

Zur Bedeutung von Metakognition beim Umgang mit Mathematik

**Dokumentation metakognitiver Aktivitäten bei
Studienanfänger_innen,**

**Entwicklung eines Kategoriensystems für Metakognition beim
Umgang mit Mathematik**

und

Erörterung von Ansatzpunkten für Metakognition in der Analysis

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der

Fakultät für Mathematik und Informatik

der

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Vorgelegt von Sebastian Mungenast

Gliederung

0. Gliederung	V
1. Kapitel: Problemstellung	S. 1
1.1. Vorstellung der Arbeit	S. 1
1.2. Gang der Untersuchung – Forschungsziele und -fragen	S. 3
1.3. Bezeichnungen und Notation	S. 6
1.4. Etablierte Systematisierungen und Definition von Metakognition für diese Arbeit	S. 7
2. Kapitel: Metakognition und Mathematik	S. 20
2.1. Grundlegendes	S. 20
2.1.1. Historische Entwicklung der Metakognitionsforschung	S. 20
2.1.2. Historische Entwicklung der Metakognitionsforschung in der Mathematikdidaktik	S. 22
2.1.3. Schwierigkeiten bei der Erforschung von Metakognition	S. 23
2.1.4. Zur Entwicklung von Metakognition	S. 27
2.1.5. Weitere Informationen und Überlegungen zu Metakognition	S. 29
2.1.6. Metakognition – allgemein oder domänenspezifisch?	S. 35
2.2. Die Bedeutung von Metakognition für die Mathematik und ihre Didaktik	S. 37
2.2.1. Metakognition aus Sicht der Mathematikdidaktik	S. 37

2.2.2.	Defizite bei Lernenden _____	S. 40
2.2.3.	Defizite in der Hochschullehre und Ansatzpunkte für Metakognition _____	S. 44
2.2.4.	Beim Umgang mit Mathematik _____	S. 46
2.2.5.	Zum Lehren und Lernen von Metakognition im Hinblick auf Mathematik _____	S. 51
2.2.6.	Probleme, Schwierigkeiten und Einschränkungen _____	S. 56
2.2.7.	Abgrenzung von verwandten Themenbereichen _____	S. 58
2.3.	Bezug zu zentralen Inhalten der Mathematikdidaktik _____	S. 61
2.3.1.	Vorstellung verschiedener Expert_innen und ihrer Arbeit _____	S. 61
2.3.2.	Überlegungen zu Ansatzpunkten für Metakognition in der Analysis _____	S. 88
2.3.3.	Metakognitive Analyse der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife _____	S. 95
2.3.4.	Vorstellung der im Rahmen der empirischen Erhebung verwendeten Extremwertaufgabe _____	S. 102
3.	Kapitel: Forschungsprojekt – Methodologie und Überlegungen zur empirischen Erhebung _____	S. 114
3.1.	Forschungsfragen _____	S. 114
3.2.	Allgemeines zur Erhebung von Metakognition _____	S. 115
3.3.	Methodologie des Projekts _____	S. 117
3.4.	Überlegungen und Begründungen zur Extremwertaufgabe _____	S. 132

3.5. Überlegungen und Begründungen zur Erhebung nicht-fachbezogener Metakognition	S. 136
4. Kapitel: Ergebnisse	S. 139
4.1. Ergebnisse zu Forschungsfrage 1	S. 140
• Dokumentation	S. 141
• Kommentar zur Dokumentation	S. 176
4.2. Ergebnisse zu Forschungsfrage 2	S. 184
• Vorstellung eines Kategoriensystems zur Metakognition in der Mathematikdidaktik	S. 184
• Erläuterung der Unterkategorien	S. 190
4.3. Ergänzungen	S. 202
4.4. Ergebnisse zu Forschungsfrage 3	S. 227
4.4.1. Analyse zentraler mathematikdidaktischer Inhalte	S. 227
4.4.2. Metakognitive Ansatzpunkte bei zentralen Begriffen der Analysis	S. 254
5. Résumé	S. 283
6. Ausblick	S. 292
7. Abbildungen	S. 295
8. Abkürzungen	S. 296
9. Quellen	S. 297
10. Erklärung	S. 321

1. Kapitel: Problemstellung

1.1. Vorstellung der Arbeit

Unter Metakognition werden für gewöhnlich „Kognition über Kognition“, bzw. „Kognition zweiter Ordnung“ (Schneider & Artelt, 2010) verstanden – also Wissen und kognitive Prozesse, die ihrerseits (eigenes) Wissen und (eigene) Kognition zum Inhalt haben, sowie deren Überwachung und Steuerung (Flavell, 1976).

Die Bedeutung von Metakognition (für Mathematikleistung und -Lernerfolg) wurde in der Vergangenheit bereits hinreichend untersucht und belegt. So bezeichnet bereits Brown (1978, S.74) metakognitive Komponenten wie Planen und Überprüfen als grundlegende Merkmale effizienten Denkens. Sjutts (1999b, S. 497) betont den Zusammenhang zwischen „hohen Sachkenntnissen“ einerseits und „wirkungsvollen Methoden der Planung, Überwachung und Regulierung der Lern- und Denkprozesse“ andererseits. Zimmerman (1989) wiederum sieht metakognitive Aktivität als zentralen Teil selbstregulierten Lernens. Veenman (2006) oder Schneider und Artelt (2010) etwa betonen schließlich den beträchtlichen Einfluss von Metakognition auf die Mathematikleistung, während Hasselhorn (1992) oder Pressley, Borkowski und Schneider (1987) die Wirksamkeit von Metakognition auf den Lernerfolg nachweisen.

Beim Umgang mit Mathematik bedeutet dies beispielsweise, dass Metakognition Lernende dabei unterstützen kann, einen besseren Überblick über ihr mathematisches Fachwissen zu erwerben – also über mathematische Begriffe, ihre Zusammenhänge und den Aufbau entsprechender (Grund-)Vorstellungen. Metakognition kann bspw. dabei helfen, neue Begriffe und Methoden schneller in Beziehung zu setzen und ins bestehende „Wissens-Netzwerk“ zu integrieren, um sie schließlich gezielt zur Verwendung auszuwählen.

Es wird hier angenommen, dass Metakognition zusätzlich auch auf einer weniger mathematikspezifischen Ebene im Hinblick auf organisatorische Fähigkeiten, wie Zeitmanagement, und auf Wissen über Lernstrategien und Verständnis vor allem in der Sekundarstufe II und im Hochschulbereich von Nutzen ist, wo, im Vergleich zu Primarstufe und Sekundarstufe I, ein höheres Maß an Eigenständigkeit von den Lernenden erwartet wird.

Zahlreiche Projekte, die Metakognition im Zusammenhang mit Mathematik untersuchen, konzentrieren sich auf Zielgruppen im Bereich der Primar- und Sekundarstufe I. Als Ausnahme sei

an dieser Stelle allerdings bspw. Schoenfeld (z.B. 1991) genannt, der in den von ihm durchgeführten „problem-solving classes“ gezielt metakognitive Aktivitäten bei Studierenden fördert und untersucht.

Auf empirischer Seite konzentriert sich diese Arbeit deshalb auf Zielgruppen jenseits der Sekundarstufe I. Unter anderem wird dabei im Rahmen einer empirischen Erhebung die Frage untersucht, welche Aspekte von Metakognition bei Lernenden während und nach Abschluss der Sekundarstufe II zu beobachten sind und ob diese den Lernenden selbst bewusst sind, bewusst genutzt werden, um den eigenen (Lern-)Erfolg zu verbessern, und von ihnen beschrieben werden können. Von Interesse ist dabei, ob Lernende in der Lage sind, ihre Fähigkeiten beim Umgang mit Mathematik von der Metaebene her zu analysieren, Problemstellungen einzuordnen und nach ihrem Schwierigkeitsgrad zu beurteilen, ob sie Prognosen über die Erfolgsaussicht bei deren Bearbeitung und Lösung treffen können und ob sie ihre metakognitiven Einsichten insgesamt zur effizienteren Nutzung ihres Sachwissens und zur Strategieentwicklung einsetzen.

Aufbauend auf dieser Dokumentation metakognitiver Aktivitäten setzt sich die vorliegende Arbeit das Ziel, sich der seit Beginn der Metakognitions-Forschung bestehenden Problematik eines komplexen und oft uneinheitlich verwendeten Begriffs durch die Entwicklung eines möglichst umfassenden Kategorisierungs-Systems anzunehmen. Diese erfolgt unter Berücksichtigung der zuvor angesprochenen empirischen Erhebung sowie theoretischer Überlegungen, die auf der einschlägigen Fachliteratur basieren. Hierzu wurden bestehende (Teil-)Systematisierungen und Erläuterungen des Begriffs untersucht und aufbauend auf dieser Grundlage ein System erarbeitet, das sich direkt auf den Einsatz von Metakognition beim Umgang mit Mathematik bezieht.

Auf mathematischer Seite steht die Analysis im Zentrum des Projekts, da dieses Gebiet einerseits Ansatzpunkte für Metakognition in Schule und Hochschule bietet – z.B. die Dualität zentraler Begriffe wie des Grenzwertbegriffs, dessen verschiedene Aspekte (dynamisch – statisch), Zugänge (intuitiv – formal) und damit verbundene Sichtweisen gedanklich miteinander vereint und zu tragfähigen Grundvorstellungen entwickelt werden müssen. Andererseits findet die (explizite) Einführung der Analysis – curricular betrachtet – in Zeitabschnitten statt, die durch organisatorische Veränderungen geprägt sind, was zu insgesamt höheren Belastungen führen kann: zu Beginn und während der gymnasialen Oberstufe/ Sekundarstufe II sowie (in zahlreichen Studiengängen) ein zweites Mal, zu Beginn der Studieneingangsphase.

Im Rahmen dieser Arbeit werden aus diesen Gründen zentrale Themenbereiche der Mathematikdidaktik sowie für den Mathematikunterricht und die Hochschullehre zentrale Begriffe der Analysis auf ihr Potential für metakognitive Aktivität und Unterstützung hin untersucht. Entsprechende Ansatzpunkte werden herausgestellt und erläutert und exemplarische Beschreibungen, wie Metakognition beim Umgang mit Begriffen aus der Analysis in Erscheinung treten kann, werden erstellt.

1.2. Gang der Untersuchung – Forschungsziele und -fragen

Im Zentrum des Promotionsprojekts stehen auf theoretischer Ebene der Begriff Metakognition und das Gebiet der Analysis, das den fachmathematischen Rahmen der Arbeit darstellt, sowie auf empirischer Ebene eine qualitative Interviewstudie mit zukünftigen Studierenden aus mathematischen Studiengängen.

Strukturell gliedert sich das Forschungsprojekt in drei Bereiche, die zu einem gewissen Grad separat voneinander betrachtet werden könnten, jedoch inhaltlich stark aufeinander bezogen sind und aus den gleichen theoretischen Überlegungen und empirischen Untersuchungen hervorgehen, bzw. sich auf diese stützen. Jeder dieser Bereiche wird durch eines der folgenden Forschungsziele sowie die damit verbundene Forschungsfrage repräsentiert.

Eines der drei übergeordneten Ziele der Arbeit ist die Dokumentation metakognitiver Aktivitäten bei Studienanfänger_innen anhand der durchgeführten Interviewstudie (die in Kapitel 3 eingehend beschrieben wird).

➔ **Forschungsfrage 1 – FF1**

- *Welche metakognitiven Aktivitäten können bei zukünftigen Studierenden im Umgang mit/ im Hinblick auf Mathematik – vor allem in Bezug auf Begriffe und Methoden der Analysis – beobachtet werden?*

Auf Grund der Konzentration der bisherigen Forschung auf Altersgruppen im Bereich der Vorschule, Primar- und Sekundarstufe I sowie der Beobachtung von Defiziten, was die

Anwendung von Metakognition betrifft, ist es von Interesse, diesbezüglich in einem ersten Schritt zu klären, welche Situation bei Absolvent_innen der Sekundarstufe II vorliegt. Dabei soll erhoben und dokumentiert werden, in welchen Fällen bei den Studienteilnehmer_innen Metakognition zu beobachten und in welchen Fällen diese (trotz eines möglichen Nutzens) nicht zu beobachten ist.

Als Zielgruppe wurden Studienanfänger_innen im Bereich Mathematik (Fach- und Lehramtsstudiengänge) ausgewählt – also Teilnehmer_innen mit Hochschulzugangsberechtigung, die zum Zeitpunkt der Erhebung kurz vor Beginn des eigentlichen Hochschulstudiums standen. Durch diese Wahl der Zielgruppe lässt sich das Projekt auch im Bereich der Übergangsproblematik Schule-Hochschule einordnen, wobei diese nicht im Mittelpunkt des Forschungsinteresses steht.

Zum Zweck der Dokumentation wurden die Teilnehmer_innen in einem zweigeteilten offenen Interview zu ihren Erfahrungen im Hinblick auf ihre Schulzeit und den Mathematikunterricht befragt und anschließend bei der Bearbeitung einer Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis beobachtet.

Bei diesem Teil des Projekts handelt es sich um eine explorative Arbeit, die bei der gegebenen Stichprobengröße mittels qualitativer Methoden (s. Kapitel 3) Anhaltspunkte für weiterführende Studien aufzeigt. Ziel einer solchen Dokumentation ist die Erarbeitung von konkreten Informationen, die in Zukunft als Grundlage für didaktische Maßnahmen (z.B. im Rahmen des Mathematikunterrichts und der Mathematikstudiengänge sowie als Ergänzung zu diesen oder in Form fachübergreifender Angebote) zur Förderung von Metakognition bei Lernenden dienen können. Insbesondere im Hinblick auf beobachtete Defizite bieten diese Ergebnisse eine Möglichkeit, entsprechende Maßnahmen gezielter an die Situation der Lernenden anzupassen.

Des Weiteren dienen die im Rahmen der empirischen Erhebung gewonnenen Erkenntnisse dazu, etablierte Kategorisierungen von Metakognition zu bestätigen und zu ergänzen.

➔ **Forschungsfrage 2 – FF2**

- *Wie lässt sich der Einsatz von Metakognition beim Umgang mit Mathematik – basierend auf theoretischen Überlegungen und empirischen Erkenntnissen (vgl. FF1) – möglichst umfassend in Form eines Modells systematisieren, das bestehende Kategorisierungen erweitert?*

Zu diesem Zweck werden die dokumentierten Aktivitäten mit zentralen Ergebnissen der Metakognitionsforschung abgeglichen (etwa denen von Schneider, Schoenfeld, Cohors-Fresenborg und weiteren, s. Kapitel 2), bestehende Systematisierungen zusammengeführt und zu einem möglichst umfassenden und ganzheitlichen System integriert.

Da der Begriff Metakognition in der bestehenden Literatur häufig ohne (umfassende) Definition oder Systematisierung verwendet wird, bzw. sich bestehende Systematisierungen stark auf Teil-Komponenten von Metakognition konzentrieren (etwa das Kategoriensystem von Cohors-Fresenborg et al., 2014, vgl. Kapitel 2.3.1), besteht Bedarf nach einer Sichtung und einem Vergleich der verschiedenen Begrifflichkeiten mit dem Ziel der Konstruktion eines umfassenden Systems, das die zentralen Aspekte von Metakognition beinhaltet und ordnet. Dabei wird ein angemessener Grad an Feinheit im Hinblick auf die Anzahl jeweiliger Unterkategorien und Verzweigungen angestrebt, der der Komplexität des Begriffs gerecht wird, gleichzeitig aber übersichtlich und für die Mathematikdidaktik als operationalisierbares theoretisches Konstrukt transparent bleibt.

Mit Methoden der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring werden die empirischen Daten (in Form der transkribierten Interview-Mitschnitte) bis hin zu einer theoretischen Sättigung codiert und kategorisiert, wobei zu beachten ist, dass sich diese nicht ausschließlich aus den Rohdaten ergibt; theoretische Überlegungen und der bisherige Forschungsstand (im Sinne bestehender Systematisierungen) fließen sowohl in die Planung der Erhebung als auch in deren Auswertung mit ein, was den Richtlinien der Qualitativen Inhaltsanalyse entspricht (s. Kapitel 3.3).

Das resultierende System soll einen Überblick über Metakognition für die Mathematikdidaktik schaffen und als mögliche Basis für zukünftige Forschung dienen. Ein möglichst ganzheitliches System dient dazu, die diesbezüglichen Fähigkeiten und Defizite von Lernenden zu erkennen und konkret einzuordnen, damit gezielte Maßnahmen getroffen werden, um metakognitive Aktivitäten zu fördern und Defiziten optimal entgegenzuwirken.

Basierend auf Literatur und theoretischen Überlegungen und auf Grund der gewonnenen empirischen Ergebnisse werden Anknüpfungspunkte für metakognitive Aktivitäten, die typisch für den Bereich Analysis sind, identifiziert. Der Nutzen von Metakognition für die Analysis wird am Beispiel zentraler Begriffe, bzw. Aufgabenstellungen (z.B. Ableitung, Extremwertprobleme), wie sie im Rahmen der empirischen Erhebung verwendet wurden, exemplarisch aufgezeigt.

→ Forschungsfrage 3 – FF3

- *Welche Ansatzpunkte für den Einsatz von Metakognition zeigen sich bei zentralen Themenbereichen der Mathematikdidaktik und wie kann Metakognition beim Umgang mit zentralen Begriffen der Analysis in Erscheinung treten?*

Bei der Bearbeitung dieses Forschungsziels wird erörtert, inwiefern sich die Analysis – insbesondere im Hinblick auf ihre Rolle an deutschen Gymnasien – als Ausgangspunkt für metakognitive Aktivitäten eignet und von deren Förderung profitieren kann. Im Anschluss an die Vorstellung des angestrebten theoretischen Modells für Metakognition beim Umgang mit Mathematik werden Konzepte der mathematikdidaktischen Forschung auf ihr Potential für metakognitive Aktivitäten hin untersucht und es wird – anhand zentraler Inhalte der gymnasialen Oberstufe – exemplarisch ausgeführt, wie die Nutzung von Metakognition konkret vonstattengehen kann. Es sollte dabei betont werden, dass davon ausgegangen wird, dass solche metakognitiven „Begleit-Prozesse“ von stark individueller Natur sind und von Person zu Person, bzw. von Fall zu Fall unterschiedlich verlaufen, obwohl sie sich anhand der Systematik aus Forschungsfrage 2 kategorisieren lassen. An dieser Stelle werden mittels Analyse der empirischen Erhebung und unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Forschungsfragen FF1 und FF2 die theoretischen Überlegungen hinsichtlich der Analysis untermauert, ergänzt und konkretisiert. Hierbei spielen die Beobachtungen der Aufgaben-Bearbeitung des im Interview-Verlauf gestellten Extremwertproblems („Glasplatte“) eine zentrale Rolle. Nicht nur zu beobachtende metakognitive Aktivitäten, sondern auch und insbesondere deren Nicht-Auftreten an entscheidenden Stellen im Lösungsprozess gibt dabei Aufschluss darüber, inwiefern Metakognition von Nutzen sein kann bzw. hätte sein können.

1.3. Bezeichnungen und Notation

Sofern direkt auf ein Modell oder eine Systematisierung, bzw. Kategorisierung von Metakognition bezogen, wird im Verlauf der Arbeit entsprechend von Komponenten oder Kategorien, bzw. Teil- oder Unterkategorien gesprochen. Ansonsten wird der Begriff „Aspekt“ (von Metakognition) bevorzugt, der bereits in den Arbeiten von Schoenfeld (vgl. etwa

Schoenfeld, 1987, S. 190) oder Schneider und Artelt (vgl. etwa Schneider & Artelt, 2010, S. 150) in englischer Sprache („aspect“) verwendet wird.

Entsprechend der in der Literatur üblichen Konventionen wird in dieser Arbeit bei etablierten Aspekten, bzw. Kategorien von Metakognition häufig der gängige Name dieser Aspekte verwendet (z.B. „Strategiewissen“ oder „Reflexion“), ohne dass erneut darauf hingewiesen wird, dass es sich dabei jeweils um Metawissen, bzw. Metakognition handelt. Dies sollte aus dem Kontext klar ersichtlich sein. Besteht das Risiko, dass Unklarheiten entstehen können, werden dementsprechend deutlichere Formulierungen verwendet, um Missverständnisse zu vermeiden.

Im Verlauf der Arbeit wird an verschiedenen Stellen zur kurzen Verdeutlichung die Formulierung, bzw. Schreibweise (→ *Aspekt von Metakognition*) verwendet, wobei „*Aspekt von Metakognition*“ durch ebenden jeweils zutreffenden Aspekt von Metakognition ersetzt wird, z.B.: (→ Planung) oder (→ Strategiewissen). Die geschieht vor allem dann, wenn in längeren Textabschnitten die Anwendung von Metakognition an Beispielen erläutert wird. Die Schreibweise (→ ...) ersetzt hierbei die wiederholte Verwendung von Sätzen wie „Hier wird folgender Aspekt von Metakognition verwendet.“, um eine bessere Lesbarkeit des Fließtextes zu gewährleisten.

1.4. Etablierte Systematisierungen und Definition von Metakognition für diese Arbeit

Die Literaturlage zur Metakognition erweist sich auf Grund zahlreicher beteiligter Forschungstraditionen, oft gänzlich fehlender Definitionen und daraus resultierender uneinheitlicher Verwendung des Begriffs, der sich zudem – je nach Verwendung – mit anderen Konzepten (bspw. Selbststeuerung, Motivation, Kognition) überschneidet, als schwierig zu navigieren. Da es sich bei Metakognition um einen – relativ – „jungen“ Begriff handelt, ist die verfügbare Literatur zusätzlich zwar einerseits mittlerweile durchaus umfangreich, andererseits – und das im Hinblick auf die in dieser Arbeit interessierenden Forschungsziele – noch vergleichsweise dürftig.

Von einer umfangreichen Literaturlage kann vor allem in der psychologischen Forschung gesprochen werden, in der der Begriff ursprünglich geprägt und erstmals verwendet wurde (vgl. Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2). In diesem Bereich existieren bspw. bereits verschiedene Modelle, die Metakognition einordnen und systematisieren (vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 2.3.1).

Diese beschreiben Metakognition im Rahmen des jeweiligen psychologischen Fachgebiets, was in der Regel zu Modellen führt, die im Zusammenhang mit grundlegenden Mechanismen wie Wahrnehmung und Informationsverarbeitung, Entwicklung von Kognition und anderen stehen, was eine direkte Übertragung auf die höhere kognitive Ebene, auf der der Umgang mit Mathematik stattfindet, schwierig macht. Ein „Zwischenschritt“ scheint dafür notwendig zu sein, der die „Lücke“ zwischen der grundlegenden Kognitionsforschung einerseits und der mathematikdidaktischen Forschung andererseits schließt.

Als vergleichsweise umfassendes Modell ist dabei bspw. das Klassifikationsschema nach Hasselhorn (1992) zu nennen (vgl. Kapitel 2.3.1), doch dürfte dieses für eine Operationalisierung beim Umgang mit Mathematik noch zu wenig spezifisch, bzw. detailliert sein.

Wie sich im Rahmen der Recherchen zur Metakognition (insbesondere in der mathematikdidaktischen und mathematikbezogenen Forschungsliteratur) gezeigt hat – und wie bereits von Flavell (z.B. 1976, 1979) intendiert – existiert kein vereinheitlichendes System für den Metakognitions-Begriff, das sämtliche in der Mathematikdidaktik (teils unter verschiedenen Begrifflichkeiten) verwendeten (relevanten) Aspekte von Metakognition beinhaltet. Im Bereich der mathematikdidaktischen Forschung existieren ebenfalls entsprechende Modelle (vgl. Kapitel 2.3.1), die Metakognition auf einer höheren Ebene, beim Umgang mit Mathematik, beschreiben, die sich allerdings bewusst auf bestimmte Aspekte von Metakognition konzentrieren (so z.B. auf die prozedurale Komponente bei Cohors-Fresenborg et al., 2014) und andere Aspekte kaum oder gar nicht beinhalten. (vgl. Kapitel 2.3.1)

Des Weiteren variieren auch im Fall von inhaltlichen Überschneidungen die gewählten Begrifflichkeiten für solche Aspekte. Dennoch lässt sich ein gewisser – wenn auch vielleicht nicht universeller – Konsens über bestimmte Aspekte von Metakognition feststellen, die sich in der Regel in der einen oder anderen Form in den verschiedenen Quellen wiederfinden lassen.

Auf der mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Seite wird dabei häufig vor allem der Einsatz metakognitiver Aktivitäten im Rahmen von Modellierungsprozessen untersucht und beschrieben.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein Modell bzw. System entwickelt, das einerseits Metakognition in einer für die Mathematikdidaktik operationalisierbaren Form systematisiert und dabei andererseits von einer Fokussierung auf lediglich eine Teilkomponente von Metakognition absieht und den Begriff stattdessen möglichst weitreichend erfasst.

Metakognition:

Metakognition wird häufig in die zwei – miteinander verbundenen – Komponenten Wissen und Fähigkeiten unterteilt (vgl. etwa Kuhn, 2000; Schraw, 1998 in Shilo & Kramarski, 2019). Diese Unterteilung entspricht weitgehend der ebenfalls häufig verwendeten Unterscheidung zwischen Wissen über Kognition einerseits und Steuerung (auch Regulierung) von Kognition – also Kontroll- bzw. exekutiven Funktionen – andererseits (vgl. etwa Brown, 1987; Schraw and Dennison, 1994; Veenman et al., 2006 in Veenman & van Cleef, 2019).

Gemein ist diesen Unterteilungen, dass sie eine wissens-bezogene von einer handlungs-bezogenen Komponente trennen, wobei beide oft stark mit Fachwissen und dem Denken und strategischen Vorgehen beim Umgang mit Mathematik verflochten sind und sich dabei Metakognition oft nur schwer von Kognition (bzw. kognitiven Strategien) trennen lässt.

Diese Art der Systematisierung kann – trotz (weiterer) verschiedener Terminologien – als weitgehend akzeptiert gelten.

In manchen Quellen findet sich zusätzlich zur deklarativen und prozeduralen Komponente auch eine konditionale Komponente von Metakognition, die sich auf das „Warum“ bezieht – also auf kausale Zusammenhänge, Bedingungen und entsprechende Begründungen (etwa Neuenhaus, 2011).

Allerdings lässt sich auch das Wissen, warum bestimmte kognitive Mechanismen (oder Ähnliches) auf eine bestimmte Art funktionieren, oder warum bestimmte Strategien sinnvoll sind, durchaus auch als deklarativ einordnen – teils als Metawissen und teils als Fachwissen, wobei eine strikte Trennung dieser Wissens-Arten weder möglich noch sinnvoll erscheint (vgl. Kapitel 2.1.5).

Insbesondere, da Erklärungen, Begründungen und aussagenlogische Zusammenhänge in der Mathematik und im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle spielen, wie bspw. aus den Bildungsstandards der KMK (2012) hervorgeht, kommt diesem Aspekt in einem System, das für den Umgang mit Mathematik entwickelt wird, eine wichtige Rolle zu. Auf Grund der (oft

sehr) geringen Trennschärfe zwischen Aspekten von Metakognition (und Kognition) würde die Einführung einer eigenen konditionalen Komponente im Modell unweigerlich zu Überschneidungen mit etablierteren Kategorien führen. Eine konditionale Komponente oder Kategorie scheint mir daher im Hinblick auf das angestrebte Modell eher als Unterkategorie oder -aspekt der deklarativen Kategorie sinnvoll zu sein. Eine solche Einordnung wird auch dadurch gestützt, dass sich in der Literatur häufig „nur“ die zuvor angesprochene Zweiteilung (deklarativ – prozedural) findet.

Verschaffel et al. (2009, S. 338) definieren metakognitive Prozesse als „conscious awareness and deliberate control“ und betonen, dass Metakognition vor allem dann in Aktion tritt, wenn eine zu lösende Aufgabe für den Löser tatsächlich ein Problem darstellt und routinierte, implizite Prozesse zur Lösung nicht ausreichen.

Ein weiterer in der Literatur (z.B. bereits bei Flavell & Wellman, 1977) häufig zu findender oder implizierter Aspekt von Metakognition ist die verstärkt unbewusste, intuitive, implizite Sensitivitäts-Komponente, die ein Bewusstsein oder „Gefühl“ dafür beschreibt, in welchen Situationen die Anwendung von Metakognition notwendig, bzw. möglich ist.

Dabei treten vor allem die Begriffe „Awareness“, „Sensitivity“ und „Metacognitive Experiences“ (Metakognitive Erfahrungen) in Erscheinung. Erstere bezeichnen in der Regel ein „Gespür“, bzw. „Bewusstsein“ (womit auch eine mehr oder weniger unbewusste Aufmerksamkeit gemeint sein kann) dafür, dass die Einleitung bestimmter kognitiver Handlungen (bspw. im Rahmen eines Problemlöse-Vorgangs) überhaupt erforderlich ist.

Im Folgenden werden die angesprochenen zentralen Aspekte von Metakognition und ihre Einteilung in die genannten drei Kategorien oder Komponenten ausführlicher beschrieben. Diese bilden einerseits die Basis für die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen theoretischen Überlegungen und finden sich andererseits auch im Kategoriensystem, das in dieser Arbeit vorgestellt wird (vgl. Kapitel 4.2), wieder, da weitere Literatur-Recherche und die durchgeführte empirische Erhebung diese grundsätzliche (Grob-)Kategorisierung weitgehend bestätigen konnten.

Deklarativer Aspekt: Unter deklarativem Wissen wird in der Regel abrufbar, verbalisierbar vorliegendes Wissen verstanden. Übertragen auf Metakognition wird hierbei für den deklarativen Teil von Metakognition häufig die Formulierung (deklaratives) Metawissen

verwendet. Dieses wird wiederum gängigerweise in die drei Teilkomponenten *Personenwissen* (*person knowledge*), *Aufgabenwissen* (*task knowledge*) und *Strategiewissen* (*strategy knowledge*) untergliedert. So charakterisieren bspw. Schneider und Hasselhorn (1988) Wissen über Kognition als „Wissen über den Einfluß (sic.) von Personen-, Aufgaben- und Strategiefaktoren auf die Leistung“ (eben da, S. 115). Hierbei sollte bedacht werden, dass diese Komponenten möglicherweise jedoch nicht trennscharf sind, sondern vielmehr als aufeinander bezogen und in „Interaktion“ verbunden zu betrachten sind.

„Im Lernalltag von Schülern kommt häufig den Wechselbeziehungen zwischen diesen drei kognitiven Wissensaspekten eine besondere Bedeutung zu, da es oft wichtig ist, daß (sic.) man angeben kann, in welchen Situationen, zu welchen Zeitpunkten und in welcher Weise bestimmte Problemlösestrategien optimal "passen", also am effizientesten sind.“ (Schneider & Hasselhorn, 1988. S. 115)

Metakognitiv gesehen, ist mit *Personenwissen* Wissen über die eigene Person, genauer gesagt, über eigene kognitive Inhalte, Vorgänge und Funktionsweisen, gemeint. Zu nennen sind dabei beispielweise Wissen über persönliche (kognitive) Stärken und Schwächen, Vorlieben und Abneigungen – bezogen auf (kognitive) Aufgaben(stellungen) und Herausforderungen; des Weiteren beispielsweise Wissen über typische, atypische und theoretisch mögliche Vorstellungen oder Reaktionen, die mit bestimmten (kognitiven) Reizen in Verbindung stehen. Außerdem spielen im Rahmen dieser Komponente auch Informationen eine Rolle, die beispielsweise über (das eigene) Gedächtnis, (die eigene) Intelligenz oder die Funktionsweise anderer kognitiver „Mechanismen“ wie z.B. der Informationsverarbeitung vorliegen.

Es bleibt zu beachten, dass mit deklarativem Metawissen auch die grundsätzliche Fähigkeit gemeint ist, Wissen und Informationen der hier beschriebenen Teilaspekte für verschiedene Zwecke zu nutzen – so z.B. zur Ableitung von Konsequenzen (für eigenes Handeln) oder zur Prognose eigener Erfolgswahrscheinlichkeiten bei der Bewältigung von Herausforderungen. Gerade im Hinblick auf eine derartige Anwendung von Metawissen wird klar, dass die einzelnen Teilaspekte nicht isoliert betrachtet werden können, sondern aufeinander bezogen sind. So hängen eben erwähnte Prognosen oder auch Wissen über eigene Stärken und Schwächen oft eng mit der jeweils zu bewältigenden Aufgabe (und entsprechendem Metawissen – *Aufgabenwissen*) zusammen. Neben „allgemeinem“ Metawissen existiert daher vermutlich auch bereichsspezifisches Metawissen, wobei diese Frage nach wie vor nicht eindeutig beantwortet werden konnte (vgl. Kapitel 2.1.6).

Metakognitives *Aufgabenwissen* meint Wissen, das über Aufgaben, bzw. ganze Themengebiete in Relation zur eigenen Kognition vorliegt, so z.B. Wissen darüber, wie die (relative) Schwierigkeit einer Aufgabe einzuschätzen sei, wie diese – innerhalb des eigenen Wissens – mit anderen Aufgaben(-Typen) zusammenhängt, bzw. mit welchen Mitteln und Strategien (s. *Strategiewissen*) sie zu bewältigen sein könnte. Bei der Einschätzung von Schwierigkeitsgraden und der Prognose von Erfolgswahrscheinlichkeiten findet beispielsweise eine starke „Interaktion“ von *Aufgaben-* mit *Personenwissen* (s. zuvor) statt, da hier Metawissen über eigene Stärken und Schwächen einbezogen werden muss – sowohl genereller Natur wie auch im Hinblick auf den aktuellen Kenntnisstand. So sind *Personen-* und *Aufgabenwissen* beispielsweise bei der *Überwachung* (s. unten) eines Lernprozesses vonnöten; der aktuelle Kenntnisstand oder Lernfortschritt (→ *Personenwissen, Aufgabenwissen*) werden dabei regelmäßig oder permanent mit den (selbst) gesetzten Lernzielen (→ *Aufgabenwissen, Strategiewissen*) in Beziehung gesetzt und abgeglichen. Bei einer Diskrepanz (→ *Personenwissen, Aufgabenwissen*) oder auch bei zu langsamem Fortschritt werden entsprechende Maßnahmen ausgewählt (→ *alle deklarativen Komponenten*) und entsprechend eingeleitet.

Metakognitives *Strategiewissen* bezeichnet Metawissen, das sich mit der Beurteilung und Auswahl von (kognitiven) Strategien befasst. Gemeint ist hierbei nicht das (routinierte) Beherrschen bestimmter Strategien, sondern die Fähigkeit, bekannte Strategien auf ihren Nutzen und ihre Angemessenheit im Hinblick auf zu bewältigende Problemstellungen hin zu beurteilen und gegeneinander abzuwägen. Insbesondere ist es dazu zuerst notwendig, einen Überblick über das eigene Repertoire an Strategien zu besitzen und dieses nach möglicherweise geeigneten Strategien zu durchsuchen. Bei der Entscheidung, welche Strategie(n) in einer gegebenen Situation zu bevorzugen ist/sind, werden sowohl *Personen-* als auch *Aufgabenwissen* eine entscheidende Rolle spielen. Wissen und Metawissen um eine entsprechende Aufgabe sind notwendig, um vorhandene Strategien in Relation dazu zu prüfen und als nützlich erkennen zu können; *Personenwissen* spielt insofern eine Rolle, als die eigene Kompetenz und Sicherheit bei der Anwendung einer bestimmten Strategie in Betracht zu ziehen sind. So ließe sich eine weniger effiziente Strategie zur Problemlösung einer effizienteren vorziehen, wenn letztere (noch) nicht als ausreichend sicher beherrscht eingeschätzt wird, bzw. wenn diese den persönlichen Vorlieben beim Umgang mit entsprechenden Aufgabentypen weniger entgegenkommt.

“Metacognitive skills refer to the executive function of metacognition (Brown 1987), that is, the procedural knowledge that is required for the actual regulation of and control over one’s learning activities (Flavell 1976; Veenman 2017). Task orientation, planning, monitoring, evaluation, recapitulation, and reflection typically are manifestations of metacognitive skills.”

(Veenman & van Cleef, 2019, S. 691)

Veenman und van Cleef (2019) beschreiben metakognitive Fähigkeiten, bzw. prozedurale Metakognition als verinnerlichte Selbst-Anweisungen („internalized self-instructions“), die Lernenden im Lauf eines Arbeitsprozesses vorgeben, was, wann, warum und wie („what to do, when, why, and how“) zu tun ist (Veenman, 2013; Veenman, 2017 in Veenman & van Cleef, 2019, S. 692).

Veenman und Elshout (1999, S. 510) nennen als Beispiele für metakognitive Fähigkeiten (im Rahmen von Lernprozessen) Orientierungs- und Planungs-Vorgänge/-fähigkeiten, die Überwachung kognitiver Prozesse, Überprüfungsvorgänge und die Rekapitulation der eigenen Kognition.

Mit dem Aspekt **Steuerung** ist allgemein die Steuerung von Kognition gemeint, die in manchen Quellen (etwa Schoenfeld, 1991; Hasselhorn, 1992) einen der zwei, bzw. drei (oder auch mehrerer) Aspekte von Metakognition darstellt. Je nach Quelle wird dieser Aspekt als **exekutive** oder **prozedurale Komponente** von Metakognition bezeichnet (vgl. etwa Schneider & Artelt, 2010). Auch Fagnant und Crahay (2001, S. 264) bspw. verwenden die Begriffe „executive“ und „procedural“ synonym. Diese prozedurale Komponente wird für gewöhnlich konkret in die drei Unter-Komponenten **Planung (Planning)**, **Überwachung (Monitoring)** und **Reflexion (Reflexion, bzw. Reflection)** eingeteilt (ggf. unter Zusatz weiterer Aspekte wie der „Analyse“), bei denen auch von **metakognitiven Fähigkeiten („metacognitive skills“)** (z.B. Veenman, 2012) gesprochen wird. Als Überbegriff trägt Steuerung einer zentralen Eigenschaft von Metakognition Rechnung: eigene Kognition nicht nur (bewusst) wahrzunehmen und sozusagen zu beobachten und aus ihr Schlüsse für das eigene Verhalten zu ziehen, sondern diese Kognition zu steuern, zu regulieren, eigene Gedankengänge zu verändern – sie bspw. effizienter zu gestalten, metakognitive Informationen zu nutzen und sie in kognitive Prozesse bewusst einzubeziehen. Im Lernprozess können bspw. Lerntechniken bewusst genutzt werden, Inhalte gezielt wiederholt werden oder die eigene Konzentration verbessert werden.

Typische Ausprägungen dieses Aspekts sind bspw. die genannten prozeduralen Komponenten, die Denk- und Arbeitsprozessen Struktur geben und die Anpassung an veränderte Umstände ermöglichen.

Eine erste Erweiterung der etablierten Unterteilung von Metakognition in drei deklarative und drei prozedurale Komponenten ergibt sich bereits aus der Literatur und eigenen theoretischen Überlegungen heraus. Brown (1978) verwendet vier Komponenten oder Aspekte, um den prozeduralen oder exekutiven Anteil von Metakognition zu beschreiben: Analyseprozesse, Planungsprozesse, Überwachungsprozesse und Bewertungsprozesse. Während Reflexionsprozesse in diesem Schema fehlen, erwecken vor allem die Begriffe Analyse und Bewertung den Anschein, vor allem für Metakognition beim Umgang mit Mathematik essentiell zu sein, was ihre Aufnahme als separate Aspekte in die eigene Kategorisierung nahelegt.

Insbesondere, da die drei prozeduralen Aspekte durchaus in einer zeitlichen Reihenfolge interpretiert werden können – vor, während und nach einem/eines Denk- oder Arbeitsprozesses, drängt sich die Einführung (oder Übernahme von Brown) einer Analysephase auf, die noch vor der Planungsphase stattfindet (je nach Quelle dieser vermutlich aber auch zugeordnet wird). Im Bereich z.B. der Lern- oder Leseforschung mag die Analyse der vorliegenden Situation nicht in dem Maße von Bedeutung sein, dass sie eine separate Kategorie rechtfertigt. Beim Umgang mit Mathematik sind jedoch in der Regel bereits das Lesen und Verstehen einer Aufgabenstellung oder die Analyse (!) eines Realkontextes eine zentrale und unumgängliche Herausforderung, die bewältigt werden muss, bevor weitere Schritte in Betracht gezogen werden können. Hierbei kommt Kognition über Mathematik zum Tragen, die hier durchaus als Teil mathematikspezifischer Metakognition, oder zumindest als kaum trennscharf von dieser abzugrenzen, interpretiert wird. Vor allem finden aber Abgleiche mit bestehendem Wissen statt, es wird geklärt, ob die vorliegenden Informationen verstanden werden, ob sie in eigenes Wissen eingeordnet werden können, ob Zusammenhänge zu bekannten Aufgaben und Strategien bestehen, etc.. Insofern dürfte außer Frage stehen, dass die Analyse als metakognitiver Aspekt sinnvoll ist.

Der Bewertungs-Aspekt ist sehr umfangreich. In erster Linie dürften hierbei Bewertungen im Hinblick auf Nützlichkeit (z.B. einer Strategie), Angemessenheit (einer Handlung in einer Situation), Ausreichen (vorliegender Informationen), Notwendigkeit (weiterer Informationen), Richtigkeit (eines Ergebnisses), etc. in den Sinn kommen, die „klassisch“ metakognitiv sind.

Allerdings lassen sich – meiner Ansicht nach – zahlreiche Vorgänge als Bewertungen im Sinne einer Einordnung und Zuweisung interpretieren.

Unter prozeduralem Wissen wird – allgemein – häufig implizit vorhandenes, nicht verbalisierbares Handlungswissen verstanden, ein Verständnis, das sich im Hinblick auf Metakognition jedoch nicht direkt übertragen lässt.

Im Fall metakognitiven Wissens meint „prozedural“ die „Begleitung“ von z.B. Denk-, Arbeits- oder Problemlöseprozessen – dabei vor allem deren **Planung, Überwachung** und **Regulierung** und **Reflexion**. Im psychologischen Sinne sind hier also exekutive Mechanismen gemeint. Abgrenzend von *deklarativem MetaWISSEN* wird hier teils von *prozeduraler MetaKOGNITION* gesprochen.

Bei dieser Komponente geht es vor allem um Prozesse strukturierende Metakognition: so z.B. Überlegungen, die vorhandenes (Meta)Wissen sondieren und zu vorliegenden Aufgabenstellungen in Beziehung setzen und unter Nutzung dieses Wissens entsprechende Handlungen planen und einleiten. Dies betrifft also die bereits beschriebenen deklarativen Metawissens-Komponenten – vorliegende Aufgaben werden analysiert und mit Vorwissen verknüpft (→ *Aufgabenwissen*), Strategien werden ausgewählt (→ *Strategiewissen*); dies findet, wie zuvor erwähnt, unter Einbezug subjektiver Gesichtspunkte statt (→ *Personenwissen*). Ähnliche Überlegungen finden im Rahmen prozeduraler Metakognition während gesamter Lern-, bzw. Denk-Prozesse statt.

Zumeist zu Anfang derartiger Prozesse stehen dabei **analysierende** und **planende** Handlungen, bei denen Aufgabenstellungen untersucht und mit Vorwissen (Metawissen) in Beziehung gesetzt, Ziele identifiziert und festgelegt und entsprechende Handlungsschritte geplant werden.

Unter „**Überwachung**“ (im Englischen wird hier meist von „*Monitoring*“ gesprochen) wird – wie der Name bereits ausdrückt – verstanden, dass eigene Überlegungen und (zuvor geplante, kognitive) Handlungen während des laufenden Prozesses *überwacht*, also beobachtet und permanent bewertet werden. Zwischenergebnisse werden mit gesetzten Zielen abgeglichen, Strategien werden auf – andauernde – Effektivität hin überprüft; der aktuelle Fortschritt wird also mit einem Zielzustand verglichen und dieser Analyse entsprechend werden ggf. Adaptionen an ausgewählten Strategien vorgenommen. **Reflektierende** Überlegungen können im Anschluss an solche Prozesse stattfinden und diese rückblickend auf Effizienz oder auf Übertragbarkeit hin bewerten. Neu erlangtes Wissen (z.B. aus Begriffsbildungsprozessen) wird ins bestehende Wissen integriert und für zukünftige Prozesse nutzbar gemacht.

Eine typische Frage metakognitiver Natur, die im Bereich von Überwachungs-Prozessen (Monitoring) auftritt ist die, ob bestimmte Handlungen, bzw. kognitive Prozesse (noch und weiterhin) auf ein angestrebtes Ziel hinführen, also zielführend sind: “Am I still on the right track?” (Fabriz et al., 2014, S. 241). Eine (teils) negative Beantwortung dieser Frage könnte ihre Ursache in einer veränderten Situation, neuen Erkenntnissen, oder Unaufmerksamkeiten und unterlaufenen Fehlern haben, die auf Grund dieser Monitoring-Prozesse erkannt, bzw. entdeckt wurden. Entsprechend kann das eigene (kognitive) Vorgehen angepasst werden. Solche Prozesse können bspw. während eines laufenden Problemlöse-Vorgangs ablaufen und sich auf das konkrete Ziel der Lösung des bearbeiteten Problems beziehen, oder aber im Rahmen eines längerfristigen Lernprozesses zwischen aktuellen Handlungen und dem Ziel, ein bestimmtes Themengebiet zu beherrschen, abgleichen. (Fabriz et al., 2014)

Das Praktizieren von Monitoring gibt Lernenden Aufschluss über bspw. Lernfortschritte, die Effizienz von Strategien, etc. und ermöglicht durch dieses Feedback ein genaueres Verständnis und eine realistischere Einschätzung der eigenen Fähigkeiten und Defizite sowie eine bessere Planung zukünftiger Arbeits- und Lernprozesse (Fabriz et al., 2014).

„Sensitivity“ und „Awareness“: Im Hinblick auf diese dritte (auch für das hier vorgestellte Modell) zentrale Komponente von Metakognition finden sich in der Literatur – beginnend mit den Arbeiten von Flavell (u.a.) selbst – implizite, stärker unbewusste und wenig verbalisierbare Aspekte von Metakognition.

Wie angesprochen, stellt die in der Literatur (z.B. bereits bei Flavell & Wellman, 1977) häufig auftretende Komponente der Sensitivität (sensitivity) oder „awareness“ eine Rolle, die ein Gespür oder „Gefühl“ dafür beschreibt, dass, bzw. wann die Verwendung von Metakognition nützlich oder notwendig ist.

Hasselhorn (1992, S. 58) betont die Bedeutung dieser „weitgehend vernachlässigten“ Sensitivitäts-Kategorie für die Wirksamkeit von Metakognition für das Lernverhalten.

Shilo und Kramarski (2019) betonen die Wichtigkeit eines Bewusstseins („awareness“, S. 626) dafür, welches Wissen und welche Fähigkeiten vorhanden sind und wann, bzw. in welchen Situationen, diese einzusetzen sind, um im entscheidenden Moment tatsächlich (quasi automatisch) zu erkennen, dass und wie (kognitiv) aktiv zu werden ist. Zur Entwicklung eines solchen Bewusstseins im Hinblick auf Begriffswissen und Handlungen in der Mathematik empfehlen Kramarski und Mevarech (2003), Lernende in mathematisch-metakognitivem

Diskurs („mathematical-metacognitive discourse“) zu schulen (Shilo & Kramarski, 2019, S. 626).

Im Zusammenhang mit dem Awareness-Aspekt werden bspw. von Efklides et al. (1998) sogenannte „Feelings of difficulty“ als Aspekt von Metakognition beschrieben. Diese stellen eine Art subjektiver Erfahrung („subjective experience“) dar, die beim Umgang mit Problemen aufkommen kann. Bei der entsprechenden Person entsteht das Bewusstsein, dass das vorliegende Problem keine unmittelbare Reaktion, bzw. Antwort provoziert, die einen Umgang damit ermöglichen würde; z.B. eine Lösungsidee. (Efklides et al., 1998, S. 207) Nicht zu verwechseln sind diese mit Gefühlen im Sinne von Emotionen!

Allgemeiner wird von Efklides et al. (1998, S. 208) hierbei auch der Begriff „metacognitive feelings“ verwendet, also „Gefühle“ (Eindrücke, etc.), die im Rahmen kognitiver Aktivität aufkommen. Verwandt sind bspw. die bekannten Konzepte „Feeling of knowing“ und „Judgement of learning“, die sich auf die Fähigkeit beziehen, Einschätzungen über eigenes Wissen, bzw. eigene Lernfortschritte zu geben (Schneider & Artelt, 2010). Dabei ist zu beachten, dass die verwendeten Begriffe hier nicht für Gefühle im Sinne von Emotionen oder Affekten zu verstehen sind.

Dieser Aspekt von Metakognition hat sowohl unbewusste Anteile – bspw. insofern, als auftretende Fehler beim Umgang mit Mathematik spontan bemerkt werden, ohne dass bewusst nach ihnen gesucht wurde – und bewusste Anteile, insofern, dass eben gerade versucht wird, „wachsam“ zu sein, was mit dem prozeduralen Monitoring-Aspekt zusammenhängen dürfte.

Beim Aspekt der metakognitiven Erfahrungen handelt es sich um Wissen darüber, wie sich bestimmte kognitive (und affektive) Zustände „anfühlen“ – basierend darauf, wie diese in vergangenen Situationen wahrgenommen, erkannt, empfunden wurden. Hasselhorn (1992, S. 42) spricht dabei von bewussten kognitiven Empfindungen und bewussten affektiven Zuständen. Metakognitive Erfahrungen stellen im Folgenden in vergleichbaren Situationen also zusätzliche Informationen bereit – bspw. darüber, wie sich Verständnis „anföhlt“ oder in Form eines Gespürs für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aufgabe gelöst werden kann. Dieser Aspekt dürfte bspw. beim Lernen neuer und Vertiefen bekannter Inhalte wichtig sein, da er – basierend auf der eigenen Erfahrung – eine „intuitive“ Einschätzung darüber ermöglicht, ob Inhalte ausreichend verstanden wurden. Da es sich hierbei um eine sehr subjektive Einschätzung handelt, kann diese vor allem rückblickend auf Grund der eigenen „Geschichte“ im Umgang mit – hier – Mathematik getroffen werden.

Die Übergänge zwischen den verschiedenen „Definitionen“ sind auch hier fließend – im Rahmen des in dieser Arbeit entwickelten Systems wird eine klarere Trennung und Definition angestrebt.

Kommentar

Die Unterteilung in eine prozedurale Komponente („Metakognition“) und eine deklarative Komponente („Metawissen“) sowie eine unbewusst-implizite Komponente wird auch im Rahmen dieser Arbeit für sinnvoll erachtet und spiegelt sich im später vorgestellten Kategoriensystem wider (vgl. Kapitel 4.2).

In der Forschungsliteratur werden mit „Metakognition“ teilweise das Gesamtkonzept bzw. der Überbegriff bezeichnet, teilweise aber nur die prozeduralen (oder auch die deklarativen) Aspekte, wohingegen die deklarativen Aspekte manchmal unter dem Begriff „Metawissen“ zusammengefasst werden – abhängig von den jeweils gewählten Definitionen von Metakognition, die mitunter nicht klar ausgearbeitet sind. Bei der Dokumentation der Überlegungen und Forschungsergebnisse dieser Arbeit werden das Gesamtkonzept bzw. der Überbegriff als „Metakognition“ bezeichnet, während darauf geachtet wird, die jeweiligen Unterkategorien bzw. -aspekte entsprechend als solche zu kennzeichnen. Von dieser Regel wird möglicherweise abgewichen, wo auf Grund des vorangehenden Kontextes bereits Klarheit über den gerade verwendeten Begriff besteht und die Verwendung des Begriffs „Metakognition“ aus Gründen der Lesbarkeit bevorzugt wird.

Ebenfalls etabliert sind, wie oben erläutert, die Unterteilung der deklarativen Komponente in die drei Komponenten „Personenwissen“ („person knowledge“), „Aufgabenwissen“ („task knowledge“) und „Strategiewissen“ („strategy knowledge“) und die Unterteilung der prozeduralen Komponente in die drei Komponenten „Planung“ („planning“), „Überwachung“ („monitoring“) und „Reflexion“ („reflexion“). Auch diese Unterteilung wird im Rahmen der Arbeit als Ausgangslage als sinnvoll erachtet, da sich zahlreiche denkbare „Ausprägungen“ von Metakognition grundsätzlich als Zusammenwirken dieser Komponenten interpretieren lassen (s. Kapitel 2.1.3). Dabei sind in dieser Arbeit mit „Ausprägungen“ oder „Aspekten“ (Schoenfeld, 1987: „aspects“, S. 190) von Metakognition Arten gemeint, wie Metakognition in Erscheinung treten kann. Dies kann das Auftreten (Verwenden) von prozeduraler Metakognition sein, das Auftreten (Haben) von deklarativem Metawissen oder das Ableiten von Konsequenzen und Anwenden von steuernden, adaptierenden Vorgängen. Dabei

wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass das Auftreten von Metakognition sich – natürlich – nicht immer (oder sogar selten) auf eine der genannten drei Komponenten oder ihrer Unterkomponenten beschränkt, sondern dass Metakognition in der Regel – wie zuvor angesprochen – als Zusammenwirken dieser Komponenten gesehen werden kann.

2. Kapitel: Metakognition und Mathematik

Obwohl – wie auch in anderen Quellen betont – verfügbare Forschungsergebnisse zur Metakognition oftmals auf Grund unterschiedlicher oder fehlender Begriffsdefinitionen nur schwer vergleichbar, bzw. kaum auf eigene Fragestellungen übertragbar sind und die Forschungslage gerade zur Metakognition beim Mathematiklernen im Bereich der Sekundarstufe II und in der Hochschulmathematik relativ begrenzt ist, muss wegen des notwendigerweise begrenzten Umfangs der vorliegenden Arbeit eine Auswahl, was den zu dokumentierenden Forschungsstand und die einschlägige Literatur betrifft, getroffen werden. Hierbei wird vor allem auf die Forschungslage zur Metakognition in der Mathematikdidaktik eingegangen; zuerst sollte jedoch die Entwicklung des Metakognitionsbegriffs in der Psychologie in angemessenem Umfang dargestellt werden.

2.1. Grundlegendes

2.1.1. Historische Entwicklung der Metakognitionsforschung

Das Konzept der *Metakognition* wurde erstmals von John H. Flavell Anfang der 1970er-Jahre im Rahmen der Gedächtnisforschung entwickelt – ursprünglich unter dem Namen „*Metagedächtnis*“ (*metamemory*), bezogen vor allem auf Wissen über Inhalte und Funktionsweisen des (eigenen) Gedächtnisses. Auf Grund der Nähe zu Wissen über andere kognitive Aspekte wurde der Begriff schließlich zur „Metakognition“ erweitert, wobei zumindest aus entwicklungspsychologischer Sicht weiterhin Metawissen über Gedächtnisprozesse zentraler Forschungsgegenstand blieb (Schneider, 1998).

[Auf Grund dieser in frühen Entwicklungsstadien des Konzepts abweichenden Terminologie beziehen sich einige der in dieser Arbeit zu findenden Zitate noch auf diesen ursprünglichen – enger gefassten – Begriff, der allerdings in Bezug auf Gedächtnisinhalte und -funktionen grundsätzlich dem späteren Metakognitionsbegriff entspricht.]

Ziel Flavells war es dabei vor allem, die Problematik eines bei Lernenden (Kindern) festgestellten sogenannten „Produktionsdefizits“ („production deficiency“) zu untersuchen – den Umstand, dass Personen trotz grundsätzlich vorhandenen Wissens und grundsätzlich vorhandener Informationen, bzw. angemessener Fähigkeiten und Fertigkeiten dieses Wissen und diese Fähigkeiten/ Fertigkeiten ohne explizite Aufforderung nicht zur Lösung von Problemen nutzen.

Flavell (1979) sieht die Funktion von Kognition unter anderem in der Durchführung kognitiver Handlungen, z.B. im Problemlösen, während Metakognition notwendig zur Kontrolle/Steuerung dieser kognitiven Vorgänge ist – notwendig zum Verständnis von Aufgaben, zur Auswahl von (Lösungs-)Strategien, zur Beurteilung von deren Effektivität, etc.. Flavell (1979) vermutete, dass metakognitive Erfahrungen vor allem in Situationen auftreten, bzw. gemacht werden, die ein hohes Maß an bewusstem Denken erfordern, z.B. bei Aufgaben im schulischen Bereich.

Den deklarativen Wissens-Aspekt von Metakognition unterteilt Flavell in die drei bereits in Kapitel 1.4 angesprochenen Kategorien, bzw. Variablen „person“, „task“ und „strategy“, also Personen-Wissen, Aufgaben-Wissen und Strategie-Wissen (Flavell, 1979, S. 907). Zur Person-Kategorie zählen dabei Wissen über intra-individuelle und inter-individuelle Unterschiede sowie über Mechanismen von Kognition im Allgemeinen (Flavell, 1979, S. 907).

Neben der Unterteilung des deklarativen Aspekts von Metakognition prägen Flavell und Wellman (1977) ebenfalls den Begriff der Sensitivität („sensitivity“) als eine Haupt-Kategorie des von ihnen entwickelten Konzepts. Darunter wird das Gespür verstanden, dass „eine spezifische Lernsituation strategische Aktivitäten erfordert“ (Hasselhorn, 1992, S. 37). Dementsprechend ist diese nötig, damit bspw. bekannte Strategien in entsprechenden Situationen auch tatsächlich eingesetzt oder metakognitiv evaluiert werden. (Hasselhorn, 1992, S. 37), z.B. in Form von „awareness that a particular task in a particular setting requires the use of memory strategies“ (Schneider, 1998, S.3).

In Bezug auf die Sensitivitäts-Kategorie sprechen Brown et al. (1983) auch von „Metagedächtnis“ („metamemory“, S. 15), womit implizites und unbewusstes gedächtnisbezogenes Metawissen gemeint ist. Bereits hier wird also die Möglichkeit in Betracht gezogen, dass Metakognition unbewusst stattfinden kann, bzw. dass dies ein zentraler Teil prozeduraler Metakognition ist.

Der Begriff der Überwachung („monitoring“) geht als "here-and-now-memory monitoring" ebenfalls auf Flavell und Wellman (1977) zurück (Hasselhorn, 1992, S. 38), wurde jedoch erst von Brown (1978) als zentrales Konzept behandelt. Sie etabliert die Unterteilung von (prozeduraler) Metakognition in *Analyseprozesse, Planungsprozesse, Überwachungsprozesse und Bewertungsprozesse*.

Kuhn (1999) beschreibt Metakognition als Kognition „zweiter Ordnung“ („second order cognition“, Kuhn, 1999 in Neuenhaus, 2011, S. 1).

2.1.2. Historische Entwicklung der Metakognitionsforschung in der Mathematikdidaktik

Zu Beginn der 1980er Jahre geriet Metakognition zunehmend in den Fokus der mathematikdidaktischen Forschung.

Im Rückblick auf den *International Congress on Mathematical Education (ICME)* 1980 merkt Schoenfeld (2014) an, dass Metakognition zu dieser Zeit noch nicht im „mainstream educational discourse“ angekommen war. So bezog sich der Begriff des „Mathematical understanding“ zu dieser Zeit noch weitgehend auf mathematisches FachWISSEN (Schoenfeld, 2014, S. 497).

Die Untersuchung von Metakognition im Hinblick auf ihr Verhältnis zum Mathematiklernen und -lehren, bzw. zur Mathematikdidaktik beginnt – wohl – mit der Arbeit von Garofalo und Lester (1985), die die Beforschung von Mathematikleistung auf rein kognitiver Ebene für nicht ausreichend befinden (Garofalo & Lester, 1985; Lucangeli et al., 2019; Schneider & Artelt, 2010). Dabei war vor allem die Rolle von Metakognition (und Verständnis) beim mathematischen Problemlösen von Interesse, da davon ausgegangen wurde, dass Wissen über eigene Kognition sowie exekutive Kontrollfunktionen wie Überwachung und Selbstregulation dabei von Nutzen sein würden. In Studien zeigten sich dabei einerseits Defizite bei mehrschrittigen Problemlöse-Verfahren auf Seiten der Lernenden und Schwierigkeiten beim Vermitteln entsprechender Problemlöse-Strategien im Unterricht auf Seiten der Lehrenden.

Schneider und Hasselhorn (1988) bezeichnen (zum damaligen Zeitpunkt) den „bisherigen“ Mathematikunterricht als „defizitär“ bzgl. metakognitiver Aktivitäten und betonen, dass dieser vom Einbezug entsprechender Aktivitäten profitieren könne (ebenda, S. 114).

Während der Forschungsschwerpunkt zu Beginn der Metakognitionsforschung auf individueller Metakognition lag, wurde mit der Zeit auch Metakognition in Gruppen („group metacognition“ – auch „social metacognition“) berücksichtigt (Artzt & Armour-Thomas, 1992; Efklides, 2008 in Vorhölter, 2019, S. 703). Bspw. arbeitet Vorhölter (2019, S. 703) im Hinblick auf Metakognition mit den „factors of strategies for proceeding, for regulating and for evaluating“ und überträgt diese vom Individuum auf Gruppen von Lernenden.

Im Bereich der (fach-)didaktischen und Bildungs-Forschung herrscht zum jetzigen Zeitpunkt weitgehend Einigkeit darüber, dass es sich bei Metakognition um eine essentielle Fähigkeit handelt (Pintrich, 2002; Schraw, 1998; Zimmerman, 2008 in Shilo & Kramarski, 2019).

Vorstellungen vom Lernen und Verstehen von Mathematik sind komplexer geworden (Schoenfeld, 2014) und das Konzept des „Mathematical sense-making“ ist heutzutage als Resultat der Entwicklung der letzten Jahrzehnte zentraler Gegenstand der mathematikdidaktischen Forschung (Schoenfeld, 2014, S. 497).

Bezüglich der Frage nach dem Verständnis, bzw. einer einheitlichen Definition des Begriffs Metakognition und danach, wie Metakognition einerseits untersucht und andererseits geschult werden kann, besteht allerdings seit seiner Einführung durch Flavell (1976) bis heute noch immer kein Konsens (Desoete & De Craene, 2019).

2.1.3 Schwierigkeiten bei der Erforschung von Metakognition

„The problem lies in its different theoretical contributions, its complexity, multifacetedness and lack of a clear definition.“ (Tarricone, 2011, S. 4)

Die Verwendung des Metakognitionsbegriffs in Forschung und Literatur – im Sinne eines einheitlichen, widerspruchsfreien Konzepts – hat sich bereits in der Anfangszeit seiner Geschichte als nicht unproblematisch erwiesen. So beobachtet Tarricone im Rahmen ihrer

Metastudie (Tarricone, 2011, S. 3), dass Metakognition in der Literatur als ein „somewhat perplexing, mystifying and complex construct“ gesehen wird, dessen genaue Beschreibung und Einordnung sich auf Grund seiner zahlreichen Facetten und seiner mit verschiedenen Konzepten und Forschungstraditionen verbundenen Entwicklungsgeschichte als schwierig erweisen.

Ungefähr 10 Jahre nach Beginn der Metakognitionsforschung durch Flavell (z.B. 1977) bescheinigt Brown (1987) dem Begriff bzw. dessen zahlreichen unterschiedlich (oder auch falsch) verstandenen und verwendeten Varianten eine inhärente und nur schwer auflösbare Problematik:

„Brown (1987) explains that ‚metacognitive-like concepts are fraught with some of the most difficult and enduring epistemological problems of psychology‘.“ (Tarricone, 2011, S. 66)

Diese Problematik sieht Brown – unter anderem – im Umfang des ursprünglichen Konzepts an sich begründet, das sich in seinem Facettenreichtum der Verwendung eines einzigen Begriffs eigentlich entzieht.

Hier ist allerdings anzumerken, dass dieser große und nicht klar umrissene Begriffsumfang durchaus im Interesse Flavells lag, dessen Intention es war, dass „sein“ Begriff bzw. das dahinterliegende, größere Konzept, von Wissenschaftler_innen flexibel und adaptiv genutzt und an deren jeweilige Forschung angepasst werden würde.

Erschwerend besteht die grundsätzliche Frage der Abgrenzung von Metakognition einerseits – also Kognition, die ihrerseits auf Kognition bezogen ist – von „anderen“ Kognitionen andererseits.

“Metacognition refers loosely to one’s knowledge and control of one’s own cognitive system. Two primary problems with the term are: it is difficult to distinguish between what is meta and what is cognitive; and there are many different historical roots from which this area of inquiry developed. The confusion that follows the use of a single term for a multifaceted problem is the inevitable outcome of mixing metaphors.” (Brown, 1987 in Tarricone, 2011, S. 66)

Brown äußert sich hierbei also einerseits zur Schwierigkeit – bspw. im Rahmen einer (gedanklichen) Strategie – ob diese nun als rein *kognitiv* oder bereits als *metakognitiv* zu bezeichnen sei; andererseits zur Verwendung des Begriffs zur Benennung von sowohl *Wissen*

über Kognition als auch der *Steuerung* derselben. Drittens geht Brown auf die zahlreichen unterschiedlichen historischen Wurzeln des Begriffs ein, die ihn in der Tradition verschiedener Forschungsgebiete verorten.

Des Weiteren legt Tarricone (2011) ausführlich dar, wie ein oft „unsauberer“ Umgang mit dem Begriff Metakognition trotz einer (mittlerweile in der Psychologie) umfangreicheren Forschungslage zum Thema die Greifbarkeit des Begriffs noch weiter erschwert. So werde in verschiedenen Studien auf klare Definitionen oder theoretische Einordnungen des verwendeten Konzepts verzichtet, oder andererseits eine Vielzahl von Phänomenen ohne fundierte Begründung dem so vielseitigen Begriff Metakognition zugeordnet – eine Problematik, die einerseits Recherchen in diesem Bereich behindert, andererseits das Heranziehen von Ergebnissen anderer Studien erschwert, da unterschiedliche zu Grunde liegende Begriffsdefinitionen (oder deren grundsätzliches Fehlen) die Übertragbarkeit entsprechender Daten und Forschungsergebnisse verhindern.

Efklides und Vauras (1999) erklären einen Teil dieser Problematik mit dem Entstehen und Bestehen dreier verschiedener Forschungstraditionen innerhalb der psychologischen Forschung, die ihren Fokus auf jeweils einen von drei Aspekten von Metakognition legen:

So konzentriert sich eine Strömung innerhalb der Entwicklungspsychologie („developmental research“, ebenda, S. 455) vor allem auf die Erforschung *metakognitiven Wissens*, was zur Entwicklung des Konzepts der „Theory of Mind“ führte. Das Konzept der „Theory of Mind“ bezeichnet – kurzgefasst – die Fähigkeit, Annahmen über kognitive Zustände und Vorgänge in anderen Personen zu treffen, bzw. eigene Kognitionen als subjektiv zu erkennen und Zusammenhänge zwischen der eigenen Kognition und der anderer herzustellen sowie entsprechend verschiedene Perspektiven einnehmen zu können (vgl. etwa Fagnant & Crahay, 2001). Obwohl teils davon ausgegangen wird, dass beide Konzepte (Metakognition und Theory of Mind) die gleichen Phänomene bezeichnen, sind die jeweiligen Forschungstraditionen dennoch weitgehend separat geblieben; im Fall von Metakognition liegt das hauptsächliche Forschungsinteresse auf der eigenen Kognition eines Individuums, im Fall der Theory of Mind auf der Kognition anderer Personen (Fagnant & Crahay, 2001, S. 264).

Die zweite Forschungstradition – innerhalb der Pädagogischen Psychologie – verbindet „Metakognitives Wissen“ mit „Metakognitiven Fähigkeiten“ („metacognitive skills“). Im Rahmen dieser Theorie werden unter metakognitivem Wissen die Aspekte „Deklaratives Wissen“, „Konditionales Wissen“ („conditional knowledge“) und „Prozedurales Wissen“ verstanden (Efklides & Vauras, 1999, S. 455 f.).

Im Bereich der Experimentellen Psychologie hingegen steht der Aspekt der „Metakognitiven Erfahrungen“ im Zentrum der Forschung. Diese werden in Form der Begriffe „feeling of knowing“, „feeling of familiarity“ und „feeling of confidence“ erforscht (Efklides & Vauras, 1999, S. 455 f.). Bei den Begriffen „feeling of knowing“ und „feeling of familiarity“ geht es um die Fähigkeit, Aussagen darüber zu treffen, ob einer Person bestimmte Inhalte grundsätzlich bekannt sind, auch wenn sie zum gegebenen Zeitpunkt nicht explizit erinnert, bzw. abgerufen werden können. Im Rahmen des „feeling of confidence“ wird die Fähigkeit zu Prognosen, bzw. Beurteilungen über eigene Leistung untersucht.

Als Resultat findet weiterhin eine ständige theoretische Weiterentwicklung und Ausschärfung des Begriffs Metakognition statt, was nicht nur zu zahlreichen (unterschiedlichen) Charakterisierungen führt, sondern ebenso zu verschiedenen Erhebungsmethoden. Dies erklärt möglicherweise auch zum Teil die geringen Übereinstimmungen von Ergebnissen unterschiedlicher Erhebungen. (Schellings, van Hout-Wolters, Veenman & Meijer, 2013, S. 964)

Die Vielseitigkeit des Begriffs Metakognition mit seinen verschiedenen Aspekten führt dazu, dass dieser – selbst wenn innerhalb der jeweiligen Forschungsarbeit eine einheitliche Definition verwendet wird – in Bezug auf bestimmte Fragestellungen nicht als einheitliches Konzept betrachtet werden kann. So unterscheiden sich bspw. bezüglich der Frage der Stabilität deklarative und exekutive (prozedurale) Aspekte. Während deklarative Aspekte „eher“ überdauernde, stabile Personeneigenschaften („trait-view“) sind, handelt es sich bei prozeduralen Aspekten „eher“ um instabilere, aufgaben- und situationsabhängige Aktivitäten („state-view“). (Hasselhorn, 1992, S. 41)

Eine der zentralen Schwierigkeiten, die mit dem Begriff Metakognition zusammenhängen, ist – selbst bei gründlicher Definition, bspw. im Rahmen eines Modells, wie es in dieser Arbeit vorgelegt wird – die Interaktion von Komponenten des Begriffs. Das gemeinsame Auftreten und Zusammenwirken verschiedener Aspekte von Metakognition erschwert – vor allem auf praktischer Ebene – deren systematische Trennung und Erhebung im Rahmen von Forschungsbemühungen (Hasselhorn, 1992). Auch bei Flavell (1979) findet sich bereits der Hinweis, dass Metakognition (hier bezogen auf die deklarative Komponente) zumeist als Interaktion mehrerer beteiligter Kategorien, Komponenten oder Aspekte stattfindet. Auch Wenke et al. (2011) betonen, dass metakognitive Prozesse stark verflochten („highly interwoven“) seien und eine Unterteilung in verschiedene metakognitive Dimensionen („metacognitive dimensions“) sich als schwierig erweise (Schellings et al., 2013, S. 984). Dies

zeigt sich in dieser Arbeit insbesondere bei dem Versuch, Prozesse aus der mathematischen Bezugsdomäne Analysis auf mögliche Ansatzpunkte für metakognitive Aktivität hin zu untersuchen (s. Forschungsfrage 3, Kapitel 4.4) und spiegelt sich im im Rahmen der Arbeit entwickelten Modell (graphisch durch Pfeildarstellungen) wider (s. Forschungsfrage 2, Kapitel 4.2).

Dass sich bestimmte Aspekte und Teilaspekte von Metakognition nicht trennscharf unterteilen lassen, zeigt sich bspw. auch bei Rott (2014), in dessen Untersuchungen zu Problembearbeitungsprozessen sich (metakognitive, bzw. selbstregulative) Phasen dieser Prozesse nicht immer klar voneinander trennen ließen – z.B. die Phasen „Planning“ und „Implementation“ (ebenda, S. 272).

Darüber hinaus wird Metakognition häufig als Teil umfassenderer Modelle oder Konzepte verwendet und erhoben – so bspw. im Verbund mit dem Begriff „Diskursivität“ bei Cohors-Fresenborg et al. (2014), als Teil des „Good Strategy User“-Modells nach Pressley et al. (1987) (vgl. Kapitel 2.3.1) oder – je nach Definition – als Teilaspekt eines größeren Selbstregulations-Modells (zu dem dann bspw. auch Motivation und Emotion zählen). Fabriz et al. (2014) betonen zusätzlich, dass Metakognition (bzw. im genannten Text speziell Selbst-Überwachung) häufig nicht isoliert, sondern im Rahmen fachlicher Trainings-Programme (also im Verbund mit zusätzlichen Maßnahmen im Bereich Mathematik) überprüft werde, was zu Fehlinterpretationen der beobachteten Verbesserungen führen könne.

Trotz des weitgehenden Konsenses über die Wirksamkeit von Metakognition müssen Forschungsergebnisse zur Metakognition also, wie bereits angesprochen, auf ihren Kontext hin überprüft und entsprechend kritisch interpretiert werden.

2.1.4. Zur Entwicklung von Metakognition

Bei Metakognition handelt es sich um eine Eigenschaft bzw. um kognitive Vorgänge, die grundsätzlich bei jedem Menschen vorliegen, bzw. von allen Menschen betrieben werden.

Erwachsene (Lernende) sind sich für gewöhnlich der Grenzen der eigenen Gedächtnisleistung bewusst, bzw. kennen diese, und nutzen dieses Wissen bei der Planung von Lernprozessen (Schraw, Crippen & Hartley, 2006, S. 114), indem sie Zeit und Stoffumfang entsprechend

limitieren oder ausreichend viele Wiederholungen durchführen und regelmäßig das Gelernte überprüfen. Es stehen ihnen für gewöhnlich verschiedene Strategien zur Steuerung solcher Lernprozesse zur Verfügung, die sie je nach Situation entsprechend auswählen – das Anfertigen von Notizen, die Nutzung von Gedächtnisstützen, selektives Lesen, etc. (Schraw, Crippen & Hartley, 2006, S. 114).

Aus entwicklungspsychologischer Sicht beginnt die Entwicklung von Metakognition im Lauf der ersten Schul-, bzw. Vorschuljahre und erreicht ihren Höhepunkt in der frühen Sekundarstufe (Kuzle, 2018; Mevarech & Kramarski, 2014; Veenman et al., 2006; Whitebread et al., 2005 in Desoete & De Craene, 2019). Innerhalb dieses Zeitraums kommt es zu einem starken Anstieg, was sowohl die Qualität als auch die Häufigkeit von Metakognition betrifft (Li et al., 2015; Van der Stel et al., 2010; Van der Stel & Veenman, 2014; Veenman et al., 2004 in Veenman & Van Cleef, 2019). Allerdings lassen sich dabei interindividuelle Unterschiede feststellen, die sich über den Entwicklungszeitraum hinweg als relativ stabil erweisen. Lernende behalten ihre relative Position in ihrer Altersgruppe im Hinblick auf den Einsatz metakognitiver Fähigkeiten offenbar weitgehend bei (Veenman et al., 2004; Van der Stel and Veenman, 2014 in Veenman & Van Cleef, 2019).

Über die genauen Entwicklungszeiträume von Metakognition besteht insgesamt allerdings keine Einigkeit. So sehen nach Temur et al. (2019) vor allem ältere Studien den Beginn metakognitiver Aktivität erst gegen Ende der Primarstufe, wobei beachtet werden sollte, dass der Zeitraum der Primarstufe (und infolgedessen weiterführender Schulen) international variiert, weshalb bspw. Angaben der Form „gegen Ende der Grundschule“ sich je nach Quelle nicht immer präzise einordnen lassen.

Im Detail vollzieht sich die Entwicklung von Metakognition von Fähigkeiten/ Aspekten mit niedrigem Aufwand, bzw. niedriger Komplexität – wie z.B. dem Erkennen einer Problemstellung – hin zu Fähigkeiten/ Aspekten mit höherem Aufwand – wie der Planung und Steuerung (Hidayat et al., 2018; Shute, 1996 in Desoete & De Craene, 2019). Solche Entwicklungsunterschiede werden auch von Whitebread et al. (2007) und Veenman et al. (2004) berichtet. Whitebread et al. (2007) konnten metakognitive Aktivitäten (im Bereich Erklärung, Beurteilung und Planung) bereits bei Kindern im Alter zwischen drei und fünf Jahren beobachten, während Überwachungs- und Transfer-Fähigkeiten in diesem Altersbereich nur in geringem Umfang auftraten (Temur et al., 2019). Laut Veenman et al. (2004) entwickeln sich bspw. die Komponenten Überwachung (Monitoring) und Evaluation erst nach der Entwicklung der Komponente Planung.

2.1.5. Weitere Informationen und Überlegungen zu Metakognition

Metakognition oder „nur“ Kognition?

Bisweilen wird die Frage gestellt, ob es sich bei einer bestimmten kognitiven Handlung oder einer bestimmten Art von Wissen überhaupt um Metakognition handelt, oder ob diese „nur“ Kognition, z.B. Fachwissen sei. (Hierbei sei angemerkt, dass strenggenommen in vielen derartigen Fällen die betreffenden Begriffe ihrerseits nicht notwendigerweise klar umrissen sind – in diesem Fall „Fachwissen“ – und separat untersucht und überprüft werden könnten, darauf an dieser Stelle aus Gründen der Übersicht und des Umfangs dieser Arbeit aber verzichtet wird. Bspw. gehört nach Ansicht des Autors zu mathematischem Fachwissen auch deklaratives Metawissen.)

Grundsätzlich muss hierbei daran erinnert werden, dass Metakognition in jedem Fall eine Art von Kognition darstellt. So ging Flavell davon aus, dass sich Metakognition von anderen Formen von Kognition lediglich im Hinblick auf ihren Inhalt (also die eigene Kognition) unterscheidet, nicht aber in Bezug auf ihre „Form“ (im Englischen: „form“) oder Qualität (Flavell, 1979, S. 906).

Konrad (2005, S. 23) legt dar, „dass die beiden Konzepte Kognition und Metakognition eng aufeinander bezogen sind und sich in zahlreichen Situationen „nicht eindeutig voneinander abgrenzen lassen““ (in Cohors-Fresenborg et al. 2014, S. 7).

Auf Grund des – relativ – geringen Alters des Begriffs Metakognition besteht durchaus die Möglichkeit, dass ältere, etablierte Begriffe, bzw. Konzepte – z.B. im Bereich der Mathematikdidaktik – von Metakognition nicht abgegrenzt werden müssen, sondern sich vielmehr mit dem „neuen“ Begriff überschneiden oder diesen bereits beinhalten. Hierbei sollte bspw. etwa an die Problemlösestrategien Pólyas (vgl. Kapitel 2.3.1) gedacht werden, der bereits vor Prägung des Begriffs Metakognition intensiv Metakognition betrieb (vgl. etwa Schneider & Artelt, 2010).

Der Erfahrung des Autors nach werden häufig von Expert_innen (Mathematikdidaktiker_innen) metakognitive Aspekte als „klassischem mathematischem Denken“ zugehörige Vorgänge bezeichnet. Dies scheint weder ein Widerspruch zu sein noch ein Problem, da Metakognition – wie in dieser Arbeit dargelegt und belegt (vgl. etwa Kapitel

2) – tatsächlich einen wichtigen Faktor für den Umgang mit Mathematik darstellt; ein Umstand, der auch vor ihrer „Entdeckung“ und der Prägung des Begriffs „Metakognition“ (Flavell, 1976) gegolten haben sollte. Insofern wird der Behauptung, Metakognition gehöre bereits zum Repertoire von Mathematiker_innen, in dieser Arbeit zugestimmt. Seit den Arbeiten von Flavell (etwa 1979) haben diese Fähigkeiten und Fertigkeiten lediglich eine Bezeichnung und (mit den dargelegten Einschränkungen, vgl. Kapitel 2.1) eine Systematisierung erhalten.

Viele der in dieser Arbeit genannten Beispiele für Metakognition können dementsprechend auf den ersten Blick eher kognitiver als metakognitiver Natur zu sein scheinen – z.B. im Rahmen sogenannten „mathematischen Denkens“. Allerdings ist hierbei zu beachten, dass die Durchführung von kognitiven Handlungen oftmals nur auf Grund einer vorausgehenden Entscheidung erfolgt, der Metakognition (z.B. Wissen, Überlegungen, Erfahrungen) zugrunde liegt (vgl. etwa Meijer et al., 2006 in Schellings et al., 2013, S. 965). Bspw. ist die Überprüfung eines berechneten Ergebnisses an sich eine kognitive Handlung, aber das Wissen, dass diese Überprüfung sinnvoll sein könnte, die Entscheidung für eine Art der Überprüfung gegenüber einer anderen oder die Überwachung des Rechnungsprozess können zweifelsohne metakognitiver Natur im Sinne einer Steuerung von bzw. von Wissen über Kognition sein.

Auch Schneider und Hasselhorn (1988) führen aus, dass zwar die Anwendung einer (z.B. mathematischen) Strategie als rein kognitive Operation angesehen werden könne, dass aber die zu deren gezielter Auswahl und Präferenz über alternative Strategien, sowie zu ihrer adaptiven und bewusst gesteuerten Anwendung nötigen Mechanismen und Entscheidungen auf Metakognition beruhen (ebenda, S. 114).

Abgesehen von der Hervorhebung einer metakognitiv bedingten Entscheidung, die hinter einer kognitiven Handlung steht, sollte auch bedacht werden, dass Kognition über Mathematik oftmals – auch – als Kognition über eigenes Wissen interpretiert werden kann. Bspw. stehen hinter der Frage „Welche Eigenschaften hat diese Funktion?“ die metakognitiven Fragen „Welche Eigenschaften dieser Funktion kenne ich?“, „Ist es im Hinblick auf meine Lernziele sinnvoll, mich mit diesen zu beschäftigen?“, „Welche davon sind im Hinblick auf die aktuelle Fragestellung von Nutzen?“ und weitere.

Ergänzend sollen im Folgenden einige Überlegungen und – durchaus bewusst zugespitzte – Beispiele vorgestellt werden, die diese Thematik und die zuvor angesprochenen

Fragestellungen verdeutlichen sollen und die aufzeigen, welche Interpretationen des Begriffs theoretisch möglich wären.

Wie ausgeführt, wird unter Metakognition Kognition über Kognition verstanden, worunter jeweils Wissen und Denkprozesse gefasst werden. Wird im konstruktivistischen Sinne davon ausgegangen, dass jeglicher Aspekt einer objektiven Realität unserer Wahrnehmung nicht unmittelbar zugänglich ist, sondern unserer Beobachtung „nur“ mittelbar *konstruiert* vorliegt, so lässt sich argumentieren, dass bspw. auch Mathematik und mathematisches Wissen nur mittelbar vorliegen, in Form von mentalen Konstrukten und damit letztlich in Form von Kognition. Entsprechend wäre – pointiert – jede Kognition über Mathematik automatisch Metakognition; ein Argument, das sich auch auf andere Kontexte übertragen ließe und das hier nicht weiter diskutiert werden soll. Es soll mit dieser Überlegung lediglich verdeutlicht werden, wie allgemein sich der Begriff Metakognition unter gewissen Annahmen theoretisch fassen ließe.

Eine möglichst strikte Art der Trennung zwischen dem, was sich gemeinhin als „mathematisches Denken“, bzw. als Fach- oder Sachwissen (als Kognition) bezeichnen ließe, und dem, was im strikten Sinne Metakognition (also Wissen und Denkprozesse über solches Wissen und solches Denken) ist, soll am folgenden Beispiel – ebenfalls absichtlich zugespitzt – dargestellt werden. Als Ausgangsproblem wird ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Variablen verwendet, das von einer/m Lernenden gelöst werden soll.

Metakognition wäre bspw. die Frage der/s Lernenden an sich selbst, ob sie/er eine Aufgabe dieses Typs bereits einmal gesehen habe (man denke hierbei an Pólya, s. Kapitel 2.3.1). Hierbei wird über eigenes Fachwissen, bzw. über eigene Erinnerungen und Erfahrungen nachgedacht/reflektiert. Die Frage, um was für eine Aufgabe es sich handle hingegen, muss strikterweise als Kognition eingeordnet werden. Hierbei wird über Mathematik nachgedacht; Fachwissen wird angewandt, bzw. abgerufen und nicht etwa überdacht. Würde sich die/der Lernende weiterhin die Frage stellen, ob sie/er diese Art von Problem lösen könne, ob bspw. Strategien zur Lösung bekannt seien, so würde diese Frage wiederum als Reflexion und Durchsuchen eigenen Fachwissens als Metakognition eingeordnet, wohingegen die Frage, WIE diese Aufgabe zu lösen sei, Kognition wäre, da sie einen Denkprozess über Mathematik, bzw. „mathematisches Denken“ darstellt. Zuletzt lässt sich – besonders zugespitzt – argumentieren, dass die Frage, welche Lösungsstrategien (der eigenen Person) bekannt seien, als Reflexion eigenen Wissens (Metakognition) und die Frage, welche Strategien es gebe, als Reflexion von Mathematik (Kognition) interpretieren.

Die Frage, welche Strategien im konkreten Fall zu bevorzugen seien, ließe sich schließlich sowohl kognitiv als auch metakognitiv beantworten und kann – je nach ihrem Ziel – ebenso als Kognition oder Metakognition zu verstehen sein. Zielt die Frage bspw. darauf ab, zu untersuchen, ob das vorliegende LGS auf Grund seiner Struktur bereits in einer Form vorliegt, die das Gleichsetzungsverfahren besonders naheliegend macht – da bspw. beide Gleichungen bereits nach der gleichen Variablen „aufgelöst“ sind – so sind Frage und Antwort kognitiver Natur, da hier rein auf der Fachebene gearbeitet wird.

Zielt die Frage jedoch darauf ab, sich zu erinnern, welche der bekannten Verfahren besonders sicher beherrscht werden, bzw. bei welchen Verfahren sich bspw. erfahrungsgemäß oft Flüchtigkeitsfehler „einschleichen“, so sind Frage und Antwort metakognitiver Natur, da sie auf metakognitive Erfahrungen im Umgang mit derartigen Problemen abzielen (deklaratives Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen).

Weiterhin lässt sich grundsätzlich mathematisches Fachwissen als Kognition sehen, die Beurteilung, ob dieses vorhandene Wissen bspw. korrekt, sinnvoll, angemessen, o.Ä. sei, als Metakognition im Sinne der Korrektheit des eigenen (Fach-)Wissens und nicht im Sinne der Beurteilung von Mathematik.

Allerdings stellt sich hier – wie einleitend angedeutet – noch immer die Frage, ob Kognition, im Sinne von *Nachdenken über Mathematik* als *Nachdenken über (eigenes) mathematisches Wissen* nicht wiederum grundsätzlich – genauso – als Metakognition interpretiert werden kann, was bedeuten würde, dass das angesprochene „mathematische Denken“ ohnehin bereits – teilweise – Metakognition ist. Außerdem stehen auch hinter den Überlegungen, die im Rahmen dieses Exkurses als „Kognition“ bezeichnet wurden – wie oben erwähnt – häufig metakognitive Überlegungen, bzw. Erkenntnisse, die diese (kognitiven) Überlegungen motivieren.

Dies wirft seinerseits die Frage auf, was (in dieser Arbeit) mit *mathematischem Wissen* und was mit *mathematischem Denken* gemeint sei.

In diesem Sinne wird unter mathematischem Wissen, bzw. Fachwissen (und damit Kognition) vorhandenes Wissen über Mathematik verstanden, das auf Nachfrage oder im Rahmen einer Aufgabenstellung ohne weitere („suchende“, planerische, evaluierende, etc.) Denkprozesse wiedergegeben und in der Form, in der es vorliegt, verwendet werden kann. Gemeint sind also – um eine alternative Formulierung zu verwenden – Wissen (inklusive abgespeicherter Begründungen, die z.B. auf Fragen im Sinne von „Warum ist das so?“ antworten) und auch

Methoden/ Strategien, deren Wiedergabe und Verwendung „*Routine*“ und kein „*Problem*“ darstellen.

Sobald zur Verwendung dieses vorhandenen Wissens (was Argumentationen, Begründungen, Strategieanwendung miteinschließt) weitere „Hindernisse“ überwunden werden müssen – sobald also dieses Wissen im Hinblick auf seine Anwendung überdacht (reflektiert), bewertet, modifiziert, reaktiviert, verglichen, etc. werden muss, sobald also Denkprozesse stattfinden, die dieses Fachwissen zum Inhalt haben, ist das angesprochene „mathematische Denken“ gemeint.

Eine strikte Trennung von Kognition und Metakognition lässt sich – wie bereits beispielhaft aufgezeigt – im zuletzt angesprochenen Kontext praktisch nicht aufrechterhalten und führt nach meiner Ansicht zu „Spitzfindigkeiten“, die einer Verwendung des Begriffs wenig zuträglich sind.

Des Weiteren lässt sich „mathematisches Denken“, wenn es als – im Moment der Verwendung – *reflektiert werdendes* und zur Problemlösung (womit an dieser Stelle auch das Führen von Beweisen oder Argumentationen gemeint wird) *angepasst werdendes* Verwenden von Fachwissen gesehen wird – und es sich eben nicht um automatisiert „abgespultes“ Fachwissen handelt – durchaus als Einsatz von Metakognition werten.

Es wird daher im Rahmen dieser Arbeit versucht, den Begriff Metakognition möglichst bewusst und isoliert zu behandeln; dennoch wird davon ausgegangen, dass gerade beim Umgang mit Mathematik und entsprechenden Beurteilungen und Strategien die Grenzen zum Fachwissen nicht trennscharf sind. Die betrifft – hier wird Kapitel 4.2 und dem entwickelten Modell vorgegriffen – vor allem die Komponente des domänenspezifischen deklarativen Metawissens, die gezielt eingeführt wird, um die entstehende Lücke zwischen unspezifischem Metawissen und „reinem Fachwissen“ zu schließen.

Wie bereits angesprochen, werden unter Metakognition als Überbegriff vor allem die beiden Kategorien Deklaratives Metawissen und Prozedurale Metakognition subsummiert. Kurz gesagt, geht es hierbei um Wissen einerseits und Denkprozesse andererseits, die beide jeweils wiederum eigenes Wissen und eigene Denkprozesse zum Inhalt haben. Naheliegenderweise kann dieses Wissen und können diese Prozesse allerdings nur von konkretem Nutzen sein, wenn aus ihnen Konsequenzen (für den Umgang mit Mathematik) abgeleitet und in Handlungen umgesetzt werden, was dem Kontroll- Aspekt entspricht. Dies können z.B. die Umsetzung von Plänen und die Anpassung von Strategien auf Basis von Überwachungs-Prozessen sein.

Wie sich in Studien gezeigt hat, bestehen hier Defizite bei Lernenden (vgl. Kapitel 2.2.2 und Kapitel 2.2.3).

Bewusst oder unbewusst?

Ebenfalls zu klären ist die Frage danach, ob Metakognition bewusst oder unbewusst stattfindet, bzw. stattfinden kann.

Bereits Flavell betont, dass Metakognition – so wie andere Formen von Kognition – sowohl bewusst angewendet als auch unbewusst aktiviert werden können und auch im letzteren Fall Einfluss auf kognitive Vorgänge und damit bspw. Lern- und Problemlöseprozesse haben können (Flavell, 1979, S. 907 ff.). Veenman (2011) und Hartman (2001) bspw. unterscheiden zwischen metakognitiven Strategien, die bewusst eingesetzt werden müssen, einerseits und metakognitiven Fähigkeiten, die unbewusst aktiv sind und erst dann ins Bewusstsein rücken, wenn ihretwegen z.B. ein Fehler entdeckt wird und korrigiert werden muss (Vorhölter, 2019).

Verschaffel et al. (2009, S. 351) zufolge ist die Frage, ob Metakognition ausschließlich bewusst und explizit oder auch implizit sein könne, weitgehend eine Frage der Definition. Beispielsweise spielen im Bereich der Überwachung (Monitoring) und der Reflexion, bzw. Evaluation sowohl die aktive Suche nach Problemen, Fehlern, etc. sowie deren Korrektur und Anpassung eine Rolle, als auch eine Aufmerksamkeit oder Wachsamkeit, die dazu führt, dass passiv bemerkt wird, dass im aktuellen Arbeits- oder kognitiven Prozess Fehler, Ungenauigkeiten, etc. aufgetreten sind (Veenman & van Cleef, 2019).

Des Weiteren muss bedacht werden, dass auch Metakognition im Fall von Expert_innen durch regelmäßige Nutzung in die eigenen kognitiven Prozesse eingebunden und zur Routine wird, die nicht mehr bewusst, sondern automatisiert durchgeführt wird und die erst bei Auftreten von Veränderungen, Fehlern o.Ä. durch deren (unbewusstes) „Bemerken“ auf eine bewusste Ebene verlagert wird. In den angesprochenen Systemen (Kapitel 2.3.1) sowie im hier vorgestellten System (Kapitel 4.2) gehört ein solches Bemerken zur Sensitivity-/ Awareness-/ impliziten Komponente.

Auch „falsch“ oder „nur“ „richtig“?

Des Weiteren besteht die Frage, inwiefern „falsches“, „fehlerhaftes“ Wissen oder bspw. Fehleinschätzungen und „falsche“ Schlussfolgerungen (im Hinblick auf die eigene Kognition) als Metakognition zu bezeichnen sind. In der Literatur wird diese Frage in aller Regel bejaht.

Deklaratives Metawissen über personen-, aufgaben- oder strategiebezogene Variablen kann – so wie anderes Wissen – richtig oder falsch (oder teilweise richtig) sein, bzw. nur unter gewissen Bedingungen (die wiederum der betreffenden Person bewusst sein können oder nicht) zutreffen (Hasselhorn, 1992; Veenman & van Cleef, 2019). Bspw. können Lernende ihre eigenen Fähigkeiten im Hinblick auf (mathematische) Anforderungen unter- oder überschätzen (Veenman, 2006). Die Frage nach Richtigkeit ist also für die Frage der Einordnung von Wissen als „Metawissen“ nicht entscheidend.

Darunter ist jedoch nicht zu verstehen, dass Metakognition als solche nicht bewertet werden könne. Stillman (2011) unterscheidet bspw. zwischen angemessener und unangemessener Verwendung von Metakognition (Vorhölter, 2019, S. 708). Als Beispiel für variierende Qualität metakognitiver Prozesse verwenden Veenman und van Cleef (2019, S. 696) das (erneute) Lesen einer Problemstellung. Dieses kann einerseits überhaupt nicht erfolgen, was eine relative Abwesenheit von Metakognition darstellt; die Aufgabenstellung kann oberflächlich überflogen werden, ohne näher analysiert zu werden; oder sie kann aufmerksam untersucht werden, indem zentrale Informationen für die Bearbeitung der Aufgabe identifiziert und zum eigenen Mathematik-Wissen in Beziehung gesetzt werden.

2.1.6. Metakognition – allgemein oder domänen-spezifisch?

Über die Frage, ob es sich bei Metakognition um ein domänen-/ bereichsspezifisches Konzept handelt – was konsequenterweise die Annahme „mathematik-spezifischer“ Komponenten/ Aspekte von Metakognition nach sich zieht – oder um allgemeine („general“) Mechanismen, die jegliche Art kognitiver Aktivität regulieren, herrscht weiterhin Uneinigkeit (Desoete & De Craene, 2019, S. 565).

Einerseits wird die Annahme von Metakognition als allgemeinem, domänen-übergreifendem Konzept durch Studien gestützt (vgl. etwa Veenman et al., 1997; Desoete & De Craene, 2019). Dies gilt vor allem für die metakognitiven Fähigkeiten von Novizen. Andererseits ist aus der Experten-Novizen-Forschung bekannt, dass Expert_innen, die beim Problemlösen in vertrauten Anwendungsbereichen metakognitiv aktiv waren, ihre metakognitiven Fähigkeiten nicht besser

auf andere Domänen übertragen konnten, als dies bei Noviz_innen der Fall war (Desoete & De Craene, 2019), was für eine Domänenspezifität dieser metakognitiven Fähigkeiten spricht. Auch Veenman und Elshout (1999, S. 510) betonten bereits, dass metakognitive Fähigkeiten von Expert_innen vermutlich domänen-spezifisch und unabhängig von allgemeiner Intelligenz sind.

Auch für weniger eindeutige, möglicherweise „gemischte“ Konzepte finden sich in der Literatur Belege. Laut Vorhölter (2019) existieren Forschungsergebnisse, die dafür sprechen, dass manche Komponenten von Metakognition domänenübergreifend, bzw. zumindest in verschiedenen Domänen von Nutzen sind – z.B. im Bereich der Überwachung von Denk- und Lernprozessen oder der Fehlerkontrolle (Artelt & Neuenhaus, 2010; Flavell et al., 1993; Schraw et al., 1995; Schraw & Nietfeld, 1998; Wolters & Pintrich, 2001). Vorhölter (2019, S. 705) bemerkt hierzu, dass – auch wenn Metakognition sich über Domänen/ Bereiche hinweg in ihren Ausprägungen ähnelt – für verschiedene Aufgabenstellungen und Anforderungen auch verschiedene Aspekte/Strategien/etc. von größerer Bedeutung sind. Veenman kommt zu dem Schluss, dass metakognitive Strategien sich von Domäne zu Domäne zwar unterscheiden, im Hinblick auf ähnliche Anwendungen (z.B. Monitoring, Planung, Reflexion) aber auf gemeinsame Grundlagen zurückzuführen seien (Veenman, 2011 in Vorhölter, 2019, S. 705).

Veenman und Elshout (1999, S. 511) vermuten, dass möglicherweise im Rahmen einer fachlichen Spezialisierung auch eine Spezialisierung von allgemeiner, übergreifender Metakognition hin zu bereichsspezifischen metakognitiven Fähigkeiten bzw. bereichsspezifischem metakognitivem Wissen hin stattfindet. Bei Expert_innen wiederum können diese spezifischen metakognitiven „Schemata“ zu Routine-Operationen werden (Veenman & Elshout, 1999, S. 511)

Im Hinblick auf das Lehren und Lernen von Metakognition sollte in jedem Fall beachtet werden, dass der Transfer von Metakognition, die in einem Bereich erworben wurde, auf andere Bereiche nicht automatisch erfolgreich ist (Hartman, 1998; Blum, 2015 in Vorhölter, 2019, S. 705).

2.2. Die Bedeutung von Metakognition für die Mathematik und ihre Didaktik

2.2.1. Metakognition aus Sicht der Mathematikdidaktik

“Metacognition is a powerful determinant in learning results (Hattie 2009; Veenman and Alexander 2011).” (Schellings et al., 2013, S. 964)

Metakognition („metacognitive knowledge and skills“) gilt als essenziell für effektive Lernprozesse (Temur et al., 2019, S. 655), weshalb Metakognition und selbstreguliertes Lernen international als wichtige Faktoren („important factors“) von Mathematikunterricht anerkannt worden sind (Ader, 2019, S. 614). Die Wirksamkeit von Metakognition bei Denk- und Lernprozessen konnte in zahlreichen Studien nachgewiesen werden (Hasselhorn 1998, Opwis 1998, Kaiser & Kaiser 1999). Metakognition steigert einerseits die Effektivität solcher Prozesse, ist andererseits aber „an Bedingungen gebunden“ (Sjuts, 2003a, S. 19). So weist Opwis (1998) die "Wirksamkeit einer expliziten und gezielten Vermittlung von Strategien, die die Planung von Lernaktivitäten, die Bewertung des eigenen Lernfortschritts an den angestrebten Lernzielen durch aktive Selbstüberwachung sowie die flexible Regulation des eigenen Lernverhaltens am Ergebnis dieser Bewertung thematisieren" (ebenda, S. 374) nach. Kaiser und Kaiser (1999, S. 172) bezeichnen Metakognition als Bedingung für den Erwerb von Schlüsselqualifikationen, wie Selbstständigkeit, Flexibilität und Transfer beim Lernen und beim Umgang mit Problemen.

Dignath und Büttner (2018) zeigen in einer Metastudie, dass die Förderung von Metakognition gerade bei Mathematiklernenden stärkere Effekte zeigt als in anderen Bereichen. In verschiedenen Studien hat sich Metakognition dementsprechend als einer der wichtigsten Prädiktoren von Mathematikleistung erwiesen (vgl. etwa Depaepe et al., 2010; Kuzle, 2018; Ohtani & Hisasaka, 2018 in Desoete & De Craene, 2019). Wang et al. (1990) kommen sogar zu dem Schluss, dass Metakognition den wichtigsten Prädiktor darstellt, was Fortschritte beim Mathematiklernen betrifft. Laut Veenman und van Cleef (2019, S. 692) besteht ein direkter Einfluss von Metakognition auf das Lernverhalten. Es wird dabei davon ausgegangen, dass Metakognition ungefähr 40% der Varianz in der Lernleistung aufklärt (unter anderem für den Bereich Mathematik) (Veenman 2006; Veenman, 2008 in Veenman & van Cleef, 2019). Schneider und Artelt (2010, S. 149) etwa betonen, dass alle Lernenden, die im Rahmen der von ihnen untersuchten Studien metakognitives Training erhielten, von diesem profitierten.

Allerdings finden sich in der Literatur auch Hinweise auf widersprüchliche Forschungsergebnisse, was diese Frage betrifft (Desoete & De Craene, 2019, S. 566).

Auch im Rahmen der Experten-Novizen-Forschung konnte die Bedeutung von Metakognition belegt werden:

"Die Überlegenheit von Experten gegenüber Novizen basiert neben ihrem umfangreicheren und geordneteren bereichsspezifischen Wissen auch auf ihrer Fähigkeit, Denk- und Problemlösungsprozesse reflexiv, und das heißt metakognitiv zu begleiten." (Kaiser & Kaiser 1999, S. 171)

Hartmann (2001) bezeichnet Metakognition als Mittel dazu, die Effektivität von Lehre zu maximieren (Temur et al., 2019, S. 655). Nutzen Lehrkräfte Metakognition, so hat dies einen signifikanten Einfluss sowohl auf Lehr- wie auch auf Lernverhalten im Mathematikunterricht (Prytula, 2008; Prytula, 2012 in Temur et al., 2019). Die Vermittlung von Metakognition sowie die Erhebung metakognitiver Fähigkeiten und metakognitiven Wissens, über deren grundsätzlichen Nutzen weitgehend Einigkeit besteht, gelten dementsprechend heute als wichtige Ziele des Mathematikunterrichts, bzw. der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. etwa Schellings, van Hout-Wolters, Veenman & Meijer, 2013).

Teils wird der Nutzen von Metakognition vor allem bei Lernenden mit schwächerer Mathematikleistung, bzw. entsprechenden Defiziten gesehen (s. auch Kapitel 2.2.2). Nach Wilson und Conyers (2016) lässt sich der Abstand von leistungsschwächeren zu leistungsstarken Lernenden verringern, indem schwächere Lernende darin unterstützt werden, ihr Lernverhalten metakognitiv steuern zu lernen (Temur et al., 2019, S. 657).

Metakognition hat bekanntermaßen nicht „nur“ für den reinen Lernprozess (und seine Steuerung) eine große Bedeutung. So steht bspw. außer Frage, dass Metakognition eine Rolle beim mathematischen Problemlösen und insgesamt für Mathematikleistung spielt (Morosanova et al., 2016; Özsoy & Ataman, 2009; Özsoy 2011; Schneider & Artelt, 2010 in Baten & Desoete, 2019). Veenman & van Cleef (2019, S. 692) betonen, dass metakognitives Training sowohl metakognitives Verhalten selbst verbessert als auch zu besseren Lernerfolgen führt (Azevedo et al., 2007; Dignath & Büttner, 2008; Pressley and Gaskins, 2006; Veenman et al., 1994 in Veenman & van Cleef, 2019). Ein ähnliches Bild ergibt sich laut Veenman & van Cleef (2019, S. 692) für mathematisches Problemlösen (Kramarsky & Mevarech, 2003; Mevarech & Fridkin, 2006; Veenman et al., 2005 in Veenman & van Cleef, 2019).

Hacker et al. (2019) zufolge fördern metakognitive Aktivität und (Weiter-)Entwicklung bei Lernenden ein tieferes Verständnis für die Aufgaben und Herausforderungen, mit denen sie (im Rahmen von Mathematikunterricht) konfrontiert werden, und dafür, wie und mit welchen Mitteln sie diese bewältigen können. Eine entscheidende Rolle spielt Metakognition dabei vor allem bei Aufgaben, die Lernende vor eine Herausforderung stellen, sie aber nicht überfordern, sowie beim Erwerb neuer Strategien (Carr et al., 1994; Carr & Biddlecomb, 1998; Carr & Jessup, 1995 in Baten & Desoete, 2019). Im Verlauf von Problemlöseprozessen scheint Metakognition dabei vor allem zu Anfang bei der Analyse des Problems sowie gegen Ende beim Interpretieren und Überprüfen von Ergebnissen zum Tragen zu kommen (Verschaffel, 1999). Metakognition scheint zu verhindern, dass Lernende die Bearbeitung von Aufgaben durch „blindes Drauflosrechnen“ beginnen (Vermeer et al., 2000). Sjuts (2003a, S. 25) spricht diesbezüglich von einem metakognitiven "Betriebssystem", das ein "gedankenloses" Betreiben von Mathematik rasch zu erkennen und zu stoppen vermag. Entsprechend wurde gezeigt, dass sich überdurchschnittliche Schülerinnen und Schüler intensiver mit Fehlerquellen auseinandersetzen und ihre Antworten – verglichen mit dem Durchschnitt – stärker überprüfen (Sjuts, 2003a, S. 31). Bei Lernenden mit Lernschwierigkeiten kann Metakognition bewusst eingesetzt werden, um bei Herausforderungen hoher Komplexität kompensierend zu wirken, indem kognitive Prozesse und Ergebnisse fortwährend aktiv kontrolliert werden, damit Probleme und Fehler aufgedeckt werden, die auf Grund ihrer Komplexität nicht automatisch auffallen würden (Trainin & Swanson, 2005). Bei Studien mit Schülerinnen und Schülern mit Dyskalkulie hat sich gezeigt, dass kognitive und metakognitive Fähigkeiten gemeinsam entwickelt werden sollten (Lucangeli et al., 2019).

Eine Schwierigkeit bei dem Versuch, Metakognition in den Mathematikunterricht einzubinden, besteht laut Sjuts (2003a) allerdings darin, dass es sich bei Metakognition um ein „kulturelles Spätprodukt“ handelt (S. 34). Außerdem zeigt sich, dass sich metakognitive Kompetenzen weder „inhaltsfrei“ und „wissensisoliert“ (Sjuts, 2003a, S. 20) – also losgelöst von fachbezogenen Lern- und Arbeitsprozessen – vermitteln lassen, noch in ihrer Entwicklung den Lernenden selbst überlassen werden können.

„Selbständiges Lernen erfolgt nicht dadurch, dass fremdgeleitetes Lernen schlicht vermindert wird, ja eine Überbetonung des eigenständigen Lernens verringert sogar dessen Wirkung. Lernende müssen sorgfältig angeleitet und auch überzeugt werden, den Erwerb langfristigen Wissens mit dem Erwerb metakognitiver Kenntnisse und

Fertigkeiten zu verknüpfen und das so aufgebaute Wissen wiederum zur Steuerung des eigenen Lernens zu nutzen.“ (Sjuts, 2003a, S. 20)

Cohors-Fresenborg et al. (2014) attestieren in diesem Zusammenhang ein (Produktions-)Defizit bei Mathematiklernenden. Diese nutzen Metakognition und metakognitive Strategien zur Steuerung des eigenen Lern- und Arbeitsprozesses auch dann kaum, wenn ihnen solche Strategien bekannt sind. Das Vorhandensein von Wissen um Metakognition und ihre Vorteile allein sorgt offenbar noch nicht für eine aktive Verwendung (beim Betreiben von Mathematik). Cohors-Fresenborg et al. (2014) sprechen von einer "Unterlassungssünde“ (Hasselhorn, 1992, S. 50) bei sowohl Lernenden wie auch Lehrenden. Um metakognitive Aktivität zu fördern, sind entsprechende Instruktion und Übung nötig sowie die aktive und sichtbare Verwendung von Metakognition durch die entsprechende Lehrkraft im Unterricht. Grundlage hierfür ist laut Sjuts (2003a) eine bestimmte Unterrichtskultur, die durch gründliche Auseinandersetzung, durch „Diskursivität hinsichtlich Verstehen und Verständigung sowie durch geeignete Aufgabenstellungen zum Denken und Wissen“ (Sjuts, 2003a, S. 21) geprägt ist.

2.2.2. Defizite bei Lernenden

In der mathematikdidaktischen und psychologischen Literatur lassen sich über die vergangenen Jahrzehnte hinweg Belege für Defizite im Hinblick auf Metakognition finden – sowohl Defizite beim Umgang mit Mathematik, die als Ansatzpunkte für Metakognition gesehen werden können, als auch (mit zunehmender Verbreitung des Begriffs in der mathematikdidaktischen Forschung) direkt Defizite in Bezug auf die Verwendung und Förderung von Metakognition. Häufig werden entsprechende Defizite dabei bereits bei Lehrkräften und damit im Bereich der Lehrerbildung gesehen.

Für Lernende, die im Einsatz von Metakognition relativ schwach sind, besteht das Risiko, auf Dauer hinter ihren Mitlernenden zurückzubleiben (Veenman, 2015 in Veenman & Van Cleef, 2019). Aus diesem Grund müssen laut Veenman und van Cleef (2019) metakognitive Fähigkeiten frühzeitig überprüft werden, um einem Zurückbleiben schwächerer Lernender vorzubeugen und ihnen durch geeignete Trainings-Maßnahmen Metakognition nahezubringen. Andererseits sollten Veenman (2013) zufolge Lernende, die bereits in angemessenem Maße metakognitiv aktiv sind, von solchen Trainingsmaßnahmen ausgenommen werden, um ihre

„natürliche“ Tendenz zur Verwendung von Metakognition nicht zu gefährden. Hierfür sei eine entsprechende Diagnostik notwendig.

Bereits in den 1980er Jahren äußern Schneider und Hasselhorn Kritik an einem kalkülhaften und unreflektierten Mathematikunterricht. Schneider und Hasselhorn (1988, S. 114) betonen bspw., dass bei „kalkül-lastig“ unterrichteten Lernenden oft bereits große Defizite im Bereich des Aufgaben-Verstehens bestünden und diese oft kaum in der Lage seien, die Problemstellung korrekt in eigenen Worten wiederzugeben. Des Weiteren wird kritisiert, dass im Mathematikunterricht nur selten „echte“ Strategien gelehrt würden und dass Lehrkräfte oft bereits das Vermitteln von Algorithmen fälschlicherweise für Strategie-Instruktion hielten (Schneider & Hasselhorn, 1980, S. 114). Den Autoren zufolge ergibt sich daraus unter anderem die Problematik, dass kein echtes Verständnis für mathematisches Problemlösen erzeugt werde und ein Transfer auf andere Wissensbereiche weitgehend ausbliebe (ebenda, S. 114). Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass eine entsprechende Förderung metakognitiver Aktivitäten (Planung, Überwachung, Reflexion, etc.) und die Entwicklung metakognitiven Wissens und die Festigung metakognitiver Erfahrungen in der Lage sein sollten, solchen Defiziten entgegenzuwirken, indem Wissen über und ein „Gefühl“ für eigenes Verständnis einerseits und Metawissen bzgl. des Einsatzes von Strategien andererseits aufgebaut werden (vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2).

Es sei angemerkt und betont, dass sich obige Kritik vorwiegend auf Mathematikunterricht im US-amerikanischen Raum bezog und vor mehr als 30 Jahren geäußert wurde. Entsprechende Entwicklungen (wie bspw. die Entwicklung eines Unterrichtskonzepts durch Cohors-Fresenborg et al., 2014, vgl. Kapitel 2.3.1) haben seither stattgefunden, wobei von Forschenden auch weiterhin entsprechende Defizite beklagt werden – vor allem im Hinblick auf eine Umsetzung von Forschungsergebnissen in der Unterrichtspraxis. So beklagen Temur et al. (2019, S. 655), dass Metakognition tendenziell im Mathematikunterricht vernachlässigt werde. Dies stelle gerade für leistungsschwächere Lernende eine Gefahr dar; neben den zuvor genannten positiven Effekten von Metakognition ließen sich Zusammenhänge zwischen Defiziten im Bereich Mathematik und Defiziten im Bereich Metakognition feststellen. So konnten Desoete et al. (2019) zeigen, dass in allen Klassenstufen Lernende mit geringerer Mathematikleistung ein geringeres Maß an intrinsischer Motivation und metakognitiver Präzision aufwiesen und ihre eigene Leistung häufiger überschätzten als Lernende mit höherer Mathematikleistung (Desoete & De Craene, 2019). Desoete und De Craene (2019) merken an, dass bei Lernenden mit relativen metakognitiven Defiziten dementsprechend auch

Verzögerungen beim Mathematiklernen zu befürchten sind, weshalb sich im Umkehrschluss eine Überprüfung der metakognitiven Fähigkeiten von Lernenden mit Mathematik-Defiziten empfiehlt. Defizite im Hinblick auf die metakognitive Beurteilung von (individueller) Aufgabenschwierigkeit werden auch von Lingel et al. (2019) beklagt, die von Untersuchungen in Jahrgangsstufe 7 berichten, in denen Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten damit hatten, (für sie selbst individuell) leichte von schwierigen (oder sogar für sie unlösbaren) Aufgaben(typen) zu unterscheiden, was die Forderung nach sich zieht, dass Wissen und Metawissen zu Aufgaben („task knowledge“) – und damit über eigene Fähigkeiten im Hinblick auf Mathematik – verbessert werden müssen. Przenioslo (2006, S. 135) hingegen beobachtet bei Lernenden einen Mangel an „Awareness“ (vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) für Widersprüche zwischen verschiedenen Vorstellungen, die nebeneinander bestehen, ohne dass dieser Umstand den Lernenden auffällt. Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass eine Förderung sowohl deklarativen Aufgabenwissens als auch der entsprechenden Überwachungs- und Awareness-Aspekte (vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) hierbei eine Verbesserung erwarten ließe, indem einerseits Metawissen über Eigenschaften von Mathematik als Wissensgebiet (→ Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2) (insbesondere im Hinblick auf die Eigenschaften von Begriffen und mit ihnen verbundene (Grund-)Vorstellungen – vgl. Kapitel 4.4.1) erweitert würde und andererseits die bewusste Überprüfung trainiert würde, was auf Dauer zu Routine und damit zur angesprochenen Aufmerksamkeit/ Bewusstheit (Awareness) führen sollte (vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2).

Shilo und Kramarski (2019) betonen andererseits, dass mathematische Mängel bei Lernenden nicht immer auf mangelnde Metakognition zurückzuführen seien, sondern auch an deren Unwissen liegen können, wie eigenes Wissen aktiviert werden kann und wie eigene Überlegungen und Gedankengänge verbalisiert und begründet werden können. Hierzu sei allerdings angemerkt, dass nach den in dieser Arbeit zugrunde gelegten Definitionen (vgl. Kapitel 1.4) die genannten Fähigkeiten (Wissen über die Aktivierung von Wissen) gerade eben einen zentralen Aspekt von Metakognition darstellen, weshalb die genannte Behauptung vielmehr einen weiteren Beleg für die Bedeutung von Metakognition für Defizite im Bereich Mathematik darstellt.

Oben genannte Schwierigkeiten und Defizite können ihrerseits auf Schwierigkeiten und Defizite bei Lehrkräften zurückgehen, die im Verlauf ihrer Ausbildung mit dem Konzept Metakognition noch nicht oder nur in begrenztem Umfang konfrontiert wurden. So sehen etwa Temur et al. (2019) solche Defizite im Bereich Metakognition bei Lehrkräften und fordern

deshalb entsprechende Maßnahmen in der Lehrerbildung. Häufig wird allerdings betont, dass für (bereits aktive) Mathematik-Lehrkräfte Schwierigkeiten bestehen, ihren Unterricht den Veränderungen anzupassen, die durch mathematikdidaktische Forschung und darauf aufbauende Lehrpläne notwendig werden (vgl. etwa Ader, 2019 oder Davis, 2003). In der Praxis zeigt sich bspw. die Tendenz bei Lehrkräften, Metakognition zugunsten einer rein kognitiv orientierten Instruktion zu vernachlässigen und Lernenden nicht die Möglichkeit, bzw. Zeit zu geben, ihrerseits metakognitiv aktiv zu werden. So konnte beobachtet werden, dass von Lehrkräften vorwiegend kognitive Strategien vermittelt werden, wohingegen bei der Vermittlung metakognitiver Strategien Bedarf an zusätzlichem Training auf Seiten der Lehrkräfte besteht (Dignath & Büttner, 2018). Außerdem kritisieren z.B. Temur et al. (2019), dass häufig Lehrkräfte gemachte Fehler oder Schwierigkeiten von Lernenden direkt korrigieren, statt den Lernenden die Möglichkeit zu geben, diese selbst zu entdecken, zu analysieren und mit ihnen selbstständig (metakognitiv) umgehen zu lernen. Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass gerade das Wissen, das Lehrkräfte über Lernprozesse (von Lernenden) besitzen (sollten) (und zu dem bspw. Wissen um die Konsequenzen eines (nicht) sinnvollen Umgangs mit Fehlern gehört), einen wichtigen Aspekt von Metakognition für Lehrende darstellt (→ Wissen über die Kognition anderer, vgl. Anhang). Des Weiteren wird häufig kritisiert, dass Metakognition von Lehrkräften höchstens stillschweigend verwendet, aber nicht explizit thematisiert werde (vgl. etwa Kistner et al., 2010; Shilo & Kramarski, 2010). Shilo und Kramarski (2019) sprechen in diesem Zusammenhang die Problematik an, dass Metakognition bei Lehrenden zumeist überhaupt „nur“ unbewusst auftritt, bzw. abläuft, solange diese nicht direkt dazu aufgefordert werden, entsprechendes Wissen und entsprechende kognitive Vorgänge explizit zu verbalisieren. Möglicherweise ist es hierbei notwendig, Lehrkräfte entsprechend anzuleiten, indem die Mechanismen von Metakognition explizit thematisiert werden, um so eine Veränderung in deren Belief-Systemen herbeizuführen (Depaepe et al., 2010; Desoete & De Craene, 2019). Temur et al. (2019) führen diese häufig kritisierte implizite Verwendung und fehlende Explizierung von Metakognition im Unterricht darauf zurück, dass viele Lehrkräfte davon ausgehen, dass Metakognition – so überhaupt bekannt – von Lernenden selbstständig, bzw. automatisch erworben, bzw. entwickelt wird. Dementsprechend kritisieren auch Depaepe et al. (2010), dass Lehrkräfte zu selten vermitteln, aus welchen Gründen bestimmte metakognitive Aktivitäten eingesetzt werden (in Temur et al., 2019).

Um derartigen Defiziten entgegenzuwirken fordern bspw. Spruce und Bol (2015), dass Lehrende zuerst selbst zu selbst-reguliertem Verhalten angeleitet werden, bevor ihnen

anschließend die nötigen Mittel an die Hand gegeben werden, dieses Verhalten wiederum an ihre Schülerinnen und Schüler weitergeben zu können. Zum Zweck dieser Weitergabe wird etwa empfohlen (vgl. etwa Chapin, 2009 in Shilo & Kramarski, 2019), dass Lehrkräfte gewisse Standards im Unterricht einführen, um Metakognition zu einem natürlichen Teil der Lern- und Arbeitsprozesse zu machen – bspw. die Verbalisierung von Ideen und Strategien, die verbale Wiederholung und das Kommentieren von Aussagen und Vorschlägen der (Mit-)Schülerinnen und (Mit-)Schüler, Begründungen, Beurteilungen und weitere. Ader (2019) konnte zeigen, dass ein Unterrichtskonzept, im Rahmen dessen Arbeits- und Lernverhalten von Lernenden kritisch reflektiert wurden, das aber Selbst-Regulation und Metakognition nicht explizit behandelt, bereits auf Seiten der Lehrkräfte nicht dazu ausreichte, bei ihren Schülerinnen und Schülern Metakognition anzuregen.

2.2.3. Defizite in der Hochschullehre und Ansatzpunkte für Metakognition

Von Verantwortlichen im Bereich der Hochschule werden „seit jeher“ Defizite bei Studienanfänger_innen beklagt, was das (im Schulunterricht erworbene) mathematische Schulwissen betrifft (Bach, 2012, S. 249). Dies äußert sich insbesondere im Rahmen der Klausuren und Orientierungsprüfungen mathematik-intensiver Studiengänge. Lithner (2011, S. 297 ff.) weist auf Schwierigkeiten und Defizite beim Übergang zwischen Schule und Hochschule im Bereich Mathematik hin, die mit einer zunehmend negativen Einstellung dem Mathematiklernen gegenüber einhergehen und die Studierende und Hochschul-Dozierende vor Herausforderungen stellen.

Insbesondere der Übergang von intuitiven Vorstellungen hin zur formalen Präzision der Hochschulmathematik sowie die hohe Anzahl an neuen Begriffen und Verfahren, die in vergleichsweise kurzer Zeit erlernt und verinnerlicht werden müssen, was die Entwicklung von Routinen erschwert, können dabei Schwierigkeiten bereiten. Hinzu kommt ggf. ein im Vergleich zur Sekundarstufe höherer Anspruch im tertiären Bereich, was die Eigenverantwortlichkeit und selbstständige Organisation und Steuerung der eigenen Lernprozesse betrifft.

Solche Schwierigkeiten zeigen sich in hohen Nichtbestehens-Quoten in den Mathematik-Prüfungen verschiedener Studienfächer in der Hochschuleingangsphase, wobei offenbar unklar bleibt, wie Studierenden in ausreichendem Maße geholfen werden kann, um diese Quoten zu verringern (Lithner, 2011, S. 289). Während hier einerseits das Problem mangelhafter Schulkenntnisse besteht – so zum Bsp. in Form fehlender Kompetenzen im Bereich von Themen der Sekundarstufe I (z.B. Bruchrechnung, Gleichungen) (Bach, 2012, S. 249) – wird andererseits die Vermittlung von Inhalten im Studium selbst kritisiert. Christoph Ableitinger etwa attestiert dabei insbesondere dem Gymnasiallehramtsstudium Mathematik „Handlungsbedarf“ (Eilerts et al., 2011, S. 59); es fehle an einer „Sinnggebung der meist auf formaler Ebene vermittelten Inhalte der ersten beiden Semester“. In Verbindung mit dem Konzept der Grundvorstellungen zeigt sich hier ein Ansatzpunkt für metakognitive Unterstützung im Hinblick auf die Begleitung und Steuerung eigener Lernprozesse und die angesprochene „Sinnggebung“, der im Rahmen des zu Forschungsfrage 2 entwickelten Modells eine wichtige Rolle als metakognitiver Aspekt zukommt (vgl. Kapitel 4). Bspw. zeigt sich, dass selbst Lernende im Hochschulbereich Beispielen zu viel Bedeutung beimessen und dazu neigen, von einzelnen oder mehreren Fällen zu generalisieren, ohne Beweise dafür zu fordern (vgl. Lithner, 2011, S. 293). Dies wird in dieser Arbeit als Indiz für unzureichendes (Meta)wissen über das „System Mathematik“ (→ Aufgaben-, Systemwissen, vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) interpretiert, über seine Mechanismen und die damit verbundenen Anforderungen an das eigene Denken und Arbeiten sowie mangelnde metakognitive Erfahrungen im Umgang mit Mathematik (solche Notwendigkeiten und Mechanismen sollten schließlich in der Vergangenheit bereits aufgetreten sein).

Trotz dieser Defizite und der hohen Abbruchquoten in den mathematischen Studiengängen, gerät die Hochschuldidaktik erst im Verlauf der letzten Jahre verstärkt ins Visier der Forschung. So betonten Eilerts et al. (2011, S. 56), dass (zum damaligen Zeitpunkt) lediglich einzelne Arbeiten und insbesondere kaum groß angelegte Forschungsprojekte zur Hochschuldidaktik in der Mathematik bestanden. Die komplexen Mechanismen, die das Lernen und Lehren von Mathematik bestimmen, sind laut Lithner (2011, S. 289) insbesondere im Bereich der Hochschulbildung noch relativ wenig erforscht.

[Nicht zuletzt unter diesem Gesichtspunkt wurde für die vorliegende Arbeit eine Zielgruppe ausgewählt, die sich – zeitlich gesehen – am Anfang ihres Hochschulstudiums befindet.]

Dem Arbeitskreis „HochschulMathematikDidaktik“ zufolge zeichnet sich gute Hochschullehre „dadurch aus, dass sie nicht nur an den Fachinhalten orientiert ist, sondern vor allem den

Lernprozess der Studierenden im Blick hat“ (Eilerts et al., 2011, S. 56). In diesem Sinne sollten metakognitive Kompetenzen einerseits für Lehrende im Hochschulbereich hilfreich und wichtig sein, die das Verständnis von Studierenden beurteilen und entsprechend reagieren müssen. Andererseits sind Studienanfänger_innen gefordert, ihren Lernprozess von nun an weitgehend selbstständig zu gestalten – zu überwachen und zu steuern. Gerade im Hinblick auf diesen erhöhten Bedarf an Eigeninitiative und an einer selbstständigen Steuerung (vgl. Steuerungsaspekt, Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) und Überwachung (vgl. Überwachung, Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) des eigenen Lernprozesses ergibt sich der potentielle Nutzen von Metakognition (im Sinne von Wissen über eigene Lernprozesse und von deren Gestaltung und Überwachung) aus den grundlegenden Definitionen von Metakognition.

Sow wird bspw. bei Eilerts et al. (2011, S. 58) im Rahmen von Mathematikvorlesungen zu Beginn des Studiums von „Reflexionen auf der Metaebene“ gesprochen, bei denen über Mathematik geredet und Methoden und Vorgehensweisen mit fachlichen Inhalten verbunden werden.

2.2.4. Beim Umgang mit Mathematik

Neben den zuvor angesprochenen, grundsätzlichen Problemen und Defiziten, die die Metakognitionsforschung seit ihrem Beginn prägen und die sich auf Grund des großen Begriffsumfangs und der verschiedenen beteiligten Forschungstraditionen nur schwer auflösen lassen, bestehen jedoch auch konkrete Forschungsdesiderate, die einem Mangel an entsprechender Forschung in der jeweiligen Richtung geschuldet sind. Speziell im Hinblick auf die Untersuchung von Metakognition beim Umgang mit Mathematik finden sich verschiedene Forderungen bei Schneider und Artelt (2010). Sie betonen, dass bereits grundsätzlich Forschungsergebnisse zum Verhältnis von Metakognition und dem Lernen und Lehren von Mathematik (damals) nur in geringerem Maße vorhanden seien, als dies in anderen Forschungsbereichen der Fall ist, bspw. zur Bedeutung von Metakognition in der Sprach- und Leseforschung. Konkret beklagen Schneider und Artelt (2010) einen fortwährenden Mangel an systematischer Forschung (z.B. in Form von Langzeit- und Interventions-Studien), was den langfristigen Zusammenhang zwischen Metakognition, allgemeinen kognitiven Fähigkeiten und mathematischem Fachwissen betrifft. Des Weiteren fordern Schneider und Artelt (2010)

Studien im Bereich der Übertragbarkeit von Metakognition, die in bestimmten Bereichen und Situationen erlernt und geübt wurde, auf andere Bereiche, Gebiete, Problemstellungen u.Ä.. Diese Forderung bezieht sich also auf die Frage der Domänenspezifität von Metakognition, die nach wie vor nicht vollständig geklärt ist (vgl. Kapitel 2.1.6).

Speziell beim Lernen und Lehren von Mathematik und in Bezug auf die Mathematikleistung werden in der Literatur sowohl die Bedeutung von Metakognition betont als auch Defizite benannt, die mit einem Bedarf an metakognitiver Förderung einhergehen. Aus heutiger Sicht besteht ein Problem darin, dass die Vermittlung von (Fach-)Wissen allein nicht ausreichend ist. Lernenden müsse bewusst sein, wie sie (vorhandenes) Wissen aktivieren und wie sie es einsetzen, bzw. steuern/regulieren können (Mason & Spence, 2000; Zimmerman, 2008 in Shilo & Kramarski, 2019). Im Hinblick auf den Einfluss von Metakognition auf die Mathematikleistung muss allerdings beachtet werden, dass dieser je nach Art bzw. Aufwand der jeweiligen Aufgabenstellung variiert. Dabei stellen eingeübte Aufgabentypen bzw. Routine-Aufgaben geringere Anforderungen, was Metakognition betrifft, als unbekanntere, möglicherweise transfer-lastige Aufgabentypen (Lingel et al., 2019). Auch Lithner (2011, S. 292) spricht an, dass Schwierigkeiten beim Umgang mit Mathematik häufig gerade beim Bearbeiten von Nicht-Routine -Aufgaben auftreten, also dort, wo sich Metakognition als besonders wirksam erweist; zudem werde von Lernenden bei der eigenen Übung und Vorbereitung häufig ein zu starker Fokus auf die Bearbeitung von Routine-Aufgaben (Kalkülen) gelegt, was ebenfalls für ein metakognitives Defizit auf Seiten der Lernenden spricht, insofern, dass diese nicht erkennen, welche Defizite sie selbst haben, welche Aufgabentypen sich als wichtig erweisen (und deshalb geübt werden sollten) und welche Ziele im Lernprozess verfolgt werden (sollten).

Was die Entwicklung von Mathematikunterricht betrifft, lässt sich rückblickend bspw. von einem eher konventionellen Unterricht („conventional teaching“) sprechen, der in der Vorstellung von Fakten und Handlungen („facts and procedures“) besteht, wohingegen heutzutage eine klare Tendenz hin zu einem Unterricht besteht, der stärker auf ein Verständnis der zu Grund liegenden mathematischen Konzepte abzielt (vgl. etwa Ader, 2019, S. 613). Dennoch ist die metakognitive Unterstützung von Lern- und Problemlöseprozessen kein ausschließlich modernes Phänomen. Wie angesprochen, lässt sich bereits Pólyas Arbeit (vgl. Kapitel 2.3.1) stark dem Bereich Metakognition zuordnen – auch wenn der Begriff damals noch nicht existierte. Die vier Phasen des Problemlösens nach Pólya (1945) – *understanding the problem*, *devising a plan*, *carrying out the plan* und *reviewing* – stehen in Verbindung mit den

metakognitiven Komponenten Planung, Überwachung, Kontrolle und Evaluation (kognitiver Prozesse) (Whitebread et al., 2009; Ader, 2019).

Es finden sich zahlreiche Beispiele für den Nutzen verschiedener Aspekte von Metakognition und das in praktisch allen Altersstufen. Metakognition kann bereits (je nach Alter) bei einfachen Rechenaufgaben eine Rolle spielen, da die dabei anfallenden kognitiven Prozesse **gesteuert** und auf ihre Richtigkeit hin **überprüft** werden müssen (Lucangeli et al., 2019, S. 577). Mit steigender Routine, was den jeweiligen Aufgabentyp angeht, sollte die Notwendigkeit, den Rechenprozess metakognitiv zu begleiten, nachlassen, bzw. Metakognition sollte zunehmend unbewusst stattfinden und nur bei **Bemerken** eines Problems oder Fehler **bewusst** werden. Verschaffel et al. (2009, S. 338) nennen als Beispiel für **metakognitive Strategiewahl** die Entscheidung eines Kindes, eine bestimmte Rechnung entweder im Kopf durchzuführen, sie schriftlich durch einen entsprechenden Algorithmus zu lösen oder einen Taschenrechner zu benutzen. Es kann vermutet werden, dass je nach Komplexität der Rechnung, bzw. je nach Alter oder mathematischer „Kompetenz“ der Person diese Entscheidung relativ automatisch getroffen wird und Metakognition nur unbewusst eine Rolle spielt, indem unbewusst auf **metakognitive Erfahrungen** zugegriffen wird. Außerdem kommt Lingel (2019) zufolge im Bereich Mathematik vor allem der metakognitiven Komponente **Überwachung** („Monitoring“) (vgl. Kapitel 1.4) große Bedeutung zu (Desoete & Veenman, 2006; Schoenfeld, 1987 in Lingel, 2019). **Überwachungsprozesse** helfen Lernenden unter anderem dabei, genauer zu verstehen, wie eine verwendete Strategie funktioniert und wie sie zum gewünschten Ziel führt (Fabriz et al., 2014), was insbesondere bei Problemlösestrategien beim Umgang mit Mathematik von Vorteil für deren Verständnis sein dürfte. Insbesondere bei mehrschrittigen Lösungsverfahren oder Arbeitsprozessen ist Monitoring (s. oben) von Bedeutung, um sicherzustellen, dass weiterhin in Richtung des angestrebten (Teil-)Ziels gearbeitet wird, bzw. um die zuvor **geplante** Struktur des Prozesses nicht aus den Augen zu verlieren und die Bedeutung von Zwischenergebnissen richtig in diesen Prozess einordnen zu können und ihre Bedeutung für diesen zu interpretieren (Vorhölter, 2019) (→ vgl. auch Systemwissen und Beurteilung, Kapitel 1.4, Kapitel 4.2).

Umgekehrt führen Defizite im Bereich Monitoring nach Hacker et al. (2008) zu Problemen beim Abrufen von Fachwissen und bei der **Regulierung** (vgl. Steuerung, Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) von Denkprozessen (Lingel et al., 2019, S. 588). Auf lange Sicht besteht daher ein Einfluss von Monitoring-Qualität auf die Anhäufung von Wissen (sowohl Fachwissen als auch Metawissen) im Bereich Mathematik (Lingel et al., 2019, S. 588).

Neben den eben genannten deklarativen (→ z.B. Strategiewissen) und prozeduralen (→ z.B. Steuerung, Analyse, Planung, Überwachung) Aspekten von Metakognition wird allerdings von Forschenden auch der unbewusste, sensitive Aspekt impliziten (→ z.B. metakognitive Erfahrungen) betont – sowohl bei laufenden Problemlöse-Prozessen als auch im Hinblick auf übergreifende Lernprozesse: Die **Wahrnehmung** der eigenen Gedanken, bzw. ein **Bewusstsein** oder **Gewahrsein** derselben (→ Awareness und Überwachung) beim Problemlösen kann laut Paris und Winograd (1990) den Lernprozess verbessern und sollte deshalb thematisiert und diskutiert werden. Przenioslo (2006, S. 137) betont zudem die Bedeutung intuitiver Vorstellungen („intuitive conceptions“) für die Bildung tragfähiger Vorstellungen, merkt jedoch an, dass (im Unterricht) gezielte Aktivitäten notwendig sind, um die Bildung von Fehlvorstellungen zu verhindern. Lernende sollten hierbei mit vielfältigen Situationen konfrontiert werden, die es ihnen ermöglichen, bzw. die sie dazu bringen, einmal entwickelte Vorstellungen zu hinterfragen (ebenda, S. 133).

Wie sich die Abwesenheit metakognitiver Überwachung und Steuerung auswirkt, beschreibt hingegen Veenman (2017) eindrücklich. Metakognitiv schwache Lernende verhalten sich laut Veenman (2017) bspw. folgendermaßen: Sie lesen zunächst nur kleine Teile der Aufgabenstellung, beginnen daraufhin sofort in irgendeiner Form zu rechnen (mit jeglichen Zahlen, die bis zu diesem Punkt der Aufgabenstellung vorkommen). Es findet keine eingehende Analyse der gesamten Problemstellung, bzw. Situation statt, es kommt zu keiner Planungsphase und die eigenen Rechnungen und Strategien (sofern überhaupt vorhanden) werden nicht überwacht und ggf. verworfen oder angepasst. Dementsprechend stellt sich der Arbeitsprozess als Folge von „trial-and-error“-Versuchen dar (Veenman & van Cleef, 2019, S. 692).

Auch Wissen über eigene Kognition im allgemeineren Sinne und vor allem die Beurteilung eigener kognitiver Fähigkeiten, aus der wiederum Konsequenzen abgeleitet werden – wie z.B. eine Erhöhung des Lernaufwands – spielen im Bereich Mathematik eine Rolle. Hier bestehen wiederum Zusammenhänge zwischen der Fähigkeit zu beurteilen und der (Mathematik-)Leistung der Lernenden. Bol und Hacker (2012, S.1) zufolge erweisen sich leistungsstarke Schülerinnen und Schüler tendenziell als korrekter, was die Beurteilung eigener Fähigkeiten betrifft, als leistungsschwächere Lernende, unterschätzen sich dabei allerdings tendenziell stärker (Lingel et al., 2019, S. 590). Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen besteht nach Lingel (2019, S.590) darin, dass möglicherweise dieselben Fähigkeiten sowohl für die Erarbeitung einer korrekten Lösung als auch für die Beurteilung dieser Lösung verantwortlich sind, sodass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler die Korrektheit

eigener Problemlösungen, Pläne, etc., bzw. allgemein eigener Fähigkeiten, schlechter einschätzen können („Unskilled and unaware of it“, Kruger & Dunning, 1999). Andererseits überschätzen leistungsstarke Lernende die durchschnittliche „Lösungsrate“, was dazu führt, dass sie eigene Fähigkeiten eher unterschätzen (Dunning et al., 2003; Lingel et al., 2019, S. 590). Auch Lithner (2011, S. 291) spricht das Problem an, dass Lernende ihre eigenen Schwierigkeiten beim Lernen von und Umgang mit Mathematik oft nicht begreifen, bzw. nicht einmal als solche erkennen; hierbei wird sowohl von Lernenden berichtet, die ihre eigenen Fähigkeiten bei weitem zu überschätzen scheinen, als auch von solchen, die trotz hervorragender Prüfungsergebnisse über mangelndes Verständnis klagen. Hier zeigt sich die Notwendigkeit, die Metakognition von Lernenden zu fördern – vor allem die Fähigkeit, eigene Fähigkeiten und eigenes Verständnis im Hinblick auf den Umgang mit Mathematik zu beurteilen und rechtzeitig im Lernprozess selbstständig „einzugreifen“ und „gegenzusteuern“; die Beurteilung von Aufgabenschwierigkeit (vor allem in einem individuellen Rahmen) dürfte hier eine wichtige Rolle spielen. Speziell im Bereich Mathematik wurde allerdings berichtet, dass es eher selten zu einer Unterschätzung der eigenen Fähigkeiten kommt, wohingegen Überschätzungen sowohl vom Leistungsniveau als auch von der konkreten Aufgabenschwierigkeit abhängen, wobei leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten tendenziell genauer einschätzen können (Lingel et al., 2019). Nach Lingel et al. (2019) zeigt sich in ihren Studien allerdings bei rückblickenden Einschätzungen („postdictions“) im Gegensatz zu Vorab-Einschätzungen („predictions“) weitgehend kein Unterschied in der Genauigkeit zwischen schwächeren und stärkeren Lernenden. Dementsprechend lässt sich der nach Kruger und Dunning (1999) benannte Effekt für rückblickende Einschätzungen für den Bereich Mathematik nicht bestätigen (Lingel et al., 2019, S. 598). Vor allem bei Lernenden, deren Selbsteinschätzung so negativ ist, dass sie den Umgang mit Mathematik beeinträchtigt (die sich bspw. die Lösung eines Problems von vornherein nicht zutrauen), sollte Metakognition ein Mittel darstellen, durch eine Neubewertung Abhilfe zu schaffen. Lithner (2011, S. 295) spricht – bezugnehmend auf Schoenfeld (1985) – das Problem an, dass bei Lernenden die Überzeugung bestehen kann, dass ein Verständnis der von ihnen angewendeten Regeln jenseits ihrer Möglichkeiten liegt. Auch dies wird in dieser Arbeit als zentrales Anliegen von Metakognition gesehen, da hier Grenzen der eigenen kognitiven Fähigkeiten angenommen werden und diese Annahme möglicherweise nicht hinterfragt wird. Metakognitive Analyse und Reflexion (der eigenen kognitiven Möglichkeiten und Grenzen in Bezug auf Mathematik) und das Schaffen von metakognitiven Erfahrungen (vgl. Kapitel 1.4,

Kapitel 4.2), die zeigen, dass ein solches Verständnis doch möglich ist, und die verinnerlicht werden, sollten hierbei zu Verbesserungen führen können.

2.2.5. Zum Lehren und Lernen von Metakognition im Hinblick auf Mathematik

Bereits 1988 betonen Schneider und Hasselhorn (1988) die Wichtigkeit, Lernenden über die Vermittlung kognitiver Strategien hinaus beizubringen, wobei und weshalb diese Strategien von Nutzen sind (S. 114) – ihnen also deklaratives Metawissen (→ Strategiewissen) zu vermitteln. Außerdem äußern Schneider und Hasselhorn (1988, S. 115) unter Bezugnahme auf Schoenfeld (etwa Schoenfeld, 1982), „daß (sic.) die Stimulierung metakognitiver Aktivitäten im Unterricht ein „Verständnis“ mathematischer Probleme, wie es Schoenfeld vorschwebte, nachhaltig fördern kann“. Laut Hacker et al. (2019) fördern hier bereits Beobachtung und Nachahmen von Lehrkräften metakognitives Verhalten (Überwachung und Regulation) bei Lernenden (Hacker et al., 2019). Hacker et al. (2019, S. 604) beschreiben hierzu beispielhaft im Hinblick auf Aufgabenstellungen im Bereich der Bruchzahlen („fraction problems“), dass Lernende durch Beobachtung der Lehrkraft beginnen, die kognitiven Prozesse metakognitiv zu überwachen, die zur Lösung solcher Aufgaben notwendig sind: Es wird über die Logik von Begründungen nachgedacht und diskutiert – was eine Begründung stichhaltig macht – wie der Sinn von Problemstellungen erfasst werden kann, was Präzision im Hinblick auf mathematisches Arbeiten bedeutet, oder wie sich Durchhaltevermögen beim Problemlösen trainieren lässt. Entgegen dieser rein auf Beobachtung und Nachahmung basierenden Entwicklung besteht allerdings in der Forschung weitgehend Konsens darüber, dass sich Metakognition normalerweise nicht spontan durch implizite Vermittlung entwickelt (Ader, 2019; Desoete & Veenman, 2006, Zimmerman, 2008), sondern dass ihre Anwendung sowohl bei Lehrkräften als auch Lernenden explizit trainiert werden muss (Kistner et al., 2010; Kramarski, 2017). Die explizite Thematisierung von Metakognition im Unterricht ist essenziell, damit Metakognition unterstützend zur Entwicklung und Verbesserung von Mathematikfähigkeiten beitragen kann (Desoete & De Craene, 2019). Temur et al. (2019) beklagen diesbezüglich ein Defizit insofern, dass Lehrkräfte zwar im Unterricht oft implizit Metakognition einsetzen, diese aber nicht explizit vermitteln (Mevarech & Kramarski, 2014 in

Temur et al., 2019). Entsprechende Unterrichts-Designs, im Rahmen derer Sinn und Nutzen von Metakognition explizit mit den Lernenden thematisiert werden, lassen sich laut Desoete und De Craene (2019) auch durchaus entwickeln. Insbesondere ist dabei sogar individuell auf die einzelnen Lernenden zugeschnittenes metakognitives Training (etwa im Hinblick auf persönliche Lernstile und -strategien) oder Ähnliches denkbar (Temur et al., 2019). In einer Studie von Lucangeli et al. (2019) zeigt sich das Problem, dass Schülerinnen und Schüler (mit einem durchschnittlichen Alter von 9,3 Jahren) zwar den Nutzen von Metakognition begriffen, ohne Aufforderung Metakognition allerdings nicht selbstständig einsetzten. Ein Trainingsprogramm (kognitiv und metakognitiv) zeigte hierbei Wirkung und erhöhte die Bereitschaft der Lernenden, metakognitiv aktiv zu werden. (S. 583) Mevarech und Fridkin (2006) konnten in einer Vergleichsstudie zeigen, dass Lernende, deren Mathematikunterricht (bei Kontrolle weiterer Variablen) mit Hilfe eines metakognitiven Trainingskonzepts („IMPROVE“, Mevarech & Kramarski, 1997) erweitert worden war, nach Abschluss der Intervention Lernenden der Kontrollgruppe deutlich überlegen waren („significantly outperformed their counterparts on both mathematical knowledge and mathematical reasoning“, Mevarech & Kramarski, 1997, S. 389). Konkretere Vorschläge, wie solche Trainingsprogramme aussehen könnten, finden sich bspw. bei Nelson und Powell (2017), denen zufolge metakognitive Programme bei Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten im Bereich Mathematik fehler-basiert arbeiten sollten. Temur et al. (2019) betonen, dass eine sinnvolle Verwendung von Metakognition im Mathematikunterricht Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf ihr Problemlöseverhalten sowie auf die Beurteilung eigener Stärken und Schwächen (in Bezug auf Mathematik) fördert; entsprechend empfiehlt sich die Vermittlung eines entsprechenden Bewusstseins für und Wissens über Metakognition sowie das Training entsprechender exekutiver, bzw. prozeduraler Fähigkeiten.

Hacker et al. (2019) weisen darauf hin, dass prozedurale wie deklarative Komponenten von Metakognition am besten erlernt werden, wenn sie von Lehrkräften systematisch im Rahmen eines bestimmten Wissensbereichs (z.B. Mathematik) vermittelt werden (Hacker et al., 2019; Pressley & Harris, 2006; Schoenfeld, 1992). Auch Fabriz et al. (2014, S. 251) betonen, dass bspw. Monitoring-Skills systematisch gelernt werden müssen, um Lernenden deren Effekte (und Nutzen) deutlich vor Augen zu führen; andernfalls bestehe die Gefahr, dass Lernende den Nutzen dieser Skills nicht einsähen und sie dementsprechend auch nicht einsetzten. Laut Schneider und Hasselhorn (1988) empfiehlt es sich zur Förderung von Metakognition – vermutlich vor allem im Hinblick auf die Bereiche Strategiewissen und Überwachung, bzw.

Reflexion – bspw., bestimmte Strategie-Typen an verschiedenen Aufgaben durchzuführen, um deren Mechanismen sichtbar zu machen und metakognitive Erfahrungen zu kreieren (vgl. etwa Schneider & Hasselhorn, 1988). Für ein erfolgreiches Metakognitions-Training ist es also essentiell, dass Metakognition in den fachlichen Zusammenhang (also in den Mathematikunterricht) eingebettet vermittelt wird und den Lernenden Nutzen und Wirkmechanismen von Metakognition begreiflich gemacht wird, um diese zu deren Verwendung anzuregen (Kramarski 2009; Temur et al., 2019; Veenman et al. 2006). Dementsprechend ist entsprechendes Wissen über Metakognition bei Lehrkräften notwendig. Des Weiteren wird häufig die Wichtigkeit einer expliziten Vermittlung von Metakognition gefordert, im Rahmen derer Lehrkräfte Metakognition einerseits aktiv und für die Lernenden sichtbar selbst einsetzen und Metakognition und ihren Nutzen andererseits mit den Lernenden explizit thematisieren. Gerade für schwächere Lernende sollten hierbei die jeweiligen Vorzüge einer Strategie explizit deutlich gemacht werden (vgl. etwa Schneider & Hasselhorn, 1988). Auch Veenman und Elshout (1999, S. 520) legen hierzu dar, dass für intellektuell ausreichend begabte Lernende implizit auftretende metakognitive Erfahrungen möglicherweise ausreichen, dies für schwächer begabte Lernende allerdings nicht mehr der Fall sei. Für diese sei die explizite Thematisierung besonders entscheidend. Insgesamt dürfe die Aufgabenschwierigkeit weder zu niedrig (es besteht die Gefahr, dass zu Routine-Techniken gegriffen werde) noch zu hoch (hierbei besteht die Gefahr, dass eine zu hohe kognitive Belastung den Einsatz kognitiver und metakognitiver Ressourcen behindert) sein (Veenman & Elshout, 1999, S. 520).

Um die Verwendung von Metakognition bei Lernenden anzuregen kann es – ähnlich dem Prinzip der gestuften Hilfen (Zech, 1998) ggf. notwendig sein, ihnen Zeit und Möglichkeiten zu geben, ohne direkte Intervention der Lehrkraft allein oder im Dialog mit den Mitlernenden selbstständig die eigenen Denk-, Arbeits-, Problemlöse- und Lernprozesse zu planen, überwachen, evaluieren und zu diskutieren (Temur et al., 2019). Temur et al. (2019) empfehlen darüber hinaus, Lernenden die Möglichkeit zum Austausch zu gewähren, sodass sie bspw. gegenseitig die Strategieauswahl und Begründungen ihrer Mitschülerinnen und -schüler kommentieren und analysieren, bzw. einander bspw. Strategien vorschlagen können. Insbesondere besteht die Gefahr, dass Lernende keine Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen, da die Verantwortung hierfür für gewöhnlich als bei der Lehrkraft liegend gesehen wird.

Veenman et al. (2006) formulieren zusammenfassend drei Prinzipien für sinnvolles Metakognitions-Training:

- 1) die Integration in den fachlichen Lernprozess
- 2) explizite Kommunikation im Hinblick auf Mechanismen und Nutzen von Metakognition
- 3) längerfristiges Training

Es sollte betont werden, dass 1) hierbei die aktive Verwendung von Metakognition durch die Lehrkraft beinhaltet, an deren Beispiel die Lernenden sich entsprechende Vorgehensweisen „abschauen“ können und diese optimalerweise „automatisch“ in ihr eigenes Arbeiten integrieren – im Sinne der zuvor betonten impliziten Vermittlung.

Während Metakognition zumeist als Kognition und Wissen verstanden wird, die eigene Kognitionen und eigenes Wissen zum Inhalt haben, wird – wie zuvor angedeutet – auch zunehmend die Unterstützung von Metakognition durch die Interaktion in Gruppensituationen beforscht. So beschäftigt sich bspw. Vorhölter (2019) mit Metakognition in Gruppen von Lernenden, in denen z.B. durch Verbalisierung kognitive Prozesse mit anderen geteilt, diskutiert und bewertet, bzw. korrigiert werden können. Metakognition wird sozusagen nach außen verlagert, indem eine gesamte Gruppe über die Kognition Einzelner nachdenkt. Hacker et al. (2019) beschreiben, wie Lernenden durch Gespräche über Kognition, Problemlösen, kognitive/ mathematische Strategien, etc. einerseits lernen, wie Mathematiker_innen zu denken, und andererseits dazu übergehen, entsprechende Überlegungen auch in ihre eigenen Denkprozesse miteinzubeziehen und damit metakognitiv aktiv zu werden – unter anderem, indem sie sich fragen, wie Mitschülerinnen und -schüler sowie Lehrkräfte im Rahmen eines Gesprächs auf ihre Argumente und Strategien reagieren würden (Kramarski & Mevarech, 2003). Die Arbeit in Gruppen, bzw. die Besprechung von Arbeitsprozessen in Gruppen ermöglicht es Lernenden, gemeinsam bspw. Lösungswege erneut durcharbeiten, nach möglichen Fehlern zu suchen und sich ihre Gedankengänge gegenseitig zu erklären, um Denkfehler und Fehlvorstellungen aufzudecken (Vorhölter, 2019). Reflexions- und Evaluationsprozesse, bzw. Fehlerkorrekturen werden – wie oben angesprochen – damit quasi nach außen verlagert. Insbesondere können Ideen gesammelt werden, inwiefern Konsequenzen, die sich aus dieser Reflexion ergeben, bei zukünftigen Herausforderungen bedacht werden können. Neben dieser Verlagerung oder Auslagerung eigener Kognitionen ins Gespräch mit anderen Lernenden können auch der Vergleich mit diesen und die Suche nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden in der Denkweise anderer von Nutzen sein. Hacker et al. (2019) sehen diesen Vergleich mit

anderen Lernenden als mögliche Anleitung für Metakognition, insofern, dass Lernende lernen, die eigene Kognition zu betrachten und zu hinterfragen („What is similar or different between my answer and other answers? Based on my peers’ responses, can I make improvements on my reasons?“), Hacker et al., 2019, S. 604). Solche und ähnliche Fragen, die Lernende bspw. dazu zwingen, ihre eigenen Überlegungen zu hinterfragen, ihre Argumente zu begründen und zu rechtfertigen und ihre Strategien zu überwachen, führen hin zu einem selbstständigen und „selbst-regulierten“ Problemlöseverhalten (Schoenfeld, 1992 in Hacker et al., 2019).

Als eine weitere Möglichkeit, eigene Kognitionen „nach außen zu verlagern“, bietet Textproduktion im Rahmen des Mathematiklernens die Möglichkeit, dass Lernende zu Metakognition angeregt werden – z.B. in Form von reflektierenden Analysen und Beurteilungen des eigenen Textes – indem sie sich Fragen bzgl. der eigenen Produktionen stellen: bzgl. der Qualität und Klarheit ihrer Erklärungen, bzgl. der Stichhaltigkeit ihrer Argumente, bzgl. der Vollständigkeit und Tiefe ihrer Erläuterungen, etc. (vgl. etwa Hacker et al., 2019). Laut Fabriz et al. (2014, S. 241) hat sich die Verwendung von Lerntagebüchern (learning journals) als wirksames Mittel erwiesen, Lernende zu mehr Einsatz metakognitiver Strategien zu bewegen. Solche Formen der Verschriftlichung – wie z.B. im Rahmen eines Lerntagebuches oder einer Kommentarspalte im Aufgaben-Heft – können einen metakognitiven Prozess darstellen, da sie es Lernenden erlauben, die kognitiven Vorgänge der AutorInnen (ggf. ihrer selbst) in schriftlicher Form zu erfassen und zu betrachten und über sie nachzudenken (Hacker, 2018; Hacker et al., 2019). Textproduktion („writing“) stellt damit ein metakognitives Werkzeug dar, das Lernenden dabei hilft, ihre Gedanken zu überwachen und zu steuern (Hacker, 2018 in Hacker et al., 2019, S. 610). Darüber hinaus wird durch das Medium Text Kognition quasi sichtbar gemacht und „extern gespeichert“, was die kognitive Beanspruchung im Vergleich mit einem rein internen metakognitiven Vorgang senkt und Ressourcen zur Bearbeitung der metakognitiv zu begleitenden Prozesse (z.B. Lern- oder Problemlöseprozesse) freigibt. Ohne eine solche „Auslagerung“ kann die hohe kognitive Beanspruchung, die durch die Problembearbeitung entsteht, dazu führen, dass metakognitive Aktivitäten (also eine zusätzliche Belastung) nicht auftreten (können) (vgl. Winne, 1995).

Geeignete Aufgabenstellungen zur Anregung und Verwendung von Metakognition nehmen laut Sjuts (2003a, S. 25) „Bezug auf Unterrichtsszenen, Schülerdialoge, auf Fehler und Fehlvorstellungen, auf kognitive Dissonanzen. Verlangt werden Kommentare, Analysen und Hilfestellungen.“ Ein zentrales Ziel dieser Art von Aufgaben ist dabei die Verschriftlichung eigener Gedanken (Sjuts, 2003a). Gefördert werden durch geeignete Aufgabenstellungen also

eine bewusste Beschäftigung mit und ein bewusster Überblick über eigene(r) Kognition und deren reflektierte, zweckorientierte Verbalisierung; des Weiteren die Wahrnehmung von (kognitiven) Konflikten, Fehlvorstellungen und das Erkennen erfolgter Fehler (sowohl in Bezug auf die eigene Person und eigene Produktionen als auch auf andere), sowie das Analysieren, Reflektieren und Bewerten von Problemen, Produktionen, Sachverhalten u.Ä. und die daraus resultierende Ableitung von Konsequenzen (→ Steuerung). Sjuts (2003a) betont allerdings, dass die Wirksamkeit solch geeigneter Aufgaben sich erst durch deren Einübung und resultierende Gewohnheit bei den Lernenden niederschlägt.

2.2.6. Probleme, Schwierigkeiten und Einschränkungen

Trotz des vielfach untersuchten und belegten Nutzens von Metakognition sollte nicht übersehen werden, dass metakognitives Wissen und metakognitive Fähigkeiten allein noch keine Garantie für deren Einsatz und für entsprechend sinnvolles (oder gewünschtes) Verhalten sind (Veenman, 2017).

Eine Schwierigkeit, die mit Metakognition einhergeht, dürfte die zusätzliche Belastung im Hinblick auf kognitive Ressourcen sein, die entsteht, wenn zusätzlich zur für die Bearbeitung einer Aufgabe nötigen kognitiven Vorgänge um metakognitive Prozesse ergänzt werden (Winne, 1995). Winne (1995) führt dies als einen möglichen Grund an, warum Lernende sich schwertun, ihre Lernprozesse entsprechend metakognitiv zu begleiten und zu überwachen. Harris und Graham (2009) betonen entsprechend, dass Strategien erst dann wirksam sein können, wenn sie Lernenden automatisch zugänglich sind.

Weitere Schwierigkeiten bestehen im motivationalen Bereich – so z.B., wenn Lernende die Notwendigkeit oder den Nutzen von Metakognition nicht (er)kennen und dementsprechend keine metakognitiven Strategien einsetzen, oder aber wenn sie dem erfolgreichen Ausgang eines kognitiven Prozesses ohnehin keine große Bedeutung beimessen (Zimmerman, 1989). Auch Veenman und van Cleef (2019) betonen, dass mangelnde Motivation oder mangelnde Selbstwirksamkeits-Beliefs bspw. verhindern können, dass bestimmte Mechanismen (z.B. Fehleranalyse) angewandt werden, obwohl metakognitives Wissen über deren Nutzen vorhanden ist. Lan (2005) äußert dementsprechend, dass Lernende einerseits in Prüfungssituationen ein höheres Maß an Monitoring-Aktivitäten zeigen (was mit einer größeren

– wenn auch extrinsischen – Motivation zusammenhängen dürfte), insgesamt aber bei komplexeren Aufgabentypen den Nutzen solcher Monitoring-Prozesse anzweifeln. Es lässt sich hier vermuten, dass regelmäßige metakognitive Aktivitäten beim Umgang mit Mathematik zur Bildung metakognitiver Erfahrungen führen, die diesbezüglich zu einer Veränderung im Belief-System führen können, indem der Nutzen von Metakognition tatsächlich erfahren wird. Diese Vermutung bestätigt bspw. Winne (1996), demzufolge es in punkto (Selbst-)Wirksamkeit für eine Verhaltensänderung entscheidend ist, dass der Nutzen von Metakognition nicht nur bekannt, sondern auch selbst durch deren Einsatz (als erfolgreich) erfahren wird.

Des Weiteren muss bei der Untersuchung metakognitiver Förderung beachtet werden, dass sich deren (positive) Auswirkungen auf Lernprozesse und Leistung möglicherweise nicht sofort beobachten lassen. Fabriz et al. (2014, S. 250 ff.) merken hierzu an, dass der Effekt neu erlernter (metakognitiver) Strategien auf die Leistung möglicherweise deutlich zeitverzögert eintritt, da diese Zeit benötigen, um bei Lernenden zur Routine zu werden.

Während über den Nutzen von Metakognition und die Forderung nach einer Intensivierung entsprechender Bemühungen im Rahmen des Mathematikunterrichts Konsens besteht, werden von manchen Autor_innen im Detail Risiken und Einschränkungen angesprochen. Veenman (z.B. Veenman, 2013) äußert sich entgegen der verbreiteten Forderung nach einem flächendeckenden (!) Metakognitions-Training bei Lernenden. Bei leistungsstarken Lernenden, die bereits ohne Einwirkung selbstständig und kompetent auf einem zufriedenstellenden Niveau Metakognition nutzen, bestehe das Risiko, die Lernenden durch zusätzliche Instruktion eher zu verwirren und ihren spontanen und erfolgreichen Einsatz von Metakognition zu gefährden. Dementsprechend sollten nur Lernende metakognitiv gefördert werden, die in diesem Bereich Defizite zeigen.

Während diese Argumentation plausibel erscheint, stellt sich die Frage, ob nicht gerade bei metakognitiv bereits kompetenten und mathematisch leistungsstarken Lernenden zu erwarten ist, dass sie in der Lage sind, diese „Verwirrung“ durch metakognitive Analyse und Steuerung (ihrer eigenen Metakognition) aufzulösen und auf Dauer ebenfalls von entsprechendem Training profitieren können. Es lässt sich spekulieren, dass dies bei (zu) kurzfristigen Interventionen zu dem von Veenman antizipierten Risiko führen, bei ausreichend langem Training allerdings auch bei diesen Lernenden zu einer Verbesserung führen könnte.

Dass ein individuelleres Metakognitions-Training (wie es bspw. von Lucangeli et al. (2019) angedacht wird) mit einem erhöhten organisatorischen Aufwand einhergeht, dürfte hier eine

Schwierigkeit darstellen; andererseits sollten Lernenden mit steigender metakognitiver Kompetenz gerade eben in der Lage sein, ihre eigenen Lernprozesse (und damit auch das Erlernen von Metakognition) selbstständiger und damit individueller zu steuern, was den angesprochenen organisatorischen Aufwand (insbesondere auf Seiten der Lehrkräfte) reduzieren würde. Metakognition ist letztlich mit den Worten von Sjuts (2001b) eine „Hilfe zur Selbsthilfe“.

2.2.7. Abgrenzung von verwandten Themenbereichen

Im Folgenden wird anhand entsprechender Literaturbelege kurz auf den Zusammenhang des Konzepts Metakognition zu verwandten, bzw. häufig gemeinsam mit Metakognition untersuchten Konzepten eingegangen. Während Metakognition bereits häufiger im Verbund mit Motivation oder Selbstregulation untersucht wurde, bzw. die Zusammenhänge zwischen Metakognition und Intelligenz (in der psychologischen Forschung) erforscht wurden, liegt das Forschungsinteresse dieser Arbeit auf der Untersuchung des Begriffs Metakognition beim Umgang mit Mathematik und der Entwicklung eines Kategoriensystems, das den Begriff möglichst isoliert und unabhängig von anderen Konzepten definiert und systematisiert.

Metakognition und Motivation

Metakognition wird nicht selten in Verbindung mit Motivation beforscht (vgl. etwa Weinert & Kluwe 1996; Hellmich & Wernke, 2006; Baten & Desoete, 2019). Leutner et al. (2001) konnten sogar nachweisen, dass Metakognition nicht nur kognitive, sondern auch motivationale Lernstrategien reguliert (Fabriz et al., 2014, S. 241). Motivation und Metakognition verbindet dabei unter anderem, dass es sich bei beiden um – mit hoher Wahrscheinlichkeit separate – Faktoren handelt, die Mathematikleistung beeinflussen und vorhersagen (Prädiktoren) (Baten & Desoete, 2019) und die sich im Hinblick auf die tatsächliche Ausführung von Kognitionen und Handlungen vermutlich gegenseitig beeinflussen. Einerseits können Wissen über (eigene) Motivation(en) und deren „Wirkmechanismen“ sowie exekutive metakognitive Fähigkeiten zur Steuerung der eigenen Motivation Teil von Metakognition sein. Andererseits hängt der Einsatz von Metakognition häufig stark davon ab, ob die Betroffenen (z.B. Schülerinnen und Schüler)

ausreichend zu diesem Einsatz, bzw. zum Erbringen von Leistung überhaupt motiviert sein und werden können.

Metakognition und Selbstregulation

Selbstregulation bezeichnet die Fähigkeit, eigene Lernprozesse zu verstehen und zu steuern (regulieren). Dies beinhaltet das Setzen von Zielen, die Auswahl und Umsetzung von Strategien sowie deren Überwachung. Lernende mit einem höheren Maß an Selbstregulation zeigen für gewöhnlich einen höheren Lernerfolg bei gleichzeitig geringerem Aufwand. (Schraw et al., 2006, S. 111) Selbst-Regulation wird häufig als übergeordnetes Konzept betrachtet, das neben kognitiven (Metakognition) auch affektive – z.B. motivationale und sozio-emotionale – Komponenten beinhaltet (Veenman et al., 2006; Robson, 2010 in Ader, 2019). In Anlehnung an Baird und White (1996), Nichols, Tippins und Wieseman, (1997) und White (1998) betonen Schraw, Crippen und Hartley (2006) die entscheidende Rolle, die Metakognition für Selbstregulation spielt (Crippen & Hartley, 2006, S. 111) – als eine von drei Komponenten, neben Kognition und Motivation. Metakognition dient dabei vor allem dem Zweck des Verständnisses und der Überwachung kognitiver Prozesse (Schraw, Crippen & Hartley, 2006, S. 112). Auch bei Spruce & Bol (2015) ist insbesondere die Überwachung („Monitoring“) des eigenen (Lern-)Fortschritts zentraler Bestandteil des Konzepts Selbstregulation (Ader, 2019). In Zimmermans (2000) Selbstregulations-Modell finden sich bspw. eine „Analyse“- und eine „Selbst-Reflexions“-Phase – bei denen es sich neben der „Planung“ und der „Überwachung“ um die „klassischen“ Komponenten prozeduraler Metakognition handelt (vgl. Kapitel 1.4). Nach Zimmermann (1989) zeichnen sich selbstregulierte Lernende dadurch aus, dass sie auf metakognitiver, motivationaler und behavioraler Ebene aktiv an ihrem eigenen Lernprozess teilnehmen.

Wie sich zeigt, besteht über Definitionen und hierarchische Zuordnungen, was die Konzepte Metakognition und Selbstregulation betrifft, allerdings keine Einigkeit. Bei Ader, 2019 bspw. werden Metakognition und selbstreguliertes Lernen als separate, aber eng verbundene Konzepte betrachtet. Bei Rott (2014, S. 254) wird Selbstregulation, bzw. Kontrolle als exekutiver Teil von Metakognition gefasst, der insbesondere bei Problembearbeitungsprozessen eine Rolle spielt, indem bspw. durch planerische Prozesse auf die „Zielerreichung“ hingearbeitet wird.

Metakognition und Intelligenz

Die genauen Zusammenhänge zwischen Metakognition und Intelligenz ließen sich bisher noch nicht vollständig klären (Veenman & Elshout, 1999, S. 510). Für den Zusammenhang zwischen beiden Konstrukten existieren verschiedene Hypothesen (Intelligenzhypothese, Unabhängigkeitshypothese und Mischungshypothese nach Veenman und Spanns, 2005), von denen tendenziell die Unabhängigkeits- und Mischungshypothese durch die Forschung (insbesondere im Bereich Mathematik) gestützt werden, was dafür spricht, dass es sich bei Metakognition und Intelligenz tatsächlich um teilweise unabhängige Konstrukte handelt, was die (Mathematik-)Leistung betrifft (Lingel, 2016, S. 97ff.). Im Hinblick auf den Einfluss von fluider Intelligenz auf die Entwicklung von Metakognition existieren ebenfalls mehrere Hypothesen (Ceiling-Development-Hypothese, Acceleration-Development-Hypothese und Monotonic-Development-Hypothese nach Alexander et al., 1995), die allerdings ebenfalls nur teilweise gestützt, aber in keinem Fall vollständig widerlegt werden konnten. Insbesondere besteht Kritik an einigen der betreffenden Studien (Lingel, 2016, S. 99). Veenman und Elshout (1999, S. 519) konnten belegen, dass sich mit zunehmender Expertise in einem bestimmten Wissens-/Aufgabenbereich auch die entsprechende aufgabenspezifische Metakognition verbesserte. Des Weiteren konnten Veenman und Elshout (1999, S. 519) belegen, dass mit zunehmender Expertise in einem bestimmten Wissens-/Aufgabenbereich der Einfluss von Intelligenz auf die entsprechende Leistung abnimmt; sie stellen die Vermutung auf, dass weniger intelligente Lernende mit genügend Zeit und bspw. mit ausreichend metakognitiven Erfahrungen schließlich vergleichbare Leistungs-Niveaus erreichen könnten wie intelligentere Lernende (Veenman & Elshout, 1999, S. 519). Hierzu, so Veenman und Elshout (1999, S. 520), sollten allerdings im Unterricht neben der Evozierung metakognitiver Erfahrungen und der Akkumulation metakognitiven Wissens auch die metakognitiven Grundlagen selbst-regulierten Lernens implizit, oder besser explizit thematisiert werden. Laut Schneider und Hasselhorn (1988) kann es als gesichert gelten, dass als Prädiktor für die zukünftige schulische Mathematikleistung bereits zuvor erworbene Mathematikkenntnisse im Verlauf der Schulzeit an Wichtigkeit zunehmen, während das grundlegende intellektuelle Niveau an Bedeutung als Prädiktor verliert (S. 113). Dementsprechend lässt sich folgern, dass der Fähigkeit, eigene Lernprozesse selbstständiger zu steuern, fehlendes Wissen zu erkennen und selbstständig zu erarbeiten, bzw. ggf. „nachzuholen“, eine noch größere Wichtigkeit zukommt. Eigenes Wissen (und damit insbesondere Fachwissen) zu überblicken und reaktivieren zu können, scheint deshalb umso wichtiger, da auf diesen Kenntnissen aufgebaut werden kann und muss. Veenman

und Elshout (1999, S. 509) zufolge ist allgemeine Metakognition zwar teilweise mit Intelligenz korreliert, beeinflusst aber zusätzlich zu dieser die Lernleistung. Metakognitive Fähigkeiten von Expert_innen hingegen seien domänenspezifisch und unabhängig von der Intelligenz (ebenda, S. 509).

2.3. Bezug zu zentralen Inhalten der Mathematikdidaktik

2.3.1. Vorstellung verschiedener Expert_innen und ihrer Arbeit

Über die bisher aufgezeigten Informationen zum Metakognitionsbegriff – zu seiner Entwicklung in der psychologischen und der mathematikdidaktischen Forschung und den Problemen, die mit dem Versuch einer sauberen, vollständigen Definition einhergehen – hinaus soll im Folgenden eine exemplarische Auswahl von Forschungsarbeiten, bzw. Theorien vorgestellt werden, die sich mit dem Begriff unter bestimmten Gesichtspunkten auseinandersetzen. Diese werden nach den folgenden, einleitenden Kurzbeschreibungen ab Seite 63 ausführlicher dargelegt.

Beginnend mit Metakognition aus psychologischer Sicht, werden das Klassifikationsschema für Metakognition nach **Marcus Hasselhorn** (z.B. 1992), der – in Anbetracht der uneinheitlichen Forschungslage – den Versuch unternahm, den Begriff Metakognition erschöpfend zu definieren, sowie das "Good Strategy User"-Modell von Pressley, Borkowski und Schneider (1987) vorgestellt.

Bereits vor Aufkommen des Begriffs „Metakognition“ beschäftigte sich **George Pólya** (z.B. 1945) mit dem Einsatz strategischer und heuristischer Prinzipien im Mathematikunterricht. Seine Ideen dürften dazu beigetragen haben, Reflexion und (später) Metakognition zum Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung zu machen (Sjuts, 2003a). Pólyas Ansätze werden hier vor allem anhand seines Werks „How to solve it“ (Pólya, 1945) dargestellt. Metakognitiv gesehen, stehen sie primär mit dem Einsatz von Strategien – insbesondere dem

Transfer bekannter Strategien – und entsprechend dem Überblicken und Aktivieren eigenen Wissens und eigener Erinnerungen sowie dem Generieren von Ideen beim Umgang mit Problemlöse- und Beweis-Prozessen beim Umgang mit Mathematik in Verbindung.

Schneider und Artelt (2010) geben aus Sicht der psychologischen Forschung in einem Artikel einen Überblick über die Bedeutung und Möglichkeiten von Metakognition in der Mathematikdidaktik, bzw. beim Lehren und Lernen von Mathematik – insbesondere im Hinblick auf einerseits die Notwendigkeit und andererseits die Möglichkeit der Vermittlung von Metakognition im Mathematikunterricht.

Sjuts gibt einen Überblick über Metakognition aus Sicht der Mathematikdidaktik, ihre Bedeutung und Bedingungen ihrer Nutzbarkeit und Auswirkung auf Lernerfolg und Mathematikleistung. Dabei geht Sjuts auch auf die Frage ein, welche Anforderungen Aufgabenstellungen (im Mathematikunterricht) erfüllen müssen, um das Praktizieren von Metakognition bei Lernenden anzuregen und zu trainieren.

Von **Cohors-Fresenborg et al.** (z.B. Cohors-Fresenborg et al., 2014) stammt die Entwicklung eines gesamten Unterrichts-Konzepts, das auf der Integration metakognitiver und diskursiver Aktivitäten in den Mathematikunterricht aufbaut. Zu diesem Zweck wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das den prozeduralen Anteil von Metakognition im Sinne planerischer, überwachender und reflektierender Aktivitäten systematisiert und mit dem Begriff der Diskursivität verbindet.

Schoenfeld (z.B. 1987) zählt zu den vergleichsweise wenigen Forschenden, bzw. Unterrichtenden, die Metakognition im Bereich der Hochschul-Mathematikdidaktik untersucht und auch praktiziert haben. Hier werden Schoenfelds Definition des Konzepts Metakognition vorgestellt, sowie ein Überblick über seine Erkenntnisse aus der Durchführung der sogenannten „problem-solving-classes“ mit Studierenden auf Hochschul-Ebene gegeben.

In Betrachtung einer vergleichsweise aktuellen und umfangreichen Studie wird ein Überblick über die Ergebnisse der Dissertations-Schrift von **Lingel** (2016) gegeben. Diese Dokumentation stellt insofern eine Ergänzung der bereits angesprochenen Forschung dar, als Lingel Metakognition beim Umgang mit Mathematik unter dem Gesichtspunkt ihrer zeitlichen Entwicklung betrachtet; Zielgruppe sind dabei Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I.

Hasselhorn

Im Bemühen um eine möglichst umfassende Klassifikation des Konzepts Metakognition erarbeitet Hasselhorn (z.B. 1992) das folgende Klassifikationsschema, das seinerseits die – Hasselhorn zufolge – noch unvollständigen Klassifikations-Ideen verschiedener Autor_innen (z.B. Cavanaugh, 1989; Brown, 1978; Flavell, 1979; Flavell & Wellman, 1977; Kluwe & Schiebler, 1984; Paris, Lipson & Wixson, 1983; Wellman, 1983) vereint und neu systematisiert. (Hasselhorn, 1992, S. 41 ff.)

Dabei bezieht sich Hasselhorns System primär auf Lernprozesse.

Integratives Klassifikationsschema der fünf wichtigsten Subkategorien der Metakognition nach Hasselhorn (1992, S. 42)

1. Systemisches Wissen

- a. Wissen über das eigene kognitive System und seine Funktionsgesetze**
- b. Wissen über Lernanforderungen**
- c. Wissen über Strategien**

Unter dieser Komponente fasst Hasselhorn – wie die Stichpunkte bereits besagen – Wissen über das eigene kognitive System, seine Funktionsweisen und Mechanismen und diesbezügliche Einflussfaktoren sowie über Stärken und Schwächen im Hinblick auf die eigene Kognition. Demgegenüber umfasst die folgende Komponente des „Epistemischen Wissens“ sozusagen Wissen über die „Inhalte“ des eigenen kognitiven Systems, also über eigenes Wissen und dessen Lücken sowie über Möglichkeiten, entsprechendes Wissen zu erwerben und zu erweitern und schließlich anzuwenden.

2. Epistemisches Wissen

- a. Wissen über eigene aktuelle Gedächtniszustände bzw. Lernbereitschaften**
- b. Wissen über die Inhalte und Grenzen eigenen Wissens**
- c. Wissen über die Verwendungsmöglichkeiten eigenen Wissens**

Teil der epistemischen Komponente ist unter anderem das Wissen über „aktuelle Gedächtniszustände“ (S.42), das entweder Resultat von Überwachungsprozessen (→ Steuerung, exekutive Prozesse, s. Komponente 3) oder Resultat einer „intuitiven Sensitivität“ (S.43) ist.

Auch Hasselhorn spricht in Bezug auf metakognitives Wissen (Komponenten 1 und 2) an, dass dieses sowohl korrekt als auch inkorrekt sein kann und dass die Möglichkeit eines Einhergehens mit den in Komponente 4 genannten „kognitiven Empfindungen“ – z.B. in Form von Verwirrung – oder „affektiven Zuständen“ – z.B. in Form von Bedrückung – besteht (S.43).

3. Exekutive Prozesse (Kontrolle)

- a. Planung eigener Lernprozesse**
- b. Überwachung eigener Lernprozesse**
- c. Steuerung eigener Lernprozesse**

Hierunter werden im Wesentlichen die bereits an anderer Stelle beschriebenen prozeduralen Aspekte von Metakognition gefasst, die der Steuerung und „Supervision“ von Kognition, bzw. der Planung, Überwachung, Reflexion, etc. von kognitiven Prozessen dienen.

4. Sensitivität für die Möglichkeiten kognitiver Aktivitäten

- a. Erfahrungswissen**
- b. Intuition**

Hierunter wird das „Gespür“ verstanden, dass in einer spezifischen (Lern-)Situation überhaupt strategische Aktivitäten vonnöten sind. Ohne dieses würden entsprechendes Wissen nicht genutzt und entsprechende Kontrollmechanismen nicht in Gang gesetzt werden.

5. Metakognitive Erfahrungen bezüglich der eigenen kognitiven Aktivität

a. bewußte [sic.] kognitive Empfindungen

b. bewußte [sic.] affektive Zustände

Diese Komponente bezieht sich auf Wissen, bzw. auf die bewusste Wahrnehmung der genannten kognitiven Empfindungen (z.B. „Verwirrtheit“) und affektiven Zustände (z.B. „Bedrückung“), die in Verbindung mit den metakognitiv überwachten (Lern-)Prozessen einhergehen.

Hasselhorn spricht im Rahmen seines Kategorisierungssystems an, wie stark die einzelnen Komponenten untereinander vernetzt seien, was einerseits zu einer der Schwierigkeiten bei der Erhebung von Metakognition führt, da einzelne Aspekte von Metakognition kaum isoliert und trennscharf erhoben werden können. Andererseits stelle diese im Modell angelegte Differenzierung eine wichtige Grundlage für die „saubere“ Abgrenzung von Metakognition von anderen Konzepten dar und sei essenziell für die Beschreibung und Erklärung der Einflussnahme von Metakognition auf Lernverhalten im Rahmen theoretischer Modelle. (S.43)

„Good Strategy User“

Als weitere klassische Modelle zur Metakognition aus der Psychologie werden an dieser Stelle das normative "Good Strategy User"-Modell von Pressley, Borkowski und Schneider (1987) genannt, das seinerseits auf Überlegungen zum Einfluss von Metakognition und Motivation auf strategisches Lernverhalten basiert. (vgl. etwa Pressley et al., 1985; Borkowski et al., 1988; Borkowski & Turner, 1990)

Besagtes Modell systematisiert Charakteristika „guter Strategeanwender bzw. erfolgreicher Lerner“ (Hasselhorn, 1992):

a) Erfolgreiche Lerner verfügen über zahlreiche spezifische und generelle Lernstrategien und setzen diese auch flexibel und reflexiv ein (Metakognitionen).

b) Zusätzlich zum strategischen Wissen besitzen sie auch ein breites "Weltwissen" (Wissensbasis), so daß (sic.) sie bei vielen Lernanforderungen auf reichhaltige inhaltsspezifische Vorkenntnisse zurückgreifen können.

c) Im aktuellen Lernprozeß (sic.) wirken strategische, metakognitive und Vorwissenskomponenten eng zusammen: Bereichsspezifische Vorkenntnisse, systemisches Wissen und aktuelles epistemisches Wissen perfektionieren entweder die (bewußte) (sic.) Strategeanwendung oder setzen automatische Prozesse in Gang, die den kapazitätsbelastenden Rückgriff auf bewußte (sic.) Strategien erübrigen.

d) Schließlich sieht der gute Lerner einen ursächlichen Zusammenhang zwischen persönlicher Anstrengung bei der Ausführung und Steuerung von Strategien und dem Lernerfolg („Anstrengungsattribution“) und er schirmt sein Lernverhalten erfolgreich gegen konkurrierende Verhaltensweisen oder ungünstige Emotionen ab ("Handlungskontrolle" im Sinne von Kuhl, 1985).

(zitiert nach Hasselhorn, 1992, S.48)

Schneider und Hasselhorn (1988) schlugen auf Basis dieses Modells verschiedene Gestaltungsprinzipien speziell für den Mathematikunterricht vor, die hier kurz genannt werden.

Aus Platzgründen wird im Folgenden jedoch nicht verstärkt auf das Modell eingegangen.

Genannt wird hierbei erstens die explizite Vermittlung von metakognitiver Überwachung der Lösungsschritte beim Bearbeiten einer Mathematikaufgabe. Zweitens solle durch die Vermittlung spezifischen Strategiewissens der Aufbau von Metawissen über Strategien bei Lernenden gefördert werden. Drittens sei die Vermittlung allgemeinen Strategiewissens wichtig und dessen Bedeutung explizit zu betonen. Viertens seien über diese „metakognitiven Instruktionsmaßnahmen“ (sic.) (Hasselhorn, 1992) hinaus „ein systematischer Aufbau mathematischer Grundkenntnisse“ (ebenda) nicht zu vernachlässigen.

Pólya

Cohors-Fresenborg et al. gehen (2010) auf die Verwandtschaft „moderner“ Metakognition mit den Ideen Pólyas ein, der die Strukturierung, Planung, Überwachung und Reflexion von Problemlöseprozessen bereits lange vor Aufkommen des Begriffs Metakognition untersuchte und empfahl (vgl. z.B. Pólya, 1945).

George Pólyas „How to solve it“ beschäftigt sich mit Mechanismen, die dem in dieser Arbeit verwendeten Verständnis von Metakognition sehr nahe kommen. Pólya erläutert – theoretisch sowie anhand entsprechender Beispiele – Ratschläge, die Lernende wie Lehrende im Rahmen von (mathematischen) Problemlösekontexten zur Vermittlung, bzw. zur Entwicklung wirksamer Bewältigungsstrategien befähigen sollen. Pólya betont dabei auf Seiten der Lehrenden die Wichtigkeit einer „natürlichen“ Vermittlung, bei der gezielt der Einsatz von Metakognition (bzw. „Theory of Mind“) gefordert wird (Pólya, 1945, S.148, S.1):

“[...] what you say to your student should proceed from a sympathetic understanding of his difficulties.”

„The best is, however, to help the student naturally. The teacher should put himself in the student’s place, he should see the student’s case, he should try to understand what is going on in the student’s mind, and ask question or indicate a step that could have occurred to the student himself.”

Während Metakognition, bzw. das “Sich-Hineinversetzen“ in die Kognition der Lernenden hier durch die Lehrkraft eingesetzt werden soll, dient diese Art der Hilfe dazu, Lernende zu befähigen – mit der Zeit – entsprechende (Selbst-)Hilfen selbstständig zu entwickeln, indem die entsprechenden „Hilfen“ sich möglichst eng an deren (von den Lehrenden metakognitiv so

angenommene) Kognitionen anlehnen und damit einen möglichst „natürlichen“ Übergang von Anleitung zu eigenständiger Problemlösetätigkeit schaffen.

Ebenso spricht Pólya dabei die Bedeutung metakognitiver Erfahrungen für Lernende an (Pólya, 1945, S.4):

“If the same question is repeatedly helpful, the student will scarcely fail to notice it and he will be induced to ask the question by himself in a similar situation. Asking the question repeatedly, he may succeed once in eliciting the right idea. By such a success, he discovers the right way of using the question, and then he has really assimilated it.”

Hierbei sollen Lernende gezielt dazu gebracht werden, metakognitive Erfahrungen zu machen, also – im Beispiel – die Erfahrung, wie sich bestimmte Mechanismen – hier, Fragen – auf ihren Problemlöse-Erfolg auswirken, wodurch sich ein Gefühl für die Nützlichkeit dieser Mechanismen entwickeln soll. Ziel ist es, eine Einschätzung für Situationen zu entwickeln, in denen bestimmte Strategien Aussicht auf Erfolg versprechen, um deren absichtlichen und in Folge auch deren sinnvollen Einsatz zu fördern. Im Rahmen der in dieser Arbeit verwendeten Kategorien spielen also vor allem der Überblick über eigenes Wissen, metakognitive Erfahrungen sowie die Beurteilung von mathematischen Situationen (→ Aufgabenwissen) und die Strategiewahl (→ Strategiewissen) eine Rolle.

Wie in Kapitel 2.2.5 in Bezug auf metakognitive Aktivität angesprochen, geht auch Pólya davon aus, dass ein aktives „Vorleben“ des erwünschten Problemlöseverhaltens durch die Lehrkraft essentiell ist, um dieses Verhalten bei den Lernenden zu entwickeln. Hierbei reiche die Aufforderung zu derartigem Verhalten allein nicht aus, um dieses bei den Lernenden zu fördern. (Pólya, 1945, S.5) Offenbar müssen auch für Pólya Instruktionen direkt mit (unbewussten?) (metakognitiven) Erfahrungen verbunden sein, wenn sie für die Lernenden bedeutungsvoll erscheinen und zur späteren, eigenständigen, Verwendung eingepägt werden sollen.

Des Weiteren beschreibt Pólya Vorgänge, die stark an die Überwachung (Monitoring) von Problemlöseprozessen, bzw. von Kognition erinnern; dabei wird die Wahrnehmung von Unterschieden in Bezug auf den Fortschritt während eines Problemlöse-Prozesses angesprochen.

Pólya nimmt an, dass sich hierbei eine Änderung in der Wahrnehmung des Problems als Ganzes vollzieht – dessen, was er als „mode of conception“ bezeichnet (Pólya, 1945, S.158)

Pólya empfiehlt des Weiteren, abgeschlossene Lösungsprozesse rückblickend, Schritt für Schritt, zu reflektieren und daraufhin zu analysieren, welche Hindernisse sich ergeben haben, welche Ideen und Schritte sich als erfolgreiche erwiesen haben und für die Zukunft abgespeichert werden sollten und welche Fehler oder Schwächen den Lösungsprozess behindert haben. Die metakognitiven Elemente (→ Reflexion, Beurteilung in Verbindung mit Aufgaben- und Strategiewissen) dürften hierbei offensichtlich sein.

Es werden „typische“ Strategien, wie das Überprüfen von Ergebnissen und die Frage nach Plausibilität im Rahmen des Aufgabenkontextes angesprochen.

Pólya geht auf die Wichtigkeit einer flexiblen Denkweise ein, die bei Misserfolg und erneuter Bearbeitung nicht dieselbe Strategie anwendet, sondern diese (ggf. unter Zuhilfenahme neuer Erkenntnisse) variiert und damit Schlüsse aus vorherigen – (teilweise) erfolglosen – Prozessen zieht.

Pólya zufolge sollte bei der Analyse und Wiederholung von Lösungswegen insbesondere auf eine Verbesserung von Merkmalen wie Effizienz und Eleganz (die allerdings ein relativ vages Konzept sein dürfte) geachtet werden, was – metakognitiv gesehen – deren Wahrnehmung, bzw. Beurteilung nötig macht. Die Adaption und Steuerung von Kognition sowie das Ziehen von Konsequenzen für zukünftige Lernprozesse und den zukünftigen Umgang mit Mathematik macht in dieser Hinsicht Metawissen über das System Mathematik nötig, das die Einschätzung von Effizienz und Eleganz bei verschiedenen Begriffen und Methoden ermöglicht.

Grundsätzlich betont Pólya die Wichtigkeit von bereits bearbeiteten Problemen und deren Verwendung für aktuelle Problemstellungen, was sich z.B. in der häufigen Erinnerung an die Frage, „Have you seen it before?“, zeigt (Pólya, 1945, z.B. S.110). Dies macht vor allem das Durchsuchen eigener Erinnerungen nötig, wofür – wiederum – ein „Gefühl“ dafür bestehen muss, welche Problemstellungen (und Lösungswege) sich auf die aktuelle beziehen lassen und zu ihrer Bearbeitung dienen können. Ein solches Gefühl sollte sich durch metakognitive Erfahrungen, die im Umgang mit diesen – zuvor bearbeiteten – Problemen und beim erfolgreichen Verwenden bestimmter Strategien gemacht wurden, entwickeln, sowie durch die bereits angesprochene Reflexion und Analyse solcher Lösungsprozesse auf ihre Bedeutung für zukünftige Herausforderungen hin. Grundsätzlich muss allerdings überhaupt erst beurteilt werden können, ob ein aktuelles Problem zuvor bereits einmal „gesehen“ wurde, was mit Feeling-of-Knowing-Beurteilungen zusammenhängt. Metakognitiv gesehen, spielen hier ebenfalls die Fähigkeit, Erinnerungen zu aktivieren (“[...] mobilize the pertinent parts of our

dormant knowledge [...]”, Pólya, 1945, S.110) und daraufhin zu beurteilen, ob sie mit dem aktuellen Problem zusammenhängen („[...] corresponding elements [...]“) und ob sie sich als nützlich erweisen könnten (“[...] extract relevant elements from our memory [...]”, “[...] which parts of our knowledge may be relevant [...]”, Pólya, 1945, S.110) eine Rolle.

Interessant ist hierbei insbesondere die Formulierung “Have you seen it before?”, die explizit auf eigenes Wissen und eigene Erinnerungen abzielt und nicht etwa auf „objektiv“ vorhandene Informationen über Mathematik. Es wird nicht nach einem mathematischen Sachverhalt oder Zusammenhang gefragt, sondern nach eigenem Wissen über solch einen Sachverhalt, bzw. Zusammenhang. Hier zeigt sich sehr deutlich der zuvor angesprochene Unterschied zwischen „Fachwissen“ und Metakognition, bzw. die metakognitive Intention, die hinter Kognition steht (vgl. Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2).

In Bezug auf die Verwendung von heuristischen Strategien spricht Pólya 1945, S.130) – natürlich ohne Verwendung des Begriffs Metakognition – deren Nutzen allerdings direkt an:

„The study of heuristics has “practical” aims; a better understanding of the mental operations typically useful in solving problems could exert some good influence on teaching, especially on the teaching of mathematics.”

Hierbei wird metakognitives Personenwissen angesprochen, das – in diesem Fall auf Seiten der Lehrkraft – über allgemeine kognitive Mechanismen beim (spezielleren) Problemlösen besteht und das einen positiven Einfluss insbesondere auf das Unterrichten von Mathematik habe.

An anderer Stelle sieht Pólya (1945, S.133) Denken als Dialog des Denkers mit sich selbst:

“To describe thinking as “mental discourse”, as a sort of conversation of the thinker with himself, is not inappropriate. The dialogues in question show the process of the solution; the problem-solver, talking with himself, may progress along a similar line.”

Denkbar ist hierbei die Vorstellung, dass es zum Wissensaustausch zwischen den beiden „Gesprächspartnern“ kommt, die ihre Überlegungen teilen, diese gegenseitig hinterfragen und beurteilen, sie von verschiedenen Perspektiven aus betrachten und durch diesen dialektischen Prozess zu Ideen und Ergebnissen kommen. Da es sich bei beiden Gesprächspartnern um die eigene Person handelt, stellen diese Mechanismen des Hinterfragens, Beurteilens, Analysierens, etc. offensichtlich eigentlich metakognitive Prozesse dar.

Pólya spricht auch über die Nutzung „unterbewusster Arbeit“ („subconscious work, 1945, S.197); darüber, im Fall der Stagnation bewussten Denkens und Problemlösens das akute

Problem nach intensiver Beschäftigung damit ruhen zu lassen, um dem eigenen Unterbewusstsein die Möglichkeit zu geben, die gewonnenen Erkenntnisse zu verarbeiten und damit die Generierung neuer „Einfälle“ („bright idea“, ebenda, S. 198) zu provozieren. Hier spielen vermutlich auch unterbewusste/unbewusste Metakognitionen eine Rolle, vor allem aber metakognitives Personenwissen darüber, dass diese Verhaltensweise im Allgemeinen zu neuen Ideen, bzw. zu einer neuen Sichtweise des Problems führen kann, wenn bspw. der eingeschlagene Weg zum Zeitpunkt des Arbeitens mental zu sehr im Vordergrund stand und Alternativ-Strategien möglicherweise blockiert haben könnte. Hier steht also Wissen über Kognition an sich im Vordergrund, das relativ unabhängig von domänenspezifischen Inhalten sein sollte, jedoch von Pólya dennoch als wichtig erachtet wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Pólya in seinen Empfehlungen vor allem auf Seiten der Lehrkräfte die Einbeziehung von metakognitivem Personenwissen in die Unterrichtsplanung und -tätigkeit betont. Dabei ist zumeist Wissen über kognitive Mechanismen gemeint, die – für Pólya – typisch für das Problemlösen sind und die – so Pólya – Lernenden durch Instruktion und Beispiel (!) vermittelt werden sollen. Umgekehrt sollten sich Lehrkräfte der kognitiven Mechanismen von Lernenden bewusst sein (wie sie beim Lernen und Problemlösen ablaufen) und sich bei der Vermittlung von Mathematik an diese anpassen, bzw. an diese anknüpfen. Umgekehrt wird die Wichtigkeit prozeduraler Metakognition für das Problemlösen (und Beweisen) betont. Dabei stehen die gewissenhafte Analyse und zielgerichtete Planung, aktive Überwachung und anschließende Reflexion im Vordergrund – mit dem Ziel, relevantes Wissen zu erkennen und zu aktivieren, dieses zu nutzen und nach Abschluss eines Prozesses diesen im Hinblick auf nützliche Erkenntnisse für zukünftiges Arbeiten zu analysieren. Lehrkräften obliegt dabei die Aufgabe, Lernenden – durch aktives Verwenden und deutliches Kommunizieren solcher Mechanismen – deren Bedeutung für Lern- und Problemlöseprozesse zu vermitteln – mit dem Ziel, sie zur Wahrnehmung und zur eigenständigen und automatischen Verwendung dieser Mechanismen anzuregen. Um relevantes Wissen als solches zu erkennen, bzw. es überhaupt erst „aufzufinden“ und zu aktivieren, ist das aktive „Sondieren“ von eigenem Wissen/ eigenen Erinnerungen essenziell. Pólya geht hier einerseits davon aus, dass sich – gespeist durch das, was heutzutage vermutlich als metakognitive Erfahrungen bezeichnet würde – mit der Zeit ein „Gefühl“ für mögliche Beziehungen zu bekannten Problemen einstellt, das Problemlösern dabei hilft, ihr Wissen effektiver zu sondieren und zu systematisieren.

Cohors-Fresenborg et al.

Zum Schwerpunkt „Grundlagenforschung zu metakognitiven Aktivitäten“ führen Cohors-Fresenborg et al. von 2001 bis 2004 das Projekt *"Analyse von Unterrichtssituationen zur Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der SI"* durch. (OV, 2013)

Im Rahmen von dessen Beschreibung betonen Cohors-Fresenborg et al. die Bedeutung zentrale Rolle von Metakognition für einen modernen Mathematikunterricht auf internationaler Ebene:

„Nach TIMSS und PISA 2000 ist die Förderung des mathematischen Denkens und deshalb der kognitiven Aktivierung der Lernenden in den Mittelpunkt der Bemühungen zur Verbesserung der Qualität des Mathematikunterrichts gerückt. In der internationalen mathematikdidaktischen Diskussion gelten Maßnahmen, welche die metakognitiven Kompetenzen der Lernenden fördern, als wichtigstes Instrument, die Wirksamkeit und Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht zu erhöhen.“ (OV, 2013)

Unter dem Begriff Metakognition werden dabei bei Cohors-Fresenborg et al. primär die prozeduralen Anteile Planung, Überwachung und Reflexion gefasst.

„Metakognition wird dabei meist in drei Kategorien dekomponiert: das Planen (z.B. von Problemlöseschritten, des Einsatzes und der Abfolge mathematischer Werkzeuge), das Monitoring (z.B. das Überwachen von mathematischen Umformungen oder Argumentationen, das Überwachen der Zielerreichung) sowie die Reflexion (z.B. über mathematische Begriffe und Werkzeuge, über das bisherige Vorgehen, über die Diskrepanz zwischen Darstellungen und Vorstellungen).“ (OV, 2013)

Wie bereits erwähnt, handelt es sich hierbei um eines der existierenden Kategorisierungssysteme, die sich bewusst auf eine der „klassischen“ Komponenten von Metakognition konzentrieren; die deklarativen Anteile sowie die Sensitivity- und Awareness-Anteile finden sich in obiger Definition nicht.

Dabei wird allerdings – wie dies an anderer Stelle auch explizit festgelegt wird – kein Wert darauf gelegt, die (prozeduralen) Anteile strikt auf Kognition **über Kognition** zu beschränken; vielmehr werden z.B. die Planung „von Problemlöseschritten“, das Überwachen „von mathematischen Umformungen oder Argumentationen“ und die Reflexion „über mathematische Begriffe und Werkzeuge“ ebenfalls als **Metakognition** verstanden, obwohl man

diese strikterweise – als Kognition über Handlungen oder Inhalte – auch als „Kognition“ oder als „mathematisches Denken“, die nicht auf einer Metaebene stattfinden, bezeichnen könnte.

[An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Erweiterung des Begriffs im Sinne einer angemessen pragmatischen und im Hinblick auf die Förderung metakognitiver Kompetenzen zielführenden Definition auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit für sinnvoll und zielführend gehalten wird.]

Ziel des Projekts war das Entwickeln neuer Unterrichtsszenarien und Aufgabenformate (darunter auch Hausaufgabenformate), die „der Verstärkung metakognitiver Aktivitäten förderlich sind“, sowie das Nachweisen, dass diese Aktivitäten dem an sie gestellten Anspruch gerecht werden und die durch sie angeregte Metakognition durch entsprechende Prüfungsaufgaben auch abgeprüft werden kann. In einem zweiten Schritt wurden anhand von videodokumentierten Unterrichtsbeispielen die Wirkmechanismen metakognitiver Aktivitäten genauer beleuchtet und untersucht.

Cohors-Fresenborg et al. sehen Metakognition eng verknüpft mit dem Begriff der Diskursivität; wie sich bspw. in den Standards der KMK (2012) andeutet, erfordert die Kommunikation von Mathematik (Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“) einerseits reflexive (metakognitive) Überlegungen – um sich eigener, zu kommunizierender Ideen bewusst zu werden und diese einzugrenzen und gezielt verbalisieren zu können – und andererseits Vorstellungen von Wissen und Verständnisfähigkeit der jeweiligen Kommunikationspartner, um die eigene Kommunikation auf Grund dieser Informationen zu steuern.

Im Folgenden wurde der Fokus auf den Begriff Metakognition um den der Diskursivität erweitert, woraus sich die Entwicklung eines Kategoriensystems für die drei prozeduralen Komponenten ergab, „mit dem detailliert metakognitive und diskursive Aktivitäten – sowohl von Lehrenden als auch von Lernenden – im Mathematikunterricht klassifiziert werden können“. Dessen Anwendung und Analyse (in der Primarstufe und in der Sekundarstufe) mittels Schülereigenproduktionen und Unterrichtsvideos legte nahe, den Forschungsschwerpunkt des Projekts auf den Zusammenhang zwischen mathematischer Leistung und Monitoring-Aktivitäten zu legen.

Bei Untersuchungen mit Schülergruppen einerseits und von Ergebnissen der PISA-Studie 2000 konnten entsprechende Zusammenhänge nachgewiesen werden.

Cohors-Fresenborg et al. integrieren im von ihnen vorgestellten Konzept Metakognition ins

normale Unterrichtsgeschehen, statt sie lediglich unterstützend bei bestimmten Problemstellungen einzusetzen. Neben metakognitiver „Begleitung“ von Problemlöse- und Modellierungsprozessen wird Metakognition (Reflexion) durch Unterrichtsgespräche über Begriffsverständnis oder mathematische Methoden und Strategien sowie deren „Erfindung“ und Begründung gefördert und somit zu einem selbstverständlichen Teil des Unterrichts und des Repertoires der Lernenden. Cohors-Fresenborg et al. beschreiben (2014, S.13) dabei, wie angesprochen, ein Kategoriensystem für prozedurale Metakognition und Diskursivität bei Modellierungsaktivitäten/ beim Problemlösen, bzw. allgemeiner für die Analyse von Gesprächsprozessen im Mathematikunterricht (in Weiterentwicklung eines von Rott (2013) benutzten Systems). Die Allgemeinheit der Analyse führt dabei teils zu einer Erweiterung der entsprechenden metakognitiven Aspekte, bzw. zu einer abweichenden Verwendung im Vergleich zur psychologischen Literatur (S.14). Dies zeigt sich bspw. im Umfang des Reflexionsbegriffs, bei dem neben der Reflexion eigener und fremder Kognition/ Überlegungen auch die Reflexion über deren Auswirkung integriert wird – z.B. im Rahmen von Reflexion über metamathematische Fragen.

Im Rahmen ihres Kategoriensystems unterteilen Cohors-Fresenborg et al. die metakognitiven Aspekte Planung, Monitoring und Reflexion (sowie außerdem das Konstrukt Diskursivität) in jeweils mehrere Unterkategorien, die hier im Detail aus Platzgründen nicht beschrieben werden können.

Dabei weisen Cohors-Fresenborg et al. (2014, S. 14) auf die notwendige Unterscheidung zwischen Monitoring als Aktivität „im Verlauf des Problemlöseprozesses“ einerseits und Reflexion als „geistige Tätigkeit [...], die auf (Zwischen-)Ergebnissen aufsetzt“ andererseits hin. Inhalt letzterer können dabei neben der Problemlösung auch das „Verständnis von Begriffen“ sein. Hierbei bleibt offen, inwieweit beide Begriffe trennscharf voneinander abgrenzbar sind; so ließe sich Monitoring möglicherweise als Aneinanderreihung, bzw. kontinuierliche Durchführung von Reflexionen auffassen, die im Rahmen eines laufenden Arbeitsprozesses „akut“ Feedback einholen und zu einer unmittelbaren Anpassung (Steuerung) des eigenen Verhaltens im Prozess führen.

Wie angesprochen, kommt vor allem der Bedeutung der prozeduralen Komponente und dabei dem Begriff der Überwachung („Monitoring“) eine zentrale Bedeutung zu.

Cohors-Fresenborg et al. stellen (2010) die Wichtigkeit von Überwachungs-Aktivitäten („monitoring activities“) für (vor allem Mathematik-)Leistung heraus. An dieser Stelle wird

beklagt, dass dem Begriff Monitoring in der internationalen Debatte (sowohl allgemein als auch im Hinblick auf Mathematik) bislang zu wenig Beachtung geschenkt worden sei. Die Autor_innen sehen insbesondere in einem Mangel an Überwachungs-Aktivitäten eine mögliche Erklärung für das relativ schlechte Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler bei bestimmten Aufgaben der PISA2000E-Studie:

„The hypothesis that missing monitoring activities are responsible for the failure in specific tasks can explain some of the results.” (Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 232)

Im Rahmen einer Eye-Tracking-Studie mit Schülerpopulationen verschiedener Leistungsgruppen können Cohors-Fresenborg et al. eine stärkere Einbeziehung des Aufgabenkontextes bei Problemlöseprozessen leistungstärkerer Schülerinnen und Schüler nachweisen, während leistungsschwächere Lernende diesen oft wenig oder nicht beachteten:

„Low-achieving participants stand out by the way they consider pieces of information in isolation [...], whereas highachieving students consider the information given in a context, i.e. they read “whole sections of sentences” [...]. [...] low-achieving students often ignore the setting of the problem.“ (Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 241, 242)

Ebenso konnten hierbei verstärkt Überwachungs-Aktivitäten bei leistungstärkeren im Vergleich zu leistungsschwächeren Lernenden beobachtet werden:

„the metacognitive component “monitoring” is clearly more distinctive as regards highachieving students. They also make mistakes, but not so carelessly as low-achieving students.” (Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 242)

Korrelationen zwischen Mathematik-Leistung und Metakognition konnten in mehreren Studien nachgewiesen werden, wobei der Einfluss von Metakognition (auf die Mathematik-Leistung) teilweise unabhängig von allgemein intellektuellen Fähigkeiten ist:

„Several studies have shown that there is a correlation between mathematical performance and metacognitive skilfulness. The influence of metacognition is partly independent of intellectual ability (Veenman et al., 2005).” (zitiert nach: Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 242)

Dabei konnte nachgewiesen werden, dass einerseits Metakognition trainiert werden kann und dass derartiges Training andererseits zu einer Verbesserung der Mathematik-Leistung führen kann:

„Studies have pointed out that it is possible to train metacognitive behaviour and to increase mathematical performance by this means (Kramarski & Mevarech, 2003; Mevarech & Amrany, 2008).“ (zitiert nach: Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 242)

Schneider und Artelt

Schneider und Artelt geben 2010 in einem Artikel einen Überblick über die Rolle von Metakognition beim Mathematiklernen und -lehren anhand der Analyse verschiedener Studien zum Verhältnis von Mathematikleistung und Metakognition.

Eingangs wird auf die relativ kurze Geschichte des Begriffs Metakognition hingewiesen, der nichtsdestotrotz mittlerweile in verschiedenen Teilgebieten der Psychologie und der Erziehungs- und Bildungswissenschaften erforscht wurde und wird, was allerdings auch zu verschiedenen, teils unterschiedlichen, Konzeptionen des Begriffs geführt hat. Im Rahmen des Artikels wird die nunmehr „klassische“ Unterteilung des Konzepts in eine deklarative Wissens-Komponente und eine prozedurale oder exekutive, steuernde Komponente, sowie den „Sensitivity“-Aspekt vorgestellt, auf der auch die Ausgangs-Definition der vorliegenden Arbeit basiert. Während diese Unterteilung als etabliert gelten kann, ist zu beachten, dass sich die einzelnen Komponenten und Aspekte des Begriffs wechselseitig beeinflussen.

Zusammenfassend betonen Schneider und Artelt bereits eingangs den erheblichen Einfluss deklarativer Metakognition auf die Mathematikleistung:

“As a main result of correlational studies, it can be shown that the impact of declarative metacognition on mathematics performance is substantial (sharing about 15–20% of common variance).” (Schneider & Artelt, 2010, S. 149)

Des Weiteren wird vermerkt, dass vom Einsatz metakognitiver Instruktionen (im Mathematikunterricht) sowohl durchschnittliche als auch vergleichbar schwache Lernende stark profitieren.

“Moreover, numerous intervention studies have demonstrated that “normal” learners as well as those with especially low mathematics performance do benefit substantially from metacognitive instruction procedures.” (Schneider & Artelt, 2010, S. 149)

Es wird auf Forschungsergebnisse eingegangen, die für die Verwendung (und Instruktion) von Metakognition von basaler Bedeutung sind:

„Research carried out by Brown et al. was able to demonstrate that metacognitive abilities develop quite slowly during the school years and that there is room for improvement even in adolescents and adults (see Brown et al., 1983).“ (Schneider & Artelt, 2010, S. 150)

Metakognitive Entwicklung kann demnach auch im Jugend- und Erwachsenenalter noch stattfinden und ist dementsprechend einer Förderung (z.B. im Mathematikunterricht) zugänglich, was ihre Bedeutung für die didaktische Forschung im Bereich jenseits der Primarstufe untermauert.

Schneider und Artelt ziehen aus dem Vergleich der untersuchten Studien den Schluss (bzw. sehen bestehende Annahmen bestätigt), dass sich mathematische Leistung in Primar- und Sekundarstufe (auch unter Berücksichtigung von Unterschieden in Bezug auf die kognitive Leistungsfähigkeit) mittels metakognitiven Wissens und Selbstregulation vorhersagen lassen. Weiterhin gehen sie auf Grund der evaluierten Forschungsergebnisse davon aus, dass sich schulisch relevantes Metawissen normalerweise bereits im Verlauf der Primarstufe entwickle und (allerdings auch noch zu späteren Zeitpunkten) trainiert werden kann.

Des Weiteren stellen Schneider und Artelt Methoden zur Erhebung von Metakognition vor, auf die allerdings im Rahmen der Arbeit an anderer Stelle eingegangen wird (vgl. Kapitel 2.1.4 und Kapitel 3.2).

Abschließend wird jedoch betont, dass (auch zum damaligen Zeitpunkt) Bedarf an weiterer systematischer Forschung besteht, im Hinblick auf den Begriff Metakognition und Zusammenhänge und Wechselwirkungen mit anderen Konzepten wie Vorwissen oder der Allgemeinen Intelligenz.

Schoenfeld – “What’s all the fuss about metacognition?”

Alan Schoenfeld unternimmt (1987) den Versuch, den Begriff, Metakognition für ein Publikum außerhalb der wissenschaftlichen Community präzise zu erläutern.

Schoenfeld unterscheidet dabei die drei Kategorien oder Aspekte (aspects) **1. „knowledge about your own thought processes“** (Wissen über eigene Denkprozesse), **2. „Control, or self-regulation“** (Überwachung und Steuerung von Denkprozessen, bspw. von Problemlöseprozessen) und **3. “Beliefs and intuitions“** (Beliefs und Eingebungen) (1987, S.

190). Dabei konzentriert sich Schoenfeld vor allem auf die Kategorien 2 und 3, zu denen eine größere Anzahl an mathematik-relevanten Forschungsergebnissen vorlägen.

Die Wichtigkeit der ersten Kategorie sieht Schoenfeld in der Fähigkeit Lernender, eigenes Wissen realistisch einzuschätzen, die er als essentielle Grundlage von Problemlösen sieht, sowie die Fähigkeit, eigenes Lernen realistisch zu beurteilen.

Unter dem Kontroll-Aspekt von Metakognition, den Schoenfeld beispielhaft mit dem Begriff „Management“ umschreibt, werden die Unter-Kategorien oder -aspekte *Überprüfung des eigenen Aufgabenverständnisses*, *Planung*, *Überwachung* und *Ressourcen-Management* subsummiert. Schoenfeld (1987, S. 191) zeigt diesen Aspekt durch ein Negativ-Beispiel aus der Analysis auf, in dem es einem großen Anteil Studierender während einer Prüfung nicht gelingt, ein gegebenes Integral in ausreichend kurzer Zeit zu berechnen, da sie aufwändige, zeitraubende Lösungsmethoden (Partialbruchzerlegung) verwenden und eine wesentlich einfachere Lösungsstrategie (Substitution) „übersehen“. Hierbei wird klar, dass metakognitive Aktivitäten, wie eine kurze Beurteilung der Lösungsidee (in Bezug auf Aufwand und Schwierigkeit) und die Überprüfung des eigenen Wissens daraufhin, ob eine einfachere Lösungsmöglichkeit bekannt sei oder gefunden werden könne, dem Zeitproblem der Studierenden hätten vorbeugen können.

In einem weiteren Beispiel scheitern Studierende an der Lösung einer algebraischen Gleichung, da sie lediglich von Schritt zu Schritt zu denken scheinen, statt bspw. zu Beginn ein Aufgabenziel zu identifizieren und eine Strategie zu entwickeln, oder aber ihren Lösungsprozess auf Erfolg hin zu überwachen.

Weiterhin kontrastiert Schoenfeld das Problemlöseverhalten einer/s erfahrenen Mathematikerin/s und Problemlöse-Expertin/en mit dem unerfahrenerer Studierender. Dabei fallen im Falle der Expertin verstärkte Bemühungen im Bereich der Analyse und „Sinn-Generierung“ des/ am Problem(s), der Planung und Entwicklung von Lösungsansätzen sowie beim Überwachen der Lösungsprozesse und dem Verwerfen aussichtsloser Ansätze auf. Auf Studierendenseite hingegen finden keine derartigen Prozesse statt; der spontan eingeschlagene – aussichtslose – Lösungsweg wird weder geplant, noch finden überwachende und überprüfende Prozesse statt, was zu einem Verharren bei der eingeschlagenen Strategie führt, aus dem sich die Lernenden selbstständig nicht mehr lösen können. Offenbar finden hier keine metakognitiven Aktivitäten statt, die zu einem effizienten Nutzen vorhandenen Wissens und der Entwicklung (und Überwachung und ggf. Anpassung) einer tragfähigen Strategie hätten

führen können. Dem gegenüber steht die metakognitiv begleitete Arbeitsweise der Expertin, der verschiedene Lösungswege einschlägt, diese auf Erfolg hin bewertet und ggf. zu Gunsten aussichtsreicherer Strategien verwirft.

Diese Beobachtungen wurden verstärkt durch die Tatsache, dass den betreffenden Studierenden nötiges Wissen nachweisbar zur Verfügung stand, während die beschriebene Expertin mit dem mathematischen Inhalt des Problems nicht mehr vertraut war.

Unter dem Intuitions- und Beliefs-Aspekt von Metakognition fasst Schoenfeld Vorstellungen über und Ideen von Mathematik und mathematischen Problemstellungen, die bei Lernenden vorliegen und die es von Lehrenden-Seite aus in Betracht zu ziehen gilt. Am Beispiel illustriert Schoenfeld die Problematik mangelhaft vernetzter Vorstellungen von Lernenden, die zwischen verschiedenen Problemen (Problemarten) keine Beziehung erkennen und entsprechend übertragbare Strategien, Analogien und erlangte Erkenntnisse nicht zur Bewältigung anderer Problemstellungen transferieren können. Diese mangelnde Vernetzung zeigt sich in Schoenfelds Beispielen auch in einem nicht stattfindenden Rückbezug mathematischer Berechnungen und Ergebnisse auf ihren aufgabenbedingten Realwelt-Kontext, was zur unreflektierten Akzeptanz unrealistischer Ergebnisse führt, die nicht vor dem Hintergrund realer Gegebenheiten interpretiert werden. An dieser Stelle deutet sich ganz offensichtlich die Beziehung zwischen Metakognition und Modellierung (und dem Modellierungskreislauf, bzw. den Modellierungskreisläufen) an. Schoenfeld spricht an dieser Stelle außerdem Aspekte wie die (ungünstige) Priorisierung bestimmter Aufgabenbereiche gegenüber anderen an, oder aber die Einschätzung bestimmter Problemstellungen für die eigene Person als grundsätzlich machbar oder grundsätzlich zu schwer (belief!), die den Umgang mit Mathematik erleichtern oder erschweren.

Über die Erläuterung des Begriffs hinaus setzt sich Schoenfeld im besagten Artikel mit der Wirksamkeit von Metakognition bei Lernenden sowie diesbezüglichen Defiziten auseinander.

Schoenfeld betont (1987) beispielsweise die (weitgehende) Unfähigkeit vieler Studierender, ihre eigenen Denkprozesse überhaupt bewusst wahrzunehmen, und deren Unkenntnis darüber, dass sich diese bewusst steuern (z.B. trainieren, verbessern) lassen:

„The fact is that most students are largely unaware of their thinking processes. Virtually none of the students who enter my problem-solving classes are aware that they can practice their thinking skills and get better at them.” (S.199)

Außerdem geht Schoenfeld (1987) auf die Wichtigkeit bewusster „Selbst-Wahrnehmung“ als Basis für (steuernde) Veränderungen der eigenen Kognition ein und die daraus resultierende Entscheidung, dieses Thema mit Lernenden offen zu thematisieren:

„Yet self-awareness is a crucial aspect of metacognition, for awareness of one’s intellectual behavior is a prerequisite for working to change it. For that reason I make it a point to bring the subject out in the open. [...] Early in the term I describe the kinds of things we’ll be doing during the term and why we’ll be doing them. This introduction to the course includes a discussion of problem-solving strategies and of issues such as self-regulation and belief.” (S.199)

Die Aufgabe (bzw. einen Teil der Aufgabe) der Lehrenden sieht Schoenfeld (1987) darin, den Lernenden die Wichtigkeit ebensolcher metakognitiver Aspekte (an dieser Stelle z.B. die Thematisierung von Problemlöse-Strategien, Selbststeuerung und Beliefs) nahezubringen:

„My job, in part, is to convince the students of the importance of these aspects of mathematical thinking.” (S.199)

Um Studierenden ein gewisses Maß an Selbst-Bewusstsein oder Selbst-Wahrnehmung („self-awareness“) nahezubringen, nutzt Schoenfeld (1987) den „Umweg“ über die Analyse von Video-Aufnahmen; indem Studierende das – ineffektive und ineffiziente – Verhalten anderer Studierender beobachten und analysieren und sich mit diesem identifizieren können, werden ihnen eigene Defizite im metakognitiven Bereich bewusst:

„It’s a lot easier to analyze behavior when it’s someone else’s, and then to see that the analysis applies to yourself.” (S.199)

Schoenfeld fordert (1987) – im Sinne des genetischen Prinzips und im Hinblick auf metakognitives Aufgabenwissen (darüber, wie Mathematik und mathematisches Arbeiten normalerweise „funktioniert“ und vonstattengeht) – Prozesse, die hinter vordergründig knappen, prägnanten und formal „sauberen“ mathematischen Beweisen oder Lösungen stehen, bzw. die diesen vorausgehen, Lernenden gegenüber nicht zu verschweigen, sondern sie mit ihnen zu thematisieren:

„In presenting a polished solution, we often obscure the processes that yielded it, thus giving the impression that things should be easier for people who student [sic.] the subject matter. In consequence, the give-and-take of real problem-solving – the false starts, the recoveries from them, the interesting insights, and the ways we capitalize on

them, and so on – are all hidden from the students. Yet these are the processes that must be brought out into the open.” (S.200)

Des Weiteren legt Schoenfeld Wert darauf, als Lehrende/r selbst beispielhaft Metakognition in einer Weise zu betreiben, die von den Lernenden beobachtet (gehört) werden kann:

„If I generate a few reasonable approaches, I decide among them and pursue one for a while. After a few minutes of working on it, I reconsider (“Am I making reasonable progress? Does this seem like the right thing to do?”) and then act accordingly. [...] until I solve the problem, at which point I do a “post mortem” and review the whole solution.” (S.200)

Schoenfeld geht hierbei offensichtlich auf überwachende Prozesse (Rückfragen) während des Arbeits-(Denk-)Prozesses ein, auf entsprechende exekutive Prozesse (Selbststeuerung, „act accordingly“) und auf eine dem Prozess folgende Reflexion. Zweck derartiger „Problemlöse-Simulationen“ („simulated problem resolutions“, S.200) ist dabei das Bewusstmachen metakognitiver Möglichkeiten bei den Lernenden: „[...] their primary function is to focus students‘ attention on metacognitive behaviors“. (S. 200)

„[...] my task is to help the students make the most of what they themselves generate and to help them reflect on how they do it.” (Schoenfeld, 1987, S. 201)

Eine der vermutlich grundlegendsten metakognitiven Fragen, die Lernende sich (oder Lehrende den Lernenden) beim Umgang mit Mathematik stellen können, ist die nach dem eigenen Verständnis, die Aufgaben- mit Personenwissen verbindet:

„[...] is everyone sure he understands the problem?” (Schoenfeld, 1987, S. 201)

Daran kann sich – je nach Fall – die Frage anschließen, wie der jeweiligen Aufgabenstellung (mehr) Sinn verliehen, bzw. diese (besser) verstanden werden kann:

„[...] and I ask how we can make sense of the problem.” (Schoenfeld, 1987, S. 201)

Wird ein – als ausreichend beurteiltes – Aufgabenverständnis erreicht, schließt sich die Generierung (oder Rekapitulation) von Strategien an, sowie deren Beurteilung:

„Is that what we want to do?“ (Schoenfeld, 1987, S. 201)

Wurden bereits vor der “Sinnsuche” Strategien entwickelt, können diese unter Umständen nun angepasst oder auch verworfen werden.

Eine typische Situation (bzw. typische Fragen und Überlegungen), die beim Überwachen eines Problemlöse- (oder eines anderen Denk-)Prozesses auftreten (und gestellt werden können), sind die folgenden:

„We've been doing this for 5 minutes or so. Do things seem to be going pretty well? If so, we should continue. But if not, we might want to reconsider.“ (Schoenfeld, 1987, S. 202)

Dabei deutet sich durch das Beachten der verstrichenen Zeit bereits an, dass hier Indikatoren (Zeit) in Betracht gezogen werden, an denen die Aussicht auf Erfolg gemessen wird.

„It is almost certain that, before the course, poor metacognitive skills would have guaranteed their failure. After the course, the possession of such skills could not guarantee success, but at least it could give them a fair shot at it.“ (Schoenfeld, 1987, S. 209)

In Anlehnung an Vygotskis „Zone of proximal Development“-Hypothese (ZPD) nutzt Schoenfeld zur Entwicklung metakognitiver Fähigkeiten bei Lernenden gemeinsames Problemlösen in (Klein-)Gruppen; in diesen können Diskussionen, die Analyse „fremder“ Strategien und gegenseitige Korrektur, (sinngebende, bedeutungsklärende) Erläuterungen und Begründungen stattfinden, die – quasi mit verteilten Rollen – Aspekten von (interner) Metakognition entsprechen und somit (mittelbar) als Vorstufe und Training für Metakognition dienen können. (Schoenfeld, 1987)

Sjuts

Johann Sjuts gibt 1999 (Sjuts, 1999b) einen kurzen und allgemeinen Überblick über Metakognition, ihre Hauptbestandteile („Kognition der eigenen Kognition und Regulation der eigenen Kognition“, S.497) und ihre Wichtigkeit und Bedeutung für kognitive Prozesse und (mathematische) „Sachkenntnisse“, die „mit wirkungsvollen Methoden der Planung, Überwachung und Regulierung der Lern- und Denkprozesse“ einhergehen (S. 497). Sjuts kritisiert den (damals) zu geringen Aufwand, der für die „Förderung von Metakognition“ (S. 497) im schulischen Bereich aufgewendet werde, und merkt an, dass es bei der Beurteilung der bei Schülerinnen und Schülern vorhandenen, bzw. genutzten Metakognition für gewöhnlich zu Fehleinschätzungen komme.

Sjuts zeigt im Folgenden anhand verschiedener Aufgabenstellungen Möglichkeiten für die Anwendung von „Metakognition beim Mathematiklernen“ (S. 497) im Mathematikunterricht.

Darunter fällt bspw. die **Fehleranalyse** bei algebraischen Termumformungen und Gleichungslösungen. Im Rahmen einer vorausgehenden Studie wurden Schülerinnen und Schüler aufgefordert, vorliegende (gezielt fehlerbehaftete) Muster-Bearbeitungen schrittweise zu kommentieren. Ziel dieser Art der Aufgabenstellung ist es, „mentale Modelle nach außen zu kehren“ (S. 498), indem einerseits die zu Grunde liegenden Vorstellungen (und Fehlvorstellungen, wie bspw. beim Verständnis des Distributivgesetzes) von Schülerinnen und Schülern über Mathematik durch ihre Kommentare sichtbar gemacht werden und andererseits Formulierungen analysiert werden, die deren Denkstrukturen offenlegen. So wird bspw. aus der Verwendung von Final- und Konsekutivsätzen oder von Konjunktionen wie „damit“ und „so daß“ (sic.) (S. 498) auf eine Zweck- und Wirkungs-Orientiertheit der Betreffenden geschlossen. Des Weiteren wird die Fähigkeit der Lernenden beleuchtet, die Denkvorgänge anderer zu analysieren und sich in sie „hineinzusetzen“ (S. 498). Sjuts sieht derartige Fehleranalysen als „wesentlichen Teil“ von Metakognition, „als Voraussetzung für Korrektur und bewußte (sic.) Kontrolle“ (S. 498).

Im Rahmen einer Aufgabe zur Textproduktion im Rahmen des Satzes des Pythagoras (und seiner Umkehrung) zeigt Sjuts auf, wie anhand der (verschriftlichten) Überwachung und „Explikation“ der beiden Sätze das Verständnis der Lernenden für verschiedene „Aspekte“ des mathematischen Sachverhalts (beweislogisch, geometrisch-konstruierend, arithmetisch-algebraisch) sichtbar gemacht werden kann (S. 499). Metakognition und ihre Explikation dienen hier also als Diagnose-„Instrument“ und als Basis für „korrigierende Rückmeldungen“ (S. 499).

An dritter Stelle untersucht Sjuts „rückblickende Betrachtungen und Bewertungen des eigenen Denkens“ anhand einer weiteren Aufgabe (S. 499). Durch die Aufgabenstellung „Meine Gedanken zu $0, \bar{9} = 1$ “ werden Reflexionen und Bewertungen angeregt (und verschriftlicht), die Rückschlüsse auf Verständnis und kognitive Konflikte zulassen (S. 499).

Über die im Einzelnen thematisierten Konsequenzen hinaus, kommentiert Sjuts die Bedeutung dieser Art(en) der Aufgabenstellung, wie folgt:

„Die Methode der Verschriftlichung ist offensichtlich. Auch der hier in Erscheinung tretende Wesenszug der Metakognition ist klar. Das Wissen über das eigene Wissen und

Denken wird bewußt (sic.). Dieses Wissen führt zum Nachdenken, zur Analyse, zur Reflexion.“ (Sjuts, 1999b, S. 500)

Abschließend stellt Sjuts die folgende „konstruktivismustheoretisch fundierte These“ auf:

„Metakognition ist beim Mathematiklernen deshalb **nötig**, weil beim Aufbau mathematischer Vorstellungen Unzulänglichkeiten auftreten.“ (Sjuts, 1999b, S. 500)

Dieser stellt der Autor die folgende „kognitionstheoretisch fundierte These“ gegenüber:

„Metakognition ist beim Mathematiklernen dann **möglich**, wenn leistungsfähige geistige Werkzeuge zur Wissensrepräsentation zur Verfügung stehen.“ (Sjuts, 1999b, S. 500)

In (Sjuts, 2001a) beschäftigt sich Sjuts erneut mit (schriftlichen) Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit Mathematik und deren Funktion, Metakognition bei Lernenden anzuregen. „Passende Aufgabenstellungen“ verlangten dabei von Schülerinnen und Schülern Kommentare, Analysen und Hilfestellungen im Sinne der zuvor vorgestellten Aufgabentypen, wodurch unter anderem Fehlvorstellungen sichtbar gemacht und Dialogfähigkeit gefördert werden könnten (S. 588). Die Bedeutung von Eigenproduktionen für Metakognition besteht dabei unter anderem darin, dass der „Prozess der sprachlichen Äußerung“ verlangsamt wird und Schülerinnen und Schüler damit die Zeit haben, „[...] Beobachtungen zu strukturieren, [...] Gedanken zu sammeln und zu ordnen sowie sorgfältig und überlegt darzustellen. [...] Sprachmittel bewusst auszuwählen und auch den Gebrauch fachsprachlicher Mittel zu erproben“. (Maier & Schweiger, 1999 – zitiert nach Sjuts, 2001a, S. 588) Sjuts betont weiterhin in Bezug auf von Lernenden verfasste Texte:

„Vor allem, wenn er als Adressaten einen ‚Unwissenden‘ hat, wird er sich um besonders gründliche Überlegung und sorgfältige Formulierung bemühen. Zugleich gibt ihm der Text Gelegenheit, sein Wissen, sein Verstehen und seine Argumente der Bewährung auszusetzen, um sie gegebenenfalls zu überprüfen und zu modifizieren.“ (Sjuts, 2001a, S. 588)

Offensichtlich geht Sjuts hier auf die Bewusstmachung, Reflexion, Überprüfung und ggf. Anpassung eigener Denkprozesse und eigenen Wissens ein, die durch die „Vermittlung“ der Textproduktion quasi zu Papier gebracht und damit verlangsamt und sichtbar gemacht werden.

Bezugnehmend auf Gallin und Ruf (1995), betont Sjuts für die unterrichtliche Förderung die Bedeutung einer beispielhaft vorgehenden Lehrkraft, deren Vorbild die Lernenden beim

Nachahmen dazu animiert, sich ebenfalls einer entsprechend reichhaltigen und fachlich korrekten Sprache zu bedienen. Des Weiteren lässt sich, so Sjuts, beobachten, dass „eine substanzielle gedankliche Auseinandersetzung mit Mathematik sich in ausdrucksvollen, aber auch subtilen Formulierungen niederschlägt, dass der Anspruch an Präzision während des Lernens und Niederschreibens eingelöst wird, dass also Reflexion und Metakognition parallel zum Lernvorgang stattfinden“ (Sjuts, 2001a, S. 589). Es fällt an dieser Stelle auf, dass Sjuts den Begriff „Reflexion“ – vermutlich als Reflexion über Mathematik – (auch aber möglicherweise nicht nur) als von Metakognition, bzw. von metakognitiver Reflexion getrennt verwendet.

Sjuts nimmt erneut Bezug auf Bedingungen für „die Möglichkeit von Metakognition“ (S. 589). Diese könne „erfolgen, wenn Wissensrepräsentationen zum Gegenstand des Nachdenkens werden“ (S. 589). Umgekehrt böte diese Beschäftigung mit Kognitionen (auch mit denen anderer) die Möglichkeit, „das eigene Denken nach außen zu kehren“ (S. 589).

„Ein wesentlicher Teil von Metakognition“, so Sjuts (2001a, S. 589), „ist die Introspektion“, also das Erfassen und Beschreiben von Kognitionen (mit mathematischem Inhalt). Diese wird bei Sjuts bspw. erneut durch die Verschriftlichung von Vorstellungen über Mathematik (z.B. über eine bestimmte Funktion) erhoben und interpretiert, was diese Methode allerdings – natürlich – von der Angemessenheit der Interpretation der Erhebenden abhängig macht.

Was die unterrichtliche Bedeutung von Eigenproduktionen für das Lernen von Mathematik angeht, zitiert Sjuts (2001a, S. 590):

„Wer jedoch an das Vorverständnis der Schüler anknüpfen und dieses zielbewusst weiter entwickeln will, muss über die Denkwege der Schülerinnen und Schüler so viel wie möglich wissen und ihnen die Möglichkeit geben, ihre Sichtweisen auf den Lerngegenstand zu einem bestimmenden Faktor des Unterrichts zu machen.“ (Selter, 1996, S. 10)

Für Metakognition liegt laut Sjuts die Bedeutung von Eigenproduktionen vor allem in der nach „außen“ verlagerten Reflexion der eigenen Kognition mit dem Ziel, eine für andere möglichst gut verständliche Erklärung des jeweiligen fachlichen Gegenstands zu entwickeln.

Lingel

Klaus Lingel beschreibt in seiner Dissertationsschrift (2016) eine Längsschnittstudie, die die Entwicklung metakognitiven Wissens im Bereich Mathematik bei Lernenden und den Zusammenhang metakognitiven Wissens und mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe I an bayrischen Schulen (Hauptschule, Realschule und Gymnasium) untersucht. Lingel berichtet dabei von der teilweise sehr schwierigen Literaturlage – vor allem im Bereich der Entwicklung von Metakognition über längere Zeiträume, aber grundsätzlich im gesamten Themenbereich Metakognition.

Im Rahmen seiner Studie stellt Lingel Hypothesen zur Metakognition im Bereich Mathematik auf – bzgl. des Entwicklungsverlaufs in der Sekundarstufe I, bzgl. interindividueller Unterschiede zwischen Lernenden, was vorhandenes metakognitives Wissen sowie individuelle Entwicklungsunterschiede angeht, bzgl. deren Ursachen, bzgl. entsprechender Unterschiede zwischen den Schularten und bzgl. Unterschieden zwischen den Geschlechtern. Im Rahmen dieser Untersuchung wurde die Entwicklung metakognitiven Wissens im Hinblick auf vier Aspekte untersucht. Zuerst wurde dabei untersucht, ob sich innerhalb der Sekundarstufe I grundsätzlich Entwicklungsunterschiede im metakognitiven Wissen für den Bereich Mathematik nachweisen lassen und welchem Verlauf entsprechende Veränderungsprozesse ggf. folgen. Zweitens wurde untersucht, inwieweit sich entsprechende Entwicklungsverläufe intra- und individuell unterscheiden lassen. Drittens wurde der Versuch unternommen, innerhalb der untersuchten Stichprobe Gruppen mit unterschiedlichen Veränderungsmustern zu bilden. Abschließend wurde nach den Ursachen entsprechender Unterschiede geforscht.

Lingel fasst die Ergebnisse seiner Studie wie folgt zusammen: Es ließen sich substantielle Entwicklungsveränderungen im metakognitiven Wissen zur Mathematik feststellen, deren Größenordnung aber bspw. unter der in vergleichbaren Längsschnittstudien über den Verlauf der Primarstufe hinweg gemessenen lag. Der Entwicklungsverlauf in Lingels Studie weicht wider Erwarten von einem linearen Verlauf ab, was sich bislang auch durch methodische Artefakte nicht erklären ließ.

Des Weiteren ließ sich, interindividuell betrachtet, ein relativ heterogener Entwicklungsprozess beobachten; zu Beginn der Studie erhobene Unterschiede zwischen den Teilnehmer_innen im metakognitiven Wissen bzgl. Mathematik veränderten sich im Lauf des Beobachtungszeitraums noch stark, was darauf schließen lässt, dass sich metakognitives Wissen im Lauf der Sekundarstufe noch stark entwickelt. Dabei ließ sich das Gymnasium als

im Vergleich zu Realschule und Hauptschule stärker entwicklungsförderliche Umgebung bzgl. metakognitiven Wissens ausmachen (wobei zu beachten bleibt, dass diese Befunde auf die bayrischen Schulen beschränkt bleiben, die an der Studie teilnahmen).

Geschlechterunterschiede, wie sie aus anderen Domänen metakognitiven Wissens bekannt sind, konnten auch für den Bereich Mathematik bestätigt werden. Während sich zu Beginn des Beobachtungszeitraums bereits geringe bis stärkere Unterschiede zugunsten der weiblichen Teilnehmerinnen zeigten, zeigten sich bei diesen auch während des Beobachtungszeitraums stärkere Entwicklungsverläufe. Andererseits zeigte sich im Bereich inhaltlicher (mathematischer) Kompetenz eine Tendenz zugunsten der männlichen Teilnehmer.

Es konnten drei latente Entwicklungsklassen ausgemacht werden, bei denen „qualitativ unterschiedliche Entwicklungstypologien“ (Lingel 2014, S.250) beobachtet wurden; verglichen zur „Modusklasse“, der die Mehrheit der Versuchsteilnehmer_innen angehörte, verbesserten sich die Entwicklungsverläufe der „überdurchschnittlichen“ Klasse, während sich die der „unterdurchschnittlichen“ verschlechterten. Unterschiede zwischen den latenten Klassen nahmen also zu. Die Auswirkungen zugrundeliegender Entwicklungsmuster auf metakognitives Wissen schienen sich also zu akkumulieren. Als Ursachen dieses Verhaltens werden Unterschiede in den kognitiven Voraussetzungen der Teilnehmer_innen vermutet.

Ebenfalls untersucht wurden verschiedene potentielle Einflussfaktoren auf die Entwicklungsverläufe metakognitiven Wissens. Der Faktor „Leseverstehen“ wirkte sich sowohl auf die Entwicklung metakognitiven Wissens als auch auf die Mathematikleistung selbst aus.

„Für die fluide Intelligenz konnten die angenommenen positiven Effekte sowohl auf die Ausprägungsunterschiede als auch auf die Entwicklungsveränderungen im metakognitiven Wissen belegt werden.“ (Lingel 2014, S.253) Dabei trug sie „unabhängig vom metakognitiven Vorwissen zum weiteren Erwerb des metakognitiven Wissens bei“. (Lingel 2014, S.253)

Im Bereich Arbeitsgedächtnis konnte ein Einfluss zwischen Verarbeitungskapazität (zentral-exekutiv) und metakognitiver Entwicklung nachgewiesen werden, nicht aber zwischen Speicherkapazität und metakognitiver Entwicklung.

Im Bereich Motivation ließen sich keine abschließenden Erkenntnisse im Hinblick auf deren Einfluss auf die Entwicklung metakognitiven Wissens ziehen.

Weiterhin ließ sich der sozioökonomische Status der Teilnehmer_innen als Einflussfaktor bestätigen; dessen Effekte blieben allerdings über den Beobachtungszeitraum hinweg stabil und übten keinen aktiven Einfluss auf die Entwicklung metakognitiven Wissens mehr aus.

Abschließend wurde anhand eines Mathematiktests nach Zusammenhängen zwischen den Entwicklungsprozessen von metakognitivem Wissen und Mathematikleistung geforscht. Abgesehen von den zuvor erwähnten geschlechtsbedingten Unterschieden, ergaben sich hierbei für beide Faktoren nahezu deckungsgleiche Entwicklungsverläufe.

2.3.2. Überlegungen zu Ansatzpunkten für Metakognition in der Analysis

Auf mathematischer Seite wurde die Analysis wegen ihres Potentials für metakognitive Aktivitäten als Bezugsgebiet für das Projekt gewählt. Im Folgenden werden Belege für dieses Potential dokumentiert, während in den Kapiteln 2.3.3, 2.3.4, 4.3, 4.4.1 und 4.4.2 ausführliche Analysen zentraler Themenbereiche der Mathematikdidaktik im Hinblick auf Ansatzpunkte für Metakognition erfolgen.

Der Anspruch der Grunderfahrungen nach Winter (vgl. etwa Greefrath et al., 2016, S. 2), Mathematik einerseits als eigene (gedankliche) Welt wahrzunehmen, sie andererseits als Mittel zur Wahrnehmung der Welt zu begreifen und sie drittens als Mittel zum Umgang mit der Welt (im Rahmen der durch sie erworbenen Problemlösefähigkeiten) zu nutzen, macht Mathematik als Ganzes zu einem Ansatzpunkt für Metakognition. Um Mathematik als System, als „Brille“ (durch die die Welt gesehen wird) und als „Instrument“ zu begreifen, gilt es, die eigene Wahrnehmung, den eigenen (gedanklichen) Umgang mit der Welt, die eigene Kognition insgesamt sowie die Mathematik zu überdenken, zu reflektieren und entsprechende Erkenntnisse und entsprechendes Wissen über die Möglichkeiten von Mathematik in das eigene (gedankliche) Handeln zu integrieren.

Im Analysis-Unterricht (ab der Sekundarstufe II) kommt es zu einer Präzisierung mancher Inhalte der Sekundarstufe I und zu einem höheren Anspruch, was die eigenständige Beurteilung von Inhalten und Verfahren angeht (vgl. etwa Greefrath et al., 2016). Allein durch die (im Vergleich zur Einführung von Arithmetik, Algebra oder Geometrie) höhere Klassenstufe, in

der die Analysis explizit eingeführt wird (abgesehen von propädeutischen Inhalten früherer Stufen) ergibt sich im Mathematikunterricht in der Schule notwendigerweise ein höherer kognitiver Anspruch für die Analysis (auch wenn entsprechende Inhalte der anderen Fachbereiche in der Sekundarstufe II natürlich ebenfalls auf einem höheren Niveau als in früheren Stufen stattfinden). Greefrath et al. (2016, S. 8) sprechen von einer „höheren Komplexität der Begriffsbildungen“ beim Umgang mit der Analysis im Unterricht, die „auf einem kognitiv stärker herausfordernden Niveau als etwa viele Beispiele aus der Arithmetik oder Algebra“ stattfindet.

Laut Greefrath et al. (2016, V) fördert der Analysis-Unterricht die „Entwicklung eines Denkens“, das über Alltagserfahrungen hinausgeht, gibt „Einblick in die Entstehung und Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe „und erfordert eine „Präzisierung der Sprache“. Die entsprechende Fähigkeit, auf einem fortgeschrittenen Niveau mathematisch zu denken, ist laut Tall (1991) Voraussetzung für den Umgang mit Mathematik auf einem höheren Niveau (Tall, 1991 in Eichler und Erens, 2014, S. 647). Gerade im Hinblick auf solche Veränderungen und Präzisierungen von „Denkarten“ und Sprache sowie die Interpretation von Mathematik als kognitives Instrument oder im Hinblick auf die didaktisch motivierten Ziele von Mathematikunterricht scheint mir eine metakognitiv unterstützte Teilhabe von Lernenden an den didaktischen und methodischen Überlegungen, die hinter dem Unterricht stehen, sinnvoll. Metakognition sollte hier dabei helfen, zu erfassen, worin Unterschiede zwischen bekannten und „neuen“ Anforderungen und „Arten“ zu denken bestehen – auch wenn die Frage offen bleibt, inwieweit eine solche metakognitive Analyse mit, bzw. von Lernenden durchgeführt werden kann.

Eine zentrale Herausforderung der Mathematik und insbesondere der Analysis, die vor allem am Übergang zwischen Schule und Hochschule zu Schwierigkeiten führen kann, liegt in der gedanklichen Vereinbarung propädeutischer, anschaulicher Vorstellungen mathematischer Begriffe einerseits mit formal-korrekturer Exaktheit, wie sie beim Umgang mit Mathematik in einem Hochschulstudium notwendig ist.

„Ein wesentlicher Zug der Mathematik ist dieser duale Charakter von formalen Strukturen und konkreten Interpretationen.“ (Büchter & Henn, 2010, S. 292)

So zeichnet sich bspw. der Grenzwert als zentraler (oder als der zentrale) Begriff der Analysis durch die ihm eigene Dualität zwischen statischem und dynamischem Aspekt aus, die die gedankliche Vereinigung verschiedener Sichtweisen notwendig macht, um bei Lernenden ein

möglichst tiefes Verständnis und den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu gewährleisten. (Ableitinger und Heitzer, 2013; Weigand, 1993) Bei diesen Perspektivwechseln, die durch die Konfrontation mit dem Unendlichen eine besondere Tiefe erhalten, sollte metakognitive Reflexion über Sachwissen, Aufgabenwissen und die metakognitive Auseinandersetzung mit dem eigenen Verständnis von großem Nutzen sein.

Des Weiteren beklagen Tietze, Klika und Wolpers (2000) Defizite bei Schülerinnen und Schülern; so seien diese von Widersprüchen zwischen verschiedenen Darstellungsarten analytischer Begriffe und Sachverhalten „[...] keineswegs irritiert [...] Es handelt sich für die Schüler um isolierte kognitive Operationen“ (S. 238). Lithner (2011, S. 291) merkt an, dass in der Literatur zu Lernschwierigkeiten für den Fachbereich Analysis („Calculus“) Probleme mit praktisch allen Grundbegriffen der Analysis (Variable, Funktion, Grenzwert, Ableitung, Integral, Differentialgleichung) berichtet werden; als ein Grund wird dabei erneut die Komplexität mathematischer Begriffsbildung genannt, wobei entsprechendes Begriffsverständnis („conceptual understanding“) allein für einen kompetenten Umgang mit Mathematik nicht ausreicht. Es wird betont, dass sich trotz des Ziels einer allgemeinen Theorie die Vorstellungen von Lernenden anhand konkreter Beispiele in konkreten Kontexten entwickeln.

Hierbei scheint es essenziell zu sein, dass Lernenden die Möglichkeit durch – explizit erklärte und in den Kontext des übergreifenden Gebiets eingebundene – Beispiele die Möglichkeit gegeben wird, neue Inhalte in ihr Wissen zu integrieren, deren Bedeutung im Zusammenhang zu erfassen und metakognitive Erfahrungen beim (begleiteten) Umgang mit ihnen zu sammeln.

Büchter und Henn (2010, S. 82) warnen diesbezüglich vor der Gefahr, dass Kalküle ohne die Unterstützung durch eine „geeignete inhaltliche Anschauung“ zum sinnentstellten“ Umgang mit Verfahren werden. Bei Herleitung des Ableitungsbegriffs sprechen Büchter und Henn (2010, S. 83) beispielhaft von der anschaulich verständlichen, „semantischen“ Einheit $\frac{km}{h}$, die die Änderung der Geschwindigkeit pro Sekunde angibt. Dieser gegenüber steht die einfacher handhabbare, „syntaktische“ Einheit $\frac{m}{s^2}$, mit der aber „keine inhaltliche Vorstellung mehr direkt verbunden“ sei.

Über rein schulische Anforderungen hinaus kann – wie angesprochen – bspw. die Einführung der ϵ - δ -Definition für Grenzwerte zu Beginn eines mathematiknahen Studiums für Studienanfänger_innen eine große Herausforderung darstellen, insbesondere, da im aktuellen

Mathematikunterricht (in Bayern) der Themenbereich Folgen, sowie die statische, formale Definition des Grenzwerts nicht mehr, bzw. lediglich auf implizite Weise behandelt werden (z.B. Greefrath et al., 2016). Zusätzlich wird vermutet, dass auf Grund einer stärkeren Betonung von modellierenden, begründenden und argumentierenden Tätigkeiten im modernen Mathematikunterricht, im Vergleich zu in der Vergangenheit teils stärker algorithmisch-kalkülhaften Aufgabenstellungen, ein größerer Bedarf an metakognitiven Kompetenzen bestehen, die einen flexibleren, reflektierten Umgang mit vielseitigeren Aufgabenstellungen sowie Verständnis für mathematische Aussagen unterstützen und fördern.

Unter allgemeineren Gesichtspunkten sollte zudem bedacht werden, dass die explizite Einführung und Behandlung der Analysis im Unterricht vor allem in der gymnasialen Oberstufe/ Sekundarstufe II stattfinden. Da mit Beginn der Oberstufe ein höheres Maß an Autonomie und eigenverantwortlichem Lernverhalten von Schülerinnen und Schülern gefordert wird und diese beiden Jahre (je nach Bundesland) anders strukturiert sind als der bisher bekannte Unterricht im Klassenverband, stehen Lernende fach-unabhängig unter einem höheren (organisatorischen, psychischen, etc.) Druck als bisher. Auch wenn es sich hierbei nicht um fachliche oder direkt fachbezogene Herausforderungen handelt, sollte dennoch bedacht werden, dass die Behandlung der Differenzialrechnung damit in einer Phase der Schulzeit stattfindet, die ein erhöhtes Maß an Eigenständigkeit, Organisationsfähigkeit und Zeitmanagement sowie Entscheidungsfähigkeit erfordert, was sich auf das Zurechtkommen mit entsprechenden fachlichen Herausforderungen auswirken dürfte. Es scheint naheliegend, dass überfachliche metakognitive Fähigkeiten (wie z.B. die Auswahl von Lernstrategien, Priorisierung von Aufgaben, Reflexion und Nutzung von Mechanismen im „System Schule“, etc.) hier von großem Nutzen sein dürften, um eine Anpassung an die veränderten Umstände und den damit verbundenen Druck zu gewährleisten (vgl. Dunlosky und Metcalfe, 2009).

Dementsprechend wurde auch die Zielgruppe für den empirischen Anteil des hier vorgestellten Projekts so ausgewählt, dass deren Ergebnisse für Schule und Hochschule gleichermaßen von Interesse sein würden: angehende Studierende, die in einem mathematischen Studiengang an der Universität Würzburg eingeschrieben waren (wobei diese Auswahl sowohl fachwissenschaftliche als auch Lehramts-Studiengänge beinhaltet). Diese Wahl der Zielgruppe – „zwischen“ Schulabschluss und Universitätsstudium – platziert das Projekt über die primären Forschungsziele hinaus im Spannungsfeld des Übergangs Schule-Hochschule.

Zum Einsatz digitaler Werkzeuge

Der hohe begriffliche Anspruch des Analysisunterrichts, der aus der Entwicklung zentraler Begriffe (Grenzwert, Ableitung, Integral) und der Konstruktion der verwendeten algorithmischen Verfahren resultiert, führt laut Greefrath et al. (2016, S. 13) auch zu einer hohen Bedeutung digitaler Mathematikwerkzeuge. In der Durchführung algorithmischer Verfahren – zu Anfang „von Hand“ – sehen Greefrath et al. (2016, S. 13) ein Mittel, zu Grunde liegende Ideen und Grenzen von (solchen) Verfahren zu „reflektieren und über Verallgemeinerungen nachzudenken“. Hier zeigt sich bereits im Wortlaut und der Beschreibung durch die Autoren klar ein metakognitiver Bezug – in Form der Reflexion über Fachwissen und darüber hinaus in Form von Reflexion über das bisher Bekannte hinaus.

Digitale Werkzeuge können darüber hinaus in Bezug auf die Förderung und den Nutzen von Metakognition mehrere Zwecke erfüllen. Wie andere Formen der „Speicherung“ von Information – z.B. in Form von Verschriftlichungen (vgl. Kapitel 2.2.5) – können sie eine Form der Entlastung darstellen, die kognitive Ressourcen freigibt, da sich Daten nicht aktiv gemerkt werden müssen, sondern (bspw.) im Programm festgehalten und angezeigt werden können. Das Wissen um das Risiko einer kognitiven Belastung, die entsprechenden Möglichkeiten zur Entlastung und die absichtliche Nutzung dieser entlastenden Maßnahmen fallen in dem Bereich metakognitiven Wissens und metakognitiver Strategien (allgemeines deklaratives Personen- und Strategiewissen). Die damit verbundene „Sichtbar-Machung“ verschiedener Darstellungsformen – z.B. graphischer oder symbolischer Art – auf einem Niveau und in einer Menge, die sich „per Hand“ nicht realisieren lassen, stellt einerseits ebenfalls eine Entlastung dar, ermöglicht aber andererseits auch eine Externalisierung eigener Vorstellungen und damit die buchstäbliche Betrachtung derselben „von außen“. Eigene Kognition lässt sich – so wie bei anderen derartigen Methoden (Verschriftlichung, Skizzieren, etc.) – damit überdenken, analysieren, bewerten, überprüfen, ohne dass diese Vorgänge ausschließlich „im Kopf“ stattfinden müssen. Digitale Werkzeuge ermöglichen darüber hinaus das Ausprobieren von Ideen, deren Auswirkungen (oder deren Korrektheit) bspw. in DGS- oder CAS-Systemen direkt betrachtet und überprüft werden können. Dies kann als Stütze eigener Kognition, bzw. als Anregung neuer Ideen genutzt werden. Während die Generierung neuer Ideen, bzw. deren Analyse und Überprüfung meiner Ansicht nach bereits an sich metakognitiver Natur sind, handelt es sich vor allem beim gezielten Einsatz dieser Strategien – resultierend aus dem Wissen über Kognition (→ Personenwissen, Systemwissen) – um Strategiewissen und die Steuerung von Kognition.

In der Möglichkeit, Überlegungen, Rechnungen und die Durchführung von Verfahren mittels digitaler Werkzeuge zu überprüfen (Greefrath et al., 2016), besteht darüber hinaus eine Möglichkeit, die Wichtigkeit einer solchen Überprüfung zu erkennen und diese Praxis des Überprüfens, Kontrollierens und Anpassens ins eigene Arbeiten zu integrieren – auch dann, wenn keine digitalen Werkzeuge zur Verfügung stehen – was einen wichtigen Aspekt von Metakognition darstellt.

Greefrath et al. (2016, S. 14) sehen in der Verwendung digitaler Werkzeuge neben deren Nutzen auch eine Herausforderung, da die „Vielfalt der Darstellung und Visualisierung“ für Lernende eine hohe kognitive Belastung darstelle. Diese vielfältigen Reize zu überblicken und gedanklich zu ordnen, bzw. gezielt auszuwählen, auf welche Reize der Fokus der eigenen Aufmerksamkeit gelegt werden sollte, ist meiner Ansicht nach dennoch ebenfalls ein geeigneter Ansatzpunkt für eine metakognitive „Begleitung“ der entsprechenden Wahrnehmungs- und Analyseprozesse, die beim Betrachten solcher Darstellungen geschehen.

Strategien beim Umgang mit Mathematik

Im Folgenden werden exemplarisch drei metakognitiv motivierte Strategien vorgestellt, von denen die Teilnehmer_innen der empirischen Studie (vgl. Kapitel 3, Kapitel 4.1, Anhang) berichteten.

→ Das Überprüfen eines Ergebnisses:

Vor allem bei berechneten Ergebnissen besteht eine Möglichkeit der Überprüfung in deren Einsetzen in (bspw.) die Ausgangs-Gleichung oder den Ausgangs-Term. In der Regel liefert ein Auflösen, bzw. Umformen der Gleichung oder des Terms dann – je nach Wahrheitsgehalt der sich ergebenden Aussage – die Bestätigung oder Fehlerhaftigkeit des zu überprüfenden Ergebnisses.

Alternativ lässt sich die Rechnung erneut durchführen. Wird das gleiche Ergebnis erhalten wie zuvor, spricht dies für dessen Richtigkeit; andernfalls ist mindestens eine der beiden Rechnungen fehlerhaft.

In beiden Fällen bleibt offen, ob ein weiteres Mal gerechnet wird (z.B. mit dem Versuch, sich besser zu konzentrieren) oder ob stattdessen die bereits erfolgte(n) Rechnungen auf Fehler überprüft werden. Alternativ ließen sich die Ausgangsbedingungen und -überlegungen erneut überprüfen.

Offensichtlich spielen hier Strategie-Wissen, Aufgaben-Wissen und auf Basis dieser Überwachungs-, Beurteilungs- und Überwachungs-Prozesse eine Rolle, die wiederum der anschließenden Handlungssteuerung dienen. Gerade bei der Fehlersuche dürfte auch unbewusste Metakognition (→ Überwachung, Awareness) eine große Rolle spielen, auch wenn sie weniger steuerbar ist.

→ **Abgleich mit dem Kontext:**

Gerade, aber nicht ausschließlich, bei Aufgaben mit Realitäts-Bezug lässt sich ein berechnetes Ergebnis auf Plausibilität im Rahmen des Kontextes überprüfen. Existieren (realistisch bedingte) Grenzen und Zwangsbedingungen, können Größenordnung oder Vorzeichen eines Ergebnisses oft leicht als „unrealistisch“ oder „unmöglich“ eingeordnet werden; so z.B. die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs („Das Auto bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 75000 km/h.“) oder die Dimensionen eines Gebäudes („Das Haus hat eine Höhe von -5m und eine Länge von 18000m.“). Aus dem Physik-Unterricht ist erfahrungsgemäß häufig die Überprüfung auf korrekte Einheiten als Strategie bekannt, die zur gesuchten Größe passen müssen (Wird bspw. der Inhalt einer Fläche gesucht, muss ein Ergebnis in m statt m^2 als unpassend auffallen.). Aber auch innermathematisch lassen sich solche Abgleiche durchführen. Liegt bspw. ein Polynom 3. Grades als Zielfunktion vor, so dürfte auffallen, dass die Anzahl der errechneten Nullstellen 3 nicht übersteigen kann. Bei einer Exponential-Funktion können (unter Beachtung von Vor-Faktoren) negative Funktionswerte als unrealistisch ausgeschlossen werden. Hierbei spielen neben dem Aspekt „Awareness“ (derartige Diskrepanzen müssen auffallen, oder es muss bewusst nach ihnen gesucht werden) auch Aufgaben-Wissen und die bewusste Überwachung (s. zuvor) eine Rolle.

→ **Art der Fragestellung:**

Eine – im Hinblick auf das eigentliche Lernziel vielleicht weniger erwünschte – Strategie ist die Überprüfung eines Ergebnisses auf Passung mit der Fragestellung. (Hierdurch zeigt sich andererseits auch die Lesekompetenz von Lernenden sowie das Verständnis für die Bedeutung des Aufgaben-Kontextes.)

Wird durch die Formulierung der Frage bereits angedeutet, ob ein Ergebnis überhaupt existiert, bzw. wie viele Ergebnisse zu erwarten sind, so kann dies in die Planung, den eigentlichen Arbeitsprozess und die Überprüfung der Ergebnisse miteinbezogen werden. Z.B. könnte die Aufgabenstellung lauten: „Berechne das Maximum der Funktion!“, was darauf schließen lässt, dass diese nur ein einziges Maximum aufweisen wird. Ergeben sich bei Rechnung keines oder mehrere, so sollten – sofern dieser Umstand bemerkt (→

Awareness) wird, bzw. von Anfang an bedacht wurde (→ Awareness, Planung) – Maßnahmen zur Korrektur ergriffen werden.

In allen genannten Fällen bleibt die (metakognitive) Frage offen, welche Konsequenzen (metakognitiv aktive) Lernende aus ihren Erkenntnissen ziehen und welche Strategien sie für den Umgang mit diesen auswählen. Aufgaben-Wissen muss erneut aktiviert werden, um die ursprüngliche Planung auf Denkfehler zu überprüfen, das eigene Aufgaben-Verständnis muss rekapituliert werden und es muss geklärt werden, ob Fehler beim Umsetzen der gewählten Strategie gemacht wurden. Werden stattdessen Rechenfehler als Ursache angenommen, so muss geklärt werden, ob eine weniger rechenintensive Strategie existiert und vorgezogen werden sollte, oder ob ein Überprüfen oder Wiederholen der Rechnung ausreicht. In Klausursituationen ließe sich die Aufgabe – aus Zeitgründen – auch zugunsten einer anderen verwerfen.

2.3.3. Metakognitive Analyse der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Auf Grund der Forschungsziele der vorliegenden Arbeit, die sich vorwiegend auf Lernende im Bereich der Sekundarstufe II und der Hochschulbildung sowie auf das Themengebiet Analysis in der Sekundarstufe II beziehen, erfolgt die anschließende Analyse anhand der **„Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife** (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)“

https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Zu den Bildungsstandards für die Primarstufe und die anderen Schulformen bestehen ggf. entsprechende Unterschiede.

In den Bildungs-Standards für das Abitur 2012 wurden mathematische Inhalte, Kompetenzen und Leistungsbereiche von Lernenden mittels eines 3-Dimensionen-Rasters kategorisiert und

operationalisiert. Dabei systematisiert die Dimension „Leitideen“ grundlegende mathematische Konzepte und Ideen, die sich durch die gesamte (Schul-)Mathematik hindurchziehen. Die Dimension „Mathematische Kompetenzen“ systematisiert – wie der Name sagt – grundlegende Handlungs-Kompetenzen von Lernenden, die diese im Umgang mit Mathematik zu beherrschen haben. Die Dimension „Anforderungsbereiche“ unterteilt schließlich die Leistung von Lernenden in drei Niveaus. Alle drei Kategorien – Leitideen, Kompetenzen und Anforderungsbereiche – und ihre jeweiligen Unterkategorien beinhalten konkrete Beschreibungen der entsprechenden mathematischen Eigenschaften, bzw. Kompetenzen und der auf einem bestimmten Niveau im Rahmen dieser zu erbringenden Leistungen. Dabei ist zu beachten, dass alle drei Dimensionen aufeinander bezogen sind.

Die Kompetenz „*Mathematisch kommunizieren*“ erfordert sicherlich in hohem Maße metakognitive Fähigkeiten. Eigene (möglicherweise teils unbewusste) Informationen und Überlegungen zu komplexen mathematischen Inhalten müssen zur Weitergabe bewusst gemacht und in eine dem Gegenüber verständliche, verbale Form gebracht werden. Dies erfordert einerseits die Sondierung und Interpretation eigener Kognition, also Task- und Strategy-Wissen, andererseits die Beurteilung der eigenen Kognition auf Verständlichkeit für ein Gegenüber hin (und damit Person-Wissen sowohl in Bezug auf die eigene Kognition wie auch auf die anderer und auf den „Übersetzungsprozess“ zwischen beiden) und die entsprechende Steuerung der eigenen Kognition bei der Formulierung von Aussagen und der Reaktion auf Aussagen des Gegenübers.

Die Kompetenz „*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen*“ scheint auf den ersten Blick relativ wenig Metakognition zu beinhalten, doch hierbei dürften vor allem die Übersicht über das eigene Repertoire an Methoden und Strategien sowie die Beurteilung der Angemessenheit bestimmter „Elemente“ und mathematischer „Werkzeuge“ für gegebene Probleme im Vordergrund stehen. Dies wird insbesondere bei der Auswahl und Verwendung von (digitalen) Mathematikwerkzeugen (Zirkel und Lineal, DGS, CAS) deutlich, die von dieser Kompetenz ebenfalls mit abgedeckt werden.

Auch bei der Kompetenz „*Mathematische Darstellungen verwenden*“ tritt Metakognition vor allem bei der Übersicht über bekannte Darstellungsmöglichkeiten, deren Auswahl und Beurteilung auf Angemessenheit für gegebene Problemstellungen auf. Außerdem spielt bei der Verwendung verschiedener Darstellungen in einer Situation die „Übersetzung“ zwischen diesen, also die gedankliche Vereinbarung verschiedener Darstellungen und jeweils einander entsprechender Teil-Elemente der verschiedenen Darstellungen eine Rolle. Wie in Kapitel 4.3

und Kapitel 4.4.1 ausführlich dargelegt, spielt diese Übersetzung gerade im Analysisunterricht der Sekundarstufe II eine zentrale Rolle, in dem besonders häufig symbolische und graphische Darstellung (in Form von Funktionsgleichung und -graph) parallel verwendet werden, bzw. in dem die Übersetzung zwischen beiden und die Konstruktion der einen aus der anderen eine „klassische“ Aufgabenstellung darstellt. Hinzu kommen als weitere Darstellung die verbale/schriftliche Aufgabenstellung oder (reale) Sachverhalte, die beobachtet und/ oder beschrieben werden. Der zielorientierte Einsatz von Darstellungsarten erfordert deklaratives (spezifisches) Metawissen im Sinne eines Überblicks über Einsatzmöglichkeiten und Strategien.

Wie in Kapitel 4.4.1 aufgezeigt wird, wird der Umgang mit Darstellungen sogar als einer der wichtigsten Ansatzpunkte für Metakognition (im Bereich Analysis) gesehen.

Die Kompetenz „**Mathematisch modellieren**“ scheint prädestiniert für den Einsatz von Metakognition zu sein; sicher nicht zuletzt deshalb wurde Metakognition in der Vergangenheit bereits im Verbund mit mathematischer Modellierung untersucht (vgl. Kapitel 2.2.7). Die beim (mathematischen) Modellieren zu bewältigenden Übersetzungsvorgänge beim Übergang zwischen den verschiedenen Stufen des Modellierungskreislaufs, die Festlegung von Bedingungen und Grenzen im Rahmen der Modellierung, die nötige Interpretation mathematischer Ergebnisse im Hinblick auf den Real-Kontext und allgemein die Planung, Überwachung und Steuerung des gesamten Modellierungsprozesses erfordern ein hohes Maß an prozeduraler Metakognition sowie an metakognitivem Aufgaben- und Strategie-Wissen. Hier müssen zumeist relativ offene Bedingungen systematisiert werden, Situationen nach Ansatzpunkten und das mathematische Repertoire nach entsprechenden Methoden durchsucht werden. Dabei sind routinemäßige Berechnungen weniger gefragt; ein flexibles, durchdachtes und kreatives Vorgehen ist notwendig, das durch den Einsatz von Metakognition erleichtert, oder sogar erst ermöglicht wird.

Die Erläuterungen zur Kompetenz „**Probleme mathematisch lösen**“ lassen erkennen, dass auch hierbei metakognitive Aktivitäten und metakognitive Bewertung eine Rolle spielen, wie sich bereits bei der Analyse von Pólyas Arbeit (Kapitel 2.3.1) gezeigt hat. „Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden von

Lernenden gezielt ausgewählt und angewendet.“ Auf den metakognitiven Gehalt deuten im obigen Text bspw. Formulierungen wie „Auswählen“, „geeigneter“ „Heuristische“ sowie „gezielt“ hin, die sich direkt als Handlungen oder Fähigkeiten aus dem Bereich metakognitiven Strategiewissens, der damit einhergehenden Beurteilung von Strategien auf ihren Nutzen für gegebene Probleme hin und allgemeiner der Planung, Überwachung und Steuerung (s. prozedurale Metakognition) von Problemlöseprozessen unter Verwendung zuvor genannten Wissens interpretieren lassen.

Die Kompetenz **„Mathematisch argumentieren“** stellt naheliegenderweise hohe Anforderungen an die Metakognition Lernender. Mathematische Inhalte müssen nicht nur intuitiv anwendbar sein (was allerdings ebenfalls bereits – stärker unbewusste – metakognitives Wissen voraussetzen kann), sondern so gut verstanden worden sein, dass sie zur Argumentation herangezogen werden können. Dazu dürfte es notwendig sein, kausale Zusammenhänge zu durchdringen und mathematische Begriffe in ihrer Eigenschaft als Teil eines ganzen Begriffsnetzes mit ihren Beziehungen zu Nachbarbegriffen zu überblicken. Gegebene Situationen und Problemstellungen müssen analysiert werden können; es muss geklärt werden, welche Fragen sich aus ihnen ergeben, an welchen Stellen eines Arbeitsprozesses Unklarheiten bestehen, bzw. an welchen Stellen die Notwendigkeit einer Begründung besteht und wo Sachverhalte bereits „klar“ genug sind und keines weiteren Nachweises bedürfen. Offensichtlich sind hierbei metakognitive Reflexion über das „Wesen“ von Mathematik allgemein, begriffliche Zusammenhänge und (eigenes) Verständnis („Klar?“) notwendig; Task- und Strategy-Wissen müssen genutzt werden, um die mathematische Situation analysieren und eigene Aussagen begründen zu können und wieder sind (eigene) Argumentations-Ketten auf Angemessenheit und Stichhaltigkeit zu prüfen. Es ist zu beachten, dass sich auch diese Kompetenz nicht ausschließlich auf eigene Handlungen, sondern auch auf die Rezeption und Analyse der Argumentation anderer bezieht.

Der enge Zusammenhang zwischen Metakognition und Argumentation (genauso wie, bzw. verbunden mit Kommunikation) wird bspw. auch im Rahmen des Kategorisierungsschemas nach Cohors-Fresenborg et al. (2014) deutlich, das den Begriff Metakognition in Verbindung mit Diskursivität untersucht und systematisiert (vgl. Kapitel 2.3.1).

Bei der Kompetenz **„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“** scheint aus metakognitiver Sicht ebenfalls ein Überblick über das System Mathematik mit seinen Begriffen, Zusammenhängen und den zugehörigen Methoden und Strategien von Bedeutung zu sein, der deren sinnvolle und angemessene Auswahl in

Abhängigkeit vom jeweiligen Problem ermöglicht. Fähigkeiten wie die Beurteilung, ob der Einsatz bestimmter „Elemente“, bzw. Hilfsmittel notwendig ist und welche sich eignen, sowie die Beurteilung von deren Möglichkeiten und Grenzen dürften wichtig sein. Insbesondere der Einsatz digitaler Werkzeuge ermöglicht zusätzlich die „Auslagerung“ von Kognition auf ein externes Medium, das die Sichtbarmachung und Speicherung kognitiver Inhalte ermöglicht. Dies stellt – wie zuvor ausführlicher erläutert (Kapitel 2.2.5 und Kapitel 2.3.2) – eine Möglichkeit zur Förderung von Metakognition dar, da diese einerseits bei der Nutzung und Bewertung solcher Hilfsmittel nötig ist und die Externalisierung andererseits die „Betrachtung“ der eigenen Kognition ermöglicht, ohne dass diese ausschließlich gedanklich stattfinden muss.

Bei Analyse der drei Anforderungsbereiche lässt sich argumentieren, dass der steigende Schwierigkeitsgrad von Bereich I über Bereich II hin zu Bereich III unter anderem im Übergang von einem eher routineartig geprägten hin zu einem metakognitiv orientierten Umgang mit mathematischen Inhalten und den Kompetenzen des KMK-Modells besteht. Während vor allem in Bereich I der eingeübte Umgang mit vertrauten Inhalten betont wird, betont Bereich III Fähigkeiten und Handlungen wie die gezielte Auswahl und Beurteilung angemessener Strategien, einen selbstständigen Umgang mit dem Gelernten und die flexible Anpassung bekannter Strategien an unbekannte Situationen und Problemstellungen und ggf. die Entwicklung neuer Methoden auf Basis vorhandenen Wissens. Offensichtlich kommen hier Vorgänge aus dem Bereich der prozeduralen Metakognition zum Tragen – die Analyse unbekannter Situationen unter Zuhilfenahme bekannter Informationen, die Entwicklung von Lösungsansätzen und -strategien unter Rückgriff auf das eigene Strategie-Repertoire und deren Überwachung und ggf. Modifizierung während der Durchführung, an die sich optimalerweise Reflexionsphasen anschließen, in denen Erkenntnisse verarbeitet und ins bestehende Wissensnetzwerk eingeordnet werden. Ein Überblick über größere Begriffsnetze und deren Wirkzusammenhänge wird in Bereich III gefordert sowie die Fähigkeit, vorhandenes Wissen zur Argumentation und Begründung einzusetzen.

Während, wie dargelegt, für die Dimensionen „Kompetenzen“ und „Anforderungsbereiche“ einerseits ein offensichtlicher und direkter Bezug zur Metakognition erkennbar ist und andererseits bereits Literatur und Forschungsergebnisse zur Verbindung von (vorwiegend prozeduraler) Metakognition mit verschiedenen Kompetenzen (s. Kapitel 2.2.8) existieren, fehlt eine solch offensichtliche oder bereits untersuchte Verbindung zwischen

Metakognition und der dritten Dimension des KMK-Modells, „Leitideen“. Dies dürfte relativ wenig erstaunen, da sowohl Kompetenzen als auch Anforderungsbereiche bereits in den durch die KMK bereitgestellten Beschreibungen ausdrücklich Aspekte von prozeduraler Metakognition aufweisen. Nicht zuletzt ist dieser Anteil/ diese Kategorie von Metakognition sicher durch ihre Operationalisierbarkeit einerseits greifbarer und andererseits leichter im Versuch mit Lernenden zu beobachten. Zudem sollte es ohnehin schwierig sein, Kompetenzen, bzw. kognitive Vorgänge, die über bloße Routine-Anforderungen hinausgehen, ohne die Verwendung von Metakognition durchzuführen, bzw. zu beschreiben, da sich Kognition und Metakognition hierbei theoretisch sehr schwer trennscharf voneinander abgrenzen lassen.

Da die Leitideen konkret fachliche Inhalte – und damit Fachwissen – beschreiben, sollte eine potentielle Verbindung zu metakognitiven Aspekten hierbei vor allem im Bereich deklarativen Metawissens liegen. Auch hier ist eine trennscharfe Unterteilung von kognitiven Vorgängen in Kognition, bzw. Fachwissen einerseits und Metakognition andererseits letztlich nicht sinnvoll möglich, da „echtes“ Fachwissen und mathematisches Verständnis eben gerade über das Beherrschen simpler Routine-Prozesse und auswendiggelerntes Faktenwissen hinausgeht. Metakognitive Prozesse, die die Beurteilung, gezielte Strategieauswahl, Adaption an neuartige Problemstellungen erlauben, dürften gerade zentrales Element einer gut ausgeprägten Fachkompetenz sein. Allerdings wird dieses Fachwissen nicht durch die Leitideen allein, sondern durch deren Beherrschung in Form der Kompetenzen des Modells dargestellt. Hier stellt sich die Frage, ob insofern eine direkt mit bestimmten Leitideen, bzw. bestimmten fachlichen Inhalten verknüpfte – domänenspezifische – Form von Metakognition als solche überhaupt existiert, ob bestimmte Aspekte von Metakognition sich also von Leitidee zu Leitidee, von Begriff zu Begriff unterscheiden, oder ob Metakognition hingegen – zumindest innerhalb der Mathematik selbst – als domänenübergreifend zu sehen ist. Dass domänenübergreifende Formen von Metakognition existieren, bzw. dass Metakognition in ihrer „oberflächlichsten“ Form mit Sicherheit domänenübergreifend ist, scheint naheliegend.

[Wie in Kapitel 2.1.6 angesprochen, ist die Frage nach der Allgemeinheit oder Spezifität von Metakognition allerdings bis heute nicht geklärt.]

Allerdings lassen sich innerhalb der Mathematik Aspekte ausmachen, die sich zumindest als typisch bezeichnen lassen. Darüber hinaus lassen sich Metakognition, wie sie beim Betreiben von Mathematik zum Tragen kommt, bzw. metakognitives Wissen, wie es beim Betreiben von Mathematik notwendig ist, kaum losgelöst vom mathematischen Inhalt betrachten, bzw. ausüben, bzw. besitzen. Entsprechend wird die Integration metakognitiven Trainings in den

Mathematikunterricht gefordert (vgl. Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2). Daher wird es in dieser Arbeit als sinnvoll erachtet, die Verbindung von Metakognition zu bestimmten Leitideen, bzw. mathematischen Begriffen und Handlungen herzustellen und exemplarisch aufzuzeigen, um ein besseres Verständnis für die Wirkweise von Metakognition einerseits und für die didaktische Aufbereitung entsprechender Begriffe im Unterrichts- oder Vorlesungsgeschehen andererseits zu erhalten. Dies geschieht im Rahmen theoretischer Überlegungen in Kapitel 2.3.4 und Kapitel 4.4 anhand zentraler Begriffe der Analysis. Vor allem der zweite Teil der im Rahmen des Projekts durchgeführten qualitativen Interviews wurde unter anderem im Hinblick auf die Verbindung Analysis – Metakognition hin entwickelt.

2.3.4. Vorstellung der im Rahmen der empirischen Erhebung verwendeten Extremwertaufgabe

Die folgende beispielhafte Analyse hat zum Ziel, einen exemplarischen Überblick zu geben, wie Metakognition in einem mathematischen Kontext zum Ausdruck kommen könnte. Hierfür wurde eine Standard-Aufgabe aus dem Analysis-Unterricht ausgewählt, die außerdem auch im Rahmen der empirischen Erhebung verwendet wurde. An dieser Stelle wird auszugsweise dargestellt, auf welche Art und Weise Lernende bei der Bearbeitung einer solchen Problemstellung metakognitiv aktiv werden könnten.

Abbildung 1 zeigt die Graphik zur folgenden Aufgabenstellung (Götz, Schmid und Weidig, 2010, S. 206, Aufgabe 11), die im Rahmen der in Kapitel 3 vorgestellten empirischen Erhebung verwendet wurde:

Bei einer rechteckigen Glasplatte ist eine Ecke abgebrochen. Aus dem Rest soll eine rechteckige Scheibe mit möglichst großem Flächeninhalt herausgeschnitten werden.

a) Wie ist der Punkt P zu wählen?

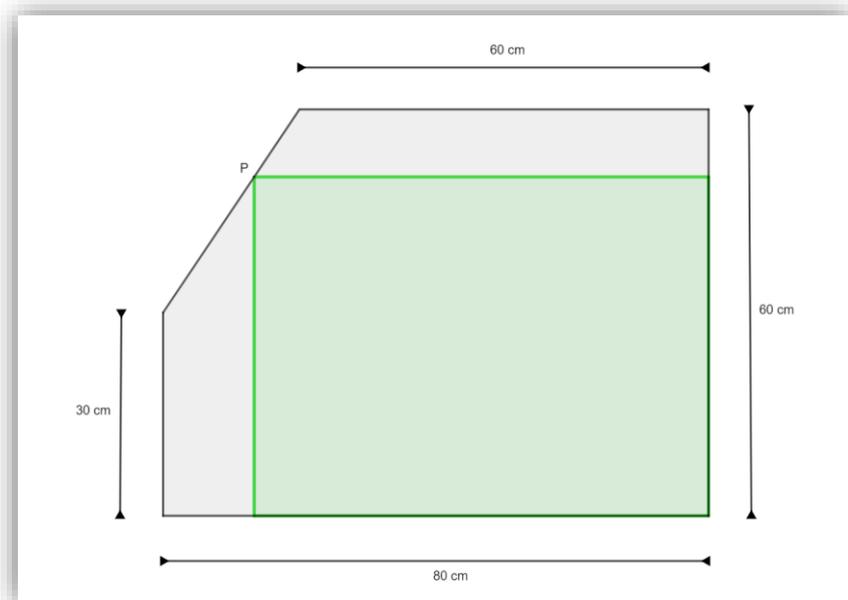


Abbildung 1: Ausgangssituation eines Optimierungsproblems

Diese Aufgabe lässt sich durch die Einführung eines geeigneten Koordinatensystems und die Konstruktion einer Geraden, die den variablen Punkt $P(x_0|y_0)$ enthält, was wiederum zu einem Optimierungsproblem führt, bei dem eine Polynomfunktion zweiten Grades maximiert werden muss, lösen. Dies lässt sich entweder mit Methoden der Differentialrechnung durchführen (wie dies gängigerweise in der Sekundarstufe II geschieht). Alternativ kann ohne Rückgriff auf die Differenzialrechnung durch Umformen der Zielfunktions-Gleichung in Scheitelpunktform und entsprechendes Ablesen der Scheitelwerte vorgegangen werden (was im Unterricht bereits vor Einführung der Differentialrechnung für Polynome zweiten Grades durchgeführt wird).

Hiermit wurde für die empirische Erhebung bewusst eine Aufgabe ausgewählt, die zu einer quadratischen Zielfunktion führt, um den Teilnehmer_innen der Erhebung die Möglichkeit zu geben, metakognitiv eine Strategie aus dem Bereich der Differenzialrechnung mit einer Strategie zu **vergleichen**, die ohne Methoden der Differenzialrechnung auskommt.

Zusätzlich ist im Anschluss an die beschriebene Vorgehensweise zu beachten, dass das so erhaltene Extremum außerhalb des für den Realkontext relevanten Bereichs liegt und die tatsächliche Lösung der Aufgabe nach **Erkennen** dieser Tatsache im Berechnen des entsprechenden Rand-Extremums besteht (→ Überprüfung auf Plausibilität im Kontext, Awareness, vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2).

Welche Aspekte von Metakognition im konkreten Fall tatsächlich aktiviert werden und zu welcher Zeit, an welcher Stelle des Arbeits- und Denkprozesses dies geschieht, hängt von verschiedenen Faktoren ab, die beim Lesen der folgenden Analyse mitgedacht werden sollten. Mit Aspekten sind hierbei die eingangs (vgl. Kapitel 1.4) erläuterten und später in Kapitel 4.2 im Rahmen des vorgestellten Kategoriensystems vertieften und erweiterten prozeduralen, deklarativen und unbewusst-impliziten Komponenten von Metakognition gemeint sowie deren Zusammenwirken. Wird bspw. eine Aufgabe (ein Aufgabenteil) als **zu schwierig**, bzw. unter gegebenen Umständen (→ Überwachung unter Berücksichtigung von Aufgabenwissen, vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2) **nicht machbar** (→ Beurteilung eigener Fähigkeiten und Beurteilung von Schwierigkeitsgraden, vgl. Kapitel 4.3 und Anhang) **eingestuft**, so wird als Folge dieser metakognitiven Einschätzung der weitere Arbeitsprozess (inklusive entsprechender kognitiver und metakognitiver Prozesse möglicherweise ganz **eingestellt** (→ Anpassung von Strategien). Sind benötigtes (Sach-)Wissen/ benötigte Kompetenzen (→ Beurteilung, welche Informationen notwendig sind, Analyse, Aufgaben- und Strategiewissen, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.3 und Anhang) und benötigte Informationen bereits vorhanden (weil sie bspw. kürzlich behandelt und eingeübt wurden oder von Seiten einer Lehrkraft beigesteuert

werden) und werden als unkritisch und ausreichend **beurteilt**, so hat diese metakognitive Einschätzung möglicherweise zur Folge, dass der entsprechende Arbeitsprozess – vorerst – ohne weitere (bewusste) metakognitive Begleitung abläuft, da weder ein „**Durchsuchen**“ eigener Erinnerungen (→ Steuerung eigener Kognition bzw. Wissen über eigenes Wissen, vgl. Kapitel 4.2) noch ein kritisches **Reflektieren** (→ Reflexion eigene Wissens, vgl. Kapitel 4.2) dieser für notwendig (→ Beurteilung, ob bestimmte kognitive Handlungen notwendig sind, Überwachung von Denkprozessen, Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2 und Anhang) gehalten werden. Individuelle und situationsbedingte Unterschiede ziehen ggf. weitere Unterschiede im (metakognitiven) Verlauf einer Aufgabenbearbeitung nach sich, sodass die folgende Analyse als eine Sammlung möglicher, potentiell ablaufender (Aspekte von) Metakognition interpretiert werden sollte.

Eine metakognitive Begleitung des Problemlösevorgangs könnte mit dem Verschaffen eines gedanklichen Überblicks (→ Analyse, Systemwissen, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2) über die Aufgabenstellung beginnen, also damit, Informationen aufzunehmen, zu analysieren und zu systematisieren und sie mit eigenem Wissen und eigenen (**metakognitiven**) **Erfahrungen** in Beziehung zu setzen (→ Analyse vorliegender Informationen und eigener Erinnerungen bzw. eigenen Aufgabenwissens); daraufhin Beziehungen zwischen zuerst scheinbar unzusammenhängenden Informationen herzustellen (→ Analyse, Aufgaben-, Systemwissen) und dadurch der Aufgabe einen Sinn zu geben bzw. ihren Zweck zu begreifen (→ Sensitivity und Sinn, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2), was daraufhin (z.B. durch Assoziationen oder durch aktives Suchen nach vergleichbaren Aufgaben) zu ersten Ideen bzgl. einer Lösungsstrategie führen könnte. Lernende müssten feststellen, ob sie Informationen und die übergreifende Problematik der Aufgabe verstehen (→ Analyse, Awareness, Sensitivity und Sinn, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2), um bspw. zu entscheiden, ob ihnen ausreichend Informationen zu deren Bewältigung zur Verfügung stehen (→ Beurteilung, Aufgabenwissen). Es muss geklärt werden, inwieweit Erinnerungen vollständig abgerufen werden können (→ Steuerung eigener Kognition bzw. Wissen über eigenes Wissen, vgl. Kapitel 4.2), wie gut aussichtsreiche Strategien beherrscht werden (→ Beurteilung eigener Fähigkeiten, Strategiewissen, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2) und ob und wie ggf. Lücken im eigenen Wissen geschlossen werden und Strategien auf Basis des verfügbaren Wissens neu entwickelt werden können (→ Analyse und Planung, Wissen über Wissen, Strategiewissen). Im Anschluss daran könnten modellierende, „**übersetzende**“ Aktivitäten begonnen werden (→ Übersetzungsprozesse, Einordnung, vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2). Informationen müssen unter Rückgriff auf **Aufgabenwissen**

mathematisiert werden, Elemente der Aufgabe müssen bspw. durch Variablen und Parameter repräsentiert werden.

Die Forderung nach einer „möglichst großen Fläche“ muss – mathematisch gesehen – als Suche nach dem Maximum einer Funktion erkannt werden (→ Übersetzungsprozesse, Einordnung, vgl. Kapitel 1.4 und Kapitel 4.2), was die Notwendigkeit einer Zielfunktion und damit die Einführung eines geeigneten Koordinatensystems nahelegen sollte. Es spielen also sowohl – vor allem unbewusste – Aspekte von Metakognition eine Rolle, wie bspw. die (automatische) Aktivierung **metakognitiver Erfahrungen** im Zusammenhang mit dem vorliegenden Problem, die entsprechend vorhandenes **Wissen reaktivieren** und Assoziationen (→ Awareness) auslösen sollte. Andererseits sollte die Reaktivierung von Wissen durch aktive **Reflexion** und „Durchsuchen“ eigener **Erinnerungen** auch bewusst **gesteuert** werden.

Für die hier durchgeführte Analyse wird als Ursprung eines Koordinatensystems der linke untere Eckpunkt des in der Graphik sichtbaren Rechtecks gewählt. Hierbei sollte **erkannt** werden, dass die Benennung der entsprechenden Eckpunkte zu einer Erleichterung der Kommunikation und der folgenden Berechnungen führen (→ Strategiewissen, Planung) und durch den damit verbesserten Überblick zusätzlich die kognitive Belastung reduzieren kann (→ Personenwissen, Strategiewissen).

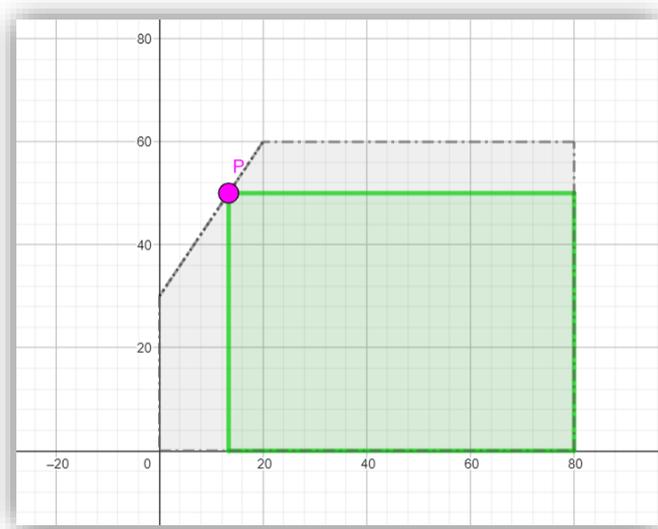


Abbildung 2: Einführung eines Koordinatensystems

Hierzu ist es kann die „Problematik“ erkannt werden (\rightarrow Aufgaben-, Strategiewissen, Überwachung, Awareness – Erkennen, dass die bisherige Vorgehensweise sonst nicht zu einem Fortschritt führt, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2), dass zwei der Eckpunkte nur in Abhängigkeit von Variablen angegeben werden können (\rightarrow Aufgabenwissen, Systemwissen). Dies wiederum hängt mit der Bedeutung des Punktes P zusammen, was (spätestens jetzt) zu einer **Analyse** der Zusammenhänge, bzw. der Abhängigkeit der Fläche von einem variablen Punkt, führen sollte. Dieser wird in der hier durchgeführten Analyse als $P(x_p|y_p)$ gewählt.

Nach Benennung der entsprechenden Punkte und Wahl des Koordinatensystems stellt sich die Aufgaben-Graphik nunmehr dar, wie folgt:

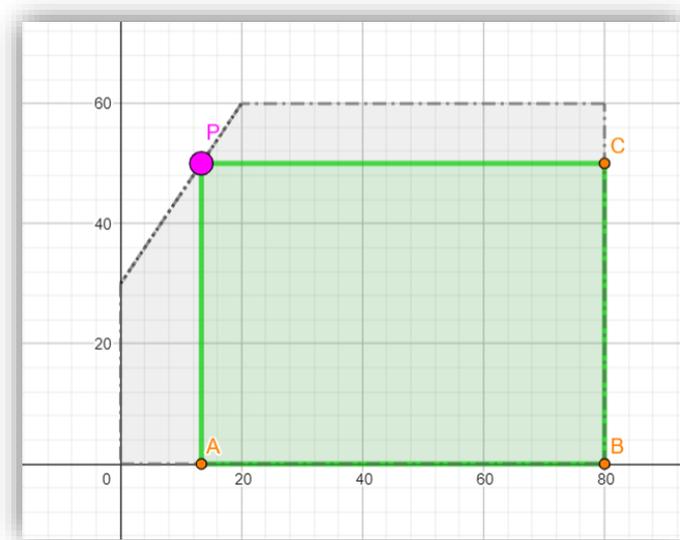


Abbildung 3: Wahl relevanter Punkte

Im gewählten Koordinatensystem ergeben sich für die Eckpunkte die folgenden Koordinaten:

$$P(x_p|y_p), A(x_0|0), B(80|0), C(80|y_0)$$

Die Wahl eines Koordinatensystems kann als rein fachliche (kognitive) Strategie interpretiert werden, doch lässt sich annehmen (vgl. Kapitel 2.1.5), dass hinter dieser Strategie metakognitive Überlegungen stehen. Es muss bekannt sein, bzw. erkannt werden, dass Wissen über derartige Strategien vorliegt und darüber, wie sie die Lösung einer solchen Aufgabe begünstigen (\rightarrow Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen, Analyse); Strategien müssen ggf.

verglichen und dem Problem entsprechend ausgewählt werden (→ Strategiewissen, Planung). Möglicherweise handelt es sich bei dieser Strategie lediglich um ein „Ausprobieren“, bei dem noch nicht klar ist, ob diese Strategie zielführend ist; **metakognitive Erfahrungen**, die dennoch (also ohne sichere Begründung) zu einem „Gefühl“ führen, ob die Strategie von Nutzen sein kann, könnten beim Auswahlprozess helfen.

(An dieser Stelle sei nochmals angemerkt, dass hier nicht von der routine-mäßigen Bearbeitung durch eine Expertin ausgegangen wird, sondern von der Bearbeitung durch Lernende. Entsprechende Beurteilungen als nützlich, korrekt, effizient, etc. werden also ggf. unter Unwissen, bzw. „unvollständiger“ Erinnerung vorgenommen. Dies zeigt sich später bei der Verwendung dieser Aufgabe im Rahmen der Erhebung mit Studienanfänger_innen.)

Nach oder aber schon vor der Wahl des Koordinatensystems kann **erkannt** werden, dass sich die Problemstellung mit Hilfe von Methoden aus der Analysis lösen lassen könnte (→ Aufgaben- und Strategiewissen, Awareness). Ein entsprechender **Überblick über das System** Mathematik und seine Mechanismen kann dazu führen, dass die Strategie des Aufstellens einer Funktion direkt im Zusammenhang mit einem Koordinatensystem entwickelt wird, oder dass sie nach einer eher heuristischen Entscheidung für Letzteres „entdeckt“ wird, da aus **Erfahrungen** geschlossen wird, dass Koordinatensysteme sozusagen häufig mit Funktionen „einhergehen“. Auch im nächsten Schritt ist denkbar, dass der Wunsch eine Funktion aufzustellen, die Frage (im Hinblick auf eigenes Wissen) auslöst, was durch diese beschrieben werden soll, was bspw. zu einer (erneuten) **Analyse** der Fragestellung führen könnte. Alternativ könnte umgekehrt der Wunsch, die relevante Fläche zu beschreiben, zu Überlegungen bzgl. einer geeigneten Strategie und eines geeigneten mathematischen Mittels führen (→ Strategiewissen, z.B. in Bezug auf die Verwendung von Hilfsmitteln, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2, Anhang), was zur Idee der Zielfunktion führen kann.

Für die zu maximierende Fläche A_p ergibt sich: $A_p(x) = |AB| \cdot |BC| = (80 - x_p) \cdot (y_p)$

Spätestens hier stellt sich die Frage, wie der Punkt P nutzbar gemacht werden kann (→ Analyse, Überwachung, Aufgaben- und Strategiewissen), der bisher nur durch die Koordinaten x_p und y_p beschrieben ist.

Es muss erkannt werden, dass diese in Abhängigkeit voneinander stehen, was sich durch die Lage des Punktes auf der Geraden zeigt, auf der die „Bruchkante“ der Glasplatte liegt.

Für diese Gerade g ergibt sich die folgende Gleichung: $g(x) = \frac{3}{2}x + 30$

Einsetzen ergibt mit $y_p = g(x_p) = \frac{3}{2}x_p + 30$:

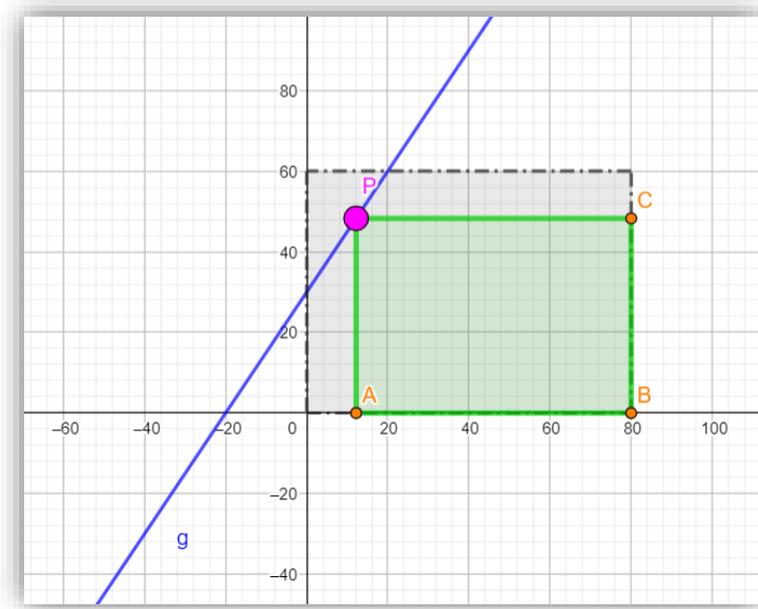


Abbildung 4: Gerade

$$\begin{aligned} A_p(x) &= |AB| \cdot |BC| = (80 - x_p) \cdot (y_p) = (80 - x_p) \cdot \left(\frac{3}{2}x_p + 30\right) = \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 90x + 2400 \end{aligned}$$

Des Weiteren müssen Eigenschaften der angestrebten Zielfunktions-Gleichung mit Eigenschaften ihres Graphen verbunden und mit dem Ziel der Aufgabe in Beziehung gesetzt werden (\rightarrow Übersetzungsprozesse, Aufgabenwissen), was schließlich zum Erstellen der Zielfunktion mit dem Ziel der Flächen-Beschreibung führt (\rightarrow Planung, Strategiewissen). Ggf. können hier weitere strategische Überlegungen angestellt werden bzgl. der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems. Hierbei käme der metakognitive Aspekt, kognitiven Aufwand zu reduzieren (\rightarrow Personen- und Strategiewissen), indem eine möglichst „geschickte“ Wahl (\rightarrow Beurteilung, Aufgaben- und Strategiewissen) getroffen wird, zum Tragen.

Gleichung der Zielfunktion: $A_p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 90x + 2400$

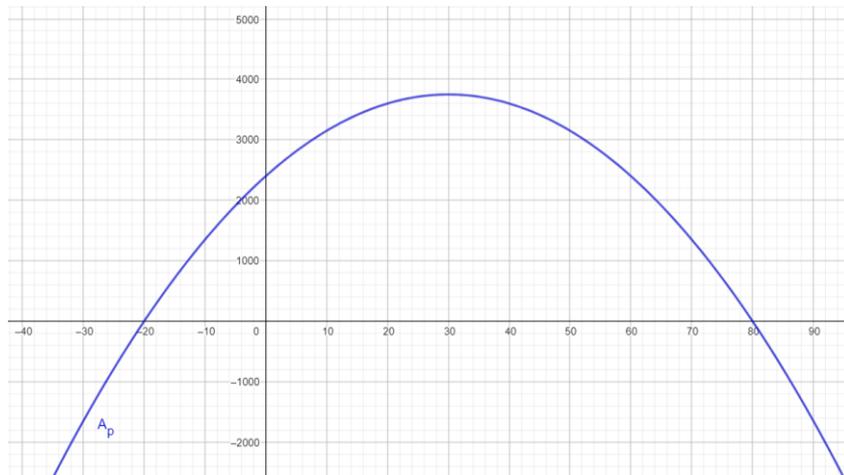


Abbildung 5: Graph der Zielfunktion

Analyse der Aufgabenstellung, **Planung** bzgl. des Ziels („möglichst große Fläche“) und dessen mathematischer Entsprechung („Extremwertproblem“) können mit **Übersetzungs- und Transferprozessen** bzgl. der verschiedenen Darstellungsarten sowie bzgl. bekannter Aufgabentypen (→ Aufgabenwissen, Übertragung von Strategien, Strategiewissen) einhergehen. Der Aufgabenkontext muss auf seine mathematische Bedeutung hin untersucht werden, damit die mathematische Zielstellung klar wird. An dieser Stelle können mögliche Konsequenzen **antizipiert** und **reflektiert** werden, was zu Erwartungen (→ Aufgabenwissen) führt, die im Verlauf der Berechnung zum Abgleich (→ Überwachung, Überprüfung auf Plausibilität) dienen und die – sofern sie nicht erfüllt werden – bemerkt werden können (→ Awareness) und zu Anpassungen (→ Steuerung) führen sollten.

Die Maximumeigenschaft der Funktion an sich kann mit einer horizontalen Tangente des Graphen, einer Nullstelle der Ableitungsfunktion und schließlich mit einem Schnitt deren Graphens mit der x-Achse in Verbindung gebracht werden, um aus diesen Zusammenhängen eine Berechnungsstrategie entwickeln zu können. Aus **Reflexionen** über diese Beziehungen (in Verbindung mit Aufgaben- und Strategie-Wissen) werden also **planerisch** entsprechende Handlungen abgeleitet, was dem **steuernden Aspekt** von Metakognition entspricht.

Für die Studienanfänger_innen, die im Rahmen der in Kapitel 3 und Kapitel 4.1 vorgestellten Studie interviewt wurden, sollten die entsprechenden Ideen noch bis zu einem gewissen Grad vertraut gewesen sein. Dadurch dürften für sie sowohl die Untersuchung (→ Analyse) der

Aufgabe auf „Vertrautes“, die Aktivierung von entsprechenden Erinnerungen (→ Steuerung) oder der Vergleich mit ähnlichen Aufgabentypen (→ Aufgaben- und Strategiewissen) und die Bemühung, diesem Wissen einen Sinn (→ Sensitivity und Sinn) zu geben, im Vordergrund gestanden haben. Hieran kann sich auch die Neuentwicklung von – (teils) vergessenen – Strategien auf Basis dieser Erinnerung und der **Analyse** im Interview anschließen.

Ableiten der Zielfunktion A_p führt zu:

$$A'_p(x) = \frac{d}{dx} A_p(x) = -3x + 90$$

Die Forderung $A'_p(x_0) \stackrel{!}{=} 0$ führt zu: $x_0 = 30$

Weiter gilt: $A_p(30) = 3750$

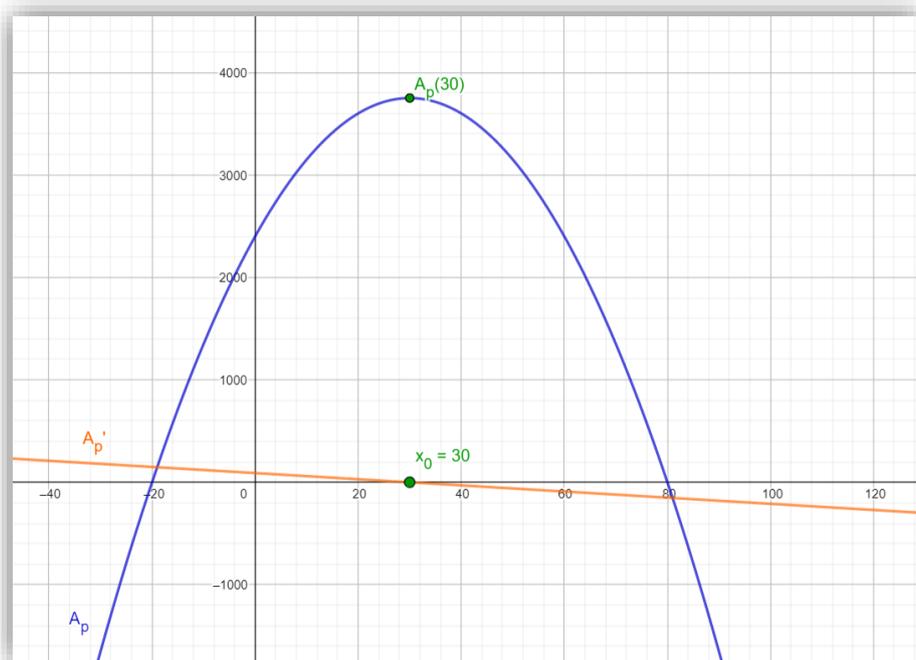


Abbildung 6: Graphen von Zielfunktion und Ableitung

Bereits hier kann (und sollte) **auffallen** (→ Awareness), dass die potentielle Extremstelle $x_0 = 30$ sich nicht innerhalb des relevanten Definitionsbereichs befindet, was auf ein Randextremum (→ Aufgabenwissen) schließen lässt. Diesbezügliche Erinnerungen könnten außerdem durch

bewusstes „Suchen“ aufgerufen werden, da eine **Überprüfung** des nunmehr erreichten Zwischenergebnisses auf **Plausibilität** sinnvoll sein könnte.

Fällt dieser Umstand nicht auf, so kann mit der Überprüfung des potentiellen Extremums fortgefahren werden.

Sobald die Nullstellen der Zielfunktion berechnet sind, sollte auf Grund begleitender metakognitiver **Überwachung** der Gesamtprozess überblickt werden, worauf bemerkt (→ Awareness) werden sollte, dass weitere Schritte auf dem Weg zum Gesamtergebnis nötig sind (→ Überwachung, Analyse, Reflexion, Aufgaben- und Strategiewissen). Es muss überprüft werden, ob es sich bei den gefundenen potentiellen Extremstellen tatsächlich um solche oder aber um Kandidaten für Sattelpunkte handelt. Dies wiederum macht die **Reflexion** und den Vergleich der zur Auswahl stehenden Strategien (→ Strategiewissen) nötig. In Frage kommen hier bspw. die Überprüfung der ersten Ableitung auf einen Vorzeichenwechsel (VZW) oder die Berechnung der zweiten Ableitung und die Überprüfung von deren Vorzeichen an den entsprechenden Stellen. Bspw. könnte eine der beiden Strategien als weniger aufwändig oder als (subjektiv) weniger fehleranfällig **beurteilt** und deshalb der anderen vorgezogen werden (→ Strategiewissen). Im Fall der zweiten Ableitung besteht das Risiko, dass keine abschließende Aussage getroffen werden kann (für den Fall $f''(x_0) = 0$). Weiterhin müsste in solche Vergleiche auch metakognitives **Personenwissen** miteinbezogen werden, um bspw. diejenige(n) Strategie(n) zu bevorzugen, die erfahrungsgemäß (→ metakognitive Erfahrungen und Wissen über Schwierigkeitsgrade und eigene Fähigkeiten) weniger fehleranfällig (→ Personen- und Aufgabenwissen) sind, oder die bereits besser eingeübt wurden.

An dieser Stelle wird die Überprüfung mittels Berechnung der Zweiten Ableitung exemplarisch durchgeführt.

Für die zweite Ableitung der Zielfunktion gilt:

$$A_p''(x) = \frac{d}{dx} A_p'(x) = -3$$

$A_p''(x_0) = -3 < 0$ ist hinreichende Bedingung dafür, dass es sich bei x_0 um eine Extremstelle und bei $(x_0 | A_p(x_0)) = (30 | 3750)$ um ein lokales Maximum der Zielfunktion handelt.

Hierbei kann **erkannt** (→ Awareness) werden, dass sich dieses Zwischenergebnis mit den Erwartungen deckt, die sich aus dem Aufgabenkontext ergeben – dass ein Maximum gefunden werden sollte (→ Systemwissen, Plausibilität, Überwachung). In der vorliegenden Aufgabe liegt dieses, wie bereits angesprochen, allerdings außerhalb des relevanten Bereichs, sodass es für die Lösung der Aufgabe nicht in Frage kommt.

An dieser Stelle könnten die bisherigen Resultate reflektiert (→ Überwachung, Reflexion) und mit der ursprünglich geplanten Strategie sowie mit den antizipierten Ergebnissen in Beziehung gesetzt werden. Dabei könnte bspw. auffallen (→ Awareness, Strategiewissen, metakognitiver Überblick), dass aus den gewonnenen Extremstellen noch Funktionswerte berechnet werden müssen, um die Größe der gewonnenen Fläche angeben zu können (→ Aufgabenwissen).

Ein weiteres Beispiel für metakognitive **Aufmerksamkeit** (→ Awareness) und/ oder **Überwachungsvorgänge** wäre das Einbeziehen von zusätzlichen Informationen in den Lösungsprozess; so deutet bspw. die Formulierung der Aufgabenstellung („größtmögliche Fläche“) bereits an, dass lediglich ein einziges Maximum zu erwarten ist. Ergeben sich bei der Berechnung keine oder mehrere potentielle Extremstellen, deren Funktionswerte sich als Maxima erweisen, sollte metakognitiv aktiven Lernenden auffallen, dass dieses Ergebnis im Sinne der Aufgabenstellung nicht **plausibel** sein dürfte, was eine Überprüfung und Korrektur der eigenen Überlegungen (→ Überwachung, Analyse, Reflexion, Awareness) anregen könnte (z.B. die Suche nach Denkfehlern).

Eine Besonderheit der ausgewählten Aufgabe ist die Möglichkeit, mittels Scheitelpunkt-Bestimmung zum Ergebnis zu kommen, indem ggf. die Methode der quadratischen Ergänzung durchgeführt wird. Letzteres stellt eine Methode dar, mit der bereits in niedrigeren Klassenstufen vor Einführung der Differenzialrechnung Extremwertprobleme exakt gelöst werden können (also nicht durch bspw. die Verwendung von Näherungsverfahren).

Dies bietet die Möglichkeit, dass **Aufgaben- und Strategiewissen** angewendet wird, um zwischen beiden möglichen Strategien zu unterscheiden und eine der beiden auszuwählen, oder bspw. beide durchzuführen, um wechselseitig Ergebnisse zu **überprüfen**. Im Rahmen der entsprechenden **Bewertungsprozesse** (z.B. bzgl. Durchführbarkeit, Aufwand, „Vertrautheit“, etc.) muss dabei die zentrale Bedingung für das Vorgehen der Quadratischen Ergänzung erkannt werden, bzw. erinnert werden: Bei der Zielfunktion muss es sich um ein Polynom

zweiten Grades handeln. Ist dies – wie hier – der Fall, so lässt sich die Gleichung der Zielfunktion mittels quadratischer Ergänzung unter Verwendung der Binomischen Formeln in die sogenannte Scheitelpunktform überführen, an der der Scheitelpunkt (und damit der Extrempunkt) des Funktionsgraphen direkt abgelesen werden kann. Entsprechend bietet sich die Methode der Scheitelpunkt-Bestimmung besonders dann an, wenn sich die Funktionsgleichung bereits in Scheitelpunktform befindet, was – metakognitiv – als Vorteil im Hinblick auf den (kognitiven) Berechnungsaufwand erkannt werden kann (→ Awareness, Strategie- und Personenwissen).

Alternativer Lösungsweg mittels quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} A_p(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 90x + 2400 = -\frac{3}{2}(x^2 - 60x) + 2400 \\ &= -\frac{3}{2}(x^2 - 2 \cdot 30x + 900 - 900) + 2400 \\ &= -\frac{3}{2}((x - 30)^2 - 900) + 2400 \end{aligned}$$

Also:

$$A_p(x) = -\frac{3}{2}(x - 30)^2 + 3750$$

Als Scheitelpunkt ergibt sich damit:

$$S(30|3750)$$

Hieran schließen sich die bereits oben ausgeführten Überlegungen an.

In beiden Fällen muss im Anschluss das tatsächlich für die Lösung der Aufgabe relevante Randextremum berechnet werden, was weitere Ansatzpunkte von Metakognition bietet – so bspw. die Überlegung, wie ggf. bestätigt werden kann, welcher der beiden „Ränder“ in Frage kommt, bzw. ob das gefundene Extremum tatsächlich den größten Wert darstellt, sofern dies angezweifelt wird; z.B. mittels eines Monotonie-Arguments.

3. Kapitel: Forschungsprojekt – Methodologie und Überlegungen zur empirischen Erhebung

3.1. Forschungsfragen

Kapitel 3 gibt einen Überblick über Struktur und Methodik des gesamten Forschungsprojekts sowie über zentrale zu Grunde liegende Überlegungen. An dieser Stelle sei vorab an die Forschungsfragen (vgl. Kapitel 1.2) erinnert, die im Rahmen des Projekts beantwortet werden (vgl. Kapitel 4).

Forschungsfrage 1)

- *Welche metakognitiven Aktivitäten können bei zukünftigen Studierenden im Umgang mit/ im Hinblick auf Mathematik – vor allem in Bezug auf Begriffe und Methoden der Analysis – beobachtet werden?*

Forschungsfrage 2)

- *Wie lässt sich der Einsatz von Metakognition beim Umgang mit Mathematik – basierend auf theoretischen Überlegungen und empirischen Erkenntnissen (vgl. FF1) – möglichst umfassend in Form eines Modells systematisieren, das bestehende Kategorisierungen erweitert?*

Forschungsfrage 3)

- *Welche Ansatzpunkte für den Einsatz von Metakognition zeigen sich bei zentralen Themenbereichen der Mathematikdidaktik und wie kann Metakognition beim Umgang mit zentralen Begriffen der Analysis in Erscheinung treten?*

3.2. Allgemeines zur Erhebung von Metakognition

Bei der Erhebung von Metakognition (wie auch bei anderen Forschungsgegenständen) wird zwischen sogenannten „On-line“-Erhebungsmethoden und „Off-line“-Erhebungsmethoden unterschieden. Unter „On-line“-Methoden werden Methoden verstanden, die während eines laufenden Arbeitsprozesses durchgeführt werden – also bspw. die Methode des lauten Denkens („thinking-aloud“), bei der die Proband_innen ihre kognitiven Vorgänge (Ideen, Pläne, Erkenntnisse, Beurteilungen, etc.) verbalisieren. Als Offline-Methoden werden Methoden bezeichnet, die vor oder nach dem Arbeitsprozess ablaufen – also bspw. Interviews oder Fragebögen. (Veenman & van Cleef, 2019)

Je nach Art der Erhebung lassen sich allerdings nur bestimmte Arten von Metakognition feststellen (vgl. etwa Vorhölter, 2019). Selbst bei Thinking-Aloud-Erhebungen lässt sich unbewusst genutzte Metakognition kaum feststellen und nur durch Beobachtung und Interpretation vermuten.

Auf Grund des enormen Zeitaufwandes, der mit der Durchführung von Interviews verbunden ist, werden in der Metakognitions-Forschung häufig Fragebögen eingesetzt, die die Befragung großer Personengruppen mit vergleichsweise geringerem logistischem Aufwand ermöglichen (Dent & Koenka, 2016; Dinsmore et al., 2008; Gascoine et al., 2017; Veenman, 2005 in Veenman & van Cleef, 2019).

Allerdings gehen zahlreiche Forschende davon aus, dass Fragebögen zur Erhebung metakognitiver Fähigkeiten gänzlich ungeeignet seien (Schellings et al., 2013, S. 986). Bei dieser Art der Erhebung von Metakognition bestehen ernsthafte Validitäts-Probleme, bspw. im Hinblick auf die (relativ niedrige) Korrelation mit Erhebungen, die Thinking-Aloud-Methoden verwenden (Schellings et al., 2013, S. 963).

Für die Erhebung von Metakognition kommen Veenman und van Cleef (2019) zu dem Schluss, dass Online-Methoden auf Grund weitaus besserer Validitäten Offline-Methoden vorzuziehen seien. Dabei werden laut Veenman und van Cleef (2019) vor allem Think-Aloud-Protokolle – benötigt (Desoete & De Craene, 2019).

Beim lauten Denken (thinking-aloud) handelt es sich nach Schellings et al. (2013, S. 967) um eine häufig zur Erhebung von Metakognition genutzte Forschungsmethode (vgl. etwa Azevedo, 2005; Bannert & Mengelkamp, 2008; Hofer, 2004), bei deren Auswertung aus den

Verbalisierungen der Teilnehmenden auf die diesen zugrunde liegenden Denkprozesse geschlossen wird.

Es handelt sich beim lauten Denken laut Veenman und van Cleef (2019) um die einzige Methode, die einen Zugang zu metakognitiven Vorgängen während einer laufenden Aufgabenbearbeitung ermöglicht. Ein Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Verbalisierung der laufenden kognitiven Vorgänge es nicht erfordert, dass diese erst abgerufen oder interpretiert werden müssen, sodass es bei dieser Methode nicht zu einer Störung der momentanen Kognition kommt (Ericsson & Simon, 1993 in Veenman & van Cleef, 2019). Die untersuchten Personen haben direkten Zugang zu den Informationen in ihrem Arbeitsgedächtnis und deren Verbalisierung beeinflusst weder die Reihenfolge der laufenden Kognitionen noch metakognitive Prozesse noch die gezeigte Leistung, weshalb sie als „nonreactive measuring method“ gilt (Schellings et al. (2013, S. 967).

Veenman und van Cleef (2019) merken hingegen einschränkend an, dass es zu Verzögerungen im laufenden Arbeitsprozess kommen kann.

Laut Schellings et al. (2013, S. 967) zeichnet sich die Methode des lauten Denkens insbesondere dadurch aus, dass sie bspw. unerwartete Probleme ans Licht bringt.

Ein Nachteil dieser Methode (thinking-aloud) – den allerdings alternative Methoden teilen – besteht darin, dass sie primär (noch) nicht automatisierte Kognition (bzw. Metakognition) ans Licht bringen kann (Schellings et al., 2013, S. 967).

Außerdem lässt sich nicht garantieren, dass tatsächlich sämtliche gewünschte Information verbalisiert wird, und diese muss anhand des geführten Protokolls (in diesem Fall der Transkription der Interview-Mitschnitte) von den analysierenden Forschenden aus den Verbalisierungen entnommen, also interpretiert werden, was wiederum mit der Qualität des zu Grunde liegenden Codierungs-Systems einhergeht (Schellings et al., 2013, S. 968).

Es kann also vorkommen, dass Metakognition (z.B. in Form bewusster Steuerung/ Regulierung von Denkprozessen) stattfindet, diese aber dennoch nicht verbalisiert wird und bei der Auswertung nur schwer zu erfassen ist (vgl. etwa Rott, 2014, S. 272).

Darüber hinaus besteht die Gefahr, dass nicht von tatsächlich praktizierter Metakognition berichtet wird, sondern (möglicherweise auf Grund metakognitiven Wissens) von Handlungen und Denkprozessen, die zwar für sinnvoll gehalten, aber nicht wirklich praktiziert werden, bzw. wurden (Veenman, 2011a).

Insgesamt gestaltet sich die Erhebung von Metakognition als relativ komplex; zu beachten sind bspw. auch die Korrektheit metakognitiver Beurteilungen, die Häufigkeit, mit der Metakognition angewandt wird, die Qualität der Anwendung oder die Angemessenheit ausgewählter Strategien (Artelt, 2000). Zusätzlich dürften individuelle Unterschiede eine Rolle spielen – so sollte vermutlich die Angemessenheit einer Strategie nicht nur auf fachlicher Ebene beurteilt werden, sondern relativ zu den fachlichen Fähigkeiten und Vorlieben des Individuums. Ist bspw. eine bestimmte fachliche Strategie nach Expertenmeinung angemessener, könnte eine andere den Stärken und Schwächen einer Schülerin eher entgegenkommen, bzw. öfter geübt oder einer bekannten Strategie ähnlicher sein, was sie aus metakognitiver Sicht angemessener macht.

3.3. Methodologie des Projekts

Vorstellung des Designs

Bei der Vorgehensweise zur Planung, Durchführung und Auswertung der empirischen Erhebung handelt es sich um ein Mixed-Method-Design.

Die im Rahmen dieses Projekts durchgeführte empirische Erhebung bestand in einer qualitativen Interview-Studie, die kurz vor Beginn der Wintersemester 2015/16 an der Universität Würzburg mit 11 Teilnehmer_innen durchgeführt wurde. Hierzu wurden 11 Studienanfänger_innen kurz vor Beginn ihrer Vorlesungszeit auf freiwilliger Basis als Teilnehmer_innen gewonnen.

Zu diesem Zweck wurden kurz vor Beginn des Semesters im Vorkurs Mathematik alle anwesenden Vorkurs-Teilnehmer_innen mit einer kurzen Ansprache um Teilnahme an der geplanten Studie gebeten. Alle Teilnehmer_innen erhielten im Anschluss daran einen Merkzettel, der neben einer schriftlichen Version der mitgeteilten Informationen zur Kontaktaufnahme nötige Daten enthielt (Name und E-Mail-Adresse des Interviewleiters).

Im Folgenden kamen 11 Studienanfänger_innen der Bitte um Teilnahme nach und kontaktierten den Interviewleiter, woraufhin entsprechend Interview-Termine vereinbart werden konnten.

Alle Teilnehmer_innen waren in mathematischen Studiengängen der Universität Würzburg eingeschrieben (sowohl in Bachelor- als auch in Lehramtsstudiengängen) und besaßen

dementsprechend vergleichbare Zugangsberechtigungen, weshalb die Stichprobe in Bezug auf Voraussetzungen als homogen angesehen werden kann, auch wenn sich die entsprechenden schulischen Werdegänge im Einzelnen teils unterscheiden.

Fünf Teilnehmer_innen wurden jeweils allein zum Interview eingeladen (ein/e Teilnehmer_in, ein Interviewleiter), sechs Teilnehmer_innen wurden jeweils in Paaren interviewt (zwei Teilnehmer_innen, ein Interviewleiter). Das Interview-Setting derart zu variieren, hatte zum Ziel, bestimmte hemmende Faktoren der jeweiligen Interview-Variante zu minimieren und von deren Vorteilen zu profitieren.

So wurde in einem Einzelinterview auf Grund der ungewohnten Situation eine gewisse Befangenheit auf Seiten der Teilnehmer_innen befürchtet. Es bestand hier das Risiko, dass sich Teilnehmer_innen durch die prüfungs-ähnliche Interview-Situation eingeschüchtert fühlen könnten.

Diesem Problem sollte durch die Durchführung von Doppel-Interviews entgegengewirkt werden, da davon ausgegangen wurde, dass die Anwesenheit einer/s Mitstudierenden die – möglicherweise so empfundene – Unnatürlichkeit der Situation abschwächen würde. Darüber hinaus bot sich in Doppel-Interviews die Möglichkeit der Interaktion zwischen beiden Teilnehmer_innen, was Diskussionen, gegenseitige Erklärungen oder gemeinsame Problemlösung ermöglichen und so die Beobachtbarkeit metakognitiver Prozesse erhöhen sollte. Es wurde in Betracht gezogen, dass es sich für die Teilnehmer_innen natürlicher anfühlen könnte, Gedanken und Ideen mit „Gleichaltrigen“ in einer Teamwork-Situation auszutauschen, die ohnehin Zusammenarbeit und gemeinsame Planung erforderte.

Umgekehrt muss in Gruppensituationen beachtet werden, dass die Anwesenheit anderer und deren Miteinbezug zu Beeinflussungen führen kann (Vorhölter, 2019). Hierbei bestand das Risiko, dass die Anwesenheit einer (zukünftigen) Mitstudierenden für ein gewisses Maß an Befangenheit sorgen würde, oder dass eine der beiden Teilnehmer_innen das Interview – unbeabsichtigterweise – „dominieren“ und damit die Beteiligung der zweiten Teilnehmer_in hemmen würde. Derartige Schwierigkeiten konnten wiederum in einem Einzel-Interview umgangen werden.

Da jedoch außer diesen keine weiteren wesentlichen Einflüsse auf die Ergebnisse erwartet wurden, die sich nicht ohnehin durch die große Individualität und statistisch geringe Verwertbarkeit einer qualitativen Studie ergeben, wurde beschlossen, Interviews nach beiden Methoden durchzuführen. Wie zu erwarten war, ließen sich in Interviews beider Arten entsprechende Effekte beobachten (vgl. Kapitel 4.1).

Zum Interview:

Für die Durchführung des Interviews wurde ein teilstrukturiertes Design gewählt. Als Gesprächsgrundlage diente ein Leitfaden, der dem Interviewleiter vorlag und aus dem ggf. weitere Themen(vorschläge) ausgewählt werden konnten. Diese bezogen sich vorwiegend auf metakognitive Erfahrungen und Aktivitäten in Bezug auf Erfahrungen der Teilnehmer_innen beim Umgang mit Mathematik während ihrer Schulzeit:

- Wissen bzw. Beliefs bzgl. lern-, unterrichts- und prüfungsrelevanter Faktoren
- Umgang mit und Verständnis von Unterricht, Erklärungen und Argumentationen
- Lern- und Übungsstrategien
- Vorgehen beim Lösen von Aufgaben und ggf. metakognitive Aktivitäten
 - Planung und Nutzung von Wissen
 - Überwachung und Überprüfung
 - Reflexion über Aufgaben und ggf. über Mathematik
- Umgang mit Problemen und Schwierigkeiten im Hinblick auf Mathematik
- Vorbereitung von und Umgang mit Klausuren und Prüfungssituationen und Prognosen bzgl. „Erfolgsaussichten“
- Aufmerksamkeit, Fehlererkennung und -korrektur
- Wissen über mathematische Fachgebiete und Abgrenzung dieser voneinander im Hinblick auf eigene Fähigkeiten und Vorlieben
- Stärken, Schwächen und Präferenzen in Bezug auf Mathematik

- Beurteilung eigener Fähigkeiten und Leistungen im Vergleich zu anderen und in Relation zu Anforderungen
- Erfahrungen mit Lehrkräften einerseits und ggf. Nachhilfeschüler_innen andererseits
- Typische Verhaltensweisen, Schwierigkeiten, häufige Fehler und deren Beurteilung
- Beurteilung von Schwierigkeiten (bspw. von Aufgaben(-typen))
- ggf. Beschäftigung mit Mathematik über schulische Anforderungen hinaus

Die Teilnehmer_innen wurden eingangs über die Struktur des Interviews in Kenntnis gesetzt und nach einer kurzen Einleitung dazu ermutigt, dem Interviewleiter ihre Gedanken und Assoziationen mittels „lauten Denkens“ („thinking-aloud“) mitzuteilen. Dabei wurde – ausgehend von einer kurzen Begrüßung der Teilnehmer_innen und der Klärung organisatorischer Details (Zeitrahmen, Video- und Audio-Aufnahme, Wahrung datenschutzrechtlicher Kriterien, etc.) – ein kurzer Überblick über die Art des zu führenden Interviews gegeben; der offene Charakter, der die Möglichkeit zu freien Assoziationen lässt, wurde beschrieben und die Bitte zum lauten Denken wurde erläutert. Dabei wurde betont, dass auch ungeordnete und – scheinbar – zusammenhanglose Gedankengänge für den Interviewleiter interessant und damit erwähnenswert seien.

Um Beeinflussungen durch – möglicherweise zu stark „steuernde“ – Fragen zu minimieren, wurde der Verlauf des Interviews – ausgehend von einem richtungsgebenden Themenvorschlag – im ersten Schritt jeweils den Teilnehmer_innen selbst überlassen. Erst im zweiten Schritt wurden vom Interviewleiter konkretisierende Nachfragen gestellt und angesprochene Themen vertieft. Bei Bedarf wurden weitere Themen aus dem Leitfaden angesprochen.

Einleitend wurden – um die „Ungewohntheit“ der Interview-Situation „aufzulockern“ und „das Eis zu brechen“ (vgl. etwa Glinka, 1998 oder Reinders, 2005) – ausgehend von der Tatsache, dass alle Teilnehmer_innen in ihren studienvorbereitenden „Vorkursen“ „rekrutiert“ worden waren und die meisten am jeweiligen Interview-Tag auch einen dieser Kurse besucht hatten,

die neue Situation des beginnenden Studiums besprochen und die Frage nach – empfundenen – Unterschieden zur Schulzeit und Schulmathematik sowie die Frage nach Gründen für die entsprechende Studienwahl gestellt. Während auch bei dieser Thematik bereits metakognitive Aspekte (bzw. deren relative Abwesenheit) zu beobachten waren, wurde im Folgenden – zumeist mit fließendem Übergang und ohne oder mit nur minimaler Steuerung durch den Interviewleiter – der Fokus auf metakognitions-, „intensivere“ und vor allem unterrichts- und mathematik-nähere Themenbereiche gelegt.

Zum Leitfaden

Zur Abfrage allgemeiner (und auch fachspezifischer) Metakognition wurde während des Interviews (Teil 1) unterstützend ein Leitfaden verwendet. Dieser diente dem Interviewleiter zur Orientierung innerhalb der angedachten Themenbereiche und sollte nicht mit einem Fragebogen verwechselt werden; der Verlauf des Interviews wurde weitgehend flexibel und individuell gestaltet, um eine Beeinflussung der Teilnehmer_innen durch zu konkrete Fragen (und ein damit möglicherweise vorgegebenes Antwortverhalten) so weit wie möglich zu vermeiden.

Direkte Fragen (in Interview-Situationen) bergen die Gefahr, dass „erwünschte“ Antworten gegeben werden, oder dass (metakognitive) Vorgänge evoziert werden, die andernfalls gar nicht stattgefunden hätten (Veenman & van Cleef, 2019) – eine Gefahr, für die metakognitiv schwache Lernende besonders anfällig sind (Veenman, 2017).

Es sei angemerkt, dass eine Beeinflussung der Teilnehmer_innen dennoch nie völlig zu verhindern ist.

Es handelt sich also beim ersten Teil der Erhebung um ein leitfadengestütztes, vorwiegend narratives Interview-Design.

Die durch den Leitfaden abgedeckten Themenbereiche, die im Folgenden vorgestellt werden, orientieren sich in ihrer Gliederung an der Lebensrealität von Schülerinnen und Schülern, also an zentralen Situationen, Herausforderungen, Schwierigkeiten oder Zielen, wie sie im Schulalltag (z.B. im Unterricht oder in Prüfungen), bzw. im Rahmen des Systems Schule (z.B. in Form von Hausaufgaben und der selbstständigen Prüfungsvorbereitung zu Hause) auftreten. Diese inhaltliche Strukturierung wurde gewählt, um trotz der Offenheit der Interview-Situation den Erzählungen der Teilnehmer_innen eine Struktur vorzugeben, die der Tatsache Rechnung trägt, dass diese natürlicherweise Hintergrund und Ziel der Erhebung nicht kennen (dürfen!).

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass den Teilnehmer_innen weder der Begriff Metakognition noch das Ziel des Forschungsprojekts im Vorhinein explizit bekannt waren und sie lediglich zur Verbalisierung ihrer Gedanken aufgefordert worden waren – jeglicher Gedankengänge, Assoziationen und sonstiger Kognitionen (und auch Affekte), die ihnen während des Interviews bewusst auffielen. Insofern musste selbstverständlich auch bei Berichten über Metakognition zu Schulzeiten aus Berichten über Gedanken, Wissen und Handlungen erst auf diese geschlossen werden.

Durch eine rein vom Forschungsgegenstand Metakognition ausgehende Strukturierung hätte es zu einer unerwünschten Beeinflussung des Antwortverhaltens kommen können. Eine Struktur, die sich hingegen nicht an der Alltagsrealität der Teilnehmer_innen orientiert, hätte vermutlich zu einem relativ chaotischen und willkürlichen Antwortverhalten und entsprechenden Narrativen geführt.

Insbesondere auf Grund des narrativen Charakters des Interviews und des gemeinsamen engen inhaltlichen Bezugs aller Themenbereiche zum Thema Schule und Unterricht ist eine Überschneidungsfreiheit der im Folgenden vorgestellten Themenbereiche des Leitfadens nicht möglich, aber im Hinblick auf die Forschungsziele auch nicht notwendig oder möglicherweise sogar schädlich. Schließlich lassen sich auch Informationen zu Metakognition daraus gewinnen, wann, bzw. unter welchen Umständen Teilnehmer_innen auf ein bestimmtes Thema/ einen bestimmten Aspekt von Metakognition Bezug nehmen.

Im Gegenzug war es unter den gewählten Bedingungen möglich, die Teilnehmer_innen mit minimaler Steuerung durch den Interviewleiter – beginnend mit Eingangsfragen anhand des Leitfadens – zu einem weitgehend eigenständigen Erzählverhalten zu bewegen.

Dabei wurde ggf. zur Konkretisierung von Berichten und insbesondere, um Informationen zu Metakognition zu erhalten, vom Interviewleiter gezielt nachgefragt – bspw. nach Einschätzungen, Vergleichen, Prognosen und weiteren.

Auch bei Verbalisierung aktuell ablaufender Gedanken, Bewertungen und Assoziationen wurde an entsprechender Stelle durch Nachfragen konkretisiert und vertieft, um ein klareres Bild von Metakognition zu erhalten.

Im Folgenden werden die zentralen Themenbereiche, die im Interview zur Sprache kommen sollten und auf die sich obiger Leitfaden bezieht, genauer erläutert.

Es sei angemerkt, dass sich die Struktur der Themenbereiche an der Realität der Teilnehmer_innen zu orientieren versucht, die keine wissenschaftliche und vor allem keine

metakognitive Vorbildung besitzen. Die Beschreibung der Bereiche spiegelt daher teils Formulierungen wider, wie sie als der Zielgruppe und Interviewsituation angemessen eingeschätzt wurden.

Allgemeines Lernverhalten (bezogen auf Mathematik):

Die Teilnehmer_innen wurden hierbei hinsichtlich typischer Verhaltensweisen befragt, die sie (ggf.) bei der Vor- und Nachbereitung von Unterricht anwandten [z.B. Gruppenarbeit]. Dabei kam die Frage zur Sprache, ob eine derartige Vor- und/ oder Nachbereitung grundsätzlich als notwendig empfunden wurde (und wieso), wie diese im Normalfall geartet war und welche Auswirkungen auf das eigene Verständnis, bzw. den eigenen Erfolg dabei wahrgenommen wurden.

Verhalten und Erfahrungen im Unterricht:

Der Fokus lag hierbei offensichtlich auf dem Mathematikunterricht, aber im Hinblick auf Vergleiche und Abgrenzungen kamen ggf. auch andere Fachbereiche zur Sprache. Ggf. kamen hier Präferenzen für bestimmte Unterrichtsformen (auch über die Unterrichtsfächer hinweg) zur Sprache, das eigene Verhalten im Unterricht, Eindrücke zur Effektivität von Unterricht (bspw. im Gegensatz zum Selbststudium zu Hause) oder zu Schwierigkeiten. Ggf. wurde das Verhalten verschiedener „erlebter“ Lehrkräfte kommentiert und verglichen.

„Verständnis“ und Aufmerksamkeit, Umgang mit anderen Personen

Hierbei wurde (stark in Verbindung zum vorherigen Bereich) auf Aufnahme- und Konzentrationsfähigkeit sowie eigenes Verständnis eingegangen – im Unterricht, beim Selbststudium oder auch im Umgang mit Mitschüler_innen oder Nachhilfeschüler_innen. Dieser Bereich geht nahtlos in den nächsten Bereich über.

Unter anderem im Hinblick auf Unterricht, Nachhilfe-Unterricht und allgemein mathematische Kommunikation wurde der Bereich (eigenes) Verständnis thematisiert. Dabei kam zur Sprache, wie sich (eigenes) Verständnis für die Teilnehmer_innen äußert, woran Grenzen dieses Verständnisses, bzw. Defizite und Lern-Bedarf erkannt werden; allgemein und themenspezifisch wurde thematisiert, wie die Teilnehmer_innen ihr eigenes Verständnis bewerten und wie sie diese Bewertungen ggf. begründen. Es wurde darüber gesprochen, ob auftretende Probleme und Fehler bemerkt wurden, bzw. ob eigene Kognition und Sachverhalte aktiv überwacht und untersucht wurden, um ein Übersehen solcher Probleme und Fehler zu verhindern.

Beurteilung eigener Fähigkeiten, Stärken, Schwächen, typischer Verhaltensweisen, etc.:

Konkreter wurden Fähigkeiten und Fertigkeiten, Talente (in Ermanglung eines möglicherweise angemesseneren, aber für die Teilnehmer_innen unangemessenen „wissenschaftlichen“ Begriffs) und ihre Konsequenzen für den schulischen Erfolg besprochen. Mechanismen, wie mit diesen umgegangen wurde, kamen zur Sprache.

Beurteilung von Schwierigkeiten, Prognosen über Machbarkeit und „Erfolg“, etc.

Insbesondere im Hinblick auf die Bewältigung von Aufgabenstellungen in Klausuren wurde mit den Teilnehmer_innen über ihre Erfahrungen mit der Beurteilung der Schwierigkeit von Aufgaben und Themenbereichen gesprochen. Ihre Fähigkeit zur realistischen Einschätzung der eigenen Sicherheit im Umgang mit klausurrelevanten Themen und die daraus abgeleiteten Maßnahmen (z.B. mehr Übung) und Prognosen hinsichtlich der Klausur-Ergebnisse wurde thematisiert. Auch die Beurteilung von Schwierigkeiten in Bezug auf andere Personen – wie z.B. Mitschüler_innen oder Nachhilfeschüler_innen – wurde angesprochen.

Umgang mit Aufgabenstellungen und Herausforderungen:

In diesem Bereich lag der Fokus auf dem Umgang mit Aufgaben, die im Rahmen des Schulalltags – vor allem im Hinblick auf den Mathematikunterricht – zu bewältigen waren. Dabei kamen sowohl tatsächliche Mathematik-Aufgaben und -Problemstellungen zur Sprache, als auch Herausforderungen wie die Organisation des eigenen Lernverhaltens, der Umgang mit Verständnisschwierigkeiten, die Suche nach zusätzlichen Informationsquellen, etc..

Klausuren:

Die Teilnehmer_innen wurden zu Situationen und Verhalten in Klausurzeiträumen befragt. Dies betraf sowohl typisches Vorgehen bei der Klausurvorbereitung (so zutreffend) als auch die Fähigkeit der Teilnehmer_innen den eigenen Kenntnisstand einzuschätzen und daraus ggf. die Notwendigkeit weiterer Vorbereitung abzuleiten. Außerdem wurde die Fähigkeit thematisiert, nach Abschluss einer Klausur die eigene Performanz zu beurteilen und mit bisherigen Erfahrungen in Beziehung zu setzen und daraus eine Prognose bzgl. einer wahrscheinlichen Notengebung abzuleiten. Ebenso wurden Vorgehensweisen während der eigentlichen Klausurbearbeitung thematisiert sowie der Umgang mit dabei auftretenden Problemen.

Die „Systeme“ Schule, Unterricht, Mathematik:

Im Rahmen dieses Themas wurde bspw. auf den Teilnehmer_innen bekannte „Muster“ eingegangen, die sich in der Organisation des Schulalltags oder im Verhalten von Lehrkräften erkennen ließen und die sich zu einer Verbesserung des eigenen schulischen Erfolgs nutzen ließen. Bspw. kam zur Sprache, wie sich unabhängig vom mathematischen

Inhalt bereits anhand von Formulierungen oder anhand einer Reihenfolge die Bedeutung oder Schwierigkeit von Klausuraufgaben beurteilen und entsprechend priorisieren ließ.

Zur Aufgabenbearbeitung:

Im zweiten Teil des Interviews wurden die Teilnehmer_innen mit dem zuvor besprochenen Extremwertproblem (s. Abbildung 1, Kapitel 2.3.4) konfrontiert.

Zu Anfang wurde den Teilnehmer_innen dabei lediglich die Graphik (Abbildung 1) vorgelegt; mit der Bitte, diese einzuordnen und aus der Abbildung mit Beschriftungen auf eine mögliche Aufgabenstellung zu schließen. Sie wurden aufgefordert, allgemeine Vermutungen über die Natur der Aufgabe anzustellen – über ihre Zugehörigkeit zu mathematischen Gebieten, ihre (zeitliche) Verortung im Lehrplan, Sinn und Zweck der Aufgabenstellung – sowie eine Einschätzung des Schwierigkeitsgrades in Relation zu ihrer eigenen „Kompetenz“ oder auch in Bezug auf denkbare weitere Personen (z.B. Nachhilfeschüler_innen). Dies lässt sich metakognitiven Aspekten wie „Evaluation“, „Reflexion“, „Aufgabenwissen“ oder auch den Komponenten „Awareness“, bzw. „Sensitivity“ zuordnen. Darüber hinaus wurden die Teilnehmer_innen ermutigt, genau wie im ersten Teil des Interviews ihre Gedanken und Assoziationen (zur Graphik) frei zu äußern, auch wenn diese als weniger zielgerichtet beurteilt wurden. Wiederum erst im zweiten Schritt wurden von Seiten des Interviewers konkretisierende Nachfragen gestellt oder neue Impulse gegeben, um die Teilnehmer_innen in ihren (metakognitiven) Überlegungen nicht zu früh zu beeinflussen.

Erst nachdem die Teilnehmer_innen sich so mit der unkommentierten Abbildung beschäftigt hatten, wurde ihnen die tatsächliche Aufgabenstellung mitgeteilt, bzw. ihre Vermutung(en) bestätigt und konkretisiert. Erneut wurde dazu aufgefordert, die tatsächliche Aufgabe einzuordnen, zu kommentieren, etc..

Im Anschluss wurden die Teilnehmer_innen aufgefordert, sich mit der Lösung des Extremwertproblems zu befassen – Problemlösestrategien zu erinnern, abzurufen oder ggf. neu zu entwickeln und daraufhin die nötigen Schritte (soweit möglich, teilweise) durchzuführen und/ oder (alternativ) diese Schritte und damit den Ablauf des Lösungsvorgangs verbal zu beschreiben. Im Fokus des Interesses standen hierbei einerseits Planungs-, Überwachungs- und Regulations-Vorgänge; andererseits Evaluationen in Bezug auf Machbarkeit und das Durchsuchen eigener Erinnerungen sowie ggf. die (Neu-)Entwicklung und Bewertung von Strategien.

Im Anschluss wurde den Teilnehmer_innen die Aufgabe übertragen, geeignete Wege zu entwickeln, um das vorliegende Problem und entsprechende Lösungsstrategien einer/m gedachten Mitschüler/in oder Nachhilfeschüler/in zu erklären.

In jenen Fällen, in denen zwei Teilnehmer_innen gleichzeitig interviewt wurden, bot sich die Möglichkeit gemeinsamen Erarbeitens von Problemlösungen, des Vergleichens von Einschätzungen und Ideen und letztlich die Möglichkeit, Erklärungen direkt an die/ den zweite/n Teilnehmer_in zu richten. Auch gegenseitige Fehlerkorrektur wurde durch dieses Setting ermöglicht.

Es muss bedacht werden, dass die Beobachtbarkeit von Metakognition im Einzelfall vom Verhalten der Teilnehmer_innen abhing, was Unterschiede in der Ergiebigkeit der verschiedenen Interviews bedingt.

Zur Transkription

Zu Dokumentationszwecken wurden Audio-Mitschnitte der Interview-Sitzungen erstellt, die im Folgenden transkribiert wurden. Die Transkription erfolgte nach entsprechend festgelegten Kriterien. Da unser Interesse primär auf den Äußerungen der Teilnehmer_innen lag, wurden diese wortgenau verschriftlicht. Dabei wurden Verzögerungen, wie sie durch Pausen oder „Füll-Laute“ („Hmm“, „Äh“, etc.) entstehen, mit-transkribiert, da sie Unsicherheiten oder die Geschwindigkeit von Denkprozessen dokumentieren können; auf eine präzise Übertragung von bspw. dialekt-bedingten Abweichungen vom Hochdeutschen wurde allerdings nur Wert gelegt, wo diese den Sinn von Aussagen beeinflussten, während darauf zu Gunsten der Lesbarkeit verzichtet wurde, wo immer derartige Zusatzinformationen nicht unmittelbar bedeutungstragend im Sinne der inhaltlichen Interpretation waren. Auffälligkeiten nicht inhaltlicher Art – z.B. Formulierungen, Gestik, Mimik, Tonfall und weitere Details im Verhalten der Teilnehmer_innen – wurden, wo diese von potentiell Interesse für die eigentliche Analyse waren, bereits während des Transkriptionsprozesses dokumentiert und standen in einer gesonderten Kommentarspalte während der Analyse zur Verfügung. Beobachtete Handlungen im zweiten Teil der Interviews wurden ebenfalls den Transkripten als Kommentare hinzugefügt.

Zur Kategorisierung und Auswertung:

Im Rahmen des Auswertungsprozesses wurden die Interview-Transkripte im ersten Schritt codiert. Hierzu wurden im Programm maxqda entsprechende Anteile des Transkript-Texts markiert und einem „Code“ zugeordnet.

Dabei wurden die Aussagen der Teilnehmer_innen zuerst auf Anzeichen für Metakognition hin untersucht. Darunter fallen Berichte metakognitiver Erfahrungen, rückblickende Berichte metakognitiver Aktivität zu Schulzeiten, Berichte über Metakognitionen, die während des Interviews abliefen, sowie Metakognition, die sich implizit aus den Äußerungen der Teilnehmer_innen erkennen ließ.

Wurde eine Text-Passage als einem bereits bestehenden Code zugehörig interpretiert, so wurde dieser aus der Liste bereits bestehender Codes ausgewählt. War dies nicht der Fall, wurde ein neuer Code kreiert und im Programm angelegt. Im Rahmen des gewählten Designs waren auch Mehrfach-Codierungen möglich – also die Zuordnung einer einzigen Text-Passage zu mehreren Codes – sowie das Kreieren von „Unter-Codes“, also von einem oder mehreren Codes, die unter einem allgemeineren „Ober-Code“ eingeordnet wurden, diesen allerdings spezifizierten. Einem Unter-Code zugeordnete Text-Passagen gehörten damit sowohl zum gewählten Unter-Code als auch zum zugehörigen Ober-Code.

Dabei wurden neben metakognitiven Kategorien auch Beobachtungen notiert, die sich auf Defizite im Bereich Metakognition bezogen (was ebenso der Generierung von Kategorien dienen konnte). Vor allem im zweiten Teil des Interviews wurde verstärkt auf das Vorkommen fachspezifischer Metakognition geachtet, sowie auf fachmathematische wie metakognitive Defizite.

Durch die Verwendung einer derartigen hierarchischen Anordnung von Codes kann bereits während des Codierungs-Prozesses auf das Ziel der Kategorisierung metakognitiver Aspekte hingearbeitet werden, indem schon in diesem ersten Schritt eine Vor-Systematisierung der Codes vorgenommen wird.

Dementsprechend vollzog sich der Auswertungsprozess über mehrere Stufen, innerhalb derer das aus Theorie und Daten gewonnene Material sukzessive abstrahiert und in Kategorien eingeteilt wurde. Hierzu wurden Schlüssel-Wörtern, -Sätzen und -Abschnitten im Transkript entsprechende Begriffe, bzw. metakognitive Aspekte zugeordnet, die ihrerseits im nächsten Schritt der Auswertung wiederum unter „gröberen“ Oberbegriffen zusammengefasst, oder als eigenständige Kategorien etabliert wurden.

Codiert wurde auf Basis des durch Literatur-Recherche und theoretische Überlegungen vorhandenen Vorwissens – es kann also nicht von einer ausschließlich in den Daten begründeten Theorie („grounded theory“) gesprochen werden, wie sie bspw. im Rahmen der „Grounded Theory“-Methode (vgl. etwa Strauss & Corbin, 1996 oder Glaser & Strauss, 2010) ursprünglich praktiziert wurde, was den Ausschlag zur Verwendung der „Qualitativen Inhaltsanalyse“ nach Mayring (vgl. etwa Mayring, 2002 und 2008 oder Kuckartz, 2014) gab. Dem sei hinzugefügt, dass als Resultat einer Weiterentwicklung (beider Analyse-Methoden) heutzutage auch die Grounded Theory eine Inhalts-Analyse mit Rückgriff auf (theoretisches) Vorwissen erlaubt.

Bei Kuckartz (2014) wird dieses hier gewählte Vorgehen als Mischform deduktiver und induktiver Kategorienbildung, bzw. als deduktiv-induktive Kategorienbildung (S. 95) bezeichnet. Als gewöhnliche Vorgehensweise wird bei dieser Art der Kategorisierung laut Kuckartz (2014, S. 95 f.) von einem Kategoriensystem ausgegangen, das sich aus der entsprechenden Literatur, bzw. Bezugstheorie ableitet und das aus vergleichsweise wenigen Kategorien besteht. In dieser Arbeit kommt diese Rolle den Systematisierungen, die von Schneider (vgl. etwa Schneider & Artelt, 2010) und Schoenfeld (vgl. etwa Schoenfeld, 1987) verwendet werden, zu, die als Ausgangs-Systeme dienen und kombiniert, bzw. ergänzt werden. Diese Ergänzung des deduktiv entwickelten Materials wird dann induktiv (also am empirisch erhobenen Material) vorgenommen (Kuckartz, 2014), indem weitere Kategorien, bzw. Unterkategorien zu den deduktiv erhaltenen ausgearbeitet werden.

Wie einleitend erläutert, muss beachtet werden, dass gerade für den Begriff Metakognition eine Vielzahl verschiedener – nicht überschneidungsfreier und oft ungenauer – Definitionen existiert, auf Basis derer der im Interview verwendete Leitfaden entwickelt worden war.

Daher war es nicht zu erwarten, dass die Codierung des Datenmaterials völlig „neue“ Aspekte von Metakognition zutage bringen würde, da sich auf Grund der sehr offenen Definition(en) von Metakognition in der Literatur praktisch jeder Code (und jede Textpassage) einem Aspekt von Metakognition zuordnen ließ und lässt, der bereits „irgendwo“ in der existierenden Literatur zumindest erwähnt wurde.

Des Weiteren muss damit gerechnet werden, dass bereits durch die Theorie vorgegebene Kategorien mit höherer Wahrscheinlichkeit zu beobachten waren, bzw. verbalisiert wurden, sofern diese bei den Teilnehmer_innen grundsätzlich vorkommen, da entsprechende Themen leitfadenbedingt explizit – ggf. als Nachfrage – angesprochen wurden.

Metakognitive Aktivitäten, die nicht a priori durch Kategorien abgedeckt wurden und die es im Interview zu „generieren“ galt, hatten naheliegenderweise formatbedingt eine höhere Wahrscheinlichkeit, nicht aufzutreten oder nicht verbalisiert zu werden und damit unentdeckt zu bleiben. Dieses Risiko dürfte für das verwendete Format jedoch typisch sein und wurde durch ein möglichst gering gehaltenes Maß an Beeinflussung durch den Interviewleiter und eine große (themenbezogene) Wahlfreiheit auf Seiten der Teilnehmer_innen – wie bereits besprochen – minimiert. Des Weiteren erfolgt hier keine quantitative Analyse, sodass eine höhere Auftretens-Häufigkeit bestimmter Kategorien Ergebnisse nur sehr begrenzt verfälschen kann (abgesehen von dem Risiko, dass sie im Rahmen der begrenzten Zeit das Auftreten anderer Kategorien hätten beschränken können). Insgesamt dürfte sich das Risiko, durch dieses Format metakognitive Kategorien durchs Raster fallen zu lassen, in akzeptablen Grenzen halten, da für deren Generierung auch einzelne Transkript-Beispiele bereits ausreichen. Eine Ausschärfung neuer oder etablierter Kategorien kann dann abermals auf theoretischer Ebene erfolgen.

Ohnehin steht bei der Bearbeitung des Materials in der Regel nicht eine Neuentdeckung metakognitiver Aspekte im Vordergrund, sondern vielmehr die Bestätigung existierender Aspekte und deren präzise Definition im Rahmen dieser Arbeit und deren Einordnung und Systematisierung in das zu Grunde gelegte Metakognitions-Schema, bzw. die Erweiterung desselben um Aspekte, die sich bspw. in anderen Systematisierungen in der Literatur finden und die im Datenmaterial wiedergefunden wurden.

Entsprechend der Vorgehensweise der Qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Kuckartz, 2014) wurde das Datenmaterial mehrfach durchgearbeitet, um zu gewährleisten, dass auch früher bearbeitetes Material auf später entwickelte Codes hin überprüft werden konnte. Diese Vorgehensweise wurde so lange wie derholt, bis keine neuen Codierungen mehr vorgenommen wurden und keine Notwendigkeit zum Kreieren neuer Codes mehr gesehen wurde, man also von einer weitgehenden „theoretischen Sättigung“ sprechen konnte.

In einem nächsten Schritt wurde die Menge der so erhaltenen Codes direkt mit bestehenden Definitionen und Erläuterungen aus der Literatur verglichen, um eine Einordnung der Codes in Kategorien zu ermöglichen. Diesen Abgleich leitet vor allem die zentrale Frage, inwieweit das zu Grunde gelegte Schema die bei den Interview-Teilnehmer_innen zu beobachtende Metakognition „abdeckt“, bzw. um welche Aspekte und (Unter-)Kategorien anderer Taxonomien die Einteilung von Metakognition in eine prozedurale, eine deklarative und eine unbewusst-implizite Komponente erweitert werden muss (vgl. Forschungsfrage 2, Kapitel 4.2).

Diese Notwendigkeit einer Erweiterung bezieht sich auf den Wunsch nach einem möglichst umfassenden System, das die zu beobachtenden und theoretisch zu erwartenden, bzw. vorstellbaren Aspekte von Metakognition – im Hinblick auf eine Operationalisierbarkeit aus Sicht der mathematikdidaktischen Forschung und Praxis – integriert.

Die durch den Codierungs-Prozess im ersten Schritt erhaltene Menge an Codes bestätigt die Vielfältigkeit beobachtbarer (und denkbare) Metakognition. Prinzipiell ließe sich hierbei auch eine noch deutlich feinere Unterteilung vornehmen. Allerdings musste bereits diese Anzahl an Codes/ Codings wieder deutlich stärker unter (etablierte) Aspekte von Metakognition subsummiert werden. Dabei ist – wie oben angesprochen – darauf zu achten, welche Aspekte über das zu Grunde liegende Schema hinausgehen. Bei diesen Aspekten muss entschieden werden, welchen Aspekten anderer Systeme diese zugeordnet werden können, um diese dann sinnvoll in das zu entwickelnde System, bzw. Schema zu integrieren.

Da von einer absoluten Trennschärfe/ Überschneidungsfreiheit von vornherein nicht ausgegangen werden kann – und diese auch nicht angestrebt wird – dienen die erhaltenen Codings vor allem als Anhaltspunkte für die Ergänzung von Kategorien, bzw. im Folgenden als Beispiele anhand derer kennzeichnende Merkmale der Kategorien/Aspekte des zu entwickelnden Schemas aufgezeigt werden können.

Zur Intracoder-Übereinstimmung:

Im Zentrum des Forschungsinteresses stehen die Generierung bzw. Bestätigung von metakognitiven Kategorien bzw. Aspekten und Aktivitäten. Als Risiken werden hierbei vor allem die Etablierung eigentlich nicht vorhandener oder das Ignorieren vorhandener Kategorien gesehen, was durch den intensiven Abgleich mit der einschlägigen Literatur und den darauf aufbauenden theoretischen Überlegungen – sowie durch Vergleich mit zusätzlichen Codierern (s. unten) – weitgehend vermieden werden kann. Da darüber hinaus die Codierung des Materials bis zur theoretischen Sättigung in mehreren Zyklen vorgenommen wurde, was eine vielfache Überprüfung sowohl bereits codierter als auch nicht-codierter Passagen mit sich brachte, wird das Risiko einer Verfälschung des angestrebten Modells als sehr gering erachtet; zumal dessen Konstruktion durch eine potentiell sporadisch vorkommende „falsche“ Codierung (im Sinne der Zuordnung zum „falschen“ Code) einzelner Textpassagen nicht beeinflusst werden kann.

Zur Intercoder-Übereinstimmung:

Der theoretische Hintergrund (insbesondere die zu Grunde liegenden Einteilungen von Schneider, Schoenfeld und weiteren), die Konzeption des Untersuchungs-Designs und die Überlegungen zur Codierung (die sich im Wesentlichen an ebendiesen Einteilungen orientieren) sowie zur darauf aufbauenden Kategorisierung wurden mit verschiedenen Kollegen erörtert und dabei mit zwei Personen eingehender erörtert, denen jeweils ein Teil des Datenmaterials zur zusätzlichen Analyse übergeben wurde. Im Anschluss an deren Sichtung des Materials wurden die entsprechenden Codierungen verglichen und im Hinblick auf die vorzunehmende Kategorisierung, bzw. deren Präzisierung hin diskutiert. Kuckartz (2014) spricht hierbei von „konsensueller Codierung“ (S. 211 ff.).

Die Kriterien des Datenschutzes und der Anonymität der Teilnehmer_innen blieben dabei entsprechend gewahrt.

Im Hinblick auf Übereinstimmung zwischen verschiedenen Codierenden sollte bedacht werden, dass einerseits eine hohe Trennschärfe zwischen metakognitiven Kategorien auf Grund der eingangs angesprochenen Problematik nur bedingt zu erwarten ist, weshalb im Design Mehrfach-Codierungen explizit erlaubt sind und Unterschiede zwischen verschiedenen Codierenden zu erwarten sind. Dementsprechend wird eine konsensuelle Diskussion der Resultate für sinnvoll gehalten. Zudem ergibt sich auf deduktiver Ebene – trotz der oft unklaren Literaturlage – durch die zu Grunde liegenden Einteilungen bereits eine als sinnvoll erachtete Struktur, die bei der Codierung beachtet wird und große Abweichungen verhindert. Da zudem die empirischen Daten vor allem sowohl der Überprüfung der theoretischen Überlegungen einerseits als auch der Anregung weiterer Überlegungen dienen, die ihrerseits mit der einschlägigen Literatur sowie den angesprochenen zusätzlichen Codierern abgeglichen werden konnten, wird das Risiko von Codier-Fehlern auch hier für ausreichend gering gehalten.

3.4. Überlegungen und Begründungen zur Extremwertaufgabe

Aufgaben, die sich klassischerweise durch Anwenden eines auswendiglernbaren Kalküls bearbeiten lassen, scheinen auf den ersten Blick ungeeignet, Metakognition zu evozieren, bzw. beobachtbar zu machen.

Derartige Extremwertaufgaben werden im Unterricht – vor allem auch in Form traditioneller Prüfungsaufgaben – oft derart gestellt, dass ein zweimaliges Ableiten der Zielfunktion zur Lösung der Aufgabe führt (Furdek, 2004).

Es wird häufig kritisiert, dass dieser Aufgabentyp in seiner Kalkülhaftigkeit das unreflektierte Wiedergeben und Anwenden antrainierter Ablaufpläne und „Rezepte“ begünstigt, was zu Lasten von Kompetenzen wie Argumentieren, Begründen und dem Transfer erlernter und auch verstandener mathematischer Prinzipien geht.

Wie Furdek (2004) an der verwendeten „Glasplatten-Aufgabe“ aufzeigt, liegt diese Problematik jedoch nicht notwendigerweise im Sachverhalt bzw. im Typ „Extremwertaufgabe“ begründet. Vielmehr können durch eine geeignete Aufgabenstellung und die gezielte Ausgabe (oder Weglassen) von Informationen der Schwerpunkt der Aufgabe verändert werden.

Im Hinblick auf die Verwendung der Glasplatten-Aufgabe im Rahmen der durchgeführten Studie ist es aber so, dass nicht die Aufgabe als Übungs- oder Prüfungsaufgabe im Vordergrund steht, sondern ihr Nutzen im Kontext der Studie – in Relation also zur konkreten Fragestellung, zum konkreten Untersuchungsdesign und zur konkreten Zielgruppe zum gegebenen Zeitpunkt.

Die Auswahl des verwendeten Extremwertproblems wurde aus verschiedenen Überlegungen heraus getroffen. Zum einen handelt es sich bei derartigen Optimierungsproblemen um eine klassische Aufgabe im Mathematikunterricht. Insofern ließ sich annehmen, dass die Teilnehmer_innen einerseits mit derartigen Problemstellungen sehr vertraut gewesen sein dürften, sodass ein gewisses Maß an – reaktivierbaren – Erinnerungen als Basis für metakognitive Aktivitäten im Interview vorhanden sein sollte. Andererseits stand zu erwarten, dass die längere Pause seit Schulabschluss aus Gedächtnisgründen zu einer Abschwächung dieser Vertrautheit geführt haben dürfte. Während direkt nach Schulabschluss eine „Routine-Leistung“ ohne beobachtbare Metakognition zu erwarten gewesen wäre, wurde davon ausgegangen, dass die Zeitspanne seit dem letzten Kontakt mit derartigen Problemstellungen

(mindestens ca. drei Monate) Erinnerungen und Routine so weit geschwächt haben sollte, dass dieser unerwünschte Fall nicht eintreten würde. Es wurde erwartet, dass zumindest einige Teilnehmer_innen Schwierigkeiten mit dem Erinnern der Lösungsstrategien und der zu Grunde liegenden Mathematik (Analysis) haben würden, sodass Metakognition (wie „feeling of knowing“-Bewertungen, aktives Reaktivieren von Erinnerungen und Neuentwicklung von Strategien) während des Interviews auftreten würde.

Des Weiteren ließ die algorithmische Natur des nötigen Problemlösungsprozesses auf die Beobachtbarkeit von Planungs- und Überwachungsvorgängen hoffen und stellte sicher, dass sich die entsprechenden Schritte auch ausreichend gut (hypothetisch) beschreiben lassen würden; insbesondere sollte es möglich sein, die kausalen Beziehungen und die zu Grunde liegenden mathematischen Überlegungen zwischen den einzelnen Schritten zu reflektieren und zu erläutern.

Das gewählte Problem stellt also eine Kombination zentraler Elemente und Methoden der Analysis (wie z.B. der Ableitung und ihrer Bedeutung für Extremwerte sowie deren Berechnung) dar, was es den Teilnehmer_innen ermöglichen sollte, Fachwissen und Metakognition einzusetzen (wie z.B. die Reflexion notwendiger und hinreichender Bedingungen für Extremwerte).

Trotz der relativ kalkül-lastigen Ausrichtung der Aufgabe erfordert diese – gerade im Hinblick auf die Zielgruppe, die mit diesem Kalkül nicht mehr oder nur noch wenig vertraut war – auch durchaus anspruchsvollere Tätigkeiten. Es geht darum, den Kalkül – mehr oder weniger – aus teilweise vorhandenem Wissen zu rekonstruieren und neu zu entwickeln. Strukturierende und planerische sowie „übersetzende“ Überlegungen und Handlungen stellen einen Bezug zwischen Modellierungsprozessen und metakognitiver Begleitung her, was einen weiteren Grund für den Einsatz dieses Problemtyps im Interview darstellt.

Des Weiteren bietet die konkret gewählte Aufgabe zusätzliche Ansatzpunkte für den Einsatz von Metakognition, die sich nicht nur bei bestimmten Extremwertaufgaben, bzw. Aufgabenstellungen finden.

Zum einen ergibt sich aus der Tatsache, dass es sich bei der Zielfunktion um ein Polynom zweiten Grades handelt, die Möglichkeit einer rechnerischen Lösung ohne den Einsatz von Differenzialrechnung. Statt der klassischen Vorgehensweise der Sekundarstufe II in Form des (zweimaligen) Ableitens kann auf eine Vorgehensweise aus niedrigeren Klassenstufen zurückgegriffen werden, indem durch quadratische Ergänzung der Scheitelpunkt des

Zielfunktions-Graphen bestimmt wird. Hierdurch bietet sich für die Teilnehmer_innen die Möglichkeit, zumindest zwischen zwei Strategien auszuwählen und deren Vor- und Nachteile gegeneinander abzuwägen, sofern beide Methoden (noch) bekannt sind. Dieser Fall trat im Verlauf der Interviews auch ein, was mit entsprechender (metakognitiver) Argumentation einherging. Zusätzlich kam es in Doppel-Interviews zu entsprechenden gegenseitigen Erklärungen bzgl. Vorgehensweise und Nutzen der Scheitelpunkt-Methode, was die/ den Teilnehmer_in ohne entsprechende Vorkenntnisse oder Erinnerungen zu einem Analyse-Prozess des eigenen Verständnisses veranlasste.

Einen weiteren Ansatzpunkt für Metakognition stellt die Problematik dar, dass es sich beim klassisch erhaltenen Extremum zwar um ein Maximum handelt – hierbei kommen metakognitive Mechanismen wie die Überprüfung auf Plausibilität, „Passung“ mit der Aufgabenstellung und die Awareness-Komponente zum Tragen – aber dieses zur Lösung der Aufgabe nicht in Frage kommt, da sich die betreffende Extremstelle außerhalb des Definitionsbereichs befindet.

Das Erkennen dieses Problems, das den klassischen Lösungsweg zuerst einmal verändert, der kognitive Konflikt, falls dieses Problem nicht (mehr) bekannt ist, und der Versuch, die Situation zu bewältigen, bieten die Möglichkeit für verschiedene metakognitive Prozesse. Furdek (2004) spricht hier von einem nötigen Umdenken.

Grundsätzlich kann es im verwendeten Beispiel zur Frage kommen, ob die in der Zeichnung und Aufgabenstellung enthaltenen Angaben zur Bearbeitung der Aufgabe ausreichen und welche Angaben ggf. fehlen und wie diese beschafft werden können (Furdek, 2004). Zusätzlich wurde im Rahmen der Erhebung die zugehörige Graphik im ersten Anlauf gänzlich ohne Aufgabenstellung präsentiert, um vorab weniger beeinflusste Überlegungen auf Seiten der Teilnehmer_innen zu ermöglichen. Dies kann als Anregung zur Diskussion mit anderen Lernenden oder zur Reflexion dienen.

Im Verlauf der im Rahmen der Studie durchgeführten Aufgabenbearbeitungen konnte dies mehrmals beobachtet werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das gewählte Extremwertproblem die Demonstration von sowohl Kognition (Anwendung fachmathematischen Wissens), als auch die Demonstration einer großen Bandbreite an metakognitivem Wissen (deklarativ) und „begleitenden“ metakognitiven Aktivitäten (prozedural) ermöglichte, wobei sich letztere vor allem im zweiten Teil direkt auf den Umgang mit einer akuten mathematischen Herausforderung bezog.

Gegenseitiges Erklären:

Trotz Thinking-aloud-Aufforderung besteht das Risiko, dass mögliche metakognitive Aktivitäten nicht in dem Maße erinnert oder ins Bewusstsein gerufen werden können, in dem sie in konkreten Fällen durchgeführt wurden, bzw. werden könnten. Die Aufforderung, einer imaginären dritten Person beim Umgang mit dem entsprechenden Problem Unterstützung zu gewähren, bietet die Möglichkeit, eine (metakognitive) Auseinandersetzung mit der Thematik oder Problemstellung anzuregen, die bei Fokus auf die eigene Kognition möglicherweise so nicht zustande käme. Dabei sollte jedoch beachtet werden, dass 1.) unter diesen Umständen geäußerte metakognitive Handlungen tatsächlich nur als Hilfeleistungen interpretiert und von der betreffenden Person selbst so nie durchgeführt würden, 2.) dass auch bei eigener metakognitiver Aktivität sich diese von den geäußerten Vorschlägen unterscheiden kann, da zur Unterstützung Dritter Beliefs über diese in die geäußerten Ideen eingehen dürften. Eine Aufforderung, Dritten empfohlene Strategien beim Umgang mit einem Problem mit selbst durchgeführten Handlungen zu vergleichen, könnte hier jedoch Abhilfe schaffen und Einblick in – wie zuvor erwähnt – sonst möglicherweise unbewusste Metakognition bieten. Nichtsdestotrotz stellt naheliegenderweise auch Metakognition, die die Kognition anderer Personen zum Ziel hat, einen interessanten Untersuchungsgegenstand dar, der auch Rückschlüsse über Metakognition zulässt, die die eigene Kognition zum Inhalt hat.

Gerade bei der im Unterricht zentralen Interaktion von Lernenden und Lehrkräften liegt nahe, dass einerseits Metakognition einer Lehrkraft, die die Kognition ihrer Schüler_innen zum Inhalt hat, und andererseits Metakognitionen von Lernenden, die die Kognition der Lehrkraft zum Inhalt haben, für gegenseitiges – inhaltliches (und sicher auch soziales) – Verständnis förderlich bis unerlässlich sein dürften, geben sie doch Antwort u.a. auf die Fragen, „Was will er/sie mir damit sagen?“, bzw. „Warum versteht er/sie nicht, was ich erkläre?“. Metakognitive Überlegungen, die nicht die eigene Kognition zum Inhalt haben, spielen insbesondere beim Bewertungsprozess eine Rolle, der im Rahmen schulischen Unterrichts, bzw. bei der Korrektur schriftlicher Klausuren stattfindet. Davon ausgehend, bilden sie die Grundlage der Identifizierung und gezielten (und möglicherweise individuellen) Behandlung von Verständnisproblemen und ermöglichen damit eine effizientere Förderung von Lernenden und bspw. die effizientere Nutzung der verfügbaren Unterrichtszeit.

In den Interviews mit je zwei Teilnehmer_innen bestand die Möglichkeit, diesen Umstand nicht nur unter „Verwendung“ einer/s imaginären Nachhilfeschülerin/s zu nutzen, sondern direkt mit der/m jeweils anderen Interviewpartner/in in Interaktion zu treten.

3.5. Überlegungen und Begründungen zur Erhebung nicht-fachbezogener Metakognition

Im Rahmen eines Forschungsprojekts im Bereich Mathematik-Didaktik und insbesondere bei der untersuchten Zielgruppe, die sich zeitlich zwischen Sekundarstufe II und Hochschule befindet, dürften vor allem Anteile von Metakognition relevant und von Interesse sein, die sich sehr „nahe am Fachwissenschaftlichen bewegen“, Anteile, die beim Bearbeiten mathematischer Problemstellungen oder im Zusammenhang mit dem Verstehen und Vertiefen mathematischer Begriffe auftreten. Damit verbundene metakognitive Fähigkeiten und metakognitives Wissen dürfte sich also vor allem beim „Betreiben“ von Mathematik beobachten lassen, indem Verhalten und mathematische „Produktionen“ (in Form von Verschriftlichungen, Zeichnungen, etc.) beobachtet und mittels „thinking-aloud“-Techniken (Meta-)Kognitionen verbalisiert und damit ebenfalls für den Beobachter erfassbar gemacht werden. Beim aktiven Bearbeiten mathematischer Problemstellungen sollten sich vor allem prozedurale Anteile von Metakognition beobachten lassen, also planerische, überwachende, steuernde und – je nach Zeit und Art der Beobachtung und der anschließenden Befragung – reflektierende Tätigkeiten. Um darüber hinaus auch ein genaueres Bild vom – stärker im Hintergrund und als Basis prozeduraler Handlungen/Kognitionen funktionierenden – deklarativen Wissen der Zielgruppe zu erhalten, dürfte die Begleitung durch lautes Denken essentiell sein, da sich dieses „Hintergrund“-Wissen nur schwer aus den prozeduralen Kognitionen ableiten lässt, die ihrerseits wiederum nur teilweise aus den beobachtbaren Handlungen ersichtlich sind.

Die Methode des lauten Denkens („thinking-aloud“) stellt uns einerseits vor die Herausforderung der Interpretation der Äußerungen der Studien-Teilnehmer_innen. Andererseits bleibt zu beachten, dass bereits die Äußerungen selbst auf (Selbst-)Beobachtungen und Interpretationen (auf Metakognitionen!) der Teilnehmer_innen beruhen. Wie „gut“, wie „zutreffend“ und auch wie ausführlich und umfassend diese Beobachtungen, die darauf aufbauenden Interpretationen und die anschließenden Verbalisierungen tatsächlich die Kognition, bzw. Metakognition der Teilnehmer_innen wiedergeben, lässt sich letztlich nur schwer beurteilen und unterliegt insofern stets einer Rest-Unsicherheit.

Es bleibt also schwierig, zu entscheiden, ob bspw. ein/e Teilnehmer_in metakognitiv nur wenig aktiv ist und dies „korrekt“ beobachtet und mitteilt, oder ob er/sie hingegen metakognitiv durchaus (möglicherweise unbewusst) aktiv ist, dies aber entweder nicht oder wenig bewusst

wahrnimmt, oder dies wahrnimmt und nicht entsprechend verbalisiert/ verbalisieren kann. Ein Vorteil des gewählten Interview-Designs, bei dem außer gezielt fachspezifisch orientierter Metakognition auch allgemeinere, übergreifende Metakognitionen behandelt wurden, besteht daher in dieser Vielseitigkeit. Die Möglichkeit, Metakognition anhand vieler verschiedener Teilthemen und auf unterschiedlichen „Niveaus“ (in Bezug auf ihre Allgemeinheit – Spezifität, bzw. Fachnähe) zu untersuchen, trägt zur Einschätzbarkeit der Verbalisierungen der Teilnehmer_innen bei. Zeigt sich bspw., dass die Fähigkeit zur ausführlichen Verbalisierung im Bereich allgemeinerer Metakognition, also vorwiegend im ersten Teil des Interviews, durchaus vorhanden ist (wobei auch hier nicht garantiert ist, dass diese Beschreibungen korrekt, bzw. umfassend sind), im zweiten, vorwiegend fachnahen, Teil des Interviews allerdings verhältnismäßig wenig Metakognition (beobachtet und) verbalisiert wird, so lässt sich eher ausschließen, dass dieser Sachverhalt seine Ursache allein in einem Verbalisierungs-Problem der Teilnehmer_innen hat. Vielmehr funktionieren offenbar die Beobachtung von Metakognition und das entsprechende laute Denken durchaus zufriedenstellend, was (eher) darauf schließen lässt, dass im fachnahen Bereich weniger Metakognition stattfindet, bzw. diese nicht bewusst erfasst wird. Die Entscheidung, die vorliegende Studie nicht ausschließlich auf eine „fach-nahe“ Erhebung von Metakognition zu konzentrieren, die schließlich im Zentrum des mathematikdidaktischen Interesses läge, liegt also – unter anderem – in der Maßstabs-Eigenschaft des „fachferneren“ Interview-Teils. Dieser ermöglicht – unter Umständen – eine präzisere Einordnung der im zweiten Teil beobachteten Äußerungen der Teilnehmer_innen. Natürlich bleibt zu beachten, dass diese Vergleichbarkeit mit Vorsicht zu behandeln ist. Es ist nicht auszuschließen, dass zwischen allgemeinerer und spezifischerer Metakognition Unterschiede bestehen, was die Schwierigkeit einer Verbalisierung angeht. Des Weiteren ist der Vergleich zwischen beiden Interview-Teilen nur bedingt hilfreich, wenn in beiden Teilen Defizite beim lauten Denken bestehen. Dann ist wiederum schwer zu klären, worin die Ursachen dieser Defizite bestehen.

Ein weiterer Grund für die Integration eines allgemeineren Interview-Teils besteht im Wesen von Metakognition, die grundsätzlich ein natürlicher Teil der menschlichen Kognition ist. Es kann also erwartet werden, dass Metakognition auf einem weniger fachspezifischen Niveau auf jeden Fall auftritt. Eine ausschließliche Konzentration auf den fachspezifischen Bereich käme also einer Untersuchung nur des „fach-nächsten“ oder fachspezifischsten Niveaus von Metakognition gleich. Der fehlende Vergleich mit „allgemeineren“ Stadien von Metakognition würde die Interpretation der beobachteten Fähigkeiten also erschweren, da nicht ersichtlich

wäre, ob grundsätzliche Defizite auf allen Niveaus oder bspw. lediglich auf dem für den Umgang mit Mathematik wahrscheinlich relevantesten – möglicherweise anspruchsvollsten – bestehen. Dies spielt vor allem für abzuleitende Konsequenzen für eine unterrichtliche Umsetzung der erhaltenen Ergebnisse eine Rolle. Bei einem umfassenderen Bild, das sich durch die Integration allgemeinerer Metakognition ergibt, lässt sich klarer analysieren, an welchem Punkt, bzw. auf welchem Level fördernde Maßnahmen anzusetzen hätten, ob also bereits Metakognition in nennenswertem Maße genutzt wird, auf die Förderungen aufbauen könnten.

4. Kapitel: Ergebnisse

An dieser Stelle werden die in Kapitel 1.2 vorgestellten und erläuterten Forschungsfragen nochmals genannt und kommentiert.

Forschungsfrage 1)

- *Welche metakognitiven Aktivitäten können bei zukünftigen Studierenden im Umgang mit/ im Hinblick auf Mathematik – vor allem in Bezug auf Begriffe und Methoden der Analysis – beobachtet werden?*

Die Beantwortung dieser Forschungsfrage erfolgt auf Basis der empirischen Erhebung und der daraus resultierenden Interview-Transkripte; dabei orientiert sich die Dokumentation an den Themenbereichen des Leitfadens, die wiederum an die (schulische) Erfahrungswelt der Teilnehmer_innen angelehnt sind.

Forschungsfrage 2)

- *Wie lässt sich der Einsatz von Metakognition beim Umgang mit Mathematik – basierend auf theoretischen Überlegungen und empirischen Erkenntnissen (vgl. FF1) – möglichst umfassend in Form eines Modells systematisieren, das bestehende Kategorisierungen erweitert?*

Theoretische Überlegungen und die Auswertung der empirischen Erhebung (im Sinne der Codierung und ihrer Systematisierung) resultieren in einer Systematisierung des Begriffs Metakognition, die den Begriff möglichst umfassend und im Hinblick auf den Umgang mit Mathematik erfasst. Auf theoretischer Ebene liegen diesem System etablierte Erläuterungen des Begriffs zu Grunde – primär die auf Schneider (z.B. Schneider et al., 2010) und Schoenfeld (z.B. Schoenfeld, 1991) zurückgehenden. Diese etablierten Konzepte wurden durch eigene Überlegungen und empirische Resultate bestätigt, erweitert und im Hinblick auf ihre Wechselwirkungen weiter systematisiert – stets unter Beachtung ihrer Bedeutung für den Umgang mit Mathematik und eine diesbezügliche potentielle Operationalisierung im Bereich der Lehre. Das vorgestellte System zeichnet sich also vor allem durch seine weitgehende Abgrenzung zu anderen (oft gemeinsam beforschten) Begriffen (wie bspw. Motivation,

Emotion, Modellierung, etc.), seine möglichst umfassende Kategorisierung der Facetten des Begriffs Metakognition (insofern, dass keine der etablierten Komponenten „priorisiert“ oder ausgeblendet werden, vgl. Kapitel 1.4) und die Beschreibung ihrer Wechselwirkungen, sowie durch seinen engen Bezug zur Fachwissenschaft Mathematik und ihrer Didaktik aus.

Forschungsfrage 3)

- *Welche Ansatzpunkte für den Einsatz von Metakognition zeigen sich bei zentralen Themenbereichen der Mathematikdidaktik und wie kann Metakognition beim Umgang mit zentralen Begriffen der Analysis in Erscheinung treten?*

Die Beantwortung von Forschungsfrage 3 erfolgt in Form mehrerer theoretischer Analysen sowie einer Forschungsfrage 2 ergänzenden Vorstellung metakognitiver Ausprägungen im Hinblick auf die Mathematik.

Im Rahmen letzterer werden zentrale Vorgehensweisen und Kognition, die im Rahmen von Mathematik wichtig erscheinen bzw. erscheint, auf ihre Zusammenhänge mit Metakognition hin untersucht, die in Form eines Zusammenwirkens verschiedener Aspekte in Aktion tritt.

Im Anschluss erfolgt eine Analyse zentraler mathematikdidaktischer Themen und Prinzipien, die auf ihren metakognitiven Gehalt hin analysiert werden.

Zuletzt wird an zentralen Begriffen und Verfahren aus dem Analysis-Unterricht der Sekundarstufe II exemplarisch aufgezeigt, wie Metakognition unterstützend in Erscheinung treten kann.

4.1. Ergebnisse zu Forschungsfrage 1

Es sollte beachtet werden, dass die Beobachtungen im Rahmen des Interview-Verlaufs und während der Aufgaben-Bearbeitung kritisch betrachtet und eingeordnet werden müssen. Da Metakognition grundsätzlich ein natürlicher Teil der menschlichen Kognition ist, kann es nicht überraschen, dass ein gewisses Mindestmaß an metakognitiver Aktivität bei den Teilnehmer_innen zu beobachten war. Durch die Aufforderung zum lauten Denken wurde der

Einsatz von Metakognition möglicherweise zusätzlich provoziert; es ist außerdem denkbar, dass manche Äußerungen von Teilnehmer_innen nicht der tatsächlich stattgefundenen Kognition entsprachen, sondern aus dem Bedürfnis heraus entstanden, dem Wunsch des Interviewleiters nach Verbalisierungen zu entsprechen. Auf Grund des „lediglich“ explorativen Charakters der Dokumentation sollte dies ein akzeptables Risiko darstellen, das zwar nicht ignoriert werden kann, sich bei derartigen Forschungsdesigns aber ohnehin kaum vermeiden lässt.

Dokumentation

Vorstellungen zu kognitiven Mechanismen und Lernprozessen

Allgemein zeigte sich, dass bei den Teilnehmer_innen Vorstellungen, bzw. Wissen zu kognitiven Mechanismen und Lernprozessen vorhanden waren.

- „[...] es is mir immer ganz wichtig dass die leute es verstehen, dass sie nicht nur lernen, so auswendig lernen is, schlecht funktioniert vielleicht ne zeit lang, bloß wenn man so ne masse formeln hat und sich nur fragt was tun die, wird es schlecht grad wenn die neue formel auf der alten aufbaut [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] des hinschreiben ist wirklich wichtig also, dass man, sich überlegt wie machen wirs wie geh ich ran ok – aber wenn ich des nicht an nem konkreten beispiel einfach mal durchrechnen kann oder besser noch, jemanden des an einem konkreten beispiel erklären kann (Interview_Transkript_06_x2_Z.197 – Student_2)
- ich denke wirklich dass der mensch an problemen wächst dass des gehirn so gesehen sich drauf einstellt, eben auch diese lösungswege dann lernt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] ich hab, ich bin gelegentlich gefragt worden ob ich denn mal was erklären kann, da hab ich auch gemerkt dass des hilft des besser zu verstehen, sowohl der person der mans erklärt, mit n bisschen glück zumindest, als auch mir selbst [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.75)

- „[...] äußert sich hauptsächlich, an der geschwindigkeit mit der mer konzepte versteht [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.49)
- „[...] [am anfang] – kann mer sich sachen, nur schwer vorstellen, und dementsprechend sind lösungen die leicht ersichtlich sind, auch, besser ums zu verstehen, irgendwann wenn mer dann das prinzip n bisschen begriffen hat, geht’s dadrum die vorstellung des möglichen ergebnisses, weiter [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.247)
- „[...] und des eigent, der eigentliche lerneffekt kommt nur durchs nachdenken [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.389)
- „[...] des wichtigste dabei find ich dass mer selbst drüber nachdenkt, und wenn mer nur drüber nachdenkt und aber kein schritt weiterkommt dann wird das nachdenken auch frustrierend, dementsprechend wenn mer dann nen kleinen schritt weiter is kann mer den im nachhinein noch verstehen, meistens hoffentlich, und von da aus eventuell durch weiteres nachdenken weiterkommen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.385)

Natürlich können hier weder Expertenwissen noch entsprechende Formulierungen auf wissenschaftlichem Niveau erwartet werden; des Weiteren lässt sich die Korrektheit des Wissens der Teilnehmer_innen durchaus anzweifeln.

- „[...] die leute sind nicht dumm aber sie kriegen andauernd durch die noten gesagt du bist dumm, und irgendwann glaubt man dann [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.183 – Student_1)
- „[...] für den hochpunkt kann mer die krümmung vernachlässigen das heißt des ax^2 würde rausfallen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.313)

Dennoch ist auffällig, dass dieses Wissen offenbar bewusst in die eigenen Entscheidungen einbezogen wurde und wird.

- „[...] ich versuch des dann schon irgendwo anders zu machen klar wenn ich seh dass es jemand nicht versteht dann bleib ich nicht auf meinem einen satz hängen – des denk ich halt macht halt schon nachhilfe geben halt auch aus ich mein – bisher warn die leute denen ich nachhilfe gegeben hab recht zufrieden mit mir, außer sie hatten selber keine lust aber – [war dann halt nicht meine schuld] [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.562 – Student_1)

- „[...] was das lernen anging für die einzelnen fächer, da hab ich so meine taktik gehabt [...] ich hab meistens einen tag vorher mir das nochmal angeguckt, alles, hab mir noch ein paar aufgaben nochmal durchgerechnet, also wenn ich wusste, da bin ich sicher, dann hab ich nur noch mal drüber geschaut und da wo ich halt merkte, okay, da dauert es noch ein bisschen länger oder da mach ich noch fehler oder da ist noch einiges nicht ganz richtig verinnerlicht worden, dann hab ich dazu noch ein paar aufgaben durchgerechnet und welche rausgesucht, entweder welche die schon dastanden, wo ich also das ergebnis hatte, die aufgabe halt dann noch mal abgeschrieben und durchgerechnet oder mir halt neue irgendwo gesucht - oder manchmal irgendwas mir auch selber ausgedacht, was man mit dem taschenrechner nachprüfen konnte und mir dann irgendwelche beispiele ausgedacht und die dann gerechnet und mit dem taschenrechner nachgeprüft, womit es mir dann klar geworden ist und dann hab ich halt meistens ein tag vorher gelernt und dann hab ich mir gedacht, ja jetzt passt es - müsste ich schon irgendwie hinkriegen [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.83)
- „[...] ich sehe ich kann es nicht also lern ich es [...] bis ichs verstehe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.164 – Student_2)

Vorstellungen über die Wechselwirkungen zwischen Emotion, Motivation und mathematischer Aktion

Es zeigt sich, dass die meisten Teilnehmer_innen Vorstellungen über die Wechselwirkung von emotionaler Situation, Motivation und dem Umgang mit Mathematik (im Hinblick auf den Lernerfolg und auf Prüfungsleistungen) besitzen. Motivationale und emotionale Komponenten, die mit dem eigenen (Lern-)Erfolg zusammenhängen, werden bewusst genutzt (oder auch vermieden), um eigene Lernprozesse und kognitive Vorgänge im Umgang mit Mathematik zu verbessern. Ein wiederkehrendes Motiv, von dem berichtet wird – in Bezug auf die eigene Person oder auf andere – ist dabei das einer – bisweilen – starken affektiven Reaktion bei Konfrontation mit einer neuen Aufgabenstellung, die „auf den ersten Blick“ Schwierigkeiten bereitet. Diese Reaktion kann von Verwirrung bis hin zu regelrechter Panik reichen und wird als Einschränkung, Blockade und teils sogar geradezu als lähmend beurteilt, wobei von derart „schweren“ Fällen vor allem in Bezug auf Dritte – oft Nachhilfeschülerinnen und -schüler – berichtet wird.

- „[...] is es halt bei mir so dass ich, zwar auch diesen ehrgeiz hab aber oftmals is es, ehr des äh die zweite phase davor is erstmal oh mein gott ich kanns nicht und verzweifel erstmal halb [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.226 – Student_1)
- „[...] mit dem frust is schwierig umzugehen des, lässt sich eigentlich nur, damit umgehen indem mers probiert, und drauf hoffen dass es dann irgendwie funktioniert [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.381)

Dabei kommen teils auch Bilder oder Metaphern zum Tragen, die zur Beschreibung und zur Steigerung der eigenen Motivation genutzt werden.

- „[...] des äh hab ich auch irgendwo von so äh meiner mutter also des is, oft so dass die des halt mit gewinnen vergleicht also so, äh, was du nicht hin kriegst und wenn dus dann doch schaffst dann hast du des besiegt so sagt sie immer hab ich das besiegt und so und äh – ich find die formulierung sehr treffend, deswegen hab ich die halt klar irgendwo übernommen - und es is ja auch so wenn du jetzt ne aufgabe nicht lösen kannst, dann besiegt dich ja quasi die aufgabe weil du sie nicht lösen kannst, und wenn du sie dann lösen kannst dann hast dus der aufgabe quasi gegeben so [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.257 – Student_1)

Hier tritt Metakognition offenbar in Form von Wissen über den Einfluss, den Affekte auf (die eigene) Kognition haben können, auf, sowie in Form von Wissen um die Notwendigkeit, derartigen (negativen) Einflüssen steuernd entgegenzuwirken, bzw. solche (positiven) Einflüsse ggf. zu nutzen, um die eigene kognitive Leistungsfähigkeit zu unterstützen; des Weiteren im Wissen darum, welche Arten von Affekten und Einflüssen im eigenen Fall (typischerweise) eine Rolle spielen und wie sich diese handhaben, bzw. nutzen lassen. Metakognition kommt hierbei also in Form von Wissen über Kognition im Allgemeinen und in Form von Personenwissen zum Tragen; außerdem in Form von Strategiewissen in Bezug auf den Umgang mit Affekten. Auf prozeduraler Seite spielt natürlich die Überwachung der eigenen Kognition und der beeinflussenden Affekte während des Umgangs mit Mathematik eine Rolle.

Vorstellungen über den Einfluss von Lehrkräften

Bei praktisch allen Teilnehmer_innen ließen sich relativ klare Vorstellungen, bzw. Beliefs darüber beobachten, ob und wie Lehrkräfte den eigenen (Lern-)Erfolg im Fach Mathematik beeinflussten; es wurden dabei auch direkte „Qualitätsurteile“ gefällt.

- „[...] ich denke wirklich dass der mensch an problemen wächst dass des gehirn so gesehen sich drauf einstellt, eben auch diese lösungswege dann lernt des is genau des was ein dozent bei einem auch tun kann, wie beweis ich was sauber wie schreib ich des hin, wie wie denk richtig also dass ich, die ansatzpunkte sehe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] natürlich sie hatte fachlich ahnung, ist ja logisch als lehrer, okay das kann man jetzt schlecht beurteilen, sie war halt auch nett an sich, aber sie war halt sehr durcheinander, sie hatte an der tafel tausendmal rechenfehler gemacht und ich sage, das ist halt das problem, ich sag mal jetzt man als schüler auch anfällig ist, wenn der lehrer durcheinander ist, kommt man auch selber durcheinander, wie gesagt, sie war nett und hat da auch teilweise gut und verständlich gemacht, aber manchmal war es so, sie hat sich selber vertan und sich selber verhaspelt und gerade bei stochastik, die hat es selber nicht wirklich gekonnt und dann hat sie so gesagt - und nachdem ich mir dieses arbeitsblatt letztens selber angesehen habe, habe ich auch die stochastik verstanden [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.63)

Es konnten konkrete Schwierigkeiten und Probleme auf Seiten der Lehrkräfte und ihrer Art der Vermittlung identifiziert werden, bzw. inwiefern sich diese auf die Lernenden (sowohl auf die eigene Person als auch auf Mitschüler_innen), ihre Motivation und ihre kognitiven Prozesse auswirkten.

Teilweise wurde von den Teilnehmer_innen auch erkannt, wann zusätzliche Erklärungen, Ressourcen o.Ä. benötigt wurden, die über die von der Lehrkraft vermittelten Inhalte hinausgingen. (Ob es sich dabei um einen verlässlichen Mechanismus handelte, kann hier nicht beurteilt werden.)

[Vor allem für diesen Teil der Dokumentation sei nochmals betont, dass eine Beurteilung der Vorstellungen der Teilnehmer_innen von Seiten des Autors nicht Ziel

der Fragestellung ist – weder im Hinblick auf Zutreffen oder Angemessenheit noch im Hinblick auf die von den Teilnehmer_innen gewählten Formulierungen.]

Einschätzung der eigenen Fähigkeiten

Im Hinblick auf ihre Erfahrungen während der Schulzeit konnten sie ihre eigenen Leistungen, Stärken und Schwächen beurteilen, sich in dieser Hinsicht mit anderen Schülerinnen und Schülern vergleichen und ihre Fähigkeiten im Umgang mit Mathematik allgemein beschreiben.

- „[...] ne, das war gar nicht so meine Stärke [...]“
(Interview_Transkript_02_x1_Z.63)
- „[...] ich konnte halt viele Sachen relativ intuitiv gut [...]“
(Interview_Transkript_06_x2_Z.239 – Student_2)
- „[...] bis zur 10. fand ich es total einfach, da hatte ich gar keine Probleme, da fiel mir das einfach so, leicht weg, einfach so aus der Hand raus ging es dann raus, die ganzen Aufgaben in der Schule – ab der 11 wurde es dann ein bisschen komplizierter, aber trotzdem es hat es mir Spaß gemacht, das ging eigentlich auch relativ gut [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.9)
- „[...] also mit dem Verstehen ist es halt so, dass gerade bei der Schulmathematik, wenn die Lehrerin schon vorgemacht hat, dass ich eigentlich sofort mitgekommen bin und ich mit dem Beispiel sofort was anfangen konnte und auch mit dem Beispiel gleich gut klar gekommen bin und mit den paar Übungsaufgaben praktisch sofort loslegen konnte [...]“
(Interview_Transkript_01_x1_Z.21)

Auch beim Einschätzen der mathematischen Fähigkeiten von Mitschüler_innen schienen die meisten Teilnehmer_innen einen recht guten Überblick darüber zu haben, von wessen Erklärungen man profitieren konnte, bzw. auf wessen mathematische „Kompetenz“ man sich verlassen konnte, wenn Verständnisschwierigkeiten auftraten.

Umgekehrt bestand ein Bewusstsein für die eigenen Fähigkeiten (insbesondere beim Erklären mathematischer Inhalte) und dafür, ob Mitschüler_innen von den eigenen Erklärungen und Hilfestellungen profitierten, bzw. diesen folgen konnten. Ggf. konnte hier bei Nicht-Erfolg von den meisten Teilnehmer_innen ein alternativer Erklär-Ansatz gefunden und angewendet werden. Das eigene Verhalten wurde also im Hinblick auf seine Wirkung überwacht und beurteilt und entsprechend angepasst.

Mehrere Teilnehmer_innen äußerten im Hinblick auf das Unterrichten von Nachhilfeschüler_innen, dass sie in der Regel in der Lage waren, das Verständnis ihrer Schüler_innen zu beurteilen und sich deren Bedürfnissen und Lernfortschritt anzupassen und ggf. – so wie bei Mitschüler_innen – im Falle von Schwierigkeiten diese zu erkennen und alternative Erklär-Ansätze zu entwickeln.

Vorstellungen über das Funktionieren kognitiver Vorgänge und damit verbundene Schwierigkeiten

Es bestanden häufig auch konkrete Vorstellungen darüber, welche (kognitiven) Mechanismen überhaupt erst zu den Schwierigkeiten im Umgang mit Mathematik (und auch anderen Fächern) geführt hatten.

Dies äußerte sich entsprechend oft in Leistungszuwächsen der betreffenden Personen. Wo dies nicht der Fall war, konnten die Teilnehmer_innen entweder (kognitive, metakognitive, motivationale, etc.) Gründe für diese Schwierigkeiten erkennen und angeben (korrekt oder nicht) oder sahen etwa Gründe bei der eigenen Person (bzw. Kognition).

Im letzteren Fall hingegen lässt sich allerdings vielmehr von Metakognition im Sinne eines Wissens oder Bewusstseins darüber sprechen, dass die (kognitiven) Mechanismen, die eine effektivere Nachhilfe ermöglicht hätten, nicht durchschaut wurden – quasi Wissen über eigenes Unwissen oder Unverständnis.

Teils ließ sich im Hinblick auf das Lehren, Lernen und das Verstehen von Mathematik in den angesprochenen Kontexten regelrecht (fach-)didaktisches Wissen bei den Teilnehmer_innen beobachten – auch hierbei natürlich vor allem dem „Wesen“ nach und nicht auf dem Niveau einer Expertin sowie möglicherweise nicht immer „korrekt“.

- „[...] es is mir immer ganz wichtig dass die leute es verstehen, dass sie nicht nur lernen, so auswendig lernen is, schlecht funktioniert vielleicht ne zeit lang, bloß wenn man so ne masse formeln hat und sich nur fragt was tun die, wird es schlecht grad wenn die neue formel auf der alten aufbaut [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] also ich weiß nicht ich kann dadurch lernen dass ich was abstrakt mach des is ne sache die wenige leute können das weiß ich also, grad weil die meisten meiner nachhilfeschüler sind verloren wenn dann da nicht mehr zahlen

sondern a b und c stehen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.195 – Student_2)

- „[...] rückfragen, sind das wunderschöne am menschen, er sieht was versteht es nicht, und guckt dass es angreift also so das motto ich versteh es nicht also muss es falsch sein oder muss irgendwas fehlen, und durch dieses fehlen kann man ins stolpern kommen, wenn man sich jetzt fragt warum machste jetzt diese umformung, äh – oder – also oder warum weiß ich jetzt dass des gilt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.207 – Student_2)
- „[...] fallen sind n guter weg um leuten was bei zu bringen ohne dass man, also ich ich benutz sie sehr bewusst wenn ich n nachhilfeschüler hab der meint er hätte was verstanden und dann mach ich n ding des n bisschen verzickter is wo man, sag ich mal also – es gibt leute die sich alles aufmalen und des dann graphisch lösen, und dann geb ich denen n fall den sie graphisch nicht lösen können – des is jetzt nicht unbedingt ne falle aber es zeigt ihnen es geht so nicht [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.267 – Student_2)
- „[...] dadurch dass mer des ganze aus nem anderen blickwinkel angeht, nämlich nicht nur versucht des zu verstehen sondern – des so zu verpacken dass es verständlich ist, und nach möglichkeit noch in nem anderen weg als es schon erklärt wurde [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.79)
- „[...] wenss jetzt gerade schon des, ende von extremwertproblemen is am ende des kapitels dann könnt ich mir auch ne aufgabe vorstellen, wo er nicht an einem dieser drei markanten punkte liegt [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.241)

Dies stützt die Annahme, dass Metawissen teils fachdidaktischem Wissen ähnelt, das einer Person selbst zur Verfügung steht, um den eigenen Lernprozess und den eigenen Umgang mit fachlichen Inhalten zu steuern. (vgl. etwa Kapitel 4.2, Kapitel 4.4.1)

Insgesamt schienen bei den Teilnehmer_innen in der Regel Vorstellungen darüber zu bestehen, wie verschiedene kognitive Vorgänge im Allgemeinen funktionieren.

Dabei entstand der Eindruck, dass über derartige Mechanismen im Verlauf des Interviews nicht zum ersten Mal nachgedacht wurde, sondern bereits zuvor entsprechende Überlegungen angestellt worden waren oder unbewusst (metakognitive) Erfahrungen entstanden waren, die

im Gespräch ins Bewusstsein gerufen und verbalisiert wurden.

- „[...] rückfragen, sind das wunderschöne am menschen, er sieht was versteht es nicht, und guckt dass es angreift also so das motto ich versteh es nicht also muss es falsch sein oder muss irgendwas fehlen, und durch dieses fehlen kann man ins stolpern kommen, wenn man sich jetzt fragt warum machste jetzt diese umformung, äh – oder – also oder warum weiß ich jetzt dass des gilt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.207 – Student_2)

Dabei bezogen sich die beobachteten Vorstellungen nicht ausschließlich auf die jeweils eigene Kognition, sondern auch auf die anderer Personen.

- „[...] manche können erklären manche nich, ich hatte dann natürlich so leute die mirs immer erklärt ham [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.16)

Im Hinblick auf strategisches Verhalten und die ihm zu Grunde liegenden metakognitiven Erfahrungen und Überlegungen scheinen die meisten Teilnehmer_innen regelmäßig Kosten-Nutzen-Überlegungen in ihre Vorbereitungs-, Lern- und Übungs-Prozesse miteinzubeziehen. Der Nutzen, bzw. Effekt investierter Zeit und investierten (Lern-)Aufwands wird mit Ergebnissen (bspw. in Form von Klausur-Noten) abgeglichen und entsprechende Anpassungen des entsprechenden (Lern-)Verhaltens werden vorgenommen. Hier scheinen die meisten Teilnehmer_innen ihr Verhalten normalerweise zu überwachen und möglichst optimiert und effizient zu gestalten.

In mehreren Fällen wurde allerdings über ein rein effizienz- und notenorientiertes Verhalten hinaus Mathematik auch privat aus Interesse an der Materie betrieben – sowohl in Form von Mathematik-Wettbewerben als auch in Form zusätzlicher Beschäftigung mit weiterführenden Fragestellungen, die die betreffenden Teilnehmer_innen offenbar häufig selbst generierten.

- „[...] wichtig schwere dinge zu tun also, ich hab das in der schule einerseits ein bisschen durch nen lehrer bekommen der mir immer mal was mitgebracht hat, das dann nicht mehr so ganz einfach war, oder einfach nen komischen gedanken von mir selbst den ich [...] halt effektiv verfolgt habe und äh, zum beispiel – hab ich auch mal, mich ne zeit lang damit beschäftigt wie ich den goldenen schnitt herleite also die richtige wie rechne ich aus ner einfachen konstruktion raus machen kann – und – da lernt man dann auch solche sachen

am schluss sieht man so des war eigentlich viel viel einfacher
[...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)

Erfahrungen über den Nutzen (allgemeinen) metakognitiven Wissens

Während im fachnahen Bereich gewisse Schwächen zu bestehen schienen, ließ sich für den allgemeineren Fall bei den meisten Teilnehmer_innen ein relativ guter Überblick über Systeme und ihre Wirkzusammenhänge feststellen. Gemeint ist hiermit die Fähigkeit, bspw. typische Mechanismen des (Mathematik-)Unterrichts oder von (Mathematik-)Prüfungen zu durchschauen, beschreiben zu können und für das eigene Verhalten Konsequenzen ziehen zu können.

Teils entstand der Eindruck, dass die Teilnehmer_innen konkrete (und reflektierte) Vorstellungen von Mechanismen hatten, die zu Erfolg oder zu Misserfolg im Rahmen schulischer Herausforderungen beitragen.

- „[...] diese sturheit eigentlich bringt einen grad in der mathematik sehr weit weil, es dann doch es gibt eine lösung des is dann, man weiß man kanns beweisen nur wie, man muss halt irgendwie anders ran gehen und gelegentlich is dann auch einfach schon ne pause nochmal angucken drüber nachdenken [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.164 – Student_2)

Dieses Wissen wurde offenbar strategisch genutzt, um die eigenen Chancen – bspw. im Rahmen von Prüfungen – zu erhöhen.

Insbesondere fällt auf, dass entsprechende strategische Überlegungen genutzt wurden, um auch konkrete fachliche Herausforderungen zu bewältigen, indem bspw. Wissen über typisches Verhalten von Lehrkräften oder über die Struktur von Klausuren als zusätzliche Informationsquellen verwendet wurden, um auf fachliche Inhalte zu schließen.

So wurden bspw. Prognosen gestellt, welche Aufgaben(typen) von größerer Wichtigkeit seien oder (deshalb) mit höherer Wahrscheinlichkeit Teil einer Prüfung sein würden. Hierbei wurden z.B. Fälle genannt, in denen solche Prognosen vor allem anhand des Verhaltens und von Äußerungen der entsprechenden Lehrkräfte gestellt wurden, bzw. anhand der Häufigkeit, mit der entsprechende Aufgaben im Unterricht (beim Üben) zur Sprache kamen. Andererseits ging aus manchen Beschreibungen auch hervor, dass Prognosen anhand „inner-mathematischer“ Überlegungen gestellt wurden. Aufgaben(typen) oder Begriffe wurden hierbei also als zentral erkannt, oder aber als besonders schwierig, grundlegend, „machbar“, etc.

beurteilt, was ihre Verwendung in Klausuren und mündlichen Prüfungen wahrscheinlicher oder unwahrscheinlicher machen würde.

- „[...] bei den Klausuren vorher auch eine Sache wenn das, gut besprochen wurde ne schwierigere Aufgabe also äh, da hatt ich wirklich nen Lehrer der immer die schwerste Aufgabe aus dem Halbjahr einfach dran gebracht hat, des kann man merken muss man aber nich [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.191 – Student_2)

Auffälligerweise wurden derartige Prognosen nicht nur im Sinne von Auftretens-Wahrscheinlichkeiten gestellt; es konnte in einigen dieser Fälle – zumindest im allgemeineren, fachferneren Bereich – auch über die zu Grunde liegenden Zusammenhänge reflektiert und geurteilt werden, d.h., es konnte begründet werden (korrekt oder inkorrekt), warum bestimmte „Ereignisse“ bestimmte Konsequenzen nach sich zogen.

In diesen Fällen wurden Mechanismen also nicht nur observiert, sondern vermutlich auch entweder spontan durchschaut (→ Awareness und Überwachung, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2), durch Reflexion begriffen oder durch Rezeption von Erklärungen seitens der Lehrkraft (→ Personenwissen, Überwachung, Reflexion, vgl. Kapitel 1.4, Kapitel 4.2) verstanden. In jedem Fall wurden die resultierenden Erkenntnisse – im „fachferneren“ Bereich – oft genutzt, um das eigene Handeln im Hinblick auf schulischen Erfolg, Optimierung, was genutzte Zeit und betriebenen Aufwand betrifft, oder zur Minimierung von (psychischen) Belastungen zu steuern und anzupassen.

Vorstellungen zum Umgang mit Mathematik und zu mathematischen Teilgebieten

Vergleichbare Aktivitäten, was den Überblick über und das Verständnis für die Mechanismen und Wirkzusammenhänge von „Systemen“ betrifft, wurden im fachnäheren Bereich in deutlich geringerem Umfang festgestellt.

Für diesen Eindruck sind verschiedene Ursachen vorstellbar. Wie an anderer Stelle ausgeführt, können Schwierigkeiten bei der Verbalisierung eigener Gedanken, bzw. eigenen (Meta-)Wissens und eigener (metakognitiver) Erfahrungen (hier speziell in Bezug auf Fachwissen) verantwortlich sein, die für den fachnahen Bereich von Metakognition möglicherweise stärker zum Problem werden könnten als im allgemeineren Bereich. Der höhere Abstraktionsgrad von Mathematik im Vergleich zu allgemein-strategischen Überlegungen lässt dies als nicht unwahrscheinlich erscheinen. Diesem Umstand entsprechend, sollte es auch nicht

erstaunen, wenn metakognitive Reflexion, Überwachung oder die Planung komplexer mathematischer Vorgänge sowie die (dabei erfolgende) Generierung von metakognitiven Erfahrungen und von Metawissen im Umgang mit Mathematik schwieriger ist, als dies beim Umgang mit „Weltwissen“ und alltäglicheren Aufgaben der Fall ist. Hinzu kommt die Entwicklungsrichtung von Metakognition von allgemeineren, „simpleren“ Bereichen hin zu einem höheren Abstraktions- und Komplexitätsniveau (vgl. Kapitel 2.1.3), die eine hohe Kompetenz im Bereich fachnaher Metakognition erst nach dem Erwerb einer solchen in allgemeineren Bereichen erwarten lässt.

In jedem Fall – also auch bei einem speziell fachnahen Verbalisierungs-Problem – spricht dieser Eindruck dafür, dass im Bereich Mathematik (und insbesondere Analysis) bei den Teilnehmer_innen größere Defizite herrschen, die im Allgemeineren nicht derart stark auftreten. Auch eine Schwäche beim Verbalisieren von Metakognition kann letztlich als eine Schwäche BEI Metakognition (wenn auch möglicherweise in einem anderen Bereich von Metakognition) angesehen werden.

Wissen über Mechanismen im Rahmen von Systemen bestand offenbar auch im Hinblick auf die Studienwahl und das damit angestrebte Berufsziel. So wurden Aussagen dazu getroffen, welche Eigenschaften für Mathematiker_innen eine Bedeutung spielten.

- „[...] einer von den top matheleuten werd ich ganz sicherlich nicht weil dazu braucht man sowas – ähm, meine meinung jetzt, weil des is halt, erleichtert des natürlich wesentlich [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.123 – Student_1)

Besonders im Hinblick auf die Frage nach Unterschieden zwischen mathematischen Fachbereichen (im Unterricht) und entsprechenden Vorlieben wurde der Begriff des „Schemas“ mehrfach genannt.

Dieser diente als Indikator für Unterschiede zwischen (oftmals) dem Unterrichts-Bereich Analysis und anderen Bereichen (z.B. der Stochastik).

- „[...] es ist dann halt so nicht nur immer das schema f und so, [...] wo man noch mehr um die ecke denken muss und sich noch ein bisschen reindenken muss, es ist auch machbar, aber halt ein bisschen schwieriger und dann auf jeden fall so, bei der stochastik, ich sag ja auch auf jeden fall das wenn der lehrer dir das einigermaßen gut erklärt und es auch die schüler verstehen, dann ist das auch okay [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.69)

- „[...] in der schule waren die aufgaben meistens alle recht ähnlich gestellt oder hatten immer so n schema [...] also konnte man schon ahnen also wenn, n paar werte halt gegeben sind und je einer wird gesucht, dann hast du noch ne aufgabe im hinterkopf gehabt die halt dasselbe war, und dann konntest du dieses schema x halt drauf anwenden einfach, und dann hattest du die aufgabe gelöst [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.97)

Dabei wurde die Analysis auf Grund ihrer Schemahaftigkeit als vergleichsweise leichter verständlich oder ihre Methoden als besser erinnerbar und entsprechende Aufgaben und Klausuren damit als machbarer beurteilt.

- „[...] am liebsten also zumindest aus der 12 war mir die vektorenrechnung, die geometrie fiel mir eigentlich ganz leicht, war eigentlich auch am einfachsten, dann die differentialrechnung, also die ableitungen dann, wo man die ganz normalen regeln anwenden konnte und die anwendungen dazu fand ich jetzt auch noch ganz einfach, die integralrechnung, das ging eigentlich auch, und ja gut die stochastik, ich sag mal in der 11, fiels mir am ende ein bisschen schwieriger, aber in der 12 hatten wir die signifikanz, das rechtsseitige und linksseitige, das ging dann wieder eigentlich total einfach [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.67)

Speziell beim Thema „Grenzwerte“ wurde allerdings auf das „Fehlen“ solcher Schemata zur Bearbeitung hingewiesen.

- „[...] da kann man sich dann auch selber gut reindenken, aber es ein bisschen blöd erklärt ist, ist es halt schwierig sich selber da reinzufinden und da gibt es dann auch so themen, wo man dann halt gerade und wie gesagt, es ist ja meistens so ein schema f, wo man ein bisschen überlegen muss, was ist die hypothese und das und das, das geht dann eigentlich und bei den anderen sachen muss man dann wirklich ein bisschen sich reindenken, so ein bisschen so um die ecke zu denken und das ist dann schon etwas komplizierter und auch bei grenzwerten, da gibt es nicht nur das schema f, man muss dann manchmal ein bisschen abstrakter denken, sich reindenken und um die ecke denken, das ist dann doch ein bisschen kompliziert [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.69)

Mathematikunterricht, bzw. -lehre an verschiedenen Schulformen und Institutionen konnte bzgl. Inhalt und kognitiver Anforderungen verglichen werden. Bei Teilnehmer_innen, die verschiedene Schulformen entweder aus eigener Erfahrung kannten oder Einblicke in andere Schulformen als die eigene z.B. durch die Betreuung von Nachhilfeschüler_innen oder im Umgang mit Geschwistern und Freund_innen erhalten hatten, schienen relativ klare Vorstellungen davon zu haben, ob und wie sich Unterricht und (kognitive) Anforderungen zwischen diesen unterscheiden.

- „[...] ja die lernen ja auch ganz anders als das gymnasium das gymnasium lernt ja ehr so theoretisch und die realschule anwendungsbezogen [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.14)
- „[...] des machen die realschüler auch glaub ich für maximas und minimas, da bildet mer dann die scheidelpunktsform mit der quadratischen ergänzung – ja – aber ich würde bezweifeln also ich weiß es nicht wie ein neuntklässler auf die aufgabe reagiert ob der wirklich auf die idee kommen würde x mal y zu nehmen und da ne funktion zu bilden – ich würde bei nem neuntklässler ehr einschätzen dass er das ausprobirt [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.31)

Auch auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen „Schul-Mathematik“ und der bisher im Vorkurs „erlebten“ „Hochschul-Mathematik“ konnte eingegangen werden.

- „[...] wir sind halt noch voll im schulschema [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.376 – Student_1)
- „[...] also mathe das war ja echt erstmal ins kalte wasser rein geschmissen – also viele von uns hatten ja jetzt sehr lange frei, wir haben im, ende juni war unsere verabschiedung und danach hab ich eigentlich nichts gemacht – und dann, mathe vorkurs das war schon sehr schwer - also ich hab mich dann auch noch jeden abend hingehockt, hab mir dann alles nochmal durchgelesen – weil nachmittags manchmal da hat das gehirn dann einfach abgeschaltet [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.43)
- „[...] es hat den anschein als wär die vorlesung noch schulstoff so wie er war, und sehr verständlich und die aufgaben sind dann ne ganz andere leistungsklasse deutlich drüber, das heißt in der vorlesung, überleg ich meistens wieso ich eigentlich da bin und über den aufgaben sitz ich dann

drüber und hab keine ahnung was ich eigentlich tun soll
[...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.379)

Im Hinblick auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Mathematik als Schulfach und anderen Schulfächern wurde vor allem eine höhere Verständnis-Intensität im Fall Mathematik betont.

- „[...] weil ichs net so, gekonnt hab wie mathe, mathe war einfacher und deswegen da wo ich halt vor allem ich hab mich auch jetzt äh im gymi hab ich mich auf geschichte wesentlich mehr vorbereitet als mathe weil mathe war für mich klar ok wenn ich jetzt was falsch hatte dann wars halt falsch [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.230 – Student_1)

Einschätzungen von typischen Verhaltensweisen beim Umgang mit Mathematik

Während in punkto Studienwahl keine besonders ungewöhnlichen Motivationen oder Überlegungen berichtet wurden, schienen sich die Teilnehmer_innen ihrer Beweggründe, die zur Studienwahl geführt hatten, sehr wohl bewusst zu sein und konnten diese in der Regel angemessen ausführlich darlegen.

Dabei wurde insbesondere auf Motivation und Vorlieben sowie auf eigene Stärken und Schwächen eingegangen.

Es entstand der Eindruck, dass über diese Thematik nicht zum ersten Mal tiefgehend nachgedacht wurde (was nicht überraschen sollte) und dass in diese Entscheidungen ein entsprechendes Maß an Metakognition und strategischen Überlegungen eingeflossen war.

Sie konnten typische Verhaltensweisen beim Umgang mit Mathematik nennen und beschreiben und – mit Einschränkungen – ihr „Verhältnis“ mit einzelnen mathematischen Themenbereichen bewerten; z.B., welche Bereiche mehr oder weniger Schwierigkeiten bereitet hatten und welche Begriffe und Strategien schwerer oder weniger schwer verständlich gewesen waren.

- „[...] Funktionen hab ich ganz gut gekonnt und dann hab ich’s auch recht gerne gemacht [...] und bei Stochastik, das war natürlich dann, da muss man sich dann nochmal hinhocken [...]" (Interview_Transkript_02_x1_Z.93)
- „[...] ich bin selbst sehr gut in Stochastik klargekommen [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.109)

- „[...] ich hau das irgendwie immer durcheinander [...] man startet mit dem Differentialquotienten oder so [...] so haben wir das glaub ich auch Anfang der Elften das erste Mal durchgerechnet [...] und dann irgendwann die einfachere Form gemacht, mit der Faktorregel, Kettenregel, Quotientenregel [...] wenn man das dann irgendwann mal hat, ist es dann eigentlich total einfach [...] wenn man das jetzt zum ersten Mal sieht, wirkt es dann doch sehr schwierig [...] wenn man das dann auch wirklich normal, also die einfachen Regeln mal anwenden kann und ja dann die Übung darin hat, ist es eigentlich gar nicht so [...]“
(Interview_Transkript_01_x1_Z.219)

Teilweise konnten typische Fehler(quellen) genannt und – wiederum mit Einschränkungen – eigene Denkmuster beschrieben werden.

- „[...] wenn man öfters mal die erfahrung macht, dass wenn man sich auf einen lösungsweg nur beschränkt, dass man dann, da kommt man einfach nicht weiter und da muss man viele ausprobieren, bis man irgendwas findet [...]“
(Interview_Transkript_05_x2_Z.87 – Student 1)
- „[...] aber ich bin eher ein fan vom ausmultiplizieren [...]“
(Interview_Transkript_02_x1_Z.33)
- „[...] ich kann dadurch lernen, dass ich was abstrakt mach [...]“
(Interview_Transkript_06_x2_Z.195 – Student_2)
- „[...] ich muss es ja für mich aufschreiben, wenn ich es als was anderes benenne als x und y und ich das dann für mich noch mal irgendwann lese, weil ich sonst durcheinander komme – die waagrechte Achse wurde immer x – uns wurde das so eingetrichtert, dass das eigentlich immer x und immer mit x beschriftet, dann muss ich das so durchrechnen, wenn ich das irgendwie aufschreibe, ist das immer x – sonst komme ich für mich durcheinander [...]“
(Interview_Transkript_01_x1_Z.153)
- „[...] ich finds zum beispiel auch allgemein blöd, das jetzt viele m und n nehmen, so dass man nichts mehr unterscheiden kann, wenn es dann an die tafel geschmiert ist, weil eigentlich kann man ja jeden buchstaben nehmen [...]“
(Interview_Transkript_05_x2_Z.473)

Bewusstsein für Gewohnheiten bei typischen Lernsituationen

In der Regel konnten Gewohnheiten beim Lernen, Vorbereiten und in Prüfungssituationen beschrieben werden.

- „[...] des merk ich beim Kopfrechnen – ich bin jemand der sich eher vertippt, als dass er ‘n Kopfrechenfehler macht bei vielen Zahlen [...] in ‘ner Prüfung tipp ich’s dann nochmal nach, rechne es nochmal nach, ich hab die Zeit, und, mach des zwei-, dreimal [...] da nehm ich mir schon die Zeit für [...] der sichere Ansatz, also es stimmt, in ‘ner Prüfung nimmt man eher den sicheren Ansatz [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.550 – Student_2)
- „[...] ich wusste, was ich konnte und ich wusste, was mir schwerfällt, und hab halt versucht, das, was ich konnte, einfach runter zu machen und das, was mir schwer fällt, einfach noch ein bisschen zurückzustellen und dann zu versuchen, mich reinzudenken [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.27)

Des Weiteren vermochten die Teilnehmer_innen über ihre Fähigkeit zu berichten, benötigte Ressourcen abzuschätzen, die Auswirkungen investierten Aufwandes abzusehen oder realistische Prognosen über Prüfungsergebnisse zu stellen.

Die Fähigkeit, (realistische) Prognosen für den Aufwand zu stellen, der für – bspw. – die Vorbereitung auf eine Klausur notwendig sein würde, schien bei den meisten Teilnehmer_innen gut ausgeprägt zu sein. Rückblickend wurde berichtet, dass in der Regel abgeschätzt werden konnte, wie viel Zeit für die entsprechende Vorbereitung (Wiederholung von Inhalten, Einüben von Rechenwegen, etc.) vonnöten sein würde. Auch ein Bewusstsein dafür, welche Konzepte und Aufgabentypen bei der Vorbereitung mehr oder weniger (zeitlichen) Aufwand benötigen würden (was einerseits mit einem Bewusstsein für die Beherrschung dieser Inhalte zusammenhängt und andererseits mit Wissen über die unterschiedliche Wichtigkeit dieser Inhalte und die Wahrscheinlichkeit, dass sie bspw. in einer anstehenden Klausur abgefragt werden würden), war – laut Aussage – in der Regel vorhanden.

Interessanterweise wurde ebenfalls berichtet, dass aus diesem Wissen nicht immer automatisch ein entsprechendes Vorbereitungsverhalten abgeleitet wurde. In einigen Fällen wurde über – trotz so beurteilter Notwendigkeit – zu wenig betriebenen Vorbereitungs-Aufwand berichtet, in einigen Fällen über zu viel. Beide Fälle wurden in der Regel begründet, z.B. mit Übervorsicht und Nervosität (affektiv) oder Interesse an der Materie (Motivation), oder mit Zeitmangel, psychischem Druck, fehlender Motivation und weiteren Beschränkungen.

- „[...] ich hab auch in Mathe eins gesehen was an der Vorbereitung was, was es ändert, is die Zeit die man für ne Prüfung braucht [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.239 – Student_2)
- „[...] die Vorbereitung hat eigentlich gar nicht mal so riesig viel mitgespielt, es sei denn, ich hab was vorher nicht verstanden [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.241 – Student_2)
- „[...] wenn ich da was falsch hatte, was es mir das meistens klar, wenn ich jetzt dachte, das ist ein bisschen besser gelaufen, ich sag mal, ich konnte zumindest grob die Richtung einschätzen, also ob es jetzt besser gelaufen ist oder nicht [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.89)

Allerdings muss festgestellt werden, dass sich diese Beobachtungen und Erfahrungen zumeist auf einem relativ allgemeinen und oft oberflächlichen (metakognitiven) Niveau abspielen. Tiefergehende Reflexionen bspw. über Mechanismen von Mathematik (wie z.B. Begriffe und ihre Verbindungen oder Anwendungsmöglichkeiten) hatten entweder kaum stattgefunden, waren bewusster Selbstbeobachtung nicht zugänglich oder wurden nicht verbalisiert. Denkprozesse, die prozeduraler Metakognition zugeordnet werden können (vor allem Reflexion) wurden von Teilnehmer_innen genannt, waren aber offenbar nur in dem Maße von Bedeutung, in dem ein unmittelbarer Zusammenhang mit schulischem Erfolg erkannt wurde, und wurden selten eingehender beschrieben.

Lediglich einer der Teilnehmer konnte in größerem Umfang Auskunft über seine eigenen Denkprozesse geben; er berichtete darüber hinaus von regelmäßiger gedanklicher Beschäftigung mit mathematischen Zusammenhängen, Grenzen und Möglichkeiten, die über schulische Anforderungen hinausging und in deren Rahmen er sein eigenes Wissen zu erweitern und „möglichst elegante Lösungswege“ zu finden versuchte.

- „[...] ich kann mich an so ‘nem gedanken wirklich erfreuen, kann drüber nachdenken kann den hin und her rollen, einfach schauen, also ich hab [...] notizzettel, die einfach voll mit Dingen sind, einfach so assoziationen, wenn man ‘n bisschen rumspielt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.113 – Student_2)
- „[...] ich guck halt erstmal, also ich seh, seh ne beziehung, zum beispiel, und ich denk halt drüber nach, hab ich sowas ähnliches schon mal gesehen, hab ich

irgendwas in dem bereich, also beispielsweise, ich hab primzahlen, da denk ich drüber nach, was, was weißt ich über primzahlen [...] dann schau ich mir halt an was ich daraus schließen kann [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.117 – Student_2)

- „[...] grad, wenn ich jetzt kein konkretes problem hab, schau ich halt mir an, was, was kann ich aufs extreme treiben, also wenn ich irgendwas gegen null gehen lass, was gegen unendlich gehen lass [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.117 – Student_2)

Kenntnis von „Standard“-Strategien

Im Allgemeinen konnten einige Strategien im Rahmen von Problemlösungsaufgaben genannt werden, doch handelte es sich dabei um „Standard“-Strategien, die vermutlich auf direkte (und vermutlich häufige) Aufforderung der entsprechenden Lehrkräfte hin verwendet und schließlich ins eigene Repertoire übernommen worden waren; in manchen Fällen wurde diese Annahme von den Teilnehmer_innen explizit bestätigt. Gemeint sind hierbei bspw. die Überprüfung von Ergebnissen auf Plausibilität, die erneute Berechnung von Ergebnissen zur Kontrolle oder das Unterbrechen und Wiederaufnehmen (zu einem späteren Zeitpunkt) eines vorerst erfolglosen Arbeitsvorgangs.

- „[...] entweder halt, ähm, versuchen, bezug zu anderen aufgaben herzustellen, die schon gelöst wurden, oder sich das einfach mal vorzustellen, wie das jetzt gemeint wurde, vielleicht auch sogar mal nachspielen, ähm, vor allem so, keine ahnung, urnenaufgaben oder so kann man ja recht leicht mal nachsimulieren [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.103)
- „[...] erstmal die anderen aufgaben machen und dann nochmal versuchen, halt an die aufgabe irgendwie anders ranzugehen, also wenn man dann erstmal was anderes im kopf hatte, dann geht's normalerweise schon [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.59)
- „[...] was ich oft mache, wenn ich irgendwie – keine ahnung hab, des hat mir auch 'n Lehrer mal gesagt als tipp, aber, ich glaub, des hab ich vor allem in mathe schon so halt gemacht – ich nehm die sachen, die da stehen, und mach einfach alles mögliche mit denen, alles, was man halt machen kann, wird gemacht und dann vielleicht bringt ja der eine schritt [...] dann kommt man

irgendwie dann doch schon aufs ergebnis oft [...]“
(Interview_Transkript_06_x2_592 – Student_1)

Während dieses Standard-Strategie-Repertoire relativ simpel und beschränkt und (metakognitiv) nur bedingt reflektiert anmutet, stellt sich die Frage, ob dies möglicherweise lediglich daran liegt, dass individuelle Strategien weniger bewusst vorhanden sind, bzw. weniger gut verbalisiert werden (können). Die genannten Strategien dürften im Rahmen des Unterrichtsgeschehens mehr oder weniger häufig benutzt worden sein; da dabei die explizite Instruktion durch eine Lehrperson voranging, sollten sie einerseits bewusst wahrgenommen und angewendet worden sein; andererseits auch in bereits verbalisierter Form vorliegen. Individuelle (metakognitive) Strategien treten möglicherweise in einer stärker unbewussten, direkt mit Sachwissen verknüpften und weniger als isolierte Strategie wahrgenommenen, Form auf. Eine bewusste – nicht durch einen mathematischen Arbeitsprozess „provozierte“ – Erinnerung und Beschreibung solcher Strategien könnte sich daher schlichtweg als schwieriger erweisen als die Wiedergabe der genannten Standard-Unterrichts-Strategien, da sie

möglicherweise nie ein gewisses Level an Bewusstheit erreicht oder nie als isolierte Strategie interpretiert wurden und daher im Interview nicht in dem Maße abrufbar sind wie die „Standard“-Strategien. Demzufolge lässt sich letztlich nicht ausschließen, dass ein individuelles metakognitives Strategie-Repertoire vorliegt, das im Interview so nicht zu erkennen war. Allerdings zeigt sich, dass zumindest auf Ebene eines bewussten Überblicks über eigene Kompetenzen, bzw. über (typische) eigene Strategien ohne konkreten Aufgabenbezug Defizite bestehen.

Allerdings stellt sich an dieser Stelle die Frage, inwieweit individuelle, fachbezogene Strategien ohne einen konkreten mathematischen Bezug (eine Aufgabenstellung) überhaupt beschrieben werden können. Spezifischere Strategien als die oben genannten können schließlich nur schwer ausschließlich „auf der Metaebene“ formuliert werden. In Anlehnung an den bekannten Ausdruck ist auch hier ein „Stricken ohne Wolle“ nicht möglich, weshalb solche Strategien vor allem im zweiten Teil des Interviews zu erkennen sein dürften, in dem die Studierenden mit einem konkreten Problem konfrontiert wurden. Außerdem decken sich die Beobachtungen mit der vielfach betonten Notwendigkeit eines Zusammenwirkens aus expliziter Thematisierung von Metakognition und ihrer aktiven Verwendung durch die Lehrkraft im Unterricht, damit Lernende entsprechende Strategien selbst nutzen (vgl. Kapitel 2.2.5 und Kapitel 2.2.6).

Verhalten während des Interviews

Auf Impulse des Interviewleiters hin, bzw. im Fall von Nachfragen kann in der Regel von den Teilnehmer_innen zügig und ausführlich geantwortet werden. Wie intendiert, wird der Verlauf dabei von den Teilnehmer_innen weitgehend selbstständig und frei gesteuert.

Kann nicht spontan reagiert werden, so ist den Teilnehmer_innen häufig bewusst, dass sie zum Thema wenig beitragen können und dies wird entsprechend geäußert.

- „[...] ich glaube ich kriegs nichts selber, denk ich mal, wenn ich mich einlese, ich hatte damals im abi so eine ähnliche aufgabe, die hab ich wunderbar rechnen können [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.121)

Auf Nachfragen, bzw. Hinweise des Interviewleiters konnte in der Regel eingegangen werden. Teils konnten Hinweise zügig und effektiv in den eigenen Denkprozess integriert werden, um neue Erkenntnisse zu generieren. Dies wurde teilweise auch entsprechend bemerkt und kommentiert.

Die Aufforderung zum “lauten Denken“ (thinking-aloud) wurde von allen Teilnehmer_innen offenbar sehr ernst genommen und die entsprechende Kommunikation verlief während des gesamten ersten Interview-Teils sehr zufriedenstellend; Gedankengänge konnten bis zu einem gewissen Grad verbalisiert werden.

Die betrifft insbesondere die Information, dass zum aktuellen Zeitpunkt bspw. keine Ideen zur jeweiligen Frage oder Aufgabe bestehen, bzw. darüber, ob Wissen vorhanden ist oder nicht.

Aus diesem Funktionieren der Verbalisierung lässt sich bis zu einem gewissen Grad schließen, dass eventuelle Schwierigkeiten beim Berichten über Metakognition im zweiten Teil des Interviews nicht auf diese Form der Überwachung und Verbalisierung von Kognition zurückzuführen sein dürften.

Einschränkungen dieser Art der Verbalisierung werden an anderer Stelle besprochen (Kapitel 3.4).

Interaktion bei Doppel-Interviews

In Interviews mit zwei Teilnehmer_innen konnte in der Regel eine relativ aktive Interaktion zwischen den Teilnehmer_innen beobachtet werden, im Verlauf derer den Äußerungen der Interviewpartner_in aufmerksam gefolgt werden konnte. Entsprechend wurde auf diese

Äußerungen eingegangen, ggf. nachgefragt oder es wurden Gedankengänge aufgegriffen und weitergeführt.

Hierbei zeigte sich ein gewisses Verständnis für die Überlegungen der Partnerin; deren Überlegungen wurden oft verstanden; in Fällen, in denen dies nicht der Fall war, wurde dies oft erkannt und entsprechend gegengesteuert – durch Nachfragen, Bitte um Klärung oder durch Wiederholen des Gesagten mit dem Ziel, dieses zu verstehen.

Im Verlauf der Aufgabenbearbeitung kam es zu regeren Interaktionen, bzw. sogar Auseinandersetzungen, im Rahmen derer Ideen analysiert und kritisiert, bzw. entsprechend verteidigt wurden. Hierbei kam es auch vor, dass (Denk-)Fehler der/s anderen Teilnehmerin/s aufgedeckt werden konnten.

- „[...] wir haben so ein bisschen aneinander vorbei gearbeitet, also wir hatten halt unterschiedliche ansätze, wir haben zwar so das x grad noch so gleich gewählt, aber beim y hat es schon aufgehört und du hast da halt irgendwas aufgestellt und ich hab irgendwas aufgestellt und letztendlich war halt eins von beiden richtig [...] wir haben ja auch im vorfeld schon, äh sehr ausführlich diskutiert [...] ich hätte jetzt nie so ausführlich über eine aufgabe vorher geredet, ich hätte einfach die funktion aufgestellt, und dann wär dann halt irgendwas rausgekommen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.509 – Student_1)

An einigen Punkten ließ sich beobachten, dass eine der beiden Teilnehmer_innen vorübergehend den Ausführungen der Partnerin keine Beachtung mehr zu schenken schien, was dafür spricht, dass diesen offenbar keine große Aussicht auf Erfolg mehr beigemessen wurde.

Weitere Beobachtungen

In punkto Selbstwirksamkeit schienen die Teilnehmer_innen ihren Fähigkeiten grundsätzlich zu vertrauen, bzw. über eine (in Bezug auf Erfahrungen in der Schule) realistische Selbsteinschätzung zu verfügen und der Meinung zu sein, dass – bei Verständnisschwierigkeiten oder sonstigen Defiziten – aus eigener Kraft (bspw. durch Übung) und ggf. mit Hilfe weiterer Erklärungen und Hilfestellungen entsprechende Schwierigkeiten überwunden werden können. Dabei waren den meisten Teilnehmer_innen Fälle aus dem eigenen Umfeld bekannt, in denen mangelnde Selbstwirksamkeit offenbar zu Schwierigkeiten beim Umgang mit Mathematik führte.

- „[...] mit Klausuren kam ich eigentlich, ja, meistens eigentlich relativ gut zurecht, also ich sag mal, es gab da so eins zwei Klausuren aber das lag ein bisschen an der Lehrerin weil die Aufgaben teilweise etwas, komisch und sonst so allgemein das was ich halt konnte, konnte ich auch in die Klausuren wunderbar anwenden und das ging dann eigentlich auch recht flüssig, ich sag mal, es gibt ja viele, die gerade bei Klausuren dann denken, oh Gott Klausur Hilfe Stress, und dann wahrscheinlich irgendwie aussetzen, oh Gott kann ich nicht mehr aber bei mir war das immer relativ, ich wusste was ich konnte und ich wusste was mir schwer fällt, und hab halt versucht, das was ich konnte einfach runter zu machen und das was mir schwer fällt einfach noch ein bisschen zurückzustellen und dann zu versuchen mich reinzudenken [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.27)

Insgesamt fällt auf, dass die Teilnehmer_innen ein recht überlegtes und durchdachtes Verhalten zeigen und sich beim Treffen von Entscheidungen von ihren (metakognitiven) Erfahrungen leiten lassen und aus diesen Konsequenzen für ihr Verhalten ableiten.

Sie scheinen sich im Klaren darüber zu sein, wie Eigenschaften, Stärken und Schwächen oder Interessen ihre Erfolgchancen beim Umgang mit Mathematik beeinflussen und bauen darauf bspw. ihre Überlegungen zur Studienwahl auf. Im Interview konnten dementsprechend in der Regel relativ (in Relation zu Alter, „Reife“, Erfahrung, etc. der Teilnehmer_innen) strukturierte und ausführliche Antworten gegeben werden; die entsprechenden Fragen, bzw. Themenvorschläge wurden dabei ohne merkbares Unverständnis aufgenommen und verstanden.

Die Ausführungen und Erläuterungen der Teilnehmer_innen waren in der Regel verständlich und relativ plausibel.

Es lässt sich annehmen, dass entsprechende metakognitive Grundlagen vorhanden sind – deklaratives Wissen, die Fähigkeit zur Überwachung eigenen Verhaltens und die Tendenz aus entsprechenden Beobachtungen Folgerungen zu ziehen und das eigene Verhalten anzupassen (zu steuern); des Weiteren ein Bewusstsein für die eigene Kognition (sowie eigene Emotionen, Motivation, etc.) und ein Überblick über verschiedene (kognitive) Systeme wie Schule, Studium, Mathematik, etc..

Dass sich entsprechende Überlegungen und Begründungen aus Sicht einer/s Mathematikdidaktikerin/s möglicherweise nicht auf einem außergewöhnlich hohen Niveau

bewegen, dürfte hierbei für die Frage nach dem Vorkommen von Metakognition (im allgemeinen, nicht domänenspezifischen Bereich) eine geringere Rolle spielen. Gerade der Kontrast zu durchaus auch vorkommenden Beispielen für eine eher unreflektierte Vorgehensweise von Teilnehmer_innen verdeutlicht eine gewisse metakognitive Qualität, die in der Regel vorherrscht.

Im Rahmen von Argumentationen oder beim Reflektieren von Überlegungen wurden Formulierungen verwendet, die auf eine prozedurale Überwachung und Reflexion der eigenen Überlegungen sowie auf Beurteilungen, Überprüfungen und Abgleichungen mit deklarativem Metawissen und Fachwissen hindeuten; so wurden bspw. Überlegungen oder Argumente der Interviewpartner_in als „plausibel“ bewertet oder die Frage (auch reflexiv) gestellt, ob eine Überlegung „Sinn ergebe“.

Auffälligerweise wird der Umstand der idealisierten Bruchkante in der Aufgabendarstellung von keiner Teilnehmer_in spontan und selbstständig kommentiert; auf „Nachhaken“ des Interviewleiters hin wird diese allerdings in der Regel (mit mehr oder weniger Hinweisen) relativ schnell als vergleichsweise unrealistisch erkannt.

- „[...] das wäre dann ja ein bisschen sehr kompliziert, wenn man die ganzen kleinen zacken, man rechnet es dann näherungsweise aus, dann können die schüler damit besser was anfangen [...] wenn man das wirklich wie es bricht, dann hat man da irgendwelche zacken und wenn man das jetzt ausrechnen müsste, müsste man es in tausend stücke zerlegen und jedes kleine stück ausrechnen - wenn man das jetzt irgendwie auf einen graphen übertragen würde, dann müsste man eine ganz komische formel nehmen, das wäre für die schüler dann etwas zu kompliziert - ich sag mal, viele sind so schon teilweise mit mathe überfordert und wenn man das dann noch so machen würde, so weiß man grob wie es funktioniert, halt näherungsweise und das könnte man dann halt, wenn man das ganze tiefer in die materie eingehen möchte, übertragen, aber so weiß man halt näherungsweise, wie es halt geht - und man hat halt die anwendung, wie man das was man halt theoretisch hat, eine sachaufgabe als anwendung hat und versteht man es halt leichter, wenn man es so macht [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.103)

Es werden hierbei insbesondere didaktische Überlegungen – sowie die ihnen zu Grunde liegenden fachlichen Schwierigkeiten für Lernende – geäußert, die die Entscheidung für eine solche Idealisierung bedingen.

Außerdem werden auf fachlicher Ebene Ideen geäußert, wie die Ergebnisse einer derart vereinfachten Situation auf eine komplexere, realistischere Situation übertragen werden könnten.

Zur Aufgabenbearbeitung

Wie bereits zuvor ausgeführt, ließ die verstrichene Zeitspanne (bei allen Teilnehmer_innen mindestens ca. drei Monate) seit dem letzten „Kontakt“ der Teilnehmer_innen mit mathematischem Arbeiten erwarten, dass deren routinierte Beherrschung der entsprechenden Problemlösemethoden zurückgegangen war; eine Erwartung, die in fast allen Fällen bestätigt wurde. Einige Teilnehmer_innen schienen bereits Schwierigkeiten zu haben, die Problemstellung mathematisch einzuordnen und bewegten sich gedanklich zu Anfang stark im Rahmen elementargeometrischer Aufgaben.

- „[...] ich weiß nicht, dreiecke sind doch meistens so, also, man könnte da einfach halt irgendwie ein, naja, halt das viereck und dann halt des irgendwie abziehen oder so [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.213)
- „[...] rechteckiges dreieck is ja normalerweise nicht allzu schwer auszurechnen, vor allem, wenn man halt die Seite [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.215)
- „[...] wir haben einfach zu wenig angaben, wir wissen einfach nicht, wie groß, wie hoch dieses dreieck is [...] diese höhe hier wissen wir nicht [...] und das ist das Problem [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.387 – Student_2)
- „[...] also ich weiß den flächeninhalt, den berechnet man mit a mal b und ich will, dass dieser maximal ist, dann weiß ich ja, dass a und b abhängig von p sind, ja die Strecke, auf der p liegt, die kann man berechnen, man hat ja die maße gegeben, die kann man mit einfachen pythagoras berechnen, weil das rechtwinklig ist – das kann man auf der skizze eigentlich erkennen [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.133)

Es fällt auf, dass im Allgemeinen ein relativ geringer Überblick über Mathematik als Fachgebiet und ihre Teilgebiete besteht, bzw. über die Zugehörigkeit von Begriffen und Themengebieten

zu diesen. Ein „systematischer“ Überblick über mathematische Gebiete, typische Begriffe und Aufgabenstellungen schien – an dieser Stelle – bei den Teilnehmer_innen trotz relativer Nähe zur Schulmathematik nicht stark ausgeprägt. Natürlich lassen sich mathematische Begriffe nicht simplerweise in Fachgebiete „einsortieren“, doch vor allem im Mathematik-Unterricht der Sekundarstufe II und im Rahmen der Vorbereitung auf (Abitur-)Prüfungen erfolgt eine Schüler_innen durchaus bewusste Zuordnung von Unterrichts-Themen zu den Gebieten *Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie* und *Stochastik*, weshalb zumindest bei Standard-Begriffen ein „Rest“-Überblick über den behandelten Schulstoff zu erwarten wäre. Dieser scheint jedoch nur sehr bedingt vorhanden zu sein, was zwar einerseits zumindest teilweise dem zeitlichen Abstand zur Schulzeit geschuldet sein dürfte, andererseits trotz dieser Einschränkung noch unerwartet drastisch anmutet. Offenbar kam es im Verlauf der Schulzeit – auch bei Teilnehmer_innen im oberen Notenbereich, denen das Fach nach eigener Aussage keine oder sehr wenige Schwierigkeiten bereitet hatte – in geringerem Maße zum Aufbau eines – beständigen – Begriffsnetzes (oder die entsprechenden Strukturen wurden durch den zeitlichen Abstand „verschüttet“). Dies legt wiederum nahe, dass – trotz Bestrebungen in Richtung eines weniger kalkülhaften und algorithmischen Unterrichts, hin zu einem an konzeptuellem (Meta-)Wissen und Begriffsverständnis orientierten Unterricht – sich Lernende immer noch stark an konkret ausführbaren Handlungen und Methoden zur Berechnung (und Problemlösung) orientieren. Mindestens aber lassen sich möglicherweise vorhandenes überblickartiges Metawissen und bestehende Begriffszusammenhänge nur selten ohne konkreten Bezug zu einem gegebenen Problem abrufen. Während es einerseits natürlich erscheint, dass ein konkret vorliegendes Problem den Abruf von Wissen erleichtern sollte, wäre es dennoch wünschenswert, zur Problemlösung auf mehr Wissen zugreifen zu können als das unmittelbar durch den konkreten Fall „aktivierte“. Ein Verlassen auf „automatisch aktiviertes“ Wissen dürfte die Bewältigung von bekannten und eingeübten Aufgabentypen ermöglichen (Routine), doch zur Entwicklung von Lösungsansätzen bei unbekanntem oder transferlastigen Aufgabenstellungen dürften gerade jenes Wissen und jene Strategien essentiell sein, die zwar vorhanden sind, aber durch den konkreten Kontext nicht sofort und automatisch aktiviert werden. Hier wären ein besserer metakognitiver Überblick über grundsätzlich vorhandenes Wissen und die Fähigkeit zum bewussten „Sondieren“ und Abrufen von Gedächtnisinhalten auch außerhalb eines begrenzten Kontextes wünschenswert, um eine Steuerung von Lern-, Problemlöse- und Modellierungsprozessen zu ermöglichen, die über gewohnheitsbedingte Automatismen hinausgeht.

Während die Teilnehmer_innen weitgehend als motiviert und konzentriert eingeschätzt wurden, schienen sie sowohl beim Untersuchen (und damit Verstehen) der Aufgabenstellung als auch bei der folgenden Entwicklung von Strategien eher zögerlich. Wurden Informationen und Zusammenhänge nicht sofort begriffen, schienen geeignete Mechanismen zu fehlen, mit diesem Mangel an Wissen und Verständnis flexibel umzugehen und sich die nötigen Informationen (gedanklich) selbst zu erarbeiten, bzw. entsprechendes Wissen bewusst zu reaktivieren, um der vorliegenden Situation Bedeutung und Sinn zu geben.

Dies wurde auch in Fällen beobachtet, in denen Teilnehmer_innen eine gewisse Vertrautheit mit solchen Problemstellungen geäußert hatten, bzw. sich an deren Bearbeitung zu Schulzeiten erinnerten („feelings of knowing“), auch wenn sich mit zunehmender Erinnerung ein höheres Maß an Metakognition feststellen ließ – dabei fielen vor allem Versuche auf, entsprechende Erinnerungen wiederherzustellen.

- „[...] des sind ja es ist, er ist in meinem kopf, ich kann's nicht sagen, es ist, ähm – mir schwirrt die ganze welt wie co-linear – du denkst, es ist alles falsch, es ist, ich komm grad nicht drauf auf dieses wort [...] weiß ich, dass es halt wirklich dieses wort, was mir nicht einfällt, ist halt, dass es halt wirklich genau so viel rauf geht, wie's hier runter geht [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.299)
- „[...] ich glaube, ich krieg's nichts selber, denk ich mal, wenn ich mich einlese, ich hatte damals im abi so eine ähnliche aufgabe, die hab ich wunderbar rechnen können [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.121)
- „[...] ich glaub, so ham wir's immer gemacht [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.221)

Dem gegenüber stehen Fälle, in denen Erinnerungen direkt abgerufen werden konnten.

- „[...] ich wüsst' sofort halt, wie ich das rechnen soll. is ja jetzt nicht die schwere Aufgabe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.323 – Student_1)
- „[...] vielleicht könnt mer sich jetzt denken, was mer in der schule gemacht hat, äh, die extremwertprobleme, dass mer halt effektiv ,ne funktion baut, beispielsweise die fläche in abhängigkeit von dem und, dann soll mer die maximieren oder minimieren, je nachdem, wie die funktion sich halt verhält [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.419 – Student_2)

Teilweise wurden verstärkt planerische Überlegungen beobachtet (wie die Einführung und Platzierung eines Koordinatensystems), die jedoch in der Regel beim Versuch der Durchführung scheiterten oder zumindest zu weiteren Problemen führten.

- „[...] dann würd' ich die fläche aufstellen – in abhängigkeit von P, auf dieser geraden [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.225)
- „[...] solche Funktionen, ähm, ham wir auch sowas gelernt, da musst' mer, ähm, in Abhängigkeit von x des y darstellen – und, ähm, ich würde des vielleicht in ein Koordinatensystem zeichnen, könnt ich mir vorstellen, also da ganz normal halt y-Achse x-Achse – und dann mir überlegen [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.207)
- „[...] erstmal ausmultiplizieren [...] weil ich dann nachher ,ne abbildung, nee, ,ne ableitung, mein ich, machen will und dann halt ableiten und, ähm, die ableitung gleich null setzen – und dann jeweils die gerade stelle – ne – die, waagrechte oder so, asymptote rauszufinden [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.297)

In der Regel konnten durch stufenweise Hilfestellungen von Seiten des Interviewleiters Teilschritte des Lösungsprozesses abgerufen werden, die bei manchen Teilnehmer_innen allerdings als Fragmente bestehen blieben und zu keiner zusammenhängenden Strategie kombiniert werden konnten. Bei anderen Teilnehmer_innen ließ sich hingegen ein zunehmendes Maß an Sicherheit beobachten, was dazu führte, dass in der Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit zwar keine vollständige Bearbeitung der Aufgabe zu erreichen war, die zu unternehmenden Arbeitsschritte aber – teilweise – genannt und erläutert werden konnten.

- „[...] für den extremwert muss ich jetzt, ähm, war das jetzt irgendwie so, dass man dann den punkt, den man da bräuchte, muss man den irgendwie, glaub ich, einsetzen [...] der punkt P ist gleichzeitig mein a – das schreib ich mal hin – dann ist das P von [...] das ist ja die y-richtung, das ist dann mein a, f von P und dann ist praktisch mein b einfach nur äh – 20 minus P – oder ne, das kann nicht sein – mein b ist, glaube ich, nur einfach nur P – ja, das ist einfach nur P, das war jetzt ein fehler [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.143)
- „[...] x ist ja auf jeden fall – wenn ich jetzt die, die funktion [...] das koordinatensystem so setz, dass hier x-achse und hier y-achse is, is ja x

mindestens 30cm lang, dann würd ich vielleicht hier 'ne funktion, ähm, draus bilden [...] vielleicht sogar 'n gitter zeichnen, ok, des is ziemlich unnötig, aber hier auf jeden Fall erstmal 'ne funktion, mir anschauen und, ähm, ja, die dann mal x machen jeweils, mal den x-wert der funktion, und dann mit der ableitung die maximas und die minimums bestimmen [...]" (Interview_Transkript_02_x1_Z.221)

Teilweise kam es – mit Unterstützung durch den Interviewleiter – dennoch zu Berechnungsversuchen. Dabei konnte mitunter trotz mangelnden „Erfolgs“ ein Verharren bei einmal begonnenen Lösungsstrategien beobachtet werden, was auf einen Mangel an Überwachungsmechanismen und an metakognitiver Aufmerksamkeit hindeutet, bzw. auf Probleme, eigene Kompetenz und Erfolgsaussichten korrekt zu evaluieren, wohingegen einige Teilnehmer_innen ihre Versuche abbrechen – möglicherweise auf Grund funktionierender Überwachung und Einschätzung.

Einige Teilnehmer_innen gaben Einschätzungen darüber ab, wie sicher sie zu Schulzeiten im Umgang mit derartigen Aufgaben und entsprechenden Strategien gewesen seien (→ Personenwissen) und manche stellten sogar Prognosen darüber, wie viel Zeit und Mühe vonnöten sein würden, um die entsprechenden Kompetenzen „aufzufrischen“.

- „[...] würde mir schon irgendwie so ein ansatz, denk ich, irgendwie erkennen, aber 's würde halt schon länger dauern [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.265)

Der Verlauf der eigenen Überlegungen und Schwierigkeiten während des Problemlöse-Versuchs konnte teilweise rückblickend beschrieben werden.

- „[...] auf koordinatensystem wär ich nie gekommen [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.570 – Student_1)
- „[...] ein bisschen von deiner hilfe hab ich ja gebraucht, ich hätte mich vielleicht noch ein bisschen länger reindenken müssen, dann wäre ich vielleicht auch irgendwann wieder drauf gekommen, aber so auf die schnelle [...] als du mir dann den tipp mit der funktion gegeben hast, bin ich dann auch wieder auf die idee gekommen [...]" (Interview_Transkript_01_x1_Z.221)

„[...] hab ich dann erstmal mir überlegt ob der flächeninhalt mir da irgendwie helfen kann natürlich – und dann hab ich mir überlegt, ob ich so ne aufgabe halt

einfach kenn schon und dann is mir natürlich der Gedanke mit dem koordinatensystem gekommen und dass ich das auch umdrehen könnte [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.365)

Im Verlauf der Aufgabenbearbeitung lässt sich bei den Teilnehmer_innen metakognitives Verhalten in Form „klassischer“ Fragestellungen beobachten, wie sie in der Literatur häufig beispielhaft genannt werden.

Insbesondere ein Bewusstsein für aktuelles „Unwissen“ – also das Wissen, bzw. die Erkenntnis darüber, dass zur Beantwortung einer Frage oder zu einem Schritt der Aufgabenbearbeitung aktuell das notwendige Wissen oder die „zündende“ Idee fehlten – schien in der Regel zu bestehen, was für einigermaßen funktionierende Metakognition in den Bereichen Awareness, Überwachung und im deklarativen Bereich spricht.

- „[...] ich versuche [...] mich zu erinnern wie wir des immer gelöst ham [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.223)
- „[...] zum beispiel weiß ich noch dass ähm – wir da die, integralregeln so die besonderen wenn da zum beispiel beim bruch die ableitung im zähler steht und äh die funktion halt unten dran, ähm – das hattn wir da in der stunde halt grad gemacht gehabt, und ähm, dann ham wir halt aufgaben dazu gemacht – und dann is mir des irgendwie aufgefallen, hm ja, irgendwie n bruch ok des war naja neu, und dann hab ich mir gedacht ok wo hab ich schon mal n bruch gesehen ok bei den neuen, ähm besonderen fällen, dann is mir aufgefallen ok da is n bruch, hab ichs verglichen, da is mir dann aufgefallen dass es halt eben, genau der fall is [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.292 – Student_1)
- „[...] ich mag es lieber was allgemeineres zu machen was mir vielleicht im einzelfall dann zwei drei schritte mehr macht aber es hat funktioniert [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.534 – Student_2)
- „[...] ich hab jetzt keine idee, wo der fehler ist, weil ich eigentlich immer noch denk, dass es vielleicht einen richtigen ansatz hat [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.499 – Student_2)
- „[...] ich bin mir noch nicht so ganz sicher, ob das so richtig ist - allein schon, weil, ich bin mir ziemlich sicher, dass das hier schon mal formal stimmt, ist vielleicht nicht das einfachste, aber es stimmt wenigstens formal und ich glaub,

des es was anderes ist, wie das was du jetzt aufgeschrieben hast [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.449 – Student_1)

Während die Aufforderung zum lauten Denken hier mit Sicherheit eine beeinflussende Rolle spielt, scheinen diese Fragen an die eigene Person, bzw. über das eigene Wissen und eigene Erinnerungen interne kognitive Prozesse widerzuspiegeln; sie erscheinen weniger als Mittel der Dokumentation oder Kommunikation mit dem Interviewleiter, sondern scheinen teils mehr oder weniger unbewusst im Verlauf des Denkprozesses bei auftretenden Fragestellungen, die nicht sofort beantwortet werden können, geäußert zu werden – also anscheinend bei Aufgabenteilen, in denen keine Routine mehr besteht und die deshalb bewusst „bearbeitet“ werden müssen.

Auch abgesehen von aktiven reflexiven Fragen kann Metakognition in Form einer kommentierenden Begleitung der eigenen Denkprozesse beim Arbeiten beobachtet werden.

- „[...] ich kann mir ziemlich denken was man tun sollte [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.302 – Student_2)
- [...] ich wüsst sofort halt wie ich das rechnen soll is ja jetzt nicht die schwere aufgabe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.323 – Student_1)
- „[...] wir wissen was das is [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.378 – Student_2)
- „[...] ich verstehs [...] es kommt mir intuitiv vor und ich weiß dann gut wenn ichs so da stehen hab dann kann ich daraus dinge lesen [...] seh ich klammer verhält sich so und ich hab außen was stehen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.512 – Student_2)
- „[...] des ergibt sinn – natürlich mir fällt jetzt auf, dass man des so einfach schön lösen kann wenn man sich die funktion mal überlegt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.522 – Student_2)

Bei Auswertung der Interview-Transkripte entsteht der Eindruck, dass überwachende Tätigkeiten selten tatsächlich im Verlauf des Denk- und Arbeitsprozesses vorkommen. Stattdessen werden jedoch im Anschluss an den Prozess oder teilweise auch zwischen einzelnen Arbeitsschritten – zumeist auf Nachfrage hin – retrospektiv Denkprozesse überdacht, was einerseits in den Bereich der (metakognitiven) Reflexion fällt, andererseits – auf Grund der Formulierung der geäußerten Reflexionen – oft darauf schließen lässt, dass es auch bereits während laufender Denk- und Arbeitsprozesse zu Metakognition im Sinne überwachender

Prozesse kam, diese jedoch entweder nicht geäußert und beschrieben wurden, oder zu diesem Zeitpunkt zwar stattfanden, aber nicht „bewusst“ als solche wahrgenommen wurden.

Wie meistens besteht an dieser Stelle die Möglichkeit, dass die Aufforderung zu lautem Denken – zumindest stellenweise – vergessen oder ignoriert wurde (bspw. um Zeit oder kognitive Ressourcen zu sparen, die durch eine – aufwändigere? – Formulierung beansprucht worden wären, oder um sich nicht vom laufenden Prozess abzulenken und möglicherweise Fehler zu machen oder Relevantes zu übersehen). Des Weiteren bleibt letztlich offen, wie viel Metakognition gänzlich unbewusst stattfindet, z.B. weil sie bereits in Routinen „übergegangen“ ist. Letzteres ist auch dann denkbar, wenn – wie im Interview – zwar Lösungsstrategien nicht (mehr) bekannt sind, möglicherweise aber Teil-Prozesse wie das Berechnen von Nullstellen oder der Ableitung (immer noch) Routine sind. Außerdem besteht auch bei bewusst stattfindender Metakognition – gerade bei hoher kognitiver Beanspruchung – sicher die Möglichkeit, dass diese Metakognition nicht als solche wahrgenommen wird, dass also quasi keine Meta-Metakognition stattfindet, wie dies letztlich für die Dokumentation im Interview wünschenswert gewesen wäre.

Rückblickende Analysen des Bearbeitungsprozesses – insbesondere, was die Suche nach Gründen für die auftretenden Schwierigkeiten betrifft – fanden auf Nachfrage hin statt.

Bei der retrospektiven Reflexion fällt bei vielen Teilnehmer_innen der – psychologisch motivierte? – Drang zur „Rechtfertigung“ auf, bzw. – sachlicher betrachtet – die Tendenz zur Analyse des eigenen „Scheiterns“ beim Lösen der Extremwert-Aufgabe. Oft werden Analysen (oder zumindest Vermutungen) geäußert, warum an bestimmten Stellen des Prozesses Informationen nicht erkannt, Hinweise nicht verstanden oder Herausforderungen nicht bewältigt werden konnten.

- „[...] zunächst mal hats mich n bisschen überrascht dass man – äh es doch so leicht vergisst wies geht und sich dann wieder herleiten muss [...] bzw groß drüber nachdenken muss – und – ja so stück für stück kams dann wieder [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.373)
- „[...] ich hab mir gedacht, [...] ich hab, das lange nicht mehr gemacht, wie war das gleich nochmal, so ein bisschen erschreckt [...] ich habs halt lange nicht mehr gemacht und jetzt überforderts mich, dann hab ich halt versucht, ich versuch bei sowas sowieso eigentlich immer ruhig zu bleiben, also das ist sowieso das beste was man machen kann, wenn man unruhig wird, wird das

sowieso nichts, das hab ich auch schon festgestellt mal, und dann ich versucht mich irgendwie reinzudenken, mir das alles wieder ein bisschen vorzustellen, versuchen mich zu erinnern und das hat nicht ganz - ein bisschen von deiner hilfe hab ich ja gebraucht, ich hätte mich vielleicht noch ein bisschen länger reindenken müssen, dann wäre ich vielleicht auch irgendwann wieder drauf gekommen, aber so auf die schnelle - ich hab halt versucht, das was mir klar war, hab ich halt versucht aufzuschreiben, wie gesagt, dass das halt in abhängigkeit von dem ist und wie man den inhalt berechnet, also gut, als du mir dann den tipp mit der funktion gegeben hast, bin ich dann auch wieder auf die idee gekommen mit dem punkt, wie man dann halt den anstieg berechnet und das halt dann einsetzt und dann wurde es mir halt dann auch wieder klar [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.221)

- „[...] wenn man sowas schon lange nicht mehr gemacht hat, eine extremwertaufgabe, also im mathevorkurs war das ja jetzt so direkt, ist ein bisschen schwierig [...] beim abi sowas zum letzten mal gesehen [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.109)
- „[...] ich fands am anfang ein bisschen komisch, da hab ich mich ja dann auch ein bisschen verkantet, aber dann hab ich halt was neues ausprobiert, hat sich dann zwar als falsch rausgestellt [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.495 – Student_2)

Hierbei kommen unter anderem auch erneut typische Eigenschaften und Verhaltensweisen zur Sprache, die den Teilnehmer_innen aus ihrer Schulzeit bekannt sind (→ metakognitive Erfahrungen, Personenwissen). Bspw. wird von mindestens einer/m Teilnehmer/in geäußert, dass sie/er sich auf einen einmal eingeschlagenen Weg konzentriert und „eingeschossen“/„festgefahren“ hatte und dadurch sein Blick für mögliche Alternativ-Lösungswege zeitweise blockiert worden sei. Retrospektiv – und nach „Auflösung“ eines korrekten Weges – ist diese Analyse zwar möglich (→ (metakognitive) Reflexion, Beurteilung, Personen- und Strategiewissen), aber im Moment der Blockade scheinen Überwachungs- und Kontrollprozesse (→ Monitoring und Selbststeuerung) nicht so weit zu funktionieren, dass ein „Ausbrechen“ aus der „festgefahrenen“ Strategie möglich wäre – jedenfalls nicht in der zeitlich begrenzten Situation.

In anderen Fällen entsteht der Eindruck – und wird auch teilweise von Teilnehmer_innen so bestätigt – dass die „raumgreifende“ Präsenz der/s zweiten Teilnehmers/in den Arbeitsprozess beherrscht, was die Äußerung eigener Ideen bei der gemeinsamen Planung und Überwachung des Prozesses erschwert, oder bewusst reduzieren lässt; der/m zweiten Teilnehmer/in wird „die Führung“ überlassen. Retrospektiv wird dieser Sachverhalt teilweise so beschrieben (→ Reflexion, Personenwissen); teilweise wird dabei auch geäußert, dass eigene Vorgehensweisen möglicherweise zum Ziel hätten führen können, oder sogar mit der schließlich vom Interviewer preisgegebenen (Teil-)Lösung übereinstimmen.

Ebenfalls zeigt sich mitunter ein Hang zu unzutreffender Selbsteinschätzung, was die Erfolgsaussichten beim Bearbeiten der Aufgabe betrifft (→ Personenwissen, Beurteilung). So kommt es bei einigen Teilnehmer_innen vor, dass die Aufgabe mit relativ großer Zuversicht in Angriff genommen wird, entsprechende Denkprozesse allerdings – unerwartet – schnell in eine „Sackgasse“ geraten (→ möglicherweise mangelnde Überwachung, was dazu führt, dass das Fehlschlagen einer Strategie nicht rechtzeitig erkannt wird + fehlende Optionen zu deren Anpassung). Hier ist erwähnenswert, dass mitunter auf fachmathematischer Ebene etwas „schwammig“ wirkende Aussagen getroffen werden, was teilweise sicher auf das ungewohnte laute Denken zurückzuführen ist; unvollständig durchdachte Ideen werden geäußert (was natürlich auch ganz im Sinne der Erhebung liegt, da ja Denkprozesse und nicht nur fertige Produkte untersucht werden sollen). Andererseits zeigt sich, dass die fachliche Sicherheit in der Pause seit dem letzten „Kontakt“ mit (dieser Art von) Mathematik offenbar stärker abgenommen hat, als die Zuversicht mancher Teilnehmer_innen annehmen lässt. Hier gibt es allerdings große Diskrepanzen zwischen den einzelnen Teilnehmern_innen. In manchen Fällen wird das eigene (noch vorhandene) Vermögen eher unterschätzt, bzw. nicht gezeigt. Teilweise wird hierbei im Nachhinein – bei „Bekanntgabe“ korrekter Lösungswege – erkannt, dass eigene Ideen tragfähiger gewesen wären, als dies im Moment ihres Entstehens (und Verworfen-Werdens) den Anschein hatte (→ Beurteilung, Einordnung + Aufgaben- und Strategie-Wissen). Hier mangelt es möglicherweise an der (metakognitiven) Fähigkeit, die potentiellen Auswirkungen eigenen Handelns (als Folge von Denkprozessen, Ideen) auf einen mathematischen Sachverhalt abzusehen.

Unabhängig von (bewusster) Metakognition, bzw. deren Verbalisierung im Interview fällt auf, dass sich im Umgang mit dem vorliegenden (Standard-)Problem, das zum „Abiturstoff“ aller Bundesländer zählt und somit den meisten Teilnehmer_innen zu Ende ihrer Schulzeit sehr vertraut gewesen sein sollte, Schwierigkeiten zeigen. Diese beginnen bereits bei der groben

Einordnung der vorgelegten Graphik. Da diese zuerst ohne konkrete Aufgabenstellung präsentiert wurde und die Teilnehmer_innen um eine Einordnung der Graphik in einen möglichen Kontext, bzw. um eine Vermutung der intendierten Aufgabenstellung gebeten wurden, musste zwar mit „abweichenden“ Ideen gerechnet werden; ein geometrie-lastiges Problem, das von einigen Teilnehmer_innen vermutet wurde, ließe sich auch durchaus generieren. Dennoch erscheint das fast völlige Ausbleiben von Ideen im Rahmen eines Optimierungsproblems mit analytischen Mitteln unerwartet. Zusätzlich beschränkten sich auch Ideen im Bereich Geometrie auf simple Flächenberechnungen. Es kann also behauptet werden, dass – zumindest innerhalb der gegebenen Zeit – keine Aufgabenstellungen auf einem komplexeren Level von den Teilnehmer_innen entwickelt wurden, obwohl diese vor allem aus der Sekundarstufe II mit solchen durchaus hätten vertraut sein können. Auch bei dem zu erwartenden „Erinnerungsverlust“ wäre hier ein Mehr an Kreativität oder Anspruch erwartet worden.

Nach Bekanntgabe der eigentlichen Aufgabenstellung kam es ebenfalls bei den meisten Teilnehmer_innen zu keinem spontanen „Erkenntnis-Gewinn“. Zwar war den meisten die Art der Aufgabe (nach eigener Aussage) in dieser Form bekannt, was für einen gewissen metakognitiven Überblick über eigenes Wissen, bzw. eigene metakognitive Erfahrungen spricht, doch wurde in der Regel mit diesem Wissen die (vermutlich zuvor routinierte) Lösungsstrategie nicht mit-aktiviert.

Dieses Muster bestätigt sich auch im weiteren Verlauf der Beschäftigung mit der Aufgabe. In der Regel konnten sich die Teilnehmer_innen mit Hinweisen von Seiten des Interview-Leiters ein gewisses Stück weiter in Richtung Lösungsstrategie bewegen, doch für gewöhnlich waren regelmäßig weitere Hinweise vonnöten, um weiter voranzukommen.

Letztlich zeigt sich anhand dieser Beobachtungen zweierlei; einerseits, dass das notwendige Wissen und die notwendigen methodischen Kompetenzen grundsätzlich immer noch weitgehend vorhanden sind, da sie sich durch Hinweise bis zu einem gewissen Grade

reaktivieren ließen. Andererseits waren diese Hinweise offenbar – zumindest in der beschränkten Zeit des Interviews – auch notwendig, um einen Fortschritt zu erzielen. Die Teilnehmer_innen verfügten dem Anschein nach nicht über metakognitive Strategien (auch nicht zu späteren Zeitpunkten), die es ihnen – unter den gegebenen Umständen (Zeitdruck, Beobachtung, Vergessen) – erlaubt hätten, diese Wissens-Aktivierung selbstständig (systematisch) herbeizuführen.

Die beschriebenen Beobachtungen sprechen dafür, dass im Bereich des deklarativen Metawissens Probleme auf allen drei der klassischen Ebenen bestehen, also in den Bereichen Personen-, Aufgaben-, und Strategie-Wissen:

Im Bereich Personenwissen bestehen offenbar Defizite, was einen Überblick über eigenes – zumindest teilweise – verfügbares Wissen angeht. Die Teilnehmer_innen waren sich in der Regel eher wenig bewusst, über welches Wissen in Bezug auf die vorliegende Aufgabe sie tatsächlich verfügten. Dieser Mangel an geäußertem Wissen kann allerdings auch teilweise der Tatsache geschuldet sein, dass den Teilnehmer_innen im Hinblick auf das Aufgabenwissen nicht bewusst war, zu welchem Bereich das vorliegende Problem gehörte, was Defizite vor allem im domänenspezifischen und „systemischen“ Bereich nahelegt. Es gelang ihnen eher selten, gedanklich „auf Anhieb“ die (fachlich) „richtige Richtung“ einzuschlagen. Nach entsprechendem Hinweis wurde des Öfteren geäußert, dass „jetzt“ langsam oder plötzlich Erinnerungen und Wissen bewusst wurden, die offenbar erst durch den (korrekten, zielführenden) Hinweis des Interviewleiters aktiviert worden und den Teilnehmer_innen zuvor nicht bewusst, bzw. zugänglich waren. Diese Erkenntnis kann dem Awareness-Aspekt von Metakognition zugeordnet werden; es bleibt allerdings fraglich, als wie ausgeprägt dieser beurteilt werden kann. In jedem Fall fehlten den Teilnehmer_innen allem Anschein nach – wie zuvor erwähnt – die notwendigen Strategien, um ihr bestehendes Wissen – gleich auf welcher Ebene – effektiv zu sondieren und relevantes Wissen als solches zu erkennen und zu (re-)aktivieren und zur Bewältigung der vorliegenden Herausforderungen zu nutzen.

Inwieweit diese Defizite sich im Rahmen eines „normalen“ „Erinnerungs-Verlustes“ bewegen, der, wie erläutert, zu erwarten und in die Konzeption der Erhebung mit einbezogen worden war, lässt sich nicht ohne Weiteres entscheiden. Auch der Motivations-Faktor und die Bereitschaft der Teilnehmer_innen, sich während des Interviews einzubringen und zu bemühen, bleibt als „verzerrendes“ Element erhalten.

Kommentar zur Dokumentation

Einleitend sollte erneut betont werden, dass die Korrektheit der Vorstellungen, Annahmen und des Wissens, die, bzw. das die Teilnehmer_innen im Hinblick auf ihre Kognition und die anderer haben, hier nur bedingt eine Rolle spielt, bzw. ohne Kenntnis der jeweiligen Kontexte auch nicht überprüfbar ist. Bei Forschungsziel 1 geht es darum, zu dokumentieren, welche

Art(en) von Metakognition sich beobachten lassen und – so möglich – eine Einschätzung zu bieten, in welchem Umfang und auf welchem Level sich diese bewegt. Hierbei muss beachtet werden, dass eine solche Dokumentation ohne quantitative Analysen bei einer deutlich größeren Teilnehmer_innenzahl lediglich explorativen Charakter haben kann, was aber im Sinn der Forschungsfrage ist.

Trotz der mehrfach angesprochenen verstrichenen Zeitspanne seit dem letzten Umgang mit Mathematik erstaunen diese Beobachtungen, die auf einen gewissen Mangel an systemischem Überblick über Mathematik als Fachgebiet hindeuten, bzw. auf Schwierigkeiten bei der Analyse von mathematischen Darstellungen und deren sinnvoller Einordnung im eigenen Wissens- und Erfahrungsnetz. Trotz zu erwartender Gedächtnislücken wäre eine stärker ausgeprägte Fähigkeit, eigenes Wissen zu durchsuchen und durch Reflexion eigene Erinnerungen zu reaktivieren, erwartet worden. Diese Beobachtungen legen einen Umstand nahe, der von Flavell und Wellman (1977) als Produktionsdefizit (“production deficiency”) bezeichnet wurde: die Unfähigkeit, trotz prinzipiell vorhandenen Wissens und ausreichend ausgeprägter Fähigkeiten und Fertigkeiten, dieses Wissen und diese Fähigkeiten sinnvoll zu nutzen, um Situationen zu analysieren und Strategien zu deren Bewältigung zu entwickeln, was letztlich zum Nicht-Lösen, bzw. bereits zum Nicht-Bearbeiten der entsprechenden Aufgaben führt.

Wie im anschließenden Gespräch festgestellt wurde, besaßen praktisch alle Teilnehmer_innen zumindest in einem gewissen Umfang Wissen über die vorliegende Problemstellung. Dennoch waren sie aber selbst mit schrittweiser Unterstützung oft nicht in der Lage gewesen, dieses Wissen und die Ratschläge des Interviewleiters produktiv umzusetzen.

Diese Beobachtungen führen zu der Vermutung, dass es den interviewten Teilnehmer_innen an Fähigkeiten mangelt, um eigene Kognition (und ebenso die von anderen in Form von Ratschlägen) so effizient und effektiv zu überblicken, zu reflektieren und sinnvoll und produktiv zur Bewältigung von Problemstellungen zu nutzen, wie dies im vorliegenden Fall vonnöten gewesen wäre, bzw. an der Fähigkeit, diese Mechanismen bewusst wahrzunehmen und zu steuern.

Selbstverständlich unterliegen diese Schlussfolgerungen gewissen Beschränkungen, was bspw. die den Teilnehmer_innen zur Verfügung stehende, begrenzte Zeit betrifft. Wie bereits erwähnt, ließ sich bei einigen Teilnehmer_innen gegen Ende des Interviews feststellen, dass – wahrscheinlich durch die erneute Beschäftigung mit der Thematik – Erinnerungen schließlich doch – teilweise – abgerufen und beschrieben werden konnten.

Ob das Verharren in einer scheinbar erfolglosen Tätigkeit letztlich ausschließlich einer Fehleinschätzung der Teilnehmer_innen zuzuschreiben ist, bleibt ebenfalls bis zu einem gewissen Punkt offen. Dieses Verhalten könnte zumindest teilweise (auch) der Aufforderung des Interviewers, sich weiter mit der Aufgabenstellung zu beschäftigen, geschuldet sein.

Eine Schwierigkeit beim Auswerten von "Thinking-aloud-Prozessen" liegt auch darin, zu entscheiden, ob – in diesem Fall – das Ausbleiben beobachtbarer Metakognitionen tatsächlich (nur) auf deren Nicht-Existenz zurückzuführen ist. Alternativ könnten (auch) vielmehr Schwierigkeiten der Teilnehmer_innen mit dem Beobachten/Wahrnehmen und/oder Verbalisieren der eigenen Kognition verantwortlich sein. Allerdings schien, wie bereits angesprochen, die Verbalisierung von Denkprozessen im ersten Teil des Interviews keine Schwierigkeiten zu bereiten, weshalb sich – trotz leichter Unterschiede bei den erhobenen Aspekten von Metakognition – annehmen lässt, dass die Verbalisierung von Kognitionen auch im zweiten Teil des Interviews kein größeres Hindernis darstellte. Es kann zwar nicht völlig ausgeschlossen werden, dass bspw. nur ein Teil der stattfindenden Metakognition als „berichtenswert“ eingestuft, bzw. von den Teilnehmer_innen überhaupt wahrgenommen wurde, aber im Rahmen der zu erwartenden Beschränkungen einer qualitativen Analyse kann dieses Risiko unserer Meinung nach als akzeptabel betrachtet werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich bei den Interview-Teilnehmer_innen in beiden Interview-Teilen durchaus Metakognition feststellen ließ (rückblickend wie aktuell) – was prinzipiell auch nicht anders zu erwarten war – dass sich diese aber gerade in Bezug auf Mathematik weitgehend in unbewussten und/ oder oberflächlichen Bereichen bewegt. Wie erwartet, war Fachwissen, das für die Bearbeitung der Aufgabe benötigt worden wäre, nur bedingt zeitnah abrufbar, doch offenbar fehlte es den Teilnehmer_innen auch und vor allem an effizienten metakognitiven Mechanismen, die ein Abrufen der „verschütteten“ Informationen oder die Entwicklung von Strategien zum Umgang mit den fehlenden Informationen ermöglicht hätten. Darüber hinaus bestanden auch dann Schwierigkeiten, wenn von Seiten des Interviewers zusätzliche Informationen und Hinweise angeboten wurden; diese konnten oft nicht oder nur schwer in den laufenden Denk- und Arbeitsprozess integriert, bzw. als Ansatzpunkt für das Abrufen weiterer Erinnerungen genutzt werden; eine Problematik, die selbst bei Informationen auftrat, die als vormals bekannt und geläufig erkannt und beurteilt wurden.

Zumeist bestand bei den Teilnehmer_innen zumindest eine grobe Vorstellung über den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben(typen) oder mathematischen Begriffen, sobald sie diese bis zu einem gewissen Grad durchdrungen hatten. Ob diese Einschätzungen sich tatsächlich mit

entsprechendem Verständnis und entsprechenden Leistungen deckten, ließ sich allerdings in der Kürze der Interview-Situation meist nicht erheben.

Auch über das System Schule (mit dem Schulfach Mathematik und dem Mathematikunterricht) und seine Mechanismen (wie Schüler-Lehrer-Verhalten, Lernbedingungen, etc.) schien in der Regel ein gewisser Überblick zu bestehen – Wissen, das von den Teilnehmer_innen laut Bericht sogar aktiv genutzt worden war, um eigene Erfolge zu maximieren und Belastungen zu minimieren.

Die Nennung und Beschreibung der angesprochenen „Standard“-Strategien, die offenbar zum Repertoire der Teilnehmer_innen gehörten, legt allerdings die Vermutung nahe, dass Strategien durchaus aktiv genutzt wurden.

Diese Strategien waren in der Regel (noch) sehr präsent, was sich daran zeigte, dass sie im Verlauf entsprechender Arbeits- oder Denkvorgänge sehr früh verbalisiert wurden – oftmals spontan und ohne konkrete Nachfrage des Interviewleiters.

Dies betrifft offenbar Strategien, deren Einsatz von Lehrkräften explizit nahegelegt und auch exemplarisch praktiziert wurde, und/oder die von den Teilnehmer_innen als nützlich beurteilt und (daher) regelmäßig praktiziert wurden.

Dabei fällt auf, dass den Teilnehmer_innen nicht nur die Existenz dieser Strategien bekannt und bewusst war, sondern in der Regel auch deren Nutzen für den eigenen Lernerfolg und die eigene Lernleistung. Es geht aus den Interviews hervor, dass derartige Strategien selbstständig verwendet wurden und insbesondere beurteilt werden konnte, in welchen Situationen und zu welchen Zeitpunkten von Arbeits- und Denkprozessen die Verwendung angemessen, bzw. notwendig war, was – soweit dies auf die verwendeten Strategien zutrifft – auch eine gezielte Auswahl der jeweils „passenden“ Strategie miteinschließt oder zumindest die bewusste Entscheidung, eine bekannte Strategie anzuwenden oder darauf zu verzichten.

Die Häufigkeit derartiger Berichte im Verlauf der Interviews und die Aussagen der Teilnehmer_innen über das gewohnheitsmäßige Vorgehen im obigen Sinne lassen darauf schließen, dass es sich bei Wissen über sowie Beurteilung und Verwendung von Strategien grundsätzlich um keine Ausnahmen handelt. Entscheidend ist hier, dass es sich dabei einerseits um Strategien handelt, die explizit (und häufig) von Lehrkräften erwähnt und – mit großer Wahrscheinlichkeit – auch aktiv und beispielhaft selbst im Unterricht genutzt wurden. Beispielhaft hierfür ist die Überprüfung eines erhaltenen Ergebnisses durch „Einsetzen“ oder Abgleich mit alternativen Darstellungen.

Alternativ handelt es sich um Strategien, die selbst im Rahmen des eigenen Lernverhaltens – mit großer Wahrscheinlichkeit ebenfalls durch explizite Aufforderungen und Ratschläge von Lehrkräften oder anderen Personen – (bewusst) erprobt, als nützlich beurteilt und infolgedessen häufig (mit positiven Auswirkungen) praktiziert wurden.

Entscheidend für den Einsatz dieser (vergleichsweise simplen) Strategien ist also einerseits das Vorbild der diese Strategien praktizierenden Lehrkraft und die gemeinsame Einübung dieser Strategien sowie andererseits die Entwicklung metakognitiver Erfahrungen, die sich beim Verwenden solcher Strategien ergeben (vereinfacht ausgedrückt: Wahrnehmen von Erfolg → Erkennen von Nutzen → positive Wirkung → Abspeichern) und die – im Lauf der Zeit – ein (→) Bewusstsein, bzw. eine (→) Sensitivität für den Einsatz von Strategien schaffen und dieses Verhalten festigen.

Dies führt zu der Hoffnung, dass auch elaboriertere und fachspezifischere Strategien, bzw. Metakognitionen bei entsprechender Vermittlung im Mathematikunterricht durchaus trainiert und ins Verhalten von Lernenden integriert werden können, sofern diese mit „positiven“ metakognitiven Erfahrungen verbunden werden.

Dies deckt sich bspw. mit den Erkenntnissen Cohors-Fresenborgs, Kaunes und Zülsdorf-Kerstings (2014), Schoenfelds (1991) oder aber auch Pólyas (z.B. 1945), sowie weiterer Autor_innen (vgl. Kapitel 2.2.5, Kapitel 2.3.1), die attestieren, dass Metakognition (bzw. der Einsatz von Heuristiken und Strategien im Falle Pólyas) nicht nur eingefordert werden darf, sondern explizit von Lehrkräften (in Vorbild-Funktion) selbst praktiziert, kommuniziert und durch die Lernenden eingeübt werden muss, um als nützliches Werkzeug wahrgenommen (→ Beurteilung) und auf Grund solcher metakognitiver Erfahrungen in das eigene Verhaltensrepertoire aufgenommen zu werden. Das Wissen um die Existenz solcher Strategien allein führt bekanntlich noch nicht zu deren Nutzung.

Umgekehrt legen die zuvor beschriebenen Beobachtungen nahe, dass gezielte Instruktion, beispielhafte Praktizierung durch Lehrkräfte und positive metakognitive Erfahrungen bei der (selbstständigen) Verwendung durch die Lernenden selbst auch tatsächlich zu einer positiven Bewertung (im Sinne ihres Nutzens) und einer regelmäßigen, bewussten, gezielten Verwendung der entsprechenden Strategien führt, was sich ebenfalls mit der Fachliteratur (vgl. Kapitel 2.2) deckt.

Insbesondere scheint die Erinnerung an derart „gespeicherte“ Strategien über den verstrichenen Zeitraum seit dem letzten Umgang mit Mathematik vergleichsweise stabil zu sein, während

bspw. konkretes Fachwissen – wie zuvor beschrieben – zumeist weniger erfolgreich abgerufen werden konnte.

Wie angesprochen, handelt es sich bei den genannten um vergleichsweise „basale“ Strategien, die sich – dadurch – auch vergleichsweise einfach praktizieren und vermitteln lassen. Dennoch legen die Beobachtungen – wie bereits gesagt – nahe, dass entsprechender Unterricht Wirkung zeigen kann.

Umgekehrt zeigte sich – wie zuvor dargelegt – dass in diversen Situationen Defizite beim Umgang mit Mathematik bestehen, denen möglicherweise durch den Einsatz von Metakognition entgegengewirkt werden kann.

Diese Erkenntnisse legen die Folgerung nahe, dass – in Bestätigung der dokumentierten Ergebnisse und Forderungen (Kapitel 2.2) die Vermittlung von Metakognition (im Sinne von Metawissen und von metakognitiven Fähigkeiten) und die Schaffung entsprechender metakognitiver Erfahrungen einerseits möglich sind und relativ stabile Auswirkungen zu zeigen scheinen. Andererseits legen die beobachteten Defizite – wie bereits ausgeführt (Kapitel 2) – die Forderung nahe, Metakognition (im obigen Sinne, insbesondere durch Kommunikation und durch vorbildhaftes Praktizieren) gezielt zu trainieren.

Insgesamt entsteht der Eindruck, dass die Teilnehmer_innen vor allem im allgemeinen, bzw. nicht-spezifischen (also nicht domänenspezifischen) Bereich in der Regel durchaus metakognitiv aktiv sind und entsprechendes Wissen (korrekt oder nicht) und entsprechende (metakognitive) Erfahrungen zur Beurteilung, Überwachung und Steuerung ihrer Kognition und ihres Verhaltens nutzen.

Dabei fällt auf, dass gerade im Hinblick auf affektive, bzw. emotionale Aspekte, sowie auf die Beurteilung von und Interaktion mit anderen Personen (Lehrkräften, Mitschüler_innen) ein erhöhtes Maß an Metawissen oder Beliefs und Meinungen zu beobachten ist. Ob dies bspw. einer höheren Motivation auf persönlicher Ebene oder einer größeren Zugänglichkeit und „Lebensnähe“ dieses Wissens geschuldet ist, bleibt vorerst offen. Es stellt sich allerdings die Frage, wie diese (mögliche) Erkenntnis zur Förderung genutzt werden kann, wobei der Einbezug der Lebenswelt von Lernenden in den Mathematikunterricht keine Neuheit ist (vgl. auch Kapitel 4.4.1 – „Genetischer Unterricht“ und „Grunderfahrungen“).

Weiterhin besteht die Möglichkeit, dass domänen-, bzw. mathematikspezifische Metakognition möglicherweise entweder stärker unbewusst oder stärker routiniert abläuft oder ob sie so direkt

mit konkreten mathematischen Prozessen verbunden ist, dass es für die Teilnehmer_innen schwerer ist, sie isoliert wahrzunehmen und zu verbalisieren.

Eine mögliche Ursache für das beobachtete Defizit könnte in der Kalkülhaftigkeit der verwendeten Aufgabe und entsprechender Aufgaben aus dem Unterricht der Teilnehmer_innen vermutet werden. Auch wenn sich der Mathematik- (und damit der Analysis-)Unterricht in den letzten Jahren vom Einüben kalkülhafter und rechenintensiver Verfahren hin zu einer stärkeren Betonung von Problemlösung und Verständnis-Orientiertheit entwickelt hat, sind gerade bestimmte typische Aufgabenstellungen aus der Analysis „von Natur aus“ kalkülhaft und lassen sich kaum ohne mehr oder weniger umfangreichen Rechenaufwand bearbeiten; so die „klassische“ Kurvendiskussion und entsprechende Anwendungen wie das im Interview verwendete Optimierungsproblem. An dieser Stelle wird die Mutmaßung angestellt, dass schemahaft eingeübte, aber möglicherweise selten in verständnis-betonten Aufgabenstellungen verwendete und durchdachte Konzepte (wie Ableitung, Extremwerte, etc.) – auch wenn die zu Grunde liegenden Strukturen zumindest auf Schulniveau durchaus verstanden wurden – nach Abschluss der jeweiligen Unterrichtssequenzen, bzw. nach den Abschlussprüfungen relativ stark vergessen wurden, bzw. nicht leicht abrufbar sind, weil sie ursprünglich vor allem durch Routine-Aufgaben und entsprechende „Auslöser“ im Aufgabentext im Gedächtnis verankert wurden. Es wird unterstellt, dass hier durch einen Mangel an vorstellungs-bildenden Aufgabenstellungen Grundvorstellungen nicht in einem so großen Maße ausgebildet wurden, wie dies möglich sein könnte (z.B. durch entsprechenden Einsatz von Metakognition) und dass eine Vernetzung der entsprechenden Begriffe und Methoden mit weiterem Wissen nur begrenzt zustande kam. Dies wird bspw. auch durch die Beobachtung gestützt, dass eine Zuordnung von Begriffen und Methoden zu mathematischen Themengebieten nur sehr bedingt möglich war. Allerdings bleibt hierbei offen, inwieweit entsprechende Überbegriffe im Schulalltag tatsächlich verwendet werden. Andererseits dürften allein im jeweils verwendeten Lehrwerk entsprechende Informationen zu finden gewesen sein.

In Bezug auf das Vollrath'sche Stufenschema für das Begriffslernen (vgl. Kapitel 4.4) lässt sich vermuten, dass die Teilnehmer_innen das Schema nicht oder nur oberflächlich bis zur höchsten Stufe durchlaufen haben. Möglicherweise wurden Themen nicht spiralförmig, sondern nur linear durchlaufen – eine Reflexion im Lernprozess früher angesiedelter Begriffe zu einem späteren Zeitpunkt (von einem „höheren“ Standpunkt aus) fand möglicherweise nicht statt, sodass sich die gelernten (verstandenen?) Inhalte nicht ausreichend festigen konnten. Auch eine selbstständige Reflexion von Unterrichtsinhalten außerhalb der schulischen Verpflichtungen

fand möglicherweise nur in geringem Umfang statt – eine Vermutung, die durch die Aussagen der Teilnehmer_innen in der Regel auch bestätigt wurde.

Wie in Kapitel 2.3.4 und Kapitel 4.4.2 ausgeführt, erfordern die Überlegungen, die zur Berechnung von Extrempunkten vonnöten sind, einen gewissen Überblick über den Ableitungsbegriff und seine Nachbarbegriffe und die zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge. Lernende müssen sich im Klaren sein, inwiefern genau die Frage nach Extrema einer Funktion mit der Berechnung der 1. und 2. Ableitung zusammenhängt. Ist diese Fragestellung – wie im vorliegenden Problem – noch zusätzlich durch einen Sachkontext und durch die im Interview zumeist erst erfolgte „Fehl-Polung“ auf ein geometrisches Problem „verschleiert“, so erstaunt es wahrscheinlich nicht, dass eine unzureichende Vernetzung und ein unzureichender Aufbau von Grundvorstellungen zu Schulzeiten dazu führen, dass sich nach einer gewissen Pause entsprechende Erinnerungen nur mühsam abrufen lassen.

4.2. Ergebnisse zu Forschungsfrage 2

Vorstellung eines Kategoriensystems zur Metakognition in der Mathematikdidaktik

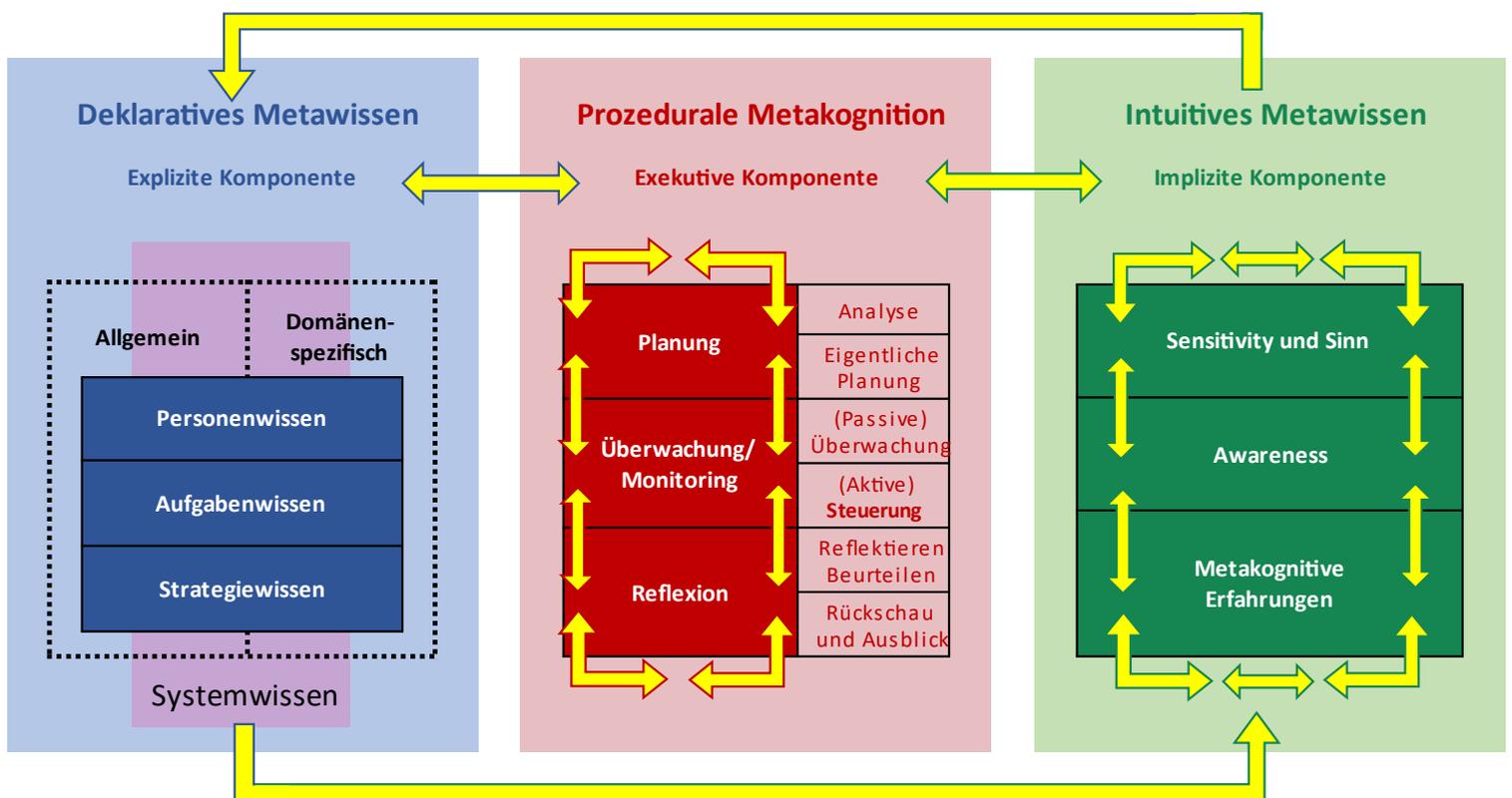


Abbildung 7: Modell für Metakognition beim Umgang mit Mathematik

Aus den bisherigen theoretischen Überlegungen und den Resultaten der empirischen Erhebung ergibt sich auf Basis der etablierten Systematisierungen, wie sie z.B. bei Schneider und Schoenfeld vorkommen, das im Folgenden beschriebene Modell.

Im Anschluss an die Beschreibung des Modells erfolgt die Erläuterung ausgewählter Ausprägungen von Metakognition, die sich im Rahmen des Codierungsprozesses herauskristallisierten und die für den Umgang mit Mathematik als zentral befunden wurden.

Diese stellen keine isolierten Aspekte von Metakognition dar, sondern ergeben sich vielmehr durch die Interaktion verschiedener Aspekte des Modells.

Das vorliegende Modell systematisiert den Begriff Metakognition in einer möglichst umfassenden Form und wird damit dem diese Arbeit motivierenden Wunsch nach einer theoretischen Definition gerecht, die sich in der Literatur trotz mittlerweile zahlreicher Arbeiten zur Metakognition nur in begrenztem Umfang findet. Es sei dabei nochmals angemerkt, dass bspw. für Teile des Modells bereits Operationalisierungen existieren – so etwa die ausführliche Untergliederung der prozeduralen Komponente nach Cohors-Fresenborg et al. (Kapitel 2.3.1). Eine derartige Feinheit wird hier mit dem Ziel eines vollständigen Modells des gesamten Spektrums von Metakognition bewusst vermieden; sie lässt sich allerdings in den Vorstufen des Modells in Gestalt der Codes und Kategorien früherer Stufen des Auswertungs-Prozesses erkennen, die im Anhang dokumentiert sind.

Um einer optischen „Überladung“ der schematischen Darstellung des Modells vorzubeugen, wurde insbesondere auf die Annotation, bzw. Erläuterung der enthaltenen „Pfeil“-Elemente, bzw. Kreisläufe verzichtet. Diese erfolgt in der anschließenden präzisen Analyse des Modells, bzw. seiner Darstellung, die die Bedeutung seiner Elemente und ihre Zusammenhänge aufschlüsselt.

Das Modell gliedert sich in drei Komponenten oder Kategorien: **Deklaratives Metawissen**, **Prozedurale Metakognition** und **Intuitives Metawissen**. Dabei orientieren sich erstere unter anderem an den etablierten Benennungen, die sich bspw. bei Schneider finden; die dritte vereint verschiedene Aspekte, die im Gegensatz zur deklarativen Komponente auf einer impliziteren, intuitiveren Ebene stattfinden und die im Folgenden genauer erläutert werden. Auch diese Teil-Aspekte sind teils aus der Literatur bekannt und kamen im Verlauf der Arbeit bereits zur Sprache.

Zur besseren sprachlichen Handhabbarkeit wird in Bezug auf die deklarative (explizite) und implizite Kategorie/Komponente des Modells von den beiden „**Wissenskategorien**“ oder „**Wissenskomponenten**“ gesprochen.

Beschreibung der Hauptkategorien und ihrer Wechselbeziehungen

Im Folgenden wird der strukturelle Aufbau des Modells erläutert; eine detailliertere Beschreibung der einzelnen Unterkategorien erfolgt im Anschluss.

Wie bereits bei den theoretischen Überlegungen zur Metakognition wird davon ausgegangen, dass beide Wissenskomponenten – die explizite, deklarative sowie die implizite, unbewusste – den (gedanklichen) Umgang mit (mathematischen) Aufgaben unterstützen, indem beim Durchlaufen des prozeduralen Kreislaufs auf diese Wissenskomponenten „zugegriffen“ wird – sowohl bewusst als auch unbewusst. Sie informieren sozusagen die prozedurale Metakognition, dienen als „Hintergrund(wissen)“, mit dem laufende Prozesse abgeglichen, bzw. vor dem laufenden Prozesse interpretiert, geplant, überwacht und reflektiert werden.

Die beiden Wissenskategorien stehen in Form eines Kreislaufs in Verbindung, der verdeutlicht, dass sowohl explizites Wissen in implizites Wissen übergehen – also sozusagen verinnerlicht werden – kann. Andererseits können aus – zuvor – „nur“ implizitem Wissen, Eindrücken, einem „Gespür“ auf Dauer explizite Schlüsse gezogen werden, aus denen bewusstes, deklaratives Metawissen entsteht. Hierbei bleibt zu beachten, dass in dieser Arbeit auch möglicherweise „inkorrektes“ Wissen zum Metawissen gezählt wird (vgl. Kapitel 2.1.5). Vermutlich entstehen solche „Übergänge“ mittels der prozeduralen Komponente, die sich auf (kognitive) Handlungen bezieht, also bspw. durch Reflexion, die implizites Wissen auf eine bewusste Ebene „hebt“ oder durch wiederholte Durchführung von (Denk-)Prozessen, durch die explizites Wissen in eine verinnerlichte, routinierte, implizite Form von Wissen übergeht (Übung!).

Deklaratives Metawissen – Explizites Metawissen

Die Kategorie Deklaratives Metawissen wurde bereits in Kapitel 1.4 erläutert und stellt eine der zentralen Grundlagen dieser Arbeit dar. Sie findet Eingang in dieses Modell, wird allerdings teils anders unterteilt, als dies etwa bei Schneider geschieht, und um die Unterteilung von Metawissen in eine allgemeine und eine domänenspezifische Komponente erweitert.

Diese Kategorie oder Komponente vereint Aspekte von Metakognition, die deklaratives, bzw. explizites (und ggf. auch explizierbares, verbalisierbares) Wissen über das eigene kognitive System bedeuten. Der Begriff MetaWISSEN – in Abgrenzung zur prozeduralen MetaKOGNITION) wird dabei in Anlehnung an etablierte Systematisierungen (vgl. etwa Schneider) gewählt. Es wird angenommen, dass es sich hierbei um Metawissen handelt, das

weitgehend bewusst vorliegt und das beim Denken und (kognitiven) Handeln „verwendet“, bzw. auf das zurückgegriffen wird – also als Informationsquelle und Referenzrahmen für die kognitiven Vorgänge der prozeduralen Komponente. Umgekehrt wird angenommen, dass sich solches explizite Wissen (auch) aus Erfahrungen entwickelt, die im Rahmen kognitiver Vorgänge gemacht werden – bspw. durch Reflexion von Problemlöseprozessen. Diese Wechselbeziehung wird durch die Pfeile dargestellt. Des Weiteren wird angenommen, dass eine analoge Beziehung auch zwischen der prozeduralen und der impliziten Komponente besteht (s. dort) – entsprechend auf einer tendenziell unbewussten, nicht (oder nur schwer) explizierbaren Ebene. Insofern kommt beiden Wissenskomponenten eine vergleichbare Rolle im Hinblick auf (meta)kognitive, prozedurale Vorgänge zu. Diese wechselseitigen Einflüsse werden als – in der Praxis – nicht trennscharf, sondern eng verknüpft angenommen. Außerdem wird vermutet, dass eine quasi „direktere“ Verbindung zwischen beiden Wissenskomponenten besteht: Einerseits kann explizites Wissen (durch Verinnerlichung, Routinenbildung, etc.) zu implizitem Wissen werden, bzw. implizites Wissen generieren, andererseits kann sich aus implizitem Wissen, Gespür und metakognitiven Erfahrungen der impliziten Kategorie (durch Übung und das Ableiten von Regelmäßigkeiten, durch aktive Reflexion und durch Verständnis zuvor weniger verstandener Inhalte) explizites (Meta-)Wissen entwickeln. Diese direkte Wechselbeziehung zwischen den Wissenskategorien wird durch den Kreislauf symbolisiert.

Die Unterteilung der deklarativen Komponente in je eine allgemeine und eine domänenspezifische Unterkategorie stellt eine der Eigenheiten des Modells dar, die in dieser Form in der Literatur nicht zu finden ist. Sie trägt einerseits der bisher ungeklärten Frage Rechnung, ob Metakognition grundsätzlich allgemeiner oder domänenspezifischer Natur ist, bzw. sein kann, oder als Kombination aus beiden besteht. Für beide Varianten existieren Belege (s. Kapitel 2.1.6). So legen auch die Ergebnisse der empirischen Erhebung nahe, dass beide Arten von Metakognition vorkommen und eine solche Unterteilung sinnvoll ist, da sich bei den Teilnehmer_innen hier deutliche Unterschiede erkennen lassen (s. Kapitel 4.1). Des Weiteren ermöglicht diese Unterteilung die Integration von Kognition, die die (unscharfe) Grenze zum Nachdenken über Mathematik bereits deutlicher überschreitet, als dies bei anderen Ansätzen in der Literatur, die von einem vorwiegend allgemeinen, domänenübergreifenden Konzept ausgehen, der Fall ist (vgl. Kapitel 2.1.5 und Kapitel 2.1.6).

Prozedurale Metakognition – Steuerung – Exekutive Funktion

Die prozeduralen Unterkategorien von Metakognition stellen die zentralen Aspekte von Metakognition dar, die bei der „Begleitung“ und **Steuerung** von (kognitiven) Prozessen auftreten, wie sie beim Umgang mit Aufgaben jeglicher Art stattfinden – insbesondere beim Umgang mit Mathematik und dem Bearbeiten von Aufgabenstellungen, bei Lernprozessen, beim Üben, etc.. Als Aufgabenstellungen kommen z.B. Problemlöseaufgaben, Beweisaufgaben, Modellierungsaufgaben, etc. in Frage.

Im Gegensatz zu den beiden „Wissens-Kategorien“ stellen sie die aktiven (prozeduralen), steuernden, „handelnden“ (prozessualen) Aspekte von Metakognition dar, weshalb – wie in der Literatur – der Begriff MetaKOGNITION (in Abgrenzung zum MetaWISSEN) beibehalten wurde, obwohl dies strenggenommen eine Überschneidung mit dem Überbegriff Metakognition darstellt. Da es sich hierbei allerdings um eine etablierte Systematisierung (vgl. etwa Schneider) handelt, wird eine Abweichung von etablierten Begriffen hier nicht für sinnvoll gehalten.

Die prozeduralen Aspekte können durchaus als eine Art Reihenfolge, als Ablaufplan interpretiert werden, der (kognitiven, bzw. metakognitiven) Prozessen zu Grunde liegt, bzw. an dem sich Lernende beim Bearbeiten von Aufgabenstellungen orientieren könnten, weshalb in diesem Modell auch von „**Phasen**“ gesprochen wird. Es wird angenommen, dass sich diese Art der Interpretation gerade beim Umgang mit Mathematik als besonders tragfähig erweist. Hierbei wird nochmals an die Arbeiten Pólyas (vgl. etwa Pólya 1945) erinnert. Es sollte allerdings beachtet werden, dass das Verständnis der prozeduralen Komponente hier nicht – wie dies teilweise geschieht – als ein rein „rezeptartiges“ Durchlaufen von Stationen eines (Denk-)Prozesses verstanden werden sollte, sondern prozedurales Wissen darüber beinhaltet, wie solche Prozesse, bzw. die einzelnen Vorgänge (Planung, Überwachung, Reflexion) funktionieren. Hierbei wird deutlich, dass eine Überschneidungsfreiheit mit den Wissenskomponenten nicht gegeben sein kann.

Des Weiteren sollte beachtet werden, dass diese Aspekte nicht nur beim expliziten Bearbeiten von Aufgaben auftreten können, sondern bei jeglicher Art von kognitivem Prozess, bei dem die aktuelle Situation überprüft und entsprechende Maßnahmen ergriffen werden.

Es wird im Rahmen dieses Modells angenommen, dass die steuernden kognitiven Vorgänge (prozedurale Aspekte) von den beiden Wissenskategorien informiert werden, bzw. auf das explizite und implizite Metawissen zurückgreifen (aufbauend, abgleichend, anpassend, u.Ä.).

Umgekehrt beeinflussen und erweitern sie dieses durch neue Erkenntnisse, die sich im Rahmen von kognitiven Vorgängen (z.B. der Reflexion) ergeben. Symbolisiert werden diese Wechselbeziehungen durch die Doppelpfeil-Darstellungen.

Zu beachten ist hierbei, dass nach meiner Ansicht die drei prozeduralen Kategorien sowie ihre Unterkategorien nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge durchlaufen werden (müssen). Je nach dem metakognitiven „Level“ der Lernenden, je nach Art des „begleiteten“ Prozesses oder auch abhängig davon, ob dieser bspw. vollständig durchgeführt werden kann (z.B. im Rahmen einer Klausuraufgabe), werden einerseits nur Teile der prozeduralen Komponente durchgeführt; andererseits können diese auch wiederholt auftreten, bzw. sich gegenseitig beeinflussen und informieren. Bspw. könnte eine zwischenzeitliche Reflexion eines Teilschritts bei der Aufgabenbearbeitung zu neuen Erkenntnissen und einer neuen Planungsphase führen (Adaption). Dieser Umstand wird durch die Pfeile verdeutlicht, die ein wiederholtes Durchlaufen der „Phasen“ des prozeduralen Kreislaufs oder deren teilweise Auslassen veranschaulichen.

Intuitives Metawissen

Diese Kategorie fasst Metawissen zusammen, das im Gegensatz zur deklarativen Kategorie oft nicht explizit vorliegt, bzw. schwerer verbalisierbar ist. Gemeint sind unbewusste Aspekte, die sich durch ein weniger begründbares „Gespür“ äußern und die Überzeugungen und Einsichten über die eigene Kognition bedeuten (→ Beliefs, vgl. etwa Schoenfeld, 1987), die auf Erfahrung im Umgang mit vergleichbaren Situationen basieren (→ Metakognitive Erfahrungen). Die mit diesen Begriffen verbundenen englischen Begriffe „Sensitivity“ (vgl. Schoenfeld) und „Feeling“ sollten dabei nicht mit dem Konzept Emotion verwechselt werden! Es wird angenommen, dass gerade diese Aspekte einen hohen Grad an Individualität aufweisen. Außerdem wird mit dem Begriff „Awareness“ (Bewusstheit, Achtsamkeit) eine Unterkategorie integriert, die eine im „Hintergrund“ vorhandene, passive und unbewusste Aufmerksamkeit beschreibt, die erst – bspw. – beim Auftreten von Fehlern, Risiken, Gefahren (Beim Umgang mit Mathematik ist dieser Begriff natürlich relativ zu interpretieren!) oder aber beim spontanen Erkennen von Möglichkeiten eine bewusst wahrgenommene Reaktion in Form des oben angesprochenen „Gespürs“ oder in Form einer spontanen Einsicht („Geistesblitz“) erzeugt.

Die im Modell durch Pfeile symbolisierten Wechselbeziehungen wurden bereits einleitend und präziser in den Erläuterungen der beiden anderen Komponenten behandelt.

Erläuterung der Unterkategorien

Deklaratives Metawissen – Explizites Metawissen

Im Folgenden werden die sechs Unterkategorien zuerst einzeln vorgestellt; es schließen sich Erläuterungen zur allgemeinen Komponente und zur domänenspezifischen Komponente als jeweilige Überkategorien an.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass hier davon ausgegangen wird, dass sich deklaratives Metawissen oft mit didaktischem Wissen vergleichen lässt, über das Lernende selbst verfügen. Je nach Komponente ist hierunter allgemeindidaktisches, mathematikdidaktisches oder speziell stoffdidaktisches Wissen zu verstehen. Gemeint ist damit, dass das Metawissen von Lernenden dem didaktischen Fachwissen von Expert_innen nicht unähnlich ist, dass also Lernende etwa Wissen über (eigene) Lernprozesse und diesen zu Grunde liegende Mechanismen oder etwa über wünschenswerte Vorstellungen und Fehlvorstellungen zu mathematischen Begriffen besitzen können.

Personenwissen – Person Knowledge

Allgemein:

Unter der allgemeinen, „unspezifischen“ oder „fachfernen“ Komponente der Kategorie Personenwissen wird Metawissen gefasst, das sich direkt auf die eigene Person (bzw. deren, also die eigene, Kognition) bezieht. Darunter fällt unter anderem Wissen über typisches Verhalten, über Stärken und Schwächen allgemeiner Natur sowie darüber, welche Konsequenzen, Möglichkeiten oder Probleme sich daraus ergeben. Auch allgemeines Wissen über die Funktionsweise menschlicher Kognition (Gedächtnis, Wahrnehmung, etc.) fällt in diese Kategorie, sowie quasi „allgemeindidaktisches Wissen“ über Mechanismen des Lernens (und Lehrens), Übens und allgemein des Wissenserwerbs.

Außerdem beinhaltet diese Kategorie Wissen über die Einordnung der eigenen Person und ihrer (kognitiven) Möglichkeiten in ein System (z.B. das System Schule oder das System Unterricht) und über dessen Funktionsweisen und die damit verbundenen (→) Strategien.

Bezüge bestehen bspw. auch zum Klassifikationsschema nach Hasselhorn (vgl. Kapitel 2.3.1) – genauer zu den Kategorien „Epistemisches Wissen“ und „Systemisches Wissen“.

Als verdeutlichende Beispiele seien an dieser Stelle genannt:

- Wissen über Konzentrationsschwierigkeiten
- Wissen über den eigenen „Lerntyp“
- Wissen, wie dem eigenen Lerntyp entsprechend am besten gelernt wird
- Wissen über individuelle Gedächtnisstützen oder Lernhilfen (Hierbei zeigt sich bereits die Überschneidung mit dem Strategiewissen!)

Domänenspezifisch:

Unter dieser Kategorie wird Wissen über eigenes Wissen und eigene Kognition zusammengefasst, das sich speziell auf den Umgang mit Mathematik bezieht – also bspw. Wissen über eigene Stärken, Schwächen und eigenes Verständnis in Bezug auf konkrete mathematische Begriffe und Verfahren, wobei sich hier ein enger Bezug zu den anderen domänenspezifischen deklarativen Komponenten zeigt. Auch deklaratives Wissen über den Einsatz von heuristischem Arbeiten, über die Nutzung der eigenen Kreativität („Wie kann ich zu neuen Einsichten und Ideen gelangen?“) oder darüber, wie (deklarativ) festgestellt werden kann, zu welchem Grad eine bestimmte Thematik verstanden wurde. Auch hier zeigt sich in Bezug auf solche Strategien die enge Verbindung zu den anderen domänenspezifischen Komponenten, während sich im Hinblick auf Verständnis die Verbindung zur impliziten Wissens-Komponente zeigt, bei der das „Gefühl“ von Verständnis auf Grund metakognitiver Erfahrungen eine Rolle spielt.

Diese Kategorie beinhaltet Wissen auf Seiten der Lernenden, das oftmals fachdidaktischem Wissen ähnelt, wie es bspw. Lehrkräfte über Lernprozesse im Bereich Mathematik sowie über Eigenschaften und Aspekte mathematischer Begriffe und Verfahren und über die zugehörigen (Grund-, Fehl-, etc.) Vorstellungen besitzen. Im Vergleich mit der nicht-spezifischen Kategorie Personenwissen spielt also vor allem Wissen (bei Lernenden) eine Rolle, das stoffdidaktischem und metamathematischem Wissen (von Lehrenden) ähnelt.

Aufgabenwissen – Task Knowledge

Allgemein:

Je nach Art und „Umfang“ der entsprechenden „Aufgabe“ können hier tatsächlich konkrete Problemstellungen gemeint sein bis hin zum Umgang mit einem ganzen „System“ – also bspw. dem System „Schule“, in dem sich Schülerinnen und Schüler täglich bewegen und in dem bestimmte Gesetzmäßigkeiten herrschen, die mit der eigenen Person (ihrem Verhalten und ihrer

Kognition) in Wechselwirkung stehen. Entsprechendes Aufgabenwissen bedeutet also Wissen darüber, wie die eigene Person mit solch einem System verbunden ist und wie sie als ein Teil dessen funktioniert, bzw. welche Konsequenzen sich für das eigene Denken und Handeln ergeben – insbesondere im Hinblick auf Wissen über Ziele, die innerhalb des Systems verfolgt werden. Hierbei besteht offensichtlich ein enger Zusammenhang zum Strategiewissen. Handelt es sich beim System, bzw. bei der Aufgabe um konkrete Wissensgebiete, geht diese Komponente in ihr domänenspezifisches Pendant über.

Domänenspezifisch (Aufgaben- UND Strategiewissen!):

Bei den domänenspezifischen Unterkategorien **Aufgaben- und Strategiewissen** handelt es sich um die Kategorien von Metakognition, die der Mathematik als Domäne, bzw. Einsatzgebiet am nächsten stehen. Als Wissen über (eigenes) Wissen beinhaltet das Metawissen dieser beiden Komponenten auch Wissen über Mathematik im Sinne mathematikdidaktischen Wissens über mathematische Begriffe und Methoden, Kompetenzen und Leitideen (im Sinne der KMK-Standards), Strategien und Ziele; sowie Wissen über deren Möglichkeiten, Grenzen, Einsatzgebiete, Verwendung und ihre Bedeutung im Rahmen von Problemstellungen verschiedener Arten – und schließlich Wissen über die Verwendung dieses Wissens zur Steuerung von (kognitiven) Handlungen beim Umgang mit Mathematik. Diese Komponenten bewegen sich damit nahe am Gebiet der Stoffdidaktik und beinhalten bspw. Wissen über Aspekte mathematischer Begriffe sowie die zugehörigen Grundvorstellungen (vgl. Kapitel 4.4.1). Vermutlich ist hier von einem Wissen auf verschiedenen Stufen auszugehen; von „Novizen“ wäre hier selbst im besten Fall (im Hinblick auf die Qualität ihres Metawissens und im Hinblick auf die entsprechenden Begrifflichkeiten) nicht das praktische oder wissenschaftliche Niveau Studierender zu erwarten – weder inhaltlich noch formal, bzw. sprachlich. In seiner „höchsten“ Ausprägung dürfte solch ein mathematikdidaktisches Metawissen eben tatsächlich vor allem bei Expert_innen im Bereich Mathematikdidaktik zu erwarten sein – also bei erfahrenen Lehrkräften und Forschenden – denen die entsprechenden Inhalte während ihres Studiums und in der Praxisausbildung vermittelt wurden, bzw. die diese im Rahmen ihrer Forschungstätigkeit erworben und vertieft haben.

Der in der Literatur teils vorkommende Aspekt eines „konditionalen Metawissens“ dürfte im Hinblick auf die Bedeutung kausaler Zusammenhänge in der Mathematik ebenfalls mit dieser Kategorie in Zusammenhang stehen, erhält aber im Rahmen dieses Modells auf Grund der Überlegungen aus Kapitel 1.4 keine eigenständige (Unter-)Kategorie.

Strategiewissen – Strategy Knowledge

Allgemein:

Unter dieser Kategorie wird vor allem Wissen über Ziele und über (kognitive) Strategien gefasst, die Personen- und Aufgabenwissen nutzen, um innerhalb eines Systems diese Ziele zu erreichen, bzw. Wissen darüber, wie diese Strategien im Hinblick auf ihre Effizienz und Effektivität zu beurteilen sind. Dies betrifft z.B. Strategien bzgl. der Gestaltung von Lernprozessen und Übung, bzgl. der Steuerung und Optimierung des eigenen Verhaltens (im System) und bzgl. der Notwendigkeit bestimmter Maßnahmen, die sich förderlich auf Elemente der spezifischen Komponenten auswirken. Im Vergleich zu diesen spielen hier also bspw. allgemeines Wissen über die Planung und Strukturierung von kognitiven Handlungen eine Rolle (aufmerksam und vollständig Anweisungen lesen, Pausen machen, Ressourcen einteilen, etc.). Hier zeigt sich eine Nähe zum (mathematik-)didaktischen Wissen, wie es bspw. Lehrkräfte zur Gestaltung und Unterstützung der Lernprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler einsetzen.

Domänenspezifisch:

Die Beschreibung erfolgte bereits weiter oben in Kombination mit dem Aufgabenwissen.

Prozedurale Metakognition – Steuerung – Exekutive Funktion

Bei der prozeduralen Kategorie handelt es sich um eine in der Literatur relativ etablierte Systematisierung prozeduraler Metakognition; die drei Unterkategorien (oder Phasen), die sich bspw. bei Schneider und Artelt (2010) (vgl. Kapitel 2.3.1) finden, wurden als sinnvoll erachtet und ließen sich im Kategorisierungsprozess grundsätzlich bestätigen. Im Rahmen dieser Arbeit wird jeweils eine weitere Unterteilung vorgenommen, die sich in Teilen ebenfalls bei anderen Autor_innen findet und die durch die empirische Erhebung so nahegelegt wurde.

Analyse (Analysis) und Planung (Planning)

Diese Komponente entspricht der Planungs-Kategorie, wie sie in den Grundlagen der Arbeit verstanden wird, teilt diese aber in eine analysierende, evaluierende, beurteilende Komponente und in eine tatsächlich aktiv handlungs-planende Komponente auf. Hierbei wird zwar nicht von einer hohen Trennschärfe ausgegangen, aber im Rahmen der empirischen Erhebung zeigt sich deutlich, dass rein analysierende (kognitive) Vorgänge stattzufinden scheinen, ohne dass planerische Tätigkeiten mit ihnen einhergehen (was sich auch mit eigenen Beobachtungen und

Erfahrungen deckt). Es wird vermutet, dass sich hierbei insbesondere Novizen von Expert_innen unterscheiden; insofern, dass NovizInnen für den Umgang mit unbekanntem Problemstellungen über die Analyse hinaus effektive Mittel zu deren Bewältigung zu fehlen scheinen (s. Kapitel 4.1). Bei Expert_innen hingegen wird mehr (deklaratives und auch implizites) Metawissen domänenspezifischer Art vermutet, welches das Generieren von Ideen, bzw. den Transfer und die Anpassung bekannter Strategien erlaubt.

Unter Analyse werden hier vor allem (kognitive) Handlungen verstanden, in deren Rahmen Aufgabenstellungen, Definitionen, Beschreibungen und allgemein Sachverhalte untersucht, eingeordnet und auf ihre Bedeutung, ihren Sinn, ihren Zweck etc. hin beurteilt werden. Die Frage nach dem eigenen Verständnis der (neuen) Inhalte wird gestellt. Der Begriff Planung bezieht sich – s. oben – auf die Steuerung von Kognition; die Strukturierung kommender Handlungen zur Bewältigung von Herausforderungen aber auch die Generierung von Ideen, die Verwendung von Heuristiken spielen hier eine Rolle. Diese Umsetzung von (Meta-)Wissen in tatsächliche (kognitive) Handlungen und die Entwicklung funktionierender Strategien scheint eine der bedeutendsten Hürden beim Umgang mit Mathematik zu sein, wenn keine Routine-Lösungen bekannt sind. Insofern kommt der Planungs-Komponente (und den sie „informierenden“ Wissens-Komponenten (explizit und implizit) eine hohe Bedeutung zu. Analyse und Planung stellen optimalerweise den Beginn eines „Ablaufplans“ dar, schließen sich aber theoretisch an vergangene derartige Abläufe an, was zu einem dauerhaften Kreislauf führt. Außerdem spielen sie immer dann eine Rolle, wenn neue Informationen analysiert werden und neue (korrigierende) Handlungen geplant werden müssen.

Überwachung (Monitoring) und Steuerung (Control)

Diese Kategorie stellt das handelnde Element von Metakognition dar. Als Teil des prozeduralen „Ablaufplans“ stellt es eine von dessen Phasen dar, wird allerdings so interpretiert, dass diese Art der Überwachung (Beobachtung) und reagierender Steuerung von Kognition praktisch immer stattfindet, wenn auch Kognition stattfindet, die nicht völlig routiniert und unbewusst abläuft. Diese Komponente wird also als Teil der natürlichen, nicht spezifisch trainierten Metakognition gesehen, die sich bei Menschen innerhalb einer gewissen Altersspanne entwickelt (s. Kapitel 2.1.3).

Die Übergänge zur impliziten Komponente in Form von einerseits bewusster Überwachung und andererseits unbewusster Aufmerksamkeit (die im Modell durch die Pfeildarstellungen festgehalten sind) dürften fließend sein.

Die Unterteilung der „klassischen“ Überwachung in eine überwachende und eine steuernde Komponente trägt der zentralen Bedeutung dieser beiden Vorgänge als „Inbegriff“ des Konzepts Metakognition Rechnung; außerdem der Beobachtung, dass aus Aufmerksamkeit und dem Bemerkten von Handlungsnotwendigkeiten nicht immer solche zu folgen scheinen. Wie bei der Analyse-Planungs-Komponente scheint also hier ein entscheidendes potentiell Defizit beim Umgang mit Mathematik vorzuliegen, das einen Ausgangspunkt für weitere Forschung darstellen kann.

Reflexion (Reflection, Reflexion)

Die Reflexions-Komponente stellt eines der zentralen Elemente des Begriffs Metakognition dar – das Denken oder Nachdenken über Kognition (Wissen, Denken).

Als Nachdenken über eigenes mathematisches Wissen und damit über Mathematik stellt sie im Zusammenhang mit domänenspezifischem Metawissen mit Sicherheit einen der wichtigsten Aspekte für den Umgang mit Mathematik als „Domäne“ dar.

Reflexionen dürften vor allem für die systematischere Auseinandersetzung mit Erkenntnissen und (neuem) Wissen zuständig sein und somit für Veränderungen (Verbesserungen) in den deklarativen Komponenten von großer Bedeutung sein. Der Übergang zu höheren Verständnisebenen (vgl. KMK-Standards oder Stufenschema nach Vollrath) dürfte – bewusst – vor allem durch Reflexionsprozesse vonstattengehen, bzw. durch diese (im Gegensatz zu einem unbewusst stattfindenden „Wachstum“ durch den Umgang mit Mathematik) strukturierter und effizienter gestaltet werden können.

Speziell im Hinblick auf ihre Rolle als Phase im metakognitiven „Ablaufplan“ wird die „klassische“ Reflexion unterteilt in eine tatsächlich rückblickende Komponente, die in engem Zusammenhang mit der Analyse-Kategorie steht und die Erfahrungen verarbeitet und bewertet, sowie in eine vorausschauende Komponente, die in engem Zusammenhang zur Planungs-Kategorie steht und die aus Erfahrungen und bestehendem Wissen Konsequenzen für folgende (kognitive) Handlungen (z.B. die Bearbeitung von Aufgaben) ableitet – z.B. durch die (→) Analyse und Reflexion gemachter (Denk-)Fehler und Schwierigkeiten bei der letzten Aufgabenbearbeitung.

Separat vom Begriff Reflexion im Sinne von Rückschau einerseits oder allgemein kognitiver Beschäftigung mit Inhalten andererseits wird der Aspekt der Bewertung, bzw. Beurteilung oder auch Einordnung aufgeführt, der im Anschluss an das Modell nochmals in verschiedenen Ausprägungen thematisiert wird. Gemeint sind hierbei Prozesse, von denen angenommen wird,

dass sie häufig bei jeglicher kognitiven Beschäftigung stattfinden – bspw. beim Kontakt mit neuen Begriffen oder auch beim Planen, Überwachen, etc.. Dabei muss ständig beurteilt werden, ob bestimmte Voraussetzungen (noch) gelten, ob ein Begriff oder eine Strategie für das aktuelle Ziel von Nutzen sein können, ob eine bestimmte Situation bereits aus der Vergangenheit bekannt ist, ob Wissen vorliegt oder nicht; hierbei finden Bewertungen als „angemessen oder nicht angemessen“, „einfach oder schwierig“, „bekannt oder nicht bekannt“, „richtig oder falsch“, aber auch Einordnungen in ein Begriffsnetz oder die zeitliche Verortung innerhalb einer strategischen Vorgehensweise statt.

Intuitives Metawissen – Implizites Metawissen

Sensitivity und Sinn

Wie weitgehend bereits in der Beschreibung der Gesamt-Kategorie „Implizites Metawissen“ erläutert, geht es in dieser Unterkategorie um Metawissen, das implizit ist und sich auf intuitiver Ebene (vgl. etwa Schoenfeld, 1987) äußert. Derartiges Wissen ist in diesem Sinne nicht abrufbar, sondern äußert sich erst bei Kognitionen (Denken jeglicher Art, Umgang mit Herausforderungen, z.B. in der Mathematik, etc.) in Form eines Gefühls dafür, ob eine Herausforderung zu bewältigen sein wird, ob eine Situation/ ein Sachverhalt grundsätzlich bereits bekannt ist (aber die entsprechende Erinnerung gerade in diesem Moment nicht abgerufen werden kann), oder ob eine zu lernende Methode/ Strategie bereits verstanden ist. Bei dieser Komponente geht es also um die Beurteilung eigenen Verständnisses, eigenen Lernerfolgs, um Prognosen bzgl. Machbarkeit, etc. im Hinblick auf kognitive Herausforderungen. Diese Einschätzungen basieren dabei nicht auf der expliziten Formulierung von (bspw.) Lernzielen, deren Erreichen direkt anhand der gezeigten Leistung überprüft werden können, wie dies bspw. im Rahmen von Unterrichtsplanung auf Seiten der Lehrkräfte geschieht; stattdessen gehen sie auf Grund verinnerlichter metakognitiver Erfahrungen (s. dort) vonstatten, die in vergleichbaren Situationen gemacht wurden.

Gerade im Hinblick auf den Umgang mit Mathematik und das Verständnis von Begriffen spielt dabei auch die Beurteilung, ob ein Begriff (oder eine Strategie o.Ä.) „Sinn“ ergibt, eine Rolle. Landläufig sind entsprechende Formulierungen bekannt, die diesen Unterschied zwischen der Kenntnis von Definitionen und der Fähigkeit, Verfahren anzuwenden, einerseits und als „echt“ empfundenem Verständnis andererseits beschreiben: So wird gelegentlich bspw. davon gesprochen, dass „einem ein Licht aufgeht“ oder es „‘Klick‘ gemacht“ habe.

Besonders deutlich zeigt sich dieser Unterschied zwischen lexikalischem Wissen, das lediglich wiedergegeben oder möglicherweise auch (unverstanden) angewendet werden kann, und tatsächlichem Verständnis im Rahmen der mathematikdidaktischen Überlegungen in Kapitel 4.4.1, in denen auf das Konzept der Grundvorstellungen eingegangen wird.

Diese Kategorie umfasst dabei (implizites) Wissen darüber, wie sich einerseits derartiges „Verständnis“ äußert („anfühlt“) und wie es erkannt, bzw. wie an seiner Entwicklung gearbeitet werden kann, um bspw. mathematischen Begriffen und Methoden den gewünschten „Sinn“ zu „verleihen“.

Auf solche Momente, in denen sich (subjektiv) Verständnis verändert, nehmen die (→) Metakognitiven Erfahrungen Bezug.

Die Konzepte „Feeling of Knowing“ und „Judgment of Learning“ (s. Kapitel 2) fallen in diese Kategorie.

Bereits bei Flavell und Wellman (1977) wird diesem Aspekt auch das Gespür zugeordnet, unter welchen Umständen (kognitive) Handlungen notwendig sind.

Die aktive (bewusste) Sinnkonstruktion („sense-making“) wird im folgenden Abschnitt näher behandelt.

Awareness [Bewusstheit, (unbewusste) Aufmerksamkeit, Achtsamkeit, (unbewusste) Wahrnehmung]

Die Benennung dieser Kategorie erweist sich als schwierig, da sich das englische Wort „Awareness“ im Deutschen nicht direkt mit einem einzigen Wort übersetzen lässt. Die im Kategorienamen angedeuteten Möglichkeiten, die ihrerseits nur jeweils einen Teil des Konzepts erfassen (und an anderer Stelle dafür teils über das Gemeinte hinausgehen), treffen den Kern dieser Komponente nur bedingt und wirken auf den ersten Blick auf Grund des Gegensatzes „bewusst – unbewusst“ sogar widersprüchlich.

Dementsprechend wurde das englische „Awareness“ als Kategorie-Name beibehalten, auch da es so in der Literatur vorkommt. Gemeint ist eine Bewusstheit/Aufmerksamkeit im Sinne von „to be aware of something – sich etwas/ einer Sache bewusst sein“. Im Gegensatz zum aktiven und bewussten „Hinschauen“, wie es im Rahmen der Überwachung (Monitoring) der prozeduralen Komponente geschieht, ist hierbei eine entweder weitgehend unbewusste oder aber zumindest nicht „suchende“, „überprüfende“ Aufmerksamkeit gemeint, die – bildhaft gesprochen – im Hintergrund „aktiv“ ist (oder vielmehr passiv; auch hier zeigen sich die

sprachlichen Schwierigkeiten dieser Komponente!) und die nicht wahrgenommen wird, solange „alles gut läuft“, also keine Schwierigkeiten, Hindernisse oder Widersprüche auftreten bzw. wahrgenommen werden (Natürlich können solche auch schlicht „übersehen“ werden, was z.B. für eine (in diesem Moment) mangelhafte Awareness oder aber für mangelndes (Meta-)Wissen oder Fachwissen spricht.).

Diese Komponente hat – wie sich durch ihren Namen bereits andeutet – einen engen Bezug zur Überwachungs-(Unter-)Kategorie, für die sie quasi die implizite Grundlage darstellt.

Metakognitive Erfahrungen – Metacognitive Experiences

Eng verbunden mit der Unterkategorie „Sensitivity“, mit der sie in Wechselwirkung steht beschreibt diese Kategorie Erfahrungen auf metakognitiver Ebene, die in Situationen gemacht werden, in denen sie eine zusätzliche Information über die laufende Kognition zur Verfügung stellen und eine zusätzliche Bewertung der Situation darstellen, auf die in der Zukunft (unbewusst) zurückgegriffen werden kann. Gerade im Hinblick auf den Umgang mit Mathematik und die Unterscheidung zwischen deklarativen Sachkenntnissen und „echtem“ Verständnis, das mit „Sinn“ einhergeht, können metakognitive Erfahrungen eine Information darüber geben, wie sich für die eigene Person bspw. echtes Verständnis in der Vergangenheit „angefühlt“ hat, woran sich später erkennen lässt, inwieweit neue Inhalte verstanden werden, da das entsprechende „Gefühl“ bekannt ist, das bei Verständnis erwartet wird. Metakognitive Erfahrungen stellen das unbewusste oder zumindest implizite Pendant zum aktiven Abgleich anhand konkreter, verbalisierbarer Kriterien dar; sie liefern implizites Wissen darüber, wie sich eine bestimmte Art von Kognition (z.B. Verständnis) in einer bestimmten Situation „anfühlt“ oder wie sich bestimmte kognitive Aspekte in bestimmten Situationen normalerweise verhalten, ohne dass dies explizit benennbar ist. Sie stellen also eine Informationsquelle dar, die noch vor einer aktiven Analyse oder Reflexion – quasi heuristisch – bestimmte Ideen, „Denkrichtungen“, etc. „vorschlagen“ können, oder die in Situationen vor der „Gefahr“ eines Denkfehlers warnen können, ohne dass bewusst bereits ersichtlich war, dass dieses Risiko besteht.

Metakognitive Erfahrungen informieren damit einerseits die Sensitivity-Kategorie, bzw. helfen bei deren Entwicklung und greifen umgekehrt auf diese zurück. Sie stellen zum Teil vermutlich Erinnerungen an das Aktivwerden von Sensitivity-Aspekten in der Vergangenheit dar. Außerdem kann angenommen werden, dass beim aktiven, bewussten Überwachen von kognitiven Prozessen auf diese implizit vorhandenen Erfahrungen zurückgegriffen wird, die ihrerseits die Awareness-Komponente „informieren“.

Bewertung des Modells

Das vorliegende Modell trägt dem Wunsch nach einer möglichst vollständigen Erfassung und Systematisierung des Begriffs Metakognition Rechnung. Im Gegensatz zu verschiedenen Systematisierungen aus der Forschungsliteratur konzentriert es nicht nur auf lediglich einen oder mehrere Teilaspekte des Begriffs, integriert andererseits auch keine anderen Begriffe in ein Gesamtmodell, das über den Begriff Metakognition deutlich hinausgeht (so wie dies bspw. bei den in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Modellen der Fall ist).

In Abgrenzung – bspw. – zum Hasselhorn'schen Modell (vgl. Kapitel 2.3.1) basiert das vorliegende Modell auf theoretischer wie auf praktischer Ebene auf Grundlagen, die mit Blick auf mathematikdidaktische Interessen entstanden sind – dies sind vor allem die vorgestellten Ergebnisse aus der mathematikdidaktischen und psychologischen Forschung, die eigenen theoretischen Überlegungen und die empirische Erhebung, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurde.

In Beantwortung der Forschungsfrage 2 lässt sich zusammenfassen, dass das resultierende Modell den zu Grunde gelegten Beschreibungen von Metakognition, die sich bei Schneider oder bei Schoenfeld (vgl. Kapitel 2.3.1) finden, in seinen drei Ober-Kategorien grundsätzlich ähnelt. Wie zu erwarten war, zeigen sich bei der Auswertung der empirischen Erhebung also keine völlig neuen und unerwarteten Aspekte von Metakognition, die bestehenden Systemen widersprechen oder diese auf der allgemeinsten Ebene erweitern.

Eine Besonderheit des vorliegenden Modells ist allerdings die Unterteilung deklarativen Metawissens in eine allgemeine und eine domänenspezifische Komponente, die der problematischen fehlenden Trennschärfe zwischen mathematischem Denken und Metakognition Rechnung trägt (vgl. Kapitel 2.1.5).

Zur System-Komponente:

Hasselhorns Kategorisierungsschema (vgl. Kapitel 2.3.1) beinhaltet eine „System“-Komponente, die sich in seinem Fall vor allem auf Wissen über das (eigene) kognitive System und seine Mechanismen als Ganzes bezieht. Damit kann – je nach Person – wissenschaftliches oder Alltagswissen gemeint sein.

Bei der Auswertung der Erhebung ließ sich (sowohl im Interview-Teil als auch bei der Bearbeitung der Extremwertaufgabe) bei den Teilnehmer_innen in der Regel eine Art „System-

Wissen“ beobachten – vor allem im Hinblick auf die Systeme „Schule“ und „Mathematik“. Den Teilnehmer_innen sind gewisse Regelmäßigkeiten und Mechanismen bekannt, was das eigene Verhalten und das von Lehrkräften betrifft, sie kennen teils typische Strategien und Mechanismen beim Umgang mit Mathematik (wobei hier allgemeinere und nicht themenspezifische Strategien gemeint sind) und sie nutzen dieses Wissen, um bspw. den eigenen „Erfolg“ im System zu steigern. Ob dieses Wissen und diese Strategien vom Interviewleiter, bzw. Autor als korrekt, realistisch, sinnvoll, etc. eingestuft wurden, ist für die vorliegende Arbeit irrelevant.

Es stellt sich die Frage, ob es sich bei der beschriebenen Art von Wissen (zumindest anteilig) um Metakognition handelt. Da es sich bei diesem Wissen oft um Wissen über kognitive Strategien, bzw. um Wissen über das jeweilige „System“ in Bezug auf die eigene Person handelt, kann diese Frage meiner Ansicht nach bejaht werden. Außerdem werden von den Teilnehmer_innen Konsequenzen für das eigene Verhalten in diesem System abgeleitet, Verhalten (bzw. Kognition) wird also entsprechend überwacht und angepasst.

Wie in vielen Fällen fällt eine Zuordnung zu nur einem der etablierten Aspekte von Metakognition schwer, da hier Wissen aus den Bereichen *Task-*, *Person-* und *Strategy-Knowledge* einfließt, das wiederum auf metakognitiven Erfahrungen im System aufbaut und das auf die Steuerung von Kognition Einfluss hat.

Da es sich bei diesem überblicksartigen Systemwissen allerdings um sehr grundlegendes Wissen über komplexe Wirkzusammenhänge handelt, das von detaillierteren, bereichsspezifischen Aspekten von Metakognition unterschieden werden kann, bzw. das sehr viel weiter gefasste Bereiche auf einem oberflächlicheren Niveau betrifft, scheint es mir sinnvoll, derartiges Systemwissen als Ausprägung von Metakognition zu berücksichtigen.

Die formal-logische Natur von Mathematik, die sich mit kausalen Zusammenhängen und formalen Beweisen beschäftigt, legt bereits nahe, dass Wissen über Ursachen und Wirkungen, über Bedingungsgefüge und logische Zusammenhänge eine große Rolle beim Umgang mit Mathematik spielt. Entsprechendes Wissen und Reflexionen darüber, unter welchen Umständen bspw. Bedingungen in der Mathematik beachtet werden müssen, an welche Auswirkungen gedacht werden muss und welche Folgerungen sich aus Sachverhalten ziehen lassen, darüber, wie Beweisketten aufgebaut und logische Schlüsse gezogen werden und welchen Grenzen die Gültigkeit einer Aussage unterliegt, können als (domänenspezifische) Metakognition eingeordnet werden. Vorgänge wie das Schließen, Folgern, Reflektieren über Zusammenhänge,

Einschränkungen, Möglichkeiten stellen schließlich Kognitionen dar und Wissen über diese kognitiven Handlungen damit Metawissen.

Speziell in Bezug auf die Mathematik als kausales System mit seinen Anforderungen an Problemlösestrategien erscheint im Rahmen dieser Arbeit die Auszeichnung einer eigenen Kategorie als sinnvoll, die gerade die Aspekte von Metakognition umfasst, die zu den genannten Zusammenhängen gehören, was sich in der Etablierung einer domänenspezifischen Unterkategorie des deklarativen Metawissens widerspiegelt.

Verallgemeinert man diese Art von Metakognition auf Mathematik als System, also auf Wissen darüber, welche typischen „Mechanismen“ Mathematik besitzt, welche Auswirkungen dies auf das eigene Verhalten hat, welche Verhaltensweisen typischerweise erfolgreich sind, bzw. wie dementsprechend der eigene Umgang mit Mathematik gesteuert werden muss, so ließe sich erneut in Anlehnung an Hasselhorn (z.B. 1992) auch in Bezug auf dieses fach-spezifische Metawissen von „systemischem Wissen“ sprechen. Hasselhorn versteht unter diesem Begriff (s. Kapitel 2.3.1) speziell Wissen über das eigene kognitive System, dessen Funktionsweise sowie über Lernanforderungen und über entsprechende Strategien – also im Sinne der in dieser Arbeit verwendeten Definition deklaratives Personen-, Aufgaben- und Strategie-Wissen. Der Begriff „systemisch“ lässt sich allerdings auf verschiedene Systeme übertragen – wie oben angesprochen, das System Schule, das System Unterricht, etc.. Insbesondere die Mathematik mit ihrem axiomatischen Aufbau einerseits und ihrer genetischen Entwicklung andererseits scheint hier allerdings prädestiniert für einen systematischen Überblick, der diese verschiedenen Betrachtungsweisen oder -richtungen integriert und verbindet, ihren jeweiligen Nutzen und „Sinn“ durchschaut und in einem (stoff-)didaktischen Sinn ihre Mechanismen „kennt“ und dieses Wissen nutzen kann (bspw. Aspekte, Grundvorstellungen und Fehlvorstellungen, „Denkarten“, „Risiken“, zugehörige Lernstrategien, etc.).

Einerseits lässt sich die deklarative Kategorie des vorgestellten Kategoriensystems als Systemwissen bezeichnen (sowohl im Hinblick auf allgemeines Metawissen – z.B. zum eigenen kognitiven System – als auch im Hinblick auf das System Mathematik und seine Teilsysteme), da sie zweifelsohne Wissen im oben beschriebenen Sinne „enthält“ – allerdings nicht notwendigerweise in dieser ganzheitlichen Form, die einen Überblick über das „gesamte“ System ermöglicht (wobei hier naheliegenderweise von Teil-Systemen ausgegangen werden muss, z.B. von der Analysis der Sekundarstufe II aus Lernenden-Sicht; die Mathematik in ihrer Gesamtheit ist natürlich weder vollständig erfassbar, noch ist klar, wo die theoretischen

Grenzen dieses Systems lägen), sondern oft als Detail-Wissen über den Umgang mit bestimmten Begriffen.

Systemwissen wird folglich in die graphische Darstellung des Modells aufgenommen und beinhaltet („nur“) Teile der allgemeinen und domänenspezifischen Anteile der deklarativen Wissens-Komponente.

Es lässt sich auch hier eine Steigerung (bzw. ein Stufenschema) annehmen, die (theoretisch) von Metawissen zu isolierten Bereichen hin zu einem Überblick über das gesamte System führt. Andererseits dürften zu einem derart ganzheitlichen Überblick auch die anderen Kategorien von Metakognition (prozedural, implizit) gehören, weshalb die Idee eines Systemwissens weiter unten in Form einer möglichen Ausprägung und Kombination der verschiedenen Kategorien beschrieben wird. Sie zeichnet sich durch ihre Nähe zu den in Kapitel 4.4.1 angesprochenen mathematikdidaktischen Konzepten und Forderungen aus; des Weiteren wird hierbei sehr deutlich, dass eine strikte Trennung zwischen Meta-Wissen und Fach-Wissen kaum möglich, bzw. nicht sinnvoll ist.

4.3. Ergänzungen

Im Anschluss an die Vorstellung der drei zentralen Kategorien und ihrer Unterkategorien erfolgt eine ausführlichere Beschreibung ausgewählter Ausprägungen von Metakognition, die ursprünglich im Rahmen des Codierungs-Prozesses in Form von Codes/Codings unter Beachtung der theoretischen Hintergründe aus dem Transkript-Material identifiziert und entwickelt wurden. Die Formulierung „Ausprägungen“ wird hierbei gewählt, da es sich auf dieser „Stufe“, bzw. „Vorstufe“ des Modell-Entwicklungs-Prozesses nicht (mehr) um isolierte Aspekte von Metakognition handelt, wie sie im vorgestellten Modell immerhin relativ (!) trennscharf vorliegen, sondern vielmehr um weiter gefasste Tätigkeiten und Wissen, in denen verschiedene Aspekte des Modells zusammenwirken. Zur Vorstellung wurden dabei gezielt Ausprägungen gewählt, die einerseits als besonders relevant für den Umgang mit Mathematik erachtet werden und die sich im Rahmen der Interviews als von größerer Bedeutung für die Teilnehmer_innen erwiesen haben.

Diese bewegen sich näher an den bei der Auswertung der Erhebung durchgeführten Codie-

rungen einerseits und bei der theoretischen Betrachtung von möglichen Anwendungen von Metakognition beim Umgang mit Mathematik andererseits herausgearbeiteten kognitiven Handlungen und Strategien. Spätestens ab dieser Stufe zeigt sich klar, wie stark in Anwendungssituationen die zuvor isolierten Aspekte der höheren Stufen – bspw. beim Bearbeiten mathematischer Problemstellungen – „interagieren“ und ineinandergreifen. Zwar lassen sich die jeweiligen primär beschriebenen Aspekte (die dem jeweiligen Abschnitt seinen Namen geben) grundsätzlich Oberkategorien aus dem entwickelten Modell zuordnen, doch zeigt sich im Rahmen ihrer Beschreibung sofort ein starker Bezug zu anderen Teilaspekten von Metakognition, bzw. Kategorien des Modells. Insofern werden hierbei nicht mehr isolierte Aspekte von Metakognition beschrieben, sondern vielmehr zentrale Vorgänge, Tätigkeiten u.Ä, beim Umgang mit Mathematik – insbesondere in der Analysis – die in engem Zusammenhang mit (verschiedenen Aspekten von) Metakognition stehen.

Dieses Kapitel stellt somit eine Ergänzung zur Erläuterung des Modells (und damit zu **Forschungsfrage 2** dar; gleichzeitig erfolgt hier die exemplarische Anwendung des Modells anhand von Beispielen aus der Mathematik, bzw. konkreter (in der Regel) der Analysis – es stellt also zusätzlich bereits einen Teil der Beantwortung von **Forschungsfrage 3** dar.

Da das gesamte Modell mit Bezug zur Mathematik, bzw. Mathematikdidaktik entwickelt wurde und auf entsprechender Literatur sowie der durchgeführten Erhebung basiert, lässt sich ab dieser Stufe ein noch stärkerer Bezug zum Umgang mit Mathematik erkennen – insofern, als die gewählten Anwendungsbeispiele nun grundsätzlich von einem mathematischen Hintergrund inspiriert sind. Der Übergang zu „reiner“ Kognition (im Gegensatz zu Metakognition) ist hierbei – je nach Blickwinkel – fließend; es gilt jedoch nach wie vor, die in Kapitel 2.1.5 ausgeführten Argumente zu beachten. Hinter der Ausführung von Strategien und der Anwendung von Wissen können – in Nicht-Routine-Situationen – metakognitive Überlegungen, Entscheidungen und (unbewusstes) Metawissen stehen, ohne die die jeweilige Kognition und die folgende Handlung nicht stattfinden würden. Bei Expert_innen – die die notwendigen Schritte also nicht verständnislos auswendig gelernt haben sollten – könnte entsprechende Metakognition auch bereits in Routine übergegangen sein. Entsprechend treten die unbewussten, passiven Aspekte von Metakognition in den Vordergrund.

In den folgenden Beispielen wird grundsätzlich dieser Fall eines metakognitiven Hintergrunds angenommen.

Bei der Auswahl dieser mathematik-bezogenen Metakognitionen wurden diejenigen ausge-

wählt, die sich im Rahmen der theoretischen Überlegungen und während des Codierungs-Prozesses als besonders zentral und für den Umgang mit Mathematik relevant gezeigt haben. Auf Grund der Wahl der Analysis als fachlichem Bezugsgebiet (und der dementsprechend ausgewählten Aufgabe) spielen sich die fachlichen Beispiele in der Regel in diesem Gebiet ab; dies betrifft sowohl Beispiele aus der Interviewsituation als auch zusätzliche Beispiele, die auf den Überlegungen des Autors oder auf der einschlägigen Literatur basieren.

Beschreibungen verschiedener Ausprägungen von Metakognition, die als besonders wichtig für den Umgang mit Mathematik befunden wurden

Systemwissen – Systemischer Überblick

Gemeint ist hierbei die Fähigkeit, komplexere Systeme als Ganzes zu überblicken, ihre Wirkzusammenhänge nachvollziehen zu können und daraus Schlussfolgerungen für die Steuerung der eigenen Kognition und für das eigene Verhalten abzuleiten. Systeme können hierbei allgemeine, nicht oder nur am Rande fachspezifische Systeme sein, wie bspw. Schulsysteme, über deren Funktionsweise und ihre Auswirkungen auf die eigene Person (und insbesondere ihre Kognition) Wissen existiert und erworben werden kann und die ihrerseits strategisches Verhalten ermöglichen, das den Umgang mit ihnen, bzw. das eigene Handeln innerhalb des Systems beeinflusst; z.B. in Bezug auf Prüfungswesen, Lehrer-Schüler-Interaktionen, Versetzung, Fachwahl, oder aber in Bezug auf Unterricht als Subsystem. Beziehungen bestehen also zu den deklarativen Komponenten Personen- und Strategiewissen und ebenso zum Aufgabenwissen, wobei als Aufgabe („task“!) hierbei die Interaktion mit dem System Schule gesehen werden kann; außerdem bestehen Beziehungen zu den prozeduralen Komponenten Planung und Überwachung, die im Rahmen strategischen Verhaltens praktisch immer zum Tragen kommen, sowie zur Reflexion, die dann auftritt, wenn Wissen nicht nur erworben und angewendet, sondern auch aktiv überdacht, analysiert und hinterfragt wird. Interessanter für die Mathematikdidaktik sind die Systeme (Mathematik-)Unterricht und Mathematik. Im System Unterricht dürfte Wissen über Lehr- und Lernmechanismen eine Rolle

spielen – welche Methoden zu welchem Zweck eingesetzt werden, welche Möglichkeiten, sich Wissen anzueignen, bzw. Wissen zu vermitteln, grundsätzlich im Unterricht und bei dessen Nachbereitung existieren und welche den eigenen Stärken, Schwächen und Vorlieben entgegenkommen; darüber hinaus individuelle Besonderheiten einzelner Lehrkräfte, die wiederum das eigene (Lern-)Verhalten beeinflussen und die zu verstehen, von Nutzen sein kann.

Im Rahmen des „Systems Mathematik“ und seiner „Subsysteme“ (Gebiete wie z.B. die Analysis oder die Geometrie, aber auch beliebige Teilsysteme, die sich bspw. um einen bestimmten mathematischen Begriff ergeben oder um einen bestimmten Typ von Aufgabenstellungen, wie z.B. Differentiation oder Extremwertprobleme) geht es bei dieser Kategorie darum, einen Überblick über das eigene mit dem jeweiligen System zusammenhängende Wissen zu besitzen, im Fall eines Begriffs über seine Definition, zugehörige Aspekte und (Grund-)Vorstellungen und seine Verbindungen zu Ober-, Unter- und Nachbarbegriffen. Daran schließt sich Wissen über Einsatzmöglichkeiten des Begriffs und dieser Verbindungen und ebenso entsprechender Grenzen an; des Weiteren Wissen über die Korrektheit bestimmter Vorstellungen, bzw. darüber, unter welchen Bedingungen diese zutreffen und unter welchen nicht. Ein guter systemischer Überblick ermöglicht die Einordnung von Begriffen in mathematische Gebiete und sollte ebenso die Analyse von Informationen und Problemstellungen ermöglichen, indem Informationen mit bestehendem Wissen über mathematische Systeme abgeglichen und in diese eingeordnet werden. Dadurch werden sie mit dem bestehenden System und seinen Verbindungen und Strategien vernetzt und sollten effektiv genutzt werden können.

- Im Fall der Analysis wäre dies bspw. Wissen über die zentralen Begriffe des Gebiets – Funktionen (und ggf. Folgen), Differentiation und Integration, etc. – und ihre Zusammenhänge, ihre Einsatzmöglichkeiten und Grenzen. Differentiation und Integration sind bspw. als „entgegengesetzte“ „Richtungen“, bzw. Sichtweisen einer bestimmten Beziehung bekannt. Es ist bekannt, wie sie entwickelt/hergeleitet werden und welche Rolle Grenzübergänge (und ggf. Folgen) dabei spielen. Die Bedeutung der Differentiation für die Berechnung von Extremwerten ist bekannt und kann erläutert werden. Ihrerseits ist die Bedeutung von Extremwerten für Optimierungsprobleme bekannt.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] es ist ein unterschied in mathe jetzt, aber so von den mathematischen sachen es ist ziemlich das gleiche, der unterschied des gymnasiums ist einfach dass es doch weitergeht und man dann oberstufe hat [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.63 – Student_2)
- „[...] man bauts von grund auf [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.79 – Student_2)
- „[...] man beginnt bei null also vorwissen naja ein bisschen mathematisches gespür reicht [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.79 – Student_2)
- „[...] gerade in der mathematik is es oft so ne sache dass man das dann immer weiterführen kann auf elementare sachen, und in der physik kann mans nutzen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.113 – Student_2)
- „[...] des is genau des was ein dozent bei einem auch tun kann, wie beweis ich was sauber wie schreib ich des hin, wie wie denk richtig also dass ich, die ansatzpunkte sehe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] ich hab gelernt hab ne drei gekriegt hab nicht gelernt hab ne drei gekriegt, am ende hab ich nicht gelernt, warum auch, hat ja nichts gebracht [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.183 – Student_1)
- „[...] in der schule waren die aufgaben meistens alle recht ähnlich gestellt oder hatten immer so n schema [...] also konnte man schon ahnen also wenn, n paar werte halt gegeben sind und je einer wird gesucht, dann hast du noch ne aufgabe im hinterkopf gehabt die halt dasselbe war, und dann konntest du dieses schema x halt drauf anwenden einfach, und dann hattest du die aufgabe gelöst [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.97)

Beurteilung

In Ergänzung der Reflexions-Komponente wird an dieser Stelle der Aspekt der Beurteilung, bzw. Evaluation ausführlicher beschrieben. Mit dieser metakognitiven Ausprägung wird in dieser Arbeit Kognition bezeichnet, die sich als Beurteilung eines Begriffs/ Objekts/ Nutzens/ einer Information/ etc. im Rahmen eines Bezugssystems, bzw. als dessen/deren Einordnung in ein Bezugssystem beschreiben lässt. Es wird an dieser Stelle die Idee vorgestellt, dass sich die Analyse von oder Auseinandersetzung mit kognitiven Objekten/ Informationen (Begriffe, Sachverhalte, Strategien, Fragestellungen, Texte, Probleme, etc.) als Abgleich mit bestehendem

Wissen (auch Metawissen) interpretieren lässt. Bereits beim Wahrnehmen eines Objekts wird dieses gedanklich mit bestehendem Wissen abgeglichen, um das Objekt als solches benennen und begreifen zu können, um zu „erkennen“, um was für ein Objekt es sich hier handelt. Weicht ein Objekt (bzw. die entsprechenden Informationen dazu) von bestehendem Wissen in einer gewissen Form ab, so erfolgt vermutlich ein Einordnungs-Prozess, bei dem Gemeinsamkeiten mit und Unterschiede von bekannten Objekten reflektiert werden, was eine Platzierung des (neuen) Objekts im eigenen Wissens-Netzwerk erlaubt. Insofern dürfte jede Informationsverarbeitung, die sich bei der Beschäftigung mit Mathematik ergibt, sich einerseits durch den Abgleich mit Vorwissen (inkl. Metawissen) als Einordnungs-Vorgang interpretieren lassen – die neue Information wird auf ihre Beziehung zu diesem Wissen (z.B. zu anderen Begriffen oder im Hinblick auf ihre strategische Verwertbarkeit) hin untersucht – und auf Grund der Tatsache, dass hierbei eigenes Wissen und eigene Kognitionen „bedacht“ werden, andererseits als Metakognition zu verstehen sein.

Derartige Einordnungen, bzw. Verortungen, Platzierungen können bzgl. verschiedener Maßstäbe erfolgen und dürften dies – je nach Detailgrad der entsprechenden Überlegungen – auch im Normalfall tun. Dies könnten bspw. hierarchische Einordnungen sein, die etwa eine Problemstellung im Hinblick auf ihren Schwierigkeitsgrad oder den für ihre Lösung benötigten (prognostizierten) Zeitaufwand hin verorten, wozu der Vergleich mit bekannten Strategien notwendig ist. Es ließen sich ebenso Beurteilungen vornehmen, bei denen eine Lösungsstrategie als für eine Problemstellung angemessen oder nicht angemessen (im Hinblick auf ihre zielführende Wirkung) beurteilt wird, was eine Entscheidung für oder gegen die Nutzung dieser Strategie ermöglicht. Allerdings hängt diese sicher auch vom prognostizierten Zeitaufwand oder ihrer Durchführbarkeit in Bezug auf eigene Fähigkeiten oder vorhandene Hilfsmittel (z.B. Verfügbarkeit eines Taschenrechners, CAS, etc.) ab.

- Bspw. ließe sich im Fall eines Extremwertproblems bewerten, ob die „klassisch analytische“ Strategie mittels Berechnung der 1. (und 2.) Ableitung vorzuziehen sei, oder ob die Berechnung mit Hilfe Quadratischer Ergänzung vorzuziehen ist. Diese Entscheidung hängt ihrerseits von verschiedenen Bewertungen (und anderen metakognitiven Aspekten) ab. So muss die (\rightarrow) Notwendigkeit erkannt (\rightarrow Awareness), bzw. (\rightarrow) reflektiert werden, zu überprüfen, ob letztere Strategie angewendet werden kann und woran sich dies feststellen lässt (\rightarrow Bedingungen). Sind die entsprechenden mathematischen Bedingungen erfüllt (Zielfunktion 2. Grades), muss analysiert oder erinnert werden, welche Vor- und Nachteile mit

dieser Methode verbunden sind, und anschließend beurteilt werden, ob ihre Anwendung der „klassischen“ Alternative vorgezogen wird. Dies bietet sich bspw. an, wenn die Zielfunktion bereits in Scheitelpunktform vorliegt. Ist andererseits die Verwendung eines CAS erlaubt, das die Berechnung der Ableitung und das Einsetzen von Werten in Funktionen übernimmt, so ließe sich die „klassische“ Version dennoch als effizienter, einfacher, weniger fehleranfällig, o.Ä. beurteilen.

Des Weiteren können Einordnungen – wie angesprochen – auch inhaltlich in Bezug auf Beziehungen zwischen Begriffen stattfinden. Begriffe können bspw. Unter- oder Oberbegriffe von anderen sein, sie können zu bestimmten Themengebieten gehören.

Bspw. kann die Beziehung der Begriffe/ Konzepte Integral und Ableitung, bzw. Integration und Differentiation betrachtet werden. Ausgehend von einer Funktion, ihrer Ableitung und ihrer Stammfunktion können diese bspw. hierarchisch geordnet werden, indem der Übergang von Stammfunktion zu Funktion zu Ableitung als eine „Kette“ von Differentiations-Vorgängen erkannt wird; diese Betrachtungs-Richtung lässt sich umkehren, wodurch der umgekehrte Übergang als Kette von Integrations-Vorgängen interpretiert wird. Begriffe werden also geordnet und in Beziehung gesetzt, ihre jeweilige Rolle (zueinander) wird geklärt.

Eigenschaften verschiedener Darstellungsformen können einander „entsprechen“, bzw. zusammengehören.

- Bspw. entspricht die Extremaleigenschaft eines Kurvenpunktes $(x_0|f(x_0))$ der Beziehung $f'(x_0) = 0$ der ersten Ableitung).

Außerdem können kausale Verknüpfungen bestehen; ein Begriff könnte in Bezug auf Konsequenzen eingeordnet werden, die Eigenschaften dieses Begriffs für andere Begriffe haben.

- Bspw. könnten für $x \rightarrow \infty$ divergente Funktionen als nicht-integrierbar eingeordnet werden, während Funktionen mit bestimmtem asymptotischem Verhalten ($f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$) als „auf Integrierbarkeit zu überprüfen“ eingestuft werden. (Hierbei werden schul-relevante Funktionstypen betrachtet. Es muss beachtet werden, dass neben diesen noch weitere Eigenschaften bestehen, die Integrierbarkeit verhindern können.)

Letztendlich können bspw. Begriffe oder Teil-Strategien hinsichtlich ihrer Anwendung und Verwertbarkeit für Strategien und Problemlöseprozesse beurteilt werden.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] es lag daran aber der unterschied is gering, der unterschied zwischen viel vorbereitung und wenig war bei mir ein einziger punkt und des war knapp [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.241 – Student_2)
- „[...] die vorbereitung hat eigentlich gar nicht mal so riesig viel mitgespielt, es sei denn ich hab was vorher nicht verstanden – in dem moment wenn man merkt dass man was nicht kapiert hat und das wiederholt bringt das natürlich was [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.241 – Student_2)
- „[...] ich weis es nicht, ich bin irgendwie nicht auf die idee gekommen dass sowas für mich relativ, normales eben, da so jetzt da dran kommt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.457 – Student_1)
- „[...] ich kam am schluss dann auch drauf mit dem springenden punkt der war, hilfreich [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.464 – Student_2)
- „[...] ich hab das noch nie so gemacht, des is ne andere herangehensweise [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.510 – Student_2)

Im Rahmen theoretischer Überlegungen sowie bei der Auswertung der empirischen Daten zeigt sich, dass dem metakognitiven Aspekt der „Beurteilung“ Bedeutung in Bezug auf einen Großteil der übrigen Aspekte und Ausprägungen zukommt. Welcher Art diese Bedeutung ist und wie sich der Aspekt „Beurteilung“ definieren lässt, wird im Folgenden untersucht.

Zum einen spielt der Vorgang/ die Fähigkeit, zu beurteilen/ zu bewerten eine Rolle bei der Entscheidungsfindung und dementsprechend bei der Handlungssteuerung. Stehen bei der Bearbeitung eines Problems/ einer Fragestellung bspw. verschiedene Strategien zur Auswahl, so müssen diese nach ihrem Nutzen für das vorliegende Problem geordnet werden, damit schließlich eine davon zur Bearbeitung ausgewählt werden kann. Der Beurteilung kann dann die Anwendung einer als – auf eine bestimmte Art – überlegen beurteilten Strategie folgen.

Im Bsp. Extrempunkt mussten die beiden Strategien „Verwendung der 2. Ableitung“ und „Überprüfung der 1. Ableitung auf VZW“ gegeneinander abgewogen werden; der „Wert“ beider Strategien musste also im Hinblick auf verschiedene Kriterien beurteilt werden,

um im Anschluss beide Strategien bzgl. dieses Wertes (oder dieser Werte) zu vergleichen und die geeignetere auszuwählen und durchzuführen.

Dabei ist zu beachten, dass dieser übergeordnete Beurteilungs-Prozess wiederum aus verschiedenen Teil-Beurteilungs-Prozessen besteht. So muss evaluiert werden, welche Kriterien einer Strategie für die Fragen nach deren Nutzen überhaupt relevant sind (Beurteilung als relevant oder irrelevant). Sodann muss beurteilt werden, in welchem Maße die jeweilige Strategie ein Kriterium erfüllt. Vermutlich erfolgt – möglicherweise allerdings unbewusst – eine Gewichtung der jeweiligen Kriterien; welche spielen eine größere Rolle für den Nutzen der Strategie und sind deshalb beim Vergleich stärker zu berücksichtigen (auch die Gewichtung stellt eine (quantitative) Beurteilung der Relevanz dar).

Im Bsp. Extrempunkt könnte die notwendige Berechnung der 2. Ableitung in Strategie 1 und die damit verbundenen Überlegungen bzgl. ihrer Bedeutung für die Funktion selbst als kognitiv anspruchsvoller und damit als negativ bewertet werden. Gleiches könnte allerdings auch für die Berechnung zweier „Test“-Werte bei Überprüfung auf VZW gelten.

Hierbei zeigt sich, dass die Beurteilung von Strategien – wie viele metakognitive Aspekte – nicht eindeutig ist. Die Frage, welche von beiden Strategien im Bsp. als „aufwändiger“ beurteilt wird, hängt bspw. von der Vorerfahrung oder der Sicherheit im Umgang mit der Berechnung von Ableitungen ab. Schon allein der Begriff „Aufwand“ ist hierbei mehrdeutig. So können umfangreiche, aber einfache (→ Beurteilung!) Berechnungen, verglichen mit kognitiv anspruchsvollen, aber wenig rechenintensiven Methoden, sowohl als aufwändiger als auch als weniger aufwändig beurteilt werden – abhängig von persönlichen Vorlieben oder individuellen Fähigkeiten.

Wie bereits angesprochen, spielt auch die Frage, in welchem Rahmen, zu welchem Zweck die Bearbeitung des Problems erfolgt – z.B. zu Übungszwecken oder als Prüfungsaufgabe. Es gilt also ebenso, zu beurteilen, welche Kriterien in verschiedenen Situationen unterschiedlich bewertet werden müssen. Hoher kognitiver Aufwand könnte in einer Übungssituation durchaus erwünscht sein, um die eigenen Fähigkeiten zu prüfen (zu beurteilen) und zu verbessern, während er während einer Klausur als negativ eingeschätzt werden dürfte. Hoher Zeitaufwand sollte in einer Prüfung ebenfalls als negativ bewertet werden, spielt beim Üben hingegen eine eher untergeordnete Rolle, da dabei ein geringerer Zeitdruck besteht.

Im Bsp. Extrempunkt würden sich übende Lernende möglicherweise dafür entscheiden, die Strategie zu verwenden, bei deren Durchführung sie die eigenen Fähigkeiten – noch – als

schwächer bewerten, oder die, die sie für „im Ernstfall“ zielführender halten. So könnte das Üben von Ableitungen (Berechnung) im Vordergrund stehen.

Sie könnten sich auch schlicht für die Durchführung beider Strategien entscheiden und diese vergleichen, um überhaupt erst Daten (metakognitive Erfahrungen) für einen – gedanklichen – Vergleich zu sammeln, die eine Beurteilung erst möglich machen.

In einer Klausur-Situation hingegen würde vermutlich – bei entsprechender Vorbereitung – kein „Akut“-Strategie-Vergleich stattfinden. Auf Grund von (metakognitiven) Erfahrungen mit entsprechenden Aufgaben sollte bereits bekannt sein, bei welchen Aufgabenstellungen welche Strategie bevorzugt wird. Handelt es sich bei einer konkreten Klausuraufgabe um einen bekannten Aufgabentyp, sollte also die Strategiewahl weitgehend automatisiert erfolgen. Bei (teilweise) unvertrauten Aufgabenstellungen, bzw. bei Aufgabenstellungen, deren Lösungsmethodik zumindest momentan nicht oder nur teilweise abrufbar ist, könnte jedoch auch während der Klausur ein sukzessives Analysieren mit Beurteilungsprozessen stattfinden. Aufgabenstellung und momentane Verfassung spielen sicher eine Rolle. Das Abrufen (aktiv oder passiv, bewusst oder unterbewusst) von Wissen könnte zusätzlich durch (z.B. emotionale) Blockaden erschwert werden.

[Im Anhang finden sich zusätzlich weitere Erläuterungen zu diesem Aspekt von Metakognition.]

Transkript-Ausschnitte

- „[...] des hinschreiben ist wirklich wichtig also, dass man, sich überlegt wie machen wirs wie geh ich ran ok – aber wenn ich des nicht an nem konkreten beispiel einfach mal durchrechnen kann oder besser noch, jemanden des an einem konkreten beispiel erklären kann [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.197 – Student_2)
- „[...] den punkt könn mer bestimmen, den punkt könn mer wunderbar bestimmen, bringt uns des was [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.380 – Student_2)
- „[...] erstmal ausmultiplizieren weil des bietet sich an weil ich dann nachher ne abbildung, nee ne ableitung mein ich, machen will und dann halt ableiten und ähm die ableitung gleich null setzen – und dann jeweils die gerade stelle – ne –

- die, waagrechte oder so asymptote rauszufinden [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.297)
- „[...] im abi hab ich, nicht die scheidelpunktsform vorbereitet, also ich konnt se auswendig von nachhilfe her aber ich fand die recht unpraktisch für solche aufgaben [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.323)
 - „[...]es is ja doch nicht schlecht die rechengesetze zu kennen und mal zu sehen was mer da immer falsch anwendet [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.201)
 - „[...] es is – find ich keine sehr saubere lösung, aber es machts deutlich einfacher um des prinzip dahinter zu verstehen – das heißt wenn mers – ein paar mal so gemacht hat wird’s deutlich leichter auch andere probleme ohne diese zwischenschritte – über gleichungen zu lösen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.283)
 - „[...] ne längere und dadurch leichter verständliche lösung zu wählen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.351)
 - „[...] das heißt wenn jemand mit so ner form, von haus aus besser umgehen kann unds gerade um irgendein anderes problem zum verstehen geht dann würd ich die nehmen weil dass das konzept leichter verständlich macht [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.361)
 - „[...] des wichtigste dabei find ich dass mer selbst drüber nachdenkt, und wenn mer nur drüber nachdenkt und aber kein schritt weiterkommt dann wird das nachdenken auch frustrierend, dementsprechend wenn mer dann nen kleinen schritt weiter is kann mer den im nachhinein noch verstehen, meistens hoffentlich, und von da aus eventuell durch weiteres nachdenken weiterkommen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.385)
 - „[...] der eigentliche lerneffekt kommt nur durchs nachdenken [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.389)
 - „[...] ich find es auch ganz sinnvoll eigentlich - also problem ist, wenn wir jetzt hier auf der schrägen ding hier irgendwie, das kann man schon so machen, aber das man dann hier mit winkel und so rummachen, muss man dann schauen, wie man hier drauf kommt und dann auf die fläche, das ist ein bisschen umständlich [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.277 – Student_1)

- „[...] also was hat uns da jetzt genau gebracht [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.365 – Student_2)
- „[...] aber die ableitung gibt dir doch gar nicht die fläche an, das interessiert doch gar nicht, wo die ableitung am größten ist, ist doch nicht wo die funktion am größten ist [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.433 – Student_1)
- „[...] ne, aber ich finds zum beispiel auch allgemein blöd, das jetzt viele m und n nehmen, so dass man nichts mehr unterscheiden kann, wenn es dann an die tafel geschmiert ist, weil eigentlich kann man ja jeden buchstaben nehmen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.473 – Student_2)
- „[...] ist halt besser verständlich, wenn man sich an konventionen hält, also den eher leistungschwächeren schülern in der elften klasse würde ich das hier jetzt nicht so geben, weil der checkt nicht, was x und y ist und was a ist und sonst was, sondern da muss man sich ganz arg an die konvention halten, y von x und so [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.475 – Student_1)

Awareness, Aufmerksamkeit, Bewusstheit, „einen Blick haben“,

Da die implizite Komponente möglicherweise weniger „greifbar“ ist, werden an dieser Stelle weitere Erläuterungen und Beispiele sowie zugehörige Passagen aus den Interview-Transkripten bereitgestellt.

Die meisten in dieser Arbeit beschriebenen Kategorien von Metakognition basieren normalerweise auf dem aktiven (und bewussten) Einsatz von Metakognition, auch wenn Lernenden einerseits dieser Begriff höchstwahrscheinlich nicht geläufig sein dürfte und andererseits das Konzept Metakognition als solches vermutlich nicht „separat“ wahrgenommen und eingesetzt wird, sondern – soweit dies geschieht – in den Denk- und Arbeitsprozess und in typische Verhaltens- und Denkmuster integriert ist.

Mit dieser Kategorie hingegen werden diejenigen Aspekte beschrieben, die von vornherein – oder aber, indem bewusst verwendete Mechanismen verinnerlicht und automatisiert werden – auf einer unbewussten Ebene stattfinden (oder vermutlich stattfinden).

Unter dem Begriff „Awareness“ (Bewusstsein, Erkenntnis, unserer Ansicht jedoch eher im Sinne von „Gewahrsein“, „sich einer Sache/ihrer Existenz bewusst sein“, zu verstehen) fasst bspw. Veenman (vgl. Kapitel 1.4) den Anteil von Metakognition, der als passives,

wahrnehmendes Bewusstsein, als Aufmerksamkeit und Empfänglichkeit für bestimmte Reize „in Aktion tritt“. Als Reize kommen hierbei z.B. externe (mathematische) Informationen in Frage, wie das Auftreten von Schwierigkeiten und Problemen, von Veränderungen in der zu bearbeitenden Situation, die ein Anpassen der gewählten Strategie erfordern, von Besonderheiten und Mehrdeutigkeiten, die leicht übersehen werden können, etc..

Beispiele

Zu diesem Typ von Hindernissen, bzw. zu beachtenden Details gehören bspw. Fallunterscheidungen, die notwendig sind, um beim Gleichungslösen Divisionen durch 0 zu verhindern. Da in manchen Fällen bei Übersehen dieser Notwendigkeit „lediglich“ Lösungen „verlorengehen“, also durch Lösen der durch die unerlaubte Division erhaltenen Gleichung bestimmte korrekte Lösungen (durch die fehlende Fallunterscheidung) nicht erhalten werden, fallen derartige Unaufmerksamkeiten beim Beenden der Aufgabe möglicherweise nicht auf, da sich möglicherweise keine erkennbaren Widersprüche ergeben.

Die Verhinderung von Divisionen durch 0 ist typischerweise auch zu Beginn von Aufgaben-Bearbeitungen von Bedeutung, wenn Definitionsmengen korrekt angegeben werden müssen. Auch hier dürfte es bekanntermaßen relativ häufig zu Unterlassungen kommen, die verhindert werden können, wenn ein hohes Maß des hier beschriebenen metakognitiven Aspekts besteht.

Über derartige, eher negativ zu beurteilende Auffälligkeiten hinaus kämen auch das Erkennen von (sich neu ergebenden) Möglichkeiten und Chancen in Frage, das Wahrnehmen und Einordnen von Ideen und „Geistesblitzen“ oder das Bemerkens eines Erfolgserlebnisses, das im Verlauf einer schwierigen Aufgaben-Bearbeitung möglicherweise auch „untergehen“, bzw. übersehen werden könnte.

Hasselhorn (z.B. 1992) verwendet seinerseits den Begriff der Sensitivität für das intuitive, automatische „Gespür“ (vgl. Kapitel 2.3.1), dafür, dass in Situationen die Verwendung von Metakognition, bzw. von Strategien sinnvoll und angemessen ist. Dieses stellt sich im Lauf der Zeit durch das „Machen“ von metakognitiven Erfahrungen ein.

Auf einem möglicherweise höheren Level könnte zu dieser unbewussten, bzw. passiven Wahrnehmung auch eine bewusste Komponente hinzukommen. Ist Lernenden bekannt, dass – und (typischerweise) unter welchen Bedingungen – sich solche Wahrnehmungen, Einfälle,

Erkenntnisse ergeben und einstellen, dann könnte dieses Wissen einerseits genutzt werden, um – trivialerweise – „besser aufzupassen“, also eigene Denkprozesse beim Bearbeiten präziser zu überwachen (Monitoring) und gezielt auf derartige – tendenziell unauffälligere – Details zu achten; es ließe sich allerdings auch in Betracht ziehen, dass Lernende Wissen um Wirkmechanismen erlangen und dieses nutzen, um gezielt Umstände herbeizuführen, die in der Vergangenheit als besonders vorteilhaft wahrgenommen wurden.

Vor allem im Rahmen von Beweis-Aufgaben oder beim Argumentieren und Begründen (und beim (→) Beurteilen der Argumentationen und Begründungen anderer Personen) dürfte das Erkennen von logischen Brüchen, Widersprüchen oder Lücken in (Ketten von) logischen Aussagen auftreten. Hier dürften – bewusst und/oder unbewusst – Überwachungs- und Beurteilungsprozesse stattfinden, die präsentierte oder selbst entwickelte logische Zusammenhänge überprüfen und mit Aufgaben- und Sachwissen abgleichen. Auch die Frage nach dem eigenen (→) Verständnis spielt hier mit Sicherheit eine Rolle. So kann „auffallen“, dass Aussagen und Zusammenhänge nicht völlig verstanden werden, die ihnen immanente Logik nicht ohne Mühe nachvollzogen werden kann. Dies müsste im Folgenden dahingehend analysiert werden, ob dieser Umstand auf Schwierigkeiten beim eigenen Verständnis zurückzuführen ist oder auf Defizite in der/dem zu beurteilenden Argumentation/Aussage/Beweis/etc. – oder aber auf beides.

Auch die Aufmerksamkeit für zusätzliche Hinweise, die sich durch bestimmte äußere Umstände ergeben, wie bspw. durch die Formulierung von Aufgabentexten, durch das (Kommunikations-)Verhalten der Lehrkraft und Weitere, können in diese Kategorie gezählt werden. So ließe sich bspw. durch die Art der Fragestellung auf die Anzahl möglicher Lösungen eines Problems schließen:

Beispiele

- „Bestimmen Sie das Maximum.“ – Hierbei ist bereits klar, dass sich durch Berechnung mindestens eine Extremstelle ergeben sollte und dass sich aus der Menge der Extremstellen genau ein Maximum ergeben sollte. Abweichende Ergebnisse – z.B. mehrere oder keine Maxima – sollten Lernende aufmerksam machen und zum Überprüfen von Strategien und Rechenwegen bringen. Grund könnten hierbei Rechen- oder Denkfehler sein oder aber – wie im Bsp. der Glasplatten-Aufgabe – die Existenz eines Randextremums.

- „Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung an.“ – Diese Aufgabenstellung ist zwar mathematisch für jede Anzahl von Lösungen (inkl. der Nullmenge) passend, doch könnte Lernenden auffallen, dass nicht nach „der“ Lösung der Gleichung gefragt wird. Ebenso wird nicht gefragt, „ob“ eine Lösung existiert. Dies lässt bewusst alle Möglichkeiten offen, was vermuten lassen könnte, dass das entscheidende Element (z.B. die Unlösbarkeit der Gleichung in der Definitionsmenge) bewusst „verschleiert“ werden soll, bzw. dass es sich bei dieser Aufgabe um etwas „Besonderes“ handeln könnte.

So könnte bspw. auch auffallen, dass die Frage nach der Definitionsmenge andeutet, dass zwar eine vermeintliche „Lösung“ der Gleichung gefunden werden kann, diese aber nicht in der angegebenen Definitionsmenge liegt und damit keine „Lösung“ im korrekten Sinne darstellt.

Darüber hinaus scheint diese Art von Aufmerksamkeit nicht zuletzt eine Art verinnerlichteten Monitorings zu sein. Werden bspw. mathematische Problemlöse-, Beweis- oder Begriffsbildungs-Prozesse durchgeführt und fallen dabei die oben angesprochenen Details ins Auge, so ist dies nur bei einem grundsätzlich vorhandenen Fach-, bzw. Aufgabenwissen möglich, mit dem die aktuelle Situation – unbewusst – abgeglichen worden sein muss.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] des hab ich sehr stark gemerkt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.7 – Student_1)
- „[...] wie denk richtig also dass ich, die ansatzpunkte sehe [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.166 – Student_2)
- „[...] bei den klausuren vorher auch eine sache wenn das, gut besprochen wurde ne schwierigere aufgabe also äh, da hatt ich wirklich nen lehrer der immer die schwerste aufgabe aus dem halbjahr einfach dran gebracht hat, des kann man merken muss man aber nich [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.191 – Student_2)
- „[...] wenn ich sie [Anmerkung: „Fallen“] sehe lächel ich drüber freu mich [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.265 – Student_2)
- „[...] ich weiß nicht ob ich oft da rein fall oder es gar nicht bemerke dass da eigentlich ne falle war [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.294 – Student_1)
- „[...] es war irgendwie in der ganzen zeit mein gedanke [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.423 – Student_1)

- „[...] auf koordinatensystem wär ich nie gekommen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.570 – Student_1)
- „[...] da ist es halt aufgefallen, da meistens irgendwelche unlogischen ergebnisse rausgekommen sind, die eigentlich theoretisch nicht sein können [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.41)
- „[...] weil da kann man echt solche ganz kleinen sachen die man einfach überlesen hat und, die eigentlich wichtig waren für die aufgabe, und dann ausprobieren, ähm, manchmal warn die lösungswege schon vorgezeichnet so vollständige induktion oder so hatten wir dann kurz vorher gelernt – ja – und, ja so is mer dann halt irgendwie irgendwann mal auf die lösung gekommen – manchmal half beim vorkurs auch vor allem gruppenarbeit auch, weil man sich da mit anderen austauschen kann dann hat er vielleicht ein gedanken den er nicht weiterführen kann aber n anderer kann ihn wieder weiterführen und das war recht angenehm [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.416)
- „[...] ja schon so wenn mer mal so, so geistesblitze hat so is das, dann verharrt man da vielleicht auch so ein bisschen drauf [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.169)

Analyse

Auf Grund ihrer Bedeutung für den Umgang mit Aufgabenstellungen im Bereich Mathematik wird der Analyse-Aspekt an dieser Stelle ergänzt.

Bei dieser Kategorie handelt es sich um eine der „klassischen“ Kategorien, die von Brown (vgl. Kapitel 1.4, 2.1.1 und 2.1.2) als Teil prozeduraler Metakognition etabliert wurden. Es wird hier angenommen, dass diese Kategorie gerade beim Umgang mit Mathematik eine bedeutende Rolle spielt, da Analyseprozesse zu Beginn jeder Aufgabenstellung notwendig sind. In einem (→) systemischen Sinn kann die Aufgabenstellung innerhalb der Mathematik einem Teilgebiet zugeordnet werden, was es möglicherweise erleichtert, Erinnerungen an bestimmte, für dieses Gebiet typische, Mechanismen, Strategien oder Fragestellungen abzurufen. Es kann bspw. überprüft werden, ob Informationen explizit gegeben sind oder aus dem Aufgabenkontext erschlossen werden müssen. Unter Umständen kann dabei zu (→) Hilfsmitteln gegriffen werden, indem bspw. Informationen notiert und systematisiert werden, sofern dies als (→) notwendig beurteilt wird.

Es kann geklärt werden, ob die Art der Aufgabenstellung bekannt ist, was einen Abgleich mit existierendem Wissen darstellt. Dazu müssen eigene Erinnerungen durchsucht und mit der vorliegenden Aufgabe in Beziehung gesetzt werden. In diesem Fall können möglicherweise auch bekannte Strategien zur Bearbeitung solcher Aufgaben mit abgerufen werden. Alternativ lassen sich möglicherweise aus der Ähnlichkeit von Aufgaben „Angriffspunkte“ zum Transfer und zur Adaption potentiell aussichtsreicher Strategien ableiten. Grundsätzlich kann untersucht werden, ob Fragestellungen verstanden werden, bzw. im Rahmen des eigenen Verständnisses und der eigenen Erfahrungen Sinn ergeben, wodurch ein Zusammenhang mit der sense-making-Kategorie besteht.

Ist die Aufgabenstellung klar, lässt sich überprüfen, ob ausreichend Informationen/ Angaben zur Verfügung stehen, um diese zu lösen, bzw. um angedachte Strategien umzusetzen.

Alternativ besteht die Möglichkeit, zu klären, welche der gegebenen Informationen möglicherweise für die Bearbeitung der Aufgabe überhaupt nicht relevant sind.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] wir ham eine variable und n bisschen angaben – es ist anzunehmen dass wir die variable berechnen sollen, die fläche wär n bisschen witzlos [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.302 – Student_2)
- „[...] ich geh nicht davon aus dass das ding maßstabsgetreu is [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.341 – Student_2)
- „[...] es ist auf jeden fall eine rechteckige fläche natürlich, wenn ich sie jetzt verschiebe, also wenn hier ansetzte und zerbreche oder wenn ich hier ansetzte und zerbreche, dann verschieb ich ja beide seiten, sowohl die als auch die seite, also kann nur ein rechteck rauskommen [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.107)
- „[...] weil da ein p steht, also des, entweder des is jetzt dieser eckpunkt gemeint oder die strecke, also da gibt's ja zwei verschiedene - also ich könnt mir vorstellen dass entweder bei der aufgabe gefragt ist, was für ne fläche des is, oder was des für ne streckenlänge ähm is [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.177)

Sense-Making

An dieser Stelle wird auf einen weiteren Aspekt der impliziten Komponente ausführlicher eingegangen.

Verschiedene Autor_innen (Ader, 2013; De Corte et al., 2011; Schoenfeld, 1992) beschreiben mit dem Begriff „Sense-Making“ den metakognitiven Akt der Sinnkonstruktion bei der Auseinandersetzung mit Mathematik. Gemeint ist hierbei im ersten Ansatz die Überprüfung, ob bspw. ein – neu kennengelernter – Begriff, ausgehend von einer formalen Definition oder einer präformalen Beschreibung auf intuitiver Ebene über das Kennen entsprechender definierender/beschreibender Worte hinaus individuell „einen Sinn ergibt“, ob dieser Begriff im Rahmen der eigenen Kognition (Vorwissen, metakognitive Erfahrungen, Strategien, etc.) mit Bedeutung versehen ist – ob eine „sinn-volle“ Einordnung in bestehendes Wissen möglich ist, ob Verbindungen zu anderen Begriffen erkannt werden, ob sich der Begriff in Bezug auf mögliche Fragestellungen operationalisieren lässt, etc.. Das eigentliche Sense-MAKING besteht daraufhin darin, diesen Sinn durch entsprechende Mittel – wie z.B. Reflexion, Übung, das Generieren weiterer Beispiele und Anwendungssituationen oder sinnstiftende Nachfrage – zu generieren, bzw. zu erweitern, was letztlich in der Erzeugung tragfähiger (Grund-)Vorstellungen (vgl. Kapitel 4.4.1) münden sollte.

Ähnlich wie bei „feeling-of-knowing“- und „judgement-of-learning“-Phänomenen stellt sich die Frage, wie sich die „Sinnhaftigkeit“ eines mathematischen Begriffs, Konzepts oder einer Strategie für das Individuum äußert, wie Lernende feststellen können, ob – und in welchem Umfang – mathematische Inhalte verstanden wurden. Ob sich diese Frage in der Zukunft beantworten lassen wird, bleibt offen; es dürfte meiner Ansicht nach jedoch klar sein, dass hier individuelle Begriffsbildungsprozesse eine große Rolle spielen, die u.a. von den (metakognitiven) Erfahrungen im Umgang mit Mathematik und existierendem Vorwissen (Fachwissen und routinierte Abläufe sowie Aufgaben- und Strategie-Metawissen) der Lernenden abhängen. Intelligenz und Auffassungs-Geschwindigkeit sowie Motivation (z.B. durch Freude am Fach Mathematik) sollten ebenfalls eine Rolle spielen. Außerdem ist hier Personen-Metawissen von Bedeutung; Wissen darum, wie sich Verständnis einerseits und Verständnisschwierigkeiten andererseits individuell äußern, was wiederum durch metakognitive Erfahrungen beim Lernen von Begriffen – oft vermutlich unbewusst – geschult wird. Aber auch allgemeine Strategien zum Überprüfen von Verständnis gehören zum metakognitiven Repertoire. Hier ähneln sich vermutlich Metakognition und allgemein-, aber vor allem fachdidaktisches Wissen. Metakognitiv „gute“ Lernende sollten über Wissen über

Strategien zur eigenen Verständnis-Analyse (Strategie- und Personen-Wissen) verfügen und diese situationsangemessen anwenden können (prozedurale Metakognition: Überwachung, Reflexion, Analyse, Beurteilung und Einordnung). Mögliche Strategien könnten dabei sein:

- ➔ das Wiedergeben der Definition „aus dem Gedächtnis“
- ➔ das Finden von Eigenschaften
- ➔ das Herstellen von Bezügen zu bekannten Begriffen
- ➔ die Analyse der Grenzen und Möglichkeiten des Begriffs
- ➔ die Modifizierung des Begriffs und das Analysieren der – veränderten – neuen Eigenschaften
- ➔ die Verwendung des Begriffs zur Lösung von Problemstellungen

Die genannten Strategien und die Überwachung ihrer Durchführung, sowie deren anschließende Reflexion könnten einerseits der Überprüfung auf Verständnis und sicheren Umgang mit einem Begriff (z.B. dem Ableitungsbegriff) oder einem Verfahren (z.B. Berechnung von Extremwerten) dienen; andererseits dürften sie – gleichzeitig – auch das Verständnis und den Umgang mit diesem verbessern und festigen. Entscheidend – aus meiner Sicht – sind hierbei das eigene metakognitive Wissen um den Nutzen derartiger Strategien und die bewusste metakognitive Begleitung solcher (Übungs-)Prozesse, die sich von einem weniger reflektierten Prozess unterscheiden, der im Unterricht „nur“ durch das didaktische Wissen der Lehrkraft „von außen“ gesteuert würde.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] des ergibt sinn – natürlich mir fällt jetzt auf, dass man des so einfach schön lösen kann wenn man sich die funktion mal überlegt [...]“ (Interview-Transkript)
- „[...] das heißt wenn jemand mit so ner form, von haus aus besser umgehen kann unds gerade um irgendein anderes problem zum verstehen geht dann würd ich die nehmen weil dass das konzept leichter verständlich macht [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.361)
- „[...] es hat den anschein als wär die vorlesung noch schulstoff so wie er war, und sehr verständlich und die aufgaben sind dann ne ganz andere leistungsklasse deutlich drüber, das heißt in der vorlesung, überleg ich meistens wieso ich eigentlich da bin und über den aufgaben sitz ich dann drüber und hab keine ahnung was ich eigentlich tun soll [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.379)

Übersetzungsprozesse

In Bezug auf Metakognition werden unter dem Begriff „Übersetzung“ hier Prozesse subsummiert, die beim „In-Beziehung-Setzen“ von Konzepten eine Rolle spielen. Dabei kann es sich um Vergleiche zwischen Begriffen, Darstellungsformen, Eigenschaften, Aussagen, und Weiteren handeln. Gemein ist diesen Prozessen – so wie sie hier verstanden werden – dass reflektiert (ggf. überprüft) wird, inwiefern Anteile (Eigenschaften o.Ä.) eines Konzepts Anteilen eines anderen „entsprechen“, ob und wie sich also bspw. Eigenschaften einer bestimmten Darstellungsform in einer anderen wiederfinden, ob also bspw. beide Darstellungen (ganz oder teilweise) dasselbe Konzept darstellen und wie genau der Zusammenhang zwischen beiden „aussieht“.

Ein typisches Bsp. aus der Analysis ist der Zusammenhang zwischen einem Extrempunkt eines Funktionsgraphen, einer waagrechten Tangente an den Graphen an der entsprechenden Stelle, einer Nullstelle der 1. Ableitung und einem Schnittpunkt deren Graphens mit der x-Achse.

Hierbei müssen verschiedene „Übersetzungs“-Prozesse vorgenommen werden. Sollen diese über unverstandenes Fakten-Wissen hinausgehen und tragfähige und sinnhafte Vorstellungen vom Begriff und seinem Begriffsnetz (Zusammenhänge mit Unter-, Über-, Nachbarbegriffen, Begriffsumfang und ...) erzeugen, so ist hier mit Sicherheit individuell metakognitive Arbeit zu leisten.

Grundsätzlich muss hier bspw. überdacht werden, auf welche Art überprüft werden kann, ob verschiedene Darstellungen denselben Gegenstand darstellen. Es muss erkannt werden, dass sich dies anhand bestimmter (isolierter) Eigenschaften des Gegenstands geschehen kann, die sich wiederum in den verschiedenen Darstellungen auf jeweils unterschiedliche Art manifestieren. Es muss also folglich die Frage gestellt werden, wie sich bestimmte Eigenschaften (diese liegen natürlich nicht in „darstellungs-loser“ Form vor, sondern dürften in einer bestimmten Darstellungsform bekannt sein – zumindest in verbaler Form [bei der es sich ebenfalls um eine Darstellung handelt]) in einer Darstellung äußern, und anschließend, wie sie sich auf eine andere Darstellung übertragen, sich also in dieser äußern. Hierzu könnte bspw. „ausprobiert“ werden, Werte könnten in Funktionsgleichungen eingesetzt werden, Punkte könnten gezeichnet werden. Im Anschluss könnte ein Vergleich der Darstellungen erfolgen. Anschließend, oder aber von vornherein, könnte versucht werden, anhand der aus einer Darstellung bekannten Informationen zu schließen, wie sich die andere Darstellung – logischer-

weise – verhalten sollte, wie also tatsächlich Eigenschaften „übertragen“ werden. Es gilt also den Zusammenhang zwischen beiden (oder mehreren) mit „Sinn“ zu füllen; einerseits fachlich objektiv, andererseits auf individuell sinnhafte Weise.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es sich natürlich auch bei verbalen Darstellungen – also Aufgabentexten, Erklärungen, Argumentationen, etc. – um Darstellungen handelt, die gerade für diese Kategorie eine große Rolle spielen und bei fast jeder Beschäftigung mit Mathematik auftreten, da zumindest Aufgabenstellungen für gewöhnlich in Form von Text (gesprochen oder verschriftlicht) präsentiert werden. Das Gleiche gilt für das Formulieren einer Antwort oder die Beschreibung eines Konstruktionsprozesses. In all diesen Fällen muss von den Lernenden „übersetzt“ werden – so wie, oder so ähnlich wie, im Rahmen von Modellierungsprozessen, wobei die hier gemeinten Übersetzungen nicht nur zwischen Realsituationen und Mathematik, sondern auch innermathematisch oder rein außermathematisch stattfinden.

Auf die Bedeutung von Darstellungsformen für den Analysis-Unterricht wird ebenfalls unter Kapitel 4.4.1 zur Forschungsfrage 3 eingegangen.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] ich hab jetzt eine quadratische funktion und also man könnte jetzt die extremstelle, das heißt also wenn man die erste ableitung gleich 0 setzt und eine quadratische funktion lässt sich eigentlich ganz einfach ableiten, also man leitet sie ab und setzt das dann 0, da kommt halt dann ein ergebnis raus und dann kann man - also dadurch dass die quadratische funktion abgeleitet, nur noch eine lineare funktion, kommt also nur ein ergebnis raus und dann hat man diesen wert, der rauskommt und ich glaube dieser wert ist dann der extremwert und dann kann man dann noch feststellen theoretisch, wenn ich mir das jetzt - angucke, ob das jetzt ein maximum oder ein minimum ist, dafür sind ja hinreichende zusätzliche bedingungen da und dann wenn man diesen wert hat, also durch das 0 setzen, dann kommt dann p-wert in dem fall raus und dieser p-wert ist dann - ich glaub das ist dann der wert den ich möchte, und dann setz ich diesen p wert einfach ein [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.165)
- „[...] also mathematisch begründet - ähm das ist ja praktisch die nullstelle der ableitung [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.171)

- „[...] ich überlege gerade ich muss ja irgendeine funktion aufstellen so das is ja, so bekommt mer ja auf jeden fall lineare funktion [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.283)
- „[...] und dann – weiß ich nur nicht wie man diese funktion jetzt aufstellen soll [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.287)
- „[...] jetzt muss ich ne funktion aufstellen und dann davon die ableitung [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.283)
- „[...] zunächst mal davon ausgegangen dass ich für die andere aufgabe das konzept hab leicht abwandeln müssen und dann, geschaut hab worin die abwandlung denn besteht, um dadraus wieder rückschlüsse aufs konzept zu ziehen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.61)
- „[...] dadurch dass mer des ganze aus nem anderen blickwinkel angeht, nämlich nicht nur versucht des zu verstehen sondern – des so zu verpacken dass es verständlich ist, und nach möglichkeit noch in nem anderen weg als es schon erklärt wurde [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.79)
- „[...] es muss auf jeden fall ein maximum haben, weil, es wird eine umgekehrte parabel sein, wahrscheinlich vermute ich mal, logischerweise, weil es hier unten kein maximum, es kann, eigentlich wenn man es von hier unten bis nach da oben zieht, dann kann ich nur ein maximum haben und dann ist es eine umgekehrte parabel [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.287 – Student_1)
- „[...] das ist schon die eigentliche funktion der fläche und wenn du es ableitest hast du genau eine nullstelle, also du hast eine gerade und wie gesagt ich bin mir eigentlich sicher, dass es nur ein maximum sein kann, also hier auf der ganzen strecke und dann machts vielleicht sinn [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.295 – Student_1)
- „[...] ich weiß noch ein argument, es kann schon allein nicht x hoch 4 sein, weil x die einheit zentimeter hat, wir haben ja keine hoch 4 zentimeter als fläche, wir wollen eine fläche rauskriegen, das heißt wir müssen x quadrat haben, dass wir quadratzentimeter bekommen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.337 – Student_1)

- „[...] die ableitung gibt dir doch gar nicht die fläche an, das interessiert doch gar nicht, wo die ableitung am größten ist, ist doch nicht wo die funktion am größten ist [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.433 – Student_1)
- „[...] kannst du dann nicht anhand der ableitung begründen, sondern musst es doch anhand von der funktion begründen, ich mein du musst doch begründen, dass die funktion hier steigt, weil dann steigt die fläche, wenn die ableitung steigt, dann ändert sich ja nur die änderung von der platte mit der änderung von x [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.437 – Student_1)

Plausibilität

Eng verknüpft mit der Kategorie „Sense-Making“ spielt hierbei die Frage eine Rolle, ob bspw. (mathematische) Argumente und Begründungen oder auch Ergebnisse von Berechnungen und Modellierungsprozessen plausibel sind, ob sie im Rahmen eines Bezugssystems überzeugen können; ob eine Argumentation nicht nur nachvollzogen werden kann, sondern auch als zutreffend, erschöpfend/ausreichend, bzw. richtig „empfunden“ oder beurteilt wird. Hier spielt neben – sicher notwendigem – Verständnis vor allem eine beurteilende Komponente (s. dort) eine Rolle. Während sich die Überzeugungskraft einer Begründung logischerweise objektiv nachvollziehen lässt, bleibt für Lernende dennoch eine individuelle Grenze bestehen, ab welchem Detailgrad (z.B. in Bezug auf nötige Zwischenschritte) eine logische Verknüpfung „intuitiv“ akzeptiert wird. Beim Überprüfen (oder vielmehr beim Bemerken, vgl. „Awareness“) von Ergebnissen wird noch deutlicher, dass hier eine stark unterbewusste Metakognition gemeint ist, die sich von bewussten Beurteilungs-Vorgängen (s. dort) noch einmal unterscheidet, sicher aber mit diesen zusammenhängt.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] da ist es halt aufgefallen, da meistens irgendwelche unlogischen ergebnisse rausgekommen sind, die eigentlich theoretisch nicht sein können [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.41)
- „[...] zum einen wenn man jetzt irgendwie was ausrechnen musste, wo ein positives ergebnis rauskommen muss und dann steht dann da was weiß ich, wurzel minus 2- aber es muss ein ergebnis rauskommen, was dann in der aufgabenstellung steht, was dann halt nicht sein kann, von der logik her, wo man dann sagt, hm, ich versuch

dann auch erstmal den fehler bei mir zu suchen, weil es ist ja meistens so, man geht ja davon aus, der lehrer macht das schon richtig [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.43)

- „[...] also entweder es kam ein ergebnis raus, wo ich mir gedacht habe, okay das ist total unlogisch, also wenn irgendwas positives rauskommen muss laut der aufgabe oder so und dann kommt ein minuszeichen oder etwas was nicht lösbar ist und es laut angabe eine sachaufgabe ist, die man eigentlich lösen können müsste, oder dann widersprüche rauskamen, wo ich dann denke, hm dann hab ich nochmal durchgeguckt, hab ich mich jetzt verrechnet oder irgendwo blödsinn keine ahnung es passiert ja bei den einfachsten aufgaben, dass man ein minus vergessen oder so [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.75)
- „[...] das heißt es ist monoton steigend, es ist aber umgekehrt, also müsste es monoton fallend sein und geht jetzt ungefähr, ich glaube zu wissen, sie muss den punkt irgendwie berühren [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.177)
- „[...] in der schule wars ja so dass du hast ja meistens etwas schönes rausbekommen hat also 0 oder 1 oder halt irgendwas schönes außer es stand halt schon da ja runden sie auf 2 nachkommastellen ok dann weiß man ok es kommt, wenn da ne gerade zahl raus kommt dann is es halt ganz seltsam [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.177)
- „[...] wens halt jetzt wirklich offensichtlich is dass es halt da steht runden sie auf 2 nachkommastellen und man bekommt, bei allen 5 aufgaben gerade zahlen raus dann denk ich mir schon ok da kann jetzt irgendwas nicht stimmen [...]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.181)
- „[...] des is bei mathematischen aufgaben meistens so angenähert, stimmt des hätte man merken können [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.179)
- „[...] das ist schon die eigentliche funktion der fläche und wenn du es ableitest hast du genau eine nullstelle, also du hast eine gerade und wie gesagt ich bin mir eigentlich sicher, dass es nur ein maximum sein kann, also hier auf der ganzen strecke und dann machts vielleicht sinn [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.295 – Student_1)
- „[...] ich weiß noch ein argument, es kann schon allein nicht x hoch 4 sein, weil x die einheit zentimeter hat, wir haben ja keine hoch 4 zentimeter als fläche, wir wollen

eine fläche rauskriegen, das heißt wir müssen x quadrat haben, dass wir quadratzentimeter bekommen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.337 – Student_1)

4.4. Ergebnisse zu Forschungsfrage 3

4.4.1. Analyse zentraler mathematikdidaktischer Inhalte

Zum Zweck der Vertiefung und Ergänzung der in Kapitel 2.3.2 angesprochenen Punkte werden im Folgenden Elemente der Didaktik der Analysis auf Ansatzpunkte für Metakognition beim Umgang mit Mathematik und vor allem mit der Analysis im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II hin untersucht; zu diesem Zwecke werden vor allem zwei der einflussreichsten Lehrwerke im Bereich der Didaktik der Analysis näher betrachtet:

Elementare Analysis – Von der Anschauung zur Theorie (2010)

von Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn

(Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Springer Spektrum.)

Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe (2016)

von Gilbert Greefrath, Reinhard Oldenburg, Hans-Stefan Siller, Volker Ulm und Hans-Georg Weigand

(Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.)

Metakognitiver Vergleich des Analysis-Unterrichts an Schule und Hochschule

Die Recherche in den Standardwerken zur Didaktik der Analysis lässt deutlich die moderne (und mittlerweile sicher etablierte) Forderung nach einem Unterricht erkennen, der sich von einer rein fachlichen (und möglicherweise auch stoffdidaktischen) Herangehensweise löst und der sich von konstruktiven, „genetischen“ Überlegungen leiten lässt – sowie von Überlegungen, die mit Metakognition zusammenhängen, auch wenn der Begriff Metakognition hier (noch) nicht verwendet wird.

Während die Umsetzung solcher Prinzipien – die bspw. eine unreflektierte Anwendung auswendig-lernbarer Kalküle (nicht nur, aber insbesondere im Analysis-Unterricht der gymnasialen Oberstufe) verhindern soll – gängige Praxis sein dürfte, lassen sich gerade in den

(Eingangs-)Vorlesungen zahlreicher Hochschulstudiengänge noch entsprechende Defizite beobachten (zur entsprechenden Literatur vgl. Kapitel 2.2.3).

Während in der Hochschullehre die Fachwissenschaft Mathematik zwar als geordnetes System axiomatisch von Grund auf mit den Studierenden „aufgebaut“ wird, wird mitunter kritisiert, dass es Dozierenden dennoch – oder gerade deswegen – schwerfalle, die Studierenden dort „abzuholen“, wo diese gerade „stehen“, also an deren bisheriges Wissen und deren Erfahrungen anzuknüpfen und diese in den beginnenden Lernprozess im Studium gewinnbringend zu integrieren (vgl. etwa Grieser & Hochmuth, 2018).

Büchter und Henn (2010, S.1) betonen den axiomatischen Aufbau der Analysis (als Teil der Mathematik), kritisieren (in Abhängigkeit von der Zielgruppe) allerdings Lehrbücher, die sich in ihrem Aufbau an dieser Axiomatik orientieren, und stellen stattdessen den „Lernprozess der Leserinnen und Leser“ in den Vordergrund. Bereits hier zeigt sich, dass die Autoren mit dem Lernprozess die Kognition der Lernenden im Blick haben.

Büchter und Henn (2010, S. 20) warnen vor der Gefahr, dass im Verlauf einer zu schnell vollzogenen Abstraktion am Beispiel der dynamischen Vorstellungen des Funktionsbegriffs – bspw. in Mathematikvorlesungen zu Beginn eines Hochschulstudiums (Anmerkung des Autors) – wichtige inhaltliche Vorstellungen „verloren gehen“ können. Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass metakognitive Aspekte wie der Überblick über das eigene Wissen, die Analyse und Überwachung der entsprechenden Lernprozesse und des erlernten (nun „eigenen“) (Fach-)Wissens sowie das Wissen um Gedächtnis- und Lernprozesse, dem die Gefahr eines solchen „Verlorengehens“ „bekannt sein kann“ und mit dem diesem aktiv entgegengewirkt werden kann, hier besonders tragfähig sind, da sie Lernenden die Möglichkeit geben, eigene Defizite zu erkennen und aktiv zu verhindern, bzw. diese ggf. zu beheben – insbesondere in Situationen, in denen von Seiten der Lehrkräfte unter Umständen institutionsbedingt wenig didaktische Unterstützung zu erwarten ist.

Laut Büchter und Henn (2010, S. 123) ist es für Lernprozesse normalerweise sinnvoll, beim Theorieaufbau einen „konstruktiven Weg“ dem axiomatischen gegenüber zu bevorzugen (insbesondere, da „fertige“ Axiomensysteme ebenfalls das Resultat ursprünglich konstruktiv entwickelter Theorien seien). Metakognitiv gesehen, spielt hierbei unter anderem der Aufbau neuer Inhalte auf vorhandenem Wissen eine Rolle; dieses muss überblickt und hinterfragt werden, die Möglichkeiten bekannter Inhalte werden überdacht und ausgelotet und durch geeignete Fragestellungen (bzw. Fragen über das eigene Wissen und seine Bedeutung) werden neue Informationen „entdeckt“.

Insbesondere der Vorsatz, an Vorwissen von Lernenden anzuknüpfen (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010) kommt demnach als Anknüpfungspunkt für Metakognition in Frage, sofern die Lernenden hier aktiv einbezogen werden, indem Zusammenhänge zwischen noch aus der Schule bekannten und neuen Inhalten aufgezeigt und (gemeinsam) analysiert werden, indem also bisheriges Wissen und neu zu erwerbendes Wissen in Beziehung gesetzt werden.

Gleichzeitig wären jedoch gerade an der Hochschule mit Sicherheit ein Verständnis für und ein Überblick über die Wissenschaft Mathematik als Ganzes, bzw. über deren (axiomatischen) Aufbau und ihre Mechanismen wünschenswert – insbesondere bei Mathematik-Studentinnen und -Studenten (im Ggs. zu „AnwenderInnen“).

Wie Büchter und Henn (2010, S. 107) erwähnen, werden in der Mathematik bspw. häufig „neue“ Objekte auf Basis von bereits vorhandenen konstruiert. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass entsprechendes Metawissen über die Funktionsweise von Mathematik zu einer Form von metakognitivem Wissen (→ Aufgaben-, Systemwissen) erweitert werden kann, sofern aus diesem Wissen über das System Mathematik bspw. Folgerungen für eigene Verständnis- und Lernprozesse gezogen werden. Dieser Aspekt findet sich im entwickelten Modell (vgl. Kapitel 4.2) in Form des domänenspezifischen Anteils der deklarativen Komponente wieder.

Verbindungen zwischen unterschiedlichen Denkweisen

Darüber hinaus ist spätestens in der Hochschulmathematik der Übergang von einer teils primär anschaulichen Schul-Mathematik zur formal korrekten Hochschulmathematik zu bewältigen.

„Eine rein auf der Anschauung fußende Differenzial- und Integralrechnung stößt aber schnell an ihre Grenzen, es gibt Funktionen, die nur mithilfe der Anschauung nicht mehr weiter untersucht werden können.“ (Büchter & Henn, 2010, S. 2)

Im Rahmen der Entwicklung von einem „naiven“ Verständnis – z.B. der reellen Zahlen (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010, S. 109) – und einer entsprechenden Verwendung von Mathematik hin zu einem Verständnis von Mathematik, das auf formaler Korrektheit basiert – z.B. etwa durch Einführung des Vollständigkeitsaxioms im Rahmen von Eingangsvorlesungen an der Hochschule (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010, S. 109) – dürfte Metakognition von Nutzen sein, da z.B. Unterschiede zwischen „naiven“, propädeutischen Vorstellungen und einer formal korrekten Verwendung von Mathematik zu erfassen sind und die „Brücke“ zwischen beiden analysiert werden kann, vor allem im Hinblick auf die eigene Kognition und damit verbundene

individuelle „Denkweisen“ und individuelle Herausforderungen. Hierbei könnte zu ergründen sein, weshalb bisherige Überzeugungen, Denkweisen und bisheriges Wissen zwar auszureichen scheinen, nun aber doch Lücken aufweisen, die bisher nicht bemerkt wurden. Unter anderem müssen hier auch die Grenzen der eigenen Vorstellungskraft (Kognition) erkannt und untersucht werden.

Gerade die hier angesprochenen unterschiedlichen Zugänge, bzw. Perspektiven auf Mathematik (formal korrekt – propädeutisch) erfordern die Fähigkeit, diese gedanklich voneinander zu trennen und ihre Bedeutung zu verstehen, im Folgenden aber je nach Anforderung flexibel zwischen diesen beiden „Denkweisen“ zu wechseln und sie miteinander zu vereinen. Eine intensive Auseinandersetzung mit der eigenen Kognition und dem eigenen Wissen, bzw. mit dessen Entwicklung sollte hier nützlich bis notwendig sein.

Wissen über das „System“ Mathematik, seinen Aufbau und die zugehörigen Mechanismen und teils „typischen“ Vorgehensweisen beim Umgang mit Mathematik lässt sich entsprechend einsetzen, um die eigene Kognition und damit den Umgang mit Mathematik strategisch zu steuern und effizienter zu gestalten. Entsprechendes Wissen um das „System“ Kognition (vgl. Kapitel 2.3.1, Kapitel 4.2) und seine Verbindung zur Mathematik im Sinne der deklarativen Komponenten (spezifisch und nicht spezifisch) sollten ein mächtiges kognitives Werkzeug zur Bewältigung von Lernprozessen und mathematischen Aufgabenstellungen sein. (vgl. Sjuts‘ „Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation“, 1999a)

Ziele im Analysis-Unterricht aus metakognitiver Sicht

Büchter und Henn (2010) betonen diesbezüglich bspw. die Wichtigkeit der Verwendung suggestiver Symbole und Bezeichnungen (S. 20), also die (mathematisch nicht notwendige) Befolgung bspw. bestimmter Konventionen, nach denen bestimmte mathematische Objekte mit bestimmten Buchstaben bezeichnet werden, um sie sprachlich/optisch von anderen zu unterscheiden. Hieran zeigt sich die Bedeutung von redundanter oder zusätzlicher Information, die über eine objektive, rein mathematische Logik hinausgeht und auf die individuellen Vorstellungen und die individuelle Kognition der Lernenden eingeht. Der Nutzen solch zusätzlicher Information trägt einerseits dem Wissen über das System Mathematik und andererseits dem Wissen über die Mechanismen von Kognition, bzw. Denkprozessen und des Gedächtnisses Rechnung.

[Ein auch von Teilnehmenden der empirischen Erhebung geäußertes Beispiel ist die Verwendung gewohnter Notation, um Verunsicherung zu reduzieren und sich

gedanklich bei der Entwicklung von Strategien oder Interpretation von Sachverhalten in gewohnten Bahnen zu bewegen. Die Identifizierung der Variablen x und y mit Abszisse und Ordinate des kartesischen Koordinatensystems dürfte von vielen Lernenden verinnerlicht worden sein und erleichtert damit entsprechende Überlegungen.

(Eine zu starke Identifikation stellt hier natürlich auch ein Risiko dar und kann die Weiterentwicklung von Verständnis erschweren oder grundsätzlich auf Fehlvorstellungen bezüglich Variablen hindeuten.)]

Von Seiten der Lehrenden ließe sich hierdurch neben der Reduktion der kognitiven Belastung auch steuern, welche Aspekte eines Begriffs betont und welche Vorstellungen (s. unten) angesprochen werden sollen (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010, S. 20).

Ähnlich ließe sich aber auch von Lernenden selbst möglicherweise die eigene Kognition steuern, indem solche „Methoden“ bekannt sind und bewusst eingesetzt werden, um bspw. Missverständnisse zu vermeiden, Übungsprozesse einfacher und weniger fehleranfällig zu gestalten, oder insgesamt – wie angesprochen – die kognitive Beanspruchung zu senken, indem „geschickte“ Bezeichnungen (und andere „Hilfestellungen“ und „Stützen“) genutzt werden. Zudem könnte das Verwenden derartiger – vergleichsweise basaler – strategischer Überlegungen den Einsatz von Strategien beim Umgang mit Mathematik insgesamt fördern, indem strategisches Denken und der Versuch, Prozesse möglichst übersichtlich, effizient und zielorientiert zu gestalten, bzw. über Mathematik nachzudenken, mit der Zeit zur Gewohnheit werden.

Solche gezielten Benennungen (und Ähnliches) dürften auch eng damit zusammenhängen, welches Ziel durch – bspw. – eine Rechnung/ Modellierung/ etc. erreicht werden soll, was wiederum eng mit den prozeduralen Aspekten von Metakognition zusammenhängt – Planung, Überwachung (also die Überprüfung, ob man sich noch auf „Kurs zum Ziel“ befindet), Überprüfung. Es wird in dieser Arbeit angenommen, dass solche Strategien insgesamt das Nachdenken und bewusste „Gestalten“ des eigenen (kognitiven) Umgangs mit Mathematik fördern und zu einem bewussteren und (→) reflektierten Betreiben von Mathematik führen können.

[Diese „Ziel-Orientiertheit“ und die damit verbundene metakognitive „Begleitung“ scheint mir vor allem bei Aufgaben aus dem Modellierungs-Bereich wichtig, in dem die Frage nach dem Ziel, bzw. nach Zwischen-Zielen und nach den verschiedenen Wegen dorthin stark den Lernenden selbst überlassen bleibt, was sicher

den Kern entsprechender Aufgaben darstellt. Gerade Modellierungsaufgaben bringen außerdem die Notwendigkeit eines gedanklichen Umschaltens zwischen verschiedenen Ebenen (Realwelt, Mathematik), der zielorientierten Verwendung und „Kreation“ von Mathematik und ihrer Interpretation (und damit der Planung, Überwachung und Reflexion dieser Prozesse) und des Überblickens eines gedanklichen „Systems“ in Form des mathematischen Modells und seiner Zusammenhänge mit sich.]

Der Überblick über die Mathematik als System und ihre Möglichkeiten und Grenzen spiegelt sich direkt in den sogenannten „Grunderfahrungen“ nach Winter (2004) wider.

Büchter und Henn (2010, S.2) zitieren diese „Grunderfahrungen“, die Lernende im Zusammenhang mit Mathematik machen, wie folgt:

- (G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.

Wie angesprochen (Kapitel 4.2), wird in dieser Arbeit gerade die Erfahrung (G2), die das System Mathematik und seine Beziehungen und Mechanismen ins Auge fasst, als eng mit Metakognition verknüpft gesehen. Bei den in der Mathematik behandelten Objekten handelt es sich um idealisierte oder oft genug um Objekte, die jenseits einer dreidimensionalen Anschauung und Vorstellbarkeit liegen (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010) und die sozusagen „nur“ in der (eigenen) „Gedankenwelt“ (vgl. „geistige Schöpfung“, s. G2) existieren. Ein Nachdenken über diese Objekte und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen, über die sie (mehr oder weniger gut und vollständig) repräsentierenden Darstellungsformen, bzw. Veranschaulichungen und über die notwendigen Übersetzungsvorgänge zwischen diesen Darstellungen und entsprechenden Perspektiven erfordert Abstraktionsvermögen und die Steuerung, Überwachung und Reflexion der eigenen Kognition (des eigenen Verständnisses, etc.), ein Teil deren diese Objekte (etc.) ja sozusagen sind. Zudem stellt Wissen um Objekte und ihre Beziehungen (s. unten, Vollrath) Teil des eigenen Fachwissens und mit Sicherheit auch Teil des deklarativen Metawissens über Mathematik als „Aufgabe“ („task knowledge“) und

ihre Strategien („strategy knowledge“) dar; vor allem in Form der im hier vorgestellten Modell etablierten domänenspezifischen Komponente.

Die im Rahmen der Erfahrung (G3) genannten heuristischen Fähigkeiten scheinen ebenfalls mit Metakognition in Verbindung zu stehen, da sie unter anderem Strategien darstellen können, wie bspw. mit fehlenden oder unvollständigen Informationen (also Wissen) umgegangen werden kann, wie (kognitive) Prozesse verkürzt werden können, etc. (s. oben). Zum Verständnis, worin solche Heuristiken bestehen und wie sie zu nutzen sind und worin ihr Nutzen besteht, sollten also verschiedene deklarative Aspekte von Metakognition notwendig sein (z.B. Strategiewissen). Für ihre Umsetzung wiederum sollten zusätzlich kognitions-steuernde, prozedurale Aspekte (z.B. Monitoring) vonnöten sein.

„Schließlich liefern sowohl die Anwendungsprobleme als auch der innermathematische Theorieaufbau immer wieder Anlass, sich selbst und sein mathematisches Handwerkszeug zu überprüfen, es möglichst flexibel einzusetzen und mit heuristischen Überlegungen Lösungsansätze zu finden oder Ergebnisse zu reflektieren [...]“ (Büchter & Henn, 2010, S. 3)

Büchter und Henn (2010, S. 3) sprechen hier in Bezug auf die drei Grunderfahrungen nach Winter (2004) von verschiedenen Ansatzpunkten für Metakognition, bzw. direkt von metakognitiven Handlungen, denen kaum etwas hinzuzufügen ist, wenn auch der Begriff Metakognition von den Autoren nicht verwendet wird. Angesprochen werden die prozeduralen Aspekte Überwachung, Überprüfung und Reflexion („überprüfen“), die offensichtlich nicht völlig trennscharf betrachtet werden können (vgl. Kapitel 4.2). Ebenso spielen die deklarativen Aspekte Personen- („sich selbst“), Aufgaben- („mathematisches Handwerkszeug“), und Strategiewissen („Lösungsansätze“) eine Rolle (vgl. Kapitel 4.2). Der Punkt Heuristik wird in dieser Arbeit ebenfalls als mit kreativen Aspekten von Metakognition (vgl. Anhang) verbunden interpretiert.

Bei näherer Betrachtung finden sich auch im Zusammenhang mit (G1) metakognitive Ansatzpunkte. Die Interpretation der bekannten Welt als System, das „mit Mathematik in Zusammenhang steht“, scheint mir erneut mit der Wahrnehmung von Mathematik als System mit seinen eigenen Möglichkeiten, Grenzen und Zusammenhängen (zur „außermathematischen“ Wirklichkeit) – und damit mit deklarativer, spezifischer Metakognition – verbunden zu sein. Insbesondere lässt sich hier der Bogen zur Anknüpfung an das Vorwissen (hier: Weltwissen) von Lernenden im Bereich der Lehre spannen; außerdem ist hier –

offensichtlich – der vielfach betonte Realitätsbezug zu nennen, dessen Wichtigkeit für das Lernen von Mathematik bekannt sein dürfte und der im Rahmen didaktischer Überlegungen (die sich ja auf Motivation und Kognition von Lernenden beziehen) wiederum metakognitive Aspekte mit sich bringt. Perspektivwechsel, Übersetzungsprozesse und Reflexion über Zusammenhänge sind dabei von Bedeutung.

Greefrath et al. (2016, S. 8):

„Ganz im Sinne der Grunderfahrung G3 schult Analysis das Problemlösen mithilfe spezieller Methoden und Verfahren. Dies gilt sowohl für inner- als auch für außermathematische Problemstellungen. Dabei sind allerdings – aufgrund der höheren Komplexität der Begriffsbildungen – sowohl die (Wieder-)Erkennung von Begriffen und Verfahren der Analysis in der Umwelt, das Anwenden in Problemlösesituation als auch die Interpretation der Ergebnisse im Allgemeinen auf einem kognitiv stärker herausfordernden Niveau als etwa viele Beispiele aus der Arithmetik oder Algebra.“

Greefrath et al. (2016) beziehen sich hierbei auf die Einführung der Analysis. Das höhere Alter und das damit verbundene umfangreichere Fachwissen, bzw. die größere Erfahrung im Umgang mit Mathematik, bringen höhere Anforderungen an die Leistung der Lernenden mit sich, die die Analysis nunmehr auf einem im Vergleich zu früheren Stufen höheren Niveau „kennenlernen“. Zusätzlich baut die Einführung von Begriffen der Analysis (z.B. Grenzwerte, Differenziation, etc.) auf dem notwendigerweise zuvor eingeführten (algebraischen) Abbildungs-, bzw. Funktionsbegriff auf. Ebenso spielen für Verfahren der Analysis (wie z.B. die Berechnung von Nullstellen) früher eingeführte Verfahren (wie das Lösen von Gleichungen) eine Rolle. Obige Aussage hat insofern möglicherweise nicht (nur) mit einem etwa grundsätzlich höheren Anspruch eines Fachgebiets gegenüber anderen zu tun, sondern (auch) mit seinem „Platz“ im Aufbau des „Systems Mathematik“ und seinem daraus folgenden Platz im Lehrplan.

Es scheint naheliegend, dass dementsprechend höhere Anforderungen an die Leistung, Selbstständigkeit und die Kognition von Lernenden gestellt werden (können) – und damit auch metakognitive Aspekte von zunehmender Bedeutung sind und auf einem höheren Niveau stattfinden (können).

Genetisches Lehren von Analysis aus metakognitiver Sicht

Die Sicht auf Mathematik (insbesondere die Analysis) als geordnetes, axiomatisches System einerseits sowie die Sicht auf Mathematik als Resultat eines konstruktiv-historischen Prozesses, der über die redundanzfreie Darstellung hinaus auch die zu Grunde liegenden Fragestellungen und die daraus resultierenden Überlegungen nicht ignoriert, führen zum Prinzip des sogenannten genetischen Mathematikunterrichts (Wittmann, 1981). Dieser ermöglicht insbesondere die eingangs erwähnte Forderung nach einem Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden und steht in Zusammenhang mit dem Realitätsbezug der Grunderfahrungen, aus dem die entsprechenden Fragestellungen, die zur Entwicklung mathematischer Begriffe und Verfahren geführt haben, oft stammen.

Gerade im Sinne eines genetischen Mathematikunterrichts, der nicht nur den axiomatischen Aufbau mathematischer Konzepte vermittelt, sondern Entstehungsprozesse sichtbar macht (vgl. etwa Büchter & Henn, 2010), kann Metakognition eine Rolle spielen, da hierbei vermutlich noch stärker die Frage nach (Hinter-)Gründen gestellt wird – danach, welche Motivation und welches Ziel hinter der Entwicklung, bzw. Entdeckung eines Begriffs standen und stehen, oder danach, warum bestimmte Strategien anderen vorzuziehen sein könnten, auch wenn sie mathematisch letztlich „gleichwertig“ sind – insgesamt also die Frage danach, welche Überlegungen mit diesem Begriff verbunden waren und sind. Dieses Überdenken und Hinterfragen von Überlegungen – also von Kognition – über Mathematik wird in dieser Arbeit gemäß der Definition von Metakognition als Kognition, die (eigene) Kognition zum Inhalt hat (vgl. Kapitel 1.1, Kapitel 1.4), als Metakognition interpretiert.

Büchter und Henn (2010, S. 2) betonen die Wichtigkeit des genetischen Prinzips vor allem im Hinblick auf Lehramtsstudierende, die ihrerseits im späteren Beruf die Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern begleiten; eine Argumentation, die auch im Hinblick auf (daran beteiligte) Metakognition plausibel scheint, da es von Vorteil sein dürfte, bspw. Wissen über kognitive Mechanismen allgemein und Erfahrung im Hinblick auf die Steuerung der eigenen Kognition zu besitzen, wenn es darum geht, andere beim Entwickeln ihrer kognitiven und metakognitiven Fähigkeiten zu unterstützen. Wissen über Kognition, wie es in Psychologie-Vorlesungen im Rahmen von Lehramtsstudiengängen vermittelt wird, gehört schließlich auch zu Metakognition.

Büchter und Henn (2010, S. 2) sprechen in diesem Zusammenhang (also in Bezug auf das genetische Prinzip) von einem „stimmigen Bild“, das – so lässt sich interpretieren – über ein

rein axiomatisches Bild von Mathematik, das Entstehungsprozesse vernachlässigt, hinausgeht und das erstrebenswert ist.

Zur Rolle des Vorwissens im Analysis-Unterricht aus metakognitiver Sicht

Büchter und Henn (2010, S. 2) betonen die Wichtigkeit, Lernenden einen individuellen und schrittweisen Konstruktionsprozess zu ermöglichen – vor allem im Hinblick auf Lehramtsstudierende, die später wiederum Schülerinnen und Schüler unterrichten. Dabei wird das Vorwissen der Leserinnen und Leser als Ausgangspunkt genannt. Es scheint naheliegend, dass ein solches Anknüpfen an Vorwissen auch Metawissen und Metakognition auf Seiten der Lernenden notwendig macht, bzw. von diesem profitiert, wenn Lernende dieses Anknüpfen selbst aktiv unterstützen können (→ Überwachung und Steuerung von Kognition), indem sie über einen guten Überblick über dieses verfügen und gelernt haben, wie sie neue Inhalte in ihr bestehendes Wissen integrieren können (→ Wissen über eigenes (Vor-)Wissen und über Lernziele, Aufgaben-, Systemwissen, Wissen über kognitive Mechanismen, vgl. Kapitel 2.3.1, Kapitel 4.2 und Anhang). Da Lehramtsstudierende im späteren Beruf ihrerseits bei Schülerinnen und Schülern solche Konstruktionsprozesse unterstützen, dürfte das Metawissen über Kognition, das im Rahmen einer metakognitiven „Begleitung“ eigener Lernprozesse (hoffentlich) entsteht, im Lehrberuf von Nutzen sein.

Da sich das Schulfach Mathematik dadurch auszeichnet, dass neuer Lernstoff und neue Aufgabenstellungen sich oft nicht ohne (bewussten und „kompetenten“) Rückgriff auf zuvor gelernte (und gut verinnerlichte) Inhalte bewältigen lassen, ist ein guter Überblick über das eigene Wissen und die Verbindungen einzelner Gedächtnisinhalte sowie ein gutes „Gespür“ (im Sinne metakognitiver Erfahrungen) wichtig, um neue Aufgaben und neue Lernprozesse angemessen und flexibel „anzugehen“.

Die zunehmende Bedeutung der bereits erworbenen Kompetenzen und des bereits erworbenen Wissens im Vergleich zur abnehmenden Bedeutung grundlegender intellektueller Fähigkeiten im Verlauf der schulischen Entwicklung unterstützt diese Überlegungen zur Bedeutung von Metakognition (vgl. Kapitel 2). Ebenso erstaunt es insofern nicht, dass Metakognition als einer der wichtigsten oder sogar als wichtigster Prädiktor für Mathematikleistung in der Schule gesehen wird (vgl. Kapitel 2).

Speziell im Bereich der Analysis werden Fähigkeiten und Denkweisen benötigt, bzw. im Unterricht gefördert, die metakognitive Bezüge aufweisen, bzw. Ansatzpunkte zu metakognitiver Aktivität bieten. So schreiben etwa Greefrath et. al (2016, S.7):

„Analysis schult und entwickelt ein Denken, das über die in unserer Umwelt gewonnenen Erfahrungen hinausgeht und – in diesem Sinne – abstrakte Begriffe entwickelt. Dadurch entwickelt sich ein hierarchisch aufgebautes formales System, in dem definierte Begriffe und gefundene oder entwickelte Verfahren in enger Wechselbeziehung zueinander stehen.“

SuS entwickeln in der Beschäftigung mit analytischen Inhalten also ihre Fähigkeit zu abstraktem Denken und ordnen die damit verbundenen abstrakten Begriffe und Verfahren in systematischer Weise, sie konstruieren also individuell im zuvor angesprochenen Sinne das System Mathematik.

Dabei gilt, wie zuvor bereits zitiert:

„Das Verstehen eines Begriffs umfasst weit mehr als die Kenntnis einer Definition.“ (Greefrath et al., 2016, S. 9)

Vielmehr seien Vorstellungen zum Begriffsinhalt, ein Überblick über den Begriffsumfang und die Beziehungen zwischen Begriffen in Form eines Begriffsnetzes notwendig und im Unterricht auszubilden (Greefrath et al., 2016, S. 9 ff.).

Über die Kenntnis abstrakter Begriffe hinaus betonen Büchter und Henn (2010, S. 30) vielmehr die Bedeutung mentaler Repräsentationen, die den Umgang mit diesen Begriffen erst ermöglichen. Zur bewussten Erzeugung, effektiven Organisation und angemessenen Anwendung dieser Repräsentationen sollten metakognitive Aspekte wichtig oder zumindest förderlich sein, da hierbei „Inhalte“ der eigenen Kognition betrachtet und gesteuert werden; insbesondere wichtig, da es sich hierbei um einen „individuellen Prozess“ (S. 30) handelt.

Es sollte von Nutzen sein, wenn SuS im Rahmen solcher „Konstruktionsprozesse“ metakognitiv aktiv werden müssen – so sollten zur Präzisierung bekannter (aber bisher auf einem weniger formal präzisen Niveau verwendeter) Begriffe Reflexionsprozesse notwendig sein, in denen bspw. Begriffsumfang und Begriffsinhalt durchdacht, Überflüssiges abgetrennt, und damit entsprechendes Wissen „ausgeschärft“ werden. Dass es sich hierbei um metakognitive Prozesse handelt, zeigt sich unter anderem dadurch, dass eigenes Wissen reflektiert und dabei erweitert, geordnet und systematisiert wird. Dabei wird es sich um allgemeines „Weltwissen“ (vgl. die Winter’schen Grunderfahrungen, s. oben) handeln, sowie um metakognitives Aufgaben-Wissen (speziell domänenspezifisch, vgl. Kapitel 2.1.6 und Kapitel 4.2); aus bekannten mathematischen Inhalten müssen typische Strukturen und Eigenschaften mathematischer Begriffe in sinnvoller Weise

übertragen (z.B. auf die zu lösende Aufgabe) werden. Hierzu ist also nötig, solche Strukturen und Eigenschaften als typisch zu erkennen und zu entscheiden, welche davon sich übertragen lassen und wie dies sinnvoll geschehen kann. Es ist also zudem eine Bewertung dieses Wissens und dieser Methoden (z.B. als sinnvoll) vonnöten. Zu einer formal korrekten (oder zumindest individuell als solcher bewerteten) Ordnung der reflektierten Begriffe und Methoden ist es notwendig, die (oben angesprochenen) Wechselbeziehungen zwischen diesen zu reflektieren. Hierzu dürfte neben Sach-/ Aufgabenwissen (task knowledge) auch Strategiewissen (strategy knowledge) nötig sein, da einerseits zwar bekannte Eigenschaften von Begriffen und die Funktionsweise bestimmter Methoden reflektiert, andererseits aber auch deren Einsatzmöglichkeiten bzgl. bestimmter Zielsetzungen und damit verbundener möglicher Vorgehensweisen und (Lösungs-)strategien miteinbezogen werden müssen.

Stufen des Verstehens aus metakognitiver Sicht

Wie sich hier bereits andeutet, kommt dem Begriffsverständnis eine zentrale Rolle beim Erfassen von Mathematik und damit auch im Mathematikunterricht zu. Wie bereits angesprochen, handelt es sich dabei um mehr als die Kenntnis von Definitionen; es zeigen sich Ansatzpunkte für Metakognition, die im Folgenden näher untersucht werden. Büchter und Henn (2010, S. 30) betonen, dass der Inhalt eines mathematischen Begriffs in Gänze nur mittels mehrerer verschiedener Vorstellungen erfasst werden kann. Vorstellungen und insbesondere das Konzept der Grundvorstellungen weisen einen starken Bezug zu Metakognition auf. Die angesprochenen verschiedenen Vorstellungen, die zu einem Begriff gehören, gedanklich in Einklang zu bringen, sie voneinander zu unterscheiden und je nach Bedarf die „passende(n)“ auszuwählen, stellt in dieser Arbeit einen wichtigen Ansatzpunkt für Metakognition dar – im Sinne der **Analyse**, **Überwachung** und **Auswahl (Beurteilung)** dieser Vorstellungen als Teil der eigenen Kognition.

Der von Vollrath (vgl. etwa Vollrath, 1989) präzierte Begriff des „Funktionalen Denkens“ als „Denken, das für den Umgang mit Funktionen typisch ist“, zeigt, dass – nicht notwendigerweise im Gegensatz zu anderen Begriffen oder Gebieten der Mathematik – es in der Analysis bestimmte „Denkweisen“ gibt, die für sie, bzw. für einzelne ihrer Begriffe typisch sind. Dies zeigt sich ebenfalls deutlich bei Greefrath et al. (2016) im Rahmen der Behandlung von Begriffen der Analysis eigenen „Aspekten“ und den zugehörigen „Grundvorstellungen“, die von Lernenden im Hinblick auf diese Begriffe erworben werden sollten. Letztere dienen primär dazu, diesen Begriffen für die Lernenden einen Sinn zu geben (vgl. Greefrath et al., 2016) – es muss also offenbar (für die Autoren) erst ein gedanklicher Zusammenhang hergestellt werden

zwischen fachlichen Definitionen und dem Wissen (den Vorstellungen), das Lernende (darüber hinaus) mit einer Definition, bzw. einem Begriff verbinden sollten (vgl. erneut obiges Zitat); bei dieser Verknüpfung von Informationen und Wissen und der „Sinnggebung“ handelt es sich um Metakognition im Sinne der steuernden und der impliziten Komponenten des vorgestellten Kategoriensystems (vgl. Kapitel 4.2).

Gerade auch im Begriff des „Denkens“ (s. oben) und der damit verbundenen typischen „Denkweisen“ besteht ein Bezug zwischen „objektiver Mathematik“ mit ihren Aspekten und der individuellen Kognition von Lernenden. Dieser Bezug, der erfahrungsgemäß oft nicht ohne Weiteres hergestellt werden kann, sollte durch Wissen über Wissen, über eigene Kognition und durch Reflexion von Wissen und Steuerung von Kognition transparent gemacht werden können.

Vollraths Definition des Funktionalen Denkens als Denken, das typisch für den Umgang mit Funktionen ist, legt möglicherweise nahe, dass – sofern es verschiedene Arten von „Denken“ gibt – diese auch metakognitiv analysiert, unterschieden und gesteuert werden können sollten. Dabei stellt sich insbesondere die Frage, ob es sinnvoll sein könnte, Lernenden didaktische Inhalte nahezubringen, damit sie kognitive Prozesse noch effektiver selbst gestalten können – auf einem angemessenen Niveau, was die Tiefe und Präzision dieses Wissens und das Alter der Lernenden betrifft. (s. unten)

Im Sinne eines Mathematikunterrichts, in dem Grundvorstellungen berücksichtigt werden, dürfte Metakognition wichtig sein, da gerade dabei die Frage nach dem „Sinn“ gestellt wird – danach, welche Bedeutung bspw. eine Definition hat, welche Assoziationen sie bei Lernenden auslöst und auslösen sollte, welche Fehlvorstellungen Lernende haben, die es zu vermeiden, bzw. zu korrigieren gilt (vgl. etwa Greefrath et al., 2016). In diesen Fällen muss eigenes Wissen analysiert und auf diese Vorstellungen hin überprüft werden. Lernenden sollte dazu zuerst (→) bewusstwerden, dass diese (→) Vorstellungen existieren, welche (→) Risiken bestehen (z.B. Übergeneralisierungen), welchen (→) Nutzen bspw. prototypische Vorstellungen haben und welche potentiellen (→) Gefahren diese bergen. Eigene Kognition muss überwacht und dahingehend überprüft werden, dass solche Gefahren vermieden werden, dass sich keine „Denkfehler“ „einschleichen“. Insgesamt müssen hier auf systematischer Ebene die Mechanismen der eigenen Kognition verstanden und überblickt werden, woraus Konsequenzen für das eigene (kognitive) Handeln abgeleitet werden sollten. Hier stellt sich erneut die Frage, ob die Vermittlung (fach)didaktischen Wissens, das ja teils Wissen über kognitive Mechanismen, bzw. Prozesse (Lernen, Üben, Festigen, Anknüpfen ...) darstellt, im Rahmen metakognitiver Interventionen bei Lernenden sinnvoll sein könnte.

Eine Möglichkeit, mathematisches Begriffsverständnis zu systematisieren, stellt das *Stufenschema des Begriffslernens* nach Hans-Joachim Vollrath (z.B. 1984) dar, das Wissen und Fähigkeiten, über das/ die Lernende verfügen können, bzw. sollten, in fünf aufeinander aufbauenden „Stufen“ (vergleichbar auch den Anspruchsniveaus der KMK-Standards) beschreibt, die optimalerweise von Lernenden spiralförmig „durchlaufen“ werden.

Zur Erlangung eines angemessenen Begriffsverständnisses – über mehrere Stufen hinweg hin zu einem Verständnis nicht nur des isolierten Begriffs, sondern vielmehr des Begriffs sowie seiner Verbindungen zu anderen Begriffen in einem Begriffsnetz – scheint vor allem metakognitive Reflexion im Zusammenhang mit (der Ausprägung oder Erweiterung von) Aufgaben- und Strategiewissen eine Rolle zu spielen. Neben einer durch Üben erlangten Vertrautheit (auch im Sinne metakognitiver Erfahrungen) mit dem Begriff und einem Eindruck davon (auch im Sinne des Awareness-Aspekts), wie er bei verschiedenen Aufgabenstellungen in Zusammenhang steht, sollte eine intensive gedankliche Auseinandersetzung ab einer gewissen Stufe des Vollrath'schen Schemas unerlässlich sein.

Exemplarisch wird das Schema im Folgenden für den Ableitungsbegriff ausgeführt (nach Vollrath, 1984; Weigand et al., 2018):

1. Stufe: Der Begriff als Phänomen

Dies ist die Stufe des **intuitiven Begriffsverständnis**. Lernende kennen mit der Ableitung verbundene Begriffe wie „Durchschnitt“, „mittlere Änderungsrate“, „(Geraden-)Steigung“ und das „Steigen“ und „Fallen“ eines Graphen. Sie können diese Begriffe unter Verwendung von Beispielen erläutern.

→ Metakognitive Ansätze

- Beschreibung von Phänomenen/Situationen mit eigenen Worten und Beurteilung der Angemessenheit dieser Beschreibungen (in eigenen Worten)
 - Zur Umformulierung gelernter Inhalte ist es notwendig, diese Inhalte/ dieses Wissen zu reflektieren und zu

entscheiden, wie es zu verstehen ist, um dann eine inhaltlich gleichbedeutende Formulierung zu entwickeln. Hier steht also die Reflexion eigenen Wissens (s. prozedurale Komponente, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) eine Rolle. Die Beurteilung der Angemessenheit der eigenen Formulierung erfordert metakognitives Aufgabenwissen bzw. Wissen über Funktionsweisen des Wissensgebiets Mathematik (vgl. Kapitel 4.2, Systemwissen). In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass bereits die Beurteilung von Wissen und Verständnis an sich eine metakognitive Komponente ist, was sich im „Analyse“-Aspekt des Modells (vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) widerspiegelt. Wie in Kapitel 1.4 dargelegt, wird die Analyse (von Wissen) auch von anderen Forschenden als (prozeduraler) metakognitiver Aspekt interpretiert.

- Umgang mit dem Begriff, obwohl formales Wissen nur begrenzt vorhanden ist
 - Bspw. zu Beginn einer Unterrichts-Sequenz während der Einleitung bzw. der Hinführung zu einem (neuen) Thema oder bei der propädeutischen Behandlung von Begriffen (z.B. des Grenzwertbegriffs) in niedrigeren Klassenstufen, bevor formale Definitionen bekannt sind, kann dennoch ein „Gefühl“ (→ implizite Komponente) für Begriffe und Mechanismen entwickelt werden, die im Folgenden ohne Kenntnis der formalen Definition genutzt werden. Metakognitive Erfahrungen können im Umgang mit diesen entwickelt und ggf. bewusst reflektiert werden; das eigene Verständnis für diese Inhalte kann beurteilt werden. Dies könnte bspw. geschehen, indem sich Lernende bewusst fragen, ob sie ein bestimmtes Thema verstanden haben, wo überhaupt die Grenzen dieses

Themas liegen, woran sie erkennen können, ob sie dieses verstanden haben bzw. "wie sehr/ wie tief/ wie gut" sie es durchdrungen haben und was genau das für sie selbst (individuell) heißt.

- Diese Erkundung eigenen Wissens und Verständnisses ohne die oder zusätzlich zur Kenntnis formaler Definitionen könnte möglicherweise bei der Entwicklung einer „Intuition“ und damit verbunden zu einem „Gefühl“ für die Analyse unbekannter Problemstellungen und für die Nutzung heuristischer Lösungsansätze führen.

2. Stufe: Der Begriff als Träger von Eigenschaften

Dies ist die Stufe des **inhaltlichen Begriffsverständnis**. Lernende kennen den Begriff der „absoluten Änderung“. Sie haben auf geometrischer Ebene ein Verständnis für den Grenzwertprozess beim Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotient und können dieses unter Verwendung des Begriffs der Steigung (von Sekanten und Tangenten) erläutern. Es ist bekannt, dass die Ableitungsfunktion als Funktion selbst wiederum abgeleitet kann; dies verbinden die Lernenden mit dem Begriff der „höheren Ableitung(en)“. Sie kennen grundlegende Ableitungsregeln und können diese verwenden.

→ Metakognitive Ansätze:

- Interpretation und Vereinbarung verschiedener Darstellungen und Beurteilung der eigenen Interpretation im Hinblick auf Aufgabenwissen über Mathematik (bzw. zum jeweiligen Thema)
 - Darstellungen (die ja verschiedene Darstellungsformen von Wissen sind) müssen interpretiert, verglichen und auf ihren Informationsgehalt hin überprüft werden; es muss analysiert werden, welche Informationen in welcher

Darstellung enthalten sind, wie diese aus ihr gewonnen werden können und wie sie miteinander zusammenhängen. Es ist eine „Übersetzung“ zwischen verschiedenen Darstellungen von Wissen zu leisten. Das eigene Verständnis für dieses Wissen muss analysiert und evaluiert werden und die Angemessenheit der eigenen Interpretationen muss vor dem Hintergrund des bestehenden Wissens (Fachwissen, metakognitives Aufgabenwissen) beurteilt werden.

- Begreifen von Funktionen und Ableitungen als Teile des Systems Mathematik
 - Im Sinne des Systemwissens (vgl. Kapitel 4.2) gilt es, (neues) Wissen (über Begriffe und Methoden) in bestehendes Wissen zu integrieren und entsprechende Begriffe, Zusammenhänge und Möglichkeiten als Teile des Systems (lokal) zu ordnen (vgl. etwa Greefrath et al., 2016, S. 9), indem deren Bedeutung analysiert und evaluiert wird (Analyse und Beurteilung, vgl. Kapitel 4.2), Erfahrungen beim Umgang mit diesen Begriffen reflektiert und Erkenntnisse mit metakognitivem Aufgabenwissen in Beziehung gesetzt werden.

3. Stufe: Der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes

Dies ist die Stufe des **integrierten Begriffsverständnis**. Lernenden ist bewusst, dass zwischen den Eigenschaften einer Funktion und denen ihrer Ableitungen Zusammenhänge bestehen und sie sind in der Lage, diese Information zur Bearbeitung von Problemen nutzen. Bspw. sind Zusammenhänge zwischen der Ableitung einer Funktion und dem Monotonieverhalten des Funktionsgraphen bekannt und können zur Berechnung von Extremwerten genutzt werden. Im

Folgendes sind die Lernenden imstande, dieses Wissen auch auf die Berechnung von Wendepunkten zu übertragen. Außermathematische Bezüge des Ableitungsbegriffs können erkannt werden.

Die Lernenden können zwischen globaler Differenzierbarkeit einer Funktion (als Objekt) und lokaler Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 und in deren Umgebung unterscheiden.

→ Metakognitive Ansätze:

- Bewusstsein für Eigenschaften und deren Konsequenzen sowie die gezielte Nutzung dieser für die Entwicklung von Problemlöseansätzen o.Ä.
 - Die Bedeutung von Wissen, Inhalten, Zusammenhängen kann insbesondere im Hinblick auf ihren Nutzen für zukünftige Prozesse überdacht werden; inwiefern (neue) Inhalte und (neues) Wissen bei der Planung (vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) zukünftiger Aufgaben-Bearbeitungen nützlich sein können. Die Bedeutung von Fachwissen und metakognitivem Aufgaben- und Strategiewissen für den eigenen Umgang mit Mathematik (z.B. im Unterricht) kann reflektiert werden und kann das metakognitive Personenwissen erweitern.
- Zusammenhänge, Gemeinsamkeiten, Unterschiede erkennen und analysieren
 - Wie bereits zuvor gilt es, die Zusammenhänge zwischen kognitiven Inhalten zu analysieren und zu interpretieren und sich ihre Bedeutung für den Umgang mit Mathematik klarzumachen.
- Einordnung von Wissen im eigenen Wissen und im System Mathematik
 - Wie bereits zuvor muss eigenes Wissen (Fachwissen, metakognitives Aufgabenwissen) im Rahmen des

größeren Systems (durch Analyse, Evaluation, Reflexion, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) eingeordnet werden, um das eigene Systemwissen zu erweitern (vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7).

4. Stufe: Der Begriff als Objekt zum Operieren

Dies ist die Stufe des **formalen Begriffsverständnis**. Die Lernenden beherrschen nun formal korrekte Definitionen und können diese im Rahmen von Beweis-Prozessen nutzen. Sie sind in der Lage, die Ableitung zu berechnen – auch für Exponential-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen. Eine globale

Sichtweise des Ableitungsbegriffs ermöglicht die Interpretation der Ableitungsfunktion und ihres Graphen als eigenständige Objekte, mit denen operiert werden kann.

→ Metakognitive Ansätze:

- Vereinbarung von intuitiven und formalen Sichtweisen
 - Es kann analysiert und reflektiert werden, inwiefern sich ein intuitives Verständnis vom Verständnis einer formalen Definition unterscheidet und inwiefern und wobei ersteres nicht ausreicht bzw. wobei ersteres dennoch von Nutzen sein kann; der Nutzen beider Sichtweisen kann beurteilt und verglichen und bereits planend für zukünftige Prozesse „gespeichert“ werden. Es spielen also bspw. die metakognitiven Aspekte Beurteilung/Analyse, Planung, Reflexion sowie Systemwissen (Aufgaben- und Strategiewissen) eine Rolle.

- Beurteilung auf Korrektheit und Angemessenheit unter Berücksichtigung der formalen Definitionen
 - Vgl. „Beurteilung“, Kapitel 4.2, Anhang
- Globaler Überblick über das System Mathematik, umfangreiche Beherrschung von Methoden und gezielte Auswahl auf Grund von strategischen Reflexionen
 - Vgl. „Systemwissen“, Kapitel 4.2

5. Stufe: „kritisch“ oder „strukturell“

Dies ist die Stufe des **strukturellen**, bzw. **kritischen Begriffsverständnis**. Die Konstruktionsprozesse, die zum Ableitungsbegriff führen, können überblickt und erläutert werden. Diesbezügliche Überlegungen, Ziele und Schwierigkeiten können reflektiert werden; das entsprechende Wissen wird genutzt, um eigene kognitive (Lern-)Prozesse zu verbessern.

→ Metakognitive Ansätze:

Diese Stufe des Begriffsverständnisses scheint bereits inhärent metakognitiver Natur zu sein. Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass in der höchsten theoretischen Ausprägung dieser Stufe, wie sie vermutlich von Expert_innen erreicht wird, quasi (stoff)didaktisches Wissen über den Begriff vorliegen sollte – Wissen über Aspekte von Begriffen und ihre Bedeutung in einem geordneten System sowie über (Grund-)Vorstellungen und darüber, wie diese den formalen Definitionen (individuell) Sinn verleihen (vgl. „sense-making“, Kapitel 4.2, Abbildung 7), bzw. wie dieser Sinn durch Analyse und Reflexion konstruiert/ interpretiert werden kann.

Die Bedeutung dieses Wissens ist bewusst; eigene Kognition wird entsprechend verstanden und gezielt gesteuert (vgl. exekutive Komponente, Kapitel 4.2, Abbildung 7). Auch Wissen über etwaige

Fehlvorstellungen oder bspw. Über-Generalisierungen kann bekannt sein und genutzt werden.

Zur Entwicklung metakognitiver Einsichten beim Verstehen

Metakognitive Aspekte finden sich, wie angedeutet, in allen Stufen des Vollrath'schen Schemas wieder. Allerdings lässt sich auch auf metakognitiver Ebene ein Steigerungs-Prozess erkennen. Dieser lässt sich durch einen zunehmenden Überblick (über Zusammenhänge, Möglichkeiten, Grenzen, Bedeutung des Begriffs und seiner Nachbarbegriffe) über das entstehende Begriffsnetz, einen zunehmend bewussten und reflektierten (gedanklichen) Umgang mit dem Begriff, sowie eine zunehmend aktive, bewusste Steuerung der mit dem Begriff vorgenommenen (kognitiven) Handlungen (im Begriffsbildungsprozess, in Problemlöse- und Modellierungsprozessen) charakterisieren. Die „höchste“ Stufe des Begriffsverständnisses zeichnet sich damit also vor allem durch einen reflektierten und reflektierenden, aktiv selbststeuernden Umgang mit mathematischen Begriffen und damit eine hohe Flexibilität und Transferfähigkeit bei der Bewältigung von (mathematischen, kognitiven) Herausforderungen aus. Lernende, die diese Stufe erreichen, sollten sich solchen Herausforderungen demnach nicht „hilflos“ gegenübersehen, sondern sich (kognitiver und metakognitiver) Mechanismen und Strategien bewusst sein, mit denen diese Herausforderungen (auch unbekannte!) bewältigt oder zumindest „in Angriff genommen“ werden können. Sie sollten in der Lage sein, zu analysieren, zu beurteilen, einzuordnen und zu strukturieren, zu planen, zu überwachen, zu überprüfen und zu reflektieren und Konsequenzen zu ziehen. Sind Lernenden der Begriff Metakognition und sein Nutzen bekannt, so sollten sie sich dieser Handlungen und ihrer Bedeutung bewusst sein und sie bewusst und gezielt einsetzen, um den jeweiligen Prozess nicht nur zu steuern, sondern diese Steuerung wiederum zu überwachen.

Des Weiteren stellt sich bei einem derartigen Stufenschema die Frage, wie Lernende im Verlauf ihres Entwicklungsprozesses von einer Verständnis-Stufe auf die nächste gelangen können, bzw. wie sich im Rahmen eines spiralförmigen Durchlaufens die Beherrschung „niedrigerer“ Stufen durch die auf höheren Stufen gewonnene Erfahrung und Kompetenz „nachträglich“ verbessern kann. Während sich entsprechende Fähigkeiten (und Verständnis) durch den Umgang mit der entsprechenden Mathematik im Unterricht (Schule, Universität) mit der Zeit vermutlich entwickeln und so den Übergang von einer auf die nächste Stufe quasi

„unbewusst“ ermöglichen, sollte gerade eine bewusste, reflektierende Herangehensweise an den eigenen Lernprozess und eine bewusste Überwachung des eigenen Verständnisses in Bezug auf die mathematischen Inhalte diesen Übergang erleichtern können. Werden Anforderungen und Verständnis-Lücken als solche erkannt und können beurteilt werden, und werden neue Erkenntnisse, bzw. Verbesserungen im Verständnis oder bei der Bewältigung dieser Anforderungen bewusst wahrgenommen, so sollte sich der Entwicklungsprozess effektiver, effizienter und schneller gestalten, da die Lernenden diesen Prozess gezielt steuern und den unterrichtlichen Anforderungen und ihrem Verständnis anpassen können.

Es wird in dieser Arbeit angenommen, dass ein – unter anderem – auf Anschauung, Prototypen und Beispielen aufbauender (formal unvollständiger) Zugang zur Analysis (und Mathematik) stark subjektiv geprägt sein dürfte; welche konkreten Prototypen, Repräsentanten, Vorstellungen, bis hin zu „Eselsbrücken“ und Hilfskonstruktionen beim Individuum auf Grund seines individuellen Lernprozesses vorliegen, dürfte sehr unterschiedlich sein. Eng verbunden sein dürfte dies mit den individuellen (metakognitiven) Erfahrungen, die beim Umgang mit Mathematik gemacht wurden. Um diese präformalen und den Formalismus ergänzenden Vorstellungen (etc.) mit einem formal korrekten und vollständigen Zugang zu Mathematik zu verbinden (wie es zumindest bei Studierenden mathematischer Studiengänge der Fall sein sollte), dürfte ein gewisser (metakognitiver!) Überblick über die eigenen nicht-formalen Vorstellungen nötig sein sowie ein Überblick über formales Wissen. Diese beiden Zugänge (Denkweisen, „Wissensarten“) schließlich bewusst zu verbinden, sollte also ein hohes Maß an Metakognition erfordern, da eigene Vorstellungen, eigenes Verständnis, eigene Sinnkonstruktionen interpretiert und mit formalem Wissen verbunden werden müssen. Es sollte also sozusagen eine Übersetzung (vgl. Kapitel 4.2, Kapitel 4.3 und Anhang) zwischen diesen beiden Zugängen stattfinden, die als kognitiver Vorgang gesteuert werden muss.

Grundvorstellungen aus metakognitiver Sicht

Diese Annahme eines subjektiv – oder „individuell“ – geprägten Zugangs zum Verständnis von Mathematik findet sich auch direkt in der moderneren Fachliteratur. Greefrath et al. (2016) nennen als Ziele von Mathematikunterricht im Hinblick auf Begriffe den Aufbau tragfähiger Vorstellungen, die Entwicklung einer inhaltlichen Bedeutung fachlicher Aspekte und den damit einhergehenden verständnisvollen Umgang mit diesen Begriffen. Die Frage, wie diese Ziele verstanden, konkretisiert und operationalisiert werden können, findet ihre Antwort in der Theorie der Aspekte und Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016, S. 16). Laut Rudolf vom Hofe (1995, S. 98) schaffen Grundvorstellungen „Beziehungen zwischen Mathematik,

Individuum und Realität“. Auch hier wird deutlich, dass einerseits eine individuelle Komponente eine Rolle spielt und damit Metakognition bei der Ausbildung eigener (wenn auch von Seiten der Lehrkräfte so gewünschter und entsprechend gesteuerter) Vorstellungen von Nutzen sein sollte. Andererseits zeigt sich hier als Ziel der Vermittlung von Grundvorstellungen eine Vernetzung von Wissen, ein Überblick über Wissen – Fachwissen, Weltwissen – in Verbindung zur eigenen Person, bzw. zur eigenen Kognition.

Umgekehrt bietet das Konzept der Grundvorstellungen und der damit verbundenen Perspektiven auf einen Begriff die Möglichkeit zur Diagnose und dazu, Fehlvorstellungen frühzeitig zu erkennen und zu beheben (Greefrath et al., 2016, S. 20). Diese Vorgänge, die sich direkt auf die Analyse, Überprüfung und Korrektur eigener Kognition beziehen, lassen sich kaum anders als „als Metakognition“ interpretieren.

Formale Definitionen werden durch den Aufbau von Grundvorstellungen mit Sinn versehen, wobei umgekehrt bestehende Vorstellungen durch Kenntnis und Verständnis der Definition erweitert und präzisiert werden können (Greefrath et al., 2016, S. 50). Auch hier sehe ich den Nutzen oder sogar die Notwendigkeit von Metakognition, die bei der Analyse, Anpassung, Erweiterung etc. eigener Kognition (in Form von Wissen, Vorstellungen, etc.) zum Tragen kommt.

Kategorisierung von Wissen durch Grundvorstellungen

Auch wenn die von Greefrath et al. (2016) gegebene Antwort auf obige Fragen – Aspekte und Grundvorstellungen – sich im Bereich der Stoffdidaktik bewegen und fachliche „Aspekte“ von Begriffen und gewünschte normierte, einheitliche („universelle“) Grundvorstellungen, die von Lernenden zu entwickeln sind, beinhaltet und somit über Definitionen hinausgeht, ohne dabei den Anspruch der Allgemeinheit und Beurteilbarkeit hinter sich zu lassen, spielen auch „individuellere“ Mechanismen eine Rolle bei der Beantwortung dieser Fragen – in Form der sogenannten „individuellen Grundvorstellungen“; abgesehen davon, dass sich bereits die Frage, wie sich universelle Grundvorstellungen entwickeln (lassen), ohne Metakognition vermutlich nicht beantworten lassen wird. Schließlich sind Begriffe wie „Verständnis“ und „Bedeutung“ allem Anschein nach nur schwer zu normieren und allen Lernenden auf die gleiche Weise mit dem gleichen Erfolg zu vermitteln.

Auch Büchter und Henn (2010) betonen die Wichtigkeit tragfähiger **individueller** Vorstellungen (S. 20), die nach hiesiger Auffassung eine metakognitive Überwachung des Lernprozesses und der mit ihm verbundenen Vorstellungen förderlich machen. Gerade in Bezug

auf die Analysis äußern Büchter und Henn (2010) explizit, dass „die Betrachtung eines funktionalen Zusammenhangs in einer realen Situation immer auch subjektiv“ (S. 10) sei. Ein solcher subjektiver Anteil am Umgang mit Mathematik lässt sich als Ansatzpunkt für Metakognition interpretieren, da bei einer solchen Betrachtung metakognitive Erfahrungen gemacht und individuelle (Grund-)Vorstellungen entwickelt werden müssen, die zum eigenen (Vor-)Wissen, zum (neuen) Begriff und zur (neuen) Situation in Beziehung gesetzt werden müssen. Insbesondere die im Lauf des Lernprozesses gemachten metakognitiven Erfahrungen, die über die deklarative Kenntnis von Definitionen hinaus Eindrücke und intuitives Wissen schaffen, sollten für die Ausbildung subjektiver Aspekte im Begriffsbildungsprozess von Wichtigkeit sein.

Gerade im Hinblick auf individuelle (Grund-)Vorstellungen kann angenommen werden, dass ein Überblick über eigenes Wissen notwendig ist, also darüber, welche Vorstellungen man selbst mit einem Begriff verbindet – inklusive prototypischer Repräsentanten, aber auch inklusive weiterer Bezüge wie „Negativbeispiele“, eigener Erfahrungen und Sicherheit oder Schwächen im Umgang mit dem Begriff.

Individuelle Grundvorstellungen, die nach Greefrath et al. (2016, S. 18 ff.) aus „persönlichen Lernprozessen“ entstehen, scheinen daher – wie gesagt – einen engen Bezug zum Personenwissen und zum Aspekt der metakognitiven Erfahrungen zu haben.

Würden Lernende aktiv in den Lernprozess eingebunden, indem ihnen das Konzept der Grundvorstellungen – auf eine angemessene Art – nahegebracht würde, indem also didaktisches Wissen und daraus resultierende Unterrichtsziele mit den Lernenden geteilt werden, ließe sich Metakognition nutzen, um genau diese Ziele zu erreichen; Lernende könnten also den eigenen Lernprozess aktiver mitgestalten und selbstständig überwachen. Dies ließe sich in entsprechend altersgerechter Weise vermutlich auf jeder Stufe zumindest ansatzweise durchführen – und wird vermutlich auch durchaus genutzt – scheint mir aber gerade in der Sekundarstufe II und vor allem im Hochschulbereich sehr sinnvoll. Im Rahmen eines Lehramtsstudiums sind didaktische Inhalte ohnehin zentral (oder sollten es wohl sein), wobei sich diese auch – zum Zweck selbstregulierten Lernens im Studium – sicher in Fachstudiengänge übertragen ließen, soweit dies für die Studierenden von Nutzen sein könnte.

Die „Beobachtung von Lernenden beim Arbeiten und die Analyse von mündlichen oder schriftlichen Schüleräußerungen“ erlaubt es nach Greefrath et al. (2016, S. 18 ff.), auf individuelle Grundvorstellungen bei Lernenden zu schließen. Hier lässt sich folgern, dass

Metakognition auf Seiten der Lehrenden notwendig sei, da es einerseits gilt, aus dem Verhalten der Lernenden auf deren dahinter liegende Kognitionen zu schließen; andererseits sollte es hilfreich sein, ein gutes Verständnis eigener Kognition zu haben, um diese zum Vergleich nutzen zu können. Andererseits zeigt sich hier auch eine Möglichkeit, auf die „dahinterliegende“ Metakognition zu schließen, die ja in engem Zusammenhang mit besagten individuellen Vorstellungen steht und ihrerseits nur schwer direkt untersuchbar ist.

Insbesondere im Hinblick auf „sekundäre Grundvorstellungen“ (vgl. Greefrath et al., 2016), bei deren Entstehung „neue“, bisher unbekannte Begriffe mit bestehenden Vorstellungen verbunden werden, sollte Metakognition im Sinne eines guten Überblicks über das eigene Fachwissen von Nutzen sein.

Es wird deutlich, dass das Konzept der Grundvorstellungen mit der Bedeutung von Begriffen über Definitionen hinaus und entsprechender individueller Begriffsbildung und Sinngebung, mit Perspektiven und Transfer sowie mit dem Versuch einhergehen, Fachwissen und Denkprozesse zu kategorisieren. Die Vermittlung und Ausbildung von Grundvorstellungen – nicht zuletzt die Ausbildung individueller Grundvorstellungen – scheint mir daher ein metakognitiv „aufgeladenes“ Thema zu sein, das zahlreiche Ansatzpunkte zur Analyse, Überwachung und Steuerung von Kognition bietet, aber auch eine Möglichkeit darstellt, Lernenden – sofern ihnen entsprechendes Wissen explizit vermittelt wird – eine Möglichkeit an die Hand gibt, über ihr Wissen (über Mathematik) nachzudenken, indem dieses in die gewünschten Bahnen (bzw. Vorstellungen) gelenkt wird.

Greefrath et al. (2016, S. 20) betonen die Wichtigkeit von Grundvorstellungen unter anderem für „individuelle Prozesse der Begriffsbildung“, für heuristische Prozesse und im Hinblick auf die Transfer-Fähigkeit – wie angesprochen, zeigt sich meiner Meinung nach die Bedeutung individueller Prozesse (die von Metakognition profitieren können) und von strategischen und Übersetzungsprozessen (vgl. Kapitel 4.3).

Greefrath et al. (2016, S. 20) merken an, dass Begriffe, die mit mehreren Grundvorstellungen verbunden sind, entsprechend „perspektivenreich“ zu vermitteln seien.

Darstellungen im Analysis-Unterricht aus metakognitiver Sicht

Gerade in der Analysis (bzw. im Analysis-Unterricht in der Schule) ist die „parallele“ Verwendung mehrerer Darstellungsformen häufig (symbolisch – graphisch). Hinzu kommt die Existenz der verschiedenen Aspekte, die für die einzelnen Begriffe bestehen, sowie

damit verbundene verschiedene Grundvorstellungen, prototypische Repräsentanten, etc.. Es gilt, diese „Komponenten“ gedanklich zu verbinden, die mit einem Begriff, bzw. Gebiet zusammenhängen. Wie diese Verbindung auf „mathematischer“ Seite auszusehen hat, wird in der entsprechenden Literatur dargelegt, aber die metakognitive Seite dürfte recht subjektiv bleiben. Das eigene Wissen über die in Frage stehenden Begriffe muss überblickt und untersucht werden, eigenes Verständnis muss ergründet werden. Es muss entschieden werden, ob das eigene Verständnis für die Bewältigung von Aufgaben „ausreicht“, ob darauf aufgebaut werden kann. Es muss erkannt werden, welche „Komponenten“ Schwierigkeiten bereiten und welche bereits genügend gefestigt sind. Es muss geplant und entschieden werden, wie der eigene Lernprozess gestaltet, bzw. welche Fragen gestellt werden müssen, um diese Defizite auszugleichen, bzw. „voranzukommen“.

Dem Arbeiten mit verschiedenen Darstellungsformen (insbesondere unter Verwendung digitaler Technologien) kommt in der Analysis (im Analysis-Unterricht) eine große Bedeutung zu; dies erfordert „wechselseitige Transferfähigkeiten“ (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 7 ff.).

Im Hinblick auf Funktionen und Folgen und insbesondere den Grenzwertbegriff ist der Wechsel zwischen verschiedenen Aspekten und Perspektiven essenziell, die überblickt, verglichen und auf Angemessenheit hin überprüft werden müssen.

„[...] wie statische und dynamische, intuitive und formale Sichtweisen im fortwährenden Wechsel auftreten [...]“ (Greefrath et al., 2016, S. 74, zum Thema „Folgen“)

„Funktionen haben viele Gesichter“ (Herget et al. (2000) in Büchter & Henn, 2010, S. 35)

In Bezug auf die Verwendung verschiedener Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge betonen Greefrath et al. (2016, S. 56) die Fähigkeit (und deren Entwicklung bei Lernenden), diese „flexibel“ und „problemorientiert“ zu nutzen und „zielorientiert“ zwischen ihnen zu wechseln. Stichworte wie „flexibel“, „problemorientiert“, „zielorientiert“ und „wechseln“ deuten für mich die Notwendigkeit von Metakognition an, die es erlaubt, die es durch Aspekte wie Planung, Analyse, Überwachung, etc., bzw. insgesamt durch die Steuerung von Kognition, erlaubt, über einfache Wenn-Dann-Algorithmen hinweg flexibel (kognitiv) zu agieren, die eigenen (kognitiven) Handlungen dem Problem anzupassen, Ziel und Zweck im Blick zu behalten, bzw. die Problem-Struktur insgesamt zu erkennen und zu überblicken und dementsprechend Strategien auszuwählen.

„[...] Schlüssel zur Lösung [...] genau im kompetenten Wechsel dieser Darstellung“ (Büchter & Henn, 2010, S. 30)

Welche Art der Darstellung im konkreten Fall verwendet wird, hängt nach Büchter und Henn (2010, S. 35) einerseits davon ab, welche Informationen (also auch welches Wissen) vorliegen, und davon, welche Fragestellung, bzw. welches Ziel verfolgt wird. Metakognitiv dürfte also zu klären sein, über welches Wissen man selbst verfügt und welchen (→) Sinn dieses im Hinblick auf die Aufgabenstellung/ Zielsetzung für einen selbst ergibt. Dazu sollten Aufgaben- und Personenwissen, ein Überblick über das eigene kognitive System und ein (→) Gespür für das eigene Verständnis notwendig sein. Im Hinblick auf die Zielsetzung muss unter Rückgriff auf die vorliegenden Informationen geplant und entsprechend strategisch (→ Strategiewissen) die angemessene Darstellungsart (oder auch mehrere) ausgewählt werden.

Laut Büchter und Henn (2010, S. 35) sollten neben den Schwächen und Stärken, die einer Darstellungsart innewohnen (und die in Bezug auf die Problemstellung entsprechend (metakognitiv strategisch) ausgewählt werden müssen) auch die individuellen „Präferenzen“ und Stärken und Schwächen der eigenen Person beachtet werden (was per Definition im Bereich des metakognitiven Personen- und Aufgabenwissens liegt). Entsprechend – so Büchter und Henn (2010, S. 36) werden dann unterschiedliche Darstellungsarten bevorzugt verwendet. Dieselbe Argumentation sollte meiner Ansicht auch für die Bevorzugung bestimmter Grundvorstellungen und Aspekte je nach Ziel, Informationen, aber auch nach individuellen Präferenzen, Schwächen und Stärken gelten.

Zwischen verschiedenen Darstellungsarten kann entsprechend „übersetzt“ werden, bzw. ein Darstellungswechsel vollzogen werden, was für den kompetenten Umgang mit (in diesem Fall) Funktionen entscheidend ist (Büchter & Henn, 2010, S. 36). Dieses „gedankliche Umschalten“ scheint mir – vor allem dann, wenn es bewusst oder absichtlich geschieht – in den Bereich Metakognition zu fallen, da hier einerseits die Notwendigkeit eines solchen kognitiven Perspektivwechsels erkannt wird (Strategie-, Aufgaben-, Personenwissen sowie Überwachung) als auch die entsprechenden Steuerungsmaßnahmen der eigenen Kognition eingeleitet werden, die diesen Wechsel planen, überwachen und überprüfen.

Büchter und Henn 2010, S. 36) betonen dabei auch Übersetzungsvorgänge zwischen verbalen und anderen Darstellungen, die im Rahmen von Modellierungsprozessen vorkommen – also das Mathematisieren und Interpretieren – was einerseits die Bedeutung von Metakognition für die Modellierung hervorhebt und andererseits auf die metakognitive Analyse von (eigener)

Sprache als kognitiver Funktion eingeht.

[Nicht umsonst handelt es sich bei der mathematischen Modellierung und bei der Entwicklung von Lese-Fähigkeiten um zwei der am intensivsten im Zusammenspiel mit Metakognition beforschten (fachdidaktischen) Untersuchungsbereiche.]

Beispielsweise sollte es metakognitive Aufmerksamkeit erfordern, zwischen verschiedenen Aspekten einer Funktion (Zuordnungs-, Kovariations-, Objekt-) zu unterscheiden und sie gedanklich zu vereinen, da hierzu „intern“ die eigene Interpretation dieser Aspekte geklärt und z.B. erkannt werden muss, auf welche dieser Aspekte eine verbale Aufgabenbeschreibung hindeutet.

Je nach Situation den jeweils angemessenen Aspekt zu erkennen, eine Funktion diesem entsprechend anzuwenden und ggf. flexibel zwischen den Aspekten zu wechseln, dürfte Aufgaben- und Strategiewissen erfordern sowie konzentriertes Überwachen und Steuern der eigenen Kognition.

Greefrath et al. (2016, S. 13) messen außerdem insbesondere der digital unterstützten Verwendung verschiedener Darstellungsformen und dem Transfer zwischen diesen große Bedeutung bei der Entwicklung „multimodaler Vorstellungen über Begriffe“ bei.

4.4.2. Metakognitive Ansatzpunkte bei zentralen Begriffen der Analysis

Bei den folgenden Ausführungen handelt es sich um exemplarische Beschreibungen, wie die Auseinandersetzung mit zentralen Begriffen der Analysis und den zugehörigen Überlegungen, Handlungen und Aufgabenstellungen metakognitiv „begleitet“ werden kann. Im Mittelpunkt stehen dabei der Begriff der Ableitung und die darauf aufbauende Extremwert-Berechnung; des Weiteren die Begriffe Grenzwert und Integral. Bei diesen Betrachtungen handelt es sich um eine einerseits fachliche Analyse, die andererseits mögliche metakognitive Ansatzpunkte und Aspekte in einem praktischen Kontext direkt am Begriff, bzw. im Prozess beispielhaft aufzeigt. Vielfältige andere „Begleitungen“ sind denkbar und mit Sicherheit je nach Individuum unterschiedlich.

Wie bereits angesprochen und in der einschlägigen Literatur betont (s. Kapitel 2.1.5), ist dabei zu beachten, dass auch die beschriebenen fachlichen Prozesse und das entsprechende Fachwissen zwar fachlicher Natur sind, dass „hinter“ ihnen allerdings optimalerweise metakognitives Wissen und metakognitive Vorgänge stehen, die die fachliche „Performance“ informieren und begleiten und die zur gezielten Auswahl der entsprechenden fachlichen Maßnahmen sowie insgesamt zur Steuerung der fachlichen Arbeitsprozesse entscheidend beitragen. Insofern wurde zwar versucht, metakognitive Aspekte explizit zu benennen, doch kann – meiner Ansicht nach – bei den allermeisten nicht-routinierten Handlungen angenommen werden, dass diese einen metakognitiven „Hintergrund“ (im Sinne von Wissen über das Fachwissen, im Sinne von beurteilenden Prozessen, die zu Entscheidungen führen, etc.) haben. Dass dies vermutlich nur in einem theoretischen Idealfall tatsächlich zutrifft, bzw. nur von entsprechenden Expert_innen so praktiziert wird (die ihrerseits wiederum einen großen Teil ihrer Metakognition „routiniert“ haben dürften), sollte klar sein; nicht umsonst bestehen in dieser Abwesenheit von metakognitiver Steuerung und Überwachung „in der Praxis“, bzw. im Realfall, Defizite beim Umgang mit Mathematik: sowohl bei der Vermittlung durch Lehrende als auch bei Lernenden und Mathematik-Praktizierenden (vgl. Kapitel 2.2.2 und Kapitel 2.2.3).

Im Folgenden werden entsprechende metakognitive Aspekte und Ansatzpunkte im Text entsprechend gekennzeichnet und ggf. in Klammern (\rightarrow ...) annotiert; die dabei verwendeten Begriffe beziehen sich auf die in Kapitel 1.4 eingeführten und die im vorgestellten Kategoriensystem (vgl. Kapitel 4.2, Abb. 7, S. 183 ff.) verwendeten und erläuterten Begrifflichkeiten sowie teils auf das Kapitel 4.3 und den Anhang.

Metakognitive Aspekte und Ansatzpunkte bei der Einführung des Ableitungsbegriffs

Als zentrale Begriffe der Analysis – insbesondere im aktuellen Mathematikunterricht an Gymnasien – stellen der Vorgang des Differenzierens und die Ableitung(sfunktion) Ansatzpunkte für Metakognition dar. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten sowie – graphisch interpretiert – als Wert Steigung der Tangenten, die wiederum als Grenzwert von Sekanten(steiigungen) interpretiert werden kann, „teilt“ gewissermaßen unter verschiedenen Blickwinkeln Eigenschaften (und damit für Lernende wie Lehrende auch potentielle Herausforderungen und Verständnis-Probleme) des Grenzwertbegriffs. Das

Wahrnehmen der Ableitung als Grenzwert (und nicht „nur“ als ein Objekt, für das Berechnungs-Regeln und Verwendungszwecke existieren) dürfte für Schülerinnen und Schüler vor allem bei der Einführung des Begriffs und der damit eingeleiteten Begriffsbildung eine große Rolle spielen – gerade dann, wenn auch zur Berechnung der Ableitung noch kein Kalkül bekannt ist. Während die „klassische Kurvendiskussion“ sich oftmals durch kalkülhafte Beherrschung (und routiniertes „Abspulen“) des entsprechenden „Ablaufplans“ bewältigen lässt, liegt der Fokus des aktuellen Analysis-Unterrichts stärker in den Bereichen Begriffsverständnis, Problemlösen und Modellieren, was nicht zuletzt durch die Entwicklung im Bereich des Technologieeinsatzes (DGS, CAS) begünstigt wurde und wird. Rücken im Unterricht algorithmische Tätigkeiten stärker in den Hintergrund, dürften auch nach der Einführung des Ableitungsbegriffs dessen Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff und entsprechende Überlegungen im Zusammenhang mit wenig kalkülhaften Aufgabenstellungen eine große Rolle spielen.

Im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff nennen Greefrath et al. (2016, S. 147, Abb. 4.5 „Aspekte und Grundvorstellungen in der Differenzialrechnung“) bspw. zwei Aspekte und vier Grundvorstellungen:

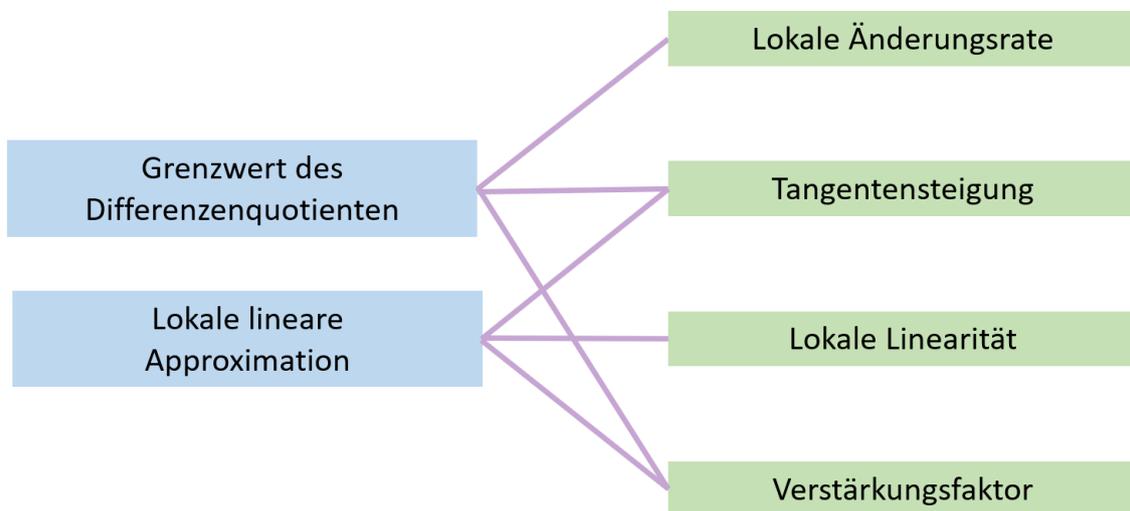


Abbildung 8: Aspekte und Grundvorstellungen in der Differenzialrechnung

Während im derzeitigen Analysis-Unterricht (in Bayern) der Aspekt der linearen Approximation sowie die Verstärkungs-Grundvorstellung eine untergeordnete Rolle spielen,

sind mit der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung eine anwendungsbezogene und eine geometrie-bezogene Vorstellung unterrichtlich relevant. Zu einem möglichst ganzheitlichen Verständnis des Begriffs ist es sicher wünschenswert, dass zumindest dieser Aspekt und diese zwei Grundvorstellungen von den Lernenden gedanklich miteinander verknüpft werden (können), um in inner- wie außermathematischen Problemstellungen einen flexiblen Umgang mit dem Begriff zu ermöglichen.

Der häufig gewählte Zugang zum Ableitungsbegriff über die Sekanten- bzw. Tangentensteigungen stellt einen geometrischen Zugang dar, bei dem „natürlicherweise“ die Wechselbeziehungen verschiedener Darstellungen (nämlich der graphischen, geometrischen und der algebraischen, symbolischen – Steigungsdreieck und Differenzenquotient) eine Herausforderung darstellen. Eng verknüpft mit der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ und der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“, stellt dieser Zugang auch Anforderungen an die Metakognition von Lernenden. Zur Begründung dieser Behauptung werden im Folgenden Ansatzpunkte für Metakognition aufgezeigt. Die Ableitung als Begriff ist zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt (sie wird ja gerade erst eingeführt). Insofern ist die **metakognitive Überwachung** des gesamten Vorgangs, der letztlich zur Ableitung hinführt, von Bedeutung. Das eigene **Verständnis** sollte währenddessen **überwacht** werden (→ Überwachung/Monitoring), um **Verständnislücken** sofort beim Entstehen zu **erkennen** (→ Überwachung und Awareness) und ggf. nachfragen zu können (→ Bewertung und Auswahl von Hilfen), um zu verhindern, dass man im Gedankengang den Anschluss verliert. Das Ziel – oder zumindest Etappenziele – des Hinführungsprozesses muss, bzw. müssen als solche erkannt und begriffen (→ Analyse und Überwachung des Prozesses sowie Awareness) werden und es muss analysiert (→ Analyse) werden können, inwieweit die vorgenommenen Teilschritte des Prozesses miteinander zusammenhängen und schließlich zum gewünschten Ziel führen. Hier werden also metakognitives Aufgaben- und Strategie- bzw. Systemwissen angesprochen, um neue Inhalte mit bekannten zu verknüpfen und entsprechend **ins eigene Wissens-Netz einzuordnen** (→ Beurteilung, Systemwissen) und die **Bedeutung** von Inhalten und Strategien für die durchgeführten Überlegungen zu **begreifen** (→ sense-making). Bestehendes **Vorwissen** – darunter Wissen über Funktionen und Grenzwertbildung (geometrisch) – kann **aktiviert** und an entsprechender Stelle als relevant erkannt und eingesetzt (→ Beurteilung und strategischer Einsatz von Wissen) werden. Es ist also Metawissen darüber vonnöten, welches Wissen vorhanden ist; Reflexionsprozesse über dieses Wissen (→ Fachwissen sowie metakognitives Aufgaben- und Strategiewissen) können stattfinden (→ Wissen über eigenes Wissen, Analyse

und Bewertung, Nutzen von Wissen und Überwachung des Prozesses). Die Problematik des Übergangs, der die beiden Kurvenpunkte „verschmelzen“ lässt, muss erkannt und durchdacht und schließlich individuell **plausibel gemacht werden** (→ Awareness, Sense-Making). Insgesamt müssen geometrische und algebraische Darstellung miteinander **vereint** werden können, die „**Übersetzung**“ der geometrischen Idee muss im symbolischen Kalkül wiedergefunden werden und es muss reflektiert werden (→ „Übersetzung“, Reflexion eigenen Wissens und Sense-Making, Aufgabenwissen), inwiefern sich der Übergang zwischen Sekanten und Tangenten – also die Grenzwertbildung – symbolisch widerspiegelt. Hierbei muss gedanklich geklärt werden, inwiefern der – geometrisch simpel anmutende – Vorgang der Annäherung zweier Punkte eine algebraische Herausforderung darstellt („Der Nenner darf ja nicht Null werden.“) (→ Sense-Making, Analyse, Bewertung, Aufgabenwissen) und warum die von Seiten der Lehrenden vorgestellte Vorgehensweise dieses Problem tatsächlich lösen kann (→ Analyse des eigenen Verständnisses, Aufgabenwissen, Überprüfung). Die **Bedeutung** des neuen Begriffs für das System Mathematik und für **mögliche Anwendungen** kann **eingeorordnet** werden (→ Systemwissen/ Aufgabenwissen, Einordnung); **Grenzen und Möglichkeiten** des Begriffs im Sinne von domänenspezifischem Aufgabenwissen müssen reflektiert und überblickt (→ Systemwissen) werden. Hierbei kann ggf. (metakognitiv) **auf Vorerfahrungen** mit dem Grenzwertbegriff **zurückgegriffen** werden (und reflektiert werden, wie die bekannten Mechanismen mit der aktuellen Problematik zusammenhängen (→ Systemwissen, Aufgabenwissen, Analyse, Reflexion)); im aktuellen Analysis-Unterricht dürfte dieses Vorwissen allerdings „nur“ intuitiver, informeller Natur sein.

Der Zugang über die lokale Änderungsrate einer Funktion, bzw. die entsprechende Grundvorstellung, ist als anwendungsbezogene Grundvorstellung naheliegenderweise (u.a.) mit der Kompetenz „Modellieren“ verbunden sowie – ohnehin – mit der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“. Gerade der Bezug zu außermathematischen Vorgängen hat hier das Potential, die Entwicklung von Verständnis zu unterstützen (vgl. die Grunderfahrungen nach Winter, Kapitel 4.4.1), stellt aber auch eine zusätzliche (metakognitive) Herausforderung dar. Hier stellt sich bspw. die Frage, ob eine „Momentan-Geschwindigkeit“ (im Fall eines physikalischen Anwendungsbezugs) als solche überhaupt existiert und was diese – insbesondere mathematisch, aber auch in Bezug auf die Erfahrungswelt der Lernenden – bedeutet, wie sie interpretiert werden kann. **Reflexion über eigene Erfahrungen und eigenes Verständnis** sollte hier also unerlässlich sein, um diesen Begriff sinnvoll (ins eigene Wissens-Netz) einzuordnen (→ Einordnung neuer Inhalte ins eigene Wissen, Wissen über und Steuerung von Kognition,

Beurteilung, Sense-Making) und im Folgenden auf ihm aufbauen zu können (→ Nutzen von Wissen bewerten und Konsequenzen ziehen, metakognitives Strategiewissen). Ähnlich wie beim geometrischen Zugang ist ein **Übersetzungsprozess** zu leisten; in diesem Fall zwischen Real-Bedeutung und mathematischer (symbolischer) „Modellierung“ (vgl. Modellierungskreislauf). Gleichzeitig ist der Übergang von Durchschnitts- zu Momentangeschwindigkeit (und damit die Grenzwertbildung) metakognitiv zu begleiten; es muss individuell die Frage geklärt werden, inwiefern dieser Prozess „**sinnvoll**“ ist (also individuell „Sinn ergibt“) und **mit bisherigen Erfahrungen in Einklang gebracht werden** kann (→ Sense-Making, Bewertung, Analyse). Dies geschieht vermutlich sowohl auf intuitiver (→ Abgleich mit und Aufbau von implizitem Metawissen) als auch auf mathematisch-symbolischer Ebene, wobei auch hierbei die Passung (→ Übersetzung) zwischen beiden Ebenen durch Analyse und Reflexion und **Abgleich mit metakognitiven Erfahrungen** in Bezug auf domänenspezifisches Aufgaben- und Strategie-Wissen hergestellt werden muss.

Zusammenfassend ergeben sich, basierend auf dem vorgestellten Modell (Kapitel 4.2, Abbildung 7) – wie bereits (vor allem) in den Kapiteln 1.4, 2.3.1, 2.3.2 und 4.4.1 angedeutet und ausgeführt – obige Überlegungen, welche metakognitiven Aspekte bei der Einführung der Ableitung eine Rolle spielen können. Genannt wurden dabei vor allem die Überwachung des laufenden Denkprozesses, im Rahmen dessen die Bedeutung seines Ziels (die Entwicklung der Ableitung) und die Bedeutung neuer Inhalte für das Erreichen dieses Ziels verstanden und plausibel gemacht werden müssen. Hierzu sind metakognitives Aufgaben- und Strategiewissen zu aktivieren und auf ihrer Grundlage neues Wissen zu integrieren; neue Strategien müssen nachvollzogen und auf ihren Nutzen hin bewertet werden. Was neue Inhalte – wie z.B. neue Begriffe und Techniken – betrifft, sind anschließend vermutlich die Analyse und Reflexion eigener Kognition und eigenen Wissens hilfreich, um zu klären, inwieweit die neuen Inhalte verstanden wurden und wie sie mit bekannten Inhalten in Zusammenhang stehen.

Zum Verständnis des Grenzwertbegriffs

Beim Grenzwertbegriff spielt metakognitiv bspw. die Problematik des „**Sense-Making**“ (Kapitel 4.2) und der Überprüfung auf **Plausibilität** (Kapitel 4.2) eine Rolle. Wie bereits angesprochen, stellt dieser Begriff Anforderungen an Vorstellungskraft und die Fähigkeit zum **Perspektivwechsel**, bzw. dazu, verschiedene Sichtweisen, Darstellungsformen und Bedeutungen desselben Begriffs gleichzeitig vor Augen zu haben, sie gedanklich

miteinander zu vereinen und zu verstehen, inwiefern sie widerspruchsfrei denselben Begriff beschreiben oder Eigenschaften desselben Begriffs sein können. Dass es sich dabei um schwierige Anforderungen handelt, wurde bereits in der Fachliteratur diskutiert (vgl. Kapitel 4.4.1).

Zu einem – möglichst – „umfassenden“ Verständnis des Begriffs, auf dem aufgebaut werden kann, sollten sich Lernende dieser Problematik – zumindest im Verlauf der entsprechenden Unterrichtssequenzen – überhaupt erst bewusst (→ Awareness, vgl. Kapitel 4.2) sein. Hierzu müssen der Begriff und das **eigene Verständnis** des Begriffs **analysiert** werden, **Verständnis-Defizite müssen erkannt** (→ Awareness) und die Art dieser Defizite muss untersucht werden – insbesondere auch auf mögliche Ursachen hin (→ Analyse, Überwachung, Reflexion). Im Folgenden kann – und dies dürfte ein individuell unterschiedlicher Prozess sein, sofern er überhaupt abläuft – von den Lernenden geklärt werden, ob der Begriff und seine Sichtweisen tatsächlich (bereits) **einen „Sinn“ ergeben**, ob bspw. die Eigenschaft des Grenzwerts, Prozess und Produkt gleichermaßen zu sein, **plausibel** (geworden) ist und beide Aspekte – nach eigenem, metakognitivem Ermessen (→ Beurteilung, metakognitive Erfahrungen) – verstanden wurden (→ Analyse des eigenen Verständnisses, Sense-Making, Überprüfung auf Plausibilität, vgl. Kapitel 4.2).

Im Anschluss an diesen Sinnfindungs-Prozess (Sense-Making, vgl. Kapitel 4.2) steht vermutlich die Frage, ob der Begriff auch zur Lösung von Problemstellungen verwendet werden kann. Hierzu muss gedanklich **überprüft** werden, welche Zusammenhänge der Begriff zu konkreten Problemstellungen hat, aber auch, welche Grenzen ihm gesetzt sind. Seine Bedeutung für das System Mathematik und seine Anwendungen (→ Systemwissen, Aufgaben- und Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) muss reflektiert, der Begriff muss in die **eigenen Vorstellungen** zum **System eingeordnet** (vgl. Kapitel 4.2) werden. Übung und die Konfrontation mit möglichst vielen Beispielen sind hier vermutlich unumgänglich, was – mit entsprechender Überwachung und Reflexion der entsprechenden Problemlösungsprozesse – bei Lernenden hoffentlich tragfähige (Grund-)Vorstellungen entwickelt.

Wie einleitend angesprochen, bieten die Einführung eines verständnis-intensiven neuen Begriffs und der Umgang damit Ansatzpunkte insbesondere für die implizite Komponente von Metakognition. Dem neuen Begriff muss **„Sinn“ gegeben** werden und er muss individuell **plausibel** gemacht werden (→ sense-making, Plausibilität). Im Hinblick auf die kognitive Belastung (→ Wissen über Kognition), die durch den Umgang mit wenig bekannten Inhalten entsteht, müssen Denkvorgänge **überwacht** werden, um Denkfehlern und der Entwicklung von

Fehlvorstellungen vorzubeugen (→ Überwachung, Überprüfung, Steuerung von Kognition). Aufbauend auf propädeutischem Wissen zum Grenzwert (→ Wissen über Wissen, Aufgabenwissen) aus früheren Klassenstufen und im Hinblick auf Grenzen, Möglichkeiten und Aufgabenstellungen müssen **Einordnungsprozesse** (→ Beurteilung) stattfinden, die den Begriff im System (Mathematik, Unterricht, Anwendungsmöglichkeiten) verorten (→ Aufgaben-, Strategie-, Systemwissen).

Metakognitive Aspekte und Ansatzpunkte bei der Berechnung von Extrem- und Wendepunkten

Als eine der häufigen (insbesondere schulischen) Anwendungen für den Ableitungsbegriff, die als Teil von Optimierungsprozessen auch in zahlreichen (nicht nur naturwissenschaftlichen und technischen) Studiengängen eine Rolle spielt, ist die Berechnung von Extrem- (und Wende-)Punkten für die Suche nach Ansatzpunkten für Metakognition im (erweiterten) Rahmen des Ableitungsbegriffs von Interesse.

Wie bei anderen anwendungsbezogenen Problemstellungen ist hier bspw. (gedanklich) zu klären, wie sich die theoretischen Eigenschaften (Möglichkeiten, Bedeutungen, Grenzen) des Ableitungsbegriffs zur inner- oder auch außermathematischen Formulierung des Problems verhalten; es ist also ein Übersetzungsprozess (vgl. Kapitel 4.2, Kapitel 4.4.1) zu leisten. So ist bspw. zu erkennen (→ Awareness, vgl. Kapitel 4.2), dass Eigenschaften des Begriffs verschiedene Bedeutungen (je nach Fragestellung) haben können; bspw. ist die Eigenschaft eines Kurvenpunktes, eine waagrechte Tangente zu besitzen – unter gewissen Zusatz-Bedingungen, die ebenfalls **bewusst gemacht werden** (→ Awareness, Sense-Making, vgl. Kapitel 4.2) müssen – gleichbedeutend mit der Eigenschaft, (lokaler) Extrempunkt der Kurve zu sein. Dieser Mehrfach-Bedeutung von Eigenschaften müssen sich Lernende bewusst werden (→ Awareness, vgl. Kapitel 4.2) und sie müssen durchdenken, welche Bedeutungen (→ Aufgaben-, Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2) eine entsprechende Eigenschaft hat, warum sie diese hat, bzw. wie sich diese erklären lassen und wie sie individuell **plausibel** gemacht werden können und zuletzt, wie diese verschiedenen Bedeutungen genutzt werden können, um bestimmte Fragestellungen (und welche) zielorientiert bearbeiten zu können (→ Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2).

Sind obige Fragen durchdacht und die entsprechenden Denkprozesse metakognitiv überwacht und ihre Resultate beurteilt (→ vgl. Kapitel 4.2) worden, so sollte sich die Frage der Operationalisierung dieser Erkenntnisse stellen.

[Es sei erneut angemerkt, dass es sich bei den hier dargestellten Prozessen um Beispiele handelt, wie Lernende bei der Bearbeitung der entsprechenden Fragestellungen vorgehen könnten. Die Reihenfolge der durchgeführten Schritte lässt sich sicher nicht festlegen und dürfte individuell verschieden sein, sofern sie überhaupt durchgeführt werden. Viele Lernende werden vermutlich (noch) nicht in diesem Maße oder nicht bewusst Metakognition betreiben. Ob von Experten-Seite eine „optimale metakognitive Vorgehensweise“ entwickelt werden könnte, ist fraglich, da angenommen werden kann, dass Metakognition von den individuellen (metakognitiven) Erfahrungen, Stärken, Schwächen und „Denkstilen“ beeinflusst wird.

Ebenso ist nicht intendiert, sämtliche Lösungsmöglichkeiten und Vorgehensweisen abzudecken, die aus fachlicher Sicht in Frage kommen. Die Frage, ob man als Lernende alternative Lösungsmöglichkeiten kenne und wie diese zu bewerten und ob sie ggf. zu bevorzugen sind, stellt bspw. einen klassischen Aspekt von Metakognition dar (→ deklaratives Metawissen und Überwachung), der zwar mehrfach genannt wurde und wird, der aber sicher noch viel häufiger auftritt.]

Lernende sollten sich die Frage stellen (→ Reflexion, Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2), welche Konsequenzen sich aus dem erlangten und vorhandenen Wissen für die Entwicklung von Strategien ergeben, bzw. welche Anteile dieses Wissens (→ Reflexion eigenen Wissens, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) sich zur Entwicklung welcher Art von Strategie (bzw. zur Lösung welches Problems) eignen. Dies sind Fragestellungen, die ebenso analysiert und in Beziehung zum bestehenden (spezifischen) Aufgaben- und Strategiewissen gesetzt werden sollten (→ Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7). Der Nutzen (→ System-, Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) einzelner Eigenschaften muss **überprüft** und **beurteilt** werden, was unter Berücksichtigung eines konkreten Ziels geschehen kann. Es können also während der **Reflexionsphasen** gleichzeitig **Überwachungs- und Planungsvorgänge** stattfinden.

Für die folgende Analyse wird der Fall einer in jedem Punkt stetigen, zweimal stetig differenzierbaren und nicht abschnittsweise definierten Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} angenommen, wie sie bspw. im Analysis-Unterricht an Gymnasien vorkommen könnte – z.B. eine Polynomfunktion.

Im Fall der Berechnung von Extrempunkten steht an erster Stelle die Suche nach potentiellen Extremstellen, die von Lernenden als „Kandidaten“ **erkannt** und verstanden werden müssen, die es noch auf ihre – mögliche – Extremal-Eigenschaft hin zu überprüfen gilt (→ Awareness, Aufgabenwissen, Planung, Überwachung). Zuerst können bei dieser Suche bspw. die Ableitung der Zielfunktion berechnet und im Anschluss deren Nullstellen berechnet werden. Dazu kann die Ableitungsfunktion wiederum als Funktion aufgefasst werden, wozu ein Perspektivwechsel vonnöten ist. Sodann ist für die Berechnung von Nullstellen bestehendes **Vorwissen zu aktivieren** und zur Entwicklung, bzw. zur Verwendung der Strategie zu integrieren (→ Reflexion und Steuerung von Wissen, Systemwissen, Aufgaben- und Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7). Dabei sollte die Frage geklärt werden, bzw. bereits klar sein, welche **Bedeutung** Nullstellen (oder ggf. deren Fehlen) für die Frage nach Extremstellen haben (→ Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2) und wie sich bspw. die Nicht-Existenz von Nullstellen bei der Berechnung äußert und welche Konsequenz sie für das weitere Vorgehen hätte (Abbruch, Überprüfung der Rechnung, Fehler-Analyse, Reflexion, Neu-Planung, etc.). Bereits an dieser Stelle ist also eine **Überwachung** sowohl des eigenen **Aufgaben-Wissens** als auch des laufenden Prozesses vonnöten; des Weiteren die **Reflexion und Auswertung** dieses Wissens zur Bildung oder Erinnerung von Strategien (Strategie-Wissen) und im Folgenden das Ziehen von Konsequenzen für eine entsprechende **Steuerung** der eigenen Vorgehensweise.

Hat man Nullstellen gefunden, müssen diese darauf überprüft werden, ob es sich bei ihnen tatsächlich um Extremstellen handelt. Bevor dies rechnerisch geschieht, könnte bspw. überprüft werden, ob sich die Anzahl errechneter Nullstellen mit anderen Informationen über Zielfunktion oder Aufgabenstellung deckt – so z.B., falls eine graphische Darstellung des Funktionsgraphen existiert, oder die Aufgabenstellung inhaltlich eine bestimmte Anzahl an Hoch- und Tiefpunkten nahelegt (→ Abgleich, Überprüfung, Übersetzung, Aufgaben-, Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7, ff.). Vor allem im zweiten Fall ist hierbei zu überdenken, inwiefern sich aus Informationen aus der Aufgabenstellung – z.B. aus einem Sachtext – auf die zu erwartende Anzahl von Extrema (und auf ihre Art) schließen lässt (vgl. Systemwissen, Kapitel 4.2). Soll bspw. ein Gewinn maximiert werden, so ist davon auszugehen, dass – zumindest im Betrachtungs-Intervall oder an dessen Rand – ein (und je nach Aufgabe ein eindeutiges) Maximum der Funktion existieren sollte (→ Systemwissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7). Hierbei spielen (metakognitive) Aspekte wie das Prognostizieren bestimmter Eigenschaften (z.B. Grenzen, Anzahlen, etc.) auf Grund vorliegender Informationen (oder auf Grund von metakognitiven Erfahrungen) ohne eigentliche Berechnung, das Abgleichen

verschiedener Daten, bzw. Darstellungen – wie graphischer, symbolischer und textueller – (und eigener Überlegungen) miteinander (→ Aufgaben-, Systemwissen, Übersetzung, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) und letztlich das **Überprüfen auf Plausibilität** eine Rolle.

Zur Überprüfung der potenziellen Extremstellen kann – je nach Vorwissen – abgewogen werden, welche von zwei (bekannten) Möglichkeiten zur Überprüfung gewählt wird (→ Beurteilung auf Basis von Strategiewissen, vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7): etwa die Überprüfung der Nullstelle auf Vorzeichenwechsel (VZW) oder die Überprüfung der Zweiten Ableitung der Zielfunktion. Hierzu müssen Vor- und Nachteile beider Methoden gegeneinander abgewogen und **beurteilt** werden, wobei neben fachlichen Argumenten (bspw. besteht die Möglichkeit, dass die zweite Ableitung allein noch keine Antwort liefert) auch **Wissen über eigene Fähigkeiten** im Hinblick auf die Berechnung von Ableitungen oder VZW eine Rolle spielen. Unter Rückgriff auf **metakognitive Erfahrungen** mit ähnlichen (Teil-)Aufgaben kann entschieden werden, welche Methode im jeweiligen Fall vorgezogen wird. Zu Übungszwecken könnte dies bspw. die Methode sein, in der sich Lernende als weniger geübt oder unsicherer beurteilen (→ Beurteilung, Personenwissen, metakognitive Erfahrung). Beim Bearbeiten einer Klausur unter Zeitdruck würde hingegen sicher die Methode bevorzugt, die (zumindest aktuell) als schneller, weniger fehleranfällig oder **kognitiv weniger beanspruchend beurteilt** wird und damit sicherer zum Ziel einer in möglichst kurzer Zeit richtig gelösten Aufgabe führt.

Bei Überprüfung auf VZW dürfte vor allem zu beachten sein, aus welchem Intervall die „Prüfstellen“ gewählt werden. Dazu muss Lernenden bewusst sein, dass zwischen der zu überprüfenden Nullstelle und der gewählten „Prüfstelle“ keine weitere Nullstelle der Ableitungsfunktion liegen darf. Ist diese Tatsache nicht ohnehin schon **bewusst**, sollte sie durch **Überdenken der Vorgehensweise** auf etwaige **Fehlerursachen** hin und möglicherweise durch Heranziehen einer graphischen Veranschaulichung (→ Awareness, Reflexion und Überwachung, Systemwissen, Strategiewissen, Übersetzung vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7) „entdeckt“ werden. Sind entsprechende Prüfwerte berechnet worden, muss überlegt werden, wie diese mit dem Verhalten der eigentlichen Zielfunktion zusammenhängen (→ Reflexion, Systemwissen, Übersetzung vgl. Kapitel 4.2, Abbildung 7). Die Eigenschaft der Ableitung, die Steigung der Funktion wiederzugeben, muss also auch an dieser Stelle noch einmal bedacht und dieses Aufgabenwissen muss genutzt werden. Auch hierbei ist ein **Perspektivwechsel** notwendig – von der Ableitung zur Funktion, bzw. umgekehrt – und ein entsprechender **Übersetzungsvorgang** zwischen den jeweiligen Eigenschaften und ihren **Bedeutungen** für die jeweils andere der beiden Funktionen (→ Aufgaben-, Systemwissen). Letztlich werden hierbei

die Bedeutung des Ableitungsbegriffs an sich reflektiert, sowie ihre Konsequenzen (→ Strategiewissen) für die Berechnung von Extremwerten.

Auch bei Überprüfung durch Berechnung der zweiten Ableitung muss der Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion überblickt und reflektiert werden, insbesondere die Eigenschaft der (zweiten) Ableitung, abschnittsweise positiv oder negativ zu sein, was in ein Kriterium für das Verhalten der Ursprungsfunktion übersetzt werden muss. In diesem Fall sind hierbei sogar mindestens zwei **Übersetzungsvorgänge** zu leisten – von der zweiten zur Ersten Ableitung und anschließend (oder gleichzeitig?) von der ersten Ableitung zur Funktion, bzw. jeweils auch umgekehrt. Das Verhalten der zweiten Ableitung gibt Auskunft über den VZW der ersten Ableitung. Hierbei könnte von Lernenden auch ein Abgleich mit der Alternativ-Strategie (→ Vergleich von Strategien, Strategiewissen) erfolgen. Wird die zur Verfügung stehende Zeit als ausreichend **beurteilt**, bzw. handelt es sich um eine Aufgabe zu Übungszwecken oder einen Zugang Thema Extremwerte, so könnten beide Vorgehensweisen durchgeführt und miteinander verglichen werden – sowohl im Hinblick auf das Ergebnis, als auch im Hinblick auf Unterschiede in der Durchführung, die dann beurteilt und für zukünftige Aufgabenstellungen „**abgespeichert**“ werden können (z.B. „Geläufigkeit“, Einfachheit der Strategie, Geschwindigkeit, Fehleranfälligkeit) (→ System-, Strategiewissen, Überwachung, Reflexion und Planung, Beurteilung, Steuerung von Kognition).

Ansonsten ist an dieser Stelle zu klären, dass eine positive (oder negative) zweite Ableitung an einer Stelle mit einem VZW „von Minus nach Plus“ (oder „von Plus nach Minus“) zusammenhängt. Hierbei könnte zur besseren Vorstellung die Verwendung einer unterstützenden Graphik als **Hilfs- oder Erinnerungs-Strategie** herangezogen werden. Lernende könnten sich entscheiden, einen vorliegenden „schwierigeren“ Fall („komplexere“ Ausgangsfunktion) durch ein einfacheres Beispiel (Funktion x^2 , Ableitung $2x$, zweite Ableitung 2) zu veranschaulichen (→ Strategie-, Systemwissen, Beurteilung). Dabei muss gedanklich überprüft (oder in Erinnerung gerufen) werden, dass dieser einfachere Fall die wesentlichen Eigenschaften des schwierigeren Sachverhalts für diese Fragestellung wiedergibt und nicht verfälscht (→ Beurteilung von Informationen auf Relevanz und Korrektheit). Hier spielen vor allem die **Auswahl einer angemessenen Strategie** und deren **Überprüfung** auf Angemessenheit eine Rolle; ggf. die Verwendung und der Vergleich verschiedener Darstellungen und insgesamt die Fähigkeit zwischen Darstellungen und Perspektiven des gleichen Sachverhalts zu wechseln und deren Zusammenhänge zu begreifen (→ Übersetzung).

Im zweiten Fall (Überprüfung mittels 2. Ableitung) kann der Fall auftreten, dass $f''(x_0) = 0$ für die untersuchte Nullstelle x_0 . Dieser tritt auf, wenn entweder ein Extremum vorliegt und x_0 auch Nullstelle der 2. Ableitung ist (z.B. im Fall $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, x_0 = 0$) oder aber, wenn die Funktion kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt aufweist. Hier „versagt“ das „Standard-Rezept“ zur Überprüfung von Extrema. Lernenden, die diesen Fall nicht (mehr) kennen, bzw. denen die Möglichkeit seines Auftretens (in diesem Moment) nicht (mehr) bewusst ist, sollte bei der Berechnung sofort auffallen (\rightarrow Awareness, Überwachung), dass ihr Ergebnis vom erwarteten „Standard“ („Plus“ oder „Minus“) abweicht (\rightarrow Überprüfung, Plausibilität). Dieser Konflikt sollte eine aktive Auseinandersetzung mit der Thematik auslösen, sofern es nicht spontan zur (vollständigen) Erinnerung an die korrekte (oder zumindest dafür gehaltene) Vorgehensweise kommt (\rightarrow spontane Einfälle im Zusammenhang mit den Komponenten Awareness und Metakognitive Erfahrungen). Das Gefühl, dass etwas „nicht stimmt“ (\rightarrow Awareness, Sensitivity), sollte dazu führen, dass unter Einbezug von (spezifischem) Aufgaben- und Strategie-Wissen ergründet wird, inwiefern ein Problem vorliegt (\rightarrow Sense-Making); in diesem Fall, inwiefern das erhaltene Ergebnis vom erwarteten abweicht und worin damit das Problem für die eingeschlagene Strategie (Überprüfung einer potentiellen Extremstelle anhand der 2. Ableitung) genau besteht (die 2. Ableitung sollte an der Stelle x_0 entweder echt positiv oder echt negativ sein). Dies kann direkt zum Verwerfen der Strategie (\rightarrow Überwachung, Adaption, Steuerung, Strategiewissen) zugunsten der VZW-Alternative führen, wenn die „Sondierung“ von Wissen erkennen lässt, dass es an Möglichkeiten zur Modifizierung der Strategie fehlt, oder die Problematik kann weiter ergründet werden. In diesem Fall würde überdacht werden, welche Bedeutung eine Nullstelle der 2. Ableitung für die 1. Ableitung hat, was wiederum zum Ausgangspunkt des Prozesses, der Suche nach Nullstellen der 1. Ableitung, führen kann; eigenes Fach- und Aufgabenwissen wird also reflektiert und aktiv analysiert. Oben dargelegte Überlegungen könnten also auf die neue Problematik („eine Ableitung weiter“) übertragen werden (s. auch später, Berechnung von Wendepunkten); ein **Transfer**, der durch **Reflexion und Rekapitulation vorheriger Überlegungen** ermöglicht wird.

Fall 1: Extremum

Liegt in x_0 ein lokales Extremum von f vor, so sollte die **Überwachung des Denkprozesses unter Berücksichtigung von Strategiewissen** – bspw. unter Rückgriff auf eine graphische Darstellung dieses Falles – indirekt wieder auf Alternative 1, die Überprüfung des VZW führen. Dabei dürfte neben dem nötigen Transfer und der Verwendung einer alternativen

Darstellungsform auf weniger spezifischer Ebene auch die **Überwachung der eigenen Konzentrationsfähigkeit** eine Rolle spielen, da das **Überblicken** der verschiedenen Ebenen und ihrer Zusammenhänge vermutlich eine gewisse kognitive Beanspruchung darstellt.

Fall 2: Kein Extremum

Liegt kein Extremum vor, so ist $(x_0|f(x_0))$ Sattelpunkt von f . In diesem Fall ist x_0 eine Nullstelle von f' , die also keinen VZW aufweist. Wie im bisherigen Verlauf können beim Versuch, den Sachverhalt zu durchdringen, verschiedene metakognitive Mittel zum Tragen kommen. Der Versuch, den aktuellen Fall, also das „Versagen“ des bekannten Schemas oder Kalküls, durch **Überdenken („Durchsuchen“)** von **Vorwissen und metakognitiven Erfahrungen einzuordnen** und möglicherweise **bekannte Lösungs-Strategien abzurufen**, die spontan nicht aktiviert wurden, hängt „natürlich“ davon ab, ob der Fall des Sattelpunkts zuvor bereits bekannt ist. Ist dies nicht oder nur teilweise der Fall, wäre vermutlich zu klären, inwiefern das Ergebnis $f''(x_0) = 0$ die Standard-Strategie beeinträchtigt (\rightarrow Aufgabenwissen), wozu diese rekapituliert und die Bedeutung der 2. Ableitung für das gesuchte Extremum vergegenwärtigt werden können (\rightarrow Überwachung, Analyse, Reflexion, Aufgaben- und Strategiewissen). Aus dieser Überlegung sollte sich ergeben, dass auch an dieser Stelle die ursprünglichen Überlegungen zur Standard-Vorgehensweise von Nutzen sein können (\rightarrow Beurteilung des Nutzens vorhandenen Wissens, Übertragung von Wissen und Strategien), da sie den Zusammenhang zwischen dem Verhalten einer Funktion und einer Nullstelle ihrer Ableitung betreffen (\rightarrow Übersetzung, Systemwissen). Hier besteht also wiederum die Möglichkeit eines **Transfers**, bei dem eine **bekannte Strategie auf einen neuen Fall übertragen** werden kann, jedoch letztlich modifiziert (\rightarrow Strategiewissen, Analyse, Überwachung und Adaption) werden muss. Von einem Extremum in der 1. Ableitung f' muss noch auf das Verhalten der Funktion („eins höher“) geschlossen werden, was in der Standard-Extremums-Strategie nicht vorkommt. Hierbei müssten Überlegungen zum VZW bei einer Ableitung und seiner Bedeutung für die zugehörige Funktion **reaktiviert** und auf den aktuellen Fall **übertragen** werden. Auch hierbei dürfte der Einsatz einer Graphik (bzw. einer bildhaften Vorstellung) als nützlich beurteilt werden, die den VZW und seine Bedeutung für die Steigung des Funktionsgraphen (keine Umkehrung der Steigung, also kein Extremum) veranschaulicht (\rightarrow Erkennen und Beurteilens des Nutzens weiterer Hilfsmittel). Eine **Überprüfung der eigenen Überlegungen** könnte als sinnvoll beurteilt werden (\rightarrow Sense-Making, Beurteilung, vgl. Kapitel 4.2); bspw. durch „Vorwärts-Arbeiten“ oder „Rückwärts-Arbeiten“ (von der Funktion zur Ableitung oder umgekehrt) oder durch Entwerfen eines weiteren Beispiel-Falles,

der als – in den wesentlichen Eigenschaften – gleichwertig beurteilt wird; hierzu muss anhand von Aufgaben- und Strategiewissen reflektiert werden, welche Eigenschaften hier übertragbar sein müssen. Wünschenswerterweise sollten gerade bei derartigen – ungewohnteren – Fällen eigene Überlegungen grundsätzlich überwacht und auf Denkfehler hin überprüft werden.

Im Anschluss müsste die Bedeutung (→ Systemwissen) des gefundenen Sachverhalts („Sattelpunkt“) für die ursprüngliche Fragestellung analysiert und reflektiert werden, um eine geeignete Antwort auf die Fragestellung (Gibt es Extrema und wo liegen diese?) zu finden. Ist der Fall „Sattelpunkt“ neu oder nicht mehr bekannt, muss im Rahmen des eigenen Aufgaben-Wissens und Begriffsnetzes dieser neue Fall **integriert und vernetzt** und für den Lernenden selbst **als „sinnvoll“ erkannt werden** (→ Sense-Making, vgl. Kapitel 4.2). Dies erfordert ggf. weiterer Reflexionen und einer **Bewertung** des (gerade) durchlaufenen Prozesses.

In allen Fällen könnte am Schluss des Berechnungsprozesses ein **Ableich mit der Ausgangs-Fragestellung** (→ Überwachung, Reflexion, Systemwissen, Strategiewissen) stehen, bei dem spätestens erkannt (→ Awareness) werden sollte – so nicht präsent – dass die Begriffe Extremwert/-stelle und Extrempunkt unterschiedlich sind. Je nach Fragestellung, bzw. Kontext ist entweder nach Punkt, Stelle oder einem bestimmten Wert gefragt. Hier ist zu **überprüfen**, welches der erhaltenen Ergebnisse als Antwort auf die ursprüngliche Frage tatsächlich **sinnvoll** ist und ob ggf. der Funktionswert an der gefundenen Stelle zu berechnen ist.

Je nach Art der Problemstellung kann – z.B. im Rahmen von Modellierungsproblemen – das Aufstellen einer entsprechenden Zielfunktion ein noch vorgelagerter Schritt sein, der in der obigen Prozess-Beschreibung nicht näher behandelt wurde. In diesem Fall dürften Transfer- und **Übersetzungsprozesse** sowie Überwachungsprozesse besonders wichtig sein, da im Verlauf der Aufgabe die Angemessenheit der erstellten Zielfunktion **überprüft** werden kann – im **Ableich mit dem Kontext**, dem Verlauf der Rechnungen und unter Berücksichtigung der Situation, in der die Aufgabe bearbeitet wird. Hier können metakognitive Erfahrungen ins Spiel kommen – wird die Bearbeitung als schwieriger, bzw. komplexer „empfunden“ (→ Überwachung, Awareness, metakognitive Erfahrungen, Systemwissen), als dies normalerweise in – z.B. – Klausuren der Fall ist, so könnte dies ein Grund sein, die Zielfunktion erneut zu überprüfen. Ergeben sich Zwischenergebnisse, können diese auf **Plausibilität** im Rahmen des Realwelt-Zusammenhangs **überprüft** werden.

Bei der Beschreibung des obigen Prozesses ist zu beachten, dass es sich – wie eingangs erläutert (!) – um eine exemplarische Beschreibung handelt, die von verschiedenen Faktoren beeinflusst

wird. Vorwissen, bzw. Gedächtnisleistung bestimmen naheliegenderweise, welche Informationen vorliegen, bzw. grundsätzlich (spontan beim Auftreten bestimmter Auslöser oder durch (metakognitive) Anstrengung) abgerufen werden können. Faktoren wie die aktuelle „Kompetenz“ und Erfahrung mit solchen Aufgabenstellungen, Konzentrationsfähigkeit und Motivation könnten Ablauf und Geschwindigkeit eines solchen Prozesses verändern.

Diese Faktoren sind nicht nur individuell verschieden, sondern variieren auch mit der Zeit; bspw. werden neue Informationen erworben, Inhalte (durch Prozesse wie den beschriebenen) neu vernetzt und (metakognitiv) ergänzt und andere wiederum werden (teilweise) vergessen. Außerdem entstehen neue metakognitive Erfahrungen. Dementsprechend könnte der obige Prozess an jeder Stelle abgebrochen werden müssen (sofern die Erfolglosigkeit der eigenen Bemühungen erkannt wird, was bei metakognitiven Defiziten auch ausbleiben und zu einem Verharren in ziellosen Bemühungen führen kann), da Informationen nicht abgerufen werden können, oder Strategien im konkreten Fall nicht „entdeckt“ werden.

Auch bei vergleichbarem Vorwissen und vergleichbarer Mathematik-Leistung dürfte der Prozess bei verschiedenen Personen auf Grund von Vorlieben und Denkstilen unterschiedlich ablaufen; so könnten bspw. individuelle Gedächtnisstützen genutzt werden, Hilfs-Skizzen unterschiedlich gerne genutzt werden, oder unterschiedliche Assoziationen ausgelöst werden, die auf interindividuell verschiedenen metakognitiven Erfahrungen basieren.

Andererseits kann – z.B. nach entsprechender Vorbereitung auf eine Klausur – die Aufgabenstellung Extremwert-Berechnung zu einer Routine-Aufgabe geworden sein, was den Prozess vermutlich bis zu einem gewissen Grade „automatisch“ ablaufen ließe; Metakognition würde dann weitgehend nur in den Bereichen Überwachung, Kontrolle und Überprüfung sowie in Form der stärker unbewussten, bzw. intuitiven Aspekte stattfinden, während keine Strategie-Entwicklung- oder Anpassung und auch keine begriffsbildenden Maßnahmen mehr vonnöten wären.

Wie angesprochen, kommen bei obiger exemplarischer Analyse viele Aspekte von Metakognition zum Einsatz. Bei einem mehrschrittigen Denk- und Arbeitsprozess spielen die prozeduralen Aspekte eine Rolle, mit denen der Prozess vorbereitet, „begleitet“, strukturiert, überwacht und gesteuert sowie rückblickend analysiert wird. Dabei kommen die deklarativen Aspekte als Wissen über vorhandenes Wissen zu derartigen Aufgabenstellungen zum Tragen und werden als Grundlage für die Planung und ggf. die Anpassung der gewählten Vorgehensweisen genutzt. Die impliziten Aspekte tragen zur Fehlerkontrolle bei und werden

bei der Auswahl von Strategien berücksichtigt. Insbesondere der Überblick über derartige mehrschrittige Prozesse, bei dem wiederholt geklärt werden muss, welche Sachverhalte welche Folgen nach sich ziehen und welche Bedeutung diese für den Gesamtprozess und ggf. seine Abänderung haben, fällt in den Bereich des Systemwissens. Eine rückblickende Reflexion im Hinblick auf Erfahrungen im Verlauf des Denkprozesses, auf Denkfehler, auf Probleme und „Risiken“ kann erfolgen; gewonnene Erkenntnisse können analysiert und die Effizienz der eigenen Vorgehensweise beurteilt werden. Vorausschauend können Punkte identifiziert werden, die bei der nächsten vergleichbaren Aufgabenstellung beachtet werden sollten.

Darstellungsformen in der Analysis

An dieser Stelle wird an die bereits in Kapitel 2.3.2 und Kapitel 4.4.1 angesprochene Bedeutung verschiedener Darstellungsformen im Analysis-Unterricht der Sekundarstufe II erinnert. Erfahrungsgemäß zeigt sich eine starke Verzahnung von Darstellungsformen in der sprachlichen Verwendung (die eine weitere Darstellungsform darstellt) des Begriffs „Funktion“, mit dem von Lernenden häufig fälschlicherweise der Funktionsgraph (oder auch die Funktionsgleichung) identifiziert wird; dem dürfte zudem häufig keine rein sprachliche Ungenauigkeit zugrundeliegen, sondern die tatsächliche mentale Identifikation der Funktion mit ihren Darstellungsformen, bzw. ein Mangel an Begriffsverständnis, der deren Unterscheidung verhindert und über einen Zusammenhang hinaus zu einem Mangel an formaler „Trennschärfe“ und einem „Verwischen“ der korrekten Begrifflichkeiten führt.

Entsprechend stellt gerade die Analysis hohe Anforderungen an die Fähigkeit zum Perspektivwechsel und fördert dessen Einsatz umgekehrt durch die „Bereitstellung“ der graphischen und symbolischen Darstellung, die „Hand in Hand“ gehen.

Beispiele aus der Analysis:

Funktionen allgemein

In vielen Aufgabenstellungen in der Sekundarstufe II spielen sowohl die Funktion in Form ihrer Funktionsgleichung, also einer algebraischen Beschreibung, als auch in Form ihres Funktionsgraphen eine Rolle. Aufgaben, in denen eine der beiden Darstellungen „gegeben“ und die andere „gesucht“ ist, bei denen also aus einer der beiden Darstellungsweisen auf die andere geschlossen, bzw. diese berechnet oder gezeichnet werden soll, sind üblich. Bei

einem modellierungs-näheren Kontext ist häufig aus einer verbalen Angabe eine Funktion zu generieren; dies kann dabei bspw. von der graphischen Ebene her kommend oder von der algebraischen Ebene her kommend geschehen, indem z.B. direkt Gleichungen aufgestellt werden, oder aber Graphenpunkte aus den Informationen gewonnen, skizziert und erst über diesen Hilfs-(Um-)Weg Gleichungen generiert werden.

In Fällen, in denen „nur eine“ der beiden (oder mehr) verschiedenen Darstellungsformen von der Aufgabenstellung explizit gefordert ist, bietet sich der Einsatz einer Skizze zur Unterstützung des eigenen Verständnisses oft an.

Ableitung

Da die Ableitungsfunktion wiederum selbst Funktion ist, überträgt sich die „Nähe“ zwischen graphischer und algebraischer Darstellung (bzw. ihre naheliegende, „automatische“ Verwendung) auch auf diese. Darüber hinaus ist durch typische Real-Bezüge, wie z.B. reale geographische „Steigungen“, die geometrische Bedeutung der Ableitung als Steigung des Funktionsgraphen wiederum eine sehr naheliegende, die – so die Vermutung – sehr selten NICHT mitgedacht wird, auch wenn eine graphische Veranschaulichung nicht explizit verwendet wird.

Bei Anwendung des Ableitungsbegriffs zur Berechnung von Extrempunkten schließlich sind durch die Bedeutung von Hoch- und Tiefpunkten des Funktionsgraphen als Extrema der Funktion, als Punkte des Steigungswechsels, als Punkte mit waagrechten Tangenten die beiden Darstellungsarten erneut stark aufeinander bezogen. Dies setzt sich in der Überprüfung potentieller Extremstellen durch Vorzeichenwechsel oder die Berechnung der zweiten Ableitung und deren graphische Bedeutungen fort.

Diese Eigenschaften übertragen sich anschließend auf die Berechnung von Wendestellen/-punkten. Gerade die Überlegung, wie sich bspw. das Vorzeichen der dritten Ableitung auf die Art des Extremums der Funktion auswirkt, oder unter welchen Umständen nicht ein solches, sondern ein Sattelpunkt vorliegt, dürfte in höherem Maße (meta)kognitiven Aufwand bedeuten.

Integral

Die Integration als „Umkehrung“ der Differentiation und die Funktionseigenschaft der Integralfunktion lassen den Integralbegriff ebenso obige Eigenschaften „übernehmen“. Die Deutung des Integrals als (orientierter) Flächeninhalt, sowie die Überlegungen zum tatsächlichen Flächeninhalt zwischen Kurve und Abszisse erfordern eine „neue“ Interpretation, die sich durch das zusätzliche „Objekt“ Fläche ergibt, das bislang im Zusammenhang mit Funktionsgraphen noch keine oder kaum eine Rolle gespielt hat. Gerade im Hinblick auf Realbezüge, wie sie bspw. bei (Modellierungs-)Aufgaben in der Stochastik vorkommen, können diese Interpretation und das gedankliche Umschalten zwischen den verschiedenen Bedeutungen, die Funktionswerten und Flächeninhalten zukommen (beim Umgang mit Wahrscheinlichkeitsfunktionen und -dichtefunktionen) Anforderungen an einen metakognitiven Überblick über Aspekte, Perspektiven und Bedeutungen stellen.

Bei Integration mit „offenen“ Grenzen ist die Reaktivierung von Wissen über Grenzwerte und Asymptoten notwendig, Wissen über Bedingungen, Möglichkeiten und Grenzen muss überwacht und interpretiert werden.

Diese sich so natürlich ergebende Darstellbarkeit von analytischen Sachverhalten sowohl als Term als auch als Graphik (daneben existieren selbstverständlich noch weitere Möglichkeiten, wie z.B. Tabellen) stellt für Lernende sowohl ein Hilfsmittel als auch eine Anforderung dar. So, wie sich die Graphik „natürlich“ ergibt, muss sie gewissermaßen auch meist „mitgedacht“ werden, und während sie das Verständnis der Term-Darstellung unterstützen sollte (bzw. auch umgekehrt), ist hierzu ein „**Übersetzungsprozess**“ zwischen beiden (und weiteren) Darstellungsformen zu leisten.

Naheliegenderweise spielen bei einem solchen Übersetzungsprozess (zwischen Funktionsterm und -graph) Aufgaben-Wissen, Reflexion und Überwachung eine Rolle. Bestehendes Aufgaben-Wissen muss analysiert und **beurteilt** werden, um bspw. zu klären, welchen Typs eine konkrete Funktion ist (linear, exponentiell, trigonometrisch) und welche Besonderheiten diese aufweist – einerseits in Bezug auf den Term (n-ten Grades, beschränkt, nichtnegativ, gerade, periodisch, gebrochen-rational, etc. ...) und andererseits in Bezug auf den zugehörigen Graphen (beschränkt, verläuft in bestimmten Quadranten, periodisch, symmetrisch, besitzt Asymptoten, etc.) – und welche dieser Eigenschaften einander gerade entsprechen. Hierzu

dürfte teilweise auch zu klären sein, wieso sich Eigenschaften entsprechen, wieso also bspw. eine gerade, polynomielle Funktion einen (zur y -Achse) symmetrischen Graphen hat, und welche Konsequenzen dies für die Untersuchung der vorliegenden Darstellungen hat (der Grad aller Monome müsste auf Gerad- oder Ungeradzahligkeit hin überprüft werden; alternativ könnte rechnerisch die Beziehung $f(x) = f(-x)$ auf Korrektheit überprüft werden).

Muss z.B. der Graph einer Funktion anhand des vorliegenden Terms gezeichnet werden, ist das eigene Aufgaben- und Strategie-Wissen auf wichtige Merkmale hin zu „durchsuchen“, die eine Funktion (bzw. deren Graph) vom vorliegenden Typ aufweist (bzw. „metakognitiver“ formuliert: welche Merkmale bekannt sind) und auf die es beim Skizzieren zu achten (\rightarrow Überwachung, Awareness, Aufgabenwissen) gilt. Dies könnten Nullstellen, Extrema, Asymptoten oder Symmetrie-Verhalten sein. Sind derartige Eigenschaften a priori nicht bekannt und müssen – bei einem bisher unbekanntem Funktions-Typ – erst erarbeitet werden (\rightarrow Planung, Überwachung, Strategiewissen, Aufgabenwissen), kann dies auf Basis des gleichen **Aufgaben-Wissens** geschehen (Welche Eigenschaften können Funktions-Terme und -Graphen grundsätzlich haben, bzw. welche sind mir bekannt und was kann ich daraus schließen?); hier muss eine entsprechende Strategie für das Erkunden des neuen Funktions-Typs **ausgewählt** oder entwickelt werden. Es stehen also zuerst planerische Überlegungen auf Grund von Strategie-Wissen im Vordergrund. Der „neue“ Funktionsterm könnte mit bekannten Typen verglichen werden, entsprechende Eigenschaften könnten auf Übertragbarkeit (\rightarrow Übersetzung, Beurteilung, Aufgaben-, Systemwissen) überprüft (\rightarrow Beurteilung) werden.

In Bezug auf das im Interview verwendete Extremwertproblem (vgl. Kapitel 2.3.4) ließe sich bspw. erkennen (\rightarrow Awareness, Aufgaben-, Strategiewissen, Beurteilung), dass sich die Möglichkeit einer Berechnung mittels Quadratischer Ergänzung und Herstellung der Scheitelpunktform nicht auf Polynome höheren Grades übertragen lässt, sondern an Polynom-Funktionen 2. Grades gebunden ist.

Alternativ könnten sämtliche bekannten Eigenschaften der Reihe nach auf Vorliegen überprüft werden. Beide Strategien ließen sich kombinieren und auch spontane Assoziationen (\rightarrow Awareness) könnten **überwacht**, bzw. durch „Ausprobieren“ provoziert werden (\rightarrow Strategiewissen), und in die Überprüfung miteinbezogen werden.

Alle möglichen Strategien müssen – den Umständen angepasst (\rightarrow Überwachung von Denkprozessen, Beurteilung und Anpassung von Strategien) – auf ihren Nutzen, ihre Effizienz, ihre Eigenschaft, zielführend zu sein, oder ihre Durchführbarkeit überprüft und damit **beurteilt**

werden. Ein „Brute-Force“-Vorgehen dürfte bspw. ohne heuristische Eingrenzung der Möglichkeiten relativ ineffizient sein.

Muss umgekehrt zu einem vorliegenden Graphen (ggf. mit Zusatzinformationen wie exakten Angaben zu Kurvenpunkten) ein Funktionsterm gefunden werden, so ist die vorliegende Graphik ebenso auf Merkmale zu überprüfen, deren Bedeutung entweder mit vorhandenem Wissen abzugleichen (→ Wissen über Wissen) ist, oder die – erstmals – untersucht werden müssen, wozu ebenfalls die **Planung, Auswahl und Beurteilung von Strategien** notwendig ist.

Sind Merkmale und Eigenschaften noch unbekannt, so sind Analyse- bzw. Reflexions-Prozesse notwendig, bei denen versucht wird, solche aus **vorhandenem Wissen über Mathematik** auf die neuartige Situation zu **übertragen**. Es kann also bspw. (heuristisch) ausgewählt werden, welche Bereiche zumindest eine gewisse Ähnlichkeit zum vorliegenden Fall aufweisen (→ Nutzung und Beurteilung bekannten Wissens, Übersetzung). Hier spielt möglicherweise der eher unbewusste, assoziative Bereich von Metakognition (→ implizite Komponente) eine Rolle – metakognitive Erfahrungen; außerdem die Fähigkeit, sowohl **eigenes Wissen** als auch inhaltliche Informationen auf ihren möglichen Nutzen hin zu **beurteilen**. Des Weiteren dürfte ein guter Überblick über das System Mathematik (→ Systemwissen) an sich von Nutzen sein. Im Folgenden könnte untersucht werden, inwiefern Ähnlichkeiten tatsächlich bestehen, also, worin genau sich zwei Fälle gleichen und worin sie sich unterscheiden (→ Überprüfung, Aufgabenwissen), und inwiefern sich entsprechende Eigenschaften und Konsequenzen auf den aktuellen Fall **übertragen** lassen, bzw. wo diesem Transfer **Grenzen** gesetzt sind (→ Übersetzung, Beurteilung, Aufgaben- und Strategiewissen). Dies erfordert einen Überblick über das jeweilige Phänomen im Sinne spezifischen Metawissens zum System Mathematik.

Mit zunehmender Erfahrung gehen viele dieser Prozesse (abhängig vermutlich von Verständnis-Grad und Intensität und Dauer der Beschäftigung) voraussichtlich in Routine über und sollten mehr oder weniger automatisch/ „unbewusst“ ablaufen. Dennoch kann sich – gerade nach längeren „Beschäftigungs-Pausen“ mit diesem Fachgebiet oder konkreten Funktionstypen – die Notwendigkeit ergeben, ehemals vorliegendes, nun aber (teils) nicht (mehr) abrufbares Wissen neu zu rekapitulieren und ehemals routiniert „abspulbare“ Prozesse (teilweise) erneut zu entwickeln.

Metakognitive Aspekte und Ansatzpunkte bei der Differentiation und Integration

Während der Umgang mit Funktionen, die einen Sachverhalt darstellen (als Graph, Gleichung, Tabelle, etc.), hinreichend bekannt sein dürfte, stellt die Differentiation für Lernende insofern ein Novum dar, als dass hierbei gewissermaßen eine Transformation vorgenommen wird, die die Funktion in eine andere Funktion – die Ableitungsfunktion – „überführt“. Anders als bei – bspw. – der Berechnung von Nullstellen lässt sich dieser Vorgang als Veränderung der Funktion an sich interpretieren, während tatsächlich die Funktion als solche natürlich unverändert bleibt; der Vorgang dient der Berechnung einer neuen Funktion. Allerdings suggeriert die Formulierung „eine Funktion ableiten“ eine Veränderung, während „die Ableitung berechnen“ dies nicht notwendigerweise tut. Hier existieren also bspw. bereits verschiedene Sichtweisen und Interpretationsmöglichkeiten, die von Lernenden durchdrungen, bzw. miteinander vereint werden müssen (→ Perspektivwechsel, Übersetzung, Aufgabenwissen), was metakognitive **Analyse** und **Reflexion** hilfreich macht. Hier sind Überlegungen vorstellbar, die nach Ausgangssituation und Ziel fragen (Welche Funktion steht am Anfang, welche am Ende dieses Prozesses?), nach Art und Wirkung des Prozesses (Wie geht diese „Transformation“ genau vonstatten? Inwiefern handelt es sich um eine Transformation, inwiefern nicht?), nach dem Zusammenhang zwischen beiden Funktionen (Abgesehen vom Prozess der Erzeugung, welche Beziehungen bestehen zwischen beiden Funktionen?), etc. (→ Einordnung ins Systemwissen, Überwachung und Steuerung, Strukturierung von Wissen). Es stellt sich – im Rahmen der Beziehung zwischen beiden Funktionen – die zentrale Frage, welche Aussagen sich anhand von Wissen über eine der beiden Funktionen über die jeweils andere treffen lassen (→ Analyse von Wissen und sich daraus ergebenden Konsequenzen). Hierzu sollte es hilfreich sein, das **eigene Wissen** zu Eigenschaften beider Funktionen **überblicken** und „**durchsuchen**“ zu können und Verknüpfungen zwischen einzelnen Eigenschaften zu kennen und herstellen zu können (→ Aufgaben-, Personenwissen, Übersetzung). Des Weiteren sollte entschieden werden können, in welchen Situationen (bei welchen Aufgaben) welche Eigenschaften eine Rolle spielen (→ Beurteilung), bzw. genutzt werden können (→ Aufgaben-, Strategiewissen). Gerade beim Ableitungsbegriff (und den auf ihm aufbauenden Begriffen und Problemstellungen) dürften hier das Überblicken (→ Aufgaben-, Systemwissen) und **Überwachen** (beim Aufnehmen von Informationen) von Schlüssel-Begriffen (→ Awareness, Beurteilung), insbesondere bei Anwendungsbezügen, hilfreich sein; bspw. Geschwindigkeit, Anstieg, steil, steigen, fallen, Änderung, etc..

In einer ersten Auseinandersetzung mit dem Begriff Integration gilt es für Lernende vermutlich, die verschiedenen neuen (im Rahmen des Lehrplans) Begriffe (z.B. Integralfunktion, Stammfunktion, Unter- und Obersumme) gedanklich auseinanderzuhalten (→ Überwachung von Kognition, Einordnung in bisheriges Wissen). Für die Begriffsbildung ist es sicher notwendig, die mit der Integration verbundenen Begriffe „(bestimmtes/ unbestimmtes) Integral“, Integralfunktion und Stammfunktion gedanklich voneinander abzugrenzen, ihre jeweiligen Inhalte genau zu analysieren und die engen Zusammenhänge zwischen ihnen herzustellen (→ Aufgaben-, Systemwissen). Hier finden zu Beginn und im Verlauf einer einführenden Unterrichtseinheit optimalerweise **Analyse- und Einordnungsprozesse** statt, in deren Rahmen die neuen Begriffe mit ihren Eigenschaften, Möglichkeiten, Grenzen und ihren Verbindungen – sowohl untereinander als auch mit weiteren Begriffen des bestehenden Begriffsnetzwerks – (teils als Unter- und Oberbegriffe hierarchisch) in bestehendes Wissen eingeordnet werden (→ Systemwissen). Zusätzlich muss zu diesen Begriffen der Vorgang der Integration als „Umkehrung“ der Differentiation nachvollzogen werden. Es muss gedanklich geklärt werden, inwiefern dieser Prozess zu den genannten Begriffen „führt“, bzw. worin sein Zusammenhang zur Messung eines geometrischen Inhalts besteht.

Integration und Differentiation lassen sich gewissermaßen als „entgegengesetzte“ Operationen auffassen. Ist F Stammfunktion einer Ausgangsfunktion f , so ist f Ableitungsfunktion von F . Es gilt: $F' = f$.

Für Lernende gilt es, sich dieses Zusammenhangs bewusst (→ Awareness, Systemwissen) zu sein und ihn im Rahmen von Problemlöse- und Begriffsbildungs-Prozessen zu nutzen (→ Strategiewissen). Hierbei spielen die Einnahme verschiedener Perspektiven (→ Steuerung von Kognition, Übersetzung) und die Betrachtung des Begriffs-Paares aus Integration und Differentiation aus verschiedenen „Richtungen“ eine Rolle, sodass ein flexibles gedankliches Umschalten zwischen Betrachtungsmöglichkeiten bei Nutzung (→ Strategiewissen, Überwachung) dieser Begriffe ermöglicht wird. In diesem Fall wird sichtbar, dass Eigenschaften eines bestimmten Begriffs – auch – von der jeweiligen Sichtweise abhängen, eine Erkenntnis, zu der Lernende durch Reflexion über bestehendes Aufgabenwissen und das bewusste Einnehmen und Analysieren der verschiedenen Sichtweisen kommen könnten. Als Ableitungsfunktion interpretiert, kann eine (relativ beliebige) Funktion Eigenschaften besitzen, die bisher (im Verlauf des Unterrichts) mit dem Begriff Ableitung assoziiert waren, als Integral- oder Stammfunktion besitzt sie – gleichzeitig – Eigenschaften, die sie zuvor (im Sinne eines Lehrplans, der die Differentiation vor der Integration einführt) nicht aufwies, bzw. die bei

Einführung der Integration mit einem bestimmten Typ von Funktion assoziiert wurde. Dass sich diese beiden Funktionstypen nicht voneinander abgrenzen lassen, sondern dass viele in der Schule verwendete Funktionen je nach Sichtweise und Verwendungszweck entweder zum einen oder zum anderen Typ gehören und gleichzeitig beide Rollen innehaben können, muss von Lernenden vermutlich bewusst so erfahren und durchdacht (→ Reflexion, Einordnung, Systemwissen) und am Beispiel erprobt (→ Überwachung, Aufgaben- und Strategiewissen) werden, um infolgedessen ins eigene Begriffsnetz und Aufgabenwissen integriert zu werden. Hinzu kommt, dass Ableitungs- und Integral-/Stamm-Funktionen durch ihr „Funktions-Sein“ eine weitere, grundlegende, Sichtweise beinhalten, die mitgedacht werden muss. Für Lernende gilt es, diese Sichtweisen und entsprechende Eigenschaften mit ihrem Strategiewissen zu verbinden, sodass je nach Begriff, Situation oder Problemstellung entschieden werden muss, welche Sichtweise gerade „passend“ oder angemessen ist, bzw. welche Eigenschaften und Möglichkeiten sich für die Entwicklung einer Strategie zur Lösung des aktuellen Problems anbieten, oder welche Eigenschaften und Beziehungen sich anbieten, um Verbindungen zu anderen Begriffen herzustellen und so das eigene Verständnis zu erweitern (→ Strategiewissen, Planung, Überwachung).

Je nach Aufgabenstellung ist ein solches Umschalten innerhalb einer einzigen Aufgabe notwendig; ein simultanes „Im-Kopf-Behalten“ verschiedener Aspekte sowohl der Funktion, als auch von Ableitungs- und Integralfunktion (→ Überwachung, Steuerung von Kognition, Awareness) während der **Analyse** einer Situation und das gezielte Auswählen entsprechend angemessener Sichtweisen, Aspekte, Eigenschaften und Strategien (→ Planung, Aufgaben-, Strategiewissen) dürfte metakognitiven Aufwand bedeuten. Offensichtlich spielen hier die meisten der klassischen Aspekte von Metakognition eine Rolle – Planungs-, Überwachungs- und Reflexions-Vorgänge, bei denen vor allem auf Aufgaben- und Strategiewissen zurückgegriffen wird, bzw. mittels derer diese beiden Wissensarten erweitert werden.

Bei der Beziehung Funktion – Ableitungsfunktion – Integralfunktion – Stammfunktion gilt es erneut, einen Überblick über das eigene Fach- und Aufgabenwissen zu haben (→ Systemwissen), um die wechselseitigen Beziehungen und die Frage, welche Funktion welche Eigenschaften von den jeweils anderen übernimmt, bzw. welche sie „weitergibt“, zu strukturieren und „im Blick zu behalten“. Die Deutung der verschiedenen „beteiligten“ Begriffe und „Elemente“ – wie z.B. des Flächeninhalts unter dem Graphen, der Steigung des Graphen, der Symmetrie eines Graphen, etc. – in Bezug auf die Aufgabenstellung erfordert flexibles „Umschalten“ zwischen Darstellungen und Perspektiven und die Überwachung der

entsprechenden Überlegungen, um Verwechslungen zu vermeiden. Bspw. beim Umgang mit Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktionen im Stochastikunterricht, bei der die Deutung (und Identifikation) von Funktionswerten einerseits und Flächeninhalten andererseits zu Verwirrung sorgen kann, ist vorstellbar, dass Wissen über diese Risiken (→ Aufgabenwissen) und eine entsprechend konsequente Überwachung und Überprüfung von Denkprozessen von großem Nutzen sind.

Mögliche Fragestellungen

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass ein (großer) Teil der aktiv genutzten, bewussten Metakognition (deklarativ und prozedural, vgl. Kapitel 4.2) in Form von Fragen über eigenes Wissen und eigene Kognition auftreten, die sich eine Person selbst stellt und zu beantworten sucht. Wie in Kapitel 2.1.5 ausgeführt, liegt Metakognition hier vor allem in der Fragestellung, die sich auf eigenes Wissen bezieht. Die Beantwortung dieser Fragen kann hingegen in Form von Fachwissen erfolgen, was unter Umständen nicht mehr als Metakognition eingestuft wird. Hierbei sind in Bezug auf das vorgestellte Modell und seine Aspekte bspw. die folgenden Fragen und Überlegungen denkbar, die Lernende sich stellen bzw. anstellen könnten:

- Verstehe ich, dass hier ein Problem vorliegt und worin dieses besteht?
 - (Analyse des eigenen Verständnisses, Überprüfung des eigenen Aufgabenwissens, Awareness)

- Inwiefern besteht eine „Lücke“ im vorhandenen Wissen über das „System“ Mathematik, die geschlossen werden muss, um bestimmte Problemstellungen lösen zu können? (Diese besteht bspw. in einer fehlenden Möglichkeit, die intuitiv angenommene momentane Änderungsrate (formal) „greifbar“ zu machen.)
 - (Analyse und Reflexion bzgl. des eigenen Aufgaben-/Systemwissens, Beurteilung und Einordnung der eigenen Fähigkeiten zur Bearbeitung eines Problems und des fehlenden/ benötigten Wissens)

- Woran erkenne ich eine solche Wissenslücke, wie äußert sie sich im Hinblick auf die Mathematik und im Hinblick auf mein Verständnis? Wie „fühlt“ sich das an?
 - (Analyse und Reflexion im Hinblick auf die implizite Komponente)

- Kenne ich bereits ähnliche Situationen, in denen solche „Lücken“ auftraten und wie konnte ich sie (gedanklich) schließen? Welches Wissen war hierbei nützlich und wie wurde es übertragen?
 - ➔ (Analyse und Reflexion bzgl. metakognitiver Erfahrungen, Aktivierung von Erinnerungen, Überprüfung eigenen Wissens und In-Bezug-Setzen zum aktuellen Problem, Übersetzungs-/Transferprozesse, Strategiewissen)

- Welche Art von Wissen/ Information kann diese „Lücke“ schließen? Welches Wissen steht hiermit möglicherweise in Verbindung und wie kann ich es nutzen?
 - ➔ (Aufgaben-, Systemwissen, Analyse von Wissen und dessen strategische Nutzung)

- Welche Art mathematischen Wissens kann mir möglicherweise helfen? Wissen über Begriffe? Wissen über Strategien? Wissen über Rechen-Techniken? Wissen über ein bestimmtes Gebiet – z.B. Terme und Gleichungen?
 - ➔ (Analyse und Reflexion bzgl. Aufgaben-, Systemwissens und Strategiewissens)

- Welche Begriffe und Vorgehensweisen/Strategien gehören zu diesem Gebiet und sind mir bekannt?
 - ➔ (Überblick, Systemwissen, Analyse eigener Erinnerungen)

- Welche weiteren Hinweise welcher Personen bzw. welche weiteren Hilfsmittel benötige ich möglicherweise für die nötigen Überlegungen?
 - ➔ (Beurteilung dahingehend, ob eigenes Wissen „ausreicht“ und welches Wissen im Hinblick auf die Aufgabe nötig ist, Aufgabenwissen, Strategiewissen, Beurteilung des Wissens anderer Personen)

- Inwiefern können die angedachten/ ausgewählten Strategien/ Begriffe das Problem lösen?
 - ➔ (Aufgaben-, Strategiewissen, Beurteilung)

- Welche weiteren (Teil-)Probleme ergeben sich bei der Durchführung der Strategie? Fallen mir diese auf? Woran erkenne ich sie explizit? Wie „fühlt“ es sich an, wenn etwas nicht funktioniert?
 - ➔ (Strategiewissen, Überwachung, implizite Komponente (Awareness, Sensitivity))

- Wie passen die Ergebnisse des Lösungs-/Denkprozesses zu meinem bisherigen Wissen, welche Rolle spielen sie für die Fragestellung, inwiefern lösen sie das Problem?
 - ➔ (Analyse, Reflexion, Einordnung der eigenen Überlegungen und In-Beziehung-Setzen zu Wissen, Bewertung im Hinblick auf die vorliegende Herausforderung, Aufgaben-, Strategiewissen)

- Kann ich die Überlegungen (z.B. der Lehrkraft) nachvollziehen? Könnte ich sie erneut selbstständig durchführen, bzw. erläutern?
 - ➔ (Analyse eigenen Verständnisses und der Kognition anderer Personen, Beurteilung der eigenen Fähigkeiten)

- Welche Schwierigkeiten hatte ich beim Nachvollziehen der Überlegungen? Welche Probleme sind aufgetreten? Woran lag dies? Wie kann ich mit diesen Problemen umgehen, worüber sollte ich nachdenken, was muss ich verbessern/üben/“ergründen“?
 - ➔ (Reflexion, rückblickende Analyse der eigenen Denkprozesse, Aufgaben-, Strategiewissen, „Ausblick“, Planung, Steuerung von Kognition)

- Welche Erkenntnisse/Ergebnisse sind besonders wichtig und wieso? Für welche zukünftigen Herausforderungen sind sie nützlich? Wie merke ich mir diese?
 - ➔ (Bewertung im Hinblick auf Bedeutung für das „System“ und für zukünftige Überlegungen, Reflexion, Planung, Personenwissen im Hinblick auf die eigene Merkfähigkeit)

- Welche Informationen liegen mir vor, welche halte ich für relevant und wofür?
 - ➔ (Analyse und Beurteilung eigenen Wissens (→ Personenwissen) im Hinblick auf Aufgaben- und Strategiewissen)

- Welche zusätzlichen Informationen kann ich aus dem erweiterten Kontext erschließen (z.B. aus dem Verhalten der Lehrkraft)?
 - ➔ (Wissen über Wissen, Strategiewissen, Beurteilung von Wissen auf Relevanz, ggf. Personenwissen, Systemwissen)

- Welche Vorgehensweisen/Strategien sind mir bekannt?
 - ➔ (Analyse von/ Wissen über Wissen – Personen-, Aufgaben-, Strategiewissen)

- Wie vertraut sind mir diese? Wie zeitaufwändig sind sie? Welche zusätzlichen Hilfsmittel benötige ich?
 - ➔ (Beurteilung eigenen Wissens/ eigener Fähigkeiten, Beurteilung von Strategien, Personen-, Aufgaben-, Strategiewissen)

- Welche Vorgehensweise/Strategie scheint mir aus „mathematischer Sicht“ am sinnvollsten/effektivsten/effizientesten? Woran erkenne ich das, wie beurteile ich es?
 - ➔ (Analyse und Beurteilung, Aufgaben-, Strategiewissen, Systemwissen, ggf. implizite Komponente – Awareness, Sensitivity)

- Welche Vorgehensweise/Strategie sollte ich möglicherweise noch üben/ besonders gut beherrschen? (z.B. weil ich davon ausgehe, dass sie in einer kommenden Klausur gefordert sein wird)
 - ➔ (Beurteilung und Planung, Systemwissen)

- Welche Vorgehensweise/ Strategie wähle ich aus diesen bzw. aus welchen Gründen für die Bearbeitung des vorliegenden Problems aus?
 - ➔ (Systemwissen, Planung, Strategiewissen, Beurteilung)

- Welche Überlegungen muss ich grundsätzlich bei der Auswahl mathematischer Strategien beachten?
 - ➔ (Aufgaben-, Strategie-, Systemwissen)

- Bin ich aktuell noch auf „Zielkurs“? Ist der eingeschlagene Weg noch sinnvoll? Gibt es neue Erkenntnisse? Habe ich Fehler gemacht?
 - ➔ (Überwachung im Hinblick auf Planung, Strategiewissen, Beurteilung, Analyse, und weitere)

- Verstehe ich die Aufgabenstellung/ das Problem/ das Ziel/ die Formulierung? Wie beurteile ich das?
 - ➔ (Analyse und Beurteilung von Verständnis, Personen-, Aufgabenwissen, Awareness, Sensitivity)

- Traue ich es mir zu, das Problem lösen zu können, obwohl mir noch keine (vollständige) Lösungsstrategie bekannt ist/ einfällt?
 - ➔ (Beurteilung eigener Fähigkeiten, Planung, Strategiewissen, metakognitive Erfahrungen, Sensitivity)

- Kenne ich möglicherweise eine zielführende Vorgehensweise, die mir momentan gerade nicht einfällt? Gehe ich davon aus, dass sie mir rechtzeitig einfällt? Wie kann ich dies beeinflussen?
 - ➔ (Beurteilung, Personenwissen, vor allem im Hinblick auf die implizite Komponente – metakognitive Erfahrungen, Awareness, Sensitivity)

5. Résumé

Forschungsfrage 1

Abschließend lässt sich festhalten, dass, von den beschriebenen allgemeineren Formen der Instrumentalisierung eigenen Wissens abgesehen, Metakognition erwartungsgemäß zwar bei den Teilnehmer_innen beobachtet werden konnte (wie sich in der Etablierung des Kategoriensystems zu FF2 zeigt), allerdings selten in Form eines bewusst verwendeten Werkzeugs, mit dem die eigene Kognition, bzw. Lern- und Problemlöseverhalten (effizient und effektiv) überwacht und gesteuert worden wären. Offenbar fehlte fast allen Teilnehmer_innen die Vorstellung darüber, wie sich derartige Mechanismen (vor allem auf domänenspezifischem Niveau) gewinnbringend einsetzen lassen; abgesehen von simplen und eher oberflächlichen „Standard“-Strategien.

Zu nennen sind dabei einerseits Schwierigkeiten bei der Analyse eigenen Wissens und Reaktivierung ehemals bekannter Inhalte; ein Umstand, der zusätzlich die Vermutung nahelegt, dass bereits beim Lernen und Einüben dieser Inhalte nicht der Grad an tiefergehendem Verständnis und Vernetzung erreicht wurde, der optimalerweise wünschenswert wäre. Trotz der verstrichenen Zeit seit der letzten Beschäftigung mit Mathematik und des vergleichsweise geringen Zeitumfangs der Interviews, der eine Reaktivierung von Wissen nur bedingt zulassen konnte, wären – aus Sicht des Autors – eine stabilere Wissensbasis und eine erfolgreichere Reaktivierung (insbesondere bei mathematik-interessierten und leistungsstarken Lernenden) zu erwarten.

Des Weiteren zeigen sich auch im Rahmen des Problemlöse-Prozesses Schwierigkeiten, in Ermanglung entsprechender (abrufbarer) Vorkenntnisse Lösungsansätze zu entwickeln und Ideen zu generieren, was auf Defizite im Bereich der prozeduralen Komponente von Metakognition und damit der Organisation, Überwachung und Steuerung von Kognition hindeutet. Auch in Fällen, in denen mit zunehmender Beschäftigung Wissen reaktiviert werden konnte, konnte dieses nur bedingt zur Problemlösung genutzt werden. Dieser Umstand stellt einerseits den Bezug zu den Ursprüngen des Begriffs Metakognition her, der im Rahmen der Untersuchung ebensolcher „Produktionsdefizite“ entwickelt wurde (vgl. Kapitel 2), und lässt andererseits die Ursachen derartiger Schwierigkeiten (zumindest teilweise) im metakognitiven Bereich vermuten.

Wie angesprochen, gibt die Tatsache, dass sich sowohl im allgemeinen (nicht mathematikspezifischen) Bereich sowie im Hinblick auf die metakognitive Wahrnehmung, Überwachung und Nutzung emotionaler und motivationaler Komponenten ein höheres Maß an Metakognition beobachten ließ, Anlass zur Hoffnung. Darüber hinaus geht aus Äußerungen und Verhalten der Teilnehmenden hervor, dass eben diese metakognitiven Standard-Strategien (vgl. Kapitel 2.3.2 und 4.1), die tatsächlich angemessen (explizit und implizit) und ausgiebig vermittelt wurden, ins Repertoire der Lernenden übergehen und bewusst, selbstständig und häufig verwendet werden. Dies bestätigt die Erkenntnisse zahlreicher Forschender, dass Metakognition gelehrt werden kann, dass diese Vermittlung allerdings sowohl durch explizite Thematisierung des Nutzens von Metakognition einerseits und durch implizite Vermittlung im Sinne der aktiven, beispielhaften Verwendung durch die Lehrkraft selbst geschehen muss, um nachhaltig Erfolg zu zeigen (vgl. Kapitel 2, Kapitel 2.2.5).

Forschungsfrage 2

Basierend auf der Analyse der einschlägigen (psychologischen und vor allem mathematikdidaktischen) Literatur, darauf aufbauenden theoretischen Überlegungen und der vorgestellten empirischen Erhebung wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das den Begriff Metakognition möglichst umfassend erfasst und systematisiert. Im Vergleich mit anderen Systemen und Modellen zeichnet sich das vorgestellte System dabei durch seinen direkten Bezug zur Mathematik und Mathematikdidaktik aus. Im Rahmen der Kategorisierung von Interview-Transkripten wurde Metakognition auf empirischer Seite von Anfang an im Hinblick auf Erfahrungen mit Mathematik im Unterricht und beim Umgang mit Mathematik in Form der verwendeten Extremwertaufgabe (vgl. Kapitel 2.3.4, Kapitel 3.4) erhoben; dies steht bspw. im Gegensatz zu anderen Forschungsprojekten, bei denen Metakognition mit Hilfe allgemeiner Tests und Fragebögen erhoben oder im Rahmen der psychologischen Forschung untersucht und erst anschließend auf Mathematik bezogen wurde. Das vorliegende System hingegen wurde in einem mathematischen, bzw. mathematikdidaktischen Kontext entwickelt und gezielt für die Operationalisierung und Diagnose in einem mathematischen, bzw. mathematikdidaktischen Kontext konzipiert und beschrieben.

Im Gegensatz zu anderen Systemen, die einen derart engen Bezug zur Mathematikdidaktik aufweisen, systematisiert das vorliegende den Begriff einerseits möglichst umfassend – konzentriert sich also nicht „nur“ auf eine der beteiligten Kategorien (Aspekte, Elemente,

Komponenten) – und andererseits möglichst isoliert von Nachbarbegriffen wie bspw. Motivation, aber auch losgelöst von konkreten mathematikdidaktischen Forschungsbereichen wie der Modellierung, was die Allgemeinheit des Systems hätte einschränken können.

Bekanntermaßen sind – vor allem im Rahmen einer solchen Arbeit und beim Begriff Metakognition – Umfang und Trennschärfe des Systems allerdings Grenzen gesetzt (vgl. Kapitel 2), weshalb selbstverständlich nicht der Anspruch einer vollständig erschöpfenden, alternativlosen und finalen Antwort auf die Frage nach dem Wesen von Metakognition bestehen kann.

Wie nicht anders zu erwarten, finden sich zentrale Unterteilungen des Begriffs im vorliegenden System wieder, die bereits in den Erläuterungen von Schneider oder Schoenfeld (vgl. Kapitel 2.3.1) vorkommen und die als weitgehend unstrittig gelten können (vgl. Kapitel 1.4); diese stellen die Grundlage der theoretischen Überlegungen dar, die zur Entwicklung des Systems führten. Die Auswertung der empirischen Erhebung konnte diese weitgehend bestätigen und teils erweitern, bzw. spezifizieren.

Die Vorstellung eines „systemischen“ Überblickswissens über die allgemeinen Mechanismen von Kognition in Bezug auf den Umgang mit Mathematik sowie über die domänenspezifischen Mechanismen kognitiver Handlungen im „System Mathematik“, die sich im Verlauf der theoretischen Überlegungen und der empirischen Auswertung immer stärker entwickelte, zeigt Bezüge zum System Hasselhorns (vgl. Kapitel 2.3.1) einerseits sowie zu mathematikdidaktischem (insbesondere stoffdidaktischem) Wissen, wie es Forschenden und Lehrenden zur Verfügung steht. Möglicherweise lässt sich dieses Systemwissen als die theoretische, höchste Stufe der „klassischen“ deklarativen Komponente von Metakognition auf Experten-Niveau interpretieren, wobei sich ebenfalls die behandelten Bezüge zum Stufenschema des Begriffslernens nach Vollrath (Kapitel 4.4.1), zur Grundvorstellungsthematik oder zu den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards der KMK (Kapitel 2.3.3) zeigen.

Des Weiteren trägt das vorliegende System der weiterhin ungeklärten Frage nach der Allgemeinheit oder Domänenspezifität von Metakognition Rechnung, indem in der deklarativen Wissenskomponente eine Unterteilung in eine allgemeine und eine spezifische Unterkategorie vorgenommen wird.

Vor allem im Rahmen der empirischen Erhebung zeigen sich bei praktisch allen Teilnehmenden Unterschiede zwischen allgemeinen und spezifischen Mechanismen, was die Quantität,

Qualität und den Erfolg metakognitiver Aktivität betrifft. Ob diese ursächlich tatsächlich der Existenz separater Ausprägungen von Metakognition geschuldet sind, oder ob Abstraktionsgehalt, Familiarität, Bewusstheit oder kognitive Belastung die Verwendung eines allgemeinen, einheitlichen Mechanismus beeinflussen, bleibt auch weiterhin nicht entscheidbar. Im Hinblick auf eine unterrichtspraktische Operationalisierung scheint die separate Behandlung, die im System etabliert wurde, sinnvoll. Sie spiegelt Beobachtungen wider und erlaubt die getrennte Erhebung beider Komponenten, was einen Abgleich zwischen beiden erlaubt (vgl. Kapitel 3.5). Entwickelt sich Metakognition tatsächlich in einer bestimmten „Richtung“ (vgl. Kapitel 2.1.3), so ließe sich unter Verwendung des vorliegenden Systems zur Diagnose verhindern, dass „spätere“ (z.B. allgemeine) Fähigkeiten trainiert werden, während noch Defizite bei „früheren“ (z.B. spezifischen) Fähigkeiten bestehen. [An dieser Stelle wird allerdings angenommen, dass – in diesem denkbaren Fall – keine rein lineare Entwicklung vorliegt.] Außerdem liefert der Vergleich metakognitiver Aktivität in beiden Bereichen Hinweise darauf, ob etwaige Schwierigkeiten überhaupt grundsätzlich metakognitiver Natur sind.

Ein weiteres Merkmal des entwickelten Systems stellt die Systematisierung der implizit-unbewussten Kategorie dar, deren Beschreibung nach Ansicht des Autors in der verfügbaren Literatur in der Regel vergleichsweise vage bleibt, der in dieser Arbeit aber gerade im Hinblick auf das Erreichen höherer Verständnis-Niveaus und die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen jenseits von Definitions-Kenntnis und Kalkül große Bedeutung beigemessen wird.

Durch die Herstellung von Bezügen zwischen Metakognition und didaktischem Wissen ergeben sich Ansatzpunkte für die Unterrichtspraxis und vor allem für die Hochschullehre, indem die Idee der Vermittlung didaktischer Kenntnisse an Lernende aufgestellt wird, die zu Veränderungen im Bereich selbstregulierten Lernens führen könnte.

Forschungsfrage 3

Im Rahmen der Bearbeitung des Forschungsziels 3 zeigen sich zahlreiche Ansatzpunkte für Metakognition beim Umgang mit Mathematik und insbesondere im Rahmen des Gebiets Analysis. Dabei wurde (in Kapitel 4.4.1) der Bezug zu zentralen Ideen der Mathematikdidaktik hergestellt – zum Genetischen Unterrichts-Prinzip, zu den Grunderfahrungen nach Winter, zum Stufenschema des Begriffslernens nach Vollrath, zur Aspekt- und Grundvorstellungs-Thematik,

aber auch zu den unterrichts-strukturierenden Standards der KMK (vgl. Kapitel 2.3.3). Metakognition tritt hierbei als Instrument in Erscheinung, das gerade auf einem höheren Anspruchs- und Abstraktions-Niveau der Forderung nach einer Ergänzung von Definitionskenntnis und Kalkül-Beherrschung hin zu einem ganzheitlichen Überblick über das Fachgebiet, der Begriffe und Methoden aus verschiedenen Perspektiven, unter Verwendung verschiedener Darstellungen und in Beziehung zu anderen Begriffen und zum „System“ Mathematik ordnet, nachkommt und einen selbstständigen und flexiblen Umgang mit Mathematik ermöglicht – insbesondere dann, wenn Routinen und Kalküle versagen und eigenständig Ideen entwickelt werden müssen.

Metakognition wird als Mittel erkannt und verstanden, das auf kognitiver Ebene Verbindungen erzeugt, bzw. erkennen lässt und verständlich macht und das Übergänge und Transformationen ermöglicht – zwischen Sichtweisen, Aspekten, Darstellungen, Prototypen und letztlich zwischen Verständnisstufen. Metakognition – insbesondere der prozedurale Aspekt der Reflexion über eigenes (mathematikbezogenes) Wissen – wird für hilfreich dabei gehalten, Mathematik Bedeutung und „Sinn“ zu verleihen und individuelle Vorstellungen zu Begriffen, ihrer Bedeutung in einem größeren „System“ sowie zu ihren Zusammenhängen mit anderen Begriffen aufzubauen und zu „überblicken“. Sie erlaubt dadurch ebenso den Einbezug impliziten Wissens in bewusste kognitive Prozesse und dessen angemessene Beurteilung und Nutzung.

Auf Seiten des Fachgebiets Analysis zeigen sich gerade in Bezug auf dessen Rolle im Mathematikunterricht und dem zu Grunde liegenden Lehrplan besondere Herausforderungen (vgl. Kapitel 2.3.2, Kapitel 4.4); darüber hinaus konnte anhand zentraler Begriffe der Analysis exemplarisch die Anwendung von Metakognition (bei Aufgabenstellungen bzw. beim Umgang mit diesen Begriffen) veranschaulicht werden.

Wie in Kapitel 2.1.6 dokumentiert, ist die Frage nach der Allgemeinheit oder Domänenspezifität von Metakognition weiterhin ungeklärt; so wird teils davon ausgegangen, dass zwar bestimmte Aspekte von Metakognition in bestimmten Bereichen stärker von Nutzen sind, sich diese aber auf gemeinsame, allgemeinere Aspekte zurückführen lassen. Auch im Rahmen der Auswertung der in dieser Arbeit dokumentierten empirischen Erhebung (vgl. Kapitel 3 und Kapitel 4.1) ließen sich keine metakognitiven Aspekte isolieren, die sich als ausschließlich für die Analysis geltend (also als „analysis-spezifisch“) interpretieren ließen. Die Analysis zeichnet sich – so wie andere Fachgebiete – zwar durch ihre eigenen (also „analysis-typischen“) Ansatzpunkte aus, die in Kapitel 4.4 exemplarisch aufgezeigt wurden;

allerdings sind die entsprechenden metakognitiven Aspekte allgemeinerer Natur und können auch in anderen Gebieten in der Mathematik oder in anderen Wissens- und Anwendungsbereichen angewendet werden. Alle aus der Literatur bekannten und von den Teilnehmer_innen der empirischen Erhebung „gezeigten“ Beispiele für Metakognition ließen sich bestimmten allgemeinen Kategorien zuordnen, was im in Kapitel 4.2 vorgestellten Modell resultierte.

[Bspw. lässt sich die Überprüfung einer Rechnung auf Rechen- oder Denkfehler den allgemeineren Aspekten der Überwachung, Überprüfung und Beurteilung von Denkprozessen zuordnen, die nicht nur für die Mathematik relevant sind. Ebenso verlangt bspw. die Frage „Welche Strategien zur Überprüfung auf ein Maximum/Minimum sind mir bekannt und worauf muss ich bei deren Durchführung achten?“ nach einer Antwort, die Fachwissen über die Analysis beinhaltet. Die metakognitive (!) Frage nach der Kenntnis von Strategien und nach wichtigen Eigenschaften/ Punkten/ Risiken, die dabei beachtet werden müssen, lässt sich allerdings auch in anderen Bereichen stellen.]

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich Forschungsziel 3 und Forschungsfrage 3 nicht auf die Suche nach bzw. Etablierung von „analysis-spezifischer Metakognition“ beziehen sondern auf Ansatzpunkte in der Analysis für (allgemeine und möglicherweise mathematikspezifische) Metakognition. Es wird in dieser Arbeit **nicht** davon ausgegangen, dass metakognitive Aspekte sich auf eine ähnliche Art aus einem mathematischen Begriff heraus ergeben könnten, wie dies im Fall von Aspekten und Grundvorstellungen (vgl. Kapitel 4.4.1) der Fall ist.

In jedem Fall dürfte die Einführung und (gemeinsame oder selbstständige) Erarbeitung neuer Begriffe von metakognitiver Aktivität profitieren. Hier spielen sicher die prozeduralen Aspekte von Metakognition eine große Rolle, die den gesamten Vorgang (ggf. über mehrere Tage und Wochen hinweg) quasi „begleiten“ – überwachen, reflektieren – und insgesamt steuern. Die Eingliederung ins bestehende Wissen muss metakognitiv begleitet werden. Dabei werden auf Seite des Fachwissens neue Definitionen, Eigenschaften und Verfahren kennengelernt, die ins bestehende Fachwissen integriert werden müssen. Hierbei sollte neben den prozeduralen Aspekten das deklarative Metawissen genutzt und ebenfalls erweitert werden. Neues Wissen über Fachwissen und über neue Strategien entsteht und muss ins Metawissen integriert werden, die Sondierung und Aktivierung von Wissen stellt einen metakognitiven Vorgang dar, Möglichkeiten, Nutzen und Grenzen von Begriffen werden analysiert und die entsprechenden

Erkenntnisse als Wissen über Begriffe, bzw. als Wissen über Wissen gespeichert. Vor allem domänenspezifisches Metawissen spielt hierbei sicher die größte Rolle.

Insbesondere bei Begriffen, die entweder „nur“ auf intuitiver Ebene eingeführt werden, oder deren explizite Einführung auf einer vorherigen propädeutischen Behandlung aufbaut, sind gedankliche Konflikte und scheinbare Widersprüche aufzulösen, „naive“ Vorstellungen sind als „unzureichend“ zu erkennen (was insbesondere die implizite Komponente anspricht) und zu formal korrekten Vorstellungen zu erweitern und die Folgen eines „neuen“, ausgeweiteten Verständnisses sind zu überblicken und einzuordnen. Es scheint naheliegend, dass optimalerweise diese Vorgänge metakognitiv bewusst begleitet, überwacht und gesteuert werden sollten, um Verwirrungen möglichst schnell aufzulösen, Fehlvorstellungen entgegenzuwirken und grundsätzlich einen Überblick darüber zu behalten, was „geschieht“ und welche Notwendigkeiten und Möglichkeiten sich daraus ergeben.

Dass sowohl bei „neuen“ als auch bei nicht neu eingeführten Begriffen eine solche metakognitive Überwachung grundsätzlich nützlich sein sollte, scheint naheliegend. Je besser der Überblick über das eigene Wissensnetz und seine inter-begrifflichen Beziehungen ist, desto flexibler und angemessener sollten Aufgabenstellungen bewältigt werden können. Gerade das Prinzip des Genetischen Unterrichts, bei dem Lernende an den gedanklichen „Konstruktionsprozessen“ teilhaben, die hinter mathematischen Begriffen stehen, sowie das Stufenschema des Begriffslernens und die Übergänge zwischen diesen Stufen, die eine immer tiefere Durchdringung des Begriffs und seines Kontextes ermöglichen, sollten mit einer aktiven Überwachung und Steuerung der eigenen Kognition (etwa im Sinne von Rückfragen an die eigene Person, was das Verständnis eines Begriffs betrifft) gut vereinbar sein (vgl. Kapitel 4.4.1). Im Hinblick auf das Begriffsverständnis erweisen sich vor allem die mit Begriffen verbundenen Aspekte, Vorstellungen, Darstellungen, Perspektiven und der kontextabhängige Wechsel zwischen diesen als zentraler Ansatzpunkt für Metakognition. Die Auswahl der jeweils angemessenen Vorstellung oder des angemessenen Aspekts für die jeweilige Aufgabenstellung erfordert Wissen über das eigene Wissen und dessen „Einsatz“, sie erfordert außerdem die Beurteilung von Wissen auf Angemessenheit, Nützlichkeit, etc.. Dies dürfte sowohl für fachliche Aspekte, Grundvorstellungen, individuelle (Grund-)Vorstellungen bis hin zu persönlichen Merkhilfen („Eselsbrücken“) gelten, die analysiert und bewertet werden müssen. Der flexible Wechsel zwischen verschiedenen Vorstellungen, Prototypen oder Darstellungsformen und deren Einsatz je nach Anforderung ist wichtiger Teil mathematischer „Kompetenz“ (vgl. Kapitel 2.3.3) und sollte von einem Überblick über das eigene Fach- und

Metawissen (Aufgaben-, Strategie-) profitieren können. Als „neues“ Gebiet, dessen Begriffe und Verfahren im Unterricht mit – möglicherweise besonders vielen – Darstellungswechseln einhergehen und das im Unterricht häufig in Form von Aufgaben mit Realbezug auftritt, scheint daher insbesondere die Analysis der Sekundarstufe II in dieser Hinsicht prädestiniert für den Einsatz von Metakognition.

Mathematische Begriffe, Begriffsverständnis und die zugehörigen Aspekte und (Grund-)Vorstellungen sind daher nach Ansicht des Autors eng verbunden mit einem metakognitiven Systemwissen, den Komponenten Aufgaben- und Strategiewissen und bei ihrer Erst-Einführung und bei ihrer Verwendung mit der Überwachung, Steuerung und Adaption und der regelmäßigen Reflexion der eigenen Kognition und des eigenen (neuen) Wissens. Die metakognitiven Erfahrungen, die dabei geschaffen werden und die bei erneutem Einsatz der entsprechenden Begriffe auf intuitiver, unbewusster Ebene bei der Analyse einer Situation und der Auswahl angemessener Vorgehensweisen helfen, dürften hier ebenfalls von zentraler Bedeutung sein – sie sollten mit der Zeit ein „Gefühl“, eine Sensitivität (im Sinne der entsprechenden Kategorie, vgl. Kapitel 4.2) für den jeweiligen Begriff und seine Bedeutung schaffen. Gerade damit und in Verbindung zu den sinnstiftenden Grundvorstellungen sollte der metakognitive Aspekt „Sense-Making“ einhergehen, der – durch Analyse, Reflexion, aber auch durch wiederholtes Üben und Verwenden eines Begriffs in möglichst vielen Kontexten – die „Vertrautheit“ mit diesem erhöhen und seine Bedeutung über Definitionen hinaus für die Lernenden (individuell) entwickeln helfen kann.

Wie wiederholt angesprochen, stellt sich vor allem in der Mathematik und im Zusammenhang mit ihren Begriffen und Verfahren in Relation zu Aufgaben- und Fragestellungen die Frage nach Möglichkeiten und Grenzen, nach Ursachen und Auswirkungen, oder konkret in der Analysis der Sekundarstufe II bspw. die Frage nach „hinreichenden“ und „notwendigen“ Bedingungen. Gerade im Zusammenhang mit der Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ (vgl. Kapitel 2.3.3) sollte Wissen über Kognition, über logisches Denken, Schlussfolgern und die Nutzung mathematischer Zusammenhänge zur Argumentation als Teil von Metakognition naheliegenderweise eine wichtige Rolle spielen. Im Hinblick auf die zuvor angesprochenen Begriffe und den Übergang von einer primär intuitiven, „naiven“ Sichtweise hin zu einer abstrakten, formal-korrekten, an Axiome und Definitionen gebundenen Sichtweise dürfte die Notwendigkeit der letzteren zu klären sein; es muss analysiert und verstanden werden, warum bestimmte Überlegungen und bestimmtes Wissen allein nicht ausreichen, um logische Zusammenhänge vollständig zu erfassen und zu nutzen.

Das gedankliche Umschalten zwischen diesen Sichtweisen, genauso wie der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen und Vorstellungen je nach Angemessenheit, sowie die dazu notwendigen Beurteilungen/ Bewertungen und das zu Grunde liegende Verständnis für diese Vielschichtigkeit von Begriffen, Verfahren, bzw. insgesamt von Wissen und Kognition, dürfte ein zentrales Kennzeichen von Mathematik sein (vgl. Kapitel 4,4,1) und kann nach Ansicht des Autors nur mit entsprechender Metakognition – im Sinne von Überblick, Überwachung und der Fähigkeit, Denkprozesse anzupassen und zu steuern – optimal entwickelt werden. Die entsprechenden Übersetzungsprozesse zwischen verschiedenen „Ausprägungen“ von Kognition sollten gerade in der Mathematik und im Hinblick auf ihren Bezug zur „Realität“ entscheidend sein.

Nicht zuletzt stellt der Umgang mit „Nicht-Wissen“ in meinen Augen einen wichtigen Ansatzpunkt von Metakognition dar, der insbesondere die unbewusste, intuitive Komponente von Metakognition fordert. Wissen darum, wie bei Unwissen Erinnerungen aktiviert, Wissen analysiert („durchsucht“), aber auch Ideen und Erkenntnisse möglicherweise „herbeigeführt“ werden können, wie „Gedankenexperimente“ interpretiert und zur Generierung neuer Lösungsverfahren genutzt werden können und wie das „Spielen“ und gedankliche „Experimentieren“ mit Mathematik neue Ideen hervorbringen und das eigene Verständnis erweitern kann, sollten gerade im Hinblick auf eine über die Schule hinausgehende Beschäftigung mit Mathematik (z.B. in Form eines Studiums oder einer wissenschaftlichen Tätigkeit), die sich immer weiter vom Kalkül und hin zu einer mathematischen „Kreativität“ entwickelt, essenziell sein. Das angesprochene „Gefühl“ für Mathematik, das aus metakognitiven Erfahrungen herrührt und das in einem heuristischen Sinne „Abkürzungen“ und scheinbar spontane, zuerst nicht begründbare Erkenntnisse verschafft – sowie das Wissen darum, wie diese umgesetzt werden können, sollte besonders für Mathematiker_innen von Bedeutung sein.

6. Ausblick

Dass ein Nachdenken über Mathematik (und eigene Kognition) von den Teilnehmer_innen in der Regel selten praktiziert wurde, scheint die Bedeutung einer expliziten Thematisierung des "Werkzeugs" Metakognition mit den Lernenden und die Erläuterung seiner Möglichkeiten und seines Nutzens (vgl. Kapitel 2.2) zu belegen und macht diese zu einem ersten, grundlegenden Ziel, um bei Lernenden entsprechendes Wissen über Metakognition (also bereits Metakognition) und ein entsprechendes Bewusstsein zu schaffen. Dies dürfte die Thematisierung von Lern- und Denkprozessen und -mechanismen allgemein notwendig machen. Dass hierfür eine den Lernenden angemessene Form gefunden werden muss und Metakognition nicht in einer wissenschaftlichen Tiefe, sondern in einer pragmatisch orientierten Form thematisiert werden sollte, dürfte außer Frage stehen.

Beispiele für ein solches Training bzw. die Integration von Metakognition in den Mathematikunterricht oder die Hochschullehre existieren bereits. Genannt seien hier nochmals etwa die Arbeiten Schoenfelds oder Cohors-Fresenborgs (vgl. Kapitel 2.3.1), die bereits behandelt wurden. In beiden Fällen werden bestimmte (vor allem prozedurale) Aspekte von Metakognition in den Mathematikunterricht, bzw. in die Hochschullehre integriert. Dies scheint naheliegend, da Untersuchungen zeigen, dass diese im Vergleich zu deklarativen Aspekten stabilere Erfolge nach sich ziehen (vgl. Kapitel 2). Gerade im Rahmen der Mathematikdidaktik ist allerdings auch die Vermittlung von deklarativen Aspekten essentiell: einerseits in Form der oben angesprochenen Thematisierung von Metakognition als Werkzeug, was seinerseits bereits der Vermittlung deklarativen Metawissens (über Metakognition) entspricht; andererseits im Sinne der Etablierung von domänenspezifischen und systemischen Aspekten, die der Bedeutung von Reflexionen über Fach- und (metakognitives) Aufgabenwissen Rechnung tragen. Die Verwendung prozeduraler Metakognition im Sinne von Fähigkeiten ist zwar bereits implizit möglich. Allerdings ergeben sich ohne eine informierte Basis in Form deklarativen Metawissens über die Nützlichkeit und Verwendung dieser prozeduralen Fähigkeiten Schwierigkeiten im Hinblick auf die selbständige und bewusste Verwendung des „Werkzeugs“, wie bereits in Kapitel 2 angesprochen. Insbesondere die selbstständige Weiterentwicklung eigener metakognitiver Fähigkeiten wird sich als schwierig erweisen, wenn entsprechende Fähigkeiten weitgehend implizit vorhanden sind und kein deklaratives Wissen um das verwendete Werkzeug und seine Mechanismen besteht.

In Bezug auf Metawissen im Hinblick auf Mathematik scheint mir insbesondere das mathematikbezogene „systemische Wissen“ relevant. Die Förderung eines „systematischeren“ Überblicks über das Fach Mathematik, wie er bspw. im Rahmen fachdidaktischer Hochschul-Vorlesungen in Form von stoffdidaktischen Überlegungen vermittelt wird scheint mir – in einer angemessenen Form – für Lernende von Nutzen zu sein, was sich im hier entwickelten Modell (Kapitel 4.2) widerspiegelt.

Wie zuvor erläutert (vgl. Kapitel 4.2, Kapitel 4.4.1), wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass Metawissen – vor allem Aufgaben- und Strategie-Wissen, also Wissen in Bezug auf die „Aufgabe“ Mathematik, auf Problemlöse- und Lern-Strategien im Bereich Mathematik, aber auch Wissen über prozedurale Vorgänge wie Planung, Überwachung und Reflexion von Arbeitsprozessen – mathematikdidaktischem Wissen nicht unähnlich ist, wie Experten und Lehrkräfte es besitzen. Zu (fach-)didaktischem Wissen gehört Wissen über die Struktur von Mathematik (ihren axiomatischen Aufbau, ihre Begriffe und Wirkzusammenhänge, ihren Bezug zur „Realität“ und zu anderen Wissensbereichen) und über Mechanismen des Anwendens, Verstehens, Lernens und Lehrens von Mathematik. Mathematikdidaktiker_innen – „Theoretiker_innen“ wie „Praktiker_innen“ - studieren diese „Meta-Mathematik“ im Rahmen ihres Studiums, erforschen sie als Wissenschaftler_innen und wenden sie als Lehrkräfte in Schule und Hochschule an, um entweder direkt zu unterrichten oder die Vermittlung von Mathematik zu planen und zu verbessern. Dabei stellt sich aber die Frage, wie oft dabei die entsprechenden Wirkzusammenhänge den „Be-Lehrten“ beim Lernen mit-vermittelt werden. Sie bleiben für Lernende in der Regel vermutlich implizit. Die Überlegungen, die – durch die Lehrkraft als Vermittler_in – ihren Lernprozess steuern, sind ihnen selbst wahrscheinlich kaum bekannt. Es lässt sich sagen, dass dieses Wissen, wäre es Lernenden tatsächlich explizit bekannt und zugänglich, sich als Metakognition bezeichnen ließe – Wissen über Aufgabe (Mathematik), Person (Mechanismen für Verständnis, Lernen, Gedächtnis, etc.), Strategie (fachliche, z.B. Problemlösestrategien, wie auch allgemeine, die sich auf das eigene Lern- und Arbeitsverhalten beziehen), und auch prozedurales Wissen über die Planung, Überwachung, Reflexion und insbesondere Steuerung eigener Lernprozesse.

Dass die Vermittlung solchen Wissens (im Unterricht) von verschiedenen (limitierenden) Faktoren beeinflusst wird, dürfte außer Frage stehen. Pragmatisch gesehen, stehen hier vor allem das Alter der Lernenden sowie die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit im Vordergrund. Andererseits scheint es nicht unmöglich, altersangemessenes Wissen und entsprechende Strategien als Teil des Unterrichts (in verschiedenen Fächern) zu vermitteln,

sodass Metakognition im Verlauf der Schulzeit – quasi „nebenher“ – laufend trainiert wird. Tatsächlich wird in der Literatur eine solche „verzahnte“ Vermittlung explizit empfohlen (Kapitel 2.2).

Spätestens im Hochschulbereich dürfte die Vermittlung metakognitiven/ didaktischen Wissens – vor allem, wenn dies auf der Basis bereits in der Schule erworbener Metakognition geschieht – sich durchaus in einer Art realisieren lassen, die im Hinblick auf Kosten (Zeit) und Nutzen sinnvoll ist. In diesem Zusammenhang wäre Forschung im Bereich von Lehramtsstudiengängen möglicherweise ein erster Schritt, da Lehramtsstudierenden bereits als Teil ihres Studiums sowohl fachliche als auch fachdidaktische Inhalte vermittelt werden. Es stellt sich die Frage, inwieweit möglicherweise das neu-erworbene didaktische Wissen den eigenen Lernprozess in den Fach-Vorlesungen beeinflusst, bzw. unterstützen könnte.

Im Hinblick auf eine unterrichtspraktische Implementierung von Metakognition stellt sich auf einer weniger fachbezogenen Ebene – wie bereits angesprochen – die Frage, ob Lernende durch einen stärkeren Einbezug in ihren eigenen Lernprozess Vorteile haben können. Über die Vermittlung von „Lerntechniken“, Motivationshilfen oder Entspannungsübungen hinaus wird es in dieser Arbeit für förderlich gehalten, Lernenden einen Einblick in tatsächliche didaktische Überlegungen – wie sie das Verhalten von Lehrkräften leiten – zu gewähren. Es liegt nahe, dass bereits metakognitive Strategien zur besseren Verinnerlichung und Memorisierung von Fachwissen und fachnaher (domänenspezifischer) Metakognition nützlich sein können – insbesondere im Hinblick auf Forschungsergebnisse, die belegen, dass Mathematikleistung im Verlauf der Schulzeit zunehmend stärker mit dem bereits erworbenen (und noch „vorhandenen“) Mathematikwissen (allgemein formuliert!) zusammenhängt (vgl. Kapitel 2). Strategien, die einer Festigung dienen und dem Vergessen entgegenwirken sollten also einem Nachlassen der Mathematikleistung vorbeugen, bzw. diese steigern. Entsprechende Defizite, was den Abruf vormals bekannter Inhalte betrifft, konnten im Rahmen der Interviewstudie beobachtet werden.

7. Abbildungen

Abbildung 1: Ausgangssituation eines Optimierungsproblems _____	S. 102
Abbildung 2: Einführung eines Koordinatensystems _____	S. 105
Abbildung 3: Wahl relevanter Punkte _____	S. 106
Abbildung 4: Gerade _____	S. 108
Abbildung 5: Graph der Zielfunktion _____	S. 109
Abbildung 6: Graphen von Zielfunktion und Ableitung _____	S. 110
Abbildung 7: Modell für Metakognition beim Umgang mit Mathematik _____	S. 184
Abbildung 8: Aspekte und Grundvorstellungen in der Differenzialrechnung _____	S. 256

8. Abkürzungen

Abb.	Abbildung
bzgl.	bezüglich
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
etc.	et cetera
f.	folgend(e) – nächste Seite
ff.	folgend(e) – folgende Seiten
ggf.	gegebenenfalls
inkl.	inklusive
S.	Seite
s.	siehe
sic.	sic erat scriptum
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel
→, (→)	Erläuterung s. Kapitel 1.3

9. Quellen

- Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33, 87-111.
- Ableitinger, C. & Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten: Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen. *Mathematik lehren*, 30, 2-10.
- Ader, E. (2013). A framework for understanding teachers' promotion of students' metacognition. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Abgerufen von <https://www.cimt.org.uk/journal/ader.pdf>
- Ader, E. (2019). What would you demand beyond mathematics? Teachers' promotion of students' self-regulated learning and metacognition. *ZDM Mathematics Education*, 51, 613-624.
- Alexander, J. M., Carr, M. & Schwanenflugel, P. (1995). Development of metacognition in gifted children: Directions for future research. *Developmental Review*, 15, 1-37.
- Artelt, C. & Moschner, B. (2005). Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis – Einleitung. In C. Artelt, & B. Moschner (Hrsg.), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis* (S. 7-11). Münster: Waxmann.
- Artelt, C. & Neuenhaus, N. (2010). Metakognition und Leistung. In W. Bos (Hrsg.), *Schulische Lerngelegenheiten und Kompetenzentwicklung: Festschrift für Jürgen Baumert* (S. 127-146). Münster: Waxmann.
- Artzt, A. F. & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9(2), 137-175. Abgerufen von https://doi.org/10.1207/s1532690xci0902_3
- Azevedo, R. & Aleven, V. (2013). International Handbook of Metacognition and Learning Technologies. Abgerufen von <https://www.doi.org/10.1007/978-1-4419-5546-3>
- Azevedo, R., Greene, J. A. & Moos, D. C. (2007). The effect of a human agent's external regulation upon college students' hypermedia learning. *Metacognition and Learning*, 2, 67-87.
- Bach, V. (2012). Welche Mathematikkenntnisse fehlen den Studienanfängern? – Eine Umfrage. *Mitteilungen der DMV*, 20, 249-250. Berlin: De Gruyter.

- Baird, J. R. & White, R. T. (1996). Metacognitive strategies in the classroom. In D. F. Treagust, R. Duit & B. J. Fraser (Hrsg.), *Improving teaching and learning in science and mathematics* (S. 190-200). New York: Teachers College Press.
- Baten, E. & Desoete, A. (2019). Metacognition and motivation in school-aged children with and without mathematical learning disabilities in Flanders. *ZDM Mathematics Education*, 51, 679-689.
- Baten, E., Praet, M. & Desoete, A. (2017). The relevance and efficacy of metacognition for instructional design in the domain of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 49, 613-623.
- Berlin, T. (2007). Metakognition als Schlüssel zur Einführung der algebraischen Formelsprache. In Barzel, B. (Hrsg.), *Algebraisches Denken: Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 17-25). Hildesheim: Franzbecker.
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Abgerufen von https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Hrsg.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (S. 15-30). Dordrecht: Springer. https://www.doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Hrsg.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (S. 73-96). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematische Denkstile – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung*. Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.
- Borkowski, J. G., Millstead, M. & Haie, C. (1988). Components of Children's Metamemory: Implications for Strategy Generalization. In F. E. Weinert & M. Perlmutter (Hrsg.), *Memory Development: Individual Differences and Universal Changes* (S. 73-100). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Borkowski, J. G. & Turner, L. A. (1990). Transsituational Characteristics of Metacognition. In W. Schneider & F. E. Weinert (Hrsg.), *Interactions among Aptitudes, Strategies, and Knowledge in Cognitive Performance* (S. 159-176). New York: Springer.
- Brinkschmidt, S. (2005). Metakognitives Verhalten von Schülergruppen unterschiedlichen Leistungsvermögens. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 131-134. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Brown, A. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In R. Glaser (Hrsg.), *Advances in instructional psychology* (S. 77-165). Hillsdale: Erlbaum. Abgerufen von <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED146562.pdf>
- Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Hrsg.), *Metacognition, motivation and understanding* (S. 65–116). Hillsdale: Erlbaum.
- Brown, A. L., Bransford, J. D., Ferrara, R. & Campione, J. (1983). Learning, remembering and understanding. In J. H. Flavell & E. M. Markman (Hrsg.), *Handbook of child psychology: Vol. 3. Cognitive development* (S. 77-166). New York: Wiley.
- Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip: Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen. *Mathematiklehren*, 182, 2-9.
- Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Carr, M., Alexander, J. & Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Applied Cognitive Psychology*, 8, 583–595. <https://doi.org/10.1002/acp.2350080605>
- Carr, M. & Biddlecomb, B. (1998). Metacognition in mathematics from a constructivist perspective. In D. J. Hacker, J. Dunlosky & A. C. Graesser (Hrsg.), *Metacognition in educational theory and practice*, (S. 69-91). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Carr, M. & Jessup, D. L. (1995). Cognitive and metacognitive predictors of arithmetic strategy use. *Learning and Individual Differences*, 7, 235–247. [https://doi.org/10.1016/1041-6080\(95\)90012-8](https://doi.org/10.1016/1041-6080(95)90012-8)
- Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, grades K-6*. Sausalito: Math Solutions.

- Chatzistamatiou, M., Dermizaki, I. & Bagiatis, V. (2014). Self-regulatory teaching in mathematics: relations to teachers' motivation, affect and professional commitment. *European Journal of Psychology of Education*, 29, 295-310.
- Cavanaugh, J. C. (1989). The Importance of Awareness in Memory Aging. In L. W. Poon, D. C. Rubin & B. A. Wilson (Hrsg.), *Everyday Cognition in Adulthood and Late Life* (S. 416-436). Cambridge: Cambridge University Press.
- Cohors-Fresenborg, E. (1999). Untersuchung zur Kognition bei Termumformung. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 133-136. Hildesheim: Franzbecker.
- Cohors-Fresenborg, E. (2011). Metakognitive und diskursive Aktivitäten im Unterricht der Mathematik und anderer geisteswissenschaftlicher Fächer. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 183-186. Münster: WTM.
- Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003). Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten“ gymnasialen Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 173-180. Hildesheim: Franzbecker.
- Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Zülsdorf-Kersting, M. (2014). *Klassifikation von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten im Mathematik- und Geschichtsunterricht mit einem gemeinsamen Kategoriensystem*. Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik, 63. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Cohors-Fresenborg, E., Kramer, S., Pundsack, F., Sjuts, J. & Sommer, S. (2010). The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement. *ZDM Mathematics Education*, 42. 231-244.
- Craig, T. S. (2001). *Factors Affecting Students' Perceptions of difficulty in Calculus Word Problems*. Cape Town, South Africa. University of Cape Town, Rondebosch. Abgerufen von https://www.academia.edu/232418/Craig_T_S_2002_Factors_affecting_students_perceptions_of_difficulty_in_calculus_word_problems_in_Proceedings_of_Second_International_Conference_on_the_Teaching_of_Mathematics_at_the_Undergraduate_Level_Crete?auto=download
- Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.
- Davis, K. S. (2003). “Change is hard”: What science teachers are telling us about reform and teacher learning of innovative practices. *Science Education*, 87(1), 3-30. <https://doi.org/10.1002/sce.10037>

- De Corte, E., Depaepe, F., Op 't Eynde, P. & Verschaffel, L. (2011). Students' self-regulation of emotions in mathematics: an analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM Mathematics Education*, 43, 483-495.
- Dent, A. L. & Koenka, A. C. (2016). The relation between self-regulated learning and academic achievement across childhood and adolescence: A meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 28, 425–474.
- Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM Mathematics Education*, 42, 205-218.
- Desoete, A., Baten, E., Vercaemst, V., De Busschere, A., Baudonck, M. & Vanhaeke, J. (2019). Metacognition and motivation as predictors for mathematics performance of Belgian elementary school children. *ZDM Mathematics Education*, 51, 667-677.
- Desoete, A. & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: an overview. *ZDM Mathematics Education*, 51, 565-575.
- Desoete, A. & Veenman, M. V. J. (2006). Metacognition in mathematics: Critical issues on nature, theory, assessment and treatment. In A. Desoete & M. V. J. Veenman (Hrsg.). *Metacognition in mathematics education* (S. 1-10). New York: Nova Science Publishers Inc.
- Dignath, C. & Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition and Learning*, 13(2), 127-157. <https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x>
- Dinsmore, D. L., Alexander, P. A. & Loughlin, S. M. (2008). Focusing the conceptual lens on metacognition, self-regulation, and self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, 20, 391–409.
- Dunning, D., Johnson, K., Ehrlinger, J. & Kruger, J. (2003). Why people fail to recognize their own incompetence. *Current Directions in Psychological Science*, 12, 83-87.
- Dunlosky, J. & Metcalfe, J. (2009). *Metacognition*. Los Angeles: Sage.
- Eichler, A. & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46, 647–659. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y>
- Efklides, A. (2008). Metacognition. *European Psychologist*, 13, 277-287. <https://doi.org/10.1027/1016-9040.13.4.277>.

- Efklides, A., Papadaki, M., Papantoniou, G. & Kiosseoglou, G. (1998). Individual differences in feelings of difficulty: The case of school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, 13, 207-226.
- Efklides, A., Vauras, M. (1999). Introduction. *European Journal of Psychology of Education*, 14, 455-459.
- Eilerts, Bescherer & Niederdrenk-Felgner (2011). Arbeitskreis „HochschulMathematikDidaktik“. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 56-59. <https://doi.org/10.1515/dmvm-2011-0026>
- Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1993). Protocol analysis. Cambridge: MIT Press.
- Everson, H. T. & Tobias, S. (2002). The ability to estimate knowledge and performance in college: a metacognitive analysis. In H. J. Hartman (Hrsg.), *Metacognition in Learning and Instruction: Theory, Research and Practice*, (S. 69-83). Springer.
- Fabriz, S., Dignath-van Ewijk, C., Poarch, G. & Büttner, G. (2014). Fostering self-monitoring of university students by means of a standardized learning journal – a longitudinal study with process analyses. *European Journal of Psychology of Education*, 29, 239-255. <https://doi.org/10.1007/s10212-013-0196-z>
- Fagnant, A. & Crahay, M (2001). Theories of mind and personal epistemology: their interrelation and connection with the concept of metacognition. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 257-271.
- Fan, L. & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: a conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM Mathematics Education*, 46, 481-492.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Hrsg.), *The nature of intelligence* (S. 231-235). Hillsdale: Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911.
- Flavell, J. H., Miller, P. H. & Miller, S. A. (1993). *Cognitive development*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Flavell, J. H. & Wellman, H. M. (1977). Metamemory. In R. V. Kai & J. W. Hagen (Hrsg.), *Perspectives on the Development of Memory and Cognition*, (S. 3-33). Hillsdale: Erlbaum.
- Flick, U. (1995). *Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendungen in Psychologie und Sozialwissenschaften*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Verlag.

- Flick, U., von Kardorff, E., Keupp, H., von Rosenstiel, L. & Wolff, S. (Hrsg.) (1991). *Handbuch qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen*. München: Psychologie Verlags Union.
- Flick, U., von Kardorff, E. & Steinke, I. (2000). *Qualitative Forschung: Ein Handbuch*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Verlag.
- Friedrich, H. (2001). Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten. Dissertationsschrift. Paderborn. Univ.-GH. <http://digital.ub.uni-paderborn.de/ubpb/urn/urn:nbn:de:hbz:466-20090518061>
- Furdek, A. (2004). Der Fehler am Rande: lokale Extremwerte. *Mathematik lehren*, 125, 55-57.
- Gallin, P. & Ruf, U. 1995. Singuläre Schülertexte als Basis eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts. In R. Biehler, H. W. Heymann & B. Winkelmann (Hrsg.), *Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule* (S.59-82). Köln: Aulis.
- Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.
- Gascoine, L., Higgins, S. & Wall, K. (2017). The assessment of metacognition in children aged 4-16 years: a systematic review. *Review of Education*, 5, 3-57.
- Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (2010) *Grounded Theory: Strategien qualitativer Forschung*. Bern: Huber.
- Glatzeder, B., Goel, V. & von Müller, A. (2010). *Towards a Theory of Thinking: Building Blocks for a Conceptual Framework*. Berlin/ Heidelberg: Springer.
- Glinka, H.-J. (1998). *Das narrative Interview: Eine Einführung für Sozialpädagogen*. Weinheim: Juventa.
- Götz, H., Schmid, A. & Weidig, I. (2010). *Lambacher-Schweizer: Mathematik für Gymnasien*. Stuttgart: Klett.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin/ Heidelberg: Springer Spektrum.
- Gretzmann, E. M. (2010). Eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur als Grundlage kognitiver Aktivierung im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 357-360.

- Grieser, D. & Hochmuth, R. (2018). Mathematik lehren an der Hochschule: Perspektiven aus Mathematik und Didaktik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 25-32.
- Hacker, D. J., Bol, L. & Keener, M. C. (2008). Metacognition in education: A focus on calibration. In J. Dunlosky & R. A. Bjork (Hrsg.), *Handbook of metamemory and memory*, (S. 429-455). New York: Psychology Press.
- Hacker, D. J., Kiuahara, S. A. & Levin, J. R. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 51, 601-612.
- Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: An introduction. *Instructional Science*, 26, 1-3. <https://doi.org/10.1023/A:1003023628307>
- Hartman, H. J. (Hrsg.) (2001). *Neuropsychology and cognition: Vol. 19. Metacognition in learning and instruction: Theory, research and practice*. Dordrecht: Kluwer.
- Hasselhorn, M. (1992). Metakognition und Lernen. In Nold, Günter (Hrsg.) *Lernbedingungen und Lernstrategien: welche Rolle spielen kognitive Verstehensstrukturen?*, (S. 35-63). Tübingen: Narr.
- Hasselhorn, M., & Gold, A. (2006). *Pädagogische Psychologie: Erfolgreiches Lernen und Lehren*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Haugwitz, M. & Dresel, M. (2007). Selbstreguliertes Lernen mit einer Mathematiklernsoftware: Einsatz metakognitiver Strategien und motivationale Prädiktoren. *Zeitschrift für Medienpsychologie* 19(3). 90-104.
- Hellmich, F. & Wernke, S. (2006). Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen von Kindern im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 255-258. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Hidayat, R., Zulnaida, H. & Syed Zamri, S. N. A. (2018). Roles of metacognition and achievement goals in mathematical modelling competency: A structural equation modelling analysis. *PLoS One*, 13(11), e0206211. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0206211>
- Hischer, H. & Scheid, H. (1995). *Grundbegriffe der Analysis: Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht*. Heidelberg, Spektrum.
- Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
- Holton, D. (Hrsg.) (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, an ICMI Study*. Kluwer Academic.

- Hoyles, C. (1986). Scaling a Mountain – A Study of the Discrimination and Generalisation of Some Mathematical Concepts in a LOGO Environment. *European Journal of Psychology of Education* 1, 111-126.
- Huang, H.-M. E. (2014). Third to fourth-grade students' conceptions of multiplication and area measurement. *ZDM Mathematics Education*, 46, 449-463.
- Kaiser, A. & Kaiser, R. (1999). Metakognition: Denken und Problemlösen optimieren. Luchterhand.
- Kaune, C. (2006). Reflection and Metacognition in Mathematics Education – Tools for the Improvement of Teaching Quality. *ZDM Mathematics Education*, 38, 350-360.
- Kaune, C. (2007). Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten bei schrittweise kontrolliertem Argumentieren im Algebra-Unterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, 140-143. Hildesheim: Franzbecker
- Kaune, C. (2009). Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, 259-262. Münster: WTM
- Kaune, C., Cohors-Fresenborg, E. & Kramer, S. (2010). Aufgaben zur Förderung metakognitiver Kompetenzen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*, 481-484. Münster: WTM
- Keitel, C. (1992). Mathematician or pedagogue? On the education of teachers of mathematics in Germany. *The Curriculum Journal*, 3:3, 291-309, <https://doi.org/10.1080/0958517920030307>
- Kistner, S., Rakoczy, K., Otto, B., Dignath-van Ewijk, C., Büttner, G. & Klieme, E. (2010). Promotion of self-regulated learning in classrooms: Investigating frequency, quality, and consequences for student performance. *Metacognition and Learning*, 5(2), 157-171. <https://doi.org/10.1007/s11409-010-9055-3>
- Kluwe, R. H. & Schiebler, K. (1984). Entwicklung exekutiver Prozesse und kognitive Leistungen. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Hrsg.), *Metakognition, Motivation und Lernen*, (S. 31-60). Stuttgart: Kohlhammer.
- Konrad, K. (2005). *Förderung und Analyse von selbstgesteuertem Lernen in kooperativen Lernumgebungen: Bedingungen, Prozesse und Bedeutung kognitiver sowie metakognitiver Strategien für den Erwerb und Transfer konzeptuellen Wissens*. Lengerich: Papst Science Publishers.

- Konrad, K. (2010). *Mündliche und schriftliche Befragung: Ein Lehrbuch*. Landau: Verl. Empirische Pädagogik.
- Korneli, P. (2008). *Selbstlernkompetenz durch Metakognition: Lernpotenziale entdecken und fördern. Anregungen für die berufliche Erwachsenenbildung*. Dissertationsschrift. Duisburg, Essen. urn:nbn:de:hbz:465-20080702-142711-4
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40(1), 281-310. <https://doi.org/10.3102/00028312040001281>
- Kramer, S. (2009). Diagnose metakognitiver Aktivitäten – Trainingsmaßnahmen für Mathematiklehrkräfte. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, 255-258. Münster: WTM.
- Kruger, J. & Dunning, D. (1999). Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one's incompetence lead to inflated selfassessments. *Journal of Personality and Social Psychology*, 77, 1121-1134.
- Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim Basel: Beltz
- Kuhl, J. (1985). Volitional Mediators of Cognition-behavior Consistency: Self-regulatory Processes and Action Control versus State Orientation. In J. Kuhl & J. Beckmann (Hrsg.), *Action Control: From Cognition to Behavior*, 101-128. New York: Springer.
- Kuhn, D. (2000). Metacognitive development. *Current Directions in Psychological Science*, 9(5), 178-181. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00088>
- Kuzle, A. (2018). Assessing metacognition of grade 2 and grade 4 students using an adaptation of multi-method interview approach during mathematics problem-solving. *Mathematics Education Research Journal*, 30, 185-207. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0227-1>
- Lan, W. Y. (2005). Self-monitoring and its relationship with educational level and task importance. *Educational Psychology*, 25, 109-127. <https://doi.org/10.1080/0144341042000294921>
- Larson, C. B. (2009). *Metacognition: New research developments*. New York: Nova Science.
- Lee, N. H., Yeo, J. S. D. & Hong, S. E. (2014). A metacognitive-based instruction for Primary Four students to approach non-routine mathematical word problems. *ZDM Mathematics Education*, 46, 465-480.

- Leutner, D., Barthel, A. & Schreiber, B. (2001). Studierende können lernen, sich selbst zum Lernen zu motivieren: Ein Trainingsexperiment. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 15, 155-167. <https://doi.org/10.1024//1010-0652.15.34.155>
- Lexikon der Mathematik (2001). Heidelberg/ Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.) (2014). *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Seelze: Klett/Kallmeyer.
- Lingel, K. (2016). *Metakognitives Wissen Mathematik: Entwicklung und Zusammenhang mit der Mathematikleistung in der Sekundarstufe I*. Würzburg: Würzburg University Press. urn:nbn:de:bvb:20-opus-103269
- Lingel, K., Lenhart, J. & Schneider, W. (2019). Metacognition in mathematics: do different metacognitive monitoring measures make a difference?. *ZDM Mathematics Education*, 51, 587-600.
- Lingel, K., Neuenhaus, N., Artelt, C. & Schneider, W. (2014). Der Einfluss des metakognitiven Wissens auf die Entwicklung der Mathematikleistung am Beginn der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35, 49–77.
- Link, F. (2011). Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten: Kontexte und Bedeutungen strategischer Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I. Dortmund: Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 4. Vieweg + Teubner Verlag.
- Lithner, J. (2011) University Mathematics Students' Learning Difficulties, *Education Inquiry*, 2:2, 289-303. <https://doi.org/10.3402/edui.v2i2.21981>
- Liu, M. (2012). *Studienerfolg und Metakognition: eine empirische Untersuchung zur Qualität von Lern- und Studienbedingungen chinesischer Studierender in Deutschland*. Dissertation, LMU München: Fakultät für Sprach- und Literaturwissenschaften. urn:nbn:de:bvb:19-150448
- Löffler, Elisabeth (2017). *Die Entwicklung des prozeduralen Metagedächtnisses über die Lebensspanne*. Dissertation. Universität Würzburg, Würzburg. urn:nbn:de:bvb:20-opus-150424
- Lucangeli, D., Fastame, M. C., Pedron, M., Porru, A., Duca, V., Hitchcott, P. K. & Penna, M. P. (2019). Metacognition and errors: the impact of self-regulatory trainings in children with specific learning disabilities. *ZDM Mathematics Education*, 51, 577-585.

- Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht*. Wien: öbv
- Mason, J. & Spence, M. (2000). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. In D. Tirosh (Hrsg.) *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding* (S. 135-165). Dordrecht: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_7
- Mayring, Ph. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung: Eine Anleitung zu qualitativem Denken*. Weinheim: Beltz.
- Mayring, Ph. (2008). *Die Praxis der Qualitativen Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.
- Mayring, Ph. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Weinheim und Basel: Beltz.
- Meijer, J., Veenman, M. V. J. & van Hout-Wolters, B. H. A. M. (2006). Metacognitive activities in text-studying and problem-solving: Development of a taxonomy. *Educational Research and Evaluation* 12, 209-237.
- Melot, A.-M. (1998). The relationship between metacognitive knowledge and metacognitive experiences: Acquisition and re-elaboration. *European Journal of Psychology of Education* 13, 75-89.
- Melot, A.-M. & Corroyer, D. (1992). Organization of Metacognitive Knowledge: A Condition for Strategy Use in Memorization. *European Journal of Psychology of Education*, 7, 23-38.
- Mevarech, Z. & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and Learning*, 1, 85-97.
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, 34, 365-395. <https://doi.org/10.3102/00028312034002365>
- Moritz, S. (2010). *Erfolgreich gegen Zwangsstörungen: Metakognitives Training – Denkfallen erkennen und entschärfen*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-11308-6>
- Morosanova, V. I., Gomina, T. G., Kovas, Y. & Bogdanova, O. Y. (2016). Cognitive and regulatory characteristics and mathematical performances in high school students. *Personality and Individual Differences*, 90, 177-186. <https://doi.org/10.1016/j.paid.2015.10.034>.
- National Research Council. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, DC: The National Academy Press.

- Nelson, G. & Powell, S. R. (2017). A systematic review on longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 51, 523-539. <https://doi.org/10.1177/0022219417714773>
- Nelson, T. O. (1992). *Metacognition: Core readings*. Boston: Allyn and Bacon.
- Neuenhaus, N. (2011). *Metakognition und Leistung: Eine Längsschnittuntersuchung in den Bereichen Lesen und Englisch bei Schülerinnen und Schülern der fünften und sechsten Jahrgangsstufe*. Dissertation Universität Bamberg. Bamberg: opus
- Neuenhaus, N., Artelt, C., Lingel, K. & Schneider, W. (2011). Fifth graders metacognitive knowledge: general or domain-specific?. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 163-178.
- Nichols, S. E., Tippins, D. & Wieseman, K. (1997). A toolkit for developing critically reflective science teachers. *Research in Science Education*, 27(2), 175-194.
- Ohtani, K. & Hisasaka, T. (2018). Beyond intelligence: A meta-analytic review of the relationship among metacognition, intelligence, and academic performance. *Metacognition and Learning*, 13, 179-212. <https://doi.org/10.1007/s11409-018-9183-8>
- Ots, A. (2013). Third graders' performance predictions: calibration deflections and academic success. *European Journal of Psychology of Education*, 28, 223-237.
- Otte, M. (1990) Intuition and formalism in mathematical proof. *Interchange* 21, 59-64. <https://doi.org/10.1007/BF01809611>
- OV (2013). <http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/reddot/315.htm>. Abgerufen am Montag, 19. August 2013, 12.08 Uhr
- Özsoy, G. (2011). An investigation of the relationship between metacognition and mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review*, 12, 227–235. <https://doi.org/10.1007/s12564-010-9129-6>
- Özsoy, G., & Ataman, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 2, 67-82. <https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/278>
- Palacio-Quintin, E. (1990). L'Education Cognitive à l'Ecole. *European Journal of Psychology of Education* 5, 231-242.
- Paris, S. G., Lipson, M. Y. & Wixson, K. K. (1983). Becoming a Strategic Reader. *Contemporary Educational Psychology*, 8, 293-316.

- Paris, S. G. & Winograd, P. (1990). How metacognition can promote academic learning and instruction. In B. F. Jones & L. Idol (Hrsg.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction*, (S. 15-51). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Perels, F., Dignath, C. & Schmitz, B. (2009). Is it possible to improve mathematical achievement by means of self-regulation strategies? Evaluation of an intervention in regular math classes. *European Journal of Psychology of Education* 24, 17-31.
- Pieger, E. (2017). *Metacognition and Disfluency – The Effects of Disfluency on Monitoring and Performance*. Dissertation. Würzburg, Universität Würzburg. urn:nbn:de:bvb:20-opus-155362
- Pinto, M. A., Iliceto, P. & Melogno, S. (2012). Argumentative abilities in metacognition and in metalinguistics: a study on university students. *European Journal of Psychology of Education*, 27, 35-58.
- Pintrich, P. R. (2002). The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing. *Theory into Practice*, 41(4), 219-225. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_3
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Porst, R. (2011). *Fragebogen: Ein Arbeitsbuch*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Pressley, M., Borkowski, J.G. & O'Sullivan, J.T. (1985). Children's Metamemory and the Teaching of Memory Strategies. In D.L. Forrest-Pressley, G.E. MacKinnon & T.G. Waller (Hrsg.) *Metacognition, Cognition, and Human Performance. Vol. 1. Theoretical Perspectives*, (S. 111-153). Orlando, FL: Academic Press.
- Pressley, M., Borkowski, J.G. & Schneider, W. (1987). Cognitive strategies: Good strategy users coordinate metacognition and knowledge. In R. Vasta & G. Whitehurst (Hrsg.) *Annals of Child Development, Vol. 4* (S. 89-129). Greenwich, CT: JAI Press.
- Pressley, M. & Gaskins, I. (2006). Metacognitive competent reading is constructively responsive reading: How can such reading be developed in students? *Metacognition and Learning*, 1, 99-113.
- Pressley, M. & Harris, K. R. (2006). Cognitive strategies instruction: From basic research to classroom instruction. In P. A. Alexander & P. H. Winne (Hrsg.) *Handbook of educational psychology*, 265-286. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

- Prytula, M. P. (2008). *Scholarship epistemology: An exploratory study of teacher metacognition within the context of successful learning communities*. Dissertation. Canada: University of Saskatchewan.
- Prytula, M. P. (2012). Teacher metacognition within the professional learning community. *International Education Studies*, 5(4), 112-121. <https://doi.org/10.5539/ies.v5n4p112>
- Pundsack, F. (2011). Zum Einfluss von persönlichkeitspsychologischen Merkmalen und metakognitivem Monitoring auf Kontrollaktivitäten von Schülern beim Umformen von Termen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 643-646.
- Raab-Steiner, E. & Benesch, M. (2008). *Der Fragebogen: Von der Forschungsidee zur SPSS-Auswertung*. Wien, UTB.
- Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM Mathematics Education*, 46, 349-361.
- Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A., Zollman, D. & Ozimek, D. (2017). Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. In D. H. Jonassen (Hrsg.) *Learning to Solve Complex Scientific Problems* (S. 223-246). Routledge.
- Reinders, H. (2005). *Qualitative Interviews mit Jugendlichen führen: Ein Leitfaden*. München, Wien: Oldenbourg Wissenschaftsverlag
- Robson, S. (2010). Self-regulation and metacognition in young children's self-initiated play and reflective dialogue. *International Journal of Early Years Education*, 18(3), 227-241. <https://doi.org/10.1080/09669760.2010.521298>
- Rosenthal, G. (2005): *Interpretative Sozialforschung: Eine Einführung*. Weinheim: Juventa.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35, 251-282.
- Rozencwajg, P. (2003). Metacognitive factors in scientific problem-solving strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 18, 281-294.
- Schacht, Florian (2011): *Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem Und Explizitem: Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- Und Variablenbegriff*. Vieweg + Teubner Verlag.
- Scharnhorst, U. & Büchel, F. P. (1990). Cognitive and Metacognitive Components of Learning: Search for the Locus of Retarded Performance. *European Journal of Psychology of Education*, 5, 207-230.

- Schellings, G. L. M., van Hout-Wolters, B. H. A. M., Veenman, M. V. J. & Meijer, J. (2013). Assessing metacognitive activities: the in-depth comparison of a task-specific questionnaire with think-aloud protocols. *European Journal of Psychology of Education*, 28, 963-990.
- Schiefele, U. (2005). Prüfungsnahe Erfassung von Lernstrategien und deren Vorhersagewert für nachfolgende Lernleistungen. In C. Artelt, & B. Moschner (Hrsg.) *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis*, 13-41. Münster: Waxmann
- Schmitt, Oliver (2016): *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II*. Dissertation. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-16365-5>
- Schneider, E. (2006). Mathematics and Reflection: Introduction. *ZDM Mathematics Education*, 38, 314-315.
- Schneider, W. (1986). The role of conceptual knowledge and metamemory in the development of organizational processes in memory. *Journal of Experimental Child Psychology* 42, 318-336.
- Schneider, W. (2008). The Development of Metacognitive Knowledge in Children and Adolescents: Major Trends and Implications for Education. *Mind Brain and Education* 2(3), 114-121.
- Schneider, Wolfgang (2010): The Development of Metacognitive Competencies. In Britt M. Glatzeder, Vinod Goel und Albrecht von Müller (Hrsg.): *Towards a Theory of Thinking. Building Blocks for a Conceptual Framework*. Berlin, Heidelberg: Springer, 203-214.
- Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 42, 149-161.
- Schneider, W. & Hasselhorn, M. (1988). Metakognitionen bei der Lösung mathematischer Probleme: Gestaltungsperspektiven für den Mathematikunterricht. *Heilpaedagogische Forschung*, 14, 113-118.
- Schneider, W. & Pressley, M. (1998). Introduction. *European Journal of Psychology of Education*, 13, 3-8.
- Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem solving research and mathematics education. In F. K. Lester & J. Garofalo (Hrsg.) *Mathematical problem solving: Issues in research* (S. 27-37). Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive Science and Mathematics Education*, 189-215.

- Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem solving. *ZDM Mathematics Education*, 23, 4-8.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334-370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld A. H. (2001). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld (Hrsg.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series 7*, (S. 221-236). Dordrecht: Springer.
- Schoenfeld A. H. (2014). Reflections on learning and cognition. *ZDM Mathematics Education*, 46, 497-503.
- Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, 113-125. <https://doi.org/10.1023/A:1003044231033>
- Schraw, G., Crippen, K. J. & Hartley, K. (2006). Promoting Self-Regulation in Science Education: Metacognition as Part of a Broader Perspective on Learning. *Research in Science Education* 36. 111-139.
- Schraw, G. & Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19, 460-475.
- Schraw, G., Dunkle, M. E., Bendixen, L. D. & Roedel, T. D. (1995). Does a general monitoring skill exist?. *Journal of Educational Psychology*, 87, 433-444. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.3.433>
- Schraw, G. & Nietfeld, J. (1998). A further test of the general monitoring skill hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 90, 236-248. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.236>
- Shilo, A. & Kramarski, B. (2019). Mathematical-metacognitive discourse: how can it be developed among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. *ZDM Mathematics Education*, 51, 625-640.
- Shute, V. J. (1996). Learning processes and learning outcomes. In E. De Corte & F. E. Weinert (Hrsg.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (S. 409-418). Oxford: Elsevier Science.
- Sjuts, J. (1999a). Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions-

- und konstruktivismustheoriegeleiteten Mathematikunterrichts. Dissertation. Osnabrück: Universität Osnabrück.
- Sjuts, J. (1999b). Metakognition im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 497-500. Hildesheim: Franzbecker.
- Sjuts, J. (2000). Definieren, Abstrahieren, Beweisen – wie tragfähig für das Lernen sind passende Modellvorstellungen?. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 618-621. Hildesheim: Franzbecker.
- Sjuts, J. (2001a). Eigenproduktionen und Metakognition. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001*, 588-591. Hildesheim: Franzbecker.
- Sjuts, J. (2001b). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. *Der Mathematikunterricht 1*, 61-68.
- Sjuts, J. (2003a). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24, 18-40.
- Sjuts, J. (2003b). Selbstüberwachung – ein wesentlicher Beitrag zur Verbesserung von Unterrichtsqualität. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*, 601-604. Hildesheim: Franzbecker.
- Soodla, P., Jögi, A.-L. & Kikas, E. (2017). Relationships between teachers' metacognitive knowledge and students' metacognitive knowledge and reading achievement. *European Journal of Psychology of Education*, 32, 201-218.
- Spruce, R., & Bol, L. (2015). Teacher beliefs, knowledge, and practice of self-regulated learning. *Metacognition and Learning*, 10(2), 245-277. <https://doi.org/10.1007/s11409-014-9124-0>
- van der Stel, M. & Veenman, M. V. J. (2014). Metacognitive skills and intellectual ability of young adolescents: a longitudinal study from a developmental perspective. *European Journal of Psychology of Education*, 29, 117-137.
- van der Stel, M., Veenman, M. V. J., Deelen, K. & Haenen, J. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: a cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM Mathematics Education*, 42, 219-229.
- Stillman, G. A. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Hrsg.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (S. 165-180). Dordrecht: Springer.

- Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (1996). *Grounded theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S.3-21). Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Hrsg.) *International Handbook of Mathematics Education*, (S. 289-325). Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41(4), 481-492.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tarricone, P. (2011). *The taxonomy of metacognition*. Hove: Psychology Press.
- Temur, Ö. D., Özsoy, G. & Turgut, S. (2019). Metacognitive instructional behaviours of preschool teachers in mathematical activities. *ZDM Mathematics Education*, 51, 655-666.
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Förster, F. (2000). *Fachdidaktische Grundfragen*. Braunschweig [u.a.]: Vieweg.
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.
- Tietze, U.-P. & Schroth, P. (2000): *Didaktik der analytischen Geometrie und linearen Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Toeplitz O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. In *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, 36, (S. 88-100).
- Trainin, G. & Swanson, H. L. (2005). Cognition, metacognition, and achievement of college students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 28, 261-272.
- Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multi-method designs? In C. Artelt & B. Moschner (Hrsg.) *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis* (S. 75-97). Berlin: Waxmann.

- Veenman, M. V. J. (2006). The role of intellectual and metacognitive skills in math problem solving. In A. Desoete & M. Veenman (Hrsg.) *Metacognition in mathematics education*, (S. 35-50). Hauppauge, NY: Nova Science.
- Veenman, M. V. J. (2011 a). Alternative assessment of strategy use with self-report instruments: a discussion. *Metacognition and Learning*, 6, 205-211. <https://doi.org/10.1007/s11409-011-9080-x>
- Veenman, M. V. J. (2011 b). Learning to self-monitor and self-regulate. In P. A. Alexander & R. E. Mayer (Hrsg.) *Educational psychology handbook series. Handbook of research on learning and instruction*, (S. 197-218). New York: Routledge.
- Veenman, M. V. J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. In A. Zohar & Y.J. Dori (Hrsg.) *Metacognition in Science education: Trends in Current Research* (S. 21-36). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.
- Veenman, M. V. J. (2013). Training metacognitive skills in students with availability and production deficiencies. In H. Bembenuddy, T. Cleary, & A. Kitsantas (Hrsg.) *Applications of self-regulated learning across diverse disciplines: A tribute to Barry J. Zimmerman* (S. 299-324). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Veenman, M. V. J. (2017). Learning to self-monitor and self-regulate. In R. Mayer & P. Alexander (Hrsg.) *Handbook of research on learning and instruction*, (S. 33-257). New York: Routledge.
- Veenman, M., Desoete, A. (2006): *Metacognition in mathematics education*. New York: Nova Science Publishers.
- Veenman, M. V. J., Elshout, J. J. & Busato, V. V. (1994). Metacognitive mediation in learning with computer-based simulations. *Computers in Human Behavior*, 10, 93-106.
- Veenman, M. V. J., Elshout, J. J. & Meijer, J. (1997). The generality vs. domain-specificity of metacognitive skills in novice learning across domains. *Learning and Instruction*, 7, 187-209. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(96\)00025-4](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(96)00025-4)
- Veenman, M. V. J. & Elshout, J. J. (1999). Changes in the relation between cognitive and metacognitive skills during the acquisition of expertise. *European Journal of Psychology of Education*, 14, 509-523.
- Veenman, M. V. J., Kok, R. & Blöte, A. W. (2005). The relation between intellectual and metacognitive skills at the onset of metacognitive skill development. *Instructional Science*, 33, 193-211.

- Veenman, M. V. J. & Spaans, M. A. (2005). Relation between intellectual and metacognitive skills: Age and task differences. *Learning and Individual Differences*, 15, 159-176.
- Veenman, M. V. J. & van Cleef, D. (2019). Measuring metacognitive skills for mathematics: students' self-reports versus on-line assessment methods. *ZDM Mathematics Education*, 51, 691-701.
- Veenman, M. V., van Hout-Wolters, B. H. & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning*, 1(1), 3-14.
- Veenman, M. V. J., Wilhelm, P. & Beishuizen, J. J. (2004). The relation between intellectual and metacognitive skills from a developmental perspective. *Learning and Instruction*, 14, 89-109. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2003.10.004>
- Vermeer, H. J., Boekaerts, M. & Seegers, G. (2000). Motivational and gender differences: Sixth-grade students' mathematical problem-solving behavior. *Journal of Educational Psychology*, 92, 308-315. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.92.2.308>
- Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modelling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit & B. Csapo (Hrsg.) *Teaching and learning thinking skills. Contexts of learning* (S. 215–240). Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. et al. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education* 24, 335. <https://doi.org/10.1007/BF03174765>
- Vinner, S. (2013). A Different Test and Different Result Analysis – an Example from a Calculus Exam. *Journal für Mathematik-Didaktik* 15(3-4), 311-326.
- Vollrath, Hans-Joachim (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3-37.
- Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2006). *Algebra in der in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Elsevier Spektrum
- Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM Mathematics Education*, 51, 703-716.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

- Wang, M. C., Haertel, G. D. & Walberg, H. J. (1990). What influences learning? A content analysis of review literature. *Journal of Educational Research*, 84, 30-43.
- Waasmaier, S. (2010). Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule – Entwicklung und Förderung fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen im Rahmen eines Unterrichtsprojektes in der 7. und 8. Jahrgangsstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*, 895-898.
- Wellman, H.M. (1983). Metamemory Revisited. In M. T. H. Chi (Hrsg.) *Trends in Memory Development Research*, (S. 31-51). Basel: Karger.
- Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*. Mannheim: BI.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum
- Weinert, F. E. (1984). Metakognition und Motivation als Determinanten der Lerneffektivität: Einführung und Überblick. In F. E. Weinert, R. H. Kluwe, & A. L. Brown (Hrsg.) *Metakognition, Motivation und Lernen*, (S. 9-21). Stuttgart: Kohlhammer.
- Weinert, F. E. & Kluwe, R. H. (1996). *Metakognition, Motivation und Lernen*. Stuttgart: Kohlhammer.
- White, R. T. (1998). Decisions and problems in research on metacognition. In B. J. Fraser & K. G. Tobin (Hrsg.), *International handbook of science education* (S. 1207-1213). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Whitebread, D., Bingham, S., Grau, V., Pasternak, D. P. & Sangster, C. (2007). Development of metacognition and self-regulated learning in young children: Role of collaborative and peer-assisted learning. *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 6(3), 433-455. <https://doi.org/10.1891/194589507787382043>
- Whitebread, D., Coltman, P., Anderson, H., Mehta, S. & Pasternak, D. P. (2005). Metacognition in young children: Evidence from a naturalistic study of 3–5 year olds. Cyprus: University of Nicosia.
- Whitebread, D., Coltman, P., Pino Pasternak, D., Sangster, C., Grau, V., Bingham, S., Almeqdad, Q. & Demetriou, D. (2009). The development of two observational tools for assessing metacognition and self-regulated learning in young children. *Metacognition and Learning*, 4(1), 63-85. <https://doi.org/10.1007/s11409-008-9033-1>

- Whitebread, D., Grau Càrdenas, V. (2012). Self-regulated Learning and Conceptual Development in Young Children: The Development of Biological Understanding. In: A. Zohar und Y. Dori (Hrsg.) *Metacognition in Science Education: Trends in current research* (S. 101-132). Dordrecht [u.a.]: Springer.
- Wilson, D. & Conyers, M. (2016). *Teaching students to drive their brains: Metacognitive strategies, activities, and lesson ideas*. Alexandria: ASCD.
- Winkel, K. (2011). Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 899-902.
- Winne, P. H. (1995). Inherent details in self-regulated learning. *Educational Psychologist*, 30, 173-187. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3004_2
- Winne, P. H. (1996). A metacognitive view of individual differences in self-regulated learning. *Learning and Individual Differences*, 8, 327-353.
- Winter, H. (2004). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In H.-W. Henn & K. Maaß (Hrsg.) *ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8* (S. 6-15). Hildesheim: Franzbecker. (überarbeitete Fassung des gleichnamigen Beitrags in: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61, 37-46.)
- Wittmann E. Ch. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Wiesbaden: Vieweg.
- Wolters, C. A. & Pintrich, P. R. (2001). Contextual differences in student motivation and self-regulated learning in mathematics, English and social studies classrooms. In H. J. Hartman (Hrsg.) *Metacognition in learning and instruction: Theory, Research and Practice. Neuropsychology and cognition*, 19, 103-124. Dordrecht: Springer.
- Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Beltz: Weinheim,
- Zhao, N., Teng, X., Li, W., Li, Y., Wang, S., Wen, H. & Yi, M. (2019). A path model for metacognition and its relation to problem-solving strategies and achievement for different tasks. *ZDM Mathematics Education*, 51, 641-653.
- Zimmerman, B. J. (1989). Models of self-regulated learning and academic achievement. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Hrsg.) *Self-regulated learning and academic achievement: Theory, research and practice*, (S. 1-25), New York: Springer.
- Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological development, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45(1), 166-183. <https://doi.org/10.3102/0002831207312909>

Zohar, A., Dori, Y. J. (Hrsg.) (2012): Metacognition in Science Education. Trends in current research. *Contemporary Trends and Issues in Science Education*, 40. Dordrecht [u.a.]: Springer.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die eingereichte Doktorarbeit eigenständig, d.h. insbesondere selbständig und ohne Hilfe einer kommerziellen Promotionsberatung angefertigt und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Hiermit versichere ich an Eides statt,

- a) dass ich die Gelegenheit zum Promotionsvorhaben nicht kommerziell vermittelt bekommen habe und insbesondere nicht eine Person oder Organisation eingeschaltet habe, die gegen Entgelt Betreuer bzw. Betreuerin für die Anfertigung sucht.
- b) dass die Regeln der Universität Würzburg über gute wissenschaftliche Praxis eingehalten wurden.

Würzburg, den 03. Mai 2022

Sebastian Mungenast

