Blochsches Prinzip, Lückenreihen und Semidualität

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von

Jürgen Grahl

aus

Würzburg

Würzburg 2002

Eingereicht am 29.1.2002

bei der Fakultät für Mathematik und Informatik

1. Gutachter: Prof. Dr. St. Ruscheweyh

2. Gutachter: Prof. Dr. W. Bergweiler

Tag der mündlichen Prüfung: 27.8.2002

... Daß ich erkenne, was die Welt
Im Innersten zusammenhält...

J. W. v. Goethe, Faust I

Wenn ich mit Engelszungen redete
Und hätte die Liebe nicht,
So wäre ich doch nur ein tönendes Erz.
Und wenn ich die Prophetengabe besäße
Und alle Erkenntnis,
Und ich hätte die Liebe nicht,
So wäre ich nichts.

1. Korinther 13

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eines der zweifellos faszinierendsten Phänomene der Funktionentheorie ist die - theoretisch bisher allenfalls ansatzweise erfaßte - Korrespondenz zwischen Kriterien für die Konstanz ganzer (bzw. in $\mathbb{C}$ meromorpher) Funktionen und Normalitätskriterien. Von A. Bloch wurde dieses heuristische Prinzip mit den Worten

Nihil est in infinito, quod non prius fuerit in finito.

formuliert, weswegen man es häufig kurz als „Blochsches Prinzip“ bezeichnet. Das bekannteste Beispiel bilden der Kleine Satz von Picard auf der einen, der verschärfte Satz von Montel, der sog. FNT (*fundamental normality test*), auf der anderen Seite. Für eine Vielzahl von Kriterien, die sich überwiegend mit Wertverteilungsfragen, insbesondere mit Picardschen Ausnahmewerten von Differentialpolynomen befassen, ist die Gültigkeit des Blochschen Prinzips gesichert. Als außerordentlich nützlich hat sich hierbei in jüngerer Zeit ein von L. Zalcman 1975 formuliertes Lemma erwiesen, das die Konstruktion einer nichtkonstanten ganzen bzw. meromorphen Funktion aus einer nichtnormalen Familie von im Einheitskreis holomorphen bzw. meromorphen Funktionen gestattet. Damit lassen sich nicht nur relativ milde Kriterien für die Gültigkeit des Blochschen Prinzips angeben (Satz von Robinson-Zalcman), sondern es werden auch erstaunlich einfache und elegante Beweise von Normalitätssätzen möglich, die bei Verwendung der herkömmlichen Methoden, zumeist aus der Nevanlinna-Theorie, mit großem Aufwand verbunden waren.

Auch in der Theorie der Faltungsdualität, bei der Untersuchung der dualen Hülle von Lückenreihen und allgemeiner von “kleinen” (insbesondere zweielementigen) Mengen von im Einheitskreis holomorphen Funktionen, stößt man auf Normalitätsfragen und Probleme der Wertverteilungstheorie, insofern als gewisse Normalitätsaussagen als (hinreichendes) Kriterium dienen, die Nichtsemidualität einer solchen Menge festzustellen.

Daß auch im Falle der Lückenreihen das Blochsche Prinzip gültig ist, daß die Existenz einer ganzen nichtkonstanten nullstellenfreien Funktion mit einer bestimmten Lückenstruktur also äquivalent ist zur Nichtnormalität der zugehörigen Familie von im Einheitskreis nullstellenfreien Lückenreihen, wurde von Ruscheweyh und seinen Koautoren 1985/86 in [28] und [45] vermutet. Sie stellten darüberhinaus die Hypothese auf, daß auch ein enger Zusammenhang zwischen der Semidualität von Lückenstrukturen und der Existenz ganzer nullstellenfreier Funktionen mit den entsprechenden Lücken bestehe. In [28], [45], [51], [52] verifizierten sie diese Vermutungen für Fejér-Lücken und für sog. AP-Lücken der Schrittweite 2.

Diese Ansätze entwickeln wir in der vorliegenden Arbeit fort, hauptsächlich indem wir zahlreiche weitere Indizien zusammentragen, die die Gültigkeit der genannten

Vermutungen untermauern; diese betreffen zum einen AP-Lückenreihen beliebiger Schrittweite, zum anderen strukturelle Eigenschaften der Semidualität. Darüberhinaus beschäftigen wir uns mit der ebenfalls in [28] initiierten Frage nach der Semidualität bei zwei Funktionen. Auf dem Weg zu unserem Hauptresultat in diesem Bereich ergibt sich zudem ein neues Normalitätskriterium, welches frühere Ergebnisse von D. Drasin und H. Chen & X. Hua verallgemeinert.

Das entscheidende Hilfsmittel im Beweis von vielen unserer Resultate (insbesondere derjenigen über AP-Lückenreihen) ist ein tiefliegender Satz von H. Cartan aus dem Jahre 1928, der eine Konvergenzaussage für p-Tupel von im Einheitskreis holomorphen, nullstellenfreien Funktionen, welche einer linearen Relation unterliegen, trifft. Der außerordentlich tiefgründige Beweis benutzt neben einigen Eigenschaften von Wronski-Determinanten vor allem verfeinerte Methoden der Nevanlinna-Theorie, insbesondere eine Reihe von sehr technischen Abschätzungen für eine Verallgemeinerung der Nevanlinna-Charakteristik. Wir geben den Beweis dieses Satzes angesichts seiner zentralen Bedeutung für das Weitere vollständig wieder.

Ziel dieser Arbeit ist es, neben der Darstellung der neuen Ergebnisse, den gesamten derzeitigen Stand des Wissens über Semidualität in einer Form zusammenzutragen, welche die auf den ersten Blick unerwarteten Zusammenhänge zwischen Normalitätstheorie und Dualitätstheorie ein wenig erhellt und zur intensiveren Beschäftigung mit den zahlreichen Fragen einlädt, die wir unbeantwortet lassen müssen. Auch aus diesem Grunde ist die Darstellung sehr ausführlich und in sich abgeschlossen gehalten und setzt keinerlei besonderen Vorkenntnisse voraus; alle benötigten Hilfsmittel werden in den ersten Kapiteln mit Beweis bereitgestellt.

Im ersten Kapitel wird zunächst die Nevanlinna-Theorie, soweit sie für unsere Zwecke relevant ist, ab initio entwickelt, ausgehend von der Poissonschen Formel. Von besonderer Bedeutung für das Folgende sind dabei die Sätze über die logarithmischen Ableitungen. Die tieferliegenden Aussagen der Nevanlinna-Theorie, insbesondere der Zweite Hauptsatz und die Defektrelation, werden in unseren weiteren Betrachtungen nicht benutzt; wir geben sie daher ohne Beweis an - wenngleich es vom Satz über die logarithmische Ableitung bis zum Zweiten Hauptsatz nur noch ein kleiner Schritt ist.

Kapitel 2 stellt die im weiteren benötigten Grundlagen der Normalitätstheorie bereit, insbesondere das Zalcman-Lemma in seiner (fast) allgemeinsten heute bekannten Form. Einige wichtige Normalitätskriterien, die sich mit seiner Hilfe leicht auf die zugehörigen Sätze vom Picardschen Typ zurückführen lassen, führen wir ohne Beweis auf. Am möglicherweise eindrucksvollsten manifestiert sich die Leistungsfähigkeit des Zalcman-Lemmas darin, daß es, wie A. Ros gezeigt hat, eine verblüffend kurze Herleitung des FNT - und damit des Kleinen und Großen Satzes von Picard! - ermöglicht. Mit dieser schließen wir das zweite Kapitel.

Im dritten Kapitel beweisen wir ein Normalitätskriterium für Familien holomorpher Funktionen, für die ein Differentialpolynom der Form

$$a \cdot f^n + f^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} f^{(k_\nu^{(j)})} + b$$

(wobei die Ableitungsordnungen $k_\nu^{(j)}$ gewissen Voraussetzungen genügen und a, a_j, b meromorph sind) nullstellenfrei ist. Dieses verallgemeinert Resultate von Drasin

[10] und von Chen & Hua [5], die den Fall $af^n + f^{(k)} + b \neq 0$ (mit meromorphen Koeffizienten a, b) behandelt hatten. Unser Beweis stützt sich dabei wesentlich auf eine ebenfalls auf Hua [26] zurückgehende Verallgemeinerung des Satzes von Tumura-Clunie. Aus dieser leiten wir zunächst eine Erweiterung eines Resultats von Hayman [21] ab, wonach ganze Funktionen f mit $af^n(z)+f'(z) \neq b$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konstant sind, sofern $a \neq 0$ und $n \geq 3$. Unser Normalitätsresultat ergibt sich sodann im wesentlichen aus dem Zalcman-Lemma in Verbindung mit dem Argumentprinzip.

Kapitel 4 ist dem Beweis des Satzes von Cartan gewidmet. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung in dem Buch von Lang [31]; während der Beweis dort - ebenso wie in der Originalarbeit von Cartan [3] - jedoch nur für den Fall von vier Funktionen ausgeführt, der allgemeine Fall hingegen bloß skizziert wird, stellen wir ihn für den allgemeinen Fall detailliert dar, wenngleich dies zwangsläufig mit einem gewissen Verlust an Eleganz verbunden ist.

In Kapitel 5 wird das Konzept der Semidualität eingeführt, und es werden die im folgenden immer wieder benötigten Hilfsmittel zur Verfügung gestellt; anhand des Kriteriums der schwachen Umgebungseigenschaft wird die Verbindung zu Normalitätsfragen deutlich.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich eingehend mit Lückenreihen. Nachdem wir zunächst die oben erwähnte grundlegende Vermutung über den Zusammenhang zwischen Semidualität einer Lückenstruktur T, Nichtnormalität der Familie A_T^0 der im Einheitskreis nullstellenfreien normierten Funktionen mit dieser Lückenstruktur und Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen in A_T^0 formuliert und diskutiert haben, tragen wir das bekannte Wissen über Fejér- und Fabry-Lücken zusammen. Sodann widmen wir uns den AP-Lückenreihen beliebiger Schrittweite: Das Normalitätsproblem können wir abschließend lösen, während uns die (negative) Beantwortung der Semidualitätsfrage nur unter gewissen, allerdings relativ schwachen Einschränkungen an die betrachtete Lückenstruktur gelingt. Anschließend untersuchen wir mehrere allgemeine Konstruktionsverfahren, mit denen sich neue semiduale Lückenstrukturen aus bereits bekannten gewinnen lassen. Von besonderer Bedeutung ist dabei das Problem, eine gegebene semiduale Struktur so zu vergrößern, daß die Semidualität erhalten bleibt. Wir geben hinreichende Kriterien dafür an, daß eine derartige Vergrößerung möglich ist. Desweiteren diskutieren wir einen ersten vorläufigen Ansatz, wie sich unsere grundlegenden Vermutungen über Lückenreihen möglicherweise auf die Betrachtung bestimmter Extremalprobleme für Lückenpolynome reduzieren lassen. Im Anschluß daran geben wir einige Kriterien an, denen im Falle der Existenz von ganzen nichtkonstanten nullstellenfreien Funktionen in A_T^0 die Elemente in der dualen Hülle von Funktionen mit Lückenstruktur T genügen müssen; dies kann als erster Schritt zum Beweis der für diesen Fall vermuteten Semidualität angesehen werden. Am Ende des Kapitels schließlich befassen wir uns kurz mit einer möglichen Verallgemeinerung des Konzepts der Lückenreihen, die darin besteht, die Lückenbedingungen dahingehend abzuschwächen, daß die betreffenden Koeffizienten nicht verschwinden, sondern lediglich in einem gewissen Sinne "klein" sind.

Im abschließenden siebten Kapitel erweitern wir unsere Semidualitätsuntersuchungen auf Mengen aus zwei (oder zuweilen drei) Funktionen. Leider ist unser Wissen hierüber bisher so kärglich, daß wir uns im wesentlichen auf die Betrachtung relativ spezieller Beispiele beschränken müssen, aus denen sich ein echtes Gesamtbild oder auch nur die

Ahnung eines solchen noch kaum oder allenfalls sehr schemenhaft formt. Wie wenig die bisher verfügbaren Methoden dem Problem wirklich gerecht werden, zeigt sich wohl am klarsten darin, daß selbst das starke Normalitätsresultat aus Kapitel 3 lediglich für ganz spezielle Fälle die Klärung der Semidualitätsfrage erlaubt. Die meisten der von uns betrachteten Mengen erweisen sich als nichtsemidual; diejenigen semidualen Mengen, die wir konkret angeben können, spielen, wie wir sehen werden, in gewisser Weise eine Sonderrolle. Dies führt uns auf die interessante Frage, inwieweit und unter welchen Voraussetzungen es ein Analogon zum FNT für Faltungen geben kann, in dem Sinne, daß die Familie derjenigen im Einheitskreis holomorphen und normierten Funktionen, deren Faltung mit bestimmten vorgegebenen Funktionen nullstellenfrei ist, gewissen Koeffizientenbeschränkungen unterworfen ist; diese Frage bleibt - wie so viele andere - vorerst leider unbeantwortet.

Die vorliegende Arbeit basiert teilweise auf der Diplomarbeit des Verfassers [16]; die Kapitel 1, 2 und 4 sowie Teile von Kapitel 5 und der Abschnitte 6.1 bis 6.3 und 6.5 sind aus dieser mit leichten Modifikationen übernommen. Einige der Resultate über AP-Lückenreihen in Kapitel 6.3 sind bereits in [17] veröffentlicht.

Herrn Prof. Dr. St. Ruscheweyh danke ich herzlich für die Anregung und interessierte Betreuung dieser Arbeit und für seine geduldige Unterstützung und Ermutigung in fachlicher wie in menschlicher Hinsicht. Herrn Prof. Dr. L. Zalcman und Herrn Prof. Dr. W. Bergweiler gebührt mein Dank für ihre Gastfreundschaft während meiner Aufenthalte an der Bar-Ilan-Universität im Januar 1999 und an der Universität in Kiel im Juni 2001. Gerne erinnere ich mich an die anregenden Diskussionen mit ihnen und mit Herrn Prof. Dr. A. Eremenko. Dr. Richard Greiner bin ich für die unermüdliche Unterstützung bei allen Arten von Computerproblemen zu großem Dank verpflichtet. Ihm sowie Dr. Archun Acharya, Christiane und Daniela Kraus, Dr. Oliver Roth und Uta Reyes möchte ich zudem vielmals danken für die herzliche Atmosphäre an unserem Lehrstuhl und für ihre Freundschaft auch in schweren Zeiten. Nicht zuletzt geht mein Dank an Herrn Prof. Dr. G. Köhler und das Team, mit dem zusammen ich 2000/01 die Lineare Algebra betreuen durfte, namentlich an Oliver Bletz, Katja Mallmann, Martin Wolfrom, Renate Geisler, Susanne Gigliola, Stefan Mutzbauer, Andreas Reiser, Markus Ruppert, Silvia Scheurich, Christian Schnell, Beate Schrapp, Cornelius Selke, Jan Swoboda und Axel Werner, für die hervorragende Zusammenarbeit, die mich in der entscheidenden Phase der Entstehung dieser Dissertation außerordentlich beflügelt hat und die ich immer in bester Erinnerung behalten werde.

Notationen

Wir stellen zunächst die im weiteren benutzten Notationen, soweit sie sich nicht von selbst verstehen, zusammen. In den Fällen, in denen keine Seitenzahl angegeben ist, wird das betreffende Symbol im Text nicht eigens definiert.

Symbol	Erläuterung	Seite
$\subseteq$, $\subset$	Inklusion	
$\subsetneq$	echte Inklusion	
$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen	
$\#M$	Elementanzahl einer endlichen oder unendlichen Menge M	
$\|E\|$	Lebesgue-Maß einer meßbaren Menge $E \subseteq \mathbb{R}$	
$U_r(m)$	$:= \{p \in X \mid d(p,m) < r\}$: offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt m in einem metrischen Raum (X,d)	
$B_r(m)$	$:= \{p \in X \mid d(p,m) \leq r\}$: abgeschlossene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt m in einem metrischen Raum (X,d)	
$\mathbb{D}$	$:=\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$: offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$	
$\mathbb{D}_R$	$:= \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < R\}$: offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ um 0 mit Radius $R \in (0;\infty]$	
$A_{r_1,r_2}(z_0)$	$:= \{z \in \mathbb{C} : r_1 < \|z - z_0\| < r_2\}$: offener Kreisring mit Mittelpunkt z_0 und Radien r_1, r_2	
$\mathcal{H}(\Omega)$	Menge der in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen	
$\mathcal{M}(\Omega)$	Menge der in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphen Funktionen	
A	$:= \mathcal{H}(\mathbb{D})$	
A_0	$:= \{f \in A : f(0) = 1\}$	
$\mathcal{P}_m$	Klasse der komplexen Polynome vom Grad $\leq m$	
χ	chordale Metrik auf der Sphäre	
$f^\#$	$:= \frac{\|f'\|}{1+\|f\|^2}$: sphärische Ableitung einer meromorphen Funktion f	
co	konvexe Hülle	
$\overline{co}$	abgeschlossene konvexe Hülle	
$m(r,w)$	Schmiegungsfunktion von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$	13
$n(r,a,w)$	Anzahl der a-Stellen von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$ im Kreis $\|z\| \leq r$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten	13
$\overline{n}(r,a,w)$	Anzahl der a-Stellen von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$ im Kreis $\|z\| \leq r$ ohne Berücksichtigung der Vielfachheiten	13
$N(r,a,w)$	Anzahlfunktion von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$	13
$\overline{N}(r,a,w)$	Anzahlfunktion von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$ ohne Berücksichtigung der Vielfachheiten	14
$T(r,w)$	Nevanlinna-Charakteristik von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$	14
$m(r,a,w)$	$:= m\left(r, \frac{1}{w-a}\right)$	13
$T(r,a,w)$	$:= T\left(r, \frac{1}{w-a}\right)$	14
c_w	erster nichtverschwindender Koeffizient der Laurententwicklung von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$ um 0	15
$M(r,w)$	$:= \max_{\|z\|=r} \|w(z)\|$: Maximalbetrag von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$	16
$\|\|P\|\|$	$:= M(1,P) = \max_{\|z\|=1} \|P(z)\|$: Maximumsnorm des Polynoms P im Einheitskreis	108
$N_z(r,w)$	verallgemeinerte Anzahlfunktion	18

$T_z(r,w)$	verallgemeinerte Charakteristik	18
$T_0(r,w)$	Ahlfors-Shimizu-Charakteristik von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$	19
$T_c(r,G)$	Cartansche Charakteristik der analytischen Kurve G	19
$\rho(w)$	Ordnung von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$\lambda(w)$	untere Ordnung von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$\sigma(w)$	Typ von $T(r,w)$ für $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$\tau(g)$	Typ von $M(r,g)$ für $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$	21
$\rho(a;w)$	Ordnung der a-Stellen von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$\lambda(a;w)$	untere Ordnung der a-Stellen von $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$\sigma(a;w)$	Typ von $T(r,a,w)$ für $w \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	20
$S(r,w)$	ein beliebiger Term der Ordnung $O(\log r) + O(\log T(r,w))$ für $r \to \infty$, $r \notin E$ für eine Menge $E \subseteq (0;\infty)$ mit $\lvert E\rvert < \infty$ bzw. $E = \emptyset$, falls $\rho(w) < \infty$	31
$\delta(a,w)$	Defekt von $a \in \overline{\mathbb{C}}$	32
$\vartheta(a,w)$	Verzweigungsindex von $a \in \overline{\mathbb{C}}$	32
$\Theta(a,w)$	Verzweigtheit von $a \in \overline{\mathbb{C}}$	32
$\delta_s(g;w)$	modifizierter Defekt	33
A_T	$:= \left\{ f \in A_0 \,:\, f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k,\ a_k \neq 0 \text{ für alle } k \in T \right\}$	86
$\widetilde{A}_T$	$:= \left\{ f \in A_0 \,:\, f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k \right\}$	86
A_T^0	$:= \{ f \in A_T \,:\, f(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \}$	86
$\widetilde{A}_T^0$	$:= \left\{ f \in \widetilde{A}_T \,:\, f(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \right\}$	86
e_T	die durch $e_T(z) := \sum_{k \in T} z^k$ definierte Funktion	86
$a_k^{(f)}$	$:= \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0)$: k-ter Koeffizient der Taylorentwicklung von $f \in A$ um 0	37
$M_k(\mathcal{F})$	$:= \sup \left\{ \lvert a_k^{(f)} \rvert : f \in \mathcal{F} \right\}$ für $\mathcal{F} \subseteq A_0$	37
$M_k(T)$	$:= \sup \left\{ \lvert a_k^{(f)} \rvert \,:\, f \in \widetilde{A}_T^0 \right\}$	89
$M_k^{(n)}(T)$	$:= \max \left\{ \lvert a_k^{(f)} \rvert \,:\, f \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_n \right\}$	133
$f * g$	Faltung (Hadamard-Produkt) der Funktionen $f, g \in A$	84
V^*	$:= \{ g \in A_0 \mid \forall_{f \in V} \forall_{z \in \mathbb{D}}\ (f*g)(z) \neq 0 \}$: zu $V \subseteq A_0$ duale Menge	84
$V^{**} = du(V)$	duale Hülle von $V \subseteq A_0$	84
f_x	die durch $f_x(z) := f(xz)$ definierte Funktion ($\lvert x\rvert \leq 1$, $f \in A_0$)	85
V^C	$:= \{ f_x \,:\, f \in V, \lvert x\rvert \leq 1 \}$: Komplettierung von $V \subseteq A_0$	85
V_f	$:= \{ f_x \,:\, \lvert x\rvert \leq 1 \}$: Komplettierung von $\{f\}$ (für $f \in A_0$)	85
V_T	$:= V_{e_T} = \{ z \mapsto e_T(xz) : \lvert x\rvert \leq 1 \}$	86
I_n	$:= n \cdot \mathbb{N}_0$	86
T_f	$:= \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k^{(f)} \neq 0 \right\}$: Lückenstruktur einer Funktion $f \in A_0$	86
T^C	$:= \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus T$: zu T komplementäre Lückenstruktur	120

In einem Gebiet Ω holomorphe, nullstellenfreie Funktionen (d.h. Einheiten im Ring $\mathcal{H}(\Omega)$) bezeichnen wir mitunter auch als **Einheiten** in Ω.

Für kompakt-gleichmäßige Konvergenz schreiben wir oft kurz $\mathcal{K}$-Konvergenz.

Um Schwerfälligkeiten in der Notation zu vermeiden, deuten wir den Übergang zu Teilfolgen gelegentlich durch Formulierungen wie „für $(f_n)_n$ gilt o.E.“ o.ä. an.

Kapitel 1

Die Nevanlinnasche Theorie des Wachstums und der Wertverteilung meromorpher Funktionen

1.1 Charakteristik und Erster Hauptsatz

Im folgenden bezeichne w stets eine in einem Kreis $|z| < R_0$ mit $0 < R_0 \leq \infty$ meromorphe nichtkonstante Funktion.

Zur Beschreibung des Wachstums- und Wertverteilungsverhaltens meromorpher Funktionen führte R. Nevanlinna 1925 in [37] die folgenden Größen ein:

Definition 1.1

Es sei $\log^+ x := \max\{\log x; 0\}$ für $x > 0$ und $\log^+ 0 := 0$. Für $0 \leq r < R_0$ sei[1]

$$m(r, \infty, w) = m(r, w) = m(r, \infty) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{it})| dt$$

und

$$m(r, a, w) = m(r, a) := m\left(r, \infty, \frac{1}{w-a}\right) \quad \text{für } a \in \mathbb{C}.$$

Die Funktion $r \mapsto m(r, w)$ heißt (Nevanlinnasche) **Schmiegungsfunktion** von w.

Für $a \in \overline{\mathbb{C}}$ sei $n(r, a) = n(r, a, w)$ die Anzahl der a-Stellen (im Falle $a = \infty$: der Polstellen) von w im Kreis $|z| \leq r$, mit Vielfachheiten gezählt. Entsprechend sei $\overline{n}(r, a)$ die Anzahl der a-Stellen in $|z| \leq r$ *ohne* Berücksichtigung der Vielfachheit.

$$N(r, a) = N(r, a, w) := \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \cdot \log r$$

heißt (Nevanlinnasche) **Anzahlfunktion**; offensichtlich gilt

$$N(r, a, w) = N\left(r, \infty, \frac{1}{w-a}\right) = \sum_{0<|\alpha_k|<r} \log \frac{r}{|\alpha_k|} + n(0, a) \cdot \log r,$$

[1] Im Falle, daß w Polstellen auf $|z| = r$ hat, folgt die Existenz von $\int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{it})| dt$ leicht aus der von $\int_0^1 \log^+ \frac{1}{t}\, dt$.

wobei α_k die (nicht notwendig verschiedenen) a-Stellen von w sind. Entsprechend definiert man $\overline{N}(r,a) = \overline{N}(r,a,w)$.
Schließlich setzt man

$$T(r) = T(r,w) = T(r,\infty) = T(r,\infty,w) := m(r,\infty) + N(r,\infty)$$

und

$$T(r,a) = T(r,a,w) := m(r,a) + N(r,a) \quad \text{für } a \in \mathbb{C}.$$

$T(r)$ heißt **Nevanlinnasche charakteristische Funktion** oder kurz **Charakteristik**.

Aus Gründen der Einfachheit betrachtet man in der Nevanlinna-Theorie oft nur Funktionen ohne Polstellen im Ursprung.

Die drei soeben definierten Funktionen erfüllen die folgenden grundlegenden Abschätzungen, von denen wir im folgenden häufig (und zumeist ohne explizite Bezugnahme) Gebrauch machen:

Satz 1.2

Für $S(r,.) = m(r,\infty,.)$, $N(r,\infty,.)$, $T(r,\infty,.)$ und in $|z| < R_0$ meromorphe nichtkonstante Funktionen w, $w_1,\ldots,w_p$ gilt:

$$S(r,w) \geq 0,$$

$$S\left(r,\prod_{j=1}^{p} w_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} S(r,w_j),$$

$$S\left(r,\sum_{j=1}^{p} w_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} S(r,w_j) + \log p,$$

$$N\left(r,\sum_{j=1}^{p} w_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} N(r,w_j)$$

für $1 \leq r < R_0$ bzw. $-$ falls $S(r,.) = m(r,\infty,.)$ oder falls kein w_j eine Polstelle in $z = 0$ hat $-$ für $0 < r < R_0$.

Beweis: (cf. [27], Satz 8.1)

Für $x_1,\ldots,x_p \geq 0$ gilt

$$\log^+(x_1 \cdot \ldots \cdot x_p) \leq \sum_{j=1}^{p} \log^+ x_j,$$

und

$$\log^+(x_1 + \ldots + x_p) \leq \log^+ \max_{1\leq j\leq p} x_j + \log p,$$

so daß insbesondere

$$\log^+(x_1 + \ldots + x_p) \leq \sum_{j=1}^{p} \log^+ x_j + \log p$$

ist. Hieraus ergeben sich sofort die Abschätzungen für $m(r,\infty,.)$.
Für $S(r,.) = N(r,\infty,.)$ hat man nur zu beachten, daß die Polstellenordnung einer Summe oder eines Produktes meromorpher Funktionen höchstens so groß ist wie die Summe der Polstellenordnungen der einzelnen Summanden bzw. Faktoren.
Die Abschätzungen für $T(r,\infty,.)$ folgen aus denen für $m(r,\infty,.)$ und $N(r,\infty,.)$.

Satz 1.3 Die Poisson-Jensen-Nevanlinnasche Formel

Es seien a_j die Nullstellen, b_k die Polstellen von w, mit Vielfachheiten gezählt. Weiter sei $|z_0| < r < R_0$, und z_0 sei keine Null- oder Polstelle von w. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\log|w(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(re^{it})|\cdot\operatorname{Re}\frac{re^{it}+z_0}{re^{it}-z_0}dt + \sum_{|b_k|<r}\log\left|\frac{r^2-\overline{b_k}z_0}{r(z_0-b_k)}\right| \\ &\quad - \sum_{|a_j|<r}\log\left|\frac{r^2-\overline{a_j}z_0}{r(z_0-a_j)}\right|.\end{aligned}$$

Beweis: (cf. [27], Satz 6.2)

Wir beweisen die Formel nur für den Fall, daß w auf $|z| = r$ keine Null- oder Polstellen hat. Dann ist

$$h(z) := w(z)\cdot\prod_{|a_j|<r}\frac{r^2-\overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\cdot\prod_{|b_k|<r}\frac{r(z-b_k)}{r^2-\overline{b_k}z}$$

holomorph und nullstellenfrei in $\overline{\mathbb{D}_r}$, und mit der Poissonschen Formel, angewandt auf die harmonische Funktion $\log|h(z)|$, folgt

$$\log|h(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{it})|\cdot\operatorname{Re}\frac{re^{it}+z_0}{re^{it}-z_0}dt.$$

Daraus liest man unter Beachtung von $|h(z)| = |w(z)|$ für $|z| = r$ sofort die Behauptung ab.

Für die im allgemeinen Fall erforderliche (elementare, aber mühsame) Zusatzüberlegung sei auf [27], Hilfssatz 6.1 verwiesen.

Korollar 1.4 Jensensche Formel

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3 gilt

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(re^{it})|dt + \sum_{0<|b_k|<r}\log\frac{r}{|b_k|} - \sum_{0<|a_j|<r}\log\frac{r}{|a_j|} - m\cdot\log r,$$

wobei $m = n(0,0,w) - n(0,\infty,w)$ die Ordnung von w in $z = 0$ und c_m der erste nichtverschwindende Koeffizient der Laurent-Entwicklung von w um $z = 0$ ist, also $w(z) = c_m\cdot z^m + c_{m+1}\cdot z^{m+1} + \ldots$ mit $c_m \neq 0$ gilt.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3, angewandt auf $z \mapsto \frac{w(z)}{z^m}$ und $z_0 = 0$.

Den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von w um $z = 0$ bezeichnen wir fortan stets mit c_w.

Aus der Jensenschen Formel ergibt sich:

Satz 1.5 Erster Hauptsatz

Für $a \in \mathbb{C}$ und alle $r \in [0; R_0)$ gilt

$$T(r,a,w) = T(r,\infty,w) - \log|c_{w-a}| + \varepsilon(r,a) \tag{1.1}$$

mit

$$|\varepsilon(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2. \tag{1.2}$$

Hierbei ist sogar $\varepsilon(r,0) = 0$, also

$$T\left(r,\infty,\frac{1}{w}\right) = T(r,\infty,w) - \log|c_w|. \tag{1.3}$$

Beweis: ([27], Satz 7.2)

Zunächst sei $a = 0$. Wegen $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$ lautet die Jensensche Formel, ausgedrückt durch $m(r)$ und $N(r)$:

$$\begin{aligned}\log|c_w| &= m(r,\infty,w) - m\left(r,\infty,\frac{1}{w}\right) + N(r,\infty,w) - N(r,0,w)\\ &= T(r,\infty,w) - T\left(r,\infty,\frac{1}{w}\right).\end{aligned}$$

Dies zeigt (1.3).

Nun sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wegen $\log^+|w(z)-a| \le \log^+|w(z)| + \log^+|a| + \log 2$ ist

$$m(r,w-a) \le m(r,w) + \log^+|a| + \log 2.$$

Ebenso ist

$$m(r,w) \le m(r,w-a) + \log^+|a| + \log 2.$$

Damit folgt für $\varepsilon(r,a) := m(r,w-a) - m(r,w)$

$$|\varepsilon(r,a)| \le \log^+|a| + \log 2,$$

also (1.2). Aus (1.3), angewandt auf $w-a$ anstelle von w, erhält man unter Beachtung von $N(r,\infty,w-a) = N(r,\infty,w)$:

$$\begin{aligned}T(r,a,w) &= T\left(r,\infty,\frac{1}{w-a}\right) = T(r,\infty,w-a) - \log|c_{w-a}|\\ &= T(r,\infty,w) + \varepsilon(r,a) - \log|c_{w-a}|.\end{aligned}$$

Damit ist auch (1.1) gezeigt.

Der Erste Hauptsatz besagt also, daß $T(r,a)$ für alle $a \in \overline{\mathbb{C}}$ von der gleichen Größenordnung ist. Kurz schreibt man oft

$$T(r,a) = T(r) + O(1) \quad \text{für } r \to \infty,$$

sofern die betreffenden Konstanten für die jeweiligen Betrachtungen irrelevant sind. Dies ist regelmäßig in der Theorie der ganzen und (in $\mathbb{C}$) meromorphen Funktionen der Fall, soweit sie sich mit einzelnen Funktionen beschäftigt, nicht jedoch in der Normalitätstheorie. In letzterer kommt es vielmehr darauf an, diese „Anfangswertterme“ gleichmäßig für alle Funktionen der jeweils betrachteten Familie abzuschätzen, was zumeist recht kompliziert ist und oft die eigentliche Hauptschwierigkeit in “konventionellen”, nevanlinna-theoretischen Normalitätsbeweisen darstellt. Es ist daher das große Verdienst der in Kapitel 2 zu besprechenden Zalcmanschen Methode, derartige Abschätzungen zu erübrigen.

Durch $T(r,w)$ gelingt es, das Wachstum meromorpher Funktionen zu charakterisieren. Mit dem Maximalbetrag

$$M(r,w) := \max_{|z|=r} |w(z)|$$

ist dies nicht sinnvoll möglich, da das Maximumprinzip für meromorphe Funktionen mit Polstellen nicht global gültig ist. Für *holomorphe* Funktionen g besteht aber folgender Zusammenhang zwischen der Charakteristik $T(r,g) = m(r,g)$ und dem Maximalbetrag $M(r,g)$:

Satz 1.6

Für jede in $|z| < R_0$ $(0 < R_0 \leq \infty)$ holomorphe Funktion g gilt:

$$T(r,g) \leq \log^+ M(r,g) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot T(R,g) \quad \text{für } 0 \leq r < R < R_0.$$

Beweis: (cf. [27], Satz 8.3)

Die erste Ungleichung ist wegen $T(r,g) = m(r,g)$ unmittelbar aus der Definition der Schmiegungsfunktion einsichtig. Die zweite ergibt sich folgendermaßen aus der Poisson-Jensen-Nevanlinnaschen Formel: Für $|z| = r$ mit $g(z) \neq 0$ ist, wenn die a_j die Nullstellen von g bezeichnen:

$$\begin{aligned}
\log|g(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{it})| \cdot \operatorname{Re}\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}dt - \sum_{|a_j|<r} \log\left|\frac{R^2 - \overline{a_j}\cdot z}{R(z-a_j)}\right| \\
&\leq \frac{R+|z|}{R-|z|} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|g(Re^{it})|dt \\
&= \frac{R+r}{R-r} \cdot T(R,g).
\end{aligned}$$

Satz 1.7

(1) **Cartansche Formel**

Für $0 < r < R_0$ gilt

$$T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{it}, w\right) dt + d_w.$$

Hierbei ist $d_w = \log^+|w(0)|$, sofern $w(0) \neq \infty$; im Falle $w(0) = \infty$ ist $d_w = \log|c_w|$.

(2) Die Funktionen $N(r,a,w)$ und $T(r,a,w)$ sind für $a \in \overline{\mathbb{C}}$ monoton wachsend bezüglich r und konvex bezüglich $\log r$. Insbesondere ist $T(r,a,w)$ stetig in r.

Beweis: (cf. [27], Satz 8.6 und Satz 8.7)

(1) Für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt nach der Jensenschen Formel, angewandt auf $z \mapsto z - a$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it} - a\right| dt = \log|a| + \log^+\frac{1}{|a|} = \log^+|a|, \tag{1.4}$$

und dies bleibt auch für $a = 0$ richtig.

Für alle $t \in [0; 2\pi]$ mit $w(0) \neq e^{it}$ ergibt die Jensensche Formel

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|w(re^{i\varphi}) - e^{it}\right| d\varphi + N(r,\infty) - N\left(r, e^{it}\right) \\
= &\begin{cases} \log\left|w(0) - e^{it}\right|, & \text{falls } w(0) \neq \infty \\ \log|c_w|, & \text{falls } w(0) = \infty \end{cases}
\end{aligned}$$

Durch Integration über t folgt daraus wegen (1.4):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|w(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r,\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{it}\right) dt = d_w,$$

wobei sich die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge und damit die Existenz von $\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{it}\right) dt$ mittels des Satzes von Tonelli aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|w(re^{i\varphi})-e^{it}|\right|dt \\
= \;& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cdot\log^+\left|w(re^{i\varphi})-e^{it}\right|dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|w(re^{i\varphi})-e^{it}\right|dt \\
\leq \;& 2\log^+\left|w(re^{i\varphi})\right| + 2\log 2 - \log^+\left|w(re^{i\varphi})\right| \\
= \;& \log^+\left|w(re^{i\varphi})\right| + \log 4
\end{aligned}$$

(für $w\left(re^{i\varphi}\right) \neq \infty$) und aus der Integrierbarkeit der oberen Schranke ergibt.

(2) Die Monotonie von $N(r,a,w)$ ist klar; die Konvexität bezüglich $\log r$ ersieht man (mit $N(r) := N(r,a,w)$, $n(r) := n(r,a,w)$) aus der Abschätzung

$$\frac{N(r)-N(r_1)}{\log r - \log r_1} = \frac{\int_{r_1}^{r}\frac{n(t)}{t}dt}{\log r - \log r_1} \leq n(r) \leq \frac{\int_{r}^{r_2}\frac{n(t)}{t}dt}{\log r_2 - \log r} = \frac{N(r_2)-N(r)}{\log r_2 - \log r}$$

für $r_1 < r < r_2$.

Mithilfe der Cartanschen Formel übertragen sich Monotonie und Konvexität sofort von $N\left(r, e^{it}, \frac{1}{w-a}\right)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ auf $T(r,a,w) = T\left(r, \infty, \frac{1}{w-a}\right)$.

Die Konvexität der Nevanlinna-Charakteristik bezüglich $\log r$ kann man - auch im Hinblick auf Satz 1.6 - als Verallgemeinerung des Hadamardschen Dreikreisesatzes (cf. [27], Satz 1.3) auf meromorphe Funktionen ansehen.

In Kapitel 4.3 benötigen wir eine auf Bloch und Cartan zurückgehende Verallgemeinerung der Anzahlfunktion $N(r,w)$ sowie des ersten Hauptsatzes:

Definition 1.8

Es sei $|z| < r < R_0$, z kein Pol von w, und b_k seien die Polstellen von w, mit Vielfachheiten gezählt. Dann werden durch

$$N_z(r,w) := \sum_{0<|b_k|<r}\log\left|\frac{r^2-\overline{b_k}z}{r(z-b_k)}\right| \qquad \text{und} \qquad T_z(r,w) := m(r,w) + N_z(r,w)$$

eine **verallgemeinerte Anzahlfunktion** bzw. **Charakteristik** definiert. Für $z = 0$ (und $w(0) \neq \infty$) erhält man die aus Definition 1.1 bekannte gewöhnliche Anzahlfunktion.

Bemerkungen:

Offensichtlich gilt für $w, w_1, w_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_{R_0})$ und $|z| < r < R_0$ (mit $w(z), w_j(z) \neq \infty$):

$$N_z(r,w) \geq 0,$$

$$N_z(r, w_1\cdot w_2) \leq N_z(r,w_1) + N_z(r,w_2),$$

$$T_z(r, w_1\cdot w_2) \leq T_z(r,w_1) + T_z(r,w_2).$$

Aus der Poisson-Jensen-Nevanlinnaschen Formel (Satz 1.3) liest man sofort ab:

Satz 1.9 Poisson-Jensensche Ungleichung

Für $0 < r < R_0$ und $z \in \mathbb{D}_r$ mit $w(z) \neq 0, \infty$ gilt

$$\log|w(z)| \leq \frac{r+|z|}{r-|z|} \cdot m(r,w) - \frac{r-|z|}{r+|z|} \cdot m\left(r, \frac{1}{w}\right) + N_z(r,w) - N_z\left(r, \frac{1}{w}\right).$$

Bemerkung 1.10

Gelegentlich benutzt man zur Beschreibung des Wachstums meromorpher Funktionen auch die folgenden Größen:

(1) Die **Ahlfors-Shimizu-Charakteristik**

$$T_0(r,w) := \int_0^r \frac{S_0(t,w)}{t} dt.$$

Hierbei bezeichnet $S_0(t,w) := \frac{1}{\pi} \cdot \int\int_{|x+iy|\leq t} \left(w^\#(x+iy)\right)^2 dxdy$ die Fläche des Bildes von $\overline{\mathbb{D}_t}$ auf der Sphäre. Für $w(0) \neq \infty$ gilt (cf. [20], S. 13):

$$|T(r,w) - T_0(r,w) - \log^+|w(0)|| \leq \frac{1}{2}\log 2, \tag{1.5}$$

so daß $T(r,w)$ und $T_0(r,w)$ von der gleichen Größenordnung sind.

(2) Die **Cartansche Charakteristik**

$$T_c(r,G) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \max_{1\leq j\leq p} |g_j(re^{it})| dt - \log \max_{1\leq j\leq p} |g_j(0)|$$

einer **analytischen Kurve** G, d.h. eines p-Tupels $G = (g_1, \ldots, g_p)$ von in $|z| < R_0 \leq \infty$ holomorphen Funktionen g_j ohne gemeinsame Nullstellen. Für Details sei auf Cartan [4] verwiesen.

Im folgenden Satz stellen wir die wichtigsten Kennzeichnungen von Normalität mithilfe der charakteristischen Funktionen von Nevanlinna bzw. von Ahlfors-Shimizu zusammen, von denen wir im weiteren freilich nur die erste benötigen und daher auch nur diese beweisen:

Satz 1.11

(1) Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie *holomorpher* Funktionen in $\mathbb{D}$. Falls $m(r,f)$ für $f \in \mathcal{F}$ lokal gleichmäßig beschränkt ist, d.h. falls es eine reellwertige, monoton wachsende Funktion $S(r)$ mit $m(r,f) \leq S(r)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $r \in [0;1)$ gibt, dann ist $\mathcal{F}$ normal. Im Falle $|f(0)| \leq M < \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt auch die Umkehrung.

(2) Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie *meromorpher* Funktionen in $\mathbb{D}$.

(a) $\mathcal{F}$ ist genau dann normal in $z = 0$, wenn es ein $C < \infty$ und ein $R \in (0;1)$ mit $T_0(R,f) \leq C$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gibt.

(b) Falls $f(0) \neq \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt und es ein $C < \infty$ und ein $R \in (0;1)$ mit $T(R,f) \leq C$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gibt, so ist $\mathcal{F}$ normal in $z = 0$. Im Falle $|f(0)| \leq M < \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt auch die Umkehrung.

Beweis:

(1) folgt sofort aus der Abschätzung

$$m(r,f) \le \log^+ M(r,f) \le \frac{4}{1-r} \cdot m\left(\frac{1+r}{2}, f\right) \quad \text{für } 0 \le r < 1$$

(Satz 1.6 mit $R = \frac{1+r}{2}$) und dem Satz von Montel.

(2) (a): s. [53], Theorem 3.6.8; (b): s. [53], Theorem 3.6.9 für die erste Aussage; die Umkehrung (unter der angegebenen Normierungsvoraussetzung) folgt aus (a) und (1.5).

Die Resultate in (2) stammen von D. Drasin. Mit den Methoden der Nevanlinna-Theorie konnte Drasin zu zahlreichen Sätzen vom „Picardschen Typ" die entsprechenden Normalitätskriterien beweisen und somit das Blochsche Prinzip in diesen Fällen verifizieren. Aufgrund der außerordentlichen Kompliziertheit dieser Beweise verzichten wir darauf, hierauf auch nur exemplarisch einzugehen, zumal mittlerweile in vielen Fällen wesentlich einfachere Beweise mithilfe des Zalcman-Lemmas bekannt sind. Eine sehr ausführliche Darstellung der Ergebnisse von Drasin und weiterführender neuerer Resultate findet sich bei Schiff [53], Abschnitt 4.4 und 4.5.

1.2 Die Ordnung meromorpher Funktionen

Zur Klassifikation des Wachstums meromorpher Funktionen benutzt man die folgenden auf É. Borel zurückgehenden Begriffe:

Definition 1.12

Es sei w eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion. Dann sind die **Ordnung** $\rho = \rho(w)$ und die **untere Ordnung** $\lambda = \lambda(w)$ von w definiert durch

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,w)}{\log r}, \qquad \lambda = \lambda(w) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,w)}{\log r}.$$

Im Falle $0 < \rho(w) < \infty$ setzt man

$$\sigma = \sigma(w) := \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,w)}{r^\rho}$$

und nennt σ den **Typ** von w.

Für $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und $w \not\equiv a$ heißen entsprechend

$$\rho(a) = \rho(a;w) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a,w)}{\log r},$$

$$\lambda(a) = \lambda(a;w) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a,w)}{\log r}$$

und für $0 < \rho(a;w) < \infty$

$$\sigma(a) = \sigma(a;w) := \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,a,w)}{r^{\rho(a)}}$$

Ordnung, untere Ordnung und **Typ der a-Stellen von w.**

Ein $a \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt **Borelscher Ausnahmewert** von w, falls $\rho(a;w) < \rho(w)$ gilt.

Bemerkungen:

(1) Für nicht in ganz $\mathbb{C}$, sondern nur in einem Kreis mit Radius R_0 um 0 definierte meromorphe Funktionen kann man analog eine Ordnung definieren, indem man $\log r$ durch $\log \frac{1}{R_0 - r}$ ersetzt und $r \to R_0$ betrachtet.

(2) Um das Wachstumsverhalten von Funktionen unendlicher Ordnung differenzierter zu beschreiben, verwendet man sog. **(j,k)-Ordnungen**

$$\rho_{j,k}(w) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+_{j+k-1} T(r,w)}{\log_k r} \quad \text{für } j,k \in \mathbb{N}_0,\ k \geq 1$$

(und analog $\lambda_{j,k}(w)$), wobei die iterierten Logarithmen $\log^+_l$ durch $\log^+_0 x := x$ und $\log^+_{l+1} x := \log^+(\log^+_l x)$ für $x \geq 0$ und $l \in \mathbb{N}_0$ definiert werden. Damit läßt sich auch die Definition des Borelschen Ausnahmewertes verallgemeinern. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet sich bei Jank / Volkmann [27], S. 96 - 163.

(3) Für *ganze* Funktionen g gilt wegen Satz 1.6 (mit z.B. $R = 2r$)

$$\rho(g) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r,g)}{\log r}, \qquad \lambda(g) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r,g)}{\log r}.$$

In der Definition des Typs $\sigma(g)$ kann man $T(r,g)$ allerdings *nicht* durch $\log^+ M(r,g)$ ersetzen; für

$$\tau(g) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r,g)}{r^{\rho(g)}},$$

liefert Satz 1.6 (mit $R = 2r$) nur

$$\sigma(g) \leq \tau(g) \leq 3 \cdot 2^{\rho(g)} \cdot \sigma(g).$$

Dennoch bezeichnet man auch $\tau(g)$ oft als Typ von g; die beiden Definitionen sind also nicht äquivalent. (Genauer spricht man vom Typ von $\log^+ M(r,g)$ bzw. vom Typ von $T(r,g)$.)

In Abschnitt 6.4.3 begegnen wir der Frage, wie sich Ordnung und Typ ganzer Funktionen unter Faltungen verhalten. Dazu benötigen wir zwei Resultate von Lindelöf und Pringsheim:

Satz 1.13

Ist $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine ganze Funktion, so gilt

$$\rho(g) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log k}{\log \frac{1}{|a_k|}},$$

wobei man $\frac{k \log k}{\log \frac{1}{|a_k|}} = 0$ für $a_k = 0$ setzt.

Beweis: (cf. [27], Satz 3.1)

Es sei $\rho := \rho(g)$ und $\mu := \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log k}{\log \frac{1}{|a_k|}}$.

Es sei $\mu > 0$ und $0 < c < \mu$. Dann existieren unendlich viele k mit $|a_k| \leq 1$ und

$$k \log k \geq c \cdot \log \frac{1}{|a_k|}, \quad \text{d.h.} \quad \log |a_k| \geq -\frac{k}{c} \log k.$$

Mithilfe der Cauchyschen Abschätzungsformel folgt für diese k und alle $r > 0$

$$\log M(r,g) \geq \log |a_k| + k \log r \geq k \left(\log r - \frac{\log k}{c} \right).$$

Setzt man $r_k := (ek)^{1/c}$, so erhält man

$$\log M(r_k, g) \geq \frac{k}{c} = \frac{r_k^c}{ec}$$

für unendlich viele k und wegen $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$ somit

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r,g)}{\log r} \geq c.$$

Da dies für alle $c \in (0;\mu)$ gilt, folgt $\rho \geq \mu$.

Nun nehmen wir $\mu < \infty$ an und wählen $c > \mu$ beliebig.

Es gibt dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$\frac{k \log k}{\log \frac{1}{|a_k|}} \leq c \quad \text{und} \quad |a_k| \leq 1, \quad \text{also} \quad |a_k| \leq k^{-k/c}$$

gilt. Setzt man $l(r) := (2r)^c$, so folgt für $r > 1$:

$$\begin{aligned} M(r,g) &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| \cdot r^k + \sum_{k_0 \leq k \leq l(r)} k^{-k/c} \cdot r^k + \sum_{k > l(r)} k^{-k/c} \cdot r^k \\ &\leq C_1 \cdot r^{k_0-1} + r^{l(r)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k/c} + \sum_{k>l(r)} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\leq C_1 \cdot r^{k_0-1} + C_2 \cdot r^{(2r)^c} + 1, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten C_1, C_2 nicht von r abhängen. Hieraus ergibt sich leicht $\rho \leq c$.

Dies zeigt $\rho \leq \mu$ und somit die Behauptung.

Die Ordnung einer ganzen Funktion hängt also nur von den *Beträgen* der Taylorkoeffizienten ab.

Für $\tau(g) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r,g)}{r^{\rho(g)}}$ besteht ein analog zu beweisender Zusammenhang (cf. [27], Satz 3.4):

Satz 1.14

Ist $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine ganze Funktion mit $0 < \rho(g) < \infty$, so gilt

$$\tau(g) = \frac{1}{e \cdot \rho(g)} \cdot \limsup_{k\to\infty} k |a_k|^{\rho(g)/k}.$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei ebenfalls später benötigten Resultaten über das Wachstumsverhalten zweier spezieller Funktionenklassen, nämlich von Exponentialfunktionen und von rationalen Funktionen:

Satz 1.15

Ist g eine ganze nullstellenfreie Funktion mit $\lambda(g) < \infty$, so gibt es ein Polynom $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$, für welches $g = e^P$ ist. Es gilt dann $\rho(g) = \lambda(g) = n$ und (sofern $n \geq 1$ ist) $\tau(g) = |a_n|$.

Beweis: (cf. [27], Satz 2.1 und Satz 1.7)

Es ist $g = e^P$ mit einer ganzen Funktion $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Setzt man $A(r, P) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} P(z)$, so ist

$$A(r_j, P) = \log M(r_j, g) \leq r_j^{\lambda(g)+\varepsilon} \tag{1.6}$$

für eine Folge $(r_j)_j \subset (0, \infty)$ mit $\lim_{j\to\infty} r_j = \infty$. Aus

$$\operatorname{Re} a_k \cdot r^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} P\left(re^{it}\right) \cos kt\, dt, \quad \operatorname{Im} a_k \cdot r^k = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} P\left(re^{it}\right) \sin kt\, dt,$$

also

$$a_k \cdot r^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} P\left(re^{it}\right) e^{-ikt}\, dt$$

für $k \geq 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_k| \cdot r^k + 2\operatorname{Re} a_0 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left|\operatorname{Re} P\left(re^{it}\right)\right| + \operatorname{Re} P\left(re^{it}\right) \right) dt \\ &\leq \max\{4 \cdot A(r, P); 0\}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (1.6) folgt daraus $a_k = 0$ für $k > \lambda(g) + \varepsilon$.
Also ist P ein Polynom vom Grad $n \leq \lambda(g)$.
Für die Berechnung von $\rho(g)$, $\lambda(g)$ und $\tau(g)$ nehmen wir o.E. $a_n > 0$ an und erhalten

$$\log M(r, g) = A(r, P) \begin{cases} \leq M(r, P) & = a_n \cdot r^n \cdot (1 + o(1)) \\ \geq a_n \cdot r^n - |a_{n-1}| \cdot r^{n-1} - \ldots - |a_0| & = a_n \cdot r^n \cdot (1 - o(1)) \end{cases}$$

für $r \to \infty$. Dies zeigt $\rho(g) = \lambda(g) = n$ und $\tau(g) = |a_n|$.

Satz 1.16

Ist $w(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion mit teilerfremden Polynomen P, Q und $\operatorname{grad}(w) := \max\{\operatorname{grad}(P); \operatorname{grad}(Q)\}$, so gilt

$$T(r, w) = \operatorname{grad}(w) \cdot \log r + O(1) \quad (r \to \infty).$$

Ist umgekehrt für eine in $\mathbb{C}$ meromorphe, nichtkonstante Funktion w

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\log r} \leq s,$$

so ist w rational vom Grad $\leq s$.

Beweis:

[27], Satz 8.4 und S. 51, Beispiel 1.

1.3 Die Sätze über logarithmische Ableitungen

Gegenstand dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß für meromorphe Funktionen f die Schmiegungsfunktion der Quotienten $\frac{f^{(n)}}{f}$ gegenüber der Charakteristik $T(r,f)$ „klein" bleibt. Sätze dieses Typus faßt man als „Sätze über logarithmische Ableitungen" zusammen, wenngleich diese Bezeichnung strenggenommen nur für den Fall $n = 1$ korrekt ist.

Satz 1.17

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine nur von n abhängige Konstante $C_n < \infty$, so daß für jedes $R_0 > 0$ und jede in $\overline{\mathbb{D}_{R_0}}$ meromorphe und in $\mathbb{D}_{R_0}$ pol- und nullstellenfreie Funktion f und für $0 \le r < R \le R_0$

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) \le C_n \cdot \left(\log^+ R + \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+\Big(m(R,f) + m\Big(R, \frac{1}{f}\Big)\Big) + 1\right)$$

gilt. Im Falle $n = 1$ kann man $C_1 = 2$ wählen.

Beweis: (cf. [31], VIII., Lemma 1.1 / 1.2)

Für $|z| < R$ gilt

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}\, dt + i \cdot a$$

mit einem $a \in \mathbb{R}$, denn beide Seiten sind für $|z| < R$ holomorph[2] und haben nach der Poisson-Jensen-Nevanlinnaschen Formel gleichen Realteil. Durch Differenzieren folgt

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{2Re^{it}}{(Re^{it} - z)^2}\, dt$$

und weiter für $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{2Re^{it}}{(Re^{it} - z)^{n+1}}\, dt.$$

Wegen $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$ liefert dies für $|z| = r$

$$\left| \left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}(z) \right| \le \frac{2Rn!}{(R-r)^{n+1}} \cdot \left(m(R,f) + m\left(R, \frac{1}{f}\right)\right).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & m\left(r, \left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}\right) \\ \le \;& \log^+ R + (n+1) \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ \left(m(R,f) + m\left(R, \frac{1}{f}\right)\right) + \log(2 \cdot n!). \end{aligned}$$

[2] Die Holomorphie des Integrals auf der rechten Seite sieht man wie folgt ein: Für kompakte Teilmengen K von $I := \{t \in [0; 2\pi] \,|\, f(Re^{it}) \neq 0, \infty\}$ ist $z \mapsto \int_K \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\, dt$ nach einem bekannten Satz holomorph. Ist $(K_j)_j$ eine Ausschöpfung von I durch Kompakta, so ist $\left(\int_{K_j} \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\, dt\right)_j$, wie man sich leicht überlegt, in $\mathbb{D}_R$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen $\int_I \log |f(Re^{it})| \cdot \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\, dt$. Mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt die Behauptung.

Dies zeigt insbesondere die Behauptung für $n = 1$ mit $C_1 := 2$. Da sich $\frac{f^{(n)}}{f}$ mittels einer Darstellung

$$\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)} = \frac{f^{(n)}}{f} + \sum_{s=2}^{n} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=n \\ j_k \geq 1}} a_{s;j_1,\ldots,j_s} \prod_{k=1}^{s} \frac{f^{(j_k)}}{f}$$

durch $\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}$ und $\frac{f'}{f}, \ldots, \frac{f^{(n-1)}}{f}$ ausdrücken läßt, folgt mit Satz 1.2 induktiv die Behauptung für beliebige n.

Eine ähnliche Abschätzung gilt auch, wenn man auf die Voraussetzung der Null- und Polstellenfreiheit in Satz 1.17 verzichtet. Dies werden wir, um die Darstellung nicht über Gebühr zu komplizieren, aber nur für den für unsere Zwecke ausreichenden Fall $n = 1$ zeigen[3]; damit werden wir später (Satz 1.21) im Fall von in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen ein analoges Resultat für beliebiges n herleiten, in dem die jeweiligen Konstanten jedoch von f abhängen. Für den Beweis des Satzes von Cartan in Kapitel 4 genügt der soeben gezeigte Spezialfall.

Satz 1.18

Es sei f eine in einer Kreisscheibe $\mathbb{D}_{R_0}$ mit $0 < R_0 \leq \infty$ meromorphe Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \quad &\leq \quad 10 \cdot \left(\log^+ R + \log^+ \frac{R}{r} + \log^+ \frac{1}{R-r}\right. \\ &\qquad \left. + \log^+(T(R,f)) + \log^+ \log^+ \frac{1}{|c_f|}\right) + 25 \end{aligned}$$

für $1 \leq r < R < R_0$ (bzw. für $0 \leq r < R < R_0$, falls $f(0) \neq 0, \infty$).

Beweis: (cf. [31], VI. §3)

Zunächst betrachten wir nur den Fall $c_f = 1$.

Es seien r, R und f wie im Satz mit $c_f = 1$ fest gewählt. Nach den Voraussetzungen über r gilt $N(r, \infty, f) \geq 0$, $N(r, 0, f) \geq 0$. Nach dem Ersten Hauptsatz ist $T(., f) = T\left(., \frac{1}{f}\right)$.

Es sei $s \in (r; R)$ so gewählt, daß

$$\frac{s-r}{R-s} \cdot \frac{R}{r} = \frac{1}{2(T(R,f)+1)} \tag{1.7}$$

gilt. Wegen $T(R,f) \geq T(r,f) \geq 0$ ist $s < \frac{1}{3}(2r+R)$. Wir setzen

$$B_0(z) := \prod_{|a_j|<s} \frac{s^2 - \overline{a_j}z}{s(z-a_j)} \qquad \text{und} \qquad B_\infty(z) := \prod_{|b_k|<s} \frac{s^2 - \overline{b_k}z}{s(z-b_k)},$$

wobei a_j und b_k die mit Vielfachheiten gezählten Null- und Polstellen von f sind.

Dann ist $h(z) := f(z) \cdot \frac{B_0(z)}{B_\infty(z)}$ meromorph in $\overline{\mathbb{D}_s}$ und pol- und nullstellenfrei in $\mathbb{D}_s$, so daß nach Satz 1.17

$$m\left(r, \frac{h'}{h}\right) \leq 2 \cdot \left(\log^+ s + \log^+ \frac{1}{s-r} + \log^+\left(m(s,h) + m\left(s, \frac{1}{h}\right)\right) + 1\right)$$

[3] Für den allgemeinen Fall siehe z.B. Hiong [25].

gilt. Aufgrund von $|B_0(z)| = |B_\infty(z)| = 1$ für $|z| = s$ und des Ersten Hauptsatzes ist hierbei

$$m(s,h) = m(s,f) \le T(s,f) \quad \text{und} \quad m\left(s,\frac{1}{h}\right) = m\left(s,\frac{1}{f}\right) \le T(s,f).$$

Damit folgt

$$m\left(r,\frac{h'}{h}\right) \le 2\cdot\left(\log^+ s + \log^+\frac{1}{s-r} + \log^+ T(s,f) + \log 2 + 1\right). \tag{1.8}$$

Für $|a| < s$ und $G_a(z) := \frac{s^2-\overline{a}z}{s(z-a)}$ ist wegen $G_a'(z) = \frac{|a|^2-s^2}{s(z-a)^2}$

$$\frac{G_a'(z)}{G_a(z)} = \frac{|a|^2-s^2}{(z-a)(s^2-\overline{a}z)}.$$

Für $|z| = r$ folgt daraus mit $|s^2-\overline{a}z| \ge s\cdot(s-r)$

$$\left|\frac{G_a'}{G_a}(z)\right| \le \frac{\left(s^2-|a|^2\right)\cdot\left|s^2-\overline{a}z\right|}{|z-a|s^2(s-r)^2} \le \frac{s}{(s-r)^2}\cdot|G_a(z)|.$$

Damit erhält man für $|z| = r$

$$\left|\frac{B_0'}{B_0}(z)\right| \le \sum_{|a_j|<s}\left|\frac{G_{a_j}'}{G_{a_j}}(z)\right| \le \frac{s}{(s-r)^2}\cdot\sum_{|a_j|<s}|G_{a_j}(z)|$$

und somit (da die Zahl der Summanden höchstens $n(s,0,f)$ beträgt):

$$m\left(r,\frac{B_0'}{B_0}\right) \le \log^+\frac{s}{(s-r)^2} + \sum_{|a_j|<s} m(r,G_{a_j}) + \log^+ n(s,0,f).$$

Wegen $|G_{a_j}(z)| \ge 1$ für $|z| = r$ und des Ersten Hauptsatzes ist

$$\begin{aligned}\sum_{|a_j|<s} m(r,G_{a_j}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|B_0(re^{it})|dt = m(r,B_0)\\ &= m\left(r,\frac{1}{B_0}\right) + N\left(r,\frac{1}{B_0}\right) - N(r,B_0) + \log|c_{B_0}|\\ &= -N(r,0,f) + \log|c_{B_0}|.\end{aligned}$$

Anhand der Darstellung

$$B_0(z) = \left(\frac{s}{z}\right)^{n(0,0,f)}\cdot\prod_{0<|a_j|<s}\frac{s^2-\overline{a_j}z}{s(z-a_j)}$$

erkennt man, daß für den ersten Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von B_0

$$|c_{B_0}| = s^{n(0,0,f)}\cdot\prod_{0<|a_j|<s}\frac{s}{|a_j|},$$

also

$$\log|c_{B_0}| = n(0,0,f)\cdot\log s + \sum_{0<|a_j|<s}\log\frac{s}{|a_j|} = N(s,0,f)$$

gilt. Damit folgt

$$m\left(r, \frac{B_0'}{B_0}\right) \le \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + N(s,0,f) - N(r,0,f) + \log^+ n(s,0,f). \tag{1.9}$$

Wegen $\log x \le x - 1$ für $x > 0$ ist $1 - \frac{s}{R} \le \log \frac{R}{s}$ und $\log \frac{s}{r} \le \frac{s-r}{r}$. Damit ergibt sich

$$n(s,0,f) \le \frac{\int_s^R \frac{n(t,0,f)}{t} dt}{\log R - \log s} = \frac{N(R,0,f) - N(s,0,f)}{\log R - \log s} \le \frac{R}{R-s} \cdot N(R,0,f)$$

und

$$\begin{aligned} N(s,0,f) - N(r,0,f) &= \int_r^s \frac{n(t,0,f)}{t} dt \\ &\le n(s,0,f) \cdot \log \frac{s}{r} \le \frac{R}{R-s} \cdot \frac{s-r}{r} \cdot N(R,0,f). \end{aligned}$$

Hiermit, in (1.9) eingesetzt, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{B_0'}{B_0}\right) &\le \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + \frac{s-r}{R-s} \cdot \frac{R}{r} \cdot N(R,0,f) \\ &\quad + \log^+ \left(\frac{R}{R-s} \cdot N(R,0,f)\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{B_\infty'}{B_\infty}\right) &\le \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + \frac{s-r}{R-s} \cdot \frac{R}{r} \cdot N(R,\infty,f) \\ &\quad + \log^+ \left(\frac{R}{R-s} \cdot N(R,\infty,f)\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Setzt man (1.8), (1.10) und (1.11) in

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le m\left(r, \frac{h'}{h}\right) + m\left(r, \frac{B_0'}{B_0}\right) + m\left(r, \frac{B_\infty'}{B_\infty}\right) + \log 3$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\le 4\log^+ s + 2\log^+ R + 6\log^+ \frac{1}{s-r} + 2\log^+ \frac{1}{R-s} + 2\log^+ T(s,f) \\ &\quad + \frac{s-r}{R-s} \cdot \frac{R}{r} \cdot (N(R,0,f) + N(R,\infty,f)) + \log^+ N(R,0,f) \\ &\quad + \log^+ N(R,\infty,f) + 2\log 2 + 2 + \log 3. \end{aligned}$$

Wegen $s < \frac{1}{3}(2r+R)$ ist $\frac{1}{R-s} \le \frac{3/2}{R-r}$, und mit der Definition (1.7) von s folgt

$$\frac{1}{s-r} = \frac{R}{r} \cdot \frac{2(T(R,f)+1)}{R-s} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{3}{R-r} \cdot (T(R,f)+1)$$

sowie

$$\frac{s-r}{R-s} \cdot \frac{R}{r} \cdot (N(R,0,f) + N(R,\infty,f)) \le \frac{2T(R,f)}{2(T(R,f)+1)} \le 1.$$

Insgesamt erhält man somit

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\le 6\log^+ R + 6\log^+ \frac{R}{r} + 8\log^+ \frac{1}{R-r} + 10\log^+ T(R,f) \\ &\quad + 8\log 2 + 7\log 3 + 2\log \frac{3}{2} + 3. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung für $c_f = 1$.
Im allgemeinen Fall wendet man diese Abschätzung auf $\widetilde{f} := \frac{f}{c_f}$ an und beachtet $T(R, \widetilde{f}) \leq T(R, f) + \log^+ \frac{1}{|c_f|}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \quad &\leq \quad 6 \log^+ R + 6 \log^+ \frac{R}{r} + 8 \log^+ \frac{1}{R-r} + 10 \log^+ T(R, f) \\ &\qquad +10 \log^+ \log^+ \frac{1}{|c_f|} + 18 \log 2 + 7 \log 3 + 2 \log \frac{3}{2} + 3 \end{aligned}$$

und somit wegen $18 \log 2 + 7 \log 3 + 2 \log \frac{3}{2} + 3 \leq 25$ die Behauptung.

Um in den voranstehenden Sätzen den Term $C \cdot \log^+ T(R)$ und damit die Abhängigkeit von R zu eliminieren, benötigt man folgendes Lemma von É. Borel:

Lemma 1.19
Es sei S eine positive, stetige und monoton wachsende Funktion auf dem Intervall $[a; b)$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$. Dann gibt es eine Menge $E \subseteq [a; b)$ vom Lebesgue-Maß $|E| \leq \frac{2}{S(a)}$, so daß für alle $r \in [a; b) \backslash E$

$$r + \frac{1}{S(r)} < b \quad \text{und} \quad S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) < 2 \cdot S(r)$$

gilt.

Beweis: (cf. [27], Hilfssatz 9.3)
Es sei

$$A := \left\{ r \in [a; b) \,\middle|\, r + \frac{1}{S(r)} \geq b \text{ oder } S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) \geq 2 \cdot S(r) \right\}.$$

Im Falle $A = \emptyset$ gilt die Behauptung mit $E = \emptyset$. Es sei also $A \neq \emptyset$ und $r_1 := \inf A$. Für $n \geq 1$ setzen wir

$$r_{n+1} := \inf\left(A \cap \left[r_n + \frac{1}{S(r_n)}; b\right)\right), \quad \text{sofern } A \cap \left[r_n + \frac{1}{S(r_n)}; b\right) \neq \emptyset.$$

Dadurch wird eine streng monoton wachsende, endliche oder unendliche Folge $(r_n)_{n \geq 1}$ definiert; es ist $r_n + \frac{1}{S(r_n)} \leq r_{n+1} < b$ für alle n, für die r_{n+1} definiert ist, und aufgrund der Stetigkeit von S gilt nach Definition von r_n:

$$S(r_{n+1}) \geq S\left(r_n + \frac{1}{S(r_n)}\right) \geq 2 \cdot S(r_n).$$

Induktiv folgt $S(r_n) \geq 2^{n-1} \cdot S(r_1) \geq 2^{n-1} \cdot S(a)$ für alle zulässigen $n \geq 1$, also

$$\sum_n \frac{1}{S(r_n)} \leq \frac{2}{S(a)}. \tag{1.12}$$

Falls $(r_n)_n$ unendlich ist, die Konstruktion also nicht abbricht, gilt $\lim_{n\to\infty} r_n = b$.

Wäre nämlich $R := \lim_{n\to\infty} r_n < b$, so wäre wegen der Stetigkeit von S

$$\infty > S(R) = \lim_{n\to\infty} S(r_n) \geq \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} \cdot S(a) = \infty,$$

Widerspruch!

Damit folgt

$$A \subseteq \left(\bigcup_n \left[r_n; r_n + \frac{1}{S(r_n)} \right] \right) \cap [a;b) =: E.$$

Diese Überdeckungseigenschaft ist auch dann gültig, wenn $(r_n)_n$ endlich ist; es gilt dann für das letzte Folgenglied r_N nämlich $A \cap \left[r_N + \frac{1}{S(r_N)}; b \right) = \emptyset$, also $r_N + \frac{1}{S(r_N)} \geq b$ oder $A \subseteq \left[a; r_N + \frac{1}{S(r_N)} \right)$.
Da wegen (1.12) $|E| \leq \frac{2}{S(a)}$ gilt, folgt die Behauptung.

Wir halten noch eine Folgerung aus Lemma 1.19 fest, die wir in Kapitel 4 benötigen:

Lemma 1.20

Es sei U eine nichtnegative, stetige und monoton wachsende Funktion auf dem Intervall $[a;b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Es gebe Konstanten $A, B, C < \infty$ und eine meßbare Menge $I \subseteq [a;b)$ mit $|I| \geq \frac{b-a}{3}$, so daß

$$U(r) \leq A + B \cdot \log^+ \frac{1}{R-r} + C \cdot \log^+ U(R) \tag{1.13}$$

für alle $r \in I$ und alle $R \in (r;b)$ gilt. Dann gibt es eine nur von A, B, C abhängige Konstante $M < \infty$, so daß für alle $r \in [a;b)$ mit $\frac{|I \cap [r;b)|}{b-r} \geq \frac{1}{3}$

$$U(r) \leq 2B \cdot \log^+ \frac{1}{b-r} + M \tag{1.14}$$

gilt. Insbesondere gilt (1.14) für $r = a$ und im Falle $I = [a;b)$ für alle $r \in [a;b)$.

Beweis: (cf. [31], Lemma 1.5)

Es sei $r_0 \in [a;b)$ mit $\frac{|I \cap [r_0;b)|}{b-r_0} \geq \frac{1}{3}$. Es sei $U(r_0) > 2B \cdot \log \frac{6}{b-r_0}$. (Andernfalls ist nichts zu zeigen.) Es gilt dann also

$$6 \cdot e^{-U(r_0)/2B} < b - r_0. \tag{1.15}$$

Wendet man das Borelsche Lemma 1.19 auf $S(r) := e^{U(r)/2B} > 0$ und das Intervall $[r_0;b)$ an, so folgt: Es gibt eine Menge $E \subseteq [r_0;b)$ mit $|E| \leq 2 \cdot e^{-U(r_0)/2B}$, so daß

$$r + e^{-U(r)/2B} < b \quad \text{und} \quad U\left(r + e^{-U(r)/2B}\right) \leq U(r) + 2B \cdot \log 2$$

für alle $r \in [r_0;b) \backslash E$ gilt.
Wegen (1.15) ist $|E| < \frac{b-r_0}{3}$. Daher gibt es ein $R_0 \in (r_0;b) \cap I \backslash E$. Mit (1.13), angewandt auf $r := R_0$ und $R := R_0 + e^{-U(R_0)/2B}$, folgt:

$$\begin{aligned} U(R_0) &\leq A + \frac{1}{2} \cdot U(R_0) + C \cdot \log^+ U\left(R_0 + e^{-U(R_0)/2B}\right) \\ &\leq A + \frac{1}{2} \cdot U(R_0) + C \cdot \log^+[U(R_0) + 2B \log 2]), \end{aligned}$$

also

$$U(R_0) \leq 2A + 2C \cdot \log^+ U(R_0) + 2C \cdot (\log^+(2B \log 2) + \log 2).$$

Wegen $\lim_{t \to \infty}(t - \log t) = \infty$ gibt es also eine nur von A, B, C abhängige Konstante $M < \infty$ mit $U(R_0) \leq M$ und somit auch $U(r_0) \leq M$.

Nunmehr können wir den Satz über die logarithmischen Ableitungen in einer Form aussprechen, die für die gesamte Nevanlinna-Theorie von zentraler Bedeutung ist:

Satz 1.21

Es sei f eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Konstante $M < \infty$, so daß

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) \leq M \cdot \left(\log^+ r + \log^+ T(r,f) + 1\right) \tag{1.16}$$

für alle $r > 0$ mit Ausnahme einer Menge $E \subseteq (0;\infty)$ von endlichem Lebesgue-Maß bzw. im Falle $\rho(f) < \infty$ für alle $r > 0$ gilt.

Beweis: (cf. [31], VI. §3 und [39], S. 62)

Zunächst betrachten wir den Fall $n = 1$.

O.E. sei f nicht konstant. Dann gilt $\lim_{r\to\infty} T(r,f) = \infty$.

Dies ist, falls f Polstellen hat, klar nach Definition von $N(r,f)$ und folgt für holomorphes f aus Satz 1.6 und dem Satz von Liouville.

Also gibt es ein $r_0 \geq 1$ mit $T(r,f) \geq e$ für $r \geq r_0$.

Nach Satz 1.18 gilt

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\leq 10 \cdot \left(\log^+ R + \log^+ \frac{R}{r} + \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ T(R,f)\right. \\ &\qquad \left. + \log^+ \log^+ \frac{1}{|c_f|}\right) + 25 \end{aligned} \tag{1.17}$$

für $1 \leq r < R$.

Wendet man Lemma 1.19 auf $S(r) := \log T(r,f)$ und das Intervall $[r_0;\infty)$ an und benutzt (1.17) mit $R = r + \frac{1}{\log T(r,f)}$, so erhält man für alle $r \in [r_0;\infty)\backslash E$

$$\begin{aligned} & m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ \leq\ & 10 \cdot \left(\log(r+1) + \log 2 + \log\log T(r,f) + 2\log T(r,f) + \log^+\log^+ \frac{1}{|c_f|}\right) + 25 \\ \leq\ & 10 \cdot \left(\log r + 3 \cdot \log T(r,f) + \log^+ \log^+ \frac{1}{|c_f|} + 2\log 2\right) + 25, \end{aligned}$$

wobei $|E| < \infty$. Daraus folgt die Abschätzung (1.16) für $n = 1$.

Ist $\rho(f) < \infty$, so kann man schneller wie folgt argumentieren: Es gilt für genügend große R $T(R,f) \leq R^{\rho(f)+1}$. Setzt man dies (mit $R = 2r$) in (1.17) ein, so folgt

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r) \quad \text{für } r \to \infty;$$

man kann in (1.16) also $E = \emptyset$ wählen.

Damit ist die Behauptung für $n = 1$ gezeigt.

Nun sei $n \geq 2$. Für $\mu \geq 1$ gilt nach dem soeben Bewiesenen, angewandt auf $f^{(\mu-1)}$:

$$m\left(r, \frac{f^{(\mu)}}{f^{(\mu-1)}}\right) = O(\log r) + O\left(\log T\left(r, f^{(\mu-1)}\right)\right) \quad \text{für } r \to \infty,\ r \notin E_{\mu-1} \tag{1.18}$$

mit $|E_{\mu-1}| < \infty$, $E_{\mu-1} = \emptyset$ für $\rho\left(f^{(\mu-1)}\right) < \infty$.

Weiter ist für $\mu \geq 1$

$$T(r, f^{(\mu)}) = m\left(r, f^{(\mu)}\right) + N\left(r, f^{(\mu-1)}\right) + \overline{N}\left(r, f^{(\mu-1)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq m\left(r, \frac{f^{(\mu)}}{f^{(\mu-1)}}\right) + m\left(r, f^{(\mu-1)}\right) + 2 \cdot N\left(r, f^{(\mu-1)}\right) \\
&\leq O(\log r) + O\left(\log T\left(r, f^{(\mu-1)}\right)\right) + 2 \cdot T\left(r, f^{(\mu-1)}\right) \\
&= O(\log r) + O\left(T\left(r, f^{(\mu-1)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

für $r \to \infty$, $r \notin E_{\mu-1}$. Induktiv folgt

$$
T\left(r, f^{(\mu)}\right) \leq O(\log r) + O(T(r,f)) \quad \text{für } r \to \infty,\ r \notin \bigcup_{\nu=0}^{\mu-1} E_\nu. \tag{1.19}
$$

Aus (1.18) und (1.19) erhält man insgesamt

$$
\begin{aligned}
m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) &\leq \sum_{\mu=1}^{n} m\left(r, \frac{f^{(\mu)}}{f^{(\mu-1)}}\right) \\
&\leq \sum_{\mu=1}^{n} \left(O(\log r) + O\left(\log T\left(r, f^{(\mu-1)}\right)\right)\right) \\
&\leq O(\log r) + O(\log T(r,f))
\end{aligned}
$$

für $r \to \infty$, $r \notin E := \bigcup_{\mu=0}^{n-1} E_\mu$. Hierbei ist $|E| < \infty$.
Ist $\rho(f) < \infty$, so erkennt man aus

$$
T(r, f') \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2T(r,f) \leq O(\log r) + O(T(r,f)) \quad \text{für } r \to \infty \text{ und } \textit{alle } r > 0,
$$

daß auch f' und somit sämtliche Ableitungen $f^{(\mu)}$ endliche Ordnung haben[4]. Man kann dann nach dem für den Fall $n = 1$ Gezeigten stets $E_\mu = \emptyset$, also auch $E = \emptyset$ wählen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Notation:

Mit $S(r,f)$ bezeichnen wir fortan einen beliebigen Term der Form

$$
O(\log^+ r) + O(\log^+ T(r,f))
$$

für $r \to \infty$, $r \notin E$ mit einer Menge $E \subseteq (0;\infty)$ von endlichem Lebesgue-Maß bzw. mit $E = \emptyset$, sofern f von endlicher Ordnung ist; in letzterem Fall ist also $S(r) = O(\log r)$ für alle r, $r \to \infty$.

1.4 Der Zweite Hauptsatz und die Defektrelation

In $T(r,a,w) = m(r,a,w) + N(r,a,w)$ ist „im allgemeinen" die Anzahlfunktion der dominierende Anteil. Dies ist der Gehalt des Zweiten Hauptsatzes von Nevanlinna, in dessen Beweis der Satz über die logarithmische Ableitung (Satz 1.21 mit $n = 1$) eine zentrale Rolle spielt (cf. [27], Satz 9.1 und Satz 9.4):

[4] Genauer gilt sogar $\rho(f') \leq \rho(f)$.

Satz 1.22 Zweiter Hauptsatz

Es sei w eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion. Für paarweise verschiedene $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{C}$ $(q \geq 2)$ gilt dann:

$$m(r, \infty, w) + \sum_{k=1}^{q} m(r, c_k, w) \leq 2 \cdot T(r, w) - N_1(r) + S(r),$$

wobei

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + 2N(r, w) - N(r, w') \geq 0$$

die (um 1 reduzierten) Vielfachheiten sämtlicher a- und Polstellen von w zählt.

Aus dem Zweiten Hauptsatz folgt die Nevanlinnasche Defektrelation, die den Kleinen Satz von Picard erheblich erweitert. Hierzu zunächst einige Definitionen:

Definition 1.23

Es sei w meromorph in $\mathbb{C}$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann sind der **Defekt** $\delta(a) = \delta(a, w)$, der **Verzweigungsindex** $\vartheta(a) = \vartheta(a, w)$ und die **Verzweigtheit** $\Theta(a) = \Theta(a, w)$ von a definiert durch

$$\delta(a) := 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, w)} = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, w)},$$

$$\vartheta(a) := \liminf_{r \to \infty} \frac{N(r, a) - \overline{N}(r, a)}{T(r, w)} \qquad \text{und} \qquad \Theta(a) := 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, w)}.$$

Ein Wert $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\delta(a) > 0$ heißt **Nevanlinnascher Ausnahmewert** oder **defekter Wert**.

Offensichtlich gilt stets $0 \leq \psi(a) \leq 1$ für $\psi = \delta, \vartheta, \Theta$ und $\delta(a) + \vartheta(a) \leq \Theta(a)$.

Mithilfe des Zweiten Hauptsatzes ergibt sich nunmehr (cf. [27], Satz 9.6 und Satz 9.7):

Satz 1.24 Nevanlinnasche Defektrelation

Es sei w meromorph in $\mathbb{C}$. Die Anzahl der Werte $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\Theta(a, w) > 0$ ist abzählbar, und es gilt

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \Theta(a, w) \leq 2.$$

Insbesondere ist $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, w) \leq 2$.

Aus der Nevanlinnaschen Defektrelation liest man unmittelbar den Kleinen Satz von Picard ab: Für jeden **Picardschen Ausnahmewert** a von w (d.h. einen Wert, der nicht oder nur endlich oft angenommen wird) ist nämlich $N(r, a, w) = O(\log r)$, also, falls w transzendent ist, $\delta(a) = 1$. Genauer gilt:

Satz 1.25

Es sei w eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, deren Nullstellen alle mit Vielfachheit $\geq m$, deren Polstellen alle mit Vielfachheit $\geq p$ und deren Einsstellen alle mit Vielfachheit $\geq q$ auftreten, wobei

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$$

gilt. Dann ist w konstant.

Beweis: (cf. [53], Corollary 1.8.8)

Für die Verzweigtheiten $\Theta(a, w)$ einer in $\mathbb{C}$ meromorphen, nichtkonstanten Funktion w mit den angegebenen Eigenschaften erhielte man

$$\Theta(0, w) \geq 1 - \frac{1}{m}, \quad \Theta(\infty, w) \geq 1 - \frac{1}{p}, \quad \Theta(1, w) \geq 1 - \frac{1}{q}$$

und somit nach Voraussetzung $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \Theta(a; w) > 2$, im Widerspruch zur Nevanlinnaschen Defektrelation.

In Abschnitt 6.3.1 benötigen wir folgende auf Hayman [22] und Li [33] zurückgehende Modifikation des Defekts, die zugleich eine Möglichkeit aufzeigt, das Konzept des (Nevanlinnaschen) Ausnahmewertes von Konstanten auf meromorphe Funktionen zu verallgemeinern:

Definition 1.26

Es seien w, g meromorphe Funktionen in $\mathbb{C}$ mit $T(r, g) = o(T(r, w))$ für $r \to \infty$. Es sei $\mathcal{E} := \{E \subseteq (0; \infty) \, : \, E \text{ meßbar }, |E| < \infty\}$. Dann setzen wir

$$\delta_s(g; w) := \begin{cases} 1 \quad - \quad \liminf\limits_{r \to \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{w-g}\right)}{T(r,w)}, & \text{falls } \rho(w) < \infty. \\ 1 \quad - \quad \sup\limits_{E \in \mathcal{E}} \liminf\limits_{\substack{r \to \infty \\ r \notin E}} \frac{N\left(r, \frac{1}{w-g}\right)}{T(r,w)}, & \text{falls } \rho(w) = \infty. \end{cases}$$

Satz 1.27

Ist $a \in \overline{\mathbb{C}}$ Borelscher Ausnahmewert für eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion w, so ist $\delta_s(a; w) = 1$.

Beweis: (cf. [22], Theorem 1)

Nach Voraussetzung ist $\rho(a; w) < \rho(w)$, so daß $\rho(a; w) < \alpha$ für $\alpha := \frac{1}{2}(\rho(a; w) + \rho(w))$ gilt. Nach Definition der Ordnung $\rho(a, w)$ gibt es daher ein $r_0 > 0$ mit

$$N(r, a) < r^\alpha \quad \text{für alle } r \geq r_0. \tag{1.20}$$

Angenommen, es sei $\delta_s(a; w) < 1$. Es sei $\varepsilon := 1 - \delta_s(a; w) > 0$. Nach Definition gibt es eine Menge $E \subseteq (0; \infty)$ vom Lebesgue-Maß $\eta := |E| < \infty$, so daß

$$N(R, a) > \frac{\varepsilon}{2} \cdot T(R) \quad \text{für alle } R \in (0; \infty) \backslash E. \tag{1.21}$$

Es sei $r \geq r_0$. Dann gibt es ein $R \in [r; r + \eta + 1] \backslash E$, und damit erhält man aus (1.20), (1.21) und der Monotonie von $T(r)$:

$$T(r) \leq T(R) < \frac{2}{\varepsilon} \cdot N(R, a) \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot R^\alpha \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot (r + \eta + 1)^\alpha.$$

Also gilt $T(r) \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot (r + \eta + 1)^\alpha$ für alle $r \geq r_0$ und somit $\rho(w) \leq \alpha$, im Widerspruch zur Wahl von α.

Kapitel 2

Normalitätstheorie und Zalcman-Lemma

2.1 Grundlegendes zur Normalitätstheorie

Im folgenden sei Ω stets ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in Ω meromorphen Funktionen.

$\mathcal{F}$ heißt **normal** (in Ω), wenn jede Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ eine Teilfolge enthält, die kompakt-gleichmäßig (bezüglich der sphärischen Metrik) gegen eine meromorphe Funktion oder gegen ∞ konvergiert.

$\mathcal{F}$ heißt **normal in** $z_0 \in \Omega$, wenn es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z_0 gibt, so daß die Familie $\{f|_U : f \in \mathcal{F}\}$ der Restriktionen normal ist.

Normalität ist eine lokale Eigenschaft. Es gilt nämlich (cf. [53], Theorem 2.1.2):

Satz 2.1

Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$ ist genau dann normal in Ω, wenn $\mathcal{F}$ normal in jedem $z_0 \in \Omega$ ist.

Die grundlegenden Charakterisierungen von Normalität liefern die bekannten Sätze von Montel und von Marty (cf. [53], S. 35 ff. und S. 75 f.):

Satz 2.2

(1) **Satz von Montel**
Falls $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt ist, dann ist $\mathcal{F}$ normal. Gibt es ein $z_0 \in \Omega$ mit $|f(z_0)| \leq M < \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}$, so gilt auch die Umkehrung.

(2) **Satz von Marty**
Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$ ist genau dann normal, wenn die zugehörige Familie $\{f^{\#} | \, f \in \mathcal{F}\}$ der sphärischen Ableitungen lokal beschränkt ist.

Ein wesentlich leistungsfähigeres Kriterium für Normalität (bzw. für Nichtnormalität) stellt das Zalcman-Lemma (Satz 2.12) dar. Dieses ermöglicht auch einen verblüffend einfachen Beweis des sog. verschärften Satzes von Montel, den Schiff wegen seiner aus Sicht der Wertverteilungstheorie zentralen Bedeutung als FNT (= *fundamental normality test*) bezeichnet:

Satz 2.3 FNT, Verschärfter Satz von Montel

Es sei $\mathcal{F}$ die Familie der in Ω meromorphen Funktionen, die drei verschiedene *feste* Werte $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ auslassen. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Beweis:

Für einen kurzen und eleganten Beweis mithilfe des Zalcman-Lemmas siehe S. 44. In dem Buch von Schiff [53] finden sich weitere fünf Beweise bzw. Herleitungen aus anderen Sätzen:

(1) der klassische Beweis von Montel mithilfe der Modulfunktion (S. 54)
(2) ein Beweis mithilfe der Ahlfors'schen Theorie der Überdeckungsflächen (S. 86)
(3) der auf Drasin zurückgehende Nevanlinna-theoretische Beweis (S. 116).
(4) die (triviale) Zurückführung auf den Satz von Schottky (S. 58)
(5) die (ebenfalls fast triviale) Ableitung aus dem Kleinen Satz von Picard mithilfe des Satzes von Robinson-Zalcman (Satz 2.14) (S. 104).

Aus dem FNT wiederum folgen bekanntlich in wenigen Zeilen die Sätze von Schottky und Landau und der Kleine Satz von Picard. Wesentlich schwieriger ist es, explizite (und scharfe) Schranken in den Sätzen von Schottky und Landau anzugeben; dieses Problem ist durch die Arbeiten von Hempel inzwischen jedoch mehr oder weniger abschließend gelöst (cf. [23] und [24]); er konnte zeigen:

Satz 2.4

(1) **Satz von Schottky**
Für alle $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $f(z) \neq 0, 1$ in $\mathbb{D}$ und $|f(0)| = a$ ist

$$|f(z)| \leq \frac{1}{16} \cdot \left[\min\{16a + 8; e^{\pi} \cdot \max\{a; 1\}\}\right]^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Im Fall $a < 1$ gilt darüberhinaus

$$|f(z)| \leq \frac{1}{16} \cdot \exp\left(\frac{\pi^2}{\log(16/a)} \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}\right) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Diese Schranken sind bestmöglich in dem Sinne, daß die auftretenden reellen Konstanten ($\frac{1}{16}, e^{\pi}, \log 16$ usw.) nicht durch bessere ersetzt werden können.

(2) **Satz von Landau**
Es sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorph in $|z| < R$ mit $a_1 \neq 0$. Falls f die Werte 0 und 1 in $|z| < R$ nicht annimmt, so gilt

$$R \leq \frac{2|a_0| \left(|\log |a_0|| + C\right)}{|a_1|}$$

mit $C = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^4 = 4.3768796\ldots$. Diese Wahl von C ist bestmöglich.

Die letzte dieser Abschätzungen ermöglicht es uns, in Satz 6.37 eine erstaunlich gute obere Schranke für den Betrag des ersten Koeffizienten spezieller AP-Lückenreihen herzuleiten.

Den Zusammenhang zwischen $\mathcal{K}$-Konvergenz bezüglich der sphärischen Metrik und $\mathcal{K}$-Konvergenz bezüglich der euklidischen Metrik beschreibt der folgende Satz (cf. [53], Theorem 3.1.3):

Satz 2.5

Eine Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$ ist genau dann bezüglich der sphärischen Metrik $\mathcal{K}$-konvergent in Ω gegen eine Grenzfunktion f (evtl. $f \equiv \infty$), wenn es um jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U_r(z_0)$ gibt, so daß für $n \to \infty$

$$|f_n(z) - f(z)| \longrightarrow 0 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right| \longrightarrow 0$$

gleichmäßig in $U_r(z_0)$ gilt.

Eine überragende Rolle in unseren Betrachtungen spielt der wohlbekannte

Satz 2.6 Satz von Hurwitz

Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von in Ω holomorphen und nullstellenfreien Funktionen f_n, die kompakt-gleichmäßig gegen eine nichtkonstante Grenzfunktion f konvergiert. Dann ist auch f nullstellenfrei in Ω.

Interpretiert man Normalität als relative Kompaktheit, so ist unmittelbar einleuchtend (cf. [53], Theorem 3.4.1):

Satz 2.7

Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$ und $\overline{\mathcal{F}}$ der Abschluß von $\mathcal{F}$ bezüglich der Topologie der kompakt-gleichmäßigen Konvergenz. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann normal, wenn $\overline{\mathcal{F}}$ normal ist.

Zur Hebung von “Normalitätslücken” erweist sich mehrfach das folgende einfache Lemma als nützlich:

Lemma 2.8

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in einem Gebiet Ω holomorphen nullstellenfreien Funktionen und $K \subseteq \Omega$ ein Kompaktum. Falls $\mathcal{F}$ normal in $\Omega \setminus K$ ist, so auch in Ω.

Beweis:

Es sei $(f_n)_n$ ein Folge in $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_j$, die kompakt gleichmäßig in $\Omega \setminus K$ gegen eine Grenzfunktion f (evtl. $f \equiv \infty$) konvergiert.
Ist f holomorph in $\Omega \setminus K$, so folgt mithilfe der Cauchyschen Integralformel, daß $(f_{n_j})_j$ sogar in ganz Ω kompakt gleichmäßig konvergiert.
Ist $f \equiv \infty$, so konvergiert die Folge der holomorphen (!) Funktionen $\frac{1}{f_{n_j}}$ wegen Satz 2.5 kompakt gleichmäßig in $\Omega \setminus K$ gegen 0. Wiederum mithilfe der Cauchyschen Integralformel überträgt sich die kompakt gleichmäßige Konvergenz auf ganz Ω. Also strebt $(f_{n_j})_j$ kompakt gleichmäßig in Ω gegen ∞.
Damit ist die Normalität von $\mathcal{F}$ in Ω gezeigt.

Daß die Voraussetzung der Nullstellenfreiheit unverzichtbar ist, belegt bereits das einfache Beispiel der in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, nicht aber in $\mathbb{D}$ normalen Folge $(f_n)_n$ mit $f_n(z) := nz$.

In Kapitel 4 benötigen wir folgendes Normalitätskriterium:

Satz 2.9

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von holomorphen nullstellenfreien Funktionen in $\mathbb{D}$ mit $\left|\frac{f'}{f}(z)\right| \leq M < \infty$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Es gebe ein $\beta > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}$ ein $z_0 \in \mathbb{D}$ mit $|f(z_0)| \leq \beta$ existiert. Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{D}$, insbesondere normal.

Beweis: (cf. [31], VIII. Theorem 2.2)

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $f = e^g$ und ein $z_0 \in \mathbb{D}$ mit $|f(z_0)| \leq \beta$. Wegen $|g'(\zeta)| = \left|\frac{f'}{f}(\zeta)\right| \leq M$ folgt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$|g(z) - g(z_0)| = \left|\int_{z_0}^{z} g'(\zeta)d\zeta\right| \leq M \cdot |z - z_0| \leq 2 \cdot M.$$

Wegen $|e^w| \leq e^{|w|}$ für $w \in \mathbb{C}$ erhält man weiter:

$$|f(z)| = \left|e^{g(z)}\right| \leq e^{|g(z)-g(z_0)|} \cdot \left|e^{g(z_0)}\right| \leq e^{2M} \cdot \beta \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Für unsere Betrachtungen über Lückenreihen in Kapitel 6 ist es zweckmäßig, über eine Charakterisierung von Normalität durch die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung zu verfügen. Diese liefert der nächste Satz. Vorher führen wir noch zwei Notationen ein, von denen wir später regen Gebrauch machen werden:

Notation:

Für eine Funktion $f \in A_0$ bezeichnen wir fortan mit $a_k^{(f)}$ den k-ten Koeffizienten der Taylorentwicklung von f um 0 (d.h. $a_k^{(f)} := \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0)$).

Für eine Familie $\mathcal{F} \subseteq A_0$ setzen wir

$$M_k(\mathcal{F}) := \sup\left\{|a_k^{(f)}| : f \in \mathcal{F}\right\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 2.10

Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq A_0$ ist genau dann normal in $\mathbb{D}_r$ (mit $0 < r \leq 1$), wenn

$$M_k(\mathcal{F}) < \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \limsup_{k\to\infty} M_k^{1/k}(\mathcal{F}) \leq \frac{1}{r} \ \text{ gilt.}$$

Beweis:

O. E. sei $r = 1$. (Sonst betrachte man $\{z \mapsto f(rz) | f \in \mathcal{F}\}$ anstelle von $\mathcal{F}$.)

„$\Rightarrow$:“ Es sei $\mathcal{F}$ normal in $\mathbb{D}$, und es sei $\rho \in (0;1)$ beliebig. Dann ist $\mathcal{F}$ angesichts der Normierung im Nullpunkt beschränkt in $|z| \leq \rho$, d.h. es gibt ein $C < \infty$ mit $|f(z)| \leq C$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle z mit $|z| \leq \rho$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für $f \in \mathcal{F}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|a_k^{(f)}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \max_{|\zeta|=\rho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{k+1}} \leq \frac{C}{\rho^k}.$$

Da dies für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt, folgt $M_k(\mathcal{F}) \leq \frac{C}{\rho^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher ist $M_k(\mathcal{F}) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{k\to\infty} M_k^{1/k}(\mathcal{F}) \leq \frac{1}{\rho}$. Hierbei war $\rho \in (0;1)$ beliebig, so daß man schließlich $\limsup_{k\to\infty} M_k^{1/k}(\mathcal{F}) \leq 1$ erhält.

„$\Leftarrow$:“ Es sei $M_k(\mathcal{F}) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{k\to\infty} M_k^{1/k}(\mathcal{F}) \leq 1$.
Aus $|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k(\mathcal{F})\rho^k < \infty$ für $|z| \leq \rho < 1$, $f \in \mathcal{F}$ folgt dann sofort die lokal-gleichmäßige Beschränktheit von $\mathcal{F}$ in $\mathbb{D}$ und damit die Normalität.

2.2 Zalcman-Lemma und Blochsches Prinzip

Lemma 2.11

Es sei f meromorph in $\mathbb{D}$, alle Nullstellen von f mögen mindestens mit Vielfachheit $m \geq 1$ auftreten, und es sei $-1 < \alpha < m$. Es gebe ein $r \in (0,1)$ und einen Punkt $z^* \in \mathbb{D}_r$, so daß

$$\frac{\left(1 - \left|\frac{z^*}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha} |f'(z^*)|}{\left(1 - \left|\frac{z^*}{r}\right|^2\right)^{2\alpha} + |f(z^*)|^2} > 1$$

gilt. Dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{D}_r$ und ein $t_0 \in (0;1)$ mit

$$\sup_{|z|<r} \frac{\left(1 - \left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha} t_0^{1+\alpha}|f'(z)|}{\left(1 - \left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{2\alpha} t_0^{2\alpha} + |f(z)|^2} = \frac{\left(1 - \left|\frac{z_0}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha} t_0^{1+\alpha}|f'(z_0)|}{\left(1 - \left|\frac{z_0}{r}\right|^2\right)^{2\alpha} t_0^{2\alpha} + |f(z_0)|^2} = 1.$$

Beweis: (cf. [43], Lemma 1)

Wir setzen zur Abkürzung

$$F(z,t) := \frac{\left(1 - \left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha} t^{1+\alpha}|f'(z)|}{\left(1 - \left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{2\alpha} t^{2\alpha} + |f(z)|^2}$$

Dann ist F stetig auf dem Zylinder $C := \mathbb{D}_r \times (0;1]$.
Wir zeigen, daß für alle Folgen $(z_n)_n \subset \mathbb{D}_r$, $(t_n)_n \subset (0;1)$ mit $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\right) t_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

$$\liminf_{n\to\infty} F(z_n, t_n) = 0 \tag{2.1}$$

gilt:

Falls $f(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} F(z_n,t_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha} t_n^{1+\alpha} \frac{|f'(z_n)|}{|f(z_n)|^2} = 0.$$

Nun sei $f(z_0) = 0$, und

$$\begin{aligned} f(z) = &\quad a_s \cdot (z - z_0)^s + \dots \\ f'(z) = &\; s \cdot a_s \cdot (z - z_0)^{s-1} + \dots \end{aligned}$$

seien die Taylorentwicklungen von f und f' um z_0. Nach Voraussetzung ist $s \geq m$.
Falls $-1 < \alpha < 1$ gilt, so erhält man

$$\limsup_{n\to\infty} F(z_n,t_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1-\alpha} t_n^{1-\alpha}|f'(z_n)| = 0.$$

Jetzt sei $1 \leq \alpha < m$, und es sei

$$B := \liminf_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) \cdot t_n}{|z_n - z_0|}.$$

Ist $B > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} F(z_n, t_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1-\alpha} t_n^{1-\alpha} |f'(z_n)| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{|s \cdot a_s (z_n - z_0)^{s-1}|}{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{\alpha-1} t_n^{\alpha-1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} s \cdot |a_s| \cdot |z_n - z_0|^{s-\alpha} \frac{|z_n - z_0|^{\alpha-1}}{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{\alpha-1} t_n^{\alpha-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Ist $B = 0$, so erkennt man anhand der Darstellung

$$F(z_n, t_n) = \frac{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{\alpha} t_n^{\alpha} |f(z_n)|}{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{2\alpha} t_n^{2\alpha} + |f(z_n)|^2} \cdot \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \left|\frac{f'(z_n)}{f(z_n)}\right|,$$

in welcher der erste Faktor auf der rechten Seite nach oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist und für die übrigen Faktoren

$$\liminf_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \left|\frac{f'(z_n)}{f(z_n)}\right| = \liminf_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \left|\frac{s}{z_n - z_0}\right| = B \cdot s = 0$$

gilt, daß auch in diesem Fall $\liminf_{n\to\infty} F(z_n, t_n) = 0$ erfüllt ist.

Nach Voraussetzung ist $F(z^*, 1) > 1$. Daher ist $U := \{(z,t) \in C \mid F(z,t) > 1\}$ nichtleer. Es sei

$$t_0 := \inf\{t > 0 \mid \exists z \in \mathbb{D}_r \,:\, (z,t) \in U\}.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist $t_0 < 1$. Wäre $t_0 = 0$, so erhielte man mit (2.1), angewandt auf eine Folge $((z_n, t_n))_n \subseteq U$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, einen Widerspruch. Also ist $t_0 > 0$. Es gibt ein $z_0 \in \overline{\mathbb{D}_r}$ mit $(z_0, t_0) \in \overline{U}$. Wiederum mit (2.1) zeigt man $|z_0| < r$, und nach Definition von t_0 (und wegen der Stetigkeit von F auf C) folgt $F(z_0, t_0) = 1$ sowie $F(z, t_0) \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}_r$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 2.12 Zalcman-Lemma

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in $\mathbb{D}$ meromorphen Funktionen, deren Nullstellen alle mindestens mit Vielfachheit m, deren Polstellen alle mindestens mit Vielfachheit p auftreten. Es sei $-p < \alpha < m$. $\mathcal{F}$ sei nicht normal in $z = 0$. Dann gibt es Folgen $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$, $(z_n)_n \subseteq \mathbb{D}$ und $(\rho_n)_n \subseteq (0;1)$, so daß $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ gilt und die Folge $(g_n)_n$ mit

$$g_n(\zeta) := \frac{1}{\rho_n^{\alpha}} \cdot f_n(z_n + \rho_n \cdot \zeta)$$

kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{C}$ (bezüglich der sphärischen Metrik) gegen eine nichtkonstante, in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion g mit $g^{\#}(\zeta) \leq g^{\#}(0) = 1$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis: (cf. [43], Lemma 2)

$\mathcal{F}$ sei nicht normal in $z = 0$, und es sei zunächst $\alpha \geq 0$. Nach dem Satz von Marty gibt es Folgen $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ und $(z_n^*)_n \subseteq \mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n^* = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f_n^{\#}(z_n^*) = \infty$. Wir setzen

$$r_n := \left(f_n^{\#}(z_n^*)\right)^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}} + 2 \cdot |z_n^*|,$$

so daß $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ und $\frac{|z_n^*|}{r_n} \leq \frac{1}{2}$ gilt. Weiter sei

$$F_n(z,t) := \frac{\left(1 - \left|\frac{z}{r_n}\right|^2\right)^{1+\alpha} t^{1+\alpha} |f_n'(z)|}{\left(1 - \left|\frac{z}{r_n}\right|^2\right)^{2\alpha} t^{2\alpha} + |f_n(z)|^2}.$$

Wegen $\alpha \geq 0$ ist

$$f_n^{\#}(z_n^*) \cdot \left(1 - \left|\frac{z_n^*}{r_n}\right|^2\right)^{1+\alpha} \leq F_n(z_n^*, 1),$$

also $\lim_{n\to\infty} F_n(z_n^*, 1) = \infty$ und daher o.E. $F_n(z_n^*, 1) > 1$ für alle n. Nach Lemma 2.11 gibt es dann $z_n \in \mathbb{D}_{r_n}$ und $t_n \in (0;1)$ mit

$$\sup_{|z|<r_n} F_n(z, t_n) = F_n(z_n, t_n) = 1. \tag{2.2}$$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ und

$$1 \geq F_n(z_n^*, t_n) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{1+\alpha} t_n^{1+\alpha} f_n^{\#}(z_n^*),$$

also

$$t_n \leq \frac{4}{3} \cdot \left[f_n^{\#}(z_n^*)\right]^{-\frac{1}{1+\alpha}}$$

Es sei $\rho_n := \left(1 - \left|\frac{z_n}{r_n}\right|^2\right) \cdot t_n$, so daß

$$\frac{\rho_n}{r_n - |z_n|} = \frac{r_n + |z_n|}{r_n^2} \cdot t_n \leq 2 \cdot \frac{t_n}{r_n} \leq \frac{8}{3} \cdot \left[f_n^{\#}(z_n^*)\right]^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt. Insbesondere ist $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, und für $R_n := \frac{r_n - |z_n|}{\rho_n}$ ist $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Weiter ist $g_n(\zeta) := \frac{1}{\rho_n^\alpha} \cdot f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ meromorph in $|\zeta| < R_n$ mit

$$g_n^{\#}(\zeta) = \frac{\rho_n^{1-\alpha} |f_n'(z_n + \rho_n\zeta)|}{1 + \rho_n^{-2\alpha} |f_n(z_n + \rho_n\zeta)|^2} = \frac{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r_n}\right|^2\right)^{1+\alpha} t_n^{1+\alpha} |f_n'(z_n + \rho_n\zeta)|}{\left(1 - \left|\frac{z_n}{r_n}\right|^2\right)^{2\alpha} t_n^{2\alpha} + |f_n(z_n + \rho_n\zeta)|^2}. \tag{2.3}$$

Wegen (2.2) ist

$$g_n^{\#}(0) = F_n(z_n, t_n) = 1. \tag{2.4}$$

Für $|\zeta| \leq R < R_n$ gilt

$$\frac{1}{1 + \frac{R}{R_n}} \leq \frac{r_n - |z_n|}{r_n - |z_n| + \rho_n|\zeta|} \leq \frac{r_n^2 - |z_n|^2}{r_n^2 - |z_n + \rho_n\zeta|^2} \leq \frac{r_n - |z_n|}{r_n - |z_n| - \rho_n|\zeta|} \leq \frac{1}{1 - \frac{R}{R_n}}.$$

Dies zeigt

$$\frac{1-\left|\frac{z_n}{r_n}\right|^2}{1-\left|\frac{z_n+\rho_n\zeta}{r_n}\right|^2} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty) \tag{2.5}$$

kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{C}$.
Es seien $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ gegeben. Dann gilt wegen (2.3), (2.5) und (2.2) für hinreichend große n und alle ζ mit $|\zeta| \le R$:

$$g_n^{\#}(\zeta) \le (1+\varepsilon)\cdot F_n(z_n+\rho_n\zeta, t_n) \le 1+\varepsilon. \tag{2.6}$$

Nach dem Satz von Marty ist $(g_n)_n$ also normal in $|\zeta| \le R$ für jedes $R > 0$. Mit dem Diagonalverfahren findet man eine Teilfolge $(g_{n_k})_k$, die kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{C}$ gegen eine meromorphe Grenzfunktion g konvergiert. Wegen (2.4) und (2.6) ist $g^{\#}(0) = 1$ (und g somit insbesondere nichtkonstant) und $g^{\#}(\zeta) \le 1$ in $\mathbb{C}$.
Falls $\alpha < 0$ ist, betrachtet man die Familie $\widetilde{\mathcal{F}} := \left\{\frac{1}{f} \,\middle|\, f \in \mathcal{F}\right\}$, deren Normalität in 0 wegen $f^{\#} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}$ und des Satzes von Marty äquivalent zur Normalität von $\mathcal{F}$ in 0 ist, und $\widetilde{\alpha} := -\alpha$. Nach dem schon Bewiesenen erhält man eine Folge $(\widetilde{g}_n)_n$ mit $\widetilde{g}_n = \rho_n^{-\widetilde{\alpha}}\cdot\frac{1}{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}$, die in $\mathbb{C}$ kompakt-gleichmäßig gegen eine nichtkonstante Grenzfunktion $\widetilde{g}$ konvergiert. Für $g_n := 1/\widetilde{g}_n$ und $g := 1/\widetilde{g}$ folgt dann unter Beachtung von Satz 2.5 die Behauptung.

Bemerkung 2.13

Aus der Beschränktheit der sphärischen Ableitung der Grenzfunktion g im Zalcman-Lemma folgt für die Ahlfors-Shimizu-Charakteristik $T_0(r,g)$ (Bemerkung 1.10) $T_0(r,g) = O(r^2)$ für $r\to\infty$, so daß g in Anbetracht von (1.5) von endlicher Ordnung (genauer sogar von der Ordnung ≤ 2) ist.

Zalcman formulierte das Lemma 1975 für den Fall $\alpha = 0$ (cf. [62]); die Beweisidee findet sich bereits 1973 bei Lohwater und Pommerenke [34]. Von Pang ([41], [42]) stammt die Verallgemeinerung auf $-1 < \alpha < 1$. Die oben angegebene Version geht auf Chen und Gu [5] zurück. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen kann man auch $\alpha = m$ zulassen (cf. Pang / Zalcman [43]); dies ist jedoch nur für spezielle Anwendungen von Interesse. Für die meisten Zwecke ist $-1 < \alpha < 1$ oder sogar $\alpha = 0$ ausreichend.

Das Zalcman-Lemma erlaubt die folgende bekannte Formalisierung des Blochschen Prinzips, die auf Robinson und Zalcman zurückgeht und von Pang [41] erweitert wurde.

Hierbei schreiben wir $\mathcal{M}_{p,m}(\Omega)$ für die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, deren Nullstellen alle mit Vielfachheit $\ge m$ und deren Polstellen alle mit Vielfachheit $\ge p$ auftreten ($m, p \in \mathbb{N}$). Unter einer **Eigenschaft** verstehen wir dann formal eine Teilmenge von

$$M_{p,m} := \{(f,\Omega) \mid \Omega \text{ Gebiet in } \mathbb{C},\ f \in \mathcal{M}_{p,m}(\Omega)\}.$$

Satz 2.14 Satz von Robinson-Zalcman

Es seien $m, p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \subseteq M_{p,m}$ eine Eigenschaft und $-p < \alpha < m$. Es gelte:

(1) Falls $(f,\Omega) \in \mathcal{P}$ und $\Omega' \subseteq \Omega$ ein Gebiet ist, so ist auch $(f,\Omega') \in \mathcal{P}$.

(2) Falls $(f,\Omega) \in \mathcal{P}$ und $\varphi(z) = cz + d$ mit $c \neq 0$ eine lineare Transformation ist, so ist auch $\left(\frac{1}{c^\alpha} \cdot f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega)\right) \in \mathcal{P}$.

(3) Es sei $((f_n,\Omega_n))_n \subseteq \mathcal{P}$, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots$, $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$, und $(f_n)_n$ sei in $\mathbb{C}$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen eine Funktion f. Dann ist $(f,\mathbb{C}) \in \mathcal{P}$.

Falls dann gilt

$$(f,\mathbb{C}) \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \mathit{const.},$$

so ist für jedes Gebiet Ω in $\mathbb{C}$ die Familie $\mathcal{F}_\Omega := \{f \in \mathcal{M}_{p,m}(\Omega) \,|\, (f,\Omega) \in \mathcal{P}\}$ normal.

Beweis: (nach [53], S. 103 f.)

Annahme: $\mathcal{F}_\Omega$ ist nicht normal. Nach Satz 2.1 gibt es dann ein $z_0 \in \Omega$, so daß $\mathcal{F}_\Omega$ nicht normal in z_0 ist. Es sei $r > 0$ so gewählt, daß $U_r(z_0) \subseteq \Omega$. Nach dem Zalcman-Lemma gibt es Folgen $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}_\Omega$, $(z_n)_n \subseteq U_r(z_0)$ und $(\rho_n)_n \subseteq (0;1)$, so daß $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt und $(g_n)_n$ mit $g_n(\zeta) := \frac{1}{\rho_n^\alpha} \cdot f_n(z_n + \rho_n \cdot \zeta)$ kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{C}$ gegen eine nichtkonstante Grenzfunktion g konvergiert. Es sei $R_n := \frac{1}{\rho_n}(r - |z_n - z_0|)$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$, und g_n ist meromorph in $\Omega_n := \mathbb{D}_{R_n}$. Es ist $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$. Wegen $U_{r-|z_n-z_0|}(z_n) \subseteq U_r(z_0)$ folgt mit (1) und (2), daß auch $(g_n,\Omega_n) \in \mathcal{P}$ für alle n ist. Mit (3) erhält man $(g,\mathbb{C}) \in \mathcal{P}$ und somit $g \equiv \mathit{const.}$, Widerspruch! Also ist $\mathcal{F}_\Omega$ normal.

Im folgenden Satz stellen wir einige wichtige Kriterien zusammen, in denen das Zalcman-Lemma bzw. der Satz von Robinson-Zalcman anwendbar sind.

Satz 2.15

Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit einer der nachstehenden Eigenschaften ist konstant, und die Familie der in einem Gebiet Ω meromorphen Funktionen f mit einer dieser Eigenschaften ist normal:

(1) Alle Nullstellen von f treten mit Vielfachheit $\geq m$, alle Polstellen mit Vielfachheit $\geq p$ und alle Einsstellen mit Vielfachheit $\geq q$ auf, und es gelte $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

(2) Es ist $f' \cdot f^n \neq 1$ $(n \geq 1)$.

(3) Es ist f holomorph, alle Nullstellen von f haben Vielfachheit $\geq k$, und es gilt $f^{(k)} \cdot f^n \neq 1$ (mit $n \geq 1$).

(4) Es ist $(f^n)^{(k)} \neq 1$ (mit $n \geq k+3$; falls f holomorph: $n \geq k+1$).[1]

Beweis:

(1) (cf. [53], Corollary 1.8.8 und [53], Theorem 4.1.3)
Daß jede in $\mathbb{C}$ definierte Funktion mit den angegebenen Eigenschaften konstant ist, haben wir in Satz 1.25 aus der Nevanlinnaschen Defektrelation abgeleitet. Das zugehörige Normalitätsresultat folgt sofort mit dem Satz von Robinson-Zalcman.

(2) [64], Nr. 3
Bemerkenswert hierbei ist, daß es genügt, das Resultat über in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen zunächst für den Fall endlicher Ordnung zu beweisen; angesichts von Bemerkung 2.13 läßt sich daraus mithilfe des Zalcman-Lemmas schon das zugehörige Normalitätsresultat ableiten, aus welchem dann wiederum sehr einfach folgt, daß jede *beliebige* in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit $f' \cdot f^n \neq 1$ konstant ist.

[1] Das Normalitätsresultat im meromorphen Fall gilt sogar für $n \geq k+2$.

(3) [44], Theorem 1 und Theorem 2.
(4) [63], Example 16.

Ein sehr einfaches Beispiel, in dem das Blochsche Prinzip verletzt ist, stellt die Eigenschaft einer Funktion, beschränkt zu sein, dar (sofern man keine *gleichmäßige* Schranke für alle Funktionen der betrachteten Familie vorschreibt). Es lassen sich jedoch auch leicht durch das Werteverhalten von Differentialpolynome beschreibbare Eigenschaften angeben, in denen das Blochsche Prinzip nicht gültig ist. Wir betrachten z.B. die Eigenschaft, daß

$$P[f](z) := (f'(z) - 1)(f'(z) - 2)(f(z) - f'(z))$$

den Wert 0 nicht annimmt (cf. [53], S. 108). Dann ist jede ganze Funktion f mit $P[f] \neq 0$ in $\mathbb{C}$ konstant, wie man leicht aus dem Kleinen Satz von Picard folgert. Für $f_n(z) := nz$ ist $P[f_n] \neq 0$ in $\mathbb{D}$, sofern $n \geq 3$, aber $(f_n)_{n\geq 3}$ ist nicht normal in $\mathbb{D}$.

Schwieriger ist es, Beispiele zu finden, in denen die Umkehrung des Blochschen Prinzips nicht gilt, in denen einem Normalitätsresultat also kein Resultat vom "Picardschen Typ" entspricht. Die Bedingung $f^n - af' \neq b$ (mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) an in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{D}$ meromorphe Funktionen bzw. Funktionenfamilien liefert ein solches Beispiel, sofern $n = 3$ oder $n = 4$ ist; wir werden am Anfang von Kapitel 3 hierauf zurückkommen.

In Kapitel 7 benötigen wir ein Normalitätskriterium, welches seinen Ausgangspunkt in einem als "Haymans Alternative" bekannt gewordenen Resultat von Hayman aus dem Jahre 1959 hat (cf. [21]):

Satz 2.16

Es sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion und $k \in \mathbb{N}$. Falls f und $f^{(k)} - 1$ keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ haben, so ist f konstant.

Das zugehörige Normalitätsresultat wurde 1979 von Gu in [19] und unabhängig davon 1982 von Yang in [60] bewiesen. Yang [61] und unabhängig davon Schwick [55] verallgemeinerten dies auf holomorphe Ausnahmefunktionen anstelle der Ausnahmewerte 0 und 1. Schließlich konnte Schwick 1997 in [56] zeigen, daß ein entsprechendes Normalitätskriterium auch für meromorphe Ausnahmefunktionen gültig bleibt:

Satz 2.17

Es sei ψ eine in $\mathbb{D}$ meromorphe Funktion mit $\psi \not\equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}$ eine Familie von in $\mathbb{D}$ meromorphen Funktionen mit $f(z) \neq 0$ und $f^{(k)}(z) \neq \psi(z)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in \mathbb{D}$, und kein $f \in \mathcal{F}$ habe eine Polstelle mit ψ gemeinsam. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Die Voraussetzung $\psi \not\equiv 0$ ist offensichtlich unabdingbar, wie die nichtnormale Familie der Funktionen $f_n(z) := e^{nz}$ zeigt. Auch auf die Voraussetzung über die Polstellen von ψ kann nicht verzichtet werden; dies belegt das Beispiel der in $z = 0$ nichtnormalen Familie der nullstellenfreien Funktionen $f_n(z) := \frac{1}{nz}$, für die $f_n^{(k)} - \frac{(-1)^{k+1}}{z^{k+1}} \neq 0$ für alle $k \geq 1$ in $\mathbb{D}$ gilt.

Nevo gab 2001 in [40] einen kurzen Beweis von Satz 2.17, der auf einer geschickten Kombination des Zalcman-Lemmas mit dem Argumentprinzip beruht.[2] Eine weitere

[2] Im Beweis von Satz 3.11 wird uns diese Idee in verfeinerter Form erneut begegnen.

Verallgemeinerung des Normalitätskriteriums von Gu und Yang gelang 1999 Bergweiler in [2].

Wir kommen nun zu dem bereits angekündigten, auf A. Ros (cf. [63]) zurückgehenden eleganten

Beweis des FNT:

Wegen Satz 2.1 genügt es, den Fall $\Omega = \mathbb{D}$ zu betrachten. Ebenso kann man o.E. $\{a; b; c\} = \{0; 1; \infty\}$ annehmen. Es sei also $\mathcal{F} := \{f \in A \,|\, f(z) \neq 0, 1 \text{ in } \mathbb{D}\}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n := \left\{e^{2\pi ik/n} \,\middle|\, k = 0, \ldots, n-1\right\} \cup \{0\}$ und $\mathcal{F}_n := \{f \in A \,|\, f(\mathbb{D}) \cap E_n = \emptyset\}$. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ und

$$f \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad f^{1/n} \in \mathcal{F}_n, \tag{2.7}$$

wobei $f^{1/n}$ eine beliebige holomorphe n-te Wurzel von f bezeichnet.
Annahme: $\mathcal{F}$ ist nicht normal.
Wegen (2.7) ist dann keine der Familien $\mathcal{F}_n$ normal. Mithilfe des Zalcman-Lemmas kann man also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ganze nichtkonstante Funktion g_n mit

$$g_n^{\#}(z) \leq g_n^{\#}(0) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

als Grenzwert von Funktionen in $\mathcal{F}_n$ konstruieren. Nach dem Satz von Hurwitz gilt dann $g_n(\mathbb{C}) \cap E_n = \emptyset$.
Nun sei $D_n := E_{2^n}$, $G_n := g_{2^n}$ und $\mathcal{G} := \{G_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wegen $G_n^{\#}(z) \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{G}$ nach Satz von Marty normal in $\mathbb{C}$. Somit gibt es eine Teilfolge, die kompakt-gleichmäßig bezüglich der sphärischen Metrik gegen eine Grenzfunktion G konvergiert. Wegen $G_n^{\#}(0) = 1$ ist auch $G^{\#}(0) = 1$, G also nicht konstant. Wegen $D_n \subseteq D_m$ für $m \geq n$ läßt G_m für $m \geq n$ alle Werte in D_n aus. Nach dem Satz von Hurwitz läßt G also jeden Wert in $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ aus. Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ dicht in $\partial\mathbb{D}$ liegt, folgt mit dem Offenheitsprinzip $G(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$ oder $G(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, so daß man für G oder für $1/G$ einen Widerspruch zum Satz von Liouville erhält. Also ist $\mathcal{F}$ normal.

Es ist klar, daß das Auslassen dreier beliebiger, von der Funktion abhängiger Werte keine Normalität konstituiert. Andererseits kann man die Voraussetzung im FNT, daß die Ausnahmewerte nicht von der Funktion abhängen, dahingehend abschwächen, daß das Produkt ihrer chordalen Abstände gleichmäßig nach unten beschränkt ist:

Satz 2.18 Verallgemeinerte Version des FNT

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in einem Gebiet Ω meromorphen Funktionen. Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt: Jedes $f \in \mathcal{F}$ läßt drei Werte $a_f, b_f, c_f \in \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\chi(a_f, b_f) \cdot \chi(b_f, c_f) \cdot \chi(a_f, c_f) \geq \varepsilon$$

aus. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Beweis:

Dies folgt mittels des Zalcman-Lemmas und einiger Standardargumente aus dem Kleinen Satz von Picard, welcher ja eine direkte Konsequenz aus dem FNT ist. Für Details siehe [53], S. 105.

Kapitel 3

Verallgemeinerung eines Normalitätskriteriums von Drasin und Chen & Hua

1959 bewies Hayman in [21] das folgende Resultat:

Satz 3.1

Es sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, $n \geq 5$ und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Falls $af^n(z) + f'(z) \neq b$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, so ist f konstant. Ist f ganz, so gilt dies sogar für $n \geq 3$ und im Falle $n = 2$ immerhin noch für $b = 0$.

Daß für $n = 1$ und für $n = 2$, $b \neq 0$ kein derartiges Kriterium gelten kann, läßt sich mit trivialen Beispielen belegen:

Sind $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ gegeben, so setzt man $f(z) := e^{-az} + \frac{b}{a} + 1$. Dann gilt $af(z) + f'(z) = b + a \neq b$ in $\mathbb{C}$.

Als Gegenbeispiel im Fall $n = 2$, $b \neq 0$ wählt man $f(z) := e^{cz} + d$ mit $d^2 = \frac{b}{a}$ und $c := -2ad \neq 0$. Dann ist $af^2(z) + f'(z) = ae^{2cz} + (2ad + c)e^{cz} + ad^2 = ae^{2cz} + b \neq b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Haymans Ergebnis läßt sich für meromorphe Funktionen auch nicht auf den Fall $n = 3$ oder $n = 4$ übertragen: Mues konnte 1979 in [36] zeigen, daß für jedes $c \neq 0$ nichtkonstante meromorphe Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ existieren mit $f^3(z) - f'(z) \neq c$ und $g^4(z) - g'(z) \neq c$ in $\mathbb{C}$ (nämlich Lösungen geeigneter Riccatischer Differentialgleichungen).

Das zugehörige Normalitätsresultat stammt von Drasin [10] für holomorphe und von Langley [32] für meromorphe Funktionen. Überraschenderweise bleibt dieses, wie Pang [42] und Zalcman [64] gezeigt haben, auch für $n = 3$ und $n = 4$ und im holomorphen Fall sogar für $n = 2$ gültig - in Situationen also, in denen Satz 3.1 nicht allgemein gilt. Jedoch erhält man im meromorphen Fall für $n = 2$ und $b = 0$ keine Normalität; dies zeigt die in $z = 0$ nichtnormale Familie der Funktionen $f_n(z) := \frac{1}{nz}$, für die $af_n^2(z) + f'(z) = \frac{a-n}{n^2z^2} \neq 0$ in $\mathbb{D}$ für alle $n \neq a$ gilt.

Chen und Hua zeigten in [6] folgende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Drasin und Langley:

Satz 3.2

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen. Es seien $n \geq 2$, $k \geq 1$, a, b seien meromorph in $\mathbb{D}$ mit $a \not\equiv 0$, und a habe nur einfache Polstellen. Falls für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in \mathbb{D}$

$$a(z) \cdot f^n(z) + f^{(k)}(z) \neq b(z)$$

gilt, so ist $\mathcal{F}$ normal.

Gegenstand dieses Kapitels ist eine Erweiterung des Resultats von Chen und Hua in Satz 3.11 auf eine wesentlich größere Klasse von Differentialpolynomen.

Zunächst stellen wir die für das Studium von Differentialpolynomen benötigte Terminologie zusammen:

Definition 3.3

Eine Abbildung $M : \mathcal{M}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C})$, die gegeben ist durch

$$M[u] = a \cdot \prod_{\nu=1}^{d} u^{(k_\nu)} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

mit $d \in \mathbb{N}_0$, $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}_0$ und einer Funktion $a \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $a \not\equiv 0$, bezeichnen wir als **Differentialmonom**. Hierbei nennen wir $\deg(M) := d$ den **Grad**, $w(M) := \sum_{\nu=1}^{d}(1 + k_\nu)$ das **Gewicht**[1] und a den **Koeffizienten** von M. Im Falle $a \equiv 1$ nennen wir das Differentialmonom M **normiert**. Die Nullabbildung $u \mapsto 0$ von $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ in sich fassen wir als Differentialmonom vom Grad und Gewicht $-\infty$ auf.

Eine Summe $P := M_1 + \ldots + M_p$ von Differentialmonomen M_j bezeichnen wir als **Differentialpolynom**. Dessen **Grad** und **Gewicht** sind definiert durch $\deg(P) := \max\{\deg(M_1), \ldots, \deg(M_p)\}$ bzw. $w(P) := \max\{w(M_1), \ldots, w(M_p)\}$.

Offensichtlich ist $\deg(P) \leq w(P)$.

Wir nennen P **homogen (vom Grad d)**, falls $\deg(M_1) = \ldots = \deg(M_p) =: d$ ist.

Ist P ein Differentialpolynom, so gibt es ein Differentialpolynom P' mit $P'[u](z) = (P[u])'(z)$ für alle $u \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Es gilt offensichtlich $\deg(P') = \deg(P)$ und $w(P') \geq w(P)$.

Wir benötigen die folgende Abschätzung von Döringer [9], die den Satz über die logarithmische Ableitung verallgemeinert:

Lemma 3.4

Es sei Q ein Differentialpolynom mit meromorphen Koeffizienten c_j $(j = 1, \ldots, p)$. Dann gilt für alle meromorphen Funktionen f und alle $r > 0$

$$m(r, Q[f]) \leq \deg(Q) \cdot m(r, f) + \sum_{j=1}^{p} m(r, c_j) + S(r, f).$$

[1] Gelegentlich findet sich auch die Definition $w(M) := \sum_{\nu=1}^{d} k_\nu$.

Beweis:

Es ist $Q = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot M_j$ mit normierten Differentialmonomen M_j. Es sei $d_j := \deg(M_j)$, so daß $\deg(Q) = \max_{j=1,\ldots,p} d_j$ ist.

Es sei eine meromorphe Funktion $f \not\equiv 0$ gegeben. Setzen wir

$$c_j^* := c_j \cdot \frac{M_j[f]}{f^{d_j}} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, p,$$

so gilt $Q[f] = \sum_{j=1}^{p} c_j^* \cdot f^{d_j}$, und aufgrund des Satzes über die logarithmischen Ableitungen (Satz 1.21) ist

$$m\left(r, \frac{M_j[f]}{f^{d_j}}\right) = S(r, f),$$

also $m(r, c_j^*) \leq m(r, c_j) + S(r, f)$ für alle $j = 1, \ldots, p$.

Die Standardabschätzung für die Schmiegungsfunktion aus Satz 1.2 erweist sich hier als zu schwach, so daß wir sorgfältiger argumentieren müssen:

Es sei ein $r > 0$ gegeben. Dann gibt es eine disjunkte Partitionierung $[0; 2\pi] = I_1 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, I_p$ des Intervalls $[0; 2\pi]$ in meßbare Mengen I_j, so daß für alle $j = 1, \ldots, p$ und alle $t \in I_j$

$$\max_{k=1,\ldots,p} \left| c_k^*(re^{it}) f^{d_k}(re^{it}) \right| = \left| c_j^*(re^{it}) f^{d_j}(re^{it}) \right|$$

gilt. Damit folgt nunmehr:

$$\begin{aligned}
m(r, Q[f]) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \sum_{k=1}^{p} \left| c_k^*(re^{it}) f^{d_k}(re^{it}) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ \max_{k=1,\ldots,p} \left| c_k^*(re^{it}) f^{d_k}(re^{it}) \right| + \log p \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \int_{I_j} \log^+ \left| c_j^*(re^{it}) f^{d_j}(re^{it}) \right| dt + \log p \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \int_{I_j} \log^+ \left| c_j^*(re^{it}) \right| dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} d_j \int_{I_j} \log^+ \left| f(re^{it}) \right| dt + \log p \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} m(r, c_j^*) + \deg(Q) \cdot m(r, f) + \log p \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} m(r, c_j) + \deg(Q) \cdot m(r, f) + S(r, f),
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Ferner werden wir auf folgendes Lemma von Clunie [7] zurückgreifen:

Lemma 3.5

Es seien $Q = \sum_{j=1}^{p} c_j M_j$ und $Q^* = \sum_{j=1}^{p^*} c_j^* M_j^*$ Differentialpolynome mit meromorphen Koeffizienten c_j, c_j^* und normierten Differentialmonomen M_j, M_j^*. Es sei $n \geq \deg(Q)$ und $u \not\equiv 0$ eine meromorphe Funktion mit

$$Q[u] = u^n \cdot Q^*[u].$$

Dann gilt für alle $r > 0$:

$$m\left(r, Q^*[u]\right) \leq S(r, u) + \sum_{j=1}^{p} m(r, c_j) + \sum_{j=1}^{p^*} m(r, c_j^*).$$

Beweis: (cf. [7])

Es sei $d_j := \deg M_j$ und $d_j^* := \deg M_j^*$, so daß $n \geq d_j$ für alle $j = 1, \ldots, p$ gilt.
Nach Satz 1.21 gilt für alle j

$$m\left(r, \frac{M_j[u]}{u^{d_j}}\right) = S(r,u), \qquad m\left(r, \frac{M_j^*[u]}{u^{d_j^*}}\right) = S(r,u).$$

Es sei ein $r > 0$ gegeben, und es sei

$$I_1 := \left\{t \in [0; 2\pi] : |u(re^{it})| \leq 1\right\}, \qquad I_2 := [0; 2\pi] \setminus I_1.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{I_1} \log^+ \left|Q^*[u](re^{it})\right| dt &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{I_1} \log^+ \sum_{j=1}^{p^*} \left|c_j^*(re^{it})\right| \cdot \left|\frac{M_j^*[u]}{u^{d_j^*}}(re^{it})\right| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{p^*}\left(m(r,c_j^*) + m\left(r, \frac{M_j^*[u]}{u^{d_j^*}}\right)\right) + \log p^* \\ &= \sum_{j=1}^{p^*} m(r,c_j^*) + S(r,u). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Andererseits ist $|u^n(re^{it})| \geq \left|u^{d_j}(re^{it})\right|$ für $t \in I_2$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{I_2} \log^+ \left|Q^*[u](re^{it})\right| dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{I_2} \log^+ \left|\frac{Q[u]}{u^n}(re^{it})\right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{I_2} \log^+ \sum_{j=1}^{p} \left|c_j(re^{it})\right| \cdot \left|\frac{M_j[u]}{u^{d_j}}(re^{it})\right| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} m(r,c_j) + S(r,u). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aus (3.1) und (3.2) ergibt sich die Behauptung.

Die entscheidende Rolle im Beweis unseres Hauptresultates spielt ein Ergebnis von Hua, welches den folgenden Satz von Tumura-Clunie verallgemeinert:

Satz 3.6 Satz von Tumura-Clunie

Es seien f und g ganze Funktionen, $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, \ldots, a_n, b$ seien meromorph in $\mathbb{C}$ mit $T(r, a_j) = S(r, f)$ für alle $j = 0, \ldots, n$, $T(r, b) = S(r, f)$ und $a_n \not\equiv 0$. Falls für

$$\psi := a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n$$

die Identität

$$\psi = b \cdot e^g$$

gilt, dann ist

$$\psi = a_n \cdot \left(f + \frac{a_{n-1}}{n a_n}\right)^n.$$

Dieser Satz wurde 1937 von Tumura [57] formuliert; ein korrekter Beweis gelang allerdings erst Clunie [7] im Jahre 1962.

Hua bewies 1991 in [26] nachstehende erhebliche Erweiterung. Der dortige Beweis ist leider nicht ganz korrekt; wir geben ihn hier in berichtigter Form wieder:

Lemma 3.7

Es sei $n \geq 2$, P ein Differentialpolynom vom Grad $\deg(P) \leq n-1$. Es sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion und

$$\psi := f^n + P[f].$$

Für jeden Koeffizienten b von P gelte $T(r,b) = S(r,f)$. Falls $\psi \not\equiv 0$ ist, so ist eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Es existiert eine meromorphe Funktion c und ein $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 1$ im Falle $N(r,f) = S(r,f)$), so daß

$$f^n + P[f] = \alpha \cdot \left(f + \frac{c}{n}\right)^n, \qquad m(r,c) = S(r,f)$$

$$\text{und} \quad N(r,c) \leq \max\{0; w(P) - n + 1\} \cdot \left(\overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + \overline{N}(r,f)\right) + S(r,f).$$

oder

$$(2) \qquad \begin{aligned} T(r,f) \;\leq\; & (1 + 2\max\{0; w(P) - n + 1\}) \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + 3N(r,f) \\ & + 2\max\{0; w(P) - n + 1\} \cdot \overline{N}(r,f) + S(r,f). \end{aligned}$$

Beweis: (cf. [26])

Es seien

$$Q[u] := \frac{\psi'}{\psi} \cdot P[u] - P'[u] \quad \text{und} \quad Q^*[u] := nu' - \frac{\psi'}{\psi} \cdot u.$$

Dann gilt

$$f^{n-1}Q^*[f] = (f^n)' - \frac{\psi'}{\psi} \cdot f^n = \psi' - P'[f] - \frac{\psi'}{\psi} \cdot (\psi - P[f]) = Q[f], \tag{3.3}$$

und es ist $\deg(Q) \leq \deg(P) \leq n-1$. Somit ist Lemma 3.5 anwendbar. Nach Voraussetzung ist die Charakteristik der Koeffizienten von P "klein" (d.h. von der Ordnung $S(r,f)$), und wegen $T(r,b') \leq m\left(r, \frac{b'}{b}\right) + m(r,b) + 2N(r,b)$ für alle meromorphen Funktionen b gilt dies auch für die Koeffizienten von P'. Daher erhält man aus Lemma 3.5, wenn man noch den Satz über die logarithmische Ableitung (Satz 1.21) beachtet

$$\begin{aligned} m(r, Q^*[f]) &= S(r,f) + 2m\left(r, \frac{\psi'}{\psi}\right) \\ &= S(r,f) + S(r,\psi) = S(r,f). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Es sei $g := \frac{1}{n} \cdot \frac{\psi'}{\psi}$, so daß

$$f' = gf + \frac{1}{n} \cdot Q^*[f]$$

gilt. Wie wir nun zeigen werden, ergibt sich durch Differenzieren induktiv

$$f^{(k)} = A_k[g] \cdot f + b_k \tag{3.5}$$

für alle $k \geq 0$, wobei A_k ein Differentialpolynom vom Grad k und Gewicht k mit konstanten Koeffizienten ist und

$$m(r, A_k[g]) = S(r,f) \qquad \text{und} \qquad m(r, b_k) = S(r,f) \tag{3.6}$$

gilt.

Begründung: Für $k = 0$ und $k = 1$ ist dies mit $A_0 \equiv 1$, $A_1[u] = u$, $b_0 \equiv 0$ und $b_1 = \frac{1}{n} \cdot Q^*[f]$ erfüllt.
Aus der Gültigkeit für ein k erhält man

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} &= (A_k[g])' \cdot f + A_k[g] \cdot f' + b_k' \\ &= (A_k'[g] + g \cdot A_k[g]) \cdot f + \frac{1}{n} \cdot A_k[g] \cdot Q^*[f] + b_k' \\ &= A_{k+1}[g] \cdot f + b_{k+1} \end{aligned}$$

mit $A_{k+1}[u] = A_k'[u] + u \cdot A_k[u]$ und $b_{k+1} = \frac{1}{n} \cdot A_k[g] \cdot Q^*[f] + b_k'$. Hierbei ist A_{k+1} ein Differentialpolynom mit konstanten Koeffizienten und $\deg(A_{k+1}) = w(A_{k+1}) = k+1$. Aufgrund von $m(r, A_k[g]) = S(r, f)$ gilt

$$m(r, A_k'[g]) \leq m\left(r, \frac{A_k'[g]}{A_k[g]}\right) + m(r, A_k[g]) = S(r, A_k[g]) + m(r, A_k[g]) = S(r, f).$$

Ebenso folgt aus $m(r, b_k) = S(r, f)$, daß auch $m(r, b_k') = S(r, f)$ gilt.
Hieraus, aus $m(r, g) = S(r, \psi) = S(r, f)$ und aus (3.4) ergibt sich sodann

$$m(r, A_{k+1}[g]) = S(r, f), \qquad m(r, b_{k+1}) = S(r, f),$$

womit die Behauptung für $k + 1$ gezeigt ist.

Es ist

$$P = H + P_{n-2}$$

mit einem homogenen Differentialpolynom H vom Grad $n - 1$ oder (im Falle $\deg(P) \leq n - 2$) mit $H \equiv 0$ und einem Differentialpolynom P_{n-2} vom Grad $\leq n - 2$.
Hierbei ist

$$H = a_1 M_1 + \ldots + a_s M_s \tag{3.7}$$

mit normierten Differentialmonomen

$$M_l[u] = \prod_{\nu=1}^{n-1} u^{(k_\nu^{(l)})}$$

und Koeffizientenfunktionen $a_l \not\equiv 0$, welche nach Voraussetzung $T(r, a_l) = S(r, f)$ erfüllen. (Im Falle $H \equiv 0$ ist $s = 0$.) Hierbei ist $\sum_{\nu=1}^{n-1} k_\nu^{(l)} \leq w(P) - (n-1)$ für alle $l = 1, \ldots, s$ (sofern $s \geq 1$ ist[2]). Mittels (3.5) erhalten wir

$$M_l[f] = f^{n-1} \cdot \widetilde{M}_l[g] + C_l[g], \tag{3.8}$$

mit

$$\widetilde{M}_l[u] = \prod_{\nu=1}^{n-1} A_{k_\nu^{(l)}}[u] \tag{3.9}$$

und einem Differentialpolynom C_l vom Grad $\leq n - 2$, dessen Koeffizienten Polynome der $A_k[g]$ und der b_k sind. Aufgrund von (3.6) ist also $m(r, b) = S(r, f)$, falls b ein Koeffizient von C_l ist.
Setzt man

$$c := \sum_{l=1}^{s} a_l \widetilde{M}_l[g] \qquad \text{und} \qquad Q_{n-2} := \sum_{l=1}^{s} a_l C_l,$$

[2] Für $s \geq 1$ ist also $w(P) - n + 1 \geq 0$ gewährleistet; für $s = 0$ braucht dies nicht zu gelten.

so folgt aus (3.7) und (3.8)

$$H[f] = c \cdot f^{n-1} + Q_{n-2}[f];$$

wegen (3.9) und (3.6) gilt

$$m(r, c) = S(r, f), \tag{3.10}$$

und Q_{n-2} ist ein Differentialpolynom vom Grad $\leq n-2$, dessen Koeffizienten b wiederum $m(r, b) = S(r, f)$ erfüllen.
Ist (im Falle $s \geq 1$) z_0 eine Polstelle von c, so ist z_0 Polstelle von einer der Funktionen a_l oder von g. Die Polstellen von g sind alle einfach. Ist z_0 eine Polstelle von g, so hat z_0 als Polstelle von $A_k[g]$ höchstens die Vielfachheit $w(A_k) = k$ und daher als Polstelle von $\widetilde{M}_l[g]$ höchstens die Vielfachheit $\sum_{\nu=1}^{n-1} k_\nu^{(l)} \leq w(P) - n + 1$. Da alle Funktionen $\widetilde{M}_l[g]$ dieselben Polstellen haben, nämlich diejenigen von g, erhalten wir nunmehr (falls $s \geq 1$ ist)

$$\begin{aligned} N(r, c) &\leq (w(P) - n + 1) \cdot N(r, g) + \sum_{l=1}^{s} N(r, a_l) \\ &\leq (w(P) - n + 1) \cdot N(r, g) + S(r, f). \end{aligned}$$

Aus der Definition von g und aus der Voraussetzung über die Koeffizienten von P folgt

$$N(r, g) = \overline{N}(r, g) \leq \overline{N}(r, \psi) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r, f).$$

Im Falle $s \geq 1$ gilt also

$$N(r, c) \leq (w(P) - n + 1) \cdot \left(\overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right)\right) + S(r, f).$$

Ist $s = 0$, so ist $c = 0$ und somit $N(r, c) = 0$. Es gilt also stets

$$N(r, c) \leq \max\{0, w(P) - n + 1\} \cdot \left(\overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right)\right) + S(r, f). \tag{3.11}$$

Setzen wir $h := f + \frac{c}{n}$, so ist

$$\begin{aligned} \psi &= f^n + c \cdot f^{n-1} + Q_{n-2}[f] + P_{n-2}[f] \\ &= \left(f + \frac{c}{n}\right)^n + R_{n-2}\left[f + \frac{c}{n}\right] \\ &= h^n + R_{n-2}[h] \end{aligned}$$

mit einem Differentialpolynom R_{n-2} vom Grad $\leq n-2$, wobei wieder $m(r, b) = S(r, f)$ für alle Koeffizienten b von R_{n-2} gilt.
Für

$$\widetilde{Q}[u] := \frac{\psi'}{\psi} \cdot R_{n-2}[u] - R'_{n-2}[u] \qquad \text{und} \qquad Q^*[u] = nu' - \frac{\psi'}{\psi} \cdot u$$

erhält man aus $\psi = h^n + R_{n-2}[h]$ analog zu (3.3)

$$h^{n-1} Q^*[h] = \widetilde{Q}[h], \tag{3.12}$$

und es ist $\deg(\widetilde{Q}) \leq n-2$.

Fall 1: Es sei $Q^*[h] \not\equiv 0$.

Dann ergibt sich aus (3.12) mittels Lemma 3.5 wie in (3.4):

$$m(r, Q^*[h]) = S(r, f)$$

und ebenso (wenn man das Lemma auf $u \cdot Q^*[u]$ anstelle von Q^* und die Gleichung $h^{n-2} \cdot (hQ^*[h]) = \widetilde{Q}[h]$ anwendet)

$$m(r, h \cdot Q^*[h]) = S(r, f).$$

Hieraus folgt, wenn wir noch den Ersten Hauptsatz heranziehen:

$$\begin{aligned} m(r,f) &\leq m(r,h) + m(r,c) \\ &\leq m(r, h \cdot Q^*[h]) + m\left(r, \frac{1}{Q^*[h]}\right) + S(r,f) \\ &= m(r, h \cdot Q^*[h]) + m(r, Q^*[h]) + N(r, Q^*[h]) \\ &\quad -N\left(r, \frac{1}{Q^*[h]}\right) + S(r,f) \\ &\leq N(r, Q^*[h]) + S(r,f). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus $Q^*[h] = nh' - h \cdot \frac{\psi'}{\psi}$, $h = f + \frac{c}{n}$ und $\psi = f^n + P[f]$ erkennt man, daß als Polstellen von $Q^*[h]$ nur die Polstellen von f, von c und von den Koeffizientenfunktionen in P sowie die Nullstellen von ψ infrage kommen. Hieraus folgt mit einer ähnlichen Begründung wie oben (im Fall der Polstellen von g)

$$N(r, Q^*[h]) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + 2N(r,f) + 2N(r,c) + S(r,f). \tag{3.14}$$

Aus (3.13), (3.14) und (3.11) ergibt sich nunmehr insgesamt

$$\begin{aligned} T(r,f) &= m(r,f) + N(r,f) \\ &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + 3N(r,f) + 2N(r,c) + S(r,f) \\ &\leq (1 + 2\max\{0, w(P) - n + 1\}) \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + 3N(r,f) \\ &\quad +2\max\{0, w(P) - n + 1\} \cdot \overline{N}(r,f) + S(r,f), \end{aligned}$$

wie im Fall (2) des Lemmas behauptet.

Fall 2: Es sei $Q^*[h] \equiv 0$.

In diesem Falle ist $h \equiv 0$ oder $\psi = \alpha h^n$ für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Im Falle $h \equiv 0$ ist $f \equiv -\frac{c}{n}$, und es folgt mittels (3.11) und (3.10)

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T(r,c) + O(1) = N(r,c) + m(r,c) + O(1) \\ &\leq \max\{0, w(P) - n + 1\} \cdot \left(\overline{N}(r,f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right)\right) + S(r,f), \end{aligned}$$

so daß ebenfalls Fall (2) des Lemmas eintritt.
Ist $\psi = \alpha h^n$, so ist $\psi = \alpha \cdot \left(f + \frac{c}{n}\right)^n$, wobei $m(r,c) = S(r,f)$ ist und für $N(r,c)$ die Abschätzung aus (3.11) gilt. Daher liegt Fall (1) des Lemmas vor.
Zu betrachten bleibt somit lediglich noch der Fall, daß $N(r,f) = S(r,f)$ ist: Aus $f^n + P[f] = \psi = \alpha \cdot \left(f + \frac{c}{n}\right)^n$ ergibt sich dann

$$(1 - \alpha) \cdot f^n = P^*[f]$$

mit einem Differentialpolynom P^* vom Grad $\leq n-1$, dessen Koeffizienten b abermals $m(r,b) = S(r,f)$ genügen. Falls $\alpha \neq 1$ ist, können wir auf

$$f^{n-1} \cdot Q_2[f] = Q_1[f]$$

mit $Q_1[u] := \frac{1}{1-\alpha} \cdot P^*[u]$ und $Q_2[u] := u$ Lemma 3.5 anwenden und erhalten

$$m(r,f) = S(r,f),$$

wegen $N(r,f) = S(r,f)$ also insgesamt $T(r,f) = S(r,f)$, so daß f gemäß Satz 1.16 eine rationale Funktion ist und Fall (2) des Lemmas vorliegt.

In den für unsere Zwecke relevanten Situationen können wir uns der Fallunterscheidung in Lemma 3.7 entledigen:

Satz 3.8

Es sei f eine ganz-transzendente Funktion. Es seien $n \geq 2$, $k \geq 1$, $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ $(m \geq 1)$ mit $a \neq 0$, und es sei

$$P[u] = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} u^{(k_\nu^{(j)})}$$

ein Differentialpolynom mit $2 \leq s_j \leq n-1$, $\sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, m$. (Im Falle $n = 2$ ist also $P \equiv 0$.) Es sei

$$\psi := f^n + af^{(k)} + P[f].$$

Falls $\psi \not\equiv 0$ ist, so gilt

$$T(r,f) \leq (1 + 2\max\{0; k+2-n; w(P)+1-n\}) \cdot N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r,f)$$

für alle $r > 0$.

Beweis:

Es ist $Q[u] := a \cdot u^{(k)} + P[u]$ ein Differentialpolynom vom Grad $\leq n-1$ und Gewicht $w(Q) = \max\{k+1; w(P)\}$.
Ist Fall (2) von Lemma 3.7 erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq (1 + 2\max\{0; w(Q)+1-n\}) \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r,f) \\ &\leq (1 + 2\max\{0; k+2-n; w(P)+1-n\}) \cdot N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r,f) \end{aligned}$$

für alle $r > 0$.
Es genügt daher, Fall (1) des Lemmas zu betrachten. Hier ist

$$\psi = (f-c)^n$$

mit einer meromorphen Funktion c, welche $m(r,c) = S(r,f)$ erfüllt.
Da f und somit auch ψ ganz sind, kann c keine Polstellen haben. Also ist $T(r,c) = m(r,c) = S(r,f)$.

Es sei $u := f - c$, so daß $\psi = u^n$ ist. Dann ist $u \not\equiv 0$; sonst wäre $T(r,f) = T(r,c) = S(r,f)$, und f wäre ein Polynom (cf. Satz 1.16). Nach Definition von ψ folgt

$$(u+c)^n + a \cdot (u^{(k)} + c^{(k)}) + P[u+c] = u^n,$$

also

$$\begin{aligned} c^n + ac^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} c^{(k_\nu^{(j)})} &= -\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} c^j u^{n-j} - au^{(k)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \left(\prod_{\nu=1}^{s_j} \left(u^{(k_\nu^{(j)})} + c^{(k_\nu^{(j)})} \right) - \prod_{\nu=1}^{s_j} c^{(k_\nu^{(j)})} \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Es sei

$$v := c^n + ac^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} a_j \prod_{\nu=1}^{s_j} c^{(k_\nu^{(j)})}.$$

Fall 1: $v \equiv 0$.

Dann folgt mit Lemma 3.4:

$$\begin{aligned} n \cdot m(r,c) &= m(r,c^n) = m\left(r, ac^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} a_j \prod_{\nu=1}^{s_j} c^{(k_\nu^{(j)})}\right) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq m} s_j \cdot m(r,c) + S(r,c) \leq (n-1) \cdot m(r,c) + S(r,c), \end{aligned}$$

also $T(r,c) = m(r,c) = S(r,c)$. Damit muß c ein Polynom sein. Wäre c nicht konstant, so würde aus der Definition von v und aus $s_j \leq n-1$ für alle $j = 1, \ldots, m$ folgen, daß v ein Polynom vom Grad $\deg(v) = n \cdot \deg(c)$ ist, im Widerspruch zu $v \equiv 0$. Also ist c konstant.
Wegen $k \geq 1$ und $\sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, m$ folgt weiter, daß $v = c^n$, also sogar $c \equiv 0$ und somit

$$af^{(k)} + P[f] \equiv 0$$

gelten muß.
Im Falle $n = 2$ ist $P \equiv 0$, und man erhält $f^{(k)} \equiv 0$, so daß f ein Polynom ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Es bleibt daher nur der Fall $n \geq 3$ zu betrachten. Wir können P in der Form $P = G_2 + \ldots + G_{n-1}$ mit homogenen Differentialpolynomen G_j vom Grad j mit konstanten Koeffizienten (bzw. $G_j \equiv 0$) schreiben. Nach dem Satz über die logarithmischen Ableitungen (Satz 1.21) ist $m\left(r, \frac{f^{(\nu)}}{f}\right) = S(r,f)$ für alle $\nu \geq 0$ und daher auch $m\left(r, \frac{G_j[f]}{f^j}\right) = S(r,f)$ für $2 \leq j \leq n-1$. Es folgt

$$\begin{aligned} & m\left(r, \frac{G_2[f]}{f^j} + \ldots + \frac{G_j[f]}{f^j}\right) \\ \leq\ & m\left(r, \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{G_2[f]}{f^{j-1}} + \ldots + \frac{G_{j-1}[f]}{f^{j-1}}\right)\right) + m\left(r, \frac{G_j[f]}{f^j}\right) + \log 2 \\ \leq\ & m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{G_2[f]}{f^{j-1}} + \ldots + \frac{G_{j-1}[f]}{f^{j-1}}\right) + S(r,f) \end{aligned}$$

für $j = 3, \ldots, n-1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
& (n-2) \cdot m\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
= \; & m\left(r, \frac{1}{f^{n-2}}\right) \\
\leq \; & m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{af^{(k)}}{f^{n-1}}\right) + O(1) \\
\leq \; & m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{G_2[f]}{f^{n-1}} + \ldots + \frac{G_{n-1}[f]}{f^{n-1}}\right) + O(1) \\
\leq \; & N\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{G_2[f]}{f^{n-2}} + \ldots + \frac{G_{n-2}[f]}{f^{n-2}}\right) + S(r,f) \\
\vdots \; & \\
\leq \; & N\left(r, \frac{1}{f}\right) + (n-3) \cdot m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{G_2[f]}{f^2}\right) + S(r,f) \\
= \; & N\left(r, \frac{1}{f}\right) + (n-3) \cdot m\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f),
\end{aligned}$$

also

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f)$$

und somit

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= m(r,f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\
&\leq 2 \cdot N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f) = \frac{2}{n} \cdot N\left(r, \frac{1}{f^n}\right) + S(r,f) \\
&\leq N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r,f),
\end{aligned}$$

da hier $\psi = (f-c)^n = f^n$. Dies zeigt die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: $v \not\equiv 0$.

Wegen $m(r,c) = S(r,f)$ und

$$m(r, c^{(j)}) \leq m\left(r, \frac{c^{(j)}}{c}\right) + m(r,c) = S(r,c) + m(r,c) = S(r,f)$$

für alle $j \geq 1$ ist auch $T(r,v) = m(r,v) = S(r,f)$, und nach dem Ersten Hauptsatz somit auch

$$m\left(r, \frac{1}{v}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{v}\right) = S(r,f). \tag{3.16}$$

Aus (3.15) und $s_j \leq n-1$ für alle $j = 1, \ldots, m$ ergibt sich

$$v = H_1[u] + \ldots + H_{n-1}[u]; \tag{3.17}$$

hierbei sind die H_j homogene Differentialpolynome vom Grad j (oder $H_j \equiv 0$), deren Koeffizienten Differentialpolynome in c sind. Wiederum mit dem Satz über die logarithmischen Ableitungen ergibt sich (unter Beachtung von $u \not\equiv 0$)

$$m\left(r, \frac{H_j[u]}{u^j}\right) = S(r,u) = S(r,f)$$

für $j = 1, \ldots, n-1$, und es folgt wie oben

$$\begin{aligned}
& m\left(r, \frac{H_1[u]}{u^j} + \ldots + \frac{H_j[u]}{u^j}\right) \\
\leq \quad & m\left(r, \frac{1}{u}\right) + m\left(r, \frac{H_1[u]}{u^{j-1}} + \ldots + \frac{H_{j-1}[u]}{u^{j-1}}\right) + S(r,f)
\end{aligned}$$

für $j = 2, \ldots, n-1$. Damit und mit $v \not\equiv 0$ erhält man aus (3.17) und (3.16) für $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
(n-1) \cdot m\left(r, \frac{1}{u}\right) &= m\left(r, \frac{1}{u^{n-1}}\right) \\
&\leq m\left(r, \frac{v}{u^{n-1}}\right) + m\left(r, \frac{1}{v}\right) \\
&= m\left(r, \frac{H_1[u]}{u^{n-1}} + \ldots + \frac{H_{n-1}[u]}{u^{n-1}}\right) + S(r,f) \\
&\leq m\left(r, \frac{1}{u}\right) + m\left(r, \frac{H_1[u]}{u^{n-2}} + \ldots + \frac{H_{n-2}[u]}{u^{n-2}}\right) + S(r,f) \\
&\ \ \vdots \\
&\leq (n-2) \cdot m\left(r, \frac{1}{u}\right) + m\left(r, \frac{H_1[u]}{u}\right) + S(r,f) \\
&\leq (n-2) \cdot m\left(r, \frac{1}{u}\right) + S(r,f),
\end{aligned}$$

also $m\left(r, \frac{1}{u}\right) = S(r,f)$. Dies bleibt sinngemäß auch für $n = 2$ gültig.
Damit und mit $u^n = \psi$ ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= m(r,f) \leq m(r,u) + m(r,c) + \log 2 \\
&\leq m\left(r, \frac{1}{u}\right) + N\left(r, \frac{1}{u}\right) + S(r,f) \\
&\leq N\left(r, \frac{1}{u^n}\right) + S(r,f) = N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r,f).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung auch in diesem Fall.

Als direkte Folgerung erhalten wir eine Verallgemeinerung des Resultats von Hayman (Satz 3.1) im holomorphen Fall:

Korollar 3.9

Es sei f eine ganze Funktion. Es seien $n \geq 2$, $k \geq 1$, $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ $(m \geq 1)$ mit $a \neq 0$, und es sei

$$P[u] = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} u^{(k_\nu^{(j)})}$$

ein Differentialpolynom mit $2 \leq s_j \leq n-1$, $\sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, m$. (Im Falle $n = 2$ ist $P \equiv 0$.) Es sei

$$\psi := f^n + af^{(k)} + P[f]$$

nullstellenfrei in $\mathbb{C}$. Dann ist f konstant.

Beweis:

Wäre f transzendent, so würde wegen $N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) = 0$ aus Satz 3.8 folgen, daß $T(r,f) = S(r,f)$ gilt, im Widerspruch zu Satz 1.16. Also muß f ein Polynom sein. Damit ist auch ψ ein Polynom, und zwar vom Grad $n \cdot \deg(f)$. Da ψ nullstellenfrei ist, muß ψ konstant sein. Damit ist auch f konstant.

In Korollar 3.9 läßt sich der Ausnahmewert Null von ψ i.a. nicht durch einen anderen Ausnahmewert ersetzen, wie bereits das am Anfang des Kapitels genannte Gegenbeispiel zum Fall $n = 2$, $b \neq 0$ in Satz 3.1 zeigt.

Nunmehr ist der Boden bereitet, um mithilfe des Zalcman-Lemmas das zu Korollar 3.9 analoge Normalitätsresultat zu beweisen. Als problematisch erweist es sich dabei, die Normalität in denjenigen Punkten nachzuweisen, in denen die Koeffizientenfunktionen der betrachteten Differentialpolynome Pol- oder Nullstellen besitzen. In dieser Situation erweist sich das Argumentprinzip als hilfreich (wie bereits im Beweis von Chen und Hua [6] für Satz 3.2). Hierfür benötigen wir noch ein kleines technisches Hilfsmittel:

Lemma 3.10

Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen, die gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen ∞ strebt. Dann konvergiert für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha > 0$ die Folge $\left(\frac{f_n^{(k)}}{f_n^{1+\alpha}}\right)_n$ kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen 0.

Beweis: (cf. [6], Lemma 3)

Es genügt, die gleichmäßige Konvergenz in einer Umgebung von $z = 0$ zu zeigen. Es sei $r_0 > 0$ so gewählt, daß

$$\frac{1+r_0}{1-r_0} \le 1 + \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1-r_0}{1+r_0} \cdot (1+\alpha) \ge 1 + \frac{3}{4}\alpha$$

ist. O.E. können wir $|f_n(z)| \ge 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle n annehmen. Insbesondere ist dann $\log|f_n|$ für alle n harmonisch in $\mathbb{D}$, und wir erhalten mithilfe der Harnack-Ungleichung

$$|f_n(0)|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}} \le |f_n(z)| \le |f_n(0)|^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Für $|z| \le \frac{r_0}{2}$ ergibt sich damit und mithilfe der Cauchyschen Integralformel

$$|f_n^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi} \int_{|\zeta|=r_0} \frac{|f_n(\zeta)|}{(r_0/2)^{k+1}} |d\zeta| \le \frac{2^{k+1}k!}{r_0^k} \cdot |f_n(0)|^{1+\alpha/2}$$

und somit

$$\frac{|f_n^{(k)}(z)|}{|f_n(z)|^{1+\alpha}} \le \frac{2^{k+1}k!}{r_0^k} \cdot |f_n(0)|^{-\alpha/4}.$$

Mithin konvergiert $\left(\frac{f_n^{(k)}}{f_n^{1+\alpha}}\right)_n$ gleichmäßig in $U_{r_0/2}(0)$ gegen 0.

Und nun zum Hauptresultat dieses Kapitels:

Satz 3.11

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen. Es seien $n \geq 2$, $k \geq 1$, $a, b, a_1, \ldots, a_m$ ($m \geq 1$) seien meromorph in $\mathbb{D}$ mit $a \not\equiv 0$, und a habe nur Polstellen der Ordnung $\leq n-1$. Weiter sei

$$P[u] = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} u^{(k_\nu^{(j)})}$$

ein Differentialpolynom mit

$$(n-1) \cdot \sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} + k \cdot s_j \leq k \cdot n$$

für alle $j = 1, \ldots, m$, und im Falle

$$(n-1) \cdot \sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} + k \cdot s_j = k \cdot n$$

sei $2 \leq s_j \leq n-1$.[3] Falls für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in \mathbb{D}$

$$a(z) \cdot f^n(z) + f^{(k)}(z) + P[f](z) \neq b(z) \tag{3.18}$$

gilt, so ist $\mathcal{F}$ normal.

Beweis:

Es sei ein $z_0 \in \mathbb{D}$ gegeben.
Zunächst gelte

$$a(z_0) \neq 0, \infty, \quad b(z_0) \neq \infty, \quad a_1(z_0), \ldots, a_m(z_0) \neq \infty. \tag{3.19}$$

Falls $\mathcal{F}$ in z_0 nicht normal ist, so gibt es nach dem Zalcman-Lemma Folgen $(f_j)_j \subseteq \mathcal{F}$, $(\rho_j)_j \subseteq (0;1)$ und $(z_j)_j \subseteq \mathbb{D}$ mit $\lim_{j\to\infty} \rho_j = 0$ und $\lim_{j\to\infty} z_j = z_0$, so daß die Folge $(g_j)_j$, die durch

$$g_j(\zeta) := \rho_j^{\alpha} \cdot f_j(z_j + \rho_j \zeta) \quad \text{mit } \alpha := \frac{k}{n-1}$$

definiert ist, kompakt gleichmäßig in $\mathbb{C}$ gegen eine nichtkonstante Funktion g konvergiert. (Die Zulässigkeit dieser Wahl von α ergibt sich aus der Holomorphie der Funktionen in $\mathcal{F}$.)
Es sei

$$d_l := \frac{1}{n-1} \cdot \left(kn - (n-1) \cdot \sum_{\nu=1}^{s_l} k_\nu^{(l)} - k \cdot s_l \right)$$

für $l = 1, \ldots, m$. Nach Voraussetzung ist dann $d_l \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$. O.E. darf man $d_l = 0$ für $1 \leq l \leq m_0$, $d_l > 0$ für $m_0 + 1 \leq l \leq m$ mit einem $m_0 \in \{0, \ldots, m\}$ annehmen. Es sei

$$\widetilde{P}[u] := \sum_{l=1}^{m_0} a_l(z_0) \cdot \prod_{\nu=1}^{s_l} u^{(k_\nu^{(l)})} \qquad \text{und} \qquad \psi := a(z_0) \cdot g^n + g^{(k)} + \widetilde{P}[g].$$

[3] Äquivalent hiermit ist $1 \leq \sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} \leq k-1$. Mit anderen Worten: $P[u]$ soll keine Differentialmonome der Form u^n oder $u^{(k)}$ enthalten.

Wir zeigen zunächst, daß ψ eine Nullstelle $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ besitzt:

Falls g ein (nichtkonstantes!) Polynom ist, ist dies klar, da ψ wegen $a(z_0) \neq 0$ und $s_l \leq n-1$ für alle $l = 1, \ldots, m_0$ dann ein Polynom vom Grad $n \cdot \deg(g)$ ist.

Falls g hingegen transzendent ist, so folgt die Behauptung aus Satz 3.8; wäre ψ nämlich nullstellenfrei, so müßte $T(r,g) = S(r,g)$ gelten, im Widerspruch zur Transzendenz von g.

Unter Beachtung von

$$\alpha + k = \alpha n = \frac{nk}{n-1} = d_l + \alpha s_l + \sum_{\nu=1}^{s_l} k_\nu^{(l)}$$

und von (3.18) sowie von (3.19) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\neq \rho_j^{\alpha n} \cdot \Big(a(z_j + \rho_j\zeta) \cdot f_j^n(z_j + \rho_j\zeta) + f_j^{(k)}(z_j + \rho_j\zeta) + P[f_j](z_j + \rho_j\zeta) \\ &\qquad - b(z_j + \rho_j\zeta) \Big) \\ &= a(z_j + \rho_j\zeta) \cdot g_j^n(\zeta) + g_j^{(k)}(\zeta) + \sum_{l=1}^{m} \rho_j^{d_l} \cdot a_l(z_j + \rho_j\zeta) \cdot \prod_{\nu=1}^{s_l} g_j^{(k_\nu^{(l)})}(\zeta) \\ &\quad - \rho_j^{\alpha n} \cdot b(z_j + \rho_j\zeta) \\ &\longrightarrow a(z_0) \cdot g^n(\zeta) + g^{(k)}(\zeta) + \sum_{l=1}^{m_0} a_l(z_0) \cdot \prod_{\nu=1}^{s_l} g^{(k_\nu^{(l)})}(\zeta) = \psi(\zeta) \end{aligned}$$

für $j \to \infty$ gleichmäßig in einer Umgebung von ζ_0. Hieraus und aus $\psi(\zeta_0) = 0$ folgt $\psi \equiv 0$ aufgrund des Satzes von Hurwitz. Angesichts von $a(z_0) \neq 0$ bedeutet dies

$$g^n = -\frac{1}{a(z_0)} \left(g^{(k)} + \widetilde{P}[g] \right).$$

Mit Lemma 3.4, angewandt auf das Differentialpolynom $Q[u] := u^{(k)} + \widetilde{P}[u]$, erhält man unter Beachtung von

$$\deg(Q) = \max\left\{1, \deg(\widetilde{P})\right\} = \max\{1, s_1, \ldots, s_{m_0}\}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} n \cdot m(r,g) &= m(r, g^n) \\ &= m(r, g^{(k)} + \widetilde{P}[g]) + O(1) \\ &\leq \max\{1, s_1, \ldots, s_{m_0}\} \cdot m(r,g) + S(r,g) \\ &\leq (n-1) \cdot m(r,g) + S(r,g), \end{aligned}$$

also $T(r,g) = m(r,g) = S(r,g)$. Damit muß g ein Polynom sein. Da dann ψ ein Polynom vom Grad $n \cdot \deg(g)$ ist, folgt wegen $\psi = 0$, daß g konstant ist, Widerspruch!

Also ist $\mathcal{F}$ normal in z_0.

Nun sei (3.19) nicht erfüllt. Dann gibt es ein $r > 0$, so daß

$$a(z) \neq 0, \infty, \quad b(z) \neq \infty, \quad a_1(z), \ldots, a_m(z) \neq \infty$$

für alle $z \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\} =: G$ gilt.

Nach dem bereits Gezeigten ist $\mathcal{F}$ normal in G. Daher existiert zu jeder Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge $(f_j)_j$, die kompakt gleichmäßig in G gegen eine holomorphe Grenzfunktion oder gegen ∞ strebt.

Im ersten Fall ist die Konvergenz aufgrund der Cauchyschen Integralformel sogar kompakt gleichmäßig in $U_r(z_0)$.
Im zweiten Fall konvergiert nach Lemma 3.10 $\left(\frac{f_j^{(k)}}{f_j^n}\right)_j$ und wegen $\deg(P) \leq n-1$ auch $\left(\frac{P[f_j]}{f_j^n}\right)_j$ kompakt gleichmäßig in $U_r(z_0)$ gegen 0. Daher und wegen $\min_{|z-z_0|=\frac{r}{2}} |a(z)| > 0$ gilt

$$|f_j^{(k)}(z) + P[f_j](z) - b(z)| < |a(z) \cdot f_j^n(z)|$$

für alle z mit $|z - z_0| = \frac{r}{2}$ und alle genügend großen j.
Setzt man $\varphi_j := a \cdot f_j^n + f_j^{(k)} + P[f_j] - b$ und bezeichnet man mit $n(\rho, m, h = a)$ die Zahl der a-Stellen der Funktion h in $U_\rho(m)$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten, so gilt für hinreichend große j nach dem Satz von Rouché also

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{r}{2}, z_0, \varphi_j = 0\right) - n\left(\frac{r}{2}, z_0, \varphi_j = \infty\right) \\ = \; & n\left(\frac{r}{2}, z_0, a \cdot f_j^n = 0\right) - n\left(\frac{r}{2}, z_0, a \cdot f_j^n = \infty\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nach Voraussetzung ist $n\left(\frac{r}{2}, z_0, \varphi_j = 0\right) = 0$. Aus (3.20) und der Holomorphie der f_j ergibt sich daher

$$n\left(\frac{r}{2}, z_0, a \cdot f_j^n = 0\right) \leq n\left(\frac{r}{2}, z_0, a \cdot f_j^n = \infty\right) \leq n\left(\frac{r}{2}, z_0, a = \infty\right)$$

für alle hinreichend großen j. Da a in $U_r(z_0)$ höchstens in z_0 eine Polstelle haben kann, und zwar mit der Vielfachheit $\leq n-1$, folgt leicht, daß f_j für hinreichend große j keine Nullstelle in $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ haben kann.
Mit Lemma 2.8 erhält man nun die $\mathcal{K}$-Konvergenz von $(f_j)_j$ gegen ∞ in ganz $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$.
Also ist $\mathcal{F}$ in z_0 normal.
Aufgrund Satz 2.1 folgt die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 3.12

Die Voraussetzung in Satz 3.11 über die Polstellen von a ist unverzichtbar, wie folgendes Beispiel lehrt: Setzt man $a(z) := \frac{2}{z^n}$ und $f_j(z) := jz$ ($j \in \mathbb{N}$), so ist die Bedingung $a(z) \cdot f_j^n(z) + f_j^{(k)}(z) \neq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{D}$ erfüllt, die Folge $(f_j)_j$ ist jedoch nicht normal in $\mathbb{D}$.

Kapitel 4

Der Satz von Cartan

4.1 Der Problemkreis der Cartanschen Vermutung

Definition 4.1

Es sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$ und Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Folge von p-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_p)$ von Einheiten in Ω, die die **Borelsche Gleichung**

$$f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$$

erfüllen. Eine Indexmenge $S \subseteq \{1, \ldots, p\}$ heißt **C-Klasse für $\mathcal{F}$ und Ω**, wenn es eine nichtleere (und damit notwendigerweise mindestens zweielementige) Teilmenge $I \subseteq S$ gibt, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $j, k \in I$ ist die Folge $\left(\frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{F}}$ in Ω $\mathcal{K}$-konvergent gegen eine Einheit.

(2) Für alle $j \in S \backslash I$ und $k \in I$ ist $\left(\frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{F}}$ in Ω $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0.

(3) Für alle $k \in I$ ist $\left(\sum_{j \in S} \frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{F}}$ in Ω $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0.

Hierbei bezeichnen wir I als den **stabilen Anteil** von S.

Die Vermutung von Cartan und Eremenko:

Es sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von p-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_p)$ von Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$.
Dann gibt es ein nur von p abhängiges $r_p \in (0; 1]$ und eine Folge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, so daß die Indexmenge $\{1, \ldots, p\}$ eine disjunkte Partition $\{1, \ldots, p\} = S_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} S_m$ in C-Klassen S_μ für $\mathcal{L}$ und $\mathbb{D}_{r_p}$ besitzt.

H. Cartan hatte 1928 in [3] vermutet, daß die betreffenden Konvergenzaussagen jeweils im gesamten Einheitskreis gelten, daß man also stets $r_p = 1$ für alle $p \geq 3$ wählen kann. Dies wurde für die Fälle $p = 3$ und $p = 4$ von Cartan selbst bewiesen (Satz 4.2). Für $p = 5$ (und damit auch für alle $p \geq 6$) konnte Eremenko 1995 ein Gegenbeispiel konstruieren (cf. [12]). In [13] stellte Eremenko die hier angegebene modifizierte Vermutung auf und bewies sie für den Fall $p = 5$. Da die Gültigkeit der Vermutung für $p = 5$ für unsere Anwendungen weitgehend ohne Belang ist, gehen wir auf den Beweis nicht näher ein, wollen uns allerdings noch kurz der in [13] angeführten, im Vergleich zu [12] wesentlich vereinfachten Version des Gegenbeispiels für die Cartansche Vermutung zuwenden:

Gegenbeispiel:

Es sei für $z \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$

$$g_{1,n}(z) := \sqrt{n} \cdot \int_{-1}^{z} e^{-n\cdot\zeta^2} d\zeta, \qquad g_{2,n}(z) := g_{1,n}(-z) = \sqrt{n} \cdot \int_{z}^{1} e^{-n\cdot\zeta^2} d\zeta,$$

so daß

$$g_{1,n}(z) + g_{2,n}(z) = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt =: c_n = \sqrt{\pi} + o(1) \quad (n \to \infty) \tag{4.1}$$

gilt. Setzt man

$$\begin{aligned} f_{1,n}(z) &:= \exp[n \cdot (10z + 9.75)], \\ f_{2,n}(z) &:= f_{1,n}(-z), \\ f_{3,n}(z) &:= -f_{1,n}(z) + g_{1,n}(z), \\ f_{4,n}(z) &:= -f_{2,n}(z) + g_{2,n}(z), \\ f_{5,n}(z) &:= -c_n, \end{aligned}$$

so ist $f_{1,n} + \ldots + f_{5,n} \equiv 0$, und $f_{1,n}$, $f_{2,n}$ und $f_{5,n}$ sind Einheiten in $\mathbb{D}$. Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt offensichtlich

$$|g_{1,n}(z)| \leq 2 \cdot \sqrt{n} \cdot e^n, \tag{4.2}$$

und für $z \in \mathbb{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(z) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist sogar

$$|g_{1,n}(z)| \leq \sqrt{n} \cdot e^{-n/2}. \tag{4.3}$$

Es ist nämlich $|z - (-1)| \leq 1$, und für alle $\zeta \in \mathbb{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(\zeta) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist $|\mathrm{Im}\,(\zeta)| \leq \frac{1}{2}$, also $\mathrm{Re}\,\left(\zeta^2\right) \geq \frac{1}{2}$.

Andererseits ist für $z \in \mathbb{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(z) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$|f_{1,n}(z)| \geq e^{n(-5\sqrt{3}+9.75)} \geq e^{1.08n}, \tag{4.4}$$

und für $z \in \mathbb{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(z) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist

$$|f_{1,n}(z)| \geq e^{n(-10+9.75)} = e^{-n/4}. \tag{4.5}$$

Aus (4.2) bis (4.5) folgt

$$\frac{g_{1,n}}{f_{1,n}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig in } \mathbb{D}. \tag{4.6}$$

Damit gilt auch

$$\frac{g_{2,n}}{f_{2,n}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig in } \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

Daher sind (für große n) auch $f_{3,n}$ und $f_{4,n}$ Einheiten in $\mathbb{D}$.

Die Voraussetzungen der Cartanschen Vermutung sind somit erfüllt.

Jedoch kann der Index 5 zu keiner C-Klasse für $\mathbb{D}$ und eine geeignete Teilfolge von $(f_n)_n$ gehören: Sonst wäre für ein $j_0 \in \{1, \ldots, 4\}$ eine Teilfolge von $\left(\frac{f_{5,n}}{f_{j_0,n}}\right)_n$ und wegen (4.1) somit auch von $(f_{j_0,n})_n$ normal in $\mathbb{D}$, wobei man aufgrund der Definition der $f_{k,n}$ sowie von (4.6), (4.7) o.E. $j_0 = 1$ annehmen kann. Es ist aber für $n \to \infty$

$$f_{1,n}(0) = e^{9.75n} \longrightarrow \infty, \qquad f_{1,n}(-0.98) = e^{-0.05n} \longrightarrow 0,$$

Widerspruch!

Dieses Gegenbeispiel läßt sich sofort auf den Fall von $p \geq 6$ Funktionen verallgemeinern (cf. [12]): Ist $p \geq 7$, so wählt man für $f_{6,n}, \ldots, f_{p,n}$ Konstanten mit $\sum_{j=6}^{p} f_{j,n} = 0$ und $|f_{j,n}| = \frac{1}{n}$; ist $p = 6$, so setzt man $f_{5,n} := -c_n + \frac{1}{n}$ und $f_{6,n} := -\frac{1}{n}$. Der Index 5 kann dann auch zu keiner C-Klasse für $\mathbb{D}$ mit Elementen aus $\{6, \ldots, p\}$ gehören.

Von Cartan [3] selbst stammt folgendes Teilresultat, dessen Beweis wir die folgenden drei Abschnitte dieses Kapitels widmen:

Satz 4.2 Satz von Cartan

Es sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von p-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_p)$ von Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, so daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $S = \{1, \ldots, p\}$ bildet eine C-Klasse für $\mathcal{L}$ und $\mathbb{D}$.

oder

(b) Es gibt zwei disjunkte C-Klassen S_1, S_2 für $\mathcal{L}$ und $\mathbb{D}$.

Aus dem Satz von Cartan folgt insbesondere die Gültigkeit der Cartanschen Vermutung für $p = 4$, da dann die Indexmenge $\{1, \ldots, 4\}$ im Fall (b) von den beiden C-Klassen S_1, S_2 überdeckt wird.

Der Fall $p = 3$ ist lediglich eine Umformulierung des FNT:

Um dies einzusehen, bringt man die Borelsche Gleichung $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ mittels Division durch f_3 auf die Form $g_1 + g_2 = 1$ mit Einheiten $g_j := -\frac{f_j}{f_3}$. Hierin lassen g_1 und g_2 die Werte 0, 1 und ∞ aus. Man hat noch zu beachten, daß für die nach FNT existierenden konvergenten Teilfolgen der Funktionen g_1 und g_2 $\mathcal{K}$-Konvergenz gegen ∞ auftreten kann; in diesem Fall ist jedoch die zugehörige Teilfolge der Funktionen $\frac{f_3}{f_1}$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0 und somit die Folge der Funktionen $\frac{f_2}{f_1}$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen -1.

Insofern stellt der Satz von Cartan eine weitreichende Verallgemeinerung des grundlegendsten und bedeutendsten Satzes der Normalitätstheorie dar.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Satzes von Cartan zu, wobei wir uns weitgehend an der Darstellung von Lang ([31] VIII. §§3 - 5) orientieren, jedoch auch den von Lang ebenso wie von Cartan selbst lediglich skizzierten Fall $p \geq 5$ detailliert ausführen. Die Hauptkomplikation besteht darin, daß die lineare Unabhängigkeit einer Menge $\{f_j \,|\, j \in J\}$ (mit $\emptyset \neq J \subsetneq \{1, \ldots, p\}$) für $f \in \mathcal{F}$ im Grenzfall beliebig „schlecht“ werden kann.[1] Dementsprechend benützt der Beweis zahlreiche Fallunterscheidungen für (dehomogenisierte) Wronski-Determinanten, die als eine Art Maß für die lineare Unabhängigkeit der betreffenden Funktionen aufgefaßt werden können.

Zunächst benötigen wir also

[1] Besonders deutlich wird dies, wenn man mit dem wesentlich einfacheren Beweis des Satzes von Borel, des Analogons zum Satz von Cartan für ganze Funktionen, den wir in Abschnitt 4.5 behandeln, vergleicht.

4.2 Einige Sätze über Wronski-Determinanten

Notationen:

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ nicht identisch verschwindende, in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen. Dann bezeichne

$$W(f_1, \ldots, f_n) := \det \left(f_k^{(j-1)} \right)_{j,k=1,\ldots,n}$$

die **Wronski-Determinante** und

$$L(f_1, \ldots, f_n) := \frac{W(f_1, \ldots, f_n)}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n}$$

die **dehomogenisierte Wronski-Determinante** der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$.

Lemma 4.3

Für beliebige in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe, nicht identisch verschwindende Funktionen $f_1, \ldots, f_n, g$ gilt:

$$W(g \cdot f_1, \ldots, g \cdot f_n) = g^n \cdot W(f_1, \ldots, f_n) \tag{4.8}$$

$$L(g \cdot f_1, \ldots, g \cdot f_n) = L(f_1, \ldots, f_n) \tag{4.9}$$

Beweis: (cf. [31], VII. Prop. 1.5)

(4.8) ergibt sich leicht, wenn man die Leibnizsche Formel für die Einträge $(g \cdot f_k)^{(j)}$ beachtet und von jeder Zeile von $W(g \cdot f_1, \ldots, g \cdot f_n)$ geeignete Vielfache der vorhergehenden Zeilen subtrahiert. (4.9) folgt sofort aus (4.8).

Satz 4.4

Es seien $f_1, \ldots, f_n \not\equiv 0$ $(n \geq 2)$ meromorph in Ω, und es sei $g_1 := W(f_1, f_3, \ldots, f_n)$ und $g_2 := W(f_2, f_3, \ldots, f_n)$. Dann gilt

$$W(g_1, g_2) = W(f_3, \ldots, f_n) \cdot W(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n). \tag{4.10}$$

Beweis: (cf. [31], VIII. Lemma 4.2, und [35], Corollary 2.11)

Ist $g_2 = W(f_2, f_3, \ldots, f_n) \equiv 0$, so sind $f_2, \ldots, f_n$ linear abhängig über $\mathbb{C}$.[2] Somit ist auch $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \equiv 0$, so daß beide Seiten von (4.10) verschwinden.

Es sei nunmehr $W(f_2, f_3, \ldots, f_n) \not\equiv 0$. Wir betrachten die linearen Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} &L_1,\, L_2 \,:\, \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \\ &L_1(f) := W(f, f_2, f_3, \ldots, f_n) \cdot W(f_3, \ldots, f_n) \\ &L_2(f) := W(W(f, f_3, \ldots, f_n), g_2). \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$L_1(f_j) = L_2(f_j) \equiv 0 \quad \text{für } j = 2, \ldots, n. \tag{4.11}$$

[2] Der (einfache) Beweis dieser oft benutzten (und nicht ganz selbstverständlichen) Tatsache findet sich z.B. in [35], Proposition 2.8.

Es ist

$$L_1(f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot f^{(k)}, \quad L_2(f) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot f^{(k)}$$

mit (von $f_2, \dots, f_n$ abhängigen) Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathcal{M}(\Omega)$. Hierbei gilt

$$a_{n-1} = b_{n-1} = (-1)^{n+1} g_2 \cdot W(f_3, \dots, f_n).$$

Dies ist für a_{n-1} offensichtlich und folgt für b_{n-1} leicht aus der Betrachtung von

$$L_2(f) = W(f, f_3, \dots, f_n) \cdot g_2' - [W(f, f_3, \dots, f_n)]' \cdot g_2;$$

man beachte hierbei die unterschiedlichen Dimensionen der auftretenden Wronski-Determinanten!

Wir nehmen $L_1 \neq L_2$ an und setzen $m := \max\{k \in \{0, \dots, n-1\} \mid a_k \not\equiv b_k\}$ sowie

$$L := \frac{1}{b_m - a_m} \cdot (L_2 - L_1).$$

Dann ist $m \leq n-2$, und L besitzt eine Darstellung

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot f^{(k)} + f^{(m)},$$

mit $c_k \in \mathcal{M}(\Omega)$. Wegen (4.11) gilt

$$f_j^{(m)} = -\sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot f_j^{(k)} \quad \text{für } j = 2, \dots, n.$$

Daher läßt sich in der $(n-1)$-reihigen Wronski-Determinante $W(f_2, f_3, \dots, f_n)$ die $(m+1)$-te Zeile mit den Einträgen $f_j^{(m)}$ als Linearkombination der vorangehenden Zeilen ausdrücken, d.h. es gilt $W(f_2, f_3, \dots, f_n) \equiv 0$. Dieser Widerspruch zeigt $L_1 = L_2$ und damit die Behauptung.

Korollar 4.5

Es seien $f_1, \dots, f_n$ meromorph in Ω, $f_2, f_3, \dots, f_n$ und $f_1, f_3, \dots, f_n$ seien linear unabhängig, und es sei

$$Q := \frac{W(f_2, f_3, \dots, f_n)}{W(f_1, f_3, \dots, f_n)}.$$

Dann gilt

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{W(f_3, \dots, f_n) \cdot W(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)}{W(f_1, f_3, \dots, f_n) \cdot W(f_2, f_3, \dots, f_n)} \tag{4.12}$$

Beweis:

Sind wie oben $g_1 := W(f_1, f_3, \dots, f_n)$, $g_2 := W(f_2, f_3, \dots, f_n)$, so ist $Q = \frac{g_2}{g_1}$, also $\frac{Q'}{Q} = \frac{g_2'}{g_2} - \frac{g_1'}{g_1} = \frac{W(g_1, g_2)}{g_1 \cdot g_2}$. Daher folgt die Behauptung sofort aus Satz 4.4.

4.3 Die Abschätzungen von Bloch und Cartan

Definition 4.6

Es sei $(X; d)$ ein metrischer Raum und $\gamma > 0$. Eine Eigenschaft gilt für $\gamma-$**fast alle** $P \in X$, wenn sie für alle $P \in X \backslash E$ gilt, wobei die Ausnahmemenge E von endlich vielen offenen Kugeln mit Radiussumme γ überdeckt werden kann.

Satz 4.7

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und $P_1, \ldots, P_n$ seien (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte in X. Es sei $c > 0$. Dann gilt $\prod_{j=1}^{n} d(Q; P_j) > c^n$ für $(2ec)$-fast alle Punkte $Q \in X$.

Beweis: (cf. [31], VIII. Theorem 3.1 und Theorem 3.2)

Es sei $R := ec$.

Wir nehmen zunächst an, daß es eine offene Kugel $U_R(M) \subseteq X$ mit $P_1, \ldots, P_n \in U_R(M)$ gibt. Für $Q \in X \backslash U_{2R}(M)$ gilt dann $d(Q; P_j) > R$ für alle $j = 1, \ldots, n$, also

$$\prod_{j=1}^{n} d(P_j; Q) > R^n > c^n$$

und somit die Behauptung.

Falls es keine solche Kugel gibt, setzen wir:

$$k_1 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt eine offene Kugel in } X \text{ vom Radius } \tfrac{k}{n} \cdot R, \text{ die mindestens } k \text{ Punkte aus } \{P_1, \ldots, P_n\} \text{ enthält.}\}$$

Es sei $U_1 = U_{r_1}(M_1)$ mit $r_1 = \frac{k_1}{n} \cdot R$ eine solche Kugel mit $\#(U_1 \cap \{P_1, \ldots, P_n\}) \geq k_1$. Wegen der Maximalität von k_1 ist dann sogar $\#(U_1 \cap \{P_1, \ldots, P_n\}) = k_1$.

Es sei $\mu \geq 2$, und $U_1, \ldots, U_{\mu-1}$ seien bereits definiert. Falls $\{P_1, \ldots, P_n\} \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\mu-1} U_\nu \neq \emptyset$ gilt, so setzen wir:

$$k_\mu := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt eine offene Kugel in } X \text{ vom Radius } \tfrac{k}{n} \cdot R, \text{ die mindestens } k \text{ Punkte aus } \{P_1, \ldots, P_n\} \backslash \textstyle\bigcup_{\nu=1}^{\mu-1} U_\nu \text{ enthält.}\}$$

Wiederum wegen der Maximalität von k_μ findet man dann eine Kugel $U_\mu = U_{r_\mu}(M_\mu)$ mit $r_\mu = \frac{k_\mu}{n} \cdot R$ und $\#\left(U_\mu \cap \{P_1, \ldots, P_n\} \backslash \bigcup_{\nu=1}^{\mu-1} U_\nu\right) = k_\mu$.

Auf diese Weise erhält man Kugeln $U_1, \ldots, U_p$ mit $p \leq n$. Es gilt:

(1) Jeder Punkt P_j $(1 \leq j \leq n)$ liegt in (mindestens) einer Kugel U_μ $(1 \leq \mu \leq p)$.

(2) Es ist $k_1 + \ldots + k_p = n$, also $r_1 + \ldots + r_p = R$.

(3) Es sei $m \in \{1, \ldots, n\}$, und es gebe eine Kugel U vom Radius $\frac{m}{n} \cdot R$, die $m' \geq m$ der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ enthält. Dann liegt mindestens einer dieser m' Punkte in einer Kugel U_μ $(1 \leq \mu \leq p)$ vom Radius $\geq \frac{m}{n} \cdot R$. (Andernfalls würde $k_\mu \geq m'$ für alle $\mu \geq 1$ folgen, und diese m' Punkte würden für alle $\mu \geq 1$ in $X \backslash \bigcup_{\nu=1}^{\mu} U_\nu$ liegen; die Konstruktion würde also nicht abbrechen.)

Für $\mu = 1, \ldots, p$ sei $U'_\mu := U_{2r_\mu}(M_\mu)$. Wegen (2) haben die U'_μ die Radiussumme $2R = 2ec$.

Es sei $Q \in X \backslash \bigcup_{\mu=1}^{p} U'_\mu$ und $1 \leq m \leq n$. Dann enthält $U_{\frac{m}{n} \cdot R}(Q)$ höchstens $m - 1$ der Punkte $P_1, \ldots, P_n$:

Enthielte $U_{\frac{m}{n} \cdot R}(Q)$ nämlich mindestens m der Punkte $P_1, \ldots, P_n$, so gäbe es wegen (3) ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $\mu \in \{1, \ldots, p\}$ mit $P_j \in U_\mu \cap U_{\frac{m}{n} \cdot R}(Q)$ und $r_\mu \geq \frac{m}{n} \cdot R$. Daraus und aus $Q \notin U'_\mu$ erhielte man

$$2r_\mu \leq d(Q; M_\mu) \leq d(Q; P_j) + d(P_j; M_\mu) < \frac{m}{n} \cdot R + r_\mu,$$

also $r_\mu < \frac{m}{n} \cdot R$, Widerspruch!
Damit folgt für $Q \in X \setminus \bigcup_{\mu=1}^{p} U'_\mu$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log d(Q;P_j) &\geq \frac{1}{n}\left(\log\frac{R}{n} + \log\frac{2R}{n} + \cdots + \log\frac{nR}{n}\right)\\ &> \int_0^1 \log(Rt)dt = \log R - 1 = \log c,\end{aligned}$$

also $\prod_{j=1}^{n} d(Q;P_j) > c^n$.
Dies zeigt die Behauptung.

Vorbemerkung:

Im Beweis des nächsten Satzes benötigen wir mehrfach die folgende wohlbekannte Abschätzung

$$\frac{||z|-|b||}{1-|b|\cdot|z|} \leq \left|\frac{z-b}{1-\overline{b}\cdot z}\right| \leq \frac{|z|+|b|}{1+|b|\cdot|z|} \quad \text{für alle } z, b \in \mathbb{D}. \tag{4.13}$$

Satz 4.8

Es seien $0 < c < \frac{1}{4e}$, $0 < s < r \leq 1$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{D}_r$, $w \in \mathbb{D}_s$ mit $w \neq b_1, \ldots, b_n$ sowie $M := \frac{4r^2}{(r-s)^2} \cdot \log\frac{1}{c}$. Dann gilt für $(4erc)$-fast alle $z \in \mathbb{D}_s$

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{r^2 - \overline{b_k}\cdot z}{r(z-b_k)}\right| < M \cdot \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{r^2 - \overline{b_k}\cdot w}{r(w-b_k)}\right|.$$

Beweis: (cf. [31], VIII. Theorem 3.3)

O.E. darf man $r = 1$ annehmen. (Andernfalls ersetzt man b_k durch $\frac{b_k}{r}$, w durch $\frac{w}{r}$ und s durch $\frac{s}{r}$.)
Es sei $|b_k| \leq \frac{1}{2}(1+s)$ für $k = 1, \ldots, m$, $|b_k| > \frac{1}{2}(1+s)$ für $k = m+1, \ldots, n$.
Für $|b| < 1$ mit $b \neq w$ gilt wegen (4.13) und $\log x < x - 1$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{w-b}{1-\overline{b}\cdot w}\right| &\leq \log\frac{|w|+|b|}{1+|b|\cdot|w|}\\ &= \log\left[1-(1-|b|)\cdot\frac{1-|w|}{1+|b|\cdot|w|}\right] < -(1-|b|)\cdot\frac{1-|w|}{1+|b|\cdot|w|},\end{aligned}$$

also

$$\log\left|\frac{1-\overline{b}\cdot w}{w-b}\right| > \frac{1-s}{2}\cdot(1-|b|). \tag{4.14}$$

I. Für $|b| \leq \frac{1}{2}(1+s)$ folgt aus (4.14) sofort

$$\log\left|\frac{1-\overline{b}\cdot w}{w-b}\right| > \frac{1-s}{2}\cdot\left(1-\frac{1+s}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot(1-s)^2.$$

Damit folgt:

$$\sum_{k=1}^{m} \log\left|\frac{1-\overline{b_k}\cdot w}{w-b_k}\right| > \frac{m}{4}\cdot(1-s)^2. \tag{4.15}$$

Andererseits erhält man mit Satz 4.7

$$\sum_{k=1}^{m} \log \left| \frac{1-\overline{b_k}\cdot z}{z-b_k} \right| < \sum_{k=1}^{m} \log \frac{2}{|z-b_k|} < m \cdot \log 2 + \log \frac{1}{(2c)^m} = m \cdot \log \frac{1}{c} \tag{4.16}$$

für $(4ec)$-fast alle $z \in \mathbb{D}_s$. Aus (4.15) und (4.16) folgt insgesamt

$$\sum_{k=1}^{m} \log \left| \frac{1-\overline{b_k}\cdot z}{z-b_k} \right| < M \cdot \sum_{k=1}^{m} \log \left| \frac{1-\overline{b_k}\cdot w}{w-b_k} \right| \tag{4.17}$$

für $(4ec)$-fast alle $z \in \mathbb{D}_s$.
II. Für $\frac{1}{2}(1+s) < |b| < 1$ und alle $z \in \mathbb{D}_s$ erhält man mit (4.13) analog:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{1-\overline{b}\cdot z}{z-b} \right| &\leq \log \frac{1-|b|\cdot|z|}{|b|-|z|} = \log \left[1 + (1-|b|) \cdot \frac{1+|z|}{|b|-|z|} \right] \\ &< (1-|b|) \cdot \frac{1+|z|}{|b|-|z|} < \frac{4}{1-s}(1-|b|). \end{aligned}$$

Damit und mit (4.14) folgt insgesamt

$$\log \left| \frac{1-\overline{b}\cdot z}{z-b} \right| < \frac{8}{(1-s)^2} \cdot \log \left| \frac{1-\overline{b}\cdot w}{w-b} \right|,$$

und wegen $2 < \log \frac{4ec}{c} < \log \frac{1}{c}$ somit

$$\log \left| \frac{1-\overline{b}\cdot z}{z-b} \right| < M \cdot \log \left| \frac{1-\overline{b}\cdot w}{w-b} \right|.$$

Damit erhält man

$$\sum_{k=m+1}^{n} \log \left| \frac{1-\overline{b_k}\cdot z}{z-b_k} \right| < M \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \log \left| \frac{1-\overline{b_k}\cdot w}{w-b_k} \right| \quad \text{für } \textit{alle } z \in \mathbb{D}_s. \tag{4.18}$$

Aus (4.17) und (4.18) ergibt sich die Behauptung.

Dieses Resultat, angewandt auf die Polstellen b_k einer in $\mathbb{D}$ meromorphen Funktion, läßt sich mithilfe der in Definition 1.8 eingeführten verallgemeinerten Anzahlfunktion kürzer so formulieren:

Korollar 4.9

Es sei $0 < c < \frac{1}{4e}$, $0 < s < r < 1$, $M := \frac{4r^2}{(r-s)^2} \cdot \log \frac{1}{c}$, $w \in \mathbb{D}_s$ und f meromorph in $\mathbb{D}$, wobei w keine Polstelle von f sei. Dann gilt für $(4ec)$-fast alle $z \in \mathbb{D}_s$

$$f(z) \neq \infty \quad \text{und} \quad N_z(r,f) < M \cdot N_w(r,f)$$

und somit auch

$$T_z(r,f) < M \cdot T_w(r,f).$$

Von nun an sei stets stillschweigend vorausgesetzt, daß in Ausdrücken $T_z(r,f)$ nur solche z betrachtet werden, die keine Polstellen von f sind.

Satz 4.10

Es seien $\alpha, \gamma > 0$ und $0 < s < r_0 < 1$. Dann gibt es eine nur von α, γ, s und r_0 abhängige Konstante $K_1 < \infty$, so daß gilt:
Ist f *holomorph* in $\mathbb{D}$ und $|f(z_0)| > \alpha$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}_s$, so gilt für $r_0 \leq r < 1$

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq K_1 \cdot (1 + m(r, f)) \tag{4.19}$$

$$\text{und} \quad T_w\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq K_1 \cdot (1 + m(r, f)) \quad \text{für } \gamma\text{-fast alle } w \in \mathbb{D}_s. \tag{4.20}$$

Beweis: ([31], VIII. Theorem 3.5)

O.E. sei $\gamma < 1$. Es sei ein $r \in [r_0; 1)$ gegeben.
Da f holomorph ist, gilt $N_{z_0}(r, f) = 0$. Damit folgt aus der Poisson-Jensenschen Ungleichung (Satz 1.9)

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{r + |z_0|}{r - |z_0|} \cdot N_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \left(\frac{r + |z_0|}{r - |z_0|}\right)^2 \cdot m(r, f) - \frac{r + |z_0|}{r - |z_0|} \cdot \log |f(z_0)|.$$

Hiermit und mit $-\log |f(z_0)| \leq \log^+ \frac{1}{|f(z_0)|} \leq \log^+ \frac{1}{\alpha}$ erhält man weiter

$$\begin{aligned} T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &\leq \left(\frac{r_0 + s}{r_0 - s}\right)^2 \cdot m(r, f) + \frac{r_0 + s}{r_0 - s} \cdot \log^+ \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Wegen $m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ folgt hieraus (4.19).
Nach Korollar 4.9 gilt außerdem:

$$T_w\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq M \cdot T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) \quad \text{für } \gamma - \text{fast alle } w \in \mathbb{D}_s$$

mit $M = \frac{4r^2}{(r-s)^2} \cdot \log \frac{4e}{\gamma} \leq \frac{4}{(r_0-s)^2} \cdot \log \frac{4e}{\gamma} =: M_0$. Hieraus und aus (4.21) erhält man (4.20) mit $K_1 := M_0 \cdot \frac{r_0+s}{r_0-s} \cdot \max\left\{\frac{r_0+s}{r_0-s}; \log^+ \frac{1}{\alpha}\right\}$.

Satz 4.11

Es seien $\alpha, \gamma > 0$ und $0 < s < r_0 < 1$. Dann gibt es eine nur von α, γ, s und r_0 abhängige Konstante $K_2 < \infty$, so daß gilt:
Ist f *meromorph* in $\mathbb{D}$ und

$$|f(z)| \leq \alpha \quad \textbf{nicht } \gamma\text{-fast überall in } \mathbb{D}_s, \tag{4.22}$$

so ist für $r_0 \leq r < 1$

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq K_2 \cdot (1 + T_w(r, f)) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{D}_s \tag{4.23}$$

$$\text{und} \quad T_w\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq K_2 \cdot (1 + T_w(r, f)) \quad \text{für } \gamma\text{-fast alle } w \in \mathbb{D}_s. \tag{4.24}$$

Beweis: (cf. [31], VIII. Theorem 3.5)

Wiederum sei o.E. $\gamma < 1$. Es seien ein $r \in [r_0; 1)$ und ein $w_0 \in \mathbb{D}_s$ gegeben.
Nach Korollar 4.9 gilt $T_z(r, f) \leq M_0 \cdot T_{w_0}(r, f)$ für γ-fast alle $z \in \mathbb{D}_s$ mit $M_0 = \frac{4}{(r_0-s)^2} \cdot \log \frac{4e}{\gamma}$. Hieraus und aus der Voraussetzung (4.22) folgt die Existenz eines $z_0 \in \mathbb{D}_s$ mit

$$T_{z_0}(r, f) \leq M_0 \cdot T_{w_0}(r, f) \quad \text{und} \quad |f(z_0)| > \alpha. \tag{4.25}$$

Aus der Poisson-Jensenschen Ungleichung erhält man wie im Beweis von Satz 4.10

$$\begin{aligned} T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{r+|z_0|}{r-|z_0|} \cdot N_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &\leq \left(\frac{r+|z_0|}{r-|z_0|}\right)^2 \cdot m(r, f) + \frac{r+|z_0|}{r-|z_0|} \cdot N_{z_0}(r, f) \\ &\quad -\frac{r+|z_0|}{r-|z_0|} \cdot \log|f(z_0)| \\ &\leq \left(\frac{r_0+s}{r_0-s}\right)^2 \cdot T_{z_0}(r, f) + \frac{r_0+s}{r_0-s} \cdot \log^+ \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Aus (4.25) und (4.26) ergibt sich wegen $m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ sofort (4.23).

Weiter gilt nach Korollar 4.9 $T_w\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq M_0 \cdot T_{z_0}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ für γ-fast alle $w \in \mathbb{D}_s$. Hieraus folgt in Verbindung mit (4.25) und (4.26)

$$T_w\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq K_2' \cdot (1 + T_{w_0}(r, f)) \quad \text{für } \gamma-\text{fast alle } w \in \mathbb{D}_s$$

mit $K_2' = M_0 \cdot \frac{r_0+s}{r_0-s} \cdot \max\left\{\frac{r_0+s}{r_0-s} \cdot M_0; \log^+ \frac{1}{\alpha}\right\}$.
Indem man diese Abschätzung auf ein $w_0 \in \mathbb{D}_s$ mit $T_{w_0}(r, f) \leq \min_{w \in \overline{\mathbb{D}_s}} T_w(r, f) + 1$ anwendet und K_2' durch $K_2 := 2K_2'$ ersetzt, folgt (4.24).

Die Ausnahmemengen in Satz 4.10 und Satz 4.11, in denen die Abschätzungen (4.20) und (4.24) nicht gelten, hängen natürlich sowohl von f als auch von r ab.

4.4 Beweis des Satzes von Cartan

Im Induktionssschluß des Beweises müssen wir den Satz von Cartan auf ein beliebiges Gebiet im Einheitskreis anwenden. Dazu benötigen wir folgende, für $p \geq 4$ nicht unbedingt selbstverständliche

Proposition 4.12

Wenn der Satz von Cartan für ein $p \geq 3$ in $\mathbb{D}$ gilt, so gilt er (für dieses p) auch in jedem Gebiet $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$.

Beweis:

Es existiert eine surjektive holomorphe Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ (etwa die universelle Überlagerung von Ω, sofern $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mindestens zweielementig ist). Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von p-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_p)$ von Einheiten f_j in Ω mit $f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$. Dann ist auf $\widetilde{\mathcal{F}} := \{(f_1 \circ \varphi, \ldots, f_p \circ \varphi) : f \in \mathcal{F}\}$ der Satz von Cartan anwendbar. Die Konvergenzaussagen, die man mit seiner Hilfe für $\widetilde{\mathcal{F}}$ erhält, übertragen sich wegen der Surjektivität von φ sofort auf $\mathcal{F}$.

Die zentrale Rolle im Beweis spielen Abschätzungen für die Schmiegungsfunktion gewisser Brüche von Wronski-Determinanten:

Notationen:

Es sei $\mathcal{F}$ wie im Satz von Cartan.

Für $q \geq 2$ verschiedene Indizes $j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, p\}$ und $f \in \mathcal{F}$ bezeichnen wir mit $D_q^{(\nu)} = D_q^{(\nu)}(f; j_1, \ldots, j_q)$, $\nu = 1, \ldots, \frac{q}{2}(q-1)$, die $\binom{q}{2} = \frac{q}{2}(q-1)$ Funktionen[3]

$$\frac{L(f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3}, \ldots, f_{j_q}) \cdot L(f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})}{L(f_{k_1}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q}) \cdot L(f_{k_2}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})}$$

mit $\{k_1, \ldots, k_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$ und $k_1 < k_2 < \ldots < k_q$. Solche Ausdrücke nennen wir im folgenden kurz **D-Brüche der Stufe** q (englisch: *q-term derived fractions*). Ein D-Bruch der Stufe 2 ist offensichtlich einfach eine zweireihige dehomogenisierte Wronski-Determinante $L(f_{j_1}, f_{j_2})$.

Für $I = \{j_1, \ldots, j_q\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$ setzen wir $L(f; I) := L(f_{j_1}, \ldots, f_{j_q})$ und entsprechend $D_q^{(\nu)}(f; I) := D_q^{(\nu)}(f; j_1, \ldots, j_q)$. Schließlich schreiben wir mitunter kurz $L_{j_1,\ldots,j_q}$ statt $L(f_{j_1}, \ldots, f_{j_q})$.

Mithilfe der Abschätzungen von Bloch und Cartan (Satz 4.10 und Satz 4.11) erhalten wir:

Proposition 4.13

Es sei $\mathcal{F}$ wie im Satz von Cartan mit $p \geq 4$, $t \in \{3, \ldots, p-1\}$, $\delta > 0$, $\gamma_3, \ldots, \gamma_t \in (0; \delta)$, $\frac{1}{2} \leq r_2 < \ldots < r_t < \rho_{t+1} < 1$. Es gebe eine Folge $\mathcal{L}_t \subseteq \mathcal{F}$, so daß gilt:

(1) Für jedes $s \in \{3, \ldots, t\}$ und alle Indexmengen $I \subseteq \{1, \ldots, p-1\}$ mit $\#I = s$ gibt es ein $\nu = \nu(s; I) \in \left\{1, \ldots, \frac{s}{2}(s-1)\right\}$, so daß für alle $f \in \mathcal{L}_t$

$$\left|D_s^{(\nu)}(f; I)(z)\right| \leq 1 \quad \textbf{nicht } \gamma_s\text{-fast überall in } \mathbb{D}_{r_s} \tag{4.27}$$

gilt.

(2) Für alle $f \in \mathcal{L}_t$ und alle $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, p-1\}$ mit $k_1 \neq k_2$ gibt es ein $z_0 \in \mathbb{D}_{r_2}$ mit $|L(f_{k_1}, f_{k_2})(z_0)| \geq 1$.

Sofern $\delta > 0$ klein genug ist, gibt es dann eine nur von $\gamma_3, \ldots, \gamma_t$, $r_2, \ldots, r_t$, ρ_{t+1} und p abhängige Konstante $C < \infty$, so daß für alle $f \in \mathcal{L}_t$, alle paarweise verschiedenen $j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, p-1\}$ und alle $r \in (\rho_{t+1}; 1)$

$$m\left(r, \frac{1}{L(f_{j_1}, \ldots, f_{j_t})}\right) \leq C \cdot \Big(1 + \sum_{I \subseteq \{j_1, \ldots, j_t\}} m(r, L(f; I))\Big)$$

gilt.

Beweis:

I. Es sei $3 \leq s \leq t$ und $I_s \subseteq \{1, \ldots, p-1\}$ mit $\#I_s = s$.

Für $\nu = \nu(s; I_s)$ und $f \in \mathcal{L}_t$ gilt nach Voraussetzung (1) und Satz 4.11:

$$T_w\left(r, \frac{1}{D_s^{(\nu)}(f; I_s)}\right) \leq K_2^{(s)} \cdot \Big(1 + T_w(r, D_s^{(\nu)}(f; I_s))\Big) \tag{4.28}$$

[3] Wie die Numerierung im einzelnen erfolgt, ist irrelevant.

für alle $r \in (r_{s+1};1)$ (falls $3 \leq s \leq t-1$) bzw. alle $r \in (\rho_{t+1};1)$ (für $s=t$) und γ_s-fast alle $w \in \mathbb{D}_{r_s}$ mit einer geeigneten Konstanten $K_2^{(s)}$.
Für die (holomorphen!) D-Brüche der Stufe 2 gilt wegen Voraussetzung (2) und Satz 4.10 entsprechend:

$$T_w\left(r, \frac{1}{L(f_{k_1}, f_{k_2})}\right) \leq K_1 \cdot \Big(1 + m(r, L(f_{k_1}, f_{k_2}))\Big) \tag{4.29}$$

für alle $r \in (r_3;1)$, alle $k_1, k_2 \in \{1,\ldots,p-1\}$ mit $k_1 \neq k_2$ und γ_2-fast alle $w \in \mathbb{D}_{r_2}$.
Sofern δ klein genug ist, gibt es für alle $f \in \mathcal{L}_t$ und alle $r \in (\rho_{t+1};1)$ stets ein (von f und r abhängiges) $w_0 \in \mathbb{D}_{r_2}$, so daß für dieses w_0 die Abschätzungen (4.28) und (4.29) mit allen denkbaren Indexkombinationen synchron gültig sind; wie klein δ sein muß, hängt nur von der Zahl der benötigten Abschätzungen, d.h. von p und t ab.
II. Es sei $f \in \mathcal{L}_t$ und $r \in (\rho_{t+1};1)$, und $w_0 \in \mathbb{D}_{r_2}$ sei so gewählt, daß alle Abschätzungen (4.28) und (4.29) gültig sind.
Jedes $L(f;I_s)$ (mit $\#I_s = s$, $3 \leq s \leq t$) läßt sich in der Form

$$L(f;I_s) = D_s^{(\nu)}(f;I_s) \cdot \frac{L\left(f;I_{s-1}^{(1)}\right) \cdot L\left(f;I_{s-1}^{(2)}\right)}{L(f;I_{s-2})}$$

mit gewissen $I_{s-1}^{(\mu)}, I_{s-2} \subseteq I_s$, $\#I_{s-1}^{(\mu)} = s-1$, $\#I_{s-2} = s-2$ darstellen, wobei man $\nu = \nu(s;I_s)$ wählen kann, so daß also (4.28) erfüllt ist. Daraus erhält man, wenn man noch die Polstellenfreiheit von $L(f;I_s)$ und $L(f;I_{s-2})$ berücksichtigt, Abschätzungen der Gestalt

$$\begin{aligned}
& T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L(f;I_s)}\right) \\
\leq\ & K_2^{(s)} \cdot \Big(1 + T_{w_0}\left(r, D_s^{(\nu)}(f;I_s)\right)\Big) \\
& + T_{w_0}\left(r, L\left(f;I_{s-2}\right)\right) + T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L\left(f;I_{s-1}^{(1)}\right)}\right) + T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L\left(f;I_{s-1}^{(2)}\right)}\right) \\
\leq\ & \left(K_2^{(s)} + 1\right) \cdot \Bigg\{1 + m\left(r, L(f;I_s)\right) + m\left(r, L(f;I_{s-2})\right) \\
& \qquad + T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L\left(f;I_{s-1}^{(1)}\right)}\right) + T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L\left(f;I_{s-1}^{(2)}\right)}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Abschätzungen, ausgehend von $I_t := \{j_1,\ldots,j_t\}$, ineinander ein und beachtet hierbei im letzten Schritt (4.29), so ergibt sich

$$T_{w_0}\left(r, \frac{1}{L(f_{j_1},\ldots,f_{j_t})}\right) \leq C \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{j_1,\ldots,j_t\}} m(r, L(f;I))\right).$$

Dies gilt für alle $r \in (\rho_{t+1};1)$ und $f \in \mathcal{L}_t$, wobei $C < \infty$ unabhängig von r und f ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Den letzten der im Beweis des Satzes von Cartan zu betrachtenden Fälle deckt das folgende Resultat ab:

Proposition 4.14

Es sei $\mathcal{G}$ eine Familie von q-Tupeln $g = (g_1, \ldots, g_q)$ $(q \geq 3)$ von Einheiten g_j in $\mathbb{D}$ mit $g_1 + \ldots + g_q \equiv 1$. Es sei $0 < \rho_0 < R_0 < 1$. Es gebe ein $\alpha > 0$, so daß für alle $g \in \mathcal{G}$ und alle $j \in \{1, \ldots, q\}$

$$|g_j(z_0)| \geq \alpha \quad \text{für ein } z_0 \in \mathbb{D}_{\rho_0} \tag{4.30}$$

gilt, und eine Konstante $C < \infty$ mit

$$m\left(r, \frac{1}{L(g_1, \ldots, g_q)}\right) \leq C \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,q\}} m(r, L(g; I))\right) \tag{4.31}$$

für alle $g \in \mathcal{G}$ und alle $r \in (R_0; 1)$.

Dann sind alle Familien $(g_j)_{g \in \mathcal{G}}$ $(1 \leq j \leq q)$ normal in $\mathbb{D}$.

Beweis:

Es sei $g = (g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{G}$ und $L := L(g_1, \ldots, g_q)$. $L^{(j)}$ bezeichne die j-te Unterdeterminante von L bezüglich der ersten Zeile, d.h. die Determinante, die aus L entsteht, wenn man dort die j-te Spalte durch $(1, 0, \ldots, 0)^T$ ersetzt. Die linearen Relationen

$$g_1 + \ldots + g_q \equiv 1 \quad \text{und} \quad g_1^{(k)} + \ldots + g_q^{(k)} \equiv 0 \text{ für } 1 \leq k \leq q-1$$

lassen sich auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{g_1'}{g_1} & \cdots & \frac{g_q'}{g_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{g_1^{(q-1)}}{g_1} & \cdots & \frac{g_q^{(q-1)}}{g_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel gilt somit für $j = 1, \ldots, q$:

$$g_j = \frac{L^{(j)}}{L},$$

also

$$m(r, g_j) \leq m(r, L^{(j)}) + m\left(r, \frac{1}{L}\right).$$

Wegen (4.31) folgt, wenn man $L^{(j)}$ bzw. $L(g; I)$ gemäß der Leibnizschen Determinantenformel durch die Quotienten $\frac{g_\mu^{(\nu)}}{g_\mu}$ ausdrückt, mithilfe von Satz 1.17

$$m(r, g_j) \leq K' \cdot \left[1 + \log \frac{1}{R-r} + \sum_{k=1}^{q} \log^+ \left(m(R, g_k) + m\left(R, \frac{1}{g_k}\right)\right)\right]$$

für $R_0 < r < R < 1$ mit einer von g, j, r und R unabhängigen Konstanten $K' < \infty$. Wegen (4.30) gibt es für alle $k = 1, \ldots, q$ ein $z_0 \in \mathbb{D}_{\rho_0}$ mit $|g_k(z_0)| \geq \alpha$, und mit der Poisson-Jensenschen Ungleichung (Satz 1.9) folgt

$$\begin{aligned} m\left(R, \frac{1}{g_k}\right) &\leq \left(\frac{R + |z_0|}{R - |z_0|}\right)^2 \cdot m(R, g_k) - \frac{R + |z_0|}{R - |z_0|} \cdot \log |g_k(z_0)| \\ &\leq \left(\frac{R_0 + \rho_0}{R_0 - \rho_0}\right)^2 \cdot m(R, g_k) + \frac{R_0 + \rho_0}{R_0 - \rho_0} \cdot \log^+ \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $m_g(r) := \sum_{k=1}^{q} m(r, g_k)$ die Abschätzung

$$m_g(r) \leq K \cdot \left(1 + \log \frac{1}{R-r} + \log^+ m_g(R)\right)$$

für $R_0 < r < R < 1$ und $g \in \mathcal{G}$ mit einer von g, R und r unabhängigen Konstanten $K < \infty$. Da $r \mapsto m_g(r)$ wegen $m(r, g_k) = T(r, g_k)$ stetig und monoton ist, kann man Lemma 1.20 anwenden und erhält so für alle $R \in (R_0; 1)$ die gleichmäßige Beschränktheit von $m_g(r)$ $(g \in \mathcal{G})$ auf $(R_0; R)$ und damit - wiederum aus Monotoniegründen - auf $[0; R)$. Mit Satz 1.11 folgt die erwünschte Normalität.

Damit stehen alle Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Cartan bereit. Aus Gründen der Übersichtlichkeit formulieren wir die zu beweisenden Konvergenzaussagen noch einmal explizit:

Satz von Cartan:

Es sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von p-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_p)$ von Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, so daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es gibt ein $k \in \{1, \ldots, p\}$, so daß $\left(\frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{L}}$ für alle $j \in \{1, \ldots, p\}$ $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}$ ist (gegen 0 oder gegen eine Einheit in $\mathbb{D}$).

oder

(b) Es gibt zwei disjunkte, mindestens zweielementige Teilmengen $S_1, S_2 \subseteq \{1, \ldots, p\}$, so daß $\left(\frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{L}}$ für alle $j, k \in S_\mu$ $(\mu = 1, 2)$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen eine Einheit und $\left(\sum_{j \in S_\mu} \frac{f_j}{f_k}\right)_{f \in \mathcal{L}}$ für alle $k \in S_\mu$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0 ist.

Die Äquivalenz mit der in Abschnitt 4.1 gegebenen Formulierung ist leicht einzusehen.

Beweis des Satzes von Cartan:

Für $p = 3$ folgt die Gültigkeit des Satzes von Cartan, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, aus dem FNT.

Es sei $p \geq 4$, und die Behauptung sei für den Fall von $p-1$ Funktionen bereits bewiesen. Aufgrund der Möglichkeit, das Diagonalverfahren anzuwenden, genügt es, die behaupteten Konvergenzeigenschaften in jedem Kreis $\mathbb{D}_{r_0}$ mit $r_0 < 1$ nachzuweisen.

Es sei also $r_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ beliebig. Wir wählen $r_1, \ldots, r_p$ so, daß $r_0 < r_1 < \ldots < r_p < 1$ gilt und für $\gamma_q := \frac{r_q - r_{q-1}}{3q(q-1)}$ $(3 \leq q \leq p)$

$$\gamma_3, \ldots, \gamma_p \leq \delta \tag{4.32}$$

erfüllt ist, wobei δ die Konstante aus Proposition 4.13 bezeichnet.

Wir dürfen o.E. annehmen, daß für alle $f \in \mathcal{F}$ jeweils $p-1$ der Funktionen $f_1, \ldots, f_p$ linear unabhängig sind, daß der von $f_1, \ldots, f_p$ erzeugte Teilvektorraum von $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ also die Dimension $p-1$ hat.

Ist nämlich $(f_n)_n = ((f_{1,n}, \ldots, f_{p,n}))_n \subseteq \mathcal{F}$ eine Folge, für die $f_{1,n}, \ldots, f_{p-1,n}$ jeweils linear abhängig sind, so ersetzen wir f_n durch $\widetilde{f}_n$ mit $\widetilde{f}_{j,n} := f_{j,n} \cdot (1 + c_{j,n})$, wobei die $c_{j,n}$ in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktionen sind, die wir so wählen können, daß $|c_{j,n}(z)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ gilt, $\widetilde{f}_{1,n}, \ldots, \widetilde{f}_{p-1,n}$ linear unabhängig sind und die Borelsche

Gleichung auch für $\widetilde{f}_n$ erhalten bleibt, also $\widetilde{f}_{1,n} + \ldots + \widetilde{f}_{p,n} = 0$ gilt. (Daß hierbei auch $|c_{p,n}(z)| \le \frac{1}{n}$ erfüllbar ist, erkennt man aus $c_{p,n} = -\frac{1}{f_{p,n}} \cdot (c_{1,n} \cdot f_{1,n} + \ldots + c_{p-1,n} \cdot f_{p-1,n})$.) Man überlegt sich dann leicht, daß jede C-Klasse für eine Teilfolge von $(\widetilde{f}_n)_n$ und $\mathbb{D}_{r_0}$ auch C-Klasse für die entsprechende Teilfolge von $(f_n)_n$ und $\mathbb{D}_{r_0}$ ist.

Fall 1: Eine Quotientenfolge $\left(\frac{f_{j_0,n}}{f_{k_0,n}}\right)_n$ mit $(f_n)_n = ((f_{1,n}, \ldots, f_{p,n}))_n \subseteq \mathcal{F}$, $1 \le j_0, k_0 \le p$, $j_0 \ne k_0$ ist $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}_{r_1}$ mit Grenzwert $\not\equiv -1$.

O. E. sei $j_0 = 1$, $k_0 = p$. Es sei

$$g_{1,n} := 1 + \frac{f_{1,n}}{f_{p,n}}, \qquad g_{j,n} := \frac{f_{j,n}}{f_{p,n}} \quad \text{für } j = 2, \ldots, p-1.$$

Dann gilt $g_{1,n} + \ldots + g_{p-1,n} \equiv 0$ für alle n, die Funktionen $g_{2,n}, \ldots, g_{p-1,n}$ sind Einheiten in $\mathbb{D}$, und es ist $g_1 := \lim_{n\to\infty} g_{1,n} \not\equiv 0$.

Daher hat g_1 in $|z| \le r_0$ nur endlich viele Nullstellen $z_1, \ldots, z_m$. Man wähle $r_0' \in (r_0; r_1)$ so, daß $z_1, \ldots, z_m$ sogar die einzigen Nullstellen von g_1 in $|z| \le r_0'$ sind, und setze

$$\varepsilon' := \frac{1}{4} \cdot \min_{1\le\mu<\nu\le m} |z_\mu - z_\nu|, \quad \varepsilon := \min\left\{\varepsilon'; \frac{1}{4}(r_0' - r_0)\right\}, \quad \Omega := \mathbb{D}_{r_0'} \setminus \bigcup_{\mu=1}^{m} B_\varepsilon(z_\mu).$$

Dann ist Ω zusammenhängend, $\partial B_{2\varepsilon}(z_\mu) \subseteq \Omega$ für alle $\mu = 1, \ldots, m$, und g_1 ist nullstellenfrei in $\overline{\Omega}$. O.E. kann man daher $g_{1,n}(z) \ne 0$ für alle $z \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung und Proposition 4.12 gilt nach geeigneter Teilfolgenauswahl:

(a) Es gibt ein $k_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$, so daß $\left(\frac{g_{j,n}}{g_{k_0,n}}\right)_n$ für alle $j = 1, \ldots, p-1$ $\mathcal{K}$-konvergent in Ω ist. Hierbei sei k_0 minimal mit dieser Eigenschaft gewählt.

oder [4]

(b) Es gibt zwei disjunkte, mindestens zweielementige Teilmengen $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2 \subseteq \{1, \ldots, p-1\}$, so daß $\left(\frac{g_{j,n}}{g_{k,n}}\right)_n$ für alle $j, k \in \widetilde{S}_\mu$ $(\mu = 1, 2)$ $\mathcal{K}$-konvergent in Ω gegen eine Einheit und $\left(\sum_{j\in\widetilde{S}_\mu} \frac{g_{j,n}}{g_{k,n}}\right)_n$ für alle $k \in \widetilde{S}_\mu$ $\mathcal{K}$-konvergent in Ω gegen 0 ist.

Wir betrachten zunächst Fall (a).

Ist $k_0 = 1$, so ist wegen der Konvergenz von $(g_{1,n})_n$ auch $(g_{j,n})_n = \left(\frac{f_{j,n}}{f_{p,n}}\right)_n$ für $j = 2, \ldots, p-1$ $\mathcal{K}$-konvergent in Ω, so daß $S = \{1, \ldots, p\}$ eine C-Klasse für $(f_n)_n$ und Ω bildet.

Falls $k_0 \ge 2$ ist, so muß $\frac{g_{1,n}}{g_{k_0,n}} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ wegen der Minimalität von k_0 gelten[5] und somit auch $\frac{1}{g_{k_0,n}} \longrightarrow 0$, d.h. $\frac{f_{p,n}}{f_{k_0,n}} \longrightarrow 0$. Da wegen $\frac{g_{j,n}}{g_{k_0,n}} = \frac{f_{j,n}}{f_{k_0,n}}$ für $j = 2, \ldots, p-1$ auch $\left(\frac{f_{j,n}}{f_{k_0,n}}\right)_n$ $(2 \le j \le p-1)$ und schließlich wegen der Borelschen Gleichung $\left(\frac{f_{1,n}}{f_{k_0,n}}\right)_n$ in Ω $\mathcal{K}$-konvergent ist, ist wiederum $S = \{1, \ldots, p\}$ eine C-Klasse für $(f_n)_n$ und Ω.

Nun nehmen wir an, daß Fall (b) eintritt.

[4] Fall (b) ist nur für $p \ge 5$ möglich.

[5] Andernfalls wäre $\left(\frac{g_{k_0,n}}{g_{1,n}}\right)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen eine Einheit, so daß auch $\left(\frac{g_{j,n}}{g_{1,n}}\right)_n$, $j = 1, \ldots, p-1$ $\mathcal{K}$-konvergent wäre.

Ist $\widetilde{S}_\mu \subseteq \{2,\dots,p-1\}$, so ist wie soeben $\left(\frac{f_{j,n}}{f_{k,n}}\right)_n$ für $j,k \in \widetilde{S}_\mu$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen eine Einheit in Ω, ebenso $\left(\sum_{j\in\widetilde{S}_\mu} \frac{f_{j,n}}{f_{k,n}}\right)_n$ für $k \in \widetilde{S}_\mu$ gegen 0. Man kann dann $S_\mu := \widetilde{S}_\mu$ als neue C-Klasse für $(f_n)_n$ in Ω wählen.

Ist hingegen $1 \in \widetilde{S}_\mu$, so erhält man aus der $\mathcal{K}$-Konvergenz von $(g_{1,n})_n$ wiederum die $\mathcal{K}$-Konvergenz aller $(g_{j,n})_n$ $(j \in \widetilde{S}_\mu)$ gegen Einheiten in Ω sowie die $\mathcal{K}$-Konvergenz von $\left(\sum_{j\in\widetilde{S}_\mu} g_{j,n}\right)_n = \left(\sum_{j\in\widetilde{S}_\mu\cup\{p\}} \frac{f_{j,n}}{f_{p,n}}\right)_n$ gegen 0. Damit ist $S_\mu := \widetilde{S}_\mu \cup \{p\}$ eine neue C-Klasse. Die Disjunktheit von S_1 und S_2 ist klar.

Mithilfe der Cauchyschen Integralformel überträgt sich die gleichmäßige Konvergenz der beschriebenen Folgen von den Kreisrändern $\partial B_{2\varepsilon}(z_\mu)$ auf das Innere, ist insgesamt also in $\mathbb{D}_{r_0}$ gültig. Damit ist der Satz von Cartan für diesen Fall bewiesen.

Von nun an nehmen wir an: Es gibt ein $\alpha > 0$, so daß für jedes $f \in \mathcal{F}$ und alle $j,k \in \{1,\dots,p\}$ ein $z_1 \in \mathbb{D}_{r_1}$ mit

$$\left|\frac{f_j}{f_k}(z_1)\right| > \alpha \tag{4.33}$$

existiert. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es eine Folge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ und $j_0, k_0 \in \{1,\dots,p\}$ mit $j_0 \neq k_0$, so daß $\left(\frac{f_{j_0}}{f_{k_0}}\right)_{f\in\mathcal{L}}$ gleichmäßig in $\mathbb{D}_{r_1}$ gegen 0 konvergiert, womit man sich in der Situation von Fall 1 befindet.

Fall 2: Es gebe eine Folge $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{F}$ und $j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{1,\dots,p\}$ mit $\{j_1,k_1\} \neq \{j_2,k_2\}$, $j_1 \neq k_1$, $j_2 \neq k_2$, so daß

$$|L(f_{j_1}, f_{k_1})(z)| \leq 1, \quad |L(f_{j_2}, f_{k_2})(z)| \leq 1$$

für alle $f \in \mathcal{L}_1$ und alle $z \in \mathbb{D}_{r_2}$ gilt.

Wegen $L(f_j, f_k) = \frac{f'_k}{f_k} - \frac{f'_j}{f_j}$ und (4.33) folgt aus Satz 2.9 (mit $\beta := 1/\alpha$), daß $\left(\frac{f_{j_\mu}}{f_{k_\mu}}\right)_{f\in\mathcal{L}_1}$ $(\mu = 1,2)$ gleichmäßig beschränkt und somit o.E. $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}_{r_2}$ ist. Falls einer der beiden Grenzwerte nicht identisch -1 ist, liegt die Situation von Fall 1 vor. Es seien also beide Grenzwerte identisch -1. Falls $\{j_1,k_1\}\cap\{j_2,k_2\} \neq \emptyset$, o.E. $k_1 = k_2$ ist, so ist $\left(\frac{f_{j_1}}{f_{j_2}}\right)_{f\in\mathcal{L}_1}$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen $+1$, so daß wiederum Fall 1 anwendbar ist. Andernfalls gilt die Behauptung des Satzes mit $S_1 := \{j_1,k_1\}$, $S_2 := \{j_2,k_2\}$ als disjunkten C-Klassen für $\mathcal{L}_1$ und $\mathbb{D}_{r_2}$.

Im folgenden nehmen wir an, daß Fall 2 nicht erfüllt ist. Dann gibt es eine Folge $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{F}$, so daß für alle Indexpaare $\{j,k\} \subseteq \{1,\dots,p\}$ $(j \neq k)$ mit eventueller Ausnahme eines Paares $\{j_0; k_0\}$ und für alle $f \in \mathcal{L}_2$ ein $z_2 \in \mathbb{D}_{r_2}$ mit

$$|L(f_j, f_k)(z_2)| \geq 1 \tag{4.34}$$

existiert.

O.E. sei $k_0 = p$. Damit ist insbesondere Voraussetzung (2) aus Proposition 4.13 erfüllt. Wir betrachten für $q = 3,\dots,p-1$ nun den

Fall q: Es gebe (zu einer gegebenen Folge $\mathcal{L}_{q-1} \subseteq \mathcal{F}$) eine Teilfolge $\mathcal{L}_q \subseteq \mathcal{L}_{q-1}$ und q paarweise verschiedene Indizes $j_1^{(q)},\dots,j_q^{(q)} \in \{1,\dots,p-1\}$, so daß für alle $f \in \mathcal{L}_q$ und alle $\nu = 1,\dots,\frac{q}{2}(q-1)$

$$\left|D_q^{(\nu)}\left(f; j_1^{(q)},\dots,j_q^{(q)}\right)(z)\right| \leq 1 \quad \text{für } \gamma_q-\text{fast alle } z \in \mathbb{D}_{r_q} \tag{4.35}$$

gilt.

Es seien für ein $q \in \{3, \ldots, p-1\}$ die Fälle 3 bis $q-1$ nicht erfüllt. Dann gilt, wie man sich leicht überlegt, für alle s mit $3 \leq s \leq q-1$:

> Es gibt eine Teilfolge $\mathcal{L}_s \subseteq \mathcal{L}_{s-1}$, so daß für alle paarweise verschiedenen Indizes $k_1, \ldots, k_s \in \{1, \ldots, p-1\}$ ein $\nu = \nu(s; k_1, \ldots, k_s) \in \{1, \ldots, \frac{s}{2}(s-1)\}$ existiert, für welches für alle $f \in \mathcal{L}_s$
>
> $$\left| D_s^{(\nu)}(f; k_1, \ldots, k_s)(z) \right| \leq 1 \quad \textbf{nicht } \gamma_s - \text{fast überall in } \mathbb{D}_{r_s} \tag{4.36}$$
>
> gilt.

Fall q hingegen sei erfüllt mit o.E. $\left\{ j_1^{(q)}, \ldots, j_q^{(q)} \right\} = \{1, \ldots, q\}$. [6]

I. Nach Voraussetzung (4.35) gibt es für jedes $f \in \mathcal{L}_q$ ein $m_1 = m_1(f) \in \mathbb{N}$ und offene Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_{m_1}$ mit Radiussumme $\frac{q}{2}(q-1) \cdot \gamma_q$, so daß $\left| D_q^{(\nu)}(z) \right| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}_{r_q} \setminus \bigcup_{\mu=1}^{m_1} U_\mu$ und jede der $\frac{q}{2}(q-1)$ Funktionen $D_q^{(\nu)} = D_q^{(\nu)}(f; 1, \ldots, q)$ gilt. Wegen $\frac{q}{2}(q-1) \cdot \gamma_q = \frac{1}{6} \cdot (r_q - r_{q-1})$ gibt es somit endlich viele Kreisringe $A_1, \ldots, A_{m_2} \subseteq A_{r_{q-1}; r_q}(0)$ mit Mittelpunkt 0 und Gesamtbreite[7] $\frac{2}{3}(r_q - r_{q-1})$, so daß

$$\bigcup_{\mu=1}^{m_1} U_\mu \cap \bigcup_{\mu=1}^{m_2} A_\mu = \emptyset,$$

so daß also

$$|D_q^{(\nu)}(z)| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \bigcup_{\mu=1}^{m_2} A_\mu \text{ und } \nu = 1, \ldots, \frac{q}{2}(q-1)$$

gilt. (Dabei kann man $m_2 = m_2(f) \leq m_1(f) + 1$ wählen.)
Es sei Q einer der Quotienten

$$\frac{W(f_{k_2}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})}{W(f_{k_1}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})}$$

mit $\{k_1, \ldots, k_q\} = \{1, \ldots, q\}$. (Man beachte, daß nach der eingangs getroffenen Voraussetzung über die lineare Unabhängigkeit der f_j die Wronski-Determinanten im Zähler und Nenner nicht identisch verschwinden; insbesondere ist $Q \not\equiv 0$.)

Behauptung:

Für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in A_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m_2(f))$ gilt

$$\frac{1}{40} \leq \left| \frac{Q(\zeta_1)}{Q(\zeta_2)} \right| \leq 40.$$

Beweis:

Für alle $\zeta \in A_\mu$ ist $\left| \frac{Q'(\zeta)}{Q(\zeta)} \right| \leq 1$, denn nach Korollar 4.5 ist

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{W(f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q}) \cdot W(f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})}{W(f_{k_1}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q}) \cdot W(f_{k_2}, f_{k_3}, \ldots, f_{k_q})} = \pm D_q^{(\nu)}(f; 1, \ldots, q)$$

für ein $\nu \in \{1, \ldots, \frac{q}{2}(q-1)\}$.

[6] Man beachte, daß durch die getroffenen Vereinbarungen die Folgen $\mathcal{L}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{L}_q$ wohlerklärt sind.

[7] Hierbei verstehen wir unter der Breite eines Kreisrings die Differenz von Innen- und Außenradius.

Es gibt einen Weg Γ in A_μ der Länge $l(\Gamma) \leq (\pi+1) \cdot r_q - r_{q-1} \leq \pi + \frac{1}{2}$, der ζ_1 und ζ_2 verbindet und auf dem Q keine Nullstellen hat. Für einen geeigneten Logarithmus längs Γ erhält man

$$|\log Q(\zeta_1) - \log Q(\zeta_2)| = \left| \int_\Gamma \frac{Q'}{Q}(\zeta) d\zeta \right| \leq l(\Gamma) \cdot 1 \leq \pi + \frac{1}{2}.$$

Mit $-|\log z| \leq \log |z| \leq |\log z|$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ folgt

$$-\left(\pi + \frac{1}{2}\right) \leq \log \left| \frac{Q(\zeta_1)}{Q(\zeta_2)} \right| \leq \pi + \frac{1}{2},$$

Wegen $e^{\pi+\frac{1}{2}} \leq 40$ ergibt sich die Behauptung.

Damit folgt: Falls es ein $z_0 \in A_\mu$ mit $|Q(z_0)| \leq 1$ gibt, so ist $|Q(z)| \leq 40$ für alle $z \in A_\mu$.

II. Es sei $\rho_q := \frac{1}{3} \cdot (2r_{q-1} + r_q)$.

Behauptung:

Es gibt ein $M < \infty$, so daß für alle $f \in \mathcal{L}_q$ und alle $r > \rho_q$ mit $\partial\mathbb{D}_r \subseteq A_\mu$ für ein $\mu \in \{1, \ldots, m_2(f)\}$

$$\max_{1 \leq j,k \leq q} m\left(r, \frac{f_j}{f_k}\right) \leq M \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,q\}} m(r, L(f; I))\right)$$

gilt.

Beweis:

Es sei ein $f \in \mathcal{L}_q$ und ein $r > \rho_q$ mit $\partial\mathbb{D}_r \subseteq A_\mu$ gegeben.

Es genügt, $m\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right)$ zu betrachten. Es sei

$$Q = \frac{W(f_2, f_3, \ldots, f_q)}{W(f_1, f_3, \ldots, f_q)},$$

so daß

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_{13\ldots q}}{L_{23\ldots q}} \cdot Q$$

ist. (Wiederum verschwinden die beiden Wronski-Determinanten im Zähler und Nenner von Q nicht identisch.)

Fall A: Es gibt ein z_0 mit $|z_0| = r$ und $|Q(z_0)| \leq 1$.

Nach I. ist dann $|Q(z)| \leq 40$ für alle $z \in A_\mu$, insbesondere für $|z| = r$ und somit $m(r, Q) \leq \log 40$. Damit folgt

$$m\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right) \leq m(r, L_{13\ldots q}) + m\left(r, \frac{1}{L_{23\ldots q}}\right) + \log 40.$$

Im Falle $q \geq 4$ folgt aus (4.36) und (4.34) gemäß Proposition[8] 4.13, angewandt auf $t := q - 1$:

$$m\left(r, \frac{1}{L_{23\ldots q}}\right) \leq C \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{2,3,\ldots,q\}} m(r, L(f; I))\right).$$

[8] An dieser Stelle wird die Bedeutung der Voraussetzung $r \geq \rho_q > r_{q-1}$ einsichtig: r_{q-1} und ρ_q entsprechen den Größen s und r_0 aus den in den Beweis von Proposition 4.13 eingehenden Sätzen 4.10 und 4.11.

Ist $q = 3$, so ist wegen (4.34) und Satz 4.10

$$m\left(r, \frac{1}{L_{23}}\right) \leq K_1 \cdot (1 + m(r, L_{23}))\,.$$

Es folgt die behauptete Abschätzung für $m\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right)$ (mit einer von f und r unabhängigen Konstanten).

Fall B: Für alle z mit $|z| = r$ ist $|Q(z)| > 1$.

Für

$$\widetilde{Q} := \frac{1}{Q} = \frac{W(f_1, f_3, \ldots, f_q)}{W(f_2, f_3, \ldots, f_q)} \quad \text{und} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_{23\ldots q}}{L_{13\ldots q}} \cdot \widetilde{Q}$$

kann man dann wegen $\left|\widetilde{Q}(z)\right| < 1$ für alle z mit $|z| = r$ analog wie im Fall A argumentieren und erhält eine Abschätzung für $m\left(r, \frac{f_1}{f_2}\right)$. Wegen $\left|\frac{f_1}{f_2}(z_1)\right| > \alpha$ für ein $z_1 \in \mathbb{D}_{r_1}$ folgt mit Satz 4.10

$$m\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right) \leq K_1 \cdot \left(1 + m\left(r, \frac{f_1}{f_2}\right)\right)$$

und somit insgesamt die gewünschte Abschätzung für $m\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right)$.

III. Da die Kreisringe $A_1, \ldots, A_{m_2(f)} \subseteq A_{r_{q-1};r_q}(0)$ die Gesamtbreite $\frac{2}{3}(r_q - r_{q-1})$ haben, folgt mit II.

$$\max_{1 \leq j,k \leq q} m\left(r, \frac{f_j}{f_k}\right) \leq M \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,q\}} m(r, L(f; I))\right) \tag{4.37}$$

für alle $f \in \mathcal{L}_q$ und alle r in disjunkten Intervallen $I_1, \ldots, I_{m_2(f)} \subseteq (\rho_q; r_q)$ der Gesamtlänge[9] $\geq \frac{1}{3}(r_q - r_{q-1})$, kurz: für $r \in I(f)$ mit $|I(f)| \geq \frac{1}{3}(r_q - r_{q-1}) \geq \frac{1}{3}(r_q - \rho_q)$.

Es sei $m_f(r) := \sum_{1 \leq j,k \leq q} m\left(r, \frac{f_j}{f_k}\right)$. Wenn man beachtet, daß man $L(f; I)$ wegen $L(f_{k_1}, \ldots, f_{k_s}) = L\left(\frac{f_{k_1}}{f_j}, \ldots, \frac{f_{k_s}}{f_j}\right)$ (Lemma 4.3) stets durch die Quotienten $\frac{f_\mu^{(\nu)}}{f_\mu}$ darstellen kann, erhält man aus (4.37) und Satz 1.17 für alle $f \in \mathcal{L}_q$, $r \in I(f)$, $R \in (r; 1)$

$$\begin{aligned}
m_f(r) &\leq q^2 \cdot M \cdot \left(1 + \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,q\}} m(r, L(f; I))\right) \\
&\leq A + B \cdot \log \frac{1}{R - r} + \widetilde{C} \cdot \sum_{1 \leq j,k \leq q} \log^+ \left(m\left(R, \frac{f_j}{f_k}\right) + m\left(R, \frac{f_k}{f_j}\right)\right) \\
&\leq A + B \cdot \log \frac{1}{R - r} + C \cdot \log^+ m_f(R).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.20, angewandt auf das Intervall $[\rho_q; r_q)$, ergibt sich eine Abschätzung

$$m_f(\rho_q) \leq 2B \cdot \log \frac{1}{r_q - \rho_q} + D$$

[9] denn $\rho_q - r_{q-1} = \frac{1}{3} \cdot (r_q - r_{q-1})$

für alle $f \in \mathcal{L}_q$, also wie am Ende des Beweises von Proposition 4.14 die gleichmäßige Beschränktheit von $m_f(r)$ für $0 \leq r \leq \rho_q$, $f \in \mathcal{L}_q$, und somit die Normalität von $\left(\frac{f_j}{f_k}\right)_{f\in\mathcal{L}_q}$ in $\mathbb{D}_{\rho_q}$ $(1 \leq j, k \leq q)$. Hierbei können nicht alle auftretenden Grenzwerte identisch -1 sein, so daß man sich abermals in der Situation von Fall 1 befindet.

Fall p: Die Fälle 3 bis $p-1$ seien nicht erfüllt.

Aus Proposition 4.13 erhält man dann

$$m\left(r, \frac{1}{L(f_1,\ldots,f_{p-1})}\right) \leq C \cdot \left(1 + \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p-1\}} m(r, L(f;I))\right)$$

für alle $f \in \mathcal{L}_{p-1}$ und alle $r \in (r_p; 1)$.

Da für die Einheiten $g_j := -\frac{f_j}{f_p}$ $(1 \leq j \leq p-1)$

$$g_1 + \ldots + g_{p-1} \equiv 1$$

und nach Lemma 4.3

$$L(f_{j_1},\ldots,f_{j_s}) = L(g_{j_1},\ldots,g_{j_s})$$

für $\{j_1,\ldots,j_s\} \subseteq \{1,\ldots,p-1\}$ gilt, ist

$$m\left(r, \frac{1}{L(g_1,\ldots,g_{p-1})}\right) \leq C \cdot \left(1 + \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p-1\}} m(r, L(g;I))\right)$$

für alle $f \in \mathcal{L}_{p-1}$ und alle $r \in (r_p; 1)$.

Daraus und aus (4.33) folgt mit Proposition 4.14 für $j = 1,\ldots,p-1$ die Normalität von $(g_j)_{f\in\mathcal{L}_{p-1}}$ in $\mathbb{D}$, so daß wiederum Fall 1 zur Anwendung kommt.

4.5 Der Satz von Borel

Ausgangspunkt für die Cartansche Vermutung war das Bestreben, gemäß dem Blochschen Prinzip ein Analogon zu dem folgenden Satz von Borel zu finden, welcher sich wiederum leicht aus dem Satz von Cartan ableiten läßt:

Satz 4.15 Satz von Borel

Es seien $f_1,\ldots,f_p$ $(p \geq 2)$ Einheiten in $\mathbb{C}$, die die Borelsche Gleichung

$$f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$$

erfüllen. Auf der Indexmenge $\{1,\ldots,p\}$ werde durch

$$j \sim k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, c \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad \frac{f_j}{f_k} \equiv c$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Dann gilt für jede Äquivalenzklasse $S \subseteq \{1,\ldots,p\}$:

$$\sum_{j\in S} f_j \equiv 0.$$

Insbesondere besitzt jede Äquivalenzklasse mindestens zwei Elemente.

Satz 4.15 besagt also, daß die Borelsche Gleichung mit Einheiten in $\mathbb{C}$ nur trivial erfüllbar ist.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\sum_{j\in J} f_j \not\equiv 0$ für alle $J \subsetneq \{1,\dots,p\}$, $J \neq \emptyset$ und o.E. $p \geq 3$ gilt, und zeigen hierfür, daß alle Quotienten $\frac{f_j}{f_k}$, $1 \leq j,k \leq p$ konstant sind. Es gibt unter dieser Voraussetzung ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{j\in J} f_j(z_0) \neq 0 \quad \text{für alle } J \subsetneq \{1,\dots,p\},\ \ J \neq \emptyset. \tag{4.38}$$

Man setzt für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1,\dots,p$

$$f_{j,n}(z) := f_j(z_0 + n \cdot z),$$

so daß alle $f_{j,n}$ Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_{1,n} + \ldots + f_{p,n} \equiv 0$ sind. Nach dem Satz von Cartan gibt es (nach evtl. Teilfolgenauswahl) eine C-Klasse S für $((f_{1,n},\dots,f_{p,n}))_n$ und $\mathbb{D}$. Aufgrund der Normierung $f_{j,n}(0) = f_j(z_0)$ ersieht man aus (4.38) und aus Bedingung (3) von Definition 4.1, daß $S = \{1,\dots,p\}$ gelten muß. Da - ebenfalls wegen der Normierung - Konvergenz gegen 0 ausgeschlossen ist (für den stabilen Anteil I von S also $I = S = \{1,\dots,p\}$ gilt), sind alle Quotientenfolgen $\left(\frac{f_{j,n}}{f_{k,n}}\right)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}$ gegen eine Einheit und insbesondere beschränkt in $\mathbb{D}_{1/2}$. Also ist $\frac{f_j}{f_k}$ für alle $j,k = 1,\dots,p$ beschränkt in $\mathbb{C}$, nach Satz von Liouville also konstant. In diesem Fall gibt es also nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $\{1,\dots,p\}$, und die Behauptung ist erfüllt.
Gibt es ein $J \subsetneq \{1,\dots,p\}$, $J \neq \emptyset$ mit $\sum_{j\in J} f_j \equiv 0$, so kann man für J und für $\{1,\dots,p\} \setminus J$ induktiv schließen.

Selbstverständlich wäre es wünschenswert, in Umkehrung unserer Argumentation den Satz von Cartan mittels der Zalcmanschen Methode auf den Satz von Borel zurückzuführen, welcher sich, wie wir soeben gesehen haben, ungleich leichter beweisen läßt. Leider scheint jedoch auch eine iterative Anwendung der Reskalierung aus dem Zalcman-Lemma nicht zum Ziel zu führen.

Mit wenig Aufwand ist auch ein direkter Beweis des Satzes von Borel möglich. Dazu benötigen wir folgendes auf Nevanlinna [39] zurückgehende Lemma, welches uns im weiteren noch mehrmals gute Dienste leisten wird:

Lemma 4.16

Es seien $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ linear unabhängige meromorphe Funktionen mit

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_p \equiv 1.$$

Dann gilt für $j = 1,\dots,p$:

$$T(r,\varphi_j) \leq \sum_{k=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\varphi_k}\right) - \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ k\neq j}} N(r,\varphi_k) + N(r,W) - N\left(r,\frac{1}{W}\right) + S(r),$$

wobei $W = W(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ die Wronski-Determinante von $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ ist und

$$S(r) = O(\log^+ r) + O\left(\log^+ \max_{1\leq k\leq p} T(r,\varphi_k)\right) \quad \text{für } r \to \infty,\ r \notin E$$

mit einer Menge $E \subseteq (0;\infty)$ von endlichem Lebesgue-Maß bzw. $E = \emptyset$, falls alle φ_k endliche Ordnung haben, gilt.

Beweis: (cf. [39], S. 113 - 117)

Es sei $L = L(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ und L_j $(1 \leq j \leq p)$ die Determinante, die aus L entsteht, wenn man dort die j-te Spalte durch $(1, 0, \ldots, 0)^T$ ersetzt. Wegen der linearen Unabhängigkeit der φ_j ist $W \not\equiv 0$, also auch $L \not\equiv 0$. Nach der Cramerschen Regel gilt somit wie im Beweis von Proposition 4.14

$$\varphi_j = \frac{L_j}{L}.$$

Mit dem Ersten Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned} m(r, \varphi_j) &\leq m(r, L_j) + m\left(r, \frac{1}{L}\right) \\ &= m(r, L_j) + m(r, L) + N(r, L) - N\left(r, \frac{1}{L}\right) + O(1). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Wie man leicht einsieht, gilt hierbei wegen $L = \frac{W}{\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_p}$:

$$N(r, L) - N\left(r, \frac{1}{L}\right) = N(r, W) - N\left(r, \frac{1}{W}\right) + \sum_{k=1}^{p} \left(N\left(r, \frac{1}{\varphi_k}\right) - N(r, \varphi_k)\right). \tag{4.40}$$

Nach Satz 1.21 ist für $k = 1, \ldots, p$ und $\mu \geq 1$

$$m\left(r, \frac{\varphi_k^{(\mu)}}{\varphi_k}\right) = O(\log^+ r) + O(\log^+ T(r, \varphi_k))$$

für $r \to \infty$, $r \notin E_{k,\mu}$, wobei $|E_{k,\mu}| < \infty$ und $E_{k,\mu} = \emptyset$, falls $\rho(\varphi_k) < \infty$. Damit erhält man

$$m(r, L) + m(r, L_j) = O(\log^+ r) + O\left(\log^+ \max_{1 \leq k \leq p} T(r, \varphi_k)\right) \tag{4.41}$$

für $r \to \infty$, $r \notin E$, wobei $|E| < \infty$ (bzw. $E = \emptyset$ im Falle endlicher Ordnungen).
Aus (4.39), (4.40) und (4.41) ergibt sich die Behauptung.

Zum Beweis des Satzes von Borel zeigen wir:

Satz 4.17

Es seien $f_1, \ldots, f_{n+1}$ $(n \geq 2)$ Einheiten in $\mathbb{C}$ mit

$$f_1 + \ldots + f_{n+1} \equiv 0.$$

Dann sind jeweils n der Funktionen f_j linear abhängig über $\mathbb{C}$.

Beweis: (cf. [38], S. 381 - 386)

Es genügt zu zeigen, daß $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig sind.
Für $\varphi_j := -\frac{f_j}{f_{n+1}}$, $j = 1, \ldots, n$ gilt $\varphi_1 + \ldots + \varphi_n \equiv 1$, und alle φ_j sind Einheiten in $\mathbb{C}$.
Daher ist $N\left(r, \frac{1}{\varphi_j}\right) \equiv 0$ und $N(r, W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) \equiv 0$.
Wären $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linear unabhängig, so wäre Lemma 4.16 anwendbar, und es würde für $j = 1, \ldots, n$ folgen

$$\begin{aligned} T(r, \varphi_j) &\leq \sum_{k=1}^{n} N\left(r, \frac{1}{\varphi_k}\right) + N(r, W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) + O(\log^+ r) \\ &\quad + O\left(\log^+ \max_{1 \leq k \leq n} T(r, \varphi_k)\right) \\ &= O(\log^+ r) + O\left(\log^+ \max_{1 \leq k \leq n} T(r, \varphi_k)\right) \end{aligned}$$

für $r \to \infty$, $r \geq 1$, $r \notin E$ mit $|E| < \infty$.
Also wäre $T(r, \varphi_j) = O(\log r)$ $(r \to \infty,\ r \notin E)$ für $j = 1, \ldots, n$ und somit

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, \varphi_j)}{\log r} < \infty.$$

Nach Satz 1.16 wären dann alle φ_j rational und wegen der Null- und Polstellenfreiheit in $\mathbb{C}$ somit konstant, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.
Also sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und somit auch $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig.

Hieraus ergibt sich nunmehr leicht der Satz von Borel: Aus einer Gleichung $f_1 + \ldots + f_p \equiv 0$ mit Einheiten f_j in $\mathbb{C}$ erhält man durch wiederholte Anwendung von Satz 4.17 zwei linear abhängige Funktionen f_{j_1}, f_{j_2}; faßt man diese zusammen, so reduziert sich die Borelsche Gleichung um einen (oder - im Falle $f_{j_1} + f_{j_2} \equiv 0$ - um zwei) Summanden, so daß man induktiv schließen kann. Der Induktionsanfang, d.h. der Fall $p = 2$ im Satz von Borel, ist klar.

Kapitel 5

Dualität und Semidualität

In diesem Kapitel erklären wir nach einem kurzen Überblick über die Grundbegriffe der Dualitätstheorie das für unsere weiteren Betrachtungen zentrale Konzept der Semidualität und stellen die im folgenden immer wieder benötigten grundlegenden Sätze bereit.

Sind f und g zwei in $|z| < R_1$ bzw. in $|z| < R_2$ holomorphe Funktionen mit den Taylorentwicklungen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, so wird die **Faltung** (oder auch das **Hadamard-Produkt**) $f * g$ von f und g durch

$$(f * g)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$$

definiert. Offensichtlich stellt $f * g$ eine in $|z| < R_1 R_2$ holomorphe Funktion dar.

Definition 5.1

Für eine Teilmenge $V \subseteq A_0$ setzen wir

$$V^* := \{g \in A_0 \mid \forall_{f \in V} \, \forall_{z \in \mathbb{D}} \, (f * g)(z) \neq 0\}$$

und nennen V^* die zu V **duale Menge**.
$V^{**} =: du(V)$ heißt **duale Hülle** von V.
Eine Teilmenge $V \subseteq A_0$ heißt **dual**, wenn es ein $W \subseteq A_0$ mit $V = W^*$ gibt.

Bemerkung:

Aus der Definition erkennt man sofort, daß $V \subseteq V^{**}$ für $V \subseteq A_0$ und $V_2^* \subseteq V_1^*$ für $V_1 \subseteq V_2 \subseteq A_0$ gilt. Hieraus ergibt sich $W^{***} = W^*$ für alle $W \subseteq A_0$. Es folgt, daß eine Menge $V \subseteq A_0$ genau dann dual ist, wenn $V = V^{**}$ gilt. Diese Charakterisierung benutzt man üblicherweise, um zu klären, ob eine Menge dual ist.

Das Konzept der Dualität, das 1975 von Ruscheweyh in [49] eingeführt wurde, hat sich in der geometrischen Funktionentheorie als sehr wertvoll erwiesen, da zahlreiche wichtige Klassen holomorpher Funktionen entweder selbst dual sind oder durch eine einfache Transformation aus dualen Mengen entstehen.

Die Räume A bzw. A_0 seien im folgenden stets mit der Topologie der kompakten Konvergenz in $\mathbb{D}$ ausgestattet. Es bezeichne Λ den Vektorraum der stetigen linearen

Funktionale auf A. Nach einem Satz von Toeplitz (cf. [50], S. 15) ist dieser identisch mit der Menge der Funktionale $f \mapsto (g * f)(z_0)$ mit $g \in A$, $z_0 \in \mathbb{D}$.

Definition 5.2

Für $f \in A_0$ und $x \in \overline{\mathbb{D}}$ sei $f_x \in A_0$ definiert durch $f_x(z) := f(xz)$ für $z \in \mathbb{D}$. Eine Teilmenge $V \subseteq A_0$ heißt **komplett**, wenn $f_x \in V$ für alle $f \in V$ und alle $x \in \overline{\mathbb{D}}$ gilt.

Ist $V \subseteq A_0$, so bezeichnen wir mit

$$V^C := \{f_x \ : \ f \in V, \, |x| \leq 1\}$$

die **Komplettierung** von V.

Jede duale Menge ist offensichtlich komplett und (nach Satz von Hurwitz) abgeschlossen. Umgekehrt gilt für komplette und kompakte Mengen das sog. Dualitätsprinzip (cf. [50], Theorem 1.1), das sich als grundlegend für die gesamte Dualitätstheorie erwiesen hat:

Satz 5.3 Dualitätsprinzip

Es sei $V \subseteq A_0$ kompakt und komplett und $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt

$$\lambda(V) = \lambda(V^{**}) \quad \text{und} \quad \overline{co}(V) = \overline{co}(V^{**}).$$

Insbesondere ist $V^{**} \subseteq \overline{co}(V)$.

Das Dualitätsprinzip ermöglicht es, in vielen Problemen der geometrischen Funktionentheorie anstelle relativ großer Funktionenklassen wesentlich einfacher zu überblickende Teilmengen zu betrachten. Zahlreiche Anwendungen finden sich in [50].

Mithilfe des Dualitätsprinzips beweist man (cf. [50], Theorem 3.3):

Satz 5.4

Es sei $Q : A \to A$ eine stetige lineare Abbildung mit $(Qf)(0) = f(0)$ für alle $f \in A$. Dann gilt $Q(V^{**}) \subseteq (Q(V))^{**}$ für jede kompakte und komplette Teilmenge $V \subseteq A_0$.

Satz 5.4 gilt insbesondere für die Faltungsoperatoren $Q : A \to A$, $Qf = f * g$ mit einem $g \in A_0$.

I.a. erweist es sich als außerordentlich schwierig, die duale Hülle einer Menge zu bestimmen bzw. zu entscheiden, ob eine Menge dual ist. Daher haben sich die bisherigen Untersuchungen auf die dualen Hüllen von sehr kleinen Mengen konzentriert, die lediglich aus einem oder zwei Elementen bestehen. Die Tatsache, daß die duale Hülle einer gegebenen Menge stets deren Komplettierung enthält, legt in natürlicher Weise den Begriff der Semidualität nahe, der 1985 von Kasten und Ruscheweyh in [28] eingeführt wurde.

Definition 5.5

Eine Menge $V \subseteq A_0$ heißt **semidual**, wenn ihre Komplettierung V^C dual ist.

Eine Funktion $f \in A_0$ nennen wir **semidual**, wenn $\{f\}$ semidual ist, d.h. wenn die Komplettierung $V_f := \{f_x \ : \ |x| \leq 1\}$ von $\{f\}$ dual ist.

Im nächsten Kapitel steht die Frage nach der Semidualität einzelner Funktionen im Vordergrund. Selbst in diesen vergleichsweise einfachen Fällen sind wir von einem umfassenden Verständnis noch weit entfernt. Ihre besondere Faszination beziehen diese Probleme daraus, daß sie, wie wir sogleich sehen werden, unmittelbar auf Fragen der Wertverteilung von Lückenreihen führen. Hierfür benötigen wir eine Reihe von Notationen:

Definition 5.6

Es sei T eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ mit $0 \in T$ und $\#T \geq 3$. Dann bezeichnen wir T als **Lückenstruktur** und setzen

$$\begin{aligned}
A_T &:= \Big\{ f \in A_0 \ : \ f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k, \ a_k \neq 0 \text{ für alle } k \in T \Big\},\\
\widetilde{A}_T &:= \Big\{ f \in A_0 \ : \ f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k \Big\},\\
A_T^0 &:= \{ f \in A_T \ : \ f(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \},\\
\widetilde{A}_T^0 &:= \Big\{ f \in \widetilde{A}_T \ : \ f(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \Big\},\\
e_T(z) &:= \sum_{k \in T} z^k,\\
V_T &:= V_{e_T} = \{ e_{T,x} \ : |x| \leq 1 \} = \{ z \mapsto e_T(xz) : |x| \leq 1 \}.
\end{aligned}$$

Gelegentlich setzen wir $T_f := \Big\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k^{(f)} \neq 0 \Big\}$ für eine Funktion $f \in A_0$ und nennen T_f die **Lückenstruktur der Funktion** f.

Durch die Forderung, daß Lückenstrukturen mindestens drei Elemente besitzen sollen, klammern wir Funktionen der Gestalt $z \mapsto 1 + az^k$ bewußt aus: Diese sind nach Dualitätsprinzip trivialerweise semidual und spielen daher, wie wir noch sehen werden, im Hinblick auf den vermuteten allgemeinen Zusammenhang zwischen Normalität und Semidualität eine Sonderrolle (cf. Bemerkung 6.2 (1)).

Besonders wichtige und daher einer eigenen Notation würdige Lückenstrukturen sind die durch Streckungen aus $\mathbb{N}_0$ hervorgehenden Mengen

$$I_n := n \cdot \mathbb{N}_0 = \{ kn \mid k \in \mathbb{N}_0 \} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 5.7

(1) Offensichtlich, aber für das Folgende wesentlich ist die Feststellung, daß für jede Lückenstruktur T

$$A_T^0 = A_T \cap V_T^* \quad \text{sowie} \quad \widetilde{A}_T^0 = \widetilde{A}_T \cap V_T^*$$

gilt. Hieraus wird der Zusammenhang zwischen der Frage nach der Semidualität von e_T und der Theorie der Wertverteilung von Lückenreihen ersichtlich.

(2) Für $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_T$ und $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in V_f^{**}$ gilt nach dem Dualitätsprinzip

$$|c_k| \leq |a_k| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist $V_f^{**} \subseteq \widetilde{A}_T$ für $f \in A_T$. Allgemeiner gilt für $V \subseteq \widetilde{A}_T$ auch $V^{**} \subseteq \widetilde{A}_T$.

Entscheidend für alles Weitere ist die auf den ersten Blick überraschende Beobachtung von Kasten und Ruscheweyh ([28], Theorem 1), daß die Semidualität einer Funktion $f \in A_0$ eine Eigenschaft ist, die allein von der Lückenstruktur T_f ihrer Potenzreihenentwicklung und nicht von den speziellen Repräsentanten aus A_{T_f} abhängt. Wir beweisen ein etwas allgemeineres Resultat:

Satz 5.8

Es sei T eine Lückenstruktur, $F \in A_T$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f_1, \ldots, f_m \in \widetilde{A}_T$. Für $V_0 := \{e_T, f_1, \ldots, f_m\}$ und $V := F * V_0 = \{F, F * f_1, \ldots, F * f_m\}$ gilt dann

$$F * V_0^{**} = V^{**}.$$

Insbesondere ist V genau dann semidual, wenn V_0 semidual ist.

Beweis:

"$\subseteq$": Mit Satz 5.4, angewandt auf den Operator $Q : A \longrightarrow A$, $Q(g) := F * g$ und die Komplettierung von V_0, erhält man

$$F * V_0^{**} = Q(V_0^{**}) \subseteq (Q(V_0^C))^{**} = (F * V_0^C)^{**} = (V^C)^{**} = V^{**}.$$

"$\supseteq$": Es ist $F(z) = \sum_{k\in T} a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in T$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T^{(n)} := T \cap \{1, \ldots, n\}, \qquad V_n := e_{T^{(n)}} * V_0$$

und

$$Q_n(g)(z) := g(z) * \sum_{k\in T^{(n)}} \frac{1}{a_k} \cdot z^k \qquad \text{für } g \in A_0.$$

Dann ist $Q_n(F) = e_{T^{(n)}}$, $Q_n(V) = V_n$, und nach Satz 5.4 ist

$$Q_n(V^{**}) \subseteq (Q_n(V^C))^{**} = V_n^{**}. \tag{5.1}$$

Es sei $h \in V^{**}$. Ist $f_j(z) = \sum_{k\in T} \alpha_k^{(j)} z^k$ für $j = 1, \ldots, m$, so erhält man wegen $V^{**} \subseteq \overline{co}(V)$

$$h(z) = \sum_{k\in T} c_k z^k \quad \text{mit} \quad |c_k| \leq |a_k| \cdot \max\left\{1, |\alpha_k^{(1)}|, \ldots, |\alpha_k^{(m)}|\right\} \quad \text{für alle } k \in T.$$

Daher ist

$$p(z) := \sum_{k\in T} \frac{c_k}{a_k} z^k$$

holomorph in $\mathbb{D}$, also $p \in \widetilde{A}_T$.
Es sei $g \in V_0^*$, d.h. $g * e_T \neq 0$, $g * f_j \neq 0$ in $\mathbb{D}$ für $j = 1, \ldots, m$. Ist $\widetilde{g}_n := g * e_{T^{(n)}}$, so gilt für $n \to \infty$:

$$\widetilde{g}_n \longrightarrow g * e_T, \quad \widetilde{g}_n * f_j \longrightarrow g * e_T * f_j = g * f_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$. Daher gibt es eine Folge $(\sigma_n)_n \subseteq (0;1)$, so daß $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$ und $\widetilde{g}_n, \widetilde{g}_n * f_1, \ldots, \widetilde{g}_n * f_m$ in $|z| \leq \sigma_n$ nullstellenfrei sind. Setzt man

$$g_n(z) := \widetilde{g}_n(\sigma_n z),$$

so ist $g_n \in \widetilde{A}_{T^{(n)}}$, $g_n, g_n * f_1, \ldots, g_n * f_m$ sind nullstellenfrei in $\mathbb{D}$, d.h. $g_n \in V_n^*$, und es gilt für $n \to \infty$

$$g_n \longrightarrow g * e_T$$

kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$.

Dies folgt sehr leicht aus der $\mathcal{K}$-Konvergenz von $(\widetilde{g}_n)_n$ gegen $g * e_T$ und der Betrachtung einer Abschätzung der Form

$$|\widetilde{g}_n(z) - g_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{K} \left| a_k^{(\widetilde{g}_n)} \right| \cdot (1 - \sigma_n^k) \cdot r^k + \sum_{k=K}^{\infty} \left| a_k^{(\widetilde{g}_n)} \right| \cdot r^k$$

für $|z| \leq r < 1$.

Wegen (5.1) ist $Q_n h \in V_n^{**}$, und daher ist

$$p * g_n = p * e_{T(n)} * g_n = (Q_n h) * g_n \neq 0 \quad \text{ in } \mathbb{D}.$$

Da $(p * g_n)_n$ kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $p * g * e_T = p * g$ konvergiert, ist nach Satz von Hurwitz auch $p * g$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$.

Dies gilt für alle $g \in V_0^*$. Also ist $p \in V_0^{**}$.

Wegen $h = F * p$ ist also $h \in F * V_0^{**}$, und es folgt $V^{**} \subseteq F * V_0^{**}$.

Die letzte Behauptung folgt nun unmittelbar: Ist V_0 semidual, so wegen $V^{**} = F*V_0^{**} = F*V_0^C = V^C$ auch V. Ist umgekehrt V semidual, so folgt $F*V_0^{**} = V^{**} = V^C = F*V_0^C$. Da $F \in A_T$ (d.h. $a_k \neq 0$ für alle $k \in T$) und nach Dualitätsprinzip $V_0^{**} \subseteq \widetilde{A}_T$ gilt, folgt auch $V_0^{**} = V_0^C$, also die Semidualität von V_0.

Aus Satz 5.8 ergibt sich sofort:

Korollar 5.9

Es sei T eine Lückenstruktur und $f \in A_T$. Dann gilt $V_f^{**} = f * V_T^{**}$. Insbesondere ist f genau dann semidual, wenn e_T semidual ist.

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 5.10

Eine Lückenstruktur T bezeichnen wir als **semidual**, wenn die Funktion e_T semidual ist.

Bisher ist nur ein einziges Kriterium für den Nachweis der Nicht-Semidualität der von uns betrachteten "kleinen" Mengen bekannt: die Gültigkeit der sog. Umgebungseigenschaft für die duale Hülle (cf. Kasten / Ruscheweyh [28]):

Definition 5.11

Es sei V eine Teilmenge von A_0 und T eine Lückenstruktur. V hat die **Umgebungseigenschaft bezüglich** T, wenn es positive Zahlen ρ_k $(k \in T\backslash\{0\})$ gibt, so daß gilt

$$\left\{ z \mapsto 1 + \sum_{k \in T\backslash\{0\}} a_k z^k \ : \ |a_k| \leq \rho_k \text{ für alle } k \in T\backslash\{0\} \right\} \subseteq V. \tag{UE}$$

V hat die **schwache Umgebungseigenschaft in** $k_0 \in \mathbb{N}$, wenn es ein $\rho > 0$ gibt, so daß gilt

$$\left\{ z \mapsto 1 + a z^{k_0} \ : \ |a| \leq \rho \right\} \subseteq V. \tag{SUE}$$

Lemma 5.12

(1) Wenn für eine abzählbare Teilmenge $V \subseteq A_0$ die duale Hülle V^{**} die Umgebungseigenschaft bezüglich einer geeigneten Lückenstruktur T besitzt, so ist V nicht semidual.

(2) Wenn für eine beliebige Teilmenge $V \subseteq A_0$ die duale Hülle V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in einem $k_0 \in \mathbb{N}$ besitzt und V keine Funktion der Gestalt $z \mapsto 1 + az^{k_0}$ mit $a \neq 0$ enthält, so ist V nicht semidual.

Insbesondere gilt: Ist T eine Lückenstruktur und erfüllt V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in einem $k_0 \in T \setminus \{0\}$, so ist T nicht semidual.

Beweis:

(1) Nach Definition einer Lückenstruktur gibt es $k_1, k_2 \in T \setminus \{0\}$ mit $k_1 < k_2$. Mit geeigneten $\rho_1, \rho_2 > 0$ gilt: V^{**} enthält alle Funktionen der Form $z \mapsto 1+\rho_1 z^{k_1}+az^{k_2}$ mit $|a| \leq \rho_2$. Jedoch enthält V^C nur abzählbar viele Funktionen dieser Gestalt. Dies zeigt $V^C \neq V^{**}$ und somit die Behauptung.

(2) ist klar.

Die (schwache) Umgebungseigenschaft von V^{**} erkennt man, wie wir nun zeigen wollen, an der Beschränktheit der Koeffizienten in V^*. Bereits in Kapitel 2 wurde die Notation $M_k(V) := \sup\left\{|a_k^{(g)}| : g \in V\right\}$ (für eine Teilmenge $V \subseteq A_0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$) eingeführt. Entsprechend setzen wir für Lückenstrukturen T:

$$M_k(T) := \sup\left\{|a_k^{(g)}| : g \in \widetilde{A}_T^0\right\} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ergibt sich:

Satz 5.13

(1) Es sei $V \subseteq A_0$, T eine Lückenstruktur und $k_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
  (a) V^{**} hat genau dann die Umgebungseigenschaft bezüglich T, wenn $M_k(V^*) < \infty$ für alle $k \in T$ gilt.
  (b) V^{**} hat genau dann die schwache Umgebungseigenschaft in k_0, wenn $M_{k_0}(V^*) < \infty$ ist.

(2) Es sei T eine Lückenstruktur und $k_0 \in T \setminus \{0\}$. Dann gilt: V_T^{**} hat genau dann die schwache Umgebungseigenschaft in k_0, wenn $M_{k_0}(T) < \infty$ ist.

Beweis: (cf. Kasten / Ruscheweyh [28], Theorem 2)

(1) (a) Es sei $M_k(V^*) < \infty$ für alle $k \in T$. Man setze $\rho_k := \frac{2^{-k}}{1+M_k(V^*)} > 0$ für $k \in T\setminus\{0\}$. Es sei

$$h(z) = 1 + \sum_{k \in T\setminus\{0\}} c_k z^k \in \widetilde{A}_T \quad \text{mit } |c_k| \leq \rho_k \quad \text{für alle } k \in T\setminus\{0\}$$

beliebig und

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \in V^*.$$

Wegen $|b_k| \le M_k(V^*)$ für alle $k \in T \backslash \{0\}$ folgt für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |(g*h)(z)| &\ge 1 - \sum_{k \in T\backslash\{0\}} |b_k c_k| \ge 1 - \sum_{k \in T\backslash\{0\}} \rho_k M_k(V^*) \\ &> 1 - \sum_{k \in T\backslash\{0\}} \frac{1}{2^k} \ge 0, \end{aligned}$$

also $(g*h)(z) \neq 0$ in $\mathbb{D}$. Dies zeigt $h \in V^{**}$. Also weist V^{**} die Umgebungseigenschaft bezüglich T auf.
Die Umkehrung folgt, da die Gültigkeit der Umgebungseigenschaft bezüglich T die der schwachen Umgebungseigenschaft in allen $k_0 \in T\backslash\{0\}$ impliziert, aus (b).

(b) Ist $M_{k_0}(V^*) < \infty$, so folgt für $h(z) = 1 + cz^{k_0}$ mit $|c| \le \rho := \frac{1}{1+M_{k_0}(V^*)}$ offensichtlich $(h*g)(z) \neq 0$ in $\mathbb{D}$ für alle $g \in V^*$, also $h \in V^{**}$. Also erfüllt V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in k_0.
Umgekehrt enthalte V^{**} alle Funktionen der Form $z \mapsto 1+cz^{k_0}$ mit $|c| \le \rho > 0$, und es sei

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in V^*.$$

Wegen

$$0 \neq (1+\rho z^{k_0}) * g(z) = 1 + \rho b_{k_0} z^{k_0} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

folgt $|b_{k_0}| \le 1/\rho$. Also ist auch $M_{k_0}(V^*) \le 1/\rho < \infty$.

(2) folgt unter Beachtung von $\widetilde{A}_T^0 = \widetilde{A}_T \cap V_T^* = e_T * V_T^*$ sofort aus (1)(b).

Es stellt sich die Frage, inwieweit die Nichtsemidualität bereits durch die schwache Umgebungseigenschaft charakterisiert wird. Zumindest für einelementige $V \subseteq A_0$ scheint es nicht undenkbar zu sein, daß beides äquivalent ist, daß also aus $M_k(T) = \infty$ für alle $k \in T \setminus \{0\}$ bereits die Semidualität von T folgt. Wir werden darauf in Abschnitt 6.5 erneut zu sprechen kommen. Für kompakte $V \subseteq A_0$, für die die duale Hülle nirgends der schwachen Umgebungseigenschaft genügt, liefert der folgende Satz immerhin eine gewisse Einschränkung an die Funktionen, die in $V^{**} \setminus V^C$ liegen und damit die Semidualität zunichte machen können:

Satz 5.14

Es sei $V \subseteq A_0$ kompakt. Die duale Hülle V^{**} besitze in keinem $k \in \mathbb{N}$ die schwache Umgebungseigenschaft, d.h. es gelte $M_k(V^*) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$V^{**} \setminus V^C \subseteq \overline{co}\left(V^C\right) \setminus co\left(V^C\right).$$

Beweis:

Es sei ein $h \in V^{**} \setminus V^C$ gegeben.
Nach Dualitätsprinzip gilt dann $h \in \overline{co}(V^C)$.
Wir nehmen an, es sei $h \in co(V^C)$.
Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_m \in [0;1]$, $f_1, \ldots, f_m \in V^C$ mit $h = \sum_{j=1}^m t_j f_j$ und $\sum_{j=1}^m t_j = 1$.
Wegen $h \notin V^C$ kann man $m \ge 2$ und $t_k \in (0,1)$ für alle $k = 1, \ldots, m$ annehmen.
Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß nicht alle Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ den gleichen k_0-ten Taylorkoeffizienten haben. (Andernfalls wäre $f_1 = \ldots = f_m = h$, also $h \in V^C$.) Es sei k_0 minimal mit dieser Eigenschaft gewählt. O.E. kann man $a_{k_0}^{(f_1)} \neq a_{k_0}^{(h)}$ annehmen.

Wegen $M_{k_0}(V^*) = \infty$ gibt es eine Folge $(g_n)_n \subseteq V^*$, $g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k$ mit $b_{k_0}^{(n)} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind

$$f_1 * g_n, \ldots, f_m * g_n \quad \text{ und } h * g_n$$

nullstellenfrei in $\mathbb{D}$, und es gilt

$$t_1 \cdot f_1 * g_n + \ldots + t_m \cdot f_m * g_n - h * g_n = 0.$$

Also ist der Satz von Cartan anwendbar. Aufgrund der Normierung in $z = 0$ und von $0 < t_j < 1$ für alle $j = 1, \ldots, m$ ist $S = \{1, \ldots, m+1\}$ die einzig mögliche C-Klasse, und zwar mit stabilem Anteil $I = S$. (Dabei bezeichnet der Index $m+1$ die Funktionen $-h * g_n$.)

Nach etwaiger Teilfolgenauswahl kann man daher annehmen, daß $\left(\frac{g_n * f_1}{g_n * h}\right)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}$ ist.

Die Entwicklungen von $g_n * f_1$ und von $g_n * h$ um 0 stimmen nach Wahl von k_0 im nullten bis $(k_0 - 1)$-ten Koeffizienten überein, so daß

$$\frac{g_n * f_1}{g_n * h} = 1 + b_{k_0}^{(n)} \left(a_{k_0}^{(f_1)} - a_{k_0}^{(h)} \right) \cdot z^{k_0} + \ldots$$

ist. Mit $a_{k_0}^{(f_1)} - a_{k_0}^{(h)} \neq 0$ folgt, daß es ein $C < \infty$ mit $\left| b_{k_0}^{(n)} \right| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, im Widerspruch zu $b_{k_0}^{(n)} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$.

Also ist $h \notin co(V^C)$.

Eine weitere grundlegende Eigenschaft der Semidualität ist die Invarianz unter Streckungen der Lückenstruktur:

Satz 5.15

Es sei $V \subseteq A_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{V} := \{z \mapsto f(z^n) \mid f \in V\}$. Dann gilt

$$\widetilde{V}^{**} = \{z \mapsto h(z^n) \mid h \in V^{**}\}.$$

Insbesondere ist V genau dann semidual, wenn $\widetilde{V}$ semidual ist.

Beweis:

"$\subseteq$": Es sei ein $\widetilde{h} \in \widetilde{V}^{**}$ gegeben. Da aufgrund $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{A}_{I_n}$ und des Dualitätsprinzips auch $\widetilde{V}^{**} \subseteq \widetilde{A}_{I_n}$ gilt, gibt es ein $h \in A_0$, so daß $\widetilde{h}(z) = h(z^n)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ ist. Wir zeigen, daß $h \in V^{**}$ gilt:

Hierzu sei ein $g \in V^*$ gegeben, und es sei $\widetilde{g} \in A_0$ definiert durch $\widetilde{g}(z) := g(z^n)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Ist ein $\widetilde{f} \in \widetilde{V}$ gegeben, so ist $\widetilde{f}(z) = f(z^n)$ mit einem $f \in V$, und es folgt $(\widetilde{g} * \widetilde{f})(z) = (g * f)(z^n) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ aufgrund $g \in V^*$. Dies zeigt $\widetilde{g} \in \widetilde{V}^*$.

Damit ergibt sich nunmehr $(h * g)(z^n) = (\widetilde{h} * \widetilde{g})(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$, d.h. $h * g$ ist nullstellenfrei in $\mathbb{D}$. Da dies für alle $g \in V^*$ gilt, ist $h \in V^{**}$.

Damit ist $\widetilde{V}^{**} \subseteq \{z \mapsto h(z^n) \mid h \in V^{**}\}$ nachgewiesen.

"$\supseteq$": Es sei $h \in V^{**}$ und $\widetilde{h}(z) := h(z^n)$. Es sei $\widetilde{g} \in \widetilde{V}^*$. Wegen $\widetilde{g} * e_{I_n} \in \widetilde{A}_{I_n}$ gibt es ein $g \in A_0$ mit $(\widetilde{g} * e_{I_n})(z) = g(z^n)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Ist $f \in V$ und $\widetilde{f}(z) := f(z^n)$, so ist $\widetilde{f} \in \widetilde{V}$, und es folgt

$$(g * f)(z^n) = (\widetilde{g} * e_{I_n} * \widetilde{f})(z) = (\widetilde{g} * \widetilde{f})(z) \neq 0$$

für alle $z \in \mathbb{D}$, so daß $g * f$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ ist. Daher ist $g \in V^*$.

Es folgt $(\widetilde{h} * \widetilde{g})(z) = (\widetilde{h} * \widetilde{g} * e_{I_n})(z) = (h * g)(z^n) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Da dies für alle $\widetilde{g} \in \widetilde{V}^{**}$ gilt, ist also $\widetilde{h} \in \widetilde{V}^{**}$. Damit ist auch die Inklusion $\{z \mapsto h(z^n) \mid h \in V^{**}\} \subseteq \widetilde{V}^{**}$ gezeigt.

In Semidualitätsbeweisen benötigen wir häufig die folgende Projektionseigenschaft (cf. [45], Beweis von Theorem 1):

Lemma 5.16

Es seien S und T Lückenstrukturen und $R \subseteq \mathbb{N}$ mit $S \subseteq T \setminus R$. Es seien $f_1, \ldots, f_m \in \widetilde{A}_{R \cup \{0\}}$, und es sei $V := \{e_T; f_1, \ldots, f_m\}$. Dann gilt $e_S * V^{**} \subseteq V_S^{**}$. Insbesondere gilt $e_S * V_T^{**} \subseteq V_S^{**}$ für $S \subseteq T$.

Beweis:

Es sei $h \in V^{**}$. Es sei ein $g \in V_S^*$ gegeben. Wegen $S \subseteq T$ ist $(g * e_S) * e_T = g * e_S \neq 0$ in $\mathbb{D}$; wegen $S \cap R = \emptyset$ ist $(g * e_S) * f_j = 1 \neq 0$ in $\mathbb{D}$ für alle $j = 1, \ldots, m$. Dies zeigt $g * e_S \in V^*$. Also ist $g * (e_S * h) = (g * e_S) * h \neq 0$ in $\mathbb{D}$. Da dies für alle $g \in V_S^*$ gilt, ist $e_S * h \in V_S^{**}$. Dies zeigt die Behauptung.

Kapitel 6

Lückenreihen

6.1 Eine allgemeine Vermutung

Angesichts der „Autorität“ des Blochschen Prinzips ist es naheliegend, einen Zusammenhang zwischen der Nichtnormalität von $\widetilde{A}_T^0$ und der Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen in $\widetilde{A}_T$ zu vermuten. Auf den ersten Blick wesentlich überraschender dürfte es sein, diese Phänomene in Verbindung zu bringen mit der Frage nach der Semidualität der Lückenstruktur T. Wie wir im Laufe dieses Kapitels sehen werden, sprechen jedoch zahlreiche Indizien für einen derartigen Zusammenhang. Ein solcher wurde erstmals 1985 und 1986 von Kasten, Pinto, Ruscheweyh und Salinas in [28] und [45] vermutet:

Vermutung 6.1

Es sei T eine Lückenstruktur. Dann gilt:

(1)		Es gibt in $\widetilde{A}_T$ eine ganze nichtkonstante nullstellenfreie Funktion.	(E1)
	$\Longleftrightarrow$	$\widetilde{A}_T^0$ ist in $z=0$ nicht normal.[1]	(NN)
(2)		T ist semidual.	(SD)
	$\Longleftrightarrow$	Für alle $k_0 \in T$ gibt es eine Lückenstruktur $S \subseteq T$, so daß $k_0 \in S$ und A_S eine ganze nullstellenfreie Funktion enthält.	(E2)

Bemerkung 6.2

(1) Ein (trivialer) Sonderfall in (2) liegt für $T = \{0; n\} \quad (n \in \mathbb{N})$ vor: Hier gilt (SD) nach Dualitätsprinzip, aber (E2) ist offensichtlich verletzt. Aus diesem Grund haben wir in der Definition einer Lückenstruktur vorausgesetzt, daß diese mindestens dreielementig ist.

[1] In der ursprünglichen Formulierung dieser Vermutung in [28] war - gemäß dem Blochschen Prinzip - von Normalität in $\mathbb{D}$ die Rede. Angesichts der Tatsache, daß aus (E1) die Nichtnormalität von $\widetilde{A}_T^0$ nicht nur in $\mathbb{D}$, sondern sogar in $z=0$ folgt (Bemerkung 6.2 (2)), von Satz 6.3 sowie von Eremenkos Modifikation der Cartanschen Vermutung erscheint jedoch der Begriff der Normalität im Ursprung als der in diesem Zusammenhang adäquatere. Nicht ganz ausgeschlossen ist es freilich, daß für $\widetilde{A}_T^0$ Normalität in $\mathbb{D}$ und Normalität in $z=0$ sogar äquivalent sind. (Man beachte auch Satz 2.10 und Bemerkung 6.59 (2)!)

(2) Die Implikation (E1) $\Rightarrow$ (NN) ist klar: Ist $f \in \widetilde{A}_T$ eine nichtkonstante ganze Funktion ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$, so setzt man $f_n(z) := f(nz)$, so daß $(f_n)_n \subset \widetilde{A}_T^0$ ist. Wäre $\widetilde{A}_T^0$ normal in $|z| < r < 1$, so wäre $(f_n)_n$ angesichts der Normierung $f_n(0) = 1$ in $\mathbb{D}_{r/2}$ gleichmäßig beschränkt, im Widerspruch zum Satz von Liouville.

Einen weiteren einfachen Zusammenhang zwischen den Bedingungen (NN) und (SD) erhalten wir sofort aus Satz 2.10 und Satz 5.13:

Satz 6.3

Ist T eine Lückenstruktur und ist $\widetilde{A}_T$ normal in $z = 0$, so erfüllt V_T^{**} die Umgebungseigenschaft bezüglich T. Insbesondere ist T nicht semidual.

Die Umkehrung ist nicht richtig: Aus der Nichtsemidualität von T folgt nicht die Gültigkeit der Umgebungseigenschaft (bezüglich T). Ein explizites Gegenbeispiel liefert Bemerkung 6.8. Erwarten kann man bestenfalls, daß die Nichtsemidualität die Gültigkeit der *schwachen* Umgebungseigenschaft impliziert. Selbst diese Vermutung erscheint zunächst gewagt, wirken Normalität und schwache Umgebungseigenschaft doch als eher grobe und nicht unbedingt situationsangepaßte Kriterien, um Semidualität auszuschließen. Insofern sind die späteren Resultate, die zumindest in einigen Situationen einen Weg von der Nichtgültigkeit der schwachen Umgebungseigenschaft hin zur Semidualität bahnen (Satz 6.46, aber auch Satz 6.51 und Satz 6.55), um so erstaunlicher.

Eine elementare, aber wichtige Beobachtung ist die Invarianz der Semidualität unter Streckungen, die sich sofort aus Satz 5.15 ergibt:

Satz 6.4

Es sei T eine Lückenstruktur und $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist T semidual, wenn die Lückenstruktur $n \cdot T$ semidual ist.

Selbstverständlich gilt eine entsprechende Invarianz auch für die Eigenschaften (E1), (E2) und (NN) aus Vermutung 6.1: Für eine beliebige Lückenstruktur T enthält A_T genau dann eine nullstellenfreie ganze Funktion, wenn dies für $A_{n \cdot T}$ gilt, und es ist $\widetilde{A}_T$ genau dann normal (im Ursprung), wenn $\widetilde{A}_{n \cdot T}$ normal (im Ursprung) ist.

Die Streckungsinvarianz der Semidualität motiviert die folgende Begriffsbildung:

Definition 6.5

Eine Lückenstruktur T heißt **primitiv**, falls es keine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit $T \subseteq I_n$ gibt, falls also $T \setminus I_n \neq \emptyset$ für alle $n \geq 2$ gilt.

Angesichts von Satz 6.4 können wir unsere Semidualitätsbetrachtungen grundsätzlich auf primitive Lückenstrukturen beschränken; dieser Gedanke wird sich bei der Untersuchung von AP-Lücken zweiter Art in Abschnitt 6.3 als nützlich erweisen.

Die Unterscheidung zwischen den Funktionenklassen A_T^0 und $\widetilde{A}_T^0$ mag auf den ersten Blick einigermaßen subtil aussehen. Sie rechtfertigt sich daraus, daß für Fragen der Semidualität offensichtlich A_T^0 die angemessene Funktionenklasse ist, während für die Frage nach der Gültigkeit des Blochschen Prinzips die Klasse $\widetilde{A}_T^0$ besser geeignet zu sein scheint. Tatsächlich ist es, wie wir alsbald sehen werden, nicht sinnvoll, in der vermuteteten Äquivalenz "(NN)$\Leftrightarrow$ (E1)" $\widetilde{A}_T^0$ durch A_T^0 zu ersetzen. Vorher empfiehlt es sich freilich, uns des Zusammenhangs zwischen den beiden Klassen klarzuwerden:

Satz 6.6

Es sei T eine Lückenstruktur. Dann gilt $\widetilde{A}_T^0 = \overline{A_T^0}$, d.h. $\widetilde{A}_T^0$ ist der Abschluß von A_T^0 bezüglich der Topologie der kompakt-gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis:

Wegen $A_T^0 \subseteq \widetilde{A}_T^0$ und weil $\widetilde{A}_T^0$ nach Satz von Hurwitz abgeschlossen ist, gilt $\overline{A_T^0} \subseteq \widetilde{A}_T^0$. Es sei $f \in \widetilde{A}_T^0$, $f(z) = \sum_{k\in T} a_k z^k$, und T_f sei die Lückenstruktur von f. Man setze

$$a_k^{(n)} := \begin{cases} a_k & \text{für } k \in T(f) \\ \frac{1}{n} & \text{für } k \in T\backslash T(f) \end{cases}$$

und $F_n(z) := \sum_{k\in T} a_k^{(n)} z^k \in A_T$. Wegen $|f(z) - F_n(z)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-|z|}$ für $z \in \mathbb{D}$ konvergiert $(F_n)_n$ kompakt gleichmäßig gegen f. Daher gibt es eine Folge $(\sigma_n)_n \subset (0;1)$ mit $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$, so daß $f_n(z) := F_n(\sigma_n z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ ist. Also ist $(f_n)_n \subset A_T^0$, und mit $(F_n)_n$ konvergiert auch $(f_n)_n$ kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen f. Dies zeigt $f \in \overline{A_T^0}$.

Zusammen mit Satz 2.7 erhält man sofort:

Korollar 6.7

Es sei T eine Lückenstruktur. Dann gilt:

(1) A_T^0 ist genau dann normal in $\mathbb{D}_r$ (mit $r \leq 1$) bzw. in $z = 0$, wenn $\widetilde{A}_T^0$ normal in $\mathbb{D}_r$ bzw. in $z = 0$ ist.

(2) Ist A_T^0 normal in $\mathbb{D}_r$ (mit $r \leq 1$) bzw. in $z = 0$ und ist S eine weitere Lückenstruktur mit $S \subseteq T$, so ist auch A_S^0 normal in $\mathbb{D}_r$ bzw. in $z = 0$.

Bemerkung 6.8

Sehr instruktiv ist die Betrachtung der Lückenstrukturen $T := I_n \cup \{1\}$ $(n \geq 2)$ und $S := I_n$. Dieses Beispiel widerlegt eine Reihe früherer Vermutungen (s.u. (1) bis (3)). Später werden wir zeigen, daß S semidual (Satz 6.40), T hingegen nicht semidual (Satz 6.36 (3)) ist, und daß es in A_T keine ganze Funktion ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$ gibt (Satz 6.20 (2)). Andererseits ist $g(z) := \exp(z^n) \in A_S$ nullstellenfrei in $\mathbb{C}$, und A_S^0 und A_T^0 sind somit nicht normal im Ursprung. Daraus ersieht man für Lückenstrukturen S und T:

(1) Aus der Semidualität von S folgt nicht die Semidualität von T für $T \supset S$.

(2) Aus der Nichtnormalität von A_T^0 in $z = 0$ folgt nicht die Semidualität von T.

(3) Aus der Nicht-Semidualität von T folgt nicht die Existenz einer Lückenstruktur $R(\subseteq T)$, bezüglich derer die duale Hülle V_T^{**} die Umgebungseigenschaft besitzt.

Dies ist eine direkte Konsequenz aus (1): Es seien $S \subseteq T$ so, daß T nicht semidual, aber S semidual und $T \setminus S$ einelementig ist (etwa das o.g. Beispiel für S, T). Für $h(z) = \sum_{k\in T} c_k z^k \in V_T^{**}$ gilt wegen $e_S * V_T^{**} \subseteq V_S^{**}$ (Lemma 5.16) $h * e_S \in V_S^{**} = V_S$, also $(h * e_S)(z) = e_S(xz)$ mit einem $x \in \overline{\mathbb{D}}$ und somit $c_k = x^k$ für alle $k \in S$. Also kann V_T^{**} bezüglich keiner Lückenstruktur $R \subseteq T$ die Umgebungseigenschaft haben. (Denn für ein solches R wäre $R \cap S \neq \{0\}$ wegen $\#R \geq 3$.)

(4) Es gilt nicht:
Jede ganze Funktion in A_T hat eine Nullstelle in $\mathbb{C} \implies A_T^0$ ist normal in $z = 0$.
In der Vermutung (E1) $\iff$ (NN) können $\widetilde{A}_T$ bzw. $\widetilde{A}_T^0$ also nicht durch A_T bzw. A_T^0 ersetzt werden. (Damit hat man ein Gegenbeispiel zum Blochschen Prinzip!)

In gewissem Sinne eine Relativierung dieses Standardgegenbeispiels werden wir in Satz 6.39 geben.

Bemerkung 6.9

Aus der Semidualität einer Lückenstruktur T folgt nicht, daß A_T eine Einheit in $\mathbb{C}$ enthält; man kann lediglich (E2) erwarten. Dies zeigt das Beispiel der Lückenstruktur $T := I_2 \cup I_3$: Wie wir später (Satz 6.43) sehen werden, ist T semidual. Jedoch enthält A_T keine Einheit in $\mathbb{C}$; dies folgt wegen $T \cap \{1 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ und der Primitivität von T aus Satz 6.22.

In unseren weiteren Untersuchungen erweist sich oftmals das folgende Lemma von Wirths [58] als ausgesprochen nützlich:

Lemma 6.10

Es sei $g \in \widetilde{A}_T$ eine nullstellenfreie ganze Funktion und $h \in V_T^{**}$. Dann ist $g * h$ ebenfalls eine nullstellenfreie ganze Funktion.

Beweis:

Daß $g * h$ ganz ist, ist klar. Wegen $(g_x * e_T)(z) = g(xz) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{D}$ ist $g_x \in V_T^*$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Wäre $(g * h)(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so wäre $(g_{2z_0} * h)(1/2) = (g * h)(z_0) = 0$, im Widerspruch zu $g_{2z_0} \in V_T^*$. Also ist $g * h$ nullstellenfrei in $\mathbb{C}$.

6.2 Fejér- und Fabry-Lücken

Eine naheliegende heuristische Erwartung ist, daß hinreichend dünn besetzte Lückenstrukturen T die Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen mit dieser Lückenstruktur verunmöglichen und die Normalität der zugehörigen Familie $\widetilde{A}_T^0$ und somit die Nichtsemidualität von T erzwingen.

Vollständig gelöst ist in dieser Hinsicht bisher lediglich der Fall der Fejér-Lücken. Dabei sagen wir, eine Lückenstruktur T habe **Fejér-Lücken**, falls

$$\sum_{k \in T \setminus \{0\}} \frac{1}{k} < \infty \tag{6.1}$$

gilt; ein Spezialfall ist die Hadamardsche Lückenbedingung ($\frac{n}{m} \geq \lambda > 1$ für alle $m, n \in T$ mit $n > m$). Der Schlüssel für die Lösung des Problems im Fall der Fejér-Lücken ist folgendes auf Fejér und Fekete [14] zurückgehendes

Lemma 6.11

Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z^{t_1} + \ldots + a_n z^{t_n}$ ein Polynom mit $1 \le t_1 < \ldots < t_n$ und $a_k \neq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Dann hat p eine Nullstelle im Kreis

$$|z| \le \min_{1\le k\le n} \left(\frac{|a_k|}{|a_0|} \cdot \prod_{\nu=k+1}^{n} \left(1 - \frac{t_k}{t_\nu}\right)\right)^{-1/t_k}.$$

Beweis: (cf. [47], Lemma 5.8)

Es sei

$$\sigma_{jk} := \prod_{\nu=j+1}^{n} \left(1 - \frac{t_k}{t_\nu}\right) \qquad \text{für } 0 \le k \le j \le n \text{ (mit } t_0 := 0),$$

$$p_j(z) := \sum_{k=0}^{j} \sigma_{jk} a_k z^{t_k} \qquad \text{für } 1 \le j \le n$$

sowie

$$\rho_j := \min\{|z| : p_j(z) = 0\} > 0 \qquad \text{für } 1 \le j \le n.$$

Es sei $j \in \{2, \ldots, n\}$. Da alle Nullstellen des Polynoms

$$z^{t_j} \cdot p_j\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{j} \sigma_{jk} a_k z^{t_j - t_k}$$

im Kreis $|z| \le 1/\rho_j$ liegen, liegen nach dem Satz von Gauß-Lucas auch alle Nullstellen seiner Ableitung[2]

$$\sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{jk} a_k (t_j - t_k) z^{t_j - t_k - 1} = t_j \cdot z^{t_j - t_{j-1} - 1} \sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{j-1,k} a_k z^{t_{j-1} - t_k}$$

und damit alle Nullstellen von $z^{t_{j-1}} p_{j-1}\left(\frac{1}{z}\right)$ in $|z| \le 1/\rho_j$.

Somit ist $\rho_{j-1} \ge \rho_j$, und es folgt $\rho_n \le \rho_k$ für $1 \le k \le n$. Aus der Nullstellenfreiheit von

$$p_k(\rho_k z) = a_0 + \ldots + a_k \sigma_{kk} \rho_k^{t_k} z^{t_k}$$

in $\mathbb{D}$ folgt[3] $\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \sigma_{kk} \rho_k^{t_k} \le 1$, also

$$\rho_n \le \rho_k \le \left(\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \cdot \sigma_{kk} \right)^{-1/t_k} \qquad \text{für } 1 \le k \le n.$$

Wegen $p_n = p$ zeigt dies die Behauptung.

Damit konnten Kasten, Ruscheweyh und Wirths in [28] und [52] die Gültigkeit von Vermutung 6.1 für Fejér-Lücken verifizieren:

Satz 6.12

Die Lückenstruktur T habe Fejér-Lücken. Dann gilt:

[2] Man beachte $\sigma_{jk} \cdot (t_j - t_k) = \sigma_{j-1,k} \cdot t_j$.

[3] Das erkennt man sofort aus der Produktdarstellung solcher Polynome.

(1) Ist

$$g(z) = \sum_{k \in T} b_k z^k \in A_T$$

eine ganze Funktion, so hat g eine Nullstelle im Kreis

$$|z| \le 4 \cdot \inf_{k \in T \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{|b_k|^{1/k}} \cdot \exp \left(\sum_{j \in T,\, j > k} \frac{1}{j} \right) \right).$$

(2) A_T^0 (und damit $\widetilde{A}_T^0$) ist normal in $\mathbb{D}$.

(3) T ist nicht semidual.

Beweis: (cf. [14],[28], [52])

Es sei $T = (t_j)_{j \in J}$ mit $J = \mathbb{N}_0$ oder $J = \{0, \dots, N\}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots$. Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns im folgenden auf den Fall $J = \mathbb{N}_0$.

(1) Es sei $g_n(z) = \sum_{k=0}^n \beta_k z^{t_k}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\beta_k = b_{t_k}$. Nach Lemma 6.11 hat g_n eine Nullstelle im Kreis

$$|z| \le \left(\frac{1}{|\beta_k|} \cdot \prod_{j=k+1}^{n} \frac{t_j}{t_j - t_k} \right)^{1/t_k} \qquad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Unter Beachtung von $t_{k+d} \ge t_k + d$ für $k, d \in \mathbb{N}_0$ erhält man

$$\begin{aligned} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{t_j}{t_j - t_k} &\le \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t_k}{t_{j+k} - t_k} \right) \\ &\le \prod_{j=1}^{t_k} \left(1 + \frac{t_k}{j} \right) \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t_k}{t_{j+k+t_k} - t_k} \right) \\ &\le \binom{2t_k}{t_k} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t_k}{t_{j+k}} \right). \end{aligned}$$

Wegen $\binom{2m}{m} = \prod_{j=1}^m \frac{2j(2j-1)}{j^2} \le 4^m$ für $m \in \mathbb{N}$ und $\log(1+x) \le x$ für $x \ge 0$ folgt

$$\prod_{j=k+1}^{n} \frac{t_j}{t_j - t_k} \le 4^{t_k} \cdot \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_k}{t_{j+k}} \right).$$

Also hat g_n eine Nullstelle in

$$|z| \le 4 \cdot \frac{1}{|\beta_k|^{1/t_k}} \cdot \exp \left(\sum_{j > k} \frac{1}{t_j} \right) \qquad \text{für } 1 \le k \le n.$$

Aufgrund der $\mathcal{K}$-Konvergenz von $(g_n)_n$ gegen g folgt die Behauptung.

(2) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{t_k} \in A_T^0$. Dann gibt es eine Folge $(\rho_n)_n \subset (0;1)$ mit $\lim_{n \to \infty} \rho_n = 1$, so daß $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^{t_k}$ in $|z| \le \rho_n$ keine Nullstelle hat. Nach Lemma 6.11 ist $\rho_n \le (|a_k| \cdot \sigma_{kk})^{-1/t_k}$ für $1 \le k \le n$, wobei

$$\sigma_{kk} = \prod_{\nu=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{t_k}{t_\nu} \right)$$

und wegen (6.1) $\sigma_{kk} > 0$ ist.
Für festes k und $n \to \infty$ folgt $|a_k| \le \frac{1}{\sigma_{kk}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Durch eine Verfeinerung der Abschätzung aus (1) unter Benutzung der Stirlingschen Formel kann man zeigen, daß $\lim_{k\to\infty} \sigma_{kk}^{1/t_k} = 1$ gilt ([52], Lemma 3).[4] Daher ist $F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{kk}} z^{t_k}$ holomorph in $\mathbb{D}$, und für alle $f \in A_T^0$ folgt

$$|f(z)| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{kk}} \cdot |z|^{t_k} = F(|z|) \quad \text{für } z \in \mathbb{D}.$$

Also ist A_T^0 lokal gleichmäßig beschränkt und somit normal.

(3) folgt sofort aus (2) und Satz 6.3.

Weitgehend ungeklärt ist die Situation hingegen bei Fabry-Lücken. Deren Definition ist in der Literatur nicht einheitlich; wir treffen folgende Festlegung:

Definition 6.13

Es sei $T = \{n_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$ mit $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine nicht-endliche Lückenstruktur. Wir sagen, T habe **starke Fabry-Lücken**, falls

$$\lim_{k\to\infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty \tag{6.2}$$

gilt. Ist hingegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \infty, \tag{6.3}$$

so sprechen wir von **schwachen Fabry-Lücken**.

Diese letzte Bedingung läßt sich auch so ausdrücken: Die Lückenstruktur T hat die **Koeffizientendichte** Null.

Die starke Fabry-Lückenbedingung impliziert offensichtlich die schwache. Ebenfalls klar ist, daß Reihen mit Fejér-Lücken keine *starken* Fabry-Lücken zu haben brauchen (Man denke etwa an die Lückenstruktur $T := \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$). Jedoch umfassen die schwachen Fabry-Lücken die Fejér-Lücken:

Begründung:

Wir nehmen an, es gäbe eine Lückenstruktur $T = \{n_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$ (mit $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$), welche Fejér-Lücken aufweist, jedoch nicht die Bedingung (6.3) erfüllt. Dann gibt es eine Konstante $C < \infty$ und eine Teilfolge $(k_j)_{j\ge 0} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_0 = 0$, so daß $n_{k_j} \le C \cdot k_j$ für alle j gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \infty \quad > \quad & \sum_{k\in T\setminus\{0\}} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} \frac{1}{n_k} \\ \ge \quad & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} \frac{1}{n_{k_j}} \ge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j - k_{j-1}}{C \cdot k_j}, \end{aligned}$$

[4] Man sieht sofort, daß die Abschätzung aus (1) bereits $\limsup_{k\to\infty} \sigma_{kk}^{-1/t_k} \le 4$ und somit die Normalität in $|z| < \frac{1}{4}$ ergibt.

also

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left(1-\frac{k_{j-1}}{k_j}\right)<\infty.$$

Mithin müßte auch das Produkt $\prod_{j=2}^{\infty}\frac{k_{j-1}}{k_j}$ konvergieren, was wegen

$$\prod_{j=2}^{m}\frac{k_{j-1}}{k_j}=\frac{k_1}{k_m}\longrightarrow 0 \quad (m\to\infty)$$

einen Widerspruch ergibt. Dies zeigt die Behauptung.

Hinsichtlich der Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen mit Fabry-Lücken sind bisher im wesentlichen nur die beiden nachfolgenden Teilresultate bekannt; die korrespondierende Frage nach Semidualität bzw. Normalität ist noch völlig offen.

Bereits 1929 konnte Pólya in [46] zeigen, daß es keine ganze nichtkonstante nullstellenfreie Funktion endlicher Ordnung mit schwachen Fabry-Lücken gibt. Etwas präziser gilt:

Satz 6.14

Es sei $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^{n_k}$ (mit $0=n_0<n_1<n_2<\ldots$) eine ganze nullstellenfreie Funktion endlicher Ordnung $m:=\rho(g)\geq 1$. Dann gilt

$$n_{k+1}-n_k\leq m \qquad \text{für alle } k\geq 0.$$

Beweis:

O. E. kann man $b_k\neq 0$ für alle k annehmen. Gemäß Satz 1.15 gibt es $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{C}$ mit $c_m\neq 0$, so daß

$$g(z)=\exp(c_0+c_1z+\ldots+c_mz^m)$$

gilt. Durch Differenzieren folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}n_kb_kz^{n_k-1}=(c_1+\ldots+mc_mz^{m-1})\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^{n_k}.$$

Gäbe es ein $k\in\mathbb{N}_0$ mit $n_{k+1}-n_k\geq m+1$, so würde sich durch Koeffizientenvergleich für den $(n_{k+1}-1)$-ten Koeffizienten $b_{k+1}n_{k+1}=0$, also $b_{k+1}=0$ ergeben. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung.

Hieraus erhält man sofort das Resultat von Pólya, da die schwache Fabry-Lückenbedingung $\limsup_{k\to\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ impliziert. Satz 6.14 läßt sich auch folgendermaßen formulieren: Jede ganze nullstellenfreie Funktion endlicher Ordnung $\rho\geq 1$ besitzt eine **untere Koeffizientendichte**[5] $\liminf_{k\to\infty}\frac{k}{n_k}\geq\frac{1}{\rho}$.

Von Hayman stammt das folgende, erstmals von Kövari in [29] veröffentlichte Resultat, das zeigt, daß bereits bei einer geringfügigen Abschwächung der Bedingungen (6.2) bzw. (6.3) die Existenz von nullstellenfreien ganzen Funktionen mit diesen Lücken möglich wird; in diesem Sinne wären die Fabry-Lückenbedingungen - sollten sie tatsächlich die Nullstellenfreiheit ganzer Funktionen verhindern - also bestmöglich.

[5] Eine eingehende Diskussion der verschiedenen Dichtebegriffe für Lückenreihen (Dichte, untere und obere Dichte, Minimal- und Maximaldichte) findet sich bei Pólya [46], S. 556-571.

Satz 6.15

Es sei $(N_k)_k$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen. Dann gibt es eine Teilfolge $(N_{k_j})_j$ und eine ganze nichtkonstante nullstellenfreie Funktion $g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ mit $b_k = 0$ für alle k, für welche $N_{k_{2j-1}} < k \leq N_{k_{2j}}$ für ein j gilt.

Die Grundidee von Haymans Konstruktion wird uns im Beweis von Lemma 6.48 erneut begegnen.

Wendet man dieses Resultat auf Folgen $(N_k)_k$ mit $\lim_{k\to\infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = \infty$ an, so ergibt sich unmittelbar:

Korollar 6.16

Es gibt ganze nichtkonstante nullstellenfreie Funktionen $g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n_k}$ mit $\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \infty$ und insbesondere mit $\limsup_{k\to\infty}(n_{k+1} - n_k) = \infty$.

6.3 AP-Lückenreihen

Definition 6.17

Es sei T eine Lückenstruktur.

Falls es ein $b \in T$ und ein $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ gibt, so daß $T \cap \{b + kd \,|\, k \in \mathbb{N}_0\} = T \cap (b + I_d)$ endlich ist, so sagen wir, T habe **AP-Lücken[6] erster Art vom Typ** $(b; d)$.

Falls es $b, d \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq 2$ gibt, so daß $T \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \emptyset$ ist und $T \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle Teiler $q \geq 2$ von d gilt, so hat T **AP-Lücken zweiter Art vom Typ** $(b; d)$.

Wir bezeichnen d hierbei als die **Schrittweite** der arithmetischen Progression.

Anders als bei den in Abschnitt 6.2 betrachteten Fejér- und Fabry-Lücken ist für AP-Lücken also nicht die Dichte der „Lückenmenge“ $\mathbb{N} \setminus T$ charakteristisch, sondern ihre regelmäßige Struktur.

Bemerkung 6.18

(1) Man beachte, daß für AP-Lücken erster Art $b \in T$, für solche zweiter Art hingegen $b \notin T$ und überdies $b \notin I_d$ ist.

(2) Wenn T AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ hat, so können wir durch Vergrößerung der Schrittweite d erreichen, daß T auch AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; \widetilde{d})$ mit $T \cap (b + \widetilde{d} \cdot \mathbb{Z}) = \{b\}$ und $0 \leq b \leq \widetilde{d} - 1$ hat.

(3) Die Voraussetzungen $b \in T$ bzw. $T \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle Teiler $q \geq 2$ von d in der Definition von AP-Lücken erster bzw. zweiter Art dienen dazu, “triviale” Lücken auszuschließen, die durch bloße Streckung einer Lückenstruktur entstehen, wie sie etwa bei I_d mit $d \geq 2$ vorkommen, da man aus dem Vorhandensein solcher Lücken natürlich keinerlei Rückschlüsse über die Existenz von nullstellenfreien ganzen Funktionen in A_T und die Normalität von $\widetilde{A}_T^0$

[6] AP = arithmetische Progression

und wegen Satz 6.4 auch nicht über die (Nicht-)Semidualität von T ziehen kann.
Andererseits gestattet es Satz 6.4, sich auf die Betrachtung primitiver Lückenstrukturen zu beschränken. Für diese ist die Zusatzvoraussetzung in der Definition von AP-Lücken zweiter Art natürlich stets erfüllt.

Grundlegend für alles Weitere ist die folgende einfache Beobachtung:

Bemerkung 6.19

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster oder zweiter Art vom Typ $(b; d)$. Es sei $f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k \in \widetilde{A}_T$, $\zeta := e^{2\pi i/d}$ und $f_j(z) := f(\zeta^j z)$, $c_j := \zeta^{-bj}$ für $j = 1, \ldots, d$. Wegen

$$\sum_{j=1}^{d} \zeta^{j(n-b)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \not\equiv b \pmod d \\ d & \text{für } n \equiv b \pmod d \end{cases} \tag{6.4}$$

ist dann

$$\sum_{j=1}^{d} c_j f_j(z) = d \cdot \sum_{b+kd \geq 0} a_{b+kd} z^{b+kd} =: P(z).$$

Hierbei ist P im Falle von AP-Lücken erster Art ein Polynom, dessen Grad höchstens $\max\left(T \cap (b + I_d)\right)$ ist und für das gilt: $P(0) = d \cdot f(0)$ für $b \equiv 0 \pmod d$, $P(0) = 0$ sonst. Besitzt T AP-Lücken zweiter Art, so ist sogar $P \equiv 0$.

6.3.1 Ganze Funktionen mit AP-Lücken

Ausgangspunkt für die Untersuchungen über AP-Lückenreihen war ein Resultat von Hayman [22], das von Bao-Quin Li [33] verschärft wurde:

Satz 6.20

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$, und $f(z) = \sum_{k \in T} a_k z^k$ sei eine ganz-transzendente Funktion.

(1) Es sei g meromorph in $\mathbb{C}$ mit $T(r, g) = o(T(r, f))$ für $r \to \infty$. Ist $g(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k z^k$ $(m \geq 0)$ die Laurent-Entwicklung von g um 0 und $c_b \neq a_b$, so gilt

$$\delta_s(g; f) \leq 1 - \frac{1}{d}. \tag{6.5}$$

(2) Ist $a_b \neq 0$, so hat f keine Borelschen Ausnahmewerte, außer im Falle $b = 0$ evtl. den Wert $f(0)$. Insbesondere nimmt f jedes $w \in \mathbb{C}$ als Wert an.

In [22] zeigte Hayman die Abschätzung $\delta_s(g; f) \leq 1 - \frac{1}{d(d-1)}$ für den Fall $g \equiv \mathit{const}$.

Bemerkung 6.21

(1) In der Situation von (2) kann der Wert $f(0)$ tatsächlich Borelscher Ausnahmewert sein: Beispielsweise hat die Funktion $f(z) = 1 + z \cdot \exp(z^2) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{2k+1}$ AP-Lücken erster Art (vom Typ $(0; 2)$) und nimmt den Wert $f(0) = 1$ nur einmal, für $z = 0$ nämlich, an (cf. [22], S. 331).

(2) Die Voraussetzung $a_b \neq 0$ in (2) ist wesentlich: $T := I_d \cup \{1\}$ hat AP-Lücken erster Art vom Typ $(1;d)$, und es ist $f(z) = \exp(z^d) \in \widetilde{A}_T$; jedoch ist 0 sogar Picardscher Ausnahmewert für f.

Die zentrale Rolle im Beweis von Satz 6.20 spielt die Abschätzung von Nevanlinna aus Lemma 4.16:

Beweis von Satz 6.20: (cf. [33], Theorem 2 und [22], Theorem 2)

(1) Es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$ und $h_j(z) := f(\zeta^j z) - g(\zeta^j z)$ für $j = 1, \ldots, d$, $h(z) := \sum_{j=1}^d \zeta^{-jb} h_j(z)$. Nach Bemerkung 6.19 gilt

$$h(z) = P(z) - \sum_{j=1}^{d} \zeta^{-jb} g(\zeta^j z)$$

mit einem Polynom P. Wegen der Transzendenz von f ist $T(r,P) = o(T(r,f))$ $(r \to \infty)$ (Satz 1.16). Daraus und aus der Voraussetzung $T(r,g) = o(T(r,f))$ $(r \to \infty)$ folgt

$$T(r,h) = o(T(r,f)) \quad (r \to \infty). \tag{6.6}$$

Wegen $c_b \neq a_b$ ist $h \not\equiv 0$; der Koeffizient von z^b in der Laurent-Entwicklung von $h(z)$ um Null ist nämlich $d \cdot (a_b - c_b) \neq 0$.

Es sei $\psi_j(z) := \zeta^{-jb} \cdot \frac{h_j(z)}{h(z)}$ $(1 \leq j \leq d)$, so daß $\sum_{j=1}^d \psi_j(z) \equiv 1$.

Sind die Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_d$ linear abhängig, so kann man ein ψ_j durch die übrigen ausdrücken. Auf diese Weise findet man linear unabhängige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ (mit $p \leq d$), so daß es für jedes $j = 1, \ldots, d$ ein $\alpha_j \neq 0$ und ein $\sigma_j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $\varphi_j = \alpha_j \cdot \psi_{\sigma_j}$ gibt und $\sum_{j=1}^p \varphi_j(z) \equiv 1$ gilt.

Es sei $W := W(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. Aus $N\left(r, \varphi_j^{(k)}\right) \leq k \cdot N(r, \varphi_j)$, der Holomorphie von f, dem Ersten Hauptsatz und (6.6) folgt für $r \geq 1$, $r \to \infty$:

$$\begin{aligned} N(r,W) &= O(N(r,f-g)) + O\left(N\left(r, \frac{1}{h}\right)\right) \\ &= O(N(r,g)) + O(T(r,h)) = o(T(r,f)). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Aus (6.6), (6.7) und Lemma 4.16 folgt für $r \to \infty$, $r \geq 1$, $r \notin E$ mit $|E| < \infty$ bzw. $E = \emptyset$ für $\rho(f) < \infty$ (und somit $\rho(\varphi_j) < \infty$):

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq T(r,f-g) + T(r,g) + \log 2 \\ &\leq T\left(r, \frac{h_{\sigma_1}}{h}\right) + T(r,h) + o(T(r,f)) \\ &= T(r,\varphi_1) + o(T(r,f)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\varphi_k}\right) + N(r,W) + o(T(r,f)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \left(N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + N(r,h)\right) + o(T(r,f)) \\ &= p \cdot N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

Damit erhält man, wenn man die Fälle $\rho(f) < \infty$ und $\rho(f) = \infty$ getrennt betrachtet (cf. Definition 1.26), jeweils

$$\delta_s(g;f) \leq 1 - \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{d}.$$

(2) Es sei $c \in \overline{\mathbb{C}}$ ein Borelscher Ausnahmewert von f. Nach Satz 1.27 ist $\delta_s(c; f) = 1$. Wäre $b \geq 1$, so würde aus (1) und aus $a_b \neq 0$ folgen, daß $\delta_s(c; f) \leq 1 - \frac{1}{d}$ ist. Also ist $b = 0$, und wiederum mit (1) folgt $c = a_b = f(0)$.

Keinesfalls selbstverständlich ist es, daß ein analoges Resultat auch für AP-Lücken zweiter Art gilt: So weist etwa $T := I_2 \cup I_3$ AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(1; 6)$ auf, und man findet in $\widetilde{A}_T$ die Funktionen $z \mapsto \exp(z^2)$ und $z \mapsto \exp(z^3)$, die beide Einheiten in $\mathbb{C}$ sind; hier wird T also von den Lückenstrukturen I_2 und I_3 dieser beiden Funktionen komplett überdeckt. Um so erstaunlicher ist es, daß es dennoch in A_T keine ganze nullstellenfreie Funktion gibt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 6.22

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(b; d)$. Dann gibt es keine ganze nullstellenfreie Funktion in A_T.

Beweis:

Wir nehmen an, es gäbe eine ganze nullstellenfreie Funktion $g \in A_T$. Wir setzen $\zeta := e^{2\pi i/d}$ und $g_j(z) := \zeta^{-jb} \cdot g(\zeta^j z)$ für $j = 1, \ldots, d$. Mit g sind auch $g_1, \ldots, g_d$ Einheiten in $\mathbb{C}$, und wegen $T \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \emptyset$ ist

$$g_1 + \ldots + g_d = 0.$$

Durch wiederholte Anwendung von Satz 4.17 findet man zwei linear abhängige Funktionen g_{j_1}, g_{j_2} $(j_1 \neq j_2)$. Also gibt es ein $j_0 \in \{1, \ldots, d-1\}$, so daß $g(z) = g(\zeta^{j_0} z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$a_k^{(g)} = 0 \quad \text{oder} \quad d \,|\, j_0 k \tag{6.8}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $q := \frac{d}{ggT(d, j_0)} \geq 2$ gilt nach Voraussetzung $T \setminus I_q \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $k_0 \in T$ mit $q \nmid k_0$. Wegen $g \in A_T$ ist $a_{k_0}^{(g)} \neq 0$. Gemäß (6.8) muß also $d \,|\, j_0 k_0$ und somit auch $d \,|\, ggT(j_0, d) \cdot k_0$, also $q | k_0$ gelten, Widerspruch! Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bemerkung 6.23

Die Voraussetzung $T \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle $q \geq 2$ mit $q|d$ in der Definition von AP-Lücken zweiter Art ist für die Gültigkeit von Satz 6.22 natürlich unverzichtbar, wie bereits die Betrachtung von I_2 mit $b = 1$, $d = 2$, $q = 2$ lehrt (cf. Bemerkung 6.18 (3)). Im Falle $T \setminus I_q = \emptyset$ ist aber $T \subseteq I_q$, und man kann dann stattdessen die Lückenstruktur $\frac{1}{q} \cdot T$ untersuchen.

Satz 6.20 (2) besagt insbesondere, daß die Bedingung (E2) aus Vermutung 6.1 für AP-Lückenstrukturen *erster* Art nicht erfüllt ist. Es ist daher damit zu rechnen, daß solche Lückenstrukturen nicht semidual sind. Hingegen wird $\widetilde{A}_T^0$ angesichts von Bemerkung 6.8 i.a. nur für AP-Lückenstrukturen T vom Typ $(0; d)$ normal sein.

Für AP-Lückenstrukturen *zweiter* Art kann dagegen (E2) sehr wohl gelten, wie das oben erwähnte Beispiel $T := I_2 \cup I_3$ zeigt. Ein zu Satz 6.22 analoges Semidualitätsresultat kann man daher allenfalls unter zusätzlichen Voraussetzungen erwarten.

6.3.2 Das Normalitäts- und Semidualitätsproblem bei AP-Lückenreihen

Mithilfe des Satzes von Cartan läßt sich die Normalitätsfrage für AP-Lückenreihen sehr schnell klären. Etwas allgemeiner können wir zeigen:

Satz 6.24

Es seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit

$$\sum_{j \in I} c_j \neq 0$$

für alle nichtleeren Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Es sei $c := c_1 + \ldots + c_n (\neq 0)$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von n-Tupeln $f = (f_1, \ldots, f_n)$ von Einheiten f_j in $\mathbb{D}$ mit $f_j(0) = c_j$ und

$$f_1 + \ldots + f_n \equiv c.$$

Dann ist für alle $j = 1, \ldots, n$ die Familie $(f_j)_{f \in \mathcal{F}}$ normal.

Beweis:

Man betrachtet die Gleichung $f_1 + \ldots + f_n - c = 0$ und wendet den Satz von Cartan mit $p := n + 1$ an. Aufgrund der Normierungsvoraussetzungen ist gewährleistet, daß stets Fall (a) eintritt, daß also $S = \{1, \ldots, n + 1\}$ die einzig mögliche C-Klasse (und $I = S$ der zugehörige stabile Anteil) ist. (Hierbei bezeichne der Index $n + 1$ die konstanten Funktionen $f_{n+1} := -c$.) Also ist $\left(\frac{1}{c} \cdot f_j\right)_{f \in \mathcal{F}}$ und damit $(f_j)_{f \in \mathcal{F}}$ für $j = 1, \ldots, n$ normal in $\mathbb{D}$.

Satz 6.25

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d)$. Dann ist $\widetilde{A}^0_T$ normal in $\mathbb{D}$.

Beweis:

Indem man evtl. d vergrößert, kann man o.E. $T \cap I_d = \{0\}$ annehmen. Wegen Bemerkung 6.19 gilt dann für $f \in \widetilde{A}^0_T$ und $f_j(z) := f(\zeta^j z)$ mit $\zeta := e^{2\pi i/d}$:

$$f_1 + \ldots + f_d \equiv d.$$

Aus Satz 6.24 (mit $n = d$, $c_1 = \ldots = c_n = 1$) folgt die Behauptung.

Für $d = 2$ wurde Satz 6.25 von Ruscheweyh und Salinas in [51] mithilfe einer geringfügig erweiterten Version des FNT bewiesen.

Die in $z = 0$ nicht normale Folge der Funktionen $f_n(z) = \exp(n \cdot z^d) \in A^0_{I_d}$ zeigt (in Verbindung mit Korollar 6.7), daß Satz 6.25 für AP-Lückenstrukturen erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \not\equiv 0 \pmod{d}$ i.a. nicht gilt. Aus dem gleichen Grund kann man auch für AP-Lücken zweiter Art prinzipiell kein Normalitätsresultat erwarten; z.B. hat $T := I_2 \cup I_3$ AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(1; 6)$, es ist jedoch $\widetilde{A}^0_T$ nicht normal.

Als ungleich komplizierter erweist sich die Frage nach der Semidualität von AP-Lückenstrukturen. Zunächst ist nach Satz 6.25 und Satz 6.3 klar, daß AP-Lückenstrukturen erster Art vom Typ $(0; d)$ (oder allgemeiner vom Typ $(b; d)$ mit $b \equiv 0 \pmod{d}$) nicht semidual sind. Wir erwarten Nichtsemidualität jedoch auch für beliebige AP-Lückenstrukturen erster Art, denn gemäß Satz 6.20 ist (E2) für sie nicht erfüllt:

Vermutung 6.26

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \not\equiv 0 \pmod{d}$. Dann hat V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in $b \in T$. Insbesondere ist T nicht semidual.

Dies wurde von Pinto, Ruscheweyh und Salinas in [45] für den Fall von AP-Lücken vom Typ $(b; 2)$ bewiesen. Wir werden mithilfe des Satzes von Cartan zeigen, daß Vermutung 6.26 auch in zahlreichen anderen Fällen gilt. Ein allgemeiner Beweis ist uns leider nicht möglich.

Die Voraussetzung $b \in T$ in der Definition von AP-Lücken erster Art ist für die Gültigkeit von Vermutung 6.26 unverzichtbar, wie man abermals anhand des Beispiels $T = I_d$ $(d \geq 2)$ sieht: T ist semidual (Satz 6.40), es ist aber $T \cap (b + I_d) = \emptyset$ für $1 \leq b \leq d - 1$.

Diesen trivialen Sonderfall freilich haben wir in der Definition von AP-Lücken zweiter Art bereits ausgeklammert. Aber auch die dort vorgenommene Einschränkung, daß $T \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle Teiler $q \geq 2$ von d gilt, reicht nicht aus, um die Nicht-Semidualität von T zu sichern, wie wiederum das Beispiel der primitiven Lückenstruktur $T := I_2 \cup I_3$ zeigt, das uns bereits im Kontext von Satz 6.22 begegnet ist: Daß T semidual ist, werden wir in Satz 6.43 nachweisen. Da in diesem Fall (E2) erfüllt ist, konnten wir auch nichts anderes erwarten.

Die AP-Lückenbedingung zweiter Art verhindert die Semidualität i.a. also nicht. Durch eine naheliegende Zusatzvoraussetzung erreichen wir aber, daß (E2) nicht erfüllt ist und wir daher wieder auf Nicht-Semidualität hoffen können:

Vermutung 6.27

Die Lückenstruktur T weise AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(b; d)$ auf. Zusätzlich gelte $T \setminus \bigcup_{t|d, t\geq 2} I_t \neq \emptyset$. Dann ist T nicht semidual.

Auch Vermutung 6.27 können wir nur in Spezialfällen beweisen (Satz 6.33).

Bemerkung 6.28

Unter den Voraussetzungen von Vermutung 6.27 ist (E2) verletzt.

Es gibt dann nämlich ein $k_0 \in T \setminus \bigcup_{t|d, t\geq 2} I_t$. Gäbe es eine Lückenstruktur $S \subseteq T$ mit $k_0 \in S$, so daß A_S eine Einheit in $\mathbb{C}$ enthält, so wäre $S \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \emptyset$, und wegen $ggT(k_0; d) = 1$ wäre $S \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle Teiler $q \geq 2$ von d. Also hätte S AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(b; d)$, so daß es gemäß Satz 6.22 in A_S keine ganze nullstellenfreie Funktion geben kann. Dieser Widerspruch zeigt, daß (E2) nicht erfüllt ist.

Vermutung 6.26 (nicht jedoch Vermutung 6.27) läßt sich für $b \geq 1$ zurückführen auf folgende allgemeinere Normalitätsvermutung über Polynome, die als Summe von Einheiten darstellbar sind (cf. [45]):

Vermutung 6.29

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $M(c_1, \ldots, c_n; m) < \infty$, so daß für jedes Polynom $P \in \mathcal{P}_m$ gilt:

Falls P eine Darstellung

$$P(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

besitzt, wobei $f_1, \ldots, f_n$ Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_j(0) = c_j$ sind, so ist

$$|P(z)| \leq M(c_1, \ldots, c_n; m) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Die Normierung im Nullpunkt ist hierbei von entscheidender Bedeutung; dies sieht man eindrucksvoll daran, daß sich bei Verzicht auf diese Normierungen *jedes* Polynom als Summe von beliebig vielen Einheiten in $\mathbb{D}$ darstellen läßt.

Satz 6.30

Die Gültigkeit von Vermutung 6.29 für ein n impliziert die Gültigkeit von Vermutung 6.26 für AP-Lückenstrukturen erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \geq 1$ und $d = n$.

Beweis: (cf. [45], Beweis von Theorem 3)

Es sei $f \in \widetilde{A}_T^0$. Setzt man $f_j(z) := f(\zeta^j z)$ und $c_j := \zeta^{-jb}$ $(1 \leq j \leq d)$ mit $\zeta := e^{2\pi i/d}$, so ist

$$P(z) := \sum_{j=1}^{d} c_j f_j(z)$$

nach Bemerkung 6.19 ein Polynom vom Grad $\leq \max(T \cap (b + I_d))$. Nach Vermutung 6.29 gilt $|P(z)| \leq M(c_1, \ldots, c_d; m)$ für $z \in \mathbb{D}$. Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man für den Koeffizienten $d \cdot a_b^{(f)}$ von z^b in $P(z)$ die Abschätzung $|a_b^{(f)}| \leq \frac{1}{d} \cdot M(c_1, \ldots, c_d; m)$. Nach Satz 5.13 (2) hat V_T^{**} also die schwache Umgebungseigenschaft in $b \in T \backslash \{0\}$, d.h. T ist nicht semidual.

Für $n = 2$ wurde die Gültigkeit von Vermutung 6.29 in [45], Theorem 4 gezeigt. Für beliebige n können wir sie nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an die c_j beweisen:

Satz 6.31

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit

$$\sum_{j \in I} c_j \neq 0 \ \text{ für jede nichtleere } \textit{echte} \text{ Teilmenge } I \subsetneq \{1, \ldots, n\}. \tag{6.9}$$

Dann gibt es ein $M(c_1, \ldots, c_n; m) < \infty$, so daß für jedes Polynom $P \in \mathcal{P}_m$ mit einer Darstellung

$$P(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

wobei die f_j Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_j(0) = c_j$ sind,

$$|P(z)| \leq M(c_1, \ldots, c_n; m) \quad \text{in } \mathbb{D} \text{ gilt.}$$

Beweis:

Wir nehmen an, es gibt eine Folge $(P_k)_k \subset \mathcal{P}_m$, so daß jedes P_k eine Darstellung $P_k = f_{1,k} + \ldots + f_{n,k}$ mit Einheiten $f_{j,k}$ und $f_{j,k}(0) = c_j$ besitzt und $||P_k|| \longrightarrow \infty$ für $k \to \infty$ gilt, wobei $||P|| := \max_{|z|=1} |P(z)|$ die Maximumsnorm in $\mathbb{D}$ ist.

Wir wenden den Satz von Cartan (mit $p := n+2$) auf die Gleichung

$$f_{1,k} + \ldots + f_{n,k} + (||P_k|| + 1 - P_k) - (||P_k|| + 1) = 0$$

an, in der alle Summanden nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ sind. Hierbei seien die Indizes $n+1$ bzw. $n+2$ den Funktionen $f_{n+1,k} := ||P_k|| + 1 - P_k$, $f_{n+2,k} := -(||P_k|| + 1)$ zugeordnet.

Ist $S \subseteq \{1, \ldots, n+2\}$ eine C-Klasse für eine Teilfolge von $((f_{1,k}, \ldots, f_{n+2,k}))_k$ (und $\mathbb{D}$) mit stabilem Anteil $I \subseteq S$, so gilt $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$:

Andernfalls wäre entweder $I = \{n+1; n+2\}$, oder es gäbe ein $j_0 \in \{1, \ldots, n\} \cap I$ und ein $\mu \in \{1; 2\}$ mit $n + \mu \in S$.

Im ersten Fall wäre $\left(\frac{f_{n+1,k}+f_{n+2,k}}{f_{n+2,k}}\right)_k$ $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0. Wegen $\frac{f_{n+1,k}+f_{n+2,k}}{f_{n+2,k}} = \frac{P_k}{||P_k||+1}$ gälte somit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\max_{|z|=\frac{1}{2}} |P_k(z)|}{||P_k|| + 1} = 0;$$

dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß nach einem bekannten Lemma von Bernstein (einer einfachen Folgerung aus dem Maximumprinzip, cf. [15], p. 27)

$$\max_{|z|=\frac{1}{2}} |P_k(z)| \geq \frac{1}{2^m} \cdot ||P_k||$$

für alle k gilt.

Im zweiten Fall würde $\left(\frac{f_{n+\mu,k}}{f_{j_0,k}}(0)\right)_k$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergieren ($a \neq 0$ für $n + \mu \in I$, $a = 0$ für $n + \mu \in S \backslash I$), im Widerspruch zu $f_{n+\mu,k}(0) \longrightarrow \infty$ (!) und $f_{j_0,k}(0) = c_{j_0}$.

Es folgt, daß Fall (a) des Satzes von Cartan nicht eintreten kann. Also liegt Fall (b) vor, d.h. nach geeigneter Teilfolgenauswahl gibt es disjunkte C-Klassen $S_1, S_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ für $((f_{1,k}, \ldots, f_{n+2,k}))_k$. Die Normierung und Voraussetzung (6.9) in Verbindung mit Bedingung (3) aus der Definition 4.1 von C-Klassen erzwingen jedoch, daß $S_\mu = \{1, \ldots, n\}$ für $\mu = 1, 2$ gelten muß, im Widerspruch zur Disjunktheit von S_1 und S_2!

Dies zeigt die Behauptung.

Aufgrund Satz 6.31 gilt Vermutung 6.29 insbesondere für $n = 2$.

Wie der Beweis zeigt, folgt aus der Gültigkeit der Vermutung von Cartan und Eremenko (für ein $p \geq 3$) die Gültigkeit von Vermutung 6.29 (für $n := p - 2$) und damit in Anbetracht von Satz 6.30 die Gültigkeit von Vermutung 6.26 für AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $d = p - 2$.

In der Situation des Beweises von Satz 6.31 gilt dann nämlich $n+2 \in S$ für eine C-Klasse S, was der obigen Folgerung $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ widerspricht.

Nach dem auf S. 61 erwähnten Resultat von Eremenko für den Fall $p = 5$ gilt Vermutung 6.29 also auch für $n = 3$.

Interessant auch für spätere Anwendungen ist folgendes Analogon für ganze Funktionen, das eine Verallgemeinerung des Satzes von Borel darstellt und das wir wie diesen mithilfe der Nevanlinnaschen Abschätzung aus Lemma 4.16 beweisen:

Satz 6.32

Es seien $f_1, \dots, f_n$ Einheiten in $\mathbb{C}$ und $P \not\equiv 0$ ein Polynom mit

$$f_1 + \dots + f_n \equiv P.$$

Dann ist P konstant. Ist für ein $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion f_{j_0} nicht konstant, so gibt es eine mindestens zweielementige Menge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, so daß für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ der Quotient $\frac{f_j}{f_k}$ konstant ist und $\sum_{j \in S} f_j \equiv 0$ gilt.

Beweis:

I. Zunächst seien $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig.

Dann sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit $\varphi_j := \frac{f_j}{P}$ linear unabhängige meromorphe Funktionen mit $\varphi_1 + \dots + \varphi_n \equiv 1$.

Es ist $N\left(r, \frac{1}{\varphi_j}\right) \equiv 0$ wegen der Nullstellenfreiheit der f_j, und da φ_j nur endlich viele Polstellen hat, gilt

$$N(r, W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = O(\log r) \quad (r \to \infty).$$

Mit Lemma 4.16 folgt

$$\begin{aligned} T(r, \varphi_j) &\leq \sum_{k=1}^{n} N\left(r, \frac{1}{\varphi_k}\right) + N(r, W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) + O(\log r) \\ &\quad + O\left(\log \max_{k=1,\dots,n} T(r, \varphi_k)\right) \\ &= O(\log r) + O\left(\log \max_{k=1,\dots,n} T(r, \varphi_k)\right) \end{aligned}$$

für $r \to \infty$, $r \notin E$ mit $|E| < \infty$.

Also ist $T(r, \varphi_j) = O(\log r)$ $(r \to \infty,\ r \notin E)$ für $j = 1, \dots, n$. Wegen Satz 1.16 ist φ_j rational, $f_j = \varphi_j \cdot P$ also ein Polynom. Wegen der Nullstellenfreiheit in $\mathbb{C}$ ist f_j konstant für $j = 1, \dots, n$. Damit ist auch P konstant. Die zweite Behauptung ist in diesem Fall leer.

II. Falls $f_1, \dots, f_n$ linear abhängig sind, so gibt es $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$ und $c_1, \dots, c_q \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, so daß

$$P \equiv c_1 \cdot f_{j_1} + \dots + c_q \cdot f_{j_q}$$

und $f_{j_1}, \dots, f_{j_q}$ linear unabhängig sind. Nach dem in I. Gezeigten ist P konstant.

Deshalb und wegen $P \not\equiv 0$ ist P eine Einheit in $\mathbb{C}$. Wir können daher auf die Gleichung $f_1 + \dots + f_n - P = 0$ den Satz von Borel anwenden. Damit folgt sofort die zweite Behauptung.

Im Beweis unserer Resultate über AP-Lückenreihen benötigen wir folgende unmittelbar einsichtige

Beobachtung:

Es sei $(f_n)_n \subseteq A_0$ eine Folge von Einheiten in $\mathbb{D}$, $d \in \mathbb{N}$ und $\zeta := e^{2\pi i/d}$. Dann ist

$$J := \left\{ j \in \mathbb{Z} : \text{ Die Folge } \left(z \mapsto \frac{f_n(\zeta^j z)}{f_n(z)} \right)_n \text{ ist } \mathcal{K}\text{-konvergent in } \mathbb{D}. \right\}$$

ein Ideal in $\mathbb{Z}$ und somit, da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist und $d \in J$ ist, von der Form $t \cdot \mathbb{Z}$ mit einem $t|d$. (In den nachfolgend betrachteten Fällen stellt stets der Satz von Cartan sicher, daß $t \neq d$ ist.)

Damit können wir zeigen:

Satz 6.33

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(b;d)$. Es sei

$$d_0 := \frac{d}{ggT(b;d)}, \quad q := \prod_{p\in\mathbb{P}, p|d_0} p \quad \text{und}^7 \quad m := \min(T \setminus I_q).$$

Falls m und d_0 teilerfremd sind, so hat V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in m. Insbesondere ist T nicht semidual.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß es ein $M < \infty$ mit $|a_m^{(f)}| \leq M$ für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ gibt.
Wir nehmen an, es existierte eine Folge $(f_n)_n \subseteq \widetilde{A}_T^0$, $f_n(z) = \sum_{k\in T} a_k^{(n)} z^k$, für welche $\lim_{n\to\infty} |a_m^{(n)}| = \infty$ gilt.
Für $\zeta := e^{2\pi i/d}$, $f_{j,n}(z) := \zeta^{-jb} f_n\left(\zeta^j z\right)$ $(1 \leq j \leq d)$ und alle n gilt dann

$$f_{1,n} + \ldots + f_{d,n} \equiv 0,$$

und alle $f_{j,n}$ sind Einheiten in $\mathbb{D}$. Für

$$J := \left\{ j \in \mathbb{Z} : \text{ Die Folge } \left(z \mapsto \frac{f_n(\zeta^j z)}{f_n(z)} \right)_n \text{ ist } \mathcal{K}\text{-konvergent in } \mathbb{D}. \right\}$$

gilt aufgrund obiger Beobachtung $J = t \cdot \mathbb{Z}$ mit einem $t|d$.
Wir wenden den Satz von Cartan an. Hiernach gibt es nach evtl. Übergang zu einer geeigneten Teilfolge eine C-Klasse $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$ für $((f_{1,n}, \ldots, f_{d,n}))_n$. Aus Symmetriegründen darf man $d \in S$ annehmen. Dann folgt $S \subseteq J = t \cdot \mathbb{Z}$; insbesondere ist $t \neq d$. Aus Bedingung (3) von Definition 4.1 und der Normierung im Ursprung folgt $\sum_{j\in S} \zeta^{-jb} = 0$. Wegen $t|j$ für alle $j \in S$ ist dies nur möglich, falls $\zeta^{tb} \neq 1$ ist. Also ist $d \nmid tb$, also $d_0 \nmid t$. Es gibt daher einen Primteiler p von d_0 mit $p \nmid t$. Da andererseits $t|d$ ist, erhält man $t|\frac{d}{p}$ und somit $j_0 := \frac{d}{p} \in J$.
Unter Beachtung von $d \,|\, j_0 q$, d.h. $\zeta^{j_0 k} = 1$ für alle $k \in I_q$ folgt, daß die Taylor-Entwicklungen von $f_n(\zeta^{j_0} z)$ und von f_n um den Nullpunkt im ersten bis $(m-1)$-ten Koeffizienten übereinstimmen. Daher hat man die Entwicklung

$$\frac{f_n(\zeta^{j_0} z)}{f_n(z)} = 1 + (\zeta^{j_0 m} - 1) \cdot a_m^{(n)} z^m + \ldots.$$

Wäre $d \,|\, j_0 m$, so wäre $p|m$, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von d_0 und m. Somit ist $\zeta^{j_0 m} \neq 1$.
Nach Definition von J ist die Folge $\left(\frac{f_n(\zeta^{j_0} z)}{f_n(z)}\right)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{D}$. Daher gibt es ein $C < \infty$ mit $|(\zeta^{j_0 m} - 1) \cdot a_m^{(n)}| \leq C$ für alle n. Wegen $\zeta^{j_0 m} - 1 \neq 0$ erhält man einen Widerspruch zur Wahl von $(f_n)_n$.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die Voraussetzung der Teilerfremdheit von m und d_0 in Satz 6.33 ist insbesondere dann erfüllt, wenn d_0 eine Primzahlpotenz ist.

Für AP-Lückenstrukturen erster Art erhalten wir nunmehr:

[7] Man beachte, daß nach Definition $T \setminus I_q \neq \emptyset$ ist.

Satz 6.34

Die primitive Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \not\equiv 0 \pmod{d}$. Es sei

$$d_0 := \frac{d}{ggT(b; d)}, \quad q := \prod_{p \in \mathbb{P}, p | d_0} p, \quad m := \min(T \setminus I_q),$$

und m und d_0 seien teilerfremd. Dann besitzt V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in m. Insbesondere ist T nicht semidual.

Beweis:

Wegen $b \not\equiv 0 \pmod{d}$ ist $d_0 \geq 2$, so daß es einen Primteiler p_0 von d_0 gibt und m wohldefiniert ist. Nach Definition von AP-Lücken erster Art gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $b + kd \notin T$. Für $\widetilde{b} := b + kd$ und $\widetilde{d} := {p_0}^r \cdot d$ mit einem geeignet großen $r \in \mathbb{N}$ folgt also $T \cap (\widetilde{b} + \widetilde{d}\mathbb{Z}) = \emptyset$. Da T primitiv ist, bedeutet dies, daß T AP-Lücken zweiter Art vom Typ $(\widetilde{b}; \widetilde{d})$ hat.
Es sei

$$\widetilde{d_0} := \frac{\widetilde{d}}{ggT(\widetilde{b}, \widetilde{d})}, \quad \widetilde{q} := \prod_{p \in \mathbb{P}, p | \widetilde{d_0}} p \quad \text{und} \quad \widetilde{m} := \min(T \setminus I_{\widetilde{q}}).$$

Es ist dann

$$ggT(\widetilde{b}, \widetilde{d}) = ggT(\widetilde{b}, d) = ggT(b; d),$$

wobei die erste Gleichheit daraus resultiert, daß p_0 in b und damit in $\widetilde{b}$ in niedrigerer Exponentenbewertung als in d vorkommt. Es folgt weiter $\widetilde{d_0} = d_0 \cdot {p_0}^r$ und somit $\widetilde{q} = q$, $\widetilde{m} = m$, so daß mit m und d_0 auch $\widetilde{m}$ und $\widetilde{d_0}$ teilerfremd sind. Damit ist Satz 6.33 anwendbar. Aus ihm ergibt sich die Behauptung.

In [16] (siehe auch [17]) hatten wir die Nichtsemidualität von AP-Lückenstrukturen erster Art vom Typ $(b; d)$ für die Fälle bewiesen, daß d prim oder b kleiner als der kleinste Primteiler von d ist. Dies sind offensichtlich Spezialfälle von Satz 6.34. In diesen Fällen konnten wir überdies zeigen, daß die schwache Umgebungseigenschaft sogar in b vorliegt, im Einklang mit Vermutung 6.26. Dazu benötigen wir einen einfachen Spezialfall des folgenden, auch für sich genommen nicht uninteressanten zahlentheoretischen Resultats von Schoenberg:

Lemma 6.35

Es sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, und ζ sei eine primitive d-te Einheitswurzel. Ist $\sum_{j \in I} \zeta^j = 0$ für eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$, so ist I die disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\{s + k \cdot t \,|\, k = 0, \ldots, q-1\}$ mit $t \,|\, d$, $t \neq d$, $1 \leq s \leq t$, $q := \frac{d}{t} \in \mathbb{N}$ (für welche aufgrund der geometrischen Summenformel bereits $\sum_{k=0}^{q-1} \zeta^{s+kt} = 0$ gilt.)

Beweis:

Für den (aufwendigen) Beweis des allgemeines Falles siehe Schoenberg [54], Theorem 1. Im folgenden wenden wir das Lemma nur in dem (ungleich leichteren) Spezialfall an, daß d prim ist; etwas allgemeiner können wir im Fall einer Primzahlpotenz $d = p^r$ wie folgt schließen:
Ist F_n das n-te Kreisteilungspolynom, so muß $\sum_{j \in I} X^j = F_d(X) \cdot S(X)$ mit einem Polynom $S(X) = \sum_{j=1}^{d-\varphi(d)} c_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ gelten, denn F_d ist das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$; hierbei ist φ die Eulersche Funktion. Bekanntlich gilt

$$F_d(X) = F_p\left(X^{p^{r-1}}\right) \quad \text{und} \quad F_p(X) = 1 + X + \ldots + X^{p-1}$$

(und somit insbesondere $d - \varphi(d) = d - (p-1) \cdot p^{r-1} = p^{r-1}$). Damit ergibt sich

$$\sum_{j \in I} X^j = \sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{\nu=1}^{p^{r-1}} c_\nu X^{\mu \cdot p^{r-1} + \nu}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $c_\nu \in \{0; 1\}$ für alle ν, und aus der Struktur der Doppelsumme auf der rechten Seite liest man sofort die Behauptung ab.

Satz 6.36

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \not\equiv 0 \pmod{d}$, und es gelte eine der folgenden Bedingungen:

(1) b ist kleiner als der kleinste Primteiler von d.

oder

(2) d ist prim.

Dann hat V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in $b \in T$. Insbesondere ist T nicht semidual.

Beweis:

Es liege der erste Fall vor. O.E. dürfen wir $T \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \{b\}$ annehmen. (Dazu hat man d ggf. mit einer genügend großen Primzahl $> b$ zu multiplizieren.)
Wieder genügt es zu zeigen, daß es ein $M < \infty$ mit $|a_b^{(f)}| \leq M$ für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ gibt.
Dazu nehmen wir an, es gäbe eine Folge $(f_n)_n \subset \widetilde{A}_T^0$, $f_n(z) = \sum_{k \in T} a_k^{(n)} z^k$, so daß $\lim_{n \to \infty} |a_b^{(n)}| = \infty$.
Setzt man $\zeta := e^{2\pi i/d}$, $f_{j,n}(z) := \zeta^{-jb} f_n\left(\zeta^j z\right)$ $(1 \leq j \leq d)$ und $f_{d+1,n}(z) := d \cdot a_b^{(n)} \cdot \left(1 - z^b\right)$, $f_{d+2,n}(z) := -d \cdot a_b^{(n)}$, so gilt für alle n

$$f_{1,n} + \ldots + f_{d+2,n} \equiv 0,$$

und alle $f_{j,n}$ sind Einheiten in $\mathbb{D}$.
Für

$$J := \left\{ j \in \mathbb{Z} : \text{ Die Folge } \left(z \mapsto \frac{f_n(\zeta^j z)}{f_n(z)} \right)_n \text{ ist } \mathcal{K}\text{-konvergent in } \mathbb{D}. \right\}$$

gilt wieder $J = t \cdot \mathbb{Z}$ mit einem $t|d$.
Der Satz von Cartan sichert nach evtl. Übergang zu einer Teilfolge die Existenz einer C-Klasse $S \subseteq \{1, \ldots, d+2\}$ für $((f_{1,n}, \ldots, f_{d+2,n}))_n$. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 6.31 folgt $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Aus Symmetriegründen darf man $d \in S$ annehmen, so daß $S \subseteq J = t \cdot \mathbb{Z}$ gilt; insbesondere ist $t \neq d$.
Es sei $\eta := \zeta^t$ und $q := \frac{d}{t}$. Dann ist $q \geq 2$ und η eine primitive q-te Einheitswurzel. Aus der Voraussetzung folgt $b < q$. Daher ist

$$\eta, \eta^2, \ldots, \eta^b \neq 1. \tag{6.10}$$

Nach Definition von S ist $\left(\frac{f_n(\eta z)}{f_n(z)}\right)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent. Es sei

$$\frac{f_n(\eta z)}{f_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} z^n.$$

Dann gibt es ein $C < \infty$ mit $\left|c_k^{(n)}\right| \leq C$ für $k = 1, \ldots, b$ und alle n. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_1^{(n)} &= a_1^{(n)}(\eta - 1) \\
c_2^{(n)} &= a_2^{(n)}\left(\eta^2 - 1\right) - a_1^{(n)} c_1^{(n)} \\
&\vdots \\
c_b^{(n)} &= a_b^{(n)}\left(\eta^b - 1\right) - a_1^{(n)} c_{b-1}^{(n)} - \ldots - a_{b-1}^{(n)} c_1^{(n)}.
\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man unter Beachtung von (6.10) nacheinander die Beschränktheit von $\left(\left|a_1^{(n)}\right|\right)_n, \left(\left|a_2^{(n)}\right|\right)_n, \ldots, \left(\left|a_b^{(n)}\right|\right)_n$, im Widerspruch zu $a_b^{(n)} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$. Dies zeigt die Behauptung im ersten Fall.

Auf den zweiten Fall übertragen läßt sich diese Argumentation nur unter der Zusatzvoraussetzung $1 \leq b \leq d - 1$; wir können jedoch unter Verwendung bereits bewiesener Resultate direkter schließen:

Ist d prim, so gilt für $c_j := \zeta^{-jb}$ (mit $\zeta = e^{2\pi i/d}$) wegen Lemma 6.35 $\sum_{j \in I} c_j \neq 0$ für $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, \ldots, d\}$. Daher kann man Satz 6.31 anwenden und erhält mit wörtlich der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 6.30 die Behauptung.

Eine Situation, in der Satz 6.34 versagt, ist z.B. die Lückenstruktur $T := I_2 \cup I_3 \cup \{5\}$, welche AP-Lücken erster Art vom Typ $(5, 6)$ hat. Als störend beim Versuch, mittels des Satzes von Cartan Beschränktheitsaussagen über bestimmte Koeffizienten der Funktionen in $\widetilde{A}_T^0$ zu gewinnen, erweist sich die Tatsache, daß die ersten nichtverschwindenden Koeffizienten (nämlich der zweite, dritte und vierte) zwangsläufig unbeschränkt sind (da I_2 und I_3 semidual sind); für die entsprechend verkleinerte Lückenstruktur $S := T \setminus \{2, 3, 4\}$ liefert Satz 6.34 hingegen die Nicht-Semidualität. Allgemeiner erscheint es nicht unwahrscheinlich, daß die Nichtsemidualität bei endlicher Vergrößerung einer Lückenstruktur stets erhalten bleibt, daß also mit einer Lückenstruktur S auch $S \cup E$ nichtsemidual ist, sofern $E \subseteq \mathbb{N}$ endlich ist. Dies würde angesichts der bereits bewiesenen Teilresultate die Gültigkeit der Vermutungen 6.26 und 6.27 implizieren.

Wesentlich unproblematischer als der allgemeine Fall der AP-Lücken (mit $d \geq 3$) sind Lückenstrukturen, deren Indizes selbst (bis auf endlich viele Ausnahmen) auf einer arithmetischen Progression liegen. Dies wird beim Beweis des folgenden Satzes deutlich, in dem wir für die einfachste dieser Situationen eine quantitative Abschätzung geben:

Satz 6.37

Es sei $d \geq 2$ und $T := I_d \cup \{1\}$. Dann gilt für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ die Abschätzung $|a_1^{(f)}| \leq 10.108$, im Falle $d = 2$ sogar $|a_1^{(f)}| \leq 8.754$. Insbesondere ist T nicht semidual.

Beweis:

Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^d = 1$ und $\arg(\zeta) \in \left[\frac{2}{3}\pi; \pi\right]$.[8] Dann gilt für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ mit $a_1^{(f)} \neq 0$:

$$f(z) - f(\zeta z) = (1 - \zeta) \cdot a_1^{(f)} \cdot z.$$

[8] In der Situation von Bemerkung 6.19 ist es hingegen wesentlich, daß ζ eine *primitive* d-te Einheitswurzel ist.

Für die in $\mathbb{D}$ holomorphe und nullstellenfreie Funktion $h(z) := \frac{f(\zeta z)}{f(z)}$ gilt daher $h(z) \neq 1$ außer für $z = 0$. Somit ist $w(z) := -\sqrt{h(z)}$ (mit $w(0) = -1$) holomorph in $\mathbb{D}$ und läßt die Werte 0 und 1 aus. Es ist

$$\frac{f(\zeta z)}{f(z)} = 1 + (\zeta - 1) \cdot a_1^{(f)} z + \dots, \quad \text{also} \quad w(z) = -1 + \frac{1}{2}(1 - \zeta) \cdot a_1^{(f)} z + \dots.$$

Mit Satz 2.4 (2) folgt $\left|\frac{1}{2}(1 - \zeta) \cdot a_1^{(f)}\right| \leq 2C$ mit $C = 4.3768796\dots$.

Wegen $|1 - \zeta| \geq \left|1 - e^{2\pi i/3}\right| = \sqrt{3}$ erhält man $|a_1^{(f)}| \leq \frac{4C}{\sqrt{3}} \leq 10.108$.

Im Falle $d = 2$ ist $\zeta = -1$, und es folgt sogar $|a_1^{(f)}| \leq 2C \leq 8.754$.

Bereits 1906 hat Landau ein ähnliches Resultat bewiesen ([30], Théorème IV); er zeigte mithilfe des später nach ihm benannten Satzes:

Es gibt ein $R_0 > 0$, so daß jede in $|z| < R_0$ holomorphe Funktion

$$f(z) = 1 + z + a_1 z^{1+d} + a_2 z^{1+2d} + \dots$$

(mit $d \geq 2$) mindestens eine Nullstelle in $|z| < R_0$ hat.

Allgemeiner gilt, daß eine Lückenstruktur T nicht semidual ist, falls $T \backslash (b + I_d)$ endlich und $1 \leq b \leq d - 1$ ist; T hat dann nämlich AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d)$.

Auch Lückenstrukturen, die aus lediglich zwei arithmetischen Progressionen bestehen, lassen sich in ähnlicher Weise leicht bewältigen:

Satz 6.38

Es seien $b, d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 3$ und $d \nmid b$, und es sei $T := I_d \cup (b + I_d)$. Dann hat V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in b. Insbesondere ist T nicht semidual.

Beweis:

Es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$. Für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ gilt dann

$$f(z) - (1 + \zeta^{-b}) f(\zeta z) + \zeta^{-b} f(\zeta^2 z) = 0.$$

Aus dem Satz von Cartan - der sich in diesem Fall von drei Funktionen auf den FNT reduziert - folgt die Normalität von $\left\{\frac{f(\zeta z)}{f(z)} : f \in \widetilde{A}_T^0\right\}$. Wegen

$$\frac{f(\zeta z)}{f(z)} = 1 + (\zeta^b - 1) \cdot a_b^{(f)} z^b + \dots$$

für alle $f \in \widetilde{A}_T^0$ und $\zeta^b \neq 1$ impliziert dies $M_b(T) < \infty$ und somit die Behauptung.

Exkurs: Ein Optimierungsproblem für AP-Lückenpolynome

In der Situation von Satz 6.37 ist es aufschlußreich, die obere Schranke 8.754 mit den Beträgen des ersten Koeffizienten von in $\mathbb{D}$ nullstellenfreien Polynomen niedrigen Grades mit dieser Lückenstruktur ($T = I_2 \cup \{1\}$) zu vergleichen:

Wir betrachten $P_{2n}(z) = (1 + z)^{n+1} \cdot R_{n-1}(z)$ und versuchen, $R_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ so zu wählen, daß $P_{2n} \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_{2n}$ gilt. Dies ist für $2 \leq n \leq 9$ möglich.[9] Die Resultate

[9] Man hat dazu ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von R_{n-1} zu lösen, das sich aus den Lückenbedingungen ergibt, und zu überprüfen, ob das so bestimmte R_{n-1} nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ ist; ab $n = 10$ ist dies nicht mehr der Fall.

numerischer Untersuchungen mithilfe der Optimization Toolbox von MATLAB stützen (in Verbindung mit Satz 6.61) die Vermutung, daß es sich bei den auf diese Weise bestimmten Polynomen P_{2n} um die Extremalpolynome handelt, für die der Betrag des ersten Koeffizienten maximal in $\widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_{2n}$ wird, daß also (in der Terminologie von S. 133) $\left|a_1^{(P_{2n})}\right| = M_1^{(2n)}(T)$ gilt.

Unabhängig von der Richtigkeit dieser Annahme erhält man auf diese Weise jedenfalls untere Schranken für $M_1^{(2n)}(T)$ und damit für $M_1(T)$, und zwar (auf drei Nachkommastellen gerundet):

$2n$	4	6	8	10	12	14	16	18
$\left\|a_1^{(P_{2n})}\right\|$	$\frac{8}{3}=$ 2.667	$\frac{16}{5}=$ 3.2	$\frac{128}{35}=$ 3.657	$\frac{256}{63}=$ 4.063	$\frac{1024}{231}=$ 4.433	$\frac{2048}{429}=$ 4.774	$\frac{32768}{6435}=$ 5.092	$\frac{65536}{12155}=$ 5.392

Satz 6.37 ($M_1(T) \leq 8.754$) liefert also eine relativ gute obere Schranke für $M_1(T)$. Eine interessante Frage ist, welche Gestalt die den ersten Koeffizienten in $\widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_{2n}$ maximierenden Polynome mit Grad $2n \geq 20$ haben; numerisch scheint sich dieses Optimierungsproblem nicht mehr mit vernünftigem Aufwand bewältigen zu lassen.

Wir zeigen nun noch, daß auch für AP-Lückenstrukturen T erster Art vom Typ $(b;d)$ mit $b \not\equiv 0 \pmod d$ immerhin eine geeignete Teilfamilie von $\widetilde{A}_T^0$ normal ist, zumindest in den Fällen, in denen die schwache Umgebungseigenschaft in b vorliegt, wie wir es ja generell erwarten (Vermutung 6.26), in Satz 6.36 freilich nur für bestimmte Spezialfälle zeigen konnten:

Satz 6.39

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b;d)$ mit $b \geq 1$, $T \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \{b\}$ und $\{1, \ldots, d-1\} \subseteq T$. Es sei $M_b(T) < \infty$, d.h. V_T^{**} habe die schwache Umgebungseigenschaft in b. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist die Familie[10]

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \left\{ f \in \widetilde{A}_T^0 \,:\, |a_1^{(f)} \cdot \ldots \cdot a_{d-1}^{(f)}| \geq \varepsilon \right\}$$

normal in $\mathbb{D}$.

Beweis:

Es sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}_\varepsilon$, $f_n(z) = \sum_{k \in T} a_k^{(n)} z^k$. Nach Satz 1.17 gibt es ein $C < \infty$ mit

$$m\left(r, \frac{f_n^{(\mu)}}{f_n}\right) \leq C \cdot \left(\log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ \left(m(R, f_n) + m\left(R, \frac{1}{f_n}\right)\right) + 1\right)$$

für $0 < r < R < 1$ und $\mu = 1, \ldots, d-1$. Mit dem Ersten Hauptsatz und der Normierung $|f_n(0)| = 1$ folgt

$$m\left(r, \frac{f_n^{(\mu)}}{f_n}\right) \leq C \cdot \left(\log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f_n) + \log 2 + 1\right). \tag{6.11}$$

[10] Ist $\{1, \ldots, d-1\} \subseteq T$ nicht erfüllt, so ist $\mathcal{F}_\varepsilon = \emptyset$.

Wie üblich sei $f_{j,n}(z) := \zeta^{-jb} f_n\left(\zeta^j z\right)$ mit $\zeta := e^{2\pi i/d}$, so daß

$$f_{1,n} + \ldots + f_{d,n} = d \cdot a_b^{(n)} \cdot z^b =: P_n(z)$$

gilt. Es sei $L_n := L(f_{1,n}, \ldots, f_{d,n})$. Dann ist

$$\begin{aligned} L_n(0) &= \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1^{(n)} \cdot \zeta & \ldots & a_1^{(n)} \cdot \zeta^d \\ \vdots & & \vdots \\ (d-1)! \cdot a_{d-1}^{(n)} \cdot \zeta^{d-1} & \ldots & (d-1)! \cdot a_{d-1}^{(n)} \cdot \zeta^{d(d-1)} \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (d-1)! \cdot a_1^{(n)} \cdot \ldots \cdot a_{d-1}^{(n)} \cdot \det\left(\zeta^{\mu(\nu-1)}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,d} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\det\left(\zeta^{\mu(\nu-1)}\right)_{\mu,\nu} \neq 0$. (Es handelt sich um eine Vandermondsche Determinante.) Nach Definition von $\mathcal{F}_\varepsilon$ folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit $|L_n(0)| \geq \delta$ für alle n. $\widetilde{L_n}$ sei die Determinante, die aus L_n entsteht, wenn man die letzte Spalte durch $\left(P_n, P_n', \ldots, P_n^{(d-1)}\right)^T$ ersetzt. Wie im Beweis von Proposition 4.14 sieht man mittels der Cramerschen Regel, daß

$$f_n = f_{d,n} = \frac{\widetilde{L_n}}{L_n}$$

gilt. Mit dem Ersten Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned} m(r, f_n) &\leq m(r, \widetilde{L_n}) + m\left(r, \frac{1}{L_n}\right) \\ &\leq m(r, \widetilde{L_n}) + m(r, L_n) + N(r, L_n) - \log|L_n(0)| \\ &\leq m(r, \widetilde{L_n}) + m(r, L_n) + \log\frac{1}{\delta}, \end{aligned} \tag{6.12}$$

da $N(r, L_n) \equiv 0$ wegen der Nullstellenfreiheit der f_n.
Wir können L_n und $\widetilde{L_n}$ durch $\frac{f_{j,n}^{(\mu)}}{f_{j,n}}$ und $P_n^{(\mu)}$ ausdrücken und erhalten

$$m(r, L_n) \leq C' \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} \sum_{\mu=0}^{d-1} m\left(r, \frac{f_{j,n}^{(\mu)}}{f_{j,n}}\right) + 1\right)$$

und ebenso

$$m(r, \widetilde{L_n}) \leq C'' \cdot \left(\sum_{j=1}^{d-1} \sum_{\mu=0}^{d-1} m\left(r, \frac{f_{j,n}^{(\mu)}}{f_{j,n}}\right) + m\left(r, P_n^{(\mu)}\right) + 1\right)$$

für $0 < r < 1$ und alle n mit gewissen Konstanten C', $C'' < \infty$.
Mit (6.12), (6.11) und

$$m\left(r, P_n^{(\mu)}\right) = \log^+ \left| d \cdot a_b^{(n)} \cdot b \cdot \ldots \cdot (b-\mu+1) r^{b-\mu} \right| \leq \log^+ M + \gamma_\mu$$

für $0 < r \leq 1$ und $0 \leq \mu \leq d-1$ (mit geeigneten $\gamma_\mu > 0$) ergibt sich, wenn man noch $m\left(r, \frac{f_{j,n}^{(\mu)}}{f_{j,n}}\right) = m\left(r, \frac{f_n^{(\mu)}}{f_n}\right)$ beachtet, eine Abschätzung

$$m(r, f_n) \leq K \cdot \left(\log^+ m(R, f_n) + \log\frac{1}{R-r} + 1\right)$$

für $0 < r < R < 1$ und alle n mit einer Konstanten $K < \infty$. Daraus folgt unter Benutzung von Lemma 1.20 mit der üblichen Argumentation[11] die Normalität von $(f_n)_n$.

Im Spezialfall $T = I_2 \cup \{1\}$ folgt, daß die Familie

$$\left\{ f \in \widetilde{A}_T^0 \,:\, |a_1^{(f)}| \geq \varepsilon \right\}$$

für alle $\varepsilon > 0$ normal ist. Es ist zu vermuten, daß für beliebige AP-Lückenstrukturen T erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \geq 1$

$$\left\{ f \in \widetilde{A}_T^0 \,:\, |a_b^{(f)}| \geq \varepsilon \right\}$$

normal ist. Weiter stellt sich die Frage, inwieweit sich hinter dem in Satz 6.39 beschriebenen Phänomen ein allgemeines Prinzip verbirgt, das auch für andere Lückenstrukturen gültig ist.

6.4 Konstruktion semidualer Lückenstrukturen

6.4.1 Grundlegende Konstruktionsprinzipien

Ausgangspunkt für die Konstruktion von praktisch allen explizit bekannten semidualen Lückenstrukturen ist die Tatsache, daß die (diesen Namen eigentlich nicht mehr verdienende) Lückenstruktur $I_1 = \mathbb{N}_0$ semidual ist. Es gilt sogar:

Satz 6.40

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist I_n semidual.

Dies wurde erstmals von Ruscheweyh und Kasten ([50], Theorem 1.18 und [28], Theorem 2) mit Mitteln der geometrischen Funktionentheorie bewiesen. In [58] gab Wirths einen verblüffend einfachen Beweis, der auf der Existenz einer nullstellenfreien ganzen Funktion in A_{I_n}, nämlich

$$g(z) := \exp(z^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{nk},$$

beruht:[12]

Beweis:

Es sei ein $h \in V_{I_n}^{**}$ gegeben. Nach Lemma 6.10 ist $h * g$ eine nullstellenfreie ganze Funktion. Ihre Ordnung ist wegen Satz 1.13 und Bemerkung 5.7 (2) höchstens n. Daher gibt es nach Satz 1.15 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, so daß

$$(h * g)(z) = \exp(c_1 z + \dots c_n z^n)$$

gilt. Ist

$$(h * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{nk},$$

[11] cf. Beweis von Proposition 4.14

[12] Angesichts von Satz 6.4 würde es natürlich genügen, den Fall $n = 1$ zu betrachten.

so folgt durch Differenzieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} nkb_k z^{nk-1} = (c_1 + \ldots + nc_n z^{n-1}) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{nk}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Also ist $(h*g)(z) = \exp(c_n z^n)$. Es sei $x \in \mathbb{C}$ so, daß $x^n = c_n$. Dann gilt $(h*g)(z) = g(xz) = (g*e_{I_n})(xz)$. Unter Beachtung von Bemerkung 5.7 (2) folgt $h(z) = e_{I_n}(xz)$ und $|x| \leq 1$, also $h \in V_{I_n}$. Dies zeigt $V_{I_n}^{**} = V_{I_n}$, also die Semidualität von I_n.

Wir untersuchen nunmehr die Vereinigung semidualer Lückenstrukturen auf Semidualität.

Pinto, Ruscheweyh und Salinas erzielten in [45], Theorem 1 das folgende Resultat:

Satz 6.41

Die Lückenstrukturen S und T seien semidual. Falls $1 \in S \cap T$ ist oder falls es $a, b \in S \cap T$ mit $ggT(a,b) = 1$ gibt, so ist auch $S \cup T$ semidual.

Beweis:

Für $h \in V_{S\cup T}^{**}$ gilt nach Lemma 5.16

$$e_S * h \in V_S^{**} = V_S, \quad e_T * h \in V_T^{**} = V_T,$$

also

$$(e_S * h)(z) = e_S(xz), \quad (e_T * h)(z) = e_T(yz) \quad \text{ mit } |x|, |y| \leq 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $x = y$, sofern $1 \in S \cap T$, bzw. $x^a = y^a$, $x^b = y^b$, falls $a, b \in S \cap T$ mit $ggT(a,b) = 1$ sind. In letzterem Fall gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot m + b \cdot n = 1$, so daß man ebenfalls $x = y$ erhält. Da zudem $h \in \widetilde{A}_{S\cup T}$ nach Bemerkung 5.7 (2) ist, folgt $h(z) = e_{S\cup T}(xz)$, also $h \in V_{S\cup T}$. Dies zeigt die Semidualität von $S \cup T$.

Vermutlich ist die (endliche oder unendliche) Vereinigung beliebiger semidualer Lückenstrukturen sogar ohne die Zusatzvoraussetzungen in Satz 6.41 stets semidual; wir werden darauf am Ende von Abschnitt 6.5 noch einmal eingehen.

Es genügt hierbei, sich auf endliche Vereinigungen zu beschränken; im Fall aufsteigender Folgen ist die Semidualität nämlich abgeschlossen bezüglich der mengentheoretischen Limesbildung:

Satz 6.42

Es sei $(T^{(n)})_{n\geq 1}$ eine aufsteigende Folge semidualer Lückenstrukturen, d.h. $T^{(n+1)} \supseteq T^{(n)}$ für alle $n \geq 1$, und es sei $T := \bigcup_{n\geq 1} T^{(n)}$. Dann ist auch T semidual.

Beweis:

Es sei ein $h \in V_T^{**}$ gegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 5.16

$$h * e_{T^{(n)}} \in V_{T^{(n)}}^{**} = V_{T^{(n)}},$$

d.h. $(h * e_{T^{(n)}})(z) = e_{T^{(n)}}(x_n z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit einem $x_n \in \overline{\mathbb{D}}$. Nach geeigneter Teilfolgenauswahl darf man annehmen, daß $(x_n)_n$ gegen ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$ konvergiert.

Weiter gilt $e_{T^{(n)}} \longrightarrow e_T$ $(n \to \infty)$ kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$:

Sind nämlich ein $R \in (0;1)$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} R^k \leq \varepsilon$ und hierzu ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $(T \setminus T^{(n)}) \cap \{1, \ldots, k_0\} = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in \mathbb{D}_R$ folgt

$$|e_{T^{(n)}}(z) - e_T(z)| \leq \sum_{k \in T \setminus T^{(n)}} |z|^k \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} R^k \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Beachtet man noch, daß nach Dualitätsprinzip $h \in \widetilde{A}_T$ gilt, so ergibt sich insgesamt

$$h(z) = (h * e_T)(z) = \lim_{n\to\infty} (h * e_{T^{(n)}})(z) = \lim_{n\to\infty} e_{T^{(n)}}(x_n z) = e_T(xz)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Also ist $h \in V_T$. Dies zeigt $V_T = V_T^{**}$, also die Semidualität von T.

Es gilt kein analoges Resultat für beliebige Folgen von Lückenstrukturen (bezüglich des mengentheoretischen Limes superior bzw. Limes inferior), nicht einmal für absteigende Folgen: Setzt man $T^{(n)} := \mathbb{N}_0 \setminus \{2k+1 \mid k = 1, \ldots, n\}$, so sind alle $T^{(n)}$ semidual, wie wir in Korollar 6.49 sehen werden, aber $\lim_{n\to\infty} T^{(n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{(n)} = I_2 \cup \{1\}$ ist gemäß Satz 6.34 nicht semidual.

Für bestimmte Vereinigungen von Lückenstrukturen, die alle aus ein- und derselben Lückenstruktur durch Streckung hervorgehen, können wir ebenfalls die Erhaltung der Semidualität beweisen[13]:

Satz 6.43

Es sei S eine semiduale Lückenstruktur und $(n_j)_{j\geq 1}$ eine (endliche oder unendliche) Folge in $\mathbb{N}$. Für $r \geq 2$ sei $d_r := ggT(n_1, \ldots, n_r)$, und es gelte $\frac{n_1}{d_r}, \ldots, \frac{n_r}{d_r} \in S$ für alle $r \geq 2$. Dann ist auch

$$\bigcup_{j\geq 1} (n_j \cdot S)$$

semidual. Insbesondere ist $\bigcup_{j\geq 1} I_{n_j}$ für jede Folge $(n_j)_j \subseteq \mathbb{N}$ semidual.

Beweis:

Aufgrund von Satz 6.42 genügt es, die Semidualität von $\bigcup_{j=1}^{r} n_j \cdot S$ für alle $r \in \mathbb{N}$ zu verifizieren. Diese zeigen wir induktiv:

Für $r = 1$ ist die Behauptung klar nach Satz 6.4.

Es sei ein $r \geq 2$ gegeben, und $T' := \bigcup_{j=1}^{r-1} n_j \cdot S$ sei bereits als semidual nachgewiesen. Angesichts von Satz 6.4 dürfen wir $d_r = 1$ und somit $n_1, \ldots, n_r \in S$ annehmen.

Es sei $T := \bigcup_{j=1}^{r} n_j \cdot S$.

Es sei ein $h \in V_T^{**}$ gegeben. Nach Bemerkung 5.7 (2) gilt $h \in \widetilde{A}_T$, so daß h eine Darstellung $h(z) = \sum_{k\in T} c_k z^k$ besitzt. Nach Lemma 5.16 und aufgrund der Semidualität von T' und von $n_r \cdot S$ gilt

$$e_{T'} * h \in V_{T'}^{**} = V_{T'} \qquad \text{und} \qquad e_{n_r\cdot S} * h \in V_{n_r\cdot S}^{**} = V_{n_r\cdot S}.$$

Also gibt es $x, y \in \overline{\mathbb{D}}$ mit

$$(e_{T'} * h)(z) = e_{T'}(xz) \qquad \text{und} \qquad (e_{n_r\cdot S} * h)(z) = e_{n_r\cdot S}(yz)$$

[13] Es sind dies Fälle, in denen Satz 6.41 versagt.

für alle $z \in \mathbb{D}$. Es folgt

$$c_{k\cdot n_j} = x^{k\cdot n_j} \quad \text{und} \quad c_{k\cdot n_r} = y^{k\cdot n_r} \qquad \text{für alle } j = 1,\dots,r-1 \text{ und alle } k \in S.$$

Insbesondere ist $c_{n_1\cdot n_r} = x^{n_1\cdot n_r} = y^{n_1\cdot n_r}$ und daher $|x| = |y|$.
Im Falle $x = 0$ ist $h(z) \equiv 1$, also $h \in V_T$ wie gewünscht.
Es sei $x \neq 0$ und $y = e^{2\pi i\varphi}x$ mit $\varphi \in [0;1)$. Aus $x^{n_j\cdot n_r} = y^{n_j\cdot n_r}$ und $x \neq 0$ folgt

$$e^{2\pi i\cdot\varphi\cdot n_j\cdot n_r} = 1$$

für alle $j = 1,\dots,r-1$ und somit

$$e^{2\pi i\varphi\cdot ggT(n_1,\dots,n_{r-1})\cdot n_r} = 1.$$

Setzt man $d := d_{r-1} = ggT(n_1,\dots,n_{r-1})$, so ist also $\varphi d n_r \in \mathbb{N}_0$. Es sei $\varphi = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p,q \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $q|dn_r$, also $dn_r = mq$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wegen $ggT(n_1,\dots,n_r) = 1$ gibt es $s,t \in \mathbb{Z}$, so daß

$$1 = s\cdot ggT(n_1,\dots,n_{m-1}) + tn_r = sd + tn_r$$

gilt. Damit folgt

$$\varphi = \frac{mp}{dn_r} = \frac{mps}{n_r} + \frac{mpt}{d}.$$

Es sei $\eta := e^{2\pi impt/d}$. Dann ist $\eta^{n_j} = 1$ für $j = 1,\dots,r-1$ (da $d\,|\,n_j$) und $\eta^{n_r} = e^{2\pi i\varphi n_r}$, und es folgt $c_k = x^k = (\eta x)^k$ für alle $k \in T'$ und $c_k = y^k = e^{2\pi i\varphi k}x^k = (\eta x)^k$ für alle $k \in n_r\cdot S$, insgesamt also $c_k = (\eta x)^k$ für alle $k \in T$. Somit ist $h(z) = e_T(\eta xz)$, also $h \in V_T$.
Dies zeigt die Semidualität von T.

Der Fall $S = \mathbb{N}_0$ geht auf Pinto, Ruscheweyh und Salinas ([45], Theorem 2) zurück.
Zwei interessante Anwendungen behandelt das folgende Korollar:

Korollar 6.44

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $T := \mathbb{N}_0 \setminus \{1,\dots,n\}$. Dann ist T semidual.

(b) Die Lückenstruktur $T := \mathbb{N}_0 \setminus (\mathbb{P} \cup \{1\})$ ist semidual.

Beweis:

In beiden Fällen gilt $T = \bigcup_{k\in T} I_k$; denn es ist jeweils mit $k \in T$ und $j \in \mathbb{N}_0$ auch $j\cdot k \in T$. Daher folgt die Behauptung aus Satz 6.43 und der Semidualität von $\mathbb{N}_0$.

Bemerkung 6.45

Die Lückenstruktur $T := \{0;1\} \cup \mathbb{P}$, die zu der in Korollar 6.44 (b) betrachteten komplementär ist, ist nichtsemidual; sie hat nämlich AP-Lücken erster Art vom Typ $(0;2)$.
Dies wirft die Frage auf, inwieweit die (Nicht-)Semidualität einer Lückenstruktur T Auswirkungen auf die (Nicht-)Semidualität der **komplementären Struktur** $T^C := \{0\} \cup (\mathbb{N} \setminus T)$ hat. Klar ist, daß sowohl T als auch T^C nichtsemidual sein können; dies zeigt bereits das Beispiel $T := I_2 \cup \{1\}$, in dem sowohl T als auch T^C AP-Lücken erster Art, und zwar vom Typ $(1;2)$ bzw. $(0;2)$ haben. Hingegen erscheint die Vermutung nicht unberechtigt, daß T und T^C nicht beide semidual sein können.

6.4.2 Vergrößerung semidualer Lückenstrukturen

Daß man bei der Vergrößerung semidualer Lückenstrukturen mit dem Verlust der Semidualität rechnen muß, ist uns bereits aus Bemerkung 6.8 vertraut. Jedoch könnte die Tatsache, daß in dem dortigen Standardbeispiel der nichtsemidualen Lückenstruktur $I_n \cup \{1\}$ der "semiduale Anteil" I_n nicht primitiv ist, zu der folgenden Vermutung verleiten:

> Es sei T eine Lückenstruktur. Es gebe eine *primitive* semiduale Lückenstruktur $S \subseteq T$. Dann ist T semidual.

Diese Vermutung ist falsch, wie das Beispiel $S := I_2 \cup I_3$, $T := S \cup \{1\}$ lehrt: Gemäß Satz 6.43 ist S semidual. Hingegen hat T AP-Lücken erster Art vom Typ $(1;6)$ und ist daher nicht semidual (Satz 6.34). Auch primitive semiduale Lückenstrukturen können wir also nicht einfach vergrößern, ohne die Semidualität zu verlieren.

Eine notwendige Bedingung dafür, daß mit einer Lückenstruktur S auch eine S umfassende Lückenstruktur T semidual ist, ist offensichtlich $M_k(T) = \infty$ für alle $k \in T \setminus S$. Zumindest im dem Fall, daß sich T und S nur um endlich viele Elemente unterscheiden, erweist sich diese Bedingung sogar als hinreichend:

Satz 6.46

> Es sei S eine semiduale Lückenstruktur, E eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus S$ und $T := S \cup E$. Falls $M_k(T) = \infty$ für alle $k \in E$ gilt, so ist auch T semidual.

Beweis:

Es sei $h \in V_T^{**}$. Nach Lemma 5.16 ist $e_S * h \in V_S^{**} = V_S$. Also gibt es ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$, so daß $(e_S * h)(z) = e_S(xz)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Wegen $V_T^{**} \subseteq \widetilde{A}_T$ folgt

$$h(z) = e_S(xz) + \sum_{k \in E} \widetilde{\gamma}_k z^k = e_T(xz) + \sum_{k \in E} \gamma_k z^k$$

mit gewissen $\widetilde{\gamma}_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$.
Annahme: Es ist $\gamma_{k_0} \neq 0$ für ein $k_0 \in E$.
Wegen $M_{k_0}(T) = \infty$ gibt es eine Folge $(g_n)_n \subseteq \widetilde{A}_T^0$, $g_n(z) = \sum_{k \in T} b_k^{(n)} z^k$ mit $b_{k_0}^{(n)} \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Es sei $P_n(z) := \sum_{k \in E} \gamma_k b_k^{(n)} z^k$. Nach der Cauchyschen Abschätzungsformel gilt dann

$$||P_n|| \geq |\gamma_{k_0}| \cdot \left| b_{k_0}^{(n)} \right|,$$

wegen $\gamma_{k_0} \neq 0$ also $||P_n|| \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(h * g_n)(z) = (e_T * g_n)(xz) + \sum_{k \in E} \gamma_k b_k^{(n)} z^k = g_n(xz) + P_n(z),$$

also

$$(h * g_n)(z) - g_n(xz) - (P_n(z) + ||P_n|| + 2) + (||P_n|| + 2) = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle Summanden nullstellenfrei in $\mathbb{D}$, so daß der Satz von Cartan anwendbar ist. Aufgrund der Normierung in $z = 0$ sowie von $||P_n|| \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ gibt es für die C-Klassen geeigneter Teilfolgen nur folgende Möglichkeiten: Entweder ist $S = \{1,2,3,4\}$ eine C-Klasse, oder $S_1 = \{1,2\}$ und $S_2 = \{3,4\}$ sind C-Klassen.
Ist $S = \{1,2,3,4\}$ eine C-Klasse, so muß für den zugehörigen stabilen Anteil $I = \{3,4\}$ gelten - wiederum aufgrund der Normierung in $z = 0$ sowie von $||P_n|| \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$. Dies bedeutet aber, daß $\{3,4\}$ selbst eine C-Klasse ist.

In jedem Fall ist $\{3,4\}$ nach geeigneter Teilfolgenauswahl also eine C-Klasse. Also ist $\left(\frac{f_{3,n}+f_{4,n}}{f_{4,n}}\right)_n$ (mit $f_{3,n} := -(P_n + ||P_n|| + 2)$ und $f_{4,n} := ||P_n|| + 2$) $\mathcal{K}$-konvergent gegen 0. Insbesondere folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{|z|=\frac{1}{2}} |P_n(z)|}{||P_n|| + 2} = 0.$$

Nach dem Lemma von Bernstein ist jedoch

$$\max_{|z|=\frac{1}{2}} |P_n(z)| \geq \frac{1}{2^m} \cdot ||P_n||$$

mit $m := \max E$, und man erhält einen Widerspruch zu $||P_n|| \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$.
Also gilt $\gamma_k = 0$ für alle $k \in E$. Somit ist $h(z) = e_T(xz)$, d.h. $h \in V_T$. Damit ist die Semidualität von T gezeigt.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

Korollar 6.47

Es sei S eine semiduale Lückenstruktur, E eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus S$ und $T := S \cup E$. Falls $\widetilde{A}_T$ eine ganze nullstellenfreie Funktion g mit $a_k^{(g)} \neq 0$ für alle $k \in E$ enthält, so ist auch T semidual.

Eine wichtige Folgerung ist, daß alle Lückenstrukturen mit endlichem Komplement semidual sind; bisher wissen wir dies aus Korollar 6.44 (a) ja nur für Lückenstrukturen der Form $\mathbb{N}_0 \setminus \{1,\ldots,n\}$. Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 6.48

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine ganze nullstellenfreie Funktion $g \in A_0$, so daß $a_k^{(g)} = c_k$ für alle $k = 1,\ldots,m$ gilt und g die Ordnung $\rho(g) \leq m$ hat.

Beweis:

Im Falle $m = 1$ leistet $g(z) := \exp(c_1 z)$ offensichtlich das Gewünschte.
Es sei die Behauptung für ein $m \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen, und es seien $c_1,\ldots,c_{m+1} \in \mathbb{C}$ gegeben.
Dann gibt es eine ganze nullstellenfreie Funktion $g_0 \in A_0$ der Ordnung $\rho(g_0) \leq m$ mit $a_k^{(g_0)} = c_k$ für alle $k = 1,\ldots,m$. Setzt man

$$g(z) := g_0(z) \cdot \exp\left(\left(c_{m+1} - a_{m+1}^{(g_0)}\right) z^{m+1}\right),$$

so ist g eine ganze nullstellenfreie Funktion in A_0 der Ordnung

$$\rho(g) \leq \max\{\rho(g_0); m+1\} \leq m+1,$$

und es gilt

$$a_k^{(g)} = a_k^{(g_0)} = c_k \text{ für } k = 1,\ldots,m \quad \text{und} \quad a_{m+1}^{(g)} = a_{m+1}^{(g_0)} + \left(c_{m+1} - a_{m+1}^{(g_0)}\right) = c_{m+1}.$$

Per Induktion ist damit die Behauptung bewiesen.

Korollar 6.49

Es sei $L \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Menge und $T := \mathbb{N}_0 \setminus L$. Dann ist T semidual.

Beweis:

Es sei $m := \max L$, $S := \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \dots, m\}$ und $E := \{1, \dots, m\} \setminus L$. Dann ist $E \subseteq \mathbb{N} \setminus S$ endlich und $T = S \cup E$. Gemäß Korollar 6.44 (1) ist S semidual. Nach Lemma 6.48 gibt es eine ganze nullstellenfreie Funktion $g \in A_0$ mit $a_k^{(g)} = 0$ für alle $k \in L$ und $a_k^{(g)} = 1$ für alle $k \in E$, d.h. mit $g \in \widetilde{A}_T$. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 6.47.

Die Methode aus Satz 6.46, eine semiduale Struktur zu einer anderen semidualen Struktur zu erweitern, läßt sich wesentlich verallgemeinern, allerdings um den Preis, daß wir nicht nur Unbeschränktheit der Koeffizienten an den neu aufgenommenen Positionen, sondern sogar Existenz entsprechender nullstellenfreier ganzer Funktionen voraussetzen müssen. Dazu benötigen wir zunächst ein ziemlich technisches Lemma:

Lemma 6.50

Es sei T eine Lückenstruktur. Es gebe eine semiduale Lückenstruktur $S \subseteq T$ und eine Lückenstruktur $T_0 \subseteq T$, so daß A_{T_0} eine ganze nullstellenfreie Funktion enthält.

Weiter gebe es $b, d \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq 2$, $0 \leq b \leq d-1$, so daß $(T_0 \setminus S) \cap (b + d\mathbb{Z})$ endlich ist[14], und falls $b \geq 1$ ist, gelte zusätzlich $T_0 \setminus I_q \neq \emptyset$ für alle Teiler $q \geq 2$ von d.

Es sei $h \in V_T^{**}$, $h(z) = \sum_{k \in T} c_k z^k$. Dann gilt:

(1) Es gibt ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$ und ein $j_0 \in \{1, \dots, d\}$, so daß mit $\zeta := e^{2\pi i/d}$

$$c_k = x^k \quad \text{für alle } k \in S \cup (T_0 \cap (b + d\mathbb{Z})), \qquad c_k = \zeta^{j_0 k} x^k \quad \text{für alle } k \in T_0$$

gilt.

oder

(2) Es ist $c_k = 0$ für alle $k \in S \cup (T_0 \cap (b + d\mathbb{Z}))$, und es gibt einen Teiler $q \geq 2$ von d, so daß $c_k = 0$ für alle $k \in T_0 \setminus I_q$ ist und A_{R_0} mit $R_0 := T_0 \cap T_h \subseteq (T_0 \cap I_q) \setminus (S \cup (b + d\mathbb{Z}))$ eine nullstellenfreie ganze Funktion enthält.

Falls $b = 0$ ist, tritt stets Fall (1) ein.

Beweis:

Gemäß Lemma 5.16 und aufgrund der Semidualität von S ist $e_S * h \in V_S^{**} = V_S$. Also gibt es ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$, so daß $(e_S * h)(z) = e_S(xz)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Daher ist $c_k = x^k$ für alle $k \in S$.

Nach Voraussetzung gibt es eine ganze nullstellenfreie Funktion $g \in A_{T_0}$. Es sei $g(z) = \sum_{k \in T_0} b_k z^k$, wobei $b_k \neq 0$ für alle $k \in T_0$ nach Definition von A_{T_0} ist. Gemäß Lemma 6.10 ist auch $G := g * h$ eine ganze nullstellenfreie Funktion. Setzt man $R := T_0 \setminus S$, so ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k \in T_0} b_k c_k z^k = \sum_{k \in T_0} b_k x^k z^k + \sum_{k \in T_0 \setminus S} b_k (c_k - x^k) z^k \\ &= g(xz) + \sum_{k \in R} b_k (c_k - x^k) z^k. \end{aligned} \tag{6.13}$$

[14] Diese Voraussetzung ist geringfügig schwächer als die AP-Lückenbedingung erster oder zweiter Art.

Für $j = 1, \ldots, d$ und alle $z \in \mathbb{C}$ sei

$$g_j(z) := \zeta^{-jb} g(\zeta^j xz), \qquad g_{j+d}(z) := \zeta^{-jb} G(\zeta^j z).$$

Die Funktionen $g_1, \ldots, g_{2d}$ sind allesamt Einheiten in $\mathbb{C}$, und wegen (6.13) ist

$$g_{d+1} + \ldots + g_{2d} = g_1 + \ldots + g_d + P,$$

wobei

$$P(z) = d \cdot \sum_{k \in R \cap (b + d\mathbb{Z})} b_k (c_k - x^k) z^k$$

ein Polynom ist, da $R \cap (b + d\mathbb{Z})$ endlich ist.
Aufgrund Satz 6.32 ist P konstant, wegen $P(0) = 0$ also $P \equiv 0$. Dies bedeutet insbesondere $c_k = x^k$ für alle $k \in R \cap (b + d\mathbb{Z})$, womit $c_k = x^k$ für alle $k \in S \cup (T_0 \cap (b + d\mathbb{Z}))$ gezeigt ist.
Auf die Gleichung

$$g_1 + \ldots + g_d - g_{d+1} - \ldots - g_{2d} = 0$$

ist nun der Satz von Borel anwendbar. Es sei $S \subseteq \{1, \ldots, 2d\}$ die zur Funktion $g_d(z) = g(xz)$ gehörige Äquivalenzklasse (bezüglich der im Satz von Borel definierten Äquivalenzrelation auf $\{1, \ldots, 2d\}$).[15]
Falls es ein $j_0 \in S \cap \{d+1, \ldots, 2d\}$ gibt, so ist

$$g(xz) = G(\zeta^{j_0} z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$c_k = \zeta^{-j_0 k} x^k \qquad \text{für alle } k \in T_0,$$

d.h. es tritt Fall (1) ein.
Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$ ist.
Ist zudem $b = 0$, so erhält man aus

$$\sum_{j \in S} g_j(0) = \sum_{j \in S \cap \{1, \ldots, d\}} g_j(0) - \sum_{j \in S \cap \{d+1, \ldots, 2d\}} g_j(0) = 0$$

einen Widerspruch zur Normierung $g_j(0) = 1$ für alle j; für $b = 0$ liegt also stets Fall (1) vor.
Nun sei $b \geq 1$. Da S mindestens zwei Elemente besitzt, gibt es dann ein $t \in \{1, \ldots, d-1\}$, so daß

$$g(xz) = g(\zeta^t xz) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist.
Im Falle $x \neq 0$ bedeutet dies $\zeta^{tk} = 1$ für alle $k \in T_0$, und es folgt $T_0 \subseteq I_q$ für $q := \frac{d}{ggT(d,t)} \geq 2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

[15] S ist also die Menge derjenigen Indizes j, für die sich g_j und g_d nur um einen konstanten Faktor unterscheiden; nach Satz von Borel ist

$$\sum_{j \in S \cap \{1, \ldots, d\}} g_j - \sum_{j \in S \cap \{d+1, \ldots, 2d\}} g_j = 0.$$

Im Falle $x = 0$ hingegen ist wegen (6.13) und wegen $c_k = x^k$ für $k \in R \cap (b + d\mathbb{Z})$

$$G(z) = 1 + \sum_{k \in R} b_k c_k z^k = 1 + \sum_{k \in R \setminus (b+d\mathbb{Z})} b_k c_k z^k.$$

Ist $R_0 := T_G = T_0 \cap T_h$ die Lückenstruktur von G, so gilt also $R_0 \cap (b + d\mathbb{Z}) = \emptyset$. Da G eine Einheit in $\mathbb{C}$ ist, ist dies nach Satz 6.22 nur möglich, wenn $R_0 \subseteq I_q$ mit einem Teiler $q \geq 2$ von d gilt. Dies bedeutet $c_k = 0$ für alle $k \in T_0 \setminus I_q$. Damit ist $R_0 \subseteq (T_0 \cap I_q) \setminus (S \cup (b + d\mathbb{Z}))$. Also liegt Fall (2) vor.

Dieses Resultat nützen wir nur für den Fall von AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d)$ aus:

Satz 6.51

Es sei T eine Lückenstruktur. Es gebe eine semiduale Lückenstruktur $S \subseteq T$ und eine Lückenstruktur $T_0 \subseteq T$, so daß $S \cup T_0 = T$ gilt und A_{T_0} eine ganze nullstellenfreie Funktion enthält.
Weiter habe $(T_0 \setminus S) \cup \{0\}$ AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d)$, und es sei eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $T_0 = T$

oder

(2) $S \subseteq I_d$

oder

(3) Es gibt ein $k_0 \in S \cap T_0$ mit $ggT(k_0, d) = 1$.

Dann ist T semidual.

Beweis:

Es sei ein $h \in V_T^{**}$, $h(z) = \sum_{k \in T} c_k z^k$ gegeben, und es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$. Nach Lemma 6.50 gibt es ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$ und ein $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$, so daß $c_k = x^k$ für alle $k \in S$ und $c_k = \zeta^{j_0 k} x^k$ für alle $k \in T_0$ gilt.
Ist $T_0 = T$, so folgt sofort $c_k = (\zeta^{j_0} x)^k$ für alle $k \in T$, d.h. $h(z) = e_T(\zeta^{j_0} xz)$ und somit $h \in V_T$.
Ist $S \subseteq I_d$, so ist $\zeta^{j_0 k} = 1$ für alle $k \in S$, und es folgt $c_k = (\zeta^{j_0} x)^k$ für alle $k \in S \cup T_0 = T$, also wiederum $h \in V_T$.
Es sei nun (3) erfüllt. Dann ist $x^{k_0} = \zeta^{j_0 k_0} x^{k_0}$ wegen $k_0 \in S \cap T_0$.
Im Falle $x = 0$ ist $h(z) \equiv 1$, und $h \in V_T$ ist klar.
Ist $x \neq 0$, so folgt $\zeta^{j_0 k_0} = 1$. Wegen $ggT(k_0, d) = 1$ gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $rk_0 + sd = 1$, und es ergibt sich $\zeta^{j_0} = \zeta^{j_0 k_0 r} = 1$. Also ist $c_k = x^k$ für alle $k \in S \cup T_0 = T$, und es folgt abermals $h \in V_T$.
In allen Fällen ist also $h \in V_T$. Diese Betrachtung zeigt $V_T^{**} = V_T$, also die Semidualität von T.

Bemerkung 6.52

Im Hinblick auf Vermutung 6.1 (2) wäre es wünschenswert, die Bedingung, daß $S \cup T_0 = T$ ist und A_{T_0} eine Einheit in $\mathbb{C}$ enthält, durch (E2) zu ersetzen, d.h. durch die Bedingung, daß für alle $k_0 \in T$ (oder evtl. auch nur für alle $k_0 \in T \setminus S$) eine Lückenstruktur $T_0 \subseteq T$ mit $k_0 \in T_0$ existiert, so daß A_{T_0} eine Einheit in $\mathbb{C}$ enthält.

In Anbetracht der Argumentation aus dem Beweis von Satz 6.51 motiviert dies folgende Fragestellung:
Es seien T_1 und T_2 primitive Lückenstrukturen, so daß A_{T_1} und A_{T_2} jeweils Einheiten in $\mathbb{C}$ enthalten. Was läßt sich dann über den Schnitt $T_1 \cap T_2$ aussagen? Gibt es stets $k_1, k_2 \in T_1 \cap T_2$ mit $ggT(k_1, k_2) = 1$? Welche Lücken kann $T_1 \cap T_2$ haben? Sind z.B. AP-Lücken möglich?
Dieselben Fragen stellen sich sodann natürlich auch für den Schnitt primitiver semidualer Lückenstrukturen.
Zumindest in der Situation von Bedingung (3) können wir die Voraussetzung in Satz 6.51 in der beschriebenen Weise zu (E2) abschwächen:

Korollar 6.53

Es sei T eine Lückenstruktur, die eine semiduale Lückenstruktur $S \subseteq T$ enthält. Für alle $k \in T \setminus S$ existiere eine Lückenstruktur $T_k \subseteq T$ mit $k \in T_k$, so daß A_{T_k} eine ganze nullstellenfreie Funktion enthält.
Für alle $k \in T \setminus S$ habe $(T_k \setminus S) \cup \{0\}$ AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d_k)$, und es gebe ein $j_k \in S \cap T_k$ mit $ggT(j_k, d_k) = 1$.
Dann ist T semidual.

Beweis:

Es sei $T \setminus S = \{k_1, k_2, \ldots\}$. Wir setzen $S_0 := S$ und $S_{n+1} := S_n \cup T_{k_{n+1}}$ für $n \geq 0$. Wendet man Satz 6.51 (mit S_{n+1}, S_n und $T_{k_{n+1}}$ anstelle von T, S und T_0) an, so ergibt sich induktiv die Semidualität aller S_n. Aus Satz 6.42 folgt, daß auch $\bigcup_{n \geq 0} S_n = T$ semidual ist.

Korollar 6.54

Es sei T eine Lückenstruktur, so daß A_T eine nullstellenfreie ganze Funktion enthält und $I_d \subseteq T$ für ein $d \geq 2$ gilt. Dann ist T semidual.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus Satz 6.51, angewandt auf die semiduale Lückenstruktur $S := I_d$.

Die zum Thema dieses Unterabschnitts komplementäre Frage nach der Verkleinerung semidualer Lückenstrukturen haben wir bereits auf S. 113 gestreift: Im Fall endlicher Verkleinerung ist es denkbar, daß die Semidualität erhalten bleibt, wie es etwa bei $I_1 = \mathbb{N}_0$ der Fall ist (Korollar 6.49); konkrete Resultate in diese Richtung liegen bislang allerdings nicht vor.

6.4.3 Funktionen endlicher Ordnung und Semidualität

Ein gänzlich anderer Ansatz, aus der Existenz einer ganzen Funktion ohne Nullstellen auf die Semidualität von deren Lückenstruktur zu schließen, stammt von Wirths [58]:

Satz 6.55

Es sei T eine Lückenstruktur. Wenn A_T eine ganze nullstellenfreie Funktion der Ordnung 2 enthält, dann ist T semidual.

Beweis: (cf. [58])

I. Es genügt, unter den ganzen nullstellenfreien Funktionen der Ordnung 2 diejenigen der Gestalt

$$e^{c\cdot z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(c)\cdot z^k$$

zu betrachten. Hierbei sind die E_k offensichtlich Polynome vom Grad k.
Nach Voraussetzung gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $E_k(c) \neq 0$ für $k \in T$ und $E_k(c) = 0$ für $k \in \mathbb{N}\backslash T$. Wegen Satz 6.40 kann man $T \neq \mathbb{N}_0$ annehmen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es dann endlich viele $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$ mit $E_k(c_j) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}\backslash T,\ j = 1, \ldots, p$. Es sei

$$g_j(z) := e^{c_j z+z^2} = \sum_{k\in T} b_k^{(j)} z^k, \quad j = 1, \ldots, p,$$

und o.E. $b_k^{(1)} \neq 0$ für alle $k \in T$.
II. Es sei $h \in V_T^{**}$,

$$h(z) = \sum_{k\in S} \gamma_k z^k \quad \text{mit } \gamma_k \neq 0 \text{ für alle } k \in S \subseteq T. \tag{6.14}$$

Die Funktionen $h_1, h_2, \ldots$ seien rekursiv durch

$$h_1 := h, \quad h_{t+1} := h * h_t$$

definiert. Dann sind

$$(h_t * g_1)(z) = \sum_{k\in S} \gamma_k^t b_k^{(1)} z^k \tag{6.15}$$

nach Lemma 6.10 und Satz 1.13 nullstellenfreie ganze Funktionen der Ordnung ≤ 2 (Man beachte, daß nach Bemerkung 5.7 (2) $|\gamma_k| \leq 1$ gilt!). Da $h * g_1$ im Falle $\#S < \infty$ ein Polynom ist, ist entweder S unendlich oder $S = \{0\}$. Im letzteren Fall ist $h \equiv 1$. Im folgenden sei daher $\#S = \infty$ angenommen, so daß die Funktionen $h_t * g_1$ die Ordnung ≥ 1 haben (Satz 1.15). Hätte eine von ihnen die genaue Ordnung 1, so wäre $S = \mathbb{N}_0$, im Widerspruch zu $T \subsetneq \mathbb{N}_0$. Also haben alle $h_t * g_1$ $(t \in \mathbb{N})$ Ordnung 2. Nach Wahl der c_j gibt es also für jedes $t \in \mathbb{N}$ ein $j(t) \in \{1, \ldots, p\}$ und ein $y_t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit

$$(h_t * g_1)(z) = g_{j(t)}(y_t z).$$

Hieraus folgt die Existenz eines $m \in \{1, \ldots, p\}$, so daß

$$(h_t * g_1)(z) = g_m(y_t z) \quad \text{und} \quad (h_{t+q} * g_1)(z) = g_m(y_{t+q} z)$$

für gewisse $t, q \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen (6.15) und $b_k^{(1)} \neq 0$ für $k \in T$ erhält man daraus für alle $k \in S$

$$\gamma_k^q = x^k \quad \text{mit} \quad x := \frac{y_{t+q}}{y_t} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Wegen $|\gamma_k| \leq 1$ ist sogar $|x| \leq 1$.
Damit ist gezeigt: Es gibt ein $q \in \mathbb{N}$, eine Abbildung $\zeta_h : S \to \{\xi \in \mathbb{C} \,|\, \xi^q = 1\}$ und ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$, so daß $\gamma_k = \zeta_h(k) \cdot x^k$ für alle $k \in S$.
Nun sei q minimal mit dieser Eigenschaft gewählt, und es sei $h \notin V_T$ angenommen. Dann ist $x \neq 0$, und es gilt $S \subsetneq T$ oder $q \geq 2$. Beide Fälle werden im folgenden

zum Widerspruch geführt. Hierfür benötigen wir die aus der Reihenentwicklung von $\exp(cz + z^2)$ unmittelbar abzulesenden Beziehungen

$$E_1(c) = c, \quad E_2(c) = \frac{c^2}{2} + 1, \quad E_3(c) = \frac{c^3}{6} + c, \quad E_4(c) = \frac{c^4}{24} + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

III. Zunächst sei $\{0\} \subsetneq S \subsetneq T \subsetneq \mathbb{N}_0$, $q = 1$, also $\gamma_k = x^k$ für $k \in S$, $x \neq 0$. Wegen Lemma 6.10 sind dann

$$G_1(z) := g_1(z) = e^{z^2+cz} = \sum_{k\in T} b_k^{(1)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(c) \cdot z^k \quad \text{mit } b_k^{(1)} \neq 0 \text{ für } k \in T,\ c := c_1$$

und

$$G_2(z) := (g_1 * h)(z/x) = \sum_{k\in S} b_k^{(1)} z^k$$

zwei ganze nullstellenfreie Funktionen. Wie in II. sieht man, daß G_2 die Ordnung 2 hat. Es ist also $G_2(z) = e^{y^2z^2+Dz}$ mit $y \neq 0$, d.h.

$$G_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(d) y^k z^k \quad \text{mit } d = \frac{D}{y}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{array}{rlll} b_k^{(1)} = & E_k(c) = E_k(d)y^k & & \text{für } k \in S, \\ & E_k(d) = 0 & & \text{für } k \in T\backslash S, \\ E_k(c) = & E_k(d) = 0 & & \text{für } k \in \mathbb{N}\backslash T. \end{array}$$

Wegen $S \subsetneq T$ ist $c \neq \pm d$. (Sonst hätten $\exp(z^2 + cz)$ und $\exp(z^2 + dz)$, also G_1 und G_2 die gleiche Lückenstruktur.) Daraus folgt weiter $c \neq 0$: Wäre nämlich $c = 0$, so wäre $T = I_2$, also $1 \notin S$, also $d = E_1(d) = 0 = c$, Widerspruch!
Wir betrachten zunächst den Fall $1 \in S$: Hier gilt $c = d \cdot y$.
Wäre auch $2 \in S$, so wäre $\frac{c^2}{2} + 1 = y^2 \left(\frac{d^2}{2} + 1\right) = \frac{c^2}{2} + y^2$, also $y^2 = 1$, also $c = \pm d$, Widerspruch!
Also ist $2 \notin S$, d.h. $d^2 = -2$.
Wäre $3 \notin S$, so wäre $d = 0$ oder $d^2 = -6$, im Widerspruch zu $d^2 = -2$. Also ist $3 \in S$ und somit

$$\frac{c^3}{6} + c = y^3 \left(\frac{d^3}{6} + d\right) = \frac{c^3}{6} + y^2 c,$$

und mit $c \neq 0$ folgt $y^2 = 1$, also $c = \pm d$, Widerspruch!
Es bleibt $1 \notin S$ zu untersuchen. In diesem Fall ist $d = 0$, also $S = I_2$. Wegen $2 \in S$ und $4 \in S$ folgt

$$\frac{c^2}{2} + 1 = y^2 \left(\frac{d^2}{2} + 1\right) = y^2$$

und somit

$$\frac{c^4}{12} + c^2 + 1 = y^4 \left(\frac{d^4}{12} + d^2 + 1\right) = y^4 = \frac{c^4}{4} + c^2 + 1,$$

d.h. $c = 0$, womit wir abermals an einem Widerspruch angelangt sind.
IV. Nun sei $q \geq 2$. Wie in III. folgt, daß für $r > 0$ durch

$$f_0(z) := (g_1 * h)(z/r) = \sum_{k\in S} a_k^{(0)} z^k = e^{y_0^2 z^2 + C_0 z},$$

$$f_t(z) := (f_{t-1} * h)(z/x) = \sum_{k\in S} a_k^{(t)} z^k = e^{y_t^2 z^2 + C_t z}$$

q ganze nullstellenfreie Funktionen $f_0, \ldots, f_{q-1}$ der Ordnung 2 mit $a_k^{(0)} \neq 0$ und $a_k^{(t)} = [\zeta_h(k)]^t \cdot a_k^{(0)}$ für alle $k \in S$ definiert sind.
Wegen $\left|a_k^{(t)}\right| = \left|a_k^{(0)}\right|$ haben alle f_t, $t = 0, \ldots, q-1$, gleichen Typ[16] wie f_0 (Satz 1.14). Durch geeignete Wahl von $r > 0$ kann man erreichen, daß $|y_0| = 1$, daß f_0 also Typ 1 hat (Satz 1.15), so daß $|y_t| = 1$ für $t = 1, \ldots, q-1$ ist. Es sei

$$G_t(z) := f_t(\overline{y_t} z) \quad \text{für } t = 0, \ldots, q-1,$$

so daß

$$G_t(z) = e^{z^2 + d_t z} = \sum_{k\in S} a_k^{(0)} [\zeta_h(k)]^t \, \overline{y_t}^k z^k \quad \text{mit } d_t = C_t \overline{y_t}.$$

Da man y_t durch $-y_t$ ersetzen kann, kann man im folgenden o.E. jeweils $\operatorname{Re} d_t \geq 0$ *oder* $\operatorname{Im} d_t \geq 0$ annehmen.
Annahme: Es gibt s, t mit $0 \leq s < t \leq q-1$, so daß $G_s = G_t$. Dann ist $[\zeta_h(k)]^t \, \overline{y_t}^k = [\zeta_h(k)]^s \, \overline{y_s}^k$ für alle $k \in S$, also $[\zeta_h(k)]^{t-s} = \eta^{(t-s)\cdot k}$ für alle $k \in S$, wobei $\eta^{(t-s)} = \overline{y_s} y_t$. Setzt man dann $\widetilde{\zeta}_h(k) := \zeta_h(k) \cdot \eta^{-k}$, so ist $\left[\widetilde{\zeta}_h(k)\right]^{t-s} = 1$ und $\gamma_k = \widetilde{\zeta}_h(k) \cdot (\eta x)^k$ für alle $k \in S$, was wegen $t - s \leq q-1$ der Minimalität von q widerspricht.
Somit erhält man q paarweise verschiedene nullstellenfreie ganze Funktionen

$$G_t(z) = e^{z^2 + d_t z} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(d_t) z^k, \quad t = 0, \ldots, q-1$$

mit

$$\begin{array}{lll} E_k(d_t) = & 0 & \text{für } k \in \mathbb{N}\backslash S, \\ E_k(d_t) = & [\zeta_h(k)]^t \, \overline{y_t}^k E_k(d_0) & \text{für } k \in S \end{array} \tag{6.16}$$

und $\operatorname{Re} d_t \geq 0$ bzw. $\operatorname{Im} d_t \geq 0$, $t = 0, \ldots, q-1$.
Wegen $|d_t| = |E_1(d_t)| = |E_1(d_0)| = |d_0|$ für $t = 1, \ldots, q-1$ folgt $d_0 \neq 0$. Wegen $|E_2(d_t)| = |E_2(d_0)|$ folgt weiter

$$\left|1 + \frac{d_t^2}{2}\right| = \left|1 + \frac{d_0^2}{2}\right|, \quad |d_t^2| = |d_0^2|, \ \ t = 1, \ldots, q-1,$$

und somit

$$d_t^2 = d_0^2 \quad \text{oder} \quad d_t^2 = \overline{d_0}^2, \; t = 1, \ldots, q-1. \tag{6.17}$$

Falls $\operatorname{Re} d_0 = 0$, nehmen wir o.E. $\operatorname{Im} d_t \geq 0$ für $t = 0, \ldots, q-1$ an. Hieraus und aus (6.17) folgt dann $d_t = d_0$ für $t = 1, \ldots, q-1$, Widerspruch!
Im Falle $\operatorname{Re} d_0 \neq 0$ sei $\operatorname{Re} d_t \geq 0$ für $t = 0, \ldots, q-1$ angenommen. Damit folgt wegen $d_s \neq d_t$ für $0 \leq s < t \leq q-1$ aus (6.17) $d_1 = \overline{d_0}$, $d_0 \notin \mathbb{R}$ und $q = 2$. Damit ist $\zeta_h(k) \in \{-1; +1\}$ für alle $k \in S$, und mit (6.16) folgt, daß für $y := \overline{y_1}$

$$\overline{d_0} = y \cdot d_0 \quad \text{oder} \quad \overline{d_0} = -y \cdot d_0, \tag{6.18}$$

$$1 + \frac{\overline{d_0}^2}{2} = y^2 \left(1 + \frac{d_0^2}{2}\right) \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{\overline{d_0}^2}{2} = -y^2 \left(1 + \frac{d_0^2}{2}\right), \tag{6.19}$$

$$1 + \frac{\overline{d_0}^2}{6} = y^2 \left(1 + \frac{d_0^2}{6}\right) \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{\overline{d_0}^2}{6} = -y^2 \left(1 + \frac{d_0^2}{6}\right) \tag{6.20}$$

[16] Hierbei beziehen wir uns stets auf den Typ $\tau(g)$ von $\log M(r, g)$, für den uns Satz 1.14 zur Verfügung steht, nicht auf $\sigma(g)$.

gilt. ((6.20) ergibt sich aus $E_3(d_1) = \pm y^3 E_3(d_0)$ unter Beachtung von (6.18).)
Setzt man (6.18) in den jeweils ersten Fall von (6.19) bzw. (6.20) ein, so erhält man $y^2 = 1$, also mit (6.18) $\overline{d_0}^2 = d_0^2$ und somit (wegen $\operatorname{Re} d_0 \neq 0$) $\quad d_0 \in \mathbb{R}$, Widerspruch!
Es bleiben die beiden letzten Fälle in (6.19) und (6.20) zu betrachten. Durch Subtraktion erhält man $\overline{d_0}^2 = -y^2 d_0^2$, woraus mit $\overline{d_0}^2 = y^2 d_0^2$ (nach (6.18)) $d_0 = 0$ und somit wiederum der erstrebte Widerspruch folgt.
Also muß $h \in V_T$ gelten, womit T als semidual nachgewiesen ist.

Da insbesondere Teil II. des Beweises im Kern unabhängig von der Voraussetzung über die Ordnung der nullstellenfreien ganzen Funktion in A_T ist, erscheint es denkbar, daß sich die Beweismethode auf Funktionen der Ordnung n mit $n \geq 3$ verallgemeinern läßt. Die Hauptschwierigkeit hierbei liegt darin, wie in Teil I. sicherzustellen, daß es „im wesentlichen“ (d.h. bis auf Drehstreckungen im Argument) nur endlich viele ganze Funktionen der Ordnung n in $\widetilde{A}_T^0$ gibt. Im Fall $n = 2$ war dies eine fast triviale Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra. Im allgemeinen Fall treten Polynome in $n-1$ Variablen als Koeffizienten auf, deren Nullstellenmengen man dann auf die - offenkundig ungleich schwierigere - Frage zu untersuchen hat, ob gewisse Durchschnitte endlich sind. In diesem Zusammenhang hat Wirths [59] folgende Vermutung aufgestellt:

Vermutung 6.56

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ seien die Polynome $E_k^{(n)}$ ($k \in \mathbb{N}$) in $n-1$ Variablen definiert als die k-ten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt der ganzen nullstellenfreien Funktionen von der Ordnung n und vom Typ 1, d.h. durch

$$\exp(z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}(c_1, \ldots, c_{n-1}) \cdot z^k.$$

Für $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ sei

$$\Lambda(c_1, \ldots, c_{n-1}) := \left\{ k \in \mathbb{N} \mid E_k^{(n)}(c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0 \right\}.$$

Für $L \subseteq \mathbb{N}$ sei

$$N(L) := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \ : \ L = \Lambda(c_1, \ldots, c_{n-1}) \right\}.$$

Ist $L \subsetneq \mathbb{N}$ und $N(L) \neq \emptyset$ und setzt man[17] $n_L := \min N(L)$, so gibt es nur endlich viele $(c_1, \ldots, c_{n_L-1}) \in \mathbb{C}^{n_L-1}$ mit $\Lambda(c_1, \ldots, c_{n_L-1}) \supseteq L$.

Desweiteren stellt sich die Frage, welche Lückenstrukturen bei nullstellenfreien ganzen Funktionen der Ordnung 2 überhaupt möglich sind, was offensichtlich davon abhängt, inwieweit die Koeffizientenfunktionen E_k aus dem Beweis von Satz 6.55 gemeinsame Nullstellen besitzen.

[17] Daß es hierbei entscheidend auf die Minimalität von n_L ankommt, zeigt das Beispiel der unendlich vielen Funktionen $\exp(z^4 + cz^2)$, deren Lückenstrukturen alle in I_2 enthalten sind.

Wie man sich anhand der Reihenentwicklung von $\exp(z^2+cz)$ unschwer überlegt, gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} E_{2n}(c) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)!}\binom{n+k}{2k} c^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(n-k)!} \cdot c^{2k}, \\ E_{2n+1}(c) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+k)!}\binom{n+k}{2k-1} c^{2k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!(n-k)!} \cdot c^{2k+1}. \end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion

$$ {}_1F_1(a,b;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

wobei $(a)_k := a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)$ das Pochhammer-Symbol bezeichnet, erhalten wir also, wenn wir noch

$$(-n)_k = (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \le k \le n), \qquad (-n)_k = 0 \text{ für } k > n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{1}{4^k} \cdot \frac{(2k)!}{k!} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)_k = \frac{1}{4^k} \cdot \frac{(2k+1)!}{k!}$$

beachten:

$$E_{2n}(c) = \frac{1}{n!} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 4^k \frac{k!}{(2k)!} \cdot \frac{(-c^2)^k}{4^k \cdot k!}\right) = \frac{1}{n!} \cdot {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}; -\frac{c^2}{4}\right)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} E_{2n+1}(c) &= \frac{c}{n!} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 4^k \frac{k!}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-c^2)^k}{4^k \cdot k!}\right) \\ &= \frac{c}{n!} \cdot {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}; -\frac{c^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Andererseits ist (cf. Abramowitz / Stegun [1], S. 509, 13.6.17 und 13.6.18):

$$ {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}c^2\right) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot (-2)^n \cdot He_{2n}(c),$$

$$ {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}c^2\right) = \frac{n!}{(2n+1)!} \cdot (-2)^n \cdot \frac{1}{c} \cdot He_{2n+1}(c)$$

mit dem n-ten Hermite-Polynom He_n.

Dies zeigt, daß das Polynom E_n "im wesentlichen" das n-te Hermite-Polynom ist. Da die Hermite-Polynome die orthogonalen Polynome bezüglich der Gewichtsfunktion $e^{-x^2/2}$ auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ sind, sind ihre Nullstellen alle reell und einfach (cf. [1], S. 775, 22.2.15).

Numerische Untersuchungen stützen die Vermutung, daß He_n und He_m für $n \neq m$ keine gemeinsamen Nullstellen außer evtl. der "trivialen" Nullstelle im Nullpunkt besitzen. Träfe dies zu, so würde dies für unseren Kontext bedeuten, daß die Lückenstrukturen, die man von den ganzen nullstellenfreien Funktionen der Ordnung 2 erhält, genau die Strukturen $\mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ sind, deren Semidualität wir bereits aus Korollar 6.49 kennen.

6.5 Ein erster Ansatz zum Beweis von Vermutung 6.1

Es wäre selbstverständlich wünschenswert, eine zum Zalcman-Lemma analoge Methode zu finden, die auf die hier behandelten Lückenreihenprobleme anwendbar ist. Das Zalcman-Lemma selbst mit all seinen mittlerweile bekannten Verfeinerungen ebenso wie die Nevanlinna-Theorie erscheinen hierfür nur bedingt geeignet, da sie beide durch die Cauchy-Riemannsche Betrachtungsweise holomorpher Funktionen geprägt sind, ebenso wie die mit diesen Methoden bisher untersuchten Fragestellungen (s. Abschnitt 2.2. und Kapitel 3). Eine besser auf die „Weierstraßsche Funktionentheorie“ zugeschnittene Methode ist noch nicht entwickelt. Die konkrete Hauptschwierigkeit beim Versuch, das Zalcman-Lemma im Kontext der Lückenreihen zu benutzen, liegt in der fehlenden Invarianz der Lückenstruktur unter Translationen. Es erscheint jedoch durchaus vorstellbar, daß man bei Lückenreihenproblemen auf jene Translationen gänzlich verzichten kann - ähnlich wie eine holomorphe Funktion *entweder* durch das Identitätsprinzip *oder* durch eine Reihenentwicklung eindeutig festgelegt wird.

Im folgenden wollen wir einen ersten denkbaren Ansatz betrachten, wie man ähnlich wie im Zalcman-Lemma, jedoch ohne die dort vorkommenden Translationen, aus den Funktionen in $\widetilde{A}_T^0$ eine nichtkonstante nullstellenfreie ganze Funktion in $\widetilde{A}_T$ konstruieren und damit die Implikationen (NN) $\Longrightarrow$ (E1) und (SD) $\Longrightarrow$ (E2) beweisen könnte. Neben der Hoffnung, ohne jene Translationen auszukommen, stützt sich dieser Ansatz auf zwei weitere Ideen:

Zum einen dürfte es eine Vereinfachung darstellen, das Problem von der Klasse $\widetilde{A}_T^0$ auf die Teilklasse der Polynome in $\widetilde{A}_T^0$ zu reduzieren, was angesichts von Satz 2.7 keine unzulässige Einschränkung darstellt. Auf diese Weise werden wir auf Maximierungsprobleme für die Koeffizienten gewisser Lückenpolynome geführt, die sich freilich selbst einer lediglich numerischen Behandlung als schwer zugänglich erweisen.

Zum anderen leitet uns die Erwartung, daß sich nicht nur die Normalität von $\widetilde{A}_T^0$ durch die Betragsmaxima $M_k(T)$ der Koeffizienten der Funktionen in $\widetilde{A}_T^0$ charakterisieren läßt (wie in Satz 2.10 geschehen), sondern auch die Semidualität von T und die Existenz nichtkonstanter nullstellenfreier ganzer Funktionen in $\widetilde{A}_T$. (Man vergleiche die Beschreibung des Wachstumsverhaltens ganzer Funktionen durch die Beträge der Taylorkoeffizienten in den Sätzen 1.13 und 1.14.)

Bisher sind uns zwischen dem Verhalten der $M_k(T)$ und den Bedingungen (E1), (E2), (NN) und (SD) aus Vermutung 6.1 folgende (teilweise selbstverständlichen) Zusammenhänge bekannt:

$$\text{(E1)} \quad \Longrightarrow \quad M_{k_0}(T) = \infty \text{ für ein } k_0 \in T \tag{6.21}$$

$$\text{(NN)} \quad \Longleftrightarrow \quad M_{k_0}(T) = \infty \text{ für ein } k_0 \in T \text{ oder } \limsup_{k\to\infty} (M_k(T))^{1/k} = \infty \tag{6.22}$$

$$\text{(E2)} \quad \Longrightarrow \quad M_k(T) = \infty \text{ für alle } k \in T \setminus \{0\} \tag{6.23}$$

$$\text{(SD)} \quad \Longrightarrow \quad M_k(T) = \infty \text{ für alle } k \in T \setminus \{0\} \tag{6.24}$$

Wir vermuten, daß auch in (6.21), (6.23) und (6.24) die umgekehrten Implikationen gelten.

Im Falle von (6.24) würde dies bedeuten, daß eine Lückenstruktur T genau dann nicht semidual ist, wenn die duale Hülle V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft aufweist. Dies würde insbesondere die Gültigkeit von “(E2) $\Longrightarrow$ (SD)” sichern. Eine Reihe von Indizien für die Plausibilität dieser Vermutung haben wir in Abschnitt 6.4.2 kennengelernt.

Ebenso würde aus der Umkehrung von (6.24) folgen, daß mit S und T auch $S \cup T$ semidual ist (denn es ist $\widetilde{A}^0_{S\cup T} \supseteq \widetilde{A}^0_S \cup \widetilde{A}^0_T$). Unter zusätzlichen Voraussetzungen ist dies in Satz 6.41 gezeigt worden.

Desweiteren erscheint es denkbar, daß für beliebige Lückenstrukturen T aus $M_{k_0}(T) = \infty$ (für ein $k_0 \in T$) auch $M_{k_0}(T \setminus E) = \infty$ für jede endliche Teilmenge $E \subseteq T \setminus \{0\}$ mit $k_0 \notin E$ folgt; dies zusammen mit der umgekehrten Implikation in (6.24) würde die Vermutung von S. 126 beweisen, daß die Semidualität bei endlicher Verkleinerung der Lückenstruktur erhalten bleibt.

Die Gültigkeit der Umkehrungen von (6.21) und (6.23) würde sich aus der nachstehenden Vermutung ergeben, für deren Formulierung wir zunächst unsere Notation etwas erweitern müssen:

Notation:

Es sei T eine Lückenstruktur. Dann setzen wir für $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$M_k^{(n)}(T) := \max\left\{ \left| a_k^{(f)} \right| \ : \ f \in \widetilde{A}^0_T \cap \mathcal{P}_n \right\}.$$

Es gilt stets $M_k^{(n)}(T) \le \binom{n}{k}$ für $1 \le k \le n$, $M_k^{(n)}(T) = 0$ für $k > n$ sowie $M_k(T) = \lim_{n\to\infty} M_k^{(n)}(T)$.

Vermutung 6.57

Es sei T eine Lückenstruktur.

(1) Falls $M_k(T) < \infty$ für alle $k \in T$ ist, so ist auch $\limsup_{k\to\infty}(M_k(T))^{1/k} < \infty$.

(2) Es sei $k_0 \in T$ mit $M_{k_0}(T) = \infty$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \widetilde{A}^0_T \cap \mathcal{P}_n$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k^{(n)} z^k$, so gewählt, daß $\left| a_{k_0}^{(n)} \right| = M_{k_0}^{(n)}(T)$ gilt. Dann gibt es eine Folge $(c_k)_{k\in T} \subset (0;\infty)$ mit $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, so daß

$$\left| a_k^{(n)} \right|^{1/k} \le c_k \cdot \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{1/k_0} \qquad \text{für alle } k \in T \text{ und alle } n \ge k_0.$$

Satz 6.58

(1) Falls Vermutung 6.57 richtig ist, gilt (NN) $\Rightarrow$ (E1).

(2) Falls Vermutung 6.57 (2) richtig ist, gilt (SD) $\Rightarrow$ (E2).

Beweis:

(1) Es sei $\widetilde{A}^0_T$ nicht normal in $z = 0$. Wegen Satz 2.10 und 6.57 (1) gibt es ein $k_0 \in T$ mit $M_{k_0}(T) = \infty$.
Man wählt die Folge $(f_n)_n \subset \widetilde{A}^0_T$ so, daß $f_n \in \mathcal{P}_n$ und $\left| a_{k_0}^{(n)} \right| = M_{k_0}^{(n)}(T)$ gilt, und setzt $R_n := \rho_n^{-1} := \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{1/k_0}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Es sei

$$g_n(z) := f_n(\rho_n z) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} z^k.$$

Die Funktion g_n ist nullstellenfrei in $\mathbb{D}_{R_n}$, und es ist $b_k^{(n)} = a_k^{(n)} \rho_n^k = a_k^{(n)} \cdot \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{-k/k_0}$. Wegen (2) ist $\left| b_k^{(n)} \right| \leq c_k^k$. Mittels Diagonalverfahren findet man eine Teilfolge, so daß o.E. $b_k^{(n)} \longrightarrow b_k$ $(n \to \infty)$ für alle $k \in T$ gilt. Hierbei ist $b_{k_0} \neq 0$, da $\left| b_{k_0}^{(n)} \right| = 1$ für alle n. Also ist

$$g(z) := \sum_{k \in T} b_k z^k \in \widetilde{A}_T$$

nicht konstant und stellt wegen $|b_k|^{1/k} \leq c_k \longrightarrow 0$ $(k \to \infty)$ eine ganze Funktion dar.
Weiter gilt $g_n(z) \longrightarrow g(z)$ $(n \to \infty)$ kompakt-gleichmäßig in $\mathbb{C}$:

Es seien nämlich $R > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} c_k^k R^k \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| b_k^{(n)} - b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{K} R^j \right)^{-1} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, K \text{ und } n \geq N.$$

Für $n \geq N$ und $|z| \leq R$ folgt:

$$|g_n(z) - g(z)| \leq \sum_{k=1}^{K} \left| b_k^{(n)} - b_k \right| R^k + \sum_{k=K+1}^{\infty} 2 c_k^k R^k \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nach Satz von Hurwitz ist g also nullstellenfrei in $\mathbb{C}$. Damit ist (E1) erfüllt.

(2) Falls T semidual ist, gilt nach Satz 5.13 (2) $M_k(T) = \infty$ für alle $k \in T$. Für beliebiges $k_0 \in T$ findet man dann unter Benutzung von Vermutung 6.57 (2) wie in (1) eine ganze nullstellenfreie Funktion $g \in \widetilde{A}_T$ mit $a_{k_0}^{(g)} \neq 0$. Also gilt (E2).

Die Rolle von (2) in Vermutung 6.57 besteht also darin, kompakt-gleichmäßige Konvergenz und Nichtkonstanz der Grenzfunktion sicherzustellen.

Bemerkung 6.59

(1) Falls Vermutung 6.57 (1) nicht gilt, falls also $M_k(T) < \infty$ für alle $k \in T$, aber $\limsup_{k\to\infty}(M_k(T))^{1/k} = \infty$, ist es prinzipiell nicht möglich, eine ganze nichtkonstante Funktion $g \in \widetilde{A}_T$ ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$ zu konstruieren. (Ist g eine solche mit $a_{k_0}^{(g)} \neq 0$ $(k_0 \geq 1)$, so zeigt die Betrachtung der Folge $(g_n)_n \subseteq \widetilde{A}_T^0$ mit $g_n(z) := g(nz)$, daß $M_{k_0}(T) = \infty$ gilt.) Da $\limsup_{k\to\infty}(M_k(T))^{1/k} = \infty$ andererseits die Nichtnormalität von $\widetilde{A}_T^0$ in $z = 0$ impliziert (Satz 2.10), wäre, wenn dieser Fall auftreten würde, (NN) $\Rightarrow$ (E1) (also das Blochsche Prinzip) nicht gültig.

(2) Falls sich andererseits Vermutung 6.57 (1) dahingehend verschärfen ließe, daß aus $M_k(T) < \infty$ für alle $k \in T$ sogar $\limsup_{k\to\infty}(M_k(T))^{1/k} \leq 1$ folgte, so wären für $\widetilde{A}_T^0$ Normalität im Ursprung und Normalität in $\mathbb{D}$ äquivalent (cf. Fußnote 1 auf S. 93).

Die Plausibilität von Vermutung 6.57 (2) stützt sich in erster Linie auf die Betrachtung der im Falle $T = \mathbb{N}_0$ extremalen Polynome

$$f_n(z) = (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \quad \text{mit } a_k^{(n)} = \binom{n}{k},$$

deren Koeffizienten zugleich eine obere Schranke für den Betrag der Koeffizienten sämtlicher Funktionen in $\widetilde{A}_T \cap \mathcal{P}_n$ bei beliebigem T darstellen. Hier gilt die Vermutung mit

$$c_k = \frac{C(k_0)}{(k!)^{1/k}}, \quad \text{wobei } C(k_0) = (k_0!)^{1/k_0} \cdot k_0. \tag{6.25}$$

Es ist nämlich für $n \geq k_0$

$$\frac{\binom{n}{k}^{1/k}}{\binom{n}{k_0}^{1/k_0}} = \frac{(k_0!)^{1/k_0}}{(k!)^{1/k}} \cdot \frac{[n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)]^{1/k}}{[n \cdot \ldots \cdot (n-k_0+1)]^{1/k_0}} \leq \frac{(k_0!)^{1/k_0}}{(k!)^{1/k}} \cdot \frac{n}{n-k_0+1} \leq \frac{(k_0!)^{1/k_0}}{(k!)^{1/k}} \cdot k_0.$$

Etwas genauer ist $\left(\left[k! \cdot \binom{n}{k}\right]^{1/k}\right)_{1 \leq k \leq n}$ für alle n sogar monoton fallend, wie man sofort aus $\left[k! \cdot \binom{n}{k}\right]^{1/k} = [(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n]^{1/k}$ erkennt.

Die Folge $(c_k)_{k \in T}$ hängt natürlich nicht nur von k_0, sondern auch von T ab.[18] Es sei in diesem Zusammenhang auch darauf hingewiesen, daß die Ordnung $\rho(g)$ der Grenzfunktion g aus der Konstruktion von Satz 6.58 durch die Ordnung von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ beschränkt ist (cf. Satz 1.13).

Ein Beweis von Vermutung 6.57 dürfte mit erheblichen Schwierigkeiten behaftet sein. Es macht sich hier in zugespitzter Form die Disparatheit zwischen Summen- und Produktdarstellung bzw. zwischen „Weierstraßscher“ und „Cauchy-Riemannscher“ Funktionentheorie bemerkbar, welche allgemein die Hauptkomplikation beim Studium von Wertverteilungsfragen bei Lückenreihen darstellt. Auch die numerische Untersuchung erweist sich selbst bei Lückenpolynomen niedrigen Grades als keinesfalls einfach. Im Spezialfall von AP-Lücken (S. 114) sind wir bereits bei Polynomen vom Grad 20 an die Grenzen herkömmlicher Optimierungsalgorithmen gestoßen.

Für die in Vermutung 6.57 betrachteten Extremalpolynome können wir immerhin zeigen, daß sie „so viele Nullstellen wie möglich“ auf dem Rand des Einheitskreises haben. Dies ist der Gehalt des nächsten Satzes, für dessen Beweis wir einige Begriffe und Sätze aus der Funktionentheorie mehrerer Variabler benötigen (cf. [18], S. 90 und S. 101 - 103):

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Eine Menge $X \subseteq G$ heißt **analytisch** (in G), wenn es zu jedem Punkt $Z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subseteq G$ von Z_0 und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$U \cap X = \{Z \in U \mid f_1(Z) = \ldots = f_m(Z) = 0\}$$

gilt, X also lokal die Nullstellenmenge holomorpher Funktionen ist. Die (komplexe) **Dimension von X in Z_0** ist

$$\dim_{Z_0}(X) := n - \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(Z_0)\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}.$$

[18] Man denke sich etwa T durch $2 \cdot T$ ersetzt; dann hat man $(c_k)_{k \in T}$ gemäß $\widetilde{c}_{2k} := \sqrt{c_k}$ auf eine langsamer konvergente Folge zu transformieren.

Ist hierbei m minimal gewählt, so heißt der Punkt Z_0 eine **Singularität** von X, falls $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(Z_0)\right)_{\substack{j=1,\ldots,m\\k=1,\ldots,n}} < m$ ist. Die Menge $S(X)$ der Singularitäten von X ist nirgendsdicht in X ([18], III. Satz 6.16).
Eine analytische Menge X heißt **irreduzibel**, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ in echte analytische Teilmengen $X_1, X_2 \subsetneq X$ gibt. Ist X irreduzibel, so ist $X \backslash S(X)$ zusammenhängend; als **Dimension** $\dim(X)$ **von** X definiert man die von Z_0 unabhängige Dimension $\dim_{Z_0}(X)$ von X in den Punkten $Z_0 \in X \backslash S(X)$. Jede analytische Menge besitzt eine eindeutige Zerlegung $X = \bigcup_{\iota \in J} X_\iota$ in abzählbar viele irreduzible analytische Teilmengen, kurz als irreduzible Komponenten bezeichnet ([18], III. Satz 6.17). Man setzt dann $\dim(X) := \max_{\iota \in J} \dim(X_\iota)$. Es gilt (cf. Rothstein [48], S. 103 f.):

Lemma 6.60

Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}^n$.

(1) **Maximumprinzip für analytische Mengen**
Es sei $X \subseteq G$ eine irreduzible analytische Menge, F sei holomorph in G und $Z_0 \in X$. Hat $|F|$ in Z_0 ein lokales Maximum auf X, so ist F konstant auf X.

(2) Das Gebiet G sei beschränkt und $X \subseteq G$ eine analytische Menge mit $\dim(X) \geq 1$. Dann kommt X dem Rand von G beliebig nahe.

Nunmehr können wir zeigen:

Satz 6.61

Es sei T eine Lückenstruktur, $n \in \mathbb{N}$, $k_0 \in T \cap \{1, \ldots, n\}$ und $l := \#(\{1, \ldots, n\} \backslash T)$ die Zahl der Lückenbedingungen an die Funktionen in $\widetilde{A}_T \cap \mathcal{P}_n$. Dann gibt es ein Polynom $P \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_n$, so daß

$$\left|a_{k_0}^{(P)}\right| = M_{k_0}^{(n)}(T) = \max_{f \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_n} \left|a_{k_0}^{(f)}\right|$$

gilt und $n - l$ der Nullstellen von P auf $\partial\mathbb{D}$ liegen.

Beweis: [19]

Es sei

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k z) \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_n$$

ein beliebiges Polynom mit $\left|a_{k_0}^{(Q)}\right| = M_{k_0}^{(n)}(T)$. Wegen $Q(z) \neq 0$ in $\mathbb{D}$ gilt $|z_k| \leq 1$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir können annehmen, daß Q weniger als $n - l$ Nullstellen auf $\partial\mathbb{D}$ hat. (Andernfalls gilt die Behauptung mit $P := Q$.) O.E. seien $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{D}$, $z_{m+1}, \ldots, z_n \in \partial\mathbb{D}$ mit $l + 1 \leq m \leq n$. Wir betrachten die analytische Menge

$$X := \{Z \in \mathbb{C}^m \,|\, \sigma_{j_k}(Z_1, \ldots, Z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, l\},$$

wobei $\{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, \ldots, n\} \backslash T$ die Indizes der Lücken und σ_j die elementarsymmetrischen Funktionen sind. Weiter sei für $Z \in \mathbb{C}^m$

$$F(Z) := \sigma_{k_0}(Z_1, \ldots, Z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n).$$

[19] Die Beweisidee geht auf den Beweis von Lemma 9 in Dobbertin / Kasten [8] zurück.

Nach Voraussetzung hat $|F|$ in $Z = (z_1, \ldots, z_m)$ ein lokales Maximum auf X. Nach dem Maximumprinzip für analytische Mengen (Satz 6.60 (1)) folgt $F(Z) \equiv const. = e^{it} \cdot M_{k_0}^{(n)}(T)$ auf jeder irreduziblen Komponente von X durch $(z_1, \ldots, z_m)$. Wegen $m \geq l+1$ ist $\dim X \geq 1$. Daher trifft eine der Komponenten von X nach Satz 6.60 (2) (und aus Zusammenhangs- bzw. Stetigkeitsgründen) $\partial(\mathbb{D}^m)$. Es gibt also ein $(w_1, \ldots, w_m) \in \partial(\mathbb{D}^m)$ mit $(w_1, \ldots, w_m) \in X$ und $|F(w_1, \ldots, w_m)| = |F(z_1, \ldots, z_m)| = M_{k_0}^{(n)}(T)$. Es gilt $|w_j| \leq 1$ für $j = 1, \ldots, m$ und $|w_{j_0}| = 1$ für ein $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Damit ist

$$\widetilde{Q}(z) := \prod_{k=1}^{m}(1 + w_k z) \cdot \prod_{k=m+1}^{n}(1 + z_k z) \in \widetilde{A}_T^0 \cap \mathcal{P}_n$$

ein Polynom, das den k_0-ten Koeffizienten maximiert und nur noch $\widetilde{m} \leq m-1$ Nullstellen in $\mathbb{D}$ hat. Falls $\widetilde{m} \leq l$ ist, setzt man $P := \widetilde{Q}$. Ist $\widetilde{m} \geq l+1$, so kann man die gleiche Argumentation wie eben auf $\widetilde{Q}$ anwenden. So fortfahrend, reduziert man die Zahl der Nullstellen in $\mathbb{D}$ so lange, bis man ein Polynom P mit den gewünschten Eigenschaften gefunden hat.

6.6 Kriterien an die Elemente in V_T^{**}

Wie von Kasten und Ruscheweyh bereits in [28], Theorem 4 festgestellt wurde, kann für eine Lückenstruktur T, für die A_T eine nullstellenfreie ganze Funktion g enthält, in der dualen Hülle V_T^{**} kein nichtkonstantes Polynom liegen. Wäre nämlich h ein solches, so wäre $g * h$ gemäß Lemma 6.10 ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$. Diese Beobachtung können wir mithilfe der bisher bewiesenen notwendigen Kriterien für die Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen erheblich verallgemeinern:

Satz 6.62

Es sei T eine Lückenstruktur, und es existiere eine nullstellenfreie ganze Funktion $g \in A_T$. Es sei $h \in V_T^{**}$ nichtkonstant und T_h die Lückenstruktur von h. Dann gilt:

(1) T_h kann keine Fejér-Lücken besitzen.

(2) T_h kann keine AP-Lücken erster oder zweiter Art besitzen.

(3) Es sei $x \in \overline{\mathbb{D}}$ und $\delta(z) := h(z) - e_T(xz) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$. Falls $\delta \not\equiv 0$ ist, so kann $R := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid c_k \neq 0\}$ keine AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \geq 1$ besitzen.

Beweis:

Nach Lemma 6.10 ist $g * h \in A_S$ (mit $S := T_h$) eine nullstellenfreie ganze Funktion. Daher folgen (1) und (2) aus Satz 6.12 und aus Satz 6.20 bzw. Satz 6.22.
Zum Beweis von (3) nehmen wir an, R habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b; d)$ mit $b \geq 1$. Es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$ und

$$\delta_j(z) := \zeta^{-jb} \cdot \delta(\zeta^j z), \qquad g_j(z) := \zeta^{-jb} \cdot g(\zeta^j z) \qquad \text{sowie} \quad h_j(z) := \zeta^{-jb} \cdot h(\zeta^j z)$$

für $j = 1, \ldots, d$. Dann ist $P := \delta_1 + \ldots + \delta_d$ ein Polynom, und wegen $c_b \neq 0$ ist P nichtkonstant. Weiter ist

$$(g * P)(z) = (g * h_1)(z) + \ldots + (g * h_d)(z) - g_1(xz) - \ldots - g_d(xz)$$

in $\mathbb{C}$, wobei $g_1, \ldots, g_d$ und nach Lemma 6.10 auch $g * h_1, \ldots, g * h_d$ Einheiten in $\mathbb{C}$ sind. Aus Satz 6.32 folgt nun, daß $g * P$ und damit auch P konstant sein muß. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Auch dieses Resultat läßt sich noch verbessern. Dazu benutzen wir die einfache Beobachtung, daß die duale Hülle V_T^{**} stets abgeschlossen unter Faltungen ist:

Lemma 6.63

Es sei T eine Lückenstruktur. Für alle $h_1, h_2 \in V_T^{**}$ ist dann auch $h_1 * h_2 \in V_T^{**}$.

Beweis:

Es sei ein $g \in V_T^*$ gegeben. Dann ist $g * h_1$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$, und mit $(g * h_1) * e_T = g * h_1$ (wegen $h_1 \in \widetilde{A}_T$) folgt $g * h_1 \in V_T^*$. Da $h_2 \in V_T^{**}$, ist also $(g * h_1) * h_2 = g * (h_1 * h_2)$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$. Da dies für alle $g \in V_T^*$ gilt, ist $h_1 * h_2 \in V_T^{**}$.

Damit folgt:

Korollar 6.64

Es sei T eine Lückenstruktur, und es existiere eine nullstellenfreie ganze Funktion $g \in A_T$. Es seien $h_1, \ldots, h_m \in V_T^{**}$. Es sei $T_0 := T_{h_1} \cap \ldots \cap T_{h_m}$. Weiter sei $S_j := \left\{ k \in T : \left| a_k^{(h_j)} \right| = 1 \right\}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $S := S_1 \cap \ldots \cap S_m$.
Dann gilt: Falls $T_0 \neq \{0\}$ bzw. $S \neq \{0\}$ ist, dann besitzt T_0 bzw. S keine Fejér-Lücken und keine AP-Lücken erster oder zweiter Art.

Beweis:

Nach Lemma 6.63 ist auch $h := h_1 * \ldots * h_m \in V_T^{**}$, und es ist $h \in A_{T_0}$. Daher folgt die Behauptung über T_0 aus Satz 6.62.
Weiter ist $\left| a_k^{(h)} \right| = 1$ für alle $k \in S$ und $\left| a_k^{(h)} \right| < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \setminus S$. Die Folge $(H_j)_j \subseteq A_0$ sei rekursiv definiert durch $H_1 := h$, $H_{j+1} := h * H_j$ für $j \geq 1$. Gemäß Lemma 6.63 liegen alle H_j in V_T^{**}. Da V_T^{**} kompakt ist, kann man annehmen, daß $(H_j)_j$ kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $H \in V_T^{**}$ konvergiert. Die Lückenstruktur von H ist $T_H = S$, womit die Behauptung über die Lücken von S abermals aus Satz 6.62 folgt.

Einen interessanten neuen Aspekt eröffnet das folgende Resultat:

Satz 6.65

Es sei T eine Lückenstruktur, und A_T enthalte eine nullstellenfreie ganze Funktion. Dann ist V_T^{**} linear unabhängig.

Beweis:

Es seien paarweise verschiedene $h_1, \ldots, h_m \in V_T^{**}$ mit $m \geq 2$ gegeben. Wir nehmen an, es gäbe eine nichttriviale lineare Relation

$$\lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_m h_m = 0$$

mit o.E. $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_m \neq 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine nullstellenfreie ganze Funktion $g \in A_T$. Gemäß Lemma 6.10 sind dann auch $\lambda_1 g * h_1, \ldots, \lambda_m g * h_m$ nullstellenfreie ganze Funktionen mit

$$\lambda_1 g * h_1 + \ldots + \lambda_m g * h_m = 0.$$

Aufgrund des Satzes von Borel gibt es ein $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, so daß sich $\lambda_1 g * h_1$ und $\lambda_{j_0} g * h_{j_0}$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. In Anbetracht der Normierung in $z = 0$ gilt also $g * h_1 = g * h_{j_0}$, und wegen $g \in A_T$ zieht dies $h_1 = h_{j_0}$ nach sich, im Widerspruch zur Wahl der h_j. Dies zeigt die Behauptung.

Bemerkung 6.66

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.65 ist insbesondere V_T selbst linear unabhängig. Daraus folgt z.B. unmittelbar Satz 6.22 über AP-Lücken zweiter Art, denn in der dortigen Situation ist V_T linear abhängig.

6.7 Eine denkbare Verallgemeinerung des Konzeptes der Lückenreihen

Für das Studium von Normalitätsfragen bei Lückenreihen könnte es sich möglicherweise als nützlich erweisen, die Lückenbedingung, daß gewisse Koeffizienten verschwinden, durch die Bedingung zu ersetzen, daß sie lediglich "klein" sind.[20] In diesem Zusammenhang ist es eine wichtige Frage, ob die folgende Vermutung zutrifft:

Vermutung 6.67

Es sei T eine Lückenstruktur, und $\widetilde{A}_T^0$ sei normal. Dann gibt es eine Folge $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ positiver Zahlen, so daß die Familie

$$\left\{ f \in A_0 \ : \ f(z) \neq 0 \text{ in } \mathbb{D}, \left| a_k^{(f)} \right| \leq \varepsilon_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \setminus T \right\}$$

ebenfalls normal ist.

Sollte dies der Fall sein, so ergibt sich als nächste Frage natürlich, wie "groß" die ε_k gewählt werden können: Ist die Wahl $\varepsilon_k = \varepsilon^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus T$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ möglich? Oder gar $\varepsilon_k = 1$ für alle k?

Für AP-Lücken können wir die Gültigkeit von Vermutung 6.67 dank des Satzes von Cartan relativ einfach verifizieren:

Satz 6.68

Es sei T eine Lückenstruktur mit AP-Lücken erster Art vom Typ $(0; d)$. Dann ist

$$\mathcal{F}_T := \left\{ f \in A_0 \ : \ f(z) \neq 0 \text{ in } \mathbb{D}, \left| a_k^{(f)} \right| \leq 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \setminus T \right\}$$

normal in $\mathbb{D}$.

[20] Als einen Versuch in dieser Richtung kann man auch das Konzept der sog. Ostrowskii-Lücken ansehen (cf. Erdös / Fried [11]): Man sagt, eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius 1 habe **Ostrowskii-Lücken** vom Typ ρ $(0 < \rho < 1)$, wenn es Folgen $(m_k)_k$ und $(n_k)_k$ gibt mit $m_k < n_k$ und $\lim_{k \to \infty} \frac{n_k}{m_k} > 1$, so daß $|a_k| < \rho^k$ für alle k mit $m_k \leq k \leq n_k$ gilt.

Beweis:

Erneut kann man o.E. $T \cap I_d = \{0\}$ annehmen.
Es sei ein $r \in (0;1)$ gegeben, und es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$. Für $f \in \mathcal{F}_T$ und $f_j(z) := f(\zeta^j z)$ $(j = 1, \dots, d)$ gilt dann

$$f_1(z) + \ldots + f_d(z) = d \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{kd}^{(f)} z^{kd} =: Q(z) \qquad \text{in } \mathbb{D}.$$

Wegen $|a_{kd}^{(f)}| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$|Q(z)| \leq d \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |z|^{kd} < \frac{d}{1 - r^d} =: M$$

für alle $z \in \mathbb{D}_r$. Daher sind in der Gleichung

$$f_1 + \ldots + f_d - (Q + M) + M = 0$$

alle Summanden nullstellenfrei in $\mathbb{D}_r$, so daß wir den Satz von Cartan anwenden können. Aufgrund der Normierung in $z = 0$ tritt stets Fall (a) ein, und es folgt, daß $\left(\frac{1}{M} \cdot f_d\right)_{f \in \mathcal{F}_T}$ und damit $\mathcal{F}_T$ normal in $\mathbb{D}_r$ sind.
Da dies für alle $r \in (0;1)$ gilt, ist $\mathcal{F}$ normal in $\mathbb{D}$.

Analog dazu können wir auch Satz 6.39 verallgemeinern:

Satz 6.69

Die Lückenstruktur T habe AP-Lücken erster Art vom Typ $(b;d)$ mit $b \geq 1$ und $T \cap (b + d \cdot \mathbb{Z}) = \{b\}$. Es sei $M_b(T) < \infty$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$ die Familie

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \left\{ f \in A_0 \ : \ f(z) \neq 0 \text{ in } \mathbb{D}, \left| a_k^{(f)} \right| \leq 1 \text{ für } k \notin T, \left| a_1^{(f)} \cdot \ldots \cdot a_{d-1}^{(f)} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

normal in $\mathbb{D}$.

Beweis:

Der Beweis von Satz 6.39 bleibt fast wörtlich gültig. Man hat lediglich zu beachten, daß hier für $P_n := f_{1,n} + \ldots + f_{d,n}$ (mit den dortigen Notationen) die Beziehung $P_n(z) = d \cdot a_b^{(n)} \cdot z^b + R(z)$ mit

$$|R^{(\mu)}| \leq d \cdot \sum_{k=\mu}^{\infty} k \cdot \ldots \cdot (k - \mu + 1) \cdot r^{k-\mu} = \frac{d\mu!}{(1-r)^{\mu+1}}$$

für alle $\mu \in \mathbb{N}_0$, $r \in (0;1)$ und $z \in \mathbb{D}_r$ gilt.

Mit wesentlich schwächeren Hilfsmitteln als dem Satz von Cartan läßt sich der folgende Spezialfall von Satz 6.68 beweisen; wir geben zwei Beweisvarianten an, aus denen recht klar hervorgeht, wo die Schwierigkeiten beim Beweis von Vermutung 6.67 liegen.

Satz 6.70

Es sei T eine endliche Lückenstruktur. Dann ist

$$\mathcal{F}_T := \left\{ f \in A_0 \ : \ f(z) \neq 0 \text{ in } \mathbb{D}, \left| a_k^{(f)} \right| \leq 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \setminus T \right\}$$

normal in $\mathbb{D}$.

Beweis:

O.E. darf man annehmen, daß $T = \{0, \ldots, N\}$ mit einem $N \geq 2$ ist. Wäre $\mathcal{F}_T$ nicht normal, so gäbe es nach Satz 2.10 eine Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}_T$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k$, und ein $\widetilde{k} \in \{1, \ldots, N\}$, so daß $a_{\widetilde{k}}^{(n)} \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ gilt.

Variante 1:

Nach geeigneter Teilfolgenauswahl kann man o.E. annehmen, daß

$$\max_{k=1,\ldots,N} \left| a_k^{(n)} \right|^{1/k} = \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{1/k_0}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ gilt.

Es sei $R_n := \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{1/k_0}$ und $\rho_n := \frac{1}{R_n}$, so daß $R_n \longrightarrow \infty$ und $\rho_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ gilt. Es sei

$$g_n(z) := f_n(\rho_n \cdot z) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} z^k.$$

Dann ist g_n holomorph und nullstellenfrei in $|z| < R_n$, und es ist

$$b_k^{(n)} = a_k^{(n)} \rho_n^k = a_k^{(n)} \cdot \left| a_{k_0}^{(n)} \right|^{-k/k_0}.$$

Also gilt $\left| b_{k_0}^{(n)} \right| = 1$ und $\left| b_k^{(n)} \right| \leq 1$ für alle n und alle $k = 1, \ldots, N$ sowie $b_k^{(n)} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ für alle $k \geq N+1$. Nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge kann man o.E. $b_k^{(n)} \longrightarrow b_k$ $(n \to \infty)$ für alle $k = 1, \ldots, N$ annehmen. Dann ist $(g_n)_n$ $\mathcal{K}$-konvergent in $\mathbb{C}$ gegen

$$g(z) := 1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^k.$$

Nach Satz von Hurwitz ist g also nullstellenfrei in $\mathbb{C}$. Andererseits ist g wegen $|b_{k_0}| = 1$ nicht konstant. Dies widerspricht dem Fundamentalsatz der Algebra.

Variante 2:

Es sei $A_n := \max_{k=1,\ldots,N} \left| a_k^{(n)} \right|$. Nach evtl. Teilfolgenauswahl darf man o.E. annehmen, daß für alle $k = 1, \ldots, N$ die Folge $\left(\frac{\left| a_k^{(n)} \right|}{A_n} \right)_n$ gegen ein $\lambda_k \in [0; 1]$ konvergiert. Hierbei können nicht alle λ_k Null sein. Es sei

$$k_0 := \min \{ k \in \{1, \ldots, N\} \mid \lambda_k > 0 \}.$$

Wegen $a_{k_0}^{(n)} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$ und nach Wahl von k_0 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $r \in (0; 1)$, so daß

$$\left| a_{k_0}^{(n)} \right| \cdot r^{k_0} \geq (N-1) \cdot \left| a_k^{(n)} \right| \cdot r^k + \frac{2}{1-r}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{k_0\}$ und alle $n \geq n_0$ gilt. (Um dies einzusehen, hat man die Fälle $\lambda_k > 0$ und $\lambda_k = 0$ zu unterscheiden!)

Setzt man $g_n(z) := a_{k_0}^{(n)} z^{k_0}$, so folgt für alle $n \geq n_0$ und alle z mit $|z| = r$:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - g_n(z)| &\leq 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{N} \left| a_k^{(n)} \right| \cdot r^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} r^k \\ &\leq \left| a_{k_0}^{(n)} \right| \cdot r^{k_0} - \frac{2}{1-r} + \frac{1}{1-r} < |g_n(z)|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouche hat f_n also für $n \geq n_0$ Nullstellen in $\mathbb{D}_r$, im Widerspruch zur Voraussetzung!

Die Argumentation in der ersten Variante lehnt sich natürlich an den Beweis von Satz 6.58 (1) an. Sollte Vermutung 6.57 zutreffen, so bestünde Anlaß zu der Hoffnung, daß sie sich auch noch auf die Klassen $\mathcal{F}_T$ anstelle von $\widetilde{A}_T$ erweitern läßt. In diesem Fall würde man mit exakt der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 6.58 aus der Nichtnormalität von $\mathcal{F}_T$ eine ganze nullstellenfreie Funktion in $\widetilde{A}_T$ gewinnen[21], womit insbesondere $\widetilde{A}_T$ als nichtnormal nachgewiesen und Vermutung 6.67 verifiziert wäre.

[21] Zu beachten hat man dabei lediglich, daß die Beschränktheit der zu $\mathbb{N} \backslash T$ gehörigen Koeffizienten dazu führt, daß die Grenzfunktion die erwünschten Lücken hat.

Kapitel 7

Semidualität bei zwei Funktionen

In diesem abschließenden Kapitel widmen wir uns dem Problem der Semidualität zwei- und mehrelementiger Mengen. Leider ist unser Wissensstand hierüber noch rudimentärer als bei den in Kapitel 6 behandelten Lückenreihen: Bisher können wir die Frage nach der Semidualität zwar für eine Reihe von Beispielen beantworten, ein umfassendes Gesamtbild ergibt sich daraus jedoch leider noch nicht. Immerhin legen unsere Resultate den Eindruck nahe, daß zweielementige Mengen "in der Regel" nicht semidual sind; die einzigen uns bekannten Fälle semidualer zweielementiger Mengen sind diejenigen, in denen die "triviale" semiduale Funktion $z \mapsto 1 + z^{k_0}$ enthalten ist, welche bekanntlich schon im einelementigen Fall eine Sonderrolle gespielt hat.

Bei der Prüfung der Semidualität einer Menge $V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq A_0$ mit $m \geq 2$ können wir uns weitgehend auf den Fall beschränken, daß die einzelnen Funktionen f_j sämtlich semidual sind, da sich die Nicht-Semidualität eines f_j wegen $V^{**} \supseteq V_{f_j}^{**}$ "in aller Regel" auf V überträgt - jedenfalls in den uns bislang bekannten Fällen von Nichtsemidualität, in denen ja stets $V_{f_j}^{**}$ die (schwache) Umgebungseigenschaft erfüllt (cf. Lemma 5.12). Außerdem sollen sich die einzelnen Funktionen selbstredend nicht nur um Drehstreckungen im Argument unterscheiden, d.h. es soll keine $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $j \neq k$ geben, so daß $f_j(z) = f_k(xz)$ für ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt.

Schließlich ist es, sofern mindestens eine der Funktionen f_j in $A_{\mathbb{N}_0}$ liegt (ihre Entwicklung um 0 also überhaupt keine Lücken aufweist), in Anbetracht von Satz 5.8 gerechtfertigt, $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ anzunehmen.

7.1 Kriterien für die Nichtsemidualität zweielementiger Mengen

Auch im Fall mehrelementiger Mengen V dienen uns stets die Umgebungseigenschaft oder die schwache Umgebungseigenschaft der dualen Hülle V^{**} zum Nachweis der Nichtsemidualität. Daher besteht unsere Aufgabe darin, die duale Menge V^* auf Normalität bzw. Beschränktheit einzelner Koeffizienten zu untersuchen. Wie wir sehen werden, bringen uns selbst vermeintlich einfache und naheliegende Beispiele an die Grenzen dessen, was uns an Werkzeugen aus der Normalitätstheorie zur Verfügung steht.

In einigen speziellen Situationen erweist sich erneut der Satz von Cartan als nützlich:

Satz 7.1

Es seien S und T Lückenstrukturen mit $S \neq T$, und es sei $D := (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ die symmetrische Differenz von S und T. Es gebe ein $d \geq 2$ mit $D \cap I_d = \emptyset$. Weiter gelte $\min D = \min(D \cup ((S \cap T) \setminus I_d)) =: k_0$. Es sei $V = \{e_S, e_T\}$. Dann hat V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in k_0. Insbesondere ist V nicht semidual.

Beweis:

Es sei $\zeta := e^{2\pi i/d}$. Es sei ein $g \in V^*$ gegeben. Dann sind $g * e_S$ und $g * e_T$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$. Es sei

$$f_j(z) := (g * e_S)(\zeta^j z), \qquad f_{d+j}(z) := (g * e_T)(\zeta^j z) \quad \text{für } j = 1, \ldots, d.$$

Aufgrund der geometrischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned} f_1 + \ldots + f_d &= d \cdot g * e_S * e_{I_d} = d \cdot g * e_{S \cap I_d}, \\ f_{d+1} + \ldots + f_{2d} &= d \cdot g * e_T * e_{I_d} = d \cdot g * e_{T \cap I_d}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $S \cap I_d = T \cap I_d$ nach Voraussetzung. Also gilt

$$f_1 + \ldots + f_d - f_{d+1} - \ldots - f_{2d} = 0,$$

und alle f_j sind Einheiten in $\mathbb{D}$, so daß der Satz von Cartan anwendbar ist. Für jede zugehörige C-Klasse S_0 muß angesichts der Normierung im Nullpunkt $S_0 \cap \{1, \ldots, d\} \neq \emptyset$, $S_0 \cap \{d+1, \ldots, 2d\} \neq \emptyset$ gelten.

Annahme: Es gibt eine Folge $(g_n)_n$ in V^*, $g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k$, so daß $b_{k_0}^{(n)} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$ gilt. Dann folgt die Existenz eines $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$, so daß nach eventueller Teilfolgenauswahl die Folge

$$\left(\frac{(g_n * e_S)(\zeta^{j_0} z)}{(g_n * e_T)(z)} \right)_n$$

kompakt gleichmäßig in $\mathbb{D}$ konvergiert.

Die Taylorentwicklungen von $(g_n * e_S)(\zeta^{j_0} z)$ und von $(g_n * e_T)(z)$ um 0 stimmen im nullten bis $(k_0 - 1)$-ten Koeffizienten überein; gilt nämlich $k \in S \cup T$ für ein $k \in \{1, \ldots, k_0 - 1\}$, so folgt aus der Voraussetzung zunächst $k \in S \cap T$ und sodann $k \in I_d$, also $\zeta^{j_0 k} = 1$. Daher hat, falls man o.E. $k_0 \in T \setminus S$ annimmt, $\frac{(g_n * e_S)(\zeta^{j_0} z)}{(g_n * e_T)(z)}$ die Entwicklung

$$\frac{(g_n * e_S)(\zeta^{j_0} z)}{(g_n * e_T)(z)} = 1 - b_{k_0}^{(n)} z^{k_0} + \ldots .$$

Hieraus ersieht man, daß $(b_{k_0}^{(n)})_n$ beschränkt sein muß.

Dieser Widerspruch zeigt die Gültigkeit der schwachen Umgebungseigenschaft in k_0 und damit die Nichtsemidualität von V.

Korollar 7.2

(1) Es seien S und T Lückenstrukturen mit $S \neq T$. Es gebe ein $d \geq 2$ mit $S, T \supseteq I_d$. Weiter sei $\min((S \cup T) \setminus (S \cap T)) = \min((S \cup T) \setminus (S \cap T \cap I_d))$. Dann ist $\{e_S, e_T\}$ nicht semidual.

(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ist die Menge $\left\{ z \mapsto \frac{1}{1-z^m}; z \mapsto \frac{1}{1-z^n} \right\}$ nicht semidual.

Beweis:

(1) folgt sofort aus Satz 7.1. (2) ergibt sich aus (1) mit $d := kgV(m, n)$.

Die Aussage in Teil (2) wurde für den Fall $n = 2$, $m = 1$ erstmals von Kasten und Ruscheweyh in [28], Theorem 5 (2) gezeigt. Sie läßt sich noch weiter verallgemeinern, auf den Fall, daß man im Zähler die konstante Funktion 1 durch eine holomorphe Funktion ersetzt, sofern diese einigen - leider sehr technischen - Bedingungen an die Koeffizienten genügt:

Satz 7.3

Es sei $h \in A_0$, $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, und es sei

$$V = \left\{ z \mapsto \frac{h(z)}{1 - z^m}, z \mapsto \frac{h(z)}{1 - z^n} \right\}.$$

Weiter gelte:

(1) Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$ und ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so daß

$$\sum_{k=0}^{jnt} c_{km} + \alpha \sum_{k=0}^{jmt} c_{kn} = 0$$

für alle $j \geq 1$ gilt. Es sei $p := mnt$, und es gelte für alle $j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{1, \ldots, p\}$ mit $j_1 + j_2 \leq p$ und $k_1 + k_2 \leq p$:

$$j_1 + k_1\alpha \neq 0 \text{ oder } (j_2 + k_2\alpha \neq 0 \text{ und } j_2 + k_2\alpha \neq p(1 + \alpha)). \tag{7.1}$$

(2) Weder $z \mapsto \frac{h(z)}{1-z^m}$ noch $z \mapsto \frac{h(z)}{1-z^n}$ hat die Gestalt $z \mapsto 1 + az^m$.

Dann ist V nicht semidual.

Beweis:

Es sei $\zeta := e^{2\pi i/p}$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{h(z)}{1 - z^m} \quad = \quad & 1 + c_1 z + \ldots + c_{m-1} z^{m-1} \\ & + (1 + c_m) z^m + (c_1 + c_{m+1}) z^{m+1} + \ldots + (c_{m-1} + c_{2m-1}) z^{2m-1} \\ & + (1 + c_m + c_{2m}) z^{2m} + (c_1 + c_{m+1} + c_{2m+1}) z^{2m+1} + \ldots . \end{aligned}$$

Es sei $g \in V^*$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(g)} z^k$. Dann ist

$$0 \neq g(z) * \frac{h(z)}{1 - z^m} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k \qquad \text{in } \mathbb{D}$$

mit $\gamma_{km} = b_{km}^{(g)} \cdot (1 + c_m + \ldots + c_{km})$ für $k \geq 1$.

Es sei

$$f_j(z) := \left(g(z) * \frac{h(z)}{1 - z^m} \right) (\zeta^j z) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, p.$$

Dann ist nach der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} f_1(z) + \ldots + f_p(z) \quad &= \quad p \cdot (1 + \gamma_p z^p + \gamma_{2p} z^{2p} + \ldots) \\ &= \quad p \cdot \left(1 + b_p^{(g)} \sum_{k=0}^{nt} c_{km} z^p + b_{2p}^{(g)} \sum_{k=0}^{2nt} c_{km} z^{2p} + \ldots \right), \end{aligned}$$

und alle f_j sind nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ mit $f_j(0) = 1$.
Für

$$f_{p+j}(z) := \alpha \cdot \left(g(z) * \frac{h(z)}{1-z^n}\right)(\zeta^j z) \qquad (1 \le j \le p)$$

gilt entsprechend:

$$f_{p+1}(z) + \ldots + f_{2p}(z) = \alpha p \cdot \left(1 + b_p^{(g)} \sum_{k=0}^{mt} c_{kn} z^p + b_{2p}^{(g)} \sum_{k=0}^{2mt} c_{kn} z^{2p} + \ldots\right).$$

Mit (1) folgt

$$f_1 + \ldots + f_p + f_{p+1} + \ldots f_{2p} = p \cdot (1+\alpha),$$

und alle f_j $(j = 1, \ldots, 2p)$ sind Einheiten in $\mathbb{D}$ mit $f_j(0) = 1$ für $1 \le j \le p$ und $f_j(0) = \alpha$ für $p+1 \le j \le 2p$. Wegen (7.1) ist $1 + \alpha \ne 0$. (Um dies einzusehen, wähle man $j_1 = j_2 = k_1 = k_2 = 1$.) Daher ist auch $f_{2p+1}(z) := -p(1+\alpha)$ eine Einheit in $\mathbb{D}$.
Wir wenden auf die Borelsche Gleichung $f_1 + \ldots + f_{2p+1} = 0$ den Satz von Cartan an. Es ist $S = \{1, \ldots, 2p+1\}$ eine zugehörige C-Klasse:

Andernfalls träte Fall (2) des Satzes von Cartan ein, und es gäbe zwei disjunkte C-Klassen S_1, S_2. Wegen der Normierung in $z = 0$ müßte stets

$$\sum_{j \in S_1} f_j(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j \in S_2} f_j(0) = 0$$

gelten, d.h. es gäbe $j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{1, \ldots, p\}$, nämlich $j_\mu := \#(S_\mu \cap \{1, \ldots, p\}$, $k_\mu := \#(S_\mu \cap \{p+1, \ldots, 2p\})$, so daß $j_1 + j_2 \le p$, $k_1 + k_2 \le p$ und

$$j_1 + k_1\alpha = j_2 + k_2\alpha = 0 \qquad (\text{ falls } 2p+1 \notin S_1 \cup S_2)$$

bzw.

$$j_1 + k_1\alpha = 0, \quad j_2 + k_2\alpha = p(1+\alpha) \qquad (\text{ falls } 2p+1 \in S_1 \cup S_2 \text{ und o.E. } 2p+1 \in S_2)$$

gilt. Dies steht im Widerspruch zu (7.1).

Nach dem Satz von Cartan ist also die Familie $\left\{\frac{1}{p(1+\alpha)} \cdot \left(g(z) * \frac{h(z)}{1-z^m}\right) \,:\, g \in V^*\right\}$ und somit auch $\left\{g(z) * \frac{h(z)}{1-z^m} \,:\, g \in V^*\right\}$ und ebenso $\left\{g(z) * \frac{h(z)}{1-z^n} \,:\, g \in V^*\right\}$ normal in $\mathbb{D}$. Da $g(z) * \frac{h(z)}{1-z^m}$ für $g \in V^*$ den m-ten Koeffizienten $b_m^{(g)} \cdot (1 + c_m)$, $g(z) * \frac{h(z)}{1-z^n}$ hingegen (wegen $n > m$) den m-ten Koeffizienten $b_m^{(g)} \cdot c_m$ hat und entweder $c_m \ne 0$ oder $1 + c_m \ne 0$ ist, folgt die Beschränktheit von $\left\{b_m^{(g)} \mid g \in V^*\right\}$. Wegen (2) ergibt sich hieraus die Nichtsemidualität von V.

Es ist ungeklärt, inwieweit die Voraussetzung (1) verzichtbar ist.

Satz 7.4

Es seien $f_1, \ldots, f_m \in A_0$. Es gebe $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so daß die Funktion $P := c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m$ ein nichtkonstantes Polynom ist und

$$\sum_{j \in I} c_j \ne 0 \qquad \text{für jede nichtleere echte Teilmenge } I \subsetneq \{1, \ldots, m\}$$

gilt. Falls

(1) P nicht die Gestalt $z \mapsto P(0) + az^k$ hat

oder

(2) $P(z) = P(0) + az^{k_0}$ für ein $k_0 \geq 1$ ist, aber kein f_j die Gestalt $z \mapsto 1 + bz^{k_0}$ mit $b \neq 0$ hat,

dann ist $V := \{f_1, \ldots, f_m\}$ nicht semidual.

Beweis:

Es sei $g \in V^*$. Dann sind $f_1 * g, \ldots, f_m * g$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ mit

$$c_1 f_1 * g + \ldots + c_m f_m * g = P * g \in \mathcal{P}_d,$$

wobei $d := \deg(P)$. Nach Satz 6.31 ist $\{P * g \mid g \in V^*\}$ gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{D}$.
Im Fall (1) gibt es $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, d\}$, $k_1 \neq k_2$, mit $a_{k_1}^{(P)} \neq 0$ und $a_{k_2}^{(P)} \neq 0$. Es folgt, daß $\left\{a_{k_1}^{(g)} \mid g \in V^*\right\}$ und $\left\{a_{k_2}^{(g)} \mid g \in V^*\right\}$ beschränkt sind. Somit hat V^{**} die Umgebungseigenschaft bezüglich der Lückenstruktur $\{0, k_1, k_2\}$. Aus Lemma 5.12 folgt die Nichtsemidualität von V.
Im Fall (2), $P(z) = P(0) + az^{k_0}$, ist $a \neq 0$, da P nicht konstant ist, und es folgt die Beschränktheit von $\left\{a_{k_0}^{(g)} \mid g \in V^*\right\}$, so daß V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in k_0 hat. Da kein f_j die Gestalt $z \mapsto 1 + bz^{k_0}$ hat, ist dies hinreichend für die Nichtsemidualität von V.

Das Beispiel $m = 2$, $f_1(z) = f_2(z) := 1 + z$ zeigt, daß die auf den ersten Blick etwas technisch erscheinenden Voraussetzungen (1) und (2) unverzichtbar sind.

Korollar 7.5

Es seien S und T semiduale Lückenstrukturen, und die symmetrische Differenz $D := S \setminus T \cup T \setminus S$ sei nichtleer und endlich. Dann ist $\{e_S, e_T\}$ nicht semidual.

Beweis:

Die Differenz $e_S - e_T$ ist ein nichtkonstantes Polynom. Daher folgt die Behauptung aus Satz 7.4.[1]

Angesichts von Satz 7.1 und Korollar 7.5 stellt sich die Frage, ob für zwei verschiedene semiduale Lückenstrukturen S, T die Menge $\{e_S, e_T\}$ stets nicht-semidual ist.
Von Kasten und Ruscheweyh wurde gezeigt ([28], Theorem 5 (1)):

Satz 7.6

Es seien $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $a_1 \neq a_2$, und es sei

$$V := \left\{ z \mapsto \frac{1 - a_1 z}{1 - z}; z \mapsto \frac{1 - a_2 z}{1 - z} \right\}.$$

Dann besitzt V^{**} die Umgebungseigenschaft bezüglich $\mathbb{N}_0$. Insbesondere ist V nicht semidual.

[1] Das Resultat ist auch ein Spezialfall von Satz 7.1, freilich nur im Falle der dort formulierten zusätzlichen Voraussetzung an $\min D$.

Beweis:

Für $g \in V^*$ und $j = 1, 2$ gilt

$$0 \neq g(z) * \frac{1 - a_j z}{1 - z} = a_j \cdot g(z) + (1 - a_j) \cdot g(z),$$

also

$$g(z) \neq \frac{a_j}{a_j - 1} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D};$$

zudem läßt g natürlich den Wert ∞ aus. Nach dem FNT ist V^* also normal, so daß V^{**} der Umgebungseigenschaft bezüglich $\mathbb{N}_0$ genügt und V nicht semidual ist.

Mittels Satz 5.15 folgt daraus auch die Nichtsemidualität von

$$\left\{ z \mapsto \frac{1 - a_1 z^n}{1 - z^n}; z \mapsto \frac{1 - a_2 z^n}{1 - z^n} \right\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Verallgemeinerung dieses Resultats auf den Fall, daß im Zähler und Nenner verschiedene Exponenten stehen, gelingt uns leider nur um den Preis, daß wir von zwei zu drei Funktionen übergehen müssen:

Satz 7.7

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ seien paarweise verschieden, und es sei

$$V := \left\{ z \mapsto \frac{1 - a_j z^m}{1 - z^n} \;\middle|\; j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Dann besitzt V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in m. Insbesondere ist V nicht semidual.

Beweis:

Für $g \in V^*$ und $j = 1, 2, 3$ gilt

$$0 \neq g(z) * \frac{1 - a_j z^m}{1 - z^n} = a_j \cdot g(z) * \frac{1 - z^m}{1 - z^n} + (1 - a_j) \cdot (g * e_{I_n})(z),$$

also

$$\frac{g(z) * \frac{1 - z^m}{1 - z^n}}{(g * e_{I_n})(z)} \neq \frac{a_j - 1}{a_j} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Nach dem FNT ist also die Familie

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{g(z) * \frac{1 - z^m}{1 - z^n}}{(g * e_{I_n})(z)} \;\middle|\; g \in V^* \right\}$$

normal und somit (in Anbetracht der Normierung in $z = 0$) lokal gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{D}$.

Fall 1: $m < n$:

Es sei $g \in V^*$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(g)} z^k$. Aufgrund von

$$\frac{1 - z^m}{1 - z^n} = 1 - z^m + z^n - z^{m+n} + - \dots$$

hat man dann die Taylorentwicklung

$$\frac{g(z) * \frac{1-z^m}{1-z^n}}{(g * e_{I_n})(z)} = \frac{1 - b_m^{(g)} z^m + b_n^{(g)} z^n - \ldots}{1 + b_n^{(g)} z^n + b_{2n}^{(g)} z^{2n} + \ldots} = 1 - b_m^{(g)} z^m + \ldots$$

Deswegen und aufgrund der lokal gleichmäßigen Beschränktheit von $\mathcal{F}$ gibt es ein $M < \infty$, so daß $\left|b_m^{(g)}\right| \leq M$ für alle $g \in V^*$ gilt. Also hat V^{**} die schwache Umgebungseigenschaft in m. Da keine der Funktionen $z \mapsto \frac{1-a_j z^m}{1-z^n}$ die Gestalt $z \mapsto 1 + cz^m$ haben kann, ist V also nicht semidual.

Fall 2: $m > n$, $n \not| m$:

Es sei $d \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $dn < m < (d+1)n$ ist. Dann ist

$$\frac{1-z^m}{1-z^n} = 1 + z^n + z^{2n} + \ldots + z^{dn} - z^m + z^{(d+1)n} + \ldots.$$

Für $g \in V^*$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(g)} z^k$ erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{g(z) * \frac{1-z^m}{1-z^n}}{(g * e_{I_n})(z)} &= \frac{1 + b_n^{(g)} z^n + \ldots + b_{dn}^{(g)} z^{dn} - b_m^{(g)} z^m + b_{(d+1)n}^{(g)} z^{(d+1)n} + \ldots}{1 + b_n^{(g)} z^n + \ldots + b_{dn}^{(g)} z^{dn} + b_{(d+1)n}^{(g)} z^{(d+1)n} + \ldots} \\ &= 1 - b_m^{(g)} z^m + \ldots\end{aligned}$$

und hieraus wie im Fall 1 die Beschränktheit von $\left\{ b_m^{(g)} \mid g \in V^* \right\}$ und die Gültigkeit der schwachen Umgebungseigenschaft in m.

Fall 3: $m > n$, $n|m$:

Es sei $m = dn$ mit $d \geq 2$. Dann ist

$$\frac{1-z^m}{1-z^n} = 1 + z^n + z^{2n} + \ldots + z^{(d-1)n},$$

und für $g \in V^*$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(g)} z^k$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{g(z) * \frac{1-z^m}{1-z^n}}{(g * e_{I_n})(z)} &= \frac{1 + b_n^{(g)} z^n + \ldots + b_{(d-1)n}^{(g)} z^{(d-1)n}}{1 + b_n^{(g)} z^n + \ldots + b_{(d-1)n}^{(g)} z^{(d-1)n} + b_{dn}^{(g)} z^{dn} + \ldots} \\ &= 1 - b_{dn}^{(g)} z^{dn} + \ldots,\end{aligned}$$

also ebenfalls die Beschränktheit von $\left\{ b_m^{(g)} \mid g \in V^* \right\}$ und die schwache Umgebungseigenschaft in m.

Bemerkung 7.8

Die Aussage des Satzes ist für zahlreiche Fälle bereits durch frühere Resultate abgedeckt, nämlich dann, wenn bereits die einzelnen beteiligten Funktionen nicht semidual sind und dies über die schwache Umgebungseigenschaft bewiesen wurde. Neue Informationen liefert uns der Satz insofern nur in den Fällen, in denen $n = 1$, $m \geq 2$ ist oder $n = 2$ und m ungerade ist.

Um dies einzusehen, überlegt man sich zunächst, daß man sich in Anbetracht von Satz 5.15 auf den Fall zurückziehen kann, daß m und n teilerfremd sind.

Ist dann $n \geq 3$, so genügt es wegen Satz 5.8, Nichtsemidualität und Gültigkeit der schwachen Umgebungseigenschaft für $f(z) := \frac{1+z^m}{1-z^n}$ nachzuweisen. Wegen $f = e_T$ mit $T := I_n \cup (m + I_n)$ folgen diese jedoch aus Satz 6.38.

Wir wenden uns nun den Fällen zu, in denen uns das in Kapitel 3 bewiesene Normalitätskriterium zur Nichtsemidualität verhilft. Den benötigten Zusammenhang zwischen Faltungen und Ableitungen liefert uns das folgende

Lemma 7.9

Für alle $f \in A_0$, alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} z^k, \tag{7.2}$$

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} * f(z) = \frac{1}{n!} \cdot z^n \cdot f^{(n)}(z), \tag{7.3}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}, \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} * f(z) = \frac{1}{n!} \cdot \left(z^n \cdot f(z)\right)^{(n)}. \tag{7.5}$$

Beweis:

Für $f(z) = z^k$ und $n \leq k$ gilt $\frac{1}{n!} \cdot z^n \cdot f^{(n)}(z) = \binom{k}{n} z^k$. Hieraus folgt aufgrund der Linearität der Faltung

$$\frac{1}{n!} \cdot z^n \cdot f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k^{(f)} z^k \tag{7.6}$$

für alle $f \in A_0$. Setzt man hierin speziell $f(z) = \frac{1}{1-z}$, so ergibt sich

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \cdot z^n \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)} (z) = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}},$$

also (7.2). Mit (7.6) folgt sofort (7.3). (7.4) ergibt sich aus dem binomischen Satz. Schließlich erhält man aus der Leibnizschen Formel sowie aus (7.3) und (7.4):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \cdot \left(z^n f(z)\right)^{(n)} &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(z) \cdot (z^n)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k!} z^k \cdot f^{(k)}(z) \\
&= \frac{1}{(1-z)^{n+1}} * f(z),
\end{aligned}$$

also (7.5).

Damit können wir nunmehr das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen:

Satz 7.10

Es seien $m, p \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ mit $m \geq 2$, $\alpha_m \neq 0$ und $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$. Es sei

$$V := \left\{ z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p} ; z \mapsto \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{(1-z)^{p+k}} \right\}.$$

Dann ist V^* normal. Insbesondere ist V nicht semidual.

Beweis:

Es sei $g \in V^*$ und $h(z) := \frac{1}{(1-z)^p} * g(z)$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $h = e^\lambda$ und $\lambda(0) = 0$.
Es ist $h' = h \cdot \lambda'$, und für $j \geq 2$ hat $h^{(j)}$ die Gestalt

$$h^{(j)} = h \cdot \left((\lambda')^j + \lambda^{(j)} + \sum_{\mu=1}^{m_j} a_\mu^{(j)} \cdot \prod_{\nu=1}^{s_\mu^{(j)}} \lambda^{(d_\nu^{(\mu,j)})} \right)$$

mit $\sum_{\nu=1}^{s_\mu^{(j)}} d_\nu^{(\mu,j)} = j \quad (\mu = 1, \ldots, m_j)$ und $\ 2 \leq s_\mu^{(j)} \leq j-1,\ \ d_\nu^{(\mu,j)} \geq 1$, wie sich leicht mittels Induktion ergibt.
Es sei $\varphi(z) := z \cdot \lambda'(z)$. Dann ist für $k \geq 1$

$$z^k \cdot \lambda^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j^{(k)} z^j \varphi^{(j)}(z) \qquad \text{mit } b_{k-1}^{(k)} = 1,$$

wie man ebenfalls induktiv einsieht. Es folgt für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
z^k h^{(k)}(z) &= h(z) \cdot \left[\left(z\lambda'(z) \right)^k + z^k \lambda^{(k)}(z) + \sum_{j=1}^{m_k} a_j^{(k)} \prod_{\nu=1}^{s_j^{(k)}} \left(z^{d_\nu^{(j,k)}} \lambda^{(d_\nu^{(j,k)})} \right) \right] \\
&= h(z) \cdot \left[\varphi^k(z) + \sum_{j=0}^{k-2} b_j^{(k)} z^j \varphi^{(j)}(z) + z^{k-1} \varphi^{(k-1)}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{m_k} a_j^{(k)} \prod_{\nu=1}^{s_j^{(k)}} \sum_{\sigma=0}^{d_\nu^{(j,k)}-1} b_\sigma^{(d_\nu^{(j,k)})} z^\sigma \varphi^{(\sigma)}(z) \right] \\
&= h(z) \cdot \left[\varphi^k(z) + \sum_{j=0}^{k-2} b_j^{(k)} z^j \varphi^{(j)}(z) + z^{k-1} \varphi^{(k-1)}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{n_k} A_j^{(k)} \cdot \prod_{\nu=1}^{t_j^{(k)}} \left(z^{l_\nu^{(j,k)}} \varphi^{(l_\nu^{(j,k)})}(z) \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.7}$$

mit $\sum_{\nu=1}^{t_j^{(k)}} l_\nu^{(j,k)} \leq k - t_j^{(k)}$ und $2 \leq t_j^{(k)} \leq k-1$ für alle $j = 1, \ldots, n_k$.
Nun ist gemäß (7.4)

$$\frac{1}{(1-z)^{p+k}} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{z^j}{(1-z)^{p+j}},$$

und aus (7.3) folgt für $j \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} * \frac{1}{(1-z)^p} &= \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{d^j}{dz^j} \frac{1}{(1-z)^p} \\
&= \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{p \cdot (p+1) \cdot \ldots \cdot (p+j-1)}{(1-z)^{p+j}} \\
&= \binom{p+j-1}{j} \cdot \frac{z^j}{(1-z)^{p+j}}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{p+k}} &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{k}{j}}{\binom{p+j-1}{j}} \cdot \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} * \frac{1}{(1-z)^p} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!(p-1)!}{(k-j)!(p+j-1)!} \cdot \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} * \frac{1}{(1-z)^p}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun für alle $z \in \mathbb{D}$, wenn man noch (7.3) beachtet:

$$\begin{aligned}0 &\neq g(z) * \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{(1-z)^{p+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_k k!(p-1)!}{(k-j)!(p+j-1)!} \cdot \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} * \frac{1}{(1-z)^p} * g(z) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_k k!(p-1)!}{(k-j)!(p+j-1)!j!} \cdot z^j \cdot h^{(j)}(z) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \widetilde{\alpha}_k \cdot z^k \cdot h^{(k)}(z)\end{aligned}$$

mit $\widetilde{\alpha}_0 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$ und $\widetilde{\alpha}_m \neq 0$.
Setzt man (7.7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}0 &\neq \sum_{k=0}^{m} \widetilde{\alpha}_k z^k h^{(k)}(z) \\ &= h(z) \cdot \Bigg[1 + \widetilde{\alpha}_1 \varphi(z) + \sum_{k=2}^{m} \widetilde{\alpha}_k \varphi^k(z) + \sum_{k=2}^{m} \widetilde{\alpha}_k z^{k-1} \varphi^{(k-1)}(z) \\ &\qquad + \sum_{k=2}^{m} \widetilde{\alpha}_k \sum_{j=0}^{k-2} b_j^{(k)} z^j \varphi^{(j)}(z) + \sum_{k=2}^{m} \widetilde{\alpha}_k \sum_{j=1}^{n_k} A_j^{(k)} \cdot \prod_{\nu=1}^{t_j^{(k)}} \left(z^{l_\nu^{(j,k)}} \varphi^{(l_\nu^{(j,k)})}(z) \right) \Bigg] \\ &= h(z) \cdot \Bigg[1 + \widetilde{\alpha}_m \varphi^m(z) + \widetilde{\alpha}_m z^{m-1} \varphi^{(m-1)}(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k \varphi^k(z) + \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k z^k \varphi^{(k)}(z) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{q} \delta_j \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} \left(z^{k_\nu^{(j)}} \varphi^{(k_\nu^{(j)})}(z) \right) \Bigg]\end{aligned}$$

mit $\sum_{\nu=1}^{s_j} k_\nu^{(j)} + s_j \leq m$ und $2 \leq s_j \leq m-1$ für alle $j = 1, \ldots, q$. Also ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z^{m-1}} \cdot \varphi^m(z) + \varphi^{(m-1)}(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\beta_k}{\widetilde{\alpha}_m} \cdot \frac{1}{z^{m-1}} \cdot \varphi^k(z) \\ +& \sum_{k=1}^{m-2} \frac{\gamma_k}{\widetilde{\alpha}_m} \cdot \frac{1}{z^{m-1-k}} \cdot \varphi^{(k)}(z) + \sum_{j=1}^{q} \frac{\delta_j}{\widetilde{\alpha}_m} \cdot \frac{1}{z^{m-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{s_j} \left(z^{k_\nu^{(j)}} \varphi^{(k_\nu^{(j)})}(z) \right) \neq -\frac{1}{\widetilde{\alpha}_m} \cdot \frac{1}{z^{m-1}}\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.
Hierauf ist das Normalitätskriterium aus Satz 3.11 (mit $n = m$, $k = m-1$) anwendbar.
Es folgt, daß die Familie

$$\left\{ z \mapsto z\lambda'(z) \mid e^\lambda \in F * V^*, \lambda(0) = 0 \right\}$$

mit $F(z) := \frac{1}{(1-z)^p}$ normal ist.
Aufgrund der Normierung in $z=0$ ist diese Familie sogar lokal gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{D}$. Nach dem Maximumprinzip ist auch $\left\{\lambda' \mid e^\lambda \in F * V^*, \lambda(0)=0\right\}$ lokal gleichmäßig beschränkt, so daß nach dem Satz von Marty $\left\{\lambda \mid e^\lambda \in F * V^*, \lambda(0)=0\right\}$ normal und somit - wiederum wegen der Normierung im Ursprung - lokal gleichmäßig beschränkt ist. Damit ist aber auch $F * V^*$ lokal gleichmäßig beschränkt. Gemäß (7.5) ist

$$F * V^* = \left\{ z \mapsto \frac{1}{(p-1)!} \cdot (z^{p-1} g(z))^{(p-1)} \mid g \in V^* \right\}.$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes von Marty unter Beachtung der Normierung in $z=0$ erhält man (im Fall $p \geq 2$) nacheinander die lokal gleichmäßige Beschränktheit von $\left\{z \mapsto (z^{p-1}g(z))^{(p-2)} \mid g \in V^*\right\}$, von $\left\{z \mapsto (z^{p-1}g(z))^{(p-3)} \mid g \in V^*\right\}$ usw. und schließlich von $\left\{z \mapsto z^{p-1}g(z) \mid g \in V^*\right\}$, aufgrund des Maximumprinzips also auch von V^* selbst.[2]
Also ist V^* normal und V nicht semidual.

Wir halten folgendes Resultat, das sich als Spezialfall aus Satz 7.10, nämlich für $V = \left\{ z \mapsto \frac{1}{1-z}; z \mapsto \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \right\}$ ergibt, explizit fest:

Korollar 7.11

Es sei $k \geq 2$. Dann ist $\left\{g \in A_0 \mid g(z) \neq 0, (z^k g(z))^{(k)} \neq 0 \text{ in } \mathbb{D}\right\}$ normal in $\mathbb{D}$.

Die Voraussetzung $m \geq 2$ in Satz 7.10 ist unverzichtbar, wie das folgende Beispiel lehrt:

Beispiel 7.12

Es sei
$$V = \left\{ z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}; z \mapsto \frac{\alpha_1}{(1-z)^p} + \frac{\alpha_2}{(1-z)^{p+1}} \right\}$$
mit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 \neq 0$. Dann ist $M_k(V^*) = \infty$ für alle $k \geq 1$.

Beweis:

Es sei ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(z) := \exp\left(\int_0^z \frac{p}{\alpha_2 \zeta} \left((1+\zeta^{k_0})^n - 1 \right) d\zeta \right).$$

Dann ist h_n holomorph in $\mathbb{D}$ mit $h_n(0)=1$, also $h_n \in A_0$, und h_n ist nullstellenfrei in $\mathbb{D}$.
Es sei $F(z) := \frac{1}{(1-z)^p}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $g_n \in A_0$ mit $F * g_n = h_n$. Wir zeigen $g_n \in V^*$:
Wegen

$$\frac{\alpha_1}{(1-z)^p} + \frac{\alpha_2}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{(1-z)^p} + \frac{\alpha_2 z}{(1-z)^{p+1}} = F(z) + \frac{\alpha_2}{p} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} * F(z)$$

[2] Alternativ kann man die Normalität von V^* aus der von $F * V^*$ natürlich auch mittels Lemma 2.10 folgern.

ist

$$
\begin{aligned}
g_n(z) * \left(\frac{\alpha_1}{(1-z)^p} + \frac{\alpha_2}{(1-z)^{p+1}}\right) &= h_n(z) + \frac{\alpha_2}{p} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} * h_n(z) \\
&= h_n(z) + \frac{\alpha_2}{p} \cdot z h_n'(z) \\
&= h_n(z)(1+z^{k_0})^n \neq 0
\end{aligned}
$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
Da außerdem $g_n(z) * \frac{1}{(1-z)^p} = h_n(z)$ nullstellenfrei ist, ist $g_n \in V^*$. Für die Taylorentwicklung von h_n um 0 erhält man

$$
\begin{aligned}
h_n(z) &= \exp\left(\int_0^z \left(\frac{np}{\alpha_2} \cdot \zeta^{k_0-1} + \dots\right) d\zeta\right) = \exp\left(\frac{np}{\alpha_2 k_0} \cdot z^{k_0} + \dots\right) \\
&= 1 + \frac{np}{\alpha_2 k_0} \cdot z^{k_0} + \dots .
\end{aligned}
$$

Wegen $a_k^{(F)} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ hat g_n die Entwicklung

$$
g_n(z) = 1 + n \cdot \frac{p}{\alpha_2 k_0 a_{k_0}^{(F)}} \cdot z^{k_0} + \dots .
$$

Damit ist $M_{k_0}(V^*) = \infty$ gezeigt.

Für die in diesem Beispiel betrachteten Mengen können wir die Frage nach der Semidualität vorläufig nicht beantworten. Eine naheliegende Strategie für einen etwaigen Beweis der Semidualität könnte es sein, die Existenz von Funktionen in $V^{**} \setminus V^C$ dadurch zum Widerspruch zu führen, daß man aus dem Vorhandensein derartiger Funktionen, welche wegen $V^{***} = V^*$ ja zusätzliche Bedingungen an die Funktionen in V^* liefern würden, die Normalität von V^* folgert. Möglicherweise könnte sich auch Satz 5.14 als hilfreich erweisen.

Mithilfe des Normalitätsresultates von Schwick aus Satz 2.17 können wir schließlich noch zeigen:

Satz 7.13

Es sei $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$
V := \left\{ z \mapsto \frac{1}{1-z} ; z \mapsto 1 + \frac{az^m}{(1-z)^{m+1}} \right\}.
$$

Dann ist V^* normal und V nicht semidual.

Beweis:

Es sei $g \in V^*$. Dann gilt $g(z) \neq 0$ in $\mathbb{D}$, und infolge von (7.3) ist

$$
0 \neq g(z) * \left(1 + \frac{az^m}{(1-z)^{m+1}}\right) = 1 + \frac{a}{m!} \cdot z^m \cdot g^{(m)}(z),
$$

also $g^{(m)}(z) \neq -\frac{m!}{a} \cdot \frac{1}{z^m}$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
Mit Satz 2.17 ergibt sich die Normalität von V^*, so daß V nicht semidual ist.

Die Resultate dieses Abschnitts werfen folgende Frage auf: Unter welchen Bedingungen an $f_1, \ldots, f_n \in A_0$ ist für die Familie derjenigen Funktionen aus A_0, deren Faltungen mit $f_1, \ldots, f_n$ nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ sind, mindestens ein Koeffizient beschränkt? Anders formuliert: Gibt es ein Analogon zum FNT für Faltungen, in dem Sinne, daß die Familie der Funktionen, die bezüglich der Faltung "genügend" viele gegebene Funktionen auslassen, zumindest in einem Koeffizienten beschränkt ist? Daß zumindest zwei "Ausnahmefunktionen" nicht bzw. nicht ohne jede Zusatzvoraussetzung ausreichen, zeigt Beispiel 7.12.

Parallel dazu stellt sich gemäß dem Blochschen Prinzip die Frage nach analogen Resultaten für die Konstanz ganzer Funktionen, deren Faltungen mit gegebenen Funktionen aus A_0 nullstellenfrei sind.

Unsere Untersuchungen legen es daher nahe, nach weitreichenden Verallgemeinerungen der bisherigen Normalitätstheorie zu suchen, die sich ja primär auf den Zusammenhang zwischen Werteverteilung von Differentialpolynomen und Normalität konzentriert hat. Als inspirierend werden sich dabei hoffentlich die mit den derzeit zur Verfügung stehenden Mitteln nicht zu entscheidenden Semidualitätsfragen erweisen, beispielsweise die folgende, die sich ganz natürlich aus Satz 7.10 ergibt:

Es seien $m, p \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ mit $m \geq 2$, $\alpha_m \neq 0$ und $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$, und es seien $x_0, \ldots, x_m \in \overline{\mathbb{D}}$. Ist dann

$$V := \left\{ z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p} ; z \mapsto \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{(1-x_k z)^{p+k}} \right\}$$

nichtsemidual?

Dies motiviert ferner folgende interessante Frage: Es seien $P_1, \ldots, P_n$ Differentialpolynome, $x_1, \ldots, x_n \in \overline{\mathbb{D}}$ und a holomorph (meromorph) in $\mathbb{D}$. Unter welchen Bedingungen ist die Familie der in $\mathbb{D}$ holomorphen (meromorphen) Funktionen f mit $P_1[f](x_1 z) + \ldots + P_n[f](x_n z) \neq a(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ normal?

Daß man dabei nicht unkritisch darauf hoffen darf, daß sich die bisherigen Normalitätsresultate (etwa Satz 3.11) im wesentlichen ungeschmälert übertragen, zeigt das folgende Beispiel: Die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n(z) := e^{nz}$ ist nicht normal in $\mathbb{D}$, es gilt jedoch bei beliebig gegebenen $j, k \in \mathbb{N}$ für $x := \frac{1}{j}$:

$$f_n^j(xz) + f_n^{(k)}(z) = e^{nz}(1 + n^k) \neq 0$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. das Normalitätsresultat von Drasin und Pang & Zalcman auf S. 45 läßt sich in dem eben beschriebenen Sinne nicht ohne jede Zusatzvoraussetzung erweitern.[3]

7.2 Semiduale Mengen mit zwei Elementen

Der bisher einzige uns bekannte Fall von Semidualität bei zwei Funktionen ist derjenige, in dem bereits V^C selbst die schwache Umgebungseigenschaft aufweist, welche

[3] Hier spiegelt sich der Umstand wider, daß es keine zum Satz über die logarithmischen Ableitungen analoge einfache Abschätzung für die Schmiegungsfunktion von Funktionen der Gestalt $\frac{f^{(k)}(xz)}{f(z)}$ mit $x \neq 1$ geben kann.

somit zur Unterscheidung von V^C und V^{**} nicht mehr ausreicht:

Satz 7.14

Es sei S eine semiduale Lückenstruktur, und es sei $k_0 \in \mathbb{N} \setminus S$. Es sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Es ist $T = S$.

oder

(2) Es ist $T = S \cup \{k_0\}$, und es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\left\{g \in \widetilde{A}_T^0 \,:\, \varepsilon \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}$ in $z = 0$ nicht normal ist.

Dann ist $V := \left\{e_T; z \mapsto 1 + z^{k_0}\right\}$ semidual.

Beweis:

Weil S semidual ist, gilt $V_S^{**} = V_S$. Es sei ein $h \in V^{**}$ gegeben. Nach Lemma 5.16 (mit $R := \{k_0\}$) ist $e_S * h \in V_S^{**} = V_S$. Also gibt es ein $x \in \overline{\mathbb{D}}$, so daß $(h * e_S)(z) = e_S(xz)$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Wegen $V^{**} \subseteq \widetilde{A}_{S\cup\{k_0\}}$ (Bemerkung 5.7 (2)) folgt

$$h(z) = e_S(xz) + \widetilde{\gamma} z^{k_0} = e_T(xz) + \gamma z^{k_0}$$

mit gewissen $\widetilde{\gamma}, \gamma \in \mathbb{C}$.
Wir nehmen an, es sei $x \neq 0$ und $\gamma \neq 0$.
Für alle $g \in V^*$ ist dann

$$(g * e_T)(z) \neq 0 \quad \text{und} \quad (g * e_T)(xz) + \gamma a_{k_0}^{(g)} z^{k_0} = (g * h)(z) \neq 0 \quad \text{in } \mathbb{D},$$

also

$$\frac{(g * e_T)(z)}{z^{k_0}} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{(g * e_T)(z)}{z^{k_0}} \neq -\frac{\gamma}{x^{k_0}} \cdot a_{k_0}^{(g)} \quad \text{in } \mathbb{D}_r \setminus \{0\} \;\; \text{mit } r := |x| > 0.$$

Es sei $\varepsilon_0 := 1$, falls $S = T$, $\varepsilon_0 := \varepsilon$, falls $T = S \cup \{k_0\}$. Nach der verallgemeinerten Version des FNT (Satz 2.18) ist dann

$$\left\{z \mapsto \frac{(g * e_T)(z)}{z^{k_0}} \;:\; g \in V^*,\ \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}$$

normal in $\mathbb{D}_r \setminus \{0\}$.
Damit ist auch $\left\{g * e_T \;:\; g \in V^*,\ \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}$ normal in $\mathbb{D}_r \setminus \{0\}$ und als Familie von Einheiten nach Lemma 2.8 somit sogar in $\mathbb{D}_r$.
Es ist $V^* = \left\{g \in A_0 \;:\; (g * e_T)(z) \neq 0 \text{ in } \mathbb{D},\ |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}$; damit und mit $k_0 \notin S$ folgt im Falle $T = S$:

$$\left\{g * e_T \;:\; g \in V^*,\ \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\} = \{g * e_S \;:\; g \in V^*\} = \widetilde{A}_S^0;$$

im Falle $T = S \cup \{k_0\}$ ergibt sich

$$\left\{g * e_T \;:\; g \in V^*,\ \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\} = \left\{g \in \widetilde{A}_T^0 \;:\; \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}.$$

Also müßte $\widetilde{A}_S^0$ bzw. $\left\{g \in \widetilde{A}_T^0 \;:\; \varepsilon_0 \leq |a_{k_0}^{(g)}| \leq 1\right\}$ in $\mathbb{D}_r$ normal sein, im Widerspruch zur Semidualität von S bzw. zur Voraussetzung in (2).
Somit ist $\gamma = 0$ oder $x = 0$, d.h. $h(z) = e_T(xz)$ oder $h(z) = 1 + \gamma z^{k_0}$ (mit $|\gamma| \leq 1$). Dies zeigt $h \in V^C$. Damit ist $V^{**} = V^C$, d.h. die Semidualität von V nachgewiesen.

Bemerkung 7.15

(1) Für $k_1 \neq k_2$ und beliebige Lückenstrukturen S ist die Menge

$$\left\{e_S; z \mapsto 1 + z^{k_1}; z \mapsto 1 + z^{k_2}\right\}$$

aufgrund Lemma 5.12 (1) stets nichtsemidual. Es ist auf diese Weise also nicht möglich, semiduale Mengen aus mehr als zwei Funktionen zu konstruieren.

(2) Für $S := I_2$, $k_0 := 1$, $T := I_2 \cup \{1\}$ ist gemäß Satz 6.39 die Voraussetzung (2) in Satz 7.14 nicht erfüllt, und es ist $M_1(T) < \infty$. Es stellt sich die Frage, ob $\{e_T; z \mapsto 1 + z\}$ dennoch semidual ist; allgemeiner: Bleibt in der Situation von Fall (2) die Aussage des Satzes unabhängig von der Nichtnormalitätsvoraussetzung gültig? Falls nein: Genügt es, daß $M_{k_0}(T) = \infty$ ist?

Korollar 7.16

Es sei S eine semiduale Lückenstruktur, $k_0 \in \mathbb{N} \setminus S$ und $T := S \cup \{k_0\}$. Falls $I_{k_0} \subseteq T$, dann ist $V := \left\{e_T; z \mapsto 1 + z^{k_0}\right\}$ semidual.

Beweis:

Es sei $g_n(z) := \exp\left(z^{k_0} + nz^{2k_0}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $g_n \in \widetilde{A}^0_{I_{k_0}} \subseteq \widetilde{A}^0_T$ und $a^{(g_n)}_{k_0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $(g_n)_n$ ist offensichtlich nicht normal in $z = 0$.
Daher ist $\left\{g \in \widetilde{A}^0_T \ : \ a^{(g)}_{k_0} = 1\right\}$ nicht normal in $z = 0$, so daß die Behauptung aus Satz 7.14 folgt.

Beispiel:

Angewandt auf die (nach Korollar 6.49 semiduale) Lückenstruktur $S := \mathbb{N}_0 \setminus \{k_0\}$ ergibt Korollar 7.16 die Semidualität von

$$\left\{z \mapsto \frac{1}{1-z}; z \mapsto 1 + z^{k_0}\right\}$$

für alle $k_0 \in \mathbb{N}$.

Ausblick

Wir wollen nun die in unseren Betrachtungen aufgetretenen offenen Probleme und Ansätze für weitergehende Untersuchungen abschließend kurz zusammenstellen:

Normalitätstheorie

1.) Inwieweit läßt sich das Normalitätskriterium aus Satz 3.11 auf Familien meromorpher Funktionen verallgemeinern?

2.) Unter welchen Voraussetzungen konstituieren Bedingungen der Form

$$P_1[f](x_1 z) + \ldots + P_m[f](x_m z) \neq a(z)$$

(mit Differentialpolynomen P_j und $x_j \in \overline{\mathbb{D}}$) Normalität einer Familie holomorpher bzw. meromorpher Funktionen? Gelten entsprechende Sätze vom Picardschen Typ? (s. S. 155)

3.) Ist die Vermutung von Cartan und Eremenko (S. 61) auch für $p \geq 6$ richtig?

4.) Wie wir gesehen haben, ist das Zalcman-Lemma im Kontext der Cartanschen Vermutung nicht ohne weiteres anwendbar. Für ein besseres Verständnis des Blochschen Prinzips erscheint es daher wichtig, die Frage zu klären, inwieweit sich der Satz von Cartan auf den Satz von Borel (Satz 4.15) zurückführen läßt.

Lückenreihen

Hier ist die grundlegende Frage, ob die Äquivalenzen (NN) $\Leftrightarrow$ (E1) und (E2) $\Leftrightarrow$ (SD) aus Vermutung 6.1 für beliebige Lückenstrukturen gelten und ob die in Abschnitt 6.5 vermutete Charakterisierung dieser Eigenschaften allein durch die Koeffizientenbetragsmaxima $M_k(T)$ möglich ist; dies umfaßt insbesondere die Frage, ob die Nicht-Semidualität einer Lückenstruktur T äquivalent dazu ist, daß die duale Hülle V_T^{**} die schwache Umgebungseigenschaft besitzt.

Vermutung 6.57 bringt diese Fragen in Zusammenhang mit gewissen Extremalproblemen für Lückenpolynome. Eine eingehendere Untersuchung dieser Probleme erscheint daher lohnenswert. Bereits der relativ übersichtliche Fall $T = \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$, in dem nur eine einzige Lückenbedingung zu behandeln ist, könnte sich als lehrreich erweisen.

Daneben haben sich in Kapitel 6 die folgenden Fragen ergeben:

5.) Sind für beliebige Lückenstrukturen T die Normalität von $\widetilde{A}_T^0$ in $z = 0$ und in $\mathbb{D}$ äquivalent? (s. S. 93)

6.) Gibt es nullstellenfreie ganze Funktionen mit Fabry-Lücken? Welche Normalitäts- bzw. Semidualitätsaussagen sind für Fabrylücken möglich? (s. S. 100)

7.) Noch immer steht eine restlose Klärung der Vermutungen über die Nichtsemidualität von AP-Lückenreihen erster und zweiter Art (Vermutung 6.26 und Vermutung 6.27) und über als Summe von Einheiten darstellbare Polynome (Vermutung 6.29) aus. Deren Gültigkeit würde sich z.B. aus einem Beweis der Vermutung von Cartan und Eremenko für $p \geq 6$ ergeben - oder aus der positiven Beantwortung der folgenden Frage:

8.) Bleibt die Semidualität einer Lückenstruktur beim Entfernen von nur endlich vielen Elementen erhalten? (s. S. 113 und S. 133)

9.) Kann man die Voraussetzung $|a_1 \cdot \ldots \cdot a_{d-1}| \geq \varepsilon$ in Satz 6.39 zu $|a_b| \geq \varepsilon$ abschwächen? Inwieweit sind analoge Normalitätsaussagen auch für andere Lückenstrukturen gültig?

10.) Ist die Vereinigung semidualer Lückenstrukturen stets semidual? (s. Abschnitt 6.4.1)

11.) Inwieweit läßt sich das Vorgehen in Abschnitt 6.4.2, eine semiduale Struktur um "nicht allzu große" Teilmengen von $\mathbb{N}$ zu vergrößern, verallgemeinern, etwa auf den Fall, daß die hinzugefügte Menge Fejér-Lücken hat? Weitere Resultate in dieser Richtung würden die Vermutung "(E2) $\Longleftrightarrow$ (SD)" erhärten.

12.) Ist es richtig, daß eine Lückenstruktur T und die komplementäre Lückenstruktur T^C nicht beide semidual sein können? (s. S. 120)

13.) Was läßt sich über den Durchschnitt semidualer Lückenstrukturen (oder von Lückenstrukturen, die (E1) bzw. (E2) erfüllen) aussagen? (s. S. 126)

14.) Läßt sich Satz 6.55 auf Funktionen endlicher Ordnung verallgemeinern? Trifft die in diesem Kontext von Wirths geäußerte Vermutung 6.56 zu?

15.) Besitzen die Hermite-Polynome nichttriviale gemeinsame Nullstellen? (s. S. 131)

16.) Welche Bedeutung kommt der linearen Unabhängigkeit der dualen Hülle V_T^{**} (bzw. von V_T selbst) im Zusammenhang mit der Frage nach der Semidualität von T zu? (s. S. 139)

17.) Inwieweit ist es "sinnvoll", die Lückenbedingungen in der in Abschnitt 6.7 beschriebenen Weise dahingehend abzuschwächen, daß man von den betreffenden Koeffizienten lediglich verlangt, daß sie "klein" sind? Trifft insbesondere Vermutung 6.67 zu?

Angesichts der prinzipiellen Schwierigkeit beim Studium der Klassen A_T^0 und $\widetilde{A}_T^0$, daß sich die Lückenstruktur aus der Summendarstellung, die Existenz oder Nichtexistenz von Nullstellen hingegen aus der Produktdarstellung der betreffenden Funktionen herleitet, erhebt sich die Frage, inwieweit das Konzept der Lückenreihen durch ein allgemeineres und möglicherweise leichter zu handhabendes Konzept ersetzt werden kann. Zu bedenken ist in diesem Zusammenhang auch, daß bei der Multiplikation von Funktionen zwar die Lückenstruktur vollständig zerstört wird, sich etwaige Normalität jedoch auf die Familie der Produkte überträgt. Dies wirft die - gerade auch im Hinblick auf ein besseres Verständnis des Blochschen Prinzips interessante - Frage auf, welche Transformationen von Lückenstrukturen die hier betrachteten Eigenschaften (Semidualität, Normalität, Existenz nullstellenfreier ganzer Funktionen) invariant lassen.

Semidualität bei zwei Funktionen

Wir haben in Kapitel 7 eine Reihe von Beispielen kennengelernt, in denen das Auslassen zweier Funktionen bezüglich Faltung Normalität begründet. Es ist zu erwarten, daß sich dahinter ein allgemeineres Phänomen verbirgt, dessen Untersuchung der Normalitätstheorie gänzlich neue Perspektiven eröffnen wird. Von einem auch nur ansatzweisen Verständnis, unter welchen Bedingungen ein solches "Analogon zum FNT für Faltungen" gelten kann, sind wir sicherlich noch weit entfernt. Hauptansatzpunkt zukünftiger Untersuchungen dürfte es daher zunächst einmal sein, das bisher bekannte Repertoire an Fällen, in denen dieses Phänomen auftritt, um weitere Beispiele zu ergänzen.

Weiterhin sind wir in Kapitel 7 folgenden konkreten Fragen begegnet:

18.) Lassen sich Satz 7.1 und Korollar 7.5 dahingehend verallgemeinern, daß für beliebige Lückenstrukturen S, T mit $S \neq T$ die Menge $\{e_S, e_T\}$ stets nichtsemidual ist?

19.) Bleibt die (Nicht-)Semidualitätsaussage in Satz 7.7 auch für Mengen aus zwei anstelle von drei Funktionen richtig?

20.) Ist die Menge

$$V := \left\{ z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}; z \mapsto \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{(1-x_k z)^{p+k}} \right\}$$

(mit $m, p \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, $\alpha_m \neq 0$, $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$ und $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{D}$) nichtsemidual? (s. S. 155)

21.) Ist in Beispiel 7.12 die Menge

$$V = \left\{ z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}; z \mapsto \frac{\alpha_1}{(1-z)^p} + \frac{\alpha_2}{(1-z)^{p+1}} \right\}$$

semidual? Die besondere Relevanz dieser Frage liegt natürlich in ihren Auswirkungen auf das folgende Problem:

22.) Inwieweit läßt sich bei zwei (und mehr) Funktionen die Nichtsemidualität durch das Vorliegen der schwachen Umgebungseigenschaft charakterisieren?

23.) Inwieweit ist die Nichtnormalitätsvoraussetzung in Satz 7.14 (2) entbehrlich?

24.) Gibt es andere nichttriviale zweielementige semiduale Teilmengen von A_0 außer den in Satz 7.14 behandelten? Gibt es semiduale Teilmengen von A_0 mit drei oder mehr Elementen?

Im Laufe unserer Betrachtungen dürfte deutlich geworden sein, wie bruchstückhaft unser Verständnis des Phänomens der Semidualität ebenso wie des Blochschen Prinzips derzeit noch ist; bisher war uns sicherlich nicht mehr als ein erster bescheidener Blick in dieses faszinierende neue Gebiet vergönnt. Es bleibt daher zu hoffen, daß sich eine intensivere Untersuchung der immer wieder - teilweise unvermutet - aufgetretenen Zusammenhänge zwischen Normalitäts- und Dualitätstheorie künftig als für beide Bereiche inspirierend erweisen und zu einem besseren Verständnis eines der großen Prinzipien der Funktionentheorie beitragen wird: des Blochschen Prinzips.

Literaturverzeichnis

[1] Abramowitz, M., Stegun, I., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, John Wiley & Sons Inc., New York 1984

[2] Bergweiler, W., Normality and exceptional values of derivatives, Proc. Am. Math. Soc. 129 (2001), 121-129

[3] Cartan, H., Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications, Ann. École Norm. Sup. (3) 45 (1928), 255-346

[4] Cartan, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica (Cluj) 7 (1933), 5-31

[5] Chen, H. und Gu, Y., An improvement of Marty's criterion and its applications, Sci. Sinica Ser. A 36 (1993), 674-681

[6] Chen, H. und Hua, X., Normal families of holomorphic functions, J. Austral. Math. Soc., Ser. A 59 (1995), 112-117

[7] Clunie, J., On integral and meromorphic functions, J. Lond. Math. Soc. 37 (1962), 17-27

[8] Dobbertin, H. und Kasten, V., On dual sets generated by lacunary polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (2) (1991), 323-330

[9] Döringer, W., Exceptional values of differential polynomials, Pacific J. Math. 98 (1982), 55-62

[10] Drasin, D., Normal families and the Nevanlinna theory, Acta Math. 122 (1969), 231-263

[11] Erdös, P., Fried, H., On the connection between gaps in power series and the roots of their partial sums, Trans. Am. Math. Soc. 62 (1947), 53-62

[12] Eremenko, A., A counterexample to Cartan's conjecture on holomorphic curves omitting hyperplanes, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (10) (1996), 3097-3100

[13] Eremenko, A., Holomorphic curves omitting five planes in projective space, Am. J. Math. 118 (6) (1996), 1141-1151

[14] Fekete, M., Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken, Jahresber. d. Dt. Math. Vereinigung 32 (1923), 299-306

[15] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Birkhäuser, Boston 1987

[16] Grahl, J., Blochsches Prinzip und Semidualität bei Lückenreihen, Diplomarbeit, Würzburg 1998

[17] Grahl, J., Some applications of Cartan's theorem to normality and semiduality of gap power series, Journal d'Anal. Math. 82 (2000), 207-220

[18] Grauert, H. und Fritzsche, K., Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1974

[19] Gu, Y., A criterion for normality of families of meromorphic functions, Sci. Sinica (special issue) 1 (1979), 267-274

[20] Hayman, W.K., Meromorphic Functions, Oxford University Press, London 1964

[21] Hayman, W.K., Picard values of meromorphic functions and their derivatives, Ann. Math. (2) 70 (1959), 9-42

[22] Hayman, W.K., Value distribution and A.P. gaps, J. Lond. Math. Soc. 28 (1983), 327-338

[23] Hempel, J., The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky, J. Lond. Math. Soc. (2) 20 (1979), 435-445

[24] Hempel, J., Precise bounds in the theorems of Schottky and Picard, J. Lond. Math. Soc. (2) 21 (1980), 279-286

[25] Hiong, K., Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettant une valeur exceptionelle, Ann. École Norm. Sup. (3) 72 (1955), 165-197

[26] Hua, Xiu-Hou, Some extensions of the Tumura-Clunie Theorem, Compl. Var. 16 (1991), 69-77

[27] Jank, G. und Volkmann, L., Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen, Birkhäuser-Verlag, Basel Boston Stuttgart 1985

[28] Kasten, V. und Ruscheweyh, St., On dual sets of analytic functions, Math. Nachr. 123 (1985), 277-283

[29] Kövari, T., On the Borel exceptional values of lacunary integral functions, J. Anal. Math. 9 (1961), 71-109

[30] Landau, E., Sur Quelques Généralisations du Théorème de M. Picard, Ann. École Norm. Sup. (3) 24 (1907), 179-201, zitiert nach: Landau, E., Collected Works Vol. 3, Thales-Verlag, Essen o.J.

[31] Lang, S., Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, New York 1987

[32] Langley, J., On normal families and a result of Drasin, Proc., Roy. Soc. Edin. 98 A (1984), 385-393

[33] Li, B.-Q., On the quantity $\delta_s(g(z), f)$ of gappy entire functions, Kodai Math. J. 11, (2) (1988), 287-294

[34] Lohwater, A.J. und Pommerenke, Ch., On normal meromorphic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. 550 (1973)

[35] Magid, A., Lectures on differential Galois theory, University Lecture Series Vol. 7, Amer. Math. Soc. 1994

[36] Mues, E., Über ein Problem von Hayman, Math. Z. 164 (1979), 239-259

[37] Nevanlinna, R., Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. 46 (1925), 1-99

[38] Nevanlinna, R., Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. 48 (1926), 367-391

[39] Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des functions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929

[40] Nevo, S. On theorems of Yang and Schwick, Compl. Var. 46, No. 4 (2001), 315-321

[41] Pang, X., Bloch's principle and normal criterion, Sci. Sinica (7) 32 (1989), 782-791

[42] Pang, X., On normal criterion of meromorphic functions, Sci. Sinica (5) 33 (1990), 521-527

[43] Pang, X. und Zalcman, L., Normal families and shared values, Bull. Lond. Math. Soc. 32, No.3, 325-331 (2000)

[44] Pang, X. und Zalcman, L., On theorems of Hayman and Clunie, N. Z. J. Math. 28, No.1, 71-75 (1999)

[45] Pinto, H., Ruscheweyh, St. und Salinas, L., On semi-dual analytic functions, Ann. UMCS Vol. 40 (20) Sec. A (1986), 193-207

[46] Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z. 29 (1929), 549-640

[47] Pommerenke, Ch., Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975

[48] Rothstein, W., Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 129 (1955), 96-138

[49] Ruscheweyh, St., Duality for Hamard products with applications to extremal problems for functions regular in the unit disc, Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 63-74

[50] Ruscheweyh, St., Convolutions in geometric function theory, Lecture Notes SMS 83, Les Presses de L'Université de Montréal, Montréal 1982

[51] Ruscheweyh, St. und Salinas, L., On some cases of Bloch's principle, Scientia Ser. A, Math. Sciences 1 (1988), 97-100

[52] Ruscheweyh, St. und Wirths, K.-J., Normal families of gap power series, Results in Math. 10 (1986), 147-151

[53] Schiff, J., Normal Families, Springer-Verlag, New York 1993

[54] Schoenberg, I.J., A note on the cyclotomic polynomial, Mathematika 11 (1964), 131-136

[55] Schwick, W., Exceptional functions and normality, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 425-432

[56] Schwick, W., On Hayman's alternative for families of meromorphic functions, Compl. Var. 32 (1997), 51-57

[57] Tumura, Y., On the extensions of Borel's theorem and Saxer-Csillag's theorem, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3), 19 (1937), 29-35

[58] Wirths, K.-J., Semi-dual functions and nonvanishing entire functions, Pitman Research Notes in Math. 262 (1992), 106-112

[59] Wirths, K.-J., Problem 91 in Math. Semesterberichte 44 (1997), S. 195

[60] Yang, L., Meromorphic functions and their derivatives, J. Lond. Math. Soc. (2) 25 (1982), 288-296

[61] Yang, L., Normality for families of meromorphic functions, Sci. Sinica, Ser. A (1986), 1263-1274

[62] Zalcman, L., A heuristic principle in complex function theory, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 813-817

[63] Zalcman, L., Normal families revisited, Complex Analysis and Related Topics, University of Amsterdam 1993, 149-164

[64] Zalcman, L., New light on normal families, Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory (May 1996), IMCP, Vol. 11, Amer. Math. Soc. 1997, 237-245

Index