, die auch bei bereits stabilen Elementen auftauchen und die Konstante vor der Approximationsordnung etwas verschlechtern. Die Anreicherung mit den Bubbles unterbindet diese Oszillationen weitestgehend und verbessert damit die Genauigkeit etwa entsprechend einer zweimaligen regulären Verfeinerung.

Beim Limaçon und den Gebieten aus Abschnitt 6.2 sind teilweise auch Eigenfunktionen abgebildet, um ihr qualitatives Verhalten zu demonstrieren. Diese sind jeweils Druckeigenfunktionen, bestimmt nach (4.3) mit linearen Druckelementen und kubischen Geschwindigkeiten in zwei Dimensionen und mit quadratischen Geschwindigkeiten in drei Dimensionen. Die Druckeigenfunktionen sind sehr viel anschaulicher als die zugehörigen Geschwindigkeiten, berechnet entweder über die Stokesgleichung oder direkt nach dem Eigenproblem (4.4), und werden ihnen deshalb vorgezogen.

## 6.1 Exakte Beispiele

### 6.1.1 Kreis

Der Kreis ist im Zusammenhang mit der Ladyzhenskaya-Konstante das einfachste Gebiet. Er wurde zusammen mit der dreidimensionalen Kugel bereits im Punkt 2.4.3 behandelt, mit dem Ergebnis, daß  $\lambda = 2$  der einzige Eigenwert des interessanten Raumes  $V_\beta$  ist. Daher sind alle harmonischen Funktionen Eigenfunktionen des Problems (2.15). Die Abschätzung mittels (2.37) liefert  $\Gamma = 1$ , also die richtige Konstante  $\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Die numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.1 und Abbildung 6.1 gelten für das weniger stabile  $P_2P_3$ -Element und zeigen wie erwartet eine kleine Verteilung der diskreten Eigenwerte

|                 |       |        |        |        |         |         |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|
| $h_{\min}$      | 0,105 | 0,0538 | 0,0274 | 0,0139 | 0,00694 | 0,00346 |
| $N_{\Delta}$    | 124   | 510    | 1738   | 5246   | 17238   | 28066   |
| $\mathcal{L}_h$ | 0,469 | 0,514  | 0,494  | 0,510  | 0,532   | 0,554   |

Tabelle 6.1: Konstanten für den Kreis

um den Punkt  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  mit dem minimalen Wert  $\mathcal{L}_h \approx 0,47$ . Mit dem besseren  $P_1P_3$ -Element ergibt sich für alle betrachteten Diskretisierungseinheiten  $\mathcal{L}_h \approx 0,707$ , mit einer Abweichung von unter einem halben Promille von  $\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , selbst für die größte Triangulierung. Eine adaptive Verfeinerung ist für dieses Problem weder erforderlich noch sinnvoll.

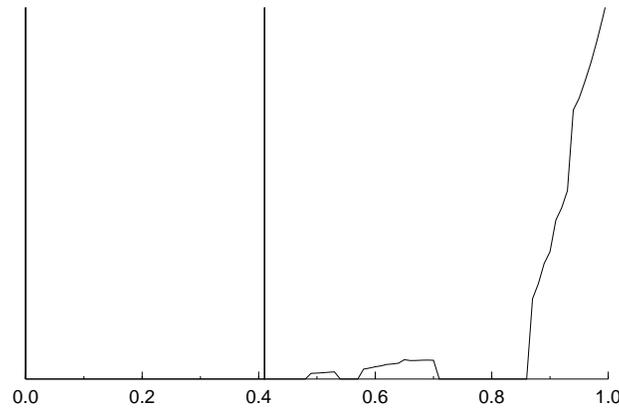


Abbildung 6.1: Diskrete Eigenwertverteilung beim Kreis

### 6.1.2 Ellipse

Die Abschätzung mittels (2.38) liefert  $\Gamma = \frac{b^2}{a^2}$ , also auch hier die richtige Konstante  $\mathcal{L} = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$  wie durch Gleichung (2.42) aus Punkt 2.4.3 bekannt. Die numerischen Ergebnisse sind hier sehr gut, denn die Eigenfunktion zum kleinsten nichtverschwindenden Eigenwert ist die lineare Funktion  $x$  (für den Druck), die mit allen verwendeten Elementen und Triangulierungen exakt dargestellt werden kann. Die zugehörige Funktion für die Geschwindigkeiten ist

$$\vec{u} = \left( 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und kann zumindest ab den quadratischen Elementen ebenfalls exakt dargestellt werden, so daß die Werte aus Tabelle 6.2 sich mit zunehmend feinerer Diskretisierung nicht mehr verbessern (lediglich die Randapproximation wird noch etwas genauer). Auch hier zeigt sich wieder die hervorragende Eignung des  $P_1P_3$ -Elementes für diese Art von Problem.

| $\frac{b}{a}$           | 1     |       | 2     |       | 4     |       | 8     |       | 16     |        |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $h_{\min}$              | 0,027 | 0,014 | 0,010 | 0,005 | 0,029 | 0,017 | 0,022 | 0,012 | 0,0008 | 0,0001 |
| $N_{\Delta}$            | 1738  | 5246  | 4446  | 13308 | 2452  | 7284  | 4326  | 13144 | 850    | 4286   |
| $\mathcal{L}_h(P_1P_3)$ | 0,707 | 0,707 | 0,447 | 0,447 | 0,243 | 0,243 | 0,124 | 0,124 | 0,0624 | 0,0624 |
| $\mathcal{L}_h(P_2P_3)$ | 0,494 | 0,510 | 0,410 | 0,421 | 0,243 | 0,243 | 0,124 | 0,124 | 0,0624 | 0,0624 |
| $\mathcal{L}$           | 0,707 |       | 0,447 |       | 0,243 |       | 0,124 |       | 0,0624 |        |

Tabelle 6.2: Konstanten für Ellipsen verschiedener Seitenverhältnisse

Am Beispiel der Ellipse mit einem Achsenverhältnis von 1:8 wird in Abbildung 6.2 die Effektivität des schnellen Stokes-Lösers aus Kapitel 5 demonstriert. Sowohl der Standard-Uzawa-Algorithmus wie auch die durch konjugierte Richtungen verbesserte CG-Variante sind mit der Massenmatrix vorkonditioniert. Es ist sehr deutlich zu sehen, daß bereits für dieses relativ unkritische Gebiet der schnelle Löser dem klassischen Verfahren weit überlegen ist. Den Zusatzaufwand pro Iteration macht hierfür lediglich der Speicherbedarf von drei zusätzlichen Vektoren und der Rechenaufwand von drei Skalarprodukten und einer Vektoroperation aus, was im Vergleich zur Lösung des Geschwindigkeits-Poisson-Problems nur von untergeordneter Bedeutung ist. Daher besteht keinerlei Veranlassung, den normalen Uzawa-Algorithmus zu verwenden, zumal das CG-Verfahren nur minimal aufwendiger zu implementieren ist. Konkret besteht der Unterschied im Programm aus ganzen acht Zeilen. Das Gradientenverfahren entspricht abgesehen von den ersten paar Iterationen ziemlich genau dem Standard-Uzawa.

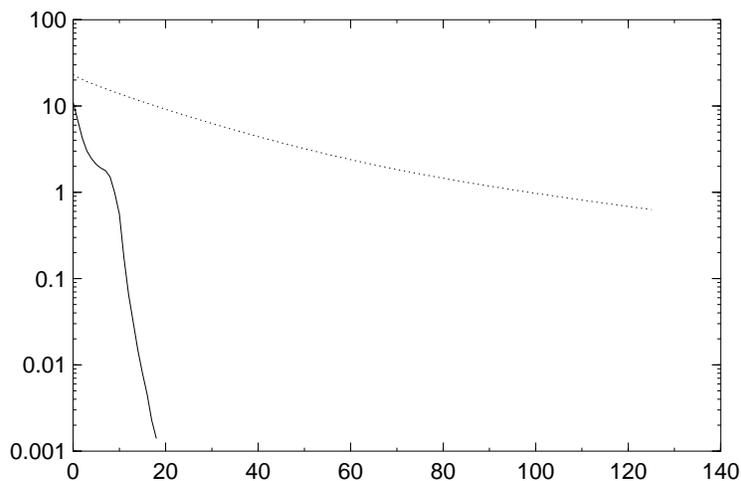


Abbildung 6.2: Konvergenz bei der 1:8-Ellipse, gestrichelt: Standard-Uzawa nach Abschnitt 5.1, durchgezogen: CG-Uzawa nach Abschnitt 5.2

### 6.1.3 Ring

Der konzentrische Kreisring wird als Spezialfall einer allgemeinen konfokalen Ellipsenschale in [Daf68] für das Korn-Problem (2.20) behandelt. Die Prozedur besteht aus einem Ansatz zur generischen Repräsentation der Eigenfunktionen aus harmonischen Funktionen, die wiederum aus den Kugelfunktionen aufgebaut werden. Das entstehende unendliche Gleichungssystem ist nur schwach gekoppelt und gestattet deshalb prinzipiell die Bestimmung der Eigenfunktionen und Eigenwerte.

Im Fall des Ringes werden die harmonischen Funktionen zur Vereinfachung der Notation in komplexen Potenzen entwickelt, wobei nach einigen Umformungen ein charakteristisches Eigenwertproblem mit den Eigenwerten

$$L_m^2 = \frac{m(m+2) \left(\frac{1}{r} \leftrightarrow r\right)^2}{\left(\frac{1}{r^m} \leftrightarrow r^m\right) \left(\frac{1}{r^{m+2}} \leftrightarrow r^{m+2}\right)}$$

entsteht, wobei  $r = \frac{R_1}{R_2}$  das Verhältnis von innerem zu äußerem Radius ist. Die Korn-Konstante erhält Dafermos daraus zu

$$K = \frac{4}{1 \leftrightarrow \sup_m \{L_m\}}.$$

Durch Ableiten sieht man leicht, daß die Funktion

$$\frac{m}{r^{-m} \leftrightarrow r^m}$$

– interpretiert über kontinuierlichem  $m$  – streng monoton wächst und die Menge  $\{L_m\}$  ihr Maximum (nicht nur Supremum) deshalb bei  $L_1 = \frac{3}{\frac{1}{r^2} + 1 + r^2}$  annimmt (und zwar für beliebiges  $0 < r < 1$ , nicht nur für  $r \leq \frac{1}{e}$  wie in [Daf68] behauptet). Korn's Konstante ist folglich

$$K = \frac{4}{1 \leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{r^2} + 1 + r^2}}}.$$

Falls Satz 6 auch für Gebiete mit mehrfachem Zusammenhang wie hier gültig wäre, ergäbe sich daraus die Ladyzhenskaya-Konstante zu

$$\mathcal{L}' = \sqrt{\frac{1 \leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{r^2} + 1 + r^2}}}{2}}.$$

Die Abschätzung dieses Gebietes mit der Ungleichung von Friedrichs nach Satz 14 ist ziemlich schwierig, da der Kreisring nicht direkt sternförmig ist. Er ist daher in Segmente aufzuteilen. Für diese kann die Konstante berechnet werden, die Segmente müssen dann über Satz 12 zusammengefügt werden und schließlich wird die letzte Lücke über Satz 8 geschlossen. Selbst wenn die Anzahl der Segmente und ihre Überlappung optimal gewählt

werden, ist die Abschätzung ziemlich unbrauchbar, da Satz 12 nur sehr grob abschätzt und in der Regel um einen Faktor  $2 \Leftrightarrow 5$  zu ungünstig ist. Die Resultate finden sich in Tabelle 6.3 aufgelistet.

| $\frac{R_2}{R_2-R_1}$ | 2                 |       | 4                 |       | 8                 |       |
|-----------------------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|
| $h_{\min}$            | 0,016             | 0,008 | 0,016             | 0,008 | 0,021             | 0,012 |
| $N_{\Delta}$          | 2176              | 5628  | 4048              | 12330 | 2754              | 7174  |
| $\mathcal{L}_h$       | 0,187             | 0,187 | 0,082             | 0,082 | 0,038             | 0,038 |
| $\mathcal{L} \geq$    | 3,6 <sub>-4</sub> |       | 1,6 <sub>-5</sub> |       | 6,5 <sub>-7</sub> |       |
| $\mathcal{L}'$        | 0,349             |       | 0,162             |       | 0,077             |       |

Tabelle 6.3: Konstanten für Ringe mit verschiedenen Lochdurchmessern

Hier tritt nun ein sehr interessanter Fall auf, denn die Babuška-Brezzi-Konstanten unterscheiden sich von den aus der Korn-Konstanten abgeleiteten Ladyzhenskaya-Konstanten  $\mathcal{L}'$  um ziemlich genau einen Faktor  $\frac{1}{2}$ . Da die ermittelten  $\mathcal{L}_h$  aber schon für sehr viel größere Diskretisierungen schnell gegen die angegebenen Grenzwerte konvergieren, und zwar unabhängig vom verwendeten Element, liegen sie wohl sehr nahe an der tatsächlichen Ladyzhenskaya-Konstante und Satz 6 trifft bei mehrfachem Zusammenhang folglich nicht mehr zu. Dies ist insofern plausibel, als beim Ladyzhenskaya-Problem das Aufschneiden zu einfachem Zusammenhang den Geschwindigkeitsraum echt verkleinert, indem ein zusätzlicher Nullrand entsteht. Beim Korn-Problem dagegen gilt keine solche Inklusion. Zum einen treten zwar zusätzliche natürliche Randbedingungen des Typs (2.22) beiderseits des Schnittes auf, was den Raum verkleinert, zum anderen müssen die Funktionen über den Schnitt hinweg nicht mehr stetig sein, was den Raum wieder vergrößert. Deshalb unterscheiden sich bei diesem Aufschneidevorgang die Probleme von Ladyzhenskaya und Korn grundsätzlich, so daß die Differenz erklärlich ist.

Die Konvergenz der numerischen Ergebnisse bei feineren Gittern dagegen ist auch hier wieder sehr gut, da die entscheidenden Funktionen relativ glatt und damit gut approximierbar sind. Im Gegensatz zu Kreis und Ellipse sind die kritischen Drücke und Geschwindigkeiten jedoch nicht mehr in den diskreten Räumen enthalten, so daß eine Verfeinerung die berechneten Werte noch leicht verbessert. Eine Approximationsordnung kann jedoch nicht sinnvoll bestimmt werden, da die Konvergenz mit abnehmendem  $h$  so schnell erfolgt, daß sich die berechneten Werte nicht mehr signifikant unterscheiden.

### 6.1.4 Limaçon

Ein etwas weniger triviales Gebiet ist Pascals Limaçon. Es geht aus dem (komplexen) Einheitskreis hervor durch Anwendung der Abbildungsvorschrift

$$\xi \rightarrow \xi + \frac{\epsilon}{2}\xi^2$$

und läßt sich in Polarkoordinaten auch beschreiben durch die Funktion

$$r = 1 + \epsilon \cos \theta \quad 0 \leq \epsilon \leq 1, \quad (6.2)$$

wobei man für  $\epsilon = 0$  den Kreis und für  $\epsilon = 1$  eine Kardioide erhält. Beispiele für verschiedene Parameter  $\epsilon$  sind in Zeichnung 6.3 dargestellt.

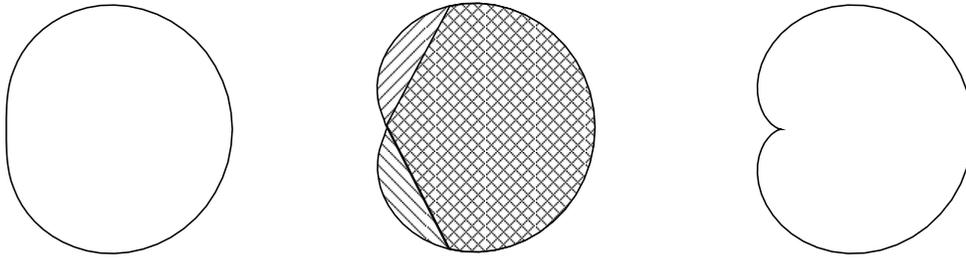


Abbildung 6.3: Limaçon mit  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{3}{4}$  und  $\epsilon = 1$  (Kardioide)

Prinzipiell kann man nach [HK71] für jedes Gebiet, das aus dem Einheitskreis durch eine rationale Abbildung hervorgeht, – wenn auch ziemlich aufwendig – das Spektrum von (2.20) exakt berechnen. Für das Limaçon erhalten Horgan und Knowles (in der hier verwendeten Notation)

$$K = \frac{8}{2 \leftrightarrow \epsilon^2},$$

und folglich für die Ladyzhenskaya-Konstante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \leftrightarrow \epsilon^2}. \quad (6.3)$$

Die direkte Approximation mit Satz 14 und der Darstellung 6.2 liefert die Schranke

$$\mathcal{L} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2 \leftrightarrow 2\epsilon}, \quad (6.4)$$

was offensichtlich nur für kleines  $\epsilon$  eine brauchbare Näherung darstellt. Setzen wir das Limaçon dagegen, wie im mittleren Beispiel von Zeichnung 6.3, aus zwei Teilgebieten mittels

| $\epsilon$             | 0,5   |       | 0,75  |       | 1     |       |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h_{\min}$             | 0,007 | 0,003 | 0,004 | 0,002 | 0,004 | 0,002 |
| $N_{\Delta}$           | 2946  | 10558 | 3320  | 15944 | 2270  | 4790  |
| $\mathcal{L}_h$        | 0,661 | 0,661 | 0,600 | 0,599 | 0,503 | 0,501 |
| $O(h_{\min}^{\alpha})$ | 1,81  |       | 1,40  |       | 0,72  |       |
| (6.4)                  | 0,500 |       | 0,354 |       | 0     |       |
| Zwei Gebiete           | 0,314 |       | 0,258 |       | 0,160 |       |
| $\mathcal{L}$          | 0,661 |       | 0,599 |       | 0,500 |       |

Tabelle 6.4: Konstanten und Abschätzungen für das Limaçon

Satz 12 zusammen, so erhalten wir nach einigem Rechenaufwand die etwas bessere Abschätzung aus der Tabelle 6.4, die zwar für mäßige Werte von  $\epsilon$  nicht sehr viel gewinnt, aber dafür für  $\epsilon \rightarrow 1$  auch nicht verschwindet wie (6.4).

Die Konvergenzrate mit zunehmender Verfeinerung der Triangulierung ist – zumindest für den untersuchten Bereich von  $h$  – offensichtlich abhängig von der Glätte der Grenzfunktion, die wiederum abhängig von dem Parameter  $\epsilon$  und zunehmend weniger regulär wird für  $\epsilon \rightarrow 1$ . Interessant sind bei diesem Gebiet auch die kritischen Eigenfunktionen. In Abbildung 6.4 ist die (Druck-) Eigenfunktion zum niedrigsten nichtverschwindenden Eigenwert der Kardioide ( $\epsilon = 1$ ) dargestellt. Man sieht deutlich die Singularität an der einspringenden Ecke.

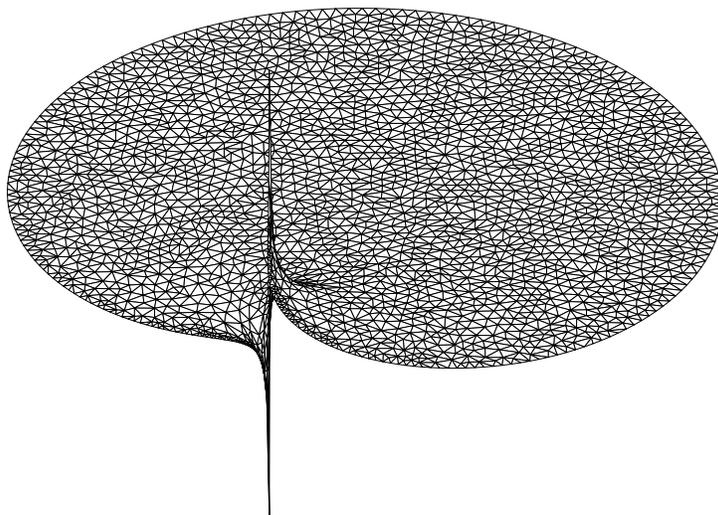


Abbildung 6.4: Druckeigenfunktion des niedrigsten Eigenwerte bei der Kardioide

## 6.2 Näherungsergebnisse

### 6.2.1 n-Eck

Das reguläre  $n$ -Eck läßt sich nach beiden Seiten abschätzen, denn zum einen kann mit Satz 14 eine untere Schranke für  $\mathcal{L}$  angegeben werden, zum anderen resultiert aus den Ecken nach Satz 13 auch eine obere Schranke. Für die untere Schranke besonders geeignet ist die Form (2.38), die zusammen mit (2.32) nach einigen Umformungen die Einschachtelung

$$\sqrt{\frac{1 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{n}}{2}} \leq \mathcal{L} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 \Leftrightarrow \frac{n \sin \frac{2\pi}{n}}{\pi (n \Leftrightarrow 2)} \right)}$$

gestattet. Für einige kleine  $n$  sind diese Schranken zusammen mit den numerischen Werten in Tabelle 6.5 angegeben. Mit angegeben ist außerdem die numerische Konvergenzordnung mit zunehmender Gitterfeinheit und der für  $h = 0$  extrapolierte Wert der Babuška-Brezzi-Konstante. Hier wird erstmals deutlich, daß für die noch rechenbaren Gitterfeinheiten die Werte nicht ganz so nahe an den erwarteten kontinuierlichen Konstanten liegen. Dies ist auf die hier auftretenden Eckensingularitäten zurückzuführen, die notwendigerweise von einem regulären Element nur begrenzt erfaßt werden können. Es wird aber deutlich, daß wohl eher der obere Grenzwert der Einschachtelung nahe an der wahren Ladyzhenskaya-Konstante liegt.

| $n$                    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h_{\min}$             | 0,023 | 0,018 | 0,016 | 0,018 | 0,015 | 0,015 | 0,015 |
| $N_{\Delta}$           | 3927  | 6360  | 7591  | 6144  | 8686  | 9184  | 9243  |
| $\mathcal{L}_h$        | 0,323 | 0,458 | 0,527 | 0,569 | 0,595 | 0,614 | 0,628 |
| $O(h_{\min}^{\alpha})$ | 0,26  | 0,28  | 0,31  | 0,32  | 0,36  | 0,41  | 0,49  |
| $\mathcal{L}_0$        | 0,302 | 0,439 | 0,508 | 0,555 | 0,578 | 0,601 | 0,614 |
| $\mathcal{L} \geq$     | 0,259 | 0,383 | 0,454 | 0,500 | 0,532 | 0,556 | 0,574 |
| $\mathcal{L} \leq$     | 0,294 | 0,426 | 0,498 | 0,542 | 0,571 | 0,592 | 0,607 |

Tabelle 6.5: Konstanten und Abschätzungen für das  $n$ -Eck

Bis  $n = 8$  sind die aus den Ecken resultierenden kritischen Funktionen wie in Abbildung 6.5 noch deutlich zu sehen, abgesetzt vom Kontinuum, das kurz vor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  beginnt. Allerdings werden sie mit zunehmendem  $n$  weniger ausgeprägt und verschwinden ab  $n = 9$  in den numerisch etwas verzerrten kontinuierlichen Eigenfunktionen um den Kontinuumswert. Dies gilt für das  $P_1P_3$ -Element, bei nicht ganz so extrem stabilen Elementen verschwinden die Eckensingularitäten teilweise bereits beim Fünfeck. Genaugenommen sind natürlich auch die für die numerische Berechnung approximierten Gebiete aus Abschnitt 6.1  $n$ -Ecke, was aber bei großem  $n$  ( $n \geq 64$  wurde verwendet) nicht mehr ins Gewicht fällt.

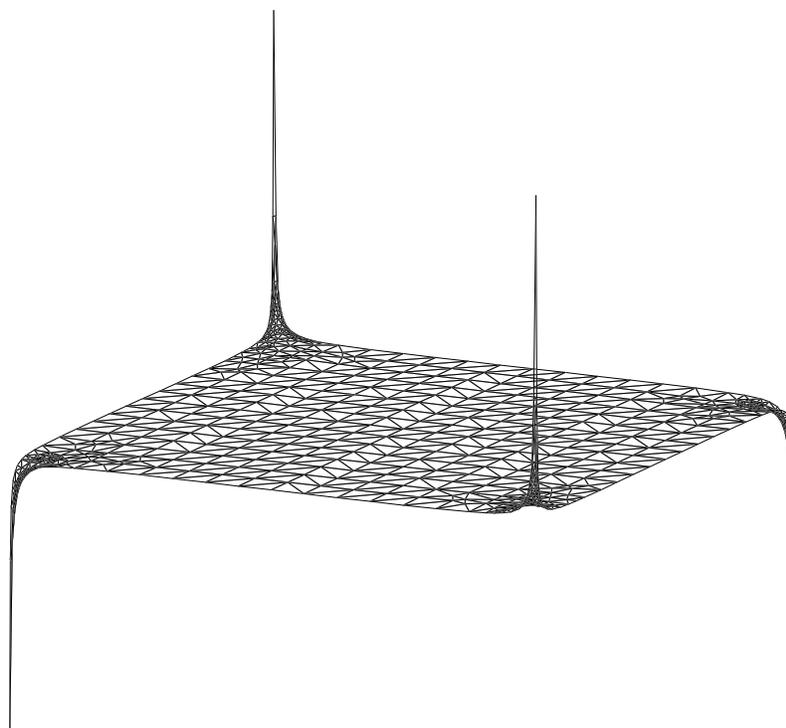


Abbildung 6.5: Kritische Druckeigenfunktion des regulären Vierecks (Quadrat)

Bei dem abgebildeten Quadrat gibt es vier nahezu gleiche Eigenwerte, die von den nächsten deutlich separiert sind. Diese gehören alle zu den Singularitäten an den vier Ecken und unterscheiden sich lediglich in der Vorzeichenverteilung an den Ecken. Der kleinste Eigenwert korrespondiert mit der abgebildeten Eigenfunktion, bei der die diagonal gegenüberliegenden Ecken jeweils gleiches Vorzeichen haben. Die nächsten beiden (identischen) Eigenwerte sind minimal größer (0,1% auf dem feinsten gerechneten Gitter) und gehören zu Eigenfunktionen, bei denen ebenfalls diagonal gegenüberliegende Ecken gleiches Vorzeichen haben, die beiden anderen Ecken jedoch keine Singularität aufweisen, sondern regulär bleiben (d. h. bei 0 wegen der Symmetrie). Der vierte Eigenwert ist etwa 1% größer und zeichnet sich durch gleiches Vorzeichen an allen vier Ecken aus.

Ähnliche Aussagen können auch für die anderen  $n$ -Ecke gemacht werden. Jedes hat  $n \Leftrightarrow 1$  ziemlich identische kleinste Eigenwerte und einen leicht größeren, der gerade den Eckensingularitäten mit gleichem Vorzeichen entspricht. Diese extrem nahe beieinander liegenden kritischen Eigenwerte sind ein Hinweis darauf, daß die singuläre Eckenfunktion aus Satz 13 dem kritischen Druck zumindest sehr nahe kommt. In diesem Falle wäre der kleinste Eigenwert genau  $n$ -fach entartet.

### 6.2.2 Rechteck

Das Rechteck nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als es ursprünglich unter anderem der Auslöser für diese Arbeit war, nachdem anhand eines langgestreckten Rechteckes in der vorausgegangenen Diplomarbeit [Keß97] die Grenzen des dort diskutierten Uzawa-Verfahrens aufgezeigt wurden. Trotz zahlreicher Bestrebungen widerstand es einer analytischen Untersuchung, und es ist nach [Gou94] auch tatsächlich kein exaktes Resultat bekannt, nicht einmal für den Spezialfall des Quadrates (der dort angegebene numerische Näherungswert von  $\mathcal{L}^2 \approx 0,22$  ist übrigens definitiv falsch).

Wegen der vier Innenwinkel von  $\frac{\pi}{2}$  gilt für alle Rechtecke  $\mathcal{L} \leq \sqrt{\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{6\pi}} \approx 0,426$ , für das Quadrat als reguläres 4-Eck außerdem  $\mathcal{L} \geq 0,383$ . Für Rechtecke mit großem Seitenverhältnis  $A$  erhalten wir aus Satz 14 eine untere Schranke von  $\mathcal{L} \geq \frac{1}{\sqrt{1+A^2+A}}$ , eine Abschätzung nach oben finden wir mit der Äquivalenz aus Satz 7. Haben wir nämlich zwei harmonisch konjugierte Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $\|f\| = \gamma \|g\|$  und  $\gamma > 1$ , so gilt  $\mathcal{L} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ . Aus den numerischen Ergebnissen vermuten wir für eine nahezu kritische Funktion

$$f = \sin x \cosh y,$$

wobei als Gebiet der einfacheren Notation wegen  $\Omega = ]\leftrightarrow_{\frac{\pi}{2}}; \frac{\pi}{2}[ \times ]\leftrightarrow_{\frac{\pi}{2A}}; \frac{\pi}{2A}[$  gewählt wurde. Die harmonisch Konjugierte hierzu ist

$$g = \cos x \sinh y,$$

(beide liegen offensichtlich in  $L_0^2$ ) und die Normen und damit die Schranke finden wir leicht zu

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{\pi}{2} \left( \sinh \frac{\pi}{A} + \frac{\pi}{A} \right), \\ \|g\|^2 &= \frac{\pi}{2} \left( \sinh \frac{\pi}{A} \leftrightarrow \frac{\pi}{A} \right), \\ \mathcal{L} &\leq \sqrt{\frac{\sinh \frac{\pi}{A} \leftrightarrow \frac{\pi}{A}}{2 \sinh \frac{\pi}{A}}}, \end{aligned}$$

wobei wir letztere durch eine Reihenentwicklung des Sinus hyperbolicus für große Seitenverhältnisse  $A$  wieder abschätzen können zu

$$\mathcal{L} \lesssim \frac{\pi}{2A\sqrt{3}}.$$

Das bedeutet für  $A > 9$  einen Fehler unter einem Prozent. Zusammen mit der oben genannten unteren Schranke können wir daher für  $A > 9$  einschachteln

$$\frac{0,498}{A} < \mathcal{L} < \frac{0,910}{A}.$$

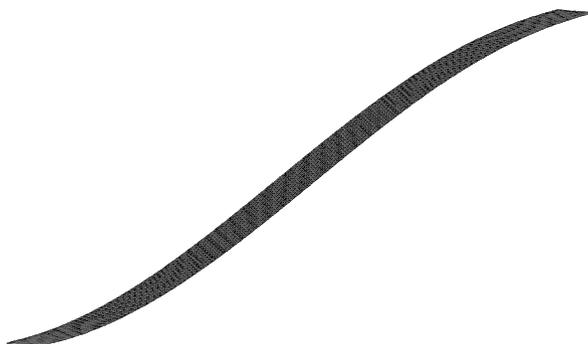
| $A$                | 1     | 3     | 10     | 30     | 60     | 100    |
|--------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $h_{\min}$         | 0,008 | 0,007 | 0,007  | 0,006  | 0,007  | 0,007  |
| $N_{\Delta}$       | 8192  | 13824 | 11520  | 15360  | 12000  | 12800  |
| $\mathcal{L}_h$    | 0,457 | 0,283 | 0,0902 | 0,0302 | 0,0151 | 0,0091 |
| $\mathcal{L} \geq$ | 0,414 | 0,162 | 0,0499 | 0,0167 | 0,0083 | 0,0050 |
| $\mathcal{L} \leq$ | 0,603 | 0,262 | 0,0902 | 0,0302 | 0,0151 | 0,0091 |

Tabelle 6.6: Konstanten und Abschätzungen für das Rechteck

Die numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.6 bestätigen diese Abschätzungen, wobei der wahre Wert wohl wieder eher an der oberen Grenze liegt. Eine Konvergenzordnung ist hier nicht angegeben, da schon für relativ kleine Seitenverhältnisse auch die größte sinnvolle Diskretisierung den kleinsten Eigenwert sehr gut trifft. Der kritische Druck, dargestellt für ein Seitenverhältnis von  $A = 30$  in Abbildung 6.6, zeigt – abgesehen von durch die Ecken hervorgerufenen kleinen Singularitäten – gerade das durch die Funktion  $f$  beschriebene Verhalten. Höhere Funktionen, die zu den nächstniedrigen Eigenwerten gehören, sind ganz ähnlich, entsprechen nämlich in etwa der Schar

$$p_n \approx \begin{cases} \sin nx \cosh ny & n \text{ ungerade} \\ \cos nx \cosh ny & n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind, wie bereits durch (4.6) angedeutet, ganzzahlige Vielfache des kleinsten Eigenwertes. Erst mit größerem  $n \gtrsim \frac{A}{4}$  wird die Abweichung von diesen Idealfunktionen deutlich sichtbar.

Abbildung 6.6: Kritische Eigenfunktion im Rechteck mit  $A = 30$ 

An diesem Beispiel sieht man sehr schön die in Abschnitt 4.3 durch (4.6) postulierte Eigenwertverteilung, die in Abbildung 6.7 dargestellt ist. Aus diesem Resultat motiviert sich

die Superkonvergenzeigenschaft des in Kapitel 5 vorgestellten schnellen Stokes-Lösers. Sie wird sehr deutlich in Abbildung 6.8, die den Fehlerverlauf während der Iteration auf einem 1:30-Rechteck darstellt. Die ersten 30 Iterationen wird der Fehler nur minimal reduziert, was auf die schon relativ kleine Babuška-Brezzi-Konstante von  $\mathcal{L}_h \approx 0,015$  zurückzuführen ist. Nach einer Übergangsphase von etwa 15 weiteren Iterationen wird der restliche Weg bis zur Konvergenzschwelle sehr schnell zurückgelegt, und zwar mit lediglich 3-4 Iterationen pro Dezimalstelle. Ein ähnliches Konvergenzverhalten liegt auch bei den anderen Gebieten vor, ist aber wegen der anderen Skalierung in den Abbildungen nicht immer so gut zu sehen. Im Unterschied dazu verharret die Standarditeration des Uzawa-Verfahrens in Abbildung 6.9 nahezu im Stillstand. Die Gesamtkonvergenz der abgebildeten 547 Schritte beträgt ziemlich genau 0,5, in recht guter Übereinstimmung mit der in Abschnitt 5.2 prognostizierten Konvergenzrate von  $1 \Leftrightarrow O(\mathcal{L}_h^2)$ . Bis zur selben Konvergenzschwelle bräuchte der Standard-Algorithmus etwa 14600 Iterationen, im Vergleich zu den 56 Iterationen des CG-Verfahrens.

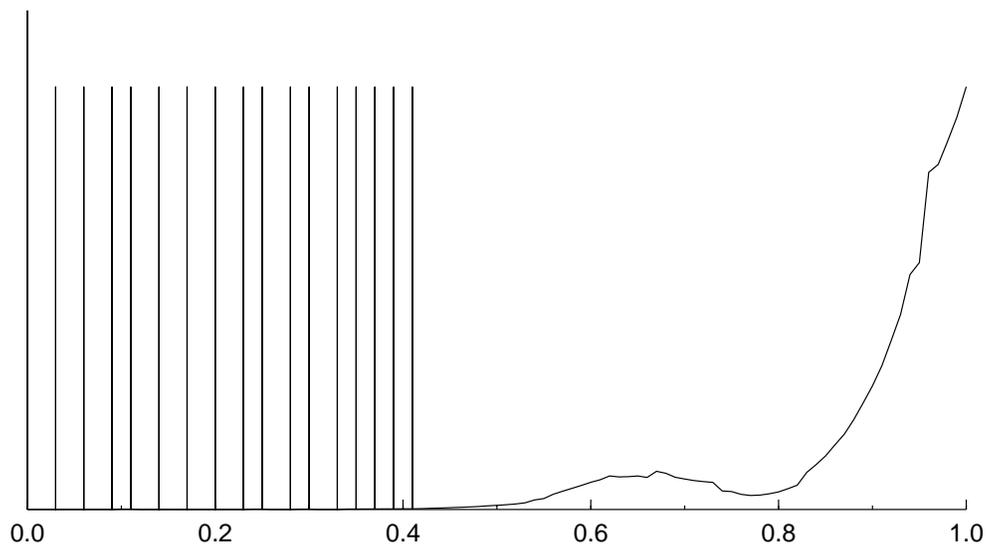


Abbildung 6.7: Eigenwertverteilung im Rechteck mit  $A = 30$

### 6.2.3 Winkel

Zur Bestätigung der durch Satz 13 vermuteten Beziehung zwischen der Ladyzhenskaya-Konstante und kleinen Innenwinkeln wurde auch ein Winkelgebiet berechnet. Die stumpfe Seite des Winkels wird dabei durch einen Kreisbogen gestaltet, wie in Abbildung 6.10 zu sehen ist, um störende Einflüsse durch eventuelle zusätzliche Eckensingularitäten auszu-

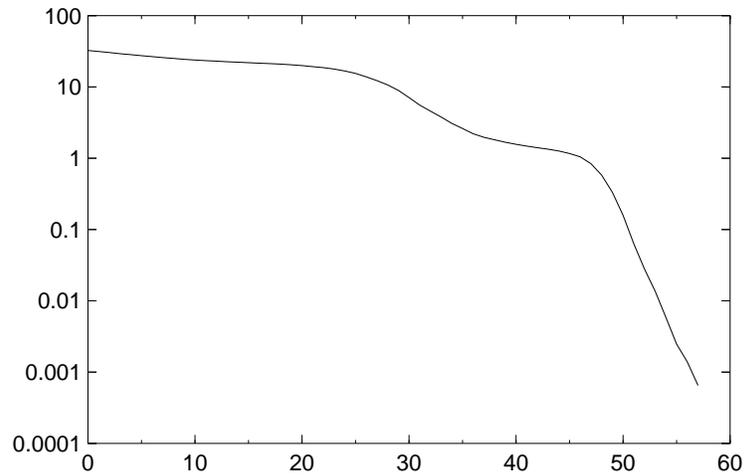


Abbildung 6.8: Konvergenz der CG-Iteration nach Abschnitt 5.2 beim 1:30-Rechteck

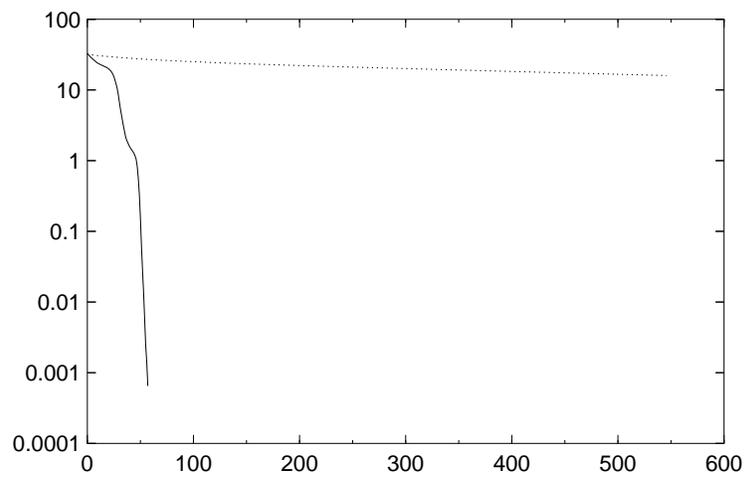


Abbildung 6.9: Konvergenz beim 1:30-Rechteck, gestrichelt: Standard-Uzawa nach Abschnitt 5.1, durchgezogen: CG-Uzawa nach Abschnitt 5.2

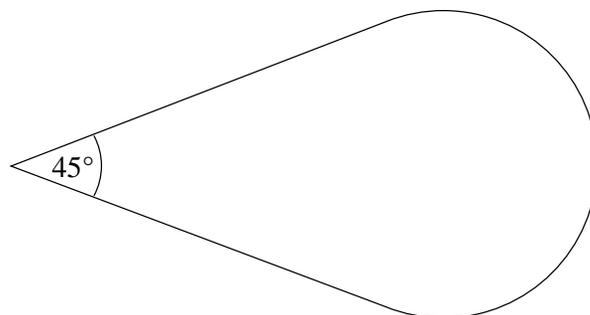


Abbildung 6.10: Winkelgebiet für  $\alpha = 45^\circ$

schließen. Die Abschätzungen durch (2.38) und (2.32) gestatten die Einschachtelung

$$\sin \frac{\alpha}{4} \leq \mathcal{L} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)}$$

mit der Näherung für kleine Winkel

$$\frac{\alpha}{4} \lesssim \mathcal{L} \lesssim \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \approx 0,288 \alpha.$$

Auch hier bestätigen die numerischen Ergebnisse aus Tabelle 6.7 wieder eher die obere Grenze, obwohl die Abschätzung bereits relativ wenig Spielraum läßt. Einen typischen kritischen Druck zeigt Abbildung 6.11, worin deutlich sichtbar wird, daß hier tatsächlich eine Eckensingularität vorliegt. Fittet man eine Potenzfunktion des Abstandes zur Winkelspitze an den Schnitt entlang der Winkelhalbierenden, um die Ordnung der Singularität zu untersuchen, so erhält man einen Exponenten  $q$  im Bereich  $1 \leq q \leq 0,85$  (ohne ausgeprägte  $\alpha$ - oder  $h$ -abhängige Tendenz), wobei zu beachten ist, daß im Kontinuierlichen nur Funktionen mit einem Exponenten  $q > 1$  noch quadratintegrabel sind. Wir erinnern hier daran, daß die obere Schranke bei Gebieten mit Ecken gerade durch einen solchen Grenzübergang von potenzartigen Funktionen mit  $q \rightarrow 1$  zustandekommt. Es zeigt sich also, daß der kritische Druck, der die Ladyzhenskaya-Ungleichung (2.6) strikt erfüllt, allenfalls noch gerade so in  $L^2$  liegt. Eine Entscheidung, ob der Grenzdruck tatsächlich nicht mehr quadratintegrabel ist oder durch kleine Einflüsse des umliegenden Randes (speziell des rund abgeschlossenen stumpfen Randes) in  $L^2$  bleibt, kann nach den vorliegenden numerischen Berechnungen nicht entschieden werden. Die bisherigen Resultate zeigen noch keinerlei Hinweise auf einen  $L^2$ -Grenzdruck und die bestimmten  $\mathcal{L}_h$  konvergieren mit abnehmendem  $h$  deshalb eher gegen die jeweilige obere Schranke, und zwar unabhängig von der Größe des Winkels. Konvergenzordnung und extrapolierte Babuška-Brezzi-Konstante sind wieder mit angegeben. Die langsame Konvergenz mit abnehmender Maschenweite ist ebenfalls ein Indiz für die Existenz einer echten Singularität.

Auch hier wird nochmals die Konvergenzgeschwindigkeit des originalen und des modifizierten Uzawa-Verfahrens gegenübergestellt. Da die Konstante deutlich besser ist als bei dem vorigen Beispiel, fällt der Unterschied nicht ganz so dramatisch aus, ist aber immer noch sehr deutlich.

#### 6.2.4 Abgerundetes Quadrat

Da die kritischen Druckfunktionen offenbar singulär oder fast singulär werden, wurde ein in Abbildung 6.13 gezeigtes abgerundetes Quadrat untersucht, das mit abnehmendem Eckenradius  $r$  eine immer bessere Approximation an das Quadrat darstellt, aber einen glatten Rand besitzt. Dabei kommen keine Viertelkreise zum Einsatz, weil die Mikhlin-Theorie einen  $C^2$ -Rand voraussetzt, um die Existenz der kritischen Druckfunktionen in  $L_0^2$  zu garantieren. Stattdessen wird die Ecke mittels einer Diagonalen abgeschnitten und durch

| $\alpha$               | 120°              | 90°               | 60°               | 45°               | 30°               | 20°               |
|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $h_{\min}$             | 0,3 <sub>-6</sub> | 2,4 <sub>-6</sub> | 1,6 <sub>-6</sub> | 1,4 <sub>-6</sub> | 1,1 <sub>-6</sub> | 7,1 <sub>-7</sub> |
| $N_{\Delta}$           | 11876             | 2467              | 2878              | 3212              | 4374              | 5942              |
| $\mathcal{L}_h$        | 0,558             | 0,436             | 0,306             | 0,231             | 0,154             | 0,103             |
| $O(h_{\min}^{\alpha})$ | 0,28              | 0,24              | 0,20              | 0,21              | 0,21              | 0,26              |
| $\mathcal{L}_0$        | 0,549             | 0,431             | 0,298             | 0,226             | 0,152             | 0,102             |
| $\mathcal{L}_{\geq}$   | 0,5               | 0,383             | 0,259             | 0,195             | 0,131             | 0,087             |
| $\mathcal{L}_{\leq}$   | 0,542             | 0,426             | 0,294             | 0,223             | 0,150             | 0,100             |

Tabelle 6.7: Konstanten und Abschätzungen für verschiedene Winkel

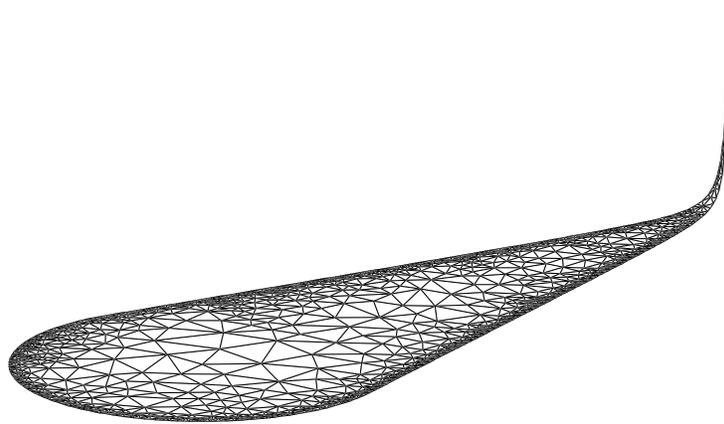
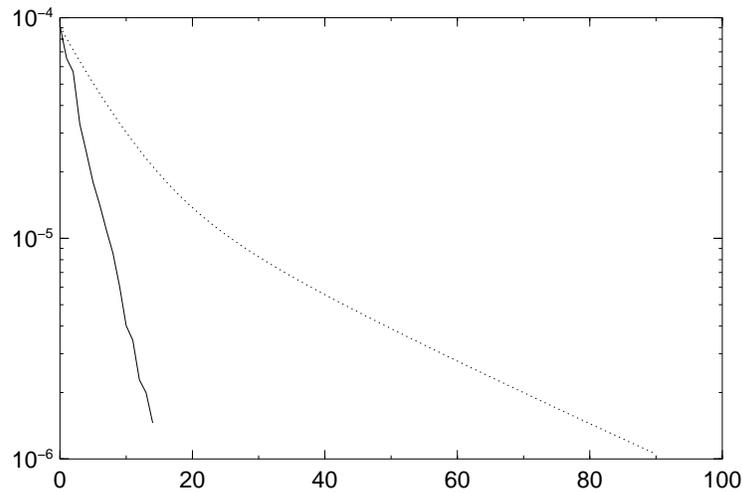
Abbildung 6.11: Kritische Druckeigenfunktion für  $\alpha = 30^\circ$ 

Abbildung 6.12: Konvergenz beim 30°-Winkel, gestrichelt: Standard-Uzawa nach Abschnitt 5.1, durchgezogen: CG-Uzawa nach Abschnitt 5.2

ein Polynom sechster Ordnung entlang dieser Diagonale ersetzt. Der Unterschied zu einem Viertelkreis ist aber optisch praktisch nicht sichtbar und beeinflusst die numerischen Randkoordinaten lediglich in der dritten Stelle.

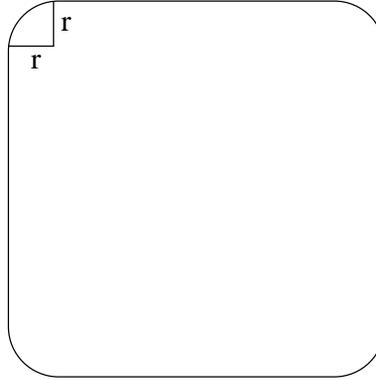


Abbildung 6.13: Abgerundetes Quadrat mit Eckenradius  $r$

In Anlehnung an die numerisch bestimmten kritischen Drücke wurde analog der Behandlung des Rechtecks in Punkt 6.2.2 als harmonische Testfunktion

$$f = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{2 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y}{(1 \Leftrightarrow x)^2 + (1 \Leftrightarrow y)^2} \Leftrightarrow \frac{1 \Leftrightarrow x + y}{(1 \Leftrightarrow x)^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{1 + x \Leftrightarrow y}{x^2 + (1 \Leftrightarrow y)^2}$$

gewählt. Nach einer etwas mühsamen Rechnung erhalten wir die Schranken aus Tabelle 6.8, wobei die untere Schranke wieder aus (2.38) folgt und nur sehr wenig von der abgeschnittenen Ecke abhängt.

| $r$                | 0,2   |        | 0,1   |       | 0,03  |        | 0,01   |         |
|--------------------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|---------|
| $h_{\min}$         | 0,019 | 0,0008 | 0,010 | 0,001 | 0,002 | 0,0003 | 0,0006 | 0,00008 |
| $N_{\Delta}$       | 318   | 15375  | 376   | 7997  | 942   | 8263   | 1765   | 16610   |
| $\mathcal{L}_h$    | 0,579 | 0,576  | 0,531 | 0,529 | 0,488 | 0,487  | 0,468  | 0,467   |
| $\mathcal{L} \geq$ | 0,333 |        | 0,329 |       | 0,322 |        | 0,315  |         |
| $\mathcal{L} \leq$ | 0,703 |        | 0,471 |       | 0,405 |        | 0,383  |         |

Tabelle 6.8: Konstanten und Abschätzungen beim abgerundeten Quadrat

Die berechneten Druckeigenfunktionen unterscheiden sich praktisch nicht von denen des Quadrates, wenn diese auf das hier verwendete etwas kleinere Gebiet eingeschränkt

werden. Insbesondere ist die Ecke zwar nicht singulär, strebt aber für klein werdenden Abrundungsparameter dennoch gegen unendlich. Zur Analyse der kritischen Druckfunktion wurde wieder entlang einer der beiden Diagonalen eine Potenzfunktion  $r^q$  gefittet. Dabei zeigt sich für kleine Eckenabrundung praktisch dasselbe Verhalten wie beim vorangegangenen spitzen Winkel, d. h. der Exponent liegt nahe bei der Integrierbarkeitsgrenze von  $q = \Leftrightarrow 1$ .

### 6.2.5 Runder Winkel

In gleicher Weise kann die Spitze des Winkels aus Punkt 6.2.3 abgerundet werden. Hier gilt ebenfalls das zuvor Gesagte, lediglich die harmonische Testfunktion  $f$  ist die aus Satz 13. Die berechneten Schranken und numerischen Werte sind in Tabelle 6.9 zu finden. Wie bei allen Gebieten mit Ecken wird auch hier die kontinuierliche Konstante durch das diskrete Problem etwas überschätzt, allerdings lediglich um einen kleinen Faktor. Das qualitative Verhalten wird sehr gut wiedergegeben.

| $\alpha$           | 120°              |                   | 60°               |                   | 20°               |                   |
|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $r$                | 0,1               | 0,01              | 0,1               | 0,01              | 0,1               | 0,01              |
| $h_{\min}$         | 2,4 <sub>-4</sub> | 2,5 <sub>-8</sub> | 4,0 <sub>-4</sub> | 1,6 <sub>-6</sub> | 5,2 <sub>-4</sub> | 1,6 <sub>-5</sub> |
| $N_{\Delta}$       | 2613              | 2816              | 3277              | 3176              | 4479              | 3732              |
| $\mathcal{L}_h$    | 0,602             | 0,534             | 0,392             | 0,333             | 0,157             | 0,119             |
| $\mathcal{L} \geq$ | 0,429             | 0,417             | 0,229             | 0,217             | 0,085             | 0,076             |
| $\mathcal{L} \leq$ | 0,707             | 0,516             | 0,354             | 0,266             | 0,212             | 0,093             |

Tabelle 6.9: Konstanten und Abschätzungen beim abgerundeten Winkel

Wie zuvor beim abgerundeten Quadrat besteht auch hier der Unterschied des kritischen Druckes zu dem des spitzen Winkels im wesentlichen in einer Einschränkung auf das kleinere Gebiet. Der Fit der Potenzfunktion liefert deshalb die gleichen Resultate wie ohne Rundung. Eine Entscheidung über Existenz oder Nichtexistenz einer kritischen Druckfunktion in  $L^2$  ist folglich leider ebenfalls unmöglich.

## 6.3 Anisotrope Diskretisierungen

Zur Demonstration der in Punkt 3.3.3 vorgestellten anisotropen Diskretisierung werden zwei exemplarische Beispiele herangezogen, die besonders auf anisotrope Triangulierungen zugeschnitten sind. Zum Vergleich sind jeweils die Babuška-Brezzi-Konstanten für dieselben Gebiete mit einer isotropen Triangulierung angegeben, um sicherzustellen, daß auftretende kleine Konstanten nicht durch die Form des Gebietes prinzipiell bedingt sind, sondern eben gerade aus der speziellen Triangulierung resultieren. Zu beachten ist, daß bei der Triangulierung keine extrem stumpfen Winkel entstehen, weil dann die Konstanten der Approximation sehr ungünstig werden. Falls solche Dreiecke auftreten, sollten sie noch durch den stumpfen Winkel geteilt werden.

### 6.3.1 Kanal mit Grenzschichtdiskretisierung

In langen Kanälen tritt bei höherer Flußgeschwindigkeit eines physikalischen Mediums eine randnahe dünne Grenzschicht auf, innerhalb derer das Medium aus der Ruhe an der Wand auf nahezu Maximalgeschwindigkeit beschleunigt wird. Bei der Diskretisierung der vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen ist es deshalb wichtig, diese Schicht mit sehr großen Gradienten ausreichend genau aufzulösen, da sich dort der Reibungseinfluß konzentriert und bei noch höherer Geschwindigkeit schließlich auch Turbulenz einsetzt. In Flußrichtung ist der Gradient hingegen klein, und – zumindest bei laminarer Strömung – eine ähnlich feine Auflösung überflüssig. Eine sinnvolle und effiziente Diskretisierung besteht also aus sehr schmalen Elementen, deren Längsseite in Flußrichtung liegt.

Obwohl eine solche Triangulierung bei den linearen Stokes-Gleichungen eigentlich nicht notwendig ist, da keine Grenzschicht auftritt, wird sie hier als Beispiel für anisotrope Diskretisierungen herangezogen. Abbildung 6.14 zeigt das einfachste anisotrope Netz für einen Kanal mit dem noch moderaten Seitenverhältnis von 1:4, um, wie bereits gesagt, gebietsbedingte Einflüsse zu minimieren ( $\mathcal{L}_h \approx 0,21$ ). In Richtung der Längsseite ist die Diskretisierung dabei äquidistant, in Querrichtung hingegen stark zusammengedrängt. Das jeweilige Seitenverhältnis der entstandenen Dreiecke ist in Tabelle 6.10 zusammen mit den numerisch berechneten Werten angegeben und reicht bis zu 1:64.

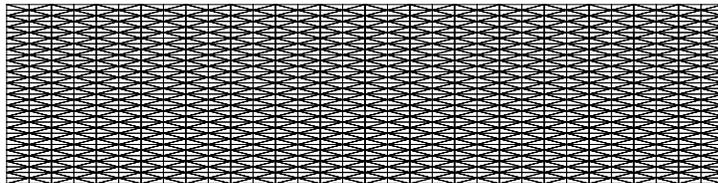


Abbildung 6.14: Anisotrope äquidistante Diskretisierung des Kanals mit  $A = 4$

| $A$                                  | 1     | 2     | 4     | 8     | 16    | 32    | 64    |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h_{\min}$                           | 0,017 | 0,011 | 0,009 | 0,006 | 0,004 | 0,003 | 0,002 |
| $N_{\Delta}$                         | 2048  | 2304  | 2048  | 2304  | 2048  | 2304  | 2048  |
| $\mathcal{L}_h(P_1P_2)$              | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,218 |
| $\mathcal{L}_h(\text{Mini})$         | 0,218 | 0,218 | 0,133 | 0,068 | 0,034 | 0,017 | 0,009 |
| $\mathcal{L}_h(C \Leftrightarrow R)$ | 0,220 | 0,220 | 0,221 | 0,223 | 0,229 | 0,237 | 0,257 |
| $\mathcal{L}_h(\text{Isotrop})$      | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,218 | 0,194 | 0,137 | 0,097 |
| $\mathcal{L}_h(\text{Anisotrop})$    | 0,218 | 0,218 | 0,219 | 0,220 | 0,222 | 0,225 | 0,234 |

Tabelle 6.10: Babuška-Brezzi-Konstanten beim äquidistant anisotropen Kanal

Die Wahl des Stabilisierungsparameters  $\omega$  ist dabei für qualitative Aussagen unerheblich, hier wurde eine schon recht starke Stabilisierung mit  $\omega = 0,1$  für die isotrope und  $\omega = 1$  für die anisotrope Stabilisierung benutzt. Bei einer klassischen Diskretisierung mit dem Mini-Element wird die Babuška-Brezzi-Konstante bereits bei moderaten Seitenverhältnissen schnell schlecht. Die in Punkt 3.3.3 vorgestellte anisotrope Stabilisierung des  $P_1P_1$ -Elementes hingegen sorgt im Unterschied zur klassischen isotropen Stabilisierung für brauchbare Approximationseigenschaften selbst bei extremen Diskretisierungen. Sie scheint damit zumindest prinzipiell für eine Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen selbst bei Strömungen mit stark konvektiver Charakteristik und folglich sinnvollerweise stark anisotroper Diskretisierung gut geeignet.

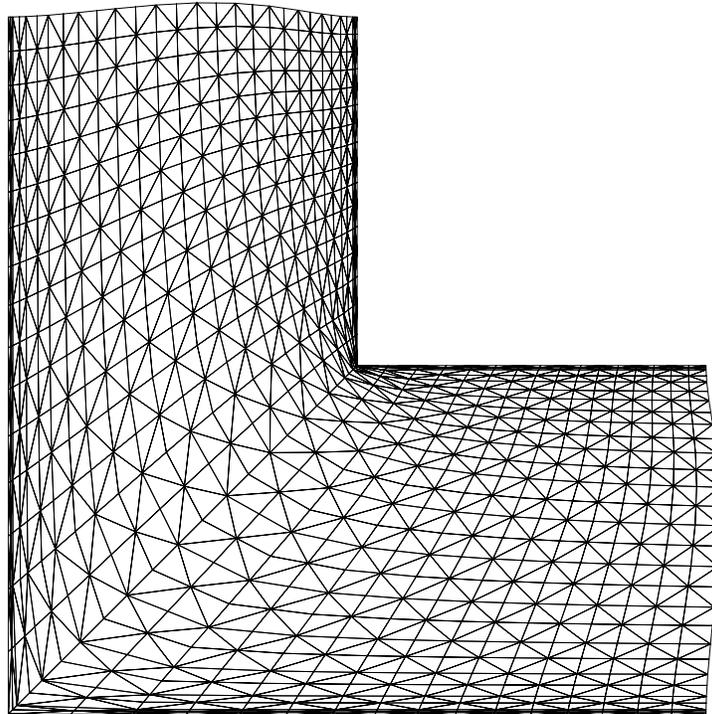
Die angesprochene Anisotropie ist allerdings wenig realistisch. In der Regel wird man eher ein Gitter wie in Abbildung 3.7 wählen, das dem zu erwartenden Geschwindigkeitsverlauf entspricht. Mit einer solchen auf den Rand zu gedrängten Diskretisierung ergeben sich die Babuška-Brezzi-Konstanten aus Tabelle 6.11. Obwohl die maximalen Seitenverhältnisse hier noch erheblich größer sind, werden die Konstanten bei diesem sinnvolleren Gitter deutlich weniger ungünstig. Die Notwendigkeit einer speziell angepaßten anisotropen Stabilisierung ist also nur in beschränktem Umfang gegeben. Auf der anderen Seite ist der Mehraufwand bei der Aufstellung der Systemmatrix im Vergleich zur isotropen Stabilisierung nur gering und kann den ungünstigsten Fall sicher ausschließen.

### 6.3.2 Knie

Das L-Gebiet ( $\mathcal{L}_h \approx 0,25$ ) kann selbst für die Stokes-Gleichungen gut mit einer stark anisotropen Triangulierung gerechnet werden. Dies liegt an der Singularität der Geschwindigkeiten direkt im Knick, die dort etwa proportional zu  $\sqrt{r}$  ansteigen, wenn  $r$  der Abstand vom Knickpunkt ist. Eine effiziente Triangulierung wird deshalb in Strömungsrichtung wieder einigermaßen äquidistant sein, aber im Gegensatz dazu quer zur Strömung stark auf den Knick zu gedrängt sein, wie in Abbildung 6.15 dargestellt. Daraus resultieren auch hier wieder extreme Seitenverhältnisse bei den Dreiecken am Knick, so daß die anisotrope Stabilisierung vorteilhaft benutzt werden kann.

|                                      |                   |                   |                   |                   |
|--------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $A_{\max}$                           | 64                | 256               | 1024              | 4096              |
| $h_{\min}$                           | 2,3 <sub>-3</sub> | 2,7 <sub>-4</sub> | 3,3 <sub>-5</sub> | 4,1 <sub>-6</sub> |
| $N_{\Delta}$                         | 224               | 640               | 1792              | 5120              |
| $\mathcal{L}_h(P_1P_2)$              | 0,218             | 0,218             | 0,218             | 0,218             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Mini})$         | 0,132             | 0,119             | 0,111             | 0,106             |
| $\mathcal{L}_h(C \Leftrightarrow R)$ | 0,261             | 0,234             | 0,223             | 0,220             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Isotrop})$      | 0,192             | 0,176             | 0,165             | 0,159             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Anisotrop})$    | 0,220             | 0,222             | 0,227             | 0,236             |

Tabelle 6.11: Babuška-Brezzi-Konstanten beim real diskretisierten anisotropen Kanal

Abbildung 6.15: Anisotrope Diskretisierung des Knies mit  $A_{\max} = 229$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.12 zusammengefaßt und entsprechen qualitativ denen des Kanals mit Grenzschichtdiskretisierung. Auch hier zeigt sich wieder der Vorteil der anisotropen Stabilisierung bei großen Seitenverhältnissen. Interessanterweise sind hier auch das  $P_1P_2$ - sowie – in geringem Ausmaß – das Crouzeix-Raviart-Element von der zunehmenden Anisotropie betroffen. Der Effekt bleibt jedoch beherrschbar.

|                                      |                   |                   |                   |                   |
|--------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $A_{\max}$                           | 16                | 64                | 229               | 1141              |
| $h_{\min}$                           | 2,3 <sub>-2</sub> | 1,8 <sub>-3</sub> | 2,7 <sub>-4</sub> | 2,9 <sub>-5</sub> |
| $N_{\Delta}$                         | 48                | 160               | 512               | 1792              |
| $\mathcal{L}_h(P_1P_2)$              | 0,250             | 0,209             | 0,148             | 0,088             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Mini})$         | 0,092             | 0,100             | 0,088             | 0,056             |
| $\mathcal{L}_h(C \Leftrightarrow R)$ | 0,469             | 0,363             | 0,323             | 0,309             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Isotrop})$      | 0,173             | 0,149             | 0,104             | 0,061             |
| $\mathcal{L}_h(\text{Anisotrop})$    | 0,257             | 0,254             | 0,246             | 0,229             |

Tabelle 6.12: Babuška-Brezzi-Konstanten beim anisotropen Knie

Insgesamt ist die anisotrope Stabilisierung also sehr brauchbar bei den untersuchten anisotropen Problemen. Unklar ist jedoch noch, wie sich diese bei einer Diskretisierung der vollen Navier-Stokes-Gleichungen verhalten, für die sie ja am besten geeignet sind. Weiterhin ist die Effektivität einer solchen anisotropen Stabilisierung bei Elementen höherer Ordnung noch offen. Weiterführende Untersuchungen sind zu diesem Thema also noch erforderlich.

## 6.4 3D-Numerik

In drei Dimensionen ist die Situation leider wesentlich weniger übersichtlich als im ebenen Fall. Insbesondere sind keine analytischen Ergebnisse bekannt, abgesehen von den einfachen Fällen der Kugel und des Ellipsoides, die in Punkt 2.4.3 behandelt wurden. Eine Übertragung der Arbeiten von Dafermos auf konfokale Ellipsoidenschalen analog zum Kreisring aus Punkt 6.1.3 ist zwar wahrscheinlich möglich, jedoch mit ganz erheblichem Rechenaufwand verbunden.

Für das verwandte Korn-Problem sind zwei Ergebnisse bekannt. Eines ist der Beweis von Oleinik aus Satz 9, der für Gebiete sternförmig bezüglich einer Kugel gilt und in drei Dimensionen die Form

$$K \leq c \left( \frac{R}{R_1} \right)^3$$

(mit Gebietsradius  $R$  und Kugelradius  $R_1$  und einer gebietsunabhängigen Konstante  $c$ ) annimmt. Die andere Richtung funktioniert ähnlich wie die Abschätzung im ebenen Fall der

Ecke in Satz 13 oder des Rechteckes in Punkt 6.2.2 durch die Konstruktion eines “möglichst ungünstigen” Feldes und die Berechnung seiner Konstanten. Nach [BT60] erhält man durch diesen Prozeß bei einem Feld, das einer konstanten Torsion um eine feste Achse entspricht, die untere Schranke

$$K \geq 2 + \frac{4I_{\max}}{I_{\text{med}} + I_{\min}}, \quad (6.5)$$

mit den drei Eigenwerten  $I_{\min} \leq I_{\text{med}} \leq I_{\max}$  des Trägheitstensors

$$I_{ij} = \int_{\Omega} x_i x_j \, dx$$

um den Schwerpunkt von  $\Omega$ . Damit ist klar, daß die Konstante zumindest für langgestreckte, stabartige Gebiete beliebig ungünstig werden kann.

Für Ellipsoide mit  $a \leq b \leq c$  gilt nach (2.43) die Ladyzhenskaya-Konstante

$$\mathcal{L}_{\text{Ellipsoid}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}},$$

so daß generell bei großen Seitenverhältnissen Schwierigkeiten zu erwarten sind.

Die numerische Approximation mittels (4.3) ist selbstverständlich für beliebige Gebiete möglich und wird hier als Beispiel gebracht. Aus programmiertechnischen Gründen sind die behandelten Gebiete jedoch im Gegensatz zu ihren zweidimensionalen Kollegen etwas eingeschränkt. Konkret bedeutet dies, daß ein ebener Schnitt in der x-y-Ebene durch das Gebiet prinzipiell beliebige Gestalt haben kann, die jedoch bei Verschiebung dieses Schnittes entlang der z-Achse gleich bleibt. Das Gebiet ist insgesamt also prismatisch. Dies liegt daran, daß das Gebiet als Tensorprodukt einer zweidimensionalen Fläche und eines eindimensionalen Intervalles gebildet, also gewissermaßen aus der Fläche extrudiert wird. Dadurch wird die nicht ganz triviale Netzgenerierung in 3D vermieden bzw. das Gitter entsteht als Tensorprodukt eines ebenen und eines linearen Gitters fast automatisch.

Bedingt durch diese Einschränkung der numerisch berechenbaren Gebiete können die analytisch behandelbaren Ellipsoide nicht nachgerechnet werden. Die benutzten praxisnahen Beispiele zeigen jedoch ebenfalls interessante Charakteristika, die in den folgenden Punkten einzeln diskutiert werden.

Ein weiteres Problem in drei Dimensionen ist die extrem schnell ansteigende Komplexität des Problems mit zunehmender Verfeinerung. Ein einmaliger Verfeinerungsschritt bedeutet hier gleich einen Faktor von 8 in der Zahl der Unbekannten anstelle von 4 wie im ebenen Fall. Dazu kommt, daß besonders bei den gut geeigneten sehr stabilen Elementen wie  $P_1P_3$  oder  $P_1\text{Mini}_2$  die Anzahl der Geschwindigkeitsunbekannten sehr groß wird, bei  $P_1P_3$  beispielsweise sind etwa 54mal so viele Geschwindigkeitsunbekannte wie Druckunbekannte zu berechnen. Die im Anhang angesprochene Problematik der dichteren Besetzung der Systemmatrix erschwert die Lösung ebenso wie ihre stärkere Auffüllung bei dem verwendeten direkten Verfahren. Das führt dazu, daß in drei Dimensionen maximal 300000 Unbekannte handhabbar waren, so daß hier deutlich gröbere Diskretisierungen als in der Ebene verwendet werden mußten.

Dreidimensionale Druckeigenfunktionen sind nur schwer darstellbar. Anstelle der 3D-Plots wie im ebenen Fall sind deshalb Oberflächenfunktionen abgebildet, wobei die unterschiedlichen Funktionswerte durch Farben dargestellt werden. Wegen der Harmonizitätseigenschaft der interessierenden Eigenfunktionen liegen die Singularitäten und Extrema der Funktionen aber auf der äußeren Gebietsoberfläche und sind dadurch gut sichtbar.

### 6.4.1 Zylinder

Der Zylinder entsteht durch die Extrusion eines ebenen Kreises. Einziger möglicher Parameter ist hier das Verhältnis zwischen Radius und Höhe, von einer flachen Scheibe bis zu einem dünnen langen Stab. Die numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.13 zeigen, daß sich die Konstante mit extremen Verhältnissen zunehmend verschlechtert. Eine flache Scheibe (Wasserbecken) ist also ebenso kritisch wie ein langer Stab (Röhre). Angegeben ist jeweils noch die Ladyzhenskaya-Konstante eines Rotationsellipsoides mit dem gleichen Verhältnis von Höhe zu Radius nach (2.43). Abbildung 6.16 zeigt die kritischen Druckeigenfunktionen für Zylinder mit einem Verhältnis von Höhe zu Radius von 3 bzw. 0,08.

| $\frac{H}{2R}$                   | 0,08  | 0,25  | 1     | 3     | 8     |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h_{\min}$                       | 0,039 | 0,063 | 0,127 | 0,174 | 0,174 |
| $N_{\text{Prismen}}$             | 5280  | 4080  | 1984  | 2112  | 4224  |
| $\mathcal{L}_h$                  | 0,142 | 0,223 | 0,303 | 0,173 | 0,067 |
| $\mathcal{L}_{\text{Ellipsoid}}$ | 0,156 | 0,408 | 0,577 | 0,117 | 0,044 |

Tabelle 6.13: Konstanten und Vergleichswerte beim Zylinder

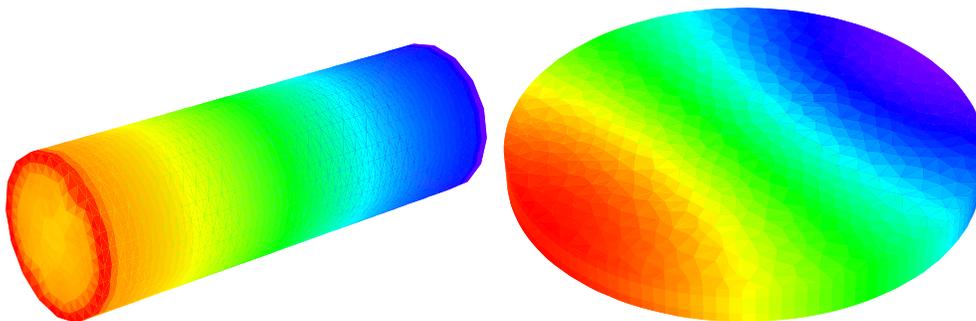


Abbildung 6.16: Druckeigenfunktionen zweier Zylinder mit Seitenverhältnis 3 bzw. 0,08

### 6.4.2 Quader

Der Quader hat zwei Parameter entsprechend den beiden Seitenverhältnissen aus dem ursprünglichen Rechteck und der Extrusionshöhe. Die Extremfälle sind auch hier ein flaches – diesmal rechteckiges – Becken und ein langer Kanal rechteckigen Querschnittes, wobei diesmal große Seitenverhältnisse gleich zweimal auftreten können. Leider konnten mangels Computerkapazitäten keine wirklich extremen Seitenverhältnisse berechnet werden, aber die Tendenzen in Tabelle 6.14 sind dennoch gut zu erkennen. Es wird deutlich, daß hauptsächlich das Verhältnis von größter zu kleinster Seite eingeht. Dies steht im Einklang mit der Abschätzung durch das Ellipsoid mit gleichem Seitenverhältnis.

| $H : B : L$                      | 1:1:1 | 1:1:2 | 1:1:4 | 1:1:10 | 1:2:4 | 1:2:2 | 1:4:4 | 1:10:10 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|---------|
| $h_{\min}$                       | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 0,125  | 0,088 | 0,125 | 0,125 | 0,0625  |
| $N_{\text{Prismen}}$             | 1024  | 2048  | 4096  | 8192   | 8192  | 4096  | 2048  | 8192    |
| $\mathcal{L}_h$                  | 0,241 | 0,239 | 0,137 | 0,057  | 0,173 | 0,181 | 0,099 | 0,079   |
| $\mathcal{L}_{\text{Ellipsoid}}$ | 0,577 | 0,408 | 0,236 | 0,099  | 0,218 | 0,408 | 0,236 | 0,099   |

Tabelle 6.14: Konstanten und Vergleichswerte beim Quader

Interessant sind auch die kritischen Drücke, von denen eine beispielhafte Oberflächenfunktion in Abbildung 6.17 dargestellt ist. Sie entsprechen ziemlich genau dem, was aus den zweidimensionalen Ergebnissen zu erwarten war, das heißt wieder die Eckensingularitäten und bei großen Seitenverhältnissen der Cosinus-artige Verlauf entlang der längsten Achse.

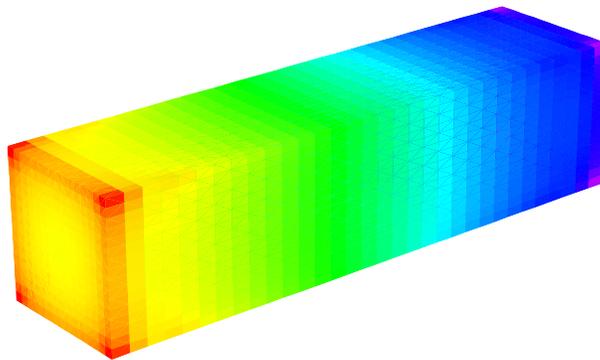


Abbildung 6.17: Druckeigenfunktion für einen quadratischen Stab der Länge 4.

### 6.4.3 Torte

Das Tortenstück entsteht aus der Extrusion des ebenen Winkels. Auch hier gibt es bei festgehaltenem Innenwinkel die Möglichkeit eines flachen Beckens oder eines langgestreckten keilförmigen Kanals. Wie bereits bei den beiden anderen dreidimensionalen Gebieten gibt es auch hier keine großen Überraschungen, wie an Tabelle 6.15 und Abbildung 6.18 zu sehen ist. Extreme Seitenverhältnisse führen für kleine wie große Winkel wieder zu kleinen Ladyzhenskaya-Konstanten. Bei der abgebildeten schlanken Spitze ist die Singularität direkt an der Spitze (blau) kaum zu sehen, bei der Axt wurde dafür die Farbskalierung etwas gestreckt. Die wenig glatten Farbübergänge an der Axtschneide sind eine dreidimensionale Ausprägung der aus der Ebene bekannten Schachbrettinstabilität, die bei dem hier wie bei allen dreidimensionalen Beispielen verwendeten  $P_1P_2$ -Element noch schwach in Erscheinung tritt und die diskrete Konstante künstlich etwas verkleinert.

| $\alpha$             | 20°    |        |       | 120°  |       |       |
|----------------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{H}{L}$        | 0,05   | 1      | 20    | 0,1   | 1     | 12    |
| $h_{\min}$           | 0,0007 | 0,0006 | 0,007 | 0,003 | 0,049 | 0,044 |
| $N_{\text{Prismen}}$ | 6856   | 9680   | 6208  | 9888  | 8704  | 9600  |
| $\mathcal{L}_h$      | 0,045  | 0,061  | 0,009 | 0,121 | 0,288 | 0,059 |

Tabelle 6.15: Konstanten und Vergleichswerte beim Tortenstück

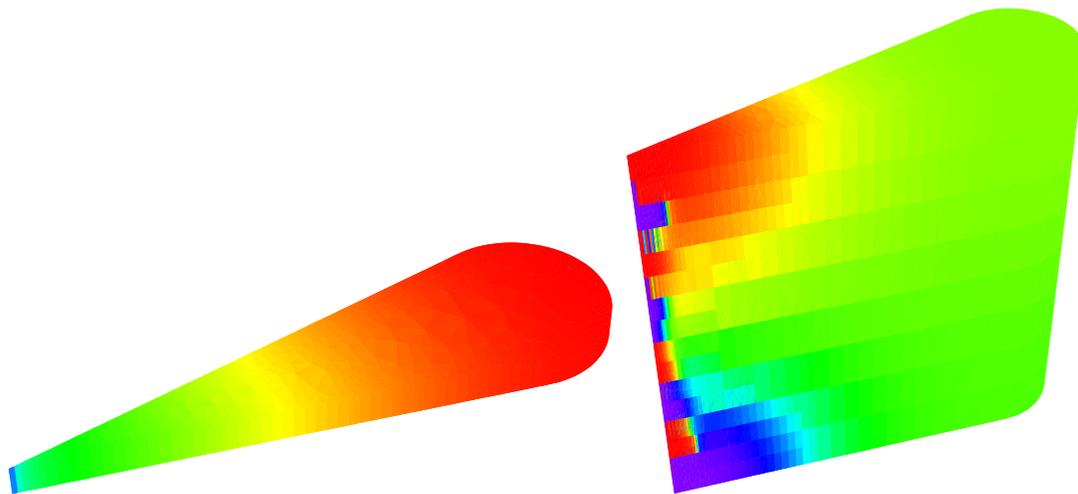


Abbildung 6.18: Druckeigenfunktionen bei einer schlanken Spitze und einer flachen Axt

# Literaturverzeichnis

- [ABB<sup>+</sup>95] ANDERSON, E., Z. BAI, C. BISCHOF, J. DEMMEL, J. J. DONGARRA, J. DU CROZ, A. GREENBAUM, S. HAMMARLING, A. MCKENNEY, S. OSTROUCHOV und D. C. SORENSEN: *LAPACK User's Guide*. SIAM Press, 2 Auflage, 1995.
- [ABF83] ARNOLD, D. N., FRANCO BREZZI und MICHEL FORTIN: *A Stable Finite Element for the Stokes Equations*. *Calcolo*, 21:337–344, 1983.
- [ADN64] AGMON, S., A. DOUGLIS und L. NIRENBERG: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:35–92, 1964.
- [AHU58] ARROW, K., L. HURWICZ und H. UZAWA: *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford University Press, Stanford, CA, 1958.
- [AL94] ASHCRAFT, CLEVE und JOSEPH W.-H. LIU: *Generalized Nested Dissection: Some Recent Progress*. *Proceedings of the Fifth SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, 1994.
- [Ami77] AMICK, CHARLES J.: *Decomposition Theorems for Solenoidal Vector Fields*. *Journal of the London Mathematical Society*, 15:288–296, 1977.
- [AP89] AMES, K. A. und L. E. PAYNE: *Decay Estimates in Steady Pipe Flow*. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 20(4):789–815, 1989.
- [APS93] AMES, K. A., L. E. PAYNE und P. W. SCHAEFER: *Spatial Decay Estimates in Time-Dependent Stokes Flow*. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 24(6):1395–1413, 1993.
- [Arn51] ARNOLDI, W.: *The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem*. *Quart. Appl. Math.*, 9:165–190, 1951.
- [BA72] BABUŠKA, IVO und A. K. AZIZ: *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method*. In: AZIZ, A. K. (Herausgeber): *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Seiten 3–359. Academic Press, Inc., 1972.

- [Bab73] BABUŠKA, IVO: *The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers*. Numerische Mathematik, 20:179–192, 1973.
- [BF91] BREZZI, FRANCO und MICHEL FORTIN: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bog79] BOGOVSKIĬ, M. E.: *Solution of the First Boundary Value Problem for the Equation of Continuity of an Incompressible Medium*. Soviet Math. Dokl., 20:1094–1098, 1979.
- [Bog80] BOGOVSKIĬ, M. E.: *Solution of Some Vector Analysis Problems Connected with Operators Div and Grad*. Trudy Seminar S. L. Sobolev, #1(80):5–40, 1980. (russisch).
- [BP84] BREZZI, FRANCO und J. PITKÄRANTA: *On the Stabilization of Finite Element Approximations of the Stokes Equations*. In: HACKBUSCH, WOLFGANG (Herausgeber): *Efficient Solutions of Elliptic Systems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol 10*, Seiten 11–20. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, April 1984.
- [Bra92] BRAESS, DIETRICH: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, 1992.
- [BS90] BORCHERS, W. und H. SOHR: *On the Equations  $\operatorname{rot} v = g$  and  $\operatorname{div} u = f$  with Zero Boundary Conditions*. Hokkaido Math. J., 19:67–87, 1990.
- [BT60] BERNSTEIN, B. und R. A. TOUPIN: *Korn Inequalities for the Sphere and Circle*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 6:54–64, 1960.
- [Cat61] CATTABRIGA, L.: *Su un Problema al Contorno Relativo al Sistema di Equazioni di Stokes*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 31:308–340, 1961.
- [CC98] COSSERAT, E. und F. COSSERAT: *Sur les equations de la theorie de l'élasticité*. C. R. Acad. Sci. Paris, 126:1089–1091, 1898.
- [Cle75] CLEMENT, P.: *Approximation by Finite Element Functions using Local Regularization*. R.A.I.R.O Analyse Numérique, 8:77–84, 1975.
- [CM69] CUTHILL, E. H. und J. MCKEE: *Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices*. In: N.N. (Herausgeber): *Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comp. Mach.*, Seiten 157–172. ACM Publications, 1969.
- [CR73] CROUZEIX, M. und P.-A. RAVIART: *Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for solving the stationary Stokes equations I*. R.A.I.R.O Analyse Numérique, Seiten 33–75, 1973.

- [DA92] DOBROWOLSKI, M. und T. APEL: *Anisotropic Interpolation with Applications to the Finite Element Method*. Computing, 47:277–293, 1992.
- [Daf68] DAFERMOS, CONSTANTINE M.: *Some Remarks on Korn's Inequality*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 19:913–920, 1968.
- [DCDH90] DONGARRA, J. J., J. DU CROZ, I. S. DUFF und S. HAMMARLING: *A Set of Level 3 Basic Linear Algebra Subprograms*. ACM Transactions on Mathematical Software, 16:1–17,18–28, 1990.
- [DCHH88] DONGARRA, J. J., J. DU CROZ, S. HAMMARLING und R. J. HANSON: *An Extended Set of Fortran Basic Linear Algebra Subprograms*. ACM Transactions on Mathematical Software, 13:1–17,18–32, 1988.
- [DL76] DUVAUT, GEORGES und JAQUES LOUIS LIONS: *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, 1976.
- [Dob89] DOBROWOLSKI, MANFRED: *A Discrete Solenoidal Finite Difference Scheme for the Numerical Approximation of Incompressible Flow*. Numerische Mathematik, 54:533–542, 1989.
- [Dob95] DOBROWOLSKI, MANFRED: *Multigrid Methods for Elliptic Systems with Constraints*. In: *Proceedings of the XIth summer school Software and Algorithms of Numerical Mathematics*, Seiten 79–103, 1995.
- [DS98] DOBROWOLSKI, MANFRED und GISBERT STOYAN: *Algebraic and discrete Velt decompositions*. To appear in: BIT, 1998.
- [EH94] ELMAN, HOWARD C. und GENE H. HOLUB: *Inexact and Preconditioned Uzawa Algorithms for Saddle Point Problems*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 31(6):1645–1661, 1994.
- [Eri82] ERIG, W.: *Die Gleichungen von Stokes und die Bogovskii-Formel*. Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1982.
- [FG83] FORTIN, MICHEL und ROLAND GLOWINSKI: *Augmented Lagrangian Methods, Studies in Mathematics and its Applications, Vol 15*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- [Fic72] FICHERA, G.: *Existence Theorems in Elasticity; Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints*, Band 6a/2, Kapitel Handbuch der Physik, Seiten 347–424. Springer-Verlag, 1972.
- [For77] FORTIN, MICHEL: *An Analysis of the Convergence of Mixed Finite Element Methods*. R.A.I.R.O Analyse Numérique, 11:341–354, 1977.

- [For96] FORTIN, MICHEL: *Finite Element Solution of the Navier-Stokes Equations*. Acta Numerica, Seiten 239–284, 1996.
- [Fri37] FRIEDRICHS, KURT: *On Certain Inequalities and Characteristic Value Problems for Analytic Functions of Two Variables*. Transactions of the American Mathematical Society, 41:321–364, 1937.
- [Fri46] FRIEDRICHS, KURT: *An Inequality for Potential Functions*. American Journal of Mathematics, 68:581–592, 1946.
- [Fri47] FRIEDRICHS, KURT: *On the Boundary-Value Problems of the Theory of Elasticity and Korn's Inequality*. Annals of Mathematics, 2(48):441–471, 1947.
- [Gal94a] GALDI, GIOVANNI P.: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Linearized Steady Problems*, Band 1. Springer-Verlag, 1994.
- [Gal94b] GALDI, GIOVANNI P.: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Nonlinear Steady Problems*, Band 2. Springer-Verlag, 1994.
- [Geo73] GEORGE, ALAN: *Nested Dissection of a Regular Finite-Element Mesh*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 10:345–363, 1973.
- [GL89] GEORGE, ALAN und JOSEPH W.-H. LIU: *The Evolution of the Minimum Degree Ordering Algorithm*. SIAM Review, 31:1–19, 1989.
- [GM82] GIAQUINTA, M. und G. MODICA: *Nonlinear Systems of the Type of Stationary Navier-Stokes System*. Journal für Reine und Angewandte Mathematik, 330:173–214, 1982.
- [Gou94] GOUBET, OLIVIER: *Study of the Uzawa Operator for the Channel Flow Problem*. Applicable Analysis, 55:235–258, 1994.
- [GR81] GIRAULT, V. und P.-A. RAVIART: *Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations*. Band 749 der Reihe *lnm*. Springer-Verlag, 1981.
- [GR86] GIRAULT, VIVETTE und PIERRE-ARNAUD RAVIART: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, 1986.
- [Gri78] GRISVARD, P.: *Singularités des solutions du problème de Stokes dans un polygone*. Univ. de Nice, 1978.
- [Gri90a] GRIESINGER, REGINA: *Decomposition of  $L^q$  and  $H_0^{1,q}$  with Respect to the Operator  $rot$* . Math. Ann., 288:245–262, 1990.

- [Gri90b] GRIESINGER, REGINA: *On the Boundary Value Problem  $\operatorname{rot} u = f$ ,  $u$  Vanishing at the Boundary and Related Decomposition of  $L^q$  and  $H_0^{1,q}$ : Existence*. Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, 35:15–44, 1990.
- [GS97] GOMES, FRANCISCO M. und DANNY C. SORENSEN: *ARPACK++: A C++ Implementation of ARPACK Eigenvalue Package*, 1997.
- [GvL89] GOLUB, GENE H. und CHARLES F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Second Auflage, 1989.
- [Hac86] HACKBUSCH, WOLFGANG: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [HK71] HORGAN, CORNELIUS O. und J. K. KNOWLES: *Eigenvalue Problems Associated with Korn's Inequalities*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 40:384–402, 1971.
- [HMR90] HEYWOOD, J. G., K. MASUDA und R. RAUTMANN (Herausgeber): *The Navier-Stokes Equations; Theory and Numerical Methods*, Band 1431 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.
- [HN70a] HLAVÁČEK, IVAN und JINDŘICH NEČAS: *On Inequalities of Korn's type; I. Boundary-Value Problems for Elliptic Systems of Partial Differential Equations*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 36:305–311, 1970.
- [HN70b] HLAVÁČEK, IVAN und JINDŘICH NEČAS: *On Inequalities of Korn's type; II. Applications to Linear Elasticity*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 36:312–334, 1970.
- [Hor75] HORGAN, CORNELIUS O.: *Inequalities of Korn and Friedrichs in Elasticity and Potential Theory*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 26:155–164, 1975.
- [Hor95] HORGAN, CORNELIUS O.: *Korn's Inequalities and their Applications in Continuum Mechanics*. SIAM Review, 37(4):491–511, 1995.
- [HP83] HORGAN, CORNELIUS O. und L. E. PAYNE: *On Inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 82:165–179, 1983.
- [HT73] HOOD, P. und C. TAYLOR: *A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations using the Finite Element Technique*. Computation and Fluids, 1:73–100, 1973.
- [HW78] HORGAN, CORNELIUS O. und L. T. WHEELER: *Spatial Decay Estimates for the Navier-Stokes Equations with Application to the Problem of Entry Flow*. SIAM Journal of Applied Mathematics, 35(1):97–116, 1978.

- [Kef97] KESSLER, MANUEL: *Uzawa-Methoden zur numerischen Behandlung von Strömungsproblemen*. Diplomarbeit, Universität Würzburg, 1997.
- [KO76] KELLOG, R. B. und J. E. OSBORN: *A Regularity Result for the Stokes Problem in a Convex Polygon*. *Journal of Functional Analysis*, 21:397–431, 1976.
- [KO89] KONDRATIEV, VLADIMIER ALEXANDROVITCH und OLGA ARSENIJEVNA OLEINIK: *On Korn's Inequalities*. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 308:483–487, 1989.
- [Kor06] KORN, A.: *Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche*. *Math.-Phys. Kl. Berichte*, 36:351–401, 1906.
- [Kor08] KORN, A.: *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts, sont donnés à la surface*. *Annales, Toulouse Université*, 1908.
- [Kor09] KORN, A.: *Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen*. *Bulletin Internationale, Cracovie Akademie Umiejet, Classe des sciences mathématiques et naturelles*, Seiten 705–724, 1909.
- [KP86] KAPITANSKIĬ, L. V. und K. PILETSKAS: *Certain Problems of Vector Analysis*. *Journal of Soviet Mathematics*, 32:469–484, 1986.
- [Lad69] LADYZHENSKAYA, OLGA A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, 1969.
- [LHKK79] LAWSON, C. L., R. J. HANSON, D. KINCAID und F. T. KROGH: *Basic Linear Algebra Subprograms for Fortran Usage*. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 5:308–323, 1979.
- [Liu85] LIU, JOSEPH W.-H.: *Modification of the Minimum Degree Algorithm by Multiple Elimination*. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 11:141–153, 1985.
- [Liu89] LIU, JOSEPH W.-H.: *The Minimum Degree Algorithm with Constraints*. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 10(6):1136–1145, 1989.
- [LM83] LOCKHART, ROBERT B. und ROBERT C. MCOWEN: *On Elliptic Systems in  $\mathbb{R}^n$* . *Acta Mathematica*, 150:125–135, 1983.
- [LRT79] LIPTON, R. J., D. J. ROSE und R. E. TARJAN: *Generalized Nested Dissection*. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 16:346–358, 1979.
- [LS78] LADYZHENSKAYA, OLGA A. und V. A. SOLONNIKOV: *Some Problems of Vector Analysis and Generalized Formulations of Boundary-Value Problems for the Navier-Stokes Equations*. *Journal Soviet Math.*, 10:257–286, 1978.

- [LSL99] LUMSDAINE, ANDREW, JEREMY G. SIEK und LIE-QUAN LEE: *MTL Home Page*. [www.lsc.nd.edu/research/mtl](http://www.lsc.nd.edu/research/mtl), 1999. Zuletzt geprüft im Mai 2000.
- [LSY97] LEHOUCQ, R. B., D. C. SORENSEN und C. YANG: *ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, 1997.
- [Mik73] MIKHLIN, S. G.: *The Spectrum of a Family of Operators in the Theory of Elasticity*. Russian Mathematical Surveys, 28(3):45–88, 1973.
- [Neč67] NEČAS, JINDŘICH: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et C<sup>ie</sup>, 1967.
- [Nit81] NITSCHKE, J. A.: *On Korn's Second Inequality*. R.A.I.R.O Analyse Numérique, 15(3):237–248, 1981.
- [Ole91] OLEINIK, OLGA ARSENIJEVNA: *Korn's Type Inequalities and Applications to Elasticity*. In: *Convegno Internazionale in memoria di Vitto Volterra*, Seiten 183–209, 1991.
- [PAM<sup>+</sup>98] POIRIER, DIANE, STEVEN R. ALLMARAS, DOUGLAS R. MCCARTHY, MATTHEW F. SMITH und FRANCIS Y. ENOMOTO: *The CGNS System*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [Pil83] PILETSKAS, K.: *Three-Dimensional Solenoidal Vectors*. Journal of Soviet Mathematics, 21:821–823, 1983.
- [Pil84] PILETSKAS, K.: *On Spaces of Solenoidal Vectors*. Proc. Steklov Math. Inst., 159:141–154, 1984.
- [PW61] PAYNE, L. E. und H. F. WEINBERGER: *On Korn's Inequality*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 8:89–98, 1961.
- [She96] SHEWCHUK, JONATHAN RICHARD: *Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator*. <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>, 1996. Zuletzt geprüft im Mai 2000.
- [SN86] SPECOVIVUS-NEUGEBAUER, MARIA: *Exterior Stokes Problems and Decay at Infinity*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 8:351–367, 1986.
- [Sol77] SOLONNIKOV, V. A.: *Estimates for Solutions of Nonstationary Navier-Stokes Equations*. J. Soviet Math., 8:467–528, 1977.
- [Sol83] SOLONNIKOV, V. A.: *Stokes and Navier-Stokes Equations in Domains with Non-Compact Boundaries*. Pitman Research Notes in Mathematics, 84:240–349, 1983. Collège de France Seminar, Vol. IV.

- [Sor92] SORENSEN, D. C.: *Implicit Application of Polynomial Filters in a  $k$ -Step Arnoldi Method*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 13(1):357–385, 1992.
- [SŠ73] SOLONNIKOV, V. A. und V. E. ŠČADILOV: *On a Boundary Value Problem for Stationary Navier-Stokes Equations*. Proc. Steklov Math. Inst., 125:186–199, 1973.
- [Sto99a] STOYAN, GISBERT: *Optimal iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace*. Report 99-7 des SFB "Numerical and Symbolic Scientific Computing" der Universität Linz, 1999.
- [Sto99b] STOYAN, GISBERT: *Towards Discrete Velte Decompositions and Narrow Bounds for inf-sup Constants*. Comput. Math. Appl., 38(7–8):243–261, 1999.
- [Str98] STROUSTRUP, BJARNE: *Die C++-Programmiersprache*. Addison-Wesley (Deutschland), 3. Auflage Auflage, 1998.
- [SZ90] SCOTT, L. R. und S. ZHANG: *Finite Element Interpolation of Nonsmooth Functions Satisfying Boundary Conditions*. Mathematics of Computation, 54:483–493, 1990.
- [Vel90] VELTE, WALDEMAR: *On Optimal Constants in some Inequalities*. In: *Lecture Notes in Mathematics* [HMR90], Seiten 158–168.
- [vW89] WAHL, WOLF VON: *Das Außenraumproblem für die instationären Navier-Stokes Gleichungen*. Technischer Bericht, Rudolf-Lipschitz-Vorlesung, 1989.
- [vW90] WAHL, WOLF VON: *On Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of the Equations  $\operatorname{rot} u = \gamma$  and  $\operatorname{div} u = \epsilon$  with  $u$  vanishing on the Boundary*. In: HEYWOOD, J. G. et al. [HMR90].

# Anhang A

## Implementierung

In diesem Anhang wird die für die numerischen Ergebnisse verwendete Implementierung vorgestellt, da sie einige interessante Ansätze enthält, um die sehr großen linearen Probleme mit vertretbarem Programmieraufwand und gleichzeitig hocheffizient zu lösen. Bei der Konzeption der Programme standen deshalb folgende Hauptkriterien im Vordergrund:

**Korrektheit** Selbstverständlich ist ein Programm, das alle anderen Kriterien hervorragend erfüllt, aber das falsche Problem löst, wertlos. Da es sich allerdings um ein Programm zu Forschungszwecken handelt, sind an Kriterien wie Sicherheit beispielsweise gegen Fehleingaben und Ressourcenmangel zugunsten anderer Kriterien geringere Ansprüche zu stellen als an ein Programm, das für weniger qualifizierte Endanwender gedacht ist.

**Effizienz** Die zu lösenden Gleichungssysteme sind sehr groß und verlangen nach viel Speicherplatz und Rechenleistung. Einige interessante Effekte treten erst bei genügend fein aufgelösten Diskretisierungen auf, die noch berechenbar sein sollten. Da Speicherkapazität und Rechenleistung bekanntlich endlich sind, sollte die Maschine möglichst weit bis an das theoretische Limit ausgenutzt werden.

**Programmieraufwand** Von der begrenzten Zeit einer Dissertation kann nur ein gewisser Teil für die Programmierstätigkeit verwendet werden. Die benutzten Konzepte sollten deshalb den Programmierer weitgehend von Routineaufgaben entlasten, beispielsweise durch hochsprachliche Konzepte und verfügbare gute Bibliotheken.

**Portabilität** Zum Vergleich der beiden verfügbaren Maschinen, einer SUN-Workstation und eines aktuellen PCs, sollten die Programme auf beiden Rechnern lauffähig sein und zumindest prinzipiell auch auf erheblich leistungsstärkere Computer übertragbar sein.

Die Gewichtung dieser sich zum Teil widersprechenden Forderungen ist selbstverständlich immer etwas subjektiv und durch persönliche Erfahrung sowie die zur Verfügung stehenden Ressourcen (Zeit, Computer, Programmiersprachen) geprägt. Deshalb stellt die entstandene Implementierung auch nicht unbedingt das erreichbare Optimum dar, sondern baut auf erprobten und bewährten Konzepten auf.

## A.1 C++ und MTL

Als Implementierungssprache wurde wie bereits in [Keß97] C++ gewählt. Wichtige Eigenschaften von C++ [Str98] ist der mögliche Hochsprachenlevel bei Verwendung guter Bibliotheken wie beispielsweise der im ISO-Standard mit festgelegten STL (Standard Template Library), die Unterstützung eventuell nötiger Low-Level Techniken zur Erreichung der angestrebten Effizienz, die weite Verbreitung und Portabilität, die strenge Typisierung der Sprache und nicht zuletzt die umfangreiche Programmiererfahrung des Autors mit dieser Sprache. Moderne Sprachkonzepte, die Polymorphismus zur Laufzeit (virtuelle Methoden) und zur Übersetzungszeit (Templates) erlauben, gestatten eine generische Programmierung zahlreicher zentraler Funktionen, ohne sich auf eine spezielle Instanz festzulegen. So werden die linearen Gleichungssysteme unabhängig vom verwendeten Finiten Element alle von derselben Funktion aufgebaut, lediglich die konkreten Matrixeinträge werden jeweils separat berechnet. Der größte Teil des Codes für zwei und drei Dimensionen ist identisch, in 3D wird lediglich die Extrusion hinzugefügt, indem die Systemmatrix der Ebene gemäß dem Stern in Extrusionsrichtung entsprechend häufig in die volle Matrix kopiert wird. Der Aufbau der ursprünglichen Systemmatrix und die Lösung des fertigen Gleichungssystems, was etwa 90% des Codes ausmacht, ist also identisch.

Eine gut gewählte Implementierungssprache kann dadurch den Entwicklungsaufwand ganz drastisch reduzieren. Ansonsten müssen Teile des Codes dupliziert und angepaßt werden, was große Folgekosten nach sich ziehen kann, etwa falls Fehler auftauchen, die in zahlreichen fast gleichen, aber doch leicht unterschiedlichen Funktionen gesucht und eliminiert werden müssen. Der etwas höhere Aufwand bei der ersten Programmierung zahlt sich im Laufe der Zeit so gut wie immer aus.

Die geschickte Verwendung guter Bibliotheken ist eine weitere Grundlage für zuverlässige und in vertretbarer Zeit entwickelte Programme. Schließlich sind viele elementare und weniger elementare Konzepte bereits häufig implementiert worden, wie beispielsweise einfache Datenstrukturen (Arrays, Listen, Strings etc.) und grundlegende Algorithmen (Suchen, Sortieren, Ein-/Ausgabe etc.) oder auch mathematisch-numerische Konzepte wie Vektoren, Matrizen und LU-Zerlegung oder Eigenwertbestimmung.

Eine der verwendeten Bibliotheken nennt sich MTL (Matrix Template Library) und stammt von der University of Notre Dame, Indiana [LSL99]. Sie basiert auf denselben Konzepten wie die standardisierte STL für allgemeine Datenstrukturen und zugehörige Algorithmen und wendet diese auf Vektoren und Matrizen an. Sie stellt sehr hohe Ansprüche an den verwendeten C++-Compiler, da sie relativ neue Template-Techniken verwendet, die ältere Compiler noch nicht implementiert haben, und verläßt sich teilweise auf die Optimie-

rungsstufe des Compilers, um hocheffizienten Code zu erzeugen. Dies ist zwar prinzipiell nicht falsch, bei schlecht optimierenden Compilern ist die Performance allerdings nicht ganz zufriedenstellend. Andererseits ist MTL extrem flexibel, was die Repräsentation der Konzepte “Vektor” und “Matrix” angeht. Diese können beispielsweise im Fortran- oder C-Stil abgelegt werden, symmetrische Matrizen speichern nur die obere oder die untere Hälfte, und dünn besetzte Matrizen gibt es in zahlreichen verschiedenen Formaten. Die meisten Algorithmen müssen dadurch nur einfache Annahmen über die Konzepte treffen (beispielsweise den Namen der Funktion für den Elementzugriff) und können so mit allen Varianten umgehen. Wo Spezialisierungen nötig sind, um Funktionstüchtigkeit oder auch akzeptable Effizienz zu erreichen, geschieht dies transparent für den Benutzer. Er kann beispielsweise mit einer einzeiligen Änderung sein Programm vom spaltenorientierten auf das zeilenorientierte Speicherformat für Matrizen umstellen, falls dies sinnvoll sein sollte. Überhaupt ist die Bedienung für den Benutzer relativ einfach. Höhere Algorithmen, wie beispielsweise die iterative Lösung eines Gleichungssystems mit CG, BiCGStab oder QMR, können einfach aus einem Numerikbuch abgetippt werden, wozu lediglich die Syntax angepaßt werden muß. (Selbstverständlich sind die genannten Verfahren bereits fertig enthalten.)

Für besondere Anforderungen kann der Benutzer auch die Bibliothek selbst erweitern, ohne in die bestehende Funktionalität einzugreifen. Dies war im vorliegenden Fall in nicht unerheblichem Umfang erforderlich, da speziell die Unterstützung dünn besetzter Matrizen noch etwas lückenhaft ist. Das gesamte Rahmenwerk gestattet jedoch diese Ergänzungen mit einem vertretbaren Aufwand. Sie können zudem gut in die restliche Bibliothek integriert werden, und die meisten Algorithmen arbeiten auch sofort mit diesen neuen Matrixtypen. Wo nötig, können zur Steigerung der Effizienz entsprechend spezialisierte Funktionen eingesetzt werden, die bei Bedarf automatisch aktiviert werden.

Bei der Erweiterung von MTL tauchten durch die neuen Anforderungen auch einige Fehler in altem Code auf, der berichtigt und ebenso wie die Ergänzungen dem Autor der Bibliothek zugeleitet wurde. Er wird in die nächste Version integriert und steht somit zukünftig allen Benutzern zur Verfügung.

## A.2 Unstrukturierte Dreiecksnetze

Eine grundsätzliche Entscheidung bei der Implementierung eines Finite-Elemente-Systems fällt sehr früh in der Planungsphase, und zwar zwischen strukturierten und unstrukturierten Netzen und zwischen den verschiedenen Basiselementen, wie Dreiecken oder Vierecken in 2D, Tetraedern, Prismen oder Quadern in 3D. Danach richten sich dann die weiteren Datenstrukturen und in hohem Maße auch die Netzgenerierung.

Ganz allgemein sind unstrukturierte Gitter erheblich flexibler. Sie gestatten mehr Freiheiten bei der Netzgenerierung und dadurch bedingt qualitativ höherwertige Gitter. Manche sehr komplizierten Gebiete sind fast nur unstrukturiert zu triangulieren. Sie lassen sich leichter an die Charakteristik einer vorhandenen Lösung adaptieren, um mit wenigen Unbekannten genaue Lösungen zu finden.

Strukturierte Gitter dagegen können deutlich effizienter sein. Sie müssen keine Netztopologie speichern, da diese implizit vorgegeben ist. Auftretende Matrizen sind hochgradig strukturiert und können oft sehr speichereffizient als Stern dargestellt werden. Durch den geringeren Speicherverbrauch sind sie auf aktuellen Computerarchitekturen, die erheblich schneller rechnen als auf den Speicher zugreifen können, im Vorteil. Die Implementierung kann etwas einfacher sein. Mehrfach zusammenhängende Gebiete können jedoch nur mit Tricks bei der Behandlung von künstlichen Randbedingungen oder zusammengesetzt aus einzelnen strukturierten Blöcken bearbeitet werden.

Theoretisch am effizientesten wären kombinierte Verfahren, die blockweise strukturierte Netze für den größten Teil des Gebietes verwenden und komplizierte Ecken und Kanten und die Verbindung der Blöcke mit unstrukturierten Netzen behandeln. Diese blockorientierte Vorgehensweise bietet sich auch für eine Parallelisierung auf der Basis von Gebietszerlegungsmethoden an, wobei jeder Rechenknoten oder auch jede Gruppe von Knoten einen Block bearbeitet. Der Implementierungsaufwand für ein solches System ist jedoch für ein Forschungsprogramm im Rahmen einer Dissertation zu hoch.

Wegen der in [Kef97] gemachten Erfahrungen fiel die Entscheidung wieder zugunsten einer unstrukturierten Netzrepräsentation. Der Vorteil der damit vorhandenen Erfahrung und des bewährten Gittergenerators TRIANGLE, der beliebige ebene Gebiete trianguliert, überwog den vermuteten etwas höheren Programmieraufwand. Bei unstrukturierten Verfahren sind Vierecksnetze wenig sinnvoll und schieden deshalb aus.

Die gegen Ende der Arbeit erfolgte Erweiterung auf drei Dimensionen verfolgt aus Zeitgründen einen Kompromiß. Da für 3D kein adäquater Gittergenerator zur Verfügung stand und das bereits vorhandene Programm stellenweise umstrukturiert hätte werden müssen (es war ursprünglich lediglich auf 2D ausgelegt), kam das bei den Beispielen bereits erwähnte Extrusionsverfahren zum Einsatz, das ein beliebiges ebenes Gebiet prismatisch in die Höhe zieht und dabei die aus dem 2D-Bereich vorhandene Infrastruktur zur Berechnung der Topologie, der Matrixeinträge und schließlich die numerischen Löser benutzt. In Abschnitt A.6 sind weitere Informationen zu dieser Problematik dargestellt.

Die Erstellung der unstrukturierten Dreiecksnetze aus den mit kleinen Hilfsprogrammen generierten Umrißbeschreibungen erledigte das bewährte Programm TRIANGLE von Richard Shewchuk [She96]. Es erzeugt qualitativ hochwertige Delauny-Triangulationen mit wählbarem Minimalwinkel und ist dabei schnell und zuverlässig. Einziges Manko ist, daß es keine eventuell vorhandenen Anisotropien berücksichtigen kann. Die Gitter für Abschnitt 6.3 wurden deshalb mit einem eigenen einfachen Programm erzeugt.

### A.3 Berechnung der Matrixelemente

Aufgrund der gewählten unstrukturierten Dreiecksgitter und der großen Flexibilität bei der Wahl der Finiten Elemente ist der Aufbau der verschiedenen Matrizen auf den ersten Blick etwas unübersichtlich. Tatsächlich wird das Grundgerüst von einer einzigen Funktion bereitgestellt, die nacheinander alle Dreiecke abläuft. Für jedes Dreieck wird nun für jede beliebige Kombination aus Ecke, Kante und Dreieck die passende Funktion einer als

Klasse implementierten Bilinearform aufgerufen, also die Funktionen EckeEcke, EckeKante, KanteEcke, EckeDreieck etc. Jeder dieser Funktionen wird mitgeteilt, welche Nummer die entsprechende Unbekannte auf der linken und der rechten Seite der Bilinearform hat, so daß der passende Matrixeintrag direkt an die passende Stelle gelangt. Fallen mehrere Unbekannte auf einen Knoten, wie beispielsweise die x- und y-Komponenten einer Geschwindigkeit oder die drei Bubblefunktionen vierten Grades auf einem Dreieck, so gilt die Vereinbarung, daß die erste Unbekannte mit übergeben wird und die Bilinearform selbständig die folgenden Einträge fortlaufend aufbaut. Der einzige Sonderfall ist die Kante mit mehreren Positionen für Unbekannte, beispielsweise bei kubischen Elementen, da die Kante von den beiden anliegenden Dreiecken in zwei entgegengesetzten Richtungen aufgerufen wird. Hier muß die Bilinearform entscheiden, ob die Kante in Vorwärts- oder Rückwärtsrichtung liegt, und die Unbekannten entsprechend zuordnen.

Die Bilinearform kann dabei selbstverständlich für die linke und rechte Seite verschiedene Numerierungen verwenden und auch auf ganz unterschiedlichen Elementen arbeiten. Kanonisches Beispiel dafür ist der Druckterm in den Stokes-Gleichungen  $(p_h, \text{div } v_h)$ , der auf dem Druck- wie auch auf dem Geschwindigkeitsraum operiert und auch durch die unterschiedlichen Randbedingungen ganz unterschiedliche Numerierungen erfordert. Die solchermaßen erzeugten Matrizen sind dann logischerweise rechteckig. Nützlich ist dies auch bei nichthomogenem Dirichletrand bei der Erstellung der rechten Seite, für die nur der Rand durchnumeriert wird, die Massenmatrix mit der normalen Numerierung erzeugt wird und diese Matrix schließlich mit dem Vektor der Randwerte zu multiplizieren ist.

Die Berechnung der einzelnen Matrixeinträge selbst als Integrale der Basisfunktionen erfolgt analytisch durch eine jeweils einzeln erstellte Formel für das Element und ist folglich exakt. Diese Formeln wurden für jede Basisfunktion jedes Elementes mit *Mathematica* erzeugt.

Das Konzept hat sich im Prinzip gut bewährt, da alle genannten Funktionen vom Compiler problemlos inline generiert werden können und so trotz modularen Aufbaus die volle Geschwindigkeit der Maschine zur Verfügung steht. Mit der Zunahme der Anzahl der implementierten Finiten Elemente zeigt sich jedoch auch ein Nachteil. Da generell jede Bilinearform zwei beliebige Elemente miteinander verknüpfen kann, sind Formeln und Funktionen für jede Kombination Element-Element erforderlich. Deren Zahl wächst quadratisch mit der Anzahl der Elemente. Bei den ursprünglichen 4 Elementen war dies noch ganz gut handhabbar. Wenn jedoch mehr und komplexere Elemente zur Verfügung stehen sollen, ist dies nicht mehr so handlich, zumal beispielsweise für ein einfaches Lagrange-Element vierter Ordnung auch die Formeln nicht mehr ganz so übersichtlich sind. Ein neuer Ansatz könnte deshalb auf einer direkten Auswertung der Gaußschen Integrationsformeln an den entsprechenden Punkten aufbauen und würde so lediglich für jede Basisfunktion jedes Elementes eine Punktauswertung an beliebiger Stelle erfordern. Gängige Integrale könnten als Spezialfälle behandelt und exakt integriert werden. Dies würde die Hinzufügung weiterer Elemente deutlich vereinfachen. Außerdem könnten damit ohne großen zusätzlichen Aufwand auch Trilinearformen berechnet werden, wie sie beispielsweise für den konvektiven Term der Navier-Stokes-Gleichungen erforderlich sind. Eine vollständige Behandlung dieser Terme mit der vorliegenden Implementierung würde kubisch mit der Zahl der Elemente

wachsen! In der Praxis hat sich auch gezeigt, daß der Aufbau der Systemmatrizen nur einen relativ geringen Anteil der Gesamtzeit beansprucht, so daß die im Gegensatz zur exakten analytischen Integration numerisch aufwendigere Gauß-Integration nicht wesentlich ins Gewicht fiel.

Andererseits ist der Aufwand für ein zusätzliches Finites Element aber auch relativ begrenzt. Die Formelerstellung mit *Mathematica* dauerte beispielsweise für das kubisch/quadratische Element etwa eine Stunde, eine weitere Stunde ist zur Verallgemeinerung der Formeln zu veranschlagen (die per Hand erfolgt), eine weitere Stunde erfordert das Eintippen der Integrationsfunktionen, zehn Minuten die Anpassung des Hauptprogrammes und noch einmal zwei Stunden die Suche nach Tipp- und Denkfehlern bei der Eingabe, die sich glücklicherweise in der Regel schnell bemerkbar machen. Alles zusammen ist etwa an einem halben Arbeitstag zu erledigen, zumindest solange man sich auf eine Kombination Geschwindigkeitselement/Druckelement und die dazu erforderlichen Integrale beschränkt. Bei der näherungsweise Behandlung mit Gauß-Integration würde die Neuerstellung des angesprochenen Elementes insgesamt schätzungsweise eine Stunde erfordern und dabei sofort alle Element- und Ableitungskombinationen abdecken.

## A.4 Direkte Lösungsverfahren

Wenn alle benötigten Systemmatrizen aufgestellt worden sind, müssen die entstandenen Gleichungssysteme auch gelöst werden. Im Unterschied zur vorangegangenen Diplomarbeit [Kef97] wurde diesmal kein Mehrgitterverfahren implementiert, da für die Aufstellung der Eigenwertprobleme nach (4.3) dasselbe System (das Geschwindigkeits-Poisson-Problem) für sehr viele rechte Seiten (alle Druck-Basisfunktionen) zu lösen ist. Iterative Verfahren können dies nicht oder nur wenig ausnutzen und müssen jede rechte Seite für sich lösen. Direkte Verfahren zerlegen die Systemmatrix dagegen ein einziges Mal und können dann alle rechten Seiten am Stück in die resultierenden Dreiecksmatrizen vorwärts und rückwärts einsetzen. Der nominell größere Speicheraufwand für direkte Verfahren ist bei neueren, ausgefeilten Methoden nicht sehr groß (die zerlegte Matrix belegt bei  $10^5$  Unbekannten etwa den fünffachen Speicherplatz der Originalmatrix) und fällt hier wieder wegen der vielen rechten Seiten nicht ins Gewicht. Außerdem können direkte Verfahren oftmals schneller implementiert werden, insbesondere wenn aktuelle Rechnerarchitekturen mit mehreren Speicherhierarchien (Caches) ins Spiel kommen.

In der Praxis hat sich herausgestellt, daß der implementierte direkte Löser zumindest in zwei Dimensionen absolut konkurrenzfähig zu einem Mehrgitterverfahren ist (im Gegensatz zu anderen iterativen Verfahren wie CG, die bei den berechneten Gitterfeinheiten nicht mehr mithalten können). Zusätzlich hat er den Vorteil, daß er nicht auf einer etwas heuristisch motivierten Grobgitterkorrektur basiert, die bei unstrukturierten Netzen immer etwas schwierig zu definieren ist, auch wenn man zu algebraischen Mehrgitteralgorithmen übergeht. Letztendlich kommt er für eine reguläre Systemmatrix immer zu einer Lösung, wogegen ein iteratives Verfahren allgemein und ein Mehrgitterverfahren im besonderen auch leicht divergieren kann (beispielsweise bei den hochgradig anisotropen Gittern aus

Punkt 3.3.3). Der einzige Nachteil betrifft die Behandlung semidefiniter Matrizen, wo der iterative Löser in der Regel im orthogonalen Komplement des Kerns konvergiert, was häufig genau das Gewünschte ist, und der direkte Löser aufgeben muß (sofern man keine speziellen Maßnahmen trifft). Dieser Fall tritt bei den hier behandelten Problemen allerdings nicht auf. Alles in allem war die Entscheidung für den direkten Löser optimal.

Da die Zerlegung der vollen Matrix viel zu aufwendig ist, wurden einige Verfahren speziell für dünn besetzte Systeme auf ihre Eignung für den vorliegenden Anwendungsfall (FEM-Steifigkeitsmatrizen) getestet. Obwohl sie prinzipiell für alle Matrizen geeignet sind, können sie besonders vorteilhaft bei positiv definiten Matrizen eingesetzt werden. Glücklicherweise besitzen sowohl die Steifigkeitsmatrizen wie auch die Massenmatrizen diese Eigenschaft. Für positiv definite Matrizen ist bekanntlich eine beliebige Umordnung der Unbekannten möglich, und auch ohne Pivotsuche sind keine Schwierigkeiten durch kleine oder verschwindende Pivotelemente zu befürchten. Das hat den Vorteil, daß nach der Nummerierung der Unbekannten die Positionen feststehen, an denen Auffüllung eintritt, und zwar unabhängig vom tatsächlichen Wert der Matrixeinträge. Außerdem kann man den Cholesky-Algorithmus verwenden, der nur halb so viele numerische Operationen erfordert wie das klassische Gauß-Verfahren. Indefinite Systeme, bei denen aus Stabilitätsgründen Pivotsuche erforderlich ist, sind deshalb grundsätzlich erheblich schwieriger zu lösen.

#### A.4.1 Bandlöser und Bandbreitenreduktion nach Cuthill-McKee

Die einfachste Vorgehensweise bei der Entwicklung eines Löser für dünn besetzte Matrizen besteht darin, die Matrix durch Umordnung der Zeilen und Spalten auf Bandform zu bringen und darauf die klassische Gaußelimination (oder Cholesky, falls die Matrix positiv definit ist) anzuwenden. Man sieht leicht, daß ohne Vertauschungen alle nichtverschwindenden Einträge innerhalb dieses Bandes liegen, und mit Zeilenvertauschungen kann sich die obere Bandbreite maximal um die untere Bandbreite vergrößern. Damit kann von vorneherein genügend Speicherplatz auch für aufgefüllte Matrixelemente bereitgestellt werden und der Aufwand ist begrenzt durch das Produkt aus dem Quadrat der Bandbreite und der Matrixgröße.

Diese Methode ist dann sehr gut geeignet, wenn die Matrix auf eine sehr kleine Bandbreite gebracht werden kann, beispielsweise in einer Dimension, wo sie dann tridiagonal oder bei Elementen höherer Ordnung auch fünf- oder siebendiagonal ist. In mehr Dimensionen ist jedoch die Bandbreite zwangsläufig mindestens von der Größenordnung der Querschnittsfläche des Gitters, bei  $N$  Unbekannten also in zwei Dimensionen von der Größenordnung  $O(N^{1/2})$  und in drei Dimensionen gar  $O(N^{2/3})$ . Der Speicheraufwand beträgt also  $O(N^{3/2})$  bzw.  $O(N^{5/3})$  und der Rechenaufwand etwa  $O(N^2)$  bzw.  $O(N^{7/3})$ . Dies ist zwar schon eine erhebliche Einsparung gegenüber der vollen Matrix mit  $N^2$  Speicheraufwand und  $O(N^3)$  Rechenoperationen, aber bei nur  $O(N)$  nichtverschwindenden Einträgen in der Originalmatrix noch nicht ganz befriedigend.

Ein ebenfalls nicht ganz trivialer Punkt ist die erforderliche Umordnung der Unbekannten zur Minimierung der Bandbreite. Hierfür gibt es verschiedene heuristische Verfahren, da eine exakte Lösung NP-vollständig ist. Einer der bekannten und bewährten Algorithmen

zur Ermittlung einer geeigneten Numerierung der Unbekannten stammt von Cuthill und McKee [CM69]. Er arbeitet auf dem Graphen der Besetzungsstruktur der zu zerlegenden Matrix, wobei die Knoten die Unbekannten darstellen und die Kanten dazwischen die nicht-verschwindenden Einträge. Die Besetzungsstruktur wird dabei als symmetrisch angenommen. Ausgehend von einem Startknoten werden nun alle anderen Knoten der Reihe nach durchnumeriert, wobei der Graph als Baum per Breitensuche abgelaufen wird. Dadurch werden zuerst alle Nachbarknoten des Startknotens numeriert, danach deren Nachbarknoten usw. Heuristisch ist klar, daß dadurch eng vernetzte Teilbereiche zusammengehalten werden. Ein kleines Problem ist die Wahl eines geeigneten Startpunktes, der möglichst weit an der Graphenperipherie liegen sollte. Eine weitere Schwierigkeit ist ein geeignetes Kriterium zur Reihenfolge der Nachbarn gleicher Ordnung, das die Bandbreite erheblich beeinflussen kann. Hierfür gibt es jeweils verschiedene Varianten, die bei der einen oder anderen Matrixstruktur Vor- oder Nachteile haben, ohne einen in den meisten relevanten Fällen optimalen Vertreter.

Allerdings ist der Cuthill-McKee-Algorithmus (CM) zur Bandbreitenoptimierung ganz gut brauchbar, solange die Probleme nicht allzu groß werden und der erhöhte Speicheraufwand zur Speicherung der vollen Bandmatrix noch erträglich ist. Er läuft ziemlich schnell ab ( $O(N)$ ), ist sehr robust und einfach zu implementieren. Benutzt man anstelle einer vollbesetzten Bandstruktur eine Skyline-Speicherung, so hat sich herausgestellt, daß es zumeist vorteilhaft ist, die gefundene Reihenfolge einfach umzudrehen (RCM, Reverse Cuthill-McKee) und so mehr Nichtnullelemente in den unteren Teil der Matrix zu drängen, in Richtung auf eine Pfeilmatrix. Die Bandbreite als maximaler Abstand zusammenhängender Unbekannter wird dadurch selbstverständlich nicht geändert, aber die bei der Zerlegung entstehende Auffüllung mitunter erheblich reduziert.

Ein Vorteil von CM (und genauso RCM) ist, daß die entstandene Band- oder Skyline-Matrix im Inneren voll besetzt ist. Deshalb können Vorteile moderner Rechnerarchitekturen wie tiefe Speicherhierarchien, lange Pipelines etc. sehr gut ausgenutzt und optimierte Kernel für dichte Matrizen (wie die BLAS) verwendet werden. Besonders wichtig ist das beim Einsatz von Vektorrechnern, die auf solch dichte Teilmatrizen angewiesen sind, um die schnellen Vektoreinheiten verwenden zu können.

### A.4.2 Nested Dissection

Bei der Analyse der Gauß-Elimination dünn besetzter Matrizen stellt man schnell fest, daß die entstehende Auffüllung bislang unbesetzter Matrixeinträge um so kleiner ist, je später eine Zeile mit großer Bandbreite eliminiert wird. Die beiden Extremfälle sind die Pfeilmatrizen (Diagonalmatrix mit einer vollbesetzten Zeile und Spalte) aus Abbildung A.1, die bei der Zerlegung entweder vollständig aufgefüllt werden (Beispiel links, Pfeilrichtung links oben) oder ihre Besetzungsstruktur beibehalten (Beispiel rechts, Pfeilrichtung rechts unten). Ein möglicher Ansatz versucht deshalb rekursiv, eine solche Block-Pfeilmatrix zu erzeugen. Dazu werden die Knoten in drei Mengen geteilt, von denen zwei nur über Knoten der dritten Menge (den Trenner) miteinander verbunden sind, die möglichst klein gehalten wird. Die beiden größeren Mengen werden nun nacheinander numeriert und zuletzt die ver-

bindende dritte Menge. Dadurch erhält man bereits die gewünschte Block-Pfeilmatrix. Der Vorgang wird für die beiden größeren Mengen rekursiv fortgesetzt, die nun selbst wieder solche Block-Pfeilstruktur haben, bis die Blöcke so klein werden, daß sich eine weitere Aufteilung nicht mehr lohnt. Abbildung A.2 zeigt einen Besetzungsgraphen nach drei solchen rekursiven Teilungsschritten und die entstehende Besetzungsstruktur der umgeordneten Matrix. Es ist eine Frage der Implementierung, ob diese rekursive Prozedur genau auf diese Weise durchgeführt wird, oder ob zunächst alle inneren Blöcke und erst anschließend alle Trennblöcke numeriert werden.



Abbildung A.1: Pfeilmatrizen ohne Auffüllung (links) und mit maximaler Auffüllung (rechts)



Abbildung A.2: Schema der Besetzungsstruktur nach drei rekursiven Teilungen

Da mit dem Trenner die Knotenmenge rekursiv in zwei Hälften geteilt wird, wird dieses Verfahren als Nested Dissection bezeichnet. Die inneren Blöcke sind alle voneinander unabhängig und können deshalb parallel zerlegt werden, so daß auch eine Parallelisierung auf natürliche Weise möglich ist. Je nach Anzahl der vorhandenen Rechenknoten kann auch ein Teil der Trenner noch parallel bearbeitet werden. Spätestens der letzte globale Trenner muß jedoch auf einem einzelnen Prozessor bearbeitet werden.

Die Eignung von Nested Dissection (ND) steht und fällt mit der Qualität der Trenner. Sie sollten möglichst klein sein und die restlichen Knoten in zwei möglichst gleich große Hälften teilen. Dafür gibt es wieder verschiedene heuristische Verfahren, wobei in der Regel ein Starttrenner iterativ verbessert wird, entweder in Richtung auf weniger Knoten im Trenner oder auf gleichmäßigere Verteilung zwischen den beiden getrennten Mengen [Geo73], [LRT79], [AL94]. Ein möglicher Ansatz für einen Starttrenner beginnt bei einem

zufällig oder gezielt ausgewählten Startknoten und fügt solange benachbarte Knoten hinzu, bis etwa die Hälfte der gesamten Knotenzahl erreicht ist. Alle Nachbarknoten dieser Knotenkugel bilden dann den Trenner, die außerhalb liegenden Restknoten die zweite große Menge. Eine andere Variante wählt zwei möglichst weit voneinander entfernte Knoten und bildet den Trenner aus allen Knoten, deren Abstand von diesen beiden Endknoten um maximal eins differiert. Ausgehend von dem Starttrenner werden anschließend Knoten aus dem Trenner in eines der beiden Gebiete oder umgekehrt verschoben. Dabei ist jeweils darauf zu achten, daß die beiden Mengen auch strikt getrennt bleiben. Diese Iteration verläuft bis zu einem geeigneten Abbruchkriterium, bis sich beispielsweise der Trenner nicht mehr verbessert, obwohl alle Nachbarknoten ausprobiert wurden.

Je nach Abbruch der rekursiven Teilung sind die letzten Blöcke von einer solchen Größe, daß sie einerseits als dicht besetzt behandelt werden können, andererseits aber auch noch groß genug sind, um sinnvollerweise dichte Matrixkernel einsetzen zu können. Auch hier gilt daher wieder das für CM Gesagte, nämlich daß moderne Rechnerarchitekturen in der Nähe der Maximalleistung arbeiten können.

Auf der anderen Seite zeigt die Praxis, daß der Vorteil gegenüber CM oder RCM nicht sehr groß ist. In der Regel, d. h. bei den im Finite Elemente Bereich auftretenden Matrizen, ist ND lediglich um einen kleinen Faktor besser als ein Bandmatrix-Ansatz mit CM. Diese kleine Verbesserung wird mit einem erheblichen Mehraufwand bei der Programmierung erkauft. Insbesondere die Konstruktion guter Trenner ist programmiertechnisch und auch in der Laufzeit ( $O(N \log N)$ ) aufwendig, ganz abgesehen von der komplizierten Datenstruktur zur effizienten Verwaltung der Block-Pfeilstruktur. Gut brauchbar ist das Verfahren lediglich bei topologisch rechteckigen Besetzungsgraphen, die exakt geteilt werden können und wo deshalb von vornherein die Trenner und die Matrixstruktur feststehen. Dann kann man zeigen, daß ND tatsächlich optimale Numerierungen liefert. Diese Situation kann bei strukturierten Gittern mit einfachen Randbedingungen vorliegen, bei den hier verwendeten unstrukturierten Dreiecksnetzen ist sie jedoch sicher nicht gegeben. Eine Testimplementierung hat auch deutlich gezeigt, daß der Aufwand den Nutzen erheblich übersteigt.

### A.4.3 Minimum Degree

Der letzte beschriebene Algorithmus, der schließlich auch Eingang in die endgültige Fassung des Programmes fand, nennt sich Minimum Degree (MD) und basiert auf einer relativ simplen Heuristik [Liu85], [GL89], [Liu89]. Bei der Elimination eines Knotens auf dem Besetzungsgraphen stellt sich heraus, daß dadurch alle Nachbarknoten miteinander verbunden werden und der Graph so aufgefüllt wird. MD numeriert deshalb genau den Knoten als nächsten, der die geringste Zahl an Nachbarknoten (minimalen Grad) hat, in der Hoffnung, daß dadurch möglichst wenig Auffüllung produziert wird. Bei der Numerierung ergeben sich automatisch auch die Stellen, an denen Auffüllung eintritt, so daß bereits vor Beginn der eigentlichen numerischen Operationen die Besetzungsstruktur der resultierenden Dreiecksmatrizen feststeht und entsprechend Speicherplatz bereitgestellt werden kann. Die entstehende Numerierung und damit auch Auffüllung hängt jedoch ziemlich stark davon ab, welcher Knoten gewählt wird, wenn mehrere Knoten mit minimaler Nachbarzahl vorhan-

den sind. Die Auflösung solcher Fälle mit einem untergeordneten Kriterium unterscheidet die verschiedenen Varianten des MD-Algorithmus. Es sei angemerkt, daß für spezielle Gebiete, bei denen ND optimal arbeitet, MD und ND zu identischen Numerierungen führen können und MD deshalb zumindest ebenbürtig sein sollte.

Weitere Varianten entstehen durch eine Aufhebung der strikten Minimumeigenschaft zugunsten einer verbesserten Laufzeit. Für jeden eliminierten Knoten müssen nämlich alle Nachbarknoten miteinander verbunden und ihre Grade neu bestimmt werden. Zusätzlich ist jeweils der nächste Knoten minimalen Grades aus der Kandidatenliste auszuwählen. Eine genaue Zählung der dazu notwendigen Operationen zeigt, daß diese in der Größenordnung der numerischen Operationen liegt, zumeist sogar etwas höher ist. Eine effiziente Implementierung der Numerierung ist deshalb sehr wichtig, da sie mehr als die Hälfte der gesamten Zeit für die Zerlegung in Anspruch nimmt. Hier können vorteilhaft fortgeschrittene Datenstrukturen wie beispielsweise Prioritätswarteschlangen und Algorithmen zur Bearbeitung von Graphen verwendet werden. Die STL der Standard-C++-Bibliothek enthält glücklicherweise Funktionen für all diese Anforderungen und reduziert damit den Implementierungsaufwand auf ein erträgliches Maß. Tatsächlich war MD sogar einfacher und schneller zu programmieren als ND, was sicher auch an der guten Sprachunterstützung liegt.

Die implementierte Variante nennt sich Multiple Minimum Degree (MMD) und zeichnet sich dadurch aus, daß jeweils ganze Gruppen von Knoten eliminiert werden. Hierzu werden alle Knoten minimalen Grades aus der Liste ausgewählt, die nicht direkt miteinander verbunden sind, und gemeinsam behandelt. Danach werden alle Nachbarknoten dieser Gruppe auf den neuesten Stand gebracht und so zahlreiche mehrfache Neuberechnungen eingespart. Zur Auflösung von Pattsituationen werden bei Knoten gleichen Grades bevorzugt jene ausgewählt, deren Nachbarn schon länger eliminiert wurden, um so tendenziell die gesamte Bandbreite etwas kleiner zu halten. Dies ist aus Gründen größerer Lokalität beim Speicherzugriff manchmal vorteilhaft.

Eine effiziente Implementierung auf modernen Architekturen ist allerdings ziemlich schwierig, da der Verwaltungs- und Numerierungsaufwand dem numerischen Aufwand vergleichbar ist. Eine Möglichkeit besteht lediglich darin, Gruppen von Knoten zusammenzufassen, die dicht oder fast dicht miteinander verbunden sind, und MD auf diese Makroknoten und ihre Verknüpfungen untereinander anzuwenden. Der Numerierungsaufwand hängt dann nur noch von der Zahl der Makroknoten ab, während der numerische Aufwand weiterhin von der Gesamtzahl der Knoten bestimmt wird. Allerdings wird dadurch zusätzliche Auffüllung produziert, so daß ein Kompromiß zwischen Effizienz und Speicherbedarf gefunden werden muß. Diese Optimierung ist aber generell maschinenspezifisch und sollte deshalb erst nach sorgfältigen Messungen der Engpässe vorgenommen werden. Vorteilhaft kann die genannte Vorgehensweise vor allem bei Systemen von Differentialgleichungen und komplizierteren Elementen höherer Ordnung angewendet werden, die generell eine lokal größere Besetzungsdichte aufweisen und sich fast in natürlicher Weise zu Makroknoten verbinden lassen.

#### A.4.4 Praktische Erfahrungen

In der Praxis zeigt sich, daß für zweidimensionale Probleme der Speicherbedarf der Matrix bei Größenordnungen von bis zu  $10^6$  durch Auffüllung um einen Faktor von maximal 10 vergrößert wird. Die Anzahl der Rechenoperationen für die Zerlegung entspricht daher weniger als 100 Multiplikationen mit der Originalmatrix. Im Vergleich zu einem Mehrgitterverfahren entspricht dies weniger als 10 W-Zyklen mit jeweils zwei Vor- und Nachglättungen, was als Minimum für ein einigermaßen zuverlässiges Mehrgitterverfahren angesehen werden kann. Das direkte Verfahren hat jedoch den Vorteil, unabhängig von Triangulierung, Diskretisierung, Anisotropie und Koeffizienten sicher zu einer Lösung zu gelangen. Die Konvergenz von Mehrgitterverfahren ist dagegen nicht immer mathematisch streng zu beweisen. Insbesondere bei komplizierteren Gebieten, anisotropen Triangulierungen und stark schwankenden Koeffizienten ist es nicht immer robust und gleichzeitig noch effizient. (Mit hinreichend vielen Glättungsschritten kann ein Mehrgitterverfahren immer zur Konvergenz gezwungen werden, allerdings degeneriert es dann im Extremfall beispielsweise zu einer Gauß-Seidel-Iteration.)

Hinzu kommt im hier diskutierten Anwendungsfall die große Zahl rechter Seiten. Beim direkten Verfahren kann jede rechte Seite durch einfache Vor- und Rücksubstitution der einmalig zerlegten Matrix gelöst werden. Ein iteratives Verfahren löst jede rechte Seite einzeln für sich. So entspricht hier der Aufwand für eine rechte Seite etwa einem einzigen W-Zyklus, was selbst bei einem idealen Mehrgitteralgorithmus wohl kaum zur Konvergenz ausreichen wird. Einziger Nachteil des direkten Verfahrens ist der etwas höhere Speicherbedarf der zerlegten Matrix mit Auffüllung. Wegen der schon mehrfach erwähnten zahlreichen rechten Seiten für die Eigenwertberechnung fällt dies allerdings beim gesamten Speicherverbrauch des Programmes nicht ins Gewicht.

In drei Dimensionen ist die Situation durch die insgesamt stärkere Besetzung der Systemmatrizen etwas ungünstiger, so daß hier bereits bei  $10^5$  Unbekannten mit einer Auffüllung um einen Faktor 30 gerechnet werden muß. Infolgedessen tritt bereits bei kleineren Matrixgrößen das Problem auf, daß der Cholesky-Faktor nicht mehr im Hauptspeicher gehalten werden kann, woraufhin exzessives Swapping stattfindet und das Programm praktisch steht. Speziell für diesen Fall wurde deshalb für die Geschwindigkeits-Poisson-Gleichungen zusätzlich das CG-Verfahren aus der MTL eingebaut. Das ist zwar für kleinere Probleme erheblich langsamer als das direkte Verfahren, kann dafür aber dank geringeren Speicherbedarfs auch noch bei etwas größeren Matrizen eingesetzt werden.

Inwieweit die gefundenen Eigenschaften der angesprochenen Verfahren für das betrachtete Problem spezifisch oder allgemeingültig sind, kann noch nicht abschließend beurteilt werden. Im Fall sehr großer Probleme sind wohl iterative oder Mehrgitterverfahren vorzuziehen, solange die Originalmatrix, nicht aber der Cholesky-Faktor im RAM gehalten werden kann. Dies trifft besonders auf "einfache" Konfigurationen zu, wie beispielsweise lineare Standard-Elemente auf einem regulären Würfelgitter, wo Mehrgitter bekanntlich sehr gut geeignet sind. Da Mehrgitteralgorithmen auf zunehmend komplexeren Gebieten Schwierigkeiten bekommen kann, direkte Verfahren aber unabhängig davon sind, ist das direkte Verfahren auf jeden Fall vorzuziehen, solange kein Swapping eintritt.

Generell kann man sagen, daß der angesprochene direkte Minimum-Degree-Algorithmus besonders gut für das originale oder modifizierte Uzawa-Verfahren geeignet ist, da hierfür die Geschwindigkeits-Poisson-Probleme in jeder Iteration gelöst werden müssen und der Zerlegungsaufwand sich so über zahlreiche Iterationen amortisiert. Der CG-Löser muß dagegen in jeder Iteration neu aufsetzen und ist so in der Regel insgesamt bis zum Erreichen globaler Konvergenz deutlich langsamer.

## A.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Nach der Aufstellung der Systemmatrizen sind letztendlich die Eigenwerte und Eigenvektoren nach einer der beiden Vorschriften (4.3) oder (4.4) zu berechnen. Auch dies kann entweder mit einer direkten Methode geschehen, die deterministisch nach einer festen Anzahl von Operationen zum Ziel führt, oder iterativ, wo nach Erreichen einer festgelegten Genauigkeit die Iteration abgebrochen wird.

Wenn alle Eigenwerte berechnet werden sollen, sind direkte Verfahren in der Regel günstiger anzuwenden, da sie sowieso automatisch alle Eigenwerte auswerfen. Wenn gleichzeitig die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt werden sollen, erhöht sich der Aufwand etwas, müssen dann doch alle Umformungen vollständig mitgenommen werden. Im Gegensatz dazu liefern iterative Verfahren stets nur einzelne Eigenwerte oder Gruppen von Eigenwerten. Sie sind folglich besonders dann vorteilhaft, wenn nur einige Eigenwerte interessieren, beispielsweise die kleinsten oder größten, absolut oder vom Betrag. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich ganz automatisch. Die in Punkt A.5.2 angesprochenen Verfahren vom Arnoldityp gestatten, ganz selektiv bestimmte Eigenwerte zu berechnen und benötigen dafür lediglich Multiplikationen mit der Systemmatrix.

Alle zu untersuchenden Systemmatrizen sind symmetrisch und zumindest positiv semi-definit, was bei der Bestimmung der Eigenwerte wie schon zuvor bei der Lösung der Gleichungssysteme vorteilhaft ausgenutzt werden kann. Insbesondere ist dadurch überhaupt die Existenz reeller Eigenwerte und der zugehörigen Eigenfunktionen sichergestellt, die ja bei allgemeinen unsymmetrischen Matrizen nicht unbedingt gegeben ist. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind automatisch orthogonal, die Vektoren, die den Eigenraum zu mehrfachen Eigenwerten aufspannen, können leicht orthogonalisiert werden.

### A.5.1 Direkte QR-Verfahren und LAPACK

Der zentrale Ansatz der direkten Verfahren zur Eigenwertberechnung des Typs

$$Ax = \lambda x$$

ist die QR-Iteration. Ausgehend von einer Matrix  $T_0 = A$  wird in jedem Schritt eine QR-Zerlegung mit einer orthogonalen Matrix  $Q_k$  und einer oberen Dreiecksmatrix  $R_k$  berechnet

und daraus eine neue Matrix gebildet:

$$\begin{aligned} Q_k R_k &= T_k \\ T_{k+1} &= R_k Q_k \end{aligned}$$

Diese Iteration bildet das Rückgrat direkter Verfahren, denn man kann zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die  $T_k$  gegen eine Diagonalmatrix (im symmetrischen Fall, ansonsten gegen eine obere Dreiecksmatrix) konvergiert.

In der Praxis wird  $A$  zunächst durch Householder-Transformationen auf Tridiagonalgestalt gebracht, wozu  $O(n^3)$  Operationen erforderlich sind. Auf diese Tridiagonalmatrix wird anschließend die QR-Iteration angewendet, so daß jede Iteration nur noch  $O(n)$  Operationen erfordert. Zur Beschleunigung der Konvergenz wird das Spektrum weiterhin in jedem Schritt nochmals verschoben, so daß die Iteration tatsächlich

$$\begin{aligned} Q_k R_k &= T_k \Leftrightarrow \mu I \\ T_{k+1} &= R_k Q_k + \mu I \end{aligned}$$

lautet. Der Verschiebungsparameter  $\mu$  wird dabei heuristisch möglichst nahe bei einem (vermuteten) Eigenwert von  $A$  gewählt. Bei einer günstigen Wahl von  $\mu$  konvergiert die Iteration zuletzt kubisch, so daß für jeden Eigenwert nur einige Iterationen erforderlich sind, bevor er als unterster Wert auf der Diagonalen steht und die Matrix  $T_k$  zerfällt. Die Iteration wird sodann auf dem Rest von  $T_k$  weitergeführt. Daraus ergeben sich insgesamt  $O(n)$  Iterationen für alle Eigenwerte, oder  $O(n^2)$  Operationen nach der anfänglichen Householder-Tridiagonalisierung, die folglich den Hauptaufwand ausmacht. Sind zusätzlich die Eigenvektoren gewünscht, so müssen alle orthogonalen Matrizen  $Q_k$  auch noch auf die ursprüngliche Householder-Matrix angewendet werden. Das erfordert in jeder Iteration  $O(n^2)$  Operationen, so daß dieser Anteil dann vergleichbar dem Tridiagonalisierungsanteil wird. Insgesamt beträgt der Aufwand nach [GvL89] etwa  $\frac{4}{3}n^3$  Operationen ohne und  $9n^3$  Operationen mit Bestimmung der Eigenvektoren.

Das allgemeine Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda Bx$$

ist dann besonders einfach zu lösen, wenn  $B$  ebenfalls symmetrisch und regulär ist. Dann kann man einfach  $B = LL^T$  zerlegen (bzw.  $LDL^T$  im indefiniten Fall) und das Standardproblem

$$L^{-1}AL^{-T}y = \lambda y$$

mit  $L^T x = y$  lösen (bzw. analog im indefiniten Fall). Da die Eigenwertberechnung ohnehin  $O(n^3)$  Operationen erfordert, ist der Zusatzaufwand von etwa  $\frac{7}{3}n^3$  Operationen für die Zerlegung und Matrixmultiplikation vertretbar.

Eine effiziente Implementierung des QR-Algorithmus findet sich in der LAPACK-Bibliothek (Linear Algebra Package) [ABB<sup>+</sup>95], erhältlich über NETLIB<sup>1</sup>. Darin enthalten sind

<sup>1</sup><http://www.netlib.org>

außerdem zahlreiche weitere Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen, Eigenwertproblemen und SVD-Zerlegungen, jeweils für allgemeine, symmetrische und positiv definite, vollbesetzte und Bandmatrizen, reellwertig oder komplex, in einfacher und doppelter Genauigkeit. Insgesamt ist LAPACK eine sehr umfangreiche Bibliothek von exzellenter Qualität, geschrieben in portablen FORTRAN-77. Um Maschinen mit hierarchischen Speichersystemen (Caches) optimal zu nutzen, verwenden die Algorithmen Blockvarianten, so daß die kleinen Blöcke in Caches näher am Prozessor gehalten werden können und ein schneller Zugriff darauf möglich ist. Weiterhin benutzt LAPACK für elementare Operationen auf Vektoren und Matrizen die BLAS-Bibliothek (Basic Linear Algebra Subprograms) [LHKK79], [DCHH88], [DCDH90], für die zahlreiche Hersteller von Workstations eine hochoptimierte Implementierung bereitstellen. Falls nicht, existiert auch eine portable FORTRAN-77 Version der BLAS.

LAPACK ist stets die richtige Lösung, wenn dicht besetzte Matrizen bearbeitet werden sollen. Diese können entweder voll oder bandstrukturiert sein, leider hat LAPACK jedoch keine Algorithmen für anders strukturierte oder allgemeine dünn besetzte Matrizen, wie sie in der Regel bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen auftreten. Deshalb ist diese Bibliothek eigentlich nur für das Eigenproblem im Druckraum (4.3) sinnvoll einzusetzen, da die auftretende Systemmatrix  $BA^{-1}B^T$  ohnehin voll besetzt ist. Weniger sinnvoll ist es für das Problem im Geschwindigkeitsraum (4.4), da selbst bei optimaler Numerierung die Bandbreite von der Größenordnung  $O(\sqrt{n})$  und der resultierende Speicher- und Rechenaufwand groß wird, denn bei gegebener Diskretisierung ist der Geschwindigkeitsraum erheblich größer als der Druckraum (beispielsweise bis zum oben genannten Faktor von 54 für das  $P_1P_3$ -Element in 3D). Hier sind dann die nachfolgend beschriebenen iterativen Verfahren wesentlich geeigneter.

## A.5.2 Iterative Arnoldi-Verfahren und ARPACK

Von den verschiedenen Verfahren, Eigenwerte und Eigenvektoren iterativ zu bestimmen, hat sich besonders der Algorithmus von Arnoldi [Arn51] bewährt. Er beginnt damit, aus einem Startvektor zunächst einen Krylov-Raum der Matrix  $A$  (mit Dimension  $m$ ) zu bestimmen, erstellt dann für diesen Raum eine Orthonormalbasis und projiziert die Matrix  $A$  orthogonal auf diesen Unterraum. Diese Projektion enthält in ihren  $m$  Eigenwerten Informationen über die gesuchten Eigenwerte der Originalmatrix und die zugehörigen Eigenvektoren.

Im ursprünglichen Verfahren wird dann der Krylov-Raum erweitert und eine neue Projektion mit neuen Eigenwerten berechnet, bis eine genügend genaue Näherung für die interessierenden Eigenwerte vorliegt. Dies kann jedoch sehr aufwendig werden, bis Konvergenz eintritt. Wie bei anderen Krylov-Methoden, beispielsweise dem Lanczos-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, ist es deshalb sinnvoll, bei einer gewissen Dimension des Krylov-Raumes die bisher gesammelten Informationen festzuhalten und einen neuen Raum aus einem neu gewählten Startvektor aufzusetzen. Dazu wird aus den bisher erhaltenen Eigenwerten ein bestimmter Anteil ausgewählt, der im interessierenden Bereich liegt (beispielsweise die algebraisch oder vom Betrag her Kleinsten oder Größten) und der neue

Startvektor aus einer Linearkombination der bisherigen Krylov-Vektoren gebildet. Die Eigenwerte der projizierten Matrix konvergieren dann gegen den entsprechenden Ausschnitt des Spektrums von  $A$ .

Die praktische Implementierung erfordert jedoch etwas Vorsicht. Diese ist insbesondere bei der Orthogonalisierung der Krylov-Vektoren und der Konstruktion des neuen Startvektors geboten, um auch bei schwierigeren Matrizen, beispielsweise mit mehrfachen oder sehr nahe beieinander liegenden Eigenwerten, zuverlässig Konvergenz zu erhalten und nicht einige Eigenwerte numerisch zu verlieren oder zu duplizieren. Insbesondere kurz vor Erreichen der Konvergenz werden die Krylov-Vektoren teilweise fast linear abhängig und der Orthogonalisierungsprozeß damit schlecht konditioniert.

Auch für diesen Algorithmus existiert eine frei verfügbare, effiziente und qualitativ hochwertige Bibliothek namens ARPACK<sup>2</sup> (Arnoldi Package) [LSY97], in der alle diese Schwierigkeiten gelöst wurden. Die implementierte Variante wird mit IRAM (Implicitly Restarted Arnoldi Method) [Sor92] bezeichnet und ist besonders gut geeignet für Eigenwertberechnungen bei großen, dünn besetzten Systemen. Auch das verallgemeinerte Eigenproblem wird abgedeckt, entweder über die Transformation auf das Standardproblem oder aber direkt, außerdem können verschiedene Spektraltransformationen zum Einsatz kommen, die den Konvergenzprozeß beispielsweise bei inneren Eigenwerten erheblich beschleunigen.

Im vorliegenden Anwendungsfall eines verallgemeinerten Eigenwertproblems mit

$$Ax = \lambda Bx$$

sind hauptsächlich die kleinsten Eigenwerte  $\lambda$  interessant, d. h. besonders der kleinste nichtverschwindende und eventuell einige wenige weitere. Hierfür genügt es glücklicherweise, Routinen für die Matrix-Vektor-Multiplikation mit  $A$  und die Lösung von Systemen der Art  $Bx = y$  bereitzustellen. Dazu wird  $B = LL^T$  mit dem in Punkt A.4.3 beschriebenen Minimum-Degree Verfahren einmal zerlegt. Beim Aufbau der Krylov-Räume sind anschließend nur noch Vorwärts- und Rückwärtssubstitutionen durchzuführen.

Die Verwendung von ARPACK ist etwas unorthodox. Um dem Benutzer größtmögliche Freiheit bei der Wahl seiner Matrixstrukturen zu gewähren, muß ein großer Teil der Kontrolllogik auf der Seite des Benutzerprogrammes bleiben, das dann viele einzelne Schritte des Arnoldi-Prozesses aufruft. Erfreulicherweise gibt es jedoch ARPACK++, einen objektorientierten Aufsatz auf ARPACK, der die Schnittstelle erheblich vereinfacht, ohne die Allgemeinheit einzuschränken. Gängige Matrixstrukturen wie beispielsweise vollbesetzte Matrizen und einige dünn besetzte Formate werden direkt unterstützt, andere Matrizen erfordern lediglich eine kleine Anpassung der Schnittstelle und können dann ebenfalls eingesetzt werden. Zusätzlich werden Eigenwerte und Eigenvektoren auf Wunsch in benutzerdefinierten Containern zurückgeliefert. Nach Abschluß der Rechnung stehen verschiedene Informationen zum Fortgang des Algorithmus zum Abruf bereit, um beispielsweise die Charakteristika der Konvergenz zu erfassen. Diese Flexibilität gestattet es, ARPACK++ mit jeder Implementierung eines Matrix-/Vektorkonzeptes einzusetzen, ohne große Anpassungen vornehmen zu müssen.

---

<sup>2</sup><http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>

Nach Messungen in [GS97] wird die Geschwindigkeit der Berechnung durch den Aufsatz von ARPACK++ auf das darunterliegende ARPACK, zumindest für reellwertige Matrizen wie hier, nicht merkbar beeinflusst. Für die hier interessierenden Probleme und die zwanzig kleinsten Eigenwerte sind in der Regel zwischen 30 und 10000 Matrix-Vektor-Multiplikationen und doppelt so viele Dreiecksmatrix-Lösungen erforderlich. Dies ist natürlich um Größenordnungen schneller als die vollständige Lösung mit dem direkten QR-Verfahren aus Punkt A.5.1 und deshalb stets vorzuziehen, wenn nicht wirklich alle Eigenwerte gefordert sind. Besonders bei großen Problemen mit  $10^4$  oder mehr (Druck-)Unbekannten ist das direkte Verfahren wegen mangelnder Hauptspeichergröße prinzipiell ausgeschlossen. Einziger Nachteil ist, daß gelegentlich die Dimension eines invarianten Unterraumes nicht genau erfaßt wird, d. h. daß die Vielfachheit mehrfacher Eigenwerte unterschätzt wird. Im vorliegenden Anwendungsfall ist dies jedoch nur von untergeordneter Bedeutung, da im wesentlichen nur der kleinste nichtverschwindende Eigenwert interessiert und bei tatsächlich mehrfachen Eigenwerten sich die "verlorenen" Eigenvektoren aus Symmetrieüberlegungen rekonstruieren lassen. Beispielsweise ist  $x$  eine Eigenfunktion beim Kreis, und wegen der Symmetrie des Gebietes muß auch  $y$  Eigenfunktion zum selben Eigenwert sein.

## A.6 Übergang zu 3D

Für die dreidimensionalen Beispiele aus Abschnitt 6.4 war eine Änderung des ursprünglich lediglich für ebene Probleme ausgelegten Programmes erforderlich. Um den Aufwand hierbei nicht uferlos wachsen zu lassen, fiel die Entscheidung für eine relativ einfache Lösung, die allerdings die möglichen Gebiete einschränkt. Diese Vorgehensweise vermeidet auch gleichzeitig das Triangulierungsproblem, das in drei Dimensionen für viele Gebiete sehr schwierig werden kann.

Der verwendete Ansatz basiert auf einer Extrusion eines beliebigen ebenen Gebiets, d. h. das bereits fertig triangulierte Gebiet wird prismatisch in die Höhe gezogen. Dadurch haben die dreidimensionalen Körper auf jeder Höhe denselben Querschnitt. Dies bedeutet zwar eine relativ starke Beschränkung, typische Charakteristika des Problems treten jedoch bereits in diesen relativ einfachen Fällen auf, wie die Beispiele aus Abschnitt 6.4 gezeigt haben. Außerdem wäre eine vollständig dreidimensionale Implementierung vermutlich schon an der Beschaffung eines brauchbaren Gittergenerators für beliebige Gebiete gescheitert.

Der Einbau in das bestehende Programm ist unter diesen Voraussetzungen relativ einfach. Zunächst wird ganz normal eine ebene Systemmatrix aufgebaut, wobei lediglich zu beachten ist, daß nunmehr der Laplace-Operator auf drei Geschwindigkeitskomponenten angewandt wird. Die dreidimensionale Variablennumerierung ergibt sich aus der zweidimensionalen, indem lediglich die Ebenen der Reihe nach numeriert werden. Die Variable mit der zweidimensionalen Nummer  $i_2$  in der Ebene  $j$  befindet sich folglich in der dreidimensionalen Numerierung an der Position  $i_3 = N \cdot j + i_2$ , wobei  $N$  die Anzahl der Unbekannten pro Ebene ist. Entsprechend wird die dreidimensionale Systemmatrix aus der zweidimensionalen aufgebaut, indem sie einfach entsprechend dem eindimensionalen Stern des jewei-

ligen Differentialoperators skaliert wird. Für die Diskretisierung des Laplace-Operators mit linearen Element beispielsweise ist der eindimensionale Stern

$$[\Leftrightarrow 1 \quad 2 \quad \Leftrightarrow 1].$$

Folglich wird für jede Ebene  $j$  und jeden Eintrag der zweidimensionalen Systemmatrix  $\bar{a}_{ik}$  eingetragen

$$\begin{aligned} a_{jN+i, jN+k} &= 2 \cdot \bar{a}_{ik}, \\ a_{(j-1)N+i, jN+k} &= \Leftrightarrow \bar{a}_{ik}, \\ a_{(j+1)N+i, jN+k} &= \Leftrightarrow \bar{a}_{ik}, \end{aligned}$$

falls die Ebenen  $j \Leftrightarrow 1$  bzw.  $j + 1$  noch im Gebiet liegen. Analoges gilt selbstverständlich für andere Finite Elemente und andere Differentialoperatoren.

Der Rest des Programmes, also die ganze Prozedur der Eigenwertberechnung kann unverändert bleiben. Falls nur die Eigenwerte an sich interessant sind, sind die Anpassungen also bereits erledigt. Lediglich für die Ausgabe der Eigenfunktionen müssen die einzelnen Ebenen wieder zerlegt werden, um so Schnittbilder zu erhalten. Alternativ werden die Resultate an der Außenseite des Gebietes als Oberflächendiagramme extrahiert.

Bei dreidimensionalen Gebieten steigt die Problemgröße natürlich ganz wesentlich an. Für ein Gebiet mit  $M$  Ebenen und einen Stern der Breite 3, wie angegeben, erhalten wir also  $M \cdot N$  Unbekannte und aus den zweidimensional ursprünglich  $5N$  Matrixeinträgen werden  $15M \cdot N$  Einträge. Die noch berechenbare Gitterfeinheit nimmt dadurch natürlich erheblich ab, die erzielbare Genauigkeit ist deutlich geringer als im ebenen Fall. Mit dem Arnoldi-Verfahren können deshalb bestenfalls etwa  $h \approx 0,04$  erreicht werden.

## A.7 CGNS

Nach den Erfahrungen mit der vorangegangenen Arbeit [Kef97] war frühzeitig klar, daß die Anzahl der Ergebnisdateien und der damit verbundene Verwaltungsaufwand sehr groß werden würde. Insbesondere mit dem Anspruch, jeweils einige oder alle Eigenfunktionen, jeweils für Druck und Geschwindigkeit, bei mehreren Diskretisierungsfeinheiten, für etliche Finite Elemente, bei zahlreichen Beispielen durchzurechnen, war abzusehen, daß ein simples Konzept (1 Ergebnis=1 Datei) sehr schwierig zu verwirklichen wäre. Die Entscheidung fiel deshalb auch frühzeitig für die Verwendung eines Datenbanksystems, das jeweils zahlreiche zusammenhängende Ergebnisse in einer einzigen Datei zusammenfaßt.

Besonders geeignet erschien das CGNS<sup>3</sup> (CFD General Notation System), das dafür alle Voraussetzungen mitbringt und speziell auf die Problematik der Strömungsrechnung zugeschnitten ist. Es gestattet in einer Baumstruktur ähnlich wie in einem Dateisystem die Darstellung der Daten auf verschiedenen Ebenen, angefangen von einer CAD-Beschreibung der Geometrie und der Lage der Gitterknoten über die Beschreibung der physikalischen

---

<sup>3</sup><http://www.cgns.org>

Gegebenheiten des Strömungsproblems (Re-Zahl, Mach-Zahl, Fluidtyp, ...) bis hin zu verschiedenen Randbedingungen und möglicherweise mehreren Lösungen mitsamt Konvergenzverhalten.

CGNS [PAM<sup>+</sup>98] basiert auf einem darunterliegenden Datenbanksystem, dem ADF (Advanced Data Format), das darüber hinaus portable Binärformate zur problemlosen und effizienten Übertragung des Problems zwischen verschiedenen Rechnerarchitekturen gestattet. So ist es beispielsweise möglich, auf einem Windows-PC mit CAD die Geometrie zu generieren, mit einer SUN-Workstation die Gitter zu generieren, auf einem Höchstleistungsrechner das Strömungsproblem zu lösen und das Ergebnis schließlich mit einer SGI-Workstation zu visualisieren. Das ADF-System ist dabei für die unteren Ebenen der Datenbankorganisation zuständig, wohingegen das CGNS einen Standard darstellt, der beschreibt, welche Daten wo und in welcher Form unterzubringen sind.

Alle Möglichkeiten von CGNS und ADF aufzuzählen, ist hier sicher nicht angebracht, aber es läßt sich erahnen, daß es für den vorliegenden Anwendungsfall sehr gut geeignet ist. Wichtig ist hierbei wieder, daß eine gut implementierte Bibliothek frei verfügbar ist, die Schnittstellen zu C und FORTRAN bietet. Diese Bibliothek ist außerdem recht gut dokumentiert und damit relativ einfach verwendbar.

Dennoch mußte auch diese Bibliothek modifiziert werden, um hier von Nutzen zu sein. Ein großer Schwachpunkt des CGNS war nämlich die Beschränkung ausschließlich auf strukturierte Gitter, wofür zwar für Ende 1997 Abhilfe angekündigt war, diese aber schließlich bis Ende 1999 auf sich warten ließ. Deshalb wurde in Eigenregie die Möglichkeit geschaffen, auch unstrukturierte Dreiecksnetze abzuspeichern, wofür zahlreiche Modifikationen erforderlich waren, die wieder den ursprünglichen Autoren von CGNS (bei Boeing, McDonnell Douglas, NASA) zugeleitet wurde, um in künftige Versionen einzufließen. Ein weiteres Problem war die mangelnde Laufzeiteffizienz bei den zahlreichen abzuspeichernden Eigenfunktionen. Die vorhandene Implementierung war von kubischer Ordnung in der Anzahl der Lösungen, was sich bei teilweise einigen hundert oder gar tausend Eigenfunktionen als untauglich erwies. Deshalb wurde ein zusätzlicher Zwischenspeicher (Cache) und einige zusätzliche Funktionen zur effizienteren Verwaltung eingebaut, was im Endeffekt zu linearer Laufzeit führte. Datenbanken mit etlichen tausend Eigenfunktionen und einigen hundert Megabytes können so in wenigen Minuten eingelesen werden. Mit diesen beiden wesentlichen Änderungen war CGNS eine große Unterstützung bei der Verwaltung der angefallenen Informationsmengen.



# Anhang B

## Notation und elementare Ungleichungen

Abschließend hier noch eine Übersicht über die in der Arbeit verwendeten Symbole und Vereinbarungen, sowie einige benutzte Ungleichungen.

- $\vec{u}, p$       Geschwindigkeit und Druck als Lösungen der Stokes-Gleichungen (1.5).
- $\vec{v}, q$       Generische Geschwindigkeiten und Drücke aus den jeweiligen Räumen, in der Regel Testfunktionen.
- $\vec{u}_h, p_h$     Lösungen der diskretisierten Stokes-Gleichungen (3.4).
- $\vec{v}_h, q_h$     Generische diskrete Testfunktionen.
- $\Omega$             Gebiet, innerhalb dessen die kontinuierlichen (1.5) Stokes-Gleichungen oder ihre diskretisierten Varianten (3.4) zu lösen sind: eine beschränkte, offene, zusammenhängende Menge  $\subset \mathbb{R}^2$  oder  $\subset \mathbb{R}^3$ , für die diskreten Gleichungen aus technischen Gründen polygonal, generell stückweise differenzierbar, falls nicht anders angegeben.  $\bar{\Omega}$  ist der Abschluß von  $\Omega$ . Triangulierungen von  $\Omega$  werden als regulär vorausgesetzt, d. h. alle auftretenden Innenwinkel sind von 0 und  $\pi$  weg beschränkt.
- $H_0^{1,2}$         Raum der Funktionen über  $\Omega$  mit quadratintegrablen schwachen Ableitungen, die eine Nullrandbedingung im Spursinne erfüllen. Vervollständigung des  $C_0^\infty(\Omega)$  in der zugehörigen Norm  $\sqrt{\|\cdot\|^2 + \|D\cdot\|^2}$ , die hier wegen der Poincaré-Ungleichung äquivalent ist zur  $|\cdot|_1 = \|D\cdot\|$ -Seminorm. In dieser Arbeit zumeist vektorwertig, d.h. eigentlich  $H_0^{1,2}(\Omega)^d$ .
- $L_0^2$             Raum der quadratintegrablen Funktionen über  $\Omega$  mit verschwindendem Integralmittel mit der zugehörigen Norm  $\|\cdot\|$  (manchmal auch mit der äquivalenten Norm  $\|\cdot\|_0 = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\cdot + c\|$ ).

Es sei darauf hingewiesen, daß in den den Ladyzhenskaya- (1.7) und Babuška-Brezzi-Bedingungen (3.1) sowie ihren verschiedenen Fassungen die Suprema und Infima selbstverständlich über den gesamten angegebenen Raum mit Ausnahme der Nullfunktion zu bilden sind.

Wir verwenden außerdem die *Dreiecksungleichung*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

die per Definition für alle normierten Räume gilt, sowie die verallgemeinerte *Youngsche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$$

für beliebiges  $\epsilon > 0$ , die sich beispielsweise mit der binomischen Formel beweisen läßt.

Ebenfalls benutzt wird die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|,$$

die für den  $\mathbb{R}^n$  mit der Youngschen Ungleichung und einem Homogenitätsargument bewiesen wird.

Weiterhin wird reger Gebrauch von der *Poincaré-Ungleichung* gemacht. Sie besagt, daß eine Funktion durch ihre Ableitungen abgeschätzt werden kann, wenn durch geeignete Nebenbedingungen (beispielsweise Nullrandbedingung oder verschwindendes Integralmittel) die konstante Funktion ausgeschlossen wird und das Gebiet in einem Streifen endlicher Breite eingeschlossen werden kann. Beides ist sicher erfüllt für den  $H_0^{1,2}$  und die hier behandelten beschränkten Gebiete  $\Omega$ . Dann haben wir

$$\|v\| \leq c \|Dv\| = c |v|_1$$

mit einer Konstante  $c$  abhängig von der Breite des einschließenden Streifens, der hier durch den Gebietsdurchmesser abgeschätzt werden kann. Diese Ungleichung folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung quer zum Streifen und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Eine letzte Ungleichung schließlich schätzt die Divergenz eines Vektorfeldes durch seinen Gradienten ab. Ohne weitere Voraussetzungen sieht man sofort

$$\|\operatorname{div} \vec{v}\| \leq \sqrt{d} |\vec{v}|_1$$

und sofern Stetigkeit und eine Nullrandbedingung vorliegt, kann man mittels partieller Integration

$$\|\operatorname{div} \vec{v}\| \leq |\vec{v}|_1$$

beweisen. Da bei den nichtkonformen Elementen aus Punkt 3.1.4 keine Stetigkeit mehr vorliegt, gilt für diese trotz Nullrandbedingung nur die erste Abschätzung, wobei die Normen elementweise zu verstehen sind.