

**SPEKTROSKOPIE KOLLEKTIVER  
ZYKLOTRON- UND INTERSUBBAND-RESONANZEN  
VON QUANTEN-HALL-SYSTEMEN  
IN GAAS**

**DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES  
NATURWISSENSCHAFTLICHEN DOKTORGRADES  
DER BAYERISCHEN JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT  
WÜRZBURG**

**VORGELEGT VON  
MATTHIAS MANGER  
AUS WÜRZBURG**

**WÜRZBURG 2008**

Eingereicht am: .....  
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

- 1. Gutachter: Prof. Dr. E. Batke
  - 2. Gutachter: ...
- der Dissertation

- 1. Prüfer: Prof. Dr. E. Batke
  - 2. Prüfer: ...
- der mündlichen Prüfung

Tag der mündlichen Prüfung am: .....

Doktorurkunde ausgehändigt am: .....

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Experimentelle Methodik</b>	<b>7</b>
1.1 Meßprinzip der Magneto-Fourier-Spektroskopie im Ferninfraroten . . . . .	7
1.2 Transportcharakterisierung quasi-zweidimensionaler Elektronengase . . . . .	11
1.3 Probenaufbau und Probenpräparation . . . . .	14
1.4 Optik von Schichtsystemen . . . . .	18
1.5 Dynamische Leitfähigkeit . . . . .	23
1.5.1 Magneto-Plasmonresonanz . . . . .	23
1.5.2 Zyklotronresonanz als spezielle Magneto-Plasmonresonanz . . . . .	25
1.5.3 Depolarisationsverschobene Intersubband-Resonanz . . . . .	27
1.5.4 Gitterkopplertechnik . . . . .	28
<b>2 Elektronische Eigenschaften quasi-zweidimensionaler Elektronengase in GaAs</b>	<b>31</b>
2.1 Modulationsdotierung und Subband-Quantisierung . . . . .	31
2.2 Selbstkonsistente Brechnung der Subband-Struktur in der LDA-Näherung . . . . .	34
2.2.1 Subband-Struktur von Einfachheterostrukturen . . . . .	36
2.2.2 Subband-Struktur von Doppelheterostrukturen . . . . .	39
2.2.2.1 Einseitig dotierte Quantentröge . . . . .	40
2.2.2.2 Beidseitig dotierte Quantentröge . . . . .	40
2.2.3 Gegenüberstellung von Einfach- und Doppelheterostrukturen . . . . .	40
2.3 Landau-Quantisierung der Elektronen im Magnetfeld . . . . .	43
2.3.1 Symmetrische Eichung . . . . .	44
2.3.2 Landau-Eichungen . . . . .	46
2.3.3 Landau-Niveauschema und Füllfaktor . . . . .	47
2.4 Zyklotron- und Intersubband-Resonanz im Einteilchen-Bild . . . . .	49
2.5 Resonante Subband-Landau-Niveau-Kopplung . . . . .	52
2.6 Nichtparabolizität des Leitungsbandes . . . . .	56
2.7 $k \cdot p$ -Methode zur Beschreibung von Bandstruktureffekten . . . . .	62
2.7.1 Dreiband-Modell und die Enveloppen-Näherung . . . . .	63
2.7.2 Nichtparabolizität für ein Q2DEG im senkrechten Magnetfeld . . . . .	67
<b>3 Phononen und Elektron-Phonon-Kopplung quasi-zweidimensionaler Elektronengase in GaAs</b>	<b>71</b>
3.1 Phononen in Halbleiterschichtstrukturen . . . . .	72
3.1.1 Dielektrische Gitterfunktion polarer Halbleiter . . . . .	72
3.1.2 Confined-Phononen in dielektrischen Schichtsystemen . . . . .	74

3.1.3	Volumen- und Grenzflächenphononen im dielektrischen Kontinuummodell . . . . .	75
3.1.4	Zwei dielektrische Halbräume mit eingebettetem Vielschichtsystem . . . . .	76
3.1.4.1	Zwei dielektrische Halbräume: Einfachheterostruktur . . . . .	77
3.1.4.2	Zwei dielektrische Halbräume mit Zwischenschicht: Doppelheterostruktur . . . . .	79
3.1.4.3	Einfluß der endlichen Barrierendicke und der Deckschicht . . . . .	80
3.1.5	Grenzflächenmoden in Systemen mit Supergittern . . . . .	80
3.1.5.1	Grenzflächenartige Volumenphononen in unendlichen Supergittern . . . . .	80
3.1.5.2	Evaneszente Halbraumgrenzflächenmoden in halbbunendlichen Supergittern . . . . .	81
3.1.5.3	Doppelheterostruktur mit Supergitterbarrieren . . . . .	83
3.2	Phonon-Quantisierung und Elektron-Phonon-Wechselwirkung . . . . .	83
3.3	Klassische quasi-zweidimensionale Magneto-Plasmon-Phononen . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Quasi-zweidimensionale Polaronen in GaAs</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1	Theoretische Modelle zu quasi-zweidimensionalen Magneto-Polaronen . . . . .	91
4.1.1	Quasiteilchen-Modell nicht-wechselwirkender Polaronen . . . . .	92
4.1.1.1	Magneto-Polaronen im quasi-zweidimensionalen Elektronengas . . . . .	95
4.1.1.2	Zyklotronresonanz des freien Polaron-Gases . . . . .	100
4.1.2	Polaron-Zyklotronresonanz im Rahmen des Kubo-Formalismus . . . . .	102
4.1.2.1	Theorien von Badjou und Argyres sowie Cho und Choi . . . . .	103
4.1.2.2	Polaron-Theorie gemäß Wu, Peeters und Devreese . . . . .	108
4.2	Resonante Polaron-Zyklotronresonanz . . . . .	111
4.2.1	Stand und Überblick zu den Resonanten Polaron-Effekten . . . . .	111
4.2.2	Experimentelle Übersicht . . . . .	112
4.2.3	Resonante Polaron-Zyklotronresonanz im Regime niedriger Elektronendichten . . . . .	114
4.2.3.1	Polaron-Zyklotronresonanz und Elektron-Elektron-Wechselwirkung . . . . .	115
4.2.3.2	Temperatur- und Dichteabhängigkeit der resonanten Polaron-Effekte . . . . .	120
4.2.3.3	Resonante Intersubband-Polaron-Kopplung . . . . .	124
4.2.4	Resonante Polaron-Zyklotronresonanz im Regime hoher Elektronendichten . . . . .	126
4.2.4.1	Analytizität der Linienformfunktion . . . . .	128
4.2.4.2	Resonante Polaron-Zyklotronresonanz in der Energiedomäne . . . . .	129
4.2.4.3	Polaron-Feinstruktur bei extrem hohen Elektronendichten . . . . .	132
4.2.4.4	Gesamtüberblick über die Polaron-Halbfeldkopplung . . . . .	135
4.3	Nicht-resonante Polaron-Zyklotronresonanz . . . . .	137
4.3.1	Polaron-Massenrenormierung, Polaron-Nichtparabolizität und Besetzungseffekte . . . . .	137
4.3.2	Zusammenwirken von Polaron-Renormierung und Leitungsband-Nichtparabolizität . . . . .	142
4.3.3	Experimentelle Resultate . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes</b> . . . . .	<b>149</b>
5.1	Grundlagen und Motivation . . . . .	149
5.1.1	Integraler Quanten-Hall-Effekt (IQHE) . . . . .	149
5.1.2	Stand der Zyklotronresonanz . . . . .	153
5.2	Theorie der Zyklotronresonanz mehrkomponentiger Elektronengase . . . . .	156
5.2.1	Das verallgemeinerte Theorem von Kohn . . . . .	156
5.2.2	Mehrkomponentige Zyklotronresonanz - Klassische Beschreibung . . . . .	158
5.2.2.1	Erweiterung auf beliebig viele Komponenten . . . . .	164
5.2.2.2	Semiklassische Erweiterung . . . . .	164

5.2.2.3	Erweiterung auf langwellige Magneto-Plasmonen . . . . .	165
5.2.2.4	Erweiterung um harmonische Rückstellkräfte . . . . .	165
5.2.3	Mehrkomponentige Zyklotronresonanz - Quantenmechanische Beschreibung . . . . .	167
5.2.3.1	Erweiterung auf langwellige Magneto-Plasmonen . . . . .	170
5.2.3.2	Summenregeln für die mehrkomponentige Magneto-Plasmonresonanz . . . . .	171
5.2.3.3	Hybridisierte Spin- und Ladungsdichtemoden zweikomponentiger Q2DEG . . . . .	172
5.2.4	Effektives Modell der harmonisch gekoppelten Schwerpunkte . . . . .	175
5.3	Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des IQHE . . . . .	180
5.3.1	Landau- und spinaufspaltene Zyklotronresonanz . . . . .	180
5.3.2	Auswertung der Linienaufspaltungen bei ganzzahligen Füllfaktoren . . . . .	186
5.3.3	Analyse der mittleren Masse: Intrinsische versus extrinsische Zyklotronresonanz . . . . .	189
5.3.4	Wirkung langreichweitiger Streuzentren auf die Zyklotronresonanz . . . . .	194
5.3.5	Subband-aufgespaltene Zyklotronresonanz . . . . .	197
<b>6</b>	<b>Elektronische Intersubband-Resonanz im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes</b>	<b>201</b>
6.1	Grundlagen der kollektiven Intersubband-Resonanz . . . . .	201
6.1.1	Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA) . . . . .	202
6.1.2	Intersubband-Resonanz in der zeitabhängigen Lokaldichte-Näherung (TDLDA) . . . . .	205
6.1.2.1	Matrix-Dielektrizitätsfunktion und Anregungsmatrix . . . . .	207
6.1.2.2	Kollektive Verschiebung und Modenkopplung . . . . .	209
6.1.3	Magneto-Intersubband-Resonanzen in der TDLDA-Näherung . . . . .	212
6.1.3.1	Vertikale Intersubband-Übergänge und Einfluß der Nichtparabolizität . . . . .	214
6.1.3.2	Bernstein-Moden und kombinierte Intersubband-Zyklotron-Resonanzen . . . . .	215
6.1.4	Kopplung der ISR an weitere Elementaranregungen . . . . .	218
6.1.4.1	Kopplung an Intrasubband-Plasmonen . . . . .	218
6.1.4.2	Kopplung an longitudinale Phononen . . . . .	220
6.1.5	Experimentelle Manifestation der Intersubband-Resonanz . . . . .	222
6.2	Hartree-Fock-Beschreibung der quasi-zweidimensionalen Elektronengase im Magnetfeld . . . . .	225
6.2.1	Hartree-Fock-Subband-Gleichung im senkrechten Magnetfeld . . . . .	225
6.2.2	Selbstkonsistente Hartree-Fock-Subband-Rechnung im senkrechten Magnetfeld . . . . .	227
6.2.2.1	Subband-Landau-Fächer und Gapnormierung in der HFA . . . . .	229
6.2.3	Magneto-Kollektivmoden in der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung . . . . .	230
6.2.3.1	Vertikale Magneto-Intersubband-Resonanzen in der TDHFA . . . . .	232
6.3	Experimentelle Intersubband-Resonanz im Regime des IQHE . . . . .	235
6.3.1	Experimentelle Magnetfeldvariationen in der Intersubband-Resonanz . . . . .	235
6.3.2	Vergleich zwischen Experiment und TDHFA-Rechnungen . . . . .	236
<b>7</b>	<b>Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors <math>\nu = 1</math></b>	<b>241</b>
7.1	Grundzustand und Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors $\nu = 1$ . . . . .	241
7.1.1	Niveauvollfüllung und magnetische Exzitonen . . . . .	241
7.1.2	Elektronische Abschirmung im Q2DEG . . . . .	243
7.1.2.1	Abschirmung im Einsubband-Grenzfall und Plasmonpol-Näherung . . . . .	243
7.1.2.2	Statische Thomas-Fermi-Abschirmung im Einsubband-Grenzfall . . . . .	244
7.1.3	Landau-Niveaus in der statisch abgeschirmten Hartree-Fock-Näherung (SHFA) . . . . .	245
7.1.4	Magneto-Intrasubband-Plasmonen in der Hartree-Fock-Näherung . . . . .	247
7.1.5	Zyklotronresonanz in der Hartree-Fock-Näherung und das Kohnsche Theorem . . . . .	248

7.1.6	Formation von Spintexturen (Skyrmionen) . . . . .	250
7.2	Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors $\nu = 1$ . . . . .	255
7.2.1	Überblick und experimenteller Stand der Zyklotronresonanz im Quantengrenzfall . . . . .	255
7.2.2	Probenabhängigkeit und Temperatureinfluß . . . . .	256
7.2.3	Massenrenormierung und Polaron-Kopplung um $\nu = 1$ . . . . .	258
7.2.4	Manifestation der Skyrmion-Formation in der Polaron-Zyklotronmasse . . . . .	263
7.2.5	Auswertung der Spinpolarisation um $\nu = 1$ . . . . .	267
7.2.6	Linienbreite der Zyklotronresonanz um $\nu = 1$ . . . . .	269
<b>8</b>	<b>Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes</b>	<b>275</b>
8.1	Grundlagen des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) . . . . .	276
8.1.1	Übersicht und Phänomenologie . . . . .	276
8.1.2	Laughlinsche Theorie der fundamentalen FQH-Zustände . . . . .	280
8.1.2.1	Laughlin-Wellenfunktionen . . . . .	280
8.1.2.2	Quasiteilchen, Quasilöcher und Wirbelzustände . . . . .	281
8.1.3	Das Verbundfermionenbild des FQHE . . . . .	283
8.1.3.1	Eichtransformation, Aharanov-Bohm-Phase und Verbundelektronen . . . . .	283
8.1.3.2	Verbundfermionen-Bild einkomponentiger FQH-Flüssigkeiten . . . . .	284
8.1.3.3	Metallisches CF-Gas und CF-Landau-Quantisierung . . . . .	287
8.1.3.4	Verbundfermionen-Bild unter Beteiligung des Spins . . . . .	288
8.2	Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des FQHE . . . . .	291
8.2.1	Manifestation der FQH-Zustände in der Zyklotronmasse . . . . .	292
8.2.2	Dissipationsüberhöhung bei halbzahligen Füllfaktoren . . . . .	297
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>299</b>
	<b>Summary</b>	<b>305</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>311</b>
	<b>Publikationsliste</b>	<b>325</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>327</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>328</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>329</b>

# Einführung

In quasi-zweidimensionalen Elektronengasen (Q2DEG) sind die Bewegungen der Ladungsträger auf eine Ebene beschränkt. Die Bewegung in der dritten Raumrichtung senkrecht zur Ebene ist aufgrund eines hinsichtlich vielerlei Aspekte maßschneiderbaren Einschlußpotentials in diskrete Subbänder quantisiert. Auf Basis der Halbleiter GaAs und  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  gelingt es seit den 1980er Jahren mittels moderner Epitaxieverfahren und Strukturierungsmethoden, solche künstlichen Quantensysteme in immer besserer Qualität und mit immer definierteren Eigenschaften herzustellen. Aufbauend auf einem Q2DEG können weiterhin mittels lithografischer Strukturierung die Lateraldimensionen für die Ladungsträger im Kanal des Q2DEG eingeschränkt und auf diese Weise quasi-eindimensionale (Quantendrähte) sowie quasi-nulldimensionale Elektronensysteme (Quantenpunkte) realisiert werden [Dat95]. Durch ihre Vielseitigkeit und aufgrund ihrer Eigenschaften eignen sich Q2DEG sowohl hervorragend zum Studium grundlegender physikalischer Fragestellungen als auch für die Realisierung von Bauelementen mit besonderen elektronischen und opto-elektronischen Eigenschaften. So wurden im Laufe der letzten drei Dekaden an Q2DEG sowohl mit dem Integralen (IQHE) [vK80] und dem Fraktionalen Quanten-Hall-Effekt (FQHE) [Tsu82] grundlegend neue physikalische Phänomene entdeckt als auch mit dem HEMT (high electron mobility transistor) [Hiy82], dem Intersubband-Detektor [Lev87], sowie dem Quanten-Kaskade-Laser [Fai94a] neuartige technologische Bauelemente verwirklicht.

Die Reduktion der Dimensionalität führt in Q2DEG dazu, daß die Wirkung von Streuzentren, die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und die Ankopplung der Elektronen an polare Gitterschwingungen spezielle Ausprägungen aufweisen, die sich in grundlegenden und oftmals unerwarteten Effekten, wie den Quanten-Hall-Effekten, äußern können. Dies motiviert die physikalische Forschung stets von neuem dazu, solche Systeme mit immer aufwändigeren Epitaxie- und Strukturierungsverfahren herzustellen und mit zunehmend ausgefeilteren experimentellen und auch theoretischen Methoden zu untersuchen. Insbesondere erwies sich der Einsatz sehr hoher Magnetfelder beim Studium der Physik künstlicher Quantensysteme auf Basis von Halbleiterschichtstrukturen als entscheidend für die Ausprägung derartiger Phänomene [And82]. Im starken Magnetfeld kondensieren die Elektronen des Q2DEG auf makroskopisch entartete Landau-Orbitale, die das quantenmechanische Pendant der klassischen Kreisbahnen im Magnetfeld bilden [Lan30].

Die für die technologischen Anwendungen von Q2DEG entscheidenden Aspekte sind die Materialeigenschaften der verwendeten Halbleiter und die sich unmittelbar daraus ergebenden Möglichkeiten für das Design von Quantensystemen. Hierbei zeichnet sich das GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Materialsystem durch eine nahezu perfekte Gitteranpassung, eine sehr hohe kristalline Qualität und Sauberkeit, eine fundamentale direkte Bandlücke im experimentell günstigen nahen Infraroten (NIR), einen hohen verfügbaren Bandlückenhub und damit verbunden eine starke Subband-Quantisierung, sowie eine niedrige effektive Bandkantenmasse und damit verbunden großen erreichbaren Landau-Lücken aus. Zudem weist GaAs eine nahezu parabolische Leitungsbandstruktur auf, so daß Effekte, die mit der Nichtparabolizität des Leitungsbandes in Zusammenhang stehen, als Korrekturen behandelt werden können [Bas88].

In einem Landau-quantisierten Q2DEG führt die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zu teils drastischen Re-

normierungen der elektronischen Zustände, beginnend mit außergewöhnlich hohen Zeeman-Lücken [And76a] bis hin zur Ausprägung von bis vor kurzem unbekanntem Quasiteilchen in Form von Wirbelzuständen mit fraktionellen Ladungen (Laughlin-Quasiteilchen) [Lau83, Lau90, Sam97, dP97], von mit magnetischen Flußquanten behafteten Elektronen (Composite-Fermionen, Composite-Bosonen) [Wil82a, Wil82b, Gir87, Rea89, Zha89, Zha92, Jai89b, Jai92], sowie von Quasiteilchen mit außergewöhnlicher Spinzusammensetzung, die als Skyrmionen bezeichnet werden [Sky62, Lee90, Son93, Bar95, Sch95, Aif96].

In Anwesenheit von Störstellen und des Randpotentials führt das nicht-lineare Abschirmverhalten aufgrund der Landau-Quantisierung in zwei Dimensionen zur Ausbildung von kompressiblen und inkompressiblen Bereichen [Chk92]. Nach dem aktuellen Verständnis bilden die letzteren die Ursache für die Ausprägung der Hall-Quantisierung mit dem dissipationslosen quasi-supraleitenden Stromtransport bei verschwindendem Longitudinalwiderstand und der in fundamentalen Naturkonstanten quantisierten Hall-Spannung [Sid04].

In polaren Kristallen koppeln die Ladungsträger über die Elektron-Phonon-Wechselwirkung an die Moden des Kristallgitters an [Fro54]. Dies führt zur Ausbildung von Polaronen als die Quasiteilchen des gekoppelten Elektron-Gittermoden-Systems [Joh66, McC68, Dev72]. In vollständig Landau-quantisierten Q2DEG ist die Polaron-Kopplung gegenüber der in Volumen-Gasen besonders ausgeprägt. Zudem wird sie stark durch die Niveaubesetzungen und die Abschirmeigenschaften des Q2DEG beeinflusst [Wu,87b, Pee92].

Detaillierte Informationen über die Eigenschaften quasi-zweidimensionaler Elektronengase können aus der Untersuchung ihrer Anregungen mittels langwelliger Dipolstrahlung gewonnen werden. In stark wechselwirkenden Systemen, wie sie in Q2DEG häufig vorliegen, koppelt die Dipolstrahlung vornehmlich an die Ladungsdichteanregungen, die als Plasmonen bezeichnet werden, an. Diese untergliedern sich aufgrund der Subband-Quantisierung in die Intrasubband-Plasmonen, welche den kohärenten Anregungen innerhalb der Elektronen eines Subbandes entsprechen, und in die Intersubband-Plasmonen, welche die kohärenten Übergänge zwischen den Subbändern widerspiegeln [Kam74, Kne76, All77, Bat85, Bat89]. In Gegenwart eines quantisierenden Magnetfeldes werden die Kollektivanregungen zum Teil substantiell in ihrem Wesen modifiziert und als Magneto-Plasmonen bezeichnet [Kal84, Mac85a, Mac85b, Bat86]. Im extrem langwelligem Grenzfall sind die Intrasubband-Magneto-Plasmonen dann als Zyklotronresonanzen und die langwelligigen Intersubband-(Magneto)-Plasmonen als Intersubband-Resonanzen geläufig.

Mit der Magneto-Ferninfrarot-Fourier-Spektroskopie steht eine leistungsfähige Methode zum experimentellen Studium der (Magneto-)Kollektivmoden quasi-zweidimensionaler Elektronengase zur Verfügung. Sie ermöglicht einen experimentellen Zugang zur dynamischen Leitfähigkeit, die eine der fundamentalen Antwortgrößen solcher Systeme darstellt. Die Zyklotronresonanzen sind dabei unmittelbar aus der Ferninfrarot-Absorption zugänglich [Bat84, Hei91]. Die Ankopplung an die kurzwelligen Intrasubband-(Magneto-)Plasmonen und die Intersubband-(Magneto-)Plasmonen erfordert allerdings spezielle experimentelle und präparative Verfahren, wie z.B. die auch hier eingesetzte Gitterkoppler-Technik, da deren Dispersionen nicht mit denen der sich im Freiraum ausbreitenden elektromagnetischen Wellen überlappen [Kra96, Wen99a].

Für das Verständnis der Kollektivmoden in Elektronengasen sind zwei Aspekte entscheidend. Zum einen bestimmt das sich ausbildende (Quasi-)Teilchen-Zustandsschema und dessen Besetzung über das Wesen des Grundzustandes und über die darin durch ein externes Feld anregbaren Übergänge. Die induzierten Übergänge werden ihrerseits durch virtuelle Übergänge dynamisch abgeschirmt. Diese Abschirmung führt zu einer kollektiven Verkoppelung und zu einer kollektiven Renormierung der induzierten Übergänge, welche unter dem Begriff der Depolarisationseffekte zusammengefaßt werden [Ehr59, All76, Che76]. Desweiteren führt die attraktive Wechselwirkung zwischen den (Quasi-)Teilchen in den angeregten Niveaus und den zurückbleibenden (Quasi-)Löchern in den Ausgangsniveaus infolge der Austausch-Wechselwirkung zu einer weiteren Verkopp-

lung und Renormierung der Übergänge, die als Exzitonffekte geläufig sind [And77a]. Aufgrund der Depolarisations- und der Exzitoneffekte geben die Kollektivmoden nur zum Teil des (Quasi-)Teilchen-Zustandsschema wieder, das beispielsweise im statischen Transport oder in den thermodynamischen Antwortgrößen im wesentlichen hervortritt [And82]. Gerade im Zusammenspiel von Niveauschema und Kollektiveffekten unterscheiden sich die Zyklotron- und die Intersubband-Resonanzen von Q2DEG im quantisierenden Magnetfeld grundlegend.

Die Zyklotronresonanz spiegelt maßgeblich die Bandstruktur und damit die Eigenschaften eines Gases wechselwirkungsfreier Elektronen wider. Diese Gegebenheit wird bereits seit den Anfängen der Halbleiterphysik zur Aufklärung der Bandstrukturen von Halbleitern [Dre53, Dre55, Lax60] und später deren Schichtstrukturen [Abs74, All74, Wil80, And82] eingesetzt. Das scheinbare Zutreffen des Bildes nicht-wechselwirkender Elektronen selbst in dichten Q2DEG kann mit der Tatsache begründet werden, daß generell für Teilchen mit einer einheitlichen energieunabhängigen Masse (parabolische Banddispersion) die Zyklotronresonanz exakt die maximal kollektive Schwerpunktanregung des Systems darstellt [Koh61, Bre89]. Eine solche Anregung wird naturgemäß nicht von der Wechselwirkung zwischen den Teilchen beeinflusst. Im Bilde der Übergänge im Zustandsschema und ihrer Hybridisierung und Renormierung durch Kollektiveffekte stellt die Zyklotronresonanz in einem ideal sauberen parabolischen Elektronengas eine Anregungsform dar, bei der sich die Modifikationen im Niveauschema und die Kollektiveffekte aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung gerade gegenseitig kompensieren [Kal84, Mac85a]. Daher behält das zugrunde liegende Einteilchen-Niveauschema als Übergangsschema zumindest scheinbar seine Gültigkeit. Die mannigfaltigen Grundzustände und ihre speziellen Quasiteilchen, die sich im Regime des Integralen und des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes ausbilden, sind daher in der Zyklotronresonanz eines ideal sauberen Q2DEG mit parabolischer Banddispersion nicht zu erwarten. In einem realen Q2DEG in GaAs jedoch ist durch die Nichtparabolizität [Kan66, Bas88] und durch die Polaron-Kopplung [Dev72, Wu,87b, Pee92] die Bedingung einer einheitlichen energieunabhängigen Elektronenmasse grundsätzlich verletzt. Weiterhin wird die weitere Bedingung der Translationsinvarianz für eine Schwerpunktanregung in realen Q2DEG durch die Präsenz von Störstellen gebrochen [And82, Pra90]. Diese drei Einflüsse haben mannigfaltige Auswirkungen auf die Zyklotronresonanz, die jedoch durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung modifiziert und teilweise auch unterdrückt werden [Mac89, Ric89, Bes92, Sum93, Mic94, Hu,95b, Hu,95a, Hu,96a, Mic96, Mer96, Wid98]. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung tritt dabei vornehmlich über die Besetzungen des durch sie modifizierten (Quasi-)Teilchen-Zustandsschemas und in Form von kollektiven Verkopplungen der im Einteilchen-Schema in ihrer Entartung aufgehobenen Zyklotronresonanzen zutage [Coo94, Asa96, Asa98].

In die Intersubband-Resonanz gehen im Gegensatz zur Zyklotronresonanz besonders stark die Einflüsse der Elektron-Elektron-Wechselwirkung ein. Diese beginnen bereits mit der Subband-Struktur, die aus dem Zusammenspiel der Banddiskontinuitäten, der ortsfesten Raumladungen infolge der geladenen Akzeptoren und Donatoren, sowie der Raumladungen im Elektronengas selbst resultiert. Ein detailliertes quantitatives Verständnis der Subband-Struktur erfordert dabei selbstkonsistente numerische Berechnungsverfahren, bei denen die Poisson- und die Schrödinger-Gleichung unter Berücksichtigung des quantenmechanischen Austauschs iterativ gelöst werden [And82, Ste85]. Bereits kurz nach ihrer Entdeckung wurde klar, daß die Intersubband-Resonanzen in ihrem Wesen und in ihren Energien stark von den kollektiven Depolarisations- und Exzitoneffekten geprägt sind [All76, Che76, And77a]. Das Einschlußpotential und die Elektron-Elektron-Wechselwirkung dominieren bei dieser Anregungsform derart, daß zumindest in Systemen auf GaAs-Basis der Nichtparabolizität, den Störstellen und der Polaron-Kopplung eine untergeordnete Bedeutung zukommt. Aufgrund der im Einteilchen-Bild vorhandenen Entkopplung der Quantisierung senkrecht und parallel zur Ebene fallen die Einflüsse eines senkrecht zur Q2DEG-Ebene gerichteten Magnetfeldes auf die Intersubband-Resonanzen in

Systemen mit großen Subband-Abständen und nur einem besetzten Subband gering aus [And77b, Za85].

Das Ziel dieser Arbeit ist ein fundiertes Verständnis der langwelligen Magneto-Kollektivmoden quasi-zweidimensionaler Elektronengase auf Basis von GaAs. Das Augenmerk ist auf die Manifestation von Einflüssen aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung gerichtet, die vor allem im Regime des Integralen und auch des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes zu Grundzuständen mit außergewöhnlichen Eigenschaften führt.

Für ein übergreifendes Bild der Zyklotronresonanz ist zunächst ein möglichst quantitatives Verständnis der Polaron-Kopplung notwendig, welche die Feinstruktur der Zyklotronresonanz im hier verfügbaren Magnetfeldregime  $B < 17$  T bei hohen Temperaturen ( $\text{LN}_2$ ) dominiert. Bei niedrigen Temperaturen ( $\text{L}^4\text{He}$  und  $\text{L}^3\text{He}$ ) ist die Polaron-Renormierung infolge von Besetzungseffekten weitgehend blockiert [Wu,87b]. Diese Blockade legt den Blick frei auf die Nichtparabolizität und die Einflüsse von Störstellen und deren Zusammenspiel mit der Elektron-Elektron-Wechselwirkung. Insbesondere die Nichtparabolizität läßt nach dem Einteilchen-Übergangsschema im Experiment auflösbare Aufspaltungen erwarten. Solche Aufspaltungen sind in Volumen-Gasen und extrem verdünnten Q2DEG zu beobachten [Bes92, Bat93, Sum93, Mic94, Hu,95b, Hu,95a], jedoch in Systemen mit Dichten  $N_S > 1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  aufgrund der starken kollektiven Hybridisierung bislang nicht beobachtet worden [Mic96]. Aus diesem Sachverhalt ergeben sich für die Zyklotronresonanz die Fragen:

- Können unter geeigneten Bedingungen Aufspaltungen in der Zyklotronresonanz auch in hochbeweglichen Systemen mittlerer bis sehr hoher Dichte ( $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} < N_S < 12 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ) beobachtet werden?
- Was kann man, falls derartige Aufspaltungen auftreten, aus ihnen über die kollektiven Kopplungen und die zugrunde liegenden Grundzustände im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes lernen?
- Ist unter geeigneten Bedingungen eine Separation der intrinsischen Einflüsse infolge der Bandstruktur-Nichtparabolizität und der Polaron-Kopplung von den bei tiefen Temperaturen häufig dominierenden extrinsischen Einflüssen aufgrund von Störstellen möglich?
- Treten im magnetischen Quantengrenzfall, bei dem lediglich das unterste Landau-Niveau besetzt ist, Signaturen in der Zyklotronresonanz auf, die in Zusammenhang mit der Formation von Spintexturen (Skyrmionen) und der Ausbildung der Fraktionalen Quanten-Hall-Zustände stehen?

Zur Beantwortung dieser Fragen werden parallel zu den experimentellen Ergebnissen geeignete und handhabbare theoretische Modelle und Beschreibungen benötigt, die es gestatten, die Polaron-Kopplung, die Nichtparabolizität, die Störstelleneinflüsse und die Elektron-Elektron-Wechselwirkung adäquat zu berücksichtigen.

Der Magneto-Intersubband-Resonanz wurde im Regime der Quanten-Hall-Effekte bislang nur eine geringe Aufmerksamkeit geschenkt. Gemäß der diagrammatischen Störungstheorie findet im senkrechten Magnetfeld eine Verkoppelung der senkrechten und parallelen Bewegung über den quantenmechanischen Austausch und die Korrelationen statt [Mad78, Gro86]. Die adäquate Berücksichtigung des quantenmechanischen Austauschs bei der Berechnung der Subband-Struktur eines Landau-quantisierten Q2DEG erfordert die Aufstellung und Lösung einer selbstkonsistenten Hartree-Fock-Subband-Gleichung [Chu92, Hua96a, Hua96b]. Zur Beschreibung der Intersubband-Resonanzen müssen darüber hinaus die mit dem Austausch unmittelbar zusammenhängenden exzitonischen Kollektiveffekte Berücksichtigung finden. Diese kompensieren die Renormierungen im Zustandsschema zum Großteil wieder, so daß die Intersubband-Resonanzen im elektrischen Quantengrenzfall insgesamt eine nur geringe Magnetfeldabhängigkeit aufweisen. Allerdings ist eine solche Kompensation im Gegensatz zur Zyklotronresonanz eines ideal parabolischen Elektronengases nicht vollständig, so daß in der Feinstruktur der Magneto-Intersubband-Resonanzen Manifestationen des Austauschs und der Korrelationen des elektronischen Grundzustandes zu erwarten sind. Bezüglich der Magneto-Intersubband-Resonanz ergeben sich daher die folgenden Fragestellungen:

- Wie wirken sich die infolge des senkrechten Magnetfeldes verstärkten Austauscheffekte im Regime des IQHE auf die Subband-Quantisierung und die Intersubband-Übergänge aus und wie wirken die exzitonschen Kollektiveffekte in der Intersubband-Resonanz diesen entgegen?
- Können experimentell in der Intersubband-Resonanz im Regime des IQHE Fingerabdrücke der Landau-Quantisierung nachgewiesen und erklärt werden?

Die vorliegende Arbeit untergliedert sich in 8 Kapitel und schließt mit einer Zusammenfassung. Die Kapitel 1 bis 3 vermitteln die allgemeinen Grundlagen. Diese werden für die Kapitel 4 bis 8, in denen die eigentlichen Ergebnisse dargelegt werden, benötigt. Hierbei ist jedes der Kapitel 4 bis 8 grundsätzlich wiederum in einen Grundlagenteil, einen theoretischen und einen experimentellen Teil unterteilt. Die theoretischen Darstellungen umfassen die Voraussetzungen und Modelle, die zur Interpretation der nachfolgenden experimentellen Ergebnisse benötigt werden. Dieser Aufbau wurde gewählt, um die zahlreichen Effekte und Aspekte möglichst geschlossen und zusammenhängend darzustellen. Übergreifend wird für die Zyklotronresonanz ein klassisches Modell basierend auf einem erweiterten Drude-Ansatz sukzessive über die Kapitel hinweg entwickelt, das eine leistungsfähige und anschauliche Beschreibung der quantenmechanisch oftmals wenig anschaulichen Kopplungseffekte gestattet.

Im Kapitel 1 werden die experimentellen Grundlagen vermittelt. Es wird darin die Magneto-Fourier-Spektroskopie, die Transportcharakterisierung, sowie der Probenaufbau und die Probenpräparation für die untersuchten Systeme beschrieben. Desweiteren wird der Zusammenhang zwischen der Optik der Halbleiter-Schichtsysteme und der dynamischen Leitfähigkeit des eingebetteten Q2DEG hergestellt. Mit der dynamischen Leitfähigkeit, ihrer klassischen Modellierung, sowie die Einführung in die Plasmonen schließt das Kapitel.

Im Kapitel 2 werden die Grundlagen der elektronischen Eigenschaften der Q2DEG behandelt. Hierbei wird die selbstkonsistente Berechnung der Subband-Struktur im Rahmen der Lokaldichte-Näherung (LDA) beschrieben und die Ergebnisse von Subband-Rechnungen für einige der untersuchten Systeme gegenüberstellend dargelegt. Daran schließt sich die Behandlung der Landau-Quantisierung und des Einteilchen-Bildes für die Zyklotron- und die Intersubband-Resonanz, sowie der Kopplung zwischen der Subband- und der Landau-Quantisierung in gekippten Magnetfeldern an. Mit den Konsequenzen der Leitungsband-Nichtparabolizität und ihrer Beschreibung im Rahmen der  $k \cdot p$ -Methode endet das Kapitel.

Kapitel 3 ist den Phononen in Halbleiter-Schichtstrukturen gewidmet. Es werden zunächst die speziellen Modentypen der für diese Arbeit relevanten Systeme diskutiert, und im Anschluß daran die Elektron-Phonon-Wechselwirkung behandelt. Zum Abschluß des Kapitels wird ein klassisches Modell der (Magneto-)Plasmon-Phonon-Kopplung aufgestellt.

Mit Kapitel 4, das der Polaron-Kopplung und ihrer Auswirkung auf die Zyklotronresonanz gewidmet ist, beginnt die Vorstellung der Ergebnisse. Zunächst werden theoretische Modelle für die Polaron-Kopplung dargelegt und mittels von Modellrechnungen miteinander verglichen. Die beiden Erscheinungsformen der Polaron-Kopplung, die resonanten und die nicht-resonanten Polaron-Effekte, werden daraufhin separat betrachtet. Bei  $LN_2$ -Temperaturen treten im zugänglichen Magnetfeldbereich die resonanten Polaron-Kopplungen mit charakteristischen Resonanzerscheinungen als die dominierenden Effekte hervor. Diese Erscheinungen werden in einem weiten Dichteregime experimentell untersucht und unter Einbeziehung verschiedener Aspekte einschließlich der Elektron-Elektron-Kopplung mit den zuvor vorgestellten Modellen beschrieben. Des Kapitel schließt mit Ausführungen zu den resonanten Polaron-Effekten, die übrig bleiben, wenn bei  $L^4H$ -Temperaturen die resonanten Polaron-Effekte durch Besetzungen blockiert sind.

Kapitel 5 hat die Zyklotronresonanz im Regime des IQHE zum Gegenstand. Nach der Einführung in den IQHE beginnen die theoretischen Ausführungen mit dem verallgemeinerten Theorem von Kohn und einem klassischen Modell zur mehrkomponentigen Magneto-Plasmon-Resonanz eines infolge der Nichtparabolizität

in Subsysteme aufgespaltenen Q2DEG. Dem schließen sich zwei quantenmechanische Modelle an, die auf Basis des Kohnschen Theorems die Zyklotronresonanz eines mehrkomponentigen Systems schließlich als eine Anregung harmonisch verkoppelter Schwerpunkte interpretieren. Anschließend werden die experimentellen Resultate dargelegt und im Lichte der Modelle qualitativ und quantitativ interpretiert. Es wird die erstmalige Beobachtung von Resonanzaufspaltungen bei hohen bis sehr hohen Dichten beschrieben und eine quantitative Interpretation der zugrunde liegenden Mechanismen gegeben. In diesem Zusammenhang werden sämtliche Formen von Aufspaltungen behandelt, die sich in Landau-, Spin-, und Subband-Aufspaltung untergliedern. Weiterhin wird aufgezeigt, wie sich die Manifestation einer intrinsischen Zyklotronresonanz ausdrückt. Unter deren Kenntnis werden schließlich die extrinsischen Einflüsse infolge von Streuzentren detailliert untersucht. Kapitel 6 ist der Intersubband-Resonanz im Regime des IQHE gewidmet. Nach der allgemeinen Einführung in die Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA) wird diese Anregungsform eines Q2DEG zunächst theoretisch im Schema der zeitabhängigen Lokaldichte-Näherung (TDLDA) unter Berücksichtigung des Magnetfeldes, der Nichtparabolizität und der Ankopplung an weitere Elementaranregungen behandelt. Anschließend werden experimentelle Intersubband-Resonanzen im Lichte selbstkonsistenter LDA-Berechnungen beschrieben und interpretiert. Die korrekte Berücksichtigung der durch das Magnetfeld verstärkten Austauscheffekte erfolgt daraufhin im Rahmen der selbstkonsistenten Hartree-Fock-Näherung (HFA) und der dazu kompatiblen Response-Näherung für die Kollektivmoden, der zeitabhängigen HFA (TDHFA). Zuletzt werden die experimentellen Ergebnisse zur Magneto-Intersubband-Resonanz präsentiert und anhand von quantitativen theoretischen TDHFA- und TDLDA-Berechnungen die Relevanz des infolge der Landau-Quantisierung verstärkten Austauschs für diese Anregung untermauert.

In Kapitel 7 wird die Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors  $\nu = 1$  behandelt, der den fließenden Übergang zwischen dem Integralen und dem Fraktionalen Quanten-Hall-Effekt bildet. Die theoretischen Betrachtungen umfassen die Sichtweise auf die Zyklotronresonanz als magnetisches Exziton, die elektronische Abschirmung und das Landau-Niveauschema in der abgeschirmten Hartree-Fock-Näherung (SHFA), die Intrasubband-Magneto-Plasmonen in der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA), sowie der Verifikation des Kohnschen Theorems in der TDHFA. Dem folgt eine Einführung in die Skyrmionen, die aus dem Wechselspiel zwischen Austausch- und Zeeman-Energie resultieren und spezielle Quasiteilchen mit komplexer Spinzusammensetzung darstellen. Im experimentellen Teil wird nach einem Überblick über die Zyklotronresonanz in diesem Regime aufgezeigt, wie die Skyrmion-Formation über die Blockade der Polaron-Kopplung hervortritt. Anhand quantitativer Anpassungen werden die Spinpolarisation ausgewertet, Modell- und Materialparameter bestimmt, sowie die Rolle der Abschirmung herausgearbeitet. Zuletzt wird eine als universell identifizierte Linienbreitenvariation bei  $\nu = 1$  mit einem erweiterten Modell der Störstelleneinwirkung erklärt.

Das letzte Kapitel 8 ist der Zyklotronresonanz im Regime des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) bei  $L^3\text{He}$ -Temperaturen gewidmet. Der Grundlagenteil beginnt mit einer Einführung in den FQHE. Diesem schließt sich die Behandlung der Theorie von Laughlin und des Verbundfermionen-Bildes (Composite-Fermionen) nach Jain an. Im experimentellen Teil werden nach einem Überblick über den Stand der Zyklotronresonanz in diesem Regime, die Manifestation der FQH-Grundzustände in der Zyklotronresonanz dargelegt und Indizien für die Ausbildung eines freien Verbundfermionen-Gases in der Lineinbreite gefunden.

In der Zusammenfassung werden schließlich die wichtigsten Ergebnisse nochmals aufgelistet und miteinander verknüpft.

# Kapitel 1

## Experimentelle Methodik

Die vorliegende Arbeit ist dem Studium der optischen Eigenschaften von quasi-zweidimensionalen Elektronengasen (Q2DEG) im ferninfraroten Spektralbereich gewidmet. Derartige Elektronengase sind typischerweise in ein kristallines Schichtsystem aus geeigneten gitterangepaßten Halbleitern unterschiedlicher Energielücken eingebettet.

Zunächst werden im ersten Teilabschnitt 1.1 der Meßaufbau für die Magneto-Spektroskopie im fernen Infrarotregime (FIR) und das zugrunde liegende Meßprinzip, die Fourierspektroskopie, vorgestellt. Die Bestimmung der Ladungsträgerdichte an den verwendeten Strukturen mittels Transportmeßverfahren wird im Teilabschnitt 1.2 behandelt. Dem schließt sich im Teilkapitel 1.3 die Beschreibung der verwendeten Probenstrukturen und deren Präparation an. Die Optik planparalleler Vielschichtsysteme und deren Einfluß auf die gemessene relative Transmission sind Gegenstand des Teilkapitels 1.4. Im letzten Abschnitt 1.5 werden schließlich klassische Modellierungen der dynamischen Leitfähigkeit, der interessierenden Antwortfunktion des Q2DEG, vorgestellt. In diesem Zusammenhang wird kurz die Gitterkopplertechnik zur Anregung von Plasmonen mit Impulskomponenten parallel zur Schicht, sowie von quantisierten Schwingungen senkrecht zu dieser behandelt.

### 1.1 Meßprinzip der Magneto-Fourier-Spektroskopie im Ferninfraroten

Im ferninfraroten Spektralbereich stehen zur Spektroskopie weder lichtstarke durchstimmbare Lichtquellen noch empfindliche Detektoren mit hohen Quantenausbeuten zur Verfügung. Um die damit verbundenen Schwierigkeiten zu beherrschen, bedient man sich des Prinzips der Fourier-Spektroskopie [Gei75, Bel72, Gen69, Dum93]. Diese Spektroskopietechnik gestattet es das Auflösungs-Intensitäts-Dilemma konventioneller Gitter- und Prismenspektrometer, die auf diffraktiven beziehungsweise dispersiven Prinzipien beruhen, weitgehend zu umgehen. Die Fourierspektroskopie gründet auf dem Prinzip der Interferenz elektromagnetischer Wellen. Sie benutzt das bekannte Michelsonsche Interferometer oder Abwandlungen desselben und kommt nahezu ohne optische Komponenten aus, die den Strahlengang einengen und Lichtintensität kosten. Diesen Vorteil erkaufte man sich allerdings durch einen erheblichen apparativen Aufwand, der hauptsächlich darin besteht, ein gemessenes Interferogramm numerisch zu dem gewünschten Spektrum zu transformieren. Die Methode ist erst möglich und praktikabel geworden seitdem leistungsstarke Rechner und schnelle Algorithmen zur Durchführung der Fourier-Transformation zur Verfügung stehen. Im folgenden soll das Grundprinzip eines Fourier-Spektrometers kurz erläutert werden:

Im Michelsonschen Interferometer, dem Herz des Spektrometers (siehe Abbildung 1.1), wird das von einer Lichtquelle emittierte Licht mit der zu analysierenden spektralen Verteilung  $I(k)$  durch einen Strahlteiler in

zwei Teilstrahlen aufgeteilt. Der Betrag des Wellenzahlvektors  $k$  ist dabei gemäß der Vakuumdispersion elektromagnetischer Wellen  $k = c_0/\omega$  direkt zur Kreisfrequenz der Strahlung proportional, wobei  $c_0$  für die Vakuumlichtgeschwindigkeit steht. Die beiden Teilstrahlen werden jeweils an als perfekt angenommenen Spiegeln in sich zurückreflektiert und wiederum am Strahlteiler nochmals jeweils in zwei Teilstrahlen gleicher Intensität zerlegt. Von diesen Teilstrahlen gelangen schließlich zwei zum Detektor. Die zur Detektion kommenden Teilstrahlen haben die Amplituden

$$\begin{aligned} A_1(k) &= \sqrt{\frac{I(k)}{4}} e^{ik g_1} , \\ A_2(k) &= \sqrt{\frac{I(k)}{4}} e^{ik g_2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

und unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen optischen Laufwege  $g_1$  und  $g_2$  in den beiden Interferometerarmen in ihrer Phase. Die vom Detektor gemessene Gesamtintensität  $\hat{I}_D$  berechnet sich nach

$$\hat{I}_D = \int_0^\infty dk |A_1(k) + A_2(k)|^2 \quad (1.2)$$

und hängt nach Einsetzen der Beziehungen 1.1 und entsprechender Umstellung über

$$\hat{I}_D(g) = \int_0^\infty dk \frac{I(k)}{4} [1 + \cos(k g)] \quad (1.3)$$

von der optischen Wegdifferenz  $g = g_2 - g_1$  zwischen den interferierenden Teilstrahlen ab.

Hält man einen der beiden Interferometerspiegel beweglich, so kann man in Abhängigkeit von der Spiegelposition die Intensität aufzeichnen und das sogenannte Interferogramm  $\hat{I}_D(g)$  gewinnen. Dieses stellt nach Gleichung 1.3 nichts anderes als die experimentell erzeugte Fourier-Transformierte des Spektrums dar. Das gesuchte Spektrum  $I(k)$  selbst ergibt sich schließlich auf numerischem Wege aus dem Interferogramm über die inverse Fourier-Transformation zu

$$I(k) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} dg \left[ \hat{I}_D(g) - \hat{I}_D(\infty) \right] \cos(k g) . \quad (1.4)$$

Hierin steht  $\hat{I}_D(\infty)$  für die Intensität bei hypothetisch unendlicher Wegdifferenz. In der Praxis steht jedoch nur eine endlicher Spiegelverfahrweg  $-g_{max} < g < g_{max}$  zur Verfügung. Daher ist die Integration in der als Grundgleichung der Fourierspektroskopie bezeichneten Beziehung 1.4 niemals vollständig. Dieser Beschränkung wird mathematisch durch eine Apodisationsfunktion<sup>1</sup>  $\hat{B}(g)$ , welche direkt auf das Interferogramm aufmultipliziert wird, Rechnung getragen. Die natürliche Apodisation  $\hat{B}_0(g)$  ist eine Rechteckfunktion über das Intervall  $[-g_{max}, g_{max}]$  (Boxcar-Funktion). Gemäß dem Faltungstheorem der Fouriertransformation entspricht das gemessene Spektrum daher einer Faltung aus dem zu analysierenden Spektrum und der Apparatfunktion  $B_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dg \hat{B}_0(g) \cos(k g) \propto \sin(k g_{max}) / (k g_{max}) = \text{sinc}(k g_{max})$  des Spektrometers. Die natürliche Apodisationsfunktion hat im  $k$ -Raum die Breite  $\Delta k = 1/(2 g_{max})$ . Durch diese ist die Auflösung  $A = 1/\Delta k$  eines Fourier-Spektrometers generell nach oben hin beschränkt. Die natürliche Apodisation  $B_0(k)$  führt bei sehr scharfen Spektrallinien oftmals zu unerwünschten Nebenmaxima in den gemessenen Spektren. Aus diesem Grund wählt man oftmals eine künstliche Apodisation, die auf das Interferogramm numerisch aufmultipliziert wird und einen glatteren Verlauf als die Rechteckfunktion aufweist, woraufhin sich

<sup>1</sup>griechisch Apodisation = "Füßchen weg"

die Möglichkeit bietet, Nebenmaxima gezielt und wirksam zu unterdrücken. Allerdings geht dieser Vorteil auf Kosten der Auflösung. Diese wird mit glatter werdender Apodisation zunehmend verringert. Einen guten Kompromiß aus Seitenbandenunterdrückung und Auflösung stellt häufig ein dreieckförmiges Fenster mit der Spektralfunktion  $B(k) \propto \text{sinc}^2(k g_{max})$  dar.

Die Auflösung eines Fourier-Spektrometers wird weiterhin durch die Nichtparallelität der interferierenden Teilstrahlen infolge einer stets endlichen Ausdehnung der Strahlungsquelle herabgesetzt (reduzierte räumliche Kohärenz). Von der Ausdehnung der Lichtquelle hängt aber der Lichtdurchsatz im Spektrometer ab. Dieser fällt jedoch, wie sich zeigen lässt, bei einem Fourier-Spektrometer nur linear mit der Auflösung ab, während er bei einem Gitterspektrometer quadratisch abnimmt (Jacquinot-Vorteil [Jac60]).

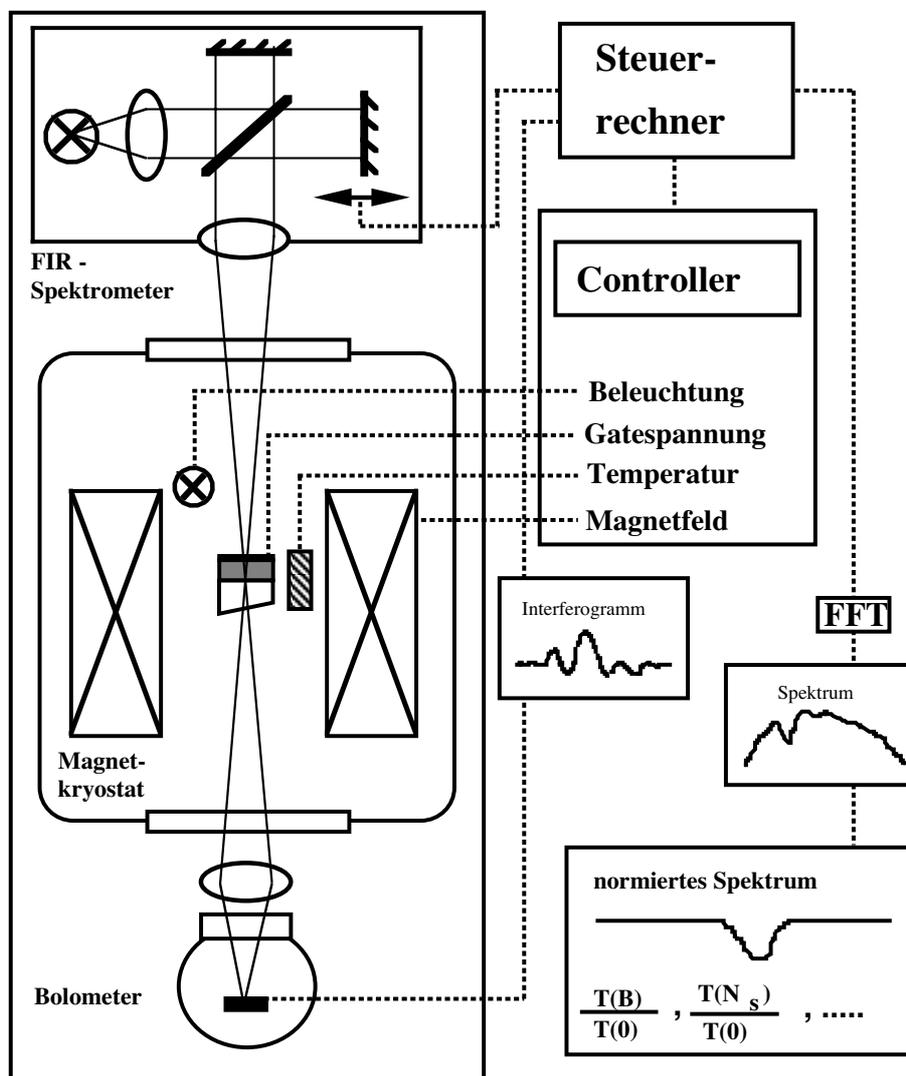
In der experimentellen Praxis ergibt sich das Problem, daß ein Interferogramm in der Regel nur an diskreten und im Idealfall äquidistanten Spiegelstellungen vorliegt. Bei der numerischen Rekonstruktion des Spektrums ist daher darauf zu achten, daß das Nyquist-Kriterium erfüllt ist. Das auch als Abtasttheorem bezeichnete Kriterium besagt, daß für die höchste interessierende Frequenz  $k_{max}$  mindestens zwei Meßwerte pro Wellenlängenintervall vorliegen müssen. Daraus ergibt sich die für die Abtastintervallbreite  $\Delta g$  unmittelbar die Forderung  $\Delta g < \lambda_{min}/2 = \pi/k_{max}$ , wenn man Frequenzen unterhalb der interessierenden Grenzfrequenz  $k_{max} = 2\pi/\lambda_{min}$  auflösen will. Die Zahl  $P$  der zum Interferogramm beitragenden Spiegelstellungen muß daher der Bedingung  $P > 2g_{max}/\Delta g$  genügen.

Damit allerdings durch die diskrete Abtastung nicht gleichzeitig hochfrequente Spektralanteile in den interessierenden Frequenzbereich  $[k_{min}, k_{max}]$  zurückgefaltet werden (Aliasing), muß das Quellenspektrum noch durch eine angepaßte Tiefpaßfilterung abgeschnitten werden. Die Grenzfrequenz  $k_g$  des Spektralfilters muß dabei generell unterhalb der oberen Grenzfrequenz  $k_{max}$  liegen. Die spektrale Filterung kann dabei sowohl auf optischem als auch auf elektronischem Wege erfolgen.

Bei modernen Fourier-Spektrometern erfolgt die Messung der Spiegelposition typischerweise interferometrisch mit einem He-Ne-Laserstrahl. Der stabilisierte rote He-Ne-Laser stellt dabei ein außerordentlich genaues Frequenz- und damit Wellenlängennormal dar. Mit diesem Prinzip können unabhängig vom Spektralbereich ohne weiteres absolute Wellenzahlgenauigkeiten von typischerweise  $10^{-6}$  und kleiner erreicht werden (Connes-Vorteil [Con66]).

Auch das Signal-Rausch-Verhältnis wird durch das Fourier-Meßprinzip gegenüber einem dispersiven oder diffraktiven Spektrometer positiv beeinflusst. Dies liegt daran, daß jeweils das gesamte Spektrum und nicht nur ein im Idealfall infinitesimal schmaler Frequenzbereich zur Aussteuerung des Detektors beiträgt (Fellgett- oder Multiplex-Vorteil [Fel58]).

Der gesamte Meßaufbau zur Durchführung von Magneto-Spektroskopie an Halbleitersystemen ist in der Abbildung 1.1 im Überblick dargestellt [Bat84]. Er besteht im wesentlichen aus einem kommerziellen Fourier-Spektrometer (Bruker IFS113), einem 15/17 Tesla-Flüssighelium-Kryomagnetsystem mit supraleitender Spule (Oxford Instruments) und einem  $L^3\text{He}$ -Tiefemperatureinsatz (Oxford Instruments). Zur Detektion des Interferogramms befindet sich unterhalb der Probe in einem durch ein Fenster abgetrennten Bereich des Tiefemperatureinsatzes ein Bolometer-Detektor (Infrared Laboratories). Die Lichtführung vom Spektrometer durch die Probe auf den Detektor geschieht mittels überdimensionierter Messing-Wellenleiter, die zur Fokussierung konisch auslaufen. Die Probe befindet sich im Zentrum des Magneten in der  $L^3\text{He}$ -Kammer des Tiefemperatureinsatzes. Mittels Einkondensation von  $^3\text{He}$  und anschließendem Abpumpen des Dampfdruckes über dem Flüssigkeitsspiegel mit Hilfe einer mit Aktivkohle gefüllten Adsorptionspumpe erreicht man eine Temperatur bis hinab zu 300 mK. Diese Basistemperatur kann über einen Zeitraum von ungefähr 12 Stunden aufrecht erhalten werden. Der Temperatureinsatz kann aber auch, wenn man das  $^3\text{He}$  als Wärmeaustauschgas benutzt, kontinuierlich durchstimmbare bis zu einer Temperatur von 80 K betrieben werden. Die supraleit-



**Abbildung 1.1:** Schematischer Meßaufbau zur Magneto-Spektroskopie im FIR.

ende Spule des Magneten kann bei 2.2 K, der Temperatur des  $\lambda$ -Punktes von  $^4\text{He}$ , ein Maximalfeld von 17 T erzeugen. Diese Temperatur wird über lokales Abpumpen mittels sogenannter  $\lambda$ -Platten im  $L^4\text{He}$ -Bad des Magnetkryostaten generiert und stellt auch die Arbeitstemperatur des Bolometers dar, an die höchste Stabilitätsanforderungen gestellt werden. Neben Magnetfeld und Temperatur stehen über eine Gate-Spannungsquelle und eine NIR-Leuchtdiode noch zwei weitere experimentelle Parameter zur Verfügung. Beide werden eingesetzt, um entweder über den Feldeffekt oder den persistenten Photoeffekt die Ladungsträgerdichte und auch die Ladungsträgerbeweglichkeit im zu untersuchenden Q2DEG zu verändern.

Die Meßapertur ist soweit automatisiert, daß bis auf die Temperatur sämtliche Parameter in Form von frei programmierbaren Meßzyklen von einem Steuerrechner eingestellt und anschließend die entsprechenden Spektren aufgezeichnet und auf Festplatte abgespeichert werden. Ein aufgezeichnetes Spektrum besteht hierbei, um Eigencharakteristiken der verwendeten Optiken zu eliminieren, aus jeweils einem Proben- und einem Referenzspektrum, die bei der Auswertung dividiert werden. Dabei werden je nach experimenteller Anforderung verschiedene Sequenzen zur Generation der Teilspektren eingesetzt. Bei Zyklotronresonanz-Meßreihen werden

häufig sogenannte Magnetfeld-Ratios verwendet. Hierbei werden das Proben- und das Referenz-Spektrum bei derart unterschiedlichen Magnetfeldern aufgezeichnet, so daß die näherungsweise linear mit dem Magnetfeld verschiebenden Resonanzen sauber voneinander trennbar sind. Bei Messungen der Intersubband-Resonanz werden häufig sogenannte Gatespannungs-Ratios (oder auch  $N_S$ -Ratios) eingesetzt. Hierbei werden zu einem festen Parametersatz zuerst ein Referenz- und anschließend das Proben-Spektrum bei jeweils unterschiedlichen an den Gateelektroden anliegenden Spannungen gemessen. Dabei ist das Q2DEG bei der Referenzspannung idealerweise völlig entleert.

## 1.2 Transportcharakterisierung quasi-zweidimensionaler Elektronengase

Die Ladungsträgerdichte  $N_S$  stellt in der Regel den wichtigsten Parameter eines Q2DEG dar. Prinzipiell ist sie durch eine Anpassung an die Zyklotronresonanz spektroskopisch und damit kontaktlos bestimmbar. Die spektroskopische Methode ist jedoch verglichen mit Transportmeßverfahren vergleichsweise ungenau. Letztere haben jedoch den Nachteil, daß das Q2DEG in der Regel mehrfach kontaktiert werden muß, was mit einem erhöhten präparativen Aufwand verbunden ist.

Die Transportmethoden zur präzisen Bestimmung der Ladungsträgerdichte eines Q2DEG beruhen in der Regel auf der starken Modulation der quantenmechanischen Zustandsdichte des Ladungsträrgases, die ein quantisierendes Magnetfeld erzeugt. Diese hat, wie es im Kapitel 2.3 noch detailliert dargestellt wird, ihre Ursache in der Kondensation der Elektronenzustände auf den sogenannten Landau-Niveaus. Diese besitzen ein endliches makroskopisches Fassungsvermögen, das zum Magnetfeld direkt proportional ist. Erhöht man bei fester Ladungsträgerdichte  $N_S$  das Magnetfeld, so steigt der für alle Landau-Niveaus einheitliche Entartungsgrad  $N_{LL} = 2\pi(eB)/\hbar$  linear mit  $B$  an [And82]. Es werden daher mit zunehmendem Magnetfeld immer weniger Landau-Niveaus benötigt, um die gleichbleibende Anzahl an Elektronen im Q2DEG aufzunehmen. Dies führt zu Oszillationen in der Fermi-Energie und den daraus abgeleiteten Antwortgrößen in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die Vollfüllung des obersten Landau-Niveaus ist dabei durch die Bedingung

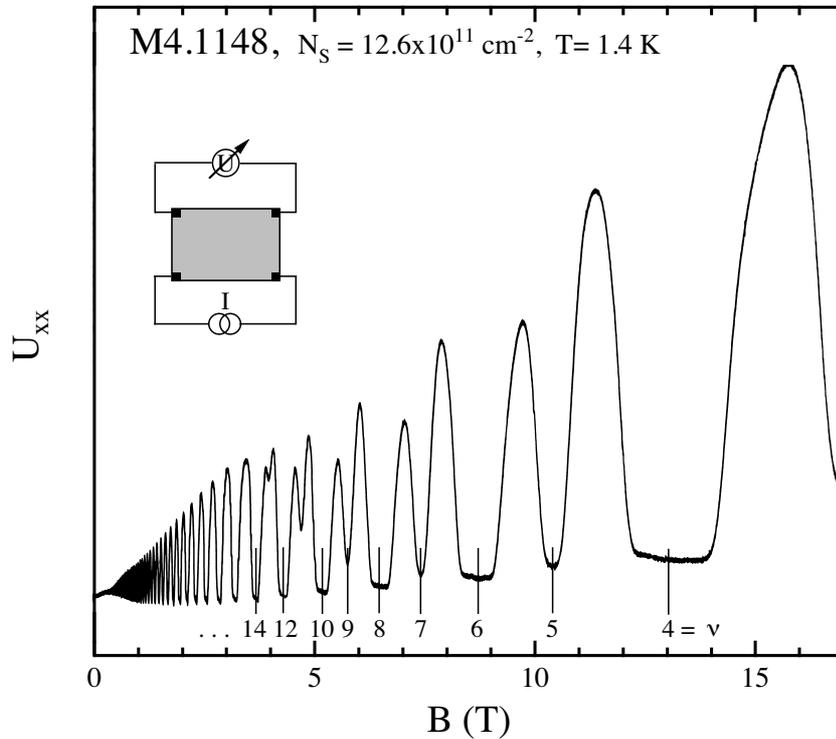
$$N_S = \nu N_{LL}(B_\nu) \quad (1.5)$$

gegeben, wobei die als Füllfaktor bezeichnete Größe  $\nu$  einen ganzzahligen Wert  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  annimmt. In Laboreinheiten ausgedrückt lautet diese Bedingung (geeignet umgestellt)

$$B_\nu [\text{T}] = \frac{N_S [10^{10} \text{ cm}^{-2}]}{2.418 \nu} \quad (1.6)$$

Kann der Elektronenspin experimentell nicht aufgelöst werden, so sind nur die geradzahligen Füllfaktoren  $\nu = 2, 4, \dots$  ausgezeichnet.

Die sogenannten Shubnikov-de Haas-Oszillationen können im longitudinalen Magnetowiderstand  $\rho_{xx}$  beobachtet werden, wenn die Beweglichkeit der Ladungsträger hinreichend groß und die Temperatur entsprechend niedrig ist [And82]. Die Magnetfelder, bei denen  $\rho_{xx}$  Minima aufweist, entsprechen der Situation, daß das oberste Landau-Niveau gerade voll ist. Die Ladungsträger können hier, da nur eine minimale Anzahl an Zuständen um die Fermi-Energie bereit steht, auch nur minimal an einem stets vorhandenen Verunreinigungspotential gestreut werden. Dies hat eine maximale Transportstreuzeit  $\tau$  und damit einen minimalen longitudinalen Widerstand zur Folge. Bei den Magneto-Transportmessungen in sogenannter van der Pauw-Geometrie sind, wie es im Insert von Abbildung 1.2 schematisch dargestellt ist, an allen vier Ecken einer rechteckigen Probe (ohne Frontelektrode) möglichst kleinflächig Kontakte aus Indium einlegiert. Ist die Leitfähigkeit über



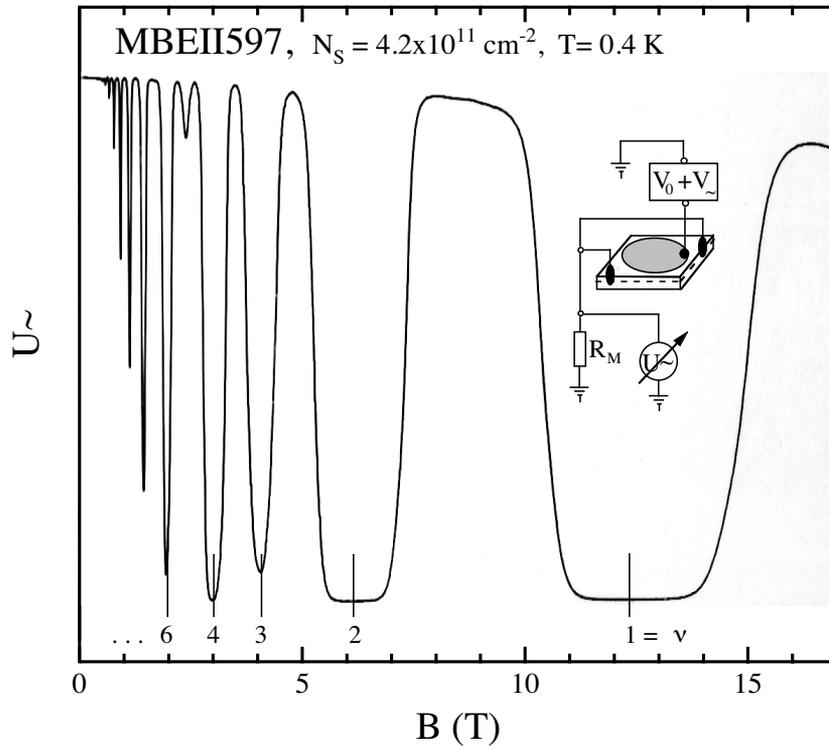
**Abbildung 1.2:** Typische Magneto-Transportkurve eines Q2DEG. Das Probenlayout und die Grundschaltung sind im Insert dargestellt. Die Meßspannung  $U$  wird durch den longitudinalen Magneto-Widerstand  $\rho_{xx}$  dominiert und weist ausgeprägte Shubnikov-de Haas-Oszillationen auf. Der aufgeprägte Konstantstrom betrug  $I \approx 10 \mu\text{A}$ .

die Probenfläche homogen, so können der longitudinale Magneto- und der transversale Hall-Widerstand, wie mathematisch anhand der holomorphen Abbildung in der komplexen Ebene bewiesen werden kann, aus Strom-Spannungsmessungen an bestimmten Permutationen von je zwei Strom- und je zwei Spannungskontakten und unter Umkehrung der Magnetfeldrichtung gewonnen werden. Betrachtet man nur eine Kontaktkonfiguration, wobei Strom- und Spannungskontakte nicht über Kreuz liegen, so dominiert bei einer halbwegs symmetrischen Probengeometrie in der Regel  $\rho_{xx}$ . Man kann dann bereits die nötige Information zur Bestimmung von  $N_S$  aus einer einzigen Kontaktkonfiguration bekommen. Die Abbildung 1.2 zeigt exemplarisch einen an einer Probe mit sehr hoher Dichte für eine Kontaktkonfiguration gemessenen Verlauf des Magneto-Widerstandes. Deutlich sind die mit zunehmendem Magnetfeld breiter und plateauartig werdenden Minima zu erkennen. Auffällig ist, daß sich beginnend bei  $\nu = 13$  ein zweiter Satz von schmalen Zwischenminima herausbildet. Diese beruhen auf dem Elektronenspin, dessen Entartung aufgrund später noch zu behandelnder Effekte, aufgehoben wird, so daß zu jedem Landauniveau die beiden Spin-Subniveaus aufgelöst werden. Die Dichte  $N_S$  ergibt sich gemäß Gleichung 1.6 aus der Auftragung von  $1/B_\nu$  gegen  $\nu$  (oder umgekehrt) und anschließender Geradenanpassung. Dies ist in der Figur 1.4 demonstriert.

Speziell für Proben mit aufgedampften Gateelektroden ist die Magneto-Kapazitätsmessung oft das bequemste Verfahren zur Bestimmung von  $N_S$ . Diese Methode basiert auf dem Feldeffekt. Die Frontelektrode und das Q2DEG können hierbei als die Platten eines Parallelplattenkondensators aufgefaßt werden. Ändert man die Kondensatorspannung um einen (idealerweise infinitesimal) kleinen Wert, so werden auf den Kondensatorelektroden gegennamige Ladungen influenziert. Dies geschieht am effektivsten, wenn im Q2DEG eine hohe Zustandsdichte um die Fermi-Energie zur Verfügung steht. Die Kapazität ist hier maximal und im wesentlichen durch die Kondensatorformel

$$C = \epsilon_0 \epsilon_{sc} \frac{A}{d} \quad (1.7)$$

gegeben. Darin bezeichnen  $\epsilon_{sc}$  die relative Dielektrizitätskonstante des Halbleiters,  $A$  die mit der Gateelek-



**Abbildung 1.3:** Typische Magneto-Kapazitätskurve. Das Probenlayout mit Grundschiung ist im Inset dargestellt. Die am Meßwiderstand abfallende Wechselspannung ist zum Ladestrom des Effektivkondensators und damit zu dessen Kapazität proportional, solange der Längswiderstand des Q2DEG und der Gateelektrode gegenüber der Kondensatorimpedanz vernachlässigbar sind. Die Modulationsspannungsamplitude betrug 2 mV.

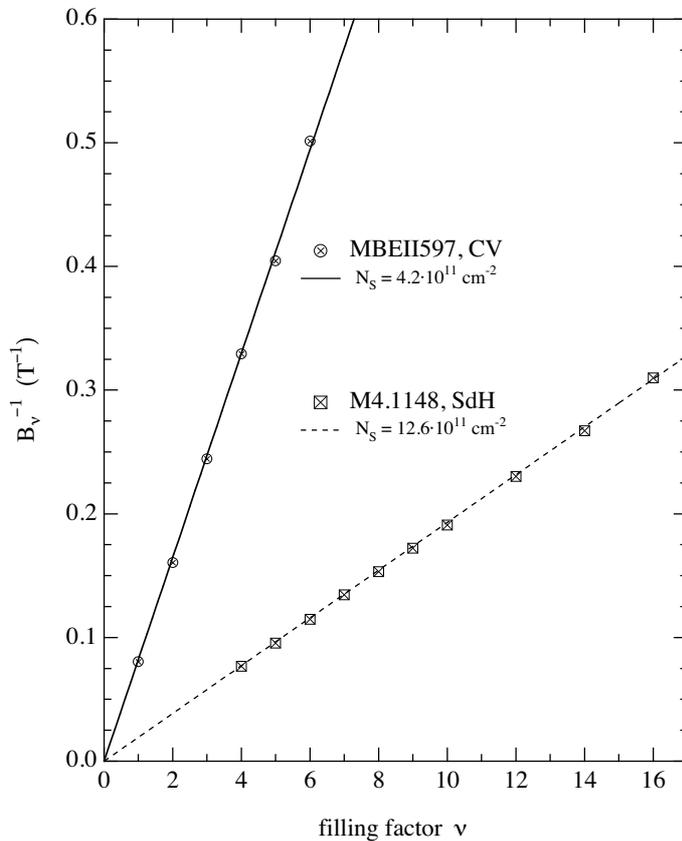
trode versehene Probenfläche und  $d$  den Abstand zwischen Q2DEG und Probenoberfläche. Schnürt sich die Zustandsdichte bei Vollfüllung des obersten Landau-Niveaus ein, wobei die Fermi-Energie innerhalb der Lücke zwischen zwei Landau-Niveaus zu liegen kommt, können nur noch minimale Ladungsänderungen am Q2DEG influenziert werden. Dies hat dann ein Minimum in der Kapazität zur Folge, dessen Position analog zum Shubnikov-de Haas-Effekt durch die Gleichung 1.6 gegeben ist. Eine genauere Betrachtung liefert für die Magneto-Kapazität die Beziehung [Smi85, Gud87]

$$C(B) = \left[ \frac{1}{C(0)} + \frac{1}{e^2 D_T(B)} \right]^{-1}, \quad (1.8)$$

worin  $C(0)$  die Kapazität ohne angelegtes Magnetfeld und  $D_T(B)$  die thermische Zustandsdichte bezeichnen. Die thermische Zustandsdichte ist durch

$$D_T(B) = \frac{\partial N_S}{\partial \mu} = \int dE D(B, E) \frac{df_{FD}(E - \mu)}{d\mu} \quad (1.9)$$

gegeben und reduziert sich für  $T = 0$  K auf die Zustandsdichte an der Fermi-Energie  $D(B, E_F)$ . Die Größe  $\mu$  stellt hierin das chemische Potential und  $f_{FD}$  die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion dar. Die Magneto-Kapazität gehört demnach zu den wenigen experimentellen Größen, die es prinzipiell erlauben, die Zustandsdichte eines Q2DEG direkt zu vermessen. In der Praxis treten jedoch besonders im Regime des Quanten-Hall-Effekts, wo  $\rho_{xx}$  und simultan auch  $\sigma_{xx}$  verschwinden, Komplikationen auf. Dies liegt daran, daß dann der in Serie zur Effektivkapazität geschaltete Längswiderstand des Q2DEG nicht mehr vernachlässigt werden kann. In der Regel überlagern sich dann dem interessierenden Kapazitätssignal ohmsche Beiträge mit Shubnikov-de Haas-Oszillationen. Den Einfluß des Längswiderstands erkennt man an der relativen Phase des Meßsignals in Bezug zur Anregungsspannung. Die Abbildung 1.3 zeigt eine typische Magneto-Kapazitätskurve, die ohne Berücksichtigung der Phase mittels Lock-In-Technik aufgezeichnet wurde. Deutlich erkennt man, wie bei ganzzahligen Füllfaktoren die charakteristischen Minima hervortreten. Auch hier wird wiederum der



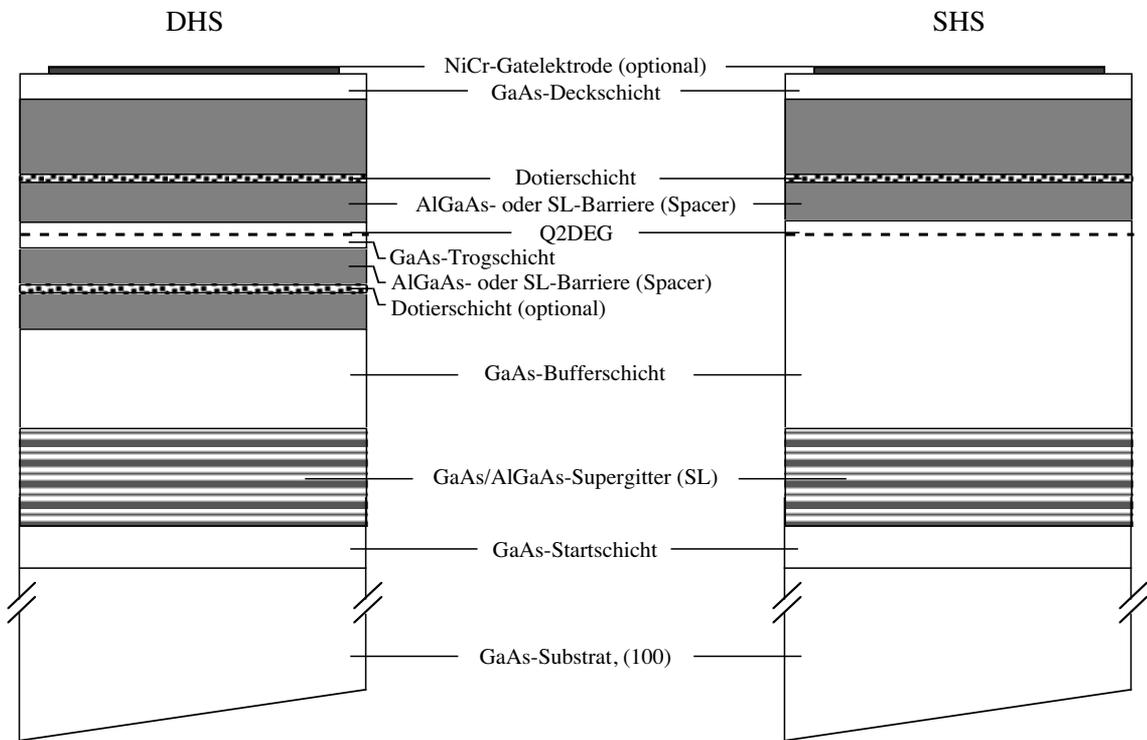
**Abbildung 1.4:** Auswertung der Elektronendichte aus den Magneto-Oszillationen in den Transportkurven.

Elektronenspin in den Besetzungen für  $\nu \leq 5$  aufgelöst. Die Auswertung der Dichte aus den Kapazitätsminima geht aus der Abbildung 1.4 hervor.

### 1.3 Probenaufbau und Probenpräparation

Hochbewegliche quasi-zweidimensionale Elektronengase werden in der Regel mittels Molekularstrahl-Epitaxie (MBE) auf (100)-orientierten GaAs-Substraten hergestellt. Die zwei grundlegenden Strukturaufbauten, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit behandelt werden, sind in der Abbildung 1.5 schematisch dargestellt. Ihre Funktionsweise und das Prinzip der Modulationsdotierung werden im Abschnitt 2.1 ausführlich erläutert. Die eigentliche aktive Schicht mit dem Q2DEG stellt dabei in der Regel nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Gesamtaufbau dar.

Man unterscheidet hierbei zwischen Doppelheterostrukturen (DHS) und Einfachheterostrukturen (SHS), je nachdem ob das Q2DEG zwischen zwei Barrieren eingebettet ist oder ob es sich an einer Grenzfläche ausbildet. Als Barrieren kommen sowohl  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Legierungen als auch kurzperiodische Supergitter aus GaAs und  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  zum Einsatz. Innerhalb der Barrieren ist typischerweise eine nur wenige Monolagen dicke Si-Dotierschicht eingebracht. Diese liefert die für die Ausbildung eines Q2DEG benötigten Elektronen. Die Dotierschicht und der Elektronenkanal sind dabei durch eine sogenannte Spacerschicht getrennt. Je nach Dicke der Spacerschicht (5 – 100 nm) gelangen die Inversionselektronen durch quantenmechanisches Tunneln oder durch thermische sowie photoinduzierte Aktivierung in den Kanal. Durch die räumliche Trennung der Donatoren von dem Q2DEG durch die Spacerschicht werden außerordentlich hohe Elektronenbeweglichkeiten möglich. Das Elektronengas selbst befindet sich stets in einem GaAs-Bereich und dringt nur zu einem sehr geringen Anteil von maximal wenigen Prozent in die Barrieren ein. Zur Erreichung der für die hohen

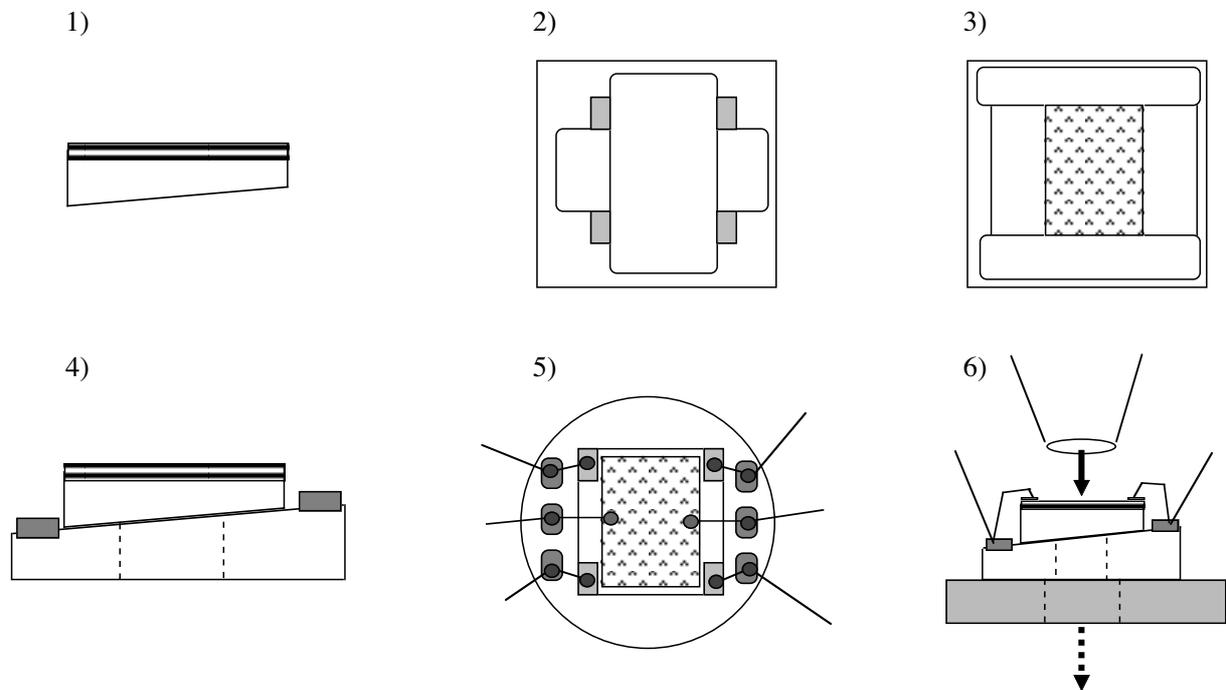


**Abbildung 1.5:** Strukturaufbauten von Doppel- und Einfachheterostrukturen in GaAs.

Elektronenbeweglichkeiten notwendigen kristallinen Qualität im Bereich des Q2DEG wird in der Regel vom Substrat ausgehend zuerst eine Startschicht, dann eine Supergitterlage und anschließend eine ein bis mehrere Mikrometer dicke Bufferschicht aus GaAs aufgebracht. Das kurzperiodische Supergitter wirkt dabei als Sperre für Versetzungen, die vom Substrat ausgehend in das Schichtsystem eindringen. Zum Schutz des Schichtsystems vor Oxidation wird auf die oberste Barrierenschicht zuletzt noch eine dünne ( $\approx 5$  nm) GaAs-Deckschicht aufgebracht.

Zur Steuerung der Elektronendichte im Q2DEG kann das Schichtsystem noch optional durch Aufdampfen im Vakuum mit einer metallischen Gatelektrode versehen werden. Für optische Transmissionsexperimente kommt hier ein semitransparenter nur 5 nm-dicker Metallfilm aus einer  $\text{Ni}_{0,5}\text{Cr}_{0,5}$ -Legierung zum Einsatz. Für Gitterkopplerexperimente, wie sie im Abschnitt 1.5.4 beschrieben sind, wird durch ein kontaktlithographisches Verfahren zusätzlich auf die Gatelektrode ein hochleitfähiges Metallgitter aus Aluminium oder Silber mit Gitterperioden im Bereich weniger  $\mu\text{m}$  aufpräpariert. Damit das mit einer Gatelektrode versehene Schichtsystem durch Anlegen einer Spannung steuerbar wird, benötigt man weiterhin ohmsche Kontakte zum Elektronenkanal. Diese werden durch Einlegieren von Indium hergestellt. Solche Kontakte werden generell auf allen Proben aufgebracht, da sie für die präzise Bestimmung der Ladungsträgerdichte benötigt werden. Zur Vermeidung von Fabry-Perot-Vielfachinterferenzen ist das Substrat mit einem Winkel von etwa  $2^\circ$  angekeilt. Das Ankeilen geschieht durch mechanisches Abschleifen und anschließendes Polieren. Die Präparationsschritte und der Probeneinbau sind hier in ihrer Reihenfolge nochmals aufgelistet und in Abbildung 1.6 illustriert:

1. Ankeilen des Substrates.
2. Aufdampfen der In-Kontakte ( $\approx 100$  nm) an den vier Ecken der rechteckigen Probe. Die aktive Probenfläche ist dazu mit Aluminium-Folie abgedeckt. Anschließend ungefähr 5-minütiges Einlegieren der



**Abbildung 1.6:** Schritte der Probenpräparation und des Einbaus.

Bezeichnung	HF-M4.1148	HF-M4.1149	HF-M4.1200
Typ	10 nm-DHS	10 nm-DHS	14 nm-DHS
Dichte [ $10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ]	12.7	10.7	7.6 (1.5 K) 6.8 (10 K)
Beweglichkeit [ $10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ ]	1.2 (0.3 K)	1.3 (0.3 K)	>1
SL-Barrieren	(AlAs) <sub>4</sub> /(GaAs) <sub>8</sub>	(AlAs) <sub>4</sub> /(GaAs) <sub>8</sub>	(AlAs) <sub>4</sub> /(GaAs) <sub>8</sub>
Spacer [nm]	18	14	18

**Tabelle 1.1:** Probeneigenschaften der von R. Hey und K. J. Friedland am Paul-Drude-Institut in Berlin hergestellten Proben. Die Dichten wurden experimentell bestimmt. Die Beweglichkeiten beruhen auf den Angaben des Herstellers.

Kontakte bei 400° C unter Formiergas-Atmosphäre.

3. Aufdampfen der 5 nm starken NiCr-Gateelektrode. Die Kontaktflächen sind vorher zur Vermeidung eines Kurzschlusses mit Al-Folie abzudecken.
4. Aufkleben der Probe auf den Probenhalter. Zum Ausgleich des Ankeilwinkels des Substrates ist die Probenaufnahme entsprechend entgegengesetzt geneigt.
5. Kontaktierung der Probe unter einem Mikroskop.
6. Einbau der Probe in den Probenhalter und anschließendes Einkühlen.

Bezeichnung	MBEII2542	MBEII2542	MBEII597
Typ	SHS	SHS, 2 $\mu\text{m}$ -Gitterkoppler	SHS, Gate
Dichte [ $10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ]	5.8 (beleuchtet)	$1.2 < N_S < 2.7$ (Gate)	$2.9 < N_S < 4.2$ (Gate)
Beweglichkeit [ $10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ ]	< 0.5	< 0.5	< 0.5
Barrieren	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$
Spacer [nm]	20	20	20

**Tabelle 1.2:** Probeneigenschaften der von K. Köhler und P. Ganser am Fraunhofer-Institut für angewandte Festkörperphysik in Freiburg hergestellten Proben. Die Dichten wurden experimentell bestimmt. Die Beweglichkeiten beruhen auf den Angaben des Herstellers.

Hersteller-Bez.	07.16.96	03.30.98	09.17.96	10.18.96
Bezeichnung	W16796	W30398	W17996	W181096
Typ	SHS	DHS, 20 nm	SHS	SHS
Dichte [ $10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ]	6.7 (bel.)	2.3 (bel.) 1.1 (unbel.)	1.2 (bel.)	$0.9 < N_S < 1.8$ (bel.)
Beweglichkeit (1.5 K) [ $10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ ]	1.5 (bel.)	3.1 (bel.)	7.8 (bel.)	7.4 (bel.)
Barrieren	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$	$\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$
Spacer [nm]	80	80	80	80
Besonderheiten	zweites Subband besetzt	-	Linienasym. durch Schichten	Linienasym. durch Schichten

**Tabelle 1.3:** Probeneigenschaften der von W. Wegscheider und M. Bichler an der TU München hergestellten Proben. Die Dichten wurden experimentell bestimmt. Die Beweglichkeiten beruhen auf den Angaben des Herstellers.

Die untersuchten Halbleiterproben wurden von unterschiedlichen Herstellern bezogen und weisen je nach Schichtaufbau und Optimierungskriterien des jeweiligen MBE-Prozesses besondere Eigenschaften auf. Die untersuchten Systeme und ihre wesentlichen Parameter sind getrennt nach Herstellern in den Tabellen 1.1, 1.2 und 1.3 aufgelistet:

Die Proben, die von R. Hey und K. J. Friedland am Paul-Drude-Institut in Berlin hergestellt wurden, weisen einen besonderen Aufbau auf (Tabelle 1.1). Dieser erlaubt es bei für GaAs-Verhältnisse extrem hohen Elektronendichten gleichzeitig sehr hohe Beweglichkeiten zu erzielen. Das Design- und Funktionsprinzip ist in [Fri96a] beschrieben und basiert auf dem Effekt der Abschirmung. Dazu bestehen die Barrieren aus jeweils speziellen kurzperiodischen Supergittern, in denen beidseitig symmetrisch zur Trogschicht die Dotierschichten eingebracht sind. Neben dem eigentlich interessierenden Elektronengas im Trog verbleibt ein Teil der Elektronen in den Supergittern. Dort bilden sich aufgrund des Designs links und rechts vom Trog jeweils gering leitfähige und zudem am L-Punkt der Brillouin-Zone lokalisierte Abschirmgase aus. Diese Abschirmgase besitzen die gewünschte Eigenschaft, daß sie die ionisierten und geladenen Donatoren elektrostatisch stark abschirmen. Dadurch wird das eigentliche Q2DEG kaum mehr von den ionisierten Störstellen beeinflusst. Gleichzeitig treten die Abschirmgase aufgrund ihrer schlechten Beweglichkeit (Anderson-Lokalisierung) weder in Transport- noch in FIR-Experimenten in Erscheinung. Infolge ihres speziellen Aufbaus sind die Proben weder über den Feldffekt noch über den persistenten Photoeffekt in ihrer Dichte zu beeinflussen. Zur Messung

der Elektronendichte wurden daher lediglich In-Kontakte einlegiert.

Die Tabelle 1.2 listet die Eigenschaften der Strukturen auf, die von K. Köhler und P. Ganser am Fraunhofer-Institut für angewandte Festkörperphysik in Freiburg für die Experimente zur Verfügung gestellt wurden. Diese Strukturen entstammen MBE-Anlagen, die kommerziell genutzt werden und auf Flexibilität und Durchsatz optimiert sind. Die Proben weisen daher in der Regel nicht die hohen Beweglichkeiten der beiden anderen Bezugsquellen auf. Andererseits erweisen sich diese Systeme von ihrem Aufbau her als am geeignetsten für die Dichteveriation über den Feldeffekt. Daher sind diese Proben mit Gateelektroden und optional mit Gitterkopplern versehen.

Zuletzt sind in der Tabelle 1.3 die von W. Wegscheider (mittlerweile Universität Regensburg) und M. Bichler an der TU München hergestellten Strukturen aufgeführt. Die dortige MBE-Anlage war primär auf sehr hohe Elektronenbeweglichkeiten hin optimiert. Entsprechend weisen diese Proben auch die höchsten Beweglichkeiten auf. Der Strukturaufbau dieser Proben unterscheidet sich von den im Vorfeld vorgestellten vor allem in der Dicke der Spacerschicht. Weiterhin weisen diese Proben generell ungleich dickere Versetzungsbarrieren und Bufferschichten auf. Entsprechend aufwändiger ist ihre Herstellung. Die Erreichung der hohen Beweglichkeiten, insbesondere in Doppelheterostrukturen mit ihren zwei Grenzflächen, setzt dabei eine extreme Reinheit der MBE-Anlage voraus. Diese wird in der Regel erst nach einigen Monaten des permanenten Betriebes erreicht. Da extrem hochbewegliche Q2DEG-Strukturen generell sehr empfindlich auf die Präparations- und Einkühlprozesse reagieren, wurde die Probenpräparation für diese Proben mit dem Einlegieren ohmscher Kontakte auf das notwendigste beschränkt. Eine Variation der Elektronendichte wird in derartigen Systemen am günstigsten über den persistenten Photoeffekt erreicht. Dabei geht mit der Erhöhung der Dichte generell auch ein deutlicher Anstieg der Elektronenbeweglichkeit einher.

## 1.4 Optik von Schichtsystemen

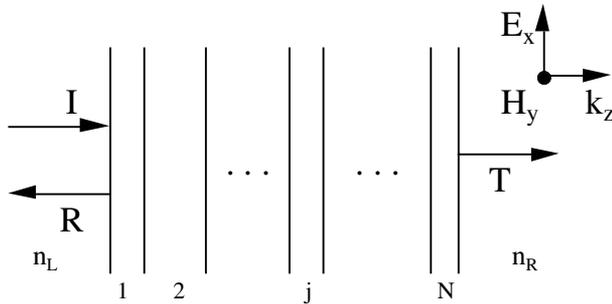
Dieser Abschnitt behandelt die Optik zusammengesetzter Halbleiter-Schichtsysteme, wie sie im vorausgehenden Abschnitt beschrieben sind.

Die Optik von planparallelen Schichtsystemen kann unmittelbar aus den Anschlußbedingungen an die elektromagnetischen Felder abgeleitet werden [Jac62]. Die Beschreibung eines beliebig komplexen Viellagensystems kann durch eine geschickte algebraische Formulierung der Anschlußbedingungen auf die Multiplikation sogenannter Interferenzmatrizen reduziert werden [Kni76, Bor70]. Im Falle senkrechter Inzidenz, wie sie bei allen hier durchgeführten Experimenten in guter Näherung vorliegt, lautet die Interferenzmatrix  $\mathbf{m}_j$  für eine individuelle Schicht mit Index  $j$

$$\mathbf{m}_j = \begin{pmatrix} \cos(kn_j d_j) & \frac{i}{n_j} \sin(kn_j d_j) \\ in_j \sin(kn_j d_j) & \cos(kn_j d_j) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Eine einzelne isotrope Schicht ist dabei vollständig durch ihre Dicke  $d$  und ihren komplexen Brechungsindex  $n$ , der mit der dielektrischen Funktion  $\varepsilon$  gemäß  $n^2 = \varepsilon$  in Zusammenhang steht, beschrieben. Der Betrag des Wellenzahlvektors  $k$  ist durch die Vakuumdispersion  $k = \omega/c_0$ , mit  $c_0$  als der Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $\omega$  als der Lichtfrequenz, gegeben. Die dielektrische Funktion setzt sich additiv aus einem Beitrag des Gitters  $\varepsilon_{ph}(\omega)$  und einem Leitfähigkeitsbeitrag  $\sigma(\omega)$  der sich in einer Schicht befindlichen (quasi-)freien Ladungsträger zusammen:

$$\varepsilon_j = n_j^2 = \varepsilon_{ph,j}(\omega) + i \frac{\sigma_j(\omega)}{\omega \varepsilon_0}. \quad (1.11)$$



**Abbildung 1.7:** Schema eines planparallelen optischen Schichtsystems. Die Pfeile mit den Symbolen  $I$ ,  $R$  und  $T$  symbolisieren die einlaufende, die reflektierte und die transmittierte Lichtwelle. Die Polarisation des elektrischen Feldes liegt bei senkrechter Inzidenz stets parallel zu den Schichtebenen.

Der Gitterbeitrag wird im allgemeinen Fall durch eine Superposition von Lorentz-Oszillatoren mit Kreisfrequenzen  $\omega_l$ , Oszillatorstärken  $f_l$  und phänomenologischen Dämpfungen  $\Gamma_l$  modelliert. Der Beitrag der an die Gitterionen gebundenen unbeweglichen Elektronen ist in der hochfrequenten Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon(\infty)$  zusammengefaßt. Die dielektrische Funktion des Gitters lautet allgemein

$$\varepsilon_{ph}(\omega) = \varepsilon(\infty) + \sum_l \frac{f_l \omega_l^2}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_l} . \quad (1.12)$$

Speziell für binäre (GaAs oder AlAs) und ternäre kubische Kristallgitter ( $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ) reduziert sich die dielektrische Funktion auf die in Abschnitt 3.1.1 angegebenen Formen 3.1 beziehungsweise 3.2.

Die Abbildung 1.7 zeigt schematisch eine Aneinanderreihung mehrerer planparalleler dielektrischer und leitfähiger Schichten mit entsprechender Indizierung. Die Optik des Gesamtsystems ergibt sich gemäß dem Formalismus der Interferenzmatrizen direkt aus der Transfermatrix  $\mathbf{M}$  des Gesamtsystems. Diese berechnet sich nach der Vorschrift

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^N \mathbf{m}_j . \quad (1.13)$$

Die optischen Meßgrößen Transmission  $T(\omega)$  und Reflexion  $R(\omega)$  des Gesamtsystems erhält man über die Beziehungen

$$T(\omega) = \left| \frac{2 \frac{n_L}{n_R}}{\frac{n_L}{n_R} M_{11} + n_L M_{12} + \frac{1}{n_R} M_{21} + M_{22}} \right|^2 , \quad (1.14)$$

$$R(\omega) = \left| \frac{\frac{n_L}{n_R} M_{11} + n_L M_{12} - \frac{1}{n_R} M_{21} - M_{22}}{\frac{n_L}{n_R} M_{11} + n_L M_{12} + \frac{1}{n_R} M_{21} + M_{22}} \right|^2 . \quad (1.15)$$

Hierin bezeichnen  $n_L$  und  $n_R$  die Brechungsindizes des linken und des rechten Halbraums (siehe Figur 1.7). Für die Transmissionsexperimente ist das Substrat (siehe Abbildung 1.5), auf welchem das eigentliche funktionale Schichtpaket aufgebracht ist, angekeilt. Das Ankeilen bewirkt, daß die an der Substratrückseite reflektierten Lichtwellen nicht mehr mit den Lichtwellen im Schichtsystem interferieren. Das Substrat kann daher als rechter Halbraum mit Brechungsindex  $n_R = \sqrt{\varepsilon_{\text{GaAs}}}$  aufgefaßt werden. Da das eigentliche aktive Schichtsystem in seiner Gesamtheit in der Regel nur eine Dicke von wenigen, typischerweise  $< 5 \mu\text{m}$  besitzt, sind die im Ferninfraroten relevanten Wellenlängen  $\lambda = 40 \dots 1000 \mu\text{m}$  (in Wellenzahlen:  $\bar{\nu} = 1/\lambda = 10 \dots 250 \text{ cm}^{-1}$ ) im Vergleich zu den Schichtdicken sehr langwellig. Es reicht daher vollkommen aus, die

beiden trigonometrischen Funktionen innerhalb der Einzelschicht-Interferenzmatrizen linear im Argument zu approximieren. Das ergibt für eine rein dielektrische Schicht die genäherte Matrix

$$\mathbf{m}_j \approx \begin{pmatrix} 1 & ikd_j \\ i\varepsilon_j kd_j & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Q2DEG und Gateelektroden können ferner in ihrer Dicke gegenüber der Lichtwellenlänge als infinitesimal dünn angesehen werden. Sie ergeben in ihrem Beitrag zur Schichtoptik in sehr guter Näherung

$$\mathbf{m}_j \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_j & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Hierin bezeichnet  $s_j = \sigma_j d_j / \varepsilon_0 c$  die auf die Vakuumsadmittanz normierte effektive Flächenleitfähigkeit der Schicht.

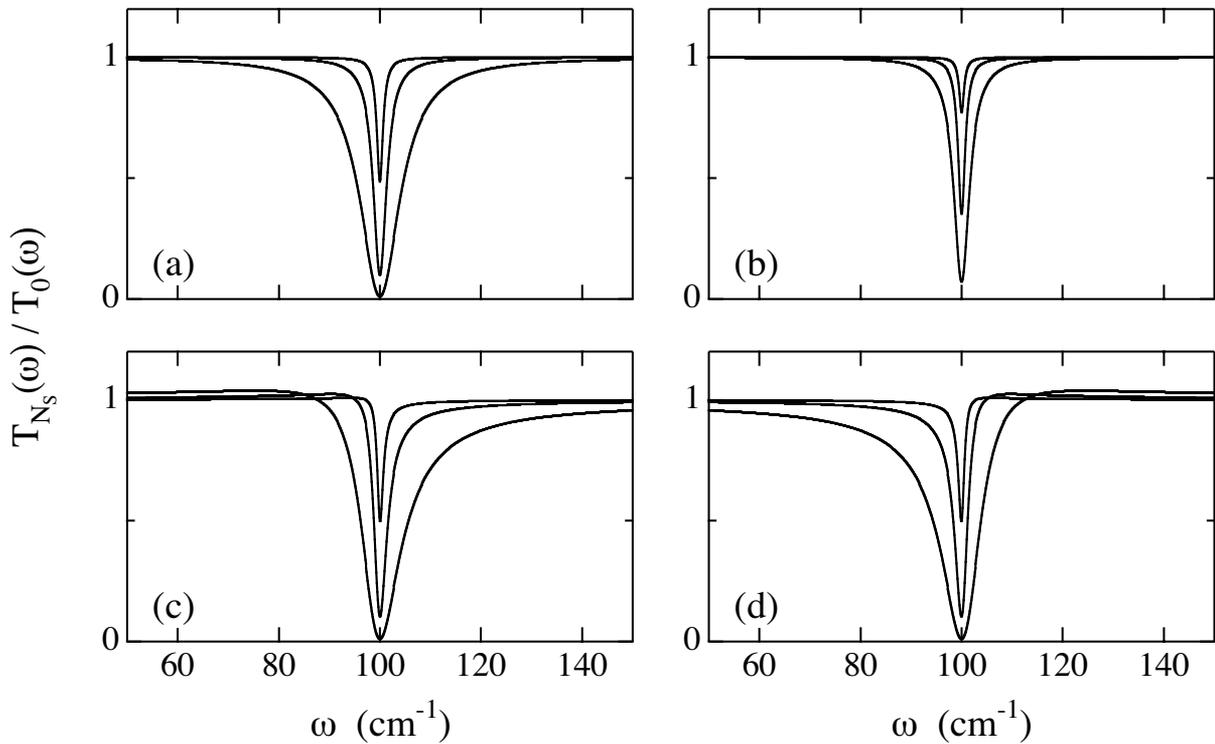
Im langwelligen Grenzfall genügt es lediglich die Beiträge bis einschließlich der ersten Ordnung in  $kd_j$  zu berücksichtigen. In dieser Approximation ergibt sich für die Transmission der Gesamtstruktur schließlich die übersichtliche Form

$$T(\omega) = \frac{4}{|1 + \sqrt{\varepsilon_{GaAs}} + s_{g,eff} + s_{2D}|^2}. \quad (1.18)$$

Die Flächenleitfähigkeit des funktionalen Q2DEG taucht darin als  $s_{2D}$  auf. In  $s_{g,eff}$  werden alle weiteren Lagen  $j' \neq$  (Q2DEG, GaAs) des Schichtpaketes, die nicht aus dem Substratmaterial GaAs bestehen, zu einer effektiven Flächenleitfähigkeit  $s_{g,eff} = \sum_{j'} s_{j',eff}$  aufaddiert. Als linker Halbraum wird ferner das Vakuum mit  $n_L = 1$  vorausgesetzt. Hochohmige Gateelektroden und vergrabene Elektroden (Backgates) liefern dabei in der Regel einen kleinen, rein reellen und frequenzunabhängigen Beitrag zu  $s_{g,eff}$ . Dielektrische Schichten wie AlGaAs-Legierungen und AlGaAs/GaAs-Supergitter hingegen steuern einen Leitfähigkeitsbeitrag bei, der gemäß  $kd_{j'} \Delta\varepsilon_{j'} = s_{j',eff}''$  linear mit  $k$  ansteigt und rein imaginär ist. Hierbei stehen  $\Delta\varepsilon_{j'} = \varepsilon_{j'} - \varepsilon_{GaAs}$  für die Differenz in den Dielektrizitätskonstanten zwischen dem Substrat und einer Schicht sowie  $d_{j'}$  wiederum für die Schichtdicke. Imaginäre Leitfähigkeitsbeiträge können zu charakteristischen Asymmetrien von ansonsten symmetrischen Linienprofilen führen. Dazu muß ihr Beitrag  $s_{g,eff}'' = k \sum_{j'} d_{j'} \Delta\varepsilon_{j'}$  betragsmäßig in der Größenordnung von 1 liegen. In den späteren Abschnitten wird zur Anpassung an die experimentellen Spektren die Leitfähigkeit der Effektiveltrode über die anzupassende Resonanz als frequenzunabhängig angenommen und für  $\varepsilon_{GaAs}(\omega)$  die Beziehung 3.1 mit den entsprechenden Parametern eingesetzt.

Im experimentell schwierigen FIR-Regime besitzen die zur Anwendung kommenden Optiken und Detektoren ausgeprägte Eigencharakteristiken. Es ist deshalb dort nicht ohne weiteres möglich, absolute Transmissions- und Reflexionsspektren direkt zu messen. Zur Umgehung dieses Problems, bedient man sich oftmals differentieller und vergleichender Methoden, bei denen man durch Variation äußerer Parameter, wie z.B. des Magnetfeldes oder der Gatespannung, Einfluß auf die optischen Eigenschaften des Q2DEG nimmt [Bat84, Hei87, Hei91]. Dabei gelingt es das Q2DEG effektiv an- und auszuschalten, wodurch sich schließlich als experimentell relevante Meßgröße die relative Transmission mit und ohne Q2DEG,

$$T_{rel}^{(p)}(\omega) = \frac{T_{N_S}^{(p)}(\omega)}{T_0^{(p)}(\omega)} = \frac{\left[1 + \sqrt{\varepsilon_{GaAs}(\omega)} + s_{g,eff}'^{(p)}\right]^2 + \left[s_{g,eff}''^{(p)}\right]^2}{\left[1 + \sqrt{\varepsilon_{GaAs}(\omega)} + s_{g,eff}'^{(p)} + s_{2D}'^{(p)}(\omega)\right]^2 + \left[s_{g,eff}''^{(p)} + s_{2D}''^{(p)}(\omega)\right]^2}, \quad (1.19)$$



**Abbildung 1.8:** Einfluß des optischen Schichtaufbaus auf die Linienform im Modell. Die den jeweils drei Spektren zugrunde liegenden Lorentzischen Leitfähigkeiten  $s = s_0 [1 - i(\omega - \omega_0)/\gamma]^{-1}$  sind folgendermaßen parametrisiert: Resonanzposition  $\omega_0 = 100 \text{ cm}^{-1}$ , Breite (HWHM)  $\gamma = 0.5 \text{ cm}^{-1}$  und Maximumleitfähigkeit  $s_0 = 40, 10, 2$  (von außen nach innen). Die vier Teilbilder unterscheiden sich in der Leitfähigkeit der Effektivlektrode: (a)  $s_{g,eff} = 0$ ; (b)  $s'_{g,eff} = 10, s_{g,eff}'' = 0$ ; (c)  $s_{g,eff}' = 0, s_{g,eff}'' = 1$  und (d)  $s_{g,eff}' = 0, s_{g,eff}'' = -1$ . Für  $\varepsilon_{GaAs}$  wurde jeweils der statische Wert von 13 eingesetzt.

ergibt. Diese ist aufgrund der Normierung frei von jeglichen Charakteristiken der Meßapparatur, da lediglich das interessierende Q2DEG und ansonsten keine weitere Komponente des Strahlenganges beeinflußt wird. Der hochgestellte Index dient zur Unterscheidung der möglichen Polarisationszustände des eingestrahlt Lichtfeldes.

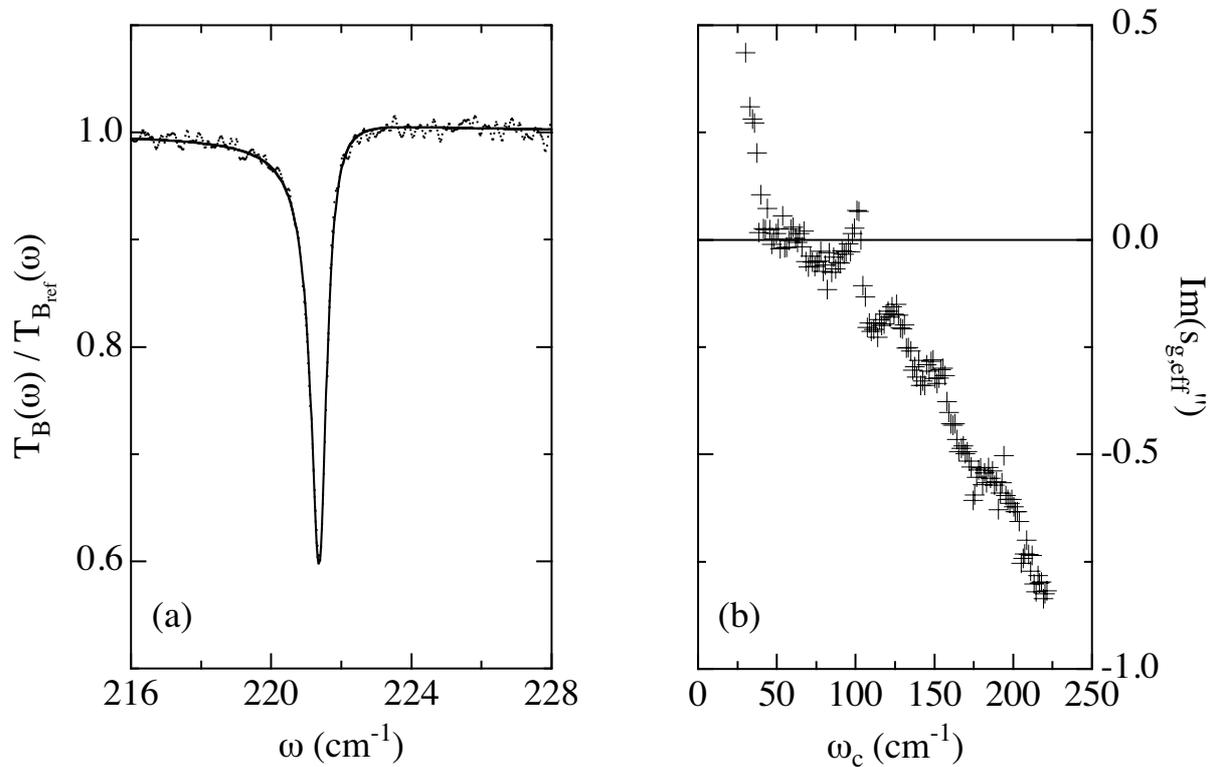
In der Figur 1.8 sind einige berechnete Spektren dargestellt, die den Einfluß des optischen Schichtaufbaus auf eine einzelne Lorentzsche Resonanz in der Leitfähigkeit des Q2DEG aufzeigen. Es wird im folgenden lediglich die Einstrahlung der aktiven Polarisationskomponente vorausgesetzt. Zunächst demonstriert die Abbildung 1.8 (a) den sogenannten Sättigungseffekt. Der Sättigungseffekt äußert sich in einer mit steigender Leitfähigkeit des Q2DEG zunehmend breiter werdenden Absorptionslinie. Die Resonanzbreite (HWHM)  $\Gamma$  in der Transmission setzt sich dabei gemäß

$$\Gamma = \gamma + \delta \quad (1.20)$$

additiv aus der mikroskopischen Verbreiterung  $\gamma$  und der sogenannten Sättigungsverbreiterung

$$\delta = \gamma s_0 [1 + \sqrt{\varepsilon_{GaAs}}]^{-1} \quad (1.21)$$

zusammen. Die eigentlich interessierende mikroskopische Verbreiterung  $\gamma$  ist daher lediglich im Regime



**Abbildung 1.9:** Einfluß des optischen Schichtaufbaus im Experiment. Bild a) zeigt ein gemessenes Spektrum (punktiert) und die entsprechende Anpassung (durchgezogen) und Bild b) den ausgewerteten Asymmetrieparameter aufgetragen gegen die Resonanzfrequenz für eine komplette Meßreihe.

geringer Leitfähigkeiten zuverlässig auswertbar, da sie hier die Linienform dominiert. Der Transmissionsverlauf bleibt insgesamt unabhängig von der maximalen Leitfähigkeit stets Lorentz-förmig. Der Fall (b) zeigt die Wirkung einer konstanten reellen Parallelleitfähigkeit auf. Diese führt zu einer Abschwächung des Sättigungseffektes und damit auch zu einer Reduktion der Linienbreite. Prinzipiell können daher, beispielsweise durch Aufbringen einer semitransparenten Metallschicht, stark durch Sättigung verbreiterte Resonanzprofile künstlich verschmälert werden. In der Realität jedoch nehmen mit der relativen auch die absolute Transmission und somit das Signal/Rausch-Verhältnis sehr schnell ab. Aufgrund dieses Sachverhalts erweist sich eine künstliche Verschmälерung der Linienbreite stark durch Sättigung verbreiteter Resonanzen unter Ausnutzung dieses Effektes in den seltensten Fällen als praktikabel. Die Teilfiguren (c) und (d) zeigen schließlich die Wirkung einer rein imaginären Parallelleitfähigkeit auf. Aufgrund eines solchen Leitfähigkeitsbeitrages können auch symmetrische Leitfähigkeitsprofile als asymmetrische Linienprofile in der Transmission erscheinen. Dabei können, abhängig vom Vorzeichen von  $s_{g,eff}''$ , sowohl niederenergetische als auch hochenergetische Resonanzausläufer auftreten.

Zum Abschluß der theoretischen Betrachtungen zeigt die Abbildung 1.9 die experimentelle Manifestation von typischen durch den optischen Schichtaufbau bedingten Asymmetrien in der Zyklotronresonanz. Die vermessene Struktur (W17996, siehe Tabelle 1.3) besitzt als Besonderheit ein (mit  $4\mu\text{m}$ ) außergewöhnlich dickes AlGaAs/GaAs-Supergitter, das als Versetzungssperre wirkt. Das exemplarisch gewählte Spektrum in der Teilfigur (a) zeigt eine klar asymmetrische Linienform. Die Sättigung tritt hier bereits bei 50% auf. Dies liegt daran, daß das Q2DEG nur die aktive zirkulare Komponente des eingestrahlt unpolarierten Lichtes absorbiert, die

inaktive Polarisation hingegen vollständig durchläßt. Im Teilbild (b) ist für eine ganze Spektrenserie der durch Linienformanpassung ausgewertete Asymmetrieparameter  $s_{g,eff}''$  gegen die Resonanzposition  $\omega_c$  aufgetragen. Wie man daran erkennt, variiert der Parameter über weite Bereiche linear mit  $k(\equiv \omega_c)$ . Das bei hohen Frequenzen negative Vorzeichen von  $s_{g,eff}''$  und der lineare Verlauf stimmen dabei tendenziell mit einem negativen Hub  $\Delta\varepsilon_{\text{layers}} = \varepsilon_{\text{layers}} - \varepsilon_{\text{GaAs}} < 0$  überein. Das negative Vorzeichen ist dabei in Konsistenz mit der gegenüber GaAs kleineren Dielektrizitätskonstanten von AlGaAs. Eine tiefergehende Quantifizierung ist allerdings aufgrund der Komplexität des Schichtaufbaus schwierig und nicht im Fokus der vorliegenden Arbeit. Das Beispiel zeigt jedoch auf, wie die Zyklotronresonanz eines Q2DEG prinzipiell zur Charakterisierung der Optik von auf GaAs basierenden Schichtsystemen im experimentell schwer zugänglichen Ferninfrarotbereich gewinnbringend eingesetzt werden kann.

## 1.5 Dynamische Leitfähigkeit

Die dynamische Leitfähigkeit stellt die unmittelbare Antwortfunktion eines leitfähigen Systems dar. Sie enthält als wichtigste experimentelle Information die Anregungsenergien von kollektiven Dichtefluktuationen in Form von charakteristischen Resonanzen. Neben der Energie kann man aus der Form und Stärke einer Resonanz ebenfalls Informationen über die Dämpfung und die Oszillatorstärke der zugrunde liegenden Anregung des Q2DEG gewinnen. Zum grundlegenden Verständnis des Systems dienen oftmals klassische Leitfähigkeitsmodelle, wie etwa das bekannte Drude-Modell, die auf einfachen Annahmen basierend nützliche Modellierungen der Hochfrequenzleitfähigkeit liefern. Im folgenden werden deshalb zwei Modelle vorgestellt, welche die grundlegenden Eigenschaften der fundamentalen Dichteanregungen eines Q2DEG sowohl parallel als auch senkrecht zur Schichtebene beinhalten.

### 1.5.1 Magneto-Plasmonresonanz

Das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit ist auf die Zyklotronresonanz eines Q2DEG gerichtet. Die Zyklotronresonanz stellt den langwelligen Grenzfall ( $\vec{q} \rightarrow 0$ ) der allgemeineren Magneto-Plasmonresonanz dar. Die Magneto-Plasmonresonanz entspricht einer longitudinalen Ladungsdichtewelle mit Wellenvektor  $\vec{q}$  innerhalb eines Q2DEG, das einem senkrecht zur Schichtebene orientierten Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  ausgesetzt ist. Ohne äußeres Magnetfeld reduziert sich die Magneto-Plasmonresonanz auf die bekanntere Plasmonresonanz. Die Herleitung des hier als einführend zu betrachtenden Grundmodells zur Magneto-Plasmonresonanz erschließt sich aus den detaillierten Ausführungen in Abschnitt 3.3. Aus diesem Grund werden hier lediglich kurz der Ansatz und die resultierende Bewegungsgleichung aufgeführt.

Das System befinde sich zunächst im Grundzustand. Ein von außen einwirkendes linear polarisiertes elektrisches Hochfrequenzfeld

$$\vec{E}(\vec{s}, t) = \vec{E}(\vec{q}, \omega) \exp[i(\vec{q}\vec{s} - \omega t)] \quad (1.22)$$

bewirke in linearer Näherung eine Verschiebung

$$\vec{u}(\vec{s}, t) = [\vec{u}_l(\vec{q}, \omega) + \vec{u}_t(\vec{q}, \omega)] \exp[i(\vec{q}\vec{s} - \omega t)] \quad (1.23)$$

der Ladungsträger am Ort  $\vec{s} = (x, y)$  in der Ebene. Verbunden mit dieser Verschiebung treten Beschleunigung-

gen und Kräfte auf, die durch die Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \omega_{pl}^2(q) - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} & i\omega_c \omega \\ -i\omega_c \omega & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l(q, \omega) \\ u_t(q, \omega) \end{pmatrix} = -\frac{e}{m^*} \begin{pmatrix} E_l(q, \omega) \\ E_t(q, \omega) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

die geeigneterweise im Impuls-Frequenzraum aufgestellt ist, wiedergegeben werden [Ant90]. Hierin bezeichnen  $u_l$  ( $E_l$ ) und  $u_t$  ( $E_t$ ) die longitudinalen und transversalen Komponenten der Auslenkung (des elektrischen Feldes), wobei  $u_l$  ( $E_l$ ) parallel und  $u_t$  ( $E_t$ ) senkrecht zum Ausbreitungsvektor  $\vec{q}$  orientiert ist. Die durch das senkrechte Magnetfeld induzierte Lorentzkraft auf eine bewegte Ladung äußert sich in den mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (1.25)$$

versehenen Scherkomponenten der dynamischen Matrix  $\mathbf{D}_{l/t}(q, \omega)$ . Die dynamische Matrix  $\mathbf{D}$  ist dabei generell über die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{D}\vec{u} = -\frac{e}{m^*}\vec{E} \quad (1.26)$$

definiert. Die Indizierung  $l/t$  beziehungsweise später  $+/-$  bezieht sich auf das Koordinatensystem, in welchem sie aufgestellt ist. Mit  $e$  ist dabei die Elementarladung und mit  $m^*$  die effektive Masse der Kristallelektronen bezeichnet. Mit der mit  $\vec{q}$  verbundenen Dichtemodulation des vormals homogenen Systems ist, wenn man von elektrodynamischen Retardierungseffekten vorerst absieht, eine elektrostatische Rückstellkraft verbunden. Diese wirkt in longitudinaler Richtung und ist durch die Plasmafrequenz  $\omega_{pl}$  bestimmt. Die Plasmafrequenz ist durch

$$\omega_{pl}^2 = \frac{N_S e^2 q}{2m^* \varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} F(q) [1 + S(q)] \quad (1.27)$$

gegeben, wobei sich im Formfaktor  $F(q)$  die Ausdehnung und die Form der Ladungsdichteverteilung in  $z$ -Richtung und im Strukturfaktor  $S(q)$  das dielektrische Umfeld des Q2DEG in Form von Bildladungseffekten widerspiegeln [Ste67, And82].  $N_S$  repräsentiert die Flächenladungsträgerdichte und  $\varepsilon_{sc}$  die (mittlere) Dielektrizitätskonstante der das Q2DEG unmittelbar umgebenden Halbleitermaterialien. Die genaue funktionale Form von  $F(q)$  ist in der Gleichung 3.55 angegeben und reduziert sich im strengen 2D-Grenzfall, der durch eine in  $z$ -Richtung  $\delta$ -förmige Dichteverteilung charakterisiert ist, auf  $F(q) = 1$ . Die Korrektur  $S(q)$  aufgrund der Bildladungen hängt vom dielektrischen Umfeld des Q2DEG ab und wird in [Ste67] dargestellt. Mit der phänomenologischen Streuzeit  $\tau$  schließlich wird dissipativen Effekten Rechnung getragen.

Aufgrund der imaginären Scherkomponenten ist es oft zweckmäßig eine Koordinatentransformation zu sogenannten Zirkularkoordinaten  $u_+$  und  $u_-$  ( $E_+$  und  $E_-$  analog) vermöge

$$\begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_t \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

vorzunehmen. Die transformierte Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_{pl}^2(q)}{2} + \omega_c \omega - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} & \frac{\omega_{pl}^2(q)}{2} \\ \frac{\omega_{pl}^2(q)}{2} & \frac{\omega_{pl}^2(q)}{2} - \omega_c \omega - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(q, \omega) \\ u_-(q, \omega) \end{pmatrix} = -\frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_+(q, \omega) \\ E_-(q, \omega) \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Bis auf die Dämpfungsterme tauchen keine komplexen Komponenten mehr in der transformierten dynamischen Matrix  $\mathbf{D}_{+/-}(q, \omega)$  auf. Wenn man die Bewegungsgleichung und damit die dynamische Matrix vorliegen hat, gelangt man auf direktem Wege zur Hochfrequenzleitfähigkeit. Durch Invertierung der dynamischen Matrix gewinnt man die Auslenkung als Funktion des anregenden Feldes. Die Auslenkungsgeschwindigkeit ergibt sich aufgrund der harmonischen Form der Bewegung auf einfache Weise durch Multiplikation der Auslenkung mit  $-i\omega$ . Wichtet man die Geschwindigkeit schließlich noch mit der Ladungsträgerdichte  $N_S$  und der Ladung ( $-e$ ) der Elektronen, so ergibt das die Stromdichte  $\vec{j}(q, \omega)$ . Diese steht dann über den dynamischen Magneto-Leitfähigkeitstensor

$$\sigma(q, \omega) = -i\omega \frac{N_S e^2}{m} \mathbf{D}^{-1}(q, \omega) \quad (1.30)$$

gemäß dem Ohmschen Gesetz  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  in Beziehung mit dem anregenden Feld. Die Gleichung 1.30 gilt dabei unabhängig vom Koordinatensystem. In der Determinanten der dynamischen Matrix sind sämtliche Anregungsenergien als Nullstellen enthalten. Im vorliegenden Fall erhält man aus der Forderung  $\det(\mathbf{D}) = 0$  als Frequenz der klassischen Magneto-Plasmonresonanz die Beziehung

$$\omega_{mp}^2(q) = \omega_c^2 + \omega_{pl}^2(q) \quad , \quad (1.31)$$

wobei die Dämpfung vernachlässigt ist.

### 1.5.2 Zyklotronresonanz als spezielle Magneto-Plasmonresonanz

Regt man das Q2DEG homogen an, so entfällt der Impulsübertrag  $\vec{q}$  und die Gleichung 1.30 liefert ausgewertet das bekannte Drudesche Ergebnis

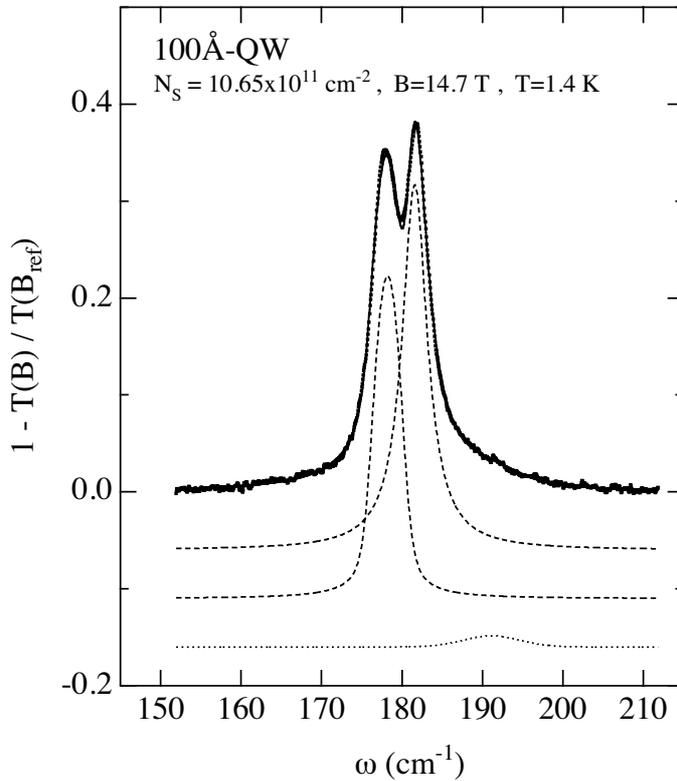
$$\sigma_{+/-+}(\omega) = \sigma_{xx} \mp i\sigma_{xy} = \frac{N_S e \omega_c \tau}{B} \frac{1}{1 - i(\omega \mp \omega_c)\tau} \quad (1.32)$$

für die Komponenten des in Zirkularkoordinaten diagonalen Leitfähigkeitstensors. Die beiden Leitfähigkeitskomponenten<sup>2</sup>  $\sigma_{+-}$  und  $\sigma_{-+}$  gelten für die beiden zirkularen Feldkomponenten (aktiv beziehungsweise inaktiv). Für hochbewegliche Q2DEG mit großen Streuzeiten kann die inaktive  $\sigma_{-+}$ -Komponente in der Regel unberücksichtigt bleiben. Die Gleichung 1.32 stellt eine Form dar, die sich zur Modellierung der meisten Zyklotronresonanzexperimente etabliert hat [Hei87, Hei91]. Der Realteil ist dabei durch ein Lorentz-Profil der Breite (HWHM)  $\gamma = 1/\tau$  gegeben. Die Form der Resonanz klassifiziert dabei den der Streuzeit  $\tau$  zugrunde liegenden Verbreiterungsmechanismus als homogen.

Eine verallgemeinerte Leitfähigkeit, die phänomenologisch auch inhomogenen Verbreiterungseffekten Rechnung trägt, wird im folgenden vorgeschlagen. Dazu wird der Realteil als Superposition eines Lorentzischen und eines Gaußschen Anteils mit gleicher Position und Halbwertsbreite angesetzt und der Imaginärteil daraus über Kramers-Kronig-Transformation gewonnen [Jac62]. Der Realteil der verallgemeinerten Leitfähigkeit hat für die zyklotronaktive Komponente hierbei die folgende Form

$$\sigma'_{LG}(\omega) = \frac{e \omega_c \pi}{B} [N_L L(\omega - \omega_c, \tau) + N_G G(\omega - \omega_c, \tau)] \quad . \quad (1.33)$$

<sup>2</sup>Die Indizierung für  $\sigma_{+-}$  und  $(\sigma_{-+})$  stammt aus der quantenmechanischen Beschreibung, nach der die zirkulare Feldkomponente  $E_-$  ( $E_+$ ) an die zirkulare Impulskomponente  $k_+$  ( $k_-$ ) koppelt und einen aktiven (inaktiven) Übergang im Landauschema induziert.



**Abbildung 1.10:** Spektrum mit aufgespaltener Zyklotronresonanz. Die Punkte repräsentieren die Meßwerte. Die Anpassung ist als durchgezogene Kurve eingezeichnet und wird von den Meßpunkten vollständig überdeckt. Die aus der Anpassung erhaltenen Teilresonanzen sind abgesetzt und entweder gestrichelt oder gepunktet dargestellt. Für alle berechneten Kurven wurde die Optik gemäß der Gleichung 1.19 ohne die Einbeziehung einer parallelen Leitfähigkeit berücksichtigt.

Darin beschreibt

$$L(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\tau}}{x^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} \quad (1.34)$$

ein Lorentz-Profil und

$$G(x, \tau) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2 \ln(2)} \exp[-\ln(2) \tau^2 x^2] \quad (1.35)$$

ein Gauß-Profil mit Halbwertsbreite (HWHM)  $\gamma = 1/\tau$ . Die Normierung ist jeweils so gewählt, daß die Integration über  $\omega$  die Identität 1 ergibt. Die Flächendichten  $N_L$  und  $N_G$  geben die effektiven Anteile des Q2DEG wieder, die homogen beziehungsweise inhomogen verbreitert sind. In ihrer Summe ergeben sie die Gesamtträgerdichte  $N_S$ . Für  $N_G = 0$  reduziert sich die verallgemeinerte Form auf die gewöhnliche Drude-Leitfähigkeit 1.32. Für den Fall, daß die Zyklotronresonanz in einem mehrkomponentigen System oder aufgrund von Kopplungen an weitere Elementaranregungen aufspaltet, wird dies in einer Superposition von Einzelresonanzen gemäß

$$\sigma_{LG}(\omega) = \sum_i \sigma_{LG,i}(\omega) \quad (1.36)$$

erfaßt. Der Beitrag einer Resonanz wird dabei durch deren partielle Dichten  $N_{G,i}$  und  $N_{L,i}$ , die Streuzeit  $\tau_i$  und die Position  $\omega_{c,i}$  parametrisiert.

Die Abbildung 1.10 zeigt zur Veranschaulichung ein experimentelles Spektrum, in dem die Zyklotronresonanz aufspaltet. Die gezeigte Anpassung wurde gemäß der Gleichung 1.36 vorgenommen. Auch ohne Anpassung ist schon zu erkennen, daß die linke der beiden Hauptresonanzen bei annähernd gleicher Amplitude

und Breite in der Spitze stumpfer und in der Flanke steiler verläuft als die rechte. Diese Resonanz hat einen erheblichen Beitrag an inhomogener Verbreiterung, was sich in einem hohen Gaußschen Anteil in der Anpassung widerspiegelt. Die rechte Resonanz hingegen ist lediglich homogen verbreitert und Lorentz-förmig.

### 1.5.3 Depolarisationsverschobene Intersubband-Resonanz

Neben Anregungen des Q2DEG in der Ebene sind auch Oszillationen senkrecht zu dieser möglich. Um diese angemessen zu beschreiben, ist jedoch der Formalismus der Quantenmechanik notwendig, da einem Einschluß der Ladungsträger in der klassischen Mechanik nur ungenügend Rechnung getragen wird. Trotz dieser Unzulänglichkeit ist es jedoch lehrreich, ein auf dem sogenannten Depolarisationsfeld beruhendes klassisches Modell zu untersuchen, das sehr zum Verständnis der kollektiven Effekte auf die Anregungen senkrecht zur Schicht, die als Intersubband-Resonanzen bezeichnet werden, beiträgt [Che76], [And82].

Das Q2DEG besitze in Wachstumsrichtung eine effektive Dicke  $d_z$ . Lenkt ein elektrisches Feld

$$E_z(t) = E_z \exp(-i\omega t) , \quad (1.37)$$

welches der Einfachheit halber als homogen entlang der Ebene angenommen wird, dieses um die Verschiebung

$$u_z(t) = u_z \exp(-i\omega t) \quad (1.38)$$

aus, so bilden sich an den Begrenzungsflächen des Q2DEG effektive Oberflächenladungen. Diese erzeugen das Depolarisationsfeld

$$E_{z,dep} = -\frac{e n_e}{\epsilon_0 \epsilon_{sc}} u_z , \quad (1.39)$$

das dem anregenden Feld entgegenwirkt. Darin bezeichnet  $n_e = N_S/d_z$  die effektive (3D-)Teilchendichte des Q2DEG. Die geschilderten Verhältnisse werden im Frequenzraum durch die Bewegungsgleichung

$$\left[ -\omega^2 + \omega_{pl,z}^2 - i\frac{\omega}{\tau} \right] u_z(\omega) = -\frac{e}{m} E_z(\omega) \quad (1.40)$$

beschrieben, wobei  $\omega_{pl,z}$  die effektive 3D-Plasmafrequenz und  $\tau$  eine phänomenologische Streuzeit bezeichnen. Ein senkrecht Magnetfeld hat hier keinerlei Einfluß auf die Bewegung. Die Plasmafrequenz  $\omega_{pl,z}$  ist durch

$$\omega_{pl,z}^2 = \frac{e^2 n_e}{m \epsilon_0 \epsilon_{sc}} \quad (1.41)$$

gegeben. In Analogie zur Beziehung 1.30 ergibt sich die Leitfähigkeit  $\sigma_{zz}(\omega)$  aus der Bewegungsgleichung zu

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{N_s e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i(\omega^2 - \omega_{pl,z}^2) \frac{\tau}{\omega}} . \quad (1.42)$$

Sie besitzt eine Plasmonresonanz bei der Frequenz  $\omega_{pl,z}$ .

Phänomenologisch kann dem quantenmechanischen Einschluß der Ladungsträger für einen Intersubband-Übergang durch eine zusätzliche harmonische Rückstellkraft, welche durch die Kreisfrequenz  $\omega_{ISR}$  charakterisiert ist, Rechnung getragen werden. Dabei ist die Trägerdichte sowohl im Depolarisationsfeld als auch in der Leitfähigkeit noch mit der Oszillatorstärke  $f_{ISR}$  des Übergangs zu gewichten. Die Resonanzfrequenz, bei

welcher der Übergang in der Leitfähigkeit auftaucht, ist nun durch

$$\tilde{\omega}_{ISR}^2 = \omega_{ISR}^2 + f_{ISR} \omega_{pl,z}^2 = \omega_{ISR}^2 + \tilde{\omega}_{pl,z}^2 \quad (1.43)$$

gegeben und um die sogenannte Depolarisationsverschiebung gegenüber  $\omega_{ISR}$  zu höheren Frequenzen hin verschoben. Die dynamische Leitfähigkeit lautet damit

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{N_S e^2 f_{ISR} \tau}{m} \frac{1}{1 - i(\omega^2 - \tilde{\omega}_{ISR}^2) \frac{\tau}{\omega}} \quad (1.44)$$

Diese Form ist für die Beschreibung der Intersubband-Anregung gebräuchlich [And82]. Die Linienform unterscheidet sich im Falle  $1/\tau \ll \tilde{\omega}_{ISR}$  kaum von der Drudeschen (Gleichung 1.32), wenn man in letzterer  $\omega_c$  durch  $\tilde{\omega}_{ISR}$  und  $N_S$  durch  $N_S f_{ISR}$  ersetzt.

### 1.5.4 Gitterkopplertechnik

Während die Zyklotronresonanz durch ein direktes Transmissionsexperiment, wie es im Abschnitt 1.4 ausführlich behandelt wird, zugänglich ist, bedarf es bei den Plasmonanregungen mit endlichem Impulsübertrag  $\vec{q}$  und den Intersubband-Anregungen besonderer experimenteller Techniken, um diese sichtbar zu machen [Hei87]. Besonders bewährt hat sich in diesem Zusammenhang die sogenannte Gitterkopplertechnik. Diese findet auch im Rahmen dieser Arbeit Verwendung und soll daher kurz erläutert werden.

Zur Ankopplung an die Plasmon- und Intersubband-Anregungen wird, wie es die Figur 1.11 a) schematisch zeigt, auf die Probenoberfläche mit lithographischen Methoden ein kurzperiodisches hochleitfähiges Metallgitter aufgebracht. Dieses hat die Eigenschaft, daß es in seinem Nahbereich die elektrischen Feldlinien kurzschließt und so ein Nahfeld der Form

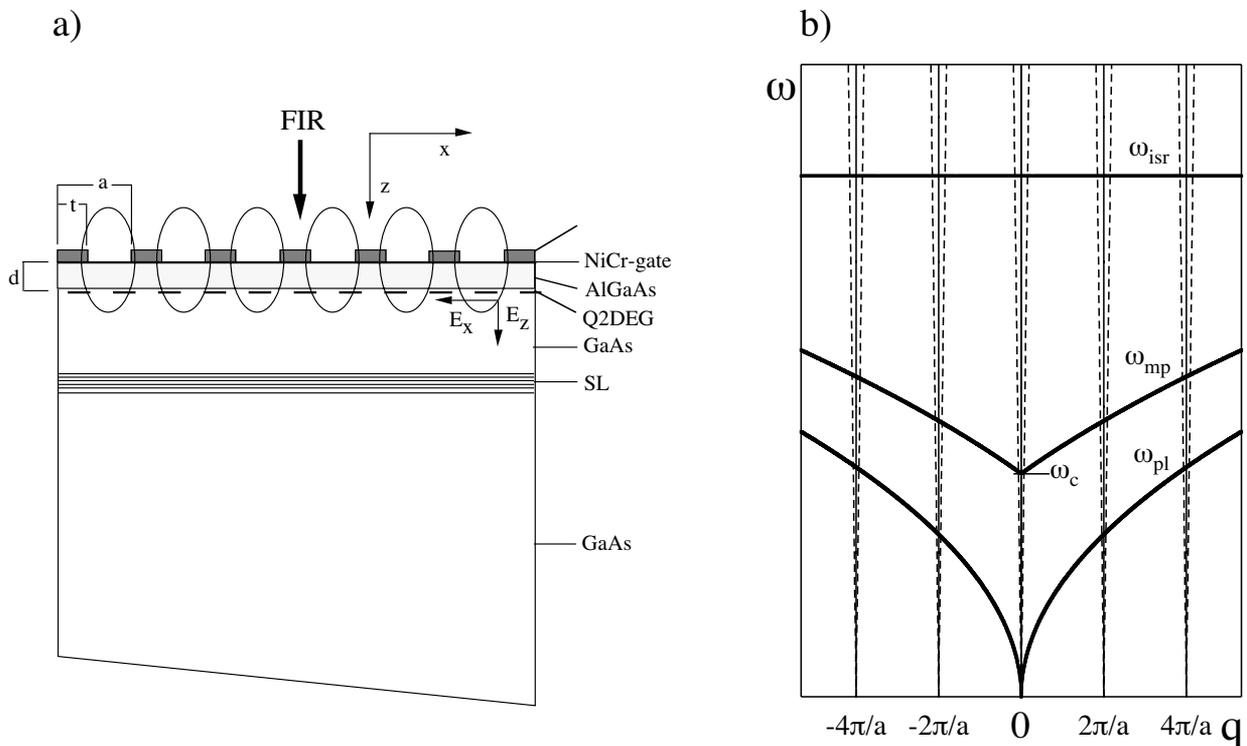
$$\vec{E} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (E_x(q_m), 0, E_z(q_m)) \exp[i(q_m x - \omega t)] \quad (1.45)$$

erzeugt, wobei senkrechte Inzidenz vorausgesetzt wird. Dieses Nahfeld besitzt nun einerseits die nötige Modulation der Feldkomponente  $E_x(q_m)$  in der Ebene des Q2DEG, um an Plasmonen mit Wellenvektoren

$$q_m = \frac{2\pi}{a} m \quad (1.46)$$

anzukoppeln. Andererseits ist aufgrund des Verlaufes der Feldlinien im unmittelbaren Nahbereich des Koppelgitters, in welchem sich das funktionale Q2DEG befindet, eine genügend starke Feldkomponente  $E_z(q_m)$  vorhanden, über die das Lichtfeld die Intersubband-Resonanzen des Q2DEG anzuregen vermag. Die Kopplungsordnung ist hierin mit  $m$  und die Gitterperiode mit  $a$  bezeichnet. Die Nahfelder ergeben sich aus der Überlagerung sämtlicher Beugungsordnungen des Koppelgitters und können in ihrer Wirkungsweise anhand der Figur 1.11 b) veranschaulicht werden. Durch die Beugung des Gitters wird der Lichtkegel mit seinen Begrenzungen  $\omega = \pm c_0 q / \sqrt{\varepsilon_{sc}}$ , der für die Mannigfaltigkeit aller möglichen Inzidenzwinkel steht, bei jedem Gitterwellenvektor (Beugungsordnung, siehe Gleichung 1.46) repliziert. Bei normal zur Probenfläche gerichteter Inzidenz verlaufen die Lichtgeraden senkrecht, während bei schräger Inzidenz noch der Wellenvektorübertrag von

$$q = \frac{\sqrt{\varepsilon_{sc}} \omega}{c} \sin(\theta) \quad (1.47)$$



**Abbildung 1.11:** Schematischer Aufbau und Wirkungsweise eines Gitterkopplers. Teilbild a) zeigt den schematischen Aufbau einer Probe mit Gitterkoppler. Die Ellipsen deuten darin die kurzgeschlossenen Feldlinien im Nahbereich des Gitters an. In der Teilfigur b) ist die Wirkungsweise eines Gitterkopplers auf die Fundamantalenergien eines Q2DEG in Form eines Dispersionsdiagramms dargestellt. Die Elementaranregungen des Q2DEG sind fett hervorgehoben und die Lichtkegel der Gitterbeugungsordnungen sind gestrichelt eingezeichnet.

hinzukommt.  $\theta$  steht für den Einfallswinkel bezüglich der Normalen. Retardierungseffekte, welche bei resonanter Kopplung zwischen den Photonen des Lichtfeldes und den Elementaranregungen des Q2DEG zu Polaritonaufspaltungen an den Kreuzungspunkten zwischen der Lichtgeraden und den Dispersionen der Elementaranregungen führen, sind in der Darstellung 1.11 b) nicht berücksichtigt. Die Stärke der Gitterankopplung ist hauptsächlich durch das Tastverhältnis  $t/a$  des Gitters und dessen Abstand  $d$  zum Q2DEG gegeben. Für eine weiterführende Darstellung der Wirkungsweise von Gitterkopplern sei auf [Zhe91, Kra96, Wen99b] verwiesen.



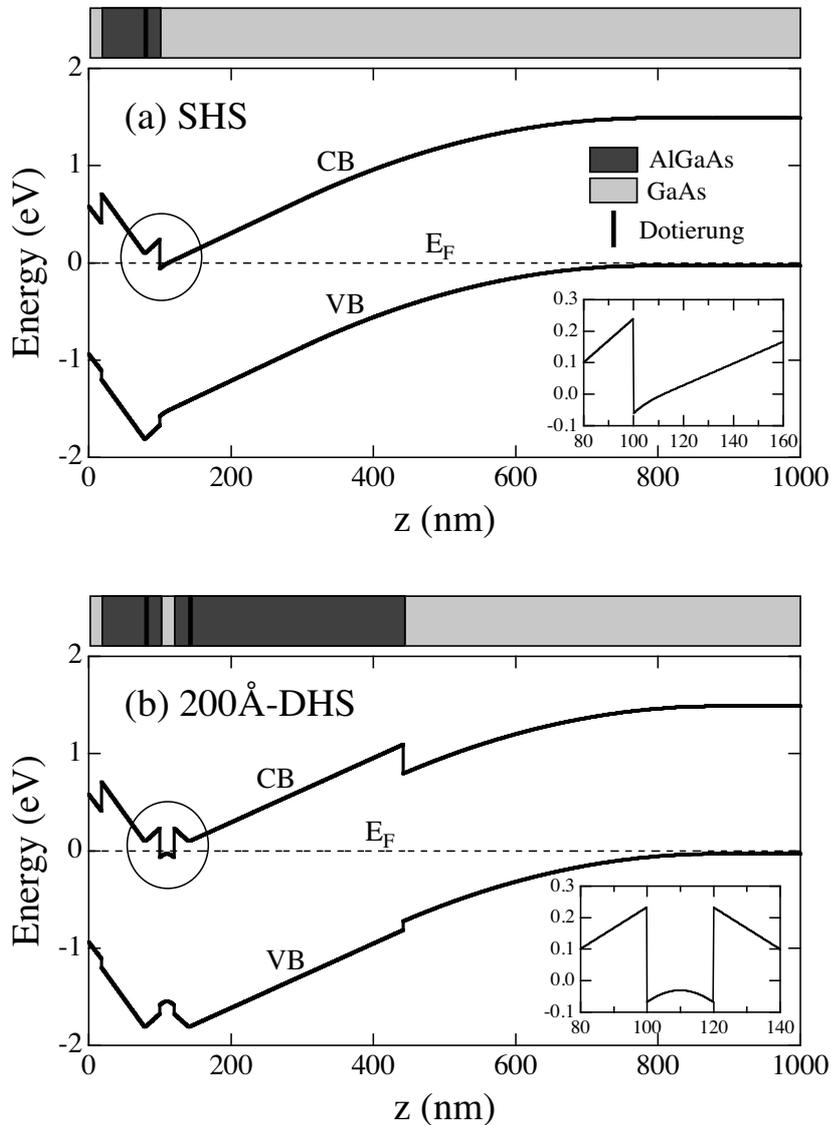
## Kapitel 2

# Elektronische Eigenschaften quasi-zweidimensionaler Elektronengase in GaAs

Dieses Kapitel vermittelt die Grundlagen, die zum Verständnis der Physik von Q2DEG und deren Fundamentalanregungen benötigt werden. Zunächst werden im Abschnitt 2.1 der technologische Hintergrund und die Grundprinzipien der Q2DEG in GaAs erläutert. Das Teilkapitel 2.2 widmet sich der selbstkonsistenten Berechnung der elektrischen Subband-Struktur solcher Systeme. Die Landau-Quantisierung der Elektronen in einem Magnetfeld wird im Abschnitt 2.3 behandelt. Im Mittelpunkt des Abschnitts 2.4 steht die Einteilchen-Näherung, im Rahmen derer die Zyklotron- und Intersubband-Resonanzen als Übergänge im Subband-Landau-Niveauschema erklärt werden. Die Kopplung zwischen der Subband- und der Landau-Quantisierung in verkipperten Magnetfeldern ist im Fokus des Teilkapitels 2.5. Die Berücksichtigung einer realen nichtparabolischen Bandstruktur und deren Auswirkung auf die Zyklotronübergänge wird zunächst im Abschnitt 2.6 phänomenologisch eingeführt. Ihre Rechtfertigung wird schließlich im Abschnitt 2.7 im Rahmen der  $k \cdot p$ -Methode erbracht.

### 2.1 Modulationsdotierung und Subband-Quantisierung

Mit der rasanten Entwicklung epitaktischer Kristallzuchtmethoden, wie der Molekularstrahlepitaxie (MBE) oder der Metallorganisch-chemischen Gasphasenabscheidung (MOCVD), wurde im Laufe der 1970er Jahre das faszinierende Feld der auf atomarer Skala maßgeschneiderten Halbleitersysteme eröffnet [Esa76, Cho76]. Speziell das GaAs/AlGaAs-Halbleitersystem besticht hier durch seine kristalline Qualität und den sich damit eröffnenden Möglichkeiten für die Bauteilentwicklung sowie für die physikalische Grundlagenforschung. Besonders vorteilhaft zur Herstellung von Schichtstrukturen vom Typ I wirken sich für das GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-System mit  $x < 0.32$  der äußerst geringe Unterschied in den Gitterkonstanten von weniger als 0.1% und der große Bandlückenhub von bis zu 0.3 eV aus [Bla82, Bas88]. Die Bandlücken-Diskontinuität an der atomar glatten Grenzfläche zwischen den beiden Halbleiternmaterialien verteilt sich hierbei so, daß die Bandlücke von GaAs vollständig in der von GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As zu liegen kommt. Dabei entfallen 70% des Hubes auf das Leitungsband und 30% auf das Valenzband [Men86, Hir90]. Als weiterhin entscheidend für die Entwicklung von funktionalen Bauteilen, wie z.B. dem HEMT (High Electron Mobility Transistor), sowie für die Entdeckung des Fraktionalen Quanten-Hall-Effekts (FQHE) erwies sich die Technik der Modulationsdotierung [Din78]. Hierbei wird in einer Entfernung  $d_s$ , der sogenannten Spacerdicke, von der Grenzfläche entfernt im



**Abbildung 2.1:** Bandverläufe in modulationsdotierten Heterostrukturen entlang der Wachstumsrichtung ( $z$ -Richtung). Bild (a) zeigt eine Einfachheterostruktur und Bild (b) einen Quantentrog. Die Bandverläufe von Leitungsband (CB) und Valenzband (VB) sind dick durchgezogen und die Fermi-Energie gestrichelt gezeichnet. Die Schichtfolgen sind jeweils über der Figur skizziert. Das GaAs ist herstellungsbedingt stets schwach  $p$ -dotiert. Die Inserts zeigen herausvergrößerte elektronisch aktive Bereiche der jeweiligen Struktur.

breitlückigen Material eine oftmals nur wenige atomare Lagen dünne Dotierschicht eingebracht. Im Fall der  $n$ -Dotierung können die Elektronen aus den flachen Donatoren in AlGaAs über quantenmechanisches Tunneln durch die Spacerschicht oder durch thermische Aktivierung in das energetisch tiefer liegende und intrinsisch schwach  $p$ -dotierte GaAs gelangen. Dort bilden sie an der Grenzfläche das durch das Raumladungspotential und die Bandlücken-Diskontinuitäten gebundene quasi-zweidimensionale Inversionselektronen-Gas, das räumlich durch die Spacerschicht von den positiv geladenen und als Streuzentren wirkenden Donatorrümpfen getrennt ist. Durch die räumliche Distanz ist die Störstellenstreuung im Vergleich zu Volumenbauelementen drastisch reduziert, was außergewöhnlich hohe Elektronenbeweglichkeiten von bis zu einigen  $10^7 \text{ cm}^2/(\text{V s})$  ermöglicht [Uma97].

Zur Realisierung einlagiger Elektronengase stehen zwei grundlegende Strukturprinzipien zur Verfügung. Deren Aufbauten sind in der Abbildung 1.5 dargestellt. Einzelheterostrukturen (SHS) besitzen lediglich eine Grenzfläche. Dort bildet sich aufgrund der Raumladungen ein dreieckförmiges Einschlußpotential aus, das die Elektronen an die Grenzfläche bindet. Bei Doppelheterostrukturen (DHS) ist eine wenige nm breite GaAs-Schicht in eine AlGaAs-Umgebung eingebettet. Dies führt zu einem topfförmigen Einschluß. Deshalb bezeichnet man solche Systeme oftmals auch als Quantentöpfe oder -tröge. Man kann bei diesen Systemen noch

zwischen ein- und beidseitig dotierten Strukturen unterscheiden. In der Figur 2.1 sind schematisch für zwei Modellstrukturen die selbstkonsistent berechneten Bandverläufe dargestellt. Diese resultieren aus den Bandlücken und Bandoffsets der verwendeten Halbleitermaterialien in Zusammenspiel mit dem elektrostatischen Potential aufgrund der im System vorhandenen Raumladungen. Die Banddiskontinuitäten entsprechen einer Barrierenlegierung  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ . Das Aufbiegen der Bänder zur Oberfläche und zum Substrat hin ist durch die Absättigung von Oberflächenzuständen und durch das Auffüllen der Akzeptoren der p-Hintergrunddotierung in  $\text{GaAs}$  bis zur sogenannten Verarmungslänge  $z_d$  begründet. Die eigentlich interessierenden Bereiche, in denen sich die Inversionselektronen ansammeln, sind jeweils vergrößert in den Inserts dargestellt.

Da in den betrachteten Halbleitersystemen im Gegensatz zu dünnen Metallfilmen die Ausdehnung der Einschlußpotentiale mit der de Broglie-Wellenlänge der Kristallelektronen vergleichbar wird, stellen sie ein quantenmechanisch zu beschreibendes Vielteilchen-System dar, das quantisierte Energieniveaus aufweist. Aufgrund der Symmetrie eines Q2DEG erhält man in der einfachsten Näherung eines parabolischen isotropen Leitungsbandes für die Energien der Elektronenzustände im Q2DEG die Subband-Dispersionen

$$\epsilon_i(k_x, k_y) = \epsilon_i + \frac{\hbar^2}{2m^*}(k_x^2 + k_y^2) . \quad (2.1)$$

Hierin beschreibt  $\epsilon_i$  die Quantisierung der Elektronen in Wachstumsrichtung (z-Richtung) in sogenannte Subbänder mit Subband-Index  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Die Bewegung parallel zur Grenzfläche ist frei und durch ebene Wellen mit quasi-kontinuierlichem Wellenvektor  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  gegeben. Die Krümmung der Subband-Parabeln ist durch die effektive Elektronenmasse  $m^*$  bestimmt, die für das Leitungsband oftmals in guter Näherung als isotrop und meist auch als konstant anzusehen ist. Die Bezeichnung quasi-zweidimensional bezieht sich auf die Ausdehnung der Elektronenschichten in Wachstumsrichtung. Der strenge 2D-Grenzfall ist nur für ein hypothetisch infinitesimal schmales und unendlich tiefes Einschlußpotential realisiert. Er wird aber im Falle eines einzigen besetzten Subbandes (elektrischer Quantenlimes) oftmals gut approximiert. Der dreidimensionale Charakter eines Q2DEG tritt umso stärker hervor, je mehr Subbänder besetzt sind.

In der parabolischen Näherung lautet die Zustandsdichte eines zweidimensionalen Subbandes

$$D_i(\epsilon) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \Theta(\epsilon - \epsilon_i) . \quad (2.2)$$

Sie ist bis auf die Heavyside-Stufenfunktion  $\Theta(x)$ , welche das Einsetzen am Subband-Boden  $\epsilon_i$  beschreibt, von der Energie unabhängig und bis auf Naturkonstanten nur durch die effektive Masse  $m^*$  bestimmt. Für ein Mehrsubband-System ergibt sich die Gesamtzustandsdichte durch Addition der partiellen Zustandsdichten gemäß

$$D(\epsilon) = \sum_i D_i(\epsilon) . \quad (2.3)$$

Sie hat einen treppenförmigen Verlauf mit konstanter Stufenhöhe. Dieser Umstand führt dazu, daß bei  $T = 0$  K die Besetzung  $N_{S,i}$  eines Subbandes entsprechend

$$N_{S,i} = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (\epsilon_F - \epsilon_i) \quad (2.4)$$

direkt proportional zum energetischen Abstand zwischen der Fermi-Energie und dem jeweiligen Subband-Boden ist.

## 2.2 Selbstkonsistente Brechnung der Subband-Struktur in der LDA-Näherung

Die quantitative Beschreibung der Subband-Struktur eines Q2DEG erfordert die simultane numerische Lösung der Schrödinger- und der Poisson-Gleichung. Aus letzterer ergeben sich die elektrostatischen Potentialbeiträge, die von den festen Raumladungen und den Inversionselektronen selbst resultieren.

In der Effektivmassen-Näherung separieren die Bewegungen in Richtung und senkrecht zur Grenzfläche und die eindimensionale effektive Einteilchen-Schrödinger-Gleichung der Wachstumsrichtung lautet [And76a, Ste85, Ull98]

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m^*(z)} \frac{\partial}{\partial z} + V_{sc}(z) \right] \varphi_i(z) = \epsilon_i \varphi_i(z) . \quad (2.5)$$

Das darin auftauchende selbstkonsistente Potential  $V_{sc}(z)$  fast eine ganze Reihe von Beiträgen zusammen:

$$V_{sc}(z) = V_H(z) + V_d(z) + V_b(z) + V_i(z) + V_{xc}(z) . \quad (2.6)$$

Der erste Term  $V_H(z)$  ist das selbstkonsistent zu berechnende Hartree-Potential der Elektronen in der Inversionsschicht. Der zweite Beitrag, das sogenannte Depletionpotential  $V_d(z)$ , hat seine Ursache in den in die Barrieren eingebrachten Dotierschichten und der p-Hintergrunddotierung in GaAs. Beide Beiträge werden oftmals zum elektrostatischen Potential  $V_{es}(z) = -e\Phi(z) = V_H(z) + V_d(z)$  zusammengefaßt.  $V_b(z)$  berücksichtigt in der sogenannten Enveloppen-Näherung die Leitungsbanddiskontinuitaten zwischen den verschiedenen Halbleiterschichten [Bas81]. Dem Unterschied in den Effektivmassen der Materialien wird durch eine ortsabhängige Masse  $m^*(z)$  Rechnung getragen, wobei die Form des Operators der kinetischen Energie der Forderung nach Hermitezität und Stromerhaltung gerecht wird [Zhu83]. Bildladungseffekte, welche von den unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten der Schichten herrühren, werden in  $V_i(z)$  berücksichtigt [Ste85]. Aufgrund des geringen Unterschiedes in den dielektrischen Konstanten von GaAs und AlGaAs können diese jedoch in der Regel, wie auch im folgenden, vernachlässigt werden. Zuletzt werden mit  $V_{xc}(z)$  Vielteilchen-Effekte im Rahmen der Dichtefunktionaltheorie berücksichtigt [Hoh64, Koh65, Dre90].

Die elektrostatischen Beiträge zum Potential ergeben sich aus der Poisson-Gleichung

$$\epsilon_0 \epsilon_{sc} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} = \rho(z) , \quad (2.7)$$

wobei wiederum der Unterschied in den dielektrischen Konstanten vernachlässigt ist. Die Flächenladungsdichte  $\rho = \rho_s(z) + \rho_d(z)$  der Raumladungen setzt sich aus dem Beitrag der Inversionselektronen

$$\rho_s(z) = -e \sum_i N_{S,i}(z) = -e \sum_i N_{S,i} |\varphi_i(z)|^2 \quad (2.8)$$

und dem Beitrag der Dotierungen

$$\rho_d(z) = -e[N_A(z) - N_D(z)] \quad (2.9)$$

zusammen. Hierin bezeichnen  $N_A(z)$  und  $N_D(z)$  die Flächendichten der ionisierten Donatoren und der aufgefüllten Akzeptoren, die wie auch  $V_b(z)$  vom speziellen Strukturaufbau abhängig sind. Die partiellen Besetzungsdichten der Subbänder berechnen sich aus der Zustandsdichte gemäß der Gleichung 2.2 und der Fermi-

Dirac-Verteilung zu

$$N_{S,i} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon D_i(\epsilon) f_{FD}(\epsilon - \mu) = \frac{m^* k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T} \right) \right] . \quad (2.10)$$

Dabei ist das chemische Potential  $\mu$  implizit durch die Nebenbedingung

$$N_S = \sum_i N_{S,i} \quad (2.11)$$

festgelegt [Hua63, And82]. Für  $T \rightarrow 0$  K reduziert sich die Gleichung 2.10 auf den Ausdruck 2.4.

Eine häufig benutzte und für die meisten Zwecke ausreichende Parametrisierung des Austausch-Korrelationspotentials  $V_{cx}(z)$  stellt die Lokaldichte-Näherung (LDA-Näherung, local density approximation) dar [Gun76, Dre90]. Hierbei werden die Austausch- und Korrelationsenergiedichten des inhomogenen Systems durch die des homogenen dreidimensionalen Elektronengases mit entsprechender lokaler Dichte angenähert. Eine gebräuchliche Parametrisierung für nicht-spinpolarisierte Systeme nach Gunnarson und Lundquist hat die Form

$$V_{xc}(z) = -\frac{2}{\pi \alpha r_s(z)} \left[ 1 + 0.0545 r_s(z) \ln \left( 1 + \frac{11.4}{r_s(z)} \right) \right] R_y^* , \quad \alpha = \left( \frac{4}{9\pi} \right) . \quad (2.12)$$

Eine für vollständig spinpolarisierte Elektronensysteme geeignete Parametrisierung lautet

$$V_{xc}(z) = -\frac{2}{\pi \alpha r_s(z)} \left[ 2^{\frac{1}{3}} + 0.0332 r_s(z) \ln \left( 1 + \frac{15.9}{r_s(z)} \right) \right] R_y^* , \quad \alpha = \left( \frac{4}{9\pi} \right) . \quad (2.13)$$

Mit der Masse und der Dielektrizitätskonstanten von GaAs bezeichnen

$$a_0^* = \left( \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{sc} \hbar^2}{m^* e^2} \right) \quad (2.14)$$

den effektiven Bohr-Radius und

$$R_y^* = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_{sc} a_0^*} \quad (2.15)$$

die effektive Rydberg-Konstante des Materials. Der Wigner-Seitz-Radius

$$r_s(z) = \left( \frac{4\pi}{3} a_0^*{}^3 N_S(z) \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (2.16)$$

stellt ein Maß für die Teilchenabstande im Elektronengas dar. Hier sei angemerkt, daß prinzipiell sämtliche Vielteilchen-Effekte über  $V_H(z)$  und  $V_{xc}(z)$  korrekt erfaßt werden können, wobei die Güte der Rechnung alleine durch die Wahl des Austausch-Korrelationspotentials bestimmt ist [Hoh64]. In der Literatur tritt die Gleichung 2.5, benannt nach ihren Begründern, meist unter der Bezeichnung Kohn-Sham-Gleichung auf [Koh65, Dre90].

### 2.2.1 Subband-Struktur von Einfachheterostrukturen

In einer Einfachheterostruktur (SHS) ist das Einschlußpotential in starkem Maße durch die Raumladungen bestimmt. Nach zweifacher Integration der Poisson-Gleichung erhält man die Form

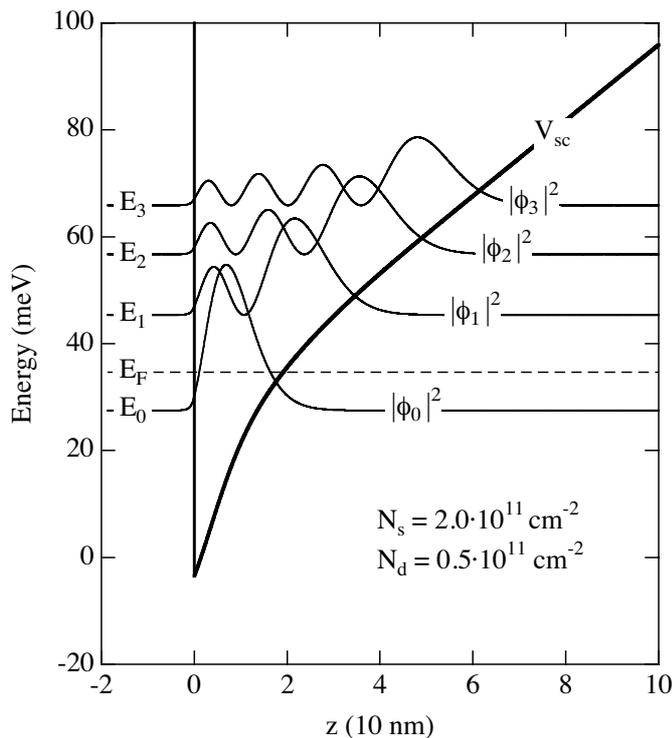
$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z dz' \left[ \int_{z_0}^{z'} dz'' \frac{\rho(z'')}{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} + \Phi'(z_0) \right] + \Phi(z_0) . \quad (2.17)$$

Hierin bezeichnet  $z_0$  den Bezugspunkt für die Integration. Die elektrostatischen Randbedingungen werden in den Integrationskonstanten  $\Phi'(z_0)$  und  $\Phi(z_0)$  zusammengefaßt. Interessiert man sich lediglich für das Q2DEG, dessen Ausdehnung nur einen Bruchteil der Gesamtstruktur ausmacht, legt man den Bezugspunkt  $z_0$  günstigerweise in die raumladungsfreie Spacerschicht. Da die Gesamtstruktur insgesamt der Neutralitätsbedingung unterliegt, stellt

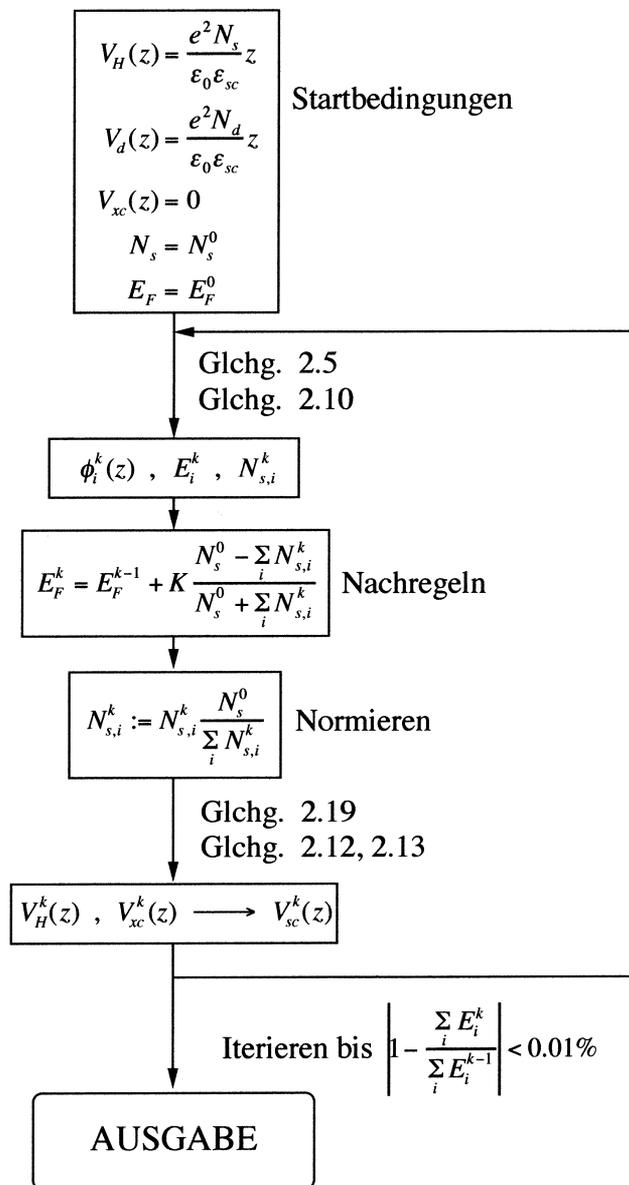
$$-\Phi'(z_0) = E_z(z_0) = \frac{e(N_S + N_d)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} \quad (2.18)$$

das konstante elektrische Feld dar, das innerhalb eines Plattenkondensators herrscht, dessen negativ geladene Platte mit der Inversionsflächendichte  $N_S$  und der effektiven Verarmungsflächendichte  $N_d$  aufgeladen ist. Letztere resultiert aus dem Auffüllen der Hintergrund-Akzeptoren in GaAs, bis zur Verarmungstiefe  $z_d$ , welche durch das Angleichen der chemischen Potentiale zwischen aktiver Schicht und Substrat bestimmt ist. Üblicherweise kann die Ausdehnung der Inversionsschicht gegenüber der Ausdehnung der Verarmungsschicht vernachlässigt werden. In diesem Fall ist das elektrostatische Gesamtpotential im Bereich des Q2DEG durch

$$V_{es}(z) = -e\Phi(z) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} \left[ N_d z + \sum_i N_{S,i} z \left\{ 1 - \frac{1}{z} \int_{z_0}^z dz' (z - z') |\varphi_i(z')|^2 \right\} \right] + V_0 \quad (2.19)$$



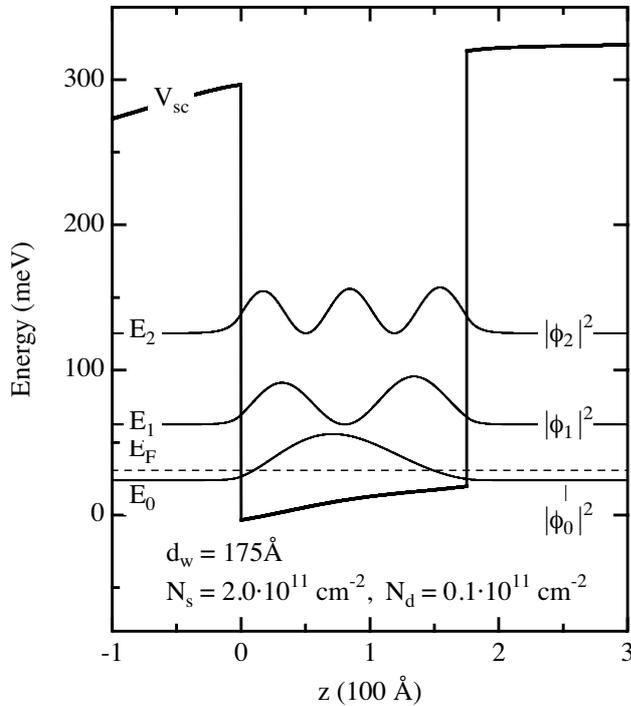
**Abbildung 2.2:** Subband-Quantisierung in einer modulationsdotierten Einfachheterostruktur. Das selbstkonsistent berechnete Potential ist fett, die Betragsquadrate der Wellenfunktionen sind dünn durchgezogen und die Fermi-Energie gestrichelt dargestellt. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter lauten: Barrierenhöhe: 300 meV, Masse in GaAs:  $0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $0.08 m_e$ , Temperatur: 0 K, Elektronendichte:  $2.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und effektive Verarmungsflächendichte:  $0.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Der Energienullpunkt ist so gewählt, daß die elektrostatischen Potentialbeiträge an der Grenzfläche ( $z = 0$ ) gerade verschwinden. Der negative Potentialwert bei  $z = 0$  hat seine Ursache im Austausch-Korrelationsbeitrag.



**Abbildung 2.3:** Flußdiagramm der selbstkonsistenten Subband-Rechnung. Die Iteration wird mit den im Fenster aufgeführten Startbedingungen begonnen und solange fortgesetzt bis sich die Subband-Abstände innerhalb einer vorgegebenen Toleranz nicht mehr ändern. Im ersten Schritt eines Durchgangs  $k$  wird die eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit dem Potential der vorhergehenden Iteration gelöst und daraus die Wellenfunktionen, Subband-Energien und Subband-Besetzungen bestimmt. Anschließend wird über den Vergleich von Soll- und Ist-dichte die Fermi-Energie nachgeregelt (Energieskala  $K$  im Bereich der Subband-Abstände). Die gewonnenen Dichten werden auf die Soll-dichte normiert und mit diesen und den Wellenfunktionen werden anschließend die neuen Potentialbeiträge berechnet. Um eine sichere Konvergenz zu gewährleisten, werden die Potentiale für den nächsten Iterationsschritt aus einer Überlagerung  $V_{H/xc}^k = f V_{H/xc}^{neu} + (1-f) V_{H/xc}^{k-1}$ ,  $0 < f < 1$  der alten und der neuen Beiträge gebildet. Der Wichtungsfaktor  $f$  bestimmt die Rechengeschwindigkeit und die Sicherheit der Konvergenz (typisch  $f=0.2$ ).

gegeben. Hierbei wird die Integrationskonstante  $V_0$  günstigerweise so gewählt, daß  $V_{es}(z)$  an der Grenzfläche zwischen den beiden Halbleitern gerade verschwindet.  $N_d$  ist der einzige Parameter der das Verarmungspotential  $V_d(z)$  charakterisiert. Er wird im weiteren als Anpaßgröße benutzt, da in der Realität die Bandverbiegung oftmals durch Defektzustände an der Substrat-Schicht-Grenzfläche bestimmt wird [Kam93].

Die simultane Lösung von Schrödinger- und Poisson-Gleichung wird mit einem iterativen Verfahren erreicht. Dazu wird, wie es im Flußdiagramm 2.3 dargestellt ist, die Iteration mit den angegebenen Startverhältnissen begonnen und solange fortgesetzt, bis sich die die Subband-Energien innerhalb einer vorgegebenen Toleranz nicht mehr ändern. Das Resultat einer solchen Berechnung zeigt die Abbildung 2.2. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter sind in der Bildbeschreibung aufgeführt. Es sind die Betragsquadrate der Wellenfunktionen sowie der Leitungsbandverlauf eingezeichnet, wobei die horizontalen Lagen der ersteren maßstäblich die Subband-Energien wiedergeben. Das Eindringen der Wellenfunktionen in die Barriere ist sehr gering und kann in vielen Fällen vernachlässigt werden. Die Fermi-Energie liegt im gezeigten Beispiel zwischen dem untersten und dem ersten angeregten Subband, was dem elektrischen Quantengrenzfall entspricht.



**Abbildung 2.4:** Subband-Quantisierung in einem einseitig modulationsdotierten Quantentopf. Das selbstkonsistent berechnete Potential ist fett, die Betragsquadrate der Wellenfunktionen sind dünn durchgezogen und die Fermi-Energie gestrichelt dargestellt. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter lauten: Barrierenhöhe: 300 meV, Trogbreite: 17.5 nm, Masse in GaAs: 0.07  $m_e$ , Masse in AlGaAs: 0.08  $m_e$ , Temperatur: 0 K, Elektrodendichte:  $2.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und effektive Verarmungsflächendichte:  $0.1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Der Energienullpunkt ist so gewählt, daß die elektrostatischen Potentialbeiträge an der linken Grenzfläche ( $z = 0$ ) gerade verschwinden.

Oftmals ist es wünschenswert analytische Näherungsausdrücke zur Verfügung zu haben. Dies leisten die von Fang und Howard vorgeschlagenen Variationswellenfunktionen [Fan66, Ste72]

$$\varphi_0(z) = \sqrt{\frac{b_0^3}{2}} \exp\left[-\frac{b_0 z}{2}\right], \quad (2.20)$$

$$\varphi_1(z) = \sqrt{\frac{3b_0^3}{2}} z \left(1 - \frac{b_0 z}{3}\right) \exp\left[-\frac{b_0 z}{2}\right]. \quad (2.21)$$

Minimiert man mit diesen Funktionen in einem Variationsverfahren die Energie pro Elektron

$$\epsilon = \langle T \rangle + \langle V_d \rangle + \frac{1}{2} \langle V_H \rangle, \quad (2.22)$$

die sich, wenn man Bildladungs- und Austausch-Korrelationsbeiträge unberücksichtigt läßt, aus der kinetischen Energie  $T$  und den elektrostatischen Beiträgen  $V_d$  und  $V_H$  zusammensetzt, so ergeben sich für die Subband-Energien die Ausdrücke

$$\epsilon_0^{FH} = \frac{\hbar^2 b_0^2}{8m^*} + \frac{3e^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} b_0} \left(N_d + \frac{11}{16} N_S\right), \quad (2.23)$$

$$\epsilon_1^{FH} = \frac{7 \hbar^2 b_0^2}{3 8m^*} + \frac{3e^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} b_0} \left(\frac{5}{3} N_d + \frac{73}{96} N_S\right). \quad (2.24)$$

Der Variationsparameter

$$b_0 = \left[ \frac{12m^* e^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc} \hbar^2} \left(N_d + \frac{11}{32} N_S\right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.25)$$

minimiert die Energie und hat die Dimension einer reziproken Länge. Er stellt ein direktes Maß für die mittlere

Ausdehnung der Wellenfunktionen dar:

$$\langle z \rangle_0 = z_{00} = \frac{3}{b_0}, \quad \langle z \rangle_1 = z_{11} = \frac{5}{b_0}. \quad (2.26)$$

## 2.2.2 Subband-Struktur von Doppelheterostrukturen

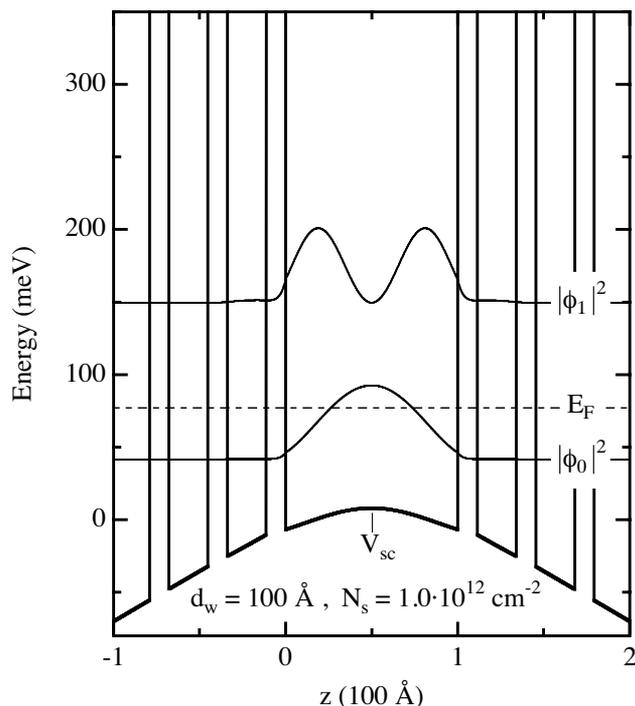
In Doppelheterostrukturen (DHS) wird das Einschlußpotential je nach Breite des Troges entweder von den Raumladungen oder vom Barrierenpotential bestimmt. Sie besitzen gegenüber Heterostrukturen den Vorteil, daß sich Ladungsträgerdichte und Subband-Energien weitgehend unabhängig voneinander einstellen lassen. Weiterhin können in solchen Strukturen deutlich höhere Subband-Abstände erreicht werden. Das Vorhandensein einer zweiten Grenzfläche hat allerdings in der Regel eine oftmals erhebliche Reduktion der Elektronenbeweglichkeit zur Folge. Man unterscheidet bei diesen Strukturen zwischen ein- und beidseitig dotierten Quantentrögen. Vom rechentechnischen Standpunkt unterscheiden sich diese Systeme aber konzeptionell nicht von den Einfachheterostrukturen.

Dominieren bei engen Trögen die Barrieren das Einschlußpotential, so liefert das Modell des Kastenpotentials mit unendlicher Barriere oftmals eine brauchbare Näherung [Bas88, Wen93b]. Die Wellenfunktionen und Energien für dieses Modell lauten:

$$\varphi_i(z) = \sqrt{\frac{2}{d_w}} \sin\left(\frac{\pi(1+i)z}{L}\right), \quad (2.27)$$

$$\epsilon_i^\infty = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* d_w^2} (1+i)^2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

Hierin bezeichnet  $d_w$  die Breite des Troges. Das Eindringen in die Barrieren wird hier nicht berücksichtigt und schränkt die Anwendbarkeit auf die untersten Subbänder ein.



**Abbildung 2.5:** Subband-Quantisierung in einem symmetrisch modulationsdotierten Quantentrog. Das selbstkonsistent berechnete Potential ist fett, die Betragsquadrate der Wellenfunktionen sind dünn durchgezogen und die Fermi-Energie gestrichelt dargestellt. In dieser Struktur dient ein kurzperiodisches Supergitter als Barriere, das aus einer Wiederholung von 4 Monolagen AlAs und 8 Monolagen GaAs besteht. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter lauten: Barrierenhöhe: 1000 meV, Trogbreite: 10 nm, Masse in GaAs:  $0.07 m_e$ , Masse in AlAs:  $0.15 m_e$ , Temperatur: 0 K, Elektronendichte:  $1.0 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und Symmetrieparameter:  $y = 0.5$ . Der Energienullpunkt ist so gewählt, daß die elektrostatischen Potentialbeiträge an der linken Topfgrenze ( $z = 0$ ) verschwinden. Die Wahl der Parameter orientiert sich an den Proben M4.1148, M4.1149 und M4.1200.

### 2.2.2.1 Einseitig dotierte Quantentröge

Für einseitig (hier von links) dotierte Quantentröge gelten bezüglich der Raumladungen die gleichen Bedingungen wie für Einzelheterostrukturen. In der Abbildung 2.4 sind als Beispiel die Verhältnisse in einem 17.5 nm breiten Quantentrog mittlerer Dichte dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß für eine Struktur dieser Breite die Barrieren den Einschluß bereits dominieren. Die Subband-Abstände liegen deutlich höher als in Einfachheterostrukturen vergleichbarer Ladungsträgerdichte.

### 2.2.2.2 Beidseitig dotierte Quantentröge

Beidseitig dotierte Doppelheterostrukturen unterscheiden sich bezüglich ihrer elektrostatischen Randbedingungen von den vorher diskutierten Systemen. Die Inversionselektronen stammen dabei zu einem Anteil  $y$  ( $0 < y < 1$ ) aus der linken und zu einem Anteil  $(1 - y)$  aus der rechten Dotierschicht. Unter Berücksichtigung der Neutralitätsbedingung erhält man für das elektrostatische Potential

$$V_{es}(z) = -e\Phi(z) = \frac{e^2}{\epsilon_0\epsilon_{sc}} \left[ \sum_i N_{S,i} z \left\{ y - \frac{1}{z} \int_{z_0}^z dz' (z - z') |\varphi_i(z')|^2 \right\} \right] + V_0 . \quad (2.29)$$

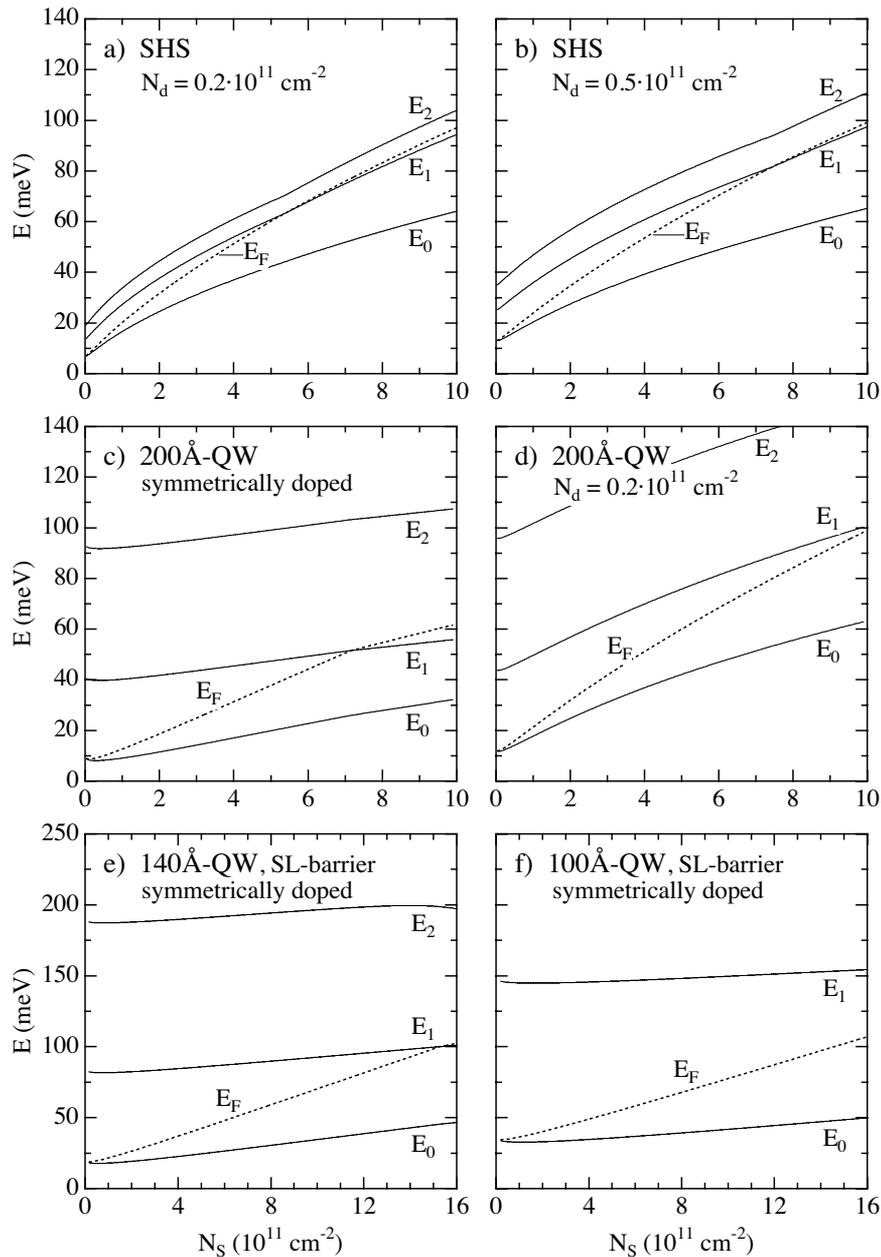
Die Integrationskonstante  $V_0$  legt wiederum den Energiebezugspunkt fest. Bei symmetrischer Dotierung gilt  $y = \frac{1}{2}$  und bei Dotierung in nur einer Barriere entweder  $y = 1$  (links) bzw.  $y = 0$  (rechts). In der Abbildung 2.5 sind die Verhältnisse in einem 10 nm breiten Quantentrog abgebildet. Als Besonderheit besitzt diese Struktur kurzperiodische AlAs/GaAs-Supergitter als Barrieren. Der Schichtaufbau basiert auf Strukturen gemäß [Fri96a], die sich durch sehr hohe Dichten bei gleichzeitig hohen Beweglichkeiten auszeichnen. Durch die hohen Subband-Abstände solch enger Quantentöpfe ist selbst bei hohen Dichten der elektrische Quantengrenzfall realisiert.

## 2.2.3 Gegenüberstellung von Einfach- und Doppelheterostrukturen

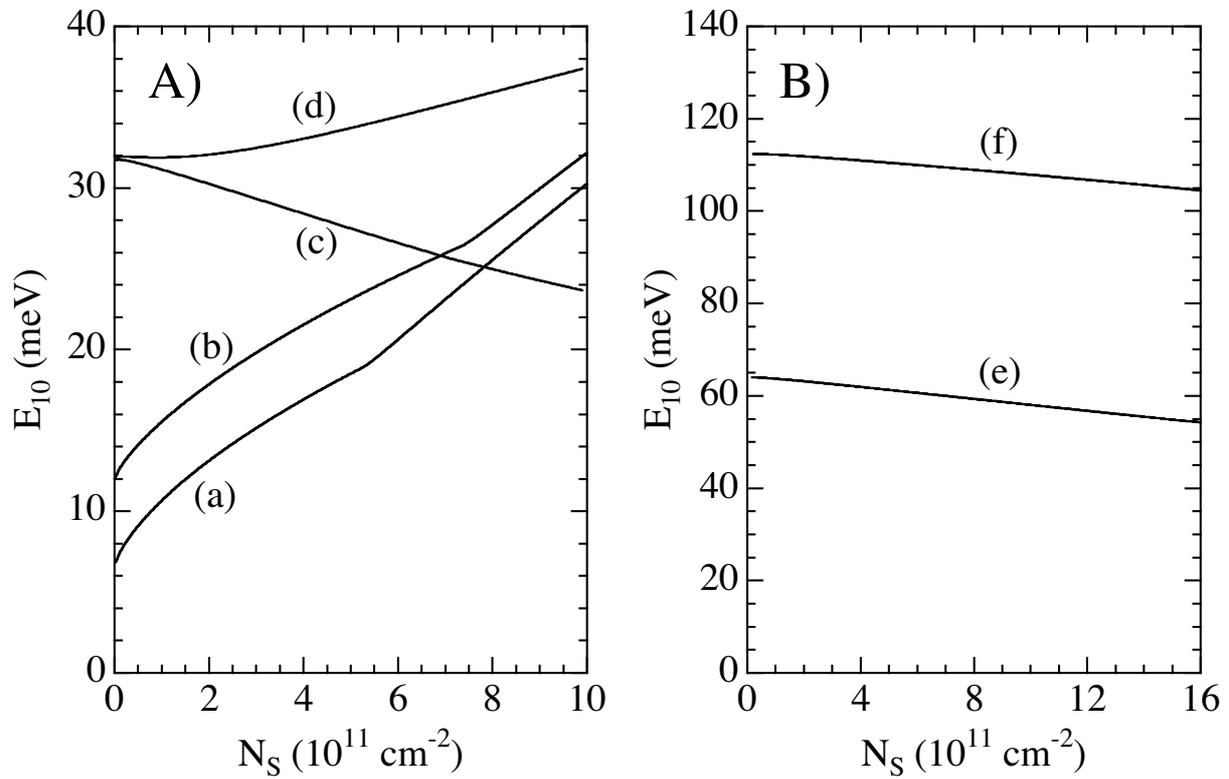
In diesem Teilabschnitt werden die vorgestellten Strukturen bezüglich ihrer Subband-Eigenschaften miteinander verglichen. Dazu sind in den Abbildungen 2.6 a) bis f) die Subband- und Fermi-Energien in Abhängigkeit von der Elektronendichte für einige Modellstrukturen dargestellt. Einfachheterostrukturen haben je nach experimenteller Anforderung den Vor- oder Nachteil, daß aufgrund der vergleichsweise geringen Subband-Abstände bereits bei moderaten Dichten für die in GaAs typischen Verarmungsflächendichten das zweite Subband besetzt wird. Bei Quantentrögen hängt dieser Umstand neben der Trogbreite auch stark davon ab, ob die Struktur ein- oder beidseitig dotiert ist. In sehr engen Trögen ist selbst bei sehr hohen Dichten der elektrische Quantengrenzfall mit nur einem besetzten Subband realisiert.

Für die Lage der Intersubband-Resonanzen sind die Subband-Abstände im Q2DEG maßgeblich. Für den fundamentalen Übergang vom tiefsten in das erste angeregte Subband ist deshalb in der Abbildung 2.7 der Subband-Abstand  $\epsilon_{10}$  für die in Figur 2.6 betrachteten Modellstrukturen gegenübergestellt. Der Subband-Abstand liegt in den Quantentrögen deutlich höher als in den Einfachheterostrukturen. Während in letzteren  $\epsilon_{10}$  stark mit der Trägerdichte ansteigt, hängt bei den Quantentrögen das Vorzeichen der Änderung davon ab, ob in nur einer oder in beiden Barrieren eine Dotierung vorliegt. Prinzipiell sollte bei einer bestimmten Asymmetrie der Dotierung ein weitgehend von der Trägerdichte unabhängiger Subband-Abstand realisierbar sein. Die großen Subband-Abstände in Quantentöpfen haben zur Folge, daß die Subband-Struktur sehr robust gegenüber einer Erhöhung der Temperatur wird. Eine thermische Besetzung des zweiten Subbandes erfordert thermische Energien  $k_B T$  in der Größenordnung  $(\epsilon_1 - \epsilon_F)$ , wenn die Fermi-Energie zwischen dem ersten und

dem zweiten Subband zu liegen kommt. Für Einfachheterostrukturen ist dies oftmals bereits bei Temperaturen von wenigen 10 K erfüllt, während in Quantentrögen entsprechender Breite selbst bei Raumtemperatur noch keine merkliche Besetzung des zweiten Subbandes vorliegt.



**Abbildung 2.6:** Subband-Energien (durchgezogen) und Fermi-Energie (gestrichelt) in Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte für einige Modellstrukturen. In den 6 Teilbildern sind die Subband-Verhältnisse dargestellt für a) eine Einfachheterostruktur mit niedriger und b) typischer Verarmungsflächendichte, einen Quantentrog von 20 nm Breite mit c) beidseitig symmetrischer und d) einseitiger Dotierung und geringer Verarmungsflächenladung, sowie für einen symmetrisch dotierten Quantentopf mit Supergitterbarrieren mit e) 14 nm und f) 10 nm Breite. Die Barrieren bestehen in a) bis d) aus einer AlGaAs-Legierung mit 300 meV Barrierenhöhe und in e) und f) aus einem kurzperiodischen Supergitter mit einer Wiederholung von 4 Monolagen AlAs und 8 Monolagen GaAs bei einem Leitungsbandoffset von 1000 meV zwischen AlAs und GaAs. Die Temperatur beträgt  $T = 1$  K.



**Abbildung 2.7:** *Fundamentaler Subband-Abstand  $\epsilon_{10}$  als Funktion der Ladungsträgerdichte für die in Figur 2.6 behandelten Modellstrukturen. Teilbild A) stellt die Strukturen mit vergleichsweise schwachem und B) diejenigen mit starkem Einschluß dar. Die in Form von Knicken auftretenden Diskontinuitäten beruhen auf dem Einsetzen der Besetzung des zweiten Subbandes.*

## 2.3 Landau-Quantisierung der Elektronen im Magnetfeld

Legt man senkrecht zur Ebene des Q2DEG ein homogenes Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  an, so wird im klassischen Bild ein Einzelelektron auf eine Kreisbahn mit dem Zyklotronradius

$$R_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2\epsilon m^*}}{eB}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (2.30)$$

gezwungen. Dieser hängt von seiner Geschwindigkeit  $v$  und damit direkt von dessen (kinetischer) Energie  $\epsilon$  ab. Betrachtet man die Elektronen im Q2DEG als wechselwirkungsfrei, so stellt jeweils der Mittelpunkt (Aufpunkt) der Kreisbahn eine Erhaltungsgröße der Bewegung dar. Die Kreisfrequenz, mit welcher ein Elektron den Zyklotronorbit umläuft, ist unabhängig von den Startbedingungen durch die Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  gegeben. Dies ist in der Abbildung 2.8 veranschaulicht.

In der quantenmechanischen Beschreibung, die auf Landau [Lan30] zurückgeht, lautet die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron mit Ladung ( $-e$ ) in der Ebene

$$H = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} + e\vec{A})^2 = \frac{\vec{\pi}^2}{2m^*}. \quad (2.31)$$

In Gegenwart eines Vektorpotentials ersetzt der kanonische Impuls  $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A}$  den kinetischen Impuls  $\vec{p}$ . Das Vektorpotential  $\vec{A}$ , über welches das Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  in Erscheinung tritt, ist von der Wahl der Eichung abhängig [Sak85]. Zur Behandlung des Problems sind zwei Eichungen gebräuchlich:

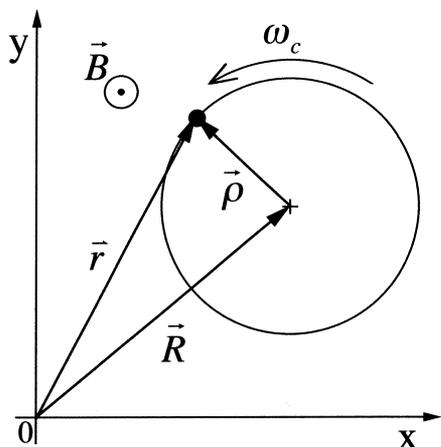
Die symmetrische Eichung

$$\vec{A}_S = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

ist der Rotationssymmetrie um die z-Achse optimal angepaßt und wird häufig im Zusammenhang mit dem Fraktionalen Quanten-Hall-Effekt (FQHE) verwendet. Die beiden gleichwertigen Landau-Eichungen

$$\vec{A}_{L1} = B \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_{L2} = B \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

tragen der ohne Magnetfeld vorliegenden Translationssymmetrie am besten Rechnung. Diese bleibt für je-



**Abbildung 2.8:** Klassische Zyklotronbahn eines Elektrons im konstanten Magnetfeld mit den entsprechenden Koordinaten.

weils eine Richtung in der Ebene erhalten. Diese Eichung wird bevorzugt zur Beschreibung von Einelektron-Phänomenen eingesetzt. Im folgenden werden die Grundlagen für beide Eichungen dargelegt.

### 2.3.1 Symmetrische Eichung

In der symmetrischen Eichung kann das Problem eines Elektrons im Magnetfeld auf ein algebraisches Problem zweier unabhängiger Oszillatoren abgebildet werden [Suz74, Mac86a, Hau93, Cha95]. Im Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega_c \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.34)$$

erscheinen explizit nur die Leiteroperatoren der Orbitalbewegung  $\hat{a}^+$  und  $\hat{a}$ , die durch

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m}(\rho_x - i\rho_y) = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[ \left( \frac{x}{2} - i l_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \left( \frac{y}{2} + i l_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] = \frac{i l_m}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x - i\pi_y) \quad , \quad (2.35)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_m}(\rho_x + i\rho_y) = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[ \left( \frac{x}{2} - i l_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + i \left( \frac{y}{2} + i l_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] = \frac{-i l_m}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x + i\pi_y) \quad (2.36)$$

gegeben sind. Hierbei bezeichnet  $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$  die Orbitalcoordinate bezüglich des Aufpunktes  $\vec{R} = (X, Y)$  (siehe Abbildung 2.8),  $\vec{\pi} = (\pi_x, \pi_y)$  den kanonischen Impuls und  $l_m$  die charakteristische magnetische Länge. Letztere ist über

$$l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (2.37)$$

definiert und stellt ein Maß für die räumliche Ausdehnung der Orbitale dar. Die Quantisierung der Energien

$$\epsilon_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

erfolgt in dieser Darstellung vollkommen analog zu der eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit  $\omega_c$  als Kreisfrequenz und dem Landau-Index  $n$  als Quantenzahl.

In den Drehimpuls

$$L_z = \hbar \left( \hat{a}^+ \hat{a} - \hat{b}^+ \hat{b} \right) = \hbar M = \hbar(n - m) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

gehen die Leiteroperatoren der Orbital- und Aufpunktfreiheitsgrade gleichwertig ein. Er stellt aufgrund der Symmetrie des Problems eine Erhaltungsgröße dar. Dabei bezeichnen  $M = n - m$  den Drehimpuls- und  $m$  den Aufpunktindex. Die Leiteroperatoren  $\hat{b}^+$  und  $\hat{b}$  des Aufpunktes sind hierbei durch

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m}(X + iY) = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[ \left( \frac{x}{2} + i l_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + i \left( \frac{y}{2} - i l_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \quad , \quad (2.40)$$

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_m}(X - iY) = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[ \left( \frac{x}{2} + i l_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \left( \frac{y}{2} - i l_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \quad (2.41)$$

gegeben. Die Vertauschungsrelationen für die Leiteroperatoren der beiden Oszillatoren lauten

$$\begin{aligned} 1 &= [\hat{a}, \hat{a}^+] = [\hat{b}, \hat{b}^+] \quad , \\ 0 &= [\hat{a}, \hat{b}] = [\hat{a}^+, \hat{b}^+] = [\hat{a}, \hat{b}^+] = [\hat{a}^+, \hat{b}] \quad . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Aus diesen ergeben sich die Wirkungsweisen der Leiteroperatoren auf die Eigenzustände  $|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$  zu [Sak85]:

$$\hat{a} |n, m\rangle = \sqrt{n} |n-1, m\rangle, \quad \hat{a} |0, m\rangle = 0; \quad (2.43)$$

$$\hat{a}^+ |n, m\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, m\rangle; \quad (2.44)$$

$$\hat{b} |n, m\rangle = \sqrt{m} |n, m-1\rangle, \quad \hat{b} |n, 0\rangle = 0; \quad (2.45)$$

$$\hat{b}^+ |n, m\rangle = \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle. \quad (2.46)$$

Die beiden Aufpunktkoordinaten  $X$  und  $Y$  sind wie auch die beiden Orbitalkoordinaten  $\rho_x$  und  $\rho_y$  nicht simultan meßbar. Observablen stellen jedoch die Quadrate der Radien von Landau- und Aufpunktorbital dar, auf denen sich ein Elektron im Eigenzustand  $|n, m\rangle$  befindet:

$$\langle \rho^2 \rangle_{n,m} = \langle n, m | (\rho_x^2 + \rho_y^2) | n, m \rangle = 2l_m^2 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.47)$$

$$\langle R^2 \rangle_{n,m} = \langle n, m | (X^2 + Y^2) | n, m \rangle = 2l_m^2 \left( m + \frac{1}{2} \right). \quad (2.48)$$

Die Forderung, daß sich das Elektron nur innerhalb einer endlichen kreisförmigen Probenfläche  $A$  aufhalten darf, schränkt die Radien für die Aufpunkte und damit die Werte des Aufpunktindex  $m$  nach oben hin ein:

$$A_R = \pi \langle R^2 \rangle_{n,m} < A \longrightarrow m < N_\Phi = \frac{A}{2\pi l_m^2}. \quad (2.49)$$

Der Entartungsgrad eines Landau-Niveaus  $n$  entspricht dabei gerade der Anzahl  $N_\Phi$  an fundamentalen Flußquanten, welche die Probenfläche durchdringen.

Die Ortsraumwellenfunktionen  $\phi_{n,m}(x, y) = \langle x, y | n, m \rangle$  lassen sich mit Hilfe der Ortsraumdarstellungen der Hebeoperatoren  $\hat{a}^+$  und  $\hat{b}^+$  über die Bildungsvorschrift

$$\phi_{n,m}(x, y) = \frac{(\hat{a}^+)^n (\hat{b}^+)^m}{\sqrt{n!m!}} \phi_{0,0}(x, y) \quad (2.50)$$

aus der Grundzustandswellenfunktion

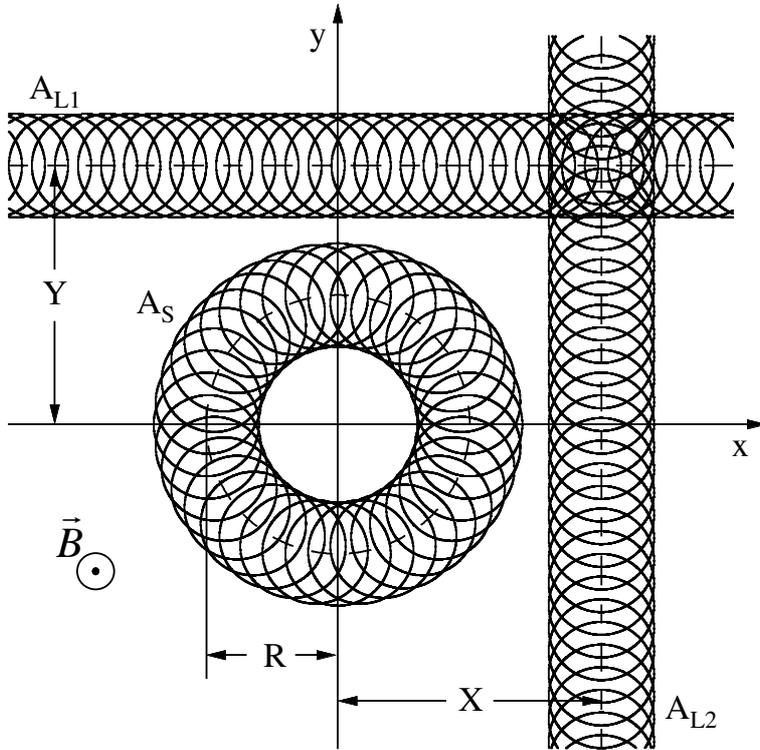
$$\phi_{0,0}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_m^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4l_m^2}\right) \quad (2.51)$$

erzeugen. In Zylinderkoordinaten lauten sie explizit:

$$\phi_{n,m}(r, \theta) = \sqrt{\frac{n!}{2\pi l_m^2 (n+m)!}} \exp\left(-im\theta - \frac{r^2}{4l_m^2}\right) \left(\frac{r}{\sqrt{2}l_m}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{2l_m^2}\right). \quad (2.52)$$

Hierin bezeichnet  $L_{n_1}^{n_2}$  ein assoziiertes Laguerre-Polynom vom Grade  $n_1$  [Abr55].

Bei den Bedingungen des FQHE besetzen im magnetischen Quantengrenzfall die Elektronen nur das niedrigste Landau-Niveau ( $n = 0$ ). Für diesen Fall ist es vorteilhaft die x-y-Ebene als komplexe Ebene aufzufassen und zu komplexen Koordinaten  $\zeta = x - iy = r e^{-i\theta}$  und  $\zeta^* = x + iy$  über zu gehen. In dieser Darstellung



**Abbildung 2.9:** Veranschaulichung der freien Landau-Zustände in den verschiedenen Eichungen als Überlagerung klassischer Bahnen.

lassen sich dann die Wellenfunktionen für das unterste Landau-Niveau sehr kompakt schreiben als

$$\phi_m(\zeta, \zeta^*) = \phi_{0,m}(\zeta, \zeta^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_m^2 2^m m!}} \zeta^m \exp\left(-\frac{\zeta \zeta^*}{4l_m^2}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.53)$$

wobei allen Orbitalen der Exponentialfaktor gemeinsam ist [Cha95]. Ein beliebiger Vielteilchen-Zustand im untersten Landau-Niveau kann damit in der Form

$$\phi[\zeta] = f[\zeta] e^{-\frac{1}{4l_m^2} \sum_{i=1}^N \zeta_i \zeta_i^*} \quad (2.54)$$

dargestellt werden. Darin ist die analytische Funktion  $f[\zeta]$  im allgemeinen über die Taylor-Reihe als Polynom in den  $N$  Variablen  $[\zeta] \equiv (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$  definiert. Die Funktion  $f[\zeta]$  hat dabei unter anderem aufgrund der Fermionizität der Elektronen der Forderung nach Antisymmetrie unter Teilchenvertauschung zu genügen.

### 2.3.2 Landau-Eichungen

In diesen Eichungen sind die Aufpunktkoordinaten  $X$  und  $Y$  ebenfalls nicht simultan meßbar. Während in der symmetrischen Eichung  $R^2$  als Observable dient und die Lage der Landau-Orbitale auf dem Kreis (Aufpunktwinkel) unbestimmt bleibt, ist bei den Landau-Eichungen entweder  $X$  definiert und  $Y$  komplett verschmiert ( $A_{L2}$ ) oder umgekehrt ( $A_{L1}$ ). Dies ist in der Abbildung 2.9 veranschaulicht.

Im weiteren wird die Eichung  $A_{L2}$  betrachtet. Die zugehörigen Wellenfunktionen ergeben sich direkt durch Lösen der Ortsraum-Schrödinger-Gleichung und lauten [Mac85a, Cha95]

$$\phi_{n,X}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-X}{l_m}\right)^2} H_n\left(\frac{x-X}{l_m}\right) e^{-i\frac{Xy}{l_m^2}}. \quad (2.55)$$

Darin bezeichnen die Funktion  $H_N$  das Hermite-Polynome vom Grade  $N$  [Abr55] und  $L_y$  die Ausdehnung der quadratisch angenommenen Probe entlang der y-Achse. Die Energieeigenwerte

$$\epsilon_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.56)$$

hängen auch hier nur vom Landau-Index  $n$  ab, dem in allen Eichungen die gleiche Bedeutung zukommt.

Das Fassungsvermögen eines Landau-Niveaus ist in dieser Eichung dadurch beschränkt, daß der Aufpunkt  $X$  sich innerhalb der Probe der Ausdehnung  $L_x$  in x-Richtung befinden muß. Dies führt zu einer Entartung

$$N_\Phi = \frac{L_x}{\Delta X} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_m^2} = \frac{A}{2\pi l_m^2} \quad (2.57)$$

der Landau-Niveaus bezüglich der quasi-kontinuierlichen Quantenzahl  $X$ , deren Abstände durch  $\Delta X = \frac{2\pi l_m^2}{L_y}$  gegeben sind. Der Entartungsgrad ist korrekterweise bis auf die der Betrachtung zugrunde liegende Proben-geometrie unabhängig von der Wahl der Eichung. Er wird üblicherweise auf die Einheitsfläche normiert und dann als

$$N_{LL} = \frac{1}{2\pi l_m^2} \quad (2.58)$$

bezeichnet.

### 2.3.3 Landau-Niveauschema und Füllfaktor

Bei vielen Fragestellungen zum Q2DEG im starken senkrechten Magnetfeld liefert die oftmals als Einteilchen-Bild bezeichnete Näherung wechselwirkungsfreier Elektronen bereits gute Ergebnisse. Der Vielteilchenaspekt des Elektronengases wird hierbei lediglich durch die Verwendung der Fermi-Dirac-Verteilung  $f_{FD}$ , die das Pauli-Ausschließungsprinzip umsetzt, berücksichtigt.

Da in dieser Näherung die Bewegungen in und senkrecht zur Ebene separieren, lauten die Energien der Landau-Niveaus

$$\epsilon_{i,n,\sigma} = \epsilon_i + \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + g^* \mu_B B \sigma \quad , \quad (2.59)$$

wobei  $i$  den Subband-Index,  $n$  den Landau-Index und  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  die Spinorientierung bezeichnen. Zur Orbitalenergie kommt hierbei noch der Zeeman-Term hinzu, dessen Größe vom effektiven Lande-Faktor  $g^*$  abhängt. Die Wellenfunktionen haben die Gestalt

$$\psi_{i,n,m/X,\sigma}(x, y, z) = \varphi_i(z) \phi_{n,m/X}(x, y) \chi_\sigma \quad , \quad (2.60)$$

mit  $\varphi_i(z)$  als dem Wellenfunktionsanteil der z-Richtung, den Landau-Orbitalen  $\phi_{n,m/X}(x, y)$  in symmetrischer ( $m$ ) oder Landau-Eichung ( $X$ ), sowie dem Spinor  $\chi_\sigma$ .

In einem ideal sauberen System besteht die Zustandsdichte aus einer Serie von Deltafunktionen mit einheitlichem Gewicht  $N_{LL}$ . In realen Systemen jedoch streuen die Elektronen an Phononen und Störstellen. Dies führt zu einer Verbreiterung der Landau-Niveaus, da durch ein zufälliges Störpotential deren makroskopische Entartung prinzipiell aufgehoben wird. Oftmals werden die partiellen Zustandsdichten  $D_{i,n,\sigma}(\epsilon)$  als Gauß-

Profile modelliert [Ger75]

$$D_{i,n,\sigma}(\epsilon) = N_{LL} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{i,n,\sigma}} \exp\left(-\frac{(\epsilon - \epsilon_{i,n,\sigma})^2}{2\Gamma_{i,n,\sigma}}\right), \quad (2.61)$$

wobei die Niveaubreiten  $\Gamma_{i,n,\sigma}$  sowohl von Systemparametern wie Magnetfeld, Art und Zusammensetzung der Streuer und Subband-Struktur als auch von sämtlichen Indizes abhängen. Im Falle nur eines besetzten Subbandes und unter der weiteren Annahme kurzreichweitiger Streuer kann die Niveaubreite im Grenzfall hoher Magnetfelder in selbstkonsistenter Bornscher Näherung (SCBA) als [And82]

$$\Gamma_{i,n,\sigma} = \Gamma_{SCBA} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi\tau}} \hbar\omega_c \quad (2.62)$$

abgeschätzt werden. Die darin auftretende Streuzeit  $\tau$  hängt über  $\mu = e\tau/m^*$  mit der Elektronenbeweglichkeit zusammen.

Eine wichtige Systemgröße stellt der Füllfaktor

$$\nu = \frac{N_S}{N_{LL}} = \frac{N_S}{2\pi l_m^2} \quad (2.63)$$

dar. Er gibt an, wieviele Landau-Niveaus bei  $T = 0$  K benötigt werden, um das Energieniveauschema in Einklang mit dem Pauli-Prinzip mit den vorhandenen Ladungsträgern aufzufüllen. Für die später folgenden Betrachtungen ist es günstig, die Partialfüllungen

$$\nu_{i,n,\sigma} = \frac{n_{i,n,\sigma}}{N_{LL}} \quad (2.64)$$

zu definieren. Darin bezeichnet  $n_{i,n,\sigma}$  die partielle Flächendichte der Elektronen im Landau-Niveau  $(i, n, \sigma)$ . Bei endlichen Temperaturen sind die Partialfüllungen durch

$$\nu_{i,n,\sigma} = \frac{1}{N_{LL}} \int d\epsilon D_{i,n,\sigma}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon - \epsilon_F) \quad (2.65)$$

gegeben. Die Fermi-Energie wird im Fall einer vorgegebenen Dichte durch die Bedingung

$$\sum_{i,n,\sigma} \nu_{i,n,\sigma} = \nu \quad (2.66)$$

implizit festgelegt. Kann die Niveaubreite bei hochbeweglichen Proben gegenüber der thermischen Energie ( $\Gamma \ll k_B T$ ) vernachlässigt werden, vereinfacht sich die Gleichung 2.65 zu

$$\nu_{i,n,\sigma} \approx f_{FD}(\epsilon_{i,n,\sigma} - \epsilon_F) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon_{i,n,\sigma} - \epsilon_F}{k_B T}\right)}. \quad (2.67)$$

Erhöht man an einem Elektronengas mit konstanter Dichte im elektrischen Quantengrenzfall das Magnetfeld, so springt die Fermi-Energie unter der Voraussetzung entsprechend tiefer Temperaturen und hoher Beweglichkeiten bei Feldern, die durch die Bedingung

$$N_S = n N_{LL} \longrightarrow B_n = n \frac{e}{h} \frac{1}{N_S}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.68)$$

gegeben sind, in das nächste energetisch tiefer gelegene Landau-Niveau. Dies äußert sich in den Quantenoszillationen der Antwort- und Gleichgewichtsgrößen des Systems, zu denen z.B. die in Kapitel 1.2 angesprochenen Oszillationen in der Magneto-Leitfähigkeit und in der Magneto-Kapazität gehören.

## 2.4 Zyklotron- und Intersubband-Resonanz im Einteilchen-Bild

Die Antwort eines Elektronengases kann in der Näherung wechselwirkungsfreier Elektronen anhand eines willkürlich aus dem System herausgegriffenen Einzelelektrons verstanden werden. Aus diesem Grund wird diese Näherung häufig als Einteilchen-Bild oder Einteilchen-Näherung bezeichnet. In den folgenden Betrachtungen ist jedoch der Begriff nicht-wechselwirkend, was die Intersubband-Resonanzen betrifft, weiter zu fassen, da bereits in der Berechnung der Subband-Struktur Vielteilchen-Effekte eingehen. Für die Intersubband-Resonanzen bedeutet die Einteilchen-Näherung, daß die Anregungsenergien durch die Subband-Abstände angenähert werden und sogenannte Depolarisationsverschiebungen sowie exzitonische Vielteilchen-Effekte vorerst unberücksichtigt bleiben.

Auf das herausgegriffene Elektron wirke von außen ein Strahlungsfeld ein, welches in Dipolnäherung durch das räumlich homogene Vektorpotential

$$\vec{A}(t) = (a_x, a_y, a_z) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (2.69)$$

beschrieben wird. Den Verhältnissen im Magnetfeld optimal angepaßt ist die Beschreibung in der zirkularen Polarisation mit den Feldkomponenten  $a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y)$  anstelle von  $(a_x, a_y)$ , die im weiteren zur Anwendung kommt. Das Vektorpotential koppelt über den kanonischen Impuls an die Elektronenbewegung an. Die Ankopplung wird durch den Störbeitrag zum Hamilton-Operator

$$H' = \frac{e}{m^*} [(a_+ \pi_- + a_- \pi_+ + a_z p_z) e^{-i\omega t} + c.c.] \quad (2.70)$$

beschrieben. Die darin auftretenden Impulskomponenten  $\pi_+$  und  $\pi_-$  enthalten das statische Vektorpotential  $\vec{A}_B$  des senkrechten Magnetfeldes  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_B$  und sind auf direkte Weise über

$$\pi_- = -i \frac{\hbar}{l_m} \hat{a}, \quad \pi_+ = i \frac{\hbar}{l_m} \hat{a}^+ \quad (2.71)$$

mit den Leiteroperatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^+$  der Orbitalbewegung (siehe Gleichungen 2.35 und 2.36) verknüpft. Da das statische Vektorpotential keine z-Komponente aufweist, bezeichnet  $p_z$  den gewöhnlichen kinetischen Impuls entlang dieser Richtung.

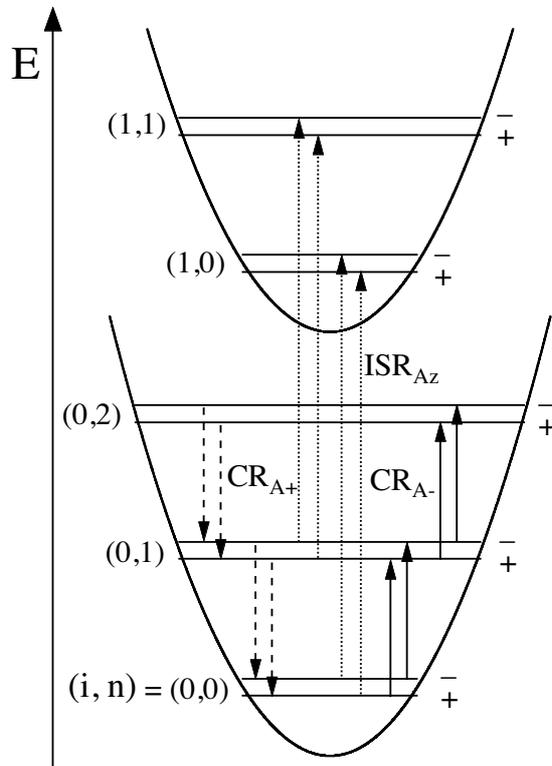
Die Auswahlregeln für einen Übergang vom Ausgangszustand  $|a\rangle = |i_a, n_a, m_a, \sigma_a\rangle$  in den Endzustand  $|b\rangle = |i_b, n_b, m_b, \sigma_b\rangle$  ergeben sich direkt aus den Matrixelementen

$$\langle i_b, n_b, m_b, \sigma_b | \pi_- | i_a, n_a, m_a, \sigma_a \rangle = -i \frac{\hbar}{l_m} \sqrt{n_a} \delta_{\sigma_a, \sigma_b} \delta_{i_a, i_b} \delta_{m_a, m_b} \delta_{n_a - 1, n_b}, \quad (2.72)$$

$$\langle i_b, n_b, m_b, \sigma_b | \pi_+ | i_a, n_a, m_a, \sigma_a \rangle = i \frac{\hbar}{l_m} \sqrt{n_a + 1} \delta_{\sigma_a, \sigma_b} \delta_{i_a, i_b} \delta_{m_a, m_b} \delta_{n_a + 1, n_b}, \quad (2.73)$$

$$\langle i_b, n_b, m_b, \sigma_b | p_z | i_a, n_a, m_a, \sigma_a \rangle = im^* \frac{\epsilon_{i_b} - \epsilon_{i_a}}{\hbar} \delta_{\sigma_a, \sigma_b} \delta_{m_a, m_b} \delta_{n_a, n_b} \langle i_b | z | i_a \rangle \quad (2.74)$$

und lauten:



**Abbildung 2.10:** Dipolübergänge im Einteilchen-Schema. Für ein festes Magnetfeld sind einige spinaufgespaltene Landau-Niveaus der beiden untersten Subbänder dargestellt. Zur Veranschaulichung des Zustandekommens der Landau-Quantisierung sind die Niveaus in der Energie-Impuls-Relation freier Elektronen eingezeichnet. Aktive ( $A_-$ ) Zyklotronübergänge sind durch volle und inaktive ( $A_+$ ) durch gestrichelte Pfeillinien angedeutet. Gepunktete Pfeillinien markieren Intersubband-Übergänge ( $A_z$ ). Mit  $(i, n)$  sind die jeweiligen Subband- und Landau-Indizes der Einteilchen-Niveaus gekennzeichnet und  $+$  beziehungsweise  $-$  symbolisieren deren Spineinstellung.

- für einen Zyklotronübergang:  $\Delta\sigma = 0$ ,  $\Delta i = 0$ ,  $\Delta m = 0$ ,  $\Delta n = \pm 1$
- und einen Intersubband-Übergang:  $\Delta\sigma = 0$ ,  $\Delta m = 0$ ,  $\Delta n = 0$ .

$\Delta i$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta m$  und  $\Delta\sigma$  bezeichnen hierin die Änderung von Subband-, Landau- und Aufpunktindex sowie der Spinprojektion beim Dipolübergang. Die Beziehung 2.74 ergibt sich direkt unter Ausnutzung von  $p_z = m^* \dot{z}$  und der Heisenberg-Gleichung  $\dot{z} = (i\hbar)^{-1}[z, H]$ . Die zugehörigen Übergangsenergien lauten:

- für einen Zyklotronübergang:  $\epsilon_{ba} = \pm \hbar\omega_c$
- und einen Intersubband-Übergang:  $\epsilon_{ba} = \epsilon_{i_b} - \epsilon_{i_a}$ .

Die energetisch entarteten Zyklotronübergänge reflektieren die Landau-Lücke und die Intersubband-Resonanzen die Subband-Abstände. In der Abbildung 2.10 sind zur Illustration einige solcher Übergänge schematisch dargestellt.

Die Anwendung der Goldenen Regel von Fermi liefert direkt die Übergangswahrscheinlichkeiten, wobei gemäß den Regeln der Quantenelektrodynamik Terme mit der Zeitabhängigkeit  $\exp(-i\omega t)$  Absorptions- und Terme mit  $\exp(+i\omega t)$  stimulierten Emissionsprozessen entsprechen. In einem Vielteilchen-System sind die Absorptionsprozesse noch mit dem Besetzungsgewicht  $f_a(1 - f_b)$  und die Emissionsprozesse mit  $f_b(1 - f_a)$  zu multiplizieren, wobei gemäß dem Pauli-Ausschließungsprinzip  $f_a$  die Wahrscheinlichkeit für einen besetzten Ausgangszustand  $|a\rangle$  und  $(1 - f_b)$  die für einen leeren Endzustand  $|b\rangle$  bezeichnet. Aufgrund der makroskopischen Entartung der Landau-Niveaus kann unter Vernachlässigung ihrer Verbreiterung über den Aufpunktindex  $m$  summiert werden. Dadurch tritt der Landau-Entartungsfaktor  $N_{LL}$  als Gewichtsfaktor eines Übergangs in Erscheinung. Als Endergebnis erhält man schließlich als die Netto-Wahrscheinlichkeiten für die Absorption eines Photons aus dem Strahlungsfeld, die sich aus der Differenz der Wahrscheinlichkeiten für Absorptions-

und Emissionsprozeß ergeben [Bra83], die folgenden Ausdrücke:

$$W_{ba}^{A+}(\omega) = W_{(i,n,\sigma)(i,n+1,\sigma)}^{A+} = a_+^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{m^*} \omega_c N_{LL}(n+1) [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}] \delta(\omega + \omega_c) , \quad (2.75)$$

$$W_{ba}^{A-}(\omega) = W_{(i,n+1,\sigma)(i,n,\sigma)}^{A-} = a_-^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{m^*} \omega_c N_{LL}(n+1) [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}] \delta(\omega - \omega_c) , \quad (2.76)$$

$$W_{ba}^{Az}(\omega) = W_{(j,n,\sigma)(i,n,\sigma)}^{Az} = a_z^2 \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{\hbar} \omega_{ji}^2 N_{LL} |\langle j|z|i\rangle|^2 [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{j,n,\sigma}] \delta(\omega - \omega_{j \leftarrow i}) . \quad (2.77)$$

Darin stehen  $\nu_{i,n,\sigma}$  für die Partialfüllungen der Landau-Niveaus und  $\hbar\omega_{ji} = \epsilon_j - \epsilon_i$  für die Subband-Abstände. Die linkszirkulare Feldkomponente  $A_+$  regt stets Emissions-Übergänge negativer Energie an und wird deshalb als die zyklotron-inaktive Polarisierung bezeichnet. Die rechtszirkulare Feldkomponente  $A_-$  hingegen induziert alleinig Absorptions-Übergänge, deren Energien positiv sind und einheitlich  $\hbar\omega_c$  betragen. Sie wird dementsprechend die zyklotron-aktive Polarisationskomponente genannt. Die Intersubband-Übergänge zu höheren Subbändern  $j > i$  sind alle aktiv und unterliegen keinen besonderen Auswahlregeln.

Hier angelangt, ist es nur noch ein Schritt, um über den Extinktionskoeffizienten

$$\alpha_\gamma(\omega) = \frac{\hbar\omega}{I_\gamma(\omega)} \sum_{a,b} W_{ba}^{A_\gamma}(\omega) = \frac{\Re\{\sigma_\gamma(\omega)\}}{n(\omega)\varepsilon_0 c} \quad (2.78)$$

der jeweiligen Polarisierung  $\gamma = +, -, z$  zum Realteil der entsprechenden dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_\gamma(\omega)$  zu gelangen. Dazu ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller mit den Auswahlregeln verträglichen Übergänge mit der Energie  $\hbar\omega$  des absorbierten Photons zu wichten und auf die Energieflußdichte  $I_\gamma(\omega) = 2\varepsilon_0 n(\omega) c \omega^2 a_\gamma^2$  des Feldes zu normieren, wobei  $n(\omega)$  den Brechungsindex bezeichnet [Bra83]. Um den in realen Systemen auftretenden Streueffekten Rechnung zu tragen, wird allerdings die  $\delta$ -Funktion noch durch das komplexe Lorentz-Profil (Drude-Form)

$$\delta(\omega \mp \omega_{ba}) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau_{ba}}{1 - i(\omega \mp \omega_{ba})\tau_{ba}} \quad (2.79)$$

ersetzt, welches der Kramers-Kronig-Relation und damit dem Kausalitätsprinzip genügt [Jac62]. Die Streuzeit  $\tau_{ba}$ , welche prinzipiell von allen Indizes abhängen kann und der Lebensdauer des Anregungszustandes entspricht, erfaßt pauschal sämtliche die Resonanz verbreiternde Prozesse. Damit ergeben sich dann schließlich die dynamischen (Flächen-) Leitfähigkeiten eines Q2DEG im senkrechten Magnetfeld gemäß dem Einteilchen-Bild zu

$$\sigma_{+-/-+}(\omega) = N_{LL} \frac{e^2}{m^*} \sum_{i,n,\sigma} (n+1) [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}] \frac{\tau}{1 - i(\omega \mp \omega_c)\tau} , \quad (2.80)$$

$$\sigma_z(\omega) = N_{LL} e^2 \sum_{i,n,\sigma} \sum_{j>i} \frac{\omega_{ji}}{\hbar} |\langle j|z|i\rangle|^2 [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{j,n,\sigma}] \frac{\tau}{1 + i(\omega - \omega_{ji})\tau} . \quad (2.81)$$

Hierbei wird aus Gründen der Einfachheit für alle Übergänge eine einheitliche Streuzeit  $\tau$  vorausgesetzt. Im Falle der Zyklotronresonanz reduziert sich Gleichung 2.80 unter Ausnutzung der Beziehung

$$\nu = \sum_{i,\sigma} \sum_n \nu_{i,n,\sigma} = \sum_{i,\sigma} \sum_n (n+1) [\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}] \quad (2.82)$$

auf die klassische Drude-Form gemäß der Gleichung 1.32 aus Abschnitt 1.5.2.

## 2.5 Resonante Subband-Landau-Niveau-Kopplung

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde ein perfekt senkrecht zum Q2DEG ausgerichtetes Magnetfeld vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist jedoch aufgrund der unvermeidlichen Mißorientierung zwischen Magnetfeldrichtung und Oberflächennormalen der Probe in der Realität nicht erfüllt. Besonders in der Zyklotronresonanz führen selbst kleinste Mißorientierungen zu charakteristischen Anomalien, wenn zwei Landau-Niveaus verschiedener Subbänder sich bei Variation des Magnetfeldes durchkreuzen. Solche Anomalien werden unter dem Begriff der Resonanten Subband-Landau-Niveau-Kopplung (RSLLC) zusammengefaßt und können sehr gut im Einteilchen-Schema beschrieben werden [Sch83, Wie89].

Das Vektorpotential eines um den Winkel  $\theta$  gegenüber der Probenormalen verkippten Magnetfeldes  $\vec{B} = (0, B_y, B_z) = (0, B \sin(\theta), B \cos(\theta))$  lautet in einer der Landau-Eichung verwandten Darstellung [And79]

$$\vec{A}_B = (B_y z, B_z x, 0) . \quad (2.83)$$

Damit kann man den Hamilton-Operator eines Elektrons entsprechend

$$H = H_{\perp} + H_{\parallel} + H_c \quad (2.84)$$

separieren, wobei die Richtungsangaben  $\perp$  und  $\parallel$  sich auf die vom Q2DEG aufgespannte Ebene beziehen. Die beiden Beiträge

$$H_{\perp} = \frac{p_z^2}{2m^*} + V_{sc}(z) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{z^2}{l_{\parallel}^4} , \quad (2.85)$$

$$H_{\parallel} = \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{[p_y + eB_{\perp} x]^2}{2m^*} \quad (2.86)$$

entsprechen zusammen genommen dem bislang betrachteten und um eine diamagnetische Korrektur  $H_{\perp, dia} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{z^2}{l_{\parallel}^4}$  erweiterten Problem eines Elektrons im Magnetfeld. Die magnetischen Längen  $l_{\parallel}^2$  und  $l_{\perp}^2$  sind über

$$l_{\parallel}^2 = \frac{\hbar}{eB_{\parallel}} , \quad l_{\perp}^2 = \frac{\hbar}{eB_{\perp}} \quad (2.87)$$

definiert. Noch separieren die Bewegungen in senkrechter und paralleler Richtung. Der Kopplungsterm

$$H_c = \frac{\hbar}{m^*} \frac{z p_x}{l_{\parallel}^2} \quad (2.88)$$

jedoch verkoppelt die beiden Richtungen derart, daß eine Faktorisierung der Wellenfunktionen nicht mehr streng möglich ist. Es sind im allgemeinen auch keine analytischen Ausdrücke mehr für die Wellenfunktionen des Gesamtproblems angebar. Der Elektronenspin ist aus Gründen der Übersichtlichkeit hier unterdrückt. Er kann aber in Form des Zeeman-Terms leicht additiv hinzugefügt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, daß auf den Spinfreiheitsgrad unabhängig von der Orientierung das Gesamtfeld wirkt.

Zur Behandlung des Problems hat sich die Vorgehensweise nach Ando bewährt [And79]. Die Hauptstrategie besteht darin, eine geeignete Basis des Zustandsraumes zu finden, die es gestattet, die wesentlichen Kopplungseffekte in niedriger Ordnung störungstechnisch zu erfassen. Zu diesem Zweck wird zuerst die Schrödinger-Gleichung zu  $H_{\perp}$  (Gleichung 2.85) gelöst. Die sich daraus ergebenden Wellenfunktionen  $\phi_i(z)$

und ihre Subband-Energien  $\epsilon_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  entsprechen bis auf Korrekturen, die vom diamagnetischen Term herrühren und bei kleinen Winkeln vernachlässigbar sind, denen im unverkippten Magnetfeld. Die naheliegendste Basis bilden die direkten Produkte zwischen den  $\phi_i(z)$  und den Landau-Wellenfunktionen in der Landau-Eichung (Gleichung 2.55), in denen  $l_m$  durch  $l_\perp$  ersetzt ist. Diese Wahl hat jedoch den schwerwiegenden Nachteil, daß ausgenommen der sogenannten Vollfeldkopplung, die Resonanzkopplungen zwischen den Landau-Niveaus verschiedener Subbänder erst in hoher Ordnung der Störungsrechnung korrekt wiedergegeben werden. Als Resonanzkopplungen werden die Situationen bezeichnet, bei denen die Magnetfelddispersionen zweier Niveaus  $|i, n\rangle$  und  $|i', n'\rangle$  bei Durchlaufen des Resonanzfeldes

$$B_{res} = \frac{m^*}{e\hbar} \frac{\epsilon_{i'} - \epsilon_i}{n - n'}, \quad i' > i, \quad n > n' \quad (2.89)$$

sich bedingt durch die Kopplung gegenseitig abstoßen (anticrossing) anstatt zu überkreuzen. Je nach Wert des Nenners  $N = n - n' = 1, 2, 3, \dots$  spricht man von Voll-, Halb-, Drittelfeldkopplung, usw. .

Eine deutlich bessere Ausgangsbasis zur Beschreibung der Kopplungsphänomene gewinnt man, indem man in der Produktbasis die gewöhnlichen Landau-Orbitale  $\phi_{n,X}(x, y)$  eines Subbandes  $i$  durch die im Impulsraum entlang der  $k_x$ -Richtung verschobenen Orbitale

$$\tilde{\phi}_{n,X}(x, y) = \exp \left[ -i \frac{z_{i,i}}{l_\parallel^2} (x - X) \right] \phi_{n,X}(x, y) \quad (2.90)$$

ersetzt. Hierbei bezeichnet  $z_{i,i} = \int dz \varphi_i(z) z \varphi_i(z)$  die Lage des Schwerpunktes eines Subbandes in  $z$ -Richtung. Die verschobenen Landau-Orbitale ergeben sich dabei unmittelbar durch Lösen der Schrödinger-Gleichung zum Hamilton-Operator  $H_\parallel + H_c$ , indem man den  $z$ -Operator durch die Erwartungswerte  $z_{i,i}$  ersetzt. Damit lauten die dem Problem optimal angepaßten Basisfunktionen

$$\tilde{\psi}_{i,n,X}(x, y, z) = \varphi_i(z) \tilde{\phi}_{n,X}(x, y) \quad (2.91)$$

Mit diesen lassen sich die Matrixelemente des Hamilton-Operators bilden:

$$\begin{aligned} \langle i', n', X' | H | i, n, X \rangle &= \delta_{X',X} \left\{ \delta_{i',i} \delta_{n',n} \left[ \epsilon_i - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{(z_{i,i})^2}{l_\parallel^4} + (n + 1/2) \hbar \omega_c \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + (1 - \delta_{i',i}) \langle i', n' | H_c | i, n \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

mit

$$\begin{aligned} \langle i', n' | H_c | i, n \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{z_{i',i}}{l_\parallel^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{n+1} J_{n',n+1}(\Delta_{i',i}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n'+1} J_{n'+1,n}(\Delta_{i',i}) + \sqrt{n} J_{n',n-1}(\Delta_{i',i}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n'} J_{n'-1,n}(\Delta_{i',i}) - \sqrt{2} \frac{l_\perp}{l_\parallel^2} (z_{i,i} + z_{i',i'}) J_{n',n}(\Delta_{i',i}) \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Die Funktionen

$$J_{n',n}(\Delta_{i',i}) = J_{n,n'}(-\Delta_{i',i}) = \sqrt{\frac{n!}{n'}} \exp \left( -\frac{\Delta_{i',i}^2}{4} \right) \left( \frac{\Delta_{i',i}}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} L_n^{n'-n} \left( \frac{\Delta_{i',i}^2}{2} \right) \quad (2.94)$$

beschreiben den Überlapp zwischen Zyklotronorbits, die im Impulsraum um den Abstand

$$q_x = \frac{\Delta_{i',i}}{l_\perp} = \frac{z_{i',i'} - z_{i,i}}{l_\parallel^2} \quad (2.95)$$

gegeneinander verschoben sind.  $L_N^\alpha$  ist ein verallgemeinertes Laguerre-Polynom vom Grad  $N$ . Im Falle kleiner paralleler Feldkomponenten gilt  $\Delta_{i',i} = \frac{z_{i',i'} - z_{i,i}}{l_\perp} \tan(\theta) \ll 1$ , so daß die Überlappfunktionen durch

$$J_{n',n}(\Delta_{i',i}) \approx \sqrt{\frac{n'!}{n!}} \frac{1}{(n'-n)!} \left( \frac{\Delta_{i',i}}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n}, \quad J_{n,n'}(\Delta_{i',i}) = J_{n',n}(-\Delta_{i',i}), \quad n' > n \quad (2.96)$$

approximiert werden können.

Die Verhältnisse um die Resonanzkopplungen lassen sich sehr gut in der entarteten Störungsrechnung erfassen, wenn man den Hamilton-Operator im zweidimensionalen Subraum der kreuzenden Niveaus  $|i', n'\rangle$  und  $|i, n\rangle$  diagonalisiert. Als Ergebnis bekommt man die bekannte Beziehung

$$\epsilon_{i',n'|i,n}^\pm = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_{i,n} + \epsilon_{i',n'} \pm \sqrt{(\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i',n'})^2 + 4|\langle i', n' | H_c | i, n \rangle|^2} \right], \quad (2.97)$$

welche das durch eine Kopplung bedingte Abstoßen der Energien eines Zweiniveausystems beschreibt. Die Energieaufspaltungen in den Resonanzen betragen gerade  $\Delta\epsilon = \epsilon_{i',n'|i,n}^+ - \epsilon_{i',n'|i,n}^- = 2|\langle i', n' | H_c | i, n \rangle|$ . Für die verschiedenen Ordnungen der Resonanzkopplung lauten die ausgewerteten Matrixelemente bis einschließlich der Terme in  $\tan^3(\theta)$ :

$$\langle i', n | H_c | i, n+1 \rangle = 2a_{i',i} \sqrt{n+1} \tan(\theta) + a_{i',i} \sqrt{n+1} \left[ c_{i',i} \frac{(n+1)}{2} + d_{i',i} \right] \tan^3(\theta), \quad (2.98)$$

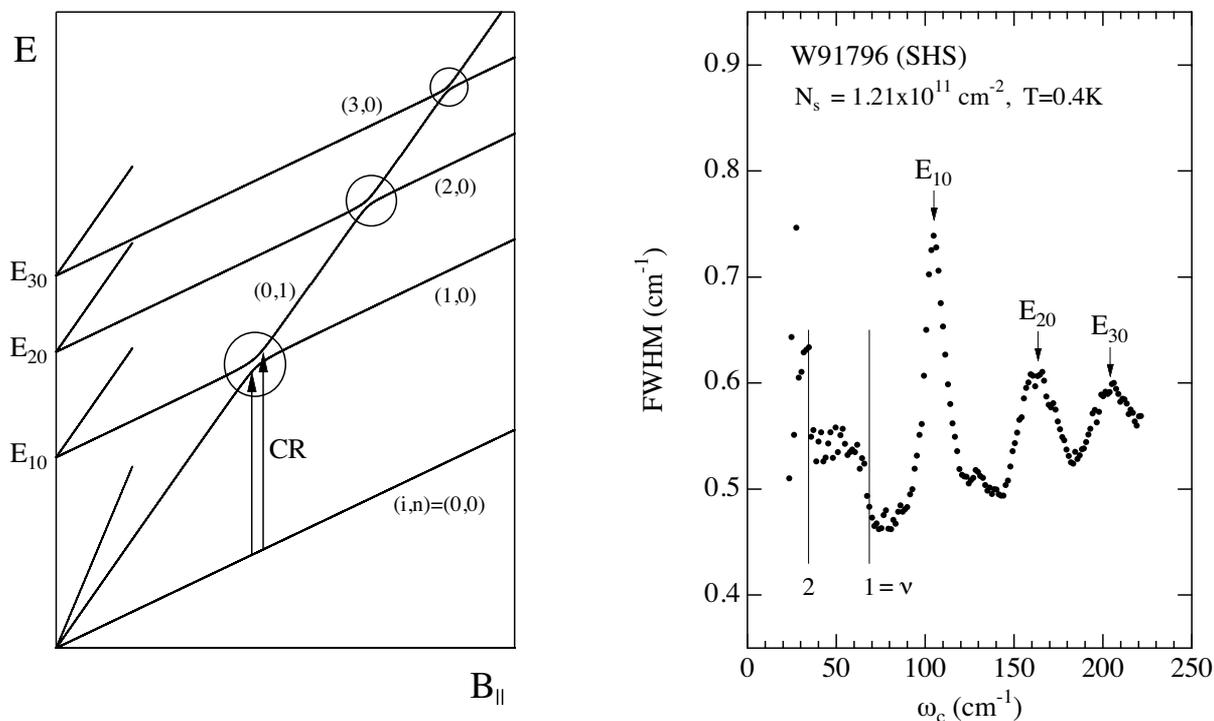
$$\langle i', n | H_c | i, n+2 \rangle = -\sqrt{2} a_{i',i} c_{i',i} \sqrt{(n+1)(n+2)} \tan^2(\theta), \quad (2.99)$$

$$\langle i', n | H_c | i, n+3 \rangle = \frac{1}{2} a_{i',i} c_{i',i}^2 \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \tan^3(\theta). \quad (2.100)$$

Die niedrigste darin vorkommende Potenz von  $\tan(\theta)$  entspricht gerade der Kopplungsordnung  $N = n - n'$ . Die auftretenden Größen  $a$ ,  $c$  und  $d$  sind hierbei folgendermaßen definiert:

$$a_{i',i} = \frac{\hbar\omega_c}{\sqrt{2}} \left( \frac{z_{i',i}}{l_\perp} \right), \quad c_{i',i} = \frac{z_{i',i'} - z_{i,i}}{l_\perp}, \quad d_{i',i} = \frac{z_{i',i'} + z_{i,i}}{l_\perp}. \quad (2.101)$$

In verkippten Feldern erwartet man im Einteilchen-Bild gemäß den vorausgehenden Betrachtungen charakteristische Aufspaltungen der Zyklotronresonanz. Deren Zustandekommen ist für die Vollfeldkopplungen in der Abbildung 2.11 (links) veranschaulicht. Die Vollfeldaufspaltungen sind selbst für sehr kleine Verkippungswinkel bei entsprechender Subband-Struktur sehr leicht experimentell zu beobachten und aufgrund ihrer Dominanz über andere in der Regel schwächere Effekte oft unerwünscht. Die Halbfeld- und höheren Resonanzaufspaltungen hingegen können durch den Besetzungseffekt bedingt in der Regel erst bei relativ hohen Dichten oder hohen Temperaturen beobachtet werden, wobei aufgrund der Abhängigkeit der Kopplungsmatrixelemente  $\propto \tan^N(\theta)$  zunehmend größere Verkippungen notwendig sind [Wie89]. Bei kleinen Verkippungswinkeln  $\theta < 10^\circ$  jedoch haben die höheren Kopplungsordnungen keinerlei Bedeutung. Aus den energetischen Lagen der Vollfeldaufspaltungen in der Zyklotronresonanz kann sehr wertvolle Information über die Subband-Struktur des Q2DEG gewonnen werden. Es ist jedoch bei der Auswertung der Energien zu beachten, daß die



**Abbildung 2.11:** Resonante Subband-Landau-Niveau-Vollfeldkopplungen (RSLLC) im Einteilchen-Übergangsschema (linkes Bild) und im Experiment (rechtes Bild). Im rechten Bild ist die Resonanzbreite als Funktion der Resonanzlage für eine nur wenig gegen das Magnetfeld verkippte Einfachheterostruktur dargestellt.

Aufspaltungen nicht, wie im Einteilchen-Bild zu erwarten wäre, bei den Subband-Abständen, sondern bei den kollektiv verschobenen Intersubband-Resonanzenergien auftreten [Za185]. Dieser Aspekt wird in späteren Abschnitten detailliert untersucht. Als Abschätzung der Subband-Abstände im Q2DEG sind die aus der RSLLC gewonnenen Energien jedoch brauchbar und hilfreich.

Die experimentelle Auswertung in der Abbildung 2.11 zeigt die Variation der Zyklotronresonanz-Linienbreite als Funktion des Resonanzschwerpunktes  $\omega_c$  für eine in ihrer Verkipfung nahezu kompensierten Einfachheterostruktur. Die Resonanzaufspaltungen können bei einer derart geringen Fehlorientierung ( $\theta < 1^\circ$ ) lediglich in Form von Linienverbreiterungen von nahezu perfekten Lorentz-Profilen aufgelöst werden. Man erkennt deutlich, daß die den RSLLC zugeordneten Strukturen die Variation dominieren. Die bei niedrigen Energien bis  $70 \text{ cm}^{-1}$  auftretenden Strukturen korrelieren mit dem Füllfaktor  $\nu$  und sind deshalb von besonderem Interesse. Im magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 1$  allerdings überdecken die Resonanzaufspaltungen durch Kopplung an die Subband-Struktur subtilere Effekte, die beispielsweise mit der Elektron-Elektron-Wechselwirkung in Zusammenhang stehen, vollständig. Dies ist ein generelles Problem hochbeweglicher Einzelheterostrukturen, da diese nur ein schwaches Einschlußpotential und damit niedrige Subband-Abstände aufweisen. Um in diesem Regime kleine Effekte auflösen zu können, sind Elektronengase mit starkem Einschluß, wie ihn enge Quantentöpfe aufweisen, notwendig.

## 2.6 Nichtparabolizität des Leitungsbandes

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde die Dispersion des Leitungsbandes als parabolisch vorausgesetzt. Diese Näherung ist eigentlich nur in unmittelbarer Umgebung des Leitungsbandminimums  $\vec{k}_0$  im Regime kleiner Impulse  $|\vec{k} - \vec{k}_0| \ll \frac{2\pi}{a}$  gerechtfertigt. Dabei steht  $a$  für die Gitterkonstante des Halbleiterkristalls. Die Reichweite der Impulskomponenten in die Brillouin-Zone hängt im wesentlichen vom Einschlußpotential und der Lage der Fermi-Energie ab. Abweichungen von einer parabolischen Energiedispersion werden unter dem Begriff der Nichtparabolizität zusammengefaßt und sind in den auf GaAs-basierenden Elektronengasen in der Regel klein und deshalb als Korrekturen behandelbar. In diesem Abschnitt wird zunächst ein phänomenologischer Zugang zur Nichtparabolizität vorgestellt, welcher zur Beschreibung und zum Verständnis der wesentlichen Effekte ausreicht. Im darauffolgenden Abschnitt 2.7 schließt sich eine detaillierte Begründung im Rahmen der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode an.

In direkten kubischen Halbleitern wie GaAs kann das Leitungsband um das Zentrum der Brillouin-Zone, dem  $\Gamma$ -Punkt, in guter Näherung als sphärisch betrachtet werden. Die Energiedispersion des Leitungsbandes kann daher formal nach  $k^2$  entwickelt und in der kompakten Form

$$\epsilon_c(\vec{k}) = T^{(0)}(\vec{k}) \left[ 1 - \frac{T^{(0)}(\vec{k})}{\epsilon_g^*} + \dots \right] \quad (2.102)$$

dargestellt werden. Darin steht

$$T^{(0)}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_0^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m_0^*} k^2 \quad (2.103)$$

für die Dispersion eines ideal parabolischen Leitungsbandes mit der Bandkantenmasse  $m_0^*$ .  $\epsilon_g^*$  bezeichnet den vom Material abhängigen Nichtparabolizitätsparameter niedrigster Ordnung in Form einer effektiven Energielücke. Das negative Vorzeichen im niedrigsten Korrekturterm stellt dabei sicher, daß mit größer werdendem  $k$  die Dispersion zunehmend flacher verläuft. Auf formal analoge Weise läßt sich auch die Zeeman-Aufspaltung behandeln [Ogg66]. Deren Korrektur läßt sich am geeignetsten in Form eines vom Impuls abhängigen  $g$ -Faktors

$$g^*(\vec{k}) = g_0^* + \frac{T^{(0)}(\vec{k})}{\Lambda^*} + \dots \quad (2.104)$$

beschreiben, wobei  $\Lambda^*$  wiederum eine vom Material abhängige Referenzenergie darstellt.

Um dem Potentialeinschluß des Q2DEG sowie einem senkrechten Magnetfeld Rechnung zu tragen, ist die Schrödinger-Gleichung um die Nichtparabolizitätskorrekturen zu erweitern. Dazu wird der Operator der kinetischen Energie durch  $\epsilon_c(\vec{k} \rightarrow -i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar}\vec{A})$  und der  $g$ -Faktor im Zeeman-Term durch  $g^*(\vec{k} \rightarrow -i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar}\vec{A})$  ersetzt [Mad78]. Damit lautet die Schrödinger-Gleichung im Rahmen eines effektiven Einbandmodells in ausgeschriebener Form

$$\left[ \frac{\vec{\pi}^2}{2m_0^*} + V(z) + g_0^* \mu_B B \sigma - \frac{1}{\epsilon_g^*} \left( \frac{\vec{\pi}^2}{2m_0^*} \right)^2 + \frac{1}{\Lambda^*} \left( \frac{\vec{\pi}^2}{2m_0^*} \right) \mu_B B \sigma \right] \psi(x, y, z) = \epsilon \psi(x, y, z) \quad (2.105)$$

Darin repräsentieren  $\vec{\pi} = -i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}$  den Operator des kanonischen Impulses,  $V(z)$  das selbstkonsistente Einschlußpotential,  $\vec{B}$  das Magnetfeld,  $\vec{A}$  das damit verbundene Vektorpotential in entsprechender Eichung und

$\sigma = \pm \frac{1}{2}$  die Spinorientierung entlang der Magnetfeldachse. Aus Gründen der Einfachheit sind hier die Unterschiede in den Bandkantenmassen  $m_0^*$  und in den Nichtparabolizitätsparametern zwischen Trog und Barriere unberücksichtigt. Dies ist in guter Näherung gerechtfertigt, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in den Barrieren, die sich unmittelbar aus Subband-Berechnungen entsprechend dem Abschnitt 2.2 ergeben, maximal nur wenige Prozent betragen. Die ersten drei Terme entsprechen dem bislang betrachteten Problem eines Q2DEG mit parabolischer Bandstruktur. Die beiden letzten Terme bilden die Korrekturen an der kinetischen Energie beziehungsweise dem Zeeman-Term. Diese können bei den in GaAs vorliegenden Nichtparabolizitäten (siehe Auflistung 2.145) gut in niedrigster Ordnung der Störungstheorie behandelt werden.

Da die Impulsoperatoren stets im Betragsquadrat auftreten, bleibt die Symmetrie und dadurch insbesondere die Quantisierung in Landau-Orbitale innerhalb der Ebene erhalten. Bildet man mit den bekannten Wellenfunktionen des parabolischen Systems Matrixelemente bezüglich der Nichtparabolizitätsbeiträge, so bekommt man schließlich in erster störungstheoretischer Ordnung für die Lage der Energieniveaus

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,n,\sigma}^{(np)} \approx & \epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - \frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_g^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \left[ \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + 2\langle i|T_z^{(0)}|i \rangle \right] \\ & - \frac{1}{\epsilon_g^*} \langle i|(T_z^{(0)})^2|i \rangle + \frac{\mu_B B \sigma}{\Lambda^*} \left[ \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \langle i|T_z^{(0)}|i \rangle \right] . \end{aligned} \quad (2.106)$$

Hierbei sind die ungestörten Energien  $\epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)}$  durch die Gleichung 2.59 gegeben und  $m_0^*$  bzw.  $g_0^*$  bezeichnen die entsprechenden Bandkantenwerte.  $T_z^{(0)}$  stellt den Beitrag der z-Richtung zum ungestörten (parabolischen) Operator der kinetischen Energie dar und  $\langle i|\dots|i \rangle$  einen Erwartungswert bezüglich des Subbandes  $i$ .

Obwohl die Nichtparabolizität absolut gesehen eine kleine Korrektur darstellt, hat sie in qualitativer Hinsicht deutliche Auswirkungen auf die dynamischen Leitfähigkeiten. Dies liegt daran, daß sie die im parabolischen System vorhandenen energetischen Entartungen der Einteilchen-Übergänge aufhebt. Besonders die Zyklotronresonanz sollte aufgrund ihrer Sensitivität auf die Bandstruktur davon experimentell sichtbar beeinflusst werden. Für die Intersubband-Resonanz hingegen spielt die Nichtparabolizität in der Regel nur eine untergeordnete Rolle. Die ZR-Übergangsenergien ergeben sich im nichtparabolischen Fall unter Berücksichtigung der Auswahlregeln aus der Beziehung 2.106 zu

$$\hbar\omega_c(i, n, \sigma) = \epsilon_{i,n+1,\sigma}^{(np)} - \epsilon_{i,n,\sigma}^{(np)} \approx \hbar\omega_c - 2\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_g^*} \left[ \hbar\omega_c(n+1) + \langle i|T_z^{(0)}|i \rangle \right] + \frac{\hbar\omega_c}{\Lambda^*} \mu_B B \sigma . \quad (2.107)$$

Als Indizierung eines ZR-Übergangs  $(i, n, \sigma) \rightarrow (i, n+1, \sigma)$  dient dabei dessen Ausgangsniveau. Demnach erwartet man für die Zyklotronresonanz je nach Lage der Fermi-Energie charakteristische Mehrfachlinienstrukturen. Man unterscheidet in diesem Zusammenhang dreierlei Aufspaltungsszenarien:

- Die ZR-Spinaufspaltung  $\Delta\hbar\omega_c^\sigma$  bezeichnet die Energiedifferenz zwischen zwei Zyklotronübergängen die sich im Ausgangsniveau lediglich in der Spinorientierung unterscheiden. Unabhängig von Landau- und Subband-Index ergibt sie sich zu

$$\Delta\hbar\omega_c^\sigma = \hbar\omega_c(i, n, -1/2) - \hbar\omega_c(i, n, +1/2) \approx g_1 \mu_B B^2, \quad g_1 = \frac{\hbar e}{m_0^* \Lambda^*} . \quad (2.108)$$

- Die ZR-Landau-Aufspaltung

$$\Delta\hbar\omega_c^n = \hbar\omega_c(i, n, \sigma) - \hbar\omega_c(i, n + 1, \sigma) \approx \frac{2}{\epsilon_g^*} \left( \frac{\hbar e}{m_0^*} \right)^2 B^2 \quad (2.109)$$

tritt zwischen Übergängen benachbarter Landau-Niveaus auf, die zum gleichen Subband und Spin gehören. Wie die Spinaufspaltung hängt auch sie nicht von den Indizes ab.

- Für den Fall, daß mehrere elektrische Subbänder besetzt sind, gibt die ZR-Subband-Aufspaltung

$$\Delta\hbar\omega_c^i = \hbar\omega_c(i, n, \sigma) - \hbar\omega_c(i + 1, n, \sigma) \approx \frac{2\hbar\omega_c}{\epsilon_g^*} \left( \langle i + 1 | T_z^{(0)} | i + 1 \rangle - \langle i | T_z^{(0)} | i \rangle \right) \quad (2.110)$$

die ZR-Energiedifferenz für zwei benachbarte Subbänder bei identischem Landau- und Spinindex an.

Bei der Beschreibung der Zyklotronresonanz ist es in der Regel gebräuchlich, die ZR-Resonanzenergien  $\hbar\omega_c(i, n, \sigma)$  in Form von Zyklotronmassen  $m_c(i, n, \sigma)$  gemäß

$$m_c(i, n, \sigma) = \frac{eB}{\omega_c(i, n, \sigma)} \approx m_0^* \left[ 1 + \frac{2\langle i | T_z^{(0)} | i \rangle}{\epsilon_g^*} + \frac{2\hbar\omega_c(n + 1)}{\epsilon_g^*} - \frac{\mu_B B \sigma}{\Lambda^*} \right] \quad (2.111)$$

zu interpretieren. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß in ihr Feinstrukturen besser aufgelöst werden können. Allerdings muß dabei beachtet werden, daß Zyklotronmassen stets für Energiedifferenzen stehen. Im elektrischen Quantengrenzfall ist nur das unterste Subband mit  $i = 0$  besetzt. Meist wird dann aus Gründen der Übersichtlichkeit der Subband-Index weggelassen. Für diesen Fall vereinfachen sich die Einteilchen-Zyklotronmassen auf

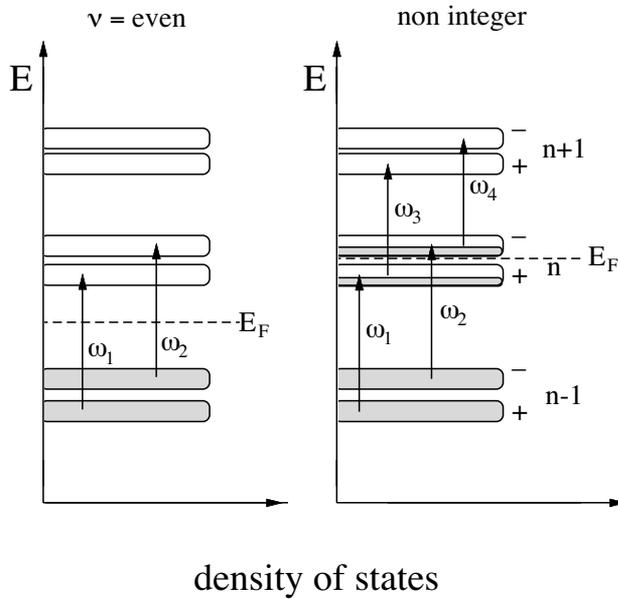
$$m_c(n, \sigma) = \frac{eB}{\omega_c(n, \sigma)} \approx m_s^* \left[ 1 + \frac{2\hbar\omega_{c,s}(n + 1)}{\epsilon_g^*} \right] - \gamma_1 B \sigma \quad (2.112)$$

Dies entspricht im wesentlichen der bekannten Form für Volumengase mit dem Unterschied, daß die Bandkantenmasse  $m_0^*$  durch die Masse an der Subband-Kante

$$m_s^* = m_0^* \left[ 1 + \frac{2\langle 0 | T_z^{(0)} | 0 \rangle}{\epsilon_g^*} \right] \quad (2.113)$$

zu substituieren ist. Entsprechend steht  $\omega_{c,s} = \frac{eB}{m_s^*}$  für die Zyklotronfrequenz am Subband-Boden. Der Spinaufspaltungsparameter  $\gamma_1$  ist eine Konstante und beträgt für GaAs  $\gamma_1 \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}_e\text{T}^{-1}$ . Gleichung 2.112 wird im weiteren zur experimentellen Auswertung der Zyklotronresonanzexperimente herangezogen. Die Parameter  $m_s$ ,  $\epsilon_g^*$  und  $\gamma_1$  (oder alternativ  $g_1$ ) werden dabei als anzupassende Parameter behandelt.

Obwohl die Linienbreiten der Zyklotronresonanz in hochbeweglichen Elektronengasen auf GaAs schmal genug sind, daß Aufspaltungen aufgrund der Nichtparabolizität auflösbar sein sollten, wurden diese bisher im Regime der Quanten-Hall-Effekte nicht beobachtet. An hochbeweglichen Volumengasen sowie extrem verdünnten Q2DEG hingegen treten sie auf [Bat93, Hu,95b, Hu,95a, Mic96]. Während in den Volumengasen das Einteilchen-Bild die Zyklotronresonanz sehr gut beschreibt, können in verdünnten Q2DEG die Spin- und die Landau-Aufspaltung nur unter Einbeziehung von Wechselwirkungseffekten verstanden werden. Anhand des Verschwindens der Aufspaltungen mit zunehmender Elektronendichte und der im verdünnten Regime gewonnenen Erkenntnisse wurde klar, daß die Elektron-Elektron-Wechselwirkung die zu erwartenden



**Abbildung 2.12:** Aktive Zyklotronresonanzübergänge in Abhängigkeit von der Fermi-Energie und dem Füllfaktor bei Spinartung. Für die Übergänge gilt: Je höher der Index, desto niedriger ist die Übergangsfrequenz.

Einteilchen-Resonanzen zu Kollektivmoden hybridisiert [Coo94]. Im Falle nur einer experimentell beobachtbaren Resonanz ist es plausibel und auch, wie später gezeigt wird, theoretisch begründbar, daß deren Lage das arithmetische Mittel über die mit den Übergangsstärken gewichteten Energien der aktiven Einteilchen-Resonanzen darstellt [Mic96]. Die Mittelungsvorschrift lautet auf die Zyklotronmasse  $\langle m_c \rangle$  übersetzt:

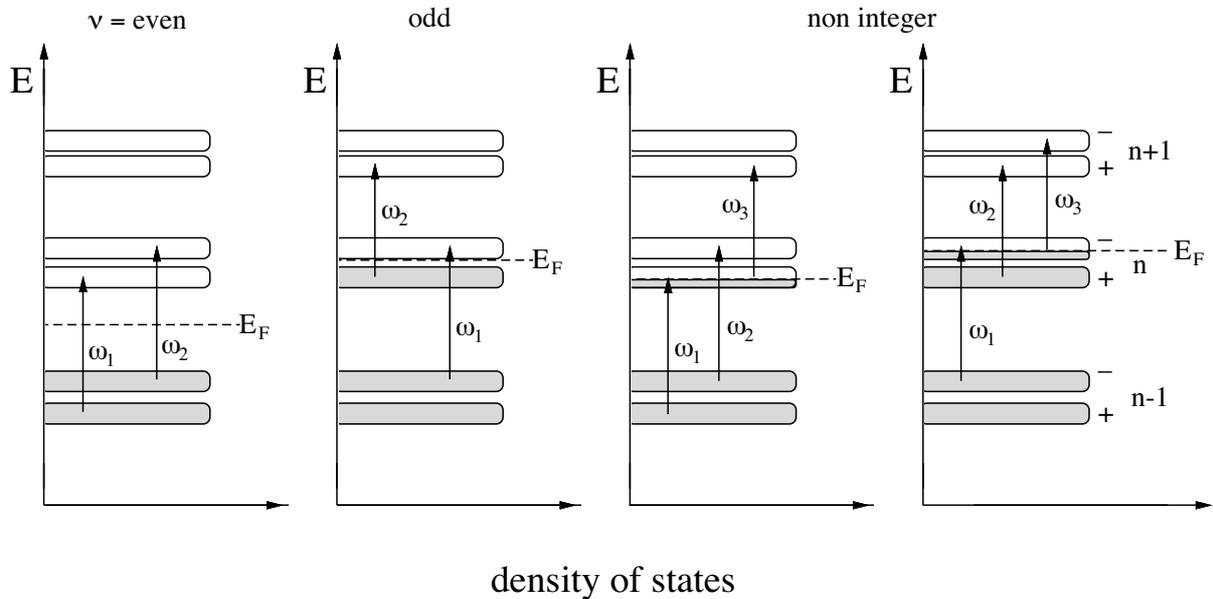
$$\frac{1}{\langle m_c \rangle} = \sum_{i,n,\sigma} \frac{f_{i,n,\sigma}}{m_c(i,n,\sigma)} . \quad (2.114)$$

Die Einteilchen-Oszillatorstärken

$$f_{i,n,\sigma} = (n+1) \frac{\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}}{\nu} \quad (2.115)$$

stellen darin die mit den Dipolmatrixelementen gewichteten relativen Besetzungsdifferenzen der an einem ZR-Übergang beteiligten Landau-Niveaus dar (siehe Gleichung 2.80).

Variiert man an einem Q2DEG konstanter Dichte das äußere Magnetfeld, so werden je nach Lage der Fermi-Energie im Landau-Schema Zyklotronübergänge aktiv, die mit dem Pauli-Ausschließungsprinzip verträglich sind. Die aktiven Übergänge hängen vom Füllfaktor  $\nu$  ab und durchlaufen mit der Fermi-Energie den Landau-Fächer. Dies ist in den Darstellungen 2.12 und 2.13 für den elektrischen Quantengrenzfall aufgezeigt. Die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die ZR-Übergänge sind in Form einer Massendarstellung in der Abbildung 2.14 illustriert. Die beiden Teilfiguren beschreiben darin die beiden Grenzszenarien, bei denen entweder der Spin a) gar nicht oder b) vollständig in den Niveaubesetzungen aufgelöst ist. Die charakteristische Auf-fächerung der ZR-Massen der einzelnen Übergänge (dünn gestrichelte Linien) ähnelt im wesentlichen einem verkippten und umskalierten Einteilchen-Landau-Fächer, der von der Masse an der Subband-Kante  $m_s$  ausgeht. Durch den kinetischen Energiebeitrag der Subband-Quantisierung ist  $m_s$  gegenüber der Bandkantenmasse  $m^*$  zu höheren Werten hin verschoben (siehe Gleichung 2.116). Im ersten Fall der Spin-Entartung sind bei jeweils geradzahligem Füllfaktoren  $\nu = 2(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  und im Quantengrenzfall  $\nu < 2$  exakt zwei sich energetisch nur um die Spinaufspaltung unterscheidende ZR-Übergänge mit  $m_c(n, \pm \frac{1}{2})$  aktiv. Diese Übergänge existieren aufgrund des Pauli-Prinzips innerhalb eines Füllfaktorregimes  $2n < \nu < 2(n+2)$  der Breite  $\Delta\nu = 4$ .



**Abbildung 2.13:** Aktive Zyklotronresonanzübergänge in Abhängigkeit von der Fermi-Energie und dem Füllfaktor bei vollständig aufgelöstem Spin. Für die Übergänge gilt: Je höher der Index, desto niedriger ist die Übergangsfrequenz.

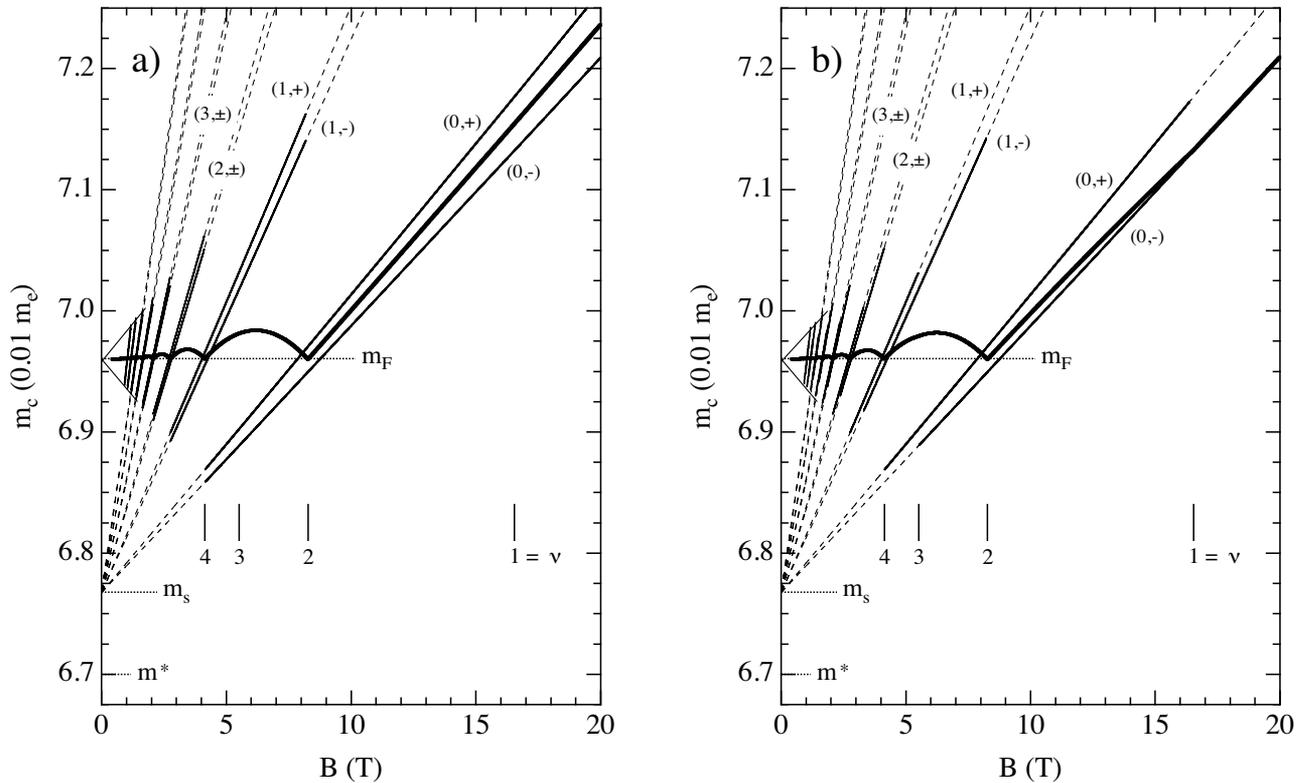
Generell führt dies, wie es in der Abbildung 2.12 schematisch aufgezeigt ist, dazu, daß für  $\nu > 2$  stets 4 und im magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 2$  sowie exakt geradzahlgigen Füllfaktoren jeweils zwei ZR-Übergänge gleichzeitig zur Zyklotronresonanz beitragen. Für abnehmende Magnetfelder wird die Abfolge der Übergänge immer dichter, wobei die überstrichenen Massenintervalle immer kleiner werden und schließlich für  $B = 0$  in die Masse an der Fermi-Energie

$$m_F = m_s^* + m_0^* \frac{2\epsilon_F(B=0)}{\epsilon_g^*} = m_0^* \left( 1 + \frac{2\langle i|T_z^{(0)}|i\rangle}{\epsilon_g^*} \right) + \frac{2\pi\hbar^2 N_S}{\epsilon_g^*} \quad (2.116)$$

einmünden. Die Nullfeld-Fermi-Energie  $\epsilon_F(B=0) = \frac{\pi\hbar^2 N_S}{m_0^*}$  wird hierbei vom Subband-Boden aus gemessen.

Unter Auflösung des Spins in den Besetzungen sind zusätzlich zu den geradzahlgigen auch die ungeradzahlgigen Füllfaktoren als scharfe Trennlinien ausgezeichnet, bei denen ein neuer ZR-Übergang hinzukommt, während gleichzeitig ein anderer verschwindet. Im Gegensatz zum spinentarteten Fall überdauern hier die Übergänge mit  $m_c(n, \pm\frac{1}{2})$  abhängig von der Spinorientierung Füllfaktorintervalle  $2n < \nu < 2n+3$ ,  $\sigma = +\frac{1}{2}$  bzw.  $2n+1 < \nu < 2(n+1)$ ,  $\sigma = -\frac{1}{2}$  mit jeweils der Breite  $\Delta\nu = 3$ . Dies führt dazu, daß für  $\nu > 2$  stets drei ZR-Übergänge aktiv sind. Bei exakt ganzzahlgigen Füllfaktoren (ausgenommen  $\nu = 1$ ) sind es jeweils zwei. Mit Erreichen des magnetischen Quantengrenzfalls  $\nu < 2$  bleiben zwei und für  $\nu < 1$  schließlich nur ein einziger Übergang übrig.

Berechnet man für die beiden behandelten Grenzfälle die mittlere Zyklotronmasse, so erhält man Variationen mit dem Füllfaktor, die außerhalb des Quantengrenzfalls kaum voneinander unterscheidbar sind. Bei den geradzahlgigen Füllfaktoren  $\nu = 2, 4, 6, \dots$  trifft die mittlere Masse in beiden Szenarien die Masse an der Fermi-Energie  $m_F$ . Ungeradzahlgige Füllfaktoren  $\nu = 1, 3, 5, \dots$  sind, auch wenn der Spin in den Niveaubesetzungen



**Abbildung 2.14:** Fächer der Zyklotronmassen im nichtparabolischen Q2DEG. Dargestellt sind jeweils die aktiven Einteilchen-Massen  $m_c(0, n, \sigma)$  (durchgezogen) und die gemittelte Zyklotronmasse  $\langle m_c \rangle$  (dick durchgezogen) für eine Elektronendichte von  $N_S = 4.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  unter der Annahme a) kompletter Spinartung und b) vollständiger Auflösung des Spins in den Niveaubesetzungen. Die gepunkteten und gestrichelten Linien markieren die Einteilchen-Referenzmassen. Der Berechnung liegen folgende Parameter zugrunde:  $m_0^* = 0.0670 m_e$ ,  $\epsilon_g^* = 1000 \text{ meV}$ ,  $g_1 = 0.010(5) \text{ T}^{-1}$ ,  $\langle 0|T_z^{(0)}|0 \rangle = 5 \text{ meV}$  und  $T = 0 \text{ K}$ .

setzungen aufgelöst wird, aufgrund der Kleinheit der Spinaufspaltung im Vergleich zur Landau-Aufspaltung (Größenverhältnis ungefähr 1 : 7) nicht erkennbar ausgezeichnet. Die zwischen ganzzahligen Füllfaktoren durchlaufenen bogenartigen Verläufe entsprechen Parabelausschnitten. Diese werden mit abnehmendem Füllfaktor zunehmend ausgeprägter und münden schließlich im Quantengrenzfall in einen linearen Anstieg ein. Dieser wird durch die linear ansteigenden ZR-Massen der beiden Spineinstellungen des  $n = 0$ -Niveaus begrenzt. Bei aufgelöstem Spin schließlich folgt die mittlere Masse unterhalb  $\nu < 1$  der ZR-Masse des nunmehr einzig aktiven Übergangs.

## 2.7 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode zur Beschreibung von Bandstruktureffekten

Eine phänomenologische Behandlung der Leitungsband-Nichtparabolizität und ihres Einflusses auf die Einzelteilchen-Zyklotronresonanzen wurde im vorausgehenden Abschnitt vorgestellt. In diesem Abschnitt wird eine fundierte Begründung der phänomenologischen Beschreibung im Rahmen der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode gegeben.

Der Ansatz der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode beginnt mit der Schrödinger-Gleichung für ein Kristallelektron [Ash76]

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + V_{lattice}(\vec{r}) + \frac{\hbar}{4m_e^2 c^2} \left( \vec{\sigma} \times \vec{\nabla} V_{lattice}(\vec{r}) \right) \vec{p} \right] \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) \quad (2.117)$$

in einem streng gitterperiodischen Potential  $V_{lattice}(\vec{r})$  unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung. Darin stehen  $\vec{p}$  für den Impulsoperator,  $m_e$  für die freie Elektronenmasse und  $\vec{\sigma}$  für den Vektor der Pauli-Spinmatrizen. Gemäß dem Blochschen Theorem gehorchen die Eigenfunktionen  $\psi(\vec{r})$  der Form

$$\psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \quad , \quad (2.118)$$

mit dem langsam veränderlichen Ebene-Welle-Anteil und den räumlich schnell veränderlichen und gitterperiodischen Blochfunktionen  $u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$ , die durch den Bandindex  $n$  (Spin implizit enthalten) und den Wellenvektor  $\vec{k}$  charakterisiert sind [Ash76]. Die Blochfunktionen bilden für jedes  $\vec{k}$  einen kompletten Satz von Basiszuständen. Daher können die Funktionen zu einem beliebigen  $\vec{k}$  gemäß

$$u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{n'} c_{n',n}(\vec{k} - \vec{k}_0) u_{n',\vec{k}_0}(\vec{r}) \quad (2.119)$$

nach denen eines Aufpunktes  $\vec{k}_0$  dargestellt werden. Die  $c_{n',n}(\vec{k} - \vec{k}_0)$  bezeichnen die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten. Dieser Ansatz geht im wesentlichen auf Luttinger und Kohn zurück [Lut55], die das Ziel verfolgten, die bis dahin gängige Effektivmassenäherung auf entartete Bänder zu erweitern. Setzt man diese Darstellung in die Kristall-Schrödinger-Gleichung 2.117 ein und nutzt man die Beziehung  $\vec{p} \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r})(\hbar\vec{k} + \vec{p})$ ,  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$  aus, so erhält man die zur Schrödinger-Gleichung 2.117 äquivalente Matrixgleichung im Bänderraum

$$\sum_{n'} \left\{ \left[ \epsilon_{n'}(\vec{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2m_e} (\vec{k}^2 - \vec{k}_0^2) \right] \delta_{n,n'} + \frac{\hbar^2}{2m_e} (\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{\Pi}_{n,n'} \right\} c_{n',n} = \epsilon_n(\vec{k}) c_{n,n} \quad . \quad (2.120)$$

Die  $\epsilon_{n'}(\vec{k}_0)$  bezeichnen darin die Bandkantenenergien und die Bandkanten-Matrixelemente sind durch

$$\vec{\Pi}_{n,n'} = \int_{\Omega} d^3r u_{n,\vec{k}_0}^*(\vec{r}) \left[ \vec{p} + \frac{\hbar}{4m_e^2 c^2} \left( \vec{\sigma} \times \vec{\nabla} V_{lattice}(\vec{r}) \right) \right] u_{n',\vec{k}_0}(\vec{r}) \quad (2.121)$$

definiert, mit  $\Omega$  als der Kristalleinheitszelle. Oftmals wird der Spin-Bahn-Beitrag in Gleichung 2.121 vernachlässigt und die Impuls-Matrixelemente werden dann entsprechend als  $\vec{P}_{n,n'}$  bezeichnet [Kan66]. Die Energielücken und die Bandkanten-Matrixelemente repräsentieren zusammengenommen das bislang nicht näher spezifizierte Kristallpotential vollständig. Der Kürze wegen ist hier und im weiteren die Abhängigkeit der Koeffizienten und Matrixelemente von  $\vec{k}$  und  $\vec{k}_0$  unterdrückt. Typischerweise spielen sich die für den Transport und die Optik von Halbleitern relevanten Prozesse in unmittelbarer Nähe der für den jeweiligen Halbleiter charakteristischen Bandextrema ab. Deren Lagen  $\vec{k}_i$  sind dabei generell als Punkte hoher Symmetrie in der Brillouin-Zone des jeweiligen Kristalls ausgezeichnet und die zugehörigen Bandabstände sind in der Regel

experimentell genau bekannt. Die Philosophie der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode beruht nun darauf, die an einem Bandextremum  $\vec{k}_0$  vorliegende Information entsprechend der Gleichung 2.120 auszunutzen, um die Eigenzustände an den Stellen  $\vec{k}$ , die eine nicht allzu große Entfernung  $|\vec{k} - \vec{k}_0|$  vom jeweiligen Extremum aufweisen, abzuleiten.

Nach Kane teilt man den Bänderraum in zwei Kategorien ein [Kan57, Kan66]. In der ersten Kategorie  $A$  befinden sich die interessierenden Bänder, die energetisch nahe bei der Fermi-Energie angesiedelt sind. Die zweite Kategorie  $B$  umfaßt die Fernbänder, die relativ gesehen hohe Abstände zu den Bändern aus  $A$  aufweisen und nicht von direkter Bedeutung sind. Im Rahmen der Kane-Modelle werden die Bänder in Satz  $A$  entsprechend der Gleichung 2.120 vollständig erfaßt, während die Zustände im Satz  $B$  lediglich gemäß einer Störungstheorie, die auf Löwdin zurückgeht [Loe51], zu Fernband-Renormierungen in der Ordnung  $\Delta k_\alpha \Delta k_\beta$ ,  $\Delta \vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$  innerhalb des Satzes  $A$  führen. Die Kane-Eigenwertgleichung für die Kategorie  $A$  lautet in allgemeiner Form

$$\epsilon_n(\vec{k}) c_{n',n} = \sum_{n'' \in A} \left\{ \left[ \epsilon_{n''}(\vec{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2m_e} (\vec{k}^2 - \vec{k}_0^2) \right] \delta_{n',n''} + \frac{\hbar^2}{2m_e} (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{\Pi}_{n',n''} + V_{n',n''}(\vec{k} - \vec{k}_0, \epsilon_n(\vec{k})) \right\} c_{n'',n} . \quad (2.122)$$

Die Fernbandkopplungen sind in dem Ausdruck

$$V_{n',n''}(\Delta \vec{k}, \epsilon) = \left( \frac{\hbar}{m_e} \right)^2 \sum_{\nu \in B} \frac{(\Delta \vec{k} \cdot \vec{\Pi}_{n',\nu}) (\Delta \vec{k} \cdot \vec{\Pi}_{\nu,n''})}{\epsilon - \epsilon_\nu(\vec{k}_0)} \quad (2.123)$$

zusammengefaßt. Man beachte hierbei, daß die Fernbandbeiträge in Gleichung 2.122 selbst wiederum von den zu bestimmenden Eigenwerten  $\epsilon_n(\vec{k})$  abhängen. Zur Umgehung der damit verbundenen Komplikationen reicht es im Falle großer Fernbandabstände jedoch in der Regel aus in der Gleichung 2.122 für  $\epsilon_n(\vec{k})$  den Mittelwert der Bandkantenenergien  $(\epsilon_{n'}(\vec{k}_0) + \epsilon_{n''}(\vec{k}_0)) / 2$  einzusetzen. Im Satz  $A$  gehen neben den Bandlücken noch explizit die Bandkanten-Matrixelemente  $\Pi_{n,n'}(\vec{k}_0)$  bzw.  $P_{n,n'}(\vec{k}_0)$  in die Kane-Matrix ein. Diese sind in der Regel ebenfalls aus Experimenten bekannt oder müssen durch Anpassung bestimmt werden. Im folgenden wird speziell das 3-Band-Modell behandelt, das die wesentlichen Elemente der Bandstruktur schmallückiger kubischer Halbleiter gut beschreibt und in einer effektiven Form auf GaAs anwendbar ist.

### 2.7.1 Dreiband-Modell und die Enveloppen-Näherung

Die Leitungs- und Valenzbänder aller kubischen III-V- und II-VI-Halbleiter werden am  $\Gamma$ -Punkt der Brillouin-Zone durch das in der Abbildung 2.15 skizzierte Bandschema repräsentiert [Yu 96]. Es besteht aus dem isolierten  $\Gamma_6$ -Leitungsband und der Valenzbandstruktur mit den zwei am  $\Gamma$ -Punkt entarteten  $\Gamma_8$ -Valenzbändern und dem infolge der Spin-Bahn-Wechselwirkung abgespaltenen  $\Gamma_7$ -Valenzband. Die Bänder sind hierbei entsprechend der tetraedrischen Punktgruppe  $T_d$  durch die irreduziblen Darstellungen  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_8$  und  $\Gamma_7$  gekennzeichnet [Kos63]. Als Basen für die irreduziblen Darstellungen dienen die 4 jeweils 2-fach entarteten Bandkantenzustände  $|L, J, M_J\rangle = \left\{ \left| 0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \left| 1, \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \left| 1, \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2} \right\rangle, \left| 1, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle \right\}$ , wobei die Quantenzahlen  $L$ ,  $J$  und  $M_J$  für den Bahndrehimpuls, den Gesamtdrehimpuls und dessen z-Komponente stehen. Die Bahndrehimpulse  $L = 0$  und  $L = 1$  stammen dabei von den atomaren, für die chemische Bindung verantwortlichen s- und p-Atomorbitalen. Die reinen Bahndrehimpulszustände  $|L, M_L\rangle = \{|0, 0\rangle, |1, +1\rangle, |1, -1\rangle, |1, 0\rangle\}$  werden im folgenden als  $\left\{ |S\rangle, \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY) \right\rangle, \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY) \right\rangle, |Z\rangle \right\}$  bezeichnet und gehen direkt auf die atomaren Or-

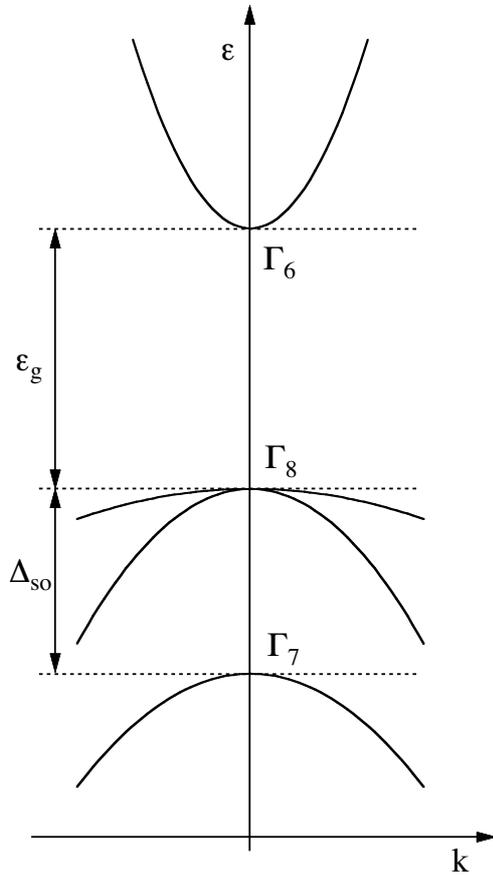


Abbildung 2.15: Schematische Bandstruktur kubischer Halbleiter.

bitale  $\{|S\rangle, |X\rangle, |Y\rangle, |Z\rangle\}$  zurück. Mit ihnen nehmen die Bandkantenzustände  $|L, J, M_J\rangle$  die in der Tabelle 2.1 angegebene Gestalt an [Bra83, Bas88].

Läßt man die Fernbandbeiträge unberücksichtigt, so bekommt man mit den Bandkantenzuständen und ihrer Anordnung entsprechend der Tabelle für die Kane-Matrix  $\mathbf{h}^{3B}(\vec{k})$  des 3-Band-Modells [Bas88]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & \tilde{P}k_+ & -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_z & -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_- & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_z & -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_- \\ 0 & \epsilon_0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_+ & -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_z & \tilde{P}k_- & \sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_+ & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_z \\ \tilde{P}k_- & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_z & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_- & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_+ & -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_z & 0 & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}k_+ & 0 & 0 & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_z & \sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_- & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g - \Delta_{so} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{P}k_+ & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{P}k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_0 - \epsilon_g - \Delta_{so} \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Das darin einzig auftretende Impuls-Matrixelement  $\tilde{P} = \hbar P$  ist reell und durch

$$P = -\frac{i}{m_e} \langle S | p_x | X \rangle = -\frac{i}{m_e} \langle S | p_y | Y \rangle = -\frac{i}{m_e} \langle S | p_z | Z \rangle \quad (2.125)$$

Symmetrie	$ L, J, M_J\rangle$	$u_{L,J,M_J}$
$\Gamma_6$	$ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$	$iS \uparrow$
$\Gamma_6$	$ 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$iS \downarrow$
$\Gamma_8$	$ 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY) \uparrow$
$\Gamma_8$	$ 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(X + iY) \downarrow - 2Z \uparrow]$
$\Gamma_8$	$ 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}[(X - iY) \uparrow + 2Z \downarrow]$
$\Gamma_8$	$ 1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY) \downarrow$
$\Gamma_7$	$ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}[(X + iY) \downarrow + Z \uparrow]$
$\Gamma_7$	$ 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}[-(X - iY) \uparrow + Z \downarrow]$

**Tabelle 2.1:** Bandkantenfunktionen kubischer Halbleiter am  $\Gamma$ -Punkt. Die Pfeile stehen darin für die Spinorientierung.

gegeben. Alle weiteren verschwinden aus Symmetriegründen. Die freie kinetische Energie  $\frac{\hbar^2}{2m_e}k^2$  ist durch  $\epsilon_0$  abgekürzt und kann in vielen Fällen vernachlässigt werden. Die Symbole  $\epsilon_g = \epsilon_{\Gamma_6} - \epsilon_{\Gamma_8}$  und  $\Delta_{so} = \epsilon_{\Gamma_8} - \epsilon_{\Gamma_7}$  stehen für die fundamentale Lücke bzw. die Spin-Bahn-Aufspaltung des Valenzbandes und  $k_{\pm}$  ist durch  $k_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_x \pm ik_y)$  definiert. Die gesuchten Bandverläufe  $\epsilon_{K=1,\dots,8}(\vec{k})$  ergeben sich schließlich durch Lösen des Eigenwertproblems

$$\left[ \mathbf{h}^{3B}(\vec{k}) - \mathbf{I}\epsilon(\vec{k}) \right] \mathbf{f}(\vec{k}) = 0, \quad (2.126)$$

mit dem 8-komponentigen Koeffizientenvektor  $\mathbf{f}(\vec{k})$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ .

Das hier dargelegte Dreiband-Modell beschreibt die wesentlichen Züge der Bandverläufe von Schmalbandhalbleitern wie InAs und InSb gut. Um auch die Bandstrukturen der Halbleiter GaAs und AlAs mit mittelgroßer und großer Bandlücke quantitativ wiederzugeben müssen neben Fernbandtermen [Wei81, Bas88] weitere Bänder in die Betrachtung mit einbezogen werden [Pfe90, Pfe96]. Bandstrukturmodelle, die über das Dreiband-Modell hinausgehen, weisen allerdings eine derart hohe Anzahl an Termen und in der Regel nicht näher bekannten Parametern auf, daß ihre Handhabbarkeit und Brauchbarkeit eingeschränkt ist. Im weiteren wird deshalb das Dreiband-Modell als effektives Modell benutzt, wobei die Parameter  $\epsilon_g$ ,  $\Delta_{so}$  und  $\epsilon_P = 2m_e P^2$  aus Anpassungen bestimmt werden. Effektiv werden hierbei sämtliche Bänder mit  $\Gamma_8$ - bzw.  $\Gamma_7$ -Symmetrie zu jeweils einem effektiven  $\Gamma_8$ - bzw.  $\Gamma_7$ -Valenzband zusammengefaßt. Diese effektiven Valenzbänder besitzen zwar keine reale physikalische Bedeutung mehr, liefern aber als virtuelle Hilfsbänder in Anbetracht der geringen Anzahl an Parametern eine bessere Beschreibung des  $\Gamma_6$ -Leitungsbandes, als es die realen Valenzbänder mit den entsprechenden Fernbandbeiträgen gestatten. Da die realen Valenzbänder für Experimente, in die lediglich Intradbandprozesse involviert sind, keine direkte Rolle spielen, ist eine solche Betrachtungsweise gerechtfertigt.

In Gegenwart von auf der Skala von Gitterkonstanten räumlich langsam veränderlichen Potentialen  $V(\vec{r})$  und Vektorpotentialen  $\vec{A}(\vec{r})$  sind gemäß den Peierls-Substitutionen der Wellenzahlvektor  $\hbar \vec{k}$  durch den Impulsoperator  $-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r})$ , die Bandkantenenergien  $\epsilon_{\Gamma}$  durch  $\epsilon_{\Gamma} + V(\vec{r})$  und die ebenen Wellen in der Bloch-Form 2.118 durch die Enveloppenfunktionen  $\mathbf{f}(\vec{r})$  zu ersetzen. Durch ein externes Magnetfeld kommt noch ein Zeeman-Beitrag hinzu, der jedoch hier nicht explizit berücksichtigt ist. Die zu lösende Enveloppengleichung

für die Enveloppeneigenfunktionen und die zugehörigen Energien  $\epsilon$  lautet dann [Bas88]

$$\left[ \mathbf{h}^{3B} \left( -i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}) \right) - \mathbf{I} (\epsilon - V(\vec{r})) \right] \mathbf{f}(\vec{r}) = 0 . \quad (2.127)$$

Bei Halbleiterschichtsystemen ist prinzipiell jede Schicht  $l$  durch ihren eigenen spezifischen Satz von Bandkantenfunktionen  $u_{n,\vec{k}_0}^{(l)}(\vec{r})$  charakterisiert. Aus Experimenten geht jedoch hervor, daß das fundamentale Impulsmatrixelement  $\epsilon_P$  für nahezu sämtliche III-V-Halbleiter einen universellen Wert von  $\epsilon_P \approx 22$  eV aufweist. Diese Universalität bildet die Basis für die Annahme, daß die Bandkantenfunktionen zumindest für gitterangepaßte Halbleiter wie GaAs und AlAs als identisch angesehen werden können. In der Näherung einheitlicher Bandkantenzustände ist die Enveloppen-Näherung direkt auf den Fall von Halbleiterschichtsystemen ausdehnbar [Bur92, Bas88]. Dabei werden unter der Voraussetzung einheitlicher Impuls-Matrixelemente die Bandkantenverläufe  $\epsilon_{\Gamma_\gamma}$ ,  $\gamma = 6, 7, 8$  in der Kane-Matrix selbst ortsabhängig entsprechend

$$\epsilon_{\Gamma_\gamma}(z) = \epsilon_{\Gamma_\gamma}^{(l)} \Theta_l(z) \quad , \quad \Theta_l(z) = \begin{cases} 1, & z \in \text{Schicht } l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.128)$$

Die Leitungsbandkante  $\epsilon_{\Gamma_6}$  in der Schicht des Q2DEG bildet den Energiebezugspunkt und wird deshalb dort auf Null gesetzt.

Für ein Halbleiterschichtsystem im senkrechten Magnetfeld (parallel zur Wachstumsrichtung  $z$ ) führt die explizite Auflösung der Gleichung 2.127 schließlich zu den gekoppelten Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon f_{1/2}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \left[ p_z M^{-1}(\epsilon - V(\vec{r}), z) p_z + \{ \pi_- | M^{-1}(\epsilon - V(\vec{r}), z) | \pi_+ \} \right] f_{1/2}(\vec{r}) \\ &+ \left[ (\epsilon_{\Gamma_6}(z) - \epsilon_{\Gamma_6}(0)) + V(\vec{r}) \pm \frac{1}{4m_e} [\pi_- | G(\epsilon - V(\vec{r}), z) | \pi_+] \right] f_{1/2}(\vec{r}) \\ &+ [\pi_\mp | K(\epsilon - V(\vec{r}), z) | \pi_z] f_{2/1}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.129)$$

für die beiden Leitungsbandenveloppen  $f_1(\vec{r}) \equiv f_{|\uparrow\downarrow\rangle}(\vec{r})$  und  $f_2(\vec{r}) \equiv f_{|\downarrow\uparrow\rangle}(\vec{r})$ . Darin repräsentiert der erste Beitrag die kinetische Energie, mit der energie- und ortsabhängigen reziproken Masse

$$M^{-1}(E, z) = \frac{1}{m_e} + \frac{\epsilon_P}{3m_e} \left[ \frac{2}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z)} + \frac{1}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z)} \right] \quad (2.130)$$

und der Definition  $\{ \pi_\alpha | M^{-1} | \pi_\beta \} = \pi_\alpha M^{-1} \pi_\beta + \pi_\beta M^{-1} \pi_\alpha$  für den Antikommutator. Hierbei ist das senkrechte Magnetfeld implizit in Form der Kommutatorrelation  $[\pi_-, \pi_+] = \frac{\hbar^2}{l_m^2} = \hbar e B$  für die kanonischen Impulse  $\pi_\pm$  der x- und y-Bewegung berücksichtigt. Als Energiebezug ist hier die Leitungsbandkante  $\epsilon_{\Gamma_6}(0)$  im Trogmaterial (GaAs) bei  $z = 0$  gewählt. Der Ausdruck  $\epsilon_{\Gamma_6}(z) - \epsilon_{\Gamma_6}(0)$  repräsentiert den Ortsverlauf der Leitungsbandkante und kann mit dem bereits eingeführten Barrierenpotential  $V_b(z)$  der Schichtstruktur identifiziert werden. Das Potential  $V(\vec{r})$  ist elektrostatischer Natur und rührt von den Raumladungen und Störstellen her. Der vierte Beitrag ist nur in Gegenwart eines Magnetfeldes vorhanden und entspricht dem Zeeman-Term. Die darin enthaltene Funktion  $G(E, z)$  ist durch

$$G(E, z) = 2 - \frac{2\epsilon_P}{3} \left[ \frac{1}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z)} - \frac{1}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z)} \right] \quad (2.131)$$

definiert und führt bei vorhandener Spin-Bahn-Kopplung zu einer Renormierung des Leitungsband-g-Faktors ( $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}$ ). Die Definition für den hier eingeführten Kommutator lautet  $[\pi_\alpha | M^{-1} | \pi_\beta] = \pi_\alpha M^{-1} \pi_\beta - \pi_\beta M^{-1} \pi_\alpha$ . Der letzte Term schließlich verkoppelt die beiden Leitungsband-Enveloppen und entspricht der effektiven Spin-Bahn-Kopplung für das Leitungsband. Die darin auftretende Funktion  $K(E, z)$  lautet explizit

$$K(E, z) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon_P}{2m_e} \left[ \frac{1}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z)} - \frac{1}{E + \epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z)} \right]. \quad (2.132)$$

In GaAs jedoch spielt dieser Beitrag keine bedeutende Rolle und wird daher in der Regel und auch im folgenden vernachlässigt.

## 2.7.2 Nichtparabolizität für ein Q2DEG im senkrechten Magnetfeld

Für ein Q2DEG im senkrechten Magnetfeld bekommt man unter Vernachlässigung des Spin-Bahn-Beitrags aus der Form 2.129 die Enveloppengleichung

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,n,\sigma} \psi_{i,n,m,\sigma}(\vec{r}) = & \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} M^{-1}(E_{i,n,\sigma}(z), z) \frac{\partial}{\partial z} + \hbar e B M^{-1}(E_{i,n,\sigma}(z), z) \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + V_b(z) + V_{sc}(z) + \mu_B G(E_{i,n,\sigma}(z), z) B \sigma \right] \psi_{i,n,m,\sigma}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Hierin sind im selbstkonsistenten Potential  $V_{sc}(z)$  sämtliche Beiträge, die neben dem Barrierenpotential  $V_b(z)$  zum Einschluß in z-Richtung beitragen, zusammengefaßt.  $\hat{a}^+$  und  $\hat{a}$  stehen für die Landau-Leiteroperatoren und die Größe  $E_{i,n,\sigma}(z)$  für  $\epsilon_{i,n,\sigma} - V_{sc}(z)$ . Die  $\Gamma_6$ -Leitungsbandenveloppen  $f_1 \equiv \psi_{i,n,m,1/2}$  und  $f_2 \equiv \psi_{i,n,m,-1/2}$  sind hierbei bereits entsprechend der Symmetrie des Q2DEG durch die Subband- und Landau-Quantenzahlen (symmetrische Eichung)  $i$  und  $n, m$ , sowie den Spin  $\sigma$  gekennzeichnet.

Für GaAs mit  $E = \epsilon - V_{sc}(z) \ll \epsilon_{\Gamma_7}, \epsilon_{\Gamma_8}$  stellt die Nichtparabolizität lediglich eine Korrektur dar. Die energieabhängige reziproke Masse  $M^{-1}(E, z)$  und der energieabhängige g-Faktor  $G(E, z)$  können deshalb in guter Näherung durch

$$M^{-1}(E, z) \approx M^{-1}(0, z) + \left. \frac{dM^{-1}(E, z)}{dE} \right|_{E=0} E \quad (2.134)$$

und

$$G(E, z) \approx G(0, z) + \left. \frac{dG(E, z)}{dE} \right|_{E=0} E \quad (2.135)$$

approximiert werden. Mit den Abkürzungen und Substitutionen

$$\frac{1}{m_0^*(z)} = M^{-1}(0, z) = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{3m_e} \left[ \frac{2\epsilon_P}{\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z)} + \frac{\epsilon_P}{\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z)} \right], \quad (2.136)$$

$$g_0^*(z) = G(0, z) + L(0, z) = 2 + L(0, z) - \frac{2}{3} \left[ \frac{\epsilon_P}{\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z)} - \frac{\epsilon_P}{\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z)} \right], \quad (2.137)$$

$$\frac{1}{\epsilon_g^*(z)} = -m_0^*(z) \left. \frac{dM^{-1}(E, z)}{dE} \right|_{E=0} = \frac{m_0^*(z)}{3m_e} \left[ \frac{2\epsilon_P}{(\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z))^2} + \frac{\epsilon_P}{(\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z))^2} \right], \quad (2.138)$$

$$\frac{1}{\Lambda^*(z)} = \frac{dG(E, z)}{dE} \Big|_{E=0} = \frac{dL(E, z)}{dE} \Big|_{E=0} + \frac{2}{3} \left[ \frac{\epsilon_P}{(\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_8}(z))^2} - \frac{\epsilon_P}{(\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_7}(z))^2} \right] \quad (2.139)$$

werden die im vorausgehenden Abschnitt eingeführten effektiven Bandstrukturparameter  $m_0^*(z)$ ,  $g_0^*(z)$ ,  $\epsilon_g^*(z)$  und  $\Lambda^*(z)$  definiert. Die Leitungsbandkante  $\epsilon_{\Gamma_6}(0)$  des Trogmaterials bei  $z = 0$  legt den Energiebezugspunkt fest. Die für den g-Faktor zusätzlich eingeführte Korrekturfunktion  $L(E, z)$  trägt Fernbandkopplungen mit den höheren Leitungsbändern Rechnung. Behandelt man die Beiträge, die zu energieabhängigen Korrekturen der effektiven Masse und des g-Faktors führen, in erster Ordnung der Störungstheorie, so gelangt man zu den gegenüber der Effektivmassennäherung  $[\epsilon_{\Gamma_6}(0) - \epsilon_{\Gamma_{8/7}}(z) \rightarrow \infty]$  modifizierten Energien

$$\epsilon_{i,n,\sigma}^{(np)} \approx \epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - \langle i | \left[ p_z \frac{\epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - V_{sc}(z)}{2m_0^*(z)\epsilon_g^*(z)} p_z + \hbar e B \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - V_{sc}(z)}{m_0^*(z)\epsilon_g^*(z)} - \mu_B B \sigma \frac{\epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - V_{sc}(z)}{\Lambda^*(z)} \right] | i \rangle . \quad (2.140)$$

Bei Einfachheterostrukturen und nicht zu engen Trögen kann für GaAs-Systeme das Eindringen in die Barrieren und damit die z-Abhängigkeit für die Bandstrukturparameter  $m_0^*(z) \approx m_0^*(0)$ ,  $\epsilon_g^*(z) \approx \epsilon_g^*(0)$ ,  $g_0^*(z) \approx g_0^*(0)$  und  $\Lambda^*(z) \approx \Lambda^*(0)$  vernachlässigt werden. Mit der weiteren Näherung  $\langle i | p_z \frac{V_{sc}(z)}{2m_0^*} p_z | i \rangle \approx \langle T_z^{(0)} \rangle_i \langle i | V_{sc}(z) | i \rangle$  und dem Erwartungswert  $T_{i,n}^{(0)} = \langle i | \epsilon_{i,n,\sigma}^{(0)} - V_{sc}(z) | i \rangle = \langle T_z^{(0)} \rangle_i + \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$  bekommt man schließlich die in Gleichung 2.106 angegebene Beziehung als Endergebnis.

Als Erweiterung zum Modell aus Abschnitt 2.6 bekommen die zunächst als phänomenologisch eingeführten Bandstrukturparameter durch das  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Modell einen Bezug zu den experimentell genau bekannten Bandlücken  $\epsilon_g = \epsilon_{\Gamma_6} - \epsilon_{\Gamma_8}$  und  $\Delta_{so} = \epsilon_{\Gamma_8} - \epsilon_{\Gamma_7}$  sowie dem Kane-Matrixelement  $\epsilon_P$ . Bis auf den g-Faktor, für den in der Literatur  $g_0^* = -0.44$  angegeben wird, sind sämtliche Parameter  $m_0^*$ ,  $\epsilon_g^*$  sowie  $\Lambda^*$  prinzipiell durch Zyklotronresonanzuntersuchungen zugänglich. Durch die Gleichungen

$$\frac{1}{m_0^*} = \frac{1}{m_e} + \epsilon_P \frac{1}{3m_e} \left[ \frac{2}{\epsilon_g} + \frac{1}{\epsilon_g + \Delta_{so}} \right] , \quad (2.141)$$

$$g_0^* = 2 + L - \epsilon_P \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\epsilon_g} - \frac{1}{\epsilon_g + \Delta_{so}} \right] , \quad (2.142)$$

$$\frac{1}{\epsilon_g^*} = \epsilon_P \frac{m_0^*}{3m_e} \left[ \frac{2}{\epsilon_g^2} + \frac{1}{(\epsilon_g + \Delta_{so})^2} \right] , \quad (2.143)$$

$$\frac{1}{\Lambda^*} = L' + \epsilon_P \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\epsilon_g^2} - \frac{1}{(\epsilon_g + \Delta_{so})^2} \right] \quad (2.144)$$

werden diese Parameter mit den (eentlichen) fundamentalen Bandstrukturparametern verknüpft. In der Literatur werden für die Energielücken von GaAs die Werte

$$\epsilon_g = 1.519 \text{ eV} , \quad \Delta_{so} = 0.341 \text{ eV}$$

angegeben [Mad87]. Die Beschreibung der experimentellen Bandkantenmasse  $m_0^* = 0.066 m_e$  mit dem Dreiband-Modell bedeutet ein Kane-Matrixelement  $\epsilon_P = 22.7 \text{ eV}$ . Setzt man diese 3 Werte in die Gleichungen 2.141 bis 2.144 ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned} m_0^* &= 0.066 m_e \quad [= 0.066 m_e] , & g_0^* &= 2 + L - 1.83 \quad [= -0.44] , \\ \epsilon_g^* &= 1.75 \text{ eV} \quad [= 0.9 - 1.5 \text{ eV}] , & \Lambda^* &= L' + 0.46 \text{ eV} \quad [= 0.17 \text{ eV}] . \end{aligned} \quad (2.145)$$

Eckig geklammert angegeben sind hierin als Referenz die experimentell ausgewerteten Parameter, die aus Literaturangaben verfügbar sind [Lom85, Hop87, Dob88, Bat93]. Man entnimmt, daß die Masse an der Leitungsbandkante durch das Dreiband-Modell korrekt beschrieben wird. Dies liegt nicht zuletzt daran, daß das Kane-Matrixelement  $\epsilon_P$  entsprechend angepaßt wurde. Für die effektive Energielücke streuen die Literaturwerte allerdings stark. Dies ist auf die Polaron-Kopplung und deren probenspezifische Ausprägung zurückzuführen. Diese verstärkt die Nichtparabolizität und führt zu kleineren Werten für  $\epsilon_g^*$ . Bei sorgfältiger Korrektur des Polaron-Beitrags ergeben sich Werte, die Nahe bei der Vorhersage liegen [Pee92]. Der g-Faktor an der Bandkante erfordert eine Fernbandkorrektur von  $L = -0.61$ , die vergleichbar mit dem Bandkantenwert  $g_0^* = -0.44$  ist und auf die Relevanz der höheren  $\Gamma_7$ - und  $\Gamma_8$ -Leitungsbänder hindeutet. Dieser Befund spiegelt sich in noch stärkerem Maße im Parameter  $\Lambda^*$  wider. Der Fernbandbeitrag von  $L' = -0.29$  eV ist hier vom Betrag mit dem des Dreiband-Modells vergleichbar und kompensiert diesen weitgehend. Eine korrekte Beschreibung der Bandstruktur anhand der Bandlücken erfordert die Berücksichtigung der höheren Leitungsbänder im Rahmen eines Fünfband- oder höheren Modells [Bra85, Pfe90, Pfe96]. Jedoch nimmt mit dem Rechenaufwand bei einer solchen Beschreibung auch die Anzahl an Parametern rasch und zunehmend schwieriger überschaubar zu. Insgesamt gestattet das Dreiband-Modell bei Halbleitern mit kleiner und mittelgroßer Lücke eine nützliche Beschreibung der Bandstruktureinflüsse. Es ermöglicht insbesondere eine Abschätzung der zu erwartenden Nichtparabolizität aufgrund der Bandstruktur ( $\epsilon_g^*$ ) und deren Abgrenzung gegenüber der Nichtparabolizität infolge der Polaron-Kopplung. Experimentell sind die beiden Beiträge nur schwer zu trennen, da speziell die Polaron-Effekte durch Vielteilchen-Einflüsse proben- und dichteabhängig modifiziert werden. Das Zusammenwirken von Bandstruktur und Polaron-Kopplung wird im Abschnitt 4.3.2 noch ausführlich behandelt.



## Kapitel 3

# Phononen und Elektron-Phonon-Kopplung quasi-zweidimensionaler Elektronengase in GaAs

In polaren Kristallen wie GaAs und AlAs oder Schichtsystemen, die aus polaren Kristallen bestehen, weist das Gitter spezielle longitudinale Schwingungsformen auf, die eine makroskopische elektrische Polarisation tragen. Ein im Kristall oder Schichtsystem eingebettetes Elektronengas koppelt an diese Polarisationsmoden über zwei unterschiedliche Mechanismen an:

1. Die Plasmon-Phonon-Wechselwirkung beruht darauf, daß eine longitudinale Plasmaschwingung über ihr elektrisches Feld elektrodynamisch mit der Polarisation der polaren Gittermoden in Wechselwirkung tritt. Liegen die Energien von Plasma- und Gittermoden nahe beieinander, so bilden sie im klassischen Bild ein System gekoppelter Oszillatoren. Dessen Eigenmoden stellen Mischmoden aus Plasmonen und Phononen dar und werden deshalb als Plasmon-Phononen bezeichnet.
2. Die Fröhlich-Wechselwirkung zwischen Kristallelektronen und dem Gitter kann man sich anhand des Bildes eines einzelnen Elektrons veranschaulichen, das lokal über die Coulomb-Wechselwirkung das polare Kristallgitter verzerrt. Abstrahiert führt diese Wechselwirkung dazu, daß ein jedes Elektron stets von einer Wolke aus virtuellen Phononen begleitet und dadurch in seinen Eigenschaften, wie z.B. seiner effektiven Masse, modifiziert wird. An die Stelle eines Einzelelektrons tritt nunmehr das Quasiteilchen Elektron mitsamt virtueller Phononwolke, das als Polaron bezeichnet wird. Die Konsequenzen der Fröhlich-Wechselwirkung werden unter dem Begriff der Polaron-Effekte zusammengefaßt.

Zunächst beschäftigt sich der Abschnitt 3.1 mit den Gittermoden in Halbleiterschichtsystemen. Die Quantisierung der Gittermoden und die Elektron-Phonon-Wechselwirkung werden im Teilkapitel 3.2 behandelt. Zuletzt wird im Abschnitt 3.3 für die Plasmon-Phonon-Kopplung eines Q2DEG ein klassisches Modell aufgestellt und untersucht.

### 3.1 Phononen in Halbleiterschichtstrukturen

In Gegenwart von Grenzflächen bilden sich in polaren Kristallen spezielle Gitterschwingungstypen heraus, die stark an das Elektronengas koppeln. Sie werden folgendermaßen klassifiziert [Yu 96]:

1. Die Confined-Moden leiten sich direkt aus den Volumenmoden der im Schichtsystem vorkommenden Materialien ab. Durch die mechanischen Randbedingungen zwischen den Schichten wird ein Eindringen der Gittermoden einer Schicht in die Nachbarschichten unterbunden. Daher bilden sich innerhalb der einzelnen Schichten lokalisierte Stehwellen aus. Auf dieser Eigenschaft gründet ihre Bezeichnung.
2. Die Grenzflächenphononen ergeben sich im Rahmen des dielektrischen Kontinuummodells direkt aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen. Sie werden im Gegensatz zu den Confined-Moden durch die elektrostatischen Randbedingungen an den Grenzflächen bestimmt. Die Grenzflächenphononen sind, wie ihre Bezeichnung andeutet, an den Grenzflächen lokalisiert und erstrecken sich infolge dessen im allgemeinen über mehrere Schichten.

Im folgenden werden die Confined-Moden zuerst behandelt. Dies trägt auch dem Umstand Rechnung, daß diese Moden, wie in theoretischen Berechnungen gezeigt wurde, die Polaron-Kopplung dominieren [Hai90, Hai93]. Im Vorfeld wird jedoch zunächst einführend die dielektrische Gitterfunktion polarer Kristalle vorgestellt.

#### 3.1.1 Dielektrische Gitterfunktion polarer Halbleiter

Die dielektrische Funktion binärer kubischer Kristalle wie GaAs und AlAs ist durch die Lyddane-Sachs-Teller-Form

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} \frac{\omega_{LO}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}{\omega_{TO}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (3.1)$$

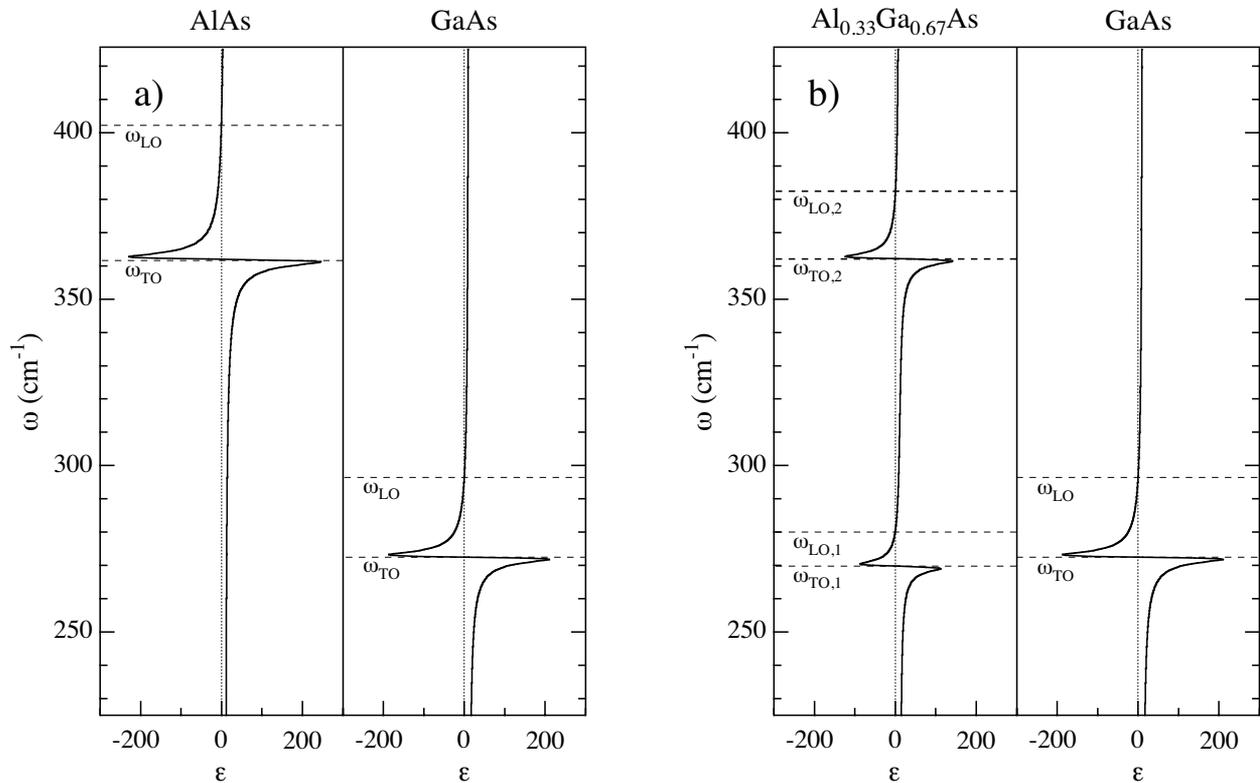
gegeben [Ash76, Yu 96]. Die Frequenzen  $\omega_{LO}$  und  $\omega_{TO}$  bezeichnen darin die energetische Lage der longitudinalen und transversalen optischen Phononmoden. Sie begrenzen die Reststrahlenbande des jeweiligen Halbleitermaterials. Die elektronische Polarisierbarkeit der Ionenrümpfe wird durch  $\varepsilon_{\infty}$  erfaßt und  $\Gamma$  bezeichnet die Dämpfungskonstante. Letztere kann in der Regel bei den vorliegenden Kristallqualitäten und Temperaturen vernachlässigt werden.

Der ternäre Halbleiter  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  zeigt ein Zweimodenverhalten mit zwei Reststrahlenbanden, die mit denen der binären Grenzverbindungen stark überlappen. Das Zweimodenverhalten wird durch die dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} \frac{\omega_{L1}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_1}{\omega_{T1}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_1} \frac{\omega_{L2}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_2}{\omega_{T2}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_2} \quad (3.2)$$

Reststrahlenbande	TO-Energien (meV)	LO-Energien (meV)
GaAs-artig	$\omega_{T1} = 33.79 - 0.64x - 1.16x^2$	$\omega_{L1} = 36.75 - 6.55x + 1.79x^2$
AlAs-artig	$\omega_{T2} = 44.75 + 0.55x - 0.30x^2$	$\omega_{L2} = 44.75 + 8.78x - 3.32x^2$

**Tabelle 3.1:** Gitterparameter von  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Kristallen bei tiefen Temperaturen [Ada85]. Die Hintergrund-Dielektrizitätskonstante aufgrund der gebundenen Elektronen wird durch  $\varepsilon_{\infty} = 10.90 - 2.74x$  parametrisiert [Car82]. Für die binären Verbindungen GaAs und AlAs gilt  $\omega_{TO, \text{GaAs}} = \omega_{T1}(x=0)$  und  $\omega_{LO, \text{GaAs}} = \omega_{L1}(x=0)$  beziehungsweise  $\omega_{TO, \text{AlAs}} = \omega_{T2}(x=1)$  und  $\omega_{LO, \text{AlAs}} = \omega_{L2}(x=1)$ .



**Abbildung 3.1:** Die zwei Typen dielektrischer Schichtfolgen im GaAs-System. Schematisch eingezeichnet sind jeweils die dielektrischen Funktionen, sowie die Lagen der Reststrahlenbanden (gestrichelte Linien). Damit die Dispersionen bei den transversalen Phononfrequenzen nicht divergieren, ist eine geringe Dämpfung berücksichtigt.

beschrieben [Bar75]. Die darin auftretenden Größen hängen vom Legierungsfaktor  $x$  ab und werden geeignet parametrisiert. Diese häufig vorzufindende Gittereigenschaft ternärer Legierungen läßt sich mit dem MREI-Modell (modified random element isodisplacement model) nach [Cha68] begründen.

In der Tabelle 3.1 sind die für das  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Halbleitersystem gültigen Parameter für die dielektrische Gitterfunktion aufgeführt. Die zwei Typen dielektrischer Schichtfolgen in auf GaAs basierenden Schichtsystemen sind in der Figur 3.1 dargestellt. Die volumenartigen Polarisationsmoden des Schichtsystems treten dann auf, wenn die dielektrische Funktion gerade verschwindet:  $\epsilon(\omega) = 0$ . Sie sind in der Schicht lokalisiert und tragen eine Polarisation, die keiner äußeren Anregung bedarf. Wie man leicht aus der funktionalen Form der dielektrischen Funktionen entnimmt, wird diese Bedingung gerade bei den Frequenzen der longitudinal optischen Phononen erfüllt.

### 3.1.2 Confined-Phononen in dielektrischen Schichtsystemen

Die Confined-Moden entstehen, wenn man den Volumenphononen innerhalb der Einzelschichten mechanische Randbedingungen derart aufprägt, daß ein Eindringen der Moden in die Nachbarschichten nicht stattfindet. Im einfachsten Modell bilden sich innerhalb einer Schicht stehende Wellen mit diskreten Wellenvektoren

$$q_{z,m} = \frac{\pi}{d}m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

aus [Yu 96]. Hierbei steht  $d$  für die Schichtdicke und  $m$  für den Modenindex. Die atomaren Auslenkungen sowohl der  $TO$ - als auch der  $LO$ -Moden wechseln im Vorzeichen zwischen alternierenden atomaren Lagen, wie es optische Moden erfordern, und werden durch die Einhüllenden

$$\begin{aligned} u_m(z, \vec{s}) &= \cos(q_{z,m}z) e^{i\vec{q}_{\parallel}\vec{s}}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, \\ u_m(z, \vec{s}) &= \sin(q_{z,m}z) e^{i\vec{q}_{\parallel}\vec{s}}, \quad m = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

moduliert. Die Ortsvektoren innerhalb der Schichtebene sind hierin mit  $\vec{s} = (x, y)$  bezeichnet. Die Modenenergien ergeben sich in guter Näherung durch direktes Einsetzen der Wellenvektoren  $\vec{q} = (\vec{q}_{\parallel}, q_{z,m})$  in die Dispersionen der Volumenphononen gemäß der Vorschrift

$$\omega_{TO/LO,m} = \omega_{TO/LO} - C_{TO/LO} \left( q_{\parallel}^2 + q_{z,m}^2 \right). \quad (3.5)$$

Die Konstanten  $C_{TO/LO}$  bezeichnen die Krümmungen der Phononbandstruktur für die  $TO$ - bzw.  $LO$ -Volumenmoden im Zentrum der Brillouin-Zone gemäß einer parabolischen Näherung. Die für eine Ankopplung an das Elektronengas in Frage kommenden Phononimpulse  $\vec{q}_{\parallel}$  innerhalb der Schichtebenen sind generell vernachlässigbar. Daher skalieren die Energien der Confined-Moden von den Startpunkten  $\omega_{LO}$  bzw.  $\omega_{TO}$  aus betrachtet jeweils quadratisch mit dem Modenindex  $m$  und der reziproken Trogbreite  $d$ .

Die größte Unzulänglichkeit des dargelegten einfachen Modells besteht darin, daß die in Gleichung 3.4 angegebenen Einhüllenden zwar die mechanischen Randbedingungen optimal erfüllen, andererseits jedoch die elektrodynamischen maximal verletzen. Dies liegt daran, daß die Polarisation und damit das elektrische Feld der Einhüllenden gemäß  $E_m(z) \propto u_m(z)$  proportional ist. Wegen  $\Phi_m = -\int dz E_m(z)$  jedoch führt dies für die obigen Funktionen zu einem maximalen Potential an den Grenzflächen und damit einer im Grunde physikalisch nicht korrekten Situation. Es gibt, ausgehend von mikroskopischen Theorien, mittlerweile makroskopische Modelle, die dieses Dilemma beseitigen. Von diesen sei speziell auf das Modell in [Hua88] verwiesen, welches den obigen Ansatz derart modifiziert, daß beide Randbedingungen simultan erfüllbar werden, ohne daß sich die Energien von den in Gleichung 3.5 angegebenen wesentlich unterscheiden.

Für typische Doppelheterostrukturen mit Trogbreiten  $d > 10$  nm sind die Einflüsse des Einschlusses auf die Modenenergien in der Regel vernachlässigbar. Daher gilt dort in guter Näherung  $\omega_{LO,m} \approx \omega_{LO}$ . Bei sehr kurzperiodischen Supergittern mit Schichtdicken von wenigen Monolagen hingegen ist der Modeneinschluß sehr stark ausgeprägt. Speziell die longitudinalen Confined-Moden solcher kurzperiodischer Supergitter dringen von  $\omega_{LO}$  ausgehend energetisch weit in die durch  $\omega_{LO}$  und  $\omega_{TO}$  begrenzte Reststrahlenbande des jeweiligen Materials ein. Dort können sie die im Anschluß behandelten Dispersionen der Grenzflächenmoden, die generell innerhalb der Reststrahlenbande verlaufen, durchkreuzen. Infolge der Kopplung, die aufgrund der elektrostatischen und mechanischen Randbedingungen stattfindet, entstehen Mischmoden aus Grenzflächen- und Confined-Moden, die experimentell beobachtbar sind [Zun95].

Erweitert man eine Schicht zu einem Halbraum, indem man eine der beiden Grenzflächen ins Unendliche rückt, so werden die Modenabstände immer feiner und man gelangt zu den Halbraumphononen. Diese entsprechen energetisch den Volumenmoden, allerdings mit der Einschränkung, daß es sich in Wachstumsrichtung um Stehwellen handelt, die durch Rückreflexion an der Halbraumgrenzfläche zustande kommen. An der Grenzfläche selbst verschwinden die Gitterauslenkungen. Die Einhüllendenfunktionen  $u_b(z, \vec{s})$  für die Volumen- (bulk) und  $u_{hsp}(z, \vec{s})$  für die Halbraummoden (half space) lauten:

$$u_b(z, \vec{s}) = e^{i[q_z z + \vec{q}_{\parallel} \vec{s}]} , \quad (3.6)$$

$$u_{hsp}(z, \vec{s}) = \sin(q_z z) e^{i\vec{q}_{\parallel} \vec{s}} , \quad q_z \geq 0 . \quad (3.7)$$

Für die letzteren ist die Halbraumgrenze an die Stelle  $z = 0$  gelegt. Der Wellenvektor  $q_z$  kann im Volumen positive wie negative und im Halbraum nur positive Werte annehmen.

### 3.1.3 Volumen- und Grenzflächenphononen im dielektrischen Kontinuummodell

Zum wesentlichen Verständnis der longitudinalen optischen Phononen in Schichtsystemen gelangt man über die Gleichungen der makroskopischen Elektrodynamik [Yu 96]. Die Betrachtung, welche alleinig die Maxwell-Gleichungen und die makroskopischen dielektrischen Funktionen der Einzelschichten zur Herleitung der Grenzflächenmoden heranzieht, wird als dielektrisches Kontinuummodell bezeichnet. Mechanische Randbedingungen sind in diesem Modell nicht enthalten. Sie spielen, wie theoretisch und experimentell gezeigt wurde, für die Grenzflächenphononen nur eine untergeordnete Rolle und können in der Regel vernachlässigt werden. Eine Herleitung und Rechtfertigung des dielektrischen Modells ist für ein Heterosystem in [Wen85] aufgezeigt. Das dielektrische Kontinuummodell, so stellt sich darin heraus, ist vollkommen äquivalent zum elastischen Kontinuummodell der optischen Moden unter Einbeziehung der makroskopischen Depolarisationsfelder.

Vernachlässigt man Retardierungseffekte, so werden die Polarisationsmoden des Schichtsystems im elektrostatischen Grenzfall  $q \ll \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$  ( $\vec{q}$ : Wellenvektor,  $\omega$ : Kreisfrequenz) durch die Laplace-Gleichung

$$\varepsilon(\omega, z) \vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (3.8)$$

beschrieben. Das mit dem elektrostatischen Potential  $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  verknüpfte elektrische Feld  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$  und die dielektrische Verschiebung  $\vec{D} = -\varepsilon(\omega, z) \vec{\nabla} \Phi = \varepsilon(\omega, z) \vec{E}$  gehorchen auf Grenzflächen den makroskopischen Anschlußbedingungen

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2} ,$$

$$D_{\perp,1} = D_{\perp,2} \rightarrow \varepsilon_1(\omega) E_{\perp,1} = \varepsilon_2(\omega) E_{\perp,2} , \quad (3.9)$$

wobei die Indizes 1 und 2 für die Medien links bzw. rechts einer Grenzfläche stehen. Die Richtungsindizes parallel und senkrecht beziehen sich auf die durch die Grenzfläche aufgespannte Ebene. Mit  $\perp$  ist daher generell die z-Richtung gemeint. Im dielektrischen Kontinuummodell ergeben sich die gesuchten Polarisationsmoden durch Lösen von Gleichung 3.8 unter Beachtung der Randbedingungen 3.9.

Die Grenzflächenmoden des Schichtsystems ergeben sich aus der Forderung  $\vec{\nabla} \Phi = 0$ . Diese wird von

Potentialen der Form

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0 e^{i(\vec{q}_{\parallel} \vec{s} - \omega t)} \sum_n \Theta_n \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^{q_{\parallel} z} \\ e^{-q_{\parallel} z} \end{pmatrix}, \quad \Theta_n = \begin{cases} 1, & z \in \text{Schicht } n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.10)$$

erfüllt. Der Index  $n$  steht für eine Schicht bzw. einen ganzen Halbraum. Die Distributionen  $\Theta_n$  sorgen dafür, daß das Gesamtpotential stückweise an den Grenzflächen zusammengesetzt wird. Die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  sowie die Modendispersion  $\omega(q_{\parallel})$  ergeben sich aus den Randbedingungen an die Felder auf den Grenzflächen gemäß den Gleichungen 3.9 sowie der Forderung, daß die Felder für  $z \rightarrow \pm\infty$  verschwinden.

### 3.1.4 Zwei dielektrische Halbräume mit eingebettetem Vielschichtsystem

Die Grenzflächenmoden eines Schichtsystems sind im allgemeinen nur auf numerischem Wege lösbar. Um zu einer solchen Lösung zu gelangen eignet sich ein Transfermatrizenverfahren, das dem zur Beschreibung der Optik eines Vielschichtsystems ähnelt. Es wird deshalb im folgenden kurz dargelegt.

Die Abbildung 3.2 zeigt schematisch den allgemeinsten Schichtaufbau. Der linke Halbraum ist mit dem Index 0 und der rechte mit dem Index  $N$  bezeichnet. Dazwischen befinden sich  $N - 1$  dielektrische Schichten mit Dicken  $d_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Das System besitzt insgesamt  $N$  Grenzflächen. Der Index einer Grenzfläche ist dabei identisch zum Schichtindex des rechten angrenzenden Mediums. Der Ursprung  $z = 0$  ist günstigerweise in die am weitesten links gelegene Grenzfläche gelegt. Die Randbedingungen zwischen zwei Schichten  $n$  und  $n + 1$  lassen sich kompakt zu einer Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{n+1} \\ \tilde{B}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{s}_n(q_{\parallel}, \omega) \begin{pmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

mit der Transfermatrix

$$\mathbf{s}_n(q_{\parallel}, \omega) = \frac{1}{2\varepsilon_{n+1}} \begin{pmatrix} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})e^{q_{\parallel} d_n} & (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})e^{-q_{\parallel} d_n} \\ (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})e^{q_{\parallel} d_n} & (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})e^{-q_{\parallel} d_n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

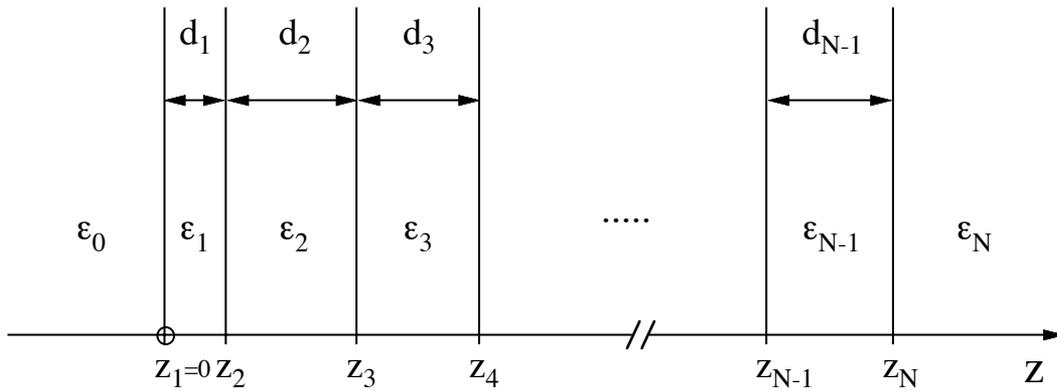
zusammenfassen. Die mit einer Tilde versehenen Koeffizienten sind mit den Koeffizienten aus Gleichung 3.10 gemäß

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{q_{\parallel} z_n} A_n \\ e^{-q_{\parallel} z_n} B_n \end{pmatrix}, \quad n > 1, \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1 \quad (3.13)$$

verknüpft. Sie ergeben sich durch eine effektive Verschiebung des Koordinatenursprungs zur Beschreibung einer Schicht an deren linke Grenzfläche  $z_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k$  (ausgenommen  $n = 0, 1$ , siehe Figur 3.2). Die Transfermatrix

$$\mathbf{S}_N(q_{\parallel}, \omega) = \prod_{n=1}^{N-1} \mathbf{s}_n(q_{\parallel}, \omega) \quad (3.14)$$

des Gesamtsystems ergibt sich durch Multiplikation der Schichtmatrizen. Sie verknüpft die Koeffizienten des rechten Halbraumes mit denen des linken. Innerhalb der Halbräume müssen die Felder jedoch auf Null abklingen. Dies bedingt, daß im linken Halbraum der Koeffizient  $\tilde{B}_0 = 0$  und im rechten der Koeffizient  $\tilde{A}_N = 0$  verschwinden muß. Bis auf einen alle Koeffizienten betreffenden Normierungsfaktor kann ohne Beschränkung



**Abbildung 3.2:** Lagefolge und Indizierung eines dielektrischen Schichtsystems. Mit  $\varepsilon_0$  ist hier nicht die Vakuumpermeabilität, sondern die (relative) Dielektrizitätskonstante des linken Halbraumes ( $n = 0$ ) bezeichnet.

der Allgemeinheit der Koeffizient  $\tilde{A}_0 = 1$  gesetzt werden. Die Frequenzen  $\omega_{ph}(q_{||})$  der Grenzflächenmoden des Schichtsystems ergeben sich daher aus der impliziten Bestimmungsgleichung

$$\tilde{A}_N = (\mathbf{S}_N)_{11}(q_{||}, \omega = \omega_{ph}) = 0 \quad . \quad (3.15)$$

Über eine numerische Nullstellensuche bekommt man im allgemeinen die gesuchten Dispersionen. Jede Lösung repräsentiert dabei ein individuelles Grenzflächenphonon. Hat man die Frequenzen auf diese Weise bestimmt, gelangt man unter deren Kenntnis über die Transfermatrizen

$$\mathbf{S}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{s}_k(q_{||}, \omega_{ph}) \quad (3.16)$$

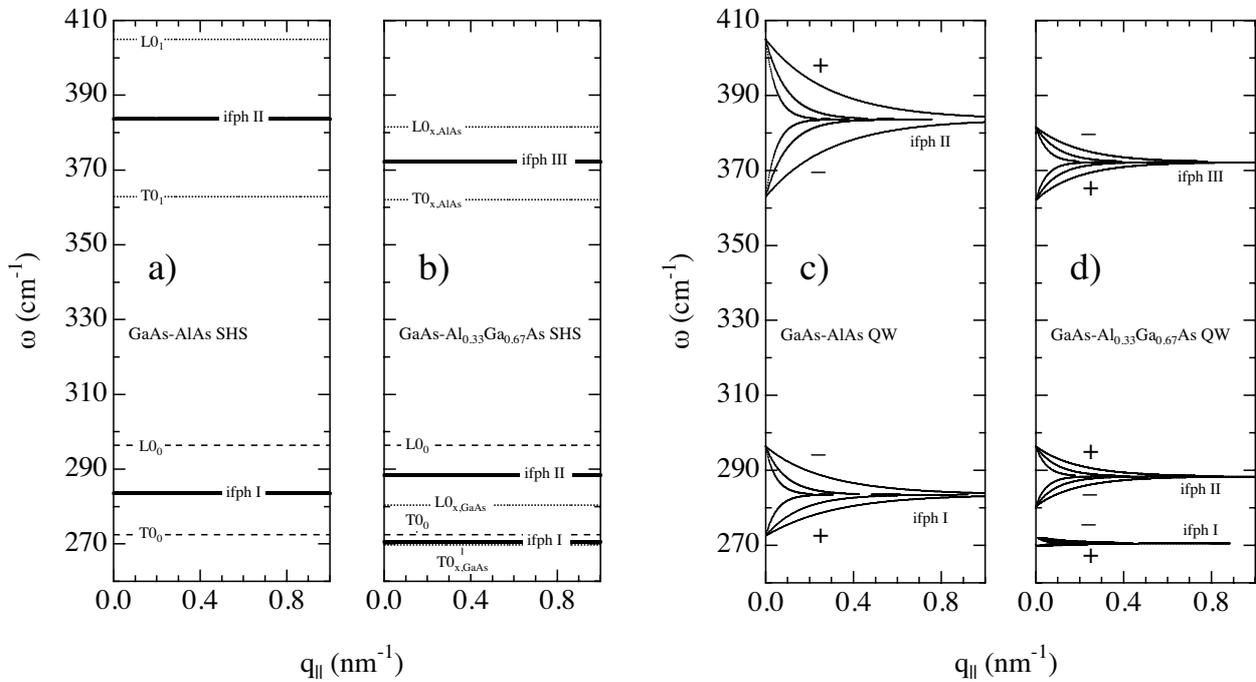
vom linken Halbraum aus zu den Koeffizienten und damit den Feldverläufen der Moden innerhalb sämtlicher Einzelschichten. Systeme, die keine oder nur eine Schicht aufweisen, sind einfach genug, um die Dispersionsrelationen der Oberflächenmoden analytisch angeben zu können. Sie repräsentieren die gebräuchlichen Einfach- bzw. Doppelheterostrukturen in den meisten Fällen sehr gut und werden daher kurz ausgeführt.

### 3.1.4.1 Zwei dielektrische Halbräume: Einfachheterostruktur

Im Fall zweier bei  $z = 0$  aneinander grenzender Halbräume folgt aus der Bedingung 3.15 unmittelbar die implizite Dispersionsrelation

$$\varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(\omega) = 0 \quad . \quad (3.17)$$

Wie man leicht graphisch ermitteln kann, verlaufen die Grenzflächenmoden für die Folge AlGaAs-GaAs innerhalb der Reststrahlenbanden der beiden binären Grenzverbindungen. Im hier betrachteten langwelligeren Grenzfall sind sie zudem dispersionslos. Um dies zu verdeutlichen, sind in der Figur 3.3 die Modendispersionen für eine AlAs-GaAs- und eine  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As-GaAs}$ -Heterostruktur dargestellt. Für die Struktur mit den zwei binären Komponenten in Teilfigur a) treten ungefähr mittig, innerhalb der binären Reststrahlenbanden gelegen, die beiden Interface-Moden auf. Im Unterschied dazu besitzt die Struktur mit der ternären Legierung (Teilfigur b)) insgesamt drei Grenzflächenmoden. Davon sind die beiden energetisch am tiefsten gelegenen GaAs-artig



**Abbildung 3.3:** Grenzflächenphononen in Einfach- und Doppelheterostrukturen. In den beiden linken Teilfiguren sind die Dispersionen der Grenzflächenmoden (dick durchgezogen) für Einfachheterostrukturen mit a) einer binären AlAs- und b) einer ternären AlGaAs-Barriere mit  $x = 0.33$  dargestellt. Als Orientierung sind die Begrenzungen der Reststrahlenbanden der beteiligten Halbleiter gestrichelt und gepunktet eingezeichnet, wobei der tiefgestellte Index bei der Bezeichnung für den Legierungsfaktor  $x$  steht. Die Teilfiguren c) und d) zeigen die Dispersionen symmetrischer Doppelheterostrukturen mit binären bzw. ternären Barrieren für jeweils drei Trogbreiten; von innen nach außen:  $d_1 = 20\text{nm}$ ,  $10\text{nm}$  und  $5\text{nm}$ . Symmetrische Moden sind mit einem Plus- und antisymmetrische mit einem Minuszeichen markiert.

und werden durch die Frequenzen der  $\text{TO}_{x,\text{GaAs}}$ - und  $\text{TO}_0$ - bzw.  $\text{LO}_{x,\text{GaAs}}$ - und  $\text{LO}_0$ -Volumenphononen eingegrenzt. Die unterste der beiden ternären Moden reagiert sehr empfindlich auf Dämpfung, die hier in den Darstellungen allerdings nicht berücksichtigt ist. Führt man eine geringe Dämpfung derart ein, daß die obere der beiden Moden noch nicht merklich in ihrer energetischen Lage beeinflusst wird, so kann die untere bereits überdämpft sein, so daß keine Nullstelle mehr in der Dispersionsrelation auftritt. Die Bedeutung und Existenz der unteren ternären Grenzflächenmode in realen Systemen ist daher unklar, zumal bisher keine experimentellen Befunde für sie existieren.

Einen Spezialfall für ein System mit zwei Halbräumen stellt ein halbumendlicher Halbleiter (linker Halbraum Vakuum,  $\varepsilon_0 = 1$ ) dar. Dessen Oberflächenphonon hat für einen binären Kristall die Frequenz

$$\omega_{sph} = \omega_{TO} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon(0)}{1 + \varepsilon_\infty}}. \quad (3.18)$$

Hierin stehen  $\varepsilon(0)$  und  $\varepsilon_\infty$  für die statische bzw. hochfrequente Dielektrizitätskonstante und  $\omega_{TO}$  für die TO-Phononfrequenz des Halbleiters.

### 3.1.4.2 Zwei dielektrische Halbräume mit Zwischenschicht: Doppelheterostruktur

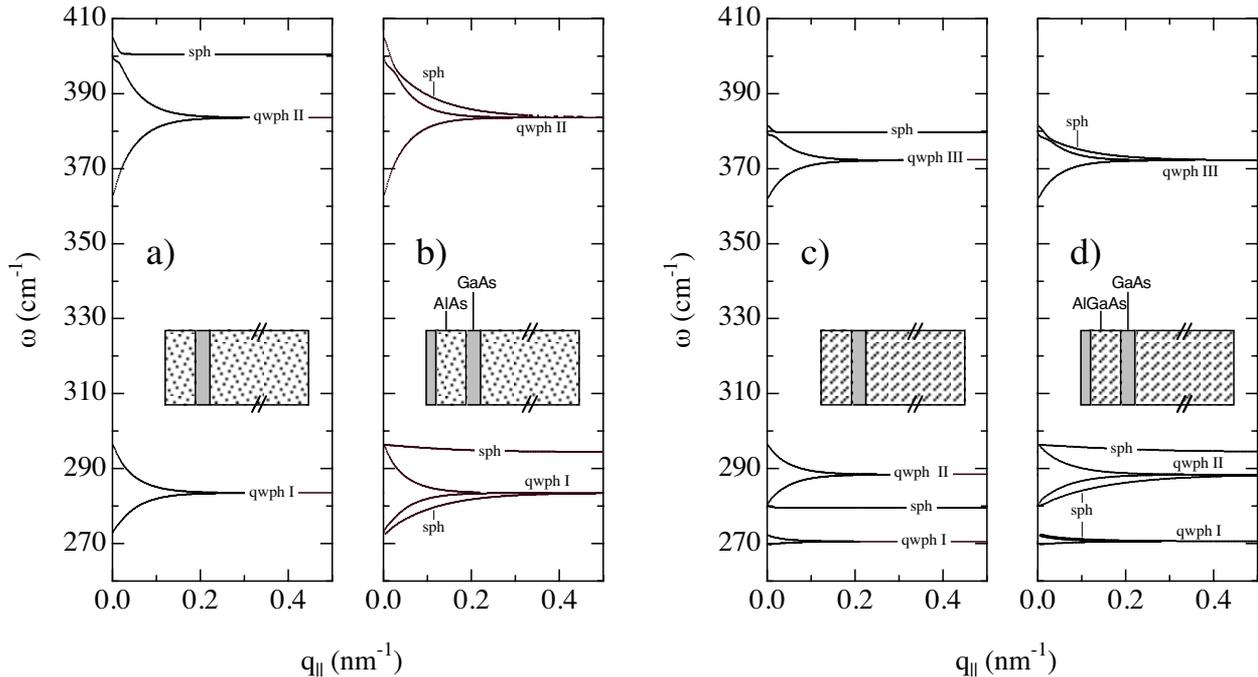
Die Bestimmungsgleichung für die Grenzflächenphononen lautet hier:

$$[\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1(\omega)] [\varepsilon_0(\omega) - \varepsilon_1(\omega)] e^{-2q_{\parallel}d_1} - [\varepsilon_2(\omega) + \varepsilon_1(\omega)] [\varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(\omega)] = 0 \quad (3.19)$$

Im Falle eines symmetrischen  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As} - \text{GaAs} - \text{Al}_x\text{GaAs}_{1-x}$ -Quantentroges mit  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2$  vereinfacht sich die Bedingung 3.19 zu

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{1 \pm e^{-q_{\parallel}d_1}}{1 \mp e^{-q_{\parallel}d_1}} = 0 \quad (3.20)$$

Darin steht das obere Vorzeichen für die symmetrischen und das untere für die antisymmetrischen Interface-Phononen. Diese Unterscheidung bezieht sich auf die z-Abhängigkeit des elektrischen Feldes, wobei die Symmetrie bzw. Antisymmetrie bezüglich der Trogmitte besteht. Die Abbildungen 3.3 c) und d) zeigen die berechneten Dispersionen der Grenzflächenphononen im Falle eines symmetrischen Schichtsystems mit binären bzw. ternären Barrieren für unterschiedliche Trogbreiten. Jeder Reststrahlenbereich von Trog und Barriere steuert jeweils ein Paar trompetenartig aufeinander zulaufender Dispersionen bei, die zu einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Mode gehören. Sie starten jeweils für  $q_{\parallel} = 0$  bei den Begrenzungen der Reststrahlenbanden und laufen für große  $q_{\parallel}$  asymptotisch auf die Energie der Moden für die entsprechenden Halbraumsysteme zu. Mit abnehmender Trogdicke weiten sich die Öffnungsbereiche der Dispersionspaare zu immer größeren Wellenvektoren  $q_{\parallel}$  aus.



**Abbildung 3.4:** Grenzflächenphononen von Quantentrogstrukturen unter Berücksichtigung der Oberfläche. Betrachtet werden hier jeweils Quantentrogstrukturen mit einer Trogbreite von 20 nm und einer Barrierendicke von 100 nm. Die Teilbilder a) und c) haben AlAs und b) und d) AlGaAs mit  $x = 0,33$  als Barrierenmaterial. Die beiden linken Strukturen besitzen keine und die beiden rechten eine GaAs-Deckschicht von 5 nm.

### 3.1.4.3 Einfluß der endlichen Barrierendicke und der Deckschicht

Bei den im vorausgehenden Abschnitt vorgestellten Modellen für Einfach- und Doppelheterostrukturen sind die endliche Schichtdicke der Barriere, sowie die üblicherweise zum Schutz vor Oxidation aufgebrauchte GaAs-Deckschicht nicht berücksichtigt. Deren Einfluß auf die Schichtphononen im System soll hier kurz untersucht werden.

Die Abbildung 3.4 zeigt dazu die numerisch gerechneten Dispersionen für symmetrische Quantentröge mit AlAs- (jeweils links) sowie  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Barrieren (jeweils rechts) endlicher Dicke mit und ohne Deckschicht. Neben den Trogmoden tauchen zusätzlich noch charakteristische Oberflächenphononen auf. Durchkreuzen diese die (ungestörten) Trogphononen, so führt dies zu Modenabstoßungen in den Kreuzungspunkten. Die Moden in den Kreuzungsbereichen tragen Mischcharakter. Die Modenabstoßungen treten für typische Geometrien allerdings nur bei sehr kleinen Wellenvektoren auf. Betrachtet man die Felder der Moden, so sind erwartungsgemäß diejenigen der Trogphononen im Trogbereich und die der Oberflächenphononen an der Oberfläche am größten. Das interessierende Elektronengas ist jedoch im Trog lokalisiert und koppelt dementsprechend nur stark an die ersteren an. Für das Elektronengas wird die Oberfläche demnach nur über die Niveauabstoßungen und die damit verbundenen Modenmischungen sichtbar. Ihr Einfluß ist außerhalb der unmittelbaren Kreuzungsbereiche vernachlässigbar. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich für die Moden in Einfachheterostrukturen. Zusammenfassend ergibt sich aus den Betrachtungen, daß der Einfluß der Oberfläche auf die Schichtphononen in der Regel vernachlässigbar ist.

### 3.1.5 Grenzflächenmoden in Systemen mit Supergittern

Zuweilen werden aus unterschiedlichen Gründen anstatt ternärer Legierungen auch kurzperiodische Supergitter als Barrieren in Einfach- und Doppelheterostrukturen eingesetzt. Sie sollen deshalb hier hinsichtlich ihrer Gitterschwingungen detaillierter betrachtet werden.

#### 3.1.5.1 Grenzflächenartige Volumenphononen in unendlichen Supergittern

Für ein unendlich ausgedehntes periodisches Supergitter mit der Gitterperiode  $d = d_1 + d_2$ , das aus einer Wiederholung der Schichtfolgen  $\varepsilon_1, d_1$  und  $\varepsilon_2, d_2$  zusammengesetzt ist, unterliegt das Potential einer Grenzflächenmode entlang der Wachstumsrichtung der Bloch-Bedingung

$$\Phi(\vec{r}, t) = e^{iq_z nd} \Phi_0(x, y, z, t) \quad , \quad -\pi/d \leq q_z \leq \pi/d \quad . \quad (3.21)$$

Der Index  $n$  steht darin für die Elementarzellen des Supergitters und  $q_z$  für den Wellenvektor innerhalb der resultierenden Brillouin-Zone. Der Potentialanteil  $\Phi_0(x, y, z, t)$  ist gitterperiodisch entlang der Wachstumsrichtung  $z$ . Kombiniert man die Bloch-Bedingung mit der evaneszenten Form der Moden innerhalb der Einzelschichten, so gelangt man zu dem Ansatz [Wen87a]

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) = & \Phi_0 e^{i(\vec{q}_{\parallel} \vec{s} - \omega t)} e^{iq_z nd} \left[ \left( \begin{array}{c} \tilde{A}_{n,1} \\ \tilde{B}_{n,1} \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{c} e^{q_{\parallel}(z-nd)} \\ e^{-q_{\parallel}(z-nd)} \end{array} \right) \Theta_{n,1} \right. \\ & \left. + \left( \begin{array}{c} \tilde{A}_{n,2} \\ \tilde{B}_{n,2} \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{c} e^{q_{\parallel}(z-nd-d_1)} \\ e^{-q_{\parallel}(z-nd-d_1)} \end{array} \right) \Theta_{n,2} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

für die Potentiale der grenzflächenartigen Moden des Supergitters. Die Distributionen

$$\Theta_{n,i} = \begin{cases} 1, & z \in \text{Schicht } i=1, 2 \text{ der Supergitterzelle } n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

sorgen wiederum dafür, daß das Gesamtpotential stückweise stetig aus den Potentialen der Teilbereiche zusammengesetzt wird. Moden solchen Typs können sich innerhalb des Supergitters frei ausbreiten und entsprechen daher den Phononen in Volumenhalbleitern. Die Anwendung der Anschlußbedingungen 3.9 an den einzelnen Grenzflächen führt schließlich zu der impliziten Dispersionsrelation

$$\left( \frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_2(\omega)} + \frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega)} \right) \sinh(q_{\parallel}d_1) \sinh(q_{\parallel}d_2) + 2 [\cosh(q_{\parallel}d_1) \cosh(q_{\parallel}d_2) - \cos(q_z d)] = 0 \quad (3.24)$$

für die Grenzflächenmoden. Diese bilden in Supergittern quasi-kontinuierliche Minibänder aus, deren Begrenzungen sich aus der Ersetzung des Kosinusters in Gleichung 3.24 durch dessen Extremalwerte  $\pm 1$  ergeben.

Die Bandstruktur der grenzflächenartigen Moden für ein Supergitter, das bei vielen im Rahmen dieser Arbeit vermessenen Strukturen als Barriere dient, ist in der Figur 3.5 dargestellt. In den Reststrahlenbanden der binären Supergitterkomponenten bilden sich jeweils zwei trompetenartige, für große  $q_{\parallel}$  asymptotisch aufeinander zulaufende Teilbänder aus. Deren Charaktere (symmetrisch und antisymmetrisch innerhalb der Supergitterzelle) sind direkt auf die Grenzflächenmoden der GaAs-AlAs-GaAs-Quantentrogssysteme zurückzuführen.

### 3.1.5.2 Evaneszente Halbraumgrenzflächenmoden in halbumendlichen Supergittern

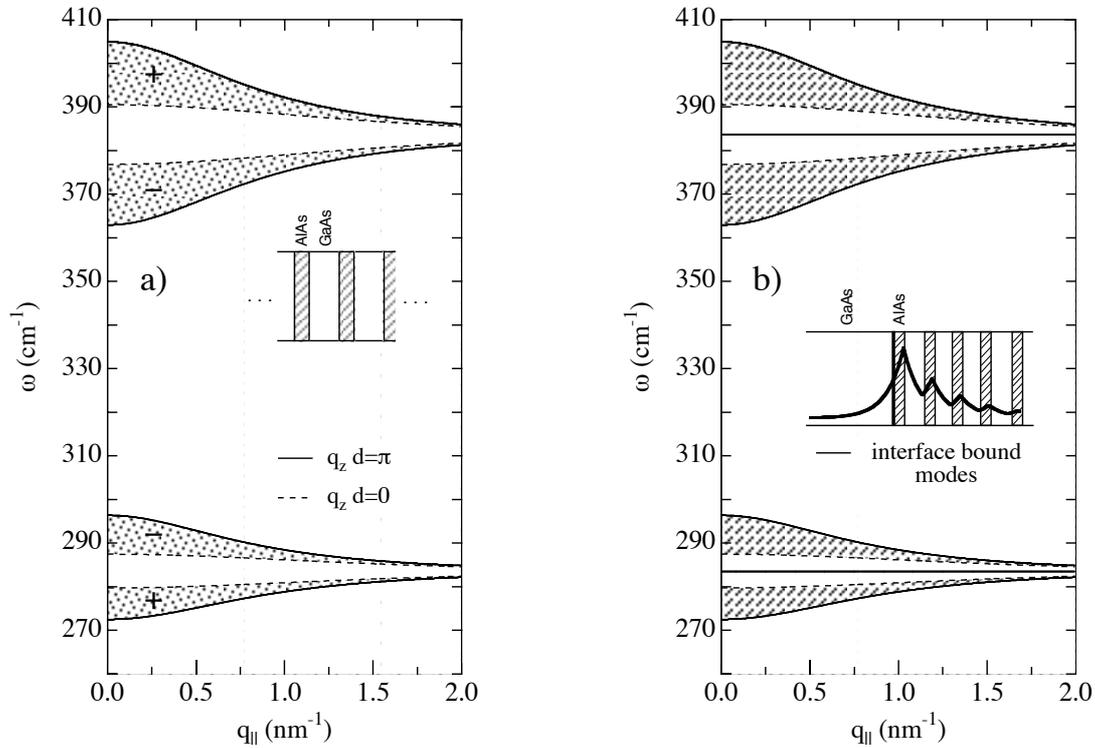
Betrachtet man das Supergitter als Effektivlegierung mit den Supergitterphononen als deren Gittermoden, so sollten sich an der Halbraumgrenze zu einem Volumenhalbleiter mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_0$  lokalisierte Moden ausbilden, die den bereits vertrauten Grenzflächenmoden von gewöhnlichen Heteroübergängen ähneln.

Wenn solche Moden existierten, sollten deren Einhüllenden exponentiell innerhalb des Supergitters auf Null abfallen und daher maximale Feldstärken an der Halbraumgrenzfläche aufweisen. Die Einhüllende des unendlichen Supergitters  $e^{iq_z nd}$  wird evaneszent bei einem imaginären Wellenzahlvektor  $q_z = ip$ . Damit kann der Potentialverlauf der gesuchten Moden als

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) = & \Phi_0 e^{i(\vec{q}_{\parallel} \vec{s} - \omega t)} \left[ e^{-pnd} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{n,1} \\ \tilde{B}_{n,1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^{q_{\parallel}(z-nd)} \\ e^{-q_{\parallel}(z-nd)} \end{pmatrix} \Theta_{n,1} \right. \\ & \left. + e^{-pnd} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{n,2} \\ \tilde{B}_{n,2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^{q_{\parallel}(z-nd-d_1)} \\ e^{-q_{\parallel}(z-nd-d_1)} \end{pmatrix} \Theta_{n,2} + \tilde{A}_0 e^{q_{\parallel}z} \Theta_0 \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

angesetzt werden [Wen87b]. Die darin auftretenden Distributionen  $\Theta \dots$  sind wie in Gleichung 3.23 definiert. Der Koeffizient  $\tilde{B}_0$  tritt im linken Halbraum ( $z < 0$ ) aufgrund der Forderung nach Evaneszenz nicht auf. Die reziproke Abklinglänge  $p$  ergibt sich wie auch die Koeffizienten und die Dispersionsrelation durch Anwendung der Randbedingungen. Die resultierende Dispersionsrelation lautet in impliziter Form

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon_1(\varepsilon_0^2 - \varepsilon_2^2) \cosh(q_{\parallel}d_1) \sinh(q_{\parallel}d_2) + \varepsilon_2(\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2) \sinh(q_{\parallel}d_1) \cosh(q_{\parallel}d_2) + \dots \\ & \dots + \varepsilon_0(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sinh(q_{\parallel}d_1) \sinh(q_{\parallel}d_2) . \end{aligned} \quad (3.26)$$



**Abbildung 3.5:** Grenzflächenmoden in Supergittern. Teilbild a) zeigt die Bänder der grenzflächenartigen Volumenphononen in Supergittern. In diesem Beispiel besteht das Supergitter aus einer Wiederholung von 4 Monolagen GaAs und 8 Monolagen AlAs. In Teilfigur b) sind die Dispersionen der evaneszenten an die Halbraumgrenze gebundenen Grenzflächenphononen für ein an GaAs grenzendes halbumendliches Supergitter wie unter a) dargestellt. Das Insert zeigt den berechneten Potentialverlauf für solche Moden.

Die reziproke Abklinglänge  $p$  ist durch

$$p = d^{-1} \operatorname{arcosh} \left[ \cosh(q_{\parallel} d_1) \cosh(q_{\parallel} d_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \sinh(q_{\parallel} d_1) \sinh(q_{\parallel} d_2) \right] \quad (3.27)$$

gegeben.

Für diese Arbeit relevant ist das Halbraum-Supergittersystem GaAs – (AlAs/GaAs)<sub>SL</sub>. Für dieses System vereinfacht sich wegen  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2$  die implizite Dispersionsrelation 3.26 drastisch zu

$$0 = \varepsilon_2 (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \left[ \sinh(q_{\parallel} d_1) \cosh(q_{\parallel} d_2) + \sinh(q_{\parallel} d_1) \sinh(q_{\parallel} d_2) \right] . \quad (3.28)$$

Diese Relation führt zu der Bedingung  $(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) = 0$  und man bekommt schließlich als Ergebnis dispersionslose Moden, deren Frequenzen mit denen der Grenzflächenmoden des AlAs-GaAs-Halbraumsystems übereinstimmen. Dies illustriert die Figur 3.5.

Neben den betrachteten evaneszenten Moden existieren in solchen Systemen noch volumenartige Supergittermoden, die allerdings an der Halbraumgrenze reflektiert werden und demzufolge in Grenzflächennähe nur geringe Feldstärken aufweisen. Sie sind die Supergitter-Pendants der Confined-Moden in Halbraumsystemen aus Volumenmaterialien. Energetisch bilden sie Quasikontinua, die mit den Phononenbändern des unendlichen Supergitters zusammenfallen.

### 3.1.5.3 Doppelheterostruktur mit Supergitterbarrieren

Prinzipiell könnte man erwarten, daß sich in einer Doppelheterostruktur mit Supergittern als Barrieren ebenfalls lokalisierte Moden ausbilden, die denen gewöhnlicher Doppelheterostrukturen entsprechen, wenn man analog zu oben die beiden Supergitterbarrieren als Effektivlegierungen auffaßt.

Allerdings besitzt die Dispersionsrelation, die derartigen Moden entspräche, zumindest für das hier relevante  $(\text{AlAs}/\text{GaAs})_{\text{SL}} - \text{GaAs} - (\text{AlAs}/\text{GaAs})_{\text{SL}}$ -Schichtsystem keine Lösung. Der Potentialansatz für eine solche Betrachtung erfolgt im wesentlichen analog zu oben und ist entsprechend um ein weiteres Supergitter, das bei  $z = -d$  ( $d$ : Trogbreite) beginnt und sich bis  $-\infty$  erstreckt, sowie um die Trogschicht zu erweitern. Da die sich ergebenden Gleichungen unübersichtlich und nur noch numerisch handhabbar sind, werden sie, zumal sie keine Lösung für derartige Moden besitzen, hier nicht aufgelistet.

Für die freien Supergittermoden stellt die GaAs-Zwischenschicht eine Störung des ansonsten regulären Supergitters dar. Man kann eine Analogie zu dem bekannten Problem einer auf eine Barriere (hier die breitere Trogschicht) zulaufenden Welle ziehen, die zum Teil am Hindernis reflektiert und zum Teil transmittiert wird. Eine solche Betrachtung führt im wesentlichen zu einem Reflexions- und einem Brechungsgesetz. Allerdings werden die Modenfrequenzen dadurch nicht beeinflusst, so daß die entsprechenden Kontinua energetisch wiederum mit den Bändern des unendlichen Supergitters (siehe Teilfigur 3.5 a)) zusammenfallen.

## 3.2 Phonon-Quantisierung und Elektron-Phonon-Wechselwirkung

Die bisherigen Betrachtungen der Gitterschwingungen in Schichtsystemen waren klassischer bzw. elektrostatischer Natur. Um zu einer adäquaten quantenmechanischen Beschreibung zu gelangen, sind die Gitterschwingungen zu quantisieren. Dies erfolgt gemäß der üblichen Art und Weise durch Einführung bosonischer Erzeuger- und Vernichteroperatoren  $\hat{a}_k^+$  und  $\hat{a}_k$ , die den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] &= [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 \quad , \\ [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] &= \delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (3.29)$$

genügen [Mad78]. Der Index  $k$  faßt die Quantenzahlen für das entsprechende Phonon zusammen. Der Hamilton-Operator des Gitters lautet damit in der Bosondarstellung

$$H_{ph} = \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (3.30)$$

Die auftretenden Teilchenzahloperatoren  $\hat{n}_k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$  projizieren aus dem Phononzustand  $|\bar{\Theta}\rangle = |\{\bar{n}_k(\bar{\Theta})\}\rangle$  die Besetzungszahlen  $\bar{n}_k(\bar{\Theta})$  der jeweiligen Moden heraus:

$$\hat{n}_k |\bar{\Theta}\rangle = \bar{n}_k(\bar{\Theta}) |\bar{\Theta}\rangle \quad . \quad (3.31)$$

Der Balken über den Größen dient im weiteren dazu die bosonischen Zustände und Besetzungszahlen des Gittersystems von den fermionischen des elektronischen Systems zu unterscheiden. Im thermischen Gleichgewicht gehorcht die Modenbesetzung der Bose-Einstein-Verteilungsfunktion

$$\bar{n}_k = \left[ \exp \left( \frac{\hbar\omega_k}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad . \quad (3.32)$$

Darin stehen  $T$  für die Temperatur,  $k_B$  für die Boltzmann-Konstante und  $\hbar\omega_k$  für die Modenenergie. Im Falle  $k_B T \ll \hbar\omega_k$ , der für optische Phononen in GaAs noch bis Temperaturen über  $T = 100$  K gut zutrifft, ist keine nennenswerte Anzahl thermischer Phononen angeregt. Der Gittergrundzustand wird dann in guter Näherung durch den Vakuumzustand  $|\bar{\Theta}\rangle \approx |\text{vac}\rangle$  approximiert.

Befinden sich im Schichtsystem (quasi-)freie Ladungsträger, so koppeln diese über die makroskopischen elektrischen Potentiale gemäß

$$H_{el-ph} = -e \sum_k \Phi_k(\vec{r}_e) = \sum_k V_k(\vec{r}_e) \quad (3.33)$$

an die Gittermoden an. Der Ortsvektor (bzw. Ortsoperator)  $\vec{r}_e$  stehe für ein repräsentativ betrachtetes Elektron im System. Eine solche Kopplung ist sehr effektiv und langreichweitig und wird gemäß ihrem Entdecker als Fröhlich-Wechselwirkung bezeichnet [Fro54]. Im folgenden wird sie für die Kopplung an die LO-Volumenphononen näher betrachtet.

Im Volumen gilt für polare kubische Kristalle die Beziehung [Mad78]

$$\vec{E}_{LO,\vec{q}}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}_{LO,\vec{q}}(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{n_\Omega \mu \omega_{LO}^2}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon(0)} \right]} \vec{w}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}} \quad (3.34)$$

Sie verknüpft das makroskopische elektrische Feld (Polarisation) mit den mikroskopischen Verrückungen  $\vec{w} = \vec{w}_+ - \vec{w}_-$  der gegennamig geladenen Gitterbausteine. Die Größen  $n_\Omega = N_\Omega/V$  stehen für die Dichte der Elementarzellen ( $V$ : Kristallvolumen),  $\mu = \frac{M_+ M_-}{M_+ + M_-}$  für die reduzierte Masse der Gitterionen ( $M_\pm$ : Masse der positiven bzw. negativen Ionen),  $\varepsilon(0)$  für die statische,  $\varepsilon_\infty$  für die elektronische Dielektrizitätskonstante und  $\varepsilon_0$  für die Vakuumpermeabilität. Die Auslenkung  $\vec{w}_{\vec{q}}(\vec{r})$  läßt sich durch die Heber  $\hat{a}_{\vec{q}}^+$  und Senker  $\hat{a}_{\vec{q}}^-$  ausdrücken:

$$\vec{w}_{\vec{q}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2N_\Omega \mu \omega_{LO}}} \frac{\vec{q}}{q} \left[ \hat{a}_{\vec{q}}^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{q}}^- e^{i\vec{q}\vec{r}} \right] \quad (3.35)$$

Sie ist, wie es longitudinale Moden erfordern, parallel zur Ausbreitungsrichtung. Damit erhält man nach Einsetzen in die Gleichungen 3.33 und 3.34 und einigen Umformungen unter Ausnutzung der Beziehung  $\Phi_{\pm\vec{q}}(\vec{r}) = \pm i \frac{\vec{q}}{q^2} \vec{E}_{\vec{q}}(\vec{r})$  das Resultat

$$H_{el-ph,\vec{q}}(\vec{r}_e) = V_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^- e^{i\vec{q}\vec{r}_e} + V_{\vec{q}}^* \hat{a}_{\vec{q}}^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}_e} \quad (3.36)$$

In der Kopplungsstärke

$$V_{\vec{q}} = i\hbar\omega_{LO} \sqrt{\frac{4\pi\alpha}{V q^2}} \left[ \frac{\hbar}{2m^* \omega_{LO}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.37)$$

sind die auftretenden Parameter unter Einführung der Fröhlich-Kopplungskonstanten

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \frac{1}{\hbar\omega_{LO}} \left[ \frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon(0)} \right] \quad (3.38)$$

und des Polaron-Radius  $r_0 = \sqrt{\hbar/2m^* \omega_{LO}}$  geeignet zusammengefaßt.  $m^*$  steht hier wieder für die effektive Elektronenmasse im Kristall. Die dimensionslose Konstante  $\alpha \approx 2 \sum_{\vec{q}} \bar{n}_{\vec{q}} = 2\bar{N}$  hat eine sehr anschauliche

Bedeutung. Sie ist ein Maß für die mittlere Anzahl  $\bar{N}$  an Phononen, die im später noch zu erläuternden nicht-resonanten Fall ein freies Elektron in Form einer Gitterverzerrung (Phononwolke) begleiten. Der Polaron-Radius wiederum gibt die Ausdehnung dieses als Polaron bezeichneten Gebildes an. In der Literatur werden für GaAs Werte im Bereich  $0.065 < \alpha < 0.085$  angegeben. Aufgrund der schwachen Kopplung ist das Kontinuummodell hier gerechtfertigt und weiterhin eine störungstheoretische Behandlung des Polaron-Problems angemessen.

Für Phononmoden in Schichtstrukturen gilt aufgrund der Translationsinvarianz in der Ebene [Wen90d]

$$\Phi_{p,\vec{q}_{\parallel}}(\vec{s}, z) = \frac{i}{q_{\parallel}} E_{p,\vec{q}_{\parallel}}^{\parallel}(z) e^{i\vec{q}_{\parallel}\vec{s}}. \quad (3.39)$$

Als Quantenzahlen treten nun explizit der Wellenvektor  $\vec{q}_{\parallel}$  in der Ebene und ein Index  $p$ , der den Modentyp (z.B. z-Einhüllende) charakterisiert, auf. Die zur Schichtebene parallelen elektrischen Feldkomponenten  $E_{p,\vec{q}_{\parallel}}^{\parallel}(z)$  sind auch hier direkt auf die Elementarauslenkungen der Moden zurückzuführen [Wen85]. Für die Elektron-Phonon-Wechselwirkung kann damit bis auf eine Normierungskonstante  $C_{p,\vec{q}_{\parallel}}$  eine Form

$$H_{el-ph,p,\vec{q}_{\parallel}}(\vec{s}_e, z_e) = V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z_e) \hat{a}_{p,\vec{q}_{\parallel}} e^{i\vec{q}_{\parallel}\vec{s}_e} + V_{p,\vec{q}_{\parallel}}^*(z_e) \hat{a}_{p,\vec{q}_{\parallel}}^{\dagger} e^{-i\vec{q}_{\parallel}\vec{s}_e} \quad (3.40)$$

mit

$$V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z_e) = -\frac{i}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 e^2 \hbar}{2AN_{\Omega}\omega_p(q_{\parallel})}} C_{p,\vec{q}_{\parallel}} E_{p,\vec{q}_{\parallel}}^{\parallel}(z_e) \quad (3.41)$$

angegeben werden, welche der Fröhlich-Wechselwirkung im Volumen äquivalent ist. Die Größe  $A$  steht für die Probenfläche. Für einige Modellsysteme sind die Elektron-Phonon-Wechselwirkungen im Zusammenhang mit der Polaron-Kopplung explizit berechnet worden [Wen85, Wen87b, Wen87a, Wen90d, Hai90, Lia91, Hai93].

### 3.3 Klassische quasi-zweidimensionale Magneto-Plasmon-Phononen

Im Abschnitt 1.5.1 wurde ein klassisches Modell für die Magneto-Plasmonen eines Q2DEG vorgestellt. Dieses soll nun hier um die Ankopplung an die polaren Phononen des Schichtsystems erweitert werden. Das bereits vorgestellte Grundmodell ist darin als Grenzfall enthalten.

Ein von außen einwirkendes elektrisches Feld

$$\vec{E}_{\vec{q}_{\parallel},\omega}(\vec{s}, t) = \vec{E}(\vec{q}_{\parallel}, \omega) \exp [i(\vec{q}_{\parallel}\vec{s} - \omega t)] \quad (3.42)$$

rege das Gesamtsystem bestehend aus Elektronengas und Gitter zu Eigenschwingungen an. Dabei resultiert infolge der Anregung eine lokale Auslenkung

$$\vec{u}_{\vec{q}_{\parallel},\omega}(\vec{s}, z, t) = \vec{u}(\vec{q}_{\parallel}, \omega) |\phi_0(z)|^2 \exp [i(\vec{q}_{\parallel}\vec{s} - \omega t)] \quad (3.43)$$

der (quasi-)freien Elektronen aus ihrer Ruhelage sowie eine Trennung

$$\vec{w}_{\vec{q}_{\parallel},\omega}(\vec{s}, z, t) = \vec{w}(\vec{q}_{\parallel}, \omega) \pi_{\vec{q}_{\parallel}}(z) \exp [i(\vec{q}_{\parallel}\vec{s} - \omega t)] \quad (3.44)$$

der entgegengesetzt geladenen Gitterionen in Form einer Gittermode (Modenindex  $p$  hier unterdrückt). Be-

trachtet werden hier nur die Feld- und Auslenkungskomponenten innerhalb der Ebene des Q2DEG. Die z-Einhüllende des Q2DEG mit der Flächendichte  $n_e = \frac{N}{A}$  ( $N$ : Anzahl der Elektronen) ist im elektrischen Quantengrenzfall durch das Betragsquadrat der z-Wellenfunktion  $\phi_0(z)$  des Grundsubbandes gegeben. Die Größe  $\pi_{\vec{q}_{\parallel}}(z)$  steht entsprechend für die Einhüllende der Gitterschwingung. Aus Gründen der Einfachheit wird die betrachtete polare Gittermode durch eine effektive Gitterladung  $e^*$ , eine effektive reduzierte Gittermasse  $\mu$  und eine effektive Elementarzellen-Flächendichte  $n_{\Omega} = \frac{N_{\Omega}}{A}$  ( $N_{\Omega}$ : Anzahl der Gitterzellen) parametrisiert. Mit den Auslenkungen sind jeweils die makroskopischen Polarisierungen  $\vec{P}_e = -n_e e \vec{u}$  und  $\vec{P}_{ph} = -n_{\Omega} e^* \vec{w}$  verbunden. Diese führen gemäß  $\rho_{e/ph}(\vec{q}_{\parallel}) = i\vec{q}_{\parallel} \vec{P}_{e/ph}(\vec{q}_{\parallel})$  im 2D-Impulsraum zu Ladungsdichteveränderungen der Gestalt

$$\rho_e(\vec{q}_{\parallel}, z) = -i n_e e \vec{q}_{\parallel} \vec{u}(\vec{q}_{\parallel}) |\phi_0(z)|^2 \quad (3.45)$$

und

$$\rho_{ph}(\vec{q}_{\parallel}, z) = -i n_{\Omega} e^* \vec{q}_{\parallel} \vec{w}(\vec{q}_{\parallel}) \pi(z) . \quad (3.46)$$

Unter Verwendung der elektrostatischen Greenschen Funktion [Jac62, Wen93b]

$$G(\vec{q}_{\parallel}, z - z') = \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} q_{\parallel}} \exp(-q_{\parallel} |z - z'|) \quad (3.47)$$

für die quasi-zweidimensionale Geometrie führen die Dichteveränderungen zu elektrostatischen Potentialen

$$\Phi_e(\vec{q}_{\parallel}, z) = -i \frac{n_e e}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} u_l(\vec{q}_{\parallel}) \int_{-\infty}^{\infty} dz' |\phi_0(z')|^2 \exp(-q_{\parallel} |z - z'|) \quad (3.48)$$

und

$$\Phi_{ph}(\vec{q}_{\parallel}, z) = -i \frac{n_{\Omega} e^*}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} w_l(\vec{q}_{\parallel}) \int_{-\infty}^{\infty} dz' \pi(z') \exp(-q_{\parallel} |z - z'|) , \quad (3.49)$$

die sich zu einem Gesamtpotential  $\Phi(\vec{q}_{\parallel}, z) = \Phi_e(\vec{q}_{\parallel}, z) + \Phi_{ph}(\vec{q}_{\parallel}, z)$  aufaddieren. Mit  $u_l$  und  $w_l$  sind hier die longitudinalen Auslenkungskomponenten entlang der Ausbreitungsrichtung  $\vec{q}_{\parallel}$  abgekürzt. Die dazu senkrechten transversalen Komponenten  $u_t$  und  $w_t$  führen zu keinem elektrostatischen Potential oder treten gar nicht erst auf (siehe z.B. Gleichung 3.10). Hierbei sind wiederum zwecks Einfachheit die Unterschiede in der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_{\infty}$  im Schichtsystem vernachlässigt. Das induzierte Potential wirkt auf die Gesamtladungsdichte  $\rho(\vec{q}_{\parallel}, z) = \rho_e(\vec{q}_{\parallel}, z) + \rho_{ph}(\vec{q}_{\parallel}, z)$  zurück und führt zu einem Anstieg der inneren Energie um

$$\Delta U = A \int_{-\infty}^{\infty} dz \Phi^*(\vec{q}_{\parallel}, z) \rho(\vec{q}_{\parallel}, z) . \quad (3.50)$$

Betrachtet man ein repräsentatives Elektron beziehungsweise eine ausgewählte Ionengruppe, so wirken auf dieses bzw. innerhalb dieser elektrostatische Rückstellkräfte gemäß

$$f_{e,l}(\vec{q}_{\parallel}) = -\frac{1}{N} \frac{\partial \Delta U}{\partial u_l^*(\vec{q}_{\parallel})} = -m^* \omega_{pl}^2(q_{\parallel}) u_l(\vec{q}_{\parallel}) - \frac{n_{\Omega} e^* e}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} q_{\parallel} H(q_{\parallel}) w_l(\vec{q}_{\parallel}) \quad (3.51)$$

und

$$f_{ph,l}(\vec{q}_{\parallel}) = -\frac{1}{N_{\Omega}} \frac{\partial \Delta U}{\partial w_l^*(\vec{q}_{\parallel})} = -\mu \omega_{pl,ph}^2(q_{\parallel}) w_l(\vec{q}_{\parallel}) - \frac{n_e e^* e}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} q_{\parallel} H(q_{\parallel}) u_l(\vec{q}_{\parallel}) . \quad (3.52)$$

Hierin stehen

$$\omega_{pl}(q_{\parallel}) = \sqrt{\frac{n_e e^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} m^*} q_{\parallel} F(q_{\parallel})} \quad (3.53)$$

für die elektronische und

$$\omega_{pl,ph}(q_{\parallel}) = \sqrt{\frac{n_{\Omega}(e^*)^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} \mu} q_{\parallel} G(q_{\parallel})} \quad (3.54)$$

für die phononische Plasmafrequenz. Die Formfaktoren lauten explizit

$$\begin{Bmatrix} F(q_{\parallel}) \\ G(q_{\parallel}) \\ H(q_{\parallel}) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \begin{Bmatrix} |\phi_0(z)|^2 |\phi_0(z')|^2 \\ \pi(z) \pi^*(z') \\ |\phi_0(z)|^2 \pi(z') \end{Bmatrix} \exp(-q_{\parallel} |z - z'|) . \quad (3.55)$$

Die Bewegungsgleichungen von Q2DEG und Gitter werden nach dem Drudeschen Ansatz aufgestellt:

$$m^* \ddot{\vec{u}} - \frac{m^*}{\tau_e} \dot{\vec{u}} = -e \vec{E} - e \dot{\vec{u}} \times \vec{B} + \vec{f}_e , \quad (3.56)$$

$$\mu \ddot{\vec{w}} - \frac{\mu}{\tau_{ph}} \dot{\vec{w}} = -e^* \vec{E} + \vec{f}_{ph} . \quad (3.57)$$

Hierbei wirke neben dem anregenden elektrischen Feld zusätzlich auf ein Elektron das statische und räumlich homogene Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Die Rückstellkräfte  $\vec{f}_e$  und  $\vec{f}_{ph}$  haben die in den Gleichungen 3.51 und 3.52 angegebenen elektrostatischen Beiträge. Für das Gitter kommt noch eine elastische Rückstellkraft hinzu, welche implizit in  $\vec{f}_{ph}$  enthalten und durch die elastische Phononfrequenz  $\omega_{0,ph}^2$  charakterisiert ist. Die Kompressibilität des Elektronengases liefert einen hydrodynamischen Beitrag zu  $\vec{f}_e$ , der den Austausch und die Korrelationen im Elektronengas zusammenfaßt und im folgenden aber unberücksichtigt bleibt (siehe [Dob94] und dort aufgeführte Referenzen). Um dissipativen Effekten Rechnung zu tragen, ist jeweils ein phänomenologischer Dämpfungsterm mit Streuzeit  $\tau_e$  für das elektronische und  $\tau_{ph}$  für das phononische System berücksichtigt. Sinnvollerweise wählt man zur Beschreibung der Auslenkungen ein Koordinatensystem, das eine Achse entlang des Ausbreitungsvektors  $q_{\parallel}$  und die andere senkrecht zu ihm hat.

Im Frequenz-Impulsraum lauten schließlich die Bewegungsgleichungen in kompakter Matrixform

$$\begin{pmatrix} \omega_{pl}^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_e} & i\omega\omega_c & \sqrt{\frac{n_{\Omega}\mu}{n_e m^*}} \Omega^2 \\ -i\omega\omega_c & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_e} & 0 \\ \sqrt{\frac{n_e m^*}{n_{\Omega}\mu}} \Omega^2 & 0 & \omega_{ph}^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_{ph}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_t \\ w_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{m^*} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{e}{m^*} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^*}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l \\ E_t \\ E_l \end{pmatrix} . \quad (3.58)$$

Darin stehen  $\omega_c$  für die elektronische Zyklotronfrequenz und  $\omega_{ph} = \sqrt{\omega_{0,ph}^2 + \omega_{pl,ph}^2}$  für die (plasmonverschobene) Phononfrequenz. Die Kopplungsfrequenz

$$\Omega(q_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\sqrt{n_{\Omega} n_e} e^* e}{2\sqrt{m^* \mu} \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}}} q_{\parallel} H(q_{\parallel}) \quad (3.59)$$

vermittelt gemäß den Gleichungen 3.51 und 3.52 die elektrostatische Kopplung zwischen Elektronengas und Gitter. Die Matrix auf der linken Seite von Gleichung 3.58 wird üblicherweise als die dynamische Matrix  $\mathbf{D}(q_{\parallel}, \omega)$  des gekoppelten harmonischen Systems und die auf der rechten Seite als die spezifische Ladungsmatrix  $\mathbf{Q}$  bezeichnet. Die Frequenzen der selbsterhaltenden Magneto-Plasmon-Phononen ergeben sich aus der Forderung  $\det(\mathbf{D}(q_{\parallel}, \omega)) = 0$  und lauten bei vernachlässigbarer Dämpfung

$$\omega_{mp-ph}^{\pm}(q_{\parallel}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega_{mp}^2(q_{\parallel}) + \omega_{ph}^2(q_{\parallel}) \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \omega_{mp}^2(q_{\parallel}) - \omega_{ph}^2(q_{\parallel}) \right]^2 + 4 \Omega^4(q_{\parallel})}} . \quad (3.60)$$

Hierin bezeichnet  $\omega_{mp}(q_{\parallel}) = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_{pl}^2(q_{\parallel})}$  die klassische Q2D-Magneto-Plasmonfrequenz.

In der Regel weist das Gitter mehrere Phononmoden auf, an die das Elektronengas ankoppeln kann. Jede weitere Phononmode erhöht dabei die Dimensionalität der Matrizen in Gleichung 3.58 um 1. Die Phononmoden werden im folgenden neben  $q_{\parallel}$  durch den Modenindex  $p = 1, 2, \dots$  charakterisiert. Im allgemeinen Fall der Ankopplung an beliebig viele Gittermoden haben die phononspezifischen von Null verschiedenen Matrixelemente in der dynamischen Matrix  $\mathbf{D}(q_{\parallel}, \omega)$  und in der spezifischen Ladungsmatrix  $\mathbf{Q}$  die Form

$$\begin{aligned} D_{12+p} &= \sqrt{\frac{n_p \mu_p}{n_e m^*}} \Omega_p^2 , & D_{2+p1} &= \sqrt{\frac{n_e m^*}{n_p \mu_p}} \Omega_p^2 , \\ D_{2+p2+p} &= \omega_p^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau_p} , & Q_{2+p2+p} &= -\frac{e_p^*}{\mu_p} . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Hierbei sind sämtliche Parameter wie zuvor definiert und explizit vom Modenindex  $p$  abhängig. Die Frequenzen der Magneto-Plasmon-Phononen berechnen sich gemäß  $\det(\mathbf{D}(q_{\parallel}, \omega)) = 0$  aus der sich auf direktem Wege ergebenden Bestimmungsgleichung

$$\omega_{mp}^2(q_{\parallel}) - \omega^2 - \sum_p \frac{\Omega_p^4(q_{\parallel})}{\omega_p^2(q_{\parallel}) - \omega^2} = 0 . \quad (3.62)$$

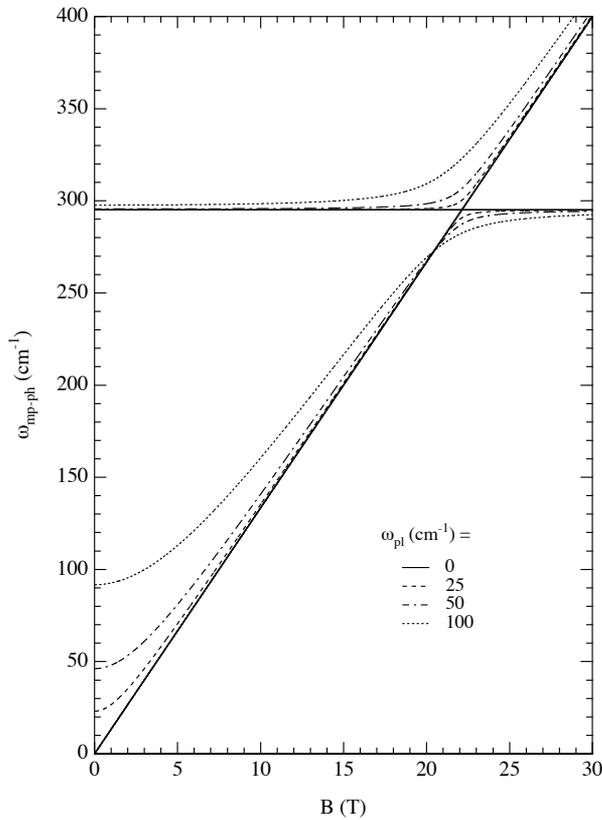
Hierin sind die Dämpfungen wiederum aus Gründen der Einfachheit unberücksichtigt.

Hier soll nun konkret die Ankopplung an die energetisch entarteten LO-Volumenphononen mit Energien  $\omega_{p \equiv q_z}(q_{\parallel}) = \omega_{LO}$  behandelt werden. Der Modenindex  $p$  ist in diesem Fall mit dem quasi-kontinuierlichen Wellenvektor in Wachstumsrichtung  $q_z$  gleichzusetzen. Weiterhin können infolge der Entartung der Phononfrequenzen die Kopplungsstärken gemäß  $\Omega^4(q_{\parallel}) = \sum_{q_z} \Omega_{q_z}^4(q_{\parallel})$  aufsummiert werden. Nach geeigneter Umformung lautet die explizite Form

$$\Omega^4(q_{\parallel}) = 2q_{\parallel} \omega_{2D-pl}^2(q_{\parallel}) \omega_{3D-pl,ph}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' |\phi_0(z)|^2 e^{iq_z z'} e^{-q_{\parallel} |z-z'|} \right|^2 , \quad (3.63)$$

wobei  $\omega_{2D-pl}(q_{\parallel})$  für die strenge 2D-Plasmonfrequenz und  $\omega_{3D-pl,ph}^2 = \frac{n_{\Omega,3D}(e^*)^2}{\epsilon_0 \epsilon_{\infty} \mu}$  für die phononische Volumen-Plasmafrequenz stehen, mit  $n_{\Omega,3D} = \frac{n_{\Omega,(2D)}}{L_z}$  als der 3D-Elementarzellendichte und  $\mu$  der reduzierten Gittermasse. Nach analytischer Ausintegration erhält man für die Kopplung das kompakte Zwischenergebnis

$$\Omega^4(q_{\parallel}) = \omega_{2D-pl}^2(q_{\parallel}) \omega_{3D-pl,ph}^2 F(q_{\parallel}) = \omega_{pl}^2(q_{\parallel}) \omega_{3D-pl,ph}^2 . \quad (3.64)$$



**Abbildung 3.6:** Gerechnete Magnetfelddispersionen der klassischen Magneto-Plasmon-Phononen.

Die phononische Plasmafrequenz steht über  $\omega_{3D-pl,ph}^2 = \omega_{LO}^2 - \omega_{TO}^2$  in direktem Zusammenhang mit der LO-TO-Aufspaltung binärer polarer Kristalle. Mit der Beziehung 3.64 kann die Bestimmungsgleichung 3.62 schließlich direkt gelöst werden und man bekommt als Resultat

$$\omega_{mp-ph}^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega_{mp}^2 + \omega_{LO}^2] \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\omega_{mp}^2 - \omega_{LO}^2]^2 + 4\omega_{pl}^2 (\omega_{LO}^2 - \omega_{TO}^2)}} . \quad (3.65)$$

Diese funktionale Form ist bis auf die konkrete Zuordnung der Parameter identisch zu der aus Gleichung 3.60. Im Resonanzfall  $\omega_{mp} = \omega_{LO}$  ist die Modenaufspaltung zwischen Phonon- und Plasmonast durch die Kopplung  $\Omega(q_{||})$  bestimmt. Diese verschwindet jedoch für  $q_{||} \rightarrow 0$  wegen  $\omega_{pl}(q_{||} \rightarrow 0) \rightarrow 0$ . Für die Zyklotronresonanz tritt daher keine direkte Ankopplung an das Gitter auf.

Der Vollständigkeit wegen sei in diesem Zusammenhang angemerkt, daß man die Energien der Magneto-Plasmon-Phononen eines strengen 2DEG mit Ankopplung an die LO-Volumenphononen auch direkt durch Lösen der impliziten Gleichung

$$\omega_{mp-ph}^2 = \omega_c^2 + \frac{n_e e^2}{2m^* \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_{mp-ph})} q_{||} \quad (3.66)$$

erhält, wenn man die für binäre Kristalle geltende dielektrische Funktion gemäß Gleichung 3.1 verwendet [Oji86]. Weiterhin sei darauf hingewiesen, daß die klassisch hergeleiteten Dispersionen der (Magneto-)Plasmon-Phononen identisch zu denen sind, die sich quantenmechanisch aus der langwelligen RPA-Näherung (random phase approximation) ergeben [Wen90a]. Die oben ausgeführten Betrachtungen sind in der Abbildung 3.6 anhand einiger exemplarisch gerechneter Magnetfelddispersionen veranschaulicht. Bei den Berechnungen ist die Gleichung 3.65 zugrunde gelegt.



## Kapitel 4

# Quasi-zweidimensionale Polaronen in GaAs

Die Elektron-Phonon-Kopplung führt zu einer Renormierung der elektronischen Eigenschaften eines quasi-zweidimensionalen Elektronengases (Q2DEG). Besonders betroffen ist von dieser Kopplung die elektronische Zyklotronresonanz, die von dieser sogenannten Polaron-Kopplung maßgeblich beeinflusst wird. Man hat im Zusammenhang mit der Polaron-Kopplung zwischen zwei Regimes zu unterscheiden:

1. Im Regime der resonanten Polaron-Effekte treten in der Zyklotronresonanz charakteristische Resonanzeinbrüche und Linienaufspaltungen in Erscheinung, die mit typischen Phononfrequenzen des Wirtskristalls zusammenhängen. Die resonanten Polaron-Kopplungen sind häufig derart ausgeprägt, daß sie über anderweitige Einflüsse, beispielsweise der Bandstruktur, dominieren.
2. Im Regime der nicht-resonanten Polaron-Effekte hingegen bewegen sich die eher subtilen Auswirkungen der Polaron-Kopplung auf einem Niveau, auf welchem auch die Bandstruktureinflüsse und die Einflüsse aufgrund des Störstellen-Hintergrundes angesiedelt sind. Das Verständnis der Polaron-Kopplungen ist hier essentiell, um sie von anderen Einflüssen abgrenzen zu können.

Die Zielstellung dieses Kapitels ist auf ein die beiden Regimes übergreifendes Verständnis der Polaron-Zyklotronresonanzen ausgerichtet. Hierzu werden zunächst im Abschnitt 4.1 drei theoretische Modelle vorgestellt, die abhängig vom Regime ihre speziellen Vorzüge und auch Nachteile aufweisen. Im Rahmen des Abschnitts 4.2 werden die resonanten Magneto-Polaron-Effekte über einen sehr weiten Bereich der Elektronendichte ausführlich untersucht. Zuletzt ist der Abschnitt 4.3 den nicht-resonanten Polaron-Effekten gewidmet.

### 4.1 Theoretische Modelle zu quasi-zweidimensionalen Magneto-Polaronen

Aufgrund der verschwindenden Kopplung für  $q_{\parallel} \rightarrow 0$  können Magneto-Plasmon-Phononen gemäß Abschnitt 3.3 nicht für die experimentell oftmals zu beobachtenden Resonanzanomalien in der Zyklotronresonanz, welche energetisch mit den typischen Phononenfrequenzen im System korrelieren, verantwortlich sein. Hier muß die Fröhlich-Wechselwirkung auf mikroskopischer Ebene behandelt werden, um die zugrunde liegenden Mechanismen aufzudecken.

Zuerst soll dazu im Teilabschnitt 4.1.1 das Quasiteilchen-Bild freier Polaron-Gase entwickelt und auf die Quantisierungsverhältnisse im Q2DEG übertragen werden. Im darauffolgenden Teilkapitel 4.1.2 wird dann der Kubo-Formalismus für die dynamische Leitfähigkeit im Zusammenhang mit der Elektron-Phonon-Wechselwirkung vorgestellt. Dabei werden zwei Theorien, die auf der Kubo-Formel basieren, näher betrachtet und Modellrechnungen zu diesen durchgeführt.

### 4.1.1 Quasiteilchen-Modell nicht-wechselwirkender Polaronen

Der Hamilton-Operator von Elektronengas und Gitter lautet

$$H = H_e + H_{ph} + H_{e-ph} . \quad (4.1)$$

Der elektronische Anteil hat in der Besetzungszahldarstellung (2. Quantisierung) die Form

$$H_e = \sum_l \epsilon_l \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_l , \quad (4.2)$$

wobei die Erzeuger  $\hat{c}_l^\dagger$  und Vernichter  $\hat{c}_l$   $|\phi_l\rangle$  den fermionischen Anti-Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_l^\dagger, \hat{c}_{l'}^\dagger\} &= \{\hat{c}_l, \hat{c}_{l'}\} = 0 , \\ \{\hat{c}_l, \hat{c}_{l'}^\dagger\} &= \delta_{l,l'} \end{aligned} \quad (4.3)$$

gehoren [Fet71, Gro86]. Das zugrunde liegende Einteilchen-Problem wird als gelöst vorausgesetzt. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung sei hier vernachlässigt oder in Form einer effektiven Einteilchen-Näherung wie z.B. der Hartree- oder Hartree-Fock-Näherung berücksichtigt. Analog zum Phonon-System gemäß Abschnitt 3.2 projiziert der fermionische Besetzungszahloperator  $\hat{n}_l = \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_l$  aus der Slater-Determinante  $|\Phi\rangle = |\{n_l(\Phi)\}\rangle$  die Besetzungszahlen

$$\hat{n}_l |\Phi\rangle = n_l(\Phi) |\Phi\rangle \quad (4.4)$$

für die Einteilchen-Zustandsbasis  $\{|l\rangle\}$  heraus. Der Phonon-Hamilton-Operator ist in Gleichung 3.30 angegeben.

Nach Transformation in die Besetzungszahldarstellung lautet die Elektron-Phonon-Wechselwirkung

$$H_{e-l-ph} = \sum_{l,l'} \sum_k [\hat{a}_k \langle l'|V_k|l\rangle + \hat{a}_k^\dagger \langle l'|V_k^\dagger|l\rangle] \hat{c}_{l'}^\dagger \hat{c}_l . \quad (4.5)$$

In dieser Form läßt sie sich sehr anschaulich interpretieren: Der erste Term beschreibt die Absorption eines Phonons  $k$  durch ein Elektron im Einteilchen-Niveau  $l$ , das daraufhin in den Zustand  $l'$  gestreut wird. Der zweite Term beschreibt den komplementären Prozeß, bei dem ein Phonon emittiert wird. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die beiden Prozesse sind in der Ortsdarstellung durch die Matrixelemente

$$\langle l'|V_k|l\rangle = \int d^3r_e \phi_{l'}^*(\vec{r}_e) V_k(\vec{r}_e) \phi_l(\vec{r}_e) , \quad \langle l'|V_k^\dagger|l\rangle = \int d^3r_e \phi_{l'}^*(\vec{r}_e) V_k^*(\vec{r}_e) \phi_l(\vec{r}_e) \quad (4.6)$$

bestimmt (siehe Gleichung 3.33). Läßt man die Elektron-Phonon-Kopplung zunächst unberücksichtigt, so ist der ungestörte Gesamtgrundzustand für das Elektronengas-Gitter-System durch das direkte Produkt  $|\Phi\rangle \otimes |\bar{\Theta}\rangle = |\{n_l(\Phi)\}\rangle \otimes |\{\bar{n}_k(\bar{\Theta})\}\rangle$  gegeben. Bei hinreichend schwacher Elektron-Phonon-Wechselwirkung, wie sie im GaAs-System vorliegt, ist eine störungstheoretische Behandlung angemessen.

Bis zur der zweiten Ordnung lautet der Zustand des gekoppelten Systems [Mad78, Sak85]

$$|\tilde{\Phi}\rangle = \frac{1}{N_{\tilde{\Phi}}} |\Phi\rangle \otimes |\bar{\Theta}\rangle + \frac{1}{N_{\tilde{\Phi}}} \sum_{l',l} \sum_k (\hat{c}_{l'}^\dagger \hat{c}_l |\Phi\rangle) \otimes \left[ \frac{\langle l'|V_k|l\rangle}{\epsilon_{l'} - \epsilon_l + \hbar\omega_k} (\hat{a}_k |\bar{\Theta}\rangle) + \frac{\langle l'|V_k^\dagger|l\rangle}{\epsilon_{l'} - \epsilon_l - \hbar\omega_k} (\hat{a}_k^\dagger |\bar{\Theta}\rangle) \right] . \quad (4.7)$$

Die darin auftretenden Resonanznenner entsprechen den Energiedifferenzen zwischen dem ungestörten Zustand und allen möglichen beigemischten Zuständen mit einem zusätzlichen bzw. einem fehlenden Phonon.  $N_{\bar{\Phi}}$  steht für die Normierung. Geht man mit diesem Ansatz in den Hamilton-Operator des Gesamtsystems 4.1, so erhält man unter Ausnutzung der bosonischen Vertauschungs- und fermionischen Antivertauschungsrelationen für die Gesamtenergie als Ergebnis

$$E_{\bar{\Phi}} = E_{\Phi} + E_{\bar{\Theta}} + \sum_{l' \neq l} \sum_k |\langle l' | V_k | l \rangle|^2 n_l(\Phi) [1 - n_{l'}(\Phi)] \left\{ \frac{\bar{n}_k(\bar{\Theta}) + 1}{\epsilon_l - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k} + \frac{\bar{n}_k(\bar{\Theta})}{\epsilon_l - \epsilon_{l'} + \hbar\omega_k} \right\} . \quad (4.8)$$

Diese kann in der Form  $E_{\bar{\Phi}} = E_{\bar{\Theta}} + \sum_l \tilde{\epsilon}_l n_l(\Phi)$  geschrieben werden, wobei mit

$$\tilde{\epsilon}_l = \epsilon_l + \sum_{l' \neq l} \sum_k |\langle l' | V_k | l \rangle|^2 [1 - n_{l'}(\Phi)] \left\{ \frac{\bar{n}_k(\bar{\Theta}) + 1}{\epsilon_l - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k} + \frac{\bar{n}_k(\bar{\Theta})}{\epsilon_l - \epsilon_{l'} + \hbar\omega_k} \right\} \quad (4.9)$$

die renormierten Polaron-Energien bezeichnet sind. Für tiefe Temperaturen  $k_B T \ll \hbar\omega_k$ , wie sie bei experimentellen Bedingungen zur Untersuchung des Polaron-Effektes vorliegen, gilt für die Phonon-Besetzungszahlen  $\bar{n}_k(\bar{\Theta}) \approx 0$ . Damit vereinfacht sich der Ausdruck 4.9 zu

$$\tilde{\epsilon}_l = \epsilon_l + \sum_{l' \neq l} \sum_k |\langle l' | V_k | l \rangle|^2 [1 - n_{l'}(\Phi)] \frac{1}{\epsilon_l - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k} . \quad (4.10)$$

In dieser Form handelt es sich, abgesehen vom Besetzungsfaktor, um das oft zitierte Einpolaron-Problem in zweiter störungstheoretischer Ordnung bei der Gittertemperatur  $T = 0$  [Lin83, Sig85, Zaw85, Pee85, Pee86d, Pee86a, Wen93a]. Der Besetzungsfaktor  $[1 - n_{l'}(\Phi)]$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Einteilchen-Orbital  $|l'\rangle$  als Streukanal zur Verfügung steht. Ist dieses Orbital bereits besetzt, so ist die Phonon-Streuung in diesen Kanal durch das Pauli-Ausschließungsprinzip blockiert.

Die für das Einpolaron-Problem in [Lin83, Pee85, Zaw85, Wen93a] entwickelten Lösungsverfahren sind aufgrund der formalen Äquivalenz auf das vorliegende Vielpolaron-Problem übertragbar. Der Ausdruck 4.10 repräsentiert die Rayleigh-Schrödinger-Störungstheorie (RSPT), die im nicht-resonanten Bereich die polaronische Renormierung gut wiedergibt. Zur korrekten Beschreibung von polaronischen Resonanzphänomenen sind die Resonanznenner der Summanden von Gleichung 4.10 um einen Beitrag  $\Delta_l^{PT}$  zu modifizieren:

$$\tilde{\epsilon}_l^{PT} = \epsilon_l + \sum_{l' \neq l} \sum_k |\langle l' | V_k | l \rangle|^2 [1 - n_{l'}(\Phi)] \frac{1}{\epsilon_l + \Delta_l^{PT} - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k} . \quad (4.11)$$

Der hochstehende Index unterscheidet die drei Typen der Störungstheorie (PT), die betrachtet werden:

$$\Delta_l^{RS} = 0 , \quad (4.12)$$

$$\Delta_l^{WB} = \tilde{\epsilon}_l^{WB} - \epsilon_l , \quad (4.13)$$

$$\Delta_l^{IWB} = \tilde{\epsilon}_l^{IWB} - \epsilon_l - (\tilde{\epsilon}_0^{RS} - \epsilon_0) . \quad (4.14)$$

Das nicht-resonante Regime, in welchem die RSPT die Renormierungen korrekt wiedergibt, ist dadurch charakterisiert, daß die Energiedifferenzen zwischen einem betrachteten elektronischen Orbital  $|l\rangle$  und dessen Streupartnern  $|l'\rangle$  energetisch sehr weit unterhalb der Phononfrequenzen liegen. Durch die Ankopplung an das Gitter werden die Polaron-Orbitale hauptsächlich gegenüber den nackten elektronischen Zuständen energetisch abgesenkt. Diese Energieabsenkung wird als Polaron-Bindungsenergie bezeichnet und ist der Grund für die Bildung des Quasiteilchens. Im resonanten Regime jedoch kommen die elektronischen Energiedifferenzen

in Resonanz mit den Energien der polaren Gitterschwingungen. Wenn dies der Fall ist, divergiert einer der Summenbeiträge in der Gleichung 4.10. Um den resonanten Bereich korrekt zu erfassen, geht man zur Wigner-Brillouin-Störungstheorie (WBPT) über. Formal geschieht dies, indem man in sämtlichen Resonanzennern anstatt der ungestörten Niveauenergie  $\epsilon_l$  die renormierte Polaron-Energie  $\tilde{\epsilon}_l$  einsetzt [Sak85]. Damit wird die Bestimmungsgleichung 4.11 selbstkonsistent und die Divergenzen werden zu Resonanzaufspaltungen. Die energetisch niedrigsten Resonanzaufspaltungen treten bei den Energien  $\tilde{\epsilon}_l = \epsilon_0 + \hbar\omega_k$  (Einphonon-Linien) auf. Dabei gehen gemäß dem quantenmechanischen Überkreuzungsverbot die Polaron-Energien bei Durchstimmung der elektronischen Niveaus mit Hilfe eines äußeren Parameters (z.B. Magnetfeld) asymptotisch zu den Phonon-Energien  $\tilde{\epsilon}_l^{k-} \rightarrow \hbar\omega_k$  über, und umgekehrt  $\hbar\omega_k \rightarrow \tilde{\epsilon}_l^{k+}$ . Der Index  $k+$  bzw.  $k-$  kennzeichnet den Polaron-Zweig in Bezug auf die jeweilige Gittermode. Vom energetisch abgesenkten Grundniveau  $\tilde{\epsilon}_0$  aus betrachtet liegen die entsprechenden Einphonon-Linien energetisch höher als  $\hbar\omega_k$ . Dies macht physikalisch jedoch wenig Sinn, da dann die resonanten Polaron-Zustände  $\tilde{\epsilon}_l^{k-}$ ,  $l > 0$  unter Phonon-Emission zerfallen könnten. Die in [Lin83] vorgeschlagene verbesserte Wigner-Brillouin-Störungstheorie (IWBPT) behebt diesen Makel zumindest für den Einpolaron-Grenzfall weitgehend. In der IWBPT wird zusätzlich das betrachtete Orbital in den Nennern noch um die Polaron-Bindungsenergie des niedrigsten Niveaus  $\tilde{\epsilon}_0^{RS} - \epsilon_0$  korrigiert. Dies hat zur Folge, daß im resonanten Regime die niedrigsten Einphonon-Linien genau um  $\hbar\omega_k$  über den bei Elektronengasen in der Regel entarteten (Q2D) oder kontinuierlichen (3D,Q1D) Polaron-Grundniveaus zu liegen kommen. Dadurch schmiegen sich im resonanten Bereich die Polaron-Energien des untersten Zweiges korrekterweise asymptotisch an die nun renormierten Einphonon-Linien an. Damit ist die IWBPT in der Lage, den Übergang zwischen den beiden Regimes zu beschreiben. Sie wird deshalb für die weiteren Betrachtungen herangezogen. Der Übersichtlichkeit wegen wird der die Näherung kennzeichnende hochgestellte Index in Zukunft weggelassen.

Man kann, nun gemäß dem oben entwickelten Quasiteilchen-Bild, den Vielteilchen-Zustand 4.7 des mit dem Gitter wechselwirkenden Elektronengases als ein Gas freier Polaronen annähern:

$$|\tilde{\Phi}\rangle \approx \prod_l \left(\hat{b}_l^+\right)^{n_l} |v\tilde{a}c\rangle . \quad (4.15)$$

Darin stehen die  $\hat{b}_l^+$  für die Polaron-Erzeuger ( $\hat{b}_l$  sind die entsprechenden Vernichter) und  $|v\tilde{a}c\rangle = |vac\rangle \otimes |\bar{\Theta}\rangle \approx |vac\rangle \otimes |v\tilde{a}c\rangle$  für den Polaron-Vakuumzustand. Aufgrund der Fermionizität können die Besetzungszahlen  $n_l$  einer einzelnen Slater-Determinante nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Bei endlichen Temperaturen hat man ein statistisches Gemisch solcher Zustände vorliegen. Die Polaron-Orbitale  $|\tilde{l}\rangle$  ergeben sich schließlich aus der Störungstheorie zweiter Ordnung unter Verwendung der Polaron-Energien gemäß Gleichung 4.10 bzw. 4.11 zu

$$|\tilde{l}\rangle = \hat{b}_l^+ |v\tilde{a}c\rangle = \sqrt{Z_l} \left[ |l\rangle + \sum_k \sum_{l'(\neq l)} \frac{\sqrt{1-n_{l'}} \langle l'|V_k^+|l\rangle}{\epsilon_l + \Delta_l - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k} \hat{a}_k^+ |l'\rangle \right] \otimes |v\tilde{a}c\rangle . \quad (4.16)$$

Die Größe

$$Z_l = \left\{ 1 + \sum_k \sum_{l'(\neq l)} \frac{[1-n_{l'}] |\langle l'|V_k^+|l\rangle|^2}{[\epsilon_l + \Delta_l - \epsilon_{l'} - \hbar\omega_k]^2} \right\}^{-1} \quad (4.17)$$

steht hierbei für die Normierung der Polaron-Zustände und gibt an, mit welchem Anteil das ungestörte elektronische Orbital  $|l\rangle$  im Polaron-Orbital  $|\tilde{l}\rangle$  enthalten ist. Bei endlichen Temperaturen sind für  $n_{l'}$  in den Gleichungen 4.16 und 4.17 die Fermi-Dirac-Besetzungswahrscheinlichkeiten einzusetzen. Bei der hier dargelegten

Näherung ist die effektive phononvermittelte Wechselwirkung zwischen den Elektronen (bzw. Polaronen) vernachlässigt. Dem Vielteilchen-Aspekt wird lediglich über die Besetzungseffekte Rechnung getragen.

#### 4.1.1.1 Magneto-Polaronen im quasi-zweidimensionalen Elektronengas

Die im vorigen Abschnitt dargelegten Ausfuhungen sollen im folgenden auf ein Q2DEG im senkrechten Magnetfeld angewendet werden.

Mit den freien Landau-Zuständen aus Gleichung 2.55 und der Fröhlich-Wechselwirkung gemäß 3.40 ergeben sich die Matrixelemente für die Phonon-Absorption ( $\hat{a}_{p,\vec{q}_{\parallel}}$ ) zu

$$\langle i', n', X', \sigma' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) e^{i\vec{q}_{\parallel} \cdot \vec{r}} | i, n, X, \sigma \rangle = \delta_{\sigma',\sigma} \langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle A_{n',n}(\vec{q}_{\parallel}) B_{X',X}(\vec{q}_{\parallel}) . \quad (4.18)$$

Darin stehen

$$A_{n',n}(\vec{q}_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\min(n',n)!}{\max(n',n)!}} \exp\left(\frac{-q_{\parallel}^2 l_m^2}{4}\right) \left[ \frac{l_m}{\sqrt{2}} \left( i q_x - (-1)^{\theta(n-n')} q_y \right) \right]^{|n'-n|} L_{\min(n',n)}^{|n'-n|} \left( \frac{q_{\parallel}^2 l_m^2}{2} \right) \quad (4.19)$$

und

$$B_{X',X}(\vec{q}_{\parallel}) = \delta_{X',X+q_y l_m^2} \exp\left( i q_x \frac{X' + X}{2} \right) \quad (4.20)$$

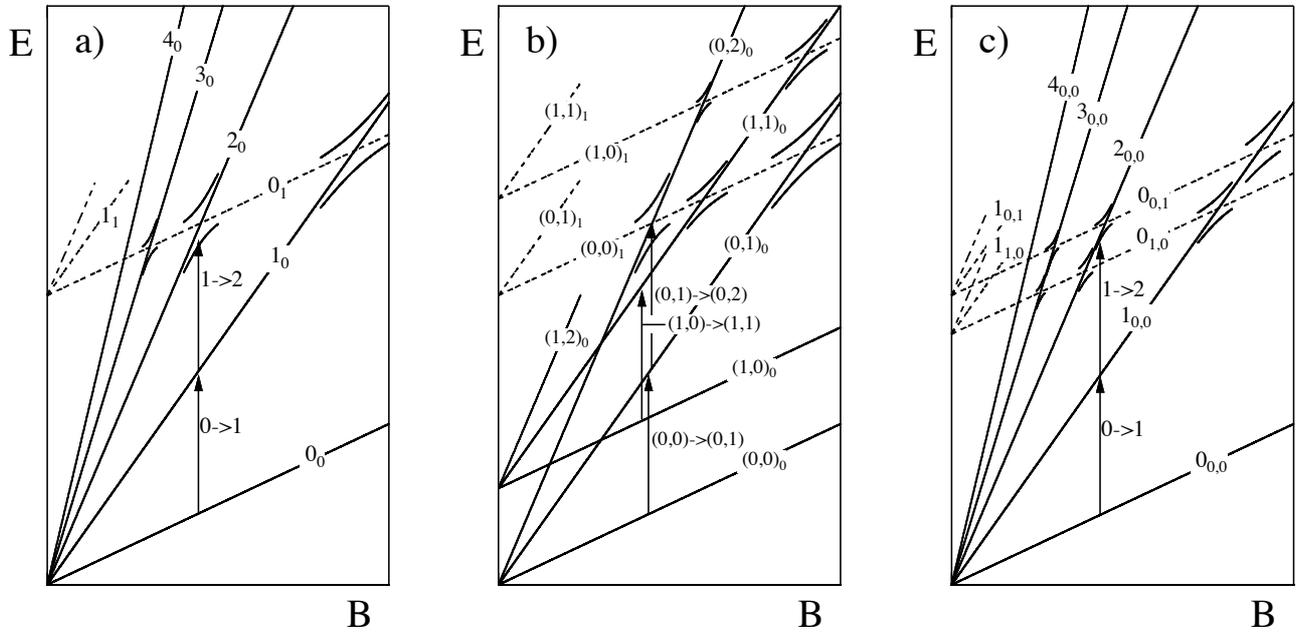
für die Orbital- und Aufpunktanteile der Ebene-Welle-Matrixelemente in der QDEG-Ebene [And74, Mac84b]. In Gleichung 4.19 bezeichnet  $\theta(x)$  die Stufenfunktion. Mit  $X = k_y l_m^2$  und  $X' = k'_y l_m^2$  identifiziert man in Gleichung 4.20 die Impulserhaltung  $k'_y = k_y + q_y$  aufgrund der in der verwendeten Landau-Eichung erhaltenen Translationsinvarianz in y-Richtung.

Mit den Elektron-Phonon-Matrixelementen 4.18 gelangt man über Gleichung 4.16 zu den Polaron-Zuständen  $|i, n, \widetilde{X}, \sigma\rangle$  des Q2DEG:

$$|i, n, \widetilde{X}, \sigma\rangle = \sqrt{Z_{i,n,\sigma}} \left[ |i, n, X, \sigma\rangle + \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{i',n'} \sqrt{1 - \nu_{i',n',\sigma}} \langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}^*(z) | i \rangle \times \frac{A_{n',n}(-\vec{q}_{\parallel}) \exp\left[-i q_x \left(X - \frac{q_y l_m^2}{2}\right)\right]}{\epsilon_{i,n,\sigma} + \Delta_{i,n,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma} - \hbar\omega_p(q_{\parallel})} \hat{a}_{p,\vec{q}_{\parallel}}^+ |i', n', X - q_y l_m^2, \sigma\rangle \right] \otimes |vac\rangle . \quad (4.21)$$

Aufgrund der Entartung der Landau-Niveaus hängen sowohl die Resonanznenner als auch die Besetzungszahlen nicht vom Aufpunktindex  $X$  ab und die Partialfüllungen  $\nu_{i',n',\sigma}$  treten als Besetzungsgewichte in Erscheinung. Die Energiekorrektur  $\Delta_{i,n,\sigma}$  im Nenner hängt gemäß den Gleichungen 5.6 bis 5.7 vom Typ der verwendeten Störungstheorie ab. Die resultierenden Energien  $\tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma}$  der Polaron-Landau-Niveaus lauten

$$\tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma} = \epsilon_{i,n,\sigma} + \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{i',n'} [1 - \nu_{i',n',\sigma}] \frac{|\langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle|^2 |A_{n,n'}(\vec{q}_{\parallel})|^2}{\epsilon_{i,n,\sigma} + \Delta_{i,n,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma} - \hbar\omega_p(q_{\parallel})} . \quad (4.22)$$



**Abbildung 4.1:** Resonanzszenarien aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Teilbild a) zeigt schematisch das Zustandekommen der resonanten Polaron-Effekte im elektrischen Quantengrenzfall mit Beteiligung nur einer Phononmode. Teilbild b) hat als Erweiterung ein zweites besetztes Subband und Abbildung c) stellt die Verhältnisse im elektrischen Quantengrenzfall mit einem aufgespaltenen Phonon-Doublett dar. Die durchgezogenen Linien markieren die Landau-Fächer des Elektronengases und die gestrichelten Linien deren Einphonon-Replikas. Bei der Indizierung der Niveaus steht der tiefgestellte Index für die Anzahl der Phononen ( a) und b) nur ein Typ, c) zwei Typen) und der normalgestellte Index für die elektronischen Quantenzahlen ( a) und c) nur Landau-Index, b) Subband- und Landau-Index geklammert). Die vertikalen Pfeile deuten mögliche Zyklotronübergänge an.

Der Normierungsfaktor

$$Z_{i,n,\sigma} = \left\{ 1 + \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{i',n'} [1 - \nu_{i',n',\sigma}] \frac{|\langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle|^2 |A_{n,n'}(\vec{q}_{\parallel})|^2}{[\epsilon_{i,n,\sigma} + \Delta_{i,n,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma} - \hbar\omega_p(q_{\parallel})]^2} \right\}^{-1} \quad (4.23)$$

schließlich gibt den Anteil an, mit welchem das ursprüngliche ungestörte Landau-Niveau noch im entsprechenden Polaron-Landau-Niveau zu finden ist.

Eine Analyse der Polstruktur der Summanden in Gleichung 4.22 gibt Aufschluß über mögliche Resonanzszenarien. Zur graphischen Veranschaulichung trägt man den Landau-Fächer des ungestörten Elektronengases gemeinsam mit seinen Phonon-Replikas auf. Anhand der Kreuzungspunkte dieser Auftragung erfolgt eine Klassifizierung und Parameterabschätzung möglicher Anomalien in der Zyklotronresonanz aufgrund des Polaron-Effektes. In der Abbildung 4.1 sind drei mögliche Resonanzszenarien aufgezeigt. Teilbild a) zeigt den in der Regel betrachteten Fall des elektrischen Quantenlimits mit nur einem besetzten Subband und einer Phononmode. Die Kreuzungspunkte werden als resonante Polaron-Vollfeld-, -Halbfeld-, -Drittfeldkopplung, usw. klassifiziert und treten bei der Resonanzbedingung

$$\omega_c \approx \frac{\omega_{LO}}{N} \quad (4.24)$$

auf. Die Resonanzordnung  $N$  entspricht dem Index des die niedrigste Phononlinie kreuzenden Landau-Niveaus. In Figur b) hat man zwei besetzte Subbänder vorliegen, deren Subband-Abstand deutlich kleiner als die Phononfrequenz ist. Hier treten als Besonderheit neben den Intrasubband-Polaron-Kopplungen der beiden Subbänder (siehe a)) auch resonante Intersubband-Polaron-Kopplungen an den Kreuzungspunkten zwischen den Landau-Niveaus eines höheren Subbandes und den Einphonon-replizierten Landau-Niveaus des niedrigsten Subbandes auf. In Figur c) schließlich wird im elektrischen Quantenlimit als Spezialfall die Ankopplung an ein energetisch aufgespaltenes Phonon-Doublett veranschaulicht. Kompliziertere Mischszenarien mit mehreren Subbändern und Phononen sind zwar denkbar, jedoch für die folgenden Betrachtungen nicht von Relevanz.

Im folgenden wird als wichtiger und häufig zitiertes Spezialfall die Ankopplung an die LO-Volumenphononen betrachtet. Mit der Fröhlich-Wechselwirkung 3.36 kann der Modenindex  $p$  mit der Wellenvektorkomponente  $q_z$  identifiziert und die Summation über diese explizit ausgeführt werden. Hierbei wird die Phonondispersion aufgrund der Kleinheit der relevanten Impulsüberträge von der Größenordnung  $k = O(l_m^{-1})$  vernachlässigt und der verallgemeinerte Formfaktor

$$\begin{aligned} F_{i,i'}(q_{\parallel}) &= q_{\parallel} \sum_{q_z} \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_z^2} \int dz \int dz' \phi_i^*(z) \phi_{i'}^*(z') e^{iq_z(z-z')} \phi_{i'}(z) \phi_i(z') \\ &= \int dz \int dz' \phi_i^*(z) \phi_{i'}^*(z') e^{-q_{\parallel}|z-z'|} \phi_{i'}(z) \phi_i(z') \end{aligned} \quad (4.25)$$

eingeführt. Dieser taucht auch später noch im Zusammenhang mit der Austausch-Wechselwirkung auf. Die Energien der Magneto-Polaronen lauten damit

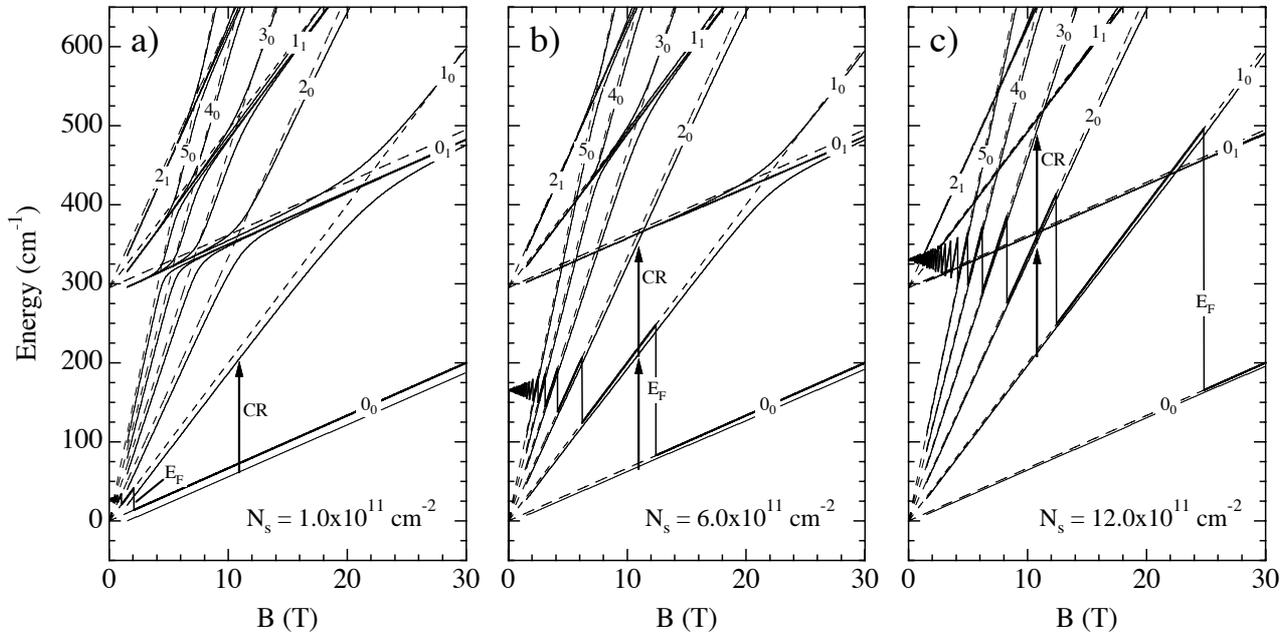
$$\tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma} = \epsilon_{i,n,\sigma} + \alpha \omega_{LO}^2 \sqrt{\frac{\omega_c}{2\omega_{LO}}} \sum_{i',n'} [1 - \nu_{i',n',\sigma}] \frac{\int_0^{\infty} dx F_{i,i'}(x/l_m) [J_{n,n'}(x)]^2}{\epsilon_{i,n,\sigma} + \Delta_{i,n,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma} - \hbar\omega_{LO}}. \quad (4.26)$$

Hierin wurde die Beziehung  $|A_{n,n'}(\vec{q}_{\parallel})|^2 = [J_{n,n'}(q_{\parallel}l_m)]^2$  zwischen den Funktionen  $A_{n,n'}(\vec{q}_{\parallel})$  und den in Gleichung 2.94 definierten Überlappfunktionen  $J_{n,n'}(q_{\parallel}l_m)$  verwendet. Der Wellenvektor  $q_{\parallel}$  ist ferner durch die dimensionslose Variable  $x = q_{\parallel}l_m$  substituiert. Im Falle der Ankopplung an die speziellen Phononen der Schichtsysteme sind die Formfaktoren und die Phononenergien gegenüber dem betrachteten Spezialfall modifiziert. Liegen die Phononmoden des Schichtsystems energetisch nahe beieinander und sind deren Energiedifferenzen klein gegenüber allen anderen Energien, kann man näherungsweise die Formfaktoren für die einzelnen Moden aufaddieren. Diese Summe entspricht gerade in etwa dem Beitrag, den die Ankopplung an die Volumenphononen liefert [Hai90, Hai93]. Es ist deshalb oftmals ausreichend, die Polaron-Effekte an diesem eher hypothetischen System zu untersuchen.

Die häufigsten Betrachtungen zum Polaron-Effekt beziehen sich auf den elektrischen Quantengrenzfall mit nur einem besetzten Subband ohne Berücksichtigung der Intersubband-Kopplungen. Hier können für die Einzelheterostruktur [Sar85, Wu,86a] und die Doppelheterostruktur [Sar85, Wu,89] in der Näherung nach Fang-Howard beziehungsweise des unendlich tiefen Potentialopfes für die Subband-Formfaktoren  $F(q_{\parallel}) = F_{0,0}(q_{\parallel})$  die folgenden analytischen Ausdrücke angegeben werden:

$$F_{SHS}(q_{\parallel}) = \frac{1 + \frac{9}{8}u + \frac{3}{8}u^2}{[1 + u]^3}, \quad u = \frac{q_{\parallel}}{b_0}, \quad (4.27)$$

$$F_{DHS}(q_{\parallel}) = \frac{2}{u} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-u}}{u} \right\} + \frac{u}{u^2 + 4\pi^2} + \left\{ 4 - \frac{2u^2}{u^2 + 4\pi^2} \right\} \frac{1 - e^{-u}}{u^2 + 4\pi^2}, \quad u = q_{\parallel}d_w. \quad (4.28)$$



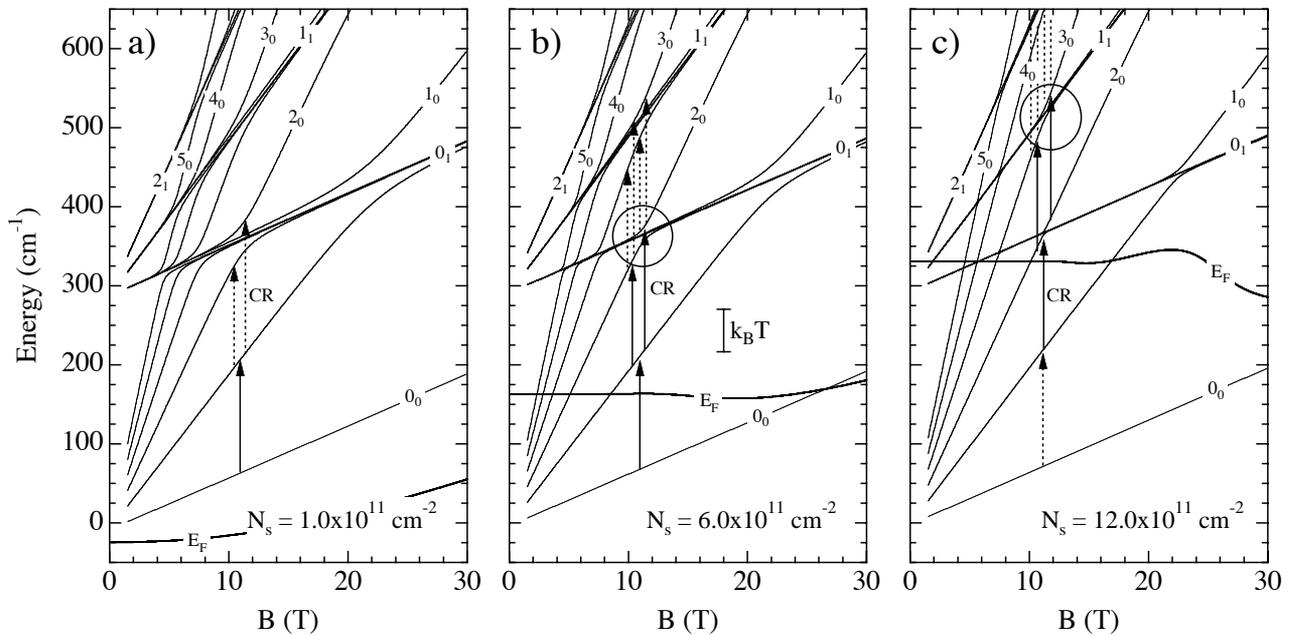
**Abbildung 4.2:** Polaron-Effekte und deren Blockade für einen Quantentrog mit einer Trogbreite von 20 nm im elektrischen Quantenlimit bei  $T = 0$  K unter der Voraussetzung der Spinentartung. Teilfigur a) zeigt die Polaron-Landau-Niveaus für eine geringe Dichte, b) für eine hohe Dichte und c) für eine sehr hohe Dichte. Die gestrichelten Linien markieren jeweils den ungestörten Landau-Fächer und die durchgezogenen Linien die Polaron-Landau-Niveaus. Die Fermi-Energie ist als dicke durchgezogene Linie eingezeichnet. Die senkrechten Pfeile deuten mögliche Zyklotronübergänge im Bereich der Polaron-Halbfeldkopplung an. Die Parameter der Rechnung lauten:  $m^* = 0.07 m_e$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha = 0.05$ . Die Nichtparabolizität des Leitungsbandes ist nicht berücksichtigt.

Diese werden für die nachfolgenden Rechnungen verwendet, wobei  $b_0$  im Fall der Heterostruktur für den Fang-Howard Variationsparameter und  $d_w$  im Fall eines Quantentroges für dessen Breite stehen. Die Bestimmungsgleichung 4.26 für die Polaron-Landau-Niveaus vereinfacht sich damit zu

$$\tilde{\epsilon}_{n,\sigma} = \epsilon_{n,\sigma} + \alpha \omega_{LO}^2 \sqrt{\frac{\omega_c}{2\omega_{LO}}} \sum_{n'} [1 - \nu_{n',\sigma}] \frac{\int_0^\infty dx F(x/l_m) [J_{n,n'}(x)]^2}{\epsilon_{n,\sigma} + \Delta_{n,\sigma} - \epsilon_{n',\sigma} - \hbar\omega_{LO}}, \quad (4.29)$$

wobei der Subband-Index aus Gründen der Übersichtlichkeit hier und im weiteren weggelassen wird.

Die Berechnung der Polaron-Energien gemäß Gleichung 4.29 geschieht hier numerisch. Dazu werden zuerst bei einem festen Magnetfeld die Energien  $\epsilon_{n,\sigma}$  sämtlicher relevanter Landau-Niveaus und deren Füllungen  $\nu_{n,\sigma}$  berechnet und als Tabelle hinterlegt (Subband-Index unterdrückt). Anschließend werden alle für die Berechnung relevanten Polstärken  $M_{n,n'} = \int_0^\infty dx F(x/l_m) [J_{n,n'}(x)]^2$  numerisch ausintegriert und ebenfalls in Form einer Zugriffstabelle abgelegt. Für das unterste Landau-Niveau  $n = 0$  wird dann im Anschluß mit den hinterlegten Werten  $\epsilon_{n,\sigma}$ ,  $\nu_{n,\sigma}$  und  $M_{n,n'}$  die Niveausummation mit  $\Delta_{n,\sigma} = 0$  (RSPT) für jede Spinkomponente separat durchgeführt und auf diese Weise die Polaron-Bindungsenergie  $\Delta_{0,\sigma} = \tilde{\epsilon}_{0,\sigma} - \epsilon_{0,\sigma}$  gewonnen. Bei einer Niveausummation werden aus Konvergenzgründen stets mindestens 50 Landau-Niveaus einbezogen. Im Rahmen der IWBPT-Störungstheorie wird die Polaron-Bindungsenergie in den darauffolgenden Rechenschritten in sämtlichen Nennern aller zu berechnenden Landau-Niveaus gemäß Gleichung 5.7 berücksichtigt. Für jedes interessierende Polaron-Landau-Niveau werden dann schließlich durch eine numerische Nullstellen-



**Abbildung 4.3:** Polaron-Effekte und teilweise Aufhebung der Besetzungsblockade durch thermische Aktivierung. Für die hier dargestellten Rechnungen gelten die gleichen Bedingungen wie unter Figur 4.2 mit Ausnahme der Temperatur, die hier  $T = 80$  K beträgt. Kreise markieren die bei den hohen Dichten sich im Bereich der Polaron-Halbfeldkopplung ausbildenden Resonanzaufspaltungen und die gestrichelten Pfeile die durch die thermische Aktivierung zusätzlich aktiv werdenden Zyklotronübergänge.

suche an der Bestimmungsgleichung 4.26, welche in der betrachteten IWBPT-Näherung die funktionale Form  $x - \sum_k \frac{a_k}{x+b_k} = 0$  mit den entsprechenden Konstanten  $a_k$  und  $b_k$  annimmt, die Polaron-Renormierungen  $\Delta_{n,\sigma} \equiv x$  und damit die Polaron-Energien  $\tilde{\epsilon}_{n,\sigma}^{(b)} = \epsilon_{n,\sigma} + \Delta_{n,\sigma}^{(b)}$  gefunden. Mit dem hochgestellten und geklammerten Index  $b$  werden die verschiedenen Lösungen durchnummeriert. Dabei wird aus Gründen der Rechenzeit wiederum ausgiebig auf die hinterlegten Wertetabellen für die  $\epsilon_{n,\sigma}$ ,  $\nu_{n,\sigma}$  und  $M_{n,n'}$  zurückgegriffen. Aufgrund der Möglichkeit mehrerer Lösungen besitzt ein Polaron-Landau-Niveau in der Regel mehrere Zweige. Aus diesem Grund wird  $b = 0, 1, 2, \dots, b_{max}$  im folgenden als Verzweigungsindex bezeichnet. Im elektrischen Quantengrenzfall, der ausschließlich in den Berechnungen betrachtet wird, hängt die Anzahl der Zweige  $M$  gemäß  $M = b_{max} + 1 = n + 1$  vom Landau-Index  $n$  ab.

Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist in der Abbildung 4.2 aufgezeigt. Um die Blockade-Effekte aufgrund des Pauli-Ausschlussprinzips zu illustrieren, sind die Verhältnisse für drei verschiedene Dichten dargestellt. Hierbei wird eine Gleichbesetzung der Spinniveaus und  $T = 0$  K vorausgesetzt. Man erkennt, wie sich die Resonanzaufspaltungen von Teilfigur a) nach c) exemplarisch an der  $0_1$ -Linie mit zunehmender Dichte schließen und schließlich nacheinander für die abnehmenden Ordnungen ganz verschwinden. Ferner erkennt man die Absenkung des gesamten Landau-Fächers um die Polaron-Bindungsenergie und deren Abnahme mit zunehmender Dichte aufgrund des Besetzungseffektes. Die Polaron-Landau-Niveaus unterhalb der Einphonon-Linie weisen, wie man anhand der Figur 4.2 ansatzweise erkennt, generell auch eine geringere Magnetfelddispersion als die ungestörten Landau-Niveaus auf. Dies resultiert in einer erhöhten Polaron-Masse sowie einen durch den Polaron-Effekt induzierten Beitrag zur Nichtparabolizität. Diese beiden Aspekte werden später im Zusammenhang mit dem nicht-resonanten Polaron-Effekt noch ausführlich behandelt. Die Figur 4.3 zeigt die unter ansonsten gleichen Bedingungen wie in Abbildung 4.2 berechneten Polaron-Landau-Fächer

für eine hohe Temperatur  $T = 80$  K. Hier sind im Gegensatz zu  $T = 0$  K durch thermische Aktivierung Elektronenniveaus oberhalb und Löcherniveaus unterhalb der Fermi-Energie besetzt. Dies führt zu zweierlei Effekten: Einmal werden weitere Zyklotronübergänge aktiv, die durch den resonanten Polaron-Effekt aufgespaltene höhere Landau-Niveaus mit einbeziehen. Zum zweiten werden die Besetzungsblockaden bei hohen Dichten derart aufgehoben, daß die bei  $T = 0$  K nicht vorhandenen Resonanzaufspaltungen sich thermisch aktiviert ausbilden.

#### 4.1.1.2 Zyklotronresonanz des freien Polaron-Gases

Das Modell nicht-wechselwirkender Polaronen, das im vorausgehenden Teilabschnitt ausführlich dargelegt wurde, liefert als Ergebnis die Polaron-Landau-Zustände  $|i, \widetilde{n}, \widetilde{X}, \sigma\rangle^{(b)}$  mit den zugehörigen Niveauenergien  $\tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma}^{(b)}$  gemäß den Gleichungen 4.21 bis 4.23. Aufgrund der vielfachen Verzweigungen im Polaron-Landau-Fächer werden die Polaron-Niveaus zusätzlich durch den hochgestellten und geklammerten Verzweigungsindex  $b = 0, 1, \dots, b_{max}$ , charakterisiert (elektrischer Quantengrenzfall  $b_{max} = n$ ).

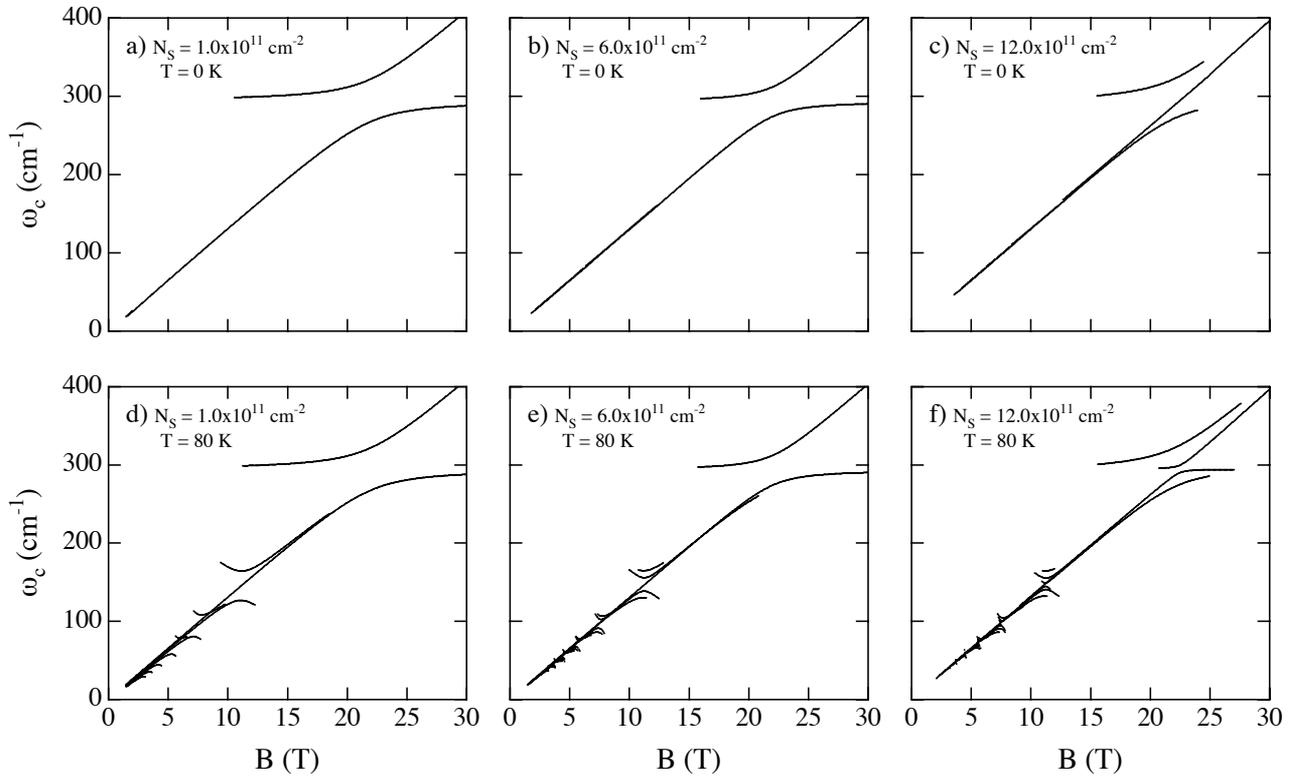
Für die Übergangswahrscheinlichkeit eines an der Zyklotronresonanz unter Einwirkung eines rechtszirkularen Dipolfeldes (aktive Polarisation) beteiligten Übergangs zwischen zwei Polaron-Landau-Niveaus ergibt sich in Analogie zur Beziehung 2.74 der näherungsweise Ausdruck

$${}^{(b')} \langle i', \widetilde{n}', \widetilde{X}', \sigma' | \pi_+ | i, \widetilde{n}, \widetilde{X}, \sigma \rangle^{(b)} \approx \sqrt{n+1} Z_{i,n+1,\sigma}^{(b')} Z_{i,n,\sigma}^{(b)} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{i,i'} \delta_{X,X'} \delta_{n',n+1} . \quad (4.30)$$

Hierbei sind die hier als dunkle Komponenten bezeichneten Einphonon-Beimischungen in den Polaron-Landau-Zuständen vernachlässigt. Diese Annahme ist sicherlich in guter Näherung gerechtfertigt, da bei der Erwartungswertbildung für ein Paar von Polaron-Landau-Niveaus, die durch den Ausdruck 4.21 beschrieben werden, von den vielen Summanden in der auftretenden Doppelsumme über die Phonon-Wellenvektoren  $\vec{q}_{||}$  und  $\vec{q}'_{||}$  nur sehr wenige übrig bleiben, welche aufgrund der Auswahlregel für den Aufpunktindex  $X' = X$  die Bedingung  $q'_y = q_y$  für das Nichtverschwinden erfüllen. Demnach entsprechen die Übergangswahrscheinlichkeiten im wesentlichen den mit den Normierungsfaktoren  $Z_{i,n,\sigma}^{(b)}$  und  $Z_{i,n+1,\sigma}^{(b')}$  gewichteten Dipolmatrixelementen der entsprechenden Landau-Niveaus.

Aufgrund der Verzweigungen im Polaron-Landau-Fächer existiert zu einem Übergang  $(i, n, \sigma) \rightarrow (i, n+1, \sigma)$  eine Mannigfaltigkeit von Übergängen<sup>1</sup>, die sich in den Verzweigungsindizes  $b$  und  $b'$  unterscheiden. Im Grenzfall  $T = 0$  K kann man jedoch anhand von Figur 4.2 feststellen, daß aufgrund der vollständigen Pauli-Blockade die Verzweigungen in den Ausgangsniveaus eines aktiven Polaron-Zyklotronübergangs komplett verschwinden. Dies hat zur Folge, daß die Besetzungsverhältnisse im Polaron-Landau-Fächer, was physikalisch korrekt ist, genau denen im nackten Landau-Fächer entsprechen. Bei hohen Temperaturen ändert sich das allerdings grundlegend, da die Polaron-Landau-Niveaus durch thermische Aufhebung der Besetzungsblockade generell verzweigen. Das hätte nun, was physikalisch wenig Sinn macht, zur Folge, daß ohne eine Modifikation der vorliegenden Theorie in der Umgebung einer Verzweigung Polaron-Landau-Niveaus thermisch besetzt würden, die einen Phonon-Anteil in der Größenordnung von eins beinhalten. Um diese Unzulänglichkeit zu beseitigen, werden bei der Berechnung der Polaron-Zyklotronresonanzen die Verzweigungen im Ausgangsniveau

<sup>1</sup>Im elektrischen Quantenlimit gibt es für einen Zyklotronübergang  $n \rightarrow n+1$  für jede Spinorientierung aufgrund der Verzweigungen  $M(n)M(n+1) = (n+1)(n+2)$  mögliche Übergänge.



**Abbildung 4.4:** Berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen im Modell der nicht-wechselwirkenden Polaronen. Die den Berechnungen zugrunde liegenden Parameter sind identisch zu denjenigen aus den Abbildungen 4.2 und 4.3. Es sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Resonanzen mit einer relativen Stärke  $f > 0.02$  eingezeichnet.

des betrachteten Zyklotronübergangs gemäß der Vorschrift

$$\langle \tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma} \rangle = \frac{\sum_{b'} Z_{i,n,\sigma}^{(b')} \tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma}^{(b')}}{\langle Z_{i,n,\sigma} \rangle} \quad (4.31)$$

unter Definition von

$$\langle Z_{i,n,\sigma} \rangle = \sum_{b'} Z_{i,n,\sigma}^{(b')} \quad (4.32)$$

herausgemittelt. Damit ergeben sich die Zyklotronübergangsenergien  $\hbar\tilde{\omega}_c^{(b)}(i, n, \sigma)$ , die nur noch die Polaron-Verzweigungen im Zielniveau aufweisen, zu

$$\hbar\tilde{\omega}_c^{(b)}(i, n, \sigma) \approx \tilde{\epsilon}_{i,n+1,\sigma}^{(b)} - \langle \tilde{\epsilon}_{i,n,\sigma} \rangle . \quad (4.33)$$

Ihre relativen Oszillatorstärken  $\tilde{f}_{i,n,\sigma}^{(b)}$  lauten unter Verwendung der Dipol-Übergangswahrscheinlichkeiten aus Gleichung 4.30

$$\tilde{f}_{i,n,\sigma}^{(b)} \approx (n+1) Z_{i,n+1,\sigma}^{(b)} \langle Z_{i,n,\sigma} \rangle \frac{\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}}{\nu} . \quad (4.34)$$

Die Füllungen  $\nu_{i,n,\sigma}$  der Polaron-Landau-Niveaus stimmen mit denen der nackten Landau-Niveaus überein.

Zur Illustration zeigt die Abbildung 4.4 die gemäß der oben ausgeführten Theorie berechneten Magnetfeld-dispersionen der Polaron-Zyklotronresonanzen für die drei Modellsysteme aus den Figuren 4.2 und 4.3. Man erkennt anhand der Abbildung sehr deutlich, wie die Polaron-Resonanzaufspaltungen zweiter und höherer Ordnung sich erst bei der hohen Temperatur herausbilden, während die Resonanzaufspaltungen bei der Polaron-Vollfeldkopplung bereits bei  $T = 0$  K vorhanden sind. Man erkennt auch, daß im Gegensatz zur niedrigen Dichte bei den hohen Dichten in der Regel zu einer festen Kopplungsordnung jeweils mehrere aufgespaltene Übergänge aktiv werden. Man stellt ferner unter Zuhilfenahme der hier nicht dargestellten Übergangsstärken fest, daß zu einer festen Kopplungsordnung sich die Resonanzaufspaltungen der dominierenden Übergänge mit zunehmender Dichte aufgrund des Pauli-Blockadeffektes verringern.

#### 4.1.2 Polaron-Zyklotronresonanz im Rahmen des Kubo-Formalismus

Die bislang vorgestellte Theorie der Zyklotronresonanz eines in Wechselwirkung mit dem Gitter stehenden Q2DEG basiert auf der Berechnung der Quasiteilchen-Zustände, den Polaron-Landau-Zuständen, und ihrer Niveauenergien. Die Polaron-Zyklotronresonanzen werden dann anschließend aus diesen unter Anwendung einiger Näherungen und Modifikationen gewonnen. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß ein anschauliches Quasiteilchen-Bild zu Tage tritt. Die experimentell relevante Dichteantwort des Systems jedoch ergibt sich aus diesem Modell nur auf indirekte Weise unter Verwendung von auf Plausibilität gründenden Modifikationen. Diese Unzulänglichkeit kann dadurch behoben werden, daß man den quantenstatistischen Kubo-Formalismus [Kub57, Kub91], der eine direkte Berechnung der experimentell relevanten dynamischen Leitfähigkeit gestattet, auf das Polaron-Problem anwendet.

Die Kubo-Formel für die Stromantwort ist der Ausgangspunkt vieler Betrachtungen und lautet für die aktive Zyklotronkomponente  $\sigma_{+-}$  zunächst noch in ihrer allgemeinen Form [Pra82, Cha86]

$$\sigma_{+-}(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \int_0^\infty dt e^{i(\omega+i\eta)t} \int_0^{\frac{1}{k_B T}} d\lambda \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_0 \hat{J}_-(-i\hbar\lambda) \hat{J}_+(t) \right\} . \quad (4.35)$$

Darin stehen

$$\hat{\rho}_0 = \frac{e^{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{k_B T}}}{\text{Tr} e^{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{k_B T}}} \quad (4.36)$$

für den quantenstatistischen großkanonischen Dichteoperator,

$$\hat{J}_\pm(t) = e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \hat{J}_\pm e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} = e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \hat{J}_\pm , \quad (4.37)$$

$$\hat{J}_\pm = \sum_{l,l'} \langle l' | \hat{J}_\pm | l \rangle \hat{c}_{l'}^\dagger \hat{c}_l = -\frac{e}{m^*} \sum_{l,l'} \langle l' | \hat{\pi}_\pm | l \rangle \hat{c}_{l'}^\dagger \hat{c}_l \quad (4.38)$$

für die zeitabhängigen zirkularen elektronischen Stromoperatoren ( $\hat{\pi}_\pm$ : kanonische Impulsoperatoren gemäß Gleichung 2.71) im Heisenberg-Bild,

$$\hat{H} = \hat{H}_{el} + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_{el-ph} \quad (4.39)$$

für den Gesamt-Hamilton-Operator des gekoppelten Elektron-Phonon-Systems,  $\hat{N}$  für den elektronischen Teilchenzahloperator,  $\mu$  für das chemische Potential sowie  $V$  für das Systemvolumen. Der Liouville-Operator  $\hat{L}$  ist über den Kommutator  $\hat{L}\hat{O} = [\hat{H}, \hat{O}]$  definiert. Er bestimmt im Heisenberg-Bild die Zeitentwicklung jedes beliebigen Operators  $\hat{O}$ . Gemäß der Kubo-Formel stellt die dynamische Leitfähigkeit demnach nichts anderes dar als die Frequenztransformierte der zeitlichen Strom-Strom-Korrelationsfunktion.

Für den Fall, daß der elektronische Anteil  $\hat{H}_{el}$  in Form einer Summe von (effektiven) Einteilchen-Hamilton-Operatoren gemäß Gleichung 4.2 vorliegt, läßt sich die Spurbildung entsprechend  $\text{Tr} \rightarrow \text{tr}_{el} \text{tr}_{ph}$  in die Einteilchen-Spuren  $\text{tr}_{el}$  und  $\text{tr}_{ph}$  des elektronischen bzw. phononischen Teilsystems separieren. Damit ergibt sich die Kubo-Formel nach einigen geschickten Umformungen und der Ausführung der Zeitintegration zu

$$\sigma_{+-}(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{V} \text{tr}_{el} \text{tr}_{ph} \left[ \frac{\partial \hat{f}_{FD}(\hat{h} - \hat{j}_- u)}{\partial u} \frac{1}{\hat{l} + \omega - i\eta} \hat{j}_+ \right]. \quad (4.40)$$

Darin stehen

$$\hat{f}_{FD}(\hat{h} - \hat{j}_- u) = \left[ 1 + e^{\frac{\hat{H} - \hat{j}_- u - \mu}{k_B T}} \right]^{-1} \quad (4.41)$$

für den modifizierten Fermi-Besetzungszahloperator,  $\hat{h}$  für den (effektiven) Einteilchen-Hamilton-Operator,  $\hat{j}_\pm$  für die Einteilchen-Stromoperatoren und  $\hat{l}$  für den elektronischen Einteilchen-Liouville-Operator. Von dieser oder einer ähnlichen Form ausgehend beschäftigen sich zahlreiche Publikationen mit dem Problem eines Elektronengases, das in Wechselwirkung mit dem Phononsystem steht, oder dem verwandten Problem eines Elektronengases unter Einwirkung eines zufälligen Verunreinigungspotentials [Pra82, Cha86]. In den beiden folgenden Teilabschnitten werden zwei Modelle vorgestellt, die auf dem Kubo-Formalismus basieren und die Polaron-Effekte in der Zyklotronresonanz beschreiben.

#### 4.1.2.1 Theorien von Badjou und Argyres sowie Cho und Choi

Hier wird speziell auf die Arbeiten [Bad87, Cho93] Bezug genommen, die beide auf der Anwendung einer speziellen Projektionsoperatorechnik für den Liouville-Operator basieren. Die darin berechneten Linienformfunktionen enthalten im Vergleich zu anderen Theorien die für die resonanten Polaron-Effekte relevanten Resonanzterme. Die Betrachtungen gelten für Effekte von erster Ordnung in der Fröhlich-Kopplungskonstanten  $\alpha$  und sind auf die Polaron-Kopplungsverhältnisse in GaAs-Systemen ( $\alpha \approx 0.06 \ll 1$ ) anwendbar. In der Arbeit von Cho und Choi werden unter Einführung eines weiteren sogenannten Isolationsoperators eine in [Bad87] angesprochene Inkonsistenz umgangen sowie zusätzliche Terme bei der Approximation des Gleichgewichtsdichteoperators berücksichtigt. Daher werden hier die Ergebnisse aus [Cho93] zur Beschreibung der dynamischen Leitfähigkeit des Magneto-Polaron-Gases herangezogen, wobei allerdings die sogenannte Linienverschiebungsfunktion, welche in [Bad87] nicht vorkommt, hier unberücksichtigt bleibt.

Die im Einteilchen-Bild ausgewertete dynamische Leitfähigkeit ergibt sich gemäß [Cho93] unter Berücksichtigung der in einem Q2DEG vorliegenden Quantisierungsverhältnisse zu

$$\sigma_{+-}(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} N_{LL} \frac{e^2}{m^*} \sum_{i,n,\sigma} (n+1) \frac{\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}}{\Gamma_{i,n,\sigma}(\omega^+) - i[\omega^+ - \omega_c(i,n,\sigma)]}. \quad (4.42)$$

Die darin auftretenden Linienformfunktionen  $\Gamma_{i,n,\sigma}$  enthalten die Elektron-Phonon-Wechselwirkung und lauten

zunächst in noch allgemeiner Form

$$\begin{aligned}
-i\Gamma_{i,n,\sigma}(\omega^+) &\approx \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{\substack{(i',n') \\ \neq (i,n+1)}} \left| \langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle \right|^2 J_{n+1,n'}(q_{\parallel} l_m) \left[ J_{n',n+1}(q_{\parallel} l_m) - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n}(q_{\parallel} l_m) \right] \\
&\quad \times \left[ \frac{1 + \bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} - \nu_{i',n',\sigma}}{\omega^+ - (\epsilon_{i',n',\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})/\hbar - \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} + \frac{\bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} + \nu_{i',n',\sigma}}{\omega^+ - (\epsilon_{i',n',\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})/\hbar + \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} \right] \\
&+ \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{\substack{(i',n') \\ \neq (i,n)}} \left| \langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle \right|^2 J_{n',n}(q_{\parallel} l_m) \left[ J_{n,n'}(q_{\parallel} l_m) - \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n+1,n'+1}(q_{\parallel} l_m) \right] \\
&\quad \times \left[ \frac{1 + \bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} - \nu_{i',n',\sigma}}{\omega^+ - (\epsilon_{i,n+1,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma})/\hbar + \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} + \frac{\bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} + \nu_{i',n',\sigma}}{\omega^+ - (\epsilon_{i,n+1,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma})/\hbar - \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} \right] \\
&+ \sum_{p,\vec{q}_{\parallel}} \sum_{i',n'} \nu_{i',n',\sigma} \left| \langle i' | V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) | i \rangle \right|^2 J_{n+1,n}(q_{\parallel} l_m) \left[ \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n',n'+1}(q_{\parallel} l_m) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n'}(q_{\parallel} l_m) \right] \left[ \frac{1}{\omega^+ - \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} - \frac{1}{\omega^+ + \omega_{p,\vec{q}_{\parallel}}} \right] . \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Alle darin vorkommenden Größen wurden bis auf  $\omega^+ = \omega + i\eta$ , welche die infinitesimal entlang der imaginären Achse verschobene Kreisfrequenz abkürzt, bereits im Vorfeld eingeführt. Die energetischen Lagen der Zyklotronresonanzen des Polaron-Gases entsprechen den Nullstellen der Imaginärteile in den Nennern von Gleichung 4.42. Die Bestimmungsgleichungen für die Polaron-Zyklotronfrequenzen lauten damit

$$\omega_c(i, n, \sigma) - \omega - \Im\{\Gamma_{i,n,\sigma}(\omega)\} = 0 . \tag{4.44}$$

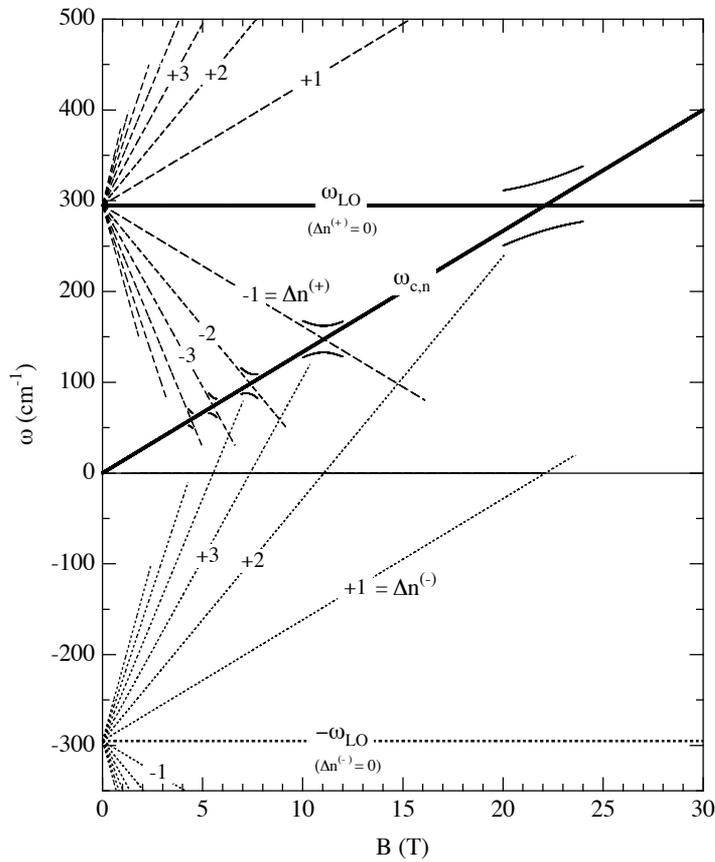
Zur Veranschaulichung der Resonanzszenarien infolge der Polstruktur der Linienformfunktion dient die Abbildung 4.5. In ihr sind die Pole in der Linienformfunktion 4.43 für ein Elektronengas im elektrischen Quantengrenzfall mit Ankopplung an die LO-Volumenphononen gegen das Magnetfeld aufgetragen. Die resonanten Polaron-Effekte erster und höherer Ordnung entsprechen den Kreuzungspunkten zwischen der Zyklotronresonanz  $\omega_{c,n}$  des jeweiligen Übergangs (Subband-Index und Spin unterdrückt) und den Polen der zugehörigen Linienformfunktion. Hierbei wird zwischen Polen unterschieden, die von der positiven (gestrichelt) beziehungsweise der negativen (gepunktet) Phononfrequenz ausgehen. Zur Charakterisierung der Pole werden die zwei Indizes  $\Delta n^{(+)}$  und  $\Delta n^{(-)}$  definiert, welche den Differenzen zwischen den Landau-Quantenzahlen des jeweiligen Pols entsprechen. Diese stehen in folgendem Zusammenhang mit der Polaron-Ordnung  $N$ :

$$\Delta n^{(+)} = 1 - N \leq 0 \quad , \quad \Delta n^{(-)} = N + 1 \geq 2 . \tag{4.45}$$

Wie man aus Gleichung 4.43 entnimmt, tragen bis zu zwei Übergänge im Landau-Schema zu jeweils einem gemeinsamen Pol in der Linienformfunktion bei:

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(+)} &: n \rightarrow n + \Delta n^{(+)} \quad , \quad w = 1 - \nu_{n+\Delta n^{(+)}} \\
&\quad n + 1 - \Delta n^{(+)} \rightarrow n + 1 \quad , \quad w = \nu_{n-\Delta n^{(+)}+1} \quad , \tag{4.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(-)} &: n \rightarrow n + \Delta n^{(-)} \quad , \quad w = \nu_{n+\Delta n^{(-)}} \\
&\quad n + 1 - \Delta n^{(-)} \rightarrow n + 1 \quad , \quad w = 1 - \nu_{n-\Delta n^{(-)}+1} \quad . \tag{4.47}
\end{aligned}$$



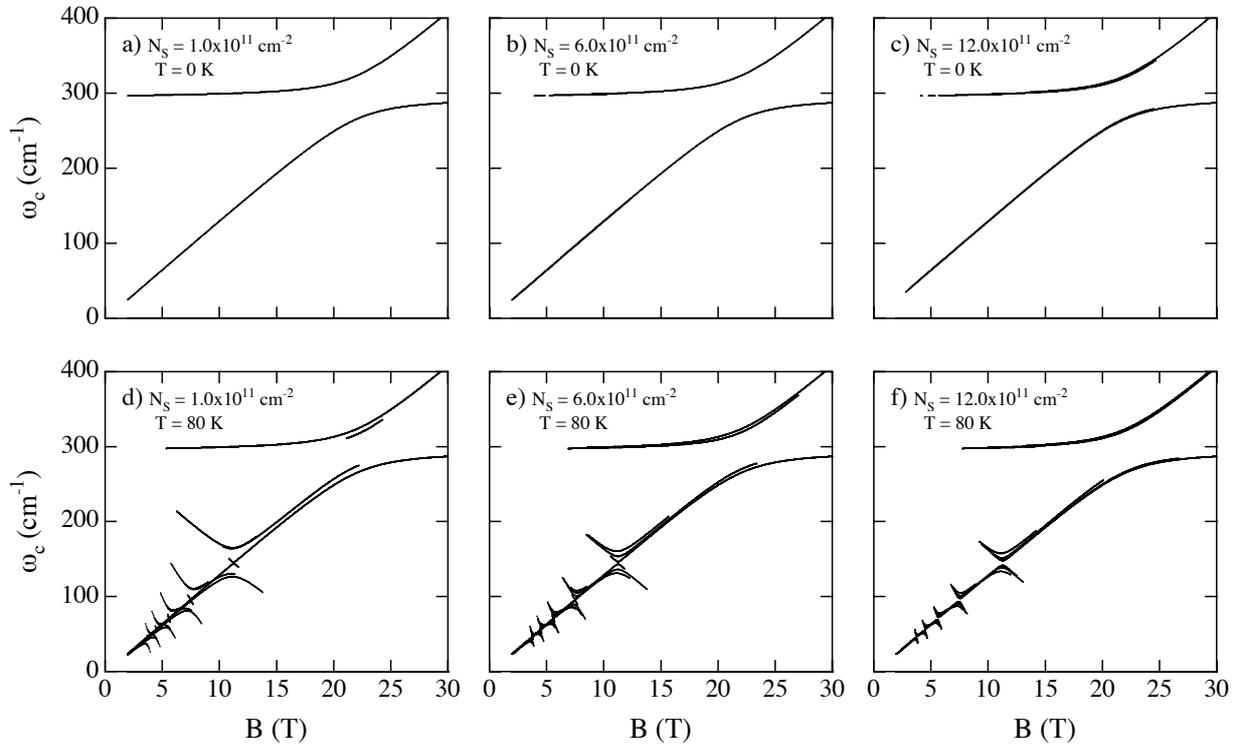
**Abbildung 4.5:** Polstruktur der Linienformfunktion und Zustandekommen der resonanten Polaron-Effekte.

Die Besetzungsgewichte  $w$  geben dabei an, wie stark der Pol beziehungsweise die jeweilige Resonanzaufspaltung ausgeprägt ist. Da aufgrund der Besetzungsverhältnisse die Stärken der zur negativen Phononfrequenz gehörenden Pole deutlich geringer sind als die der positiven Phononfrequenz, können die ersteren für die experimentell relevanten Temperaturen vernachlässigt werden. Dadurch vereinfacht sich die Lösung von Gleichung 4.44 deutlich.

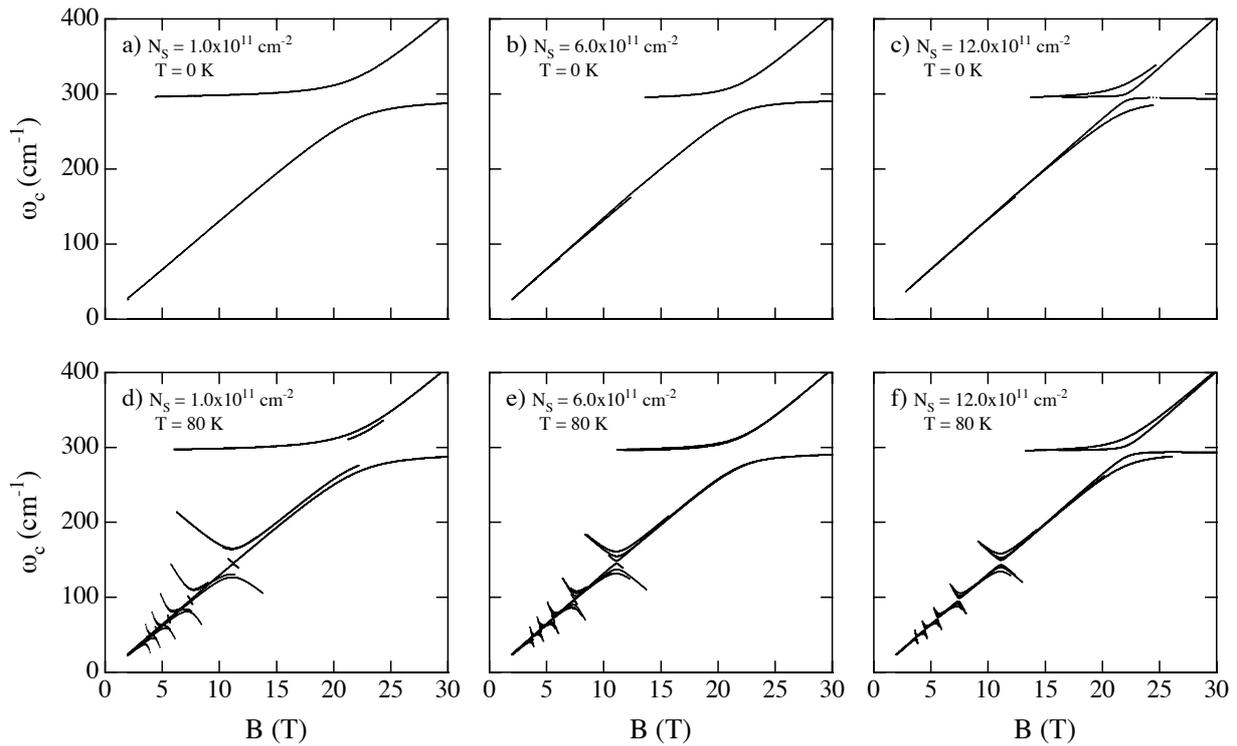
Betrachtet man wiederum den Fall eines Q2DEG mit Ankopplung an die LO-Volumenphononen bei vernachlässigbarer Phonon-Besetzung, so lautet die zur Beschreibung der resonanten Polaron-Effekte geeignete Linienformfunktion schließlich

$$\begin{aligned}
 -i\Gamma_{i,n,\sigma} &\approx \alpha \omega_{LO}^2 \sqrt{\frac{\omega_c}{2\omega_{LO}}} \int_0^\infty dx \\
 &\times \left\{ \sum_{\substack{(i',n') \\ \neq (i,n+1)}} \frac{(1 - \nu_{i',n',\sigma}) F_{i,i'}(x/l_m) J_{n+1,n'}(x) \left[ J_{n',n+1}(x) - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n}(x) \right]}{\omega^+ - (\epsilon_{i',n',\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})/\hbar - \omega_{LO}} \right. \\
 &+ \sum_{\substack{(i',n') \\ \neq (i,n)}} \frac{\nu_{i',n',\sigma} F_{i,i'}(x/l_m) J_{n',n}(x) \left[ J_{n,n'}(x) - \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n+1,n'+1}(x) \right]}{\omega^+ - (\epsilon_{i,n+1,\sigma} - \epsilon_{i',n',\sigma})/\hbar - \omega_{LO}} \\
 &\left. + \sum_{i',n'} \frac{\nu_{i',n',\sigma} F_{i,i'}(x/l_m) J_{n+1,n}(x) \left[ \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n',n'+1}(x) - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n'}(x) \right]}{\omega^+ - \omega_{LO}} \right\}. \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Beschränkt man sich weiterhin auf den elektrischen Quantengrenzfall ohne Intersubband-Kopplung, so ergibt



**Abbildung 4.6:** Berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen nach der Theorie von Cho und Choi. Die Parameter sind bis auf die Schwelle  $f > 0.01$  identisch zu denjenigen aus Figur 4.4.



**Abbildung 4.7:** Berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen nach der Theorie von Cho und Choi ohne den dritten Summenterm der Gleichungen 4.43, 4.48 bzw. 4.49 (Parameter wie oben).

sich daraus die vereinfachte Form

$$\begin{aligned}
-i\Gamma_{n,\sigma} &\approx \alpha \omega_{LO}^2 \sqrt{\frac{\omega_c}{2\omega_{LO}}} \int_0^\infty dx \\
&\times \left\{ \sum_{n' \neq n+1} \frac{(1 - \nu_{n',\sigma}) F(x/l_m) J_{n+1,n'}(x) \left[ J_{n',n+1}(x) - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n}(x) \right]}{\omega^+ - (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar - \omega_{LO}} \right. \\
&+ \sum_{n' \neq n} \frac{\nu_{n',\sigma} F(x/l_m) J_{n',n}(x) \left[ J_{n,n'}(x) - \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n+1,n'+1}(x) \right]}{\omega^+ - (\epsilon_{n+1,\sigma} - \epsilon_{n',\sigma})/\hbar - \omega_{LO}} \\
&\left. + \sum_{n'} \frac{\nu_{n',\sigma} F(x/l_m) J_{n+1,n}(x) \left[ \sqrt{\frac{n'+1}{n+1}} J_{n',n'+1}(x) - \sqrt{\frac{n'}{n+1}} J_{n'-1,n'}(x) \right]}{\omega^+ - \omega_{LO}} \right\}. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Hierbei ist der Subband-Index weggelassen und  $F_{0,0}(x/l_m) = F(x/l_m)$  gesetzt.

Während Linienverschiebungen und -Aufspaltungen durch die Imaginärteile der Linienformfunktionen bestimmt sind, beschreiben die Realteile die Linienverbreiterungen. Diese haben, wenn man von Streuung an Störstellen im elektronischen und phononischen System absieht und eine dispersionsfreie einheitliche Phononfrequenz voraussetzt, wegen  $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_+ - \omega_0} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - i\pi\delta(\omega - \omega_0)$  Diracsche Deltapeaks genau bei den Frequenzen, die auch den Pollagen im Imaginärteil entsprechen. Da sich jedoch genau um diese Pole die Resonanzaufspaltungen herausbilden, bekommt man für ein vollständig quantisiertes Q2DEG im Magnetfeld mit Ankopplung an ein energetisch hochgradig entartetes LO-Volumenphonon keine zusätzlichen Linienverbreiterungen. Im Gegensatz zu den Verhältnissen in 3D-Volumengasen [Pee86d, Pee86a], wo das Elektronengas aufgrund der freien Bewegung senkrecht zur Magnetfeldrichtung nur unvollständig quantisiert ist, erwartet man im Q2DEG eine vollständige Ausbildung der polaronischen Resonanzaufspaltungen.

Hat man durch Lösen von Gleichung 4.44 die im allgemeinen mehrfach verzweigten Polaron-Zyklotronresonanzfrequenzen  $\tilde{\omega}_c^{(b)}(i, n, \sigma)$  (mit Verzweigungsindex  $b$ ) gefunden, so bekommt man deren relative Oszillatorstärken schließlich über die Vorschrift (Ausnutzung der formalen Äquivalenz zu [Wu,86b])

$$\tilde{f}_{i,n,\sigma}^{(b)} = (n+1) \frac{\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i,n+1,\sigma}}{\nu} \frac{1}{1 - \frac{\partial \Im\{\Gamma_{i,n,\sigma}(\omega)\}}{\partial \omega}} \Bigg|_{\omega = \tilde{\omega}_c^{(b)}(i,n,\sigma)}. \quad (4.50)$$

Die Berechnung der Polaron-Zyklotronresonanzen erfolgt wiederum numerisch. Zuerst werden sämtliche relevanten Niveauenergien  $\epsilon_{n,\sigma}$  und Niveaufüllungen  $\nu_{n,\sigma}$  berechnet, sowie die Matrixelemente in den Zählern der Linienformfunktionen aus Gleichung 4.49 numerisch aufintegriert und als Zugriffstabellen abgelegt. Für jeden interessierenden Übergang werden dann schließlich durch numerische Nullstellensuche an den Bestimmungsgleichungen 4.44, welche die funktionale Form  $x - c + \sum_k \frac{a_k}{x+b_k} = 0$ , mit den entsprechenden Parametern  $a_k$ ,  $b_k$  und  $c$ , aufweisen, die Polaron-Zyklotronfrequenzen  $\tilde{\omega}_c^{(b)}(n, \sigma)$  gefunden. Mit dem hochgestellten und geklammerten Verzweigungsindex  $b$  werden die verschiedenen Lösungen durchnummeriert.

Die Figur 4.6 zeigt die mit der genäherten Linienformfunktion 4.49 numerisch berechneten Magnetfeld-dispersionen der Polaron-Zyklotronresonanzen unter Voraussetzung der Spinrentartung. Die dominanten Resonanzaufspaltungen höherer Ordnung unterscheiden sich darin kaum von denen, die vorher im Modell des

nicht-wechselwirkenden Polaron-Gases in Abbildung 4.4 berechnet wurden. Allerdings treten die charakteristischen Blockadeffekte bei der Polaron-Vollfeldkopplung, wie sie das vorausgehende Modell aufweist und wie sie auch experimentell beobachtet werden [Pee92, Wu,00, Pou01], in der hier dargestellten Rechnung nicht auf. Besonders bei  $T = 0$  K erkennt man, daß die Dispersionen aufgrund der vollständigen Absenz der Besetzungsblockaden so gut wie keine Dichteabhängigkeit aufweisen. Dies liegt bei näherem Hinsehen am dritten und letzten Summenterm in der Linienformfunktion. Dieser sorgt dafür, daß die Besetzungsblockaden in den ersten beiden Termen im wesentlichen gerade wieder kompensiert werden. Läßt man diesen Term weg, so werden, wie aus der Abbildung 4.7 ersichtlich ist, die Blockadeffekte bei der Vollfeldkopplung wieder sichtbar. Der Grund für das Vorhandensein des offensichtlich nicht korrekten Terms ist in den in [Bad87, Cho93] gemachten Näherungen für den Liouville-Operator zu suchen. Trotz dieser Unzulänglichkeit beschreibt die dargelegte Theorie, wenn man die dritte Summe wegläßt, die Resonanzaufspaltungen aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung offenbar im wesentlichen korrekt. Im weiteren wird die Beschreibung in dieser Form als modifizierte Theorie von Cho und Choi bezeichnet (MCC-Theorie).

#### 4.1.2.2 Polaron-Theorie gemäß Wu, Peeters und Devreese

Die Beschreibung der Polaron-Kopplungen nach Wu, Peeters und Devreese gründet ebenfalls auf der Kubo-Formel [Pee83, Pee86b, Wu,86b]. Sie basiert auf einem in [Goe72] entwickelten Ansatz, der die dynamische Leitfähigkeit auf eine sogenannte Memory-Funktion zurückführt.

Die Stromantwort des Elektronengases wird hier im wesentlichen durch eine vom Spin abhängige Memoryfunktion  $\Sigma_\sigma(\omega)$  beschrieben. Die dynamische Magneto-Leitfähigkeit des Polaron-Gases hat mit ihr die Form

$$\sigma_{+-}(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{\sigma} \frac{\langle \hat{N}_{\sigma} \rangle e^2}{m^*} \frac{i}{\omega^+ - \omega_c - \Sigma_{\sigma}(\omega^+)} , \quad (4.51)$$

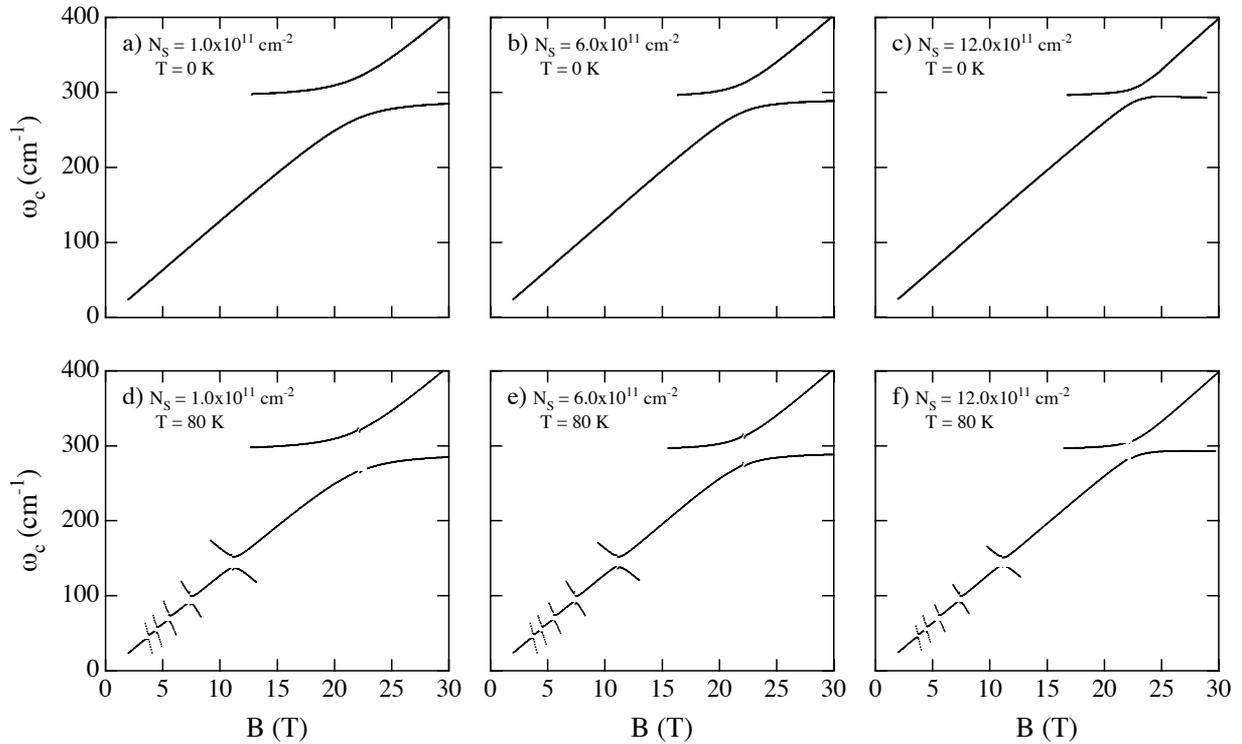
wobei explizit eine ideal parabolische Energiedispersion mit effektiver Masse  $m^*$  vorausgesetzt wird.  $\langle \hat{N}_{\sigma} \rangle$  bezeichnet die mittlere Elektronendichte mit Spinprojektion  $\sigma$ . Im Gegensatz zu den vorigen Theorien, wo jedes Subsystem (Landau-Niveau) des Elektronengases seinen eigenen Leitfähigkeitsbeitrag beisteuert, impliziert die Polaron-Theorie von Wu, Peeters und Devreese eine für alle Übergänge einer Spinkomponente kollektive Systemantwort. Das in der Theorie bereits implizierte Kollektivverhalten wird dabei auch in starkem Maße durch die experimentellen Befunde, die im Fall der Vollfeldkopplung wenn überhaupt eine lediglich einfach aufgespaltene Linie pro Polaron-Zweig aufweisen, motiviert [Sig85, Lan88, Wu,00].

Die Memoryfunktion ist in erster Ordnung in der Polaron-Kopplungskonstanten  $\alpha$  durch den Ausdruck

$$\Sigma_{\sigma}(\omega^+) = \frac{1}{\omega^+} \int_0^{\infty} dt \left( 1 - e^{i\omega^+ t} \right) \Im \{ F_{\sigma}(t) \} \quad (4.52)$$

gegeben. Die darin auftretende zeitliche Korrelationsfunktion lautet zunächst noch allgemein

$$F_{\sigma}(t) = - \sum_p \sum_{\vec{q}_{\parallel}} \frac{q_{\parallel}^2}{\hbar m^*} \frac{1}{\langle \hat{N}_{\sigma} \rangle} e^{-i\omega_{p,\vec{q}_{\parallel}} t} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V_{p,\vec{q}_{\parallel}}(z) V_{p,\vec{q}_{\parallel}}^*(z') \\ \times \left\{ \left[ 1 + \bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} \right] \left\langle \hat{n}_{-\vec{q}_{\parallel},z,\sigma}(t) \hat{n}_{\vec{q}_{\parallel},z',\sigma}(0) \right\rangle - \bar{n}_{p,\vec{q}_{\parallel}} \left\langle \hat{n}_{\vec{q}_{\parallel},z',\sigma}(0) \hat{n}_{-\vec{q}_{\parallel},z,\sigma}(t) \right\rangle \right\} . \quad (4.53)$$



**Abbildung 4.8:** Berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen nach der Theorie von Wu, Peeters und Devreese (WPD-Theorie). Die Parameter der Rechnung sind identisch zu denjenigen aus Figur 4.4.

Darin bezeichnet

$$\hat{n}_{\vec{q}_{\parallel},z,\sigma}(t) = \sum_i e^{-i\vec{q}_{\parallel}\hat{s}_i(t)} \delta(z - \hat{z}_i(t)) \delta(\sigma - \hat{\sigma}_i(t)) \quad (4.54)$$

den zeitabhängigen und der Geometrie des Q2DEG angepaßten Dichteoperator. Dieser ist hier in erster Quantisierung mit  $i$  als dem Teilchen-Nummerierungsindex und  $\hat{\sigma}$  als dem Spinprojektionsoperator auf die Magnetfeldachse angegeben. Die gewinkelten Klammern  $\langle \dots \rangle$  dienen als Abkürzung für den thermodynamischen Erwartungswert  $\text{Tr}_{el}\{\hat{\rho}_{el,0} \dots\}$  im elektronischen System. Die Funktion  $F_{\sigma}(t)$  enthält damit als wesentliche Beiträge die Dichtekorrelationen und damit die Polarisationsfunktionen des Elektronengases [Fet71]. In Analogie zum vorausgehenden Abschnitt bekommt man die Zyklotronresonanzenergien des Polaron-Gases durch Nullsetzen der Nenner in Gleichung 4.51. Die Bestimmungsgleichungen lauten

$$\omega_c - \omega - \Re\{\Sigma_{\sigma}(\omega)\} = 0. \quad (4.55)$$

Hat man diese gelöst und so die im allgemeinen verzweigten Resonanzenergien  $\tilde{\omega}_c^{(b)}(\sigma)$  bestimmt, bekommt man schließlich die zugehörigen relativen Oszillatorstärken über die Beziehung [Wu,86b]

$$\tilde{f}_{\sigma}^{(b)} = \frac{\nu_{\sigma}}{\nu} \frac{1}{1 - \frac{\partial \Re\{\Sigma_{\sigma}(\omega)\}}{\partial \omega}} \Bigg|_{\omega = \tilde{\omega}_c^{(b)}(\sigma)}. \quad (4.56)$$

Hierin steht  $\nu_{\sigma}$  für den zusammengefaßten Füllfaktor aller Niveaus mit Spinprojektion  $\sigma$ .

Beschränkt man sich wiederum auf ein nicht-wechselwirkendes Q2DEG im elektrischen Quantengrenzfall und Wechselwirkung mit den LO-Volumenphononen ohne Intersubband-Kopplungen und vernachlässigbarer Phonon-Besetzung, so ergibt sich für die spinabhängige Memoryfunktion  $\Sigma_\sigma(\omega^+)$  nach längerer Rechnung schließlich die vergleichsweise kompakte Form [Wu,87a]

$$\begin{aligned} \Sigma_\sigma(\omega^+) &= \frac{\alpha}{\nu_\sigma} \left( \frac{\omega_c \omega_{LO}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n,n'} \left[ \int_0^\infty dx x^2 [J_{n,n'}(x)]^2 F(x/l_m) \right] \frac{\nu_{n,\sigma} [1 - \nu_{n',\sigma}]}{\omega_{LO} + (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\omega_{LO} + (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar + \omega^+} - \frac{1}{\omega_{LO} + (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar - \omega^+} \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Hierbei ist wiederum der Subband-Index aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Bei der Untersuchung der Polstruktur von 4.57 bekommt man ein weitgehend analoges Szenario, wie das in der Figur 4.5 dargestellte. Auch hier erschweren die von der negativen Phononfrequenz kommenden Pole die numerische Nullstellensuche erheblich. Aus Gründen der Niveaubesetzungen, wie sie im vorigen Abschnitt dargelegt wurden, sind diese Beiträge in Bezug auf die resonanten Polaron-Effekte zu vernachlässigen. Die reduzierte Memoryfunktion lautet schließlich

$$\begin{aligned} \Sigma_\sigma(\omega^+) &\approx \frac{\alpha}{\nu_\sigma} \left( \frac{\omega_c \omega_{LO}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n,n'} \left[ \int_0^\infty dx x^2 [J_{n,n'}(x)]^2 F(x/l_m) \right] \\ &\times \frac{\nu_{n,\sigma} [1 - \nu_{n',\sigma}]}{[\omega_{LO} + (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar] [\omega_{LO} + (\epsilon_{n',\sigma} - \epsilon_{n,\sigma})/\hbar - \omega^+]}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Auch hier erfolgt die Berechnung der Polaron-Zyklotronresonanzen wiederum nach einem numerischen Verfahren. Aufgrund der formalen Äquivalenz zwischen der Beschreibung gemäß Cho und Coi und dem Formalismus der Memory-Funktion ist die numerische Prozedur vollständig identisch zu der unter Abschnitt 4.1.2.1 beschriebenen.

Die Abbildung 4.8 gibt die mit der genäherten Memoryfunktion numerisch berechneten Magnetfelddispersionen der Polaron-Zyklotronresonanzen für die gleichen Modellsysteme wie in den Abbildungen 4.4, 4.6 und 4.7 wieder. Als Hauptauffälligkeit weisen die nach der Theorie von Wu, Peeters und Devreese (WPD-Theorie) berechneten Dispersionen nicht die Vielfachüberlagerung von Einzelresonanzen der beiden anderen Modelle auf. Vielmehr sind die einzelnen Übergänge eines Zweiges von vorneherein zu einer kollektiven Resonanz zusammengefaßt. Auch in diesem Modell erkennt man speziell bei der Vollfeldkopplung deutlich die Blockadeeffekte aufgrund des Pauli-Prinzips anhand der mit zunehmender Dichte kleiner werdenden Resonanzaufspaltungen. Die Aufspaltungen der höheren Kopplungsordnungen sind jedoch deutlich weniger stark von Dichte abhängig als die der Vollfeldkopplung.

## 4.2 Resonante Polaron-Zyklotronresonanz

In diesem Teilkapitel wird der Einfluß der Elektron-Phonon-Wechselwirkung auf die Zyklotronresonanz im Regime der Resonanzkopplungen zweiter (Halbfeldkopplung) und höherer Ordnungen untersucht. Der Abschnitt 4.2.1 gibt zunächst eine Einführung. Der sich daran anschließende Abschnitt 4.2.2 zeigt einen Überblick über die experimentell beobachtbaren Effekte. Im Teilkapitel 4.2.3 werden die experimentellen Ergebnisse zu den resonanten Polaron-Effekten für das Regime niedriger bis mittlerer Dichten und in Abschnitt 4.2.4 schließlich für das Regime hoher und sehr hoher Dichten behandelt.

### 4.2.1 Stand und Überblick zu den Resonanten Polaron-Effekten

Nach den theoretischen Betrachtungen sind Resonanzaufspaltungen oder zumindest Linienverbreiterungen aufgrund des Polaron-Effektes in der Zyklotronresonanz immer dann zu erwarten, wenn die Resonanzbedingung

$$\hbar\omega_c \approx \hbar\omega_{LO} + (\epsilon_j - \epsilon_i) + (n - m)\hbar\omega_c \quad (4.59)$$

erfüllt ist. Darin stehen  $i, j$  für Subband-,  $m, n$  für Landau-Indizes und  $\epsilon_i$  für die Subband-Energien. Der Spin ist aufgrund der Kleinheit der Zeeman-Auspaltung im Vergleich zu den Landau- und Subband-Abständen oft vernachlässigbar. Der Fall  $i = j = 0$  wird am häufigsten behandelt und beschreibt die resonanten Intrasubband-Polaron-Effekte. Resonanzphänomene aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung, in die mehrere Subbänder involviert sind ( $i \neq j$ ), werden im folgenden als Intersubband-Polaron-Effekte bezeichnet.

Bei weitem die meisten Untersuchungen zum resonanten Polaron-Effekt widmen sich der Vollfeldkopplung im Bereich  $\omega_c \approx \omega_{LO, \text{GaAs}}$ . Hier sind jedoch die Experimente durch zweierlei Punkte erschwert. Einmal benötigt man sehr hohe Magnetfelder bis weit über 20 T, die zur Zeit nur in Großforschungsanlagen zugänglich sind. Zum anderen werden FIR-spektroskopische Experimente durch die undurchlässige GaAs-Reststrahlenbande des Substrats beeinträchtigt. Erst unlängst wurde in [Wu,00] bei hohen Elektronendichten und tiefen Temperaturen die Pauli-Blockade der Polaron-Vollfeldkopplung bei Magnetfeldern bis zu 30 T experimentell untersucht und nachgewiesen. Die Experimente wurden bei tiefen Temperaturen an hochbeweglichen Proben durchgeführt und zeigten aufgrund der Austauschvergrößerung der Zeeman-Lücke die Blockade für die beiden Spinkomponenten separat, was zu einer ungewöhnlich hohen polaronisch verstärkten Spinaufspaltung in der Zyklotronresonanz führte. In [Pou01] werden Zyklotronresonanzexperimente an Proben extrem hoher Dichte geschildert, wie sie vom Aufbau her auch in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden. Um einen genauen Einblick in das Resonanzregime zu bekommen, wurde bei den verwendeten Proben durch chemisches Ätzen das GaAs-Substrat entfernt. Aufgrund der extrem hohen Dichte von  $1.3 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  war die Pauli-Blockade derart ausgebildet, daß keine Vollfeld-Aufspaltung zu beobachten war. Die Autoren nahmen allerdings eine, wenn auch nur schwach ausgeprägte Resonanzaufspaltung an der unteren Grenze der Reststrahlenbande bei  $\omega_{TO, \text{GaAs}}$  wahr, deren energetische Lage angesichts des herrschenden Verständnisses der Elektron-Phonon-Wechselwirkung überrascht. Der Befund wurde anhand eines schematischen Modells erklärt, das auf einer Art Plasmon-Phonon-Kopplung basiert und mit dem Polaron-Effekt wenig gemeinsam hat.

Den Resonanzkopplungen höherer Ordnung wurde bislang nur eine geringe Aufmerksamkeit geschenkt. Dies liegt zum Hauptteil daran, daß sie generell einer thermischen Aktivierung bedürfen und daher erst bei vergleichsweise hohen Temperaturen auftauchen. In [Hu,96a, Hu,96b] wurde erstmals gezeigt, daß im Regime niedriger Dichten bis  $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  Resonanzaufspaltungen aufgrund des Polaron-Effektes zu beobachten sind. Weiterhin konnte bei diesen Dichten der Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung nachgewiesen und anhand eines auf einem Effektiv-Hamilton-Operator basierenden Modells auch quantitativ beschrieben werden.

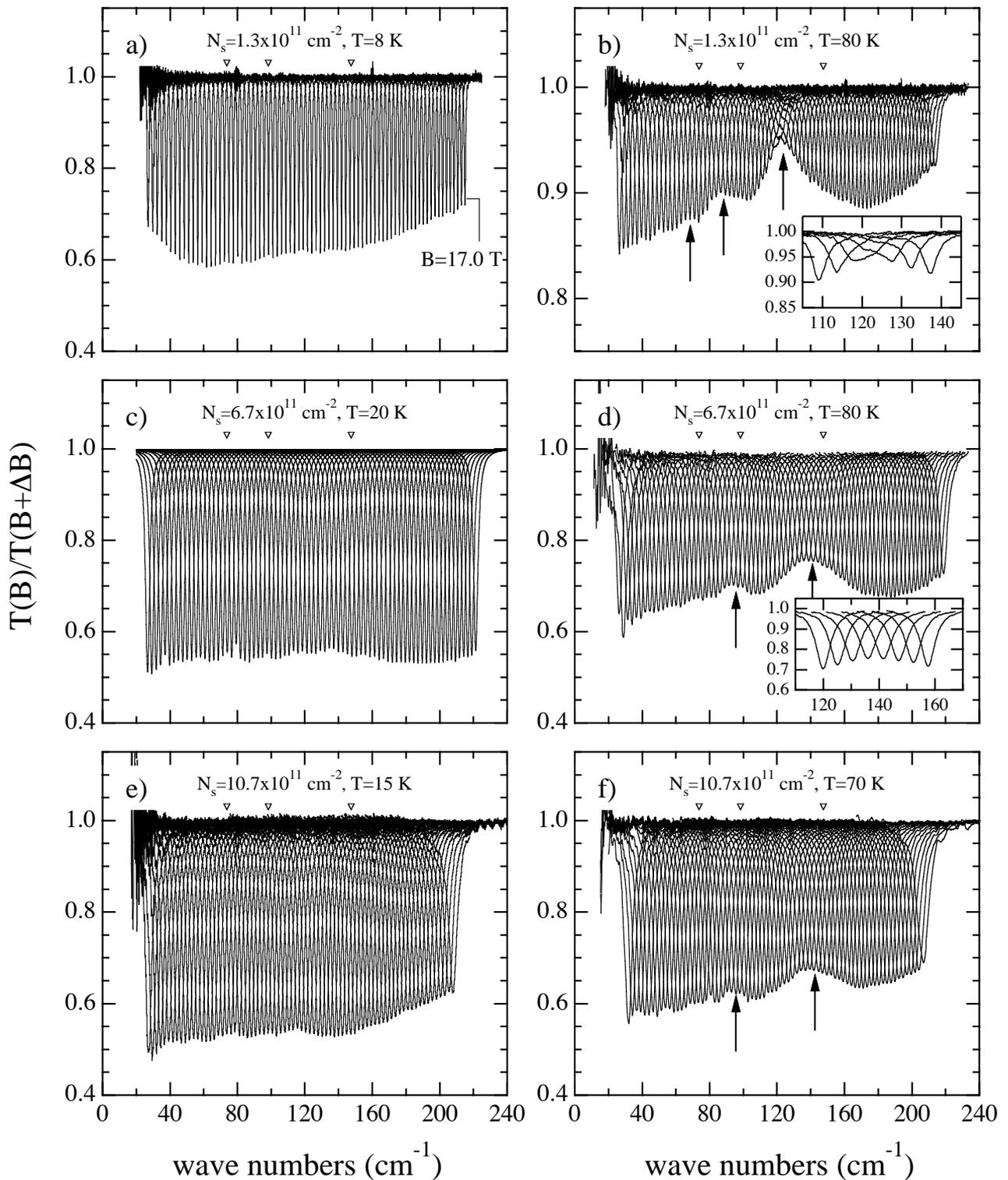
Die Rolle der Schichtphononen bei den Polaron-Effekten in auf GaAs basierenden Q2DEG ist ebenfalls noch nicht hinreichend geklärt. Da ein Großteil der Experimente zum Polaron-Effekt im Regime unterhalb oder unmittelbar um die Polaron-Vollfeldkopplung stattfinden und gut mit der Fröhlich-Wechselwirkung der LO-Volumenphononen von GaAs beschrieben werden können, ist bislang ein eindeutiger experimenteller Hinweis auf die Rolle der Schichtphononen und insbesondere der Grenzflächenphononen ausgeblieben. Im Frequenzregime der AlAs-Reststrahlenbande allerdings wurden bei hohen Magnetfeldern um 25 – 30 T in [Wan97] Polaron-Resonanzphänomene nachgewiesen, welche die Relevanz der Schichtphononen bei der Elektron-Phonon-Wechselwirkung in Halbleiterschichtsystemen bezeugen.

Ein weiterer noch wenig beleuchteter Aspekt ist die Rolle der elektrischen Subband-Struktur eines Q2DEG bei den resonanten Polaron-Effekten. In [Wan01] wurde erstmals die bei noch höheren Magnetfeldern als die Intrasubband-Polaron-Vollfeldkopplung (PFFC) auftretende Intersubband-Polaron-Vollfeldkopplung (ISPFPC) um  $\hbar\omega_c \approx \hbar\omega_{LO} + \epsilon_1 - \epsilon_0$  experimentell beobachtet. Analog zu den höheren Intrasubband-Resonanzkopplungen sollten auch in Q2DEG-Systemen mit geeigneter Subband-Struktur Intersubband-Polaron-Aufspaltungen höherer Ordnung durch thermische Aktivierung experimentell beobachtbar werden und interessante Einblicke in die Elektron-Phonon-Wechselwirkung generell niederdimensionaler Systeme gewähren.

## 4.2.2 Experimentelle Übersicht

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Q2DEG in GaAs untersucht, die einen weiten Dichtebereich von  $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} < N_S < 13 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  umfassen. Zur Vermittlung eines experimentellen Überblicks sind in der Figur 4.9 für 3 grundverschiedene Proben die in einem dicht abgetasteten ( $\Delta B = 0.2 \text{ T}$ ) Magnetfeldbereich von  $2.0 \text{ T} \leq B \leq 17.0 \text{ T}$  gemessenen Spektren in jeweils einem Teilbild übereinander gelegt. In den beiden jeweils nebeneinander stehenden Teilfiguren sind die Meßergebnisse bei einer niedrigen Temperatur  $T \leq 20 \text{ K}$  und bei einer hohen Temperatur  $T \geq 70 \text{ K}$  gegenübergestellt. Bei den untersuchten Proben handelt es sich in den Teilfiguren a) und b) um einen einseitig dotierten 20 nm-Quantetrog mit einer niedrigen Dichte und Barrieren aus einer  $\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.77}\text{As}$ -Legierung. Die Spektren aus den Teilbildern c) und d) wurden an einer Einfachheterostruktur mit hoher Dichte und ebenfalls einer  $\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.77}\text{As}$ -Barriere gemessen. Die Teilfiguren e) und f) zeigen die Spektren für einen symmetrisch dotierten 10 nm-Quantetrog mit sehr hoher Dichte und Barrieren aus regulären Supergittern mit einer Wiederholung von 4 Monolagen GaAs und 8 Monolagen AlAs.

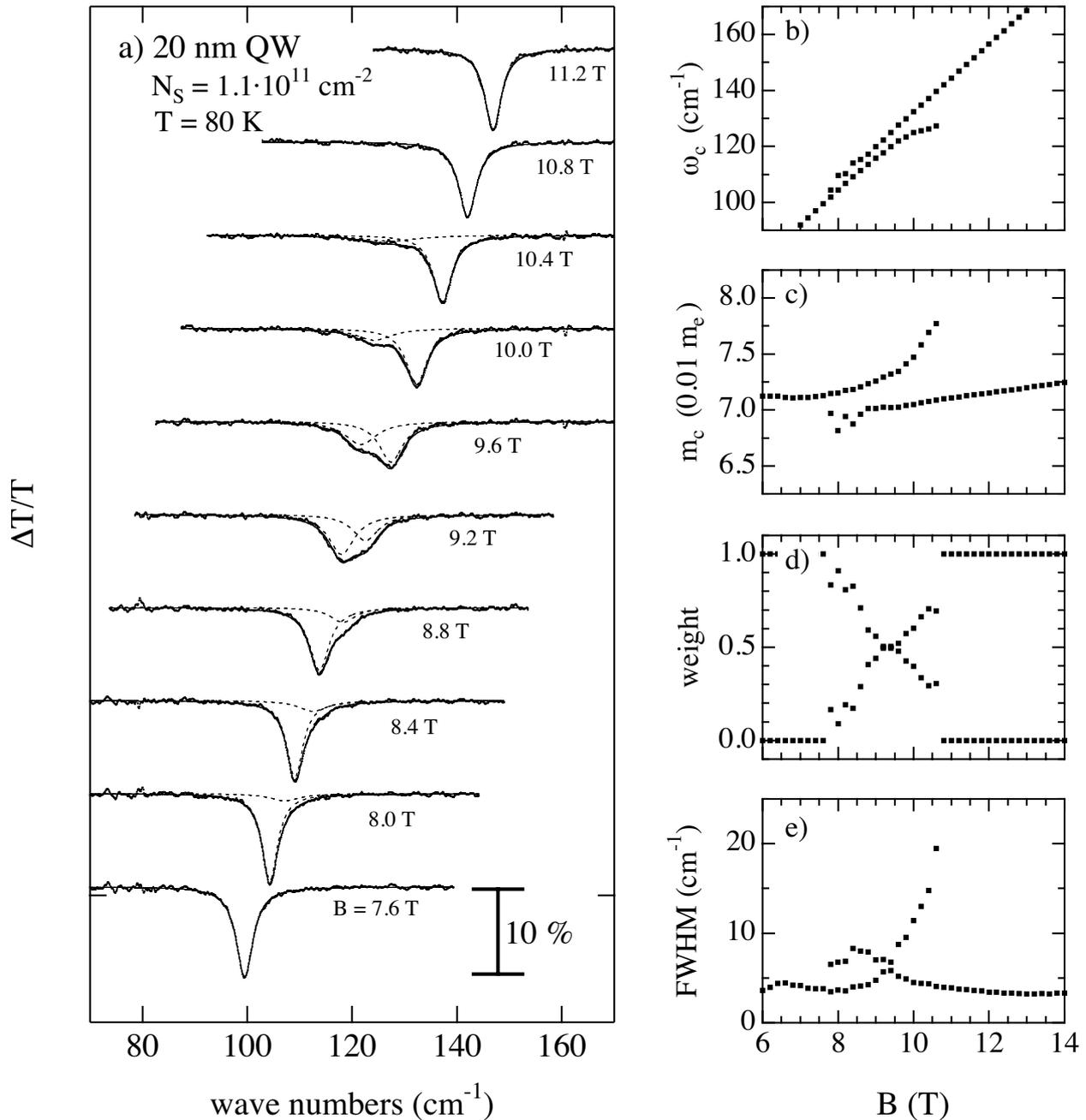
Am Temperaturvergleich erkennt man, daß sich in den Einhüllenden der Spektren bei hohen Temperaturen unabhängig vom Probenaufbau und der Elektronendichte charakteristische Strukturen ausbilden, die bei tiefen Temperaturen nicht vorkommen. Vergleicht man die Energien bei den stärksten Amplitudeneinbrüchen mit ganzzahligen Teilern der Energie des LO-Phonons, so stellt man zumindest bei den hohen Dichten eine gute Übereinstimmung fest. Demnach handelt es sich um eine Manifestation der höheren resonanten Polaron-Effekte. Bei der niedrigen Dichte ist der Amplitudeneinbruch, welcher der Halbfeldkopplung zuzuordnen ist, deutlich zu tieferen Energien hin versetzt. Weiterhin zeigt sich bei näherer Betrachtung dort eine deutliche Resonanzaufspaltung, die bei den hohen Dichten nicht auftritt. Aufgrund der verschiedenen experimentellen Befunde werden im weiteren die Bereiche niedriger und hoher Dichte zunächst getrennt untersucht. Der Bereich niedriger Dichte ist dabei durch eine signifikante Verschiebung der Resonanzeinbrüche zu niedrigen Magnetfeldern hin charakterisiert und weist zuweilen auch Linienaufspaltungen auf. Die Grenze zwischen den Dichtebereichen wird anhand der experimentellen Befunde im Bereich um  $N_S \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  angesiedelt.



**Abbildung 4.9:** Experimenteller Überblick über die resonanten Polaron-Effekte. Pfeile markieren die mit dem resonanten Polaron-Effekt in Zusammenhang stehenden Resonanzeinbrüche. Die Dreiecksmarker über den Einslinien deuten die zu erwartenden Resonanzlagen bei  $\omega_N = \omega_{LO}/N$ ,  $N = 2, 3, 4$  an.

### 4.2.3 Resonante Polaron-Zyklotronresonanz im Regime niedriger Elektronendichten

Dieses Kapitel faßt die Ergebnisse zur resonanten Polaron-Zyklotronresonanz bei niedrigen bis mittleren Elektronendichten bis hinauf zu  $N_S \approx 4.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  zusammen.



**Abbildung 4.10:** Experimentelle Polaron-Zyklotronresonanzen im Bereich der Polaron-Halbfeldkopplung. Teilfigur a) zeigt ausgewählte experimentelle Spektren (Punkte), deren Anpassungen (durchgezogen) sowie die Beiträge der Einzelresonanzen (gestrichelt). In Teilbild b) sind die ausgewerteten Resonanzpositionen als Energien und in c) als Zyklotronmassen dargestellt. Die relativen Resonanzstärken zeigt Teilbild d) und die Resonanzbreiten Teilfigur e).

Die Abbildung 4.10 a) zeigt zunächst für eine Doppelheterostruktur mit einer aus Transportdaten sehr präzise bestimmten Dichte von  $N_S = 1.1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  die bei einer Temperatur von  $T = 80 \text{ K}$  gemessenen Zyklotronresonanzspektren und deren berechnete Anpaßkurven im Regime der Polaron-Halbfeldkopplung. Die Spektren weisen eine deutliche Resonanzaufspaltung auf, die sich nahezu perfekt mit einer Superposition zweier Lorentz-Profile beschreiben läßt. Die entsprechenden aus der Linienanpassung gewonnenen Parameter sind in den Teilfiguren b) bis e) als Funktion des Magnetfeldes dargestellt. In [Hu,96a, Hu,96b] wurde gezeigt, daß zum Verständnis der Polaron-Zyklotronresonanz im Regime niedriger Elektronendichten die Elektron-Elektron-Wechselwirkung mit in Betracht gezogen werden muß. Zunächst wird im Vorausgriff auf die später noch detailliert behandelten Wechselwirkungseffekte in der Zyklotronresonanz ein Modell verwendet und erweitert, das auf der Aufstellung eines Effektiv-Hamilton-Operators für die kollektiven Polaron-Zyklotronresonanzen gründet.

### 4.2.3.1 Polaron-Zyklotronresonanz und Elektron-Elektron-Wechselwirkung

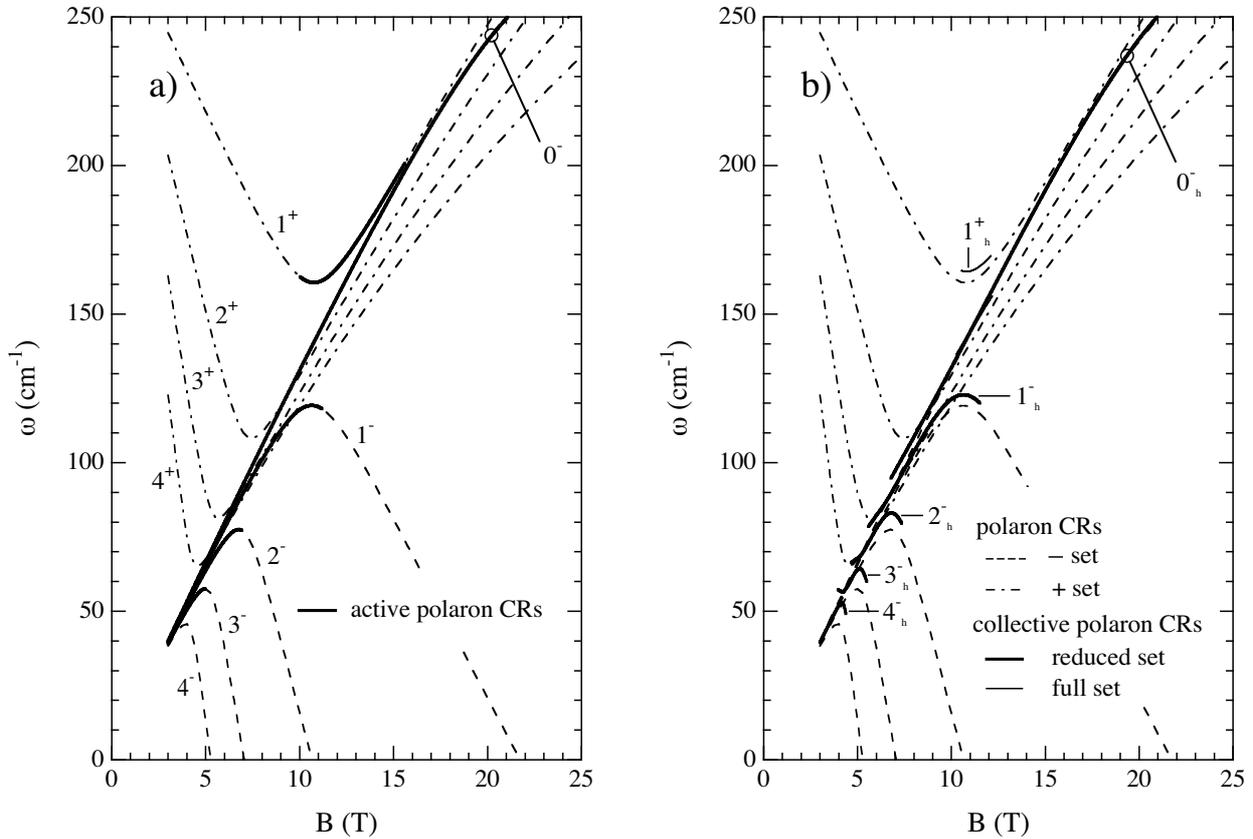
Wie es in Abschnitt 5.2.3 noch ausführlich dargelegt wird, läßt sich die Zyklotronresonanz eines wechselwirkenden Elektronengases, in dem mehrere Landau-Niveaus besetzt sind, durch die in Komponenten angegebene Hamilton-Matrix

$$\begin{aligned} H_{K,K}^{CR} &= \omega_{c,K} + \sum_{K' \neq K} f_{K'} I_{K,K'} \\ H_{K,L}^{CR} &= -\sqrt{f_K f_L} I_{K,L} \quad , \quad K \neq L \end{aligned} \quad (4.60)$$

beschreiben. Aus Gründen der Übersicht werden zur Indizierung der Polaron-Zyklotronübergänge Exziton-Indizes gemäß  $K = (i_K, n_K, \sigma_K | i_K, n_K + 1, \sigma_K)^{(b_K)}$  eingeführt. Die links in der Klammer stehenden Indizes bezeichnen dabei den Ausgangszustand und die rechts stehenden den Zielzustand eines erlaubten Zyklotronübergangs im Landau-Schema. Der hochgestellte und geklammerte Index  $b$  steht für den Polaron-Zweig. Die Polaron-Zyklotronfrequenzen  $\omega_{c,K} \equiv \tilde{\omega}^{(b_K)}(i_K, n_K, \sigma_K)$  berechnen sich z.B. nach Gleichung 4.44 oder 4.33 und stehen auf der Diagonalen der Hamilton-Matrix. Die relativen Übergangsgewichte  $f_K \equiv \tilde{f}_{i_K, n_K, \sigma_K}^{(b_K)}$  sind unter Kenntnis der Polaron-Zyklotronresonanzen durch die Gleichungen 4.50 bzw. 4.34 gegeben. Die Wechselwirkungsmatrixelemente  $I_{K,L}$  sind reell und verkoppeln die einzelnen Zyklotronresonanzen zu Kollektivmoden. Prinzipiell sollten sie aus mikroskopischen Theorien berechenbar sein. Im Grenzfall des extrem verdünnten Elektronengases mit  $r_s = 1/\sqrt{\pi N_S} \gg l_m$ , wobei  $r_s$  für den mittleren Teilchenabstand in der Ebene und  $l_m$  für die magnetische Länge stehen, sind die Wechselwirkungsmatrixelemente alle einheitlich. Die funktionale Abhängigkeit von der Elektronendichte und vom Magnetfeld ist dabei durch die folgende analytische Beziehung gegeben [Hu,95b]:

$$\hbar I_{K,L} = \hbar I = \nu \frac{C}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}} \frac{1}{r_0} \approx 0.82 \text{ meV } \nu \sqrt{N_S [10^{10} \text{ cm}^{-2}]} \quad , \quad \forall K, L \quad . \quad (4.61)$$

Der grundlegende Kopplungsmechanismus entspricht im Kern einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen den einzelnen Übergängen und wird von der dimensionslosen Konfigurationskonstanten  $C \approx 1.6$ , dem Gesamtfüllfaktor  $\nu$  und der elektrostatischen Coulomb-Wechselwirkungsenergie mit dem mittleren Teilchenabstand im Q2DEG als relevante Wechselwirkungslänge bestimmt. Für die im folgenden durchgeführten Rechnungen zu den resonanten Polaron-Effekten ist es günstig numerisch einfach handhabbare Näherungsausdrücke für die



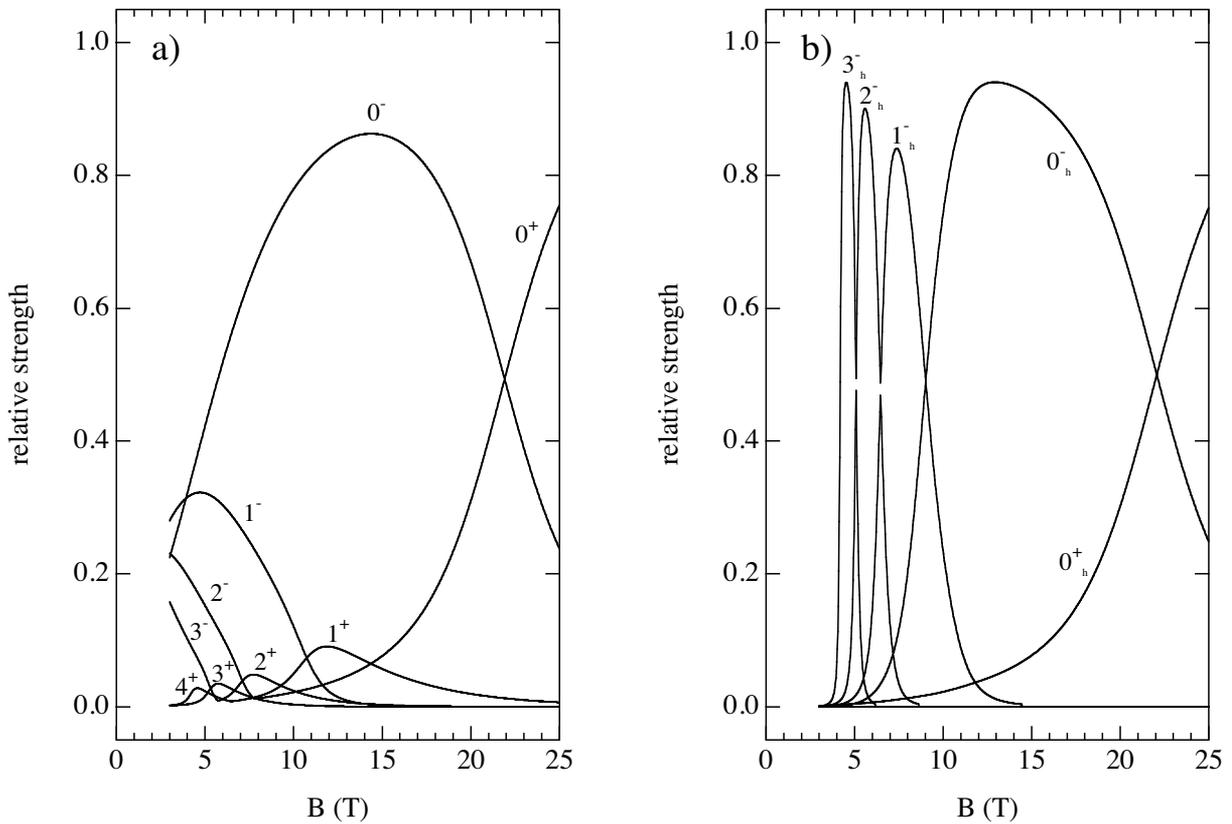
**Abbildung 4.11:** Berechnete Magnetfelddispersionen der Polaron-Zyklotronresonanzen im Modellvergleich. Im Teilbild a) sind die unverbundenen und in b) die infolge der Elektron-Elektron-Wechselwirkung verbundenen Polaron-Zyklotronresonanzen dargestellt. Die gestrichelten und gestrich-punkteten Linien kennzeichnen jeweils die beiden Zweige ( $b = -$  und  $b = +$ ) des den Einpolaron-Zyklotronresonanzen zugrunde liegenden Energieschemas 4.63. Die dicken Kurven entsprechen in a) den aktiven ungekoppelten und in b) den hybridisierten Moden des im Text beschriebenen reduzierten Modells, die jeweils relative Oszillatorstärken  $> 0.05$  aufweisen. Die entsprechenden Modenfrequenzen des verbundenen vollständigen Modells sind normal durchgezogenen und werden bis auf eine schwache Resonanz bei der Halbfeldkoppelung (um  $B \approx 11$  T) vollständig von den Verläufen des reduzierten Modells überdeckt. Die Parameter der Rechnung lauten:  $N_S = 11 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ,  $m_0^* = 0.066 m_e$ ,  $E_g^* = 1000 \text{ meV}$ ,  $\omega_{LO} = 285 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.06$ ,  $\hbar I = 6.6 \text{ cm}^{-1} \nu \sqrt{N_S [10^{10} \text{ cm}^{-2}]}$  und  $T = 80 \text{ K}$ .

Einpolaron-Zyklotronresonanzen als Eingabe für das Eigenwertproblem

$$\sum_L H_{KL}^{CR} F_L = \Omega F_K, \quad \forall K \quad (4.62)$$

zur Verfügung zu haben. Hierbei stehen  $\Omega$  für die gesuchten Kollektivmodenenergien des Polaron-Gases und  $F_K$  für die Amplitude, mit der ein Übergang  $K$  in der jeweiligen Kollektivmode zu finden ist.

Im betrachteten Grenzfall niedriger Dichten sind aufgrund der Niveaubesetzungen nur die virtuellen Übergänge von Belang, deren Endniveaus sich im Landau-Fächer resonant an die Einphonon-Grundlinie ( $\approx \hbar\omega_{LO} + \frac{1}{2}\hbar\omega_c$ ) anschmiegen. Vernachlässigt man die Subband-Struktur, setzt man Spinentartung voraus und berücksichtigt man lediglich die resonanten Beiträge in der Linienformfunktion, so bekommt man die folgenden,



**Abbildung 4.12:** Berechnete relative Oszillatorstärken der Polaron-Zyklotronresonanzen im Modellvergleich. Im Teilbild a) sind die Oszillatorstärken der ungekoppelten und in b) der infolge der Elektron-Elektron-Wechselwirkung verkoppelten Polaron-Zyklotronresonanzen aus der Figur 4.11 dargestellt.

leicht handzuhabenden Näherungsausdrücke für die Polaron-Zyklotronresonanzen

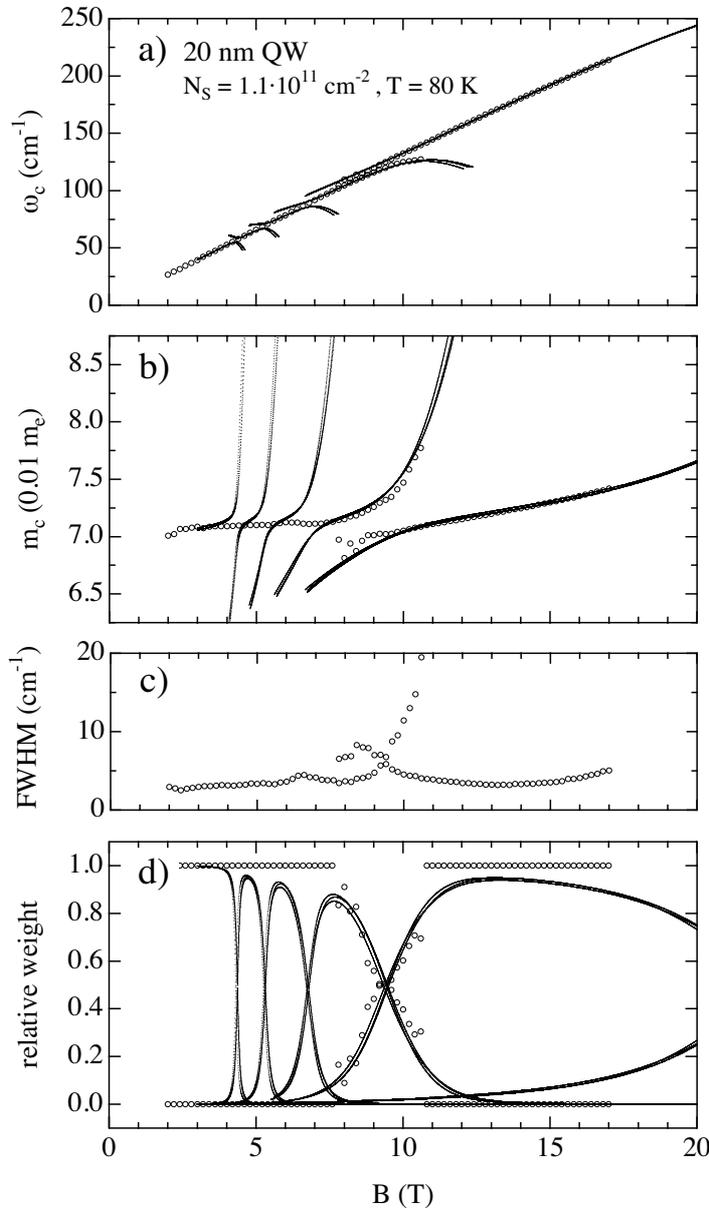
$$\tilde{\omega}_c^{(b=\pm)}(n) = \frac{\omega_{LO} + \omega_{n+1,n} - \omega_{n,0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\omega_{n+1,n} + \omega_{n,0} - \omega_{LO}]^2 + 4\alpha P_{0,n+1}} \quad , \quad (4.63)$$

$$\tilde{f}_n^{(b=\pm)} = \left[ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_{n+1,n} + \omega_{n,0} - \omega_{LO}}{\sqrt{[\omega_{n+1,n} + \omega_{n,0} - \omega_{LO}]^2 + 4\alpha P_{0,n+1}}} \right] (n+1)(\nu_n - \nu_{n+1}) \quad , \quad (4.64)$$

$$P_{0,n+1} = [1 - \nu_0] \omega_{LO}^2 \sqrt{\frac{\omega_c}{2\omega_{LO}}} \int_0^\infty dx F(x/l_m) J_{0,n+1}^2(x) \quad . \quad (4.65)$$

Bis auf den Landau-Index sind alle Indizes weggelassen und  $\omega_{m,n} = (\epsilon_m - \epsilon_n)/\hbar$  steht für eine Übergangsfrequenz im Landau-Fächer. Die Formfaktorintegrale der Elektron-Phonon-Wechselwirkung werden als  $P_{0,n+1}$  abgekürzt und die Fröhlich-Kopplungskonstante  $\alpha$  ist explizit herausgezogen. Die hier vernachlässigten nicht resonanten Beiträge der Polaron-Renormierung können effektiv bei der Anpassung an die experimentellen Daten auf die Nichtparabolizität der Bandstruktur und die Bandkantenmasse mit aufgeschlagen werden. Aufgrund der Dominanz der Resonanzterme spielen sie hier nur eine untergeordnete Rolle.

Um einen Eindruck zum Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auf die Polaron-Zyklotronresonanzen zu vermitteln, zeigen die Abbildungen 4.11 und 4.12 die Ergebnisse numerischer Berechnungen zu



**Abbildung 4.13:** Experimentelle und berechnete Linienformparameter der kollektiven Polaron-Zyklotronresonanzen. Die Teilfigur a) zeigt die Resonanzlagen und Figur b) ihre Darstellung als Zyklotronmassen. In Teilbild c) sind die Linienbreiten und in d) die relativen Resonanzstärken dargestellt. Die Kreise markieren experimentelle Werte und die dünnen Linien die Anpaßrechnungen.

unterschiedlichen Modellszenarien:

In der Teilfigur 4.11 a) sind die Magnetfelddispersionen der Polaron-Zyklotronresonanzen ohne die Elektron-Elektron-Wechselwirkung dargestellt. Dieses Szenario entspricht dem bereits im Vorfeld ausgiebig dargelegten Einpolaron-Bild. In der Auftragung sind die 5 energetisch niedrigsten Landau-Niveaus  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  mit ihren jeweils 2 Polaron-Zweigen berücksichtigt. Die entsprechenden Übergänge lauten  $\{0^{(+)}, 0^{(-)}, 1^{(+)}, 1^{(-)}, 2^{(+)}, 2^{(-)}, 3^{(+)}, 3^{(-)}, 4^{(+)}, 4^{(-)}\}$ , wobei der normalgestellte Index für das Ausgangsniveau und der hochgestellte Index für den Polaron-Zweig stehen. Die dominierenden aktiven Übergänge sind dick hervorgehoben. Die zugehörigen Oszillatorstärken sind in der Figur 4.12 a) dargestellt. Anhand dieser können die Resonanzfelder der Polaron-Kopplungsordnungen  $N = 1, 2, 3, \dots$  da ausgemacht werden, wo sich die Verläufe der Moden  $(N - 1)^-$  und  $(N - 1)^+$  gerade durchkreuzen (Halbfeldkopplung  $N = 2$ ,  $B_{N=2} = 10.55$  T).

Die Abbildungen 4.11 b) und 4.12 b) zeigen die Modendispersionen und Oszillatorstärken, die sich unter Einwirkung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung ergeben. Durch die Verkopplung bilden sich Hybridmoden aus, die entsprechend den in ihnen dominierenden Einpolaron-Beiträgen als  $\{0_h^{(+)}, 0_h^{(-)}, 1_h^{(+)}, 1_h^{(-)},$

Parametersatz	$\omega_{LO}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\alpha$	$m_0^*$ ( $m_e$ )	$E_g^*$ (meV)	$\gamma_I$ (meV/cm)
1	295	0.065	6.64	950	0.87
2	290	0.060	6.64	900	0.94
3	285	0.055	6.64	900	0.94

**Tabelle 4.1:** Ausgewertete Modellparameter zur Beschreibung der experimentell gemessenen kollektiven Polaron-Zyklotronresonanzen aus der Figur 4.13. Der Wechselwirkungsparameter  $\gamma_I$  ist über  $\hbar I = \gamma_I \nu \sqrt{N_S}$  definiert (siehe Gleichung 4.61).

$2_h^{(+)}, 2_h^{(-)}, 3_h^{(+)}, 3_h^{(-)}, 4_h^{(+)}, 4_h^{(-)}$  bezeichnet sind. Zum Vergleich sind die Einpolaron-Dispersionen gestrichelt und gestrich-punktet unterlegt. Bei genauerer Betrachtung und Analyse wird offenbar, daß die resonant aufgespaltenen Hybridmoden im Regime der Halbfeldkopplung gegenüber den entsprechenden Einpolaron-Moden derart verschoben sind, als ob sie von einer effektiven erhöhten Phononfrequenz

$$\hbar\omega_{LO,eff} \approx \hbar\omega_{LO} + \hbar I \quad (4.66)$$

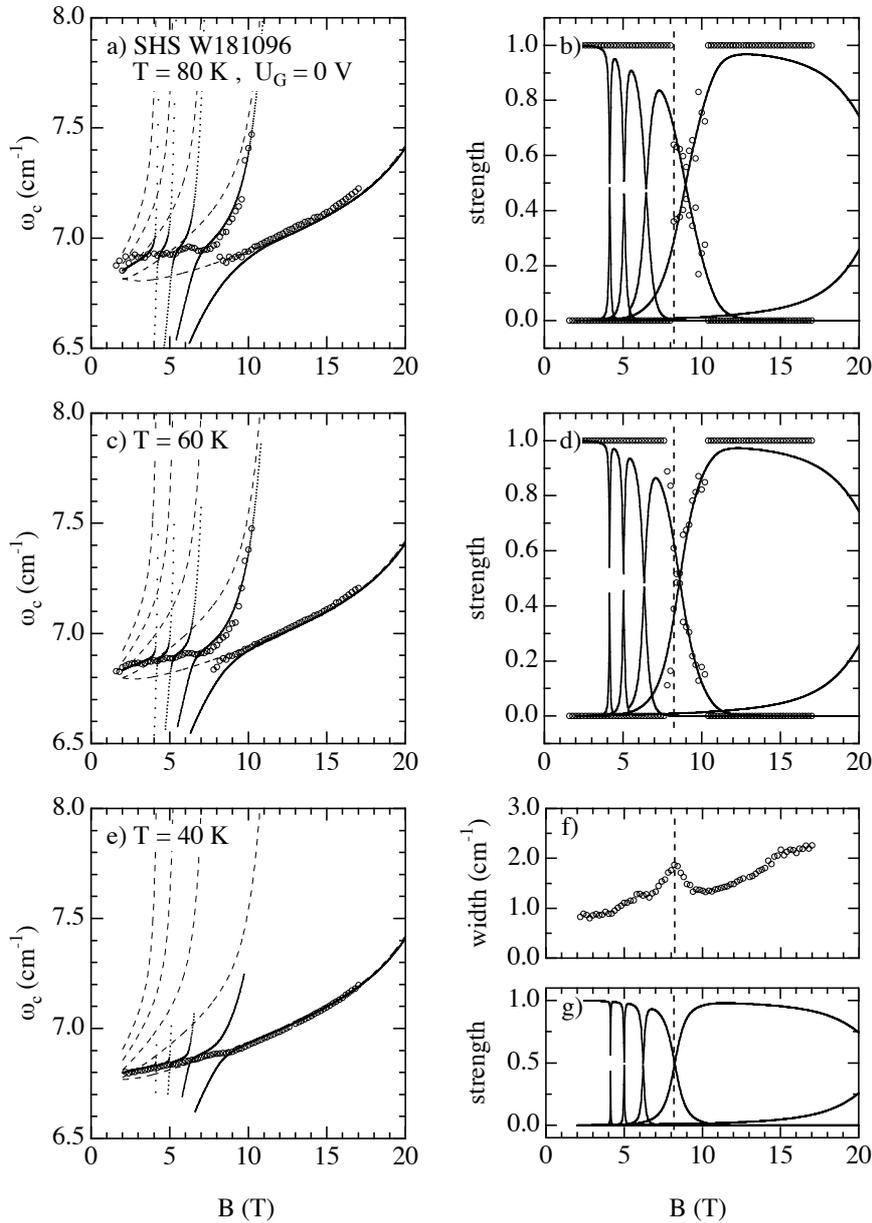
herrührten. In der Auftragung der Modendispersionen sind zwei Modelle gleichzeitig dargestellt. Zum einen normal durchgezogen ein verkoppeltes Modell, das den kompletten Satz mit 10 Einpolaron-Moden enthält. Zum anderen dick durchgezogen ein Modell, das lediglich die Hybridisierung eines reduzierten Satzes an Übergängen  $\{0^{(+)}, 0^{(-)}, 1^{(-)}, 2^{(-)}, 3^{(-)}, 4^{(-)}\}$  mit 6 Moden berücksichtigt. Bis auf einen unbedeutenden Ast ( $1_h^{(+)}$ ) im unmittelbaren Bereich der Halbfeldkopplung sind die Verläufe des vollständigen und des reduzierten Modells in derartiger Übereinstimmung, daß sie deckungsgleich zusammenfallen. Das reduzierte Modell entspricht im Kern dem, das in [Hu,96a, Hu,96b] vorgeschlagen wurde. Allerdings sind im dargelegten Modell ergänzend noch die Umverteilungen der Oszillatorstärken infolge der Resonanzdurchkreuzungen sowie die Pauli-Blockadeeffekte eingeschlossen. Die entsprechenden Beiträge sind in den Gleichungen 4.64 und 4.65 in eckige Klammern gesetzt. Für die weiteren Betrachtungen soll daher das reduzierte Modell genügen, zumal in allen hier untersuchten Systemen keinerlei Hinweise auf weitere Moden, die Rückschlüsse auf eine Beteiligung der oberen Polaron-Zweige (+) zulassen, zu finden sind. Noch deutlicher wird der Unterschied zwischen den unverkoppelten und den verkoppelten Zyklotronmoden anhand der Oszillatorstärken in der Abbildung 4.12. Aus der Auftragung b) geht sowohl die Formation von wenigen dominierenden Hybridmoden deutlich hervor als auch die Verschiebung der Polaron-Resonanzfelder gegenüber dem Einpolaron-Modell zu deutlich kleineren Magnetfeldern (Halbfeldkopplung  $N = 2$ ,  $B_{N=2} = 9.05$  T). Diese sind für die Resonanzordnungen  $N < 1$  durch die Kreuzungspunkte zwischen den Moden  $(N - 1)_h^-$  und  $(N - 2)_h^-$  ausgezeichnet. Insgesamt weisen die Hybridmoden ein Dispersions- und Auspaltungsverhalten auf, wie es gerade experimentell in der Abbildung 4.10 b) vorhanden ist.

Die detaillierte quantitative Anpassung des dargelegten Modells an die experimentellen Daten aus der Figur 4.10 ist in der Abbildung 4.13 gezeigt. Die jeweils 3 berechneten Kurven stellen die Ergebnisse von Anpassungen dar, welche als Phononfrequenzen die Werte 285, 290 (jeweils mittlere Kurve) und 295 cm<sup>-1</sup> in Betracht ziehen. Die ermittelten Parametersätze sind in der Tabelle 4.1 aufgelistet. Aus der Darstellung geht klar hervor, daß für alle gewählten Phononfrequenzen eine gleichermaßen gute Anpassung erreichbar ist. Hierzu muß bei einer niedrigeren Phononfrequenz auch eine entsprechend geringere Fröhlich-Kopplungskonstante  $\alpha$  gewählt werden, um eine vergleichbar gute Anpassung zu erreichen. Da die Güte der 3 Anpassungen gleichermaßen gut ist, können keine eindeutigen quantitativen Rückschlüsse auf die Phononfrequenzen und damit insbesondere auf die Rolle der Schichtphononen gezogen werden. Die ausgewertete Fröhlich-Kopplungskonstante selbst stimmt tendenziell sehr gut mit der Kopplungskonstanten von GaAs überein. Dieser Befund unter-

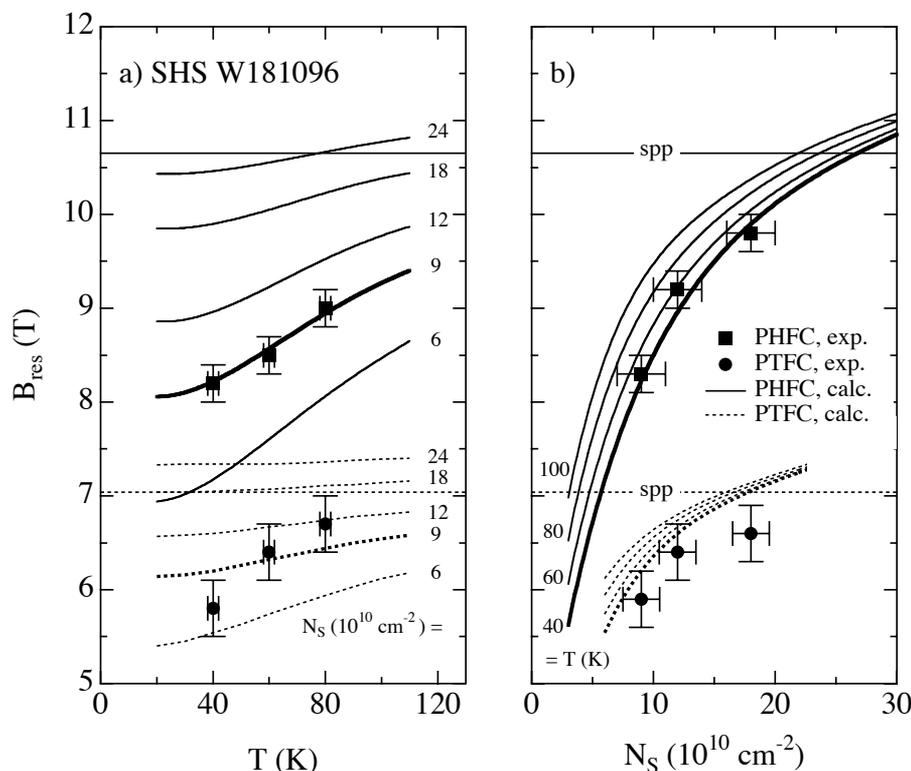
mauert die Berechnungen in [Hai90, Hai93], nach denen für die hier vorliegende Trogbreite von 20 nm die Schichtphononen zusammengenommen in etwa die Polaron-Kopplungen liefern sollten, wie die (hypothetischen) GaAs-Volumenphononen. Wie man anhand der Abbildung weiter entnehmen kann, werden für alle 3 Parametersätze sowohl die Resonanzlagen als auch die Oszillatorstärken speziell der Halbfeldkopplung sowohl in qualitativer wie in quantitativer Hinsicht sehr gut beschrieben.

#### 4.2.3.2 Temperatur- und Dichteabhängigkeit der resonanten Polaron-Effekte

Um den Gültigkeitsbereich der im vorausgehenden Abschnitt dargelegten Beschreibung zu überprüfen, werden im Rahmen dieses Abschnittes experimentelle Temperatur- und Dichtevariationen durchgeführt und mit den theoretischen Vorhersagen verglichen.



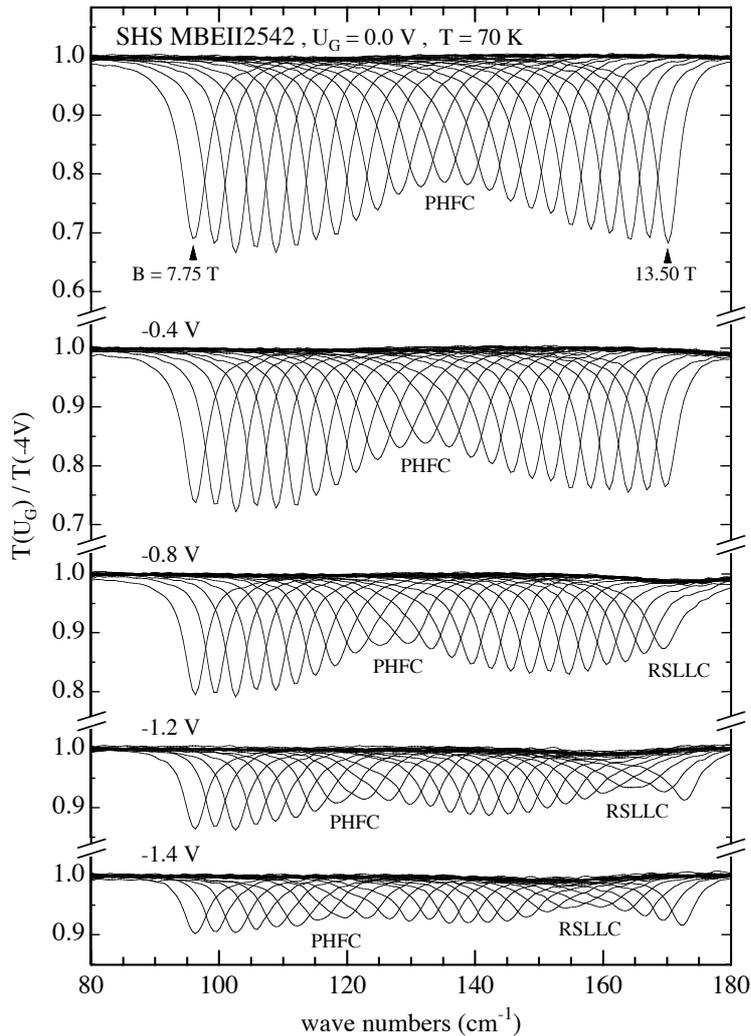
**Abbildung 4.14:** Experimentelle und berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen unter dem Einfluß der Temperatur. Die Teilfiguren a), c) und e) zeigen die Resonanzpositionen in Form von Zyklotronmassen. In den Teilbildern b), d) und g) sind die relativen Oszillatorstärken und in f) die experimentellen Linienbreiten dargestellt. Die experimentellen Werte sind als offene Kreise und die gerechneten Kurven durchgezogen gezeichnet. Die bei der mittleren Temperatur ermittelten Modellparameter lauten:  $N_S = 9 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ,  $N_{depl} = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ,  $m_0^* = 6.58 m_e$ ,  $E_g^* = 950 \text{ meV}$ ,  $\omega_{LO} = 285 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.05$  und  $\gamma_I = 0.75 \text{ meV/cm}$ .



**Abbildung 4.15:** Resonanzmagnetfelder als Funktion der Temperatur und der Elektronendichte. Teilbild a) zeigt die Resonanzfelder der Polaron-Halbfeld- (PHFC) und Drittfeldkopplung (PTFC) in Abhängigkeit von der Temperatur bei fester Elektronendichte und b) in Abhängigkeit von der Dichte bei fester Temperatur. Die gerechneten Kurven sind für die Halbfeldkopplung durchgezogen und für die Drittfeldkopplung gestrichelt dargestellt. Dick hervorgehoben sind jeweils die Kurven zu den jeweils eingestellten experimentellen Werten. Die experimentellen Punkte sind mit ihren Fehlerbalken behaftet als volle Quadrate (PHFC) und Kreise (PTFC) eingezeichnet. Die waagrecht Linien (spp) markieren die Resonanzpositionen gemäß dem Einpolaron-Modell.

Die Abbildung 4.14 zeigt zunächst für eine Einfachheterostruktur mit einer zum Zwecke der Dichteveränderung aufgedampften Gateelektrode bei einer niedrig eingestellten Dichte von  $N_S \approx 9 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  die ausgewerteten Linienformparameter für drei verschiedene Temperaturen. Die Modellparameter wurden für die mittlere Temperatur  $T = 60 \text{ K}$  bestimmt und für die beiden anderen übernommen. Sie sind in der Bildbeschriftung angegeben. Man erkennt anhand der Darstellung, daß unter Konstanthaltung aller sonstigen Parameter die alleinige Angleichung der Temperatur eine hervorragende Beschreibung sowohl der Resonanzlage als auch des Massenverlaufes besonders im Bereich der Halbfeldkopplung liefert. Für die niedrigste Temperatur können bei der Halbfeldkopplung, wie auch ganz generell für die höheren Kopplungen, zwar keine Resonanzaufspaltungen mehr aufgelöst werden. Allerdings treten an ihre Stelle charakteristische Linienverbreiterungen, die, wie man aus den Teilfiguren f) und g) entnimmt, in ihrer Lage genau mit der zu erwartenden Resonanzaufspaltung zusammenfallen.

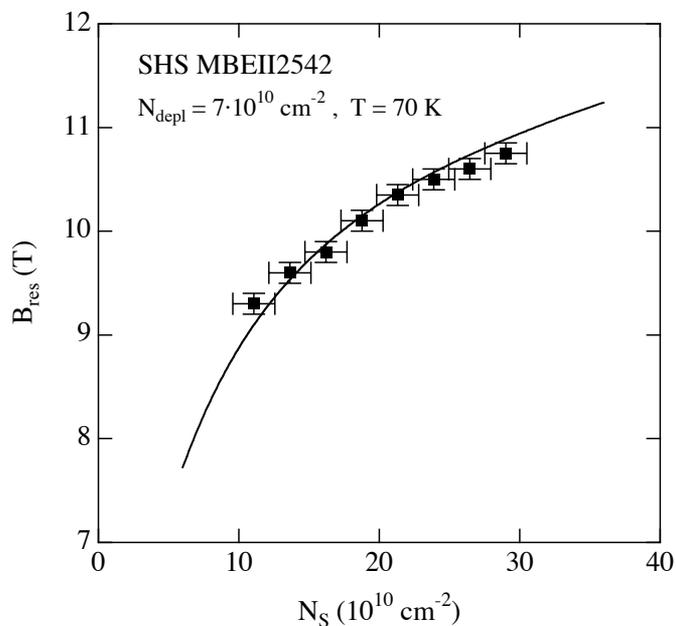
Zum Vergleich zwischen Experiment und Theorie sind in den Abbildungen 4.15 a) und b) die gerechneten Resonanzlagen als Funktion der Temperatur bzw. der Elektronendichte aufgetragen und mit den an der Probe aus Figur 4.14 gewonnenen experimentellen Daten verglichen. Die Dichte wurde dabei über die Gatespannung variiert. Die im Teilbild b) dargestellten experimentellen Resonanzmagnetfelder wurden aus der Linienbreite, die in der Figur 4.19 gegen die Resonanzlage aufgetragen ist, entnommen. Wie man anhand der Darstellung



**Abbildung 4.16:** Experimentelle Zyklotronresonanzspektren im Bereich der Polaron-Halbfeldkopplung für verschiedene Elektronendichten. Die Einbrüche in den Amplituden sind der Polaron-Halbfeldkopplung (PHFC) sowie der resonanten Subband-Landau-Niveaue-Kopplung (RSLLC) zuzuschreiben und entsprechend gekennzeichnet. Letztere resultiert aus einer geringen Verkippung der Probenormalen gegenüber der Magnetfeldachse.

erkennt, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sehr gut. Als überraschend mag zunächst an den gerechneten Kurven speziell der Halbfeldkopplung erscheinen, daß bei vergleichsweise hohen Dichten die Resonanzlage die Vorgabe des Einpolaron-Bildes übersteigt, anstatt sich ihrer asymptotisch anzunähern. Der Grund dafür liegt darin, daß die Phononfrequenz gemäß der Gleichung 4.66 effektiv um einen Wechselwirkungsbeitrag angehoben erscheint. Dieser Wechselwirkungsbeitrag steigt mit zunehmender Dichte im Rahmen des hier gewählten Modells stark an und liefert damit eine Erklärung für den vorliegenden Sachverhalt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß das dargelegte Modell eigentlich nur für sehr niedrige Dichten seine Gültigkeit besitzt. Genauer spezifiziert setzt es die folgenden Bedingungen voraus: Erstens müssen gemäß dem Einpolaron-Bild die Polaron-Übergänge überwiegen, deren Zielniveau im Polaron-Landau-Fächer resonant an die Einphonon-Grundlinie ankoppelt. Dies ist dann hinreichend erfüllt, wenn keine nennenswerte thermische Besetzung der Niveaus vorliegt, die sich energetisch nahe am Einphonon-Grundniveau befinden. Um dies wiederum zu gewährleisten muß  $\hbar\omega_{LO} - \epsilon_F \ll k_B T$  gelten, wobei die Fermi-Energie vom Subband-Boden, dem Aufhängepunkt des Landau-Fächers, aus gerechnet wird. Diese Bedingung ist bei einer angenommenen Temperatur von  $T = 100$  K bis Dichten von etwa  $N_S \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  gut erfüllt. Zweitens setzt das Modell eine für alle Zyklotronübergänge einheitliche Wechselwirkungskopplung  $\hbar I$  voraus, die im Grenzfall extrem verdünnter Elektronengase hergeleitet wurde. Bei extrem verdünnten Elektronengasen spielen Austausch effek-



**Abbildung 4.17:** Resonanzmagnetfeld der Polaron-Halbfeldkopplung in Abhängigkeit von der Elektronendichte. Die durchgezogene Linie markiert die berechnete Abhängigkeit und die gefüllten Quadrate entsprechen den experimentellen Werten. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter sind bis auf die Verarmungsladungs- und die Elektronendichte identisch zu denen aus Figur 4.14.

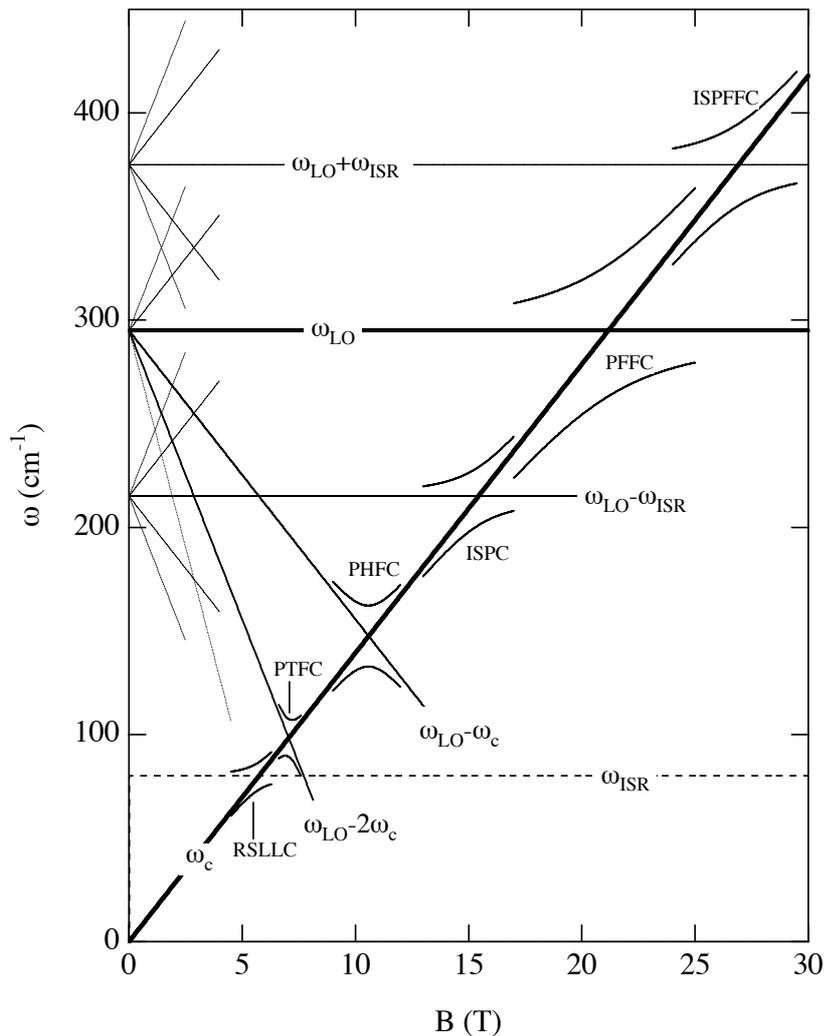
te aufgrund des fehlenden Überlapps zwischen den Landau-Orbitalen keine Rolle. Mit zunehmender Dichte jedoch werden diese Effekte immer stärker, so daß die Voraussetzung für die Gültigkeit des Modells selbst bei den niedrigsten der hier vorliegenden Dichten im Grunde nicht gewährleistet ist. Der grundlegende Kopplungsmechanismus zwischen den Zyklotronübergängen ist im extrem verdünnten Q2DEG eine klassische Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen den induzierten Übergangsdipolen und wird noch ausführlich im Abschnitt 5.2.2 dargelegt. In [Coo94, Hu,95b] wurde gezeigt, daß diese Wechselwirkung nur in geringem Maße von der detaillierten Anordnung der Teilchen, das bedeutet den Korrelationen im Elektronengas abhängt. Eine solche Dipol-Dipol-Wechselwirkung kann prinzipiell auch in Systemen höherer Dichte vorhanden sein. Daher kann man auch bei hohen Elektronendichten annehmen, daß eine solche Kopplung in einer ähnlichen funktionalen Form und Stärke existiert. Allerdings werden ihr weitere Beiträge, die vom Austausch und weiteren Korrelationen im Elektronengas herrühren, überlagert. Durch die Abschirmfähigkeit des Elektronengases, die mit zunehmender Dichte immer stärker wird, werden gerade die Austauscheffekte stark abgeschwächt [Gro86, Fet71]. Dieser Umstand bietet möglicherweise einem als weitgehend klassisch anzusehenden Dipol-Dipol-Beitrag die Möglichkeit, die Kopplung zu dominieren.

Zur Untermauerung der gefundenen Ergebnisse wurde an einem weiteren Q2DEG mit Gatelektrode eine detaillierte Untersuchung der Polaron-Halbfeldkopplung bis zu Elektronendichten von  $N_S \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  in feinen Dichtekrementen durchgeführt. Um einen Überblick zu geben zeigt die Abbildung 4.16 zunächst die gemessenen Spektren. Die relativen Transmissionen wurden hierbei dadurch gewonnen, daß alternierend Spektren bei der gewünschten Gatespannung und einer festen Referenzspannung, bei der das Q2DEG völlig entleert war, aufgenommen und anschließend dividiert wurden. Aufgrund dieser Verfahrensweise weisen sie in Anbetracht der hohen Temperatur eine hohe Güte auf. Die Elektronendichte wurde durch Extrapolation der bei tiefen Temperaturen gewonnenen CV-Daten bestimmt. Die Darstellung 4.17 gibt die experimentellen Resonanzlagen der Polaron-Halbfeldkopplung zusammen mit dem berechneten Verlauf als Funktion der Elektronendichte wieder. Auch hier ergibt sich selbst bei Dichten bis  $3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  eine gute Übereinstimmung mit der Theorie, die weitgehend als quantitativ bezeichnet werden kann. Mit zunehmender Dichte scheint sich jedoch ab  $2.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  eine Sättigung abzuzeichnen, die noch ausführlich bei der Behandlung der hohen Dichten untersucht wird.

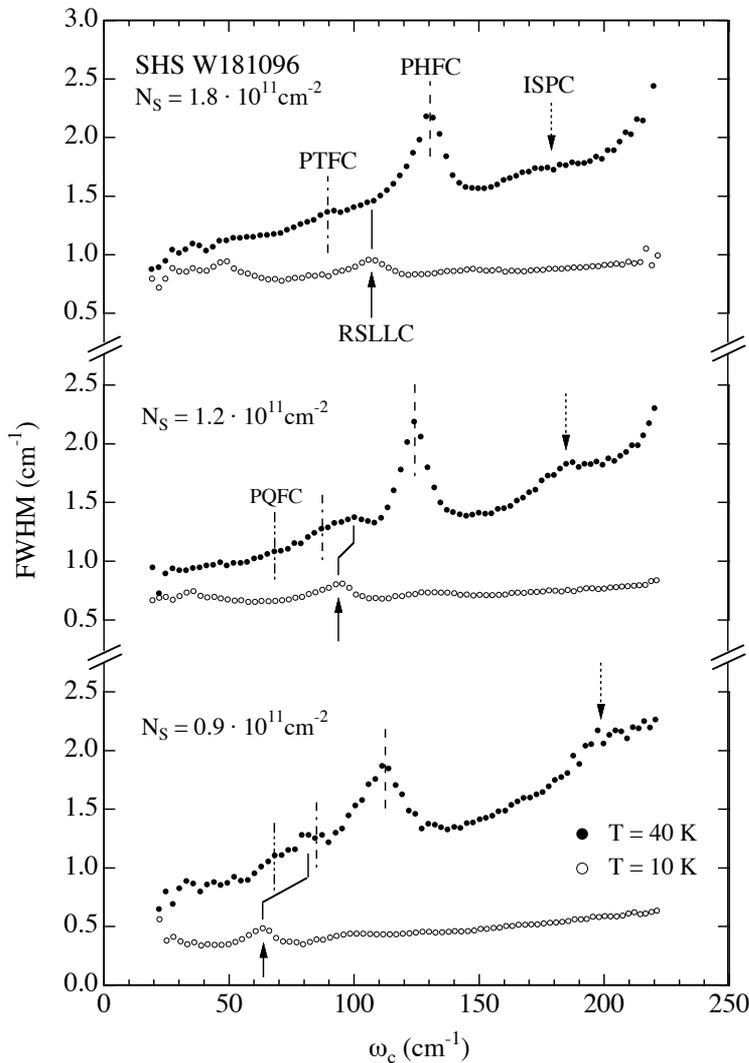
### 4.2.3.3 Resonante Intersubband-Polaron-Kopplung

Bei Q2DEG mit schwachem Potentialeinschluß können das Grundsubband und die höheren Subbänder energetisch derart nahe liegen, daß eine thermische Besetzung der höheren Subbänder bereits bei vergleichsweise niedrigen Temperaturen von wenigen 10 K vorliegt. In diesem Fall können, wie es in der Abbildung 4.18 schematisch dargestellt ist, in der Zyklotronresonanz unterhalb der Phononfrequenz neben den Intrasubband-Kopplungen auch Resonanzdurchkreuzungen (ISPC) aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung auftreten, an der ein virtueller Intersubband-Emissionsübergang  $i = 1 \rightarrow i = 0$  beteiligt ist. Das zugrunde liegende Landau-Schema ist in der Figur 4.1 b) gezeigt. Die entsprechende Intersubband-Polaron-Vollfeldkopplung (ISPFFC) geschieht über den komplementären virtuellen Absorptionsübergang  $i = 0 \rightarrow i = 1$  und setzt keine thermische Besetzung des ersten angeregten Subbandes voraus [Wan01]. Allerdings sind die für ihre experimentelle Beobachtung benötigten Magnetfelder sehr hoch und nur in Großforschungsanlagen verfügbar.

In der Figur 4.18 sind die experimentell an der Struktur SHS W181096, welche im vorigen Abschnitt 4.2.3.2 bereits ausführlich behandelt wurde, aus einer Linienformanpassung gewonnenen Resonanz-Halbwertsbreiten für 3 Elektronendichten gegen die Lage der Zyklotronresonanz aufgetragen. Die Darstellung als Funktion der Resonanzlage ermöglicht dabei auf einfache Weise den hier vorteilhaften Übergang von der Magnetfeld- in die Energiedomäne. Die untersuchte Struktur besitzt eine extrem niedrige Verarmungsdichte von  $N_{depl} \approx$



**Abbildung 4.18:** Schematisches Polaron-Resonanzszenario mit zwei beteiligten Subbändern. Das Auftreten der Polaron-Kopplungen ergibt sich im Einpolaron-Bild aus der Polstruktur der Linienform bzw. Memoryfunktionen und stellt eine Erweiterung von Figur 4.5 dar. Die Bezeichnungen bei der Bildbeschriftung bedeuten: ISR: Intersubband-Resonanz, RSLLC: Resonante Subband-Landau-Niveau-Kopplung, PFFC: (Intrasubband-)Polaron-Vollfeldkopplung, PHFC: Polaron-Halbfeldkopplung, PTFC: Polaron-Drittfeldkopplung, ISPC: Intersubband-Polaron-Kopplung und ISPFFC: Intersubband-Polaron-Vollfeldkopplung.



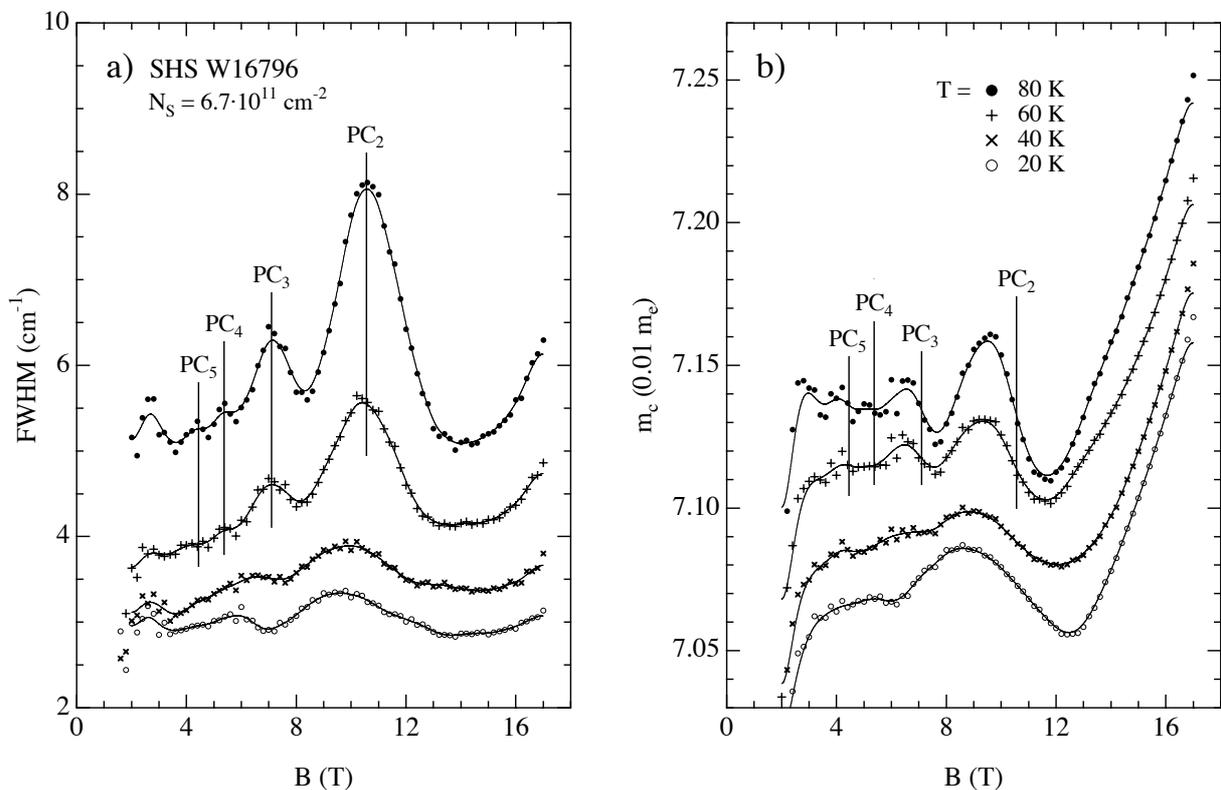
**Abbildung 4.19:** Experimentelle Zyklotronresonanz-Linienbreiten als Funktion der Resonanzlage. Die offenen Kreise markieren die Meßwerte bei  $T = 10$  K und die vollen die Werte für  $T = 40$  K. Die bei der niedrigen Temperatur beobachtbare Struktur aufgrund der resonanten Subband-Landau-Niveau-Kopplung (RSLLC) läßt sich, allerdings zu höheren Energien hin verschoben, auch bei der hohen Temperatur ausmachen. Dies ist besonders gut bei der mittleren Kurve zu erkennen. Die Bezeichnungen entsprechen denen aus Figur 4.18. Selbst die Polaron-Viertelfeldkopplung (PQFC) kann noch anhand einer wenn auch schwach ausgeprägten Erhebung unter Zuhilfenahme von Meßdaten bei höheren Temperaturen identifiziert werden.

$1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  und infolge dessen sehr geringe Subband-Abstände. Diese lassen sich bei tiefen Temperaturen anhand der charakteristischen Subband-Landau-Niveau-Kopplung (RSLLC) in der Linienbreite ausmachen und zeigen gemäß der Erwartung einen Anstieg mit zunehmender Elektronendichte. Bei der hohen Temperatur  $T = 40$  K dominieren die Polaron-Effekte die Linienbreitenvariation, allen voran die Polaron-Halbfeldkopplung und schwächer ausgeprägt die Polaron-Drittfeldkopplung. Neben diesen beiden bereits bekannten Strukturen zeigt sich bei Energien um  $170 - 210 \text{ cm}^{-1}$  eine weitere, verhältnismäßig breite Erhebung, deren Position mit zunehmender Elektronendichte zu niedrigeren Energien hin verschiebt. Weiterhin lassen sich bei genauer Betrachtung schwache Strukturen lokalisieren und von tiefen Temperaturen her kommend verfolgen, welche der RSLLC zugeschrieben werden können. Addiert man die Lage der RSLLC und die der breiten Erhebung, so stellt man fest, daß die Summenfrequenz  $\omega_{RSLLC} + \omega_{ISPC}$  gerade in etwa die Phononfrequenz  $\omega_{LO} \approx 280 - 290 \text{ cm}^{-2}$  ergibt. Dies legt die Vermutung nahe, daß es sich bei der Linienbreitenüberhöhung rechts der Polaron-Halbfeldkopplung um eine Manifestation der Intersubband-Polaron-Kopplung (ISPC) handelt, wie man sie bei einer vorliegenden thermischen Besetzung des ersten angeregten Subbandes erwartet. Die ausreichende thermische Besetzung des ersten angeregten Subbandes ist bei den ausgewerteten Subband-Abständen  $< 110 \text{ cm}^{-1}$ , die im interessierenden Magnetfeldbereich  $B > 10$  T deutlich niedriger liegen als die Landau-Niveauabstände  $\hbar\omega_c$ , sicher gewährleistet.

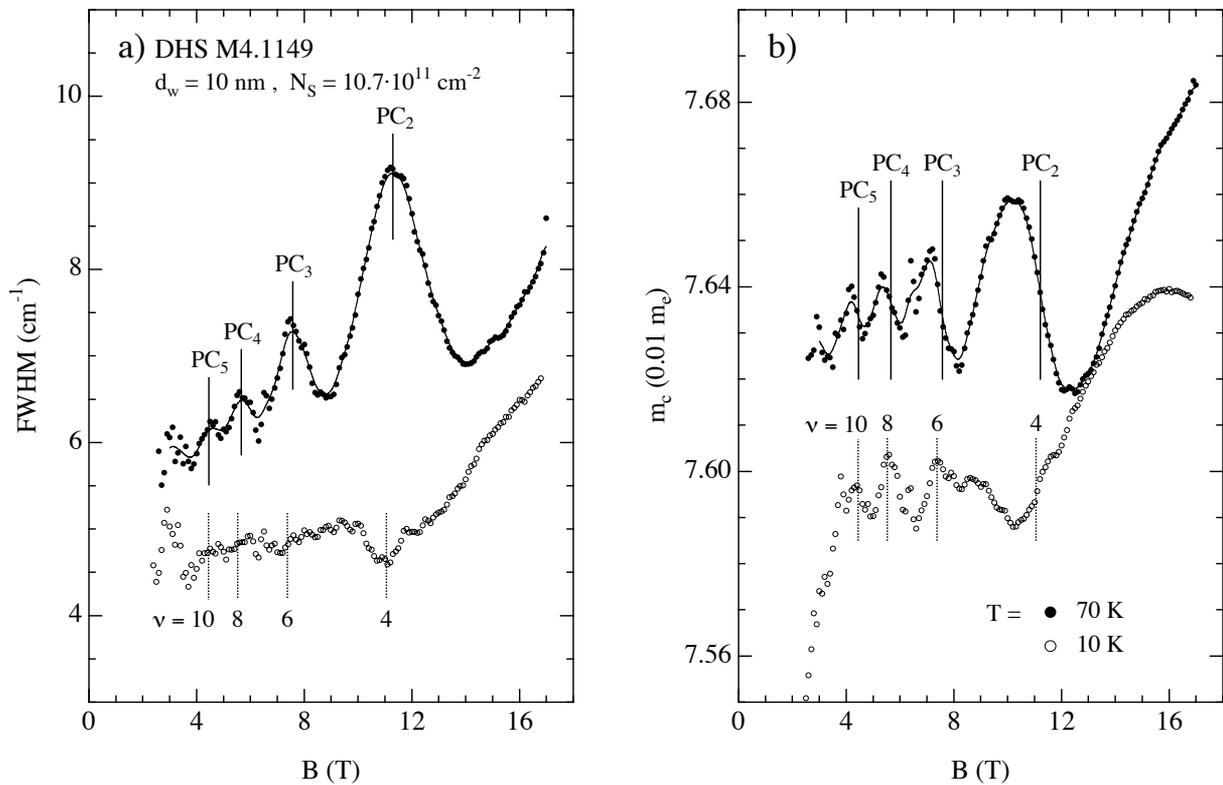
#### 4.2.4 Resonante Polaron-Zyklotronresonanz im Regime hoher Elektronendichten

Dieser Abschnitt widmet sich den experimentellen Ergebnissen zur resonanten Polaron-Zyklotronresonanz bei hohen Dichten im Regime  $6 < N_S(10^{11} \text{ cm}^{-2}) < 13$ .

Die Abbildung 4.20 zeigt zunächst für eine Einfachheterostruktur (Spektren in Abbildung 4.9 c) und d) abgebildet) die ausgewerteten Linienbreiten und Zyklotronmassen als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. Bei den niedrigen Temperaturen werden die dominierenden Variationen durch Effekte verursacht, die mit dem Füllfaktor und der Subband-Struktur zusammenhängen. Sie werden später noch ausgiebig diskutiert. Bei den hohen Temperaturen bilden sich in der Resonanzbreite und in der Zyklotronmasse charakteristische Strukturen heraus, die anhand der vorausgehenden Betrachtungen als Intrasubband-Polaron-Resonanzkopplungen bis zur Ordnung  $N = 5$  identifiziert werden. Dabei sind die nahezu gleichen Lagen der Maxima und Minima bei hohen und tiefen Temperaturen rein zufälliger Natur. Als Besonderheit weist die untersuchte Probe derart niedrige Subband-Abstände auf, daß je nach Magnetfeld selbst bei  $T = 0 \text{ K}$  zwei Subbänder besetzt sein können. Mögliche Resonanzstrukturen, die mit Intersubband-Polaron-Effekten in Zusammenhang stehen, können hier allerdings nicht ausgemacht werden.



**Abbildung 4.20:** Experimentelle Zyklotronresonanz-Linienformparameter für eine Einfachheterostruktur als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. Teilbild a) zeigt die Resonanzbreite und Teilbild b) die als Zyklotronmasse ausgewertete Resonanzlage. Die experimentellen Meßwerte sind durch Markersymbole dargestellt. Die durchgezogenen Linien wurden durch glättende Interpolation aus den experimentellen Punkten gewonnen. Der Index der Strukturbezeichnung steht für die Polaron-Kopplungsordnung  $N$ .



**Abbildung 4.21:** Experimentelle Zyklotronresonanz-Linienformparameter für einen engen Quantentrog als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. Teilbild a) zeigt die Resonanzbreite und Teilbild b) die als Zyklotronmasse ausgewertete Resonanzlage. Die experimentellen Meßwerte sind durch Markersymbole dargestellt. Die durchgezogenen Linien wurden durch glättende Interpolation aus den experimentellen Punkten gewonnen. Der Index der Strukturbezeichnung steht für die Polaron-Kopplungsordnung  $N$ .

In der Darstellung 4.21 sind die Linienbreiten- und Zyklotronmassenverläufe für einen engen Quantentrog sehr hoher Dichte dargestellt (Spektren in Abbildung e) und f) abgebildet). Aufgrund des starken Einschlußpotentials liegen die Subband-Abstände hier derart hoch, daß auch bei der hohen Temperatur kein zweites Subband thermisch besetzt ist. Daher sind in diesem Q2DEG resonante Intersubband-Polaron-Kopplungen ausgeschlossen. Auch hier erkennt man bei der hohen Temperatur die für die resonanten Intrasubband-Polaron-Kopplungen charakteristischen Magnetfeldvariationen. Die Strukturen in der Linienbreite und in der Zyklotronmasse aufgrund der Polaron-Kopplungen besitzen hier keinerlei Ähnlichkeit mit denen, die bei tiefen Temperaturen vorhanden sind und im wesentlichen mit dem Füllfaktor korrelieren. Man kann anhand der beiden Darstellungen 4.20 und 4.21 erkennen, daß die Variationen in der Linienbreite und in der Zyklotronmasse aufgrund der Polaron-Effekte für beide Proben sehr ähnlich sind und gegeneinander eine Phasenverschiebung derart besitzen, daß die Maxima in der Linienbreite gerade mit den Wendepunkten in der Zyklotronmasse zusammenfallen.

Im weiteren widmet sich zunächst der Abschnitt 4.2.4.1 der Verknüpfung zwischen den Linienbreiten- und den Massenvariationen. Im Anschluß daran werden im Abschnitt 4.2.4.2 die Polaron-Resonanzkopplungen in der Energiedomäne untersucht, wo ein universelles Verhalten sichtbar wird. Mit der Möglichkeit von Feinstrukturen in den Polaron-Resonanzkopplungen beschäftigt sich der Abschnitt 4.2.4.3. Die Erkenntnisse werden schließlich für die Halbfeldkopplung im Abschnitt 4.2.4.4 zusammengefaßt.

#### 4.2.4.1 Analytizität der Linienformfunktion

Die Abbildung 4.22 stellt für den Quantentrog aus Figur 4.21 die Magnetfeldverläufe von Linienbreite, Zyklotronmasse und ihren Magnetfeld-Ableitungen gegenüber. Zunächst ist an der Teilfigur b) erkennbar, daß die Zyklotronmasse und die Ableitung der Linienbreite einen nahezu identischen Verlauf zeigen. Auch die Variationen in der Ableitung der Zyklotronmasse weisen, wie man aus Teilfigur a) entnimmt, bis auf das umgekehrte Vorzeichen eine qualitativ ähnliche Magnetfeldvariation auf wie die Resonanzbreite.

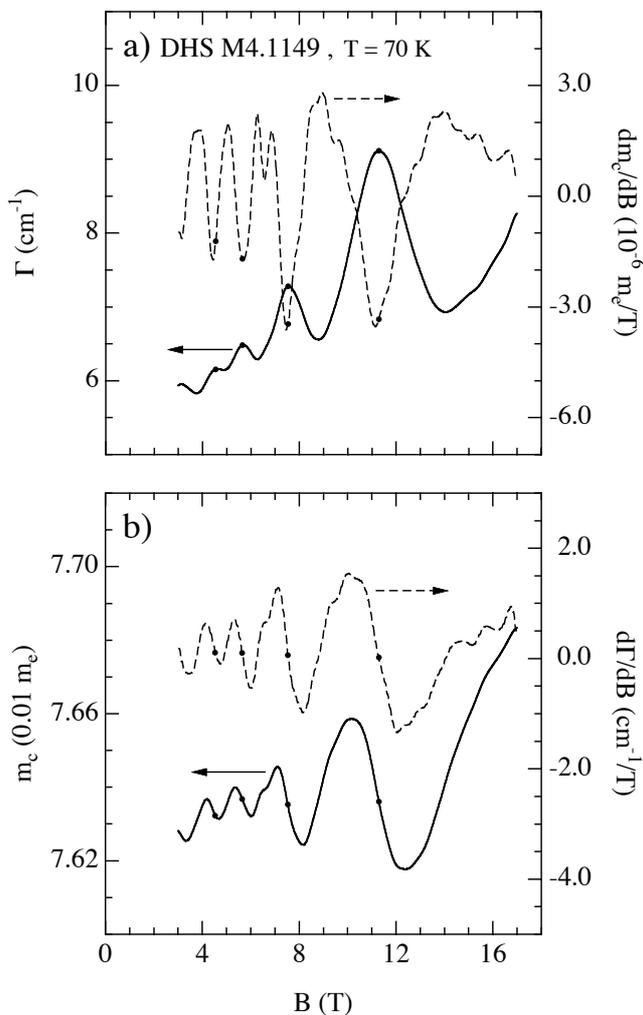
Das beobachtete Verhalten kann zumindest skizzenhaft erklärt werden, wenn man in Anlehnung an [Nic89] annimmt, daß die dynamische Leitfähigkeit durch eine Drudeform

$$\sigma(\omega, B) = \frac{N_S e^2}{m^*} \frac{i}{\omega - \omega_c - \Sigma(B)} \quad (4.67)$$

beschrieben wird, die eine (effektive) komplexe Linienformfunktion

$$\Sigma(B) = \Delta(B) - i\Gamma(B) \quad (4.68)$$

berücksichtigt. In der Linienformfunktion stehen  $\Delta(B)$  für die Linienverschiebung und  $\Gamma(B)$  für die Linien-



**Abbildung 4.22:** Vergleich von Linienbreite, Zyklotronmasse und deren Magnetfeldableitungen. Teilfigur a) vergleicht die Linienbreite mit der Ableitung der Zyklotronmasse und b) die Zyklotronmasse mit der Ableitung der Linienbreite. Die dargestellten durchgezogenen Kurven wurden dabei durch eine leicht glättende Interpolation aus den experimentellen Meßpunkten gewonnen. Die gestrichelt dargestellten Ableitungen wurden durch numerische Differentiation aus den interpolierten Kurven gebildet.

verbreiterung der Zyklotronresonanz als Funktion des Magnetfeldes. Unter der Annahme, daß sich die Linienformfunktion mathematisch gutmütig verhält und eine analytische Funktion in  $B$  darstellt, sollten für den Real- und den Imaginärteil die Kramers-Kronig-Relationen [Jac62]

$$\Delta(B) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(B')}{B' - B} dB' , \quad \Gamma(B) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta(B')}{B' - B} dB' , \quad (4.69)$$

gültig sein, wobei  $P$  den Cauchyschen Hauptwert bezeichnet. Nutzt man aus, daß die Änderung der Zyklotronmasse  $\Delta m_c$  über die Beziehung

$$\Delta(B) \approx -\frac{\omega_c}{m^*} \Delta m_c(B) \quad (4.70)$$

mit der Linienverschiebung  $\Delta(B)$  in Zusammenhang steht, dann bekommt man schließlich durch Bildung der Ableitungen nach  $B$  die näherungsweisen Beziehungen

$$\frac{d\Delta m_c(B)}{dB} \propto -\frac{1}{B} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(B')}{(B' - B)^2} dB' , \quad \frac{d\Gamma(B)}{dB} \propto P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B' \Delta m_c(B')}{(B' - B)^2} dB' . \quad (4.71)$$

Aufgrund der starken Wichtung des Auffeldes  $B$  durch den symmetrischen Faltungskern  $\frac{1}{(B' - B)^2}$  dominiert der Bereich um den Funktionswert  $\Gamma(B)$  bzw.  $\Delta m_c(B)$  das entsprechende Integral und somit die Variationen. Daher kann man in einer groben Abschätzung den Faltungskern durch eine Dirac-Deltafunktion  $\delta(B' - B)$  annähern und und daraus die Beziehungen

$$\frac{d\Delta m_c(B)}{dB} \approx \frac{dm_c(B)}{dB} \propto -\Gamma(B) , \quad \frac{d\Gamma(B)}{dB} \propto \Delta m_c(B) \quad (4.72)$$

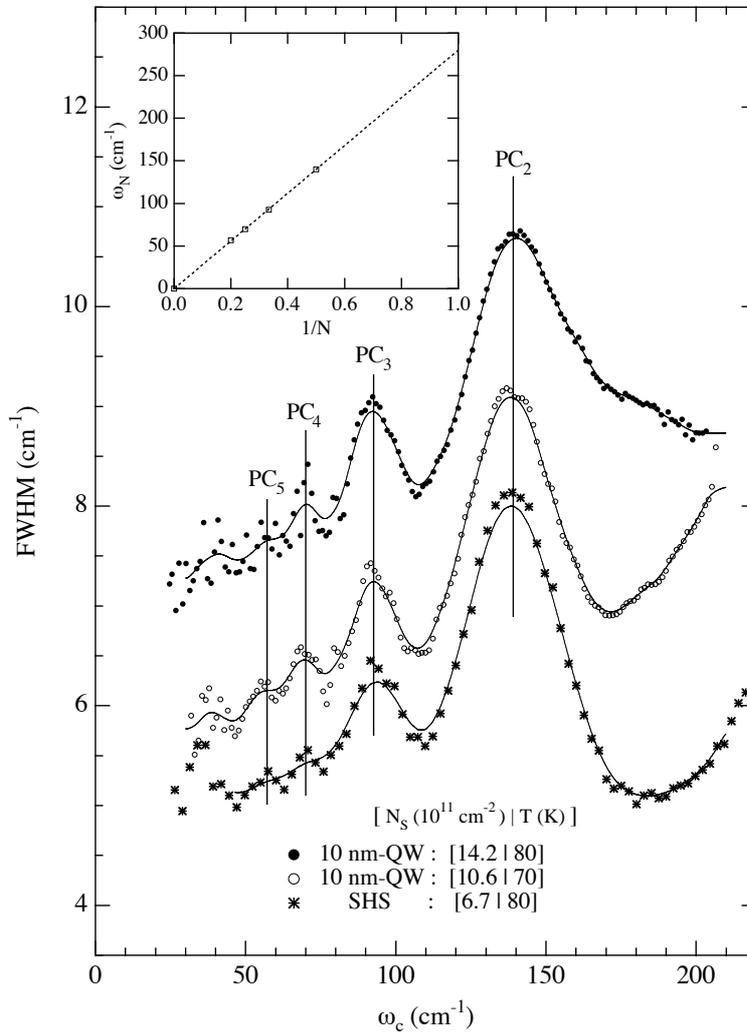
ableiten. In Anlehnung an die experimentellen Befunde bleiben dabei die Faktoren  $\frac{1}{B}$  bzw.  $B'$  aus Gleichung 4.71 unberücksichtigt, da sie nicht wesentlich zu den Variationen beitragen. Folglich ist die Proportionalität lediglich in einem losen Sinne zu verstehen und vorwiegend experimentell motiviert.

Die tendenzielle Übereinstimmung der beobachteten Verläufe aus Figur 4.22 mit den Relationen 4.72 bestätigt im wesentlichen die Form 4.68 und die Analytizität der magnetfeldabhängigen Memoryfunktion. Angemerkt sei zuletzt, daß die Analytizität in der Magnetfelddomäne unmittelbar mit der Analytizität in der Energiedomäne verknüpft ist, welche auf dem Kausalitätsprinzip gründet. Dies liegt an den Intrasubband-Übergangsenergien eines Q2DEG, die allesamt bis auf Korrekturen mit der Zyklotronfrequenz und damit linear in  $B$  verlaufen. Damit ist die Magnetfeldachse bis auf Korrekturen mit der Frequenzachse gleichzusetzen. Diesem Aspekt ist der folgende Abschnitt gewidmet.

#### 4.2.4.2 Resonante Polaron-Zyklotronresonanz in der Energiedomäne

Die Abbildung 4.28 stellt für drei verschiedene Proben im Regime hoher bis sehr hoher Dichten die Linienbreiten als Funktion der Resonanzlagen  $\omega_c(B)$  dar. Im Gegensatz zur Auftragung gegen das Magnetfeld fallen in der Energiedomäne für jede Kopplungsordnung unabhängig vom Probenaufbau und der Elektronendichte die Lagen der Linienbreitenmaxima zusammen. Aus dem Insert in der Figur 4.23 ist weiter zu entnehmen, daß die energetischen Lagen der Resonanzen  $\omega_N$  sehr gut durch eine lineare Abhängigkeit

$$\omega_N = \frac{\omega_{ph}}{N} \quad (4.73)$$



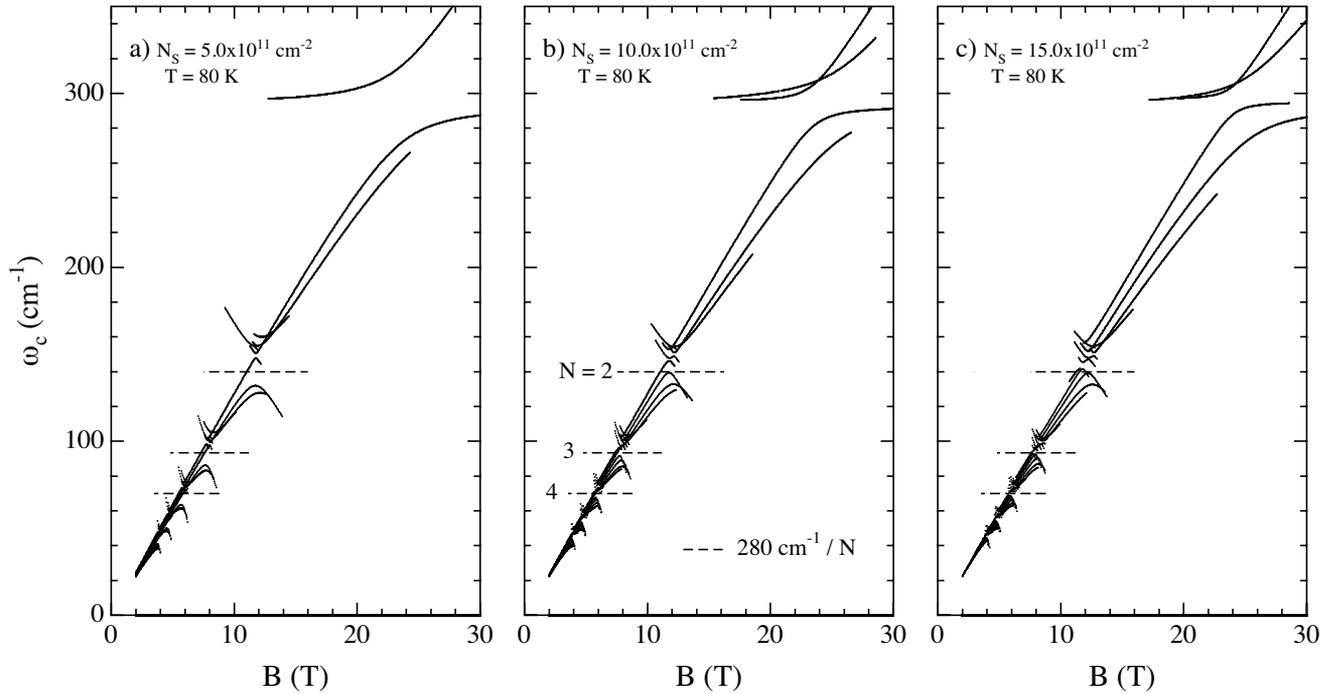
**Abbildung 4.23:** Linienbreite der Polaron-Zyklotronresonanz als Funktion der Resonanzlage im Probenvergleich. Die experimentellen Meßwerte sind durch Markersymbole dargestellt. Die durchgezogenen Linien wurden durch glättende Interpolation aus den experimentellen Punkten gewonnen. Der Index der Strukturbezeichnung steht für die Polaron-Kopplungsordnung  $N$ . Im Insert sind die Lagen der Maxima gegen die reziproke Kopplungsordnung  $1/N$  aufgetragen. Die gestrichelte Gerade ist eine Anpaßkurve und extrapoliert für die Vollfeldkopplung gegen  $\omega_1 \approx 280 \pm 5 \text{ cm}^{-1}$ .

von der reziproken Kopplungsordnung  $1/N$  beschrieben werden.

Das beobachtete Polaron-Resonanzverhalten kann mit der Polaron-Theorie von Wu, Peeters und Devreese (siehe Abschnitt 4.1.2.2) erklärt werden, wenn man annimmt, daß die von der Theorie vorausgesetzte parabolische Bandstruktur durch eine effektiv parabolische mit einer gemittelten Masse  $m^* = \langle m_c \rangle$  gemäß Gleichung 2.114 gegeben ist. Oberhalb des magnetischen Quantengrenzfalls mit Füllfaktoren  $\nu > 2$  gilt in guter Näherung  $\langle m_c \rangle \approx m_F$ , wobei  $m_F$  der Masse an der Fermi-Energie entspricht. Damit werden in Einklang mit dem Experiment die Resonanzlagen für die Polaron-Kopplungen bei den Frequenzen entsprechend der Beziehung 4.73 vorhergesagt, wobei  $\omega_{ph}$  für die (effektive) longitudinale Phononfrequenz steht.

Angesichts der extrem hohen Dichten überrascht das Zutreffen einer Beschreibung, die auf dem Bild nicht-wechselwirkender Polaronen basiert. Bezieht man allerdings die Abschirmung durch das Elektronengas in die Betrachtungen mit ein, kann man das Zutreffen der Einteilchen-Beschreibung zumindest qualitativ verstehen: Infolge der Abschirmung werden die Elektron-Elektron-Wechselwirkung und die Elektron-Phonon-Wechselwirkung im Frequenz-Impuls-Raum entsprechend

$$V_{el-el}(\vec{q}_{||}, \omega) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon(\vec{q}_{||}, \omega)} V_{el-el}(\vec{q}_{||}) \quad (4.74)$$



**Abbildung 4.24:** Nach der modifizierten Theorie von Cho und Choi berechnete Polaron-Zyklotronresonanzen unter Berücksichtigung der Leitungsband-Nichtparabolizität in einem 20 nm-Quantentrog für drei unterschiedliche Dichten. Die Parameter der Rechnung lauten:  $m^* = 0.07 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha = 0.05$ . Es sind Resonanzen mit einer relativen Stärke  $f > 0.02$  eingezeichnet.

beziehungsweise

$$V_{el-ph}(\vec{q}_{||}, \omega) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon(\vec{q}_{||}, \omega)} V_{el-ph}(\vec{q}_{||}, \omega) \quad (4.75)$$

modifiziert. Die Wechselwirkungen werden hierbei über die dielektrische Funktion  $\varepsilon(\vec{q}_{||}, \omega)$  des hier als ideal zweidimensional vorausgesetzten Elektronengases umso stärker abgeschirmt, je höher die Elektronendichte und die Temperatur liegen. Infolge dieser Abschirmung werden insbesondere die austauschartigen Beiträge der diagrammatischen Störungsentwicklung (Feynman-Diagramme) sowohl für die Elektron-Elektron- als auch für die Elektron-Phonon-Wechselwirkung stark abgeschwächt [Fet71, Ash76, Mad78, Gro86]. Zum einen spielen bei einer stark abgeschirmten Elektron-Elektron-Wechselwirkung die Vielteilchen-Renormierungen nur eine untergeordnete Rolle, so daß im Hochdichteregime das Einteilchen-Bild das Niveauschema gut approximiert. Zum anderen führt die Abschwächung der Elektron-Phonon-Kopplung zu stark reduzierten Polaron-Kopplungen und damit auch Polaron-Aufspaltungen im Vergleich zum Einteilchen-Bild. Die Abschirmung liefert damit auch eine Erklärung dafür, daß bei den Polaron-Resonanzkopplungen lediglich Linienverbreiterungen anstatt Linienaufspaltungen in der Zyklotronresonanz beobachtbar sind.

Einen Aspekt, auf den im weiteren näher eingegangen werden soll, stellt die die sich aus der Auftragung ergebende effektive Phononfrequenz  $\omega_{ph} = \omega_{N=1} \approx 280 \pm 5 \text{ cm}^{-1}$  dar. Diese liegt signifikant unterhalb der Frequenz des LO-Phonons von GaAs mit  $\omega_{LO, \text{GaAs}} \approx 295 \text{ cm}^{-1}$  am Ende des unteren Drittels der GaAs-Reststrahlenbande. Interpretiert man die experimentellen Daten im Rahmen des Bildes eines nicht-

wechselwirkenden Polaron-Gases mit (effektiv) parabolischer Bandstruktur, so spricht diese Frequenz auf den ersten Blick für eine Ankopplung an die longitudinalen Grenzflächenmoden des Schichtsystems. Die Dispersionen der Grenzflächenphononen von Heterostrukturen sind in den Abbildungen 3.3, 3.4 und 3.5 dargestellt. Sie verlaufen generell allesamt innerhalb der begrenzenden Reststrahlenbanden, wobei sich die Dispersionen je nach Aufbau (SHS oder DHS) und Beschaffenheit der Barriere (AIAs, Legierung oder Supergitter) im Detail unterscheiden. Nach Berechnungen in [Hai90, Hai93], die an einem Modellsystem die Polaron-Ankopplung an die Interface- und Confined-Phononen untersuchten, sollten jedoch selbst in schmalen Quantentrögen mit einer Breite von 10 nm, wie sie hier hauptsächlich Verwendung finden, die Confined-Moden mit einer Energie von ungefähr  $\hbar\omega_{LO, \text{GaAs}}$  die Polaron-Kopplung dominieren. Die Interface-Moden sollten dabei eine untergeordnete Rolle spielen und man erwartet deshalb Polaron-Resonanzszenarien energetisch näher bei  $\omega_{LO, \text{GaAs}}/N$ .

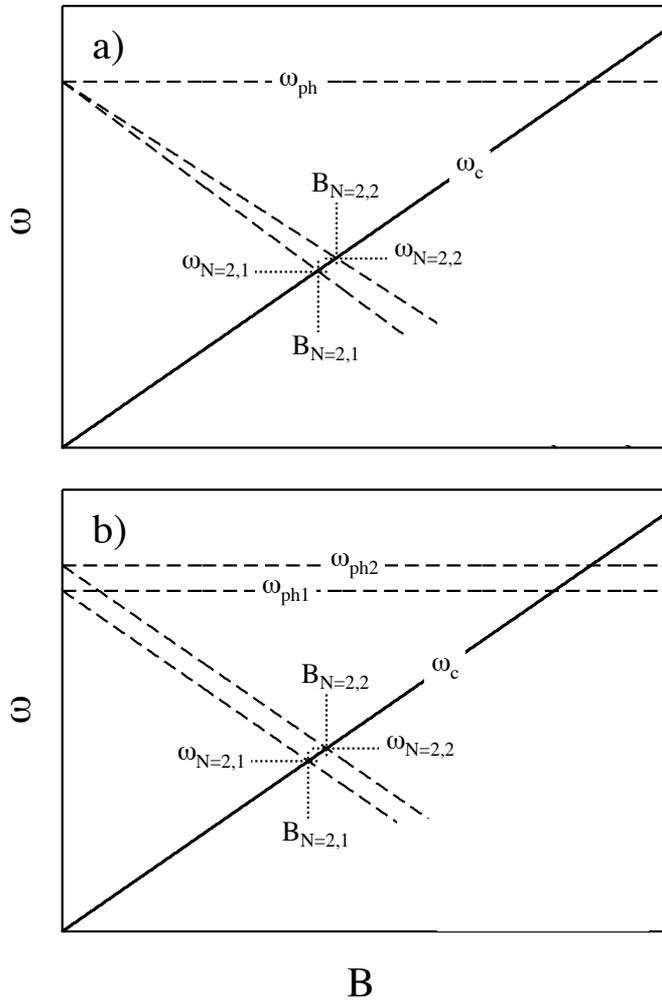
Neben dem Spektrum der Gittermoden kommt auch die Leitungsband-Nichtparabolizität als Ursache für eine scheinbare Absenkung der Phononenergie in Betracht. Zur Abschätzung ihres Einflusses zeigt die Abbildung 4.24 für 3 Elektronendichten die gemäß der modifizierten Theorie von Cho und Choi berechneten Polaron-Zyklotronresonanzen unter Berücksichtigung der Leitungsband-Nichtparabolizität. Als Phononfrequenz wurde bei den Berechnungen die des LO-Phonons von GaAs mit  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-2}$  vorausgesetzt und eine effektive Energielücke von  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  zur Beschreibung der Nichtparabolizität angenommen. Aufgrund letzterer fächern die Zyklotronübergangsenergien des nackten Elektronengases in Abhängigkeit vom Landau-Index auf komplizierte Weise auf und mit ihnen die Lagen der korrespondierenden Polaron-Resonanzkopplungen. Trägt man in die Diagramme jeweils die experimentell bestimmte Resonanzbedingung  $N\omega_N = 280 \text{ cm}^{-1}$  als waagrechte Linien ein, so stellt man fest, daß diese für die höheren Kopplungsordnungen ( $N \geq 2$ ) allesamt gut mit den nach visuellen Kriterien ausmachbaren Schwerpunkten der (Anti-)Kreuzungspunkte für die vielfach überlagerten Resonanzen zusammenfallen. Dieser Befund deutet stark darauf hin, daß die beobachtete scheinbare Absenkung der Phononenergie  $\omega_{ph} \approx \omega_{LO, \text{GaAs}} - 15 \text{ cm}^{-1}$  im wesentlichen auf die Leitungsband-Nichtparabolizität zurückzuführen ist.

Zum Abschluß der resonanten Polaron-Effekte wird im folgenden Abschnitt die Möglichkeit des Auftretens von Feinstrukturen in den Resonanzkopplungen untersucht.

#### 4.2.4.3 Polaron-Feinstruktur bei extrem hohen Elektronendichten

Feinstrukturaufspaltungen in den resonanten Polaron-Kopplungen können entweder aufgrund der Leitungsband-Nichtparabolizität des Elektronengases oder aufgrund der Ankopplung an ein energetisch aufgespaltenes Phonon-Multiplett erwartet werden.

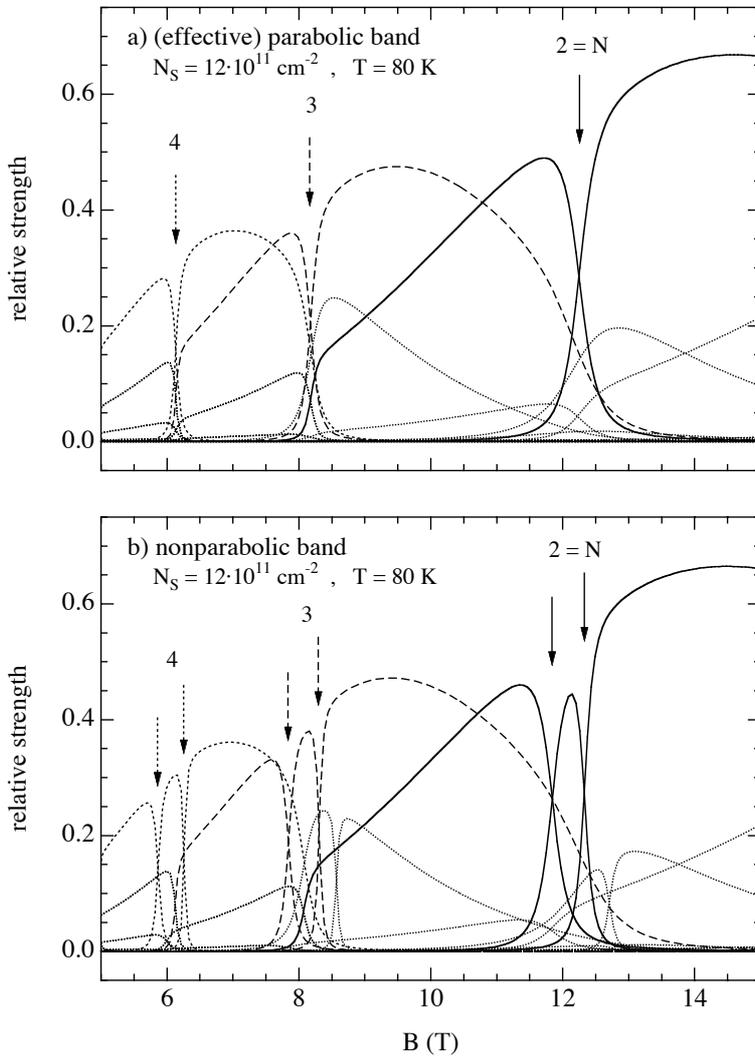
Die beiden Aufspaltungsszenarien sind schematisch in der Abbildung 4.25 am Beispiel der Polaron-Halbfeldkopplung illustriert. Im folgenden wird die Beschreibung der resonanten Polaron-Effekte gemäß der (modifizierten) Theorie von Cho und Choi nach Abschnitt 4.1.2.1 vorausgesetzt. Die Ursache für die Aufspaltung aufgrund der Nichtparabolizität ist in der Teilfigur 4.25 a) dargestellt. Sie liegt darin, daß für Landau-Niveaus mit  $n \geq 1$  jeweils zwei virtuelle Übergänge zu einem im parabolischen Fall zweifach entarteten Pol in der Linienformfunktion beitragen (vergleiche Abschnitt 4.1.2.1). Im nichtparabolischen Fall trennt der doppelte Pol sich in zwei einfache auf, was eine doppelresonante Polaron-Kopplung zur Folge hat. Die durchgeführten Berechnungen, zeigen, daß dieser Fall erst bei sehr hohen Dichten in der Größenordnung  $1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  von Relevanz sein sollte. In der Abbildung 4.26 sind exemplarisch für ein nichtparabolisches Modellsystem mit einer sehr hohen Dichte von  $12 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  die berechneten relativen Oszillatorstärken dargestellt. Die Teilfigur a) zeigt das Ergebnis einer Rechnung, bei der die nichtparabolische Bandstruktur durch eine effek-



**Abbildung 4.25:** Illustration des Zustandekommens möglicher Feinstrukturen in den Polaron-Resonanzkopplungen. Teilbild a) zeigt ein Szenario mit nur einer Phononenergie und der Leitungsband-Nichtparabolizität als Ursache für eine aufgespaltene Polaron-Halbfeldkopplung. In Teilfigur b) ist das komplementäre Szenario dargestellt mit parabolischer Bandstruktur und einem energetisch aufgespaltenen Phonon-Multiplett als Grund für eine doppelresonante Polaron-Halbfeldkopplung. Die durchgezogene Linie markiert eine Zyklotronresonanz und die gestrichelten Linien stellen Pole der Linienformfunktion für die Voll- und die Halbfeldkopplung dar.

tiv parabolische angenähert wird. Entsprechend sind die Pole in der Linienformfunktion entartet und keine Mehrfachresonanzen beobachtbar. Im Gegensatz hierzu zeigt die Teilfigur b) die unter vollständiger Berücksichtigung der Nichtparabolizität gerechneten Verläufe. Wie vorher schematisch aufgezeigt wurde, spalten die als dominant hervorgehobenen Resonanzkopplungen, die sich in der Darstellung als Oszillatorstärkenaustausch manifestieren, jeweils zweifach auf. Hierbei fällt besonders auf, daß die Aufspaltungen nur sehr schwach von der Polaron-Kopplungsordnung abhängen und etwa für die in GaAs vorliegende Nichtparabolizität  $\Delta B_N \approx 0.5 - 0.6 \text{ T}$ ,  $4 \geq N \geq 2$  betragen.

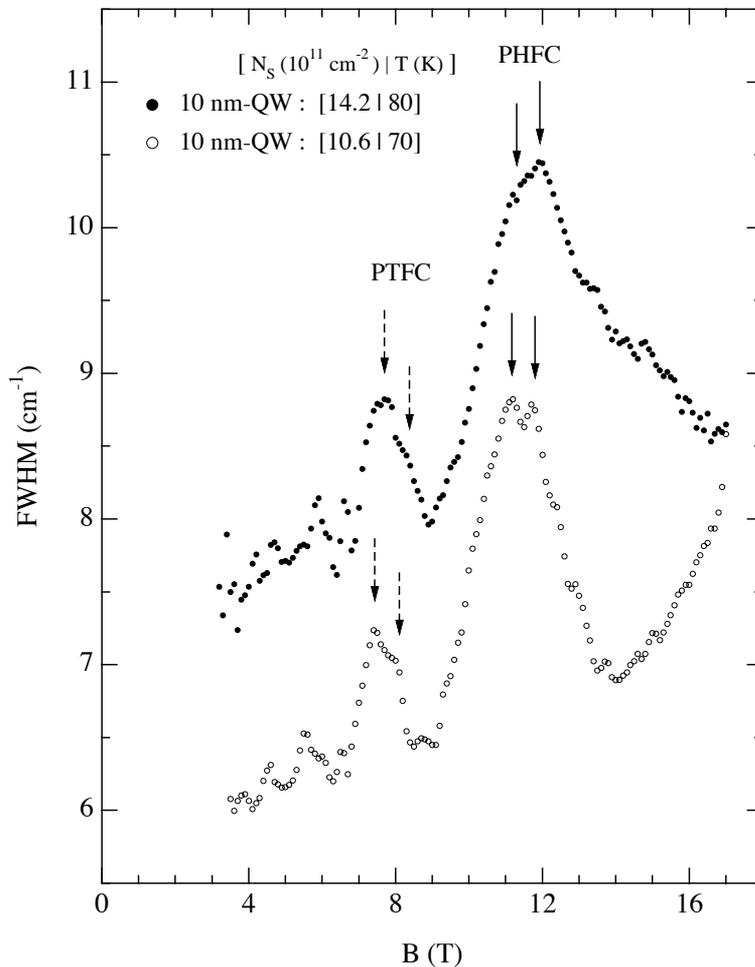
Der Grenzfall, der die Ankopplung an ein Phonon-Doublett bei parabolischer Bandstruktur beinhaltet und in Teilfigur 4.25 b) behandelt wird, unterscheidet sich bezüglich der Abhängigkeit der Aufspaltung von der Kopplungsordnung signifikant vom obigen. Hier sollte eine Aufspaltung gemäß  $\Delta B_N \approx (m^*/e) \Delta \omega_{ph} / N$  mit steigender Kopplungsordnung deutlich abnehmen. Weiterhin sollte eine solche Feinstruktur prinzipiell unabhängig von den Niveaubesetzungen auch bei niedrigeren Dichten vorhanden sein. Als Voraussetzung für eine Beobachtbarkeit dürfen allerdings die Polaron-Aufspaltungen der jeweiligen Zyklotronresonanz an einem Pol nicht deutlich größer sein als die energetische Differenz zwischen den Polen, die maximal der Breite der Reststrahlenbande von GaAs entspricht. Eine Beobachtbarkeit wird daher durch eine Abschwächung der Polaron-Kopplungen infolge von Besetzungs- und Abschirmeffekten begünstigt. Deshalb sind solche Effekte ebenfalls eher bei hohen bis sehr hohen Dichten zu erwarten. Als Abschätzung möglicher Phonon-Aufspaltungen  $\Delta \omega_{ph}$



**Abbildung 4.26:** Nach der modifizierten Theorie von Cho und Choi berechnete relative Oszillatorstärken der Polaron-Zyklotronresonanzen für ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem. Es wird eine nichtparabolische Bandstruktur mit  $m^* = 0.070 m_e$  und  $E_g^* = 950 \text{ meV}$ , eine Polaron-Ankopplung mit  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha = 0.05$  sowie eine Dichte  $N_S = 12 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  vorausgesetzt. In Teilbild a) wird die Bandstruktur (lokal) durch eine effektiv parabolische mit  $m^* = \langle m_c \rangle \approx m_F = 0.077 m_e$  ersetzt. Teilbild b) zeigt die unter Berücksichtigung der vollen Nichtparabolizität berechneten Verläufe. Die vollen, breit-gestrichelten und schmal-gestrichelten sowie die gepunkteten Verläufe markieren die im Bereich der Halbfeld-, Drittelfeld- und Viertelfeldkopplung dominierenden sowie alle sonstigen Übergänge. Die eingezeichneten Pfeile deuten die Lagen der entsprechenden Resonanzkopplungen an.

dient die Abbildung 3.5 b). Die bei den extrem hohen Dichten in Frage kommenden und hier untersuchten Quantentrogssysteme mit Supergitterbarrieren weisen keine eigentlichen Interface-Moden sondern lediglich interface-artige Moden auf, welche energetisch innerhalb zweier taschenartiger Kontinua, die durch eine Lücke getrennt sind, liegen. Die Confined-Moden mit Energien  $\omega_{LO, \text{GaAs}}$  dominieren, wie bereits im vorausgehenden Abschnitt erläutert wurde, die Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Die Ankopplung an die Interface- bzw. hier interface-artigen Moden hingegen sollte deutlich schwächer ausfallen. Als Wert für eine mögliche Phononaufspaltung kann man den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des energetisch tiefer liegenden Kontinuums und  $\omega_{LO, \text{GaAs}}$  bei  $q_{\parallel} = O(1/l_m) < 0.5 \text{ nm}^{-1}$  zu  $\Delta\omega_{ph} \approx 15 - 20 \text{ cm}^{-1}$  abschätzen. Dies entspricht bei der Halbfeldkopplung einer Magnetfelddifferenz  $\Delta B_{N=2} \approx 0.5 - 0.8 \text{ T}$ , die in derselben Größenordnung liegt wie diejenige, die auch aufgrund der Nichtparabolizität vorhergesagt wird. Demzufolge sind die beiden Grenzfälle experimentell nur schwer voneinander zu trennen, zumal im allgemeinen Mischszenarien zu erwarten sind.

Zur experimentellen Durchleuchtung der obigen Überlegungen sind in der Abbildung 4.27 die durch Linienformanalyse gewonnenen experimentellen Linienbreiten als Funktion des Magnetfeldes für zwei Systeme extrem hoher Dichte aufgetragen. Im Gegensatz zur Abbildung 4.23, welche die gleichen Messungen beinhaltet, wurde hier bei der Linienanpassung ein deutlich engeres Auswertefenster um die Resonanz gelegt. Dies hat zwar den Nachteil, daß die Linien im ganzen weniger gut wiedergegeben werden, im Gegenzug jedoch



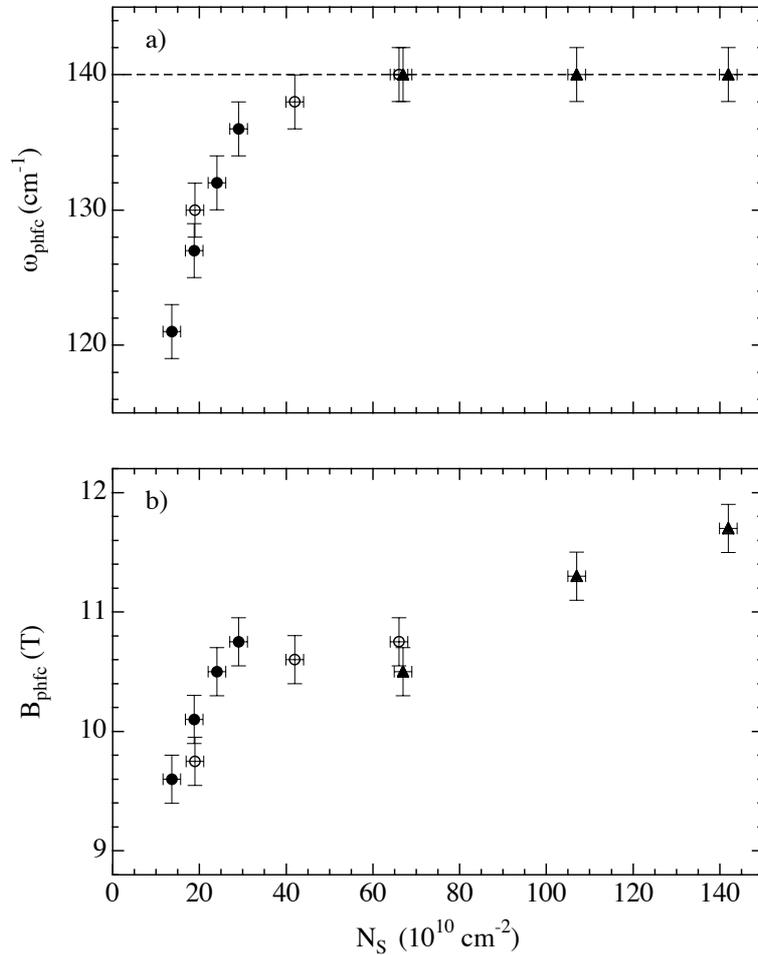
**Abbildung 4.27:** Linienbreite der Polaron-Zyklotronresonanz als Funktion des Magnetfeldes. Die Meßwerte sind durch Markersymbole dargestellt und wurden durch Anpassung an die experimentellen Zyklotronresonanzprofile gewonnen. Im Gegensatz zur Auswertung aus Figur 4.23 wurde hier ein deutlich schmalerer Bereich von  $\pm 20 \text{ cm}^{-1}$  (vorher  $\pm 40 \text{ cm}^{-1}$ ) bei der Linienanpassung um den Resonanzschwerpunkt gewählt. Die senkrechten Pfeile markieren die Lagen der augenscheinlich aufgespaltenen Polaron-Resonanzkopplungen.

feinere Variationen der Linienform besser aufgelöst werden können. Dies liegt daran, daß bei einer Anpassung mit engerem Auswertefenster die eigentliche Resonanz gegenüber dem Untergrund ein stärkeres Gewicht bekommt. Wie man anhand der Darstellung erkennt, bilden sich gemäß dieser Auswertung in beiden Verläufen im Bereich der Polaron-Halbfeld- und -Drittfeldkopplung Aufspaltungen und Schultern heraus. Diese können nach den Vorbetrachtungen als eine Feinstruktur der Polaron-Resonanzkopplungen interpretiert werden. Dafür sprechen neben der unabhängigen Beobachtung an zwei Proben insbesondere auch der energetische Abstand zwischen den einfach aufgespaltenen Strukturen von  $\Delta B \approx 0.6 - 0.7 \text{ T}$ , der sehr gut mit den Vorhersagen der Rechnungen aus Figur 4.26 übereinstimmt.

#### 4.2.4.4 Gesamtüberblick über die Polaron-Halbfeldkopplung

Um einen Gesamtüberblick speziell über die Polaron-Halbfeldkopplung zu vermitteln, sind in der Abbildung 4.28 für unterschiedliche Proben in einem weiten Dichteregime von  $1 - 14 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  für Temperaturen von  $T = 70 - 80 \text{ K}$  die experimentell ausgewerteten Resonanzlagen a) in der Energiedomäne und b) in der Magnetfelddomäne als Funktion der Elektronendichte aufgetragen.

Man erkennt an den Auftragungen, daß die Resonanzfelder deutlich probenabhängig variieren, während sich, wie es sich bereits in Figur 4.23 angedeutet hat, in der Resonanzfrequenz ein glatter und vom detaillierten Probenaufbau unabhängiger Verlauf zeigt. Dieser mündet bereits bei einer Dichte von  $N_S \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  in



**Abbildung 4.28:** Dichteabhängigkeit a) der Resonanzlage und b) des Resonanzfeldes der Polaron-Halbfeldkoppelung. Die Meßdaten wurden an verschiedenartigen Proben bei einer Temperatur von  $T = 70 \text{ K}$  oder  $T = 80 \text{ K}$  gewonnen: Die vollen Dreiecke entsprechen den aus Figur 4.23 entnommenen Daten für das Regime hoher und sehr hoher Dichten. Die offenen Kreise markieren das Übergangsregime mittlerer bis hoher Dichten. Die drei Meßpunkte wurden hier an 3 Einfachheterostrukturen ähnlichen Aufbaus gewonnen. Die vollen Kreise repräsentieren das Regime niedriger bis mittlerer Dichten und entsprechen einem Ausschnitt der Daten aus Abbildung 4.17, die durch Variation der Gatespannung an einer Einfachheterostruktur bestimmt wurden.

die durchaus als universell bezeichnende Asymptote  $\omega_{N=2} \approx 140 \pm 2 \text{ cm}^{-1}$  ein. Im Gegensatz zum Regime niedriger Dichten, wo Hybridisierungseffekte aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung das Verhalten bestimmen, sind bei mittleren bis sehr hohen Dichten experimentell nahezu identische Resonanzszenarien zu beobachten. Diese entsprechen im wesentlichen den Vorhersagen des Bildes nicht-wechselwirkender Polaronen. Die signifikante Absenkung der effektiven Phononfrequenz gegenüber  $\omega_{LO, \text{GaAs}}$  ist basierend auf den Resultaten aus dem vorausgehenden Abschnitt mit hoher Wahrscheinlichkeit auf die Nichtparabolizität des Leitungsbandes zurückzuführen. Das Fehlen von Einflüssen aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung bei hohen und sehr Dichten kann mit der Abschirmung im Elektronengas erklärt werden.

### 4.3 Nicht-resonante Polaron-Zyklotronresonanz

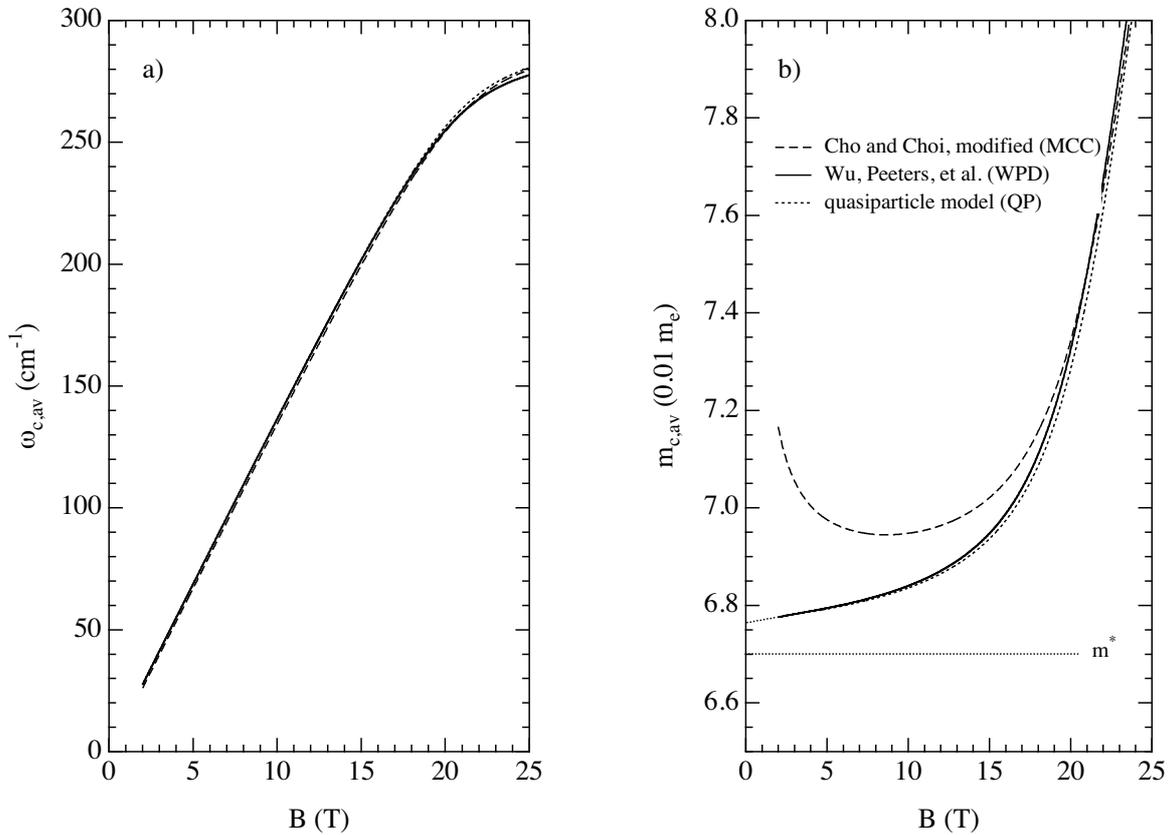
Das vorausgehende Teilkapitel widmete sich den resonanten Polaron-Effekten, die sich experimentell sehr auffällig in Form von Aufspaltungen bzw. Verbreiterungen der Zyklotronresonanzlinien bemerkbar machen. Speziell die im Vorfeld ausgiebig behandelten Resonanzkopplungen höherer Ordnung bedürfen dabei generell einer thermischen Aktivierung, um die für ihre Beobachtung notwendigen Niveaubesetzungen im Landau-Fächer herzustellen. Bei niedrigen Temperaturen sind nur die (Intra- und Intersubband-)Polaron-Vollfeldkopplungen vorhanden. Diese sind je nach Elektronendichte und Temperatur mehr oder weniger stark ausgeprägt, da sie dem Einfluß von Besetzungs- und Abschirmeffekten im Elektronengas unterliegen.

Dieser Abschnitt widmet sich den eher subtilen Effekten, die auf der Elektron-Phonon-Kopplung basieren, wenn die bei hohen Temperaturen dominanten Polaron-Resonanzkopplungen höherer Ordnung vollständig durch die Besetzungen blockiert sind. Die Elektron-Phonon-Wechselwirkung hat in diesem Regime im wesentlichen eine Renormierung der Elektronenmasse und der Nichtparabolizität zur Folge, welche sich den Bandstruktur-Eigenschaften des nackten Elektronengases überlagert und diese scheinbar modifiziert. In den beiden Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 werden diese Aspekte zunächst theoretisch beleuchtet und im Abschnitt 4.3.3 die experimentellen Befunde vorgestellt.

#### 4.3.1 Polaron-Massenrenormierung, Polaron-Nichtparabolizität und Besetzungseffekte

Zur Einführung in die nicht-resonanten Polaron-Effekte zeigt die Abbildung 4.29 die berechneten Magnetfelddispersionen des bei  $T = 0$  K einzig aktiven Zyklotronübergangs  $n = 0 \rightarrow n = 1$  für die drei im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Polaron-Theorien im Grenzfall eines einzelnen Elektrons. Während alle 3 Beschreibungen in der Resonanzenergie (Teilfigur a)) qualitativ wie quantitativ kaum Unterschiede aufweisen, zeigt sich auf der feineren Massenskala (Teilfigur b)) zwischen den Beschreibungen nach der modifizierten Theorie von Cho und Choi (MCC) und den beiden anderen eine deutliche Abweichung. Im Gegensatz zur MCC-Beschreibung, deren Zyklotronmasse bei  $B = 0$  T divergiert, weisen die beiden anderen Beschreibungen die gleiche korrekte Asymptotik auf. Diese manifestiert sich in einer gegenüber der Bandkantenmasse erhöhten Nullfeldmasse sowie einen im Bereich kleiner Felder linear ansteigenden Verlauf. Die Divergenz der Zyklotronmasse nach der MCC-Theorie ist womöglich in der offenbar nicht korrekt berücksichtigten Polaron-Bindungsenergie zu suchen. Die generelle Massenüberhöhung stimmt mit dem Bild des Polarons als angekleidetes (dressed) Elektron überein, das durch die Ankopplung an das Gitter eine zusätzliche Trägheitskomponente bekommt [Mad78]. Die polaronische Massenerhöhung bei  $B = 0$  beträgt für GaAs typischerweise etwa 1%. Der mit dem Feld lineare Anstieg wird üblicherweise als eine durch den Polaron-Effekt induzierte Nichtparabolizität interpretiert. In der Literatur sind für dieses Regime im Grenzfall des strengen 2DEG analytische Näherungsausdrücke verfügbar [Lin83, Sig85, Pee85, Pee86c, Pee86a, Pee88]. Für hohe Magnetfelder mündet der lineare Anstieg schließlich in die Resonanzverzweigung der Vollfeldkopplung ein, wo die Verläufe allesamt sehr gut miteinander übereinstimmen.

Zum Einfluß der Besetzungseffekte auf die nicht-resonanten Polaron-Effekte zeigt die Abbildung 4.30 die zur Figur 4.29 analoge Darstellung für ein Elektronengas hoher Dichte. Hier werden bei vorausgesetzter Spinartung in der Regel zwei Zyklotronübergänge aktiv. Deren Ausgangsniveaus durchwandern zusammen mit der Fermi-Energie den Landau-Fächer mit zunehmendem Magnetfeld von oben nach unten. Die auftretenden Übergänge liegen energetisch derart nahe zusammen, daß sie unter Anwesenheit der Elektron-Elektron-Wechselwirkung zu Kollektivmoden hybridisieren. Bei entsprechend starker Verkopplung vereinigt von diesen Kollektivmoden die Ladungsdichteanregung die gesamte Oszillatorstärke in sich. Wie im Abschnitt 5.2.3.2

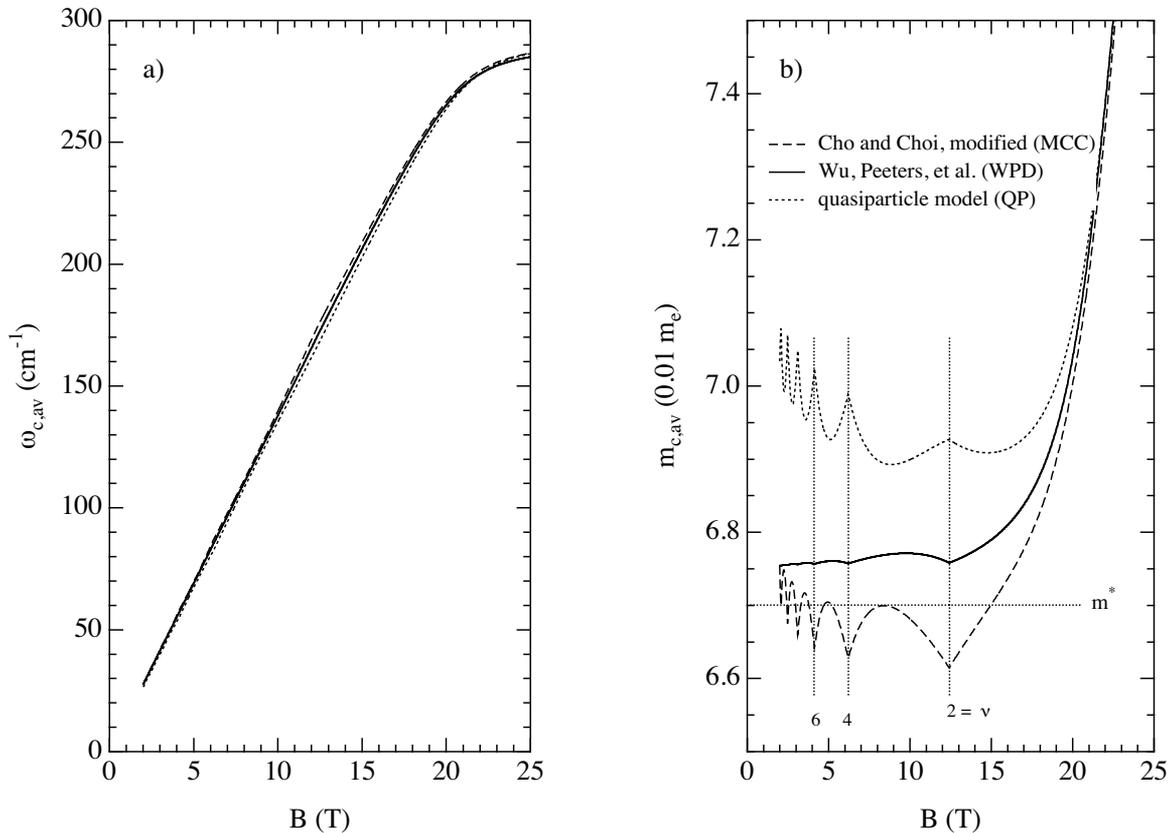


**Abbildung 4.29:** Vergleich der verschiedenen Modelle zur Polaron-Zyklotronresonanz eines Einzelelektrons im nicht-resonanten Regime. Teilfigur a) zeigt den untersten Polaron-Resonanzweig des niedrigsten Zyklotronübergangs  $n = 0 \rightarrow n = 1$  als Funktion des Magnetfeldes. In Teilfigur b) ist die gleiche Größe als Zyklotronmasse dargestellt. Der Rechnung liegt ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem zugrunde. Die Parameter lauten:  $m^* = 0.067 m_e$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.06$  und  $N = 1e^-$ . Es wird eine parabolische Bandstruktur und Spinentartung vorausgesetzt.

gezeigt wird, entspricht die energetische Lage der Ladungsdichtemode dem gewichteten Mittelwert über die Energien der beteiligten Einzelresonanzen. Entsprechend ist in der Darstellung 4.29 und den folgenden jeweils die nach der Vorschrift

$$\omega_c = \frac{\sum_K \omega_{c,K}^{(-)} f_K^{(-)}}{\sum_{K'} f_{K'}^{(-)}} \quad (4.76)$$

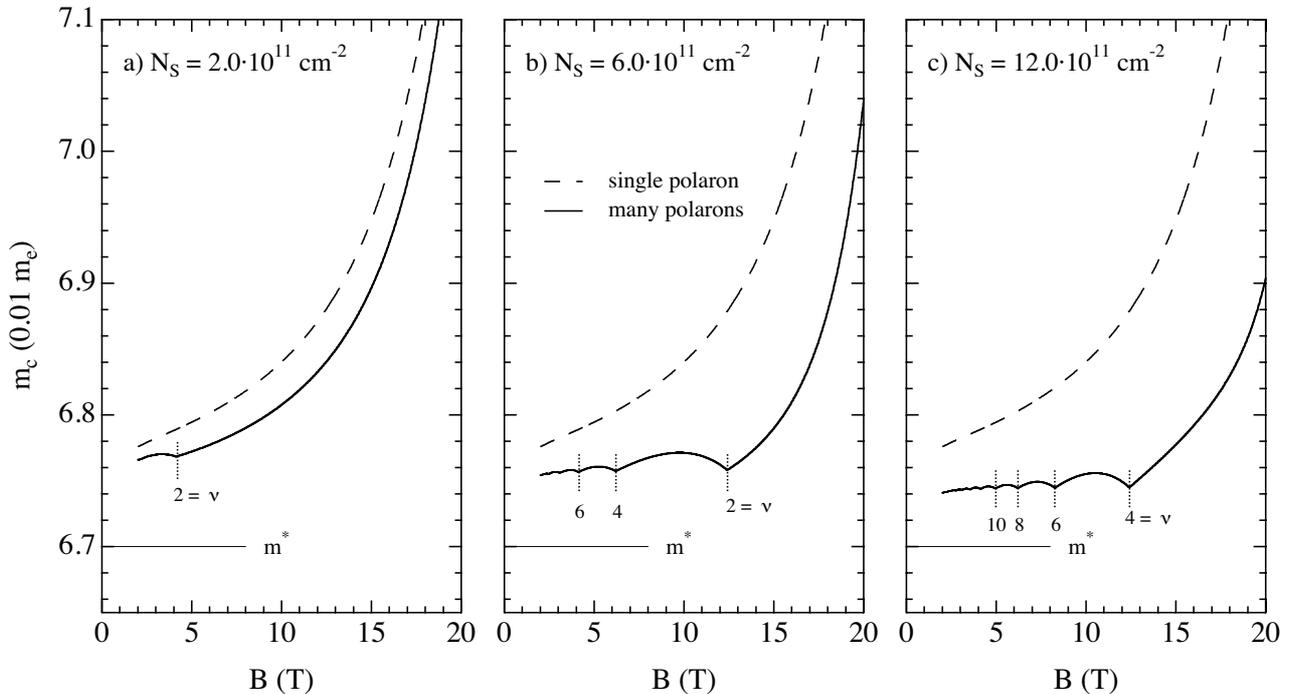
gebildete mittlere Resonanzenergie bzw. der ihr entsprechende Massenwert  $m_c = eB/\omega_c$  dargestellt. Der tiefgestellte Index  $K$  steht für einen aktiven Übergang im Landau-Schema und der hochgestellte geklammerte Index für den Polaron-Zweig. Die Mittelung über die zur selben Spinprojektion gehörenden Übergänge ist in der Beschreibung nach WPD bereits von vorneherein impliziert. Es werden hier lediglich nur die durch ein Minuszeichen charakterisierten Resonanzen zusammengefasst, die unterhalb der Einphononlinie liegen und vergleichbare Energien aufweisen. Die Übergangsenergien der Einzelresonanzen sind mit  $\omega_{c,K}^{(-)}$  und die entsprechenden Oszillatorstärken mit  $f_{c,K}^{(-)}$  bezeichnet. Sie werden gemäß den Ausführungen in den Abschnitten 4.1.1.2, 4.1.2.1 und 4.1.2.2 numerisch berechnet. Es werden im nicht-resonanten Bereich jedoch auch die Beiträge zu den Linienform- und Memoryfunktionen berücksichtigt, die Pole haben, welche von der negativen



**Abbildung 4.30:** Vergleich der verschiedenen Modelle zur Polaron-Zyklotronresonanz eines dichten Elektronengases im nicht-resonanten Regime. Teilfigur a) zeigt die gemittelte Polaron-Resonanzenergie der unterhalb der Einphononlinie liegenden Zyklotronresonanzen als Funktion des Magnetfeldes. In Teilfigur b) ist die gleiche Größe als Zyklotronmasse dargestellt. Der Rechnung liegt ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem zugrunde. Die Parameter lauten:  $m^* = 0.067 m_e$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.06$  und  $N_S = 6.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Es wird eine parabolische Bandstruktur und vollständige Spinentartung vorausgesetzt.

Phononfrequenz ausgehen.

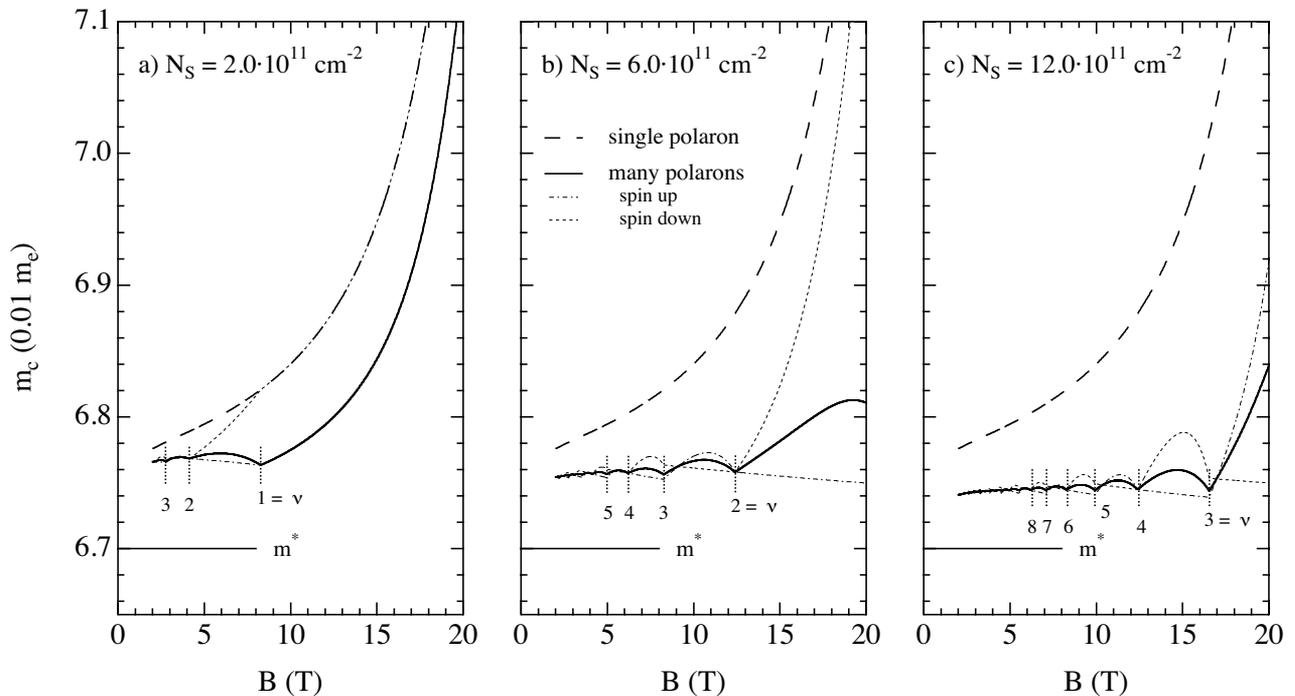
Wie man aus der Darstellung a) entnehmen kann, zeigen die gemittelten Zyklotronresonanzen auf der groben Frequenzskala insbesondere im Resonanzbereich der Vollfeldkopplung nahezu identische Verläufe. Auf der feineren Massenskala in Teilfigur b) hingegen treten deutliche Unterschiede auf. Insbesondere die Beschreibung gemäß MCC weist Bereiche auf, innerhalb derer die Zyklotronmasse unter die Bandkantenmasse fällt. Demzufolge würden, was physikalisch nicht korrekt ist, die Elektronen durch die Ankopplung an das Gitter an Trägheit verlieren. Die Beschreibung im Quasiteilchen-Bild (QP) weist im Gegensatz dazu generell eine starke Massenüberhöhung auf, die für  $B \rightarrow 0$  zudem divergiert. Dieses Verhalten widerspricht auf den ersten Blick dem in Abbildung 4.29 gezeigten korrekten Verlauf für den Grenzfall  $N_S \rightarrow 0$ . Der Grund für die Diskrepanz zwischen endlichen Dichten und dem Einpolaron-Limit ist in der verwendeten IWBPT-Näherung zu suchen. Bei dieser werden bei der Berechnung der Polaron-Landau-Niveaus alle nackten Niveauenergien in den Resonanznennern einheitlich um die Polaron-Bindungsenergie des Grundniveaus ( $n = 0$ ) korrigiert (Gleichung 5.7). Von dieser Korrektur profitiert das Grundniveau selbst am stärksten [Lin83]. Sie ist dafür verantwortlich, daß im  $N_S \rightarrow 0$ -Grenzfall, wo das Grundniveau gleichzeitig das Ausgangsniveau für den einzig aktiven Zyk-



**Abbildung 4.31:** Entwicklung der Polaron-Zyklotronmasse mit der Dichte im spinentarteten Fall. Die drei Teilbilder zeigen jeweils die nach der WPD-Theorie gerechneten Verläufe in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die Parameter der Rechnung lauten:  $m^* = 0.067 m_e$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha = 0.06$ . Es wird eine parabolische Bandstruktur, Spinentartung und ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem zugrunde gelegt.

lotronübergang bildet, sich die richtige Asymptotik ergibt. Für alle höheren Landau-Niveaus, die abhängig vom Füllfaktor erst bei hohen Dichten aktiv werden, führt die IWBPT-Modifikation in den Resonanznennern allerdings zu einer Massenüberkorrektur. Diese weist zudem aus qualitativer Sicht eine gegenüber den beiden anderen Beschreibungen invertierte Variation mit Maxima anstelle von Minima auf und umgekehrt. Die Theorie von WPD zuletzt zeigt hingegen einen Massenverlauf, der bis auf das unmittelbare Resonanzregime der Vollfeldkopplung Variationen mit dem Füllfaktor aufweist, die im Wesen denen entsprechen, die auch durch eine Nichtparabolizität des Leitungsbandes hervorgerufen werden (siehe Figur 2.14). Dieses Verhalten ist auch bei hohen Elektronendichten in kompletter Übereinstimmung mit dem bei einem Einzelelektron entwickelten Bild einer polaron-induzierten Massenüberhöhung in Kombination mit einer polaron-induzierten Nichtparabolizität. Demzufolge ist im nicht-resonanten Regime die Beschreibung der Polaron-Zyklotronresonanz nach WPD als im wesentlichen korrekt zu betrachten. Sie wird deshalb für alle weiteren Betrachtungen, welche die nicht-resonanten Polaron-Effekte in der Zyklotronresonanz anbelangen, herangezogen. Im resonanten Polaron-Regime hingegen, als es insbesondere auch darum ging die Einflüsse der Leitungsband-Nichtparabolizität auf die Polaron-Resonanzspaltungen abzuschätzen, erwiesen sich die beiden anderen Beschreibungen als zutreffender.

Zum Einfluß der Besetzungseffekte auf die nicht-resonante Polaron-Zyklotronresonanz zeigt die Abbildung 4.31 die nach der WPD-Theorie berechneten Massenverläufe für verschiedene Dichten. Als Referenz ist jeweils der Massenverlauf des Einpolaron-Grenzfalls eingezeichnet. Zunächst wird Spinentartung vorausgesetzt. Man erkennt anhand der Abbildung mehrere Dinge. Einmal erweitert sich mit zunehmender Dichte der oszilla-



**Abbildung 4.32:** Entwicklung der Polaron-Zyklotronmasse mit der Dichte im spinaufgelösten Fall. Die drei Teilbilder zeigen jeweils die nach der WPD-Theorie gerechneten Verläufe in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die Parameter der Rechnung sind identisch zu den obigen.

torische Bereich im Massenverlauf auf zunehmend höhere Magnetfelder. Gleichzeitig verzögert sich damit aufgrund der Pauli-Besetzungsblockade das Einsetzen des Anstiegs der Vollfeld-Resonanzkopplung. Auffälligerweise kommt die Zyklotronmasse bei ganzzahligen Füllfaktoren jeweils auf einem nahezu einheitlichen Wert, der Nullfeld-Polaron-Masse, zu liegen. Deren Abstand zur Bandkantenmasse nimmt mit ansteigender Dichte stetig ab. Die bogenartigen Verläufe, welche zwischen ganzzahligen Füllfaktoren durchlaufen werden, prägen sich bei konstanter Dichte mit abnehmenden Füllfaktoren immer stärker aus. Allerdings sind die Amplituden, die in einem gegebenen Magnetfeldintervall auftreten, weitgehend unabhängig von der Dichte und die sie eingrenzenden Füllfaktoren in der Größe vergleichbar. Die Zyklotronmasse zeigt zusammenfassend ein prinzipiell ähnliches Verhalten, wie man es aufgrund einer Leitungsband-Nichtparabolizität erwartet (siehe Abschnitt 2.6). Gemäß einer Anpaßrechnung im Regime  $\nu < 2$  kann die Polaron-Nichtparabolizität an dem betrachteten Modellsystem durch eine effektive Nichtparabolizität mit einer effektiven Energielücke brauchbar beschrieben werden, welche in der Größenordnung  $4000 \text{ meV} < E_{g,pol} < 2000 \text{ meV}$  liegt und mit ansteigender Elektronendichte tendenziell abnimmt.

In der Abbildung 4.32 sind die Ergebnisse der identischen Rechnungen wie vorher unter vollständiger Auflösbarkeit des Spins in den Niveaubesetzungen dargestellt. Hier hat man zu jeder Spinprojektion eine eigene Zyklotronresonanz mit entsprechendem Massenverlauf. Die zu den beiden Spinprojektionen gehörigen Verläufe sind in den Darstellungen dünn gestrichelt dargestellt. Bei starker Kopplung durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung wird wiederum eine Kollektivresonanz aus den beiden Spinprojektionen gemäß der Mittelungsvorschrift 4.76 gebildet. Als Hauptunterschied im Vergleich zum spinentarteten Fall treten nun auch die ungeradzahigen Füllfaktoren als Minima in der gemittelten Masse deutlich hervor. Die den ganzzahligen Füllfaktoren zugeordneten Minima stoßen allesamt auf die Nullfeld-Polaron-Masse. Bei vergleichs-

weise hohen Elektronendichten kann nun eine besondere Situation eintreten, die zu einer ungewöhnlichen Aufspaltung in der Zyklotronresonanz führt. Liegt nämlich ein Füllfaktorintervall  $N \leq \nu \leq N + 1$  mit  $N = 1, 2, 3, \dots$  bei derart hohen Magnetfeldern, daß der Resonanzbereich der Vollfeldkopplung erfaßt wird, spalten die Resonanzenergien bzw. ihre Massen übermäßig stark auf (Teilfigur b)). Diese polaron-induzierte Spin- (für  $2n + 1 < \nu \leq 2(n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) bzw. Landau-Aufspaltung (für  $2(n + 1) < \nu \leq 2n + 3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) kann derart groß werden, daß die Kopplung zwischen den beiden Übergängen aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung aufbricht. Dann wird eine aufgespaltene Zyklotronresonanz mit großer Lücke beobachtbar. Der erste experimentelle Nachweis dieser polaron-induzierten Aufspaltung der Zyklotronresonanzlinie gelang in [Wu,00].

### 4.3.2 Zusammenwirken von Polaron-Renormierung und Leitungsband-Nichtparabolizität

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie die Leitungsband-Nichtparabolizität und die Polaron-Renormierung zusammenwirken. Dazu muß zunächst die Nichtparabolizität noch geeignet in die Theorie von WPD eingefügt werden, da diese eine parabolische Leitungsbandstruktur explizit voraussetzt. Hier wird die naheliegendste Näherung herangezogen, welche die Bandstruktur durch eine effektiv parabolische ersetzt. Das bedeutet, daß in den Gleichungen 4.55 und 4.57 sämtliche Einteilchen-Energiedifferenzen im Landau-Fächer  $\varepsilon_{m,\sigma} - \varepsilon_{n,\sigma}$  durch

$$\varepsilon_{m,\sigma} - \varepsilon_{n,\sigma} \approx \hbar\omega_{c,\sigma}(m - n) \quad (4.77)$$

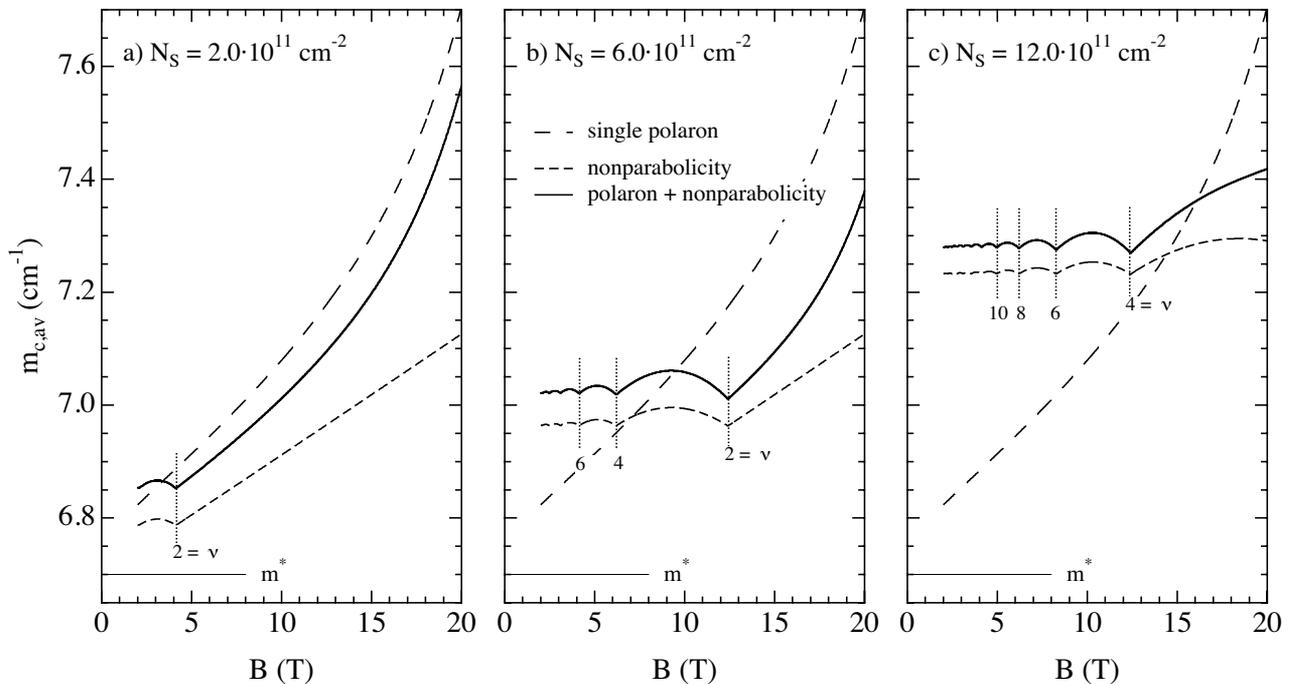
angenähert werden. Die effektive spinabhängige Zyklotronfrequenz ist dabei über die Vorschrift

$$\omega_{c,\sigma} = \frac{\sum_n f_{n,\sigma} \omega_c(n, \sigma)}{\sum_{n'} f_{n',\sigma}} \quad (4.78)$$

aus den nackten Einteilchen-Übergangsenergien  $\omega_c(n, \sigma)$  und ihren Oszillatorstärken  $f_{n,\sigma}$  zu bilden. Dabei wird der elektrische Quantengrenzfall vorausgesetzt.

Zunächst wird wiederum der spinentartete Fall zuerst behandelt. Die gemäß der obigen Näherung berechneten Massenverläufe sind in einer zu den beiden vorausgehenden Figuren analogen Darstellung in der Abbildung 4.33 aufgezeigt. Aus Gründen der Orientierung sind zusätzlich die Bandkantenmasse, der Verlauf der gemittelten Bandstruktur-Zyklotronmasse und der Massenverlauf des Einpolaron-Grenzfalls aufgetragen. An den Auftragungen fällt zuerst der starke Anstieg der Nullfeldmasse mit der Dichte ins Auge. Dieser Effekt ist auf die Leitungsband-Nichtparabolizität zurückzuführen (Abschnitt 2.6). Bezüglich der Massenvariationen mit dem Füllfaktor scheinen sich die Polaron-Nichtparabolizität und die Leitungsband-Nichtparabolizität unterhalb von  $\nu = 2$  im wesentlichen additiv zu überlagern.

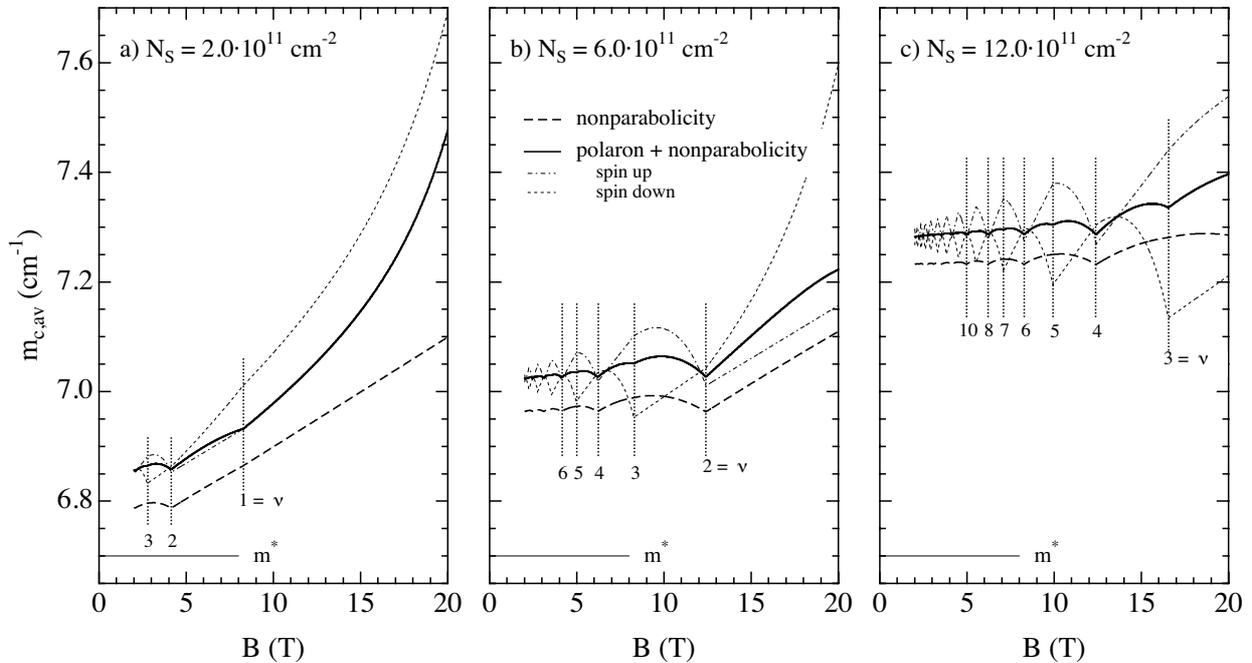
Zum Einfluß des Elektronenspins zeigt die Figur 4.34 die Ergebnisse der analogen Rechnungen bei vollständiger Auflösung der Zeeman-Lücken in den Niveaubesetzungen. Es wurde zusätzlich noch der magnetfeldabhängige Term des Leitungsband-g-Faktors berücksichtigt. Dieser bildet die Ursache für die bei niedrigen Elektronendichten beobachtbare Spinaufspaltung in der Zyklotronresonanz. Gemessen an den vorherrschenden Variationen aufgrund der Polaron-Kopplung und der Landau-Aufspaltung kann dieser Beitrag jedoch bei den gewählten hohen Dichten in der gezeigten Darstellung als vernachlässigbar gelten. Auch hier ist mit jeder Spinprojektion ein Zyklotronübergang verbunden. Die gemittelte Zyklotronmasse ist daher wiederum zusammen mit den beiden Einzelmassen für die beiden Spinprojektionen dargestellt. Unterhalb des Resonanzregimes der Vollfeldkopplung dominiert in den Massenvariationen die Leitungsband-Nichtparabolizität



**Abbildung 4.33:** Entwicklung der Polaron-Zyklotronmasse mit der Dichte unter Einfluß der Leitungsband-Nichtparabolizität bei Spinentartung. Die drei Teilbilder zeigen jeweils die nach der WPD-Theorie gerechneten Verläufe in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die Parameter der Rechnung lauten:  $m^* = 0.067 m_e$ ,  $E_g^* = 950 \text{ meV}$ ,  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha = 0.06$ . Es wird eine effektiv parabolisch angenäherte Bandstruktur, Spinentartung und ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem zugrunde gelegt.

über der Polaron-Nichtparabolizität. Aus diesem Grund sind die Minima in der gemittelten Masse bei ungeradzahigen Füllfaktoren, die fast ausschließlich auf den Polaron-Effekt zurückgehen, nur noch verhältnismäßig schwach vorhanden. Auch die Massendifferenz zwischen den beiden Spinprojektionen, die bei ungeraden Füllfaktoren aufgrund der dort dominierenden Landau-Aufspaltung maximal ist, wird, wie aus dem Vergleich zur Figur 4.32 hervorgeht, durch Polaron-Korrekturen kaum nennenswert vergrößert. Zur Massendifferenz bei  $N_S = 6.0 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und  $\nu = 3$  beispielsweise trägt die Polaron-Korrektur verglichen mit der Bandstruktur-Nichtparabolizität nur zu etwa 7 Prozent bei. Das liegt vor allem daran, daß generell bei ganzzahligen Füllfaktoren die Besetzungseffekte derart wirken, daß die Polaron-Renormierungen für die beiden Spinprojektionen in etwa gleich ausfallen, so daß sie sich in der Massenaufspaltung gerade kompensieren. Aufgrund dieses Umstandes tritt in etwaigen Linienaufspaltungen der Zyklotronresonanz, die bei ganzzahligen Füllfaktoren auftreten, die Bandstruktur-Nichtparabolizität nahezu unmaskiert von Polaron-Einflüssen in Erscheinung. Im Resonanzregime der Polaron-Vollfeldkopplung, wo die Polaron-Effekte schließlich dominieren, werden mögliche polaron-induzierte Aufspaltungen in der Zyklotronresonanz, wie sie in [Wu,00] beschrieben werden, durch die Bandstruktur-Nichtparabolizität zusätzlich begünstigt.

Von theoretischer Seite wurde die WPD-Theorie in Hinblick auf die Abschirmung von ihren Urhebern erweitert. Dabei wurde sowohl eine statische wie auch eine dynamische Abschirmung im Rahmen der RPA-Näherung in die Betrachtungen einbezogen [Wu,86a, Wu,87b, Pee92]. Im Vergleich zwischen der dynamischen und der vom rechentechnischen Standpunkt wesentlich unaufwändigeren statischen Abschirmung zeigte sich kein signifikanter Unterschied. Die Abschirmung spielt mit zunehmender Elektronendichte eine größere



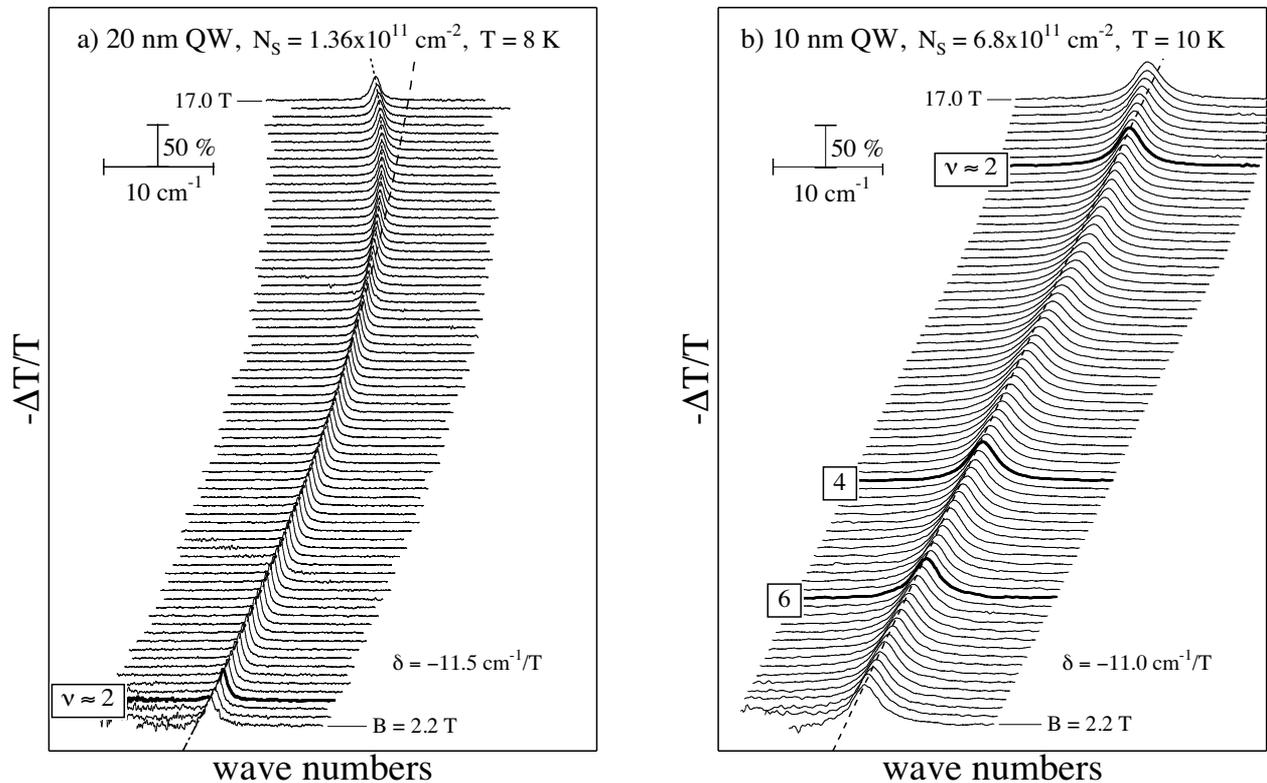
**Abbildung 4.34:** Entwicklung der Polaron-Zyklotronmasse mit der Dichte in Zusammenarbeit mit der Leitungsband-Nichtparabolizität im spinaufgelösten Fall. Die Rechnung und ihre Parameter sind bis auf die Berücksichtigung des Zyklotronresonanz-Spinaufspaltungsparameters  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$  identisch zu den obigen.

Rolle und schwächt die Polaron-Renormierungen generell ab. Die typischen Variationen mit dem Füllfaktor im Bereich  $\nu < 2$ , wie sie oben beschrieben sind, bleiben im wesentlichen erhalten. Die Abschirmung der Polaron-Kopplung wird im Abschnitt 7.2.3 noch ausführlich beschrieben und untersucht.

### 4.3.3 Experimentelle Resultate

Im nicht-resonanten Regime sind die Nichtparabolizitäten aufgrund der Bandstruktur und aufgrund der Polaron-Kopplung nur schwer zu trennen. Dies geht aus den Darstellungen 4.33 und 4.34 hervor. Erschwerend für die Interpretation der experimentellen Zyklotronresonanz erweist sich die Tatsache, daß im Gegensatz zur Bandstruktur die Polaron-Kopplung den Einflüssen der Niveaubesetzungen und der Abschirmung unterliegt.

Experimentell werden aus Zyklotronresonanzexperimenten proben- und dichteabhängig sehr unterschiedliche Nichtparabolizitätsparameter ausgewertet. Sie bewegen sich auf eine effektive Bandlücke umgerechnet im Bereich  $900 \text{ meV} < E_g^* < 1500 \text{ meV}$ . Der untere Grenzwert gilt in GaAs-Volumenproben, wo die Abschirmung ausgeschlossen ist und der Einfluß der Polaron-Kopplung unabgeschwächt vorliegt [Bat93]. Bei Elektronendichten ab  $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  werden in Q2DEG typischerweise Werte um  $1100 \text{ meV}$  ermittelt [Hop87]. Der obere Wert für die effektive Energielücke mit  $1500 \text{ meV}$  wurde in [Pee92] nach sorgfältiger Berücksichtigung der Polaron-Kopplung für den abseparierten Beitrag der Bandstruktur-Nichtparabolizität ausgewertet. Die experimentellen Nichtparabolizitäten werden darüber hinaus auf unterschiedliche Weise entweder aus der Nullfeldmasse bei Durchstimmung der Elektronendichte oder aus dem Massenanstieg mit dem Magnetfeld im Quantengrenzfall bestimmt [Thi87, Hop87, Pee92].



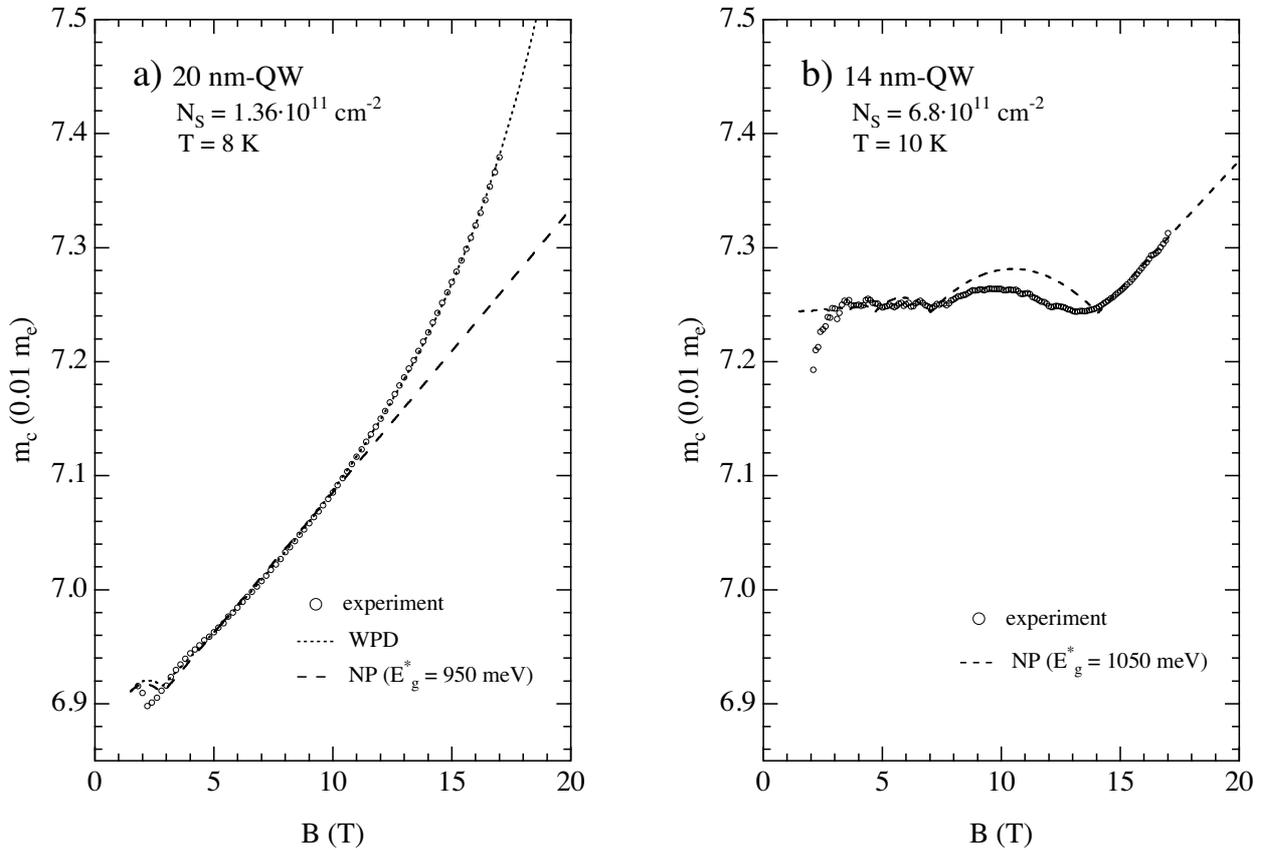
**Abbildung 4.35:** Zyklotronresonanzen für zwei Systeme a) niedriger und b) hoher Dichte in geeigneter Darstellung. Bei den gewählten Temperaturen ist der Spin in den Niveaubesetzungen nicht aufgelöst. Die gestrichelten und gepunkteten Linien repräsentieren die Ergebnisse von Anpaßrechnungen.

Um einen Eindruck über die Auswirkungen der Polaron-Renormierung und der Leitungsband-Nichtparabolizität zu geben zeigt die Abbildung 4.35 die experimentell gemessenen Zyklotronresonanzen für zwei Proben sehr unterschiedlicher Dichten in einer speziellen Darstellung. Bei der gewählten Darstellung werden die in feinen äquidistanten Magnetfeldabstufungen gemessenen und als Absorptionsspektren dargestellten Zyklotronresonanzen übereinander gelegt und abhängig vom Magnetfeld entlang der Frequenzachse verschoben. Die Bildungsvorschrift der Darstellung lautet

$$-\frac{\Delta T}{T}(\omega, B) = - \left[ \frac{T_B(\omega - d(B)) - T_{B_{ref}}(\omega - d(B))}{T_{B_{ref}}(\omega - d(B))} \right] + a(B) . \quad (4.79)$$

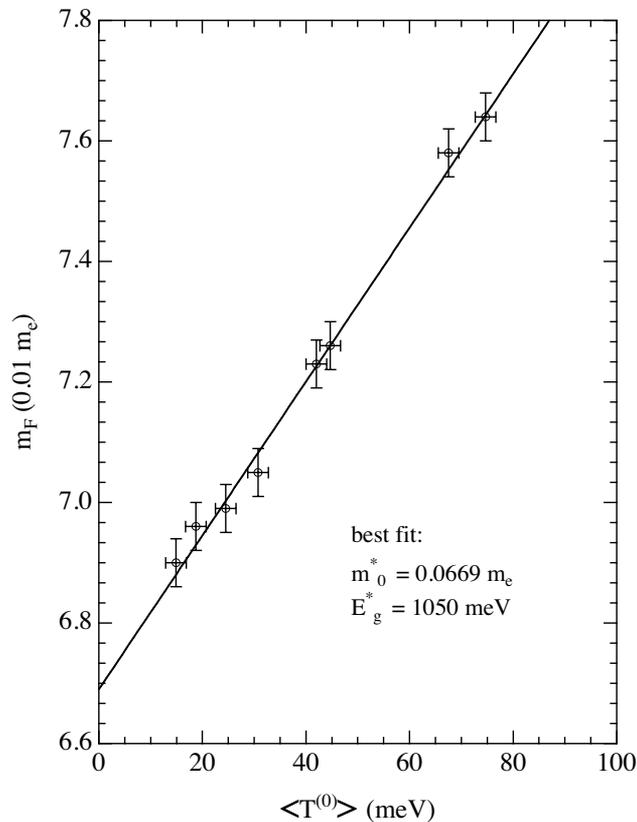
Die Verschiebungen entlang der Absorptions- und der Frequenzachse erfolgen jeweils linear mit dem Magnetfeld entsprechend  $a(B) = \alpha(B - B_0)$  beziehungsweise  $d(B) = \delta(B - B_0)$ , wobei das Magnetfeld  $B_0$  für ein Vergleichsspektrum sowie  $\alpha$  und  $\delta$  für die Verschiebungsparameter stehen. Das Referenzmagnetfeld  $B_{ref}$  eines normierten Spektrums ist jeweils so gelegt, daß die Zyklotronresonanz ohne nennenswerte Beeinflussung durch die Referenz isoliert werden kann. Der Vorteil der Darstellung besteht, wie auch bei der Bildung der Zyklotronmasse, darin, daß feine Variationen in der Zyklotronfrequenz leicht sichtbar werden. Im wesentlichen beruht dies darauf, daß die Magnetfelddispersion der Zyklotronresonanz einer ideal linearen Dispersion entsprechend  $\omega_{c,0} = e B / m_{c,0} = |\delta| B$  gegenübergestellt wird.

Wie man den Auftragungen 4.35 und 4.36 entnimmt, weist die Magnetfelddispersion der Zyklotronreso-



**Abbildung 4.36:** Experimentelle Zyklotronmassen als Funktion des Magnetfeldes für jeweils eine Probe a) niedriger und b) hoher Dichte. Die Meßwerte sind als Kreise dargestellt und die Anpassungen als gestrichelte und gepunktete Linien. Die Fitparameter lauten: Teilfigur a) WPD:  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.071$ ,  $m_0^* = 0.0679 m_e$  und  $E_g^* = 1500 \text{ meV}$ ; NP:  $m_0^* = 0.0684 m_e$  und  $E_g^* = 950 \text{ meV}$ . Teilfigur b): NP:  $m_0^* = 0.0693 m_e$  und  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$ . Aufgrund der hohen Temperaturen wurde in den Rechnungen Spinentartung angenommen.

nanz für die niedrige Dichte a) im Gegensatz zur hohen Dichte b) einen signifikant gekrümmten Verlauf auf. Dies liegt, wie vorher anhand der Modellrechnungen in den Figuren 4.33 und 4.34 aufgezeigt wurde, zum einen an der Nichtparabolizität und zum anderen am resonanten Polaron-Effekt. Beide Effekte werden bei der niedrigen Elektronendichte aufgrund des weitgehenden Fehlens von Besetzungseffekten sichtbar. Um ein Gespür zu vermitteln wurden Anpassungen vorgenommen, deren Resultate als gestrichelte und gepunktete Linien eingezeichnet sind. Die Auswertung der Spektren aus der Abbildung 4.35 ist in der Figur 4.36 nochmals in Form einer Massenauswertung aufgetragen. Für die niedrige Dichte wurden zwei Modelle zur Anpassung herangezogen, deren Parameter in der Bildbeschreibung aufgelistet sind. Das erste Modell setzt lediglich die Einbeziehung einer effektiven Nichtparabolizität voraus. Im nicht-resonanten Regime ergab sich dabei als effektive Energielücke  $E_g^* = 950 \text{ meV}$ . Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit denen aus der Tabelle 4.1, die sich bei der Auswertung der resonanten Polaron-Effekte an der identischen Probe ergaben. Die vollständige Anpassung gemäß der Beschreibung von WPD schließlich ist als gepunktete Linie aufgetragen und beinhaltet sowohl die Polaron-Effekte als auch die Leitungsband-Nichtparabolizität. Hier ergab sich ein signifikant höherer Wert  $E_g^* = 1500 \text{ meV}$  für den Nichtparabolizitätsparameter. Ein ähnliches Ergebnis wurde bereits in [Pee92] publiziert. Im Resonanzregime der Vollfeldkopplung werden die Verläufe der Dispersion und der



**Abbildung 4.37:** Experimentell ausgewertete Zyklotronmasse an der Fermi-Energie als Funktion der kinetischen Energie für die in der Tabelle 4.2 aufgelisteten Q2DEG-Systeme. Die Meßwerte sind als Kreise und die Geradenanpassung als durchgezogene Linie eingetragen. Die Auswertung der Zyklotronmassen erfolgte bei tiefen Temperaturen  $T < 15 \text{ K}$ .

Masse sehr gut wiedergegeben, wobei die Fröhlich-Kopplungskonstante von  $\alpha = 0.071$  tendenziell gut mit den Werten aus der Tabelle 4.1 und der in GaAs zu erwartenden Kopplungsstärke übereinstimmt.

Für das System mit hoher Elektronendichte in den Teilfiguren b) zeigen die gemessenen Zyklotronresonanzen bis zum Füllfaktor 2, der nahe der oberen Grenze des experimentell zugänglichen Magnetfeldregimes angesiedelt ist, eine lediglich lineare Magnetfelddispersion. Wie aus der Massenauftragung in Figur 4.36 hervorgeht, entspricht der Verlauf einer im wesentlichen konstanten Zyklotronmasse. Ab Füllfaktoren  $\nu < 2$  werden die Besetzungseffekte mit Eindringen in den magnetischen Quantengrenzfall zunehmend aufgehoben. Dies führt zu einem bei  $\nu \approx 2$  einsetzenden Abknicken in der Magnetfelddispersion und in der Masse. Auch dieses Verhalten ist in guter qualitativer Übereinstimmung mit den Modellrechnungen aus Abbildung 4.33. Selbst die bogenartigen Variationen auf der Nullfeldmasse werden in der Zyklotronmasse ansatzweise aufgelöst. Hier wurde lediglich eine Anpassung unter alleiniger Berücksichtigung der Nichtparabolizität vorgenommen. Dabei ergab sich eine effektive Lücke  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$ , die zwischen den bei der niedrigen Dichte ausgewerteten Grenzwerten liegt.

Vergleicht man die extrapolierten Nullfeldmassen (Masse an der Fermi-Energie) zwischen der niedrigen ( $m^* = 6.9 \cdot 10^{-2} m_e$ ) und der hohen Dichte ( $m^* = 7.25 \cdot 10^{-2} m_e$ ), so erhält man eine Differenz von 5%. Diese geht zum Hauptteil auf die Bandstruktur-Nichtparabolizität zurück. In der Probe hoher Dichte hat diese einen stärkeren Einfluß einmal aufgrund der größeren Fermi-Energie und zum anderen aufgrund der höheren Subband-Masse infolge des mit abnehmender Trogbreite zunehmenden Einschlusses. Die Masse an der Fermi-Energie hat die in Gleichung 2.116 angegebene Abhängigkeit, wenn man sie auf eine effektive Bandstruktur-Nichtparabolizität zurückführt. Diese Beziehung bietet in Anlehnung an [Thi87, Hop87] die Möglichkeit eine effektive Energielücke unabhängig von der Magnetfeldvariation zu bestimmen. Allerdings wird dafür die Infor-

Probenname	Typ / $N_d$ ( $10^{11} \text{ cm}^{-2}$ )	$N_S$ ( $10^{11} \text{ cm}^{-2}$ )	$\langle 0 T_z^{(0)} 0\rangle$ (meV)	$E_F$ (meV)	$m_F$ ( $m_e$ )
HF-M4.1148	10 nm-QW / sym. dot.	12.65	30	45	0.0764
HF-M4.1149	10 nm-QW / sym. dot.	10.65	30	38	0.0758
HF-M4.1200	14 nm-QW / sym. dot.	7.55	18	27	0.0726
HF-M4.1200	14 nm-QW / sym. dot.	6.8 / illum.	18	24	0.0723
KG-MBEII2542	SHS / 0.6	5.8 / illum.	10	21	0.0705
KG-MBEII597	SHS / 1.1	3.5 / gate	12	13	0.0699
20 nm QW (W30398)	20 nm-QW / 0.2	2.30 / illum.	11	8	0.0696
20 nm QW (W30398)	20 nm-QW / 0.2	1.36	10	5	0.0690

**Tabelle 4.2:** Probenparameter zur Darstellung 4.37.

mation über den Erwartungswert der kinetischen Energie  $\langle 0|T_z^{(0)}|0\rangle$  im untersten elektrischen Subband  $i = 0$  benötigt. Diese Größe ist experimentell nicht direkt zugänglich und muß aus selbstkonsistenten Subband-Rechnungen gewonnen werden, wie sie im Abschnitt 2.2.2 ausführlich beschrieben sind. Die Abbildung 4.37 zeigt die extrapolierten Zyklotronmassen an der Fermi-Energie für eine Reihe unterschiedlicher Proben als Funktion der kinetischen Energie  $\langle T^{(0)} \rangle = \langle 0|T_z^{(0)}|0\rangle + E_F(B = 0)$ . Die zugehörigen Probenparameter sind in der Tabelle 4.2 aufgelistet. Man erkennt an der Auftragung in guter Übereinstimmung mit der Theorie eine lineare Abhängigkeit der Nullfeldmasse von der berechneten Größe  $\langle T^{(0)} \rangle$ . Die durchgeführte Anpassung gemäß

$$E_g^* (= \epsilon_g^*) = 2 m_0^* \left[ \frac{dm_F}{d\langle T^{(0)} \rangle} \right]^{-1} \quad (4.80)$$

ergab als besten Wert für den Nichtparabolizitätsparameter  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$ , wie er auch aus der Massenvariation in 4.36 b) erhalten wurde. Die ausgewertete Bandkantenmasse  $m_0^* = 0.0669 m_e$  ist ebenfalls in guter Übereinstimmung mit den Werten, die experimentell an GaAs-Volumenproben ermittelt werden [Bat93].

Man kann zusammenfassend festhalten, daß die experimentell beobachtete Zyklotronmasse gut in das Bild eines nichtparabolischen Elektronengases paßt, das unter dem Einfluß der Polaron-Renormierung steht. Bei niedrigen Dichten und Füllungen  $\nu \ll 2$  dominiert aufgrund des weitgehenden Fehlens von Besetzungsblockaden und der Abschirmung die Polaron-Kopplung über die Nichtparabolizität. Bei Füllfaktoren  $\nu > 2$  hingegen scheint die Nichtparabolizität bei weitgehender Abwesenheit der resonanten Polaron-Kopplung die Zyklotronmasse maßgeblich zu bestimmen. Allerdings weist die sich sowohl aus der Nullfeld-Masse als auch aus der Magnetfeldvariation ergebende Lücke  $E_{g,exp}^* \approx 1050 \text{ meV}$ , die deutlich geringer ausfällt als der in der Auflistung 2.145 nach dem Dreiband-Modell vorhergesagte Wert  $E_{g,theo}^* \approx 1750 \text{ meV}$ , darauf hin, daß der Bandstruktur-Nichtparabolizität ein nicht-unerheblicher Beitrag aufgrund der nicht-resonanten Polaron-Kopplung überlagert ist. Eine präzisere Trennung der beiden Einflüsse erfolgt im Kapitel 7.

# Kapitel 5

## Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes

Dieses Kapitel befaßt sich mit theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur elektronischen Zyklotronresonanz im Regime des ganzzahligen Quanten-Hall-Effektes (IQHE). Das Regime des IQHE ist durch das Auftreten der charakteristischen Hall-Plateaus im transversalen Magneto-Widerstand um ganzzahlige Füllfaktoren gekennzeichnet.

Zunächst werden im Abschnitt 5.1 zur Motivation der weiteren Ausführungen die Grundlagen zum Integralen Quanten-Hall-Effekt und der aktuelle Stand der Zyklotronresonanz in diesem Regime vermittelt. Anschließend wird im Abschnitt 5.2 die Zyklotronresonanz von der theoretischen Seite beleuchtet. Im abschließenden Teilkapitel 5.3 werden die experimentellen Ergebnisse dargelegt und im Lichte der vorher ausgeführten Modelle analysiert.

### 5.1 Grundlagen und Motivation

#### 5.1.1 Integraler Quanten-Hall-Effekt (IQHE)

Bei hinreichend hohen Ladungsträgerbeweglichkeiten und LHe-Temperaturen werden in quasi-zweidimensionalen Elektronengasen (Q2DEG) unabhängig vom Materialsystem und der Probengeometrie in den Shubnikov-de Haas-Oszillationen des longitudinalen Magneto-Widerstands  $R_{xx}$  um ganzzahlige Füllfaktoren herum verschwindende Werte gemessen. Gleichzeitig bilden sich im transversalen Magneto-Widerstand  $R_{xy}$  (Hall-Widerstand) Plateaus heraus, deren Höhe

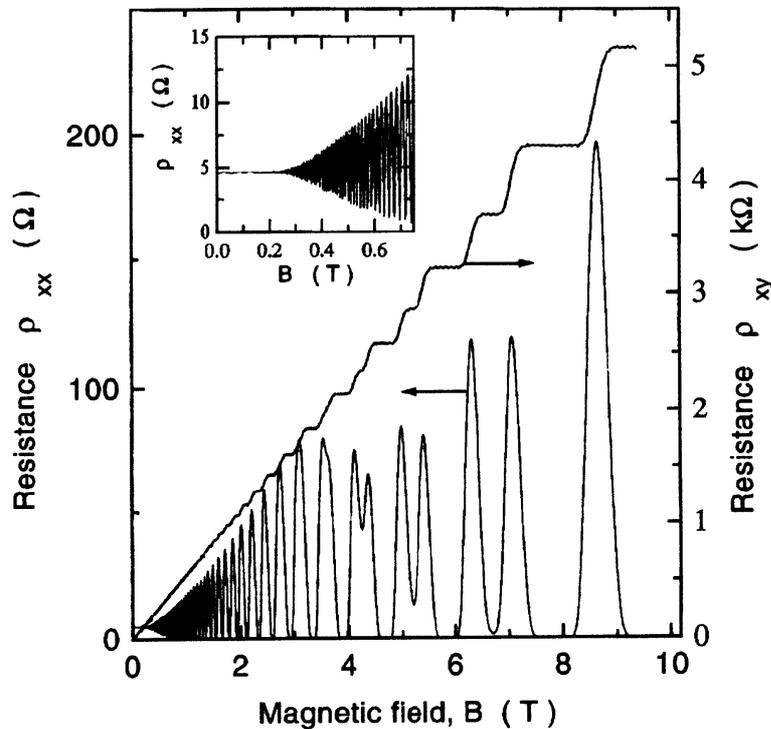
$$R_{xy} = R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

lediglich von fundamentalen Naturkonstanten und einer ganzen Zahl abhängt. Abbildung 5.1 zeigt dies exemplarisch für ein hochbewegliches Q2DEG in GaAs, das einen speziellen Aufbau aufweist und zu einer Klasse von Strukturen gehört, wie sie auch in dieser Arbeit Verwendung finden.

Das Phänomen des ganzzahligen Quanten-Hall-Effektes (IQHE<sup>1</sup>) wurde 1980 von v. Klitzing an einem Silizium-MOSFET entdeckt [vK80] und 1985 mit dem Nobelpreis in Physik gewürdigt. Der diesem Ef-

---

<sup>1</sup>Integer Quantum Hall Effect

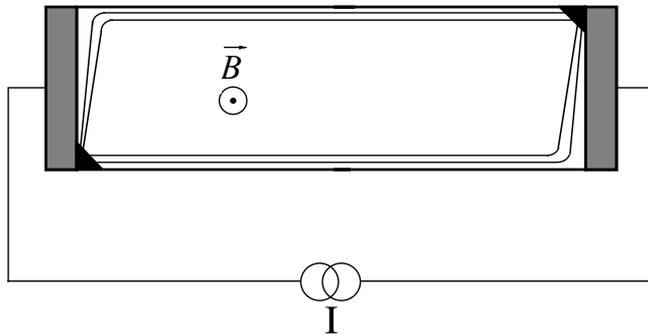


**Abbildung 5.1:** Integraler Quanten-Hall-Effekt an einem Q2DEG in GaAs. Deutlich bilden sich um ganzzahlige Füllfaktoren die charakteristischen Plateaus im Hall-Widerstand heraus, wenn der transversale Magneto-Widerstand verschwindet. Die Elektronendichte beträgt  $N_S = 1.15 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  und die Temperatur  $T = 0.3 \text{ K}$ . Aus [Fri96a].

fekt zugrunde liegende Mechanismus ist auch heute noch nicht in allen Einzelheiten geklärt. Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander spielt für den IQHE keine wesentliche Rolle. Der Rand des Systems allerdings ist für den Stromtransport aufgrund der sich ausbildenden Randzustände von besonderer Bedeutung [Hal82, Bue88]. Diese entstehen, wenn die Landau-Niveaus durch das Begrenzungspotential am Rand modifiziert werden. Der IQHE ist weder ein reiner "Volumen"- noch ein reiner Randeffect. Je nachdem, an welchen Geometrien Transportexperimente durchgeführt werden, dominiert einer der beiden Aspekte. Dabei zeigen die aktuellen theoretischen und experimentellen Ergebnisse, daß die nicht-lineare Abschirmung eines Q2DEG im quantisierenden Magnetfeld infolge der diskreten Landau-Zustandsdichte im Regime der Hall-Plateaus zu einer Aufteilung des Q2DEG in kompressible Bereiche mit nicht-ganzzahligen Füllungen und inkompressible Bereiche mit ganzzahligen Füllungen führt [Chk92, Ahl01, Ahl02]. Solche inkompressiblen Bereiche bilden sich zuerst als Streifen entlang des Randes aus und stellen die Verbindung zwischen dem Randkanal-Bild und dem "Volumen"-Bild des IQHE her.

Im Randkanal-Bild kann die Quantisierung der Leitfähigkeit sehr anschaulich verstanden werden. Jeder Randkanal (Randzustand) kann gerade einen Strom dissipationslos tragen, der dem Leitwert  $G_{ch} = e^2/h$  eines eindimensionalen ballistischen Quantendrahtes entspricht [Bue88, Dat95]. Bei einem Füllfaktor  $\nu = n$  stehen genau  $n$  solcher Kanäle für den Stromtransport zur Verfügung. Daraus folgt unmittelbar die Widerstandsquantisierung gemäß folgender Betrachtung:

Im Gleichgewicht sind die chemischen Potentiale in den Kontakten gleich und die Ströme des jeweiligen Kanals, die an gegenüberliegenden Rändern fließen, kompensieren sich gerade. Legt man eine Potentialdifferenz an die Kontakte an, so fließt ein Nettostrom  $I$ , wobei die Dissipation vollständig in den Kontaktzonen stattfindet. Dies ist in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt und auch experimentell bestätigt [Kla91]. Die Randkanäle bilden deshalb jeweils Äquipotentiallinien, wobei sich die Potentiale gegenüberliegender Pfade eines Kanals um  $U_{ch} = I/G_{ch}$  unterscheiden. Diese Spannung fällt pro Kanal in Querrichtung als Beitrag zur Hall-Spannung  $U_H$  ab. Die Beiträge der Einzelkanäle addieren sich schließlich zu  $U_H = n U_{ch}$  auf, so daß für



**Abbildung 5.2:** Strompfade und Dissipation im Randkanal-Bild des IQHE. Die Dissipation findet jeweils an den gegenüberliegenden Ecken am Rand der Kontaktzonen (grau) statt. Die Randkanäle bilden Äquipotentiallinien entlang derer der Stromtransport ohne Streuung erfolgt.

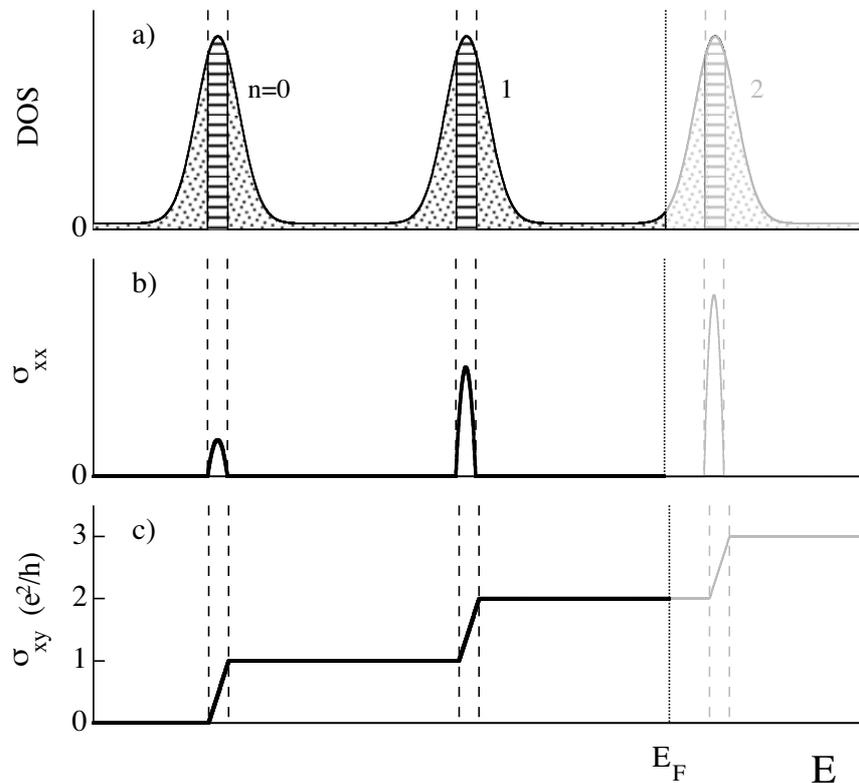
den Hall-Widerstand  $R_H = I/U_H = \rho_{xy}$  die Quantisierung gemäß Gleichung 5.1 resultiert.

Im “Volumen”-Bild des IQHE werden fast alle Zustände durch das zufällige Störstellenpotential lokalisiert. Nur wenige Zustände im unmittelbaren Bereich um die Maxima der Zustandsdichte sind ausgedehnt und in der Lage einen dissipativen Strom zu tragen. Diesem Sachverhalt wird durch Einführung von sogenannten Mobilitätskanten (mobility edges) in der Zustandsdichte Rechnung getragen [Cha95]. Die Mobilitätskante trennt die lokalisierten von den delokalisierten Zuständen. Die ausgedehnten Zustände sind dann durch sogenannte Mobilitätslücken (mobility gaps), die dem Landau-Niveaubandabstand entsprechen, voneinander separiert. Laughlin gelang es mit Hilfe eines Gedankenexperiments, das auf dem fundamentalen Prinzip der Eichinvarianz basiert, die Quantisierung des Hall-Widerstandes mit dem Vorhandensein der Mobilitätslücken zu begründen [Lau81]. Halperin verfeinerte diese Idee und wurde dadurch auf die besondere Bedeutung des Randes aufmerksam [Hal82]. Das Bestechende an beiden Ansätzen ist die Verwendung lediglich fundamentaler Prinzipien zur Begründung der Hall-Quantisierung.

Auch mit dem Kubo-Formalismus [Kub57, Kub91] der linearen Antwort können unter der Annahme lokalisierter und ausgedehnter Zustände die Hall-Plateaus in  $\rho_{xy}$  innerhalb der Mobilitätslücken reproduziert werden. Entscheidend ist hierbei die Erkenntnis, daß zur longitudinalen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  nur die Zustände an der Fermi-Energie beitragen, während in der transversalen Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  alle Zustände unterhalb der Fermi-Energie zu berücksichtigen sind [Aok81, Aok87]. Befindet sich die Fermi-Energie innerhalb der Mobilitätslücke, so verschwindet  $\sigma_{xx}$  und damit auch  $\rho_{xx}$ . Da die lokalisierten Zustände nicht zum dissipativen Transport beitragen, bleibt die Hall-Leitfähigkeit bei Variation der Fermi-Energie innerhalb der Lücke zunächst unverändert. Für  $\sigma_{xy}$  zählen jedoch alle Zustände und damit auch die ausgedehnten Zustände unterhalb von  $\epsilon_F$ . Daher springt die Hall-Leitfähigkeit stufenweise bei Durchlaufen der ausgedehnten Zustände im Zentrum der Landau-Niveaus von Plateau zu Plateau. Dies ist in der Abbildung 5.3 illustriert. Die Quantisierung der Plateaus konnte in [Aok81] für ganzzahlige Füllfaktoren durch numerische Berechnungen gezeigt werden.

Neben den geschilderten gibt es noch weitere Ansätze zur Erklärung des IQHE, die auf dem Prinzip der räumlichen Topologie, der Perkolationstheorie oder dem Renormierungsgruppenansatz der schwachen Lokalisierung beruhen, jedoch aus Platzgründen hier nur Erwähnung finden. All diese Ansätze sind ebenfalls in der Lage unter gewissen Annahmen die Hall-Quantisierung zu reproduzieren und werden beispielsweise in [Pra90, Cha95] beschrieben.

Im Bild der inkompressiblen und kompressiblen Streifen schließlich verschmelzen das Randkanal- und das “Volumen”-Bild. Der Stromtransport erfolgt im Regime der Hall-Plateaus ausschließlich über zusammenhängende inkompressible Gebiete. Aufgrund der Inkompressibilität der dort vorliegenden ganzzahligen Füllungen ist der Stromtransport dissipationslos, was den verschwindenden longitudinalen Magneto-Widerstand zur Folge hat. Die zusammenhängenden inkompressiblen Bereiche bilden sich von niedrigen Magnetfeldern her kommend ab einem Schwellen-Magnetfeld aus und dringen vom Rand ausgehend zunehmend in das “Volumen”



**Abbildung 5.3:** Zustandekommen der Hall-Quantisierung im Bild der lokalisierten und delokalisierten Zustände. Schematisch dargestellt sind in Teilbild a) die Zustandsdichte mit den lokalisierten (gepunktet) und delokalisierten (quergestreift) Regionen, b) die longitudinale Magneto-Leitfähigkeit und c) die Hall-Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Energie beziehungsweise Fermi-Energie. Die Zustandsdichte spiegelt die drei untersten Landau-Niveaus wider, wobei der Spin aus Gründen der Einfachheit unberücksichtigt bleibt. Die Mobilitätskanten sind gestrichelt dargestellt.

ein, bis das Probeninnere mit Ausnahme inselartiger kompressibler Bereiche beim globalen Füllfaktor  $\nu = n$  nahezu vollständig inkompressibel wird [Gue03, Sid04]. Mit weiter zunehmendem Magnetfeld schließlich dehnen sich die kompressiblen Inseln infolge des Störstellen-Hintergrundes immer weiter aus, bis ein zusammenhängender inkompressibler Bereich nicht mehr vorhanden ist. Der Abfall an Hall-Spannung erfolgt dabei ausschließlich über die inkompressiblen Bereiche, wo die Beziehung  $I_x = \nu U_H e^2/h$ ,  $\nu = n$  gilt, und aus der unmittelbar die Quantisierungsbedingung 5.1 folgt [vK80]. Nach dem aktuellen Verständnis setzt demnach die Quantisierung des Hall-Widerstandes in einem Q2DEG die Existenz zusammenhängender inkompressibler Bereiche voraus, die zunächst vom Probenrand ausgehend sich zunehmend in das Probeninnere ausdehnen und anschließend durch die zunehmende Ausprägung kompressibler Inseln wieder zerfallen.

Zuletzt sei in diesem Abschnitt bemerkt, daß für den statischen Stromtransport die Bewegung der Aufpunkte (guiding centers) der Landau-Zustände und deren Lokalisierung in einem Zufallspotential entscheidend ist. Die Landau-Quantisierung der Orbitalbewegung bewirkt die Modulation der Zustandsdichte, wird aber im wesentlichen nicht durch das Störstellenpotential und den Rand modifiziert. Letztere ist jedoch in der dynamischen Leitfähigkeit zugänglich, wobei dann allerdings den Aufpunkten eine untergeordnete Bedeutung zukommt. Statische und dynamische Leitfähigkeit bilden demzufolge komplementäre Aspekte des Elektronengases im starken senkrechten Magnetfeld ab.

### 5.1.2 Stand der Zyklotronresonanz

Aufgrund der Leitungsband-Nichtparabolizität und der Polaron-Kopplung sind im Einteilchen-Bild charakteristisch aufgespaltene Zyklotronresonanzen zu erwarten. Bis vor kurzem jedoch wurden in Zyklotronresonanzexperimenten an auf GaAs basierenden Q2DEG keinerlei Hinweise auf Linienaufspaltungen gefunden.

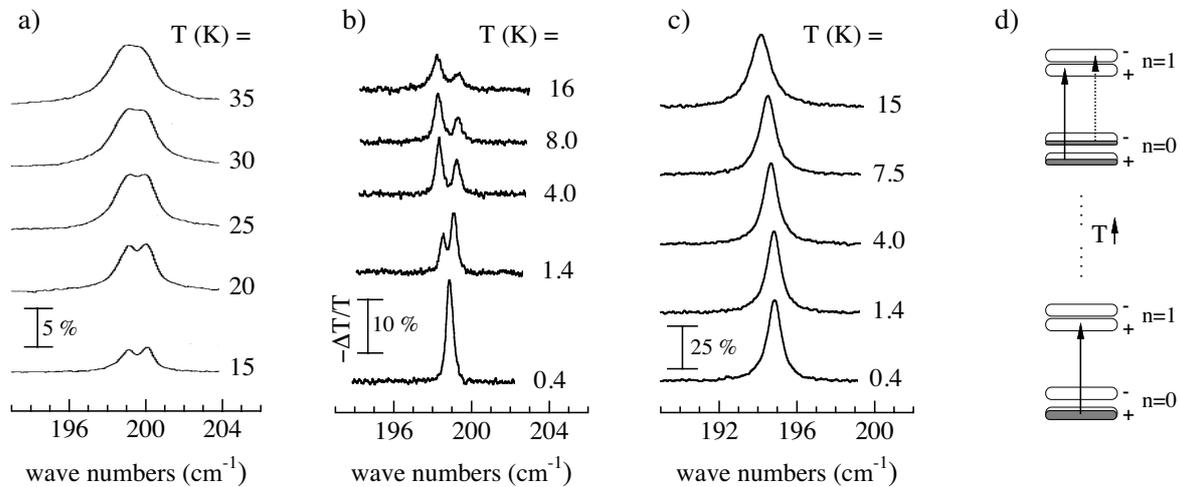
Die von Volumensystemen bekannte Spinaufspaltung der Zyklotronresonanz wurde zuerst in stark verdünnten Q2DEG beobachtet [Bes92, Sum93, Eng94, Mic94]. Diese Aufspaltung zeigte gegenüber der Spinaufspaltung von GaAs-Volumengasen eine invertierte Oszillatorstärke. Die Aufteilung der Oszillatorstärke hing zudem sehr empfindlich von der Temperatur, dem Magnetfeld und der Dichte ab. Zuerst wurde vermutet, daß dieser zunächst ungewöhnliche Befund auf eine Wigner-Kristallisation [Wig34, Bes92] bzw. auf einen Spinordnungsübergang zurückzuführen sei [Sum93]. Später wurde gezeigt, daß die Inversion der Oszillatorstärken auf eine Kopplung der zu den beiden Spineinstellungen gehörenden Zyklotronübergänge zurückgeht [Coo94, Joh94]. Die genaue Anordnung der Elektronen in der Ebene und damit die Beschaffenheit des Grundzustandes, so zeigte sich bei den Berechnungen, spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle. Motiviert von diesen Befunden wurde in [Hu,95b, Hu,95a] ein analytisches Modell für die Zyklotronresonanz im extrem verdünnten Elektronengas entwickelt, welches auf einer Multipolentwicklung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung basiert. Dieses Modell wurde bereits im vorausgehenden Abschnitt 4.2.3.1 zur Beschreibung der resonanten Polaron-Effekte benutzt und ist auf die Landau- und Subband-Aufspaltung in diesem Regime direkt übertragbar. Wie sich herausstellen wird, ist das semiklassische Modell von Hu et al. in seinen Ergebnissen äquivalent zu dem gänzlich klassischen Modell, das im Abschnitt 5.2.2 vorgestellt wird.

Um einen Überblick über den Stand der Spinaufspaltung in GaAs zu Beginn der vorliegenden Arbeit zu vermitteln, sind in der Abbildung 5.4 die Zyklotronresonanzspektren für ein Volumensystem, ein extrem verdünntes Q2DEG und ein typisches System, das für Untersuchungen im Quanten-Hall-Regime eingesetzt wird, gegenübergestellt:

Im Volumensystem aus Teilfigur a) ist die Zyklotronresonanz freier Leitungsband-Elektronen aufgrund der benötigten thermischen Ionisation der Donatoren erst ab verhältnismäßig hohen Temperaturen sichtbar. Wie man erkennt, weist die Zyklotronresonanz ein signifikant aufgespaltenes Resonanzprofil auf. Die Aufteilung der Oszillatorstärken ist dabei in Übereinstimmung mit den thermischen Niveaubesetzungen im untersten Zeeman-aufgespaltenen Landau-Niveau  $n = 0$ . Dabei entspricht, wie aus dem Teilbild d) ersichtlich ist, die energetisch tiefer liegende Resonanz dem Übergang  $(0, -1/2) \rightarrow (1, -1/2)$ , dessen Ausgangsniveau aufgrund des negativen g-Faktors energetisch höher liegt als das des höherfrequenten Übergangs  $(0, +1/2) \rightarrow (1, +1/2)$ . Weitere Übergänge sind aufgrund der niedrigen Dichten und der tiefen Temperaturen nicht aktiv. Mit zunehmender Temperatur gleichen sich die Oszillatorstärken der beiden Übergänge zunächst an, woraufhin die niederenergetische Resonanz in ihrer Stärke die höher liegende zu übersteigen scheint. In [Bat93] wurde gezeigt, daß dieser Sachverhalt im wesentlichen auf die nichtparabolische  $k_z$ -Dispersion der freien Bewegung senkrecht zur Magnetfeldachse im Zusammenspiel mit optischen Effekten aufgrund des Schichtaufbaus zurückgeführt werden kann. Daher besitzt das Einteilchen-Bild in Volumensystemen ohne Einschränkung seine Gültigkeit.

Bei extrem verdünnten Q2DEG mit entsprechend hohen Elektronenbeweglichkeiten (Teilfigur b)) wird ebenfalls bei geeigneter thermischer Aktivierung ein aufgespaltenes Resonanzprofil sichtbar. Allerdings sind die Oszillatorstärken gegenüber dem Volumensystem teilweise invertiert und zudem stark von der Temperatur, das heißt den relativen Besetzungen der Spinniveaus, abhängig.

Bei Q2DEG in GaAs mit Dichten  $N_S > 1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , für die repräsentativ das System aus Teilfigur c) steht, sind bei tiefen Temperaturen bislang generell nur Einfachresonanzen beobachtet worden. Man erkennt



**Abbildung 5.4:** Experimentelle Manifestation der Spinaufspaltung der Zyklotronresonanz im Probenvergleich. Die Teilfiguren a) bis c) zeigen gemessene Spektren bei  $B = 15$  T für verschiedene Temperaturen. Bei Teilfigur a) handelt es sich um ein 3D-Volumensystem, dessen Daten aus [Bat93] entnommen wurden. Im Fall b) handelt es sich um ein Q2DEG mit sehr niedriger Dichte  $N_S < 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Das Q2DEG-System aus Teilfigur c) hat eine Dichte  $N_S = 2.3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , was einem Füllfaktor von  $\nu = 0.64$  entspricht. In der Teilfigur d) ist der thermisch aktivierte Übergang von einem ein- zu einem zweikomponentigen System veranschaulicht.

jedoch, daß die energetische Lage der Resonanz mit zunehmender Temperatur zu niedrigeren Frequenzen hin verschiebt, was auf eine Beteiligung des energetisch tiefer gelegenen Einteilchen-Übergangs hinweist. Die Ursache der Oszillatorstärkeninversion bei extrem verdünnten Q2DEG und die fehlende Aufspaltung bei höheren Dichten wird durch eine Kopplung der beiden aktiven Dipolübergänge aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung verursacht. Bislang ist man in GaAs bei Q2DEG mit entsprechend hohen Dichten davon ausgegangen, daß die Kopplungsstärke im Vergleich zur Einteilchen-Spinaufspaltung derart groß ist, daß die beiden aktiven Übergänge zu einer einzigen aktiven Kollektivresonanz hybridisieren. Deren Lage entspricht gerade dem gewichteten Mittel aus den Energien der beiden beteiligten Einteilchen-Resonanzen [Mic96]. Wird die Kopplungsstärke mit den Differenzen der Einteilchen-Übergangsenergien vergleichbar, wie es in Q2DEG mit extrem niedrigen Dichten der Fall ist, wird eine Spinaufspaltung mit oftmals invertierten Oszillatorstärken sichtbar.

Im Gegensatz zu den nur schwach nichtparabolischen Systemen in GaAs wurden an InAs/AlSb-Quantentrögen mit dem schmallückigen und stark nichtparabolischen Trogmateriale InAs erstmals sowohl Spin- als auch Landau-Aufspaltungen in der Zyklotronresonanz bei hohen Füllfaktoren beobachtet [Scr93]. Die experimentellen Befunde waren dabei in weitgehender Übereinstimmung mit den Aussagen des Einteilchen-Bildes. Das Verhältnis zwischen Kopplungsstärke und den Spin- beziehungsweise Landau-Aufspaltungen fällt in diesem Materialsystem im Gegensatz zu GaAs deutlich zugunsten der Nichtparabolizität aus. Bereits im Vorfeld dieser Entdeckung wurden füllfaktorabhängige Oszillationen in einem InAs/GaSb-Quantentrogssystem beobachtet [Hei86]. Dabei zeigten sich bei ganzzahligen Füllfaktoren ausgeprägte Maxima in den Halbwertsbreiten der Einfachresonanzen. Deren Ursache wurde seinerzeit mit der Streuung an Störstellen und der zusammenbrechenden Abschirmung bei ganzzahligen Füllfaktoren erklärt. Im Nachhinein ist dieses Verhalten wohl in stärkerem Maße auf die Nichtparabolizität zurückzuführen, deren charakteristische Aufspaltungen sich bereits in Form der Linienverbreiterungen anzudeuten schienen. Die Ursache für das Hervortreten

der ganzzahligen Füllfaktoren wird im Laufe der weiteren Ausführungen offenbar.

Die Zyklotronresonanz quasi-zweidimensionaler Elektronengase hat neben experimentellen auch eine Reihe theoretischer Untersuchungen motiviert. Besonders sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten [Chi74, Tin76, Tin77, App78, Tak78, Tak80, Kal84, Kal85, Mac85a, Mac85b, Kal88a, Kal88b, Mac89] und die darin aufgeführten Referenzen verwiesen, die wesentlich zum theoretischen Verständnis der Magneto-Plasmonen in Q2DEG beigetragen haben. Bei der Berechnung der Plasmonanregungen eines Q2DEG wird prinzipiell in zwei Stufen vorgegangen:

Zuerst wird der Grundzustand und gegebenenfalls die damit verbundenen durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung renormierten (Quasi-)Teilchen-Niveaus berechnet. In der zweiten Stufe werden anschließend unter Kenntnis des Grundzustandes die elektrisch neutralen Dichteanregungen (Plasmonen) durch geeignete Methoden gefunden. Je nachdem, an welcher Stelle die entscheidenden Näherungen eingeführt werden, wird weiterhin zwischen zwei grundlegenden Ansätzen unterschieden:

Im ersten Ansatz wird der Grundzustand in der Hartree-Fock- (HFA) oder der Lokaldichte-Näherung (LDA) durch eine Slater-Determinante mit entsprechenden Teilchen-Niveaus, die prinzipiell selbstkonsistent zu berechnen sind, approximiert. Unter Kenntnis der Teilchen-Orbitale wird dann in einem zweiten Schritt die entsprechende zeitabhängige Response-Rechnung, die bezogen auf den genäherten Grundzustand als exakt anzusehen ist, durchgeführt (z.B. [Kal84, Mac85a]). Die geschilderte Vorgehensweise wird später im Zusammenhang mit der kollektiven Intersubband-Resonanz explizit ausgeführt.

Beim zweiten Ansatz geht man von einem bekannten und als zutreffend angenommenen Grundzustand aus. Prinzipiell geht der allgemeine Grundzustand über eine einzelne Slater-Determinante (HFA) hinaus und ist daher als Überlagerung von mehreren, im allgemeinen beliebig vielen, Slater-Determinanten darstellbar. Ein solcher Grundzustand kann dabei entweder aus einem Variationsansatz (z.B. Laughlin-Wellenfunktion im FQHE [Lau83, Cha95]) oder aus einer numerischen Simulation an Systemen mit begrenzter Teilchenzahl [Asa98] gewonnen werden. Auf diesem Grundzustand werden die Dichteanregungen anschließend geeignet konstruiert. Im Falle eines Q2DEG im hohen senkrechten Magnetfeld hat sich die GSMA-Näherung (generalized single mode approximation) nach [Mac85b] zur Beschreibung der Dichteanregungen bewährt. Diese Näherung geht von kollektiven Dichtemoden aus, welche nach Anteilen, die Übergänge zwischen allen möglichen Landau-Niveaus darstellen, separieren.

Die zeitabhängige Hartree-Fock-Näherung nach [Mac85a] ist in der Lage, Kopplungen zwischen Zyklotronübergängen zu beschreiben, die zur gleichen Spineinstellung gehören. Allerdings enthält sie keine expliziten Kopplungsterme zwischen Übergängen ungleichen Spins. Dies wird unmittelbar klar, da der quantenmechanische Austausch, welcher in dieser Näherung alleinig Berücksichtigung findet, stets nur auf Teilchen gleicher Spinprojektion wirkt [Fet71, Mad78, Gro86]. Folglich kann er für eine Kopplung von Übergängen ungleichen Spins nicht verantwortlich sein. Eine Hybridisierung speziell der spinaufgespaltenen Zyklotronresonanz, wie sie experimentell beobachtet wird, muß deshalb durch Mechanismen verursacht sein, die jenseits der Hartree-Fock-Näherung angesiedelt sind. Gemeinhin werden solche Wechselwirkungsbeiträge unter dem Begriff der Korrelationseffekte zusammengefaßt. Solche Effekte sind quantenmechanisch oftmals nur auf direktem Wege durch numerische Rechnungen an Systemen endlicher Teilchenzahl zugänglich [Asa96, Asa98]. Überraschenderweise erschließt sich das Wesen der quantenmechanisch nur schwer faßbaren Korrelationskopplungen aus verhältnismäßig einfachen klassischen Überlegungen, wie sie in Abschnitt 5.2.2 angestellt werden beziehungsweise in [Hu,95b, Hu,95a] ausgeführt sind.

Der folgende Abschnitt behandelt eine Reihe theoretischer Betrachtungen, die eine fundierte phänomenologische Beschreibung der für die Zyklotronresonanz wichtigen Kopplungsmechanismen gestatten.

## 5.2 Theorie der Zyklotronresonanz mehrkomponentiger Elektronengase

In den folgenden Teilabschnitten wird die kollektive Zyklotronresonanz mehrkomponentiger Q2DEG theoretisch untersucht. Der Aspekt der Mehrkomponentigkeit beruht dabei auf der in realen Systemen nicht vorhandenen Entartung der Zyklotron-Übergangsenergien. Im Vergleich zu einem ideal parabolischen und sauberen System wird die Entartung der Zyklotron-Übergangsenergien durch die Leitungsband-Nichtparabolizität, den Polaron-Effekt, und aufgrund von Störstellen aufgehoben.

Der erste Teilabschnitt 5.2.1 widmet sich dem als Ausgangspunkt der weiterführenden Beschreibungen dienenden Kohnschen Theorem. Darauf beziehend und aufbauend werden zwei Ansätze vorgestellt. Der erste Ansatz, der in Abschnitt 5.2.2 behandelt wird, basiert auf einem rein klassischen Modell, das eine mehrkomponentige Erweiterung des Drude-Modells darstellt. Die quantenmechanische Beschreibung, die sich im Abschnitt 5.2.3 anschließt, gründet auf einem verallgemeinerten Hamilton-Operator-Ansatz auf Basis des Kohnschen Theorems. Schließlich fließen die beiden Betrachtungen im Abschnitt 5.2.4 in einem Modell zusammen, das die mehrkomponentige Zyklotronresonanz als die Anregung eines Systems harmonisch gekoppelter Schwerpunkte beschreibt.

### 5.2.1 Das verallgemeinerte Theorem von Kohn

Das vielzitierte Theorem von Kohn besagt, daß in einem translationsinvarianten System wechselwirkender geladener Teilchen die Zyklotronresonanz unbeeinflusst von der Paarwechselwirkung zwischen den Teilchen bei der einheitlichen Übergangsenergie  $\hbar\omega_c$  auftritt [Koh61]. Das Kohn-Theorem der Zyklotronresonanz wurde in [Bre89] verallgemeinert. Das verallgemeinerte Theorem besagt, daß ganz generell in Systemen mit harmonischem Potentialeinschluß, die einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt sind, die fundamentalen dipolaktiven Dichtemoden die identischen Energien wie die entsprechenden Einteilchen-Übergänge aufweisen. Diese Erkenntnis dient als Vergleichsreferenz grundlegender theoretischer Betrachtungen, die über die Beschreibung von Dipolmoden der unter das Theorem fallenden Systeme hinausgehen [Dob94].

Bei der Herleitung des verallgemeinerten Theorems bildet die Hamilton-Funktion eines wechselwirkenden harmonisch gebundenen Elektronensystems in der allgemeinen Form

$$H = \sum_i^N \sum_{k=x,y,z} \frac{1}{2m^*} (p_{k,i} + eA_{k,i})^2 + \sum_i^N \sum_{k=x,y,z} \frac{m^*}{2} \Omega_k^2 r_{k,i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (5.2)$$

den Ausgangspunkt. Darin stehen  $r_{k,i}$  für die Komponenten ( $k = x, y, z$ ) der Ortskoordinaten und  $p_{k,i}$  für die Impulskomponenten eines Elektrons mit Nummerierung  $i = 1, 2, \dots, N$ . Das einheitliche Einschlußpotential ist durch die Frequenzen  $\Omega_k$  und das Vektorpotential aufgrund eines homogenen Magnetfeldes  $\vec{B}$  durch die Komponenten  $A_{k,i} = B \alpha_{k,k'} r_{k',i}$  gegeben. In der Matrix  $\alpha_{k,k'}$  ist sowohl die Richtung des Magnetfeldes als auch die Eichung enthalten (vergleiche dazu die Gleichungen 2.32, 2.33 und 2.83).  $W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$  steht dabei für eine beliebige Paarwechselwirkung. Das durch die Hamilton-Funktion 5.2 beschriebene System werde durch ein räumlich homogenes Dipolfeld  $\vec{A}^{(rad)} = (a_x, a_y, a_z) e^{-i\omega t} + c.c.$  zu Schwingungen angeregt. Die Anregung führt zu einem zeitabhängigen Beitrag in der Hamilton-Funktion entsprechend

$$H^{(rad)} = \frac{e}{m^*} \sum_i^N \sum_{k=x,y,z} a_k (p_{k,i} + eA_{k,i}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (5.3)$$

Die Herleitung des Theorems erfolgt hier durch explizite Abseparation der Schwerpunktbewegung von der Relativbewegung. Der Schwerpunkt, so stellt sich dabei heraus, ist gerade derjenige Freiheitsgrad, an den ein räumlich homogenes Dipolfeld in einem harmonisch gebundenen System alleinig angreift. In den originalen Ausführungen in [Koh61] und [Bre89] geschieht die Herleitung auf einem etwas anderen Weg unter Ausnutzung der exakten Kommutatorrelationen für die quantenmechanischen Leiteroperatoren. Die hier gewählte Darstellung hat dabei den Vorteil, daß sie bereits den Weg zu einer Erweiterung auf mehrkomponentige Systeme weist. Die Mehrkomponentigkeit bezieht sich dabei auf das Vorhandensein mehrerer Teilchensorten leicht unterschiedlicher Massen, was z.B. durch die Nichtparabolizität eines realen Leitungsbandes gegeben sein kann. Den Kern der Herleitung bildet die allgemein gültige mathematische Relation

$$\sum_i^N c_i^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_i^N c_i \right)^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j}^N (c_i - c_j)^2 \quad (5.4)$$

für beliebige  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  [Wen94]. Mit ihrer Hilfe können die harmonischen Anteile in der Hamilton-Funktion geeignet umgeschrieben werden:

$$\sum_i^N r_{k,i}^2 = R_k^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j}^N (r_{k,i} - r_{k,j})^2, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_i^N (p_{k,i} + eB \alpha_{k,k'} r_{k',i})^2 &= \frac{1}{N} (P_k + eBN \alpha_{k,k'} R_{k'})^2 \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j}^N (p_{k,i} - p_{k,j} + eB \alpha_{k,k'} (r_{k',i} - r_{k',j}))^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hierin bezeichnen  $R_k = (1/N) \sum_i^N r_{k,i}$  die Komponenten ( $k = x, y, z$ ) des Schwerpunktes und  $P_k = \sum_i^N p_{k,i}$  die des Schwerpunktimpulses. In einem homogenen Magnetfeld werden günstigerweise die kanonischen Impulse der einzelnen Elektronen  $\pi_{k,i} = p_{k,i} + eB \alpha_{k,k'} r_{k',i}$  und des Systemschwerpunktes  $\Pi_{k,i} = P_{k,i} + eNB \alpha_{k,k'} R_{k'}$  eingeführt (siehe Gleichung 2.71). Damit läßt sich die Hamilton-Funktion 5.2 in Schwerpunkt- und Relativbewegungen separieren:

$$H_{CM} = \frac{1}{2Nm^*} \sum_{k=x,y,z} \Pi_k^2 + \frac{Nm^*}{2} \sum_{k=x,y,z} \Omega_k^2 R_k^2, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} H_{rel} &= \frac{1}{4Nm^*} \sum_{i \neq j}^N \sum_{k=x,y,z} (\pi_{k,i} - \pi_{k,j})^2 \\ &+ \frac{m^*}{4N} \sum_{i \neq j}^N \sum_{k=x,y,z} \Omega_k^2 (r_{k,i} - r_{k,j})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Schreibt man weiterhin den Beitrag aufgrund des Strahlungfeldes entsprechend

$$H_{CM}^{(rad)} = \sum_{k=x,y,z} \frac{e}{m^*} a_k \Pi_k e^{-i\omega t} + c.c., \quad (5.9)$$

$$H_{rel}^{(rad)} = 0 \quad (5.10)$$

um, so stellt man fest, das dieser lediglich einen Schwerpunktbeitrag enthält. Damit wäre prinzipiell die zentrale Aussage des verallgemeinerten Kohnschen-Theorems gezeigt: Ein Dipolfeld koppelt in einem harmonisch

gebundenen System vieler identischer Teilchen lediglich an die (abseparierbare) Schwerpunktbewegung an. Da die Hamilton-Funktion der Schwerpunktbewegung bis auf die Skalierung der Masse  $M = Nm^*$  und der Ladung  $Q = -Ne$  (im kanonischen Impuls  $\vec{\Pi}$ ) mit der Teilchenzahl  $N$  dem Einteilchen-Problem äquivalent ist, ist die Aussage, daß die dipolaktiven Kollektivmoden bei den Einteilchen-Energiedifferenzen auftreten, ebenfalls bewiesen. Dazu muß lediglich noch verifiziert werden, daß die Zyklotronfrequenz der Schwerpunktbewegung  $\omega_{c,CM} = QB/M = eB/m^*$  mit der der Einteilchen-Bewegung übereinstimmt.

Für den Fall eines Q2DEG im senkrechten Magnetfeld gilt das Kohnsche Theorem nur für die Bewegung innerhalb der Ebene. Hier reduziert sich die für die Zyklotronresonanz relevante Hamilton-Funktion des Schwerpunktes auf die Form

$$H_{CM} = \frac{1}{2M} (\Pi_+ \Pi_- + \Pi_- \Pi_+) = \omega_c \left( \hat{A}^+ \hat{A} + \frac{1}{2} \right), \quad (5.11)$$

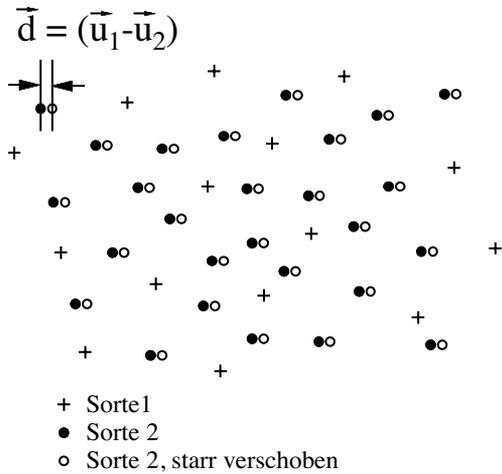
mit den kanonischen Impulskomponenten  $\Pi_{\pm} = (1/\sqrt{2}) (\Pi_x \pm i\Pi_y)$  in Zirkularform. Die Quantisierung der Bewegung erfolgt in kompletter Analogie zu den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 durch Einführung geeigneter Schwerpunkt-Leiteroperatoren  $\hat{A} = i(l_{CM}/\hbar) \Pi_-$  und  $\hat{A}^+ = -i(l_{CM}/\hbar) \Pi_+$ . Die darin auftauchende magnetische Länge der Schwerpunktbewegung  $l_{CM} = \sqrt{\hbar/(QB)} = l_m/\sqrt{N}$  ist gegenüber der Einteilchen-Länge  $l_m = \sqrt{\hbar/(eB)}$  entsprechend der Teilchenzahl herunterskaliert.

Unter Kenntnis des Kohnschen Theorems erscheint die Zyklotronresonanz eines wechselwirkenden Vielteilchen-Systems unter einem gänzlich anderen Licht: Im Gegensatz zum Einteilchen-Bild, das von einer inkohärenten Überlagerung aller möglichen Einteilchen-Übergänge ausgeht, handelt es sich bei der Zyklotronresonanz um eine maximal kollektive Schwerpunktanregung. Eine solche Schwerpunktanregung kann jedoch nur durch eine maximal kohärente Überlagerung sämtlicher möglicher Einteilchen-Resonanzen zustande kommen. In realen Elektronensystemen wird das (verallgemeinerte) Kohnsche Theorem infolge der Nichtparabolizitäten von Bandstruktur und Einschlußpotential, den Polaron-Effekten sowie durch die Streuung an Störstellen gebrochen. Dabei spaltet das Elektronengas in der Regel in Subsysteme mit gleichen oder nahezu gleichen Eigenschaften auf. Der Beschreibung der daraus resultierenden Mehrkomponentigkeit in realen Systemen ist Gegenstand der folgenden Abschnitte.

## 5.2.2 Mehrkomponentige Zyklotronresonanz - Klassische Beschreibung

Die hier gewählte klassische Beschreibung der Magneto-Plasmonresonanz in mehrkomponentigen Q2DEG baut direkt auf die Ausführungen in den Abschnitten 1.5.1 und 3.3 auf. Sie unterscheidet sich trotz qualitativ ähnlicher Aussagen signifikant von derjenigen in [App78], welche von einer Kopplung der Subsysteme über die Relaxation der Schwerpunktimpulse infolge von Streuprozessen ausgeht. Das Ergebnis der hier vorgestellten Theorie wird unter weitgehend identischen Annahmen und Näherungen gewonnen, wie sie auch in [Coo94, Hu,95b, Hu,95a] in quantenmechanischen Rechnungen angewendet werden. Im folgenden wird sich herausstellen, daß unter den gleichen Modellvoraussetzungen die Ergebnisse der klassischen und der quantenmechanischen Beschreibung vollkommen identisch sind.

Zunächst beschränken sich die nachfolgenden Betrachtungen auf ein zweikomponentiges System, wie es bei der spinaufgespaltenen Zyklotronresonanz vorliegt, und den homogenen Grenzfall  $\vec{q}_{\parallel} = 0$ . Zur Illustration der Zyklotronanregung in einem zweikomponentigen Q2DEG dient die Abbildung 5.5. Bei der darin schematisch dargestellten Anregungsform handelt es sich um eine starre Verschiebung der beiden Subsysteme gegeneinander. Diese Anregungsform impliziert eine Aufspaltung des Gesamtsystems in Subsys-



**Abbildung 5.5:** Klassische Zyklotronanregung eines zweikomponentigen Q2DEG.

teme, die eine miteinander verkoppelte Schwerpunktbewegung durchführen. Aufgrund der beiden Elektronensorten im Q2DEG, die leicht unterschiedliche Massen  $m_{K=1,2}^*$  aufweisen und/oder verschiedenen Subbändern  $i_{K=1,2}$  angehören, hat man die Verschiebungen  $\vec{u}_{K=1,2}(\vec{s}, t) = \vec{u}_K(\omega) e^{-i\omega t}$  für jedes Subsystem separat anzusetzen. Solche Verschiebungen resultieren aufgrund eines von außen angreifenden homogenen Strahlungsfeldes  $\vec{E}(\vec{s}, t) = \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t}$ . Werden die beiden Teilsysteme infolge der Anregung um den Differenzvektor  $\vec{d} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  getrennt, so führt dies gegenüber dem Gleichgewichtsfall mit  $\vec{d} = 0$  zu einer Energieänderung  $\Delta U = U(\vec{d}) - U(0)$ . Im Falle der allgemeinen Paarwechselwirkungen  $W_{K,K'}(s)$ , mit  $s = |\vec{s}|$  als dem Abstand zwischen zwei Elektronen, ergibt sich die innere potentielle Energie  $U(\Delta \vec{u})$  durch direkte Aufsummation gemäß

$$U(\vec{d}) = \frac{1}{2} \sum_{k_1 \neq l_1}^{N_1} W_{1,1}(|\vec{s}_{k_1} - \vec{s}_{l_1}|) + \frac{1}{2} \sum_{k_2 \neq l_2}^{N_2} W_{2,2}(|\vec{s}_{k_2} - \vec{s}_{l_2}|) + \sum_{k_1, l_2}^{N_1, N_2} W_{1,2}(|\vec{s}_{k_1} - \vec{s}_{l_2} - \vec{d}|) . \quad (5.12)$$

Die Indizes an den Summationsindizes  $k_K, l_K$  symbolisieren die Zugehörigkeit zu jeweils einer der beiden Elektronenspezies ( $K = 1, 2$ ) mit Teilchenzahl  $N_K$ . Im Grenzfall kleiner Verrückungen wird der dritte Summenterm bis zur Ordnung in  $\vec{d}^2$  nach Taylor approximiert. Die Energieänderung aufgrund der Verrückung lautet damit unter Benutzung der Abkürzung  $\vec{s}_{k_1, l_2} = \vec{s}_{k_1} - \vec{s}_{l_2}$

$$\Delta U(\vec{d}) \approx \frac{1}{2} \sum_{k_1, l_2}^{N_1, N_2} \left\{ \frac{1}{s} \frac{dW_{1,2}(s)}{ds} \left[ \vec{d}^2 - 2\vec{d}\vec{s} - \left( \frac{\vec{d}\vec{s}}{s} \right)^2 \right] + \frac{d^2 W_{1,2}(s)}{ds^2} \left( \frac{\vec{d}\vec{s}}{s} \right)^2 \right\} \Bigg|_{\vec{s}=\vec{s}_{k_1, l_2}} . \quad (5.13)$$

In einem weiteren Schritt wird in Übereinstimmung mit [Coo94, Hu,95b, Hu,95a] die Gleichgewichtsverteilung der Elektronen in der Ebene durch eine reguläre Anordnung in Form eines hexagonalen oder kubischen Wigner-Kristalls approximiert. Ferner wird eine statistische Verteilung der beiden Elektronensorten auf die Gitterplätze angenommen. Aufgrund der zufälligen Verteilung der beiden Elektronensorten auf die Gitterplätze gelten die Identitäten  $\sum_{k_1, l_2} \cos(\angle(\vec{d}, \vec{s}_{k_1, l_2})) = 0$  und  $\sum_{k_1, l_2} \cos^2(\angle(\vec{d}, \vec{s}_{k_1, l_2})) = 1/2$ . Mit diesen reduziert sich die Gleichung 5.13 auf

$$\Delta U(\vec{d}) \approx \sum_{k_1, l_2}^{N_1, N_2} \left\{ \frac{1}{s} \frac{dW_{1,2}(s)}{ds} + \frac{d^2 W_{1,2}(s)}{ds^2} \right\} \Bigg|_{\vec{s}=\vec{s}_{k_1, l_2}} \frac{\vec{d}^2}{4} . \quad (5.14)$$

Im Grenzfall eines strengen 2DEG ist für sämtliche Paarwechselwirkungen die Coulomb-Wechselwirkung

$W_{K,K'}(s) = W(s) = e^2/(4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}s)$  einzusetzen. Durch eine Ewald-Summation über die Gitterplätze bekommt man das Ergebnis

$$\Delta U(\vec{d}) \approx \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}} \frac{C_{2D}}{r_s^3} \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \frac{\vec{d}^2}{2} . \quad (5.15)$$

Darin steht  $r_s = 1/\sqrt{\pi N_S}$  für den mittleren Teilchenabstand, wobei die Gesamtdichte  $N_S$  durch  $N_S = N_{S,1} + N_{S,2}$  mit den Partialdichten  $N_{S,K} = N_K/A$  gegeben ist ( $A$ : Probenfläche). Die dimensionslose Konfigurationskonstante  $C_{2D}$  ist über  $C_{2D} = r_s^3 \sum_{k=2}^{\infty} 1/s_k^3$  definiert und hängt prinzipiell von der Gitterstruktur ab. Die Summation ist dabei von einer beliebigen Aufgitterposition  $k = 1$  aus über sämtliche Gitterplätze  $k = 2, 3, \dots$  durchzuführen. Die Konfigurationskonstanten sind für eine hexagonale und eine kubische Anordnung nahezu identisch und bewegen sich um  $C_{2D} \approx 1.6$  [Hu,95b]. Anzumerken ist noch, daß die Abhängigkeit vom Teilchenabstand  $\Delta U \propto 1/r_s^3$  charakteristisch für eine Dipol-Dipol-Wechselwirkung ist.

In einem Q2DEG wird die Coulomb-Wechselwirkung gemäß

$$W_{i,j}(s) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}} \int_0^\infty dq_{\parallel} J_0(q_{\parallel}s) F_{i,j}^{(c)}(q_{\parallel}) \quad (5.16)$$

aufgrund der Quantisierung in Subbänder mit Subband-Indizes  $i, j = 0, 1, \dots$  modifiziert, wobei  $J_0(x)$  für die Bessel-Funktion 0-ter Ordnung der ersten Gattung steht [Cha95]. Die darin auftretenden Intra- ( $i = j$ ) und Intersubband-Formfaktoren ( $i \neq j$ ) der direkten Coulomb-Wechselwirkung  $F_{i,j}^{(c)}$  sind bei Vernachlässigung der Bildladungseffekte über

$$F_{i,j}^{(c)}(q_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' |\phi_i(z)|^2 |\phi_j(z')|^2 \exp(-q_{\parallel}|z - z'|) \quad (5.17)$$

definiert. In diesem allgemeinen Fall sind die Konfigurationskonstanten  $C_{i,j}$  durch

$$C_{i,j} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}r_s^3}{e^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s} \frac{dW_{i,j}(s)}{ds} + \frac{d^2W_{i,j}(s)}{ds^2} \right\} \Big|_{s=s_k} \quad (5.18)$$

gegeben und hängen von den Subband-Indizes ab.

Aufgrund der Energieänderung  $\Delta U$  infolge der Verrückung  $\vec{d}$  werden Rückstellkräfte auf die einzelnen Elektronen im System induziert. Unter Benutzung von  $\vec{d}^2 = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^*$  berechnet sich die Kraft pro Teilchen  $\vec{f}_K$  im Teilsystem  $K$  in weitgehender Analogie zu Gleichung 3.51 gemäß

$$\vec{f}_K = -\frac{1}{N_K} \frac{\partial \Delta U}{\partial \vec{u}_K^*} = -\omega_I \omega_{c,K} m_K^* \frac{N_{S,K'}}{N_S} (\vec{u}_K - \vec{u}_{K'}) , \quad K' \neq K . \quad (5.19)$$

In der angegebenen Form ist die in [Hu,95b] definierte Kopplungsstärke

$$\omega_I = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}} \frac{C_{i_K, i_{K'}}}{r_s^3} \frac{1}{B} \quad (5.20)$$

explizit heraussepariert und die Zyklotronfrequenzen der beiden Subsysteme sind durch  $\omega_{c,K} = eB/m_K^*$  symbolisiert. In einer zum Abschnitt 3.3 vollkommen äquivalenten Vorgehensweise werden die Drudeschen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Um eine Erweiterbarkeit auf die mehrkomponentige Magneto-Plasmonresonanz offen zu halten, wird ein infinitesimal kleiner Wellenvektor  $\vec{q}_{\parallel} \rightarrow 0$  angenommen und die Verrückungen werden

in longitudinale und transversale Komponenten zu diesem zerlegt. Die Bewegungsgleichungen der gekoppelten Zyklotronresonanz eines zweikomponentigen Q2DEG lauten damit schließlich in kompakter Matrixform

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_1} + f_2 \omega_{c,1}\omega_I & i\omega\omega_{c,1} & -f_2 \omega_{c,1}\omega_I & 0 \\ -i\omega\omega_{c,1} & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_1} + f_2 \omega_{c,1}\omega_I & 0 & -f_2 \omega_{c,1}\omega_I \\ -f_1 \omega_{c,2}\omega_I & 0 & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_2} + f_1 \omega_{c,2}\omega_I & i\omega\omega_{c,2} \\ 0 & -f_1 \omega_{c,2}\omega_I & -i\omega\omega_{c,2} & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_2} + f_1 \omega_{c,2}\omega_I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{l,1} \\ u_{t,1} \\ u_{l,2} \\ u_{t,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{e}{m_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{m_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{m_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e}{m_2^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l \\ E_t \\ E_l \\ E_t \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Hierin wird für jedes Subsystem ein phänomenologischer Streuterm mit Streuzzeit  $\tau_K$  berücksichtigt und dessen relative Besetzung mit  $f_K = N_{S,K}/N_S$  abgekürzt. Durch den Übergang von kartesischen zu Zirkularkoordinaten entsprechend der Transformation 1.28 gelangt man schließlich zu der geeigneteren Form

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_1} + \omega_{c,1}\omega + f_2 \omega_{c,1}\omega_I & 0 & -f_2 \omega_{c,1}\omega_I \\ 0 & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_1} - \omega_{c,1}\omega + f_2 \omega_{c,1}\omega_I & 0 \\ -f_1 \omega_{c,2}\omega_I & 0 & -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_2} + \omega_{c,2}\omega + f_1 \omega_{c,2}\omega_I \\ 0 & -f_1 \omega_{c,2}\omega_I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{+,1} \\ u_{-,1} \\ u_{+,2} \\ u_{-,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{e}{m_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{m_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{m_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e}{m_2^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_+ \\ E_- \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

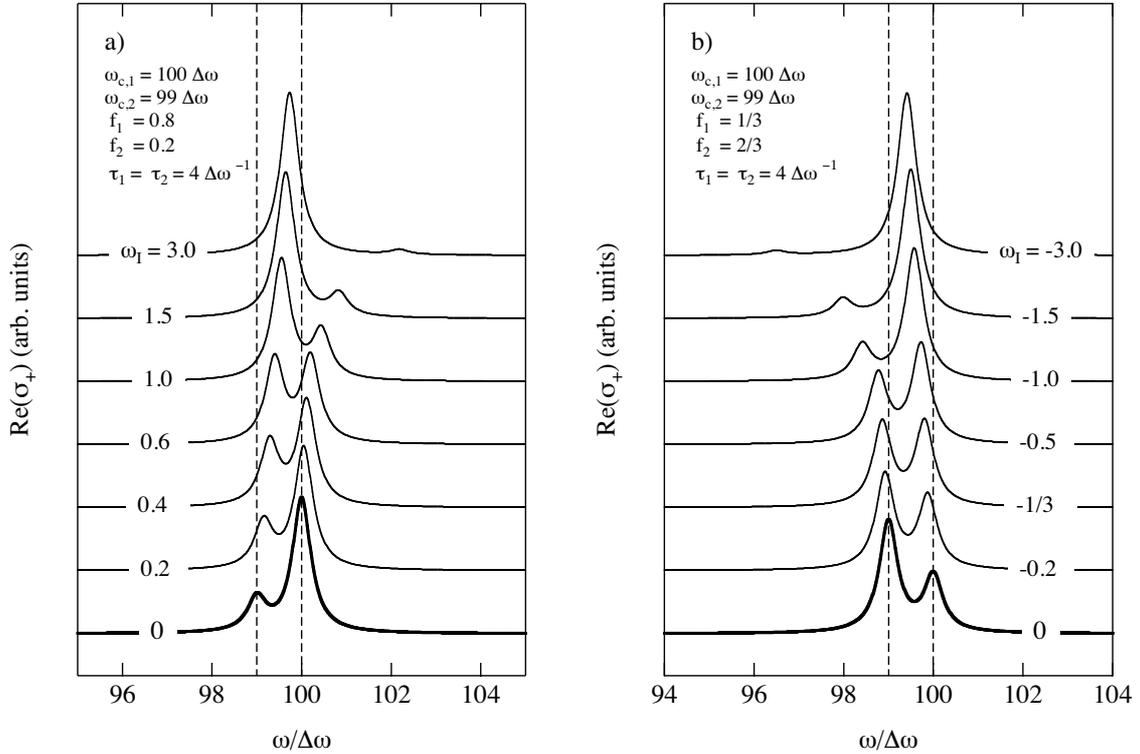
Der vierdimensionale Leitfähigkeitsmatrix  $\Sigma(\omega)$  ergibt sich in weitgehender Analogie zu Gleichung 1.30 als

$$\Sigma(\omega) = -i\omega e N_S \mathbf{f} \mathbf{D}_{+/-}^{-1}(\omega) \mathbf{Q}. \quad (5.23)$$

Darin ist  $\mathbf{D}_{+/-}(\omega)$  die dynamische Matrix in Zirkularform entsprechend der linken Seite und  $\mathbf{Q}$  die spezifische Ladungsmatrix entsprechend der rechten Seite von Gleichung 5.22. Die diagonale Besetzungsmatrix  $\mathbf{f}$  hat wie die Ladungsmatrix  $\mathbf{Q}$  Diagonalgestalt. Die Matrixelemente auf der Diagonalen lauten  $e/m_K^*$  für die Ladungsmatrix und  $f_K$  für die Besetzungsmatrix. Zum eigentlich relevanten (zweidimensionalen) Leitfähigkeitstensor  $\sigma(\omega)$  gelangt man zuletzt durch geeignete Zusammenfassung der Komponenten von  $\Sigma$  entsprechend

$$\sigma_{+/-}(\omega) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{13} + \Sigma_{31} + \Sigma_{33} & \Sigma_{12} + \Sigma_{14} + \Sigma_{32} + \Sigma_{34} \\ \Sigma_{21} + \Sigma_{23} + \Sigma_{41} + \Sigma_{43} & \Sigma_{22} + \Sigma_{24} + \Sigma_{42} + \Sigma_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Zur Illustration der dargelegten Ausführungen sind in der Abbildung 5.6 einige Leitfähigkeitsverläufe für die einzig aktive Polarisation  $E_+$  dargestellt, die nach den Gleichungen 5.22 bis 5.24 berechnet wurden. Hierbei ist die durch Gleichung 5.20 gegebene Einschränkung auf ein verdünntes Q2DEG (vergleiche [Hu,95b]) aufgehoben. Die Wechselwirkungsfrequenz  $\omega_I$  wird deshalb im weiteren als phänomenologische Anpaßgröße behandelt, wobei sowohl positive als auch negative Werte zugelassen werden. Das zur Herleitung benutzte



**Abbildung 5.6:** Klassisch berechnete Zyklotronresonanzen eines zweikomponentigen Q2DEG. Die Spektren in den Teilfiguren a) und b) zeigen modellhafte Szenarien, die im extrem verdünnten Q2DEG relevant sind beziehungsweise später im IQHE beim Füllfaktor  $\nu = 3$  relevant werden. Die Frequenzen sind in Einheiten der Aufspaltung  $\Delta\omega$  angegeben.

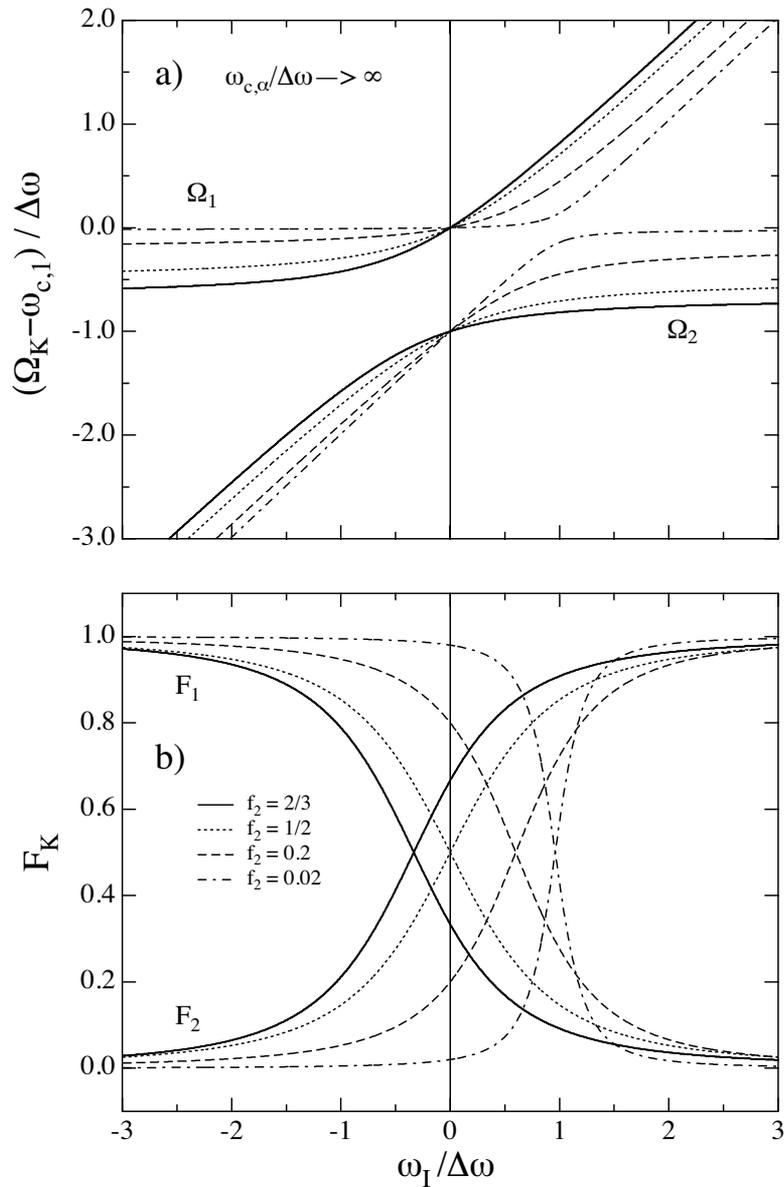
Modell liefert dabei durchweg positive  $\omega_I$ . Die Anregungsfrequenzen ergeben sich wiederum aus den Nullstellen der dynamischen Matrix gemäß  $\det(\mathbf{D}_{+/-}(\omega = \Omega_K)) = 0$ . In analytischer Form ausgedrückt lauten die Bestimmungsgleichungen für die Eigenfrequenzen im Grenzfall vernachlässigbarer Dämpfungen

$$0 = \omega^2 [\omega^3 - \omega^2(\omega_{c,1} + \omega_{c,2}) + \omega(\omega_{c,1}\omega_{c,2} - f_1\omega_{c,2}\omega_I - f_2\omega_{c,1}\omega_I) + \omega_{c,1}\omega_{c,2}\omega_I] \cdot [\omega^3 + \omega^2(\omega_{c,1} + \omega_{c,2}) + \omega(\omega_{c,1}\omega_{c,2} - f_1\omega_{c,2}\omega_I - f_2\omega_{c,1}\omega_I) - \omega_{c,1}\omega_{c,2}\omega_I] . \quad (5.25)$$

Die von Null verschiedenen Eigenfrequenzen ergeben sich jeweils durch Lösen einer der beiden kubischen Gleichungen

$$0 = \omega^3 \mp \omega^2(\omega_{c,1} + \omega_{c,2}) + \omega(\omega_{c,1}\omega_{c,2} - f_1\omega_{c,2}\omega_I - f_2\omega_{c,1}\omega_I) \pm \omega_{c,1}\omega_{c,2}\omega_I . \quad (5.26)$$

Die beiden Gleichungen liefern spiegelsymmetrische Frequenzen  $\Omega_{K=1,2,3} > 0$  und  $\Omega_{K=4,5,6} = -\Omega_{K=1,2,3}$ . Zwei davon liegen jeweils in der Nähe von  $\omega_{c,1} \approx \omega_{c,2}$  beziehungsweise  $-\omega_{c,1} \approx -\omega_{c,2}$  und stellen die gekoppelten Zyklotronresonanzen der aktiven beziehungsweise inaktiven Polarisation dar. Das Wesen der jeweils dritten Resonanz ist Gegenstand der Betrachtungen im Abschnitt 5.2.4. In den Abbildungen 5.7 a) und b) sind die Energien und Oszillatorstärken der klassisch berechneten Kollektivmoden in geeigneter Darstellung als Funktion des Verhältnisses zwischen der Kopplungsfrequenz  $\omega_I$  und der Resonanzaufspaltung  $\Delta\omega = \omega_{c,1} - \omega_{c,2} > 0$  für verschiedene Besetzungen  $f_2$  und  $f_1 = 1 - f_2$  dargestellt. Es wird der Grenzfall  $\omega_{c,K} \gg \Delta\omega$  betrachtet und die Streuung ist vernachlässigt. Beim Gang der Berechnung werden zunächst



**Abbildung 5.7:** Klassisch berechnete Frequenzen und Oszillatorstärken der kollektiven Zyklotronresonanz zweikomponentiger Q2DEG als Funktion der Kopplungsenergie im Grenzfall großer Zyklotronfrequenzen.

die Anregungsenergien der kollektiven Zyklotronresonanzen  $\Omega_K$  direkt durch numerische Nullstellensuche an der Säkulargleichung 5.26 bestimmt. Diese werden daraufhin in die dynamische Leitfähigkeit, die sich aus den Gleichungen 5.22 bis 5.24 unter Voraussetzung einer sehr großen aber endlichen Streuzeit  $\tau = \tau_1 = \tau_2$  ergibt, eingesetzt und die Werte  $\sigma(\Omega_K)$  an den Resonanzpositionen bestimmt. Die Oszillatorstärken ergeben sich zuletzt aus diesen über die Vorschrift  $F_K = \sigma(\Omega_K) / [\sigma(\Omega_1) + \sigma(\Omega_2)]$ .

In den sich unmittelbar anschließenden Unterabschnitten werden einige Erweiterungen der dargelegten Theorie behandelt.

### 5.2.2.1 Erweiterung auf beliebig viele Komponenten

Die Erweiterung auf eine beliebige Anzahl  $K$  von Subsystemen mit Komponentenindex  $K = 1, 2, \dots, M_K$  ist nach den vorausgehenden Ausführungen konzeptionell einfach:

Entsprechend der Anzahl an Komponenten besitzen die Bewegungsgleichungen die Dimensionalität  $2M_K$ . Ferner treten anstatt einer Kopplungsfrequenz  $\omega_I$  im zweikomponentigen Fall im allgemeinen  $M_\omega = \sum_{l=1}^{M_K-1} l$  paarweise Kopplungsfrequenzen  $\omega_{I,K K'}$ ,  $K \neq K'$  zwischen den jeweils verschiedenen Subsystemen auf. Die von Null verschiedenen Komponenten der dynamischen Matrix  $D_{+/-}(\omega)$  lauten allgemein

$$\begin{aligned} D_{2K-1\ 2K-1} &= -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_K} + \omega_{c,K}\omega + \omega_{c,K} \sum_{K' \neq K}^{M_K} f_{K'} \omega_{I,K K'} , \\ D_{2K\ 2K} &= -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_K} - \omega_{c,K}\omega + \omega_{c,K} \sum_{K' \neq K}^{M_K} f_{K'} \omega_{I,K K'} , \\ D_{2K-1\ 2K'-1} &= D_{2K\ 2K'} = -\omega_{c,K} f_{K'} \omega_{I,K K'} . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die Diagonalelemente der spezifischen Ladungsmatrix und der Besetzungsmatrix sind durch

$$Q_{2K-1\ 2K-1} = Q_{2K\ 2K} = \frac{e}{m_K^*} = \frac{\omega_{c,K}}{B} \quad (5.28)$$

beziehungsweise

$$f_{2K-1\ 2K-1} = f_{2K\ 2K} = f_K \quad (5.29)$$

gegeben. Die  $2M_K \times 2M_K$ -dimensionale Leitfähigkeitsmatrix  $\Sigma$  wird wiederum nach der Vorschrift 5.23 berechnet. Zuletzt werden die Komponenten von  $\Sigma$  zum zweidimensionalen Magneto-Leitfähigkeitstensor

$$\sigma_{+/-}(\omega) = \sum_{K, K'} \begin{pmatrix} \Sigma_{2K-1\ 2K'-1} & \Sigma_{2K-1\ 2K'} \\ \Sigma_{2K\ 2K'-1} & \Sigma_{2K\ 2K'} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

zusammengefaßt.

### 5.2.2.2 Semiklassische Erweiterung

In einem starken Magnetfeld kondensieren die Elektronen in einem Q2DEG nach den Ausführungen in den vorausgehenden Kapiteln auf Landau-Niveaus. Dieser Umstand wird in einer klassischen Beschreibung jedoch in keiner Weise berücksichtigt. In einer erweiterten semiklassischen Betrachtungsweise kann jedoch der Landau-Quantisierung durch den Aspekt der Mehrkomponentigkeit Rechnung getragen werden. Dazu werden die Elektronen, die ein gemeinsames Landau-Niveau  $(i, n, \sigma)$  besetzen und zu einem mit den Niveaubesetzungen verträglichen aktiven Zyklotronübergang  $(i, n, \sigma) \rightarrow (i, n+1, \sigma)$  beitragen, zu einem Subsystem zusammengefaßt. Die effektive Besetzung

$$N_{S,K} = N_{LL}(n_K + 1) [\nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i_K, n_K+1, \sigma_K}] \quad (5.31)$$

eines solchen Subsystems mit Index  $K$  ist dabei durch die gewichtete Oszillatorstärke des jeweiligen Übergangs gegeben, der durch die Quantenzahlen  $(i_K, n_K, \sigma_K)$  des Ausgangsniveaus gekennzeichnet ist. Aufgrund der Summenregel 2.82 für die Oszillatorstärken gilt die geforderte Identität  $N_S = \sum_{K=1}^{M_K} N_{S,K}$ . Sämtliche

hier verwendeten Größen und Symbole sind, soweit sie nicht explizit erklärt sind, in den vorausgehenden Kapiteln beschrieben. Die Übergangsfrequenz  $\omega_{c,K} = \omega_c(i_K, n_K, \sigma_K)$  hängt aufgrund der Nichtparabolizität des Leitungsbandes prinzipiell von sämtlichen Quantenzahlen ab (siehe Abschnitt 2.6). Bei Berücksichtigung der Polaron-Kopplung sind für die Oszillatorstärken und die Übergangsfrequenzen die entsprechenden modifizierten Ausdrücke aus Abschnitt 4.1 heranzuziehen.

### 5.2.2.3 Erweiterung auf langwellige Magneto-Plasmonen

Die Ausdehnung der mehrkomponentigen Zyklotronresonanz auf die mehrkomponentige langwellige Magneto-Plasmonresonanz ist auf direkte Weise möglich:

Hierzu wird die dynamische Matrix  $\mathbf{D}_{+/-}(\omega)$ , die durch die Beziehungen 5.27 gegeben ist, um die Plasmon-Kopplungsmatrix  $\Delta\mathbf{D}_{+/-}(q_{\parallel})$  entsprechend

$$\mathbf{D}_{+/-}(q_{\parallel}, \omega) = \mathbf{D}_{+/-}(\omega) + \Delta\mathbf{D}_{+/-}(q_{\parallel}) \quad (5.32)$$

erweitert. Die Matrix  $\Delta\mathbf{D}_{+/-}(q_{\parallel})$  ergibt sich aus einer Betrachtung, die der in Abschnitt 3.3 vorgeführten weitgehend analog ist. Sie hat in Komponenten die Form

$$\Delta D_{2K-1\ 2K'-1} = \Delta D_{2K\ 2K'} = \Delta D_{2K-1\ 2K'} = \Delta D_{2K\ 2K'-1} = f_{K'} \frac{\omega_{pl,K\ K'}^2}{2} . \quad (5.33)$$

Die darin auftretenden allgemeinen Plasmonfrequenzen  $\omega_{pl,K\ K'}$  sind über

$$\omega_{pl,K\ K'}^2(q_{\parallel}) = \frac{e^2 N_S}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} m_K^*} q_{\parallel} F_{i_K, i_{K'}}^{(c)}(q_{\parallel}) \quad (5.34)$$

definiert, wobei die allgemeinen Formfaktoren  $F_{i,j}^{(c)}(q_{\parallel})$  in der Gleichung 5.17 angegeben sind. Die Berechnung des dynamischen zweidimensionalen Leitfähigkeitstensors  $\sigma_{+/-}(q_{\parallel}, \omega)$  erfolgt wiederum über die Beziehungen 5.23 und 5.30.

### 5.2.2.4 Erweiterung um harmonische Rückstellkräfte

Die vorgestellte Theorie ist ebenfalls leicht um harmonische Rückstellkräfte, die separat auf die einzelnen Komponenten des Q2DEG wirken, erweiterbar. Solche Rückstellkräfte können mehrere Ursachen haben. Einmal können sie in einem mesoskopischen Q2DEG aufgrund eines näherungsweise harmonischen Einschlußpotentials zustande kommen [All83]. In Q2DEG allerdings, die als unendlich ausgedehnt angesehen werden können, spielen Einschlußeffekte keine Rolle. Zum anderen führen bei langreichweitigen geladenen Streuzentren, die in realen Systemen vorhanden sind, die Auslenkungen  $\vec{u}_K$  gegenüber dem statischen Störstellenpotential  $V_{imp}(\vec{s}, z)$  zu Energieänderungen und damit Rückstellkräften [Ant90, Zar91, Mer96].

Die Änderung der inneren Energie  $\Delta U_{imp}$  aufgrund von starren Verschiebungen der Subsysteme gegenüber den Streuzentren ist durch

$$\Delta U_{imp} = \sum_{K=1}^{M_K} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s \int_{-\infty}^{\infty} dz N_{S,K}(\vec{s}) |\phi_{i_K}(z)|^2 [V_{imp}(\vec{s} + \vec{u}_K, z) - V_{imp}(\vec{s}, z)] \quad (5.35)$$

gegeben. Darin bezeichnet  $N_{S,K}(\vec{s})$  die in der Ebene aufgrund der Störstellen ortsabhängige Gleichgewichtsdichte für die Komponente  $K$  mit Mittelwert  $N_{S,K}$ . Durch Taylor-Entwicklung des Ausdrucks bis einschließlich

der quadratischen Terme und unter Ausnutzung der aufgrund der Zufälligkeit der Störstellenverteilung gegebenen Isotropie in der Ebene bekommt man näherungsweise für die Änderung der inneren Energie die harmonische Form

$$\Delta U_{imp} \approx \sum_{K=1}^{M_K} \frac{N_K m_K^*}{2} \Omega_{imp,K}^2 \vec{u}_K^* \vec{u}_K, \quad (5.36)$$

mit

$$\Omega_{imp,K}^2 = \frac{1}{N_K m_K^*} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s \int_{-\infty}^{\infty} dz N_{S,K}(\vec{s}) |\phi_{i_K}(z)|^2 \frac{\partial^2 V_{imp}(\vec{s}, z)}{\partial x^2}. \quad (5.37)$$

Gemäß den Ausführungen im Vorfeld ergibt sich daraus ein weiterer diagonaler Beitrag  $\Delta D_{+/-}^{imp}$  zur dynamischen Matrix infolge der Störstellen mit Elementen

$$\Delta D_{2K^2-1, 2K-1}^{imp} = \Delta D_{2K, 2K}^{imp} = \Omega_{imp,K}^2. \quad (5.38)$$

Im Falle verschwindender Kopplung werden die Einteilchen-Zyklotronresonanzen infolge der Rückstellkräfte entsprechend

$$\tilde{\omega}_{c,K} \approx \omega_{c,K} \left( 1 + \frac{\Omega_{imp,K}^2}{\omega_{c,K}^2} \right) \quad (5.39)$$

zu höheren Energien verschoben, wobei  $\omega_{c,K}^2 \gg \Omega_{imp,K}^2$  vorausgesetzt wird. Die verschobenen Zyklotronmoden werden durch die Wechselwirkungen zu Hybridmoden verkoppelt, die dann gegenüber einem ideal sauberen Q2DEG ebenfalls zu höheren Werten hin verschobene Resonanzfrequenzen aufweisen. Infolge der Rückstellkraft treten zusätzliche Einteilchen-Moden (disorder modes) bei Frequenzen

$$\omega_{imp,K} \approx \mp \frac{\Omega_{imp,K}^2}{\omega_{c,K}} \quad (5.40)$$

in Erscheinung, wobei das Minuszeichen die zyklotroninaktive und das Pluszeichen die zyklotronaktive Polarisationskomponente kennzeichnet. Derartige Moden, beziehungsweise die aus ihnen resultierenden Kollektivmoden, besitzen typischerweise eine Magnetfelddispersion  $\propto 1/B$ . Wie Berechnungen der Leitfähigkeit zeigen, tragen sie jedoch keinerlei Oszillatorstärke bei Dipolanregung, weshalb sie in der FIR-Absorption generell nicht zu erwarten sind.

Aufgrund des Einflusses von Störstellen werden in gezielt verunreinigten Q2DEG häufig Blauverschiebungen und unter bestimmten Umständen auch Aufspaltungen der Zyklotronresonanz beobachtet [Ric89, Wig90, Wid98]. Die experimentellen Befunde und ihre Interpretation sind dabei oftmals in Einklang mit dem oben dargelegten Bild bindender harmonischer Rückstellkräfte, die aufgrund des Störstellenpotentials wirken [Zar91, Mer96].

### 5.2.3 Mehrkomponentige Zyklotronresonanz - Quantenmechanische Beschreibung

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die allgemeine Form eines Effektiv-Hamilton-Operators für die mehrkomponentige Zyklotronresonanz aufzustellen, der alle möglichen Kopplungen in allgemeiner Form beinhaltet. Dabei bleiben, vom phänomenologischen Standpunkt aus betrachtet, die Größen der auftretenden Kopplungsmatrixelemente zwischen den einzelnen Zyklotronübergängen zunächst unbestimmt. Der gewählte Ansatz gründet im wesentlichen auf dem Kohnschen Theorem und der Formäquivalenz bestehender Beschreibungen im extrem verdünnten Q2DEG nach [Hu,95b, Hu,95a] und im Regime des IQHE nach [Mac89].

Als Voraussetzung für die Aufstellung eines Effektiv-Hamilton-Operators wird von einer schwachen sphärischen Nichtparabolizität, wie sie in GaAs-Systemen in guter Näherung vorliegt, ausgegangen. Dabei bleiben die Landau-Orbitale als Einteilchen-Basen erhalten und lediglich die Einteilchen-Zyklotronresonanzen werden durch die Nichtparabolizität oder die Elektron-Phonon-Kopplung modifiziert. Infolge dessen sind bis auf die Einteilchen-Übergangsenergien sämtliche Matrixelemente, die im Effektiv-Hamilton-Operator auftreten, im nichtparabolischen und parabolischen Fall identisch. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß im Grenzfall hoher Magnetfelder die Mischung der Landau-Niveaus infolge der Elektron-Elektron-Wechselwirkung vernachlässigt werden kann. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung wirkt sich in dieser Näherung lediglich auf die Aufpunktfreiheitsgrade des Q2DEG und nicht auf die Orbitale um die Aufpunkte, welche als unendlich steif angesehen werden, aus.

Die Forderung nach Erfüllung des Kohnschen Theorems für den Übergang vom nichtparabolischen zum parabolischen System stellt an das charakteristische Polynom der Hamilton-Matrix  $\hat{H}^{CR}$ , deren Dimensionalität durch die Anzahl der erlaubten Einteilchen-Zyklotronübergänge  $M_K$  gegeben ist, die Bedingung

$$\lim_{\omega_c, K \rightarrow \omega_c, \forall K} \det \left( \hat{H}^{CR} - \Omega \hat{1} \right) = (\Omega - \omega_c) P_{M_K - 1}(\Omega) . \quad (5.41)$$

In Worten ausgedrückt bedeutet dieser Ausdruck nichts anderes, als daß zumindest eine der  $M_K$  Kollektivmoden  $\Omega_K$  des Systems im parabolischen Grenzfall explizit bei der Einteilchen-Übergangsfrequenz  $\omega_c$  auftritt. Dabei steht  $P_n(x)$  für ein allgemeines Polynom vom Grad  $n$ , in dessen Koeffizienten die Matrixelemente von  $\hat{H}^{CR}$  eingehen. Bei beliebigen Kopplungen zwischen den Übergängen gibt es in der Regel nur eine Kollektivmode bei der Einteilchen-Frequenz  $\omega_c$ , die im folgenden als Kohn-Mode bezeichnet wird. Der entsprechende Anregungszustand wird daher im weiteren durch  $|\text{Kohn}\rangle$  symbolisiert. Die Kohn-Mode stellt nach Abschnitt 5.2.1 im parabolischen Fall die Schwerpunktanregung des Gesamtsystems dar und trägt die maximale Oszillatorstärke  $F_{\text{Kohn}} = N_{LL}\nu$ , mit dem Landau-Entartungsgrad  $N_{LL}$  und dem Gesamtfüllfaktor  $\nu$ . Die Ausschöpfung der maximalen Oszillatorstärke hat zur Folge, daß der Kohn-Zustand gemäß

$$|\text{Kohn}\rangle \parallel \hat{\Pi}_+ |\text{ground}\rangle \quad (5.42)$$

durch direkte Anwendung des Dipoloperators  $\hat{\Pi}_+$  auf den Grundzustand  $|\text{ground}\rangle$  erzeugt wird. Entsprechend ist unter seiner Kenntnis, auch wenn er im nichtparabolischen System keinen Eigenzustand des Effektiv-Hamilton-Operators mehr darstellt, die Oszillatorstärke einer beliebigen Kollektivmode  $|X\rangle$  durch Projektion

$$F_X = |\langle \text{Kohn} | X \rangle|^2 \quad (5.43)$$

auf diesen gegeben. Insbesondere gilt dies auch für die Zustände

$$|K\rangle = \begin{cases} 1, & \text{Komponente } K \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.44)$$

die in Form eines Spaltenvektors im Zustandsraum den Teilraum der ungekoppelten Zyklotronanregungen aufspannen. Diese Zustände stellen Anregungsformen dar, bei denen alle Elektronen, die ein gemeinsames Landau-Niveau bevölkern und die nahezu gleiche Einteilchen-Übergangsenergien aufweisen, jeweils miteinander einen gemeinsamen Zyklotronübergang durchführen. Die relative Oszillatorstärke  $f_K$  einer ungekoppelten Mode ist dabei gemäß dem Einteilchen-Bild durch

$$f_K = (n_K + 1) \frac{\nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i_K, n_K + 1, \sigma_K}}{\nu} \quad (5.45)$$

gegeben. Damit läßt sich die Kohn-Mode in dieser Basis schließlich unter Benutzung von Beziehung 5.43 als

$$|\text{Kohn}\rangle = \sum_K \sqrt{f_K} |K\rangle \quad (5.46)$$

darstellen.

Mit den dargelegten Grundlagen kann man nun die allgemeine Effektiv-Hamilton-Matrix der gekoppelten Zyklotronresonanzen eines Q2DEG mit beliebig vielen Komponenten konstruieren:

Zuerst geht man von einem zweikomponentigen System aus. Der Kohn-Zustand  $|\text{Kohn}\rangle$  und der auf ihm orthogonale nicht-dipolaktive Zustand  $|\text{dark}\rangle$  haben nach Gleichung 5.46 die Gestalt

$$|\text{Kohn}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{f_1} \\ \sqrt{f_2} \end{pmatrix}, \quad |\text{dark}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{f_2} \\ -\sqrt{f_1} \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Zerlegt man ferner den Effektiv-Hamilton-Operator in einen diagonalen Einteilchen-Anteil

$$\hat{H}_{sp}^{CR} = \begin{pmatrix} \omega_{c,1} & 0 \\ 0 & \omega_{c,2} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_{c,K} \rightarrow \omega_c \quad (5.48)$$

und einen nicht-diagonalen Kopplungsanteil  $\hat{H}_I^{CR}$  entsprechend  $\hat{H}^{CR} = \hat{H}_{sp}^{CR} + \hat{H}_I^{CR}$ , so läßt sich der letzte Anteil nach der Vorschrift

$$\hat{H}_I^{CR} = \omega_I (|\text{Kohn}\rangle \quad |\text{dark}\rangle) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (|\text{Kohn}\rangle \quad |\text{dark}\rangle)^T = \omega_I \begin{pmatrix} f_2 & -\sqrt{f_1 f_2} \\ -\sqrt{f_1 f_2} & f_1 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

konstruieren. Bei der Konstruktion wird die Tatsache ausgenutzt, daß wegen der Forderung 5.41 die Kopplungsmatrix in der Basis 5.47 Diagonalgestalt annimmt und wegen des abseparierten Einteilchen-Anteils für den Kohn-Zustand den Eigenwert 0 besitzt. In der Transformationsmatrix  $\hat{T} = (|\text{Kohn}\rangle \quad |\text{dark}\rangle)$  sind die Spaltenvektoren direkt aneinander gefügt. Sie vermittelt den Übergang von der Kohn-Basis zur ursprünglichen (siehe Gleichung 5.44). Die phänomenologische Kopplungsfrequenz zwischen den beiden Zyklotronübergängen ist durch  $\omega_I$  symbolisiert. Aufgrund der für  $\hat{H}_I^{CR}$  geforderten Hermitezität ist  $\omega_I$  reell.

Die Verallgemeinerung der Kopplungsmatrix  $\hat{H}_I^{CR}$  auf eine beliebige Anzahl gekoppelter Zyklotronresonanzen ist nicht weiter schwierig. Dazu wird der Hilbert-Teilraum der Zyklotronresonanzen in je-

weils zweidimensionale Subräume unterteilt und darin analog zur Zerlegung 5.47 der Anteil der Kohn-Mode und der zu ihr orthogonalen Komponente bestimmt. In einem solchen Subraum hat die Kopplungsmatrix jeweils die Gestalt 5.49 mit den entsprechenden Kopplungsfrequenzen  $\omega_{I,K K'}$ ,  $K \neq K'$ , wobei es insgesamt  $M_\omega = \sum_{l=1}^{M_K-1} l$  Möglichkeiten einer solchen Zerlegung und somit Kopplungsfrequenzen gibt. Faßt man den Einteilchen-Anteil und alle Kopplungsbeiträge zusammen, so bekommt man schließlich für die allgemeinste Hamilton-Matrix der gekoppelten mehrkomponentigen Zyklotronresonanz in Komponenten die Form

$$H_{KL}^{CR} = \delta_{K,L} \left[ \omega_{c,K} + \sum_{K' \neq K} f_{K'} \omega_{I,K K'} \right] - (1 - \delta_{K,L}) \sqrt{f_K f_L} \omega_{I,K L} . \quad (5.50)$$

Exemplarisch ist hier die Hamilton-Matrix für den dreikomponentigen Fall

$$\hat{H}^{CR,3} = \begin{pmatrix} \omega_{c,1} + \omega_{I,12} f_2 + \omega_{I,13} f_3 & -\omega_{I,12} \sqrt{f_1 f_2} & -\omega_{I,13} \sqrt{f_1 f_3} \\ -\omega_{I,12} \sqrt{f_1 f_2} & \omega_{c,2} + \omega_{I,12} f_1 + \omega_{I,23} f_3 & -\omega_{I,23} \sqrt{f_2 f_3} \\ -\omega_{I,13} \sqrt{f_1 f_3} & -\omega_{I,23} \sqrt{f_2 f_3} & \omega_{c,3} + \omega_{I,13} f_1 + \omega_{I,23} f_2 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

explizit angegeben.

Die hier auf sehr allgemeinen Grundlagen entwickelte Form eines Effektiv-Hamilton-Operators faßt nahezu sämtliche Formen zusammen, die in der Literatur in diesem Zusammenhang angegeben sind. Über die Kopplungsfrequenzen  $\omega_{I,K K'}$  macht die phänomenologische Theorie allerdings keine Aussagen. Diese müssen entweder aus mikroskopischen Theorien berechnet oder experimentell bestimmt werden. Zur Erklärung der nachfolgenden Experimente werden die Kopplungsfrequenzen als experimentelle Anpaßgrößen behandelt. Zwei wichtige Grenzfälle der mehrkomponentigen Zyklotronresonanz stellen das extrem verdünnte Elektronengas und ein Quanten-Hall-System in Hartree-Fock-Näherung dar:

**Modell von Hu et al. :** Das Modell von Hu et al. basiert auf einer Multipolentwicklung des Wechselwirkungspotentials [Hu,95b, Hu,95a]. Es setzt als Bedingung voraus, daß die Ausdehnungen der Landau-Orbitale sehr viel kleiner sind als die Abstände zwischen den Orbitalen. Als Kriterium für die Anwendbarkeit der Beschreibung gilt daher  $r_s = 1/\sqrt{\pi N_S} \gg l_m$ , was nur in extrem verdünnten Q2DEG hinreichend erfüllt ist. Die Betrachtung liefert im zweikomponentigen Fall als Wechselwirkungsenergie die in Gleichung 5.20 angegebene Form. Die Ergebnisse sind weiterhin vollkommen identisch zum klassischen Modell aus Abschnitt 5.2.2 für den Grenzfall  $\omega_{c,K} \gg \Delta\omega$ . Der Mechanismus der Kopplung ist eine Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen den Übergangsmomenten der einzelnen Elektronen. Eine solche Kopplung ist im Grunde genommen rein klassischen Ursprungs und wirkt unabhängig von den Quantenzahlen auf alle Übergänge gleichermaßen. Für die Formfaktoren der direkten Coulomb-Wechselwirkung in der Form 5.16 gilt die Relation  $F_{i,i}^{(c)} > F_{i,j}^{(c)}$ ,  $i < j$ . Daher fallen für Übergänge unterschiedlicher Subband-Zugehörigkeit die Intersubband-Kopplungen der Zyklotronresonanz in der Regel signifikant kleiner aus als die entsprechenden Intrasubband-Kopplungen, die zwischen Übergängen des gleichen Subbandes wirken. Da die Kopplungen weiterhin unabhängig vom Landau-Index und vom Spin sind, kann man sie in der Form

$$\omega_{I,K L} = \omega_{I,i_K i_L} \quad (5.52)$$

darstellen.

**Hartree-Fock-Kopplung:** Die Hartree-Fock-Näherung (HFA) für ein mehrkomponentiges Elektronengas wird in späteren Abschnitten noch ausgiebig behandelt. An dieser Stelle soll daher eine phänomenologische Beschreibung des grundlegenden Kopplungsmechanismus genügen. Der Kern der HFA ist die Berücksichtigung des quantenmechanischen Austauschs, der auf dem Prinzip der Nicht-Unterscheidbarkeit beruht. Da der Spin eine intrinsische Eigenschaft des Elektrons darstellt und die Elektron-Elektron-Wechselwirkung spin-erhaltend ist, wirken Austauscheffekte nur zwischen Elektronen gleicher Spinprojektion. Dabei hängen die Matrixelemente der Austauschwechselwirkung generell vom Subband- und vom Landau-Index ab. Die Kopplungsfrequenzen  $\omega_{I,KL}$  haben im Falle der Austauschkopplung generell die Form

$$\omega_{I,KL} = \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \omega_{I,KL} \quad . \quad (5.53)$$

Dabei fallen aufgrund des geringen Überlapps zwischen den verschiedenen Subbändern infolge ihrer Orthogonalität die Interband-Kopplungen in der Regel deutlich geringer aus als die Intrasubband-Kopplungen. Im Fall großer Subband-Abstände kann der Subband-Index  $i$  als Quasispin aufgefaßt werden und es gilt dann in guter Näherung

$$\omega_{I,KL} \approx \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \delta_{i_K, i_L} \omega_{I,KL} \quad . \quad (5.54)$$

**Austausch-Korrelations-Kopplung:** Generell treten in einem mehrkomponentigen Elektronengas Kopplungen der Zyklotronresonanzen aufgrund verschiedener Mechanismen auf. Im weiteren werden die Kopplungen im Sinne einer Störungsentwicklung in Austausch- ( $\omega_{X,KL}$ ) und Korrelationsbeiträge ( $\omega_{C,KL}$ ) gemäß

$$\omega_{I,KL} = \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \omega_{X,KL} + \omega_{C,KL} \quad (5.55)$$

separiert. Es ist dabei zu erwarten, daß die Austauschbeiträge, wenn sie nicht gerade für Übergänge ungleichen Spins zu Null verschwinden, die Kopplungen dominieren.

In den sich anschließenden Abschnitten werden eine Reihe von Erweiterungen und Sichtweisen der hier entwickelten Theorie vorgestellt.

### 5.2.3.1 Erweiterung auf langwellige Magneto-Plasmonen

Die Erweiterung des quantenmechanischen Modells auf endliche Wellenvektoren  $\vec{q}_{\parallel}$  geschieht unter Verwendung der klassischen Magneto-Plasmondispersion eines parabolischen 2DEG im elektrischen Quantengrenzfall  $\omega_{mp,2D}(\vec{q}_{\parallel}) = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_{pl,2D}^2(\vec{q}_{\parallel})}$  in der langwelligen Näherung

$$\omega_{mp,2D}(\vec{q}_{\parallel}) \approx \omega_c + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pl,2D}^2}{\omega_c} = \omega_c + \frac{eN_S}{4\varepsilon_0\varepsilon_{sc}B} q_{\parallel} \quad . \quad (5.56)$$

Der Effektiv-Hamilton-Operator der gekoppelten Magneto-Plasmonen gründet ebenfalls darauf, daß auch die langwellige Ladungsdichteanregung (CDE), welche die Erweiterung der Kohn-Mode auf endliche  $\vec{q}_{\parallel}$  darstellt, in einem parabolischen Q2DEG die volle Oszillatorstärke trägt. Daher kann die Dichteanregung  $|\text{CDE}, \vec{q}_{\parallel}\rangle$  mit  $\lim_{\vec{q}_{\parallel} \rightarrow 0} |\text{CDE}, \vec{q}_{\parallel}\rangle = |\text{Kohn}\rangle$ , in der zu 5.46 analogen Form konstruiert werden. Allerdings entsprechen die Basen  $|K, \vec{q}_{\parallel}\rangle$  mit  $\lim_{\vec{q}_{\parallel} \rightarrow 0} |K, \vec{q}_{\parallel}\rangle = |K\rangle$  im Hilbert-Raum dann den ungekoppelten Magneto-Plasmonen der Teilsysteme mit den Einteilchen-Frequenzen  $\omega_{mp,K} = \omega_{c,K}$ .

Zunächst wird wiederum der zweikomponentige Fall betrachtet, für den die aktive Mode  $|\text{CDE}, \vec{q}_{\parallel}\rangle$  und die darauf orthogonale Mode  $|\text{dark}, \vec{q}_{\parallel}\rangle$  wiederum die Form 5.47 besitzen. Die Kopplungsmatrix  $\hat{H}_H^{MP}$  aufgrund der Plasmonkopplung (Hartree-Kopplung) ergibt sich dann aus der Konstruktion

$$\hat{H}_H^{MP} = (|\text{CDE}\rangle \quad |\text{dark}\rangle) \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (|\text{CDE}\rangle \quad |\text{dark}\rangle)^T = C \begin{pmatrix} f_1 & \sqrt{f_1 f_2} \\ \sqrt{f_1 f_2} & f_2 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

wobei  $C = eN_S q_{\parallel} / (4\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} B)$  die Plasmonverschiebung abkürzt. Die angegebene Form erfüllt die Forderung 5.56. Von diesem Zwischenresultat ausgehend wird zunächst die Beschränkung auf das strenge 2DEG mit nur einem Subband aufgehoben. Bei einem Q2DEG mit mehreren Subbändern kommen wiederum die Formfaktoren  $F_{i,j}^{(c)}$  ins Spiel. Entsprechend separiert die Plasmonverschiebung  $C$  in Intra- und Intersubband-Anteile gemäß

$$C_{ij} = \frac{eN_S}{4\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} B} q_{\parallel} F_{i,j}^{(c)}(q_{\parallel}). \quad (5.58)$$

Die verallgemeinerte Kopplungsmatrix lautet damit

$$\hat{H}_H^{MP} = \begin{pmatrix} f_1 C_{i_1 i_1} & \sqrt{f_1 f_2} C_{i_1 i_2} \\ \sqrt{f_1 f_2} C_{i_1 i_2} & f_2 C_{i_2 i_2} \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Im Falle zweier verschiedener Subbänder tritt nun neben dem optischen Plasmon auch ein niederfrequentes akustisches Plasmon als Eigenmode auf.

Die Erweiterung auf eine beliebige Anzahl gekoppelter Übergänge ist nun ohne weiteres möglich und führt schließlich zu dem in Komponenten angegebenen Resultat

$$H_{H,KL}^{MP} = \delta_{K,L} f_K C_{i_K i_K} + (1 - \delta_{K,L}) \sqrt{f_K f_L} C_{i_K i_L}. \quad (5.60)$$

Faßt man alle Beiträge zusammen, so bekommt man letztendlich als die allgemeinste Form der Hamilton-Matrix  $\hat{H}^{MP} = \hat{H}_{sp}^{CR} + \hat{H}_I^{CR} + \hat{H}_H^{MP}$  wechselwirkender Magneto-Plasmonen in Komponenten den Ausdruck

$$H_{KL}^{MP} = \delta_{K,L} \left[ \omega_{c,K} + \sum_{K' \neq K} f_{K'} \omega_{I,K K'} + f_K C_{i_K i_K} \right] + (1 - \delta_{K,L}) \sqrt{f_K f_L} [C_{i_K i_L} - \omega_{I,K L}]. \quad (5.61)$$

Diese Form gilt bei hohen Magnetfeldern im Grenzfall  $C_{i_K i_{K'}} \ll \omega_{c,K}$ ,  $\forall K, K'$ .

### 5.2.3.2 Summenregeln für die mehrkomponentige Magneto-Plasmonresonanz

Wichtig für die spätere experimentelle Auswertung werden die beiden Summenregeln einmal für die Oszillatorstärke

$$1 = \sum_K f_K = \sum_K F_K \quad (5.62)$$

und zum anderen für die mittlere Resonanzfrequenz

$$C + \sum_K f_K \omega_{c,K} = \sum_K F_K \Omega_K \quad (5.63)$$

sein. Bei der letzteren gilt der elektrische Quantengrenzfall als Voraussetzung, wobei  $C$  für die Plasmonverschiebung gemäß Gleichung 5.58 mit  $i = j = 0$  steht. Die Kollektivmodenzustände  $|\Omega_K\rangle$  und ihre Frequenzen  $\Omega_K$  ergeben sich durch direkte Diagonalisierung der Hamilton-Matrix 5.61 und die  $F_K = |\langle \text{CDE} | \Omega_K \rangle|^2$  stehen für ihre Oszillatorstärken. Der Beweis der beiden Beziehungen basiert wiederum auf der Darstellung der Ladungsdichteanregung nach Gleichung 5.42.

Die Oszillatorstärkesummenregel läßt sich direkt herleiten, indem man in dem betrachteten Hilbert-Subraum die Vollständigkeit der Einteilchen-Basen  $|K\rangle$  beziehungsweise der Kollektivmoden-Basen  $|\Omega_K\rangle$  ausnutzt. Daher gilt

$$1 = \langle \text{CDE} | \text{CDE} \rangle = \sum_K \langle \text{CDE} | K \rangle \langle K | \text{CDE} \rangle = \sum_K \langle \text{CDE} | \Omega_K \rangle \langle \Omega_K | \text{CDE} \rangle, \quad (5.64)$$

woraus sich unmittelbar die Summenregel 5.62 ergibt.

Der Beweis der Frequenzsummenregel basiert auf dem Erwartungswert  $\langle \text{CDE} | \hat{H}^{MP} | \text{CDE} \rangle$ . Durch zweifaches Einschleiben des Einsoperators in der Kollektivmodenbasis folgt daraus unter Ausnutzung der Diagonalität des Hamilton-Operators in dieser Basis die Identität

$$\begin{aligned} \langle \text{CDE} | \hat{H}^{MP} | \text{CDE} \rangle &= \sum_K \sum_{K'} \langle \text{CDE} | \Omega_K \rangle \langle \Omega_K | \hat{H}^{MP} | \Omega_{K'} \rangle \langle \Omega_{K'} | \text{CDE} \rangle \\ &= \sum_K \sum_{K'} \delta_{K,K'} \Omega_{K'} \langle \Omega_K | \text{CDE} \rangle \langle \text{CDE} | \Omega_{K'} \rangle, \end{aligned} \quad (5.65)$$

woraus sich die rechte Seite von Beziehung 5.63 ergibt. Andererseits bekommt man durch Aufspaltung des Hamilton-Operators in den Einteilchen- ( $\hat{H}_{sp}^{CR}$ ) und den Wechselwirkungsanteil ( $\hat{H}_{WW}^{MP} = \hat{H}_I^{CR} + \hat{H}_H^{MP}$ ) den Ausdruck

$$\langle \text{CDE} | \hat{H}^{MP} | \text{CDE} \rangle = \langle \text{CDE} | \hat{H}_{sp}^{CR} + \hat{H}_{WW}^{MP} | \text{CDE} \rangle = \sum_K \omega_{c,K} f_K + \langle \text{CDE} | \hat{H}_{WW}^{MP} | \text{CDE} \rangle. \quad (5.66)$$

Da aber der Zustand  $|\text{CDE}\rangle$  ein Eigenzustand des Wechselwirkungsanteils mit Eigenwert  $C$  ist, folgt daraus unmittelbar die linke Seite von Gleichung 5.63. Damit ist die wichtige Frequenzsummenregel bewiesen. In Worten ausgedrückt besagt sie, daß das erste Moment des Zyklotronresonanzspektrums ( $q_{\parallel} = 0$ ) eines mehrkomponentigen Systems mit dem gewichteten Mittelwert der aktiven Einteilchen-Übergänge übereinstimmt.

### 5.2.3.3 Hybridisierte Spin- und Ladungsdichtemoden zweikomponentiger Q2DEG

Dieser Abschnitt widmet sich speziell den Anregungen in einem zweikomponentigen Q2DEG, wie es nach dem Zyklotron-Übergangsschema in Abbildung 2.13 bei tiefen Temperaturen und ganzzahligen Füllfaktoren  $\nu = 2, 3, \dots$  bzw. im magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 2$  vorliegt. Allen Szenarien ist dabei gemein, daß die beiden aktiven Zyklotronresonanzen verschiedene Spineinstellungen besitzen.

Der relevante Effektiv-Hamilton-Operator unter Berücksichtigung der Plasmonkopplung hat hier nach dem vorausgehenden Abschnitt die allgemeine Form

$$\hat{H}^{MP,2} = \begin{pmatrix} \omega_{c,1} + \omega_I f_2 + C f_1 & (C - \omega_I) \sqrt{f_1 f_2} \\ (C - \omega_I) \sqrt{f_1 f_2} & \omega_{c,2} + \omega_I f_1 + C f_1 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Es erweist sich für das weitere Verständnis als hilfreich, diesen Hamilton-Operator bezüglich der Basen  $|\text{CDE}\rangle$  und  $|\text{SDE}\rangle \equiv |\text{dark}\rangle$  des (effektiv) parabolischen Systems darzustellen (siehe Beziehungen 5.47). Für die oben geschilderten Situationen entspricht der zur Ladungsdichtemodus orthogonale Zustand genau einer nicht-dipolaktiven Anregung mit zeitlich oszillierender Spindichte (SDE). Der transformierte Hamilton-Operator lautet

$$\hat{H}^{MP,2} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_c + C & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_c + \omega_I \end{pmatrix} + \Delta\omega \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{f_1 f_2} \\ -\sqrt{f_1 f_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

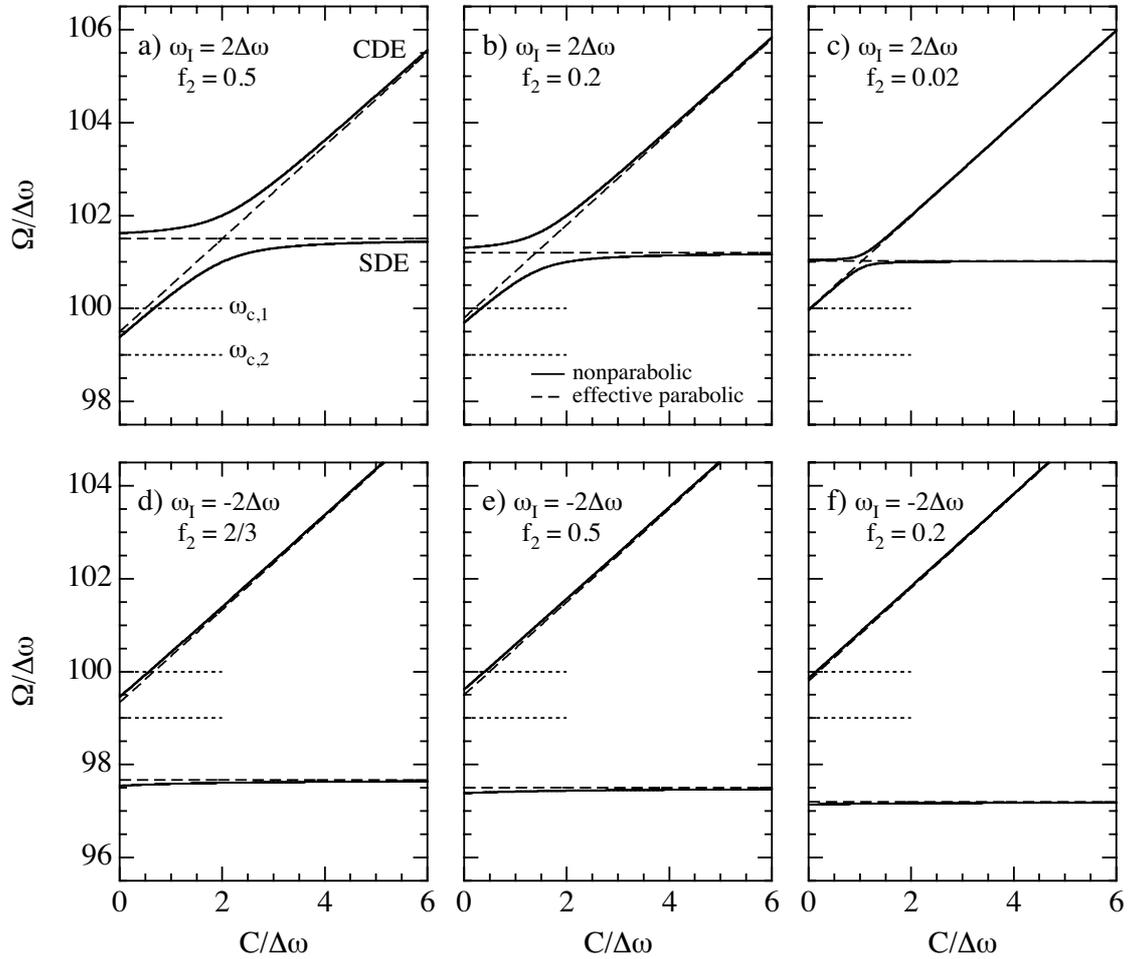
wobei  $\Delta\omega = \omega_{c,1} - \omega_{c,2} > 0$  die positive Differenzfrequenz zwischen den beiden Einteilchen-Zyklotronfrequenzen symbolisiert. Die Hamilton-Matrix ist bereits geeignet in einen effektiv parabolischen Anteil und einen Wechselwirkungsanteil infolge der Nichtparabolizität mit Kopplungsstärke  $\Delta\omega$  separiert. Die Zyklotronfrequenzen  $\bar{\omega}_c = \omega_{c,1} f_1 + \omega_{c,2} f_2$  und  $\tilde{\omega}_c = \omega_{c,2} f_1 + \omega_{c,1} f_2$  stehen dabei für gewichtete Mittelwerte aus den beiden Einteilchen-Frequenzen. In dieser Form bewirkt die Nichtparabolizität im wesentlichen eine Kopplung zwischen der Ladungsdichte- und der Spindichte-anregung des effektiv parabolischen Systems. Von dieser Darstellung ausgehend lassen sich die Eigenfrequenzen  $\Omega_{K=1,2}$  und ihre Oszillatorstärken  $F_{K=1,2}$  auf direkte Weise gewinnen und in der analytischen Form

$$\begin{aligned} \Omega_{K=1,2} &= \frac{1}{2} \left[ 2\omega_{c,1} - \Delta\omega + C + \omega_I + (-1)^K \sqrt{(\Delta\omega + (C - \omega_I))^2 - 4f_2 \Delta\omega(C - \omega_I)} \right], \\ F_{K=1,2} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^K \frac{C - \omega_I + \Delta\omega(1 - 2f_2)}{\sqrt{(\Delta\omega + (C - \omega_I))^2 - 4f_2 \Delta\omega(C - \omega_I)}} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

darstellen.

Für den Fall  $q_{\parallel} = 0$  ergeben sich die gleichen Verläufe wie die in Abbildung 5.7 dargestellten, welche nach dem klassischen Modell im Grenzfall  $\omega_{c,K=1,2} \gg \Delta\omega$  berechnet wurden. Diese Übereinstimmung überrascht nicht weiter, da generell in harmonischen Systemen, zu denen die gekoppelte mehrkomponentige Zyklotronresonanz effektiv gehört, die klassischen Eigenfrequenzen mit den fundamentalen quantenmechanischen Übergangsfrequenzen übereinstimmen. Die Figur 5.8 zeigt weiterhin die berechneten Kollektivmodenenergien für einige exemplarische Szenarien als Funktion der normierten Plasmonverschiebung  $C/\Delta\omega$ . Zur Orientierung sind die Kollektivmoden des effektiv parabolischen Systems, das über die erste Matrix im Hamilton-Operator 5.68 definiert ist, mit eingetragen. Es treten je nach Vorzeichen der Kopplung  $\omega_I$  zwei grundlegend verschiedene Situationen auf:

Im Falle einer positiven Kopplung  $\omega_I > 0$  durchkreuzen sich die Spindichte- und die Ladungsdichtemodus bei der Plasmonverschiebung  $C_{crit} = \omega_I + \tilde{\omega}_c - \bar{\omega}_c$ , was gemäß der Relation  $C \propto q_{\parallel}$  einem endlichen Wellenvektor  $q_{\parallel,crit}$  entspricht. Infolge der Kopplung über die Nichtparabolizität resultiert eine Modenaufspaltung, bei der die Kollektivmoden ihre Charaktere austauschen. Dabei wird die ursprüngliche Ladungsdichtemodus für große Wellenvektoren spindichteartig und umgekehrt. Die Größe der Aufspaltung bei  $C_{crit}$  ( $q_{\parallel,crit}$ ) hängt neben der Energiedifferenz  $\Delta\omega$  stark von den relativen Besetzungen ab. Im Falle einer negativen Kopplungsfrequenz



**Abbildung 5.8:** Berechnete Dispersionen ( $C \propto q_{\parallel}$ ) der hybridisierten langwelligen Ladungs- und Spindichteanregungen in einem zweikomponentigen Q2DEG. Zur Orientierung sind die Verläufe gemäß der effektiv parabolischen Näherung gestrichelt und die Einteilchen-Zyklotronfrequenzen gepunktet unterlegt.

durchkreuzen sich die Spin- und Ladungsdichtemode des effektiv parabolischen Systems nicht. Daher treten infolge der Kopplung nur geringe Abweichungen vom (effektiv) parabolischen Verlauf auf.

Anhand der gezeigten Verläufe wird auch die Bedeutung der Kopplungsenergie  $\hbar\omega_I$  als Energielücke zwischen Ladungs- und Spindichteanregungen im (effektiv) parabolischen System unmittelbar klar. Aufgrund der für unterschiedliche Spins verbotenen Austauschkopplung ist eine solche Lücke auf Korrelationseffekte im wechselwirkenden Elektronengas zurückzuführen. Infolge der Kopplung von Ladungs- und Spindichteanregungen durch die Nichtparabolizität wird die Energielücke über die Mischung von Ladungs- und Spindichtemoden über die Zyklotronresonanz zugänglich.

### 5.2.4 Effektives Modell der harmonisch gekoppelten Schwerpunkte

Das in den vorausgehenden Abschnitten entwickelte quantenmechanische Modell der mehrkomponentigen Zyklotronresonanz gründet allein auf dem Kohnschen Theorem. Dabei wurden zur Herleitung des Effektiv-Hamilton-Operators lediglich grundlegende Eigenschaften der Hilbert-Raum-Algebra benutzt. Um diesen eher abstrakten Betrachtungen eine anschauliche Bedeutung zu geben, wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß die Zyklotronresonanz eines mehrkomponentigen Q2DEG auf ein einfaches Bild harmonisch gekoppelter Schwerpunkte zurückzuführen ist. Neben der Anschaulichkeit bietet diese Betrachtungsweise darüber hinausgehend Einblick in die im Hochfeldlimit vernachlässigten Aufpunktfreiheitsgrade.

Zunächst wird wiederum das zweikomponentige System betrachtet. Die Hamilton-Funktion läßt sich in Anlehnung an Abschnitt 5.2.1 in Schwerpunkt- und Relativanteile sowie Wechselwirkungsbeiträge entsprechend

$$H = H_{CM,1} + H_{CM,2} + W_{CM,1,CM,2} + H_{rel,1} + H_{rel,2} + W_{CM,1,rel,2} + W_{CM,2,rel,1} + H_{rel,1,rel,2} \quad (5.70)$$

separieren. Für die Beschreibung der gekoppelten Zyklotronresonanz werden nur die ersten drei Terme als entscheidend betrachtet und eine effektive harmonische Wechselwirkung zwischen den Schwerpunkten eingeführt. Der Schwerpunktanteil lautet ausgeschrieben

$$H_{CM} = \frac{1}{2M_1} \vec{\Pi}_1^2 + \frac{1}{2M_2} \vec{\Pi}_2^2 + \frac{G_{12}}{2} \left( \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \right)^2, \quad (5.71)$$

mit den kanonischen Schwerpunktimpulsen

$$\vec{\Pi}_K = \vec{P}_K + \frac{Q_K B}{M_K} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -Y_K \\ X_K \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

in symmetrischer Eichung und der harmonischen Kopplungskonstanten

$$G_{12} = \omega_I e |B| \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \quad (5.73)$$

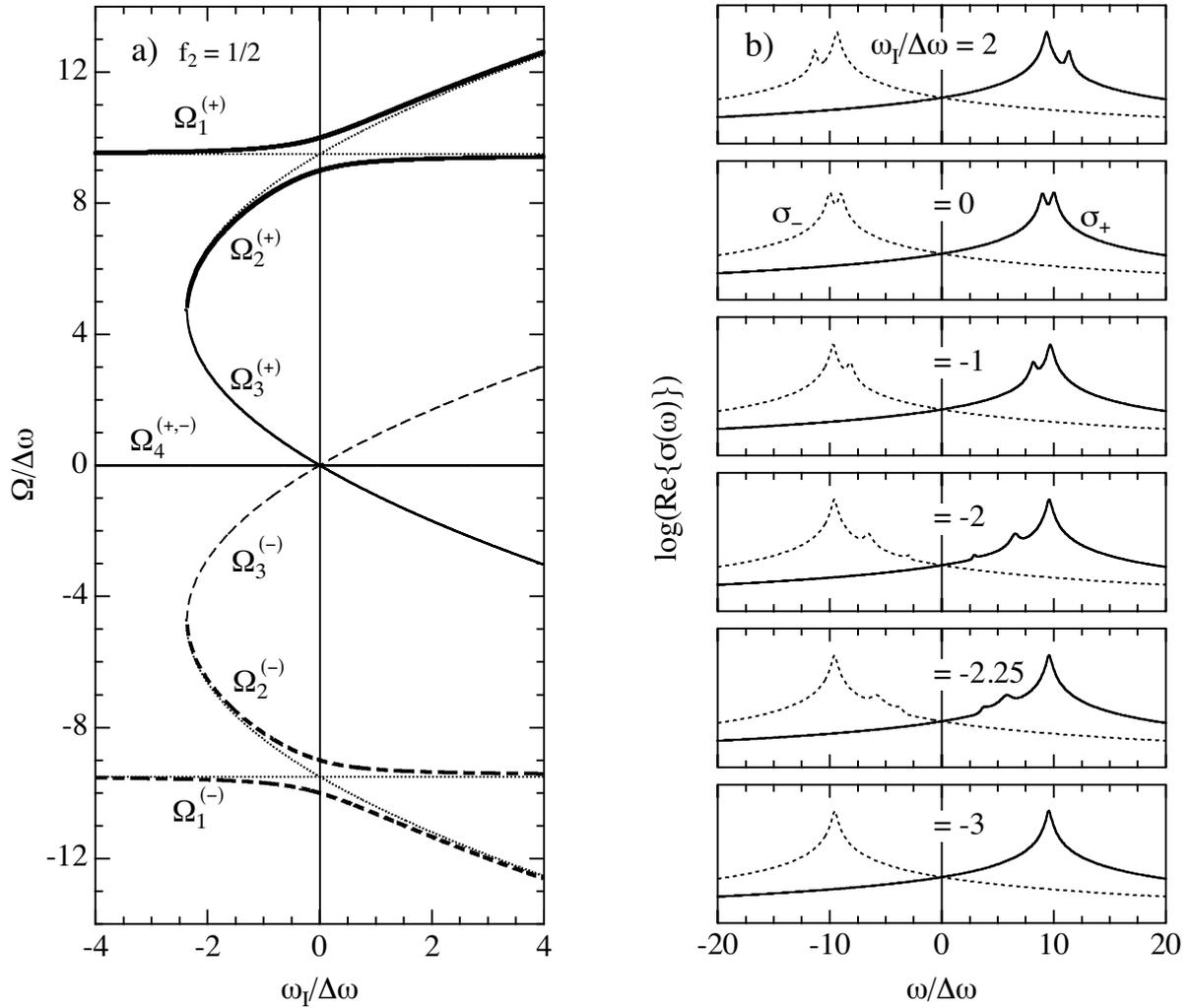
in geeigneter Darstellung. Dabei stehen  $|Q_K| = N_K e$  für die Ladungen,  $N_K$  für die Elektronenzahlen,  $M_K = N_K m_K$  für die Massen und  $f_K = N_K / (N_1 + N_2)$  für die relativen Besetzungen der Subsysteme. Die Definitionen der Schwerpunktkoordinaten und Schwerpunktimpulse erschließen sich aus dem Abschnitt 5.2.1. Zur Quantisierung der Hamilton-Funktion werden analog zu Abschnitt 2.3.1 die quantenmechanischen Leiteroperatoren definiert. Dazu müssen zunächst entsprechend  $\vec{R}_K = \vec{R}_K^{(g)} + \vec{R}_K^{(o)}$  die Schwerpunktkoordinaten in Aufpunkt- (guiding centers)  $\vec{R}_K^{(g)}$  und Orbitalanteile  $\vec{R}_K^{(o)}$  zerlegt werden. Die Leiteroperatoren der Orbitalfreiheitsgrade sind dann durch die Ausdrücke

$$\hat{A}_K = i \frac{l_K}{\hbar} \Pi_{K,-} = \frac{1}{\sqrt{2} l_K} \left( X_K^{(o)} - i Y_K^{(o)} \right), \quad \hat{A}_K^\dagger = -i \frac{l_K}{\hbar} \Pi_{K,+} = \frac{1}{\sqrt{2} l_K} \left( X_K^{(o)} + i Y_K^{(o)} \right) \quad (5.74)$$

und die der Aufpunktfreiheitsgrade durch die Ausdrücke

$$\hat{B}_K = \frac{1}{\sqrt{2} l_K} \left( X_K^{(g)} + i Y_K^{(g)} \right), \quad \hat{B}_K^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2} l_K} \left( X_K^{(g)} - i Y_K^{(g)} \right) \quad (5.75)$$

gegeben. Dabei sind die effektiven magnetischen Längen  $l_K = \sqrt{\hbar / (e B N_K)}$  geeignet definiert. Mit diesen Operatoren und unter Ausnutzung ihrer Vertauschungsrelationen (analog zu den Relationen 2.42) läßt sich der



**Abbildung 5.9:** Berechnete Modenfrequenzen und Leitfähigkeiten für ein gekoppeltes zweikomponentiges Q2DEG. Teilfigur a) zeigt sämtliche Modenfrequenzen des Systems zweier harmonisch gekoppelter Schwerpunkte im Magnetfeld. Die durchgezogenen Linien zeigen die Moden der aktiven und die gestrichelten die der inaktiven Polarisation. Fett hervorgehoben sind die gekoppelten Zyklotronresonanzmoden. Die Verläufe in effektiv parabolischer Näherung sind gepunktet unterlegt. In Teilfigur b) sind die Realteile der berechneten Leitfähigkeiten in logarithmischer Auftragung dargestellt. Die durchgezogenen Spektren entsprechen der aktiven und die gestrichelten der inaktiven Polarisation. Die Frequenzeinheit ist jeweils  $\Delta\omega$ . In b) wurde eine Streuzeit von  $5 \Delta\omega^{-1}$  zugrunde gelegt.

Hamilton-Operator auf die geeignete Form

$$\begin{aligned} \hat{H}_{CM} = & \sum_K \left\{ \hbar\omega_{c,K} \hat{A}_K^\dagger \hat{A}_K + G_K l_K^2 \left[ \hat{A}_K^\dagger \hat{A}_K + \hat{B}_K^\dagger \hat{B}_K + \hat{A}_K \hat{B}_K + \hat{A}_K^\dagger \hat{B}_K^\dagger \right] \right\} \\ & - \sum_{K \neq K'} G_{KK'} l_K l_{K'} \left[ \hat{A}_K \hat{B}_{K'} + \hat{A}_K^\dagger \hat{B}_{K'}^\dagger + \hat{A}_K \hat{A}_{K'}^\dagger + \hat{B}_K \hat{B}_{K'}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (5.76)$$

bringen, wobei die Beiträge zur Nullpunktenergie nicht berücksichtigt sind. Diese Form gilt mit  $G_K = \sum_{K' \neq K} G_{KK'}$  auch ganz allgemein für eine beliebige Anzahl von Schwerpunkten.

Bei der Übertragung des Modells auf die Zyklotronresonanz sind die Anregungszustände und die Anregungsenergien des gekoppelten Systems von Interesse. Um zu diesen zu gelangen wird eine Operatortechnik eingesetzt, die aus dem Grundzustand  $|\text{ground}\rangle$  mit Energie  $E_0$  die Anregungszustände erzeugt (vergleiche [Koh61, Bre89]). Dabei gilt es, Operatoren  $\hat{\Omega}$  zu finden, die mit dem Hamilton-Operator  $\hat{H}_{CM}$  vertauschen. Solche Operatoren erzeugen gemäß

$$\hat{H}_{CM} \left( \hat{\Omega} |\text{ground}\rangle \right) = (E_{\Omega} - E_0) \left( \hat{\Omega} |\text{ground}\rangle \right) \quad (5.77)$$

Anregungszustände aus dem Grundzustand mit Anregungsenergien  $\hbar\Omega = E_{\Omega} - E_0$ . Ein abgeschlossenes System von Operatoren, welche unter Vertauschung mit dem Hamilton-Operator unter sich transformieren, bilden jeweils die beiden Sätze  $\{\hat{A}_1^+, \hat{A}_2^+, \hat{B}_1, \hat{B}_2\}$  und  $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1^+, \hat{B}_2^+\}$ . Aus dem ersten Satz setzt sich dabei der aktive Dipoloperator  $H_{CM}^{(rad,+)} \propto \sum_{K=1,2} \hat{A}_K^+$  und aus dem zweiten der inaktive  $H_{CM}^{(rad,-)} \propto \sum_{K=1,2} \hat{A}_K^-$  zusammen. Entsprechend werden die Operatoren  $\hat{\Omega} = \sum_L c_L \hat{C}_L$  als Linearkombinationen mit  $\hat{C}_{L=1,2} = \hat{A}_{1,2}^+$  und  $\hat{C}_{L=3,4} = \hat{B}_{1,2}$  beziehungsweise  $\hat{C}_{L=1,2} = \hat{A}_{1,2}$  und  $\hat{C}_{L=3,4} = \hat{B}_{1,2}^+$  angesetzt. Die Koeffizienten  $c_L$  ergeben sich gemäß Gleichung 5.77 aus der zu erfüllenden Vertauschungsrelation

$$\sum_L c_L \left[ \hat{H}_{CM}, \hat{C}_L \right] = \Omega \sum_{L'} c_{L'} \hat{C}_{L'} \quad (5.78)$$

Aufgrund der Vollständigkeit der Operatoren  $\hat{C}_L$  unter Vertauschung mit dem Hamilton-Operator gilt

$$\left[ \hat{H}_{CM}, \hat{C}_L \right] = \sum_{L'} H_{eff,LL'} \hat{C}_{L'} \quad (5.79)$$

mit den Vertauschungs-Koeffizienten  $H_{eff,LL'}$ . Damit läßt sich die Forderung 5.78 als Eigenwertgleichung

$$\sum_{L'} H_{eff,LL'} c_{L'} = \Omega c_L \quad (5.80)$$

darstellen. Die Vertauschungs-Koeffizienten definieren hierbei die  $4 \times 4$ -Effektiv-Hamilton-Matrix  $\hat{H}_{eff}$ , welche im abgeschlossenen Subraum  $\{\hat{C}_L |\text{ground}\rangle, L = 1, \dots, 4\}$  der Anregungen auf dem Grundzustand  $|\text{ground}\rangle$  wirkt. Ausgeschrieben lautet die Matrix für den aktiven Operatorsatz  $\{\hat{A}_1^+, \hat{A}_2^+, \hat{B}_1, \hat{B}_2\}$

$$\hat{H}_{eff}^{(+)} = \begin{pmatrix} \omega_{c,1} + \omega_I f_2 & -\omega_I \sqrt{f_1 f_2} & \omega_I f_2 & -\omega_I \sqrt{f_1 f_2} \\ -\omega_I \sqrt{f_1 f_2} & \omega_{c,2} + \omega_I f_1 & -\omega_I \sqrt{f_1 f_2} & \omega_I f_1 \\ -\omega_I f_2 & \omega_I \sqrt{f_1 f_2} & -\omega_I f_2 & \omega_I \sqrt{f_1 f_2} \\ \omega_I \sqrt{f_1 f_2} & -\omega_I f_1 & \omega_I \sqrt{f_1 f_2} & -\omega_I f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{sp}^{CR,2} + \hat{H}_I^{CR,2} & \hat{H}_I^{CR,2} \\ -\hat{H}_I^{CR,2} & -\hat{H}_I^{CR,2} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

Für den inaktiven Satz  $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1^+, \hat{B}_2^+\}$  ergibt die Auswertung das Resultat  $\hat{H}_{eff}^{(-)} = -\hat{H}_{eff}^{(+)}$ , mit den im Vorzeichen umgekehrten Eigenwerten  $\Omega_K^{(-)} = -\Omega_K^{(+)}$ . Beide Matrizen setzen sich blockweise aus den im Abschnitt 5.2.3 definierten  $2 \times 2$ -Matrizen  $\hat{H}_{sp}^{CR,2}$  und  $\hat{H}_I^{CR,2}$  zusammen.

Im Gegensatz zum bisher betrachteten Modell der gekoppelten Zyklotronresonanzen besitzt jede der beiden Matrizen jeweils insgesamt 4 anstatt 2 Lösungen. Dies liegt an den Aufpunktfreiheitsgraden, welche hier mit eingeschlossen sind. Im Falle hoher Magnetfelder  $\omega_{c,K} \gg \omega_I$  spielen diese jedoch keine Rolle. Die An-

regungen des Systems gekoppelter Schwerpunkte sind dort vollkommen äquivalent zu denen der gekoppelten Zyklotronresonanzen, wie sie in den vorausgehenden Betrachtungen behandelt wurden. Die Nullstellen der beiden charakteristischen Polynome

$$P^{(+/-)}(\omega) = \omega \left[ \omega^3 \mp \omega^2(\omega_{c,1} + \omega_{c,2}) + \omega(\omega_{c,1}\omega_{c,2} - f_1 \omega_{c,2}\omega_I - f_2 \omega_{c,1}\omega_I) \pm \omega_{c,1}\omega_{c,2}\omega_I \right] \quad (5.82)$$

ergeben schließlich die Anregungsfrequenzen  $\Omega_K^{(+/-)}$  des gekoppelten Systems. Das Produkt der beiden Polynome entspricht gerade der Determinanten der klassischen dynamischen Matrix nach Gleichung 5.25, wie es die Äquivalenz der klassischen Eigenfrequenzen und der quantenmechanischen Anregungsfrequenzen für ein harmonisches System erfordert. Mit einer dritten von Null verschiedenen Eigenfrequenz taucht neben den beiden gekoppelten Zyklotronresonanzen eine weitere Mode auf.

Zur Visualisierung der auftretenden Resonanzen sind in der Abbildung 5.9 a) für ein exemplarisches System sämtliche Modenenergien als Funktion der normierten Kopplungsfrequenz aufgetragen. Im folgenden werden aufgrund der Symmetrie unter Vorzeichenumkehr nur die zur aktiven Polarisation gehörenden Moden  $\Omega_K^{(+)}$  behandelt. Zunächst wird das System in Anlehnung an den vorausgehenden Abschnitt 5.2.3.3 in effektiv parabolischer Näherung betrachtet. Dabei stellt man fest, daß die nicht-dipolaktive Mode, die im weiteren als Spindichtemode bezeichnet wird, unter Beteiligung der Aufpunkte erst oberhalb einer kritischen Kopplungsfrequenz

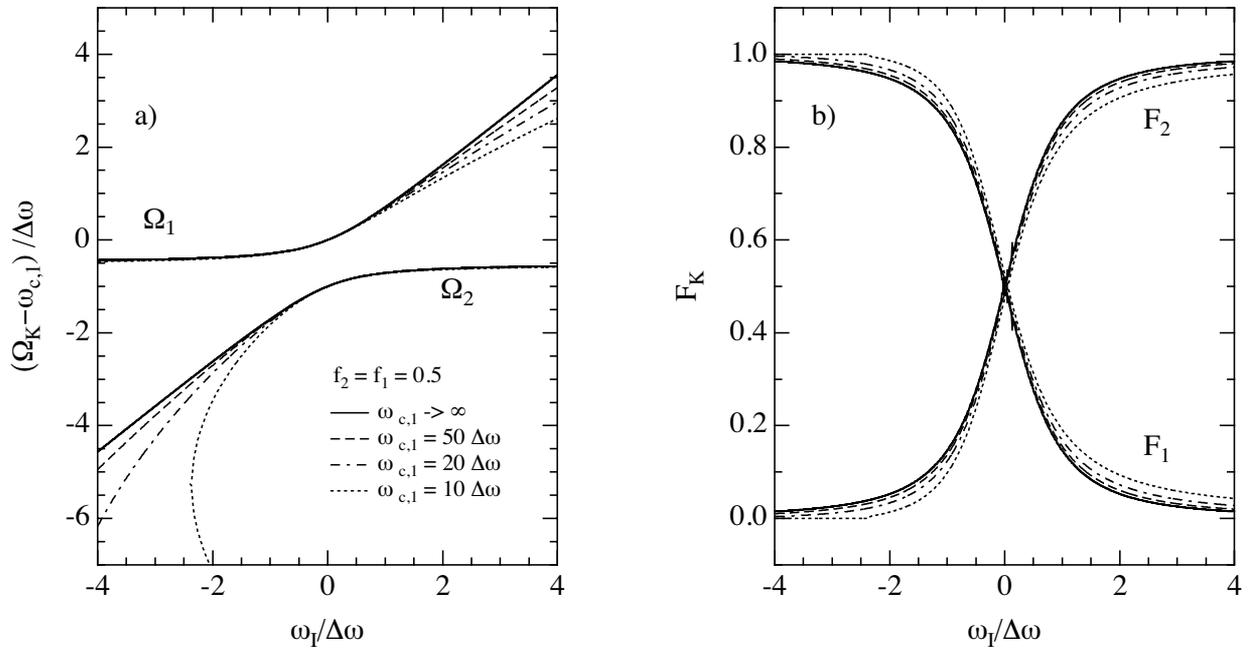
$$\omega_{I,crit} = -\frac{\tilde{\omega}_c}{4} \quad (5.83)$$

in Erscheinung tritt und generell als Modendoublett

$$\Omega_{ep,2/3}^{(+)} = \frac{\tilde{\omega}_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\omega}_c (\tilde{\omega}_c + 4\omega_I)} \quad (5.84)$$

vorliegt. Die energetisch höher gelegene Mode wird dabei von der Ladungsdichtemode  $\Omega_{ep,1}^{(+)} = \tilde{\omega}_c$  durchkreuzt. Die gemittelten Frequenzen  $\bar{\omega}_c$  und  $\tilde{\omega}_c$  sind im Abschnitt 5.2.3 definiert. Infolge der Kopplung durch die Nichtparabolizität entsteht beim Kreuzungspunkt die Resonanzaufspaltung der gekoppelten Zyklotronresonanzen  $\Omega_1^{(+)}$  und  $\Omega_2^{(+)}$ . Die Modenfrequenz  $\Omega_{ep,3}^{(+)}$  taucht mit ansteigender Kopplungsstärke energetisch unter Vorzeichenwechsel zu negativen Frequenzen hin ab. Sie wird unter Einfluß der Nichtparabolizität kaum mit den anderen Moden gemischt, so daß  $\Omega_3^{(+)} \approx \Omega_{ep,3}^{(+)}$  gilt. Zur Untersuchung der Dipolaktivität der auftretenden Moden zeigt die Abbildung 5.9 b) einige ausgewählte Leitfähigkeitsspektren, die klassisch berechnet wurden. Zur Hervorhebung schwacher Resonanzen sind die Leitfähigkeiten logarithmisch aufgetragen. Der dynamische Leitfähigkeitstensor ist diagonal und hat deshalb nur die Elemente  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$ , die spiegelbildliche Verläufe bezüglich des Frequenznullpunktes aufweisen. Wie man an den Spektren erkennt, weist die Mode  $\Omega_3^{(+)}$  außer in unmittelbarer Nähe ihres Ursprungs keine Oszillatorstärke auf. Unterhalb  $\omega_{I,crit}$  ist generell nur eine einzige Resonanz  $\Omega_1^{(+)}$  vorhanden.

Das  $2 \times 2$ -Modell der Zyklotronresonanz aus Abschnitt 5.2.3, das die Aufpunktquantisierung nicht berücksichtigt, repräsentiert den Grenzfall  $\omega_{c,K=1,2} \gg \Delta\omega$ . Es ist vollständig durch die zwei Frequenzen  $\omega_I$  und  $\Delta\omega$  bestimmt, wobei der Einteilchen-Frequenz  $\omega_{c,1}$  lediglich die Rolle eines Energiebezugspunktes zukommt. Im  $4 \times 4$ -Modell der harmonisch gekoppelten Schwerpunkte ändert sich dies grundlegend. Über die Beziehung 5.84 wird die für die Zyklotronresonanz relevante Spindichtemode mit der Frequenz  $\Omega_{ep,2}^{(+)}$  von  $\tilde{\omega}_c$  und damit  $\omega_{c,1}$  abhängig. Zur Illustration des Einflusses der Einteilchen-Frequenz  $\omega_{c,1}$  auf die Anregungsfrequenzen des gekoppelten Systems dient die Abbildung 5.10. Hier sind exemplarisch für den Fall  $f_2 = f_1 = 0.5$  die



**Abbildung 5.10:** Frequenzen und Oszillatorstärken der kollektiven Zyklotronresonanzen eines zweikomponentigen Q2DEG als Funktion der Kopplungsenergie für verschiedene Einteilchen-Frequenzen  $\omega_{c,1}$ . Exemplarisch ist hier die Besetzung  $f_1 = f_2 = 0.5$  gewählt.

Modenenergien für verschiedene  $\omega_{c,1}$  dargestellt. Das Regime schwacher Kopplung, in welchem ein Resonanzdoublett experimentell auflösbar sein sollte, beschränkt sich im vorliegenden Fall auf den ungefähren Bereich  $-2 < \omega_I / \Delta\omega < 2$ . In diesem Fenster sind die Verläufe der Anregungsfrequenzen und der Oszillatorstärken für  $\omega_{c,1} > 20\Delta\omega$  kaum voneinander zu trennen. Da sich speziell in GaAs die Landau-Aufspaltung für Magnetfelder bis  $B = 20$  T gerade in diesem Regime bewegt, ist für die weiteren Betrachtungen das  $2 \times 2$ -Modell für die Beschreibung der in einem Zyklotronresonanzexperiment detektierbaren Moden vollkommen ausreichend.

Zuletzt sei aus Gründen der Vollständigkeit die Effektiv-Hamilton-Matrix für ein allgemeines System aus  $M_K$  Schwerpunkten angegeben.

$$\hat{H}_{eff}^{(+/-)} = \pm \begin{pmatrix} \hat{H}_{sp}^{CR} + \hat{H}_I^{CR} & \hat{H}_I^{CR} \\ -\hat{H}_I^{CR} & -\hat{H}_I^{CR} \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

Die  $2M_K \times 2M_K$ -Matrix hat die zum zweikomponentigen System identische Blockgestalt mit den allgemeinen  $M_K \times M_K$ -Matrizen  $\hat{H}_{sp}^{CR}$  und  $\hat{H}_I^{CR}$ , die sich aus der Form 5.50 erschließen.

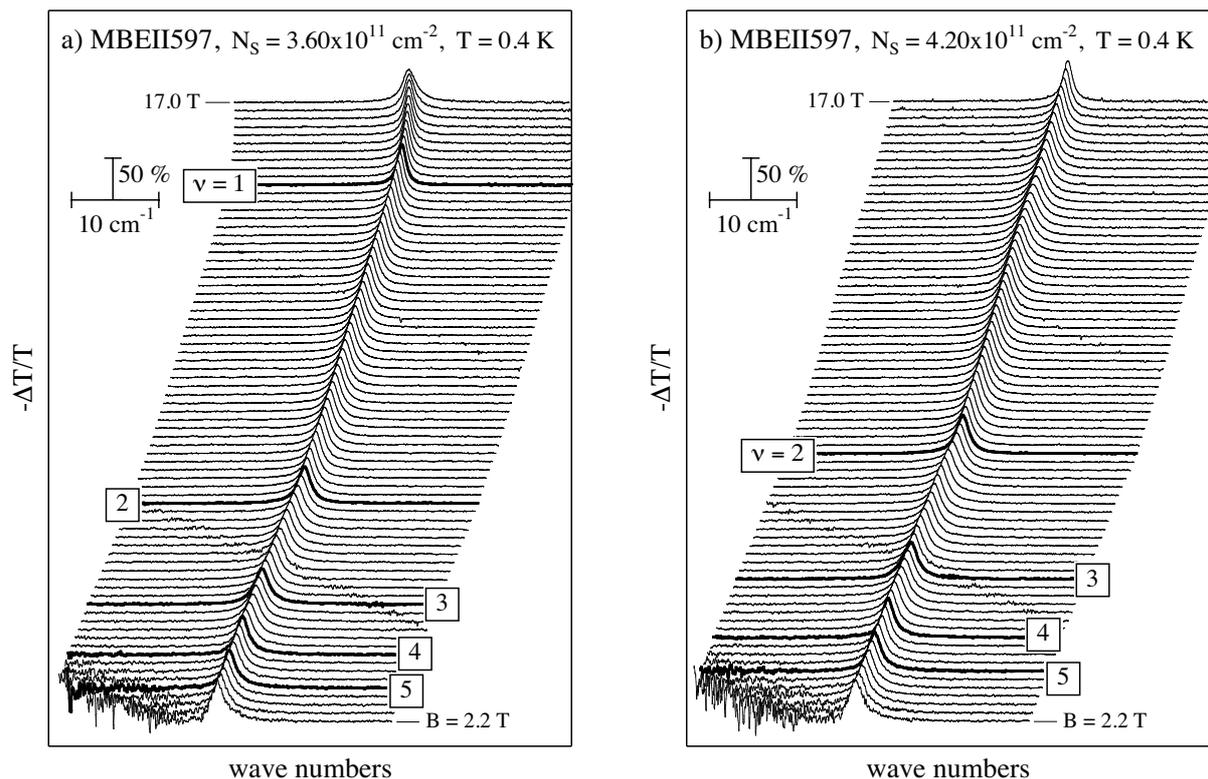
### 5.3 Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des IQHE

Dieses Kapitel behandelt die experimentellen Ergebnisse zur elektronischen Zyklotronresonanz im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes für Füllfaktoren  $\nu > 1$ . Zunächst werden in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 die Experimente zur Landau- und Spinaufspaltung und deren Auswertung bei ganzzahligen Füllfaktoren vorgestellt. Anschließend wird im Abschnitt 5.3.3 anhand einer Analyse der mittleren Masse aufgezeigt, wie sich die intrinsische Zyklotronresonanz von der extrinsischen, die durch Verunreinigungen dominiert wird, abgrenzen läßt. Die beiden letzten Abschnitte 5.3.4 und 5.3.5 beschäftigen sich mit dem Einfluß von Störstellen auf die Zyklotronresonanz und mit der Subband-Aufspaltung.

#### 5.3.1 Landau- und spinaufspaltene Zyklotronresonanz

Zunächst zeigen die Figuren 5.11, 5.12 und 5.13 die gemessenen Spektren fein inkrementierter Magnetfeldreihen in der Darstellung gemäß der Gleichung 4.79 für eine Reihe unterschiedlicher Proben bei tiefen Temperaturen im Bereich  $0.4 < T < 15$  K. Dabei wird ein sehr weites Dichteregime von  $3.5 < N_S [10^{11} \text{ cm}^{-2}] < 12.7$  abgedeckt.

Während für Ladungsträgerdichten unterhalb  $\approx 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  generell nur Einfachlinien beobachtet werden, die zudem eine nahezu perfekte Lorentz-Form aufweisen, treten für Dichten darüber hinaus ausgeprägte Doppelstrukturen um ganzzahlige Füllfaktoren auf, die hier erstmalig beobachtet wurden.



**Abbildung 5.11:** Zyklotronresonanzspektren für zwei Systeme mittlerer Dichte. Die fett eingezeichneten Spektren markieren ganzzahlige Füllfaktoren, die in den Transportmessungen aufgelöst werden.

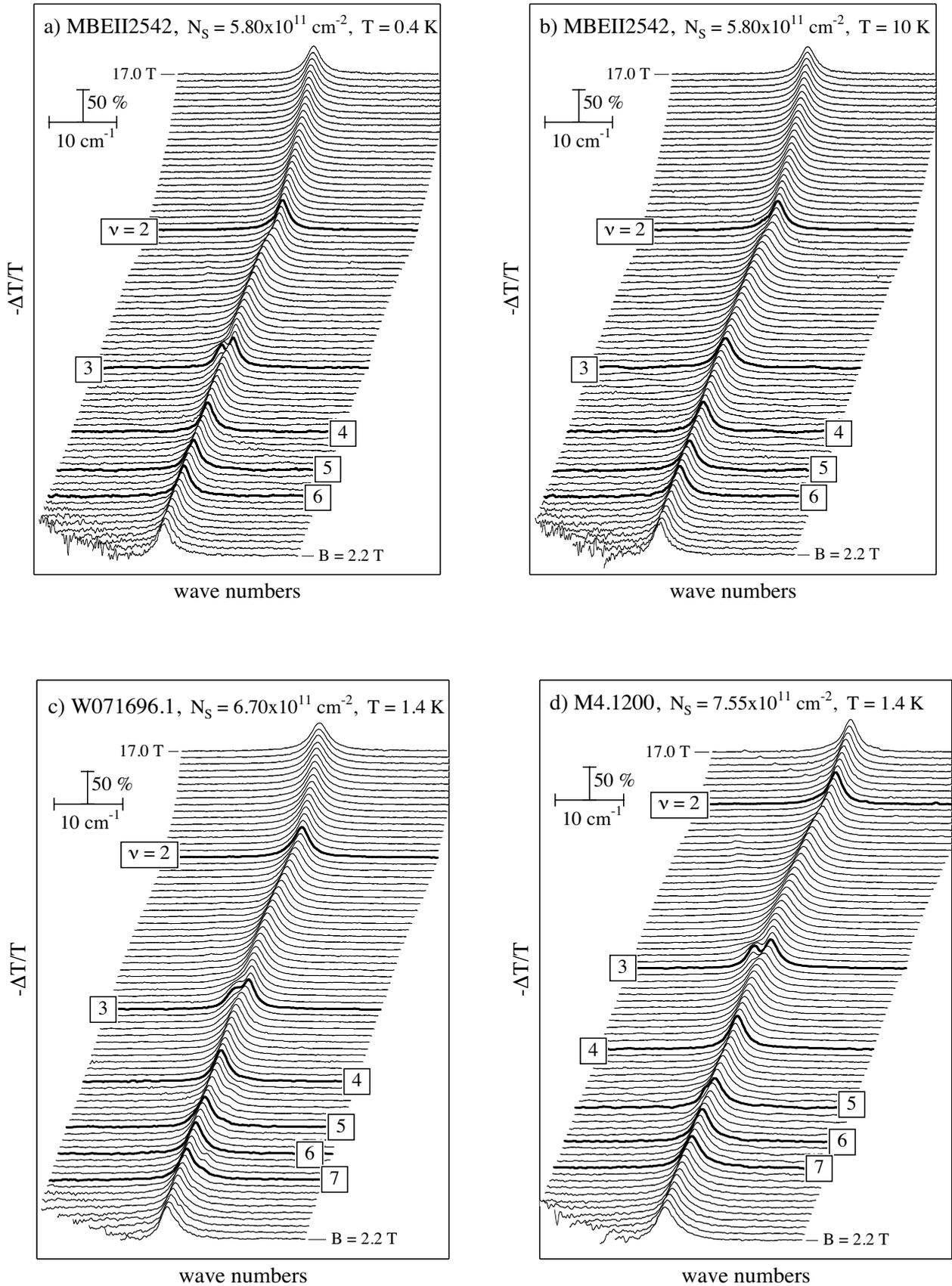


Abbildung 5.12: Gemessene Zyklotronresonanzspektren für Systeme im Regime hoher Dichten.

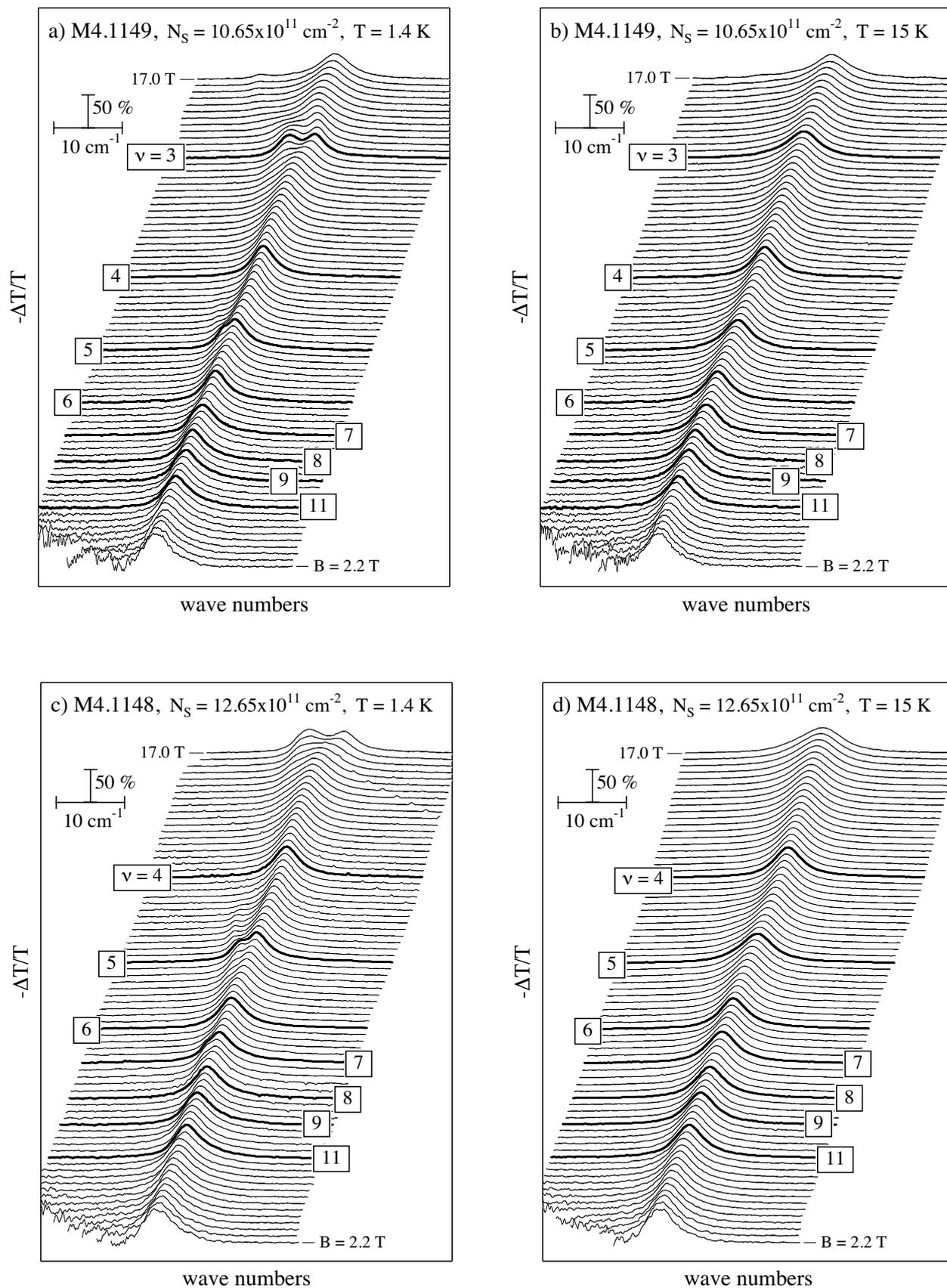
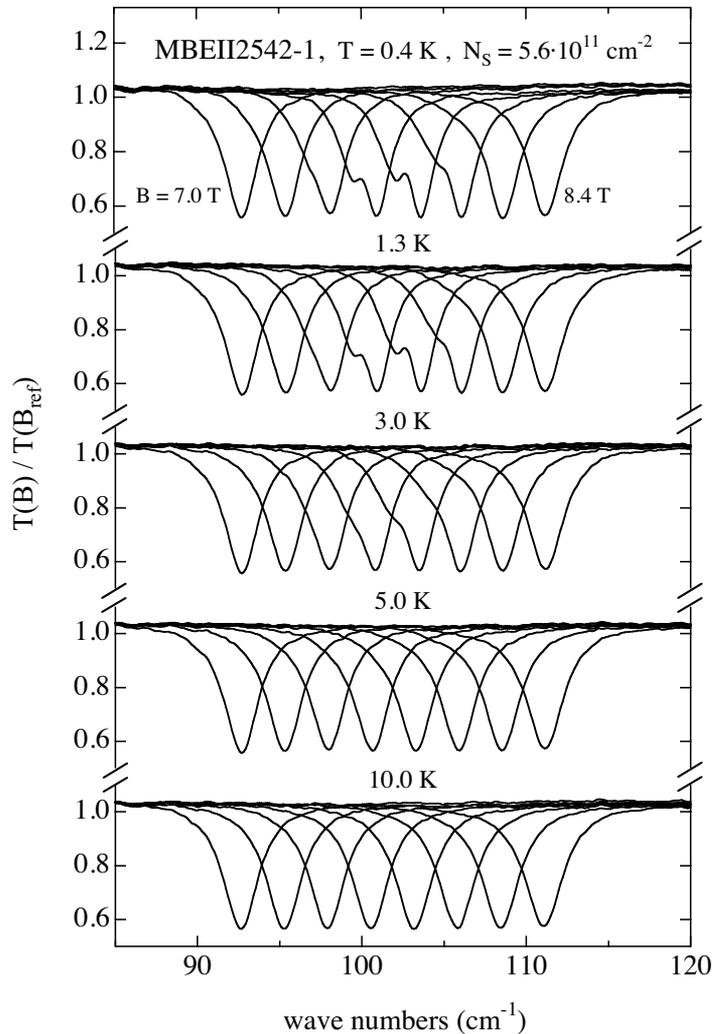
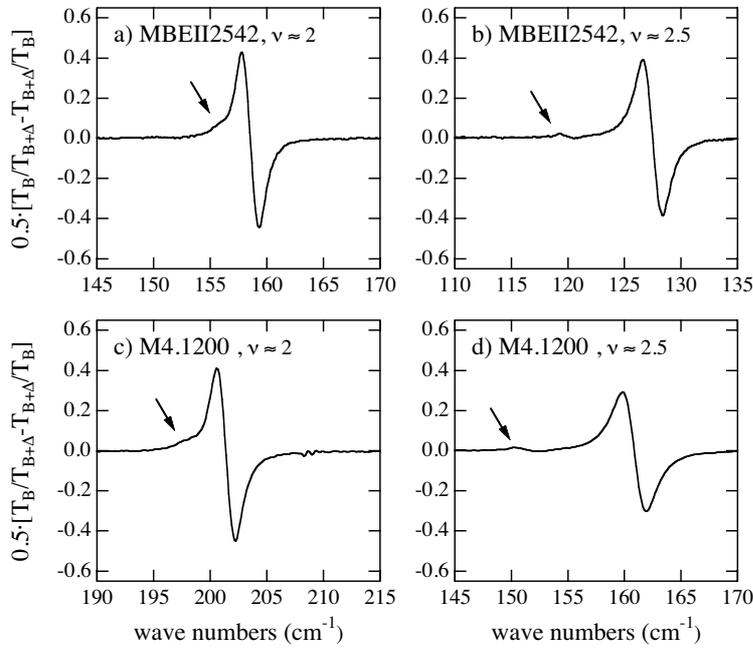


Abbildung 5.13: Gemessene Zyklotronresonanzspektren zweier Systeme im Regime sehr hoher Dichten.



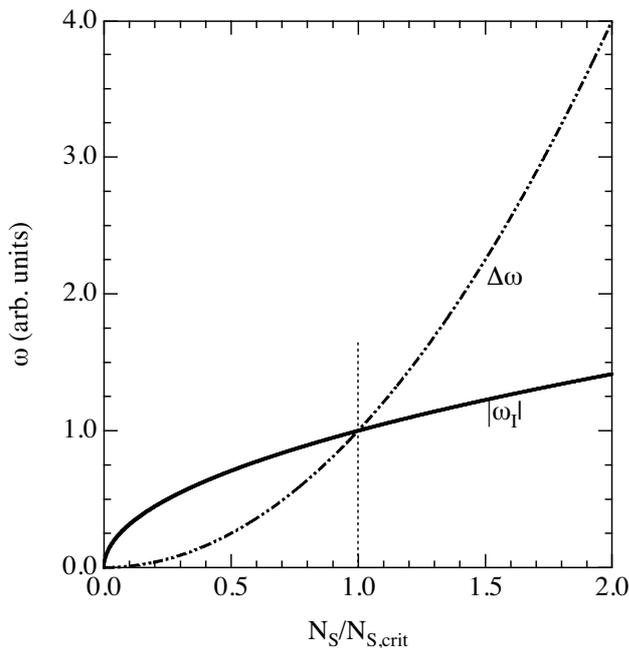
**Abbildung 5.14:** Thermische Auslöschung der Zyklotronresonanzaufspaltung bei  $\nu = 3$ . Die Probe entstammt dem gleichen Wafer wie diejenige aus den Figuren 5.3.1 a) und b).

Die Aufspaltungen beginnen zunächst, wie aus der Abbildung 5.3.1 a) ersichtlich ist, mit dem Füllfaktor  $\nu = 3$  und prägen sich mit ansteigender Dichte zunehmend aus. Dabei werden mit ansteigender Dichte auch die Linienaufspaltungen bei den höheren Füllfaktoren  $\nu = 5$  und  $\nu = 7$  immer besser aufgelöst. Anhand der Figuren 5.3.1 b), 5.12 b) und 5.3.1 b) erkennt man, daß die Aufspaltungen thermisch sehr instabil sind und für Temperaturen  $T > 5 - 10$  K generell verschwinden. Gleichzeitig verschwinden mit den Linienaufspaltungen, was hier nicht explizit dargestellt ist, auch die Minima im longitudinalen Magneto-Widerstand bei den ungeraden Füllfaktoren. Daraus folgt unmittelbar, daß die Linienaufspaltungen die Auflösung des Spins in den Besetzungen voraussetzen. Wie in den Abschnitten 6.2 und 7.1.3 noch explizit ausgeführt wird, ist in GaAs die Auflösbarkeit des Spins auf eine durch die Austauschwechselwirkung vergrößerte Zeeman-Lücke zurückzuführen, die sich erst bei sehr hohen Elektronenbeweglichkeiten und sehr niedrigen Temperaturen ausbildet. Eine solche Zeeman-Lücke existiert, solange nicht die für ihre Ausbildung benötigten Besetzungsdifferenzen zwischen den beiden Spineinstellungen durch thermische Aktivierung oder durch Landau-Niveaubreiterung infolge von störstelleninduzierter Streuung egalisiert werden [And76a, And82, Mac86a]. Zur Verdeutlichung der thermischen Auslöschung für die Linienaufspaltung bei  $\nu = 3$  dient die Abbildung 5.14. Anhand der Figur 5.6 b), in der klassisch berechnete Spektren für den Füllfaktor  $\nu = 3$  dargestellt sind, wird ferner klar, daß den Linienaufspaltungen eine negative Kopplungsfrequenz  $\omega_I < 0$  zugrunde liegt. Nur durch eine solche Kopplung können die generell gegenüber dem Einteilchen-Bild invertierten Linienstärken erklärt werden.

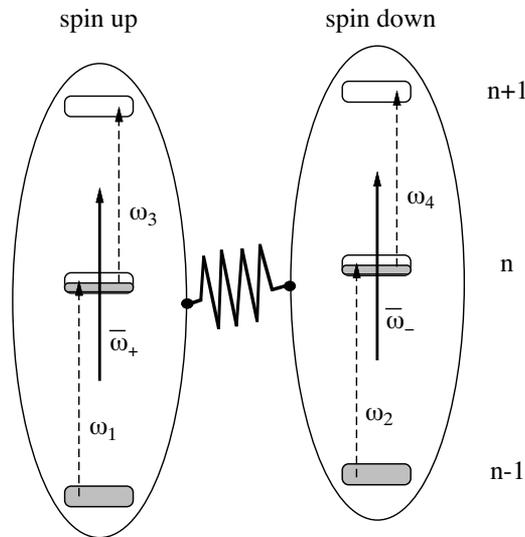


**Abbildung 5.15:** Quotientenspektren um die Füllfaktoren  $\nu = 2$  und  $\nu = 2.5$  für zwei verschiedene Proben bei tiefen Temperaturen. Die für eine Linienaufspaltung charakteristische Struktur ist jeweils mit einem Pfeil markiert. Die Magnetfelddifferenz beträgt  $\Delta = 0.1$  T.

Neben den ungeraden Füllfaktoren werden auch Aufspaltungen um den Füllfaktor  $\nu = 2$  sichtbar. Diese sind jedoch deutlich schwächer ausgeprägt als diejenigen bei den ungeraden Füllfaktoren. Dies liegt daran, daß bei ungeraden Füllfaktoren die Landau-Aufspaltung der Zyklotronresonanz und bei geraden Füllfaktoren die deutlich geringere Spinaufspaltung vorliegt. Dies wird anhand der Darstellungen 2.13 und 2.14 ersichtlich. Zur Hervorhebung der besagten Aufspaltung zeigen die Abbildungen 5.15 a) und c) den gemittelten Quotienten (Bildungsvorschrift siehe Achsbeschriftung) zweier unmittelbar benachbarter Spektren bei  $\nu = 2$ . In der gewählten Darstellung werden schwach ausgeprägte Linienaufspaltungen leichter erkennbar. Die Teilfiguren 5.15 b) und d) zeigen weiterhin Quotientenspektren um den Füllfaktor  $\nu \approx 2.5$ . Hier tritt neben der nicht-aufgespaltenen Hauptresonanz eine abgesetzte schwache Satellitenstruktur auf, die im Übergangsbereich  $2 < \nu < 3$  und  $\nu = 3$  den Vorböten der Aufspaltung bei  $\nu = 3$  darstellt.



**Abbildung 5.16:** Schematische Dichteabhängigkeit der Aufspaltungs- und Kopplungsfrequenzen bei konstanten Füllfaktoren.



**Abbildung 5.17:** Hybridisierungsschemata der gekoppelten Zyklotronresonanzen bei ungeradzahigen Füllfaktoren unter Spinentartung. Die Einteilchen-Übergangsfrequenzen sind entsprechend ihrer Größe durchnummeriert:  $\omega_1 > \omega_2 > \dots$ . Durch eine starke Austauschkopplung werden die Übergänge gleichen Spins zu dipolaktiven Hybridmoden  $\bar{\omega}_+$  und  $\bar{\omega}_-$  zusammengefaßt. Diese wiederum werden durch Korrelationen gekoppelt.

Zunächst gilt es zu erklären, weshalb sich erstens die beobachteten Resonanzanomalien einmal erst oberhalb einer kritischen Dichte und zum anderen ausgerechnet bei ungeraden Füllfaktoren herausbilden: Das Vorhandensein einer kritischen Dichte läßt sich verstehen, indem man verifiziert, daß die Landau- und Spinaufspaltungsfrequenzen  $\Delta\omega \propto B^2$  quadratisch mit dem Magnetfeld skalieren, während typische Frequenzen aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung, wie auch die Kopplungsfrequenz  $\omega_I \propto 1/l_m \propto \sqrt{B}$ , im 2D-Grenzfall reziprok mit der magnetischen Länge und damit wurzelförmig mit  $B$  ansteigen. Betrachtet man einen festen Füllfaktor  $\nu$ , so übersetzt sich die Magnetfeldabhängigkeit direkt in eine Dichteabhängigkeit gemäß  $N_S \propto|_{\nu=\text{const}} B$ . Damit haben die für die Zyklotronresonanz relevanten Frequenzen  $\Delta\omega$  und  $\omega_I$  unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten von der Elektronendichte gemäß  $\Delta\omega \propto|_{\nu=\text{const}} N_S^2$  und  $\omega_I \propto|_{\nu=\text{const}} \sqrt{N_S}$ . Wie es in der Abbildung 5.16 schematisch illustriert ist, schneiden sich die beiden Verläufe bei einer Dichte  $N_{S,\text{crit}}$ . Diese markiert die Grenze zwischen dem Regime niedriger Dichte, in dem die Kopplung dominiert, und dem Regime hoher Dichte, in dem die Aufspaltung überwiegt. Unterhalb  $N_{S,\text{crit}}$  sind generell keine Aufspaltungen beobachtbar, während oberhalb  $N_{S,\text{crit}}$  Aufspaltungen sichtbar werden, die asymptotisch für  $\Delta\omega \gg \omega_I$  einem Verhalten zustreben, das dem Einteilchen-Bild entspricht. Das Auftreten der Aufspaltungen bei speziell den ungeradzahigen Füllfaktoren hat zwei Ursachen. Zum einen ist dort die im Verhältnis zur Spinaufspaltung starke Landau-Aufspaltung wirksam. Zum anderen sind generell bei ganzzahligen Füllfaktoren, wenn man die Auflösung des Spins in den Besetzungen voraussetzt, stets zwei Zyklotronübergänge aktiv, die zu unterschiedlichen Spinprojektionen gehören. Für solche Übergänge ist die Austauschkopplung gemäß der Beziehung 5.55 nicht wirksam, so daß lediglich eine Korrelationskopplung übrig bleibt. Letztere ist bei entsprechenden Dichten im Vergleich zur Aufspaltungsfrequenz der Einteilchen-Übergänge offenbar derart gering, daß im Experiment die Linienaufspaltungen hervortreten.

Mit zunehmender Temperatur (vergleiche Figur 5.14) wird zunehmend eine Gleichbesetzung der Spinorientierungen hergestellt, wobei die Linienaufspaltungen sehr schnell verschwinden. Das schnelle Verschwinden kann mit der Austauschkopplung erklärt werden, welche mit der thermischen Aufhebung der scharfen Besetz-

ungsgrenzen wieder ins Spiel kommt:

Im Grenzfall der Spinentartung existieren speziell beim Füllfaktor  $\nu = 3$  vier Einteilchen-Übergänge, von denen jeweils zwei zur gleichen Spinprojektion gehören und sich energetisch im wesentlichen in der Landau-Aufspaltung unterscheiden. Die Übergänge mit gleichem Landau-Index und verschiedenem Spin differieren jeweils nur um die Spinaufspaltungsfrequenz (siehe Figur 2.12). Bei Vorliegen einer starken Austauschkopplung werden zunächst die Übergänge gleichen Spins zu jeweils einer Resonanz hybridisiert, deren Frequenz jeweils dem gewichteten Mittel aus den beteiligten Einteilchen-Übergangsfrequenzen entspricht. Die beiden Hybridmoden zu jedem Spin wiederum unterscheiden sich nach der Mittelung lediglich um die Spinaufspaltungsfrequenz. Diese ist im Vergleich zur Landau-Aufspaltung derart gering, daß bereits eine schwache Korrelationskopplung die Hybridmoden vollständig zu einer einzigen kollektiven Zyklotronresonanz zu verkoppeln vermag. Ein solches Hybridisierungsschema ist in Figur 5.17 schematisch aufgezeigt und stellt eine Erklärung für die Labilität der Aufspaltungen dar.

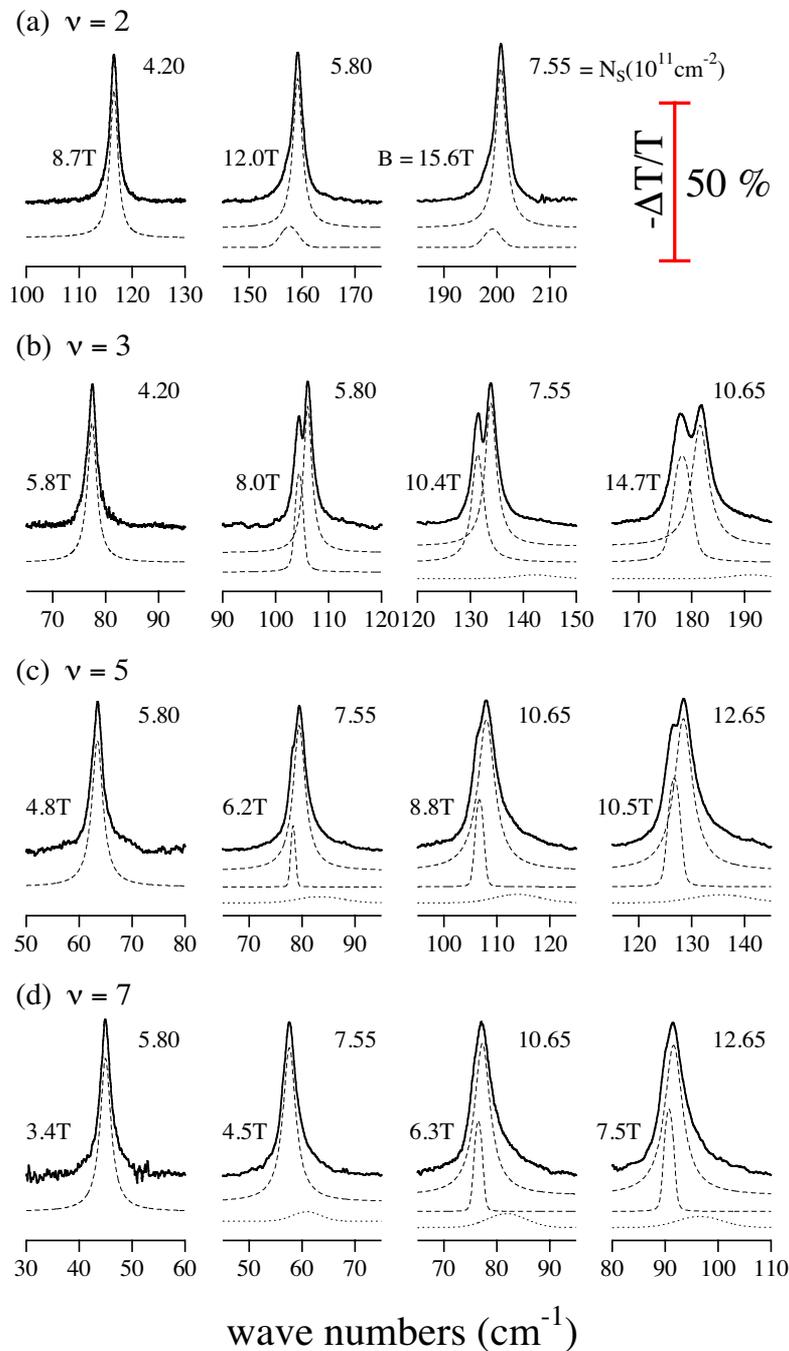
### 5.3.2 Auswertung der Linienaufspaltungen bei ganzzahligen Füllfaktoren

Bei ganzzahligen Füllfaktoren sind bei vollständiger Spinauflösung in den Besetzungen jeweils nur zwei Zyklotronübergänge im Landau-Schema aktiv. In diesen Fällen kann eine quantitative Analyse gemäß den vorausgehenden theoretischen Betrachtungen durchgeführt werden.

Dazu zeigt die Abbildung 5.18 die experimentellen Spektren verschiedener Proben und Dichten bei ganzzahligen Füllfaktoren zusammen mit den berechneten Anpaßkurven gemäß dem Leitfähigkeitsmodell 1.33 aus dem Abschnitt 1.5.1. Zunächst erkennt man an den Teilfiguren a) bis d) (siehe auch Figur 1.10) die Entwicklung der Linienaufspaltungen für die ganzzahligen Füllfaktoren, die sich mit zunehmender Dichte immer stärker ausprägen. Neben den beiden Hauptresonanzen mit vergleichbaren Breiten bildet sich bei den Quantentrogstrukturen ab Dichten von  $N_S = 7.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  eine signifikante breite Struktur heraus, die zur Linienbeschreibung benötigt wird und energetisch zu höheren Energien hin von den Hauptresonanzen abgesetzt ist.

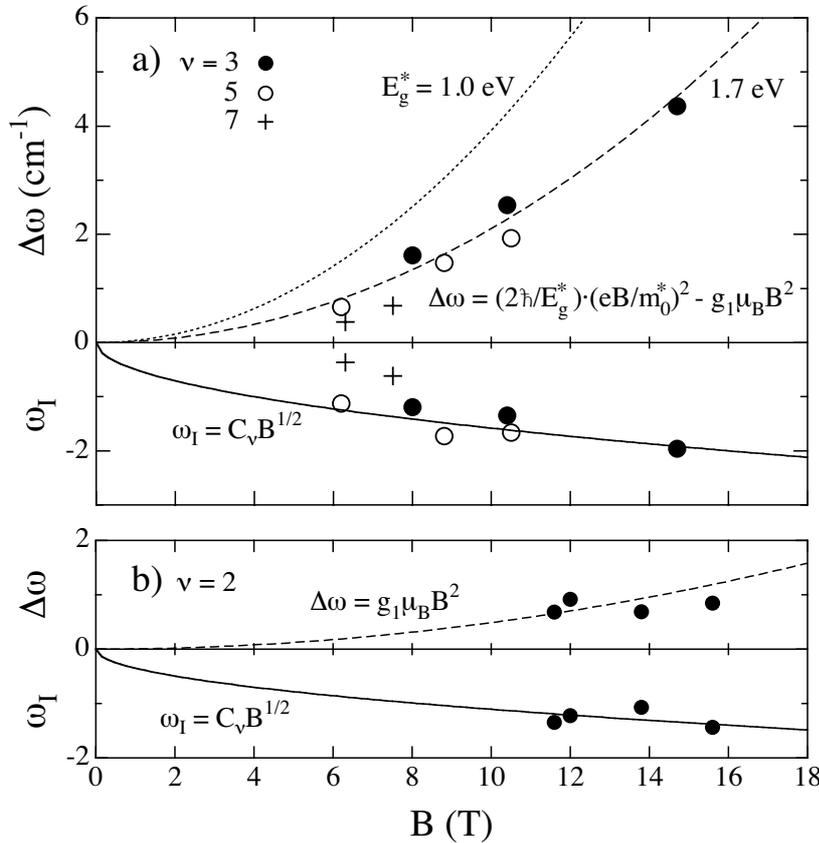
Die Auswertung der beiden Hauptlinien gemäß dem theoretischen Modell 5.69 ( $C = 0$ ) aus Abschnitt 5.2.3.3 ist in der Figur 5.19 zusammengefaßt. Dabei wurden die Einteilchen-Oszillatorstärken gemäß  $f_2 = 1/2$ ,  $\nu = 2$  und  $f_2 = (\nu + 1)/(2\nu)$ ,  $\nu = \text{ungerade}$  ( $f_1 = 1 - f_2$ ) vorausgesetzt und die Frequenzen  $\Delta\omega$  und  $\omega_I$  aus der Aufspaltungsfrequenz und dem Verhältnis der Linienstärken ausgewertet. Weiterhin sind den experimentellen Werten Kurven entsprechend  $\omega_I = C_\nu \sqrt{B}$  und  $\Delta\omega|_{\nu=3,5} = \left[ 2\hbar (e/m_0^*)^2 / E_g^* - g_1 \mu_B \right] B^2$  bzw.  $\Delta\omega|_{\nu=2} = g_1 \mu_B B^2$  unterlegt, wie sie gemäß dem vorausgehenden Abschnitt und aufgrund der Leitungsband-Nichtparabolizität zu erwarten sind. Die gezeigte Anpassung an  $\Delta\omega$  ergibt eine effektive Energielücke  $E_g^* = 1.7 \text{ eV}$ , die sehr gut mit dem theoretisch vorhergesagten Wert  $E_{g,theo}^* \approx 1.75 \text{ eV}$  (siehe Auflistung 2.145) zusammenfällt. Auch für den Füllfaktor  $\nu = 2$  in Teilbild b) zeigt  $\Delta\omega$  einen Verlauf, der mit der Spinaufspaltung von Volumen-GaAs gut übereinstimmt. Insgesamt werden damit sämtliche Einteilchen-Aufspaltungsfrequenzen durch die Leitungsband-Nichtparabolizität in GaAs erklärt. Die offensichtliche Abwesenheit der Polaron-Renormierung bei diesen Füllfaktoren ist in Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen aus den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 auf den Einfluß der Besetzungseffekte zurückzuführen.

Die Kopplungsfrequenzen  $\omega_I$  zeigen in beiden Fällen a) und b) in der Tendenz allesamt eine Übereinstimmung mit dem  $\sqrt{B}$ -Verhalten, wie man es für ein strenges 2DEG erwartet. Die entsprechenden Konstanten  $C_\nu$  sind in der Bildbeschriftung angegeben und durchwegs negativ. An den in der Figur 5.18 dargestellten Spektren und ihren Anpassungen ist bereits mit bloßem Auge erkennbar, daß im Resonanzdoublett die energetisch höher gelegene Linie ein Lorentz-förmiges und die energetisch tiefer gelegene ein Gauß-förmiges Linienprofil



**Abbildung 5.18:** Entwicklung der Linienform der Zyklotronresonanz mit der Dichte für verschiedene Füllfaktoren: a)  $\nu = 2$ , b)  $\nu = 3$ , c)  $\nu = 5$  und d)  $\nu = 7$ . Die experimentellen Spektren sind durch durchgezogene und die einzelnen Resonanzbeiträge der Anpassungen sind durch gestrichelte und gepunktete Linien gekennzeichnet.

in der Leitfähigkeit aufweist. Eine Lorentz-förmige Resonanz kann man erwarten, wenn die zugrunde liegende Anregung ein geeignetes langreichweitiges Feld mit sich führt, das die Eigenschaft hat, die Anregung (selbstkonsistent) zu stabilisieren. Durch ein solches Feld wird das Aufbrechen der Anregung in lokale Moden oder Einteilchen-Resonanzen infolge von Streuung unterdrückt. Dieser Mechanismus führt insgesamt zu einem homogenen Verbreiterungsmechanismus. Gerade die Ladungsdichtemoden eines Q2DEG besitzen langreichweitige Dipolfelder und sind auch gemäß den experimentellen Befunden vorwiegend homogen verbreitert. Wird eine Anregung lediglich durch kurzreichweitige Felder, wie sie z.B. aufgrund des Austauschs vorliegen, begleitet, kann man erwarten, daß sie durch Streuung leicht in lokale Moden oder Einteilchen-Resonanzen zerfällt, da ihr die langreichweitige Stabilisierung fehlt. In diesem Fall resultiert ein vorwiegend inhomogener Verbreiterungsmechanismus mit entsprechender Gaußscher Linienform. Reine Spindichtemoden weisen lediglich



**Abbildung 5.19:** Ausgewertete Frequenzen  $\Delta\omega$  und  $\omega_I$  für a) ungerade Füllfaktoren und b)  $\nu = 2$ . Die eingezeichneten durchgezogenen, gestrichelten und gepunkteten Linien entsprechen Anpassungen und Vorhersagen. Die Parameter für die Kopplungsfrequenz lauten  $C_{\nu=3,5} = -0.5 \text{ cm}^{-1}\text{T}^{-\frac{1}{2}}$  beziehungsweise  $C_{\nu=2} = -0.35 \text{ cm}^{-1}\text{T}^{-\frac{1}{2}}$ .

kurzreichweitige Austauschfelder auf und sollten demzufolge in der Tendenz eher inhomogen verbreitert sein.

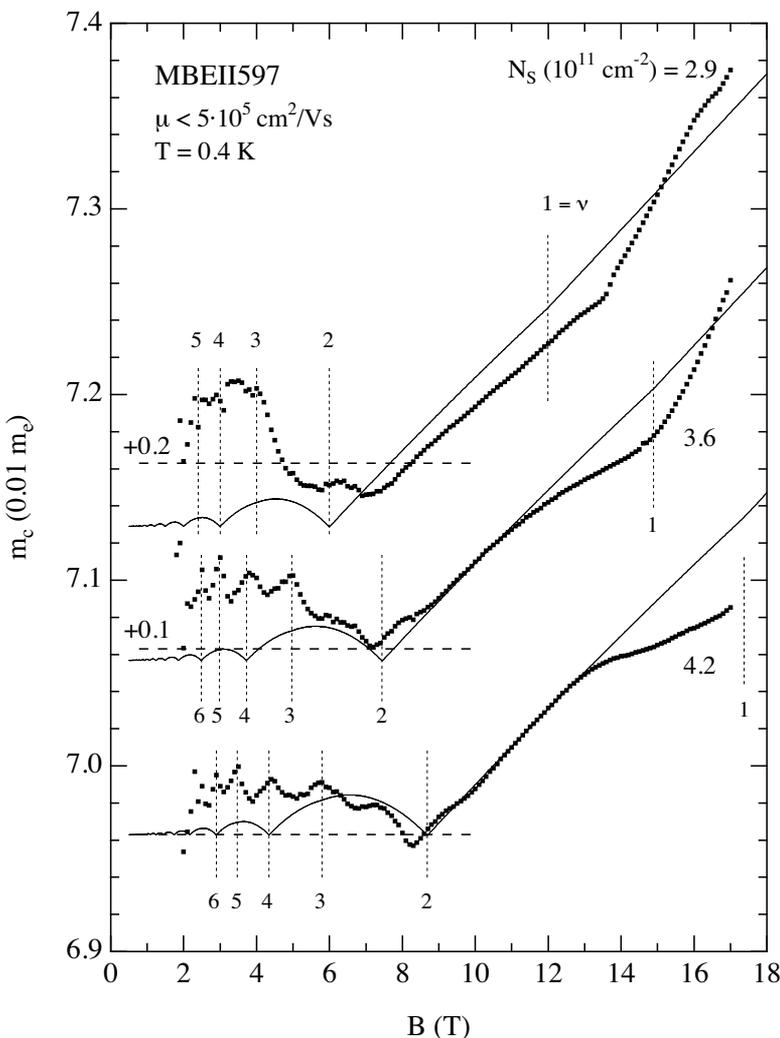
Nach den Betrachtungen aus dem Abschnitt 5.2.3.3 spiegelt sich in der Oszillatorstärke einer Hybridmode eines nichtparabolischen Q2DEG deren Ladungsdichtecharakter wider. Bei einem aufgespaltenen Zyklotronresonanzdoublett trägt demnach die stärkere Mode vorwiegend Ladungsdichte- und die schwächere entsprechend vorwiegend Spindichtecharakter. Gemäß obiger Argumentation sollte daher die stärkere Resonanz eher Lorentz- und die schwächere eher Gauß-förmig verbreitert sein. Diese Argumentation trifft zumindest auf die experimentellen Befunde für  $N_S < 1.1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  zu, wo die Lorentz-förmige Linie die Zyklotronresonanz dominiert. Allerdings ergeben detaillierte Auswertungen, die im Rahmen des sich anschließenden Abschnittes durchgeführt werden, daß die energetisch tiefer liegende Linie stets Gauß-förmig ist und auch bleibt, selbst wenn in Einklang mit dem Einteilchen-Bild ( $\Delta\omega > \omega_I$ ) die niederfrequente Resonanz für  $\nu \approx 3$  ab Dichten von  $11 - 12 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  die führende Rolle in der Linienstärke übernimmt (siehe Figur 5.25 b)). Demnach scheint abweichend von dem einfachen Bild mehr die Frequenz als die Oszillatorstärke den Modencharakter maßgeblich zu bestimmen.

Zuletzt wird kurz die breite Gauß-förmige Struktur oberhalb der eigentlichen Zyklotronresonanzen diskutiert. Diese tritt speziell bei den Quantentrogssystemen auf und prägt sich mit ansteigender Elektronendichte zunehmend stärker aus. Solche Strukturen werden unter anderem durch die Einwirkung von Streuung auf die Zyklotronresonanz theoretisch vorhergesagt [Wu,85, Ant92]. Da über Streuzentren prinzipiell die Translationsinvarianz in einem Q2DEG gebrochen wird, werden durch Störstellen induzierte Kopplungen zwischen der Zyklotronresonanz und den kurzwelligen Magneto-Plasmonen möglich. Solche Kopplungen reichen dabei generell umso weiter in den Impulsraum hinein, je kurzreichweitiger die Streupotentiale sind. Bei Wellenvektoren in der Größenordnung  $l_m^{-1}$  weisen die Magneto-Plasmondispersionen nach Voraussagen theoretischer

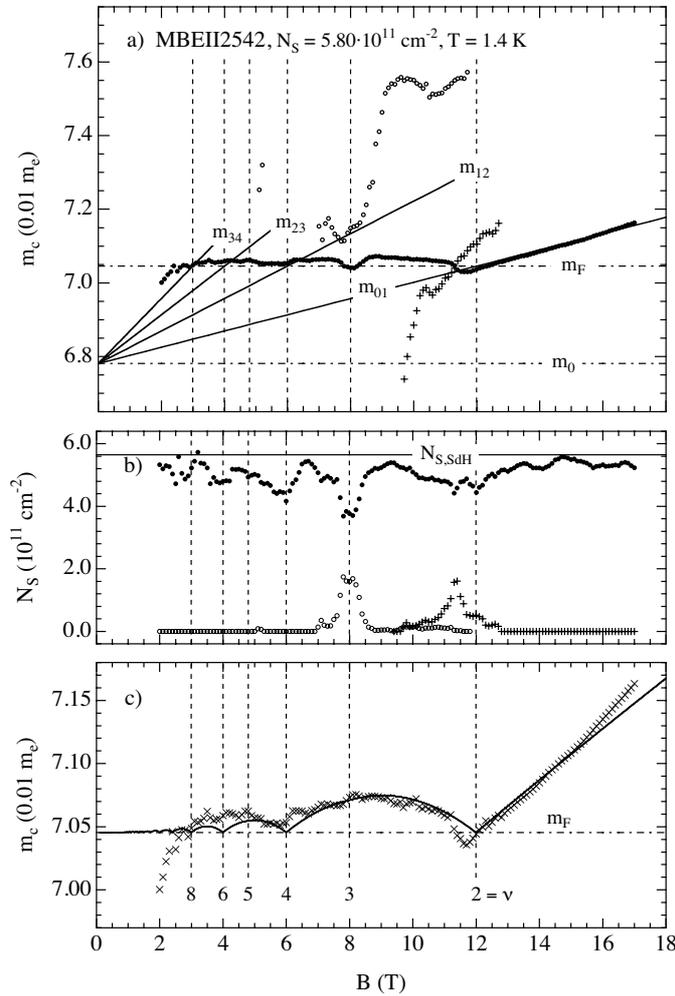
Berechnungen Minima mit hoher kombinierter Zustandsdichte für den Kopplungsprozeß auf [Mac85a, Kal84, Kal88a]. Solche Minima in den Kollektivmoden eines Q2DEG werden im Regime des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) oftmals als Rotonminima bezeichnet [Mac85b, Gir86]. Durch den speziellen Aufbau und die Funktionsweise der untersuchten Quantentrogstrukturen werden die in unmittelbarer Trognähe zahlreich vorhandenen ionisierten Donatoren durch Abschirmung in kurzreichweitige Streuzentren umgewandelt, was die hohen Beweglichkeiten solcher Systeme ermöglicht. Durch die zahlreichen kurzreichweitigen Streuer und ihre Impulsüberträge ist die Kopplung an die Rotonminima in der Plasmondispersion in diesen Systemen begünstigt. Dafür spricht insbesondere auch die beobachtbare Energieverschiebung der breiten Resonanzstruktur gegenüber der Zyklotronresonanz, die mit theoretischen Vorhersagen von  $\Delta E \approx (0.1-0.2) e^2 / (4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}l_m)$  gut übereinstimmt. In [Bat87] wurden in der Zyklotronresonanz von Multiquantentrogstrukturen erste Indizien für eine solche Ankopplung gefunden. Eine experimentelle Bestätigung der durch Störstellen induzierten Ankopplung an die Rotonminima der Kollektivmodendispersionen wurde schließlich in [Pin88] durch Raman-Streuung erbracht.

### 5.3.3 Analyse der mittleren Masse: Intrinsische versus extrinsische Zyklotronresonanz

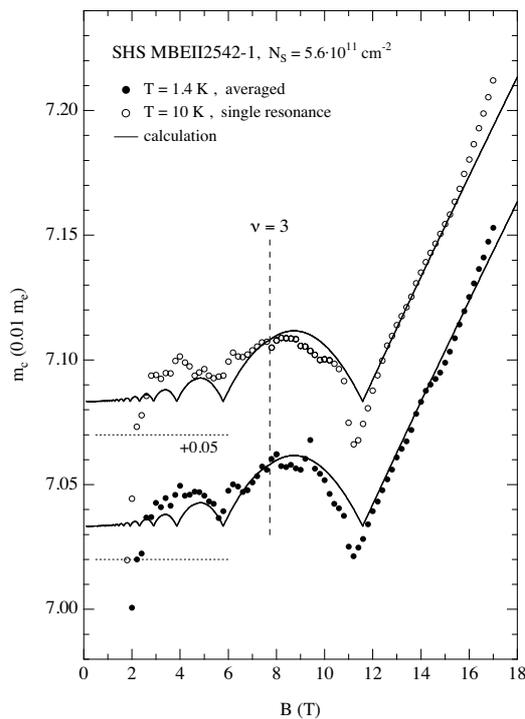
In diesem Abschnitt erfolgt eine detaillierte Auswertung und Analyse der gemessenen Zyklotronresonanzen über den gesamten Magnetfeldbereich.



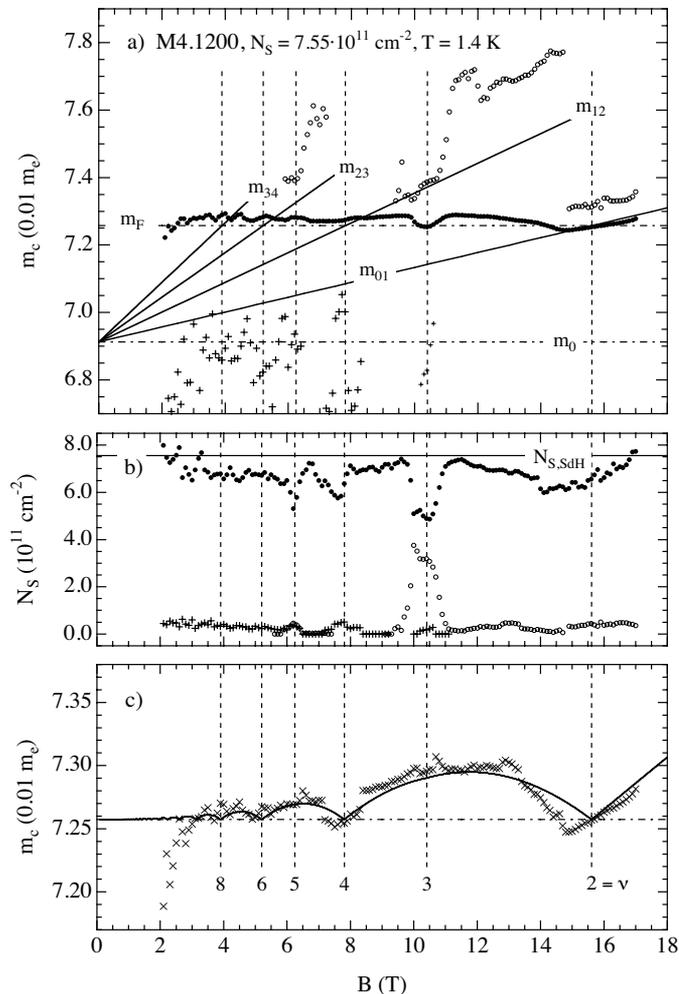
**Abbildung 5.20:** Massenvariationen mit dem Magnetfeld für eine mit Gateelektrode versehene Einzelheterostruktur mittlerer Elektronenbeweglichkeit bei 3 Dichten. Die experimentellen Werte sind als Punkte eingetragen und die gerechneten Verläufe als durchgezogene Linien. Die senkrechten kurzgestrichelten Linien markieren ganzzahlige Füllfaktoren und die waagrechten gestrichelten Linien markieren die Referenzlinien der entlang der Massenachse um die angegebenen Werte verschobenen Verläufe.



**Abbildung 5.21:** Auswertung der gesamten Zyklotronresonanz-Meßreihe für eine Einfachheterostruktur hoher Dichte. Das Teilbild a) zeigt die ausgewerteten Massen der Einzellinien (Symbole) und den theoretischen Massenfächer (durchgezogene Linien). In Teilbild b) sind die ausgewerteten Linienstärken als Partialdichten (Symbole) und die aus Transportdaten bestimmte Dichte (waagrechte Linie) dargestellt. Die gemittelten experimentellen Zyklotronmassen (Kreuze) sind in Teilfigur c) aufgetragen und mit dem theoretischen Verlauf (durchgezogene Linie) unterlegt. Zur Orientierung sind die ganzzahligen Füllfaktoren und die Massen an der Subband-Kante sowie an der Fermi-Energie durch entsprechende Linien markiert. Die Parameter des Massenfächers lauten:  $m_s = 6.781 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  und  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$ .



**Abbildung 5.22:** Experimentelle Überprüfung der Massensummenregel durch den Vergleich von expliziter und impliziter Mittelung. Die vollen Symbole markieren die aus den aufgespaltenen Resonanzprofilen durch explizite Mittelung gebildeten Massen und die offenen Symbole die Massen der bei höheren Temperaturen vorhandenen Einfachresonanz. Unterlegt sind jeweils die theoretischen Verläufe (durchgezogene Linien). Die Kurven für  $T = 10 \text{ K}$  sind dabei um den eingetragenen Wert entlang der Massenachse verschoben. Die hier verwendete Probe entstammt dem gleichen Wafer wie diejenige aus Figur 5.21.

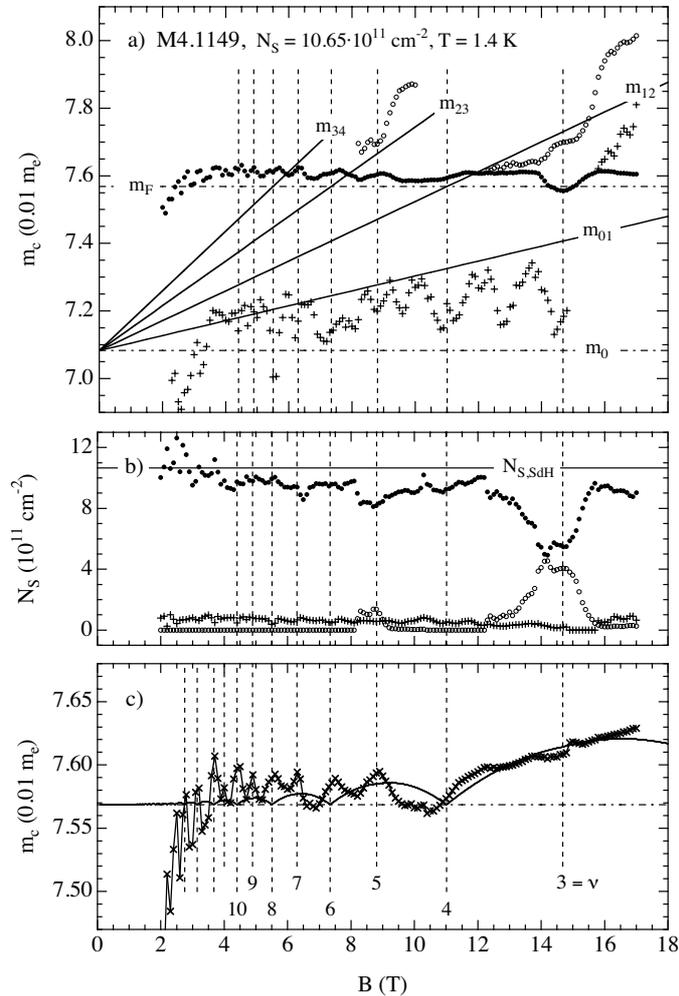


**Abbildung 5.23:** Auswertung der gesamten Zyklotronresonanz-Meßreihe für einen Quantentrog mit 14 nm Breite und hoher Dichte. Das Teilbild a) zeigt die ausgewerteten Massen der Einzellinien (Symbole) und den theoretischen Massenfächer (durchgezogene Linien). In Teilbild b) sind die ausgewerteten Linienstärken als Partialdichten (Symbole) und die aus Transportdaten bestimmte Dichte (waagrechte Linie) dargestellt. Die gemittelten experimentellen Zyklotronmassen (Kreuze) sind in Teilfigur c) aufgetragen und mit dem theoretischen Verlauf (durchgezogene Linie) unterlegt. Zur Orientierung sind die ganzzahligen Füllfaktoren und die Massen an der Subband-Kante sowie an der Fermi-Energie durch entsprechende Linien markiert. Die Parameter des Massenfächers lauten:  $m_s = 6.913 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  und  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$ .

Zunächst zeigt die Abbildung 5.20 die ausgewerteten Zyklotronmassen für drei Meßreihen mit unterschiedlicher Dichte an einer Einfachheterostruktur mit Gateelektrode. Ein Ausschnitt der zugrunde liegenden Spektren ist in der Figur 5.11 gezeigt. Man erkennt daran, daß die Zyklotronmassen der nicht-aufgespaltenen Resonanzen deutlich mit dem Magnetfeld variieren. Dabei treten vorwiegend höhere Füllfaktoren als Maxima in Erscheinung. Unterlegt sind den Meßkurven die Massenverläufe, die man theoretisch erwarten würde, wenn man eine Nichtparabolizität mit einer effektiven Energielücke  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  voraussetzt (siehe Abschnitt 4.3.3). Wie man der Auftragung entnimmt, weisen die experimentellen Kurven, abgesehen vom tendenziellen Massenanstieg für Füllfaktoren  $\nu < 2$ , kaum Ähnlichkeiten mit den gerechneten auf. Die Elektronenbeweglichkeit der Probe ist laut Herstellerangaben im mittleren Regime um  $5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$  anzusiedeln. Aufgrund dieser Information liegt die sich im Laufe dieses Abschnittes bestätigende Vermutung nahe, daß die beobachteten Strukturen in der Masse vorwiegend auf den Einfluß von Störstellen zurückzuführen sind.

Die Figur 5.21 zeigt die Auswertung für die Einfachheterostruktur, deren Spektren in der Abbildung 5.13 dargestellt sind. Aufgrund des aufgespaltenen Resonanzprofils sind hier mehrere Linien in der Auswertung berücksichtigt. Im Teilbild a) sind die Resonanzpositionen wiederum als Massen dargestellt und in b) die Linienstärken in Form partieller Dichten. Die mittlere Masse in Teilbild c) wurde über die Vorschrift

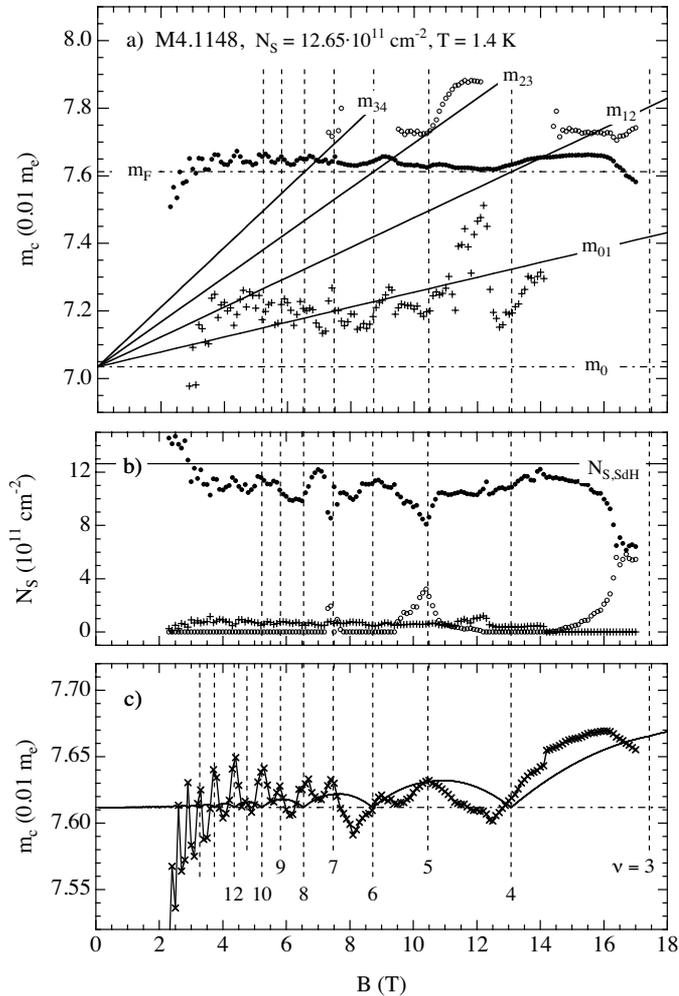
$$\langle m_c \rangle^{-1} = \frac{1}{\sum_{K'} N_{S,K'}} \sum_K \frac{N_{S,K}}{m_{c,K}} \quad (5.86)$$



**Abbildung 5.24:** Auswertung der gesamten Zyklotronresonanz-Meßreihe für einen Quantentrog mit 10 nm Breite und sehr hoher Dichte. Das Teilbild a) zeigt die ausgewerteten Massen der Einzellinien (Symbole) und den theoretischen Massenfächer (durchgezogene Linien). In Teilbild b) sind die ausgewerteten Linienstärken als Partialdichten (Symbole) und die aus Transportdaten bestimmte Dichte (waagrechte Linie) dargestellt. Die gemittelten experimentellen Zyklotronmassen (Kreuze) sind in Teilfigur c) aufgetragen und mit dem theoretischen Verlauf (durchgezogene Linie) unterlegt. Zur Orientierung sind die ganzzahligen Füllfaktoren und die Massen an der Subband-Kante sowie an der Fermi-Energie durch entsprechende Linien markiert. Die Parameter des Massenfächers lauten:  $m_s = 7.083 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  und  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$ .

aus den einzelnen experimentellen Linien mit Index  $K$  gebildet und repräsentiert den Resonanzschwerpunkt. Entsprechend der Frequenzsummenregel 5.63 sollte die mittlere Resonanzfrequenz gerade dem gewichteten Mittel des zugrunde liegenden Einteilchen-Übergangsschemas entsprechen. Letzteres ist in der Teilfigur a) als Massenfächer unterlegt, wobei in der Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit die Spinaufspaltungen nicht berücksichtigt sind. Die theoretische mittlere Masse über die gewichteten Einteilchen-Übergänge ist im Teilbild c) dem experimentellen Verlauf unterlegt. Im Gegensatz zur Figur 5.21 zeigt hier die mittlere Masse eine nahezu quantitative Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell. Dabei treten sowohl die charakteristischen Variationen mit dem Magnetfeld in Form aneinandergereihter Bogensegmente als auch der lineare Anstieg für  $\nu < 2$  deutlich hervor. Dem linearen Anstieg ist ansatzweise der nicht-lineare Resonanzanstieg der Polaron-Vollfeldkopplung überlagert. Die hohe Dichte wurde an diesem System durch Beleuchtung mit NIR-Strahlung eingestellt. Bei diesem Verfahren wird neben der Dichteerhöhung auch ein deutlicher Anstieg in den Elektronenbeweglichkeiten erreicht. Man kann anhand der Befunde davon ausgehen, daß in der Zyklotronresonanz für dieses System die intrinsischen Einflüsse der Bandstruktur und des Polaron-Effektes die extrinsischen Einflüsse aufgrund von Störstellen überwiegen.

Bereits bei einer geringen thermischen Aktivierung von  $T \approx 5 - 10 \text{ K}$  wird in dem System aus Figur 5.24 Spinartung erreicht, wobei die Linienaufspaltungen verschwinden. Da der Spinfreiheitsgrad bei der Nichtparabolizität lediglich eine untergeordnete Rolle spielt, sollte das zugrunde liegende Einteilchen-Resonanzschema für den spinaufgelösten und den spinentarteten Fall nahezu identisch sein. Man kann deshalb



**Abbildung 5.25:** Auswertung der gesamten Zyklotronresonanz-Meßreihe für einen Quantentrog mit 10 nm Breite und sehr hoher Dichte. Das Teilbild a) zeigt die ausgewerteten Massen der Einzellinien (Symbole) und den theoretischen Massenfächer (durchgezogene Linien). In Teilbild b) sind die ausgewerteten Linienstärken als Partialdichten (Symbole) und die aus Transportdaten bestimmte Dichte (waagrechte Linie) dargestellt. Die gemittelten experimentellen Zyklotronmassen (Kreuze) sind in Teilfigur c) aufgetragen und mit dem theoretischen Verlauf (durchgezogene Linie) unterlegt. Zur Orientierung sind die ganzzahligen Füllfaktoren und die Massen an der Subband-Kante sowie an der Fermi-Energie durch entsprechende Linien markiert. Die Parameter des Massenfächers lauten:  $m_s = 7.035 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  und  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$ .

für die mittlere Resonanzfrequenz bzw. die mittlere Zyklotronmasse nach der Summenregel 5.63 in beiden Fällen einen nahezu identischen Verlauf erwarten. Während im Falle einer einzelnen Resonanz, wie sie bei Spinartung gegeben ist, bereits eine implizite Mittelung vorliegt, ist bei Mehrfachresonanzen, wie sie im spinaufgelösten Fall beobachtet werden, eine explizite Mittelung über alle Resonanzen durchzuführen. Zur Bestätigung dieser Feststellung sind in der Abbildung 5.22 für das System aus Figur 5.21 die explizit gemittelte mittlere Masse bei  $T = 1.4 \text{ K}$  zusammen mit der Masse der bei  $T = 10 \text{ K}$  vorhandenen Einzelresonanz aufgetragen. Als Referenz ist wiederum die theoretische mittlere Masse unterlegt. An der Auftragung erkennt man, daß die beiden experimentellen Verläufe insbesondere um den Füllfaktor  $\nu = 3$  sehr gut miteinander übereinstimmen und damit die Frequenzsummenregel und das zugrunde liegende Einteilchen-Resonanzschema insgesamt bestätigen.

Die Abbildung 5.23 zeigt die zur Figur 5.25 analoge Auswertung für das Quantentrogssystem, dessen Spektren in der Figur 5.13 d) gezeigt sind. Auch hier ist der Verlauf der mittleren Masse in weitgehender Übereinstimmung mit der theoretisch berechneten. Insgesamt zeigen die Verläufe abgesehen von der für die Quantentrogssysteme typischen breiten Gauß-förmigen Struktur oberhalb der eigentlichen Zyklotronresonanzen weitgehend die identischen Merkmale einer intrinsischen Zyklotronresonanz wie diejenigen aus der Figur 5.21.

Gemäß den Schlußfolgerungen aus den Auswertungen 5.21 und 5.23 offenbaren sich die Signaturen einer intrinsischen Zyklotronresonanz in einer mittleren Zyklotronmasse, die das zugrunde liegende Einteilchen-

Resonanzschema widerspiegelt. Letzteres ist vom Standpunkt der mittleren Masse aus in weitgehender Übereinstimmung mit einer durch Polaron-Effekte renormierten effektiven Leitungsband-Nichtparabolizität, die durch eine effektive Lücke  $E_g^* \approx 1050$  meV parametrisiert ist. Der Ansatz der resonanten Polaron-Kopplung erfolgt in Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen generell erst bei Füllfaktoren  $\nu < 2$ , wenn die Besetzungsblokaden im untersten Landau-Niveau zunehmend aufgehoben werden. Im Vergleich zur mittleren Masse sind die Aufspaltungen bei den ungeradzahligen Füllfaktoren nach den Auswertungen aus dem vorausgehenden Abschnitt 5.3.2 mit einer effektiven Lücke  $E_g^* \approx 1700$  meV deutlich reduziert. Beide Befunde scheinen zunächst miteinander in Widerspruch zu stehen. Allerdings wird dieser Widerspruch nach den Vorbetrachtungen in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 aufgelöst, wenn die Polaron-Renormierung der Einteilchen-Übergänge für beide Spinprojektionen derart erfolgt, daß sie in der Linienaufspaltung nicht wirksam wird.

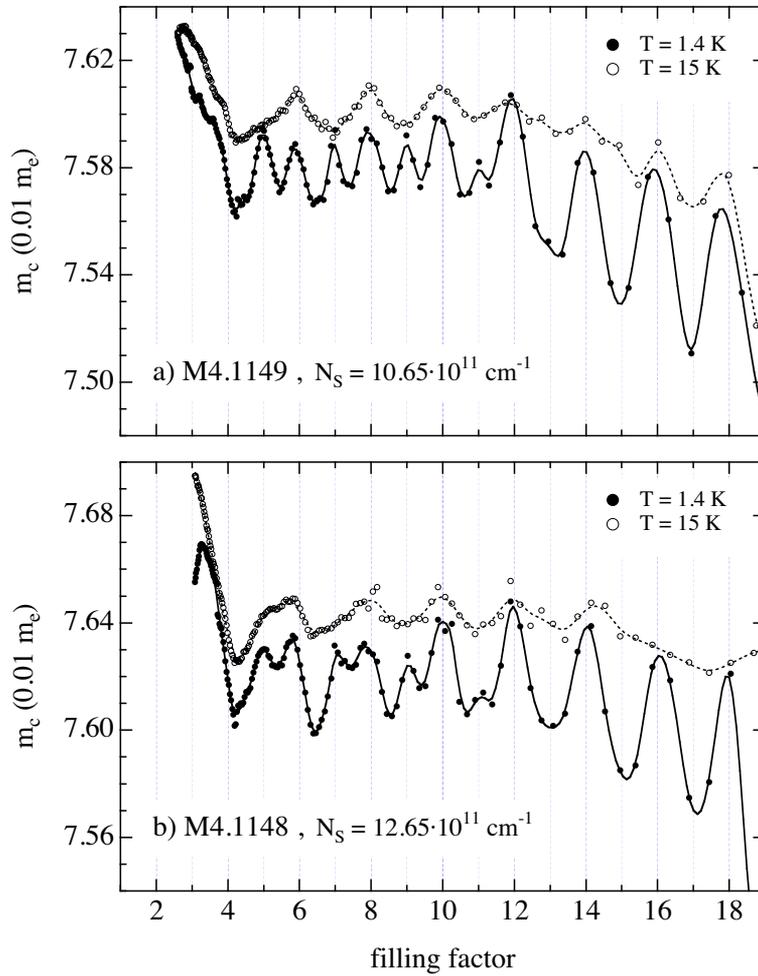
Die Auswertung der Spektren aus der Figur 5.12 ist in der Abbildung 5.24 dargestellt. Auch hier sind die Merkmale der aufgespaltenen Zyklotronresonanz in weitgehender Übereinstimmung zu den vorherigen. Allerdings weist die mittlere Masse deutlich stärkere Variationen mit dem Magnetfeld auf, die nur ansatzweise eine intrinsische Zyklotronresonanz erkennen lassen. In der mittleren Masse treten für ganzzahlige Füllfaktoren ab  $\nu > 4$  bis hinauf zu  $\nu = 20$  Maxima signifikant hervor, wie es auch in der Figur 5.20 der Fall ist. Demnach scheinen sich hier extrinsische Einflüsse auf die Zyklotronresonanz den intrinsischen zu überlagern. Noch deutlicher tritt dies in dem System mit der höchsten hier untersuchten Dichte in Figur 5.25 auf. Dies liegt daran, daß auch in diesen speziellen Quantentrogssystemen der Einfluß geladener Störstellen mit der Elektronendichte zunimmt. Eine tiefergehende Interpretation der störstelleninduzierten Merkmale in der Zyklotronresonanz geschieht im folgenden Abschnitt.

### 5.3.4 Wirkung langreichweitiger Streuzentren auf die Zyklotronresonanz

Bei den Systemen aus den Abbildungen 5.24, 5.25 und 5.21 dominieren Oszillationen mit ausgeprägten Maxima bei ganzzahligen Füllfaktoren die Variation der (gemittelten) Zyklotronmasse. Unter Kenntnis der intrinsischen Zyklotronresonanz, die im wesentlichen auf der durch Polaron-Kopplungen renormierten Nichtparabolizität des Leitungsbandes beruht, kann dieser Befund zweifelsfrei auf die Wirkung von Störstellen zurückgeführt werden. Gegenstand dieses Abschnittes wird daher die Entwicklung eines einfachen Bildes sein, das die wesentlichen Aspekte der beobachteten Massenvariationen zumindest qualitativ zu erklären vermag.

Zur Verdeutlichung der experimentellen Befunde zeigen die Auftragungen in der Figur 5.26 für die beiden Proben mit den höchsten Dichten die bei den Temperaturen  $T = 1.5$  K und  $T = 15$  K gemessenen (gemittelten) Zyklotronmassen als Funktion des Füllfaktors. Zur Kompensation der mit steigendem Füllfaktor zunehmendem Unterabtastung sind die Meßwerte jeweils mit Interpolationskurven (schwach glättend) unterlegt. Man erkennt anhand der Auftragungen deutlich die Massenoszillationen bis hinauf zum Füllfaktor  $\nu = 18$ . Dabei sind die Oszillationen bei der höheren Temperatur deutlich geringer ausgeprägt als bei der tiefen Temperatur, wobei sich die Verläufe zwar abschnittsweise berühren, aber niemals überschneiden. Die Zwischenmaxima bei ungeradzahligen Füllfaktoren, die spinaufgelöste Niveaubesetzungen voraussetzen und bei 1.5 K bis hinauf zu  $\nu = 11$  aufgelöst werden, sind bei der höheren Temperatur infolge der dort herrschenden Spinartung nicht mehr vorhanden.

Die Erklärung der charakteristischen Variationen basiert auf der in Abschnitt 5.2.2.4 vorgestellten Beschreibung, welche die Wirkung des (langreichweitigen) Störstellenpotentials effektiv zu einem parabolischen Einschlußpotential zusammenfaßt. Bildlich dargestellt erfährt dabei jedes Elektron entsprechend der an seinem Ort



**Abbildung 5.26:** Variationen der (gemittelten) Zyklotronmasse als Funktion des Füllfaktors für zwei Quantentrogssysteme mit einer Trogbreite von 10 nm. Die experimentellen Meßwerte für  $T = 1.5$  K sind durch volle Kreise und die für  $T = 15$  K durch leere Kreise markiert. Die Interpolationskurven sind als durchgezogene beziehungsweise gepunktete Linien eingezeichnet.

herrschenden Krümmung  $k = \omega_{imp}^2 m^*$  des Hintergrundpotentials<sup>2</sup> eine lokale Variation der Zyklotronfrequenz gemäß [Zar91, Mer96, Wid98]

$$\tilde{\omega}_c = \frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_{imp}^2} \approx \omega_c + \frac{\omega_{imp}^2}{\omega_c}, \quad (5.87)$$

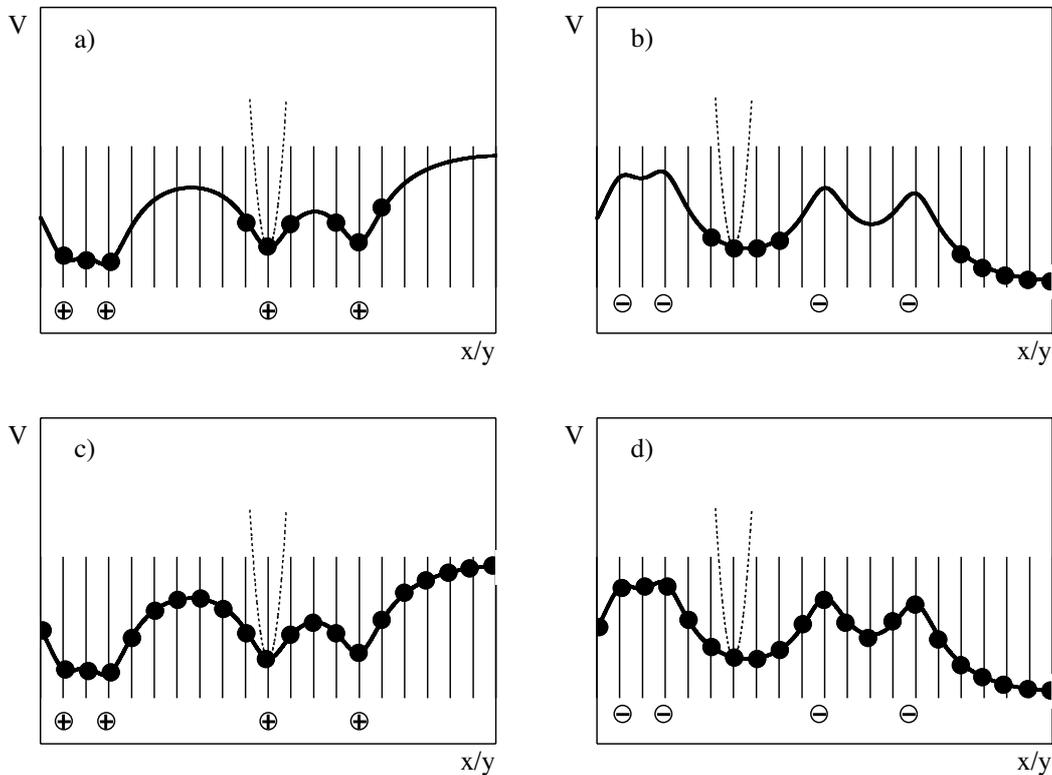
wobei die Krümmung beide Vorzeichen annehmen kann. Effektiv resultieren aus diesem Bild, wenn man die Elektronen gemäß ihrer Niveauezugehörigkeit ( $K$  als Kollektivindex) zu Kollektiven zusammenfaßt, modifizierte Zyklotronfrequenzen entsprechend der Beziehung

$$\tilde{\omega}_{c,K} \approx \omega_{c,K} + \frac{\Omega_{imp,K}^2}{\omega_{c,K}}, \quad (5.88)$$

wobei  $\Omega_{imp,K}^2$  nach Gleichung 5.37 die mittlere Krümmung des Störstellenpotentials repräsentiert. Als Zyklotronmassen ausgedrückt lauten die modifizierten Zyklotronfrequenzen

$$\tilde{m}_{c,K} \approx m_{c,K} \left[ 1 - \frac{\Omega_{imp,K}^2}{\omega_{c,K}^2} \right]. \quad (5.89)$$

<sup>2</sup>Das Vorzeichen der Krümmung  $k$  und damit  $\omega_{imp}^2$  kann positiv wie negativ sein, was aber nicht bedeutet, daß  $\omega_{imp}$  im zweiten Fall imaginär wird. Dies ist im weiteren zu beachten.



**Abbildung 5.27:** Schematisches Modell zur Erklärung des Einflusses von Störstellen auf die Zyklotronresonanz. In den Teilbildern a) und c) werden attraktive Störstellen und in b) und d) repulsive Störstellen vorausgesetzt. Das resultierende Potential ist dick durchgezogen gezeichnet und die für Elektronen erlaubten Positionen, die den Aufpunkt-Orbitalen in der Ebene entsprechen, sind durch senkrechte Linien angedeutet. Die Elektronen selbst sind als schwarze Punkte markiert. Der gepunktete Parabelausschnitt symbolisiert den Einschluß durch das quantisierende Magnetfeld.

Eine Variation der  $\Omega_{imp,K}^2$  beziehungsweise ihres gewichteten Mittelwertes

$$\Omega_{imp}^2 = \frac{\sum_K f_K \Omega_{imp,K}^2}{\sum_{K'} f_{K'}} , \quad (5.90)$$

mit den  $f_K$  als Übergangsgewichten, ist die Grundlage der beobachteten Massensoszillationen.

Zur Erklärung der Massenmaxima bei ganzzahligen Füllfaktoren dient die Abbildung 5.27. Hierin ist in den Teilfiguren a) und c) beziehungsweise b) und d) ein schematisches Störstellenpotential mit attraktiven beziehungsweise repulsiven Störzentren dargestellt. Durch das quantisierende Magnetfeld, das effektiv zu einem parabolischen Einschluß führt, werden die Elektronen auf Landau-Niveaus mit Orbitalausdehnung in der Größenordnung der magnetischen Länge gezwungen. Trotz der makroskopischen Entartung der Landau-Niveaus steht jedoch nur eine begrenzte Anzahl an Plätzen (angedeutet durch senkrechte Linien) in der Ebene für die Elektronen zur Verfügung. Relevant ist im folgenden nur das oberste besetzte Landau-Niveau. Liegt in diesem nur eine geringe Füllung vor, werden die Elektronen bevorzugt die energetisch niedrigsten Positionen in der Potentiallandschaft besetzen. Im Falle attraktiver Zentren (Teilfigur a)) besitzen die energetisch tiefsten Positionen auch die stärkste positive Krümmung, während im Falle repulsiver Zentren (Teilfigur b)) aufgrund der Flachheit des Potentials dort ein geringerer Einfluß zu erwarten ist. Generell ist jedoch in bei-

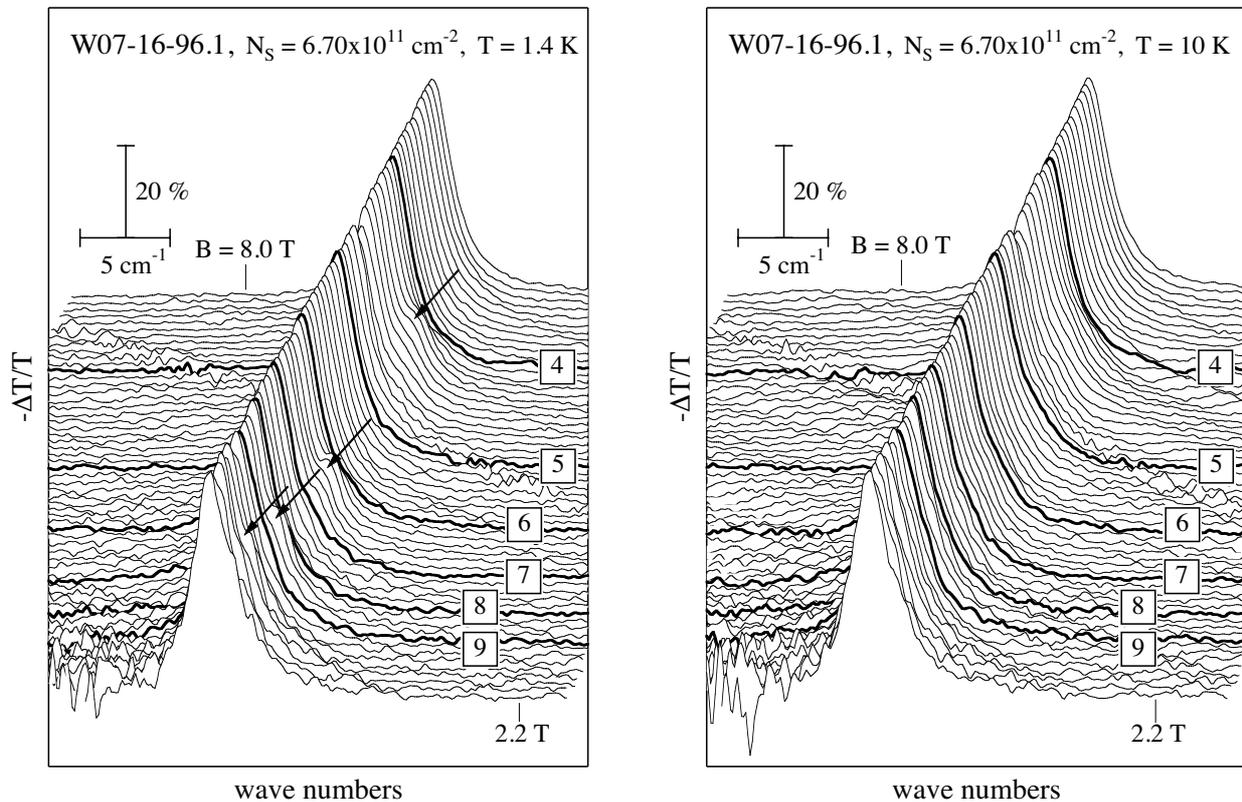
den Fällen ein Anstieg der Zyklotronenergie und damit ein Absinken der Masse zu erwarten. Mit Erhöhung der Elektronenzahl werden die Positionen mit positiver Krümmung in beiden Fällen zunehmend erschöpft, bis bei Ganzfüllung schließlich alle möglichen erlaubten Positionen vollständig besetzt sind (Teilbilder c) und d)). In diesem Fall sollte die mittlere Krümmung jedoch weitgehend verschwinden, da das Störstellenpotential über große Distanzen im Mittel keine Steigung besitzt. Gegenüber geringer Füllung sollte die Zyklotronfrequenz daher erniedrigt und die Masse entsprechend erhöht sein. Dieses Bild ist in Übereinstimmung mit den beobachteten Massenoszillationen.

Systemspezifische Parameter, wie die wirksame Störstellenflächendichte  $N_{imp}$  und ihre Zusammensetzung  $N_{imp} = N_{attr} + N_{rep}$  aus attraktiven und repulsiven Anteilen im Verhältnis zur Niveaumentartung  $N_{LL}$  beziehungsweise zur Ladungsträgerdichte  $N_S$ , sowie die Abstandsverteilung der Streuer zum aktiven Q2DEG, welche die Stärke der Potentialmodulation bestimmt, haben Szenarien derartiger Vielfalt zur Folge, daß es schwierig ist, ohne deren detaillierte Kenntnis quantitative Modelle abzuleiten. Das Zutreffen des hier dargelegten Bildes scheint jedoch bereits das Wesen der Wirkung von Störstellen auf die Zyklotronresonanz qualitativ offenzulegen. Experimente an verunreinigten Q2DEG bestätigen für repulsive Streuzentren (Donatoren), wie sie auch in den hier behandelten Systemen vorhanden sind, die hier beobachteten Massenvariationen [Ric89, Wig90]. Für attraktive Streuzentren allerdings sind die Verhältnisse deutlich komplizierter bis hin zu ausgeprägten Linienaufspaltungen mit Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall ( $\nu < 2$ ) [Ric89, Wid98]. Eine eingehendere Behandlung des Einflusses von Störstellen im Regime  $\nu < 2$  erfolgt im Abschnitt 7.2.6. Dort wird das dargelegte Bild weitergeführt und durch Modellrechnungen begründet.

### 5.3.5 Subband-aufgespaltene Zyklotronresonanz

Das bisherige Interesse galt vor allem der Landau- und der Spinaufspaltung in Q2DEG mit nur einem besetzten elektrischen Subband. In Systemen mit zwei besetzten Subbändern sind jedoch darüber hinaus reichhaltige Phänomene in der Zyklotronresonanz zu erwarten, wenn die Subband-Aufspaltung wirksam wird und zudem durch das Magnetfeld induzierte Umbesetzungen möglich werden [Ens88].

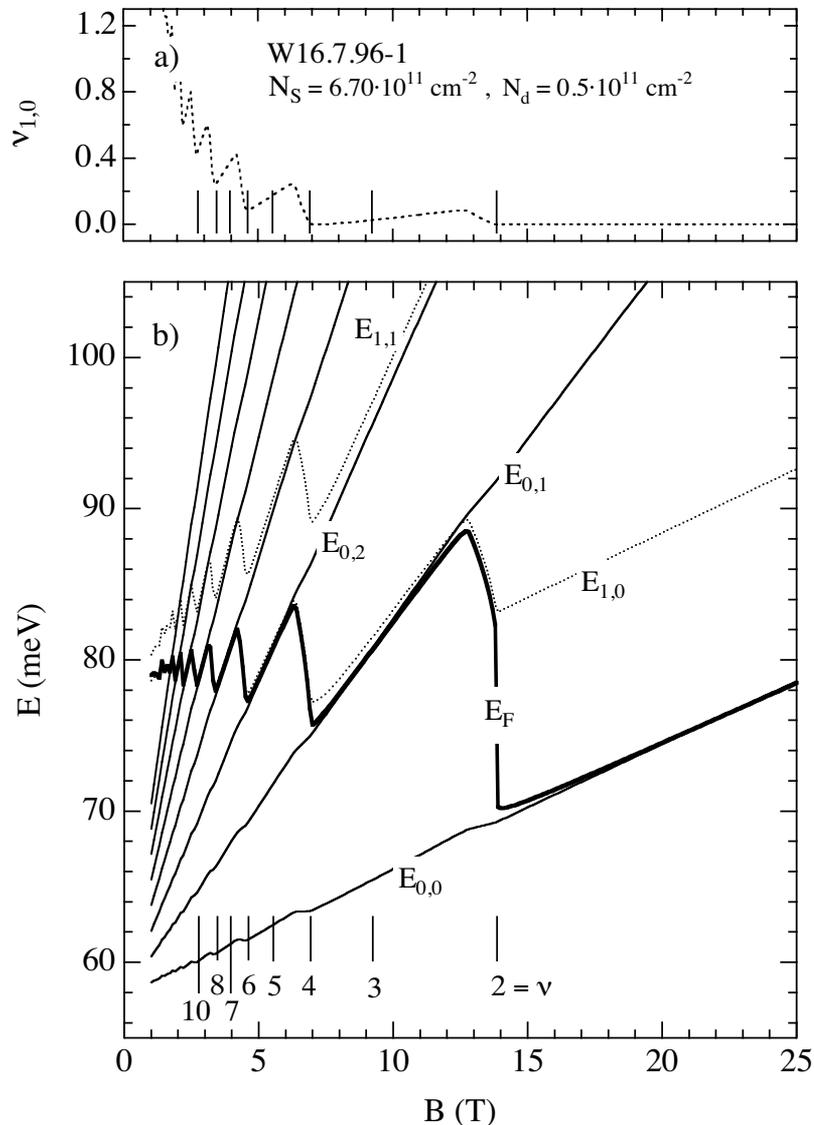
Zur Besetzung zweier Subbänder bei tiefen Temperaturen bedarf es generell verhältnismäßig hoher Elektronendichten und geringer Subband-Abstände. Diese Voraussetzungen sind für die Einfachheterostruktur aus der Figur 5.12 c) gegeben. Bei genauerer Analyse der Spektren zeigt sich bei niedrigen Magnetfeldern auf der Hochenergieseite der Zyklotronresonanz eine in ihrer Ausprägung oszillierende Satellitenstruktur. Der entsprechende Ausschnitt aus den Spektren ist in der Abbildung 5.28 für zwei Temperaturen dargestellt. Zur Identifikation der besagten Struktur als Zyklotronresonanz des zweiten Subbandes dienen selbstkonsistente Subband-Rechnungen, deren Resultate in der Figur 5.29 in Form eines Subband-Landau-Fächers dargestellt sind. Den Darstellungen liegt eine selbstkonsistente Hartree-Rechnung gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.2 zugrunde, wobei Spinartung vorausgesetzt wurde. Zur Berücksichtigung der Landau-Quantisierung wurde die Zustandsdichte entsprechend der Gleichung 2.61 modelliert und in den Selbstkonsistenzzyklus eingebunden. Die Parameter der Rechnung sind in der Bildbeschreibung aufgeführt. Eine zuerst angesetzte LDA-Rechnung lieferte mit den der Probe zugrunde liegenden Parametern durchwegs zu hohe Subband-Abstände, so daß keine Besetzung des zweiten Subbandes auftrat. Aus diesem Grund beschränkt sich die Subband-Rechnung auf den Hartree-Anteil. Wie man anhand der Teilfigur b) erkennt, weisen die Subband-Energien je nach Lage der Fermi-Energie und damit der Besetzung des zweiten Subbandes oszillierende Variationen mit dem Magnetfeld auf. Diese sind für das zweite Subband deutlich stärker ausgeprägt als für das unterste. In der Teilfigur b) ist die sich aus der Rechnung ergebende Füllung des einzig besetzten untersten Landau-Niveaus im zweiten Subband aufgetragen. Dessen oszillatorische Besetzung gründet auf einem Atmen des selbstkonsisten-



**Abbildung 5.28:** Zyklotronresonanzspektren für eine Einfachheterostruktur hoher Dichte für zwei Temperaturen. Die dick hervorgehobenen Spektren markieren ganzzahlige Füllfaktoren. Die zwischen ganzzahligen Füllfaktoren auftretenden Anomalien sind durch Pfeile gekennzeichnet.

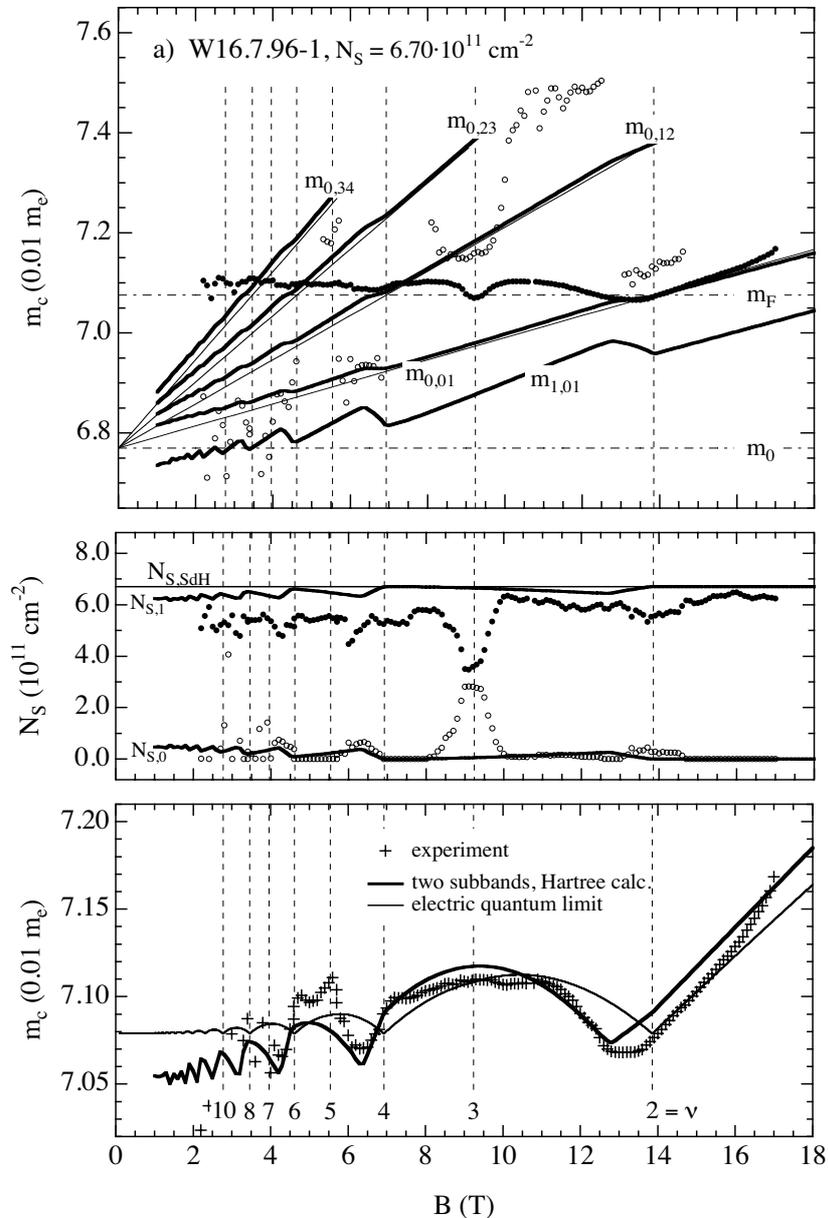
ten Einschlußpotentials. Dabei wird mit zunehmender Füllung des zweiten Subbandes das Hartree-Potential steiler, woraus eine Erhöhung der Subband-Abstände resultiert. Erhöhte Subband-Abstände wiederum fördern eine Depopulation des zweiten Subbandes, was wiederum eine Verringerung des Einschlußpotentials zur Folge hat. Aus diesem Grund wird sich in der Regel ein Gleichgewicht einstellen, bei dem das zweite Subband nur minimal besetzt wird. Dabei kommt es vor, daß das unterste Landau-Niveau im zweiten Subband über weite Magnetfeldbereiche nur wenig zu höheren Energien hin versetzt einem höheren Landau-Niveau des untersten Subbandes folgt. Eine verstärkte Besetzung des zweiten Subbandes tritt allerdings dann auf, wenn aufgrund der Elektronendichte im System besetzte Landau-Niveaus des untersten Subbandes energetisch über das unterste Landau-Niveau des zweiten Subbandes hinausragen. Dann wird es energetisch günstiger das unterste Landau-Niveau des zweiten Subbandes stärker zu besetzen, allerdings nur solange bis die Tendenz zur Depopulation infolge der steigenden Subband-Abstände nicht überwiegt. Diese Situation tritt in den Intervallen  $2n < \nu < 2n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  nahe bei den ganzzahligen Füllfaktoren auf. In diesen Intervallen sind aber auch gerade die Satellitenstrukturen in den experimentellen Spektren bei  $T = 1.5$  K sichtbar, woraus sich unmittelbar ihre Identifikation als Zyklotronresonanz des zweiten Subbandes ableitet. Wie man anhand der Abbildung 5.28 b) erkennt, verwaschen die Satellitenstrukturen mit zunehmender Temperatur jedoch sehr schnell und sind dann nur noch als Linienasymmetrien wahrnehmbar.

Die detaillierte Auswertung der gesamten Meßreihe bei 1.5 K ist in der Figur 5.30 aufgezeigt. Die Auswertung entspricht genau der im vorausgehenden Abschnitt beschriebenen. Lediglich die unterlegten theoreti-



**Abbildung 5.29:** Ergebnis der selbstkonsistenten Hartree-Rechnung für eine Einfachheterostruktur mit zwei besetzten Subbändern. Teilbild a) zeigt die Füllung des untersten Landau-Niveaus ( $i = 1, n = 0$ ) im zweiten Subband als Funktion des Magnetfeldes. In Teilbild b) ist der Subband-Landau-Fächer dargestellt. Die dicke Linie markiert darin die Fermi-Energie. Die dünnen durchgezogenen Linien kennzeichnen die Landau-Niveaus ( $i = 0, n$ ) des tiefsten und die gepunkteten Linien die Landau-Niveaus ( $i = 1, n$ ) des ersten angeregten Subbandes. Ganzzahlige Füllfaktoren sind durch kurze senkrechte Linien angedeutet. Die sonstigen Parameter der Rechnung lauten: Temperatur:  $T = 0$  K, Spinartung, Barriere: 300 meV, Masse in GaAs:  $0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $0.08 m_e$ , effektive Lücke:  $E_g^* = 1050$  meV.

schen Kurven sind der Situation zweier besetzter Subbänder angeglichen. Entsprechend ist der Massenfächer in Teilbild a) um den Massenverlauf des einzig besetzten untersten Landau-Niveaus im zweiten Subband erweitert. Die theoretischen Massen berechnen sich dabei nach der Gleichung 2.111. Die offenen Kreise unterhalb der durch volle Symbole gekennzeichneten Masse der Hauptresonanz markieren die Zyklotronresonanz des zweiten Subbandes. Die oberhalb der Hauptresonanz gelegenen offenen Kreise kennzeichnen die Landau-aufgespaltenen Nebenresonanzen für die Füllfaktoren  $\nu = 3$  und  $5$  beziehungsweise die spinoder auch Subband-aufgespaltene Nebenresonanz für  $\nu = 2$ . Im letzteren Fall kann hier keine der beiden Möglichkeiten eindeutig favorisiert werden. Als Vergleichsszenario ist weiterhin auch der Massenfächer des elektrischen Quantengrenzfalls mit nur einem besetzten Subband eingezeichnet. Im Teilbild b) erkennt man eine gute Übereinstimmung zwischen der Stärke der Nebenresonanz und der selbstkonsistent berechneten Besetzung des zweiten Subbandes. Diese Übereinstimmung zwischen der (Kollektiv-)Moden- und der Einteilchen-Oszillatorstärke läßt darauf schließen, daß Hybridisierungseffekte aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung nur schwach ausgeprägt sind. Diese Feststellung läßt sich anhand der Ausführungen aus dem Abschnitt 5.2.3 verstehen, wonach sowohl die quantenmechanische Austausch- als auch die klassische Korrelationskopplung für Zyklotronübergänge verschiedener Subbänder deutlich geringer ausfallen sollte als die zwischen Übergängen innerhalb eines Subbandes. Für die gemittelte Masse in Teilfigur c) ergibt sich



**Abbildung 5.30:** Auswertung der gesamten Zyklotronresonanz-Meßreihe für eine Einfachheterostruktur mit zwei besetzten Subbändern. Das Teilbild a) zeigt die ausgewerteten Massen der Einzellinien (Symbole) und die theoretischen Massenfächer für den Fall zweier besetzter Subbänder (dick) beziehungsweise für den Quantengrenzfall (dünn). Im Teilbild b) sind die ausgewerteten Linienstärken (Symbole), die berechneten Partialdichten (dick) beider Subbänder sowie die aus Transportdaten bestimmte Dichte (dünn) dargestellt. Die gemittelten experimentellen Zyklotronmassen (Symbole) sind in Teilfigur c) aufgetragen und mit den berechneten Verläufen für zwei besetzte Subbänder (dick) beziehungsweise den Quantengrenzfall (dünn) unterlegt. Zur Orientierung sind die ganzzahligen Füllfaktoren und die Massen an der Subband-Kante sowie an der Fermi-Energie durch Linien hervorgehoben. Die Parameter des Einsubband-Massenfächers lauten:  $m_s = 0.0677 m_e$ ,  $E_g^* = 1050 \text{ meV}$  und  $g_1 = 0.01 \text{ T}^{-1}$ .

ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen Werten und der selbstkonsistenten Rechnung. Insbesondere im Bereich um die Füllfaktoren  $\nu = 2, 4$  und  $6$  ist die Beschreibung mit zwei Subbändern der Beschreibung für den elektrischen Quantengrenzfalls, besonders was die Lage der Massenminima angeht, generell überlegen. Lediglich beim Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall um  $\nu = 2$  scheint ein Mischszenario aus Ein- und Zweisubband-Verhalten vorzuliegen. Anhand der als Maxima hervortretenden Füllfaktoren  $5$  und  $6$  zeigt sich ferner, daß auch Störstellen wiederum ihren charakteristischen Einfluß auf die Zyklotronmasse ausüben.

Insgesamt kann die Massenanpassung in Anbetracht möglicher Unzulänglichkeiten des zugrunde liegenden Modells als gut bezeichnet werden. Auch in dem hier vorliegenden System, das sämtliche auf der Nichtparabolizität basierenden Aufspaltungsszenarien –Landau-, Subband- und Spinaufspaltung– aufweist, manifestiert sich wiederum die Essenz der auf komplexe Weise aufgespaltenen Zyklotronresonanzprofile in der vergleichsweise einfach interpretierbaren mittleren Zyklotronmasse.

## Kapitel 6

# Elektronische Intersubband-Resonanz im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effektes

Dieses Kapitel hat die Intersubband-Anregungen (ISR) eines Q2DEG in Gegenwart eines starken quantisierenden Magnetfeldes zum Gegenstand. Die auch oftmals als Intersubband-(Magneto-)Plasmonen bezeichneten Anregungen stellen neben den Intrasubband-(Magneto-)Plasmonen, für welche die Zyklotronresonanz den langwelligen Grenzfall ( $\vec{q} \rightarrow 0$ ) bildet, die zweite Klasse der möglichen Dichteanregungen eines Q2DEG dar. Als Schwerpunkt beinhaltet das Kapitel die theoretische Beschreibung dieser Anregungen im Rahmen der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA) sowie die ersten experimentellen Befunde, welche auf die Relevanz der durch das Magnetfeld verstärkten Austauschwechselwirkung für diese Anregungen hinweisen.

Im ersten Abschnitt 6.1 werden die Grundlagen der kollektiven Intersubband-Resonanz dargelegt. Diese umfassen die Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA) und deren Anwendung auf die Intersubband-Anregungen im Rahmen der zeitabhängigen LDA-Näherung (TDLDA). Der Beschreibung der Intersubband-Anregungen im Rahmen der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA) ist der zweite Abschnitt 6.2 gewidmet. Im Abschnitt 6.3 wird schließlich die Gültigkeit der TDHFA-Beschreibung anhand von Anpassungen an die experimentellen Intersubband-Resonanzen überprüft.

### 6.1 Grundlagen der kollektiven Intersubband-Resonanz

Die Intersubband-Resonanzen von Q2DEG wurden bereits in einer Vielzahl von Arbeiten sowohl vom experimentellen [Kam74, Kne76, And82, Bat85, Bat86, Bat91, Fri96c, Pin89] als auch vom theoretischen Standpunkt [All76, Che76, And77a, Dah77, Wen89, Chu92, Luo93, Wen96] ausführlich behandelt. Die ersten FIR-spektroskopischen Untersuchungen wurden in den 70er Jahren an Silizium-MOS-Strukturen durchgeführt und in den 80er Jahren auf GaAs ausgedehnt. Anhand der experimentellen Befunde wurde klar, daß die Intersubband-Resonanzen analog zu den Intersubband-Plasmonen und im Gegensatz zur Zyklotronresonanz von kollektiven Effekten signifikant beeinflußt werden [All76, Che76, And77a]. Entsprechend wurden ihnen seitens der Grundlagenforschung und auch seitens der technischen Anwendungen, zuerst in Form von Intersubband-Detektoren [Lev87, Lev93], zunehmende Aufmerksamkeit geschenkt. In der Erfindung des sogenannten Quantenkaskadelasers fand die Anwendung der Intersubband-Resonanz ihren vorläufigen Höhepunkt [Fai93, Fai94b, Fai94a].

Im Abschnitt 6.1.1 wird zunächst als Basis die Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA) vorgestellt. Darauf aufbauend werden in den Abschnitten 6.1.2 und 6.1.3 die Theorien zur Beschreibung der Intersubband-Anregungen ohne beziehungsweise mit senkrechtem Magnetfeld dargelegt, die beide auf der zeitabhängigen Lokaldichte-Näherung (TDLDA) basieren. Der Abschnitt 6.1.4 befaßt sich mit den Kopplungen der Intersubband-Moden an weitere Elementaranregungen. Schließlich werden im Abschnitt 6.1.5 Ergebnisse vorgestellt, die den aktuellen Stand der Spektroskopie an Intersubband-Resonanzen mittels FIR zusammenfassen.

### 6.1.1 Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA)

Die SCFA beschreibt die neutralen Elektron-Loch-Anregungen eines Vielteilchen-System durch die zeitabhängige Wechselwirkung eines einzelnen Elektrons mit einem selbstkonsistenten Feld [Ehr59]. Die im folgenden ausgeführte Herleitung geht über die ursprüngliche Hartree-Näherung (HA) hinaus und schließt die Austauschsterme der Hartree-Fock- (HFA) beziehungsweise der Dichtefunktional-Näherung (DFT) mit ein.

Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet der allgemeine Hamilton-Operator eines Systems wechselwirkender Elektronen in zweiter Quantisierung [Mad78, Gro86]:

$$\hat{H} = \sum_{k,k'} \langle k' | \hat{h}_{sp} | k \rangle \hat{c}_{k'}^\dagger \hat{c}_k + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \sum_{k'',k'''} \langle k', k''' | \hat{W} | k, k'' \rangle \hat{c}_{k'}^\dagger \hat{c}_{k'''}^\dagger \hat{c}_{k''} \hat{c}_k . \quad (6.1)$$

Er besteht aus einem Einteilchen-Anteil  $\hat{h}_{sp}$  und einem Wechselwirkungsanteil  $\hat{W}$  bezüglich einer beliebigen Einteilchen-Basis  $\{|k\rangle\}$ , die den Spin implizit enthält. Bei der Bildung der Matrixelemente über den Wechselwirkungsoperator werden jeweils die Orbitale  $|k\rangle$  und  $|k'\rangle$  sowie  $|k''\rangle$  und  $|k'''\rangle$  paarweise zusammengefaßt. In all den hier betrachteten Näherungen reduziert sich das Vielteilchen-Problem auf ein effektives Einteilchen-Problem. In der HFA haben die Matrixelemente des effektiven Hamilton-Operators die allgemeine Form

$$\langle k' | \hat{h}_{HFA} | k \rangle = \langle k' | \hat{h}_{sp} | k \rangle + \sum_{k'',k'''} \langle k'' | \hat{n}_{FD} | k''' \rangle \left[ \langle k', k''' | \hat{W} | k, k'' \rangle - \langle k', k''' | \hat{W} | k'', k \rangle \right] . \quad (6.2)$$

Darin steht

$$\hat{n}_{FD} = \left[ 1 + \exp \left( \frac{\hat{h}_{HFA} - \mu}{k_B T} \right) \right]^{-1} \quad (6.3)$$

für den fermionischen Besetzungsoperator. Der erste Term der Wechselwirkung ist lokal und entspricht dem bekannten Hartree-Potential. Der zweite Beitrag ist nicht-lokal und hat seine Ursache in der quantenmechanischen Ununterscheidbarkeit der Elektronen. Er wird als Austausch- oder Fock-Term bezeichnet. In der Hartree-Näherung (HA) wird dieser Beitrag vernachlässigt [Mad78, Gro86].

In der DFT<sup>1</sup> lauten die Matrixelemente des effektiven Hamilton-Operators

$$\langle k' | \hat{h}_{DFT} | k \rangle = \langle k' | \hat{h}_{sp} | k \rangle + \sum_{k'',k'''} \langle k'' | \hat{n}_{FD} | k''' \rangle \langle k', k''' | \hat{W} | k, k'' \rangle + \langle k' | V_{xc} \left[ \langle n(\hat{r}) \rangle \right] | k \rangle . \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Die LDA-Näherung (local density approximation) entspricht einer speziellen Wahl des Dichtefunktionals in der DFT (density functional theory).

Die DFT unterscheidet sich von der HFA in der Behandlung des Austauschs und berücksichtigt darüber hinaus die Korrelationen. Vorteilhafterweise können nach [Hoh64, Koh65] die entsprechenden Beiträge auf ein lokales Potential abgebildet werden, das ein Funktional der Dichte  $\langle n(\vec{r}) \rangle = \text{tr} [\hat{n}_{FD} \hat{n}(\vec{r})]$  und implizit des Wechselwirkungspotentials  $W(\vec{r})$  darstellt. In der angegebenen Form wird ein unpolarisiertes Vielteilchen-System vorausgesetzt. Im Falle eines polarisierten Systems ist noch der ortsabhängige Spinpolarisationsgrad im Funktional zu berücksichtigen [Dre90]. Die numerische Behandlung vereinfacht sich mit der DFT gegenüber der nicht-lokalen und aufwändigen HFA in der Regel derart, daß die numerische Behandlung vieler Vielteilchen-Systeme durch sie überhaupt erst möglich wird [Dre90].

Die selbstkonsistente Lösung der Einteilchen-Gleichung (6.2 oder 6.4) erfolgt häufig numerisch und iterativ. Dabei werden in jeder Iterationsstufe die Hamilton-Matrix in einem in der Regel endlichen Teilraum des Einteilchen-Hilbert-Raumes diagonalisiert und so die für die jeweilige Iterationsstufe optimalen Eigenzustände  $\{|\alpha\rangle\}$  und Einteilchen-Energien  $\epsilon_\alpha$  gewonnen. Nach Ende der Iteration liegt schließlich eine Einteilchen-Basis vor, bezüglich derer der Einteilchen-Hamilton-Operator und damit auch der Besetzungsoperator diagonal wird. Das selbstkonsistent zu lösende Eigenwertproblem der HFA lautet

$$\sum_k \left\{ \langle k' | \hat{h}_{sp} | k \rangle + \sum_{\alpha'} n_{FD}(\epsilon_{\alpha'}) \left[ \langle k', \alpha' | \hat{W} | k, \alpha' \rangle - \langle k', \alpha' | \hat{W} | \alpha', k \rangle \right] \right\} \langle k | \alpha \rangle = \epsilon_\alpha \langle k' | \alpha \rangle . \quad (6.5)$$

Das äquivalente Eigenwertproblem der DFT ergibt sich in Analogie dazu als

$$\sum_k \left\{ \langle k' | \hat{h}_{sp} | k \rangle + \sum_{\alpha'} n_{FD}(\epsilon_{\alpha'}) \left[ \langle k', \alpha' | \hat{W} | k, \alpha' \rangle + \langle k' | V_{xc} \left[ \langle n(\vec{r}) \rangle \right] | k \rangle \right] \right\} \langle k | \alpha \rangle = \epsilon_\alpha \langle k' | \alpha \rangle , \quad (6.6)$$

wobei

$$\langle n(\vec{r}) \rangle = \sum_{\alpha'} n_{FD}(\epsilon_{\alpha'}) |\phi_{\alpha'}(\vec{r})|^2 \quad (6.7)$$

den Erwartungswert der Dichte bezeichnet.

Für die Ableitung der Dichteantwort werde die effektive Einteilchen-Schrödinger-Gleichung als gelöst vorausgesetzt. Der effektive Einteilchen-Hamilton-Operator der jeweiligen Näherung hat daher die Form

$$\hat{h}_{eff=HA,HFA,DFT} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha} . \quad (6.8)$$

Durch ein von außen einwirkendes monochromatisch mit der Frequenz  $\omega$  oszillierendes Feld ergibt sich ein zusätzlicher Beitrag zum Hamilton-Operator der Form

$$\hat{h}'(t) = \hat{h}_{\omega} e^{-i(\omega+i\eta)t} , \quad (6.9)$$

wobei  $\eta \rightarrow 0^+$  dem adiabatischen Einschalten Rechnung trägt. Aufgrund des einwirkenden Feldes werden Übergänge zwischen den Energieniveaus induziert. Formal werden diese durch einen zeitabhängigen Beitrag im quantenstatistischen Besetzungsoperator  $\hat{n}$  erfaßt. Dieser hat im Regime der linearen Antwort die Form

$$\hat{n}(t) = \hat{n}_0 + \hat{n}_1(t) = \hat{n}_0 + \hat{n}_{\omega} e^{-i(\omega+i\eta)t} , \quad (6.10)$$

wobei für das thermodynamische Gleichgewicht

$$\hat{n}_0 = \hat{n}_{FD} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha} \quad , \quad n_{\alpha} = n_{FD}(\epsilon_{\alpha}) \quad (6.11)$$

gilt. Die Zeitabhängigkeit des Besetzungszahloperators wird schließlich durch die Liouville-von Neumann-Gleichung beschrieben. Für die obige Separation lautet sie in linearer Antwort

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{n}_1(t) = \left[ \hat{h}_{eff}, \hat{n}_1(t) \right] + \left[ \hat{h}'(t), \hat{n}_0 \right] \quad . \quad (6.12)$$

Infolge des zeitabhängigen Anteils im Dichteoperator ergeben sich oszillierende Anteile im Hartree- und im Austauschterm beziehungsweise im Austausch-Korrelations-Potential. Daher setzen sich die Matrixelemente des Hamilton-Operators  $\langle k' | \hat{h}'(t) | k \rangle$  bezüglich einer beliebigen Basis  $\{|k\rangle\}$  gemäß

$$\langle k' | \hat{h}'(t) | k \rangle = \langle k' | \hat{h}_{ext}(t) | k \rangle + \sum_{\alpha', \alpha''} \langle \alpha' | \hat{n}_1(t) | \alpha'' \rangle W_{k' k, \alpha'' \alpha'} \quad (6.13)$$

aus einem externen Anteil  $\hat{h}_{ext}(t)$  und den selbstkonsistenten Wechselwirkungsbeiträgen zusammen. Die Wechselwirkungsmatrixelemente  $W_{k' k, \alpha'' \alpha'}$  lauten dabei in der HFA

$$W_{k' k, \alpha'' \alpha'} = \langle k', \alpha'' | \hat{W} | k, \alpha' \rangle - \langle k', \alpha'' | \hat{W} | \alpha', k \rangle \quad , \quad (6.14)$$

beziehungsweise in der DFT

$$W_{k' k, \alpha'' \alpha'} = \langle k', \alpha'' | \hat{W} | k, \alpha' \rangle + \langle k' | \left( \frac{\partial V_{xc}[\langle n \rangle]}{\partial \langle n \rangle} \right) \Big|_{\langle n(\hat{r}) \rangle_0} \phi_{\alpha''}^*(\hat{r}) \phi_{\alpha'}(\hat{r}) \Big| k \rangle \quad . \quad (6.15)$$

In der letzten Gleichung ist die Änderung des Austausch-Korrelationspotentials infolge der induzierten Dichteänderung durch das erste Glied der Taylor-Reihe um die Gleichgewichtsdichte approximiert. Der entscheidende Ansatz der SCFA besteht nun gerade in der Miteinbeziehung der selbstkonsistenten Vielteilchen-Terme in der Anregung  $\hat{h}'(t)$ . Zum Schließen des Selbstkonsistenzzyklus geht man in die Eigenbasis  $\{|\alpha\rangle\}$  des zeitunabhängigen Problems. Dort führt die Verknüpfung der Gleichungen 6.12 und 6.13 zu den Selbstkonsistenz-Gleichungen für die Übergangsamplituden  $\delta n_{\alpha' \alpha} = \langle \alpha' | \hat{n}_{\omega} | \alpha \rangle$ . Diese lauten

$$\delta n_{\alpha' \alpha} = \frac{n_{\alpha} - n_{\alpha'}}{\hbar(\omega + i\eta) - (\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha})} \left\{ h_{ext, \alpha' \alpha} + \sum_{\alpha''', \alpha''} W_{\alpha' \alpha, \alpha'' \alpha'''} \delta n_{\alpha'' \alpha'''} \right\} \quad , \quad (6.16)$$

wobei die Matrixelemente der äußeren Störung durch  $h_{ext, \alpha' \alpha} = \langle \alpha' | \hat{h}_{ext, \omega} | \alpha \rangle$  abgekürzt sind. An dieser Stelle ist es für das weitere günstig, eine Exziton-Indizierung  $K = (\alpha', \alpha)$  für die Übergänge  $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle$  einzuführen. Mit den Abkürzungen  $\epsilon_K = \epsilon_{\alpha'_K} - \epsilon_{\alpha_K}$ ,  $\tilde{n}_K = n_{\alpha_K} - n_{\alpha'_K}$  und  $\delta n_K = \delta n_{\alpha'_K \alpha_K}$  sowie den Kurzschreibweisen  $W_{K,L} = W_{\alpha'_K \alpha_K, \alpha'_L \alpha_L}$  für die Wechselwirkungsmatrixelemente in der HFA bzw. LDA sowie für die externe Störung  $h_{ext, K} = \langle \alpha'_K | \hat{h}_{ext, \omega} | \alpha_K \rangle$  lassen sich die Selbstkonsistenzgleichungen unter Anwendung der Skalentransformation mit der Diagonalmatrix

$$(\hat{D})_{KL} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}_K}} \delta_{K,L} \quad (6.17)$$

auf die kompakte lineare Form

$$\sum_L \left\{ (\epsilon_K - \hbar\omega^+) \delta_{K,L} + \sqrt{\tilde{n}_K \tilde{n}_L} W_{K,L} \right\} c_L = -w_K \quad (6.18)$$

bringen. Darin bezeichnen  $c_K = \delta n_K / \sqrt{\tilde{n}_K}$  und  $w_K = \sqrt{\tilde{n}_K} h_{ext,K}$  die umskalierten Übergangs- sowie Anregungsamplituden und es gilt die Substitution  $\omega^+ = \omega + i\eta$ .

Diese Form entspricht dem vertrauten Eigenwertproblem für einen Effektiv-Hamilton-Operator mit den Matrixelementen

$$H_{KL} = \epsilon_K \delta_{K,L} + \sqrt{\tilde{n}_K \tilde{n}_L} W_{K,L} , \quad (6.19)$$

der im Subraum der elektrisch neutralen Elektron-Loch-Anregungen wirkt. Gemäß der üblichen Vorgehensweise werden die kollektiven Eigenmoden  $|\Omega_J\rangle$  mit Nummerierungsindex  $J$  und ihre Energien  $\hbar\Omega_J$  durch Diagonalisierung dieser Hamilton-Matrix gefunden. Die Oszillatorstärken  $F_J$  der Kollektivmoden ergeben sich dabei durch die Projektion  $F_J = |\langle w | \Omega_J \rangle|^2$  auf den Anregungszustand  $|w\rangle$ , der die gewichteten Einteilchen-Amplituden  $w_K$  als Komponenten hat. Die Einteilchen-Oszillatorstärken sind durch  $f_K = |w_K|^2$  gegeben und es gilt die Summenregel  $\sum_J F_J = \sum_K f_K$ .

## 6.1.2 Intersubband-Resonanz in der zeitabhängigen Lokaldichte-Näherung (TDLDA)

Basierend auf den im vorausgehenden Abschnitt geschaffenen Grundlagen ist eine Übertragung der SCFA auf die Intersubband-Resonanzen eines Q2DEG auf konzeptionell einfache Weise möglich. Zurückgehend auf [And77a] wird die Intersubband-Resonanz häufig in der zeitabhängigen LDA-Näherung (TDLDA) behandelt.

Aufgrund der Translationsinvarianz in der Ebene ist es für das weitere günstig, zunächst die Coulomb-Wechselwirkung mit der Greenschen Funktion 3.47 der quasi-zweidimensionalen Geometrie in der Form

$$W(\vec{r}, \vec{r}') = e^2 \sum_{\vec{k}} G(\vec{k}, z, z') e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{s}')} = \sum_{\vec{k}} W(\vec{k}, z, z') e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{s}')} \quad (6.20)$$

darzustellen. Darin steht  $\vec{k}$  für den Wellenvektor in der Ebene und  $W(\vec{k}, z, z')$  für die 2D-Fouriertransformierte des Wechselwirkungspotentials. Damit läßt sich unter Definition des ebenfalls der Symmetrie angepaßten Dichteoperators

$$\hat{n}_{\vec{q},\sigma}(z) = e^{-i\vec{q}\cdot\vec{s}} \delta(z - \hat{z}) \delta(\sigma - \hat{\sigma}) \quad (6.21)$$

der Operator der direkten Coulomb-Wechselwirkung in den Ausdruck

$$\hat{W}^{(dir)} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' W(\vec{k}, z, z') \hat{n}_{\vec{k},\sigma}(z) \hat{n}_{-\vec{k},\sigma'}(z') \quad (6.22)$$

überführen. Der Wechselwirkungsbeitrag 6.15 aufgrund des Austauschs und der Korrelationen kann unter Verwendung der Identität  $\delta(\vec{s} - \vec{s}') = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{s}')} \hat{n}_{\vec{k},\sigma}(z) \hat{n}_{-\vec{k},\sigma'}(z') \delta(z - \hat{z}) \delta(z' - \hat{z})$  gemäß

$$\hat{W}^{(xc)} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\partial V_{xc}[\langle n \rangle]}{\partial \langle n \rangle} \Big|_{\langle n(z) \rangle_0} \hat{n}_{\vec{k},\sigma}(z) \hat{n}_{-\vec{k},\sigma'}(z') \delta(z - \hat{z}) \delta(z' - \hat{z}) \quad (6.23)$$

in Form einer Kontaktwechselwirkung  $[W \propto \delta(\vec{r} - \vec{r}')] ]$  ausgedrückt werden, welche der Darstellung 6.22 formäquivalent ist. Das Austausch-Korrelationspotential  $V_{xc}$  der Lokaldichtenäherung (LDA) ist für ein unpolarisiertes Elektronensystem in der Gleichung 2.12 und für ein vollständig polarisiertes Elektronensystem in der Gleichung 2.13 explizit angegeben.

Für ein homogenes Q2DEG ohne äußeres Magnetfeld werde die selbstkonsistente Lösung der Subbandstruktur mit den Einteilchen-Zuständen  $|i, \vec{k}, \sigma\rangle$ , ihren Energien  $\epsilon_i(\vec{k}) = \epsilon_i + \hbar^2 \vec{k}^2 / (2m^*)$  und deren Gleichgewichtsbesetzungen  $n_i(\vec{k}) = n_{FD}(i, \vec{k})$  gemäß Abschnitt 2.2 als bekannt vorausgesetzt. Die für das folgende benötigten Matrixelemente des Dichteoperators lauten bezüglich dieser Eigenzustände

$$\langle i', \vec{k}', \sigma' | \hat{n}_{\vec{r}, \tau}(z) | i, \vec{k}, \sigma \rangle = \varphi_{i'}^*(z) \varphi_i(z) \delta_{\vec{r}, \vec{k}' - \vec{k}} \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma, \tau} . \quad (6.24)$$

Eine Anregung des homogenen Q2DEG durch ein externes zeitabhängiges Potential der Form

$$V(\vec{s}, z, t) = \sum_{\vec{q}} V_{\omega}(\vec{q}, z) e^{i[\vec{q}\vec{s} - (\omega + i\eta)t]} \quad (6.25)$$

wirkt sowohl auf den Subband-Anteil  $|i\rangle$  als auch auf den in der Ebene modulierten Anteil  $|\vec{k}\rangle$  der faktorisierten Wellenfunktionen. Infolge der Translationsinvarianz des homogenen Q2DEG in der Ebene sind die Anregungen durch den Wellenvektor  $\vec{q}$  charakterisiert. Formal läßt sich daher der zeitabhängige Anteil des quantenstatistischen Dichteoperators gemäß

$$\hat{n}_{\omega} = \sum_{\vec{q}} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(\vec{q}, z, \omega) \hat{n}_{-\vec{q}, \sigma}(z) \quad (6.26)$$

durch die Dichteoperatoren mit den entsprechenden Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_{\sigma}(\vec{q}, z, \omega)$  ausdrücken. Damit bestimmen sich die Intersubband-Übergangsamplituden

$$\delta n_{i, \vec{k}, \sigma}(l, \vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(\vec{q}, z, \omega) \langle i + l, \vec{k} + \vec{q}, \sigma | \hat{n}_{-\vec{q}, \sigma}(z) | i, \vec{k}, \sigma \rangle \quad (6.27)$$

der im allgemeinen Fall nicht-vertikalen Intersubband-Übergänge von den Ausgangsniveaus  $(i, \vec{k}, \sigma)$  in die Endniveaus  $(i + l, \vec{k} + \vec{q}, \sigma)$  mit dem Impulsübertrag  $\vec{q}$  auf das Q2DEG entsprechend den im vorausgehenden Abschnitt geschaffenen Grundlagen und unter Ausnutzung von Beziehung 6.24 aus der Selbstkonsistenzgleichung

$$\delta n_{i, \vec{k}, \sigma}(l, \vec{q}) = \frac{n_i(\vec{k}) - n_{i+l}(\vec{k} + \vec{q})}{\hbar\omega + - [\epsilon_{i+l}(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon_i(\vec{k})]} \left\{ \langle i + l | V_{\omega}(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle + \sum_{i', l'} \sum_{\sigma'} \sum_{\vec{k}'} \delta \bar{n}_{i', \vec{k}', \sigma'}(l', \vec{q}) \left[ \langle i + l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i' + l' \rangle + \langle i + l, i' | \hat{W}^{(xc)} | i, i' + l' \rangle \right] \right\} . \quad (6.28)$$

Die darin auftretenden Matrixelemente der direkten Coulomb-Wechselwirkung haben unter Definition der verallgemeinerten Formfaktoren

$$F_{i' i'' i'''}^{i'''}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi_{i'}^*(z) \varphi_i(z) e^{-q|z-z'|} \varphi_{i''}^*(z') \varphi_{i'''}(z') , \quad (6.29)$$

welche die in den Gleichungen 4.25 und 5.17 angegebenen Fälle beinhalten, die Form

$$\langle i', i''' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i'' \rangle = \frac{e^2}{2\epsilon_0\epsilon_{sc}q} F_{i', i'' i'''}(q) . \quad (6.30)$$

Im langwelligen Grenzfall erhält man durch Taylor-Entwicklung den näherungsweisen Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle i', i''' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i'' \rangle \approx & \frac{e^2}{\epsilon_0\epsilon_{sc}} \left[ - \langle i' | \int_{-\infty}^{\hat{z}} dz' (\hat{z} - z') \varphi_{i'''}^*(z') \varphi_{i''}(z') | i \rangle \right. \\ & \left. + \frac{q}{4} \left( \delta_{i', i} \langle i''' | \hat{z}^2 | i'' \rangle + \delta_{i''', i''} \langle i' | \hat{z}^2 | i \rangle - 2 \langle i''' | \hat{z} | i'' \rangle \langle i' | \hat{z} | i \rangle \right) \right] . \quad (6.31) \end{aligned}$$

Für den dispersionsfreien Term auf der rechten Seite der Gleichung wurde die Identität  $\int_{z_0=-\infty}^z dz' (z - z') N(z') = \int_{z_0=+\infty}^z dz' (z - z') N(z') + \text{const}$ , welche auf der Darstellung 2.19 und der Freiheit bei der Wahl des Potentialbezugpunktes  $z_0$  beruht, ausgenutzt. Der zweite Term beschreibt die Dispersion, welche für die meisten experimentellen Situationen lediglich eine Korrektur darstellt, in linearer Ordnung.

Die Intersubband-Übergangsmatrixelemente der effektiven Austausch-Korrelationswechselwirkung lauten

$$\langle i', i''' | \hat{W}^{(xc)} | i, i'' \rangle = \langle i' | \left( \frac{\partial V_{xc}[\langle n \rangle]}{\partial \langle n \rangle} \Big|_{\langle n(\hat{z}) \rangle_0} \varphi_{i'''}^*(\hat{z}) \varphi_{i''}(\hat{z}) \right) | i \rangle . \quad (6.32)$$

Durch Summation über die Wellenvektoren und die beiden Spinprojektionen gemäß

$$\Delta_i(l, \vec{q}) = \sum_{\sigma} \Delta_{i, \sigma}(l, \vec{q}) = \sum_{\sigma} \sum_{\vec{k}} \delta n_{i, \vec{k}, \sigma}(l, \vec{q}) \quad (6.33)$$

bekommt man schließlich die Subband-Übergangsamplituden  $\Delta_i(l, \vec{q})$  des gesamten Q2DEG. Mit diesen folgt aus der Gleichung 6.28 letztendlich die Selbstkonsistenzgleichung

$$\begin{aligned} \Delta_i(l, \vec{q}) = & \sum_{\sigma} \sum_{\vec{k}} \frac{n_i(\vec{k}) - n_{i+l}(\vec{k} + \vec{q})}{\hbar\omega^+ - (\epsilon_{i+l}(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon_i(\vec{k}))} \left\{ \langle i + l | V_{\omega}(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle + \sum_{i', l'} \Delta_{i'}(l', \vec{q}) \right. \\ & \left. \times \left[ \langle i + l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i' + l' \rangle + \langle i + l, i' | \hat{W}^{(xc)} | i, i' + l' \rangle \right] \right\} , \quad (6.34) \end{aligned}$$

welche die kollektiven Intersubband-Moden beschreibt.

### 6.1.2.1 Matrix-Dielektrizitätsfunktion und Anregungsmatrix

Unter Definition der Polarisationsfunktionen

$$P_{i', i}(\vec{q}, \omega) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{n_i(\vec{k}) - n_{i'}(\vec{k} + \vec{q})}{\hbar\omega^+ - [\epsilon_{i'}(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon_i(\vec{k})]} \quad (6.35)$$

lassen sich die Selbstkonsistenzgleichungen 6.34 für die Subband-Übergangsraten  $\Delta_i(i' - i, \vec{q})$  durch elementare Umformungen in die kompakte Form

$$\sum_{j,j'} \left\{ \delta_{i,j} \delta_{i',j'} - P_{j'j}(\vec{q}, \omega) \langle i', j | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) + \hat{W}^{(xc)} | i, j' \rangle \right\} \Delta_i(i' - i, \vec{q}) = P_{i'i}(\vec{q}, \omega) \langle i' | V_\omega(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle \quad (6.36)$$

überführen. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer definiert dabei nach [Wen90d, Wen90b, Wen90c] die allgemeine Matrix-Dielektrizitätsfunktion

$$\varepsilon_{i'i, j'j}(\vec{q}, \omega) = \delta_{i,j} \delta_{i',j'} - P_{j'j}(\vec{q}, \omega) W_{i'i, j'j'} \quad (6.37)$$

eines Q2DEG. In den Matrixelementen  $W_{i'i, j'j'} = \langle i', j | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) + \hat{W}^{(xc)} | i, j' \rangle$  sind alle relevanten Wechselwirkungsbeiträge zusammengefaßt. Die Nullstellen der Determinanten dieser Dielektrizitätsfunktion bestimmen gemäß

$$|\varepsilon_{i'i, j'j}(\vec{q}, \omega)| = 0 \quad (6.38)$$

die Dispersionsrelationen der selbsterhaltenden Plasmonmoden des Systems. Für die gemäß der Vorschrift

$$\chi_{i'i}(\vec{q}, \omega) = \begin{cases} P_{i'i}(\vec{q}, \omega) + P_{i'i'}(\vec{q}, \omega) & , i \neq i' \\ P_{ii}(\vec{q}, \omega) & , i = i' \end{cases} \quad (6.39)$$

zusammengefaßten Polarisationsfunktionen  $\chi_{i'i}(\vec{q}, \omega)$  mit  $i' \geq i$  erhält man im extrem langwelligen Grenzfall die genäherten Ausdrücke [Vin77, Wen86]

$$\chi_{i'i}(\vec{q}, \omega) = \begin{cases} 2\epsilon_{i'i} \frac{N_{S,i} - N_{S,i'}}{(\hbar\omega^+)^2 - \epsilon_{i'i}^2} & , i' > i \\ \frac{N_{S,i} q^2}{m^*(\omega^+)^2} & , i' = i \quad , k_{F,i} \gg q \gg \omega/c \end{cases} \quad (6.40)$$

Die angegebene Form für die Polarisationsfunktionen setzt eine parabolische und für alle Subbänder einheitliche Subband-Dispersion sowie  $T = 0$  K voraus. Dabei stehen  $N_{S,i}$  für die Subband-Besetzungen,  $\epsilon_{i'i}$  für die Subband-Abstände und  $k_{F,i}$  für die Fermi-Wellenvektoren im jeweiligen Subband.

Mit den zusammengefaßten Polarisationsfunktionen lautet die zum Ausdruck 6.36 äquivalente Selbstkonsistenzgleichung

$$\sum_{j' \geq j} \left\{ \delta_{i,j} \delta_{i',j'} - \chi_{j'j}(\vec{q}, \omega) \langle i', j | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) + \hat{W}^{(xc)} | i, j' \rangle \right\} \Delta_{i'i}(\vec{q}) = \chi_{i'i}(\vec{q}, \omega) \langle i' | V_\omega(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle \quad (6.41)$$

Darin wurde die Abkürzung  $\Delta_{i'i}(\vec{q}) = \Delta_i(i' - i, \vec{q}) + \Delta_{i'}(i - i', \vec{q})$  eingeführt. Weiterhin wurden die Hermitizitätsbedingungen  $W_{i'i, j'j'} = W_{i'i', j'j} = W_{i'i, j'j'} = W_{i'i, j'j'}$  sowie  $V_{\omega, i'i} = V_{\omega, i'i'}$  vorausgesetzt. Eine für viele Zwecke geeignetere Form der Selbstkonsistenzgleichung bekommt man, wenn man eine Exziton-Indizierung für die Übergänge  $K, L = (i' i), i' \geq i$  einführt und die Faktorisierung der Polarisationsfunktionen entsprechend  $\chi_K = \tilde{N}_K / [(\hbar\omega^+)^2 - \epsilon_K^2]$  ausnutzt, wobei sich die Größen  $\tilde{N}_K$  und  $\epsilon_K$  unmittelbar aus der Darstellung 6.40 erschließen. Durch Ausmultiplikation der Energienenner und einer anschließenden Skalen-

transformation mit Komponenten  $D_{KL} = \delta_{K,L}/\sqrt{\tilde{N}_K}$  bekommt man unter der Definition der Anregungsmatrix  $\hat{H}$  mit Elementen

$$H_{KL} = \epsilon_K^2 \delta_{K,L} + \sqrt{\tilde{N}_K \tilde{N}_L} W_{K,L} \quad (6.42)$$

und der umskalierten Übergangs- und Anregungsamplituden  $c_K = \Delta_K/\sqrt{\tilde{N}_K}$  bzw.  $w_K = \sqrt{\tilde{N}_K} V_{\omega,K}$  aus der Gleichung 6.34 nach wenigen Rechenschritten unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$\sum_L \{ H_{KL} - (\hbar\omega)^2 \delta_{K,L} \} c_L = -w_K . \quad (6.43)$$

Nach dieser ergeben sich die quadrierten Anregungsfrequenzen der Kollektivmoden  $(\hbar\Omega_J)^2$  mit Modenindex  $J$  durch direkte Diagonalisierung der Anregungsmatrix mit den Komponenten  $H_{KL}$ . Die zugehörigen Oszillatorstärken  $F_J$  ergeben sich durch die Projektion  $F_J = \langle w | \Omega_J^2 \rangle$  der jeweiligen Eigenvektoren  $|\Omega_J^2\rangle$  auf den Anregungszustand  $|w\rangle$  mit den Komponenten  $w_K$ .

### 6.1.2.2 Kollektive Verschiebung und Modenkopplung

Mit den Ausführungen der beiden vorausgehenden Abschnitte läßt sich die Anregungsmatrix der kollektiven Intersubband-Ladungsdichtemoden unmittelbar aufstellen. In Komponenten angegeben lautet sie

$$H_{(i'i)(j'j)}^{CDE} = \epsilon_{i'i}^2 \delta_{i,j} \delta_{i',j'} + \epsilon_{i'i} \epsilon_{j'j} [\alpha_{i'i,j'j}(q) + \beta_{i'i,j'j}] , \quad (6.44)$$

wobei die geeignet definierten Parameter

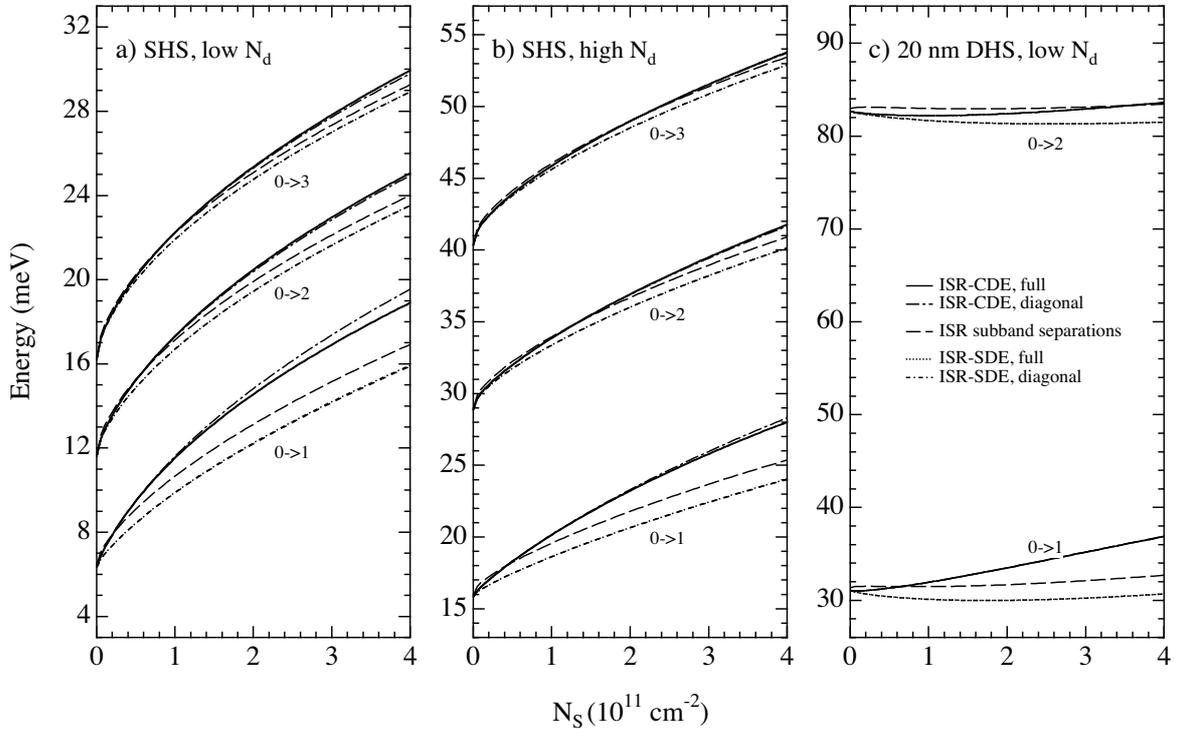
$$\begin{aligned} \alpha_{i'i,j'j}(q) &= \frac{2e^2}{\epsilon_0 \epsilon_{sc}} \sqrt{\frac{(N_{S,i} - N_{S,i'}) (N_{S,j} - N_{S,j'})}{\epsilon_{i'i} \epsilon_{j'j}}} \left[ - \langle i' | \int_{-\infty}^{\hat{z}} dz' (\hat{z} - z') \varphi_j^*(z') \varphi_{j'}(z') | i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{4} \left( \delta_{i',i} \langle j | \hat{z}^2 | j' \rangle + \delta_{j',j} \langle i' | \hat{z}^2 | i \rangle - 2 \langle j | \hat{z} | j' \rangle \langle i' | \hat{z} | i \rangle \right) \right] , \\ \beta_{i'i,j'j} &= 2 \sqrt{\frac{(N_{S,i} - N_{S,i'}) (N_{S,j} - N_{S,j'})}{\epsilon_{i'i} \epsilon_{j'j}}} \langle i' | \left( \frac{\partial V_{xc}[\langle n \rangle]}{\partial \langle n \rangle} \Big|_{\langle n(\hat{z}) \rangle_0} \varphi_j^*(\hat{z}) \varphi_{j'}(\hat{z}) \right) | i \rangle \quad (6.45) \end{aligned}$$

die kollektiven Modenverschiebungen und Modenkopplungen charakterisieren. Die Indexpaare  $(i', i)$  und  $(j', j)$  bezeichnen dabei erlaubte Intersubband-Übergänge. Die gestrichenen Indizes kennzeichnen die Ziel-niveaus und die ungestrichenen Indizes die Ausgangsniveaus.

In einem spinentarteten Q2DEG sind auch kollektive Intersubband-Spindichtemoden möglich. Bei diesen Anregungen erfolgt eine oszillatorische Umverteilung der Spindichte, ohne daß sich dabei die Ladungsdichte ändert. In der TDLDA ergibt sich für die Anregungsmatrix dieser kollektiven Spindichtemoden durch einfaches Weglassen der Hartree-Matrixelemente die Form

$$H_{(i'i)(j'j)}^{SDE} = \epsilon_{i'i}^2 \delta_{i,j} \delta_{i',j'} + \epsilon_{i'i} \epsilon_{j'j} \beta_{i'i,j'j} . \quad (6.46)$$

Häufig werden die kollektiven Kopplungen zwischen den Intersubband-Resonanzen vernachlässigt. In dieser üblicherweise als diagonale Näherung bezeichneten Betrachtungsweise werden die Ladungs- und Spindichte-



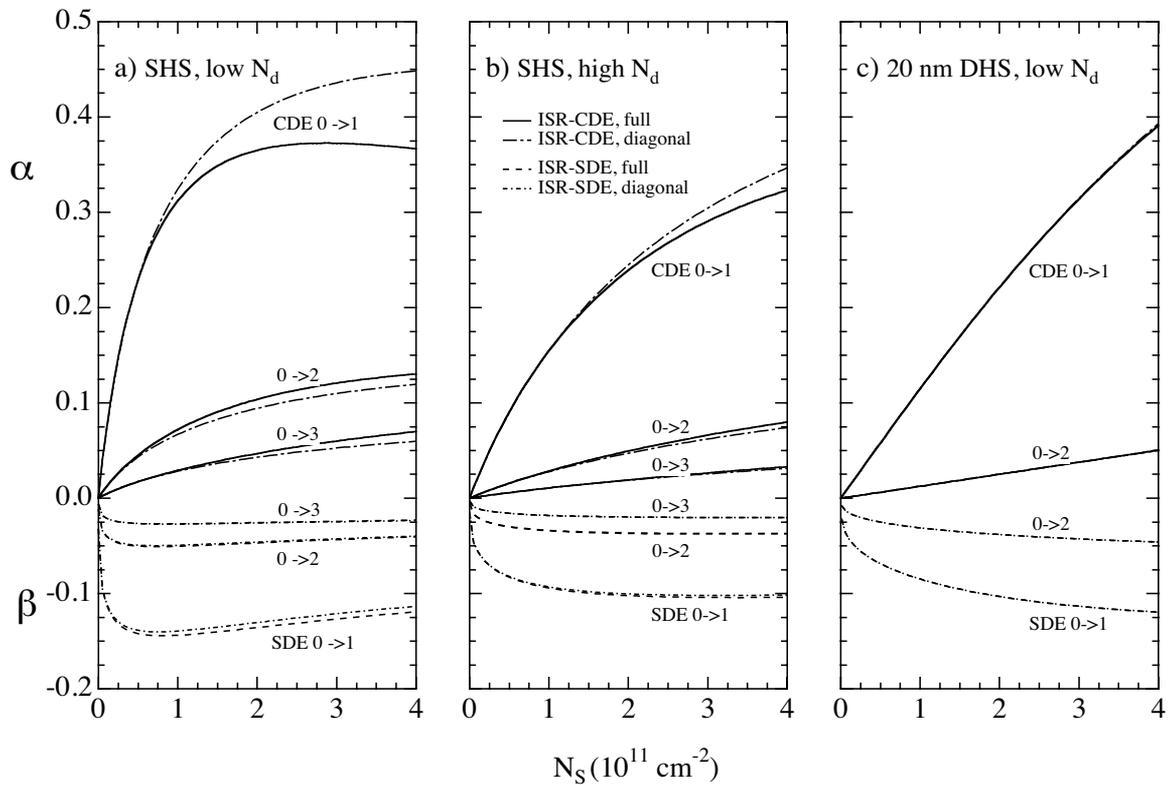
**Abbildung 6.1:** In der TDLDA berechnete Energien der Intersubband-Resonanzen für drei Modellsysteme in Abhängigkeit von der Elektronendichte. Teilbild a) zeigt die Intersubband-Energien für eine SHS mit geringer Verarmungsladung  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ , b) für eine SHS hoher Verarmungsladung  $N_d = 8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  und c) für einen einseitig dotierten Quantentrog mit 20 nm Breite und  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Es sind jeweils die Energien der niedrigsten Ladungs- und der Spindichtemoden sowohl bei vollständiger Kopplung als auch in diagonaler Näherung zusammen mit den Subband-Abständen dargestellt. Es wird Spinentartung vorausgesetzt und die Parameter der Rechnung lauten: Masse in GaAs:  $m^* = 0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $m^* = 0.088 m_e$ , Barrierenhöhe: 300 meV und Dielektrizitätskonstante:  $\epsilon_{sc} = 12.8$ .

moden gegenüber den Subband-Abständen gemäß

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{CDE,i}^2 &= \epsilon_{i,i}^2 [1 + \alpha_{i,i}(q) + \beta_{i,i}] , \\ \tilde{\epsilon}_{SDE,i}^2 &= \epsilon_{i,i}^2 [1 + \beta_{i,i}] \end{aligned} \quad (6.47)$$

kollektiv verschoben. Hierbei kennzeichnet das Tildesymbol die diagonale Näherung explizit. Der Hartree-Term  $\alpha_{i,i} = \alpha_{i,i,i,i}$  führt in Anlehnung an die Vorbetrachtungen aus dem Abschnitt 1.5.3 zu einer positiven Depolarisationsverschiebung der Kollektivmoden gegenüber den Subband-Abständen. Der Austausch-Korrelationsbeitrag  $\beta_{i,i} = \beta_{i,i,i,i}$  hingegen bewirkt stets eine Absenkung der Modenenergien. Diese Absenkung wird häufig als exzitonische Verschiebung bezeichnet, da sie der attraktiven Wechselwirkung zwischen den Elektron-Loch-Paaren Rechnung trägt.

Berücksichtigt man die kollektiven Kopplungen zwischen den Übergängen, so hat man die Anregungsmatrizen 6.44 und 6.46 zu diagonalisieren. Auf diese Weise erhält man die quadrierten Eigenfrequenzen  $\epsilon_{CDE,J}^2$  und  $\epsilon_{SDE,J}^2$  sowie die Eigenmoden  $|\epsilon_{CDE,J}^2\rangle$  und  $|\epsilon_{SDE,J}^2\rangle$  des gekoppelten Systems. Die Oszillatorstärken der Ladungsdichteanregungen ergeben sich schließlich durch die Projektion der Eigenmoden auf den Dipolzu-



**Abbildung 6.2:** Parameter für die Kollektivverschiebungen der Intersubband-Moden dreier Modellsysteme in Abhängigkeit von der Elektronendichte. Teilbild a) zeigt die Parameter für eine SHS mit geringer Verarmungsladung  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ , b) für eine SHS hoher Verarmungsladung  $N_d = 8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  und c) für einen einseitig dotierten Quantentrog mit 20 nm Breite und  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Es sind jeweils die (effektiven) Parameter sowohl bei vollständiger Kopplung als auch in diagonalen Näherung dargestellt. Die Parameter der Rechnung entsprechen denen der aus Figur 6.1.

stand gemäß

$$F_{CDE,J} \propto \left| \sum_{i',i} \sqrt{2(N_{S,i} - N_{S,i'})} \epsilon_{i'i} \langle i' | V_\omega(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle \langle i' i | \epsilon_{CDE,J}^2 \rangle \right|^2. \quad (6.48)$$

Hierbei kennzeichnen  $|i'i\rangle$  die ungekoppelten Intersubband-Übergänge. Für den Vergleich der gekoppelten Intersubband-Resonanzen mit denen der diagonalen Näherung ist es hilfreich, die Modenenergien mit  $\epsilon_{CDE,J} \approx \tilde{\epsilon}_{CDE,i'i}$  bzw.  $\epsilon_{SDE,J} \approx \tilde{\epsilon}_{SDE,i'i}$  unter Definition der effektiven Parameter

$$\alpha_{i'i}^{(eff)} = \frac{\epsilon_{CDE,J}^2 - \epsilon_{SDE,J}^2}{\epsilon_{i'i}^2}, \quad \beta_{i'i}^{(eff)} = \frac{\epsilon_{SDE,J}^2}{\epsilon_{i'i}^2} - 1 \quad (6.49)$$

in der Form 6.47 darzustellen.

Zur Veranschaulichung der theoretischen Ausführungen sind in Abbildung 6.1 die niedrigsten gerechneten Intersubband-Moden für drei Modellsysteme in Abhängigkeit von der Elektronendichte dargestellt. Dabei wurden tiefe Temperaturen mit nur einem besetzten Subband, Spinartung und vertikale Übergänge ( $\vec{q} = 0$ ) vorausgesetzt. Zur besseren Hervorhebung der kollektiven Effekte sind zusätzlich in Figur 6.2 die Parameter

$\alpha_{i'i}$ ,  $\alpha_{i'i}^{(eff)}$  und  $\beta_{i'i}$ ,  $\beta_{i'i}^{(eff)}$  der diagonalen Näherung und der effektiven Beschreibung gegen die Elektrodendichte aufgetragen. Man erkennt anhand der beiden Auftragungen, daß in Einfachheterostrukturen die Intersubband-Moden einerseits empfindlich von der Verarmungsladung  $N_d$  abhängen und zum anderen mit zunehmender Dichte stark ansteigen. Die kollektiven Verschiebungen nehmen in allen Systemen erwartungsgemäß mit der Dichte zu und zwar umso stärker, je niedriger der Übergang indiziert ist. Dabei liegen oberhalb einer Schwellendichte die Ladungsdichtemoden energetisch stets oberhalb und die Spindichtemoden stets unterhalb der Subband-Abstände. Unterhalb der Schwelle, die von der Stärke des Einschlußpotentials und dem Übergang selbst abhängt, dominiert die exzitonische Verschiebung über den Depolarisationseffekt. Daher kommen bei sehr niedrigen Dichten die Ladungsdichtemoden energetisch unterhalb der Subband-Abstände zu liegen. Anhand der Abbildung 6.2 wird offenbar, daß die kollektiven Verschiebungen gemessen an den Subband-Abständen in allen Systemen vergleichbar sind, wobei sich allerdings die funktionalen Verläufe im Detail deutlich voneinander unterscheiden. Absolut gesehen allerdings nehmen die kollektiven Einflüsse aufgrund der zunehmenden räumlichen Lokalisierung mit der Stärke des Einschlußpotentials, wie man anhand der Verläufe in Figur 6.1 erkennt, zu. Weiterhin sind in den beiden Einfachheterostrukturen auch Kopplungen zwischen den Kollektivmoden erkennbar, die sich in Modenabstoßungen zwischen dem untersten und den höheren Übergängen äußern. Allerdings sind die Kopplungseffekte im Vergleich zu den Kollektivverschiebungen der diagonalen Näherung eher gering. Daher bildet die diagonale Näherung zumindest in Bezug auf die Modenenergien für die meisten Zwecke eine gute und ausreichende Beschreibung.

### 6.1.3 Magneto-Intersubband-Resonanzen in der TDLDA-Näherung

Im Falle eines quantisierenden senkrechten Magnetfeldes bilden sich auf den Subband-Niveaus Landau-Leitern aus. Die Einteilchen-Eigenzustände der symmetrischen Eichung  $|i, n, m, \sigma\rangle$  sind durch den Landau-Index  $n$  und den Aufpunktindex  $m$  anstelle von  $k_x$  und  $k_y$  klassifiziert und die Niveauenergien  $\epsilon_{i,n,\sigma}$  haben die in Gleichung 2.59 angegebene Form. Die für das weitere wichtigen Matrixelemente des Dichteoperators sind in der symmetrischen Eichung durch den Ausdruck [Mac86a]

$$\langle i', n', m', \sigma' | \hat{n}_{-\vec{\kappa}, \tau}(z) | i, n, m, \sigma \rangle = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\sigma, \tau} \varphi_{i'}^*(z) \varphi_i(z) \left[ e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} G^{m', n}(\xi) \right] \left[ e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} G^{m, m}(\xi^*) \right] \quad (6.50)$$

gegeben, mit  $\xi = l_m (\kappa_x + i\kappa_y)$  und  $l_m$  als der magnetischen Länge. Die Funktionen

$$G^{n_1, n_2}(\xi) = \sqrt{\frac{n_2!}{n_1!}} \left( \frac{-i\xi}{\sqrt{2}} \right)^{n_1 - n_2} L_{n_2}^{n_1 - n_2} \left( \frac{|\xi|^2}{2} \right), \quad n_1 \geq n_2, \quad \xi = \xi_x + i\xi_y \quad (6.51)$$

sind in [Mac85b] definiert und beziehen sich auf den Ebene-Welle-Anteil des Dichteoperators. Für sie gelten die für das weitere wichtigen Relationen

$$\begin{aligned} G^{n_2, n_1}(\xi) &= G^{n_1, n_2}(-\xi), \\ \sum_{n_3} G^{n_1, n_3}(\xi_1) G^{n_3, n_2}(\xi_2) &= \exp\left(-\frac{\xi_1^* \xi_2}{2}\right) G^{n_1, n_2}(\xi_1 + \xi_2), \\ \sum_n G^{n, n}(\xi) &= \sum_n L_n^0\left(\frac{|\xi|^2}{2}\right) = \delta\left(\frac{|\xi|^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Für die Landau-Eichung lassen sich die entsprechenden Matrixelemente für den Dichteoperator direkt aus der Gleichung 4.18 entnehmen.

Infolge der Translationsinvarianz innerhalb der Ebene sind sämtliche Inter- und Intrasubband-Übergänge weiterhin durch den Wellenvektor  $\vec{q}$  charakterisiert. Formal gilt daher für den zeitabhängigen Anteil des quantenstatistischen Dichteoperators ebenfalls die Zerlegung 6.26. Die Übergangsamplituden

$$\delta n_{i,n,m,\sigma}(l,p,m'-m,\vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(\vec{q}, z, \omega) \langle i+l, n+p, m', \sigma | \hat{n}_{-\vec{q},\sigma}(z) | i, n, m, \sigma \rangle \quad (6.53)$$

der im allgemeinen Fall nicht-vertikalen Intersubband-Zyklotron-Übergänge mit Wellenvektor  $\vec{q}$  ausgehend vom Niveau  $(i, n, m, \sigma)$  in den Zielzustand  $(i', n', m', \sigma) = (i+l, n+p, m', \sigma)$  lassen sich daher unter Benutzung der Gleichung 6.50 entsprechend

$$\delta n_{i,n,m,\sigma}(l,p,m'-m,\vec{q}) = \tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q}) e^{-\frac{l^2}{4}q^2} G^{m',m}(l_m q_-) , \quad q_- = q_x - iq_y \quad (6.54)$$

in zwei Anteile faktorisieren, die entweder explizit lediglich Intersubband-Landau-Indizes  $i$  und  $i' = i+l$  bzw.  $n$  und  $n' = n+p$  oder lediglich Aufpunktindizes  $m$  und  $m'$  beinhalten. Dabei gilt

$$\tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(\vec{q}, z, \omega) \varphi_{i+l}^*(z) \varphi_i(z) A_{n+p,n}(\vec{q}) \quad (6.55)$$

mit den bereits im Abschnitt 4.1.1.1 eingeführten Funktionen  $A_{n_1,n_2}(\vec{q}) = e^{-\frac{l^2}{4}q^2} G^{n_1,n_2}(l_m q_+)$ . Nach längerer Rechnung und unter Ausnutzung der Beziehungen 6.50 bis 6.55 erhält man für die Intersubband-Zyklotron-Übergangsamplituden  $\tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q})$  in der TDLDA die Selbstkonsistenzgleichung

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q}) &= \frac{\nu_{i,n\sigma} - \nu_{i+l,n+p,\sigma}}{\hbar\omega^+ - (\epsilon_{i+l,n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})} \left\{ \langle i+l | V_{\omega}(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle A_{n+p,n}(\vec{q}) \right. \\ &+ \frac{1}{2\pi l_m^2} \sum_{i',l'} \sum_{n',p'} \sum_{\sigma'} \tilde{\Delta}_{i',n',\sigma'}(l',p',\vec{q}) A_{n+p,n}(\vec{q}) A_{n',n'+p'}(-\vec{q}) \\ &\times \left[ \langle i+l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i'+l' \rangle + \langle i+l, i' | \hat{W}^{(xc)} | i, i'+l' \rangle \right] \left. \right\} , \quad (6.56) \end{aligned}$$

mit den im Abschnitt 6.1.2 definierten Wechselwirkungsmatrixelementen. Faßt man schließlich gemäß der Vorschrift

$$\Delta_i(l,\vec{q}) = \sum_{\sigma} \Delta_{i,\sigma}(l,\vec{q}) = N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_{n,p} \tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q}) A_{n,n+p}(-\vec{q}) \quad (6.57)$$

die einzelnen Beiträge zu den Subband-Übergangsraten des gesamten Q2DEG zusammen ( $N_{LL} = (2\pi l_m^2)^{-1}$ ), so gelangt man nach wenigen Rechenschritten zur Selbstkonsistenzgleichung für die zusammengefaßten Amplituden

$$\begin{aligned} \Delta_i(l,\vec{q}) &= N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_{n,p} \frac{\nu_{i,n\sigma} - \nu_{i+l,n+p,\sigma}}{\hbar\omega^+ - (\epsilon_{i+l,n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})} |A_{n+p,n}(\vec{q})|^2 \left\{ \langle i+l | V_{\omega}(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle \right. \\ &+ \left. \sum_{i',l'} \Delta_{i'}(l',\vec{q}) \left[ \langle i+l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i'+l' \rangle + \langle i+l, i' | \hat{W}^{(xc)} | i, i'+l' \rangle \right] \right\} . \quad (6.58) \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist direkt mit der Gleichung 6.34 des magnetfeldfreien Falls vergleichbar. Sie läßt sich

weiterhin unter Definition der Magneto-Intersubband-Polarisationsfunktionen

$$\chi_{i'}(i)(\vec{q}, \omega) = 2 N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_{n,p} \frac{(\epsilon_{i',n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma}) (\nu_{i,n\sigma} - \nu_{i',n+p,\sigma})}{(\hbar\omega)^2 - (\epsilon_{i',n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})^2} [J_{n+p,n}(l_m q)]^2 \quad (6.59)$$

direkt auf die Form 6.36 des Matrix-Dielektrizitätsfunktion-Formalismus bringen. Dabei wurde die Beziehung  $|A_{n',n}(\vec{q})|^2 = [J_{n',n}(l_m q)]^2$  zwischen den Landau-Formfaktorfunktionen  $A_{n',n}$  und den Landau-Überlappfunktionen  $J_{n',n}$  ausgenutzt.

### 6.1.3.1 Vertikale Intersubband-Übergänge und Einfluß der Nichtparabolizität

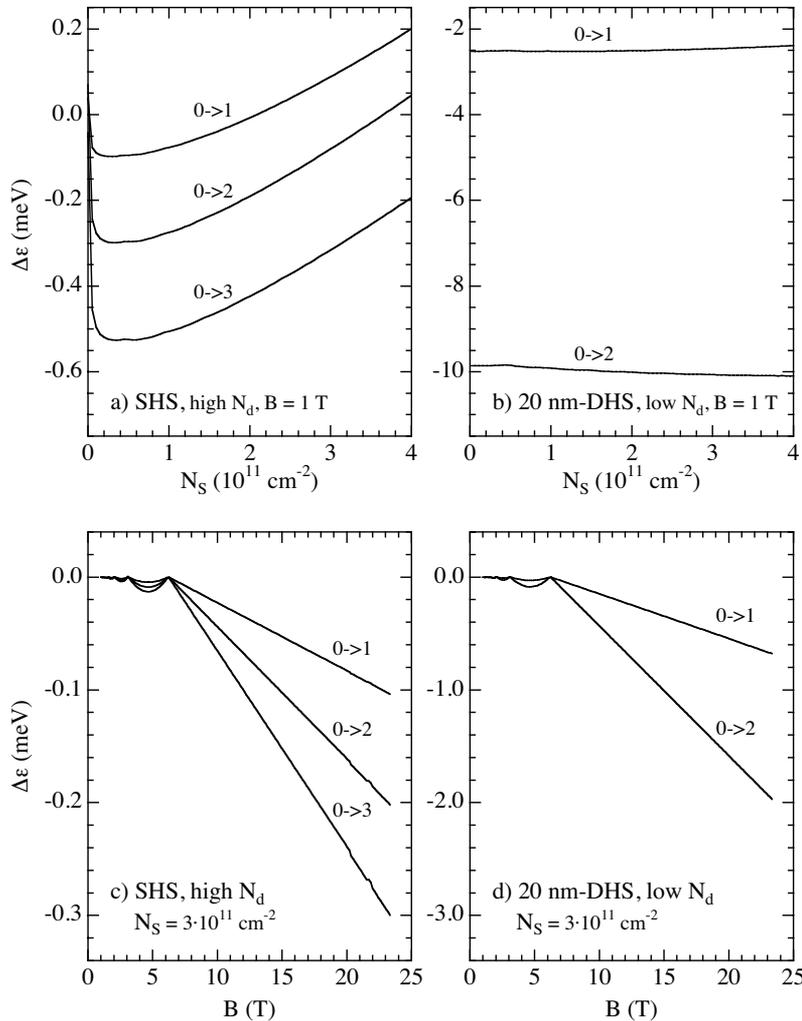
Bei vertikalen Intersubband-Übergängen mit  $\vec{q} = 0$  gilt  $A^{n',n}(0) = \delta_{n,n'}$  und damit die Auswahlregel  $p = n' - n = 0$ . Diese besagt daß sich der Landau-Index bei einem strikt vertikalen Intersubband-Übergang nicht ändert. Daher sind für diesen Fall die Betrachtungen aus dem magnetfeldfreien Fall abgesehen von magnetfeldspezifischen Besetzungseffekten, die erst bei hohen Elektronendichten und geringen Subband-Abständen auftreten (siehe Abschnitt 5.3.5), vollständig übertragbar [And76b]. Wie man jedoch bei der Zyklotronresonanz beobachten konnte, werden mit Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall die Einflüsse der Nichtparabolizität des Leitungsbandes zunehmend wichtig und experimentell sichtbar. Die folgenden Ausführungen widmen sich daher dem Einfluß der Nichtparabolizität auf die Intersubband-Resonanzen eines Q2DEG im starken Magnetfeld im Rahmen der TDLDA.

In erster Ordnung der Störungsrechnung erfahren die Energieniveaus eines Q2DEG entsprechend der Gleichung 2.106 Korrekturen aufgrund der Nichtparabolizität, die im wesentlichen mit dem Verhältnis von Anteilen der kinetischen Energie und der effektiven Energielücke  $E_g^*$  skalieren. Da diese Korrekturen im Vergleich zu typischen Subband-Abständen klein sind, werden sämtliche Übergänge zwischen zwei Subbändern mit Energien  $\epsilon_{i'}(i)(n, \sigma)$ , die sich aufgrund der Nichtparabolizität im Landau-Index und im Spin unterscheiden, gemäß der Vorschrift

$$\epsilon_{i'}(i) = \frac{\sum_{n,\sigma} \nu_{i,n,\sigma} \epsilon_{i'}(i)(n, \sigma)}{\sum_{n',\sigma'} \nu_{i,n',\sigma'}} \quad (6.60)$$

zu einer effektiven Übergangsenergie zusammengefaßt. Darin stehen die  $\nu_{i,n,\sigma}$  wiederum für die Füllungen der Landau-Niveaus. Eine solche Mittelung nimmt die Hybridisierung energetisch nahe beieinander liegender Moden aufgrund ihrer kollektiven Verkopplungen vorweg und ist hier in guter Näherung gerechtfertigt. Die Berechnung der Intersubband-Moden eines nichtparabolischen Q2DEG erfolgt in dieser Näherung bis auf die Verwendung von Gleichung 6.60 für die Subband-Abstände vollkommen analog zu derjenigen für ein parabolisches Q2DEG.

Zur Abschätzung der Effekte, die aufgrund der Nichtparabolizität zu erwarten sind, zeigen die Auftraggungen in der Abbildung 6.3 die berechneten Energiedifferenzen  $\Delta\epsilon_K = \epsilon_{CDE,K}^{(np)} - \epsilon_{CDE,K}^{(p)}$  bzw.  $\Delta\epsilon_K = \epsilon_{CDE,K}^{(np)} - \epsilon_{CDE,K}^{(np)}(B = 0 \text{ T})$  der Intersubband-Ladungsdichtemoden für zwei Modellsysteme als Funktion der Elektronendichte (Teilfiguren a) und b)) bzw. des Magnetfeldes (Teilfiguren c) und d)). Man erkennt an den Verläufen, daß der Einfluß der Nichtparabolizität auf die Modenenergien für die SHS eher gering ausfällt. In der DHS hingegen sind die Auswirkungen der Nichtparabolizität um fast eine ganze Größenordnung stärker ausgeprägt. Dies liegt einerseits daran, daß im Quantentrog die Subband-Abstände deutlich höher liegen und zum anderen, daß die Subband-Quantisierung in einem Quantentrog  $\langle \hat{T}_z \rangle_i \approx \epsilon_i$  im Gegensatz zu einer Einfachheterostruktur  $\langle \hat{T}_z \rangle_i \approx \epsilon_i/3$  zum Hauptteil aus kinetischer Energie besteht, die alleinig für die Nicht-



**Abbildung 6.3:** Einfluß der Nichtparabolizität auf die Intersubband-Ladungsdichtemoden. Teilfiguren a) und c) zeigen die Energieunterschiede zwischen parabolischer und nichtparabolischer Bandstruktur in Abhängigkeit von der Elektronendichte bzw. des Magnetfeldes für eine Einfachheterostruktur mit hoher Verarmungsladung  $N_d = 8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  sowie b) und d) für einen Quantentrog mit geringer Verarmungsladung  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Die Parameter der Rechnung lauten: Bandkantenmasse in GaAs:  $m^* = 0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $m^* = 0.088 m_e$ , Barrierenhöhe: 300 meV, effektive Lücke:  $E_g^* = 1000 \text{ meV}$  und Dielektrizitätskonstante:  $\varepsilon_{sc} = 12.8$ .

parabolizität wirksam ist (siehe Abschnitt 2.6). Die Magnetfeldvariationen der Energiedifferenzen (Teilfiguren c) und d)) sind für Einfachheterostrukturen und Quantentröge bis auf die Größenskala gleich und entsprechen im Wesen den Verläufen, wie sie auch von der Zyklotronresonanz her bekannt sind. Auch hier treten geringe Variationen mit dem Füllfaktor auf, die erst mit Eintritt in den Quantengrenzfall deutlich zunehmen. Absolut gesehen können jedoch in Anbetracht der typischen ISR-Linienbreiten die Einflüsse der Nichtparabolizität auf die Intersubband-Übergänge zumindest für Einfachheterostrukturen als vernachlässigbar gelten.

### 6.1.3.2 Bernstein-Moden und kombinierte Intersubband-Zyklotron-Resonanzen

#### Intersubband-Bernstein-Moden:

Wie man anhand der Gleichung 6.59 erkennt, besitzen die Subband-Polarisationsfunktionen Resonanzpole, die sich aufgrund unterschiedlicher Landau-Indizes in den Start- und Zielniveaus energetisch unterscheiden. Im Grenzfall kleiner  $ql_m \rightarrow 0$  allerdings tragen die Pole der vertikalen Übergänge mit  $p = n' - n = 0$  nahezu die gesamte Anregungsstärke. Die höheren Pole mit  $p = n' - n = \pm 1, \pm 2, \dots$  bekommen erst bei nicht-vertikalen Übergängen entsprechend

$$[J_{n+p,n}(l_m q)]^2 \approx \frac{(n + |p|)!}{n! |p|!} \left( \frac{l_m^2 q^2}{2} \right)^{|p|}, \quad l_m q \ll 1 \quad (6.61)$$

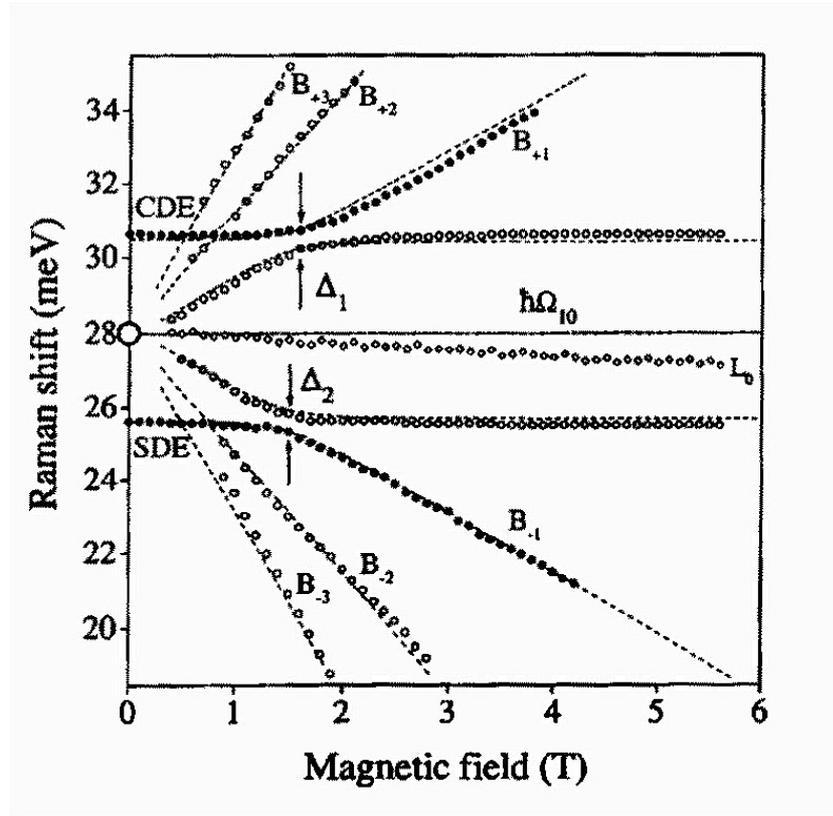


Abbildung 6.4: Manifestation der ISR-Bernstein-Moden und ISR-Bernstein-Resonanzen in resonanter elektronischer Raman-Streuung. Aus [Kir99].

ein Gewicht und führen bei entsprechenden Niveaubesetzungen zu kombinierten Intersubband-Zyklotronresonanzen mit Energien

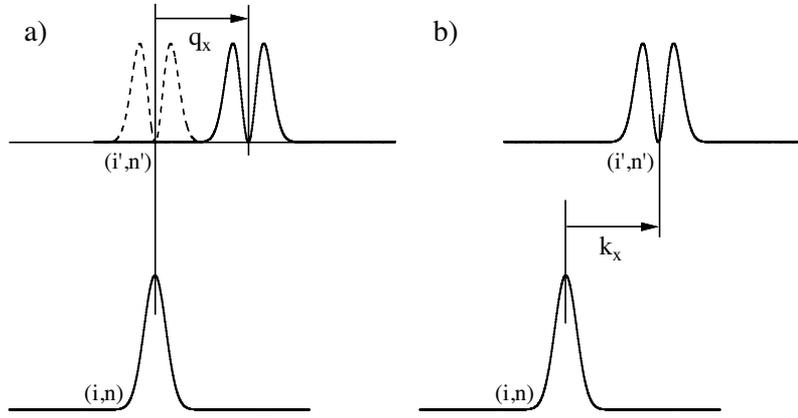
$$\epsilon_{ISR-CR,i}(p) \approx \epsilon_{i0} + p \hbar \omega_c, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.62)$$

Die entsprechenden Resonanzen werden als Bernstein-Moden bezeichnet.

Da in der TDLDA die kollektiven Intersubband-Moden (DE = CDE bzw. SDE) keine und die Bernstein-Moden eine lineare Magnetfelddispersion aufweisen, durchkreuzen sich beide Moden bei den Resonanzfeldern

$$B_{DE,i0}(p) = \frac{m^*}{e\hbar} \frac{\epsilon_{DE,i0} - \epsilon_{i0}}{p}. \quad (6.63)$$

Aufgrund der Kopplung zwischen diesen beiden Modentypen entstehen Resonanzaufspaltungen an den Kreuzungspunkten, wobei sich Hybridmoden bestehend aus Intersubband-Kollektivmoden und Zyklotronübergängen ausbilden und zu charakteristischen Linienaufspaltungen Anlaß geben. Wie aus der Abbildung 6.4 hervorgeht, können in resonanter elektronischer Raman-Streuung sowohl Ladungs-, Spindichte- und Einteilchen-Anregungen als auch Bernstein-Moden sowie Bernstein-Resonanzaufspaltungen in den Kollektivmoden simultan beobachtet werden [Kir99]. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der TDLDA lassen sich aus den Lagen der Bernstein-Pole über die Beziehung 6.63 Rückschlüsse auf die unverschobenen Subband-Abstände und die kollektiven Verschiebungen ziehen. In Analogie zu den Intrasubband-Bernstein-Moden existieren in Q2DEG ferner auch die bereits seit längerem bekannten Intrasubband-Bernstein-Moden und Intrasubband-Bernstein-Resonanzen [Bat86]. Die letzteren resultieren aus der Durchkreuzung des Intrasubband-Magneto-Plasmons durch die höheren Zyklotronresonanzen mit  $p \geq 2$ .



**Abbildung 6.5:** Veranschaulichung der Analogie zwischen einem endlichen Impulsübertrag und einem verkippten Magnetfeld.

### Kombinierte Intersubband-Zyklotron-Resonanzen im verkippten Magnetfeld:

Eng verwandt mit den Bernstein-Moden in der ISR sind die vertikalen ( $\vec{q} = 0$ ) Intersubband-Zyklotron-Resonanzen in einem verkippten Magnetfeld. Diese Verwandtschaft liegt nicht zuletzt an den Funktionen  $J_{n',n}$ , die im Falle eines verkippten Magnetfeldes den Überlapp der im  $\vec{k}$ -Raum aufgrund der parallelen Magnetfeldkomponente verschobenen Landau-Niveaus beschreiben (siehe Abschnitt 2.5) [And79]. Die Polarisationsfunktionen im gekippten Feld

$$P_{i',i}(\vec{q} = 0, \omega) = N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_{n,p} \frac{\nu_{i,n,\sigma} - \nu_{i',n+p,\sigma}}{\hbar\omega^+ - (\epsilon_{i',n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})} [J_{n+p,n}(\Delta_{i',i})]^2 \quad (6.64)$$

haben eine zur Gleichung 6.59 vollständig analoge Form, wobei lediglich das Argument  $l_{mq}$  der Überlappfunktionen durch die dimensionslose und vom Übergang abhängige Verschiebung

$$\Delta_{i',i} = \frac{l_{\perp}}{l_{\parallel}^2} (\langle i' | z | i' \rangle - \langle i | z | i \rangle) \quad , \quad i' > i \quad (6.65)$$

ersetzt ist [And77b]. Bei dieser Form wird allerdings das Regime derart geringer Verkipnungen und Magnetfelder vorausgesetzt, daß resonante Subband-Landau-Niveauekopplungen (RSLLC) ausgeschlossen sind. Die modifizierten Niveauenergien in den Resonanzennennern sind in erster störungstheoretischer Ordnung durch

$$\epsilon_{i,n,\sigma} \approx \epsilon_i + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\langle i | z^2 | i \rangle - \langle i | z | i \rangle^2}{l_{\parallel}^4} + \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + g^* \mu_B B \sigma \quad (6.66)$$

gegeben und unterscheiden sich von den unverkippten in der diamagnetischen Subband-Verschiebung aufgrund der parallelen Feldkomponente  $B_{\parallel}$ , der Zyklotronfrequenz  $\omega_c = eB_{\perp}/m^*$ , in der lediglich die senkrechte Komponente  $B_{\perp}$  wirksam ist und dem Zeeman-Term, in dem dich das Gesamtfeld  $B$  wiederfindet. Zu beachten ist ferner, daß die Niveaueartung  $N_{LL} = 1/(2\pi l_{\perp}^2)$  alleinig durch die senkrechte Feldkomponente gegeben ist, wobei  $l_{\perp} = \sqrt{\hbar/(eB_{\perp})}$  und  $l_{\parallel} = \sqrt{\hbar/(eB_{\parallel})}$  die beiden magnetischen Längen bezeichnen.

Aufgrund der weitgehend analogen mathematischen Struktur der Polarisationsfunktionen weisen die kombinierten Intersubband-Zyklotron-Resonanzen im verkippten Magnetfeld bei  $\vec{q} = 0$  zumindest in der TD LDA die analogen Moden und Resonanzphänomene auf wie die ISR im senkrechten Magnetfeld und endlichen  $\vec{q}$ . Daher stellt ihre Untersuchung ein probates Mittel zur Aufklärung der Bernstein-Modenstruktur dar. Anstelle großer und experimentell nur schwer zugänglicher Wellenvektorüberträge benötigt man speziell in Einfachheterostrukturen lediglich eine verhältnismäßig leicht zu realisierende Verkipfung des Q2DEG gegenüber dem

Magnetfeld [Bat91, Fri96b]. Die durch eine Verkipfung des Magnetfeldes erreichbaren effektiven Impulsüberträge sind dabei durch  $q_{x,eff} = k_x = \Delta_{i',i}/l_{\perp}$  gegeben. In effektiven Gitterkopplerkonstanten  $a_{eff}$  ausgedrückt gilt<sup>2</sup>

$$a_{eff} = \frac{2\pi}{q_{x,eff}} = \frac{2\pi l_{\parallel}^2}{\langle i' | z | i' \rangle - \langle i | z | i \rangle} . \quad (6.67)$$

Zur abschließenden Veranschaulichung der Analogie dient die Figur 6.5. In ihr ist schematisch ein Übergang von einem Landau-Orbital  $(i, n)$  in ein im Impulsraum versetztes Landau-Orbital  $(i', n')$  dargestellt. In der Teilfigur a) kommt die Verschiebung allein aufgrund eines endlichen Impulsübertrages  $q_x$  durch das anregende Feld zustande. Die Teilfigur b) zeigt die Verhältnisse im Falle eines verkippten Magnetfeldes. Hier sind die beiden Niveaus  $(i, n)$  und  $(i', n')$  bereits im Impulsraum aufgrund der parallelen Feldkomponente statisch gegeneinander verschoben, so daß bereits ohne Impulsübertrag eine zu a) äquivalente Konfiguration entsteht. Die für die Bildung der Polarisationsfunktion relevanten Matrixelemente entsprechen Erwartungswerten zwischen dem Ausgangsniveau und dem verschobenen Zielniveau. Unter diesem Aspekt erscheinen die beiden Situationen in a) und b) vollkommen gleichwertig, was die Analogie anschaulich erklärt.

## 6.1.4 Kopplung der ISR an weitere Elementaranregungen

Bei den bisherigen Betrachtungen zur ISR wurden die Kopplungen zwischen den Intersubband-Plasmonen und weiteren Elementaranregungen nicht berücksichtigt. Die Effekte aufgrund solcher Kopplungen lassen sich auf sehr transparente Weise im Formalismus der Matrix-Dielektrizitätsfunktion nach Abschnitt 6.1.2.1 behandeln.

### 6.1.4.1 Kopplung an Intrasubband-Plasmonen

#### Magnetfeldfreier Fall:

Die im magnetfeldfreien Fall gültigen Subband-Polarisationsfunktionen sind in der Gleichung 6.40 angegeben. In der diagonalen Näherung, d.h. bei vernachlässigbarer Kopplung der Intersubband-Moden untereinander, folgt aus der Vorschrift 6.38 im elektrischen Quantengrenzfall mit nur einem besetzten Subband die Säkulargleichung

$$(1 - W_{00,00} \chi_{00}) (1 - W_{i0,0i} \chi_{i0}) - W_{00,0i}^2 \chi_{00} \chi_{i0} = 0 . \quad (6.68)$$

Ohne die Kopplung  $W_{00,0i}$  ergibt sich mit  $\chi_{00}(\vec{q}, \omega) \approx N_S q^2 / (m^* \omega^2)$  aus der Bedingung

$$1 - W_{00,00} \chi_{00} = 0 \quad (6.69)$$

für die Dispersion des Intrasubband-Plasmons  $\omega_{pl}(\vec{q})$  das bereits aus einer klassischen Betrachtung erhaltene Resultat 1.27 bzw. 3.53. Die Frequenzen der ungekoppelten Intersubband-Plasmonen bestimmen sich aus der Bedingung

$$1 - W_{i0,0i} \chi_{i0} = 0 \quad (6.70)$$

<sup>2</sup>Zur Abschätzung für eine SHS dient folgendes Zahlenbeispiel:  $\langle 1 | z | 1 \rangle - \langle 0 | z | 0 \rangle < 10 \text{ nm}$ ,  $l_{\parallel} > 12 \text{ nm} \rightarrow a_{eff} > 80 \text{ nm}$ .

und sind in der Gleichung 6.47 angegeben. Infolge der Kopplung bilden sich Mischmoden aus, deren Modenenergien im betrachteten Grenzfall durch die vertraute Form

$$\left(\tilde{\omega}_{CDE,i0}^{\pm}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(\omega_{pl}^2 + \tilde{\omega}_{CDE,i0}^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_{pl}^2 - \tilde{\omega}_{CDE,i0}^2\right)^2 + 4\omega_i^4} \right], \quad (6.71)$$

zweier gekoppelter Oszillatoren beschrieben werden [Sar84]. Die Kopplungsfrequenz  $\omega_i$  ist dabei durch den Ausdruck

$$\omega_i^4 = \frac{2\hbar\omega_{i0}q^2N_S^2}{m^*} W_{00,0i}^2(\vec{q}) \quad (6.72)$$

gegeben und wird hauptsächlich durch das Wechselwirkungsmatrixelement  $W_{00,0i}$  bestimmt. Aufgrund der Orthogonalität der Wellenfunktionen weist dieses in der TDLDA keinen Austausch-Korrelationsbeitrag auf. Es verschwindet ferner aus Paritätsgründen im Grenzfall eines symmetrischen Quantentrogens zu Null. Daher ist die Intersubband-Intrasubband-Kopplung in Quantentrogensystemen generell deutlich geringer ausgeprägt als in Einfachheterostrukturen. Für die meisten experimentellen Situationen führen die Wechselwirkungen zwischen den Intersubband-Resonanzen und den Intrasubband-Plasmonen aufgrund der geringen Kopplung und den relativ großen Energiedifferenzen in der Regel nur zu kleinen und oftmals vernachlässigbaren Korrekturen.

### Quantisierendes senkrecht Magnetfeld:

Im starken senkrechten Magnetfeld ergibt sich unter Voraussetzung des elektrischen Quantengrenzfalls aus Gleichung 6.59 unter Verwendung von Beziehung 6.66 bei kleinen  $q$  für die Intrasubband-Polarisationsfunktion der näherungsweise Ausdruck

$$\chi_{00}(\vec{q}, \omega) \approx \frac{N_S q^2}{m^*} \frac{1}{(\omega^+)^2 - \omega_c^2}. \quad (6.73)$$

Aufgrund des Auftauchens der Zyklotronfrequenz im Nenner ändert sich die Situation gegenüber dem magnetfeldfreien Fall grundlegend. Das liegt daran, daß das Intrasubband-Plasmon mit der Frequenz  $\omega_{mp}(q) \approx \sqrt{\omega_c^2 + \omega_{pl}^2(q)}$ ,  $q \rightarrow 0$  energetisch stets mit der Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  verschiebt. Generell weist eine Intersubband-Resonanz zumindest in der TDLDA keine und das Intrasubband-Plasmon eine lineare Magnetfelddispersion auf. Beide Anregungen durchkreuzen sich bei der Resonanzfrequenz  $\tilde{\omega}_{CDE,i0} = \omega_{mp} \approx \hbar\omega_c$ ,  $\omega_c^2 \gg \omega_{pl}^2$ , die bei einem Resonanzmagnetfeld

$$B_{i0} \approx \frac{m^*}{\hbar e} \tilde{\epsilon}_{CDE,i0} \quad (6.74)$$

erfüllt wird. Auch in diesem Fall gilt die Form 6.71 mit der Ersetzung von  $\omega_{pl}$  durch  $\omega_{mp}$ . Bei Durchstimmung des Magnetfeldes durch die Resonanzbedingung bilden sich infolge der Niveauabstoßung Mischmoden aus, die in ihrem Charakter von Intersubband- zu Intrasubband-Plasmonen wechseln oder umgekehrt.

Zuletzt sei in diesem Zusammenhang noch angemerkt, daß die resonante Intersubband-Intrasubband-Plasmonkopplung bei hohen Magnetfeldern zumindest phänomenologisch eng mit der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) aufgrund eines gegenüber der Wachstumsrichtung verkippten Magnetfeldes verwandt ist und von ihr häufig überdeckt wird.

### 6.1.4.2 Kopplung an longitudinale Phononen

In polaren Kristallen können die Plasmonen des Q2DEG an longitudinale Gittermoden koppeln. Dieser Aspekt wurde für die Intrasubband-Plasmonen bereits in einer klassischen Betrachtung in Abschnitt 3.3 ausführlich behandelt und soll hier im Rahmen der SCF umfassender betrachtet werden.

Im Rahmen der SCF kann der Kopplung zwischen Kristallgitter und Elektronengas über eine effektive phononvermittelte Elektron-Elektron-Wechselwirkung Rechnung getragen werden [Wen87b]. Eine solche Wechselwirkung ist von zweiter störungstheoretischer Ordnung in der Elektron-Phonon-Wechselwirkung und hat im allgemeinen die Form

$$\hat{W}^{(ph)} = \sum_{\vec{k}} \sum_p \frac{2}{\hbar} \frac{\omega_p(\vec{k})}{(\omega^+)^2 - \omega_p^2(\vec{k})} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' V_{p, \vec{k}}(z) V_{p, \vec{k}}^*(z') \hat{n}_{\vec{k}, \sigma}(z) \hat{n}_{-\vec{k}, \sigma'}(z') . \quad (6.75)$$

Als Besonderheit ist diese Wechselwirkung selbst frequenzabhängig und weist Resonanzpole bei den Frequenzen  $\omega_p(\vec{k})$  der Gitterschwingungen auf, welche durch den Modenindex  $p$  und den Wellenvektor  $\vec{k}$  charakterisiert sind. Der Modenindex schließt alle Gitterschwingungstypen, die in einem Schichtsystem vorkommen, mit ein und  $V_{p, \vec{k}}(z)$  steht gemäß dem Abschnitt 3.2 für die Elektron-Phonon-Kopplung der jeweiligen Mode.

Aufgrund dieser Wechselwirkung ergeben sich für das selbstkonsistente Feld zusätzliche Wechselwirkungsbeiträge mit den Matrixelementen

$$\langle i', i''' | \hat{W}^{(ph)}(p, \vec{q}, \omega) | i, i'' \rangle = \frac{2}{\hbar} \frac{\omega_p(\vec{q})}{(\omega^+)^2 - \omega_p^2(\vec{q})} f_{i' i, i''' i''}(p, \vec{q}) , \quad (6.76)$$

wobei die Formfaktoren der Phonon-Kopplung  $f_{i' i, i''' i''}(p, \vec{q})$  durch den Ausdruck

$$f_{i' i, i''' i''}(p, \vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi_{i'}^*(z) \varphi_{i''}(z') V_{p, \vec{q}}(z) V_{p, \vec{q}}^*(z') \varphi_i(z) \varphi_{i''}(z') \quad (6.77)$$

definiert sind. Die meisten Betrachtungen beschränken sich wiederum auf den Grenzfall der Ankopplung an die LO-Volumenphononen. Für diese ist die Kopplungsfunktion in der Gleichung 3.37 angegeben und die Summation über den Modenindex  $p$ , welcher mit der Wellenvektorkomponente  $q_z$  identifiziert wird, kann analytisch ausgeführt werden. Als Resultat für die Matrixelemente der LO-Phonon-Kopplung erhält man schließlich nach wenigen Rechenschritten die Form

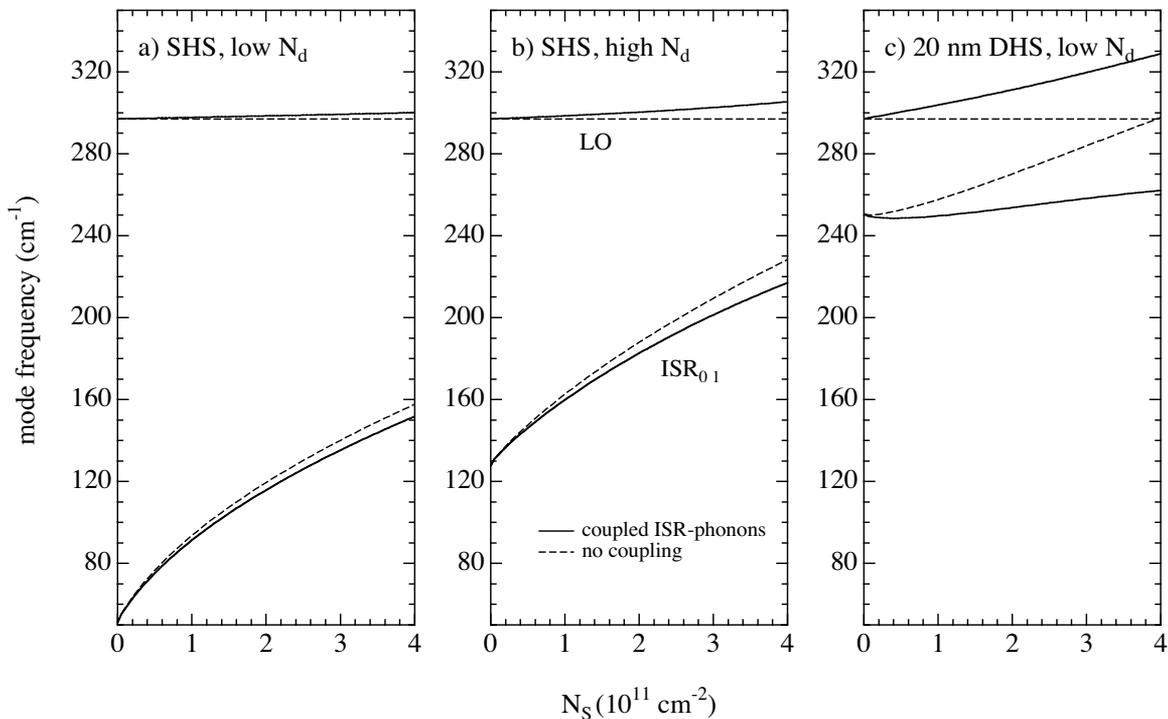
$$\sum_{q_z} \langle i', i''' | \hat{W}^{(ph)}(q_z, \vec{q}, \omega) | i, i'' \rangle = \frac{\omega_{LO}^2}{(\omega^+)^2 - \omega_{LO}^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\infty}}{\varepsilon(0)} \right) \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} q} F_{i' i, i''' i''}(q) , \quad (6.78)$$

wobei die Coulomb-Formfaktoren  $F_{i' i, i''' i''}(q)$  in der Gleichung 6.29 definiert sind. Faßt man die direkte und die gittervermittelte Wechselwirkung zusammen, so bekommt man unter Verwendung der Lyddane-Sachs-Teller-Relation  $\varepsilon_{\infty}/\varepsilon(0) = \omega_{TO}^2/\omega_{LO}^2$  schließlich das vertraute Ergebnis

$$\langle i', i''' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) + \hat{W}^{(ph)}(\vec{q}, \omega) | i, i'' \rangle = \left[ \varepsilon_{\infty} \frac{(\omega^+)^2 - \omega_{LO}^2}{(\omega^+)^2 - \omega_{TO}^2} \right]^{-1} \frac{e^2}{2\varepsilon_0 q} F_{i' i, i''' i''}(q) . \quad (6.79)$$

Dieses entspricht einer effektiven durch das Gitter dynamisch abgeschirmten Coulomb-Wechselwirkung.

Der Gitterbeitrag zur Elektron-Elektron-Wechselwirkung bewirkt eine Renormierung der Kollektivmoden



**Abbildung 6.6:** In der TDLDA berechnete Energien der Intersubband-Plasmon-Phononen für drei Modellsysteme in Abhängigkeit von der Elektronendichte. Die 3 Teilfiguren zeigen jeweils den untersten ISR-Übergang. Die Modellsysteme sind in der Abbildung 6.1 beschrieben.

und führt aufgrund der eigenen Polstruktur unter geeigneten Bedingungen zu weiteren charakteristischen Resonanzphänomenen. Aus der Plasmon-Phonon-Wechselwirkung resultieren Mischmoden mit gleichzeitigem Plasmon- und Phononcharakter, weshalb sie auch als Plasmon-Phononen bezeichnet werden. Deren Frequenzen bestimmen sich wiederum aus den Gleichungen 6.37 und 6.38, wobei sämtliche Beiträge zum selbstkonsistenten Feld in den Wechselwirkungsmatrixelementen  $W_{i' i, j j'}^{(dir)} = W_{i' i, j j'}^{(dir)}(\vec{q}) + W_{i' i, j j'}^{(xc)} + \sum_p W_{i' i, j j'}^{(ph)}(p, \vec{q}, \omega)$  zusammengefasst sind.

Das Wesen der gekoppelten Plasmon-Phononmoden wird deutlich, wenn man die Plasmon-Kopplung wiederum vernachlässigt. Die gekoppelten Intersubband-Plasmon-Phononen ergeben sich dann im elektrischen Quantengrenzfall aus den beiden Säkulargleichungen für die Intersubband-Plasmon-Phononen:

$$W_{i 0, 0 i}^{(dir)}(\vec{q}) + W_{i 0, 0 i}^{(xc)} + \sum_p \frac{2}{\hbar} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} f_{i 0, 0 i}(p, \vec{q}) = \chi_{i 0}^{-1}(\vec{q}, \omega) , \quad (6.80)$$

beziehungsweise das Intrasubband-Plasmon-Phonon:

$$W_{0 0, 0 0}^{(dir)}(\vec{q}) + \sum_p \frac{2}{\hbar} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} f_{0 0, 0 0}(p, \vec{q}) = \chi_{0 0}^{-1}(\vec{q}, \omega) . \quad (6.81)$$

Im Grenzfall der LO-Phonon-Kopplung führt die Auswertung der Bedingung 6.81 mit der näherungsweisen Intrasubband-Polarisationsfunktion aus Gleichung 6.73 zu dem bereits auf klassischem Weg erhaltenen Resultat 3.65 für das Magneto-Plasmon-Phonon, welches für  $\omega_c \rightarrow 0$  das Plasmon-Phonon als Grenzfall enthält. Die analoge Auswertung der Bedingung 6.80 ergibt für die Frequenzen der gekoppelten Intersubband-Plasmon-

Phononen die funktionale Form

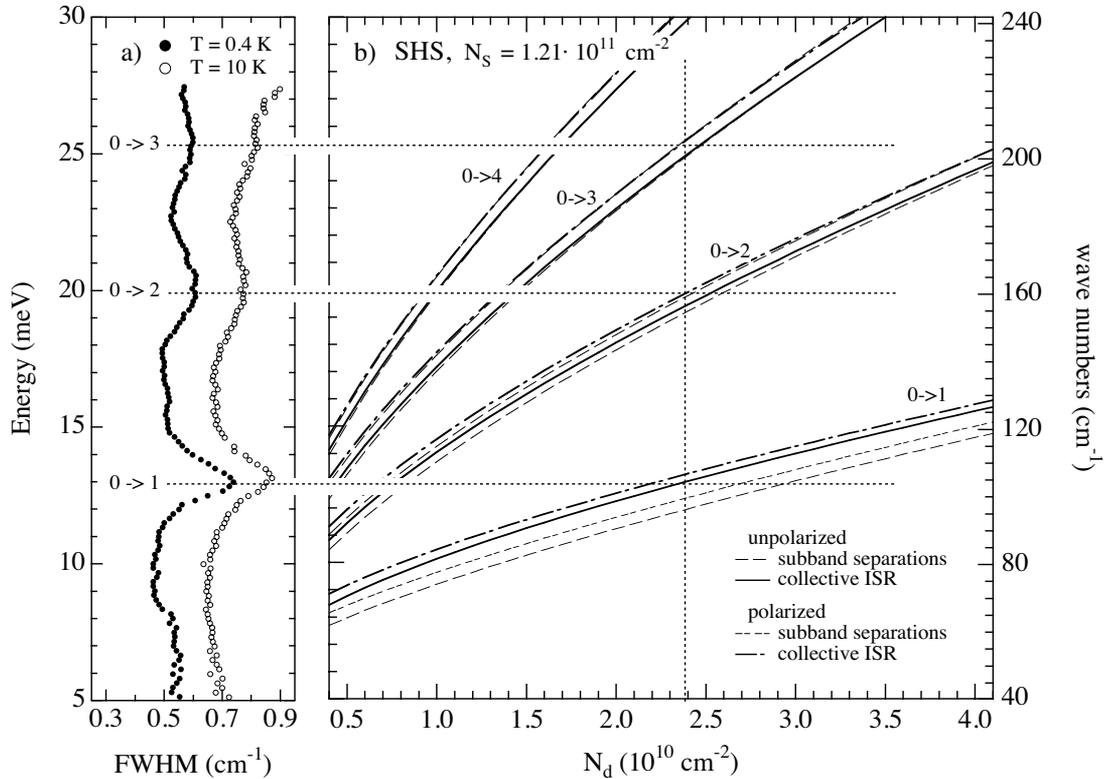
$$\left(\tilde{\omega}_{ISR-ph,i0}^{\pm}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(\omega_{LO}^2 + \tilde{\omega}_{CDE,i0}^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_{LO}^2 - \tilde{\omega}_{CDE,i0}^2\right)^2 + 4\alpha_{i0,i0}\omega_{i0}^2\left(\omega_{LO}^2 - \omega_{TO}^2\right)} \right], \quad (6.82)$$

wobei die Kopplungsstärke durch die kollektive Verschiebung aufgrund der direkten Coulomb-Wechselwirkung  $\alpha_{i0,i0}\omega_{i0}^2$  gemäß Gleichung 6.47 bestimmt ist. Zur Illustration der ISR-Phonon-Kopplung sind die gemäß der Gleichung 6.82 berechneten ISR-Phononen für den untersten Intersubband-Übergang dreier Modellsysteme als Funktion der Dichte dargestellt. Man erkennt anhand der Auftragung, daß die Einflüsse der ISR-Phonon-Kopplung mit zunehmender Dichte und mit Annäherung der ISR an das LO-Phonon stärker werden und nur bei niedrigen Dichten und weit entfernt von der Resonanzbedingung  $\omega_{CDE,10} \approx \omega_{LO}$  als Korrekturen betrachtet werden können. Abschließend sei angemerkt, daß man der Plasmon-Phonon-Kopplung in vielen Fällen bereits dadurch angemessen Rechnung trägt, indem man für die ISR-Resonanzen, die deutlich unterhalb der LO-Frequenz liegen, in der Coulomb-Wechselwirkung für  $\varepsilon_{sc}$  die statische Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon(0)$  einsetzt, für Frequenzen deutlich oberhalb  $\omega_{LO}$  hingegen  $\varepsilon_{\infty}$ .

### 6.1.5 Experimentelle Manifestation der Intersubband-Resonanz

Zur Anregung von Intersubband-Resonanzen von Q2DEG mittels Ferninfrarotstrahlung bedarf es entweder einer Feldkomponente des anregenden Feldes senkrecht zur Schichtebene oder der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) infolge eines verkippten Magnetfeldes. Während die direkte Ankopplung an die ISR nur unter Zuhilfenahme experimenteller Techniken, wie beispielsweise der Gitterkopplertechnik, möglich ist, erfordert die letztere Methode abgesehen von der Verfügbarkeit hoher Magnetfelder keine aufwändigen Präparationstechniken. Die RSLLC allerdings gibt die ISR-Frequenzen  $\omega_{i0}$  der Subband-Übergänge  $0 \rightarrow i$  bei einem Magnetfeld  $B_{RSLLC,i0} \approx m^*\omega_{i0}/e$  wieder. Sie können sich deshalb prinzipiell von den Übergangsfrequenzen bei  $B = 0$  unterscheiden. Im Rahmen der TDLDA allerdings sollten die durch RSLLC bestimmten Resonanzlagen mit den auf direktem Weg bei  $B = 0$  gemessenen übereinstimmen.

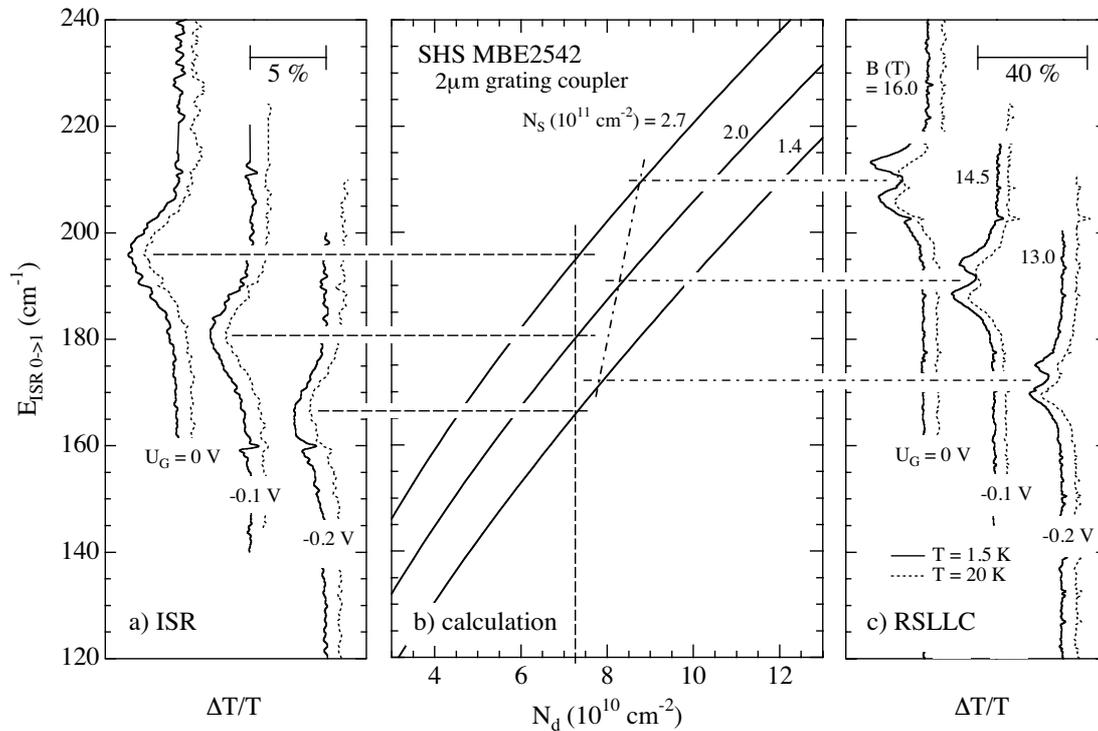
Figur 6.7 a) zeigt die gemessene Linienbreite der Zyklotronresonanz als Funktion der Resonanzlage  $\omega_c$  für eine Einfachheterostruktur mit einer niedrigen Dichte. Auffällig treten in der Auftragung die drei Resonanzüberhöhungen in der Linienbreite signifikant hervor, welche den Resonanzkopplungen der Subband-Niveaus ( $i' = 1, 2, 3, n' = 0$ ) mit dem Landau-Niveau ( $i = 0, n = 1$ ) infolge einer geringen ( $\theta < 0.5^\circ$ ) Verkipfung zugeordnet werden können. Die Elektronendichte der Probe ließ sich aus Transportmessungen sehr präzise auf den angegebenen Wert bestimmen. Die Teilfigur b) zeigt die zur Anpassung an die experimentellen Daten in der TDLDA berechneten ISR-Energien als Funktion der als einzigen Parameter offenen Verarmungsladung  $N_d$ . Es sind dabei sowohl die kollektiv verschobenen und gekoppelten Resonanzenergien als auch die Subband-Abstände für den spinentarteten sowie den spinaufgelösten Fall aufgetragen. Die Güte der jeweiligen Beschreibung spiegelt sich darin wider, wie gut die Schnittpunkte zwischen den horizontalen, die experimentellen Resonanzlagen repräsentierenden Linien mit den gerechneten Verläufen auf einer Senkrechten zu liegen kommen. Durch die senkrechte Hilfslinie ist ein Wert  $N_d = 2.4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  ausgezeichnet, bei dem das Gütekriterium sehr gut erfüllt wird, während keine derartige Übereinstimmung mit den unverschobenen Subband-Abständen gefunden werden kann. Hierbei kann aufgrund des geringen Unterschiedes in den gerechneten Verläufen und in Anbetracht der Resonanzbreite allerdings nicht zwischen den beiden als Grenzfälle zu betrachtenden Spinpolarisationsszenarien unterschieden werden. Insgesamt ist die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie als derart gut zu bewerten, so daß in Übereinklang mit den Resultaten in [Ens88] und den Vorhersagen



**Abbildung 6.7:** Manifestation der ISR in der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) für eine Einfachheterostruktur mit geringer Dichte und Verarmungsladung. In a) ist die experimentell ausgewertete Zyklotronresonanz-Linienbreite als Funktion der Resonanzlage für zwei tiefe Temperaturen gezeigt. Die gerechneten Verläufe in b) wurden in der TDLDA bestimmt und entsprechen den Subband-Abständen und den Kollektivmodenenergien bei vollständiger Berücksichtigung der Modenkopplungen für den spinentarteten bzw. den spinpolarisierten Fall. Die der Rechnung zugrunde liegenden Parameter lauten: Bandkantenmasse in GaAs:  $m^* = 0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $m^* = 0.088 m_e$ , Barrierenhöhe: 300 meV und Dielektrizitätskonstante:  $\epsilon_{sc} = \epsilon(0) = 12.8$ . Der ISR-Phonon-Kopplung wird lediglich durch die Verwendung der statischen Dielektrizitätskonstanten Rechnung getragen. Die Nichtparabolizität des Leitungsbandes ist nicht berücksichtigt.

in [Zaf85] die Aussage, daß die RSLLC bei den kollektiv verschoben Subband-Energien auftritt, weitestgehend bestätigt werden kann.

In der Abbildung 6.8 sind die experimentellen Ergebnisse mitsamt der Anpassung für eine SHS mit durchstimmbarer Dichte im mittleren Regime dargestellt. Die Dichte wurde dabei mittels einer Gatespannung durchgestimmt und die Probe war zur direkten Ankopplung an die ISR mit einem Gitterkoppler der Periode  $a = 2 \mu\text{m}$  versehen. Das Teilbild a) zeigt die durch direkte Ankopplung erhaltenen Intersubband-Resonanzen des experimentell einzig detektierbaren Übergangs  $i = 0 \rightarrow i' = 1$  für 3 Dichten bei  $B = 0$ . Zum Vergleich sind in Teilbild c) die bei entsprechend hohen Magnetfeldern durch die RSLLC aufgespaltenen Zyklotronresonanzen an der identischen Probe unter ansonsten gleichen Bedingungen aufgetragen. Dazwischen zeigt die Teilfigur b) wiederum die gerechneten Verläufe für den betrachteten Übergang als Funktion der Verarmungsladung  $N_d$ . Auch hier wurden die eingestellten Dichten präzise aus Transportmessungen bestimmt. Die theoretischen Verläufe entsprechen den kollektiv verschobenen und gekoppelten ISR-Resonanzen gemäß einer TDLDA-Rechnung unter Voraussetzung der Spinentartung und Vernachlässigung der expliziten ISR-Phonon-Kopplung. Auch hier manifestiert sich die Güte der Beschreibung wiederum in der Lage der



**Abbildung 6.8:** Vergleich zwischen direkt angeregter ISR und der durch RSLLC induzierten ISR für eine Einfachheterostruktur mit mittlerer Dichte und hoher Verarmungsladung. In a) sind die durch den Gitterkoppler angeregten und bei  $B = 0$  gemessenen ISR-Resonanzen für drei Gatespannungen und zwei tiefe Temperaturen aufgetragen. Die analogen und infolge der RSLLC aufgespaltenen Zyklotronresonanzen sind in c) dargestellt. Die gerechneten Verläufe in b) wurden mit den gleichen Parametern und unter den gleichen Voraussetzungen wie in Figur 6.7 berechnet. Es sind jedoch nur die Kollektivmodenfrequenzen für den spinentarteten Fall eingezeichnet.

Schnittpunkte zwischen den experimentellen Resonanzlagen und den gerechneten Kurven auf einer Senkrechten. Während die direkte ISR für  $B = 0$  nahezu perfekt dieses Kriterium erfüllt, ergibt die Auswertung der RSLLC deutlich zu höheren Werten hin verschobene Frequenzen, die zudem das Gütekriterium nur unzureichend erfüllen. Hierbei können sowohl eine diamagnetische Verschiebung der Subband-Energien, die aufgrund des geringen Verkippungswinkels von  $\theta < 4^\circ$  mit  $< 1 \text{ cm}^{-1}$  abgeschätzt werden kann, als auch die Leitungsband-Nichtparabolizität aufgrund ihrer geringen Auswirkung von ebenfalls  $< 1 \text{ cm}^{-1}$  in Einfachheterostrukturen als Ursachen für die beobachtete Frequenzverschiebung ausgeschlossen werden. Aus diesem Ergebnis läßt sich folgern, daß mit zunehmender Dichte und ansteigendem Resonanzfeld Renormierungen der ISR-Übergangsfrequenzen infolge des senkrechten Magnetfeldes auftreten, die nicht durch die TD/LDA-Näherung beschrieben werden.

Unzulänglichkeiten der (TD)LDA-Näherung im starken Magnetfeld sind nicht überraschend, da diese Näherung der mit zunehmendem Magnetfeld immer stärker werdenden und mit dem Füllfaktor oszillierenden Verstärkung des quantenmechanischen Austauschs keine Rechnung trägt. Eine solche Verstärkung führt unter anderem zu einem stark überhöhten und oszillierenden Leitungsband-g-Faktor, der als Hauptursache für die im vorausgehenden Kapitel behandelten Aufspaltungen in der Zyklotronresonanz bei ungeradzahligem Füllfaktoren anzusehen ist [And76a, Mac86b].

## 6.2 Hartree-Fock-Beschreibung der quasi-zweidimensionalen Elektronengase im Magnetfeld

Hinsichtlich der Berücksichtigung eines quantisierenden senkrechten Magnetfeldes ist die Hartree-Fock-Näherung der LDA-Näherung überlegen, da sie den verstärkten Austauschwirkungen im Magnetfeld angemessen Rechnung trägt. Sie wurde bereits häufig für ein strenges 2DEG oder dem Einsubband-Grenzfall zur Beschreibung des austauschverstärkten g-Faktors und der Intrasubband-Magneto-Plasmonen herangezogen [And76a, Mac85a, Mac86b], aber im Zusammenhang mit der ISR angesichts des ungleich höheren rechentechnischen Aufwandes eher selten angewendet [Chu92, Hua96a, Hua96b]. Im Gegensatz zum magnetfeldfreien Fall, wo die HFA lediglich eine Näherung darstellt, existiert bei sehr hohen Magnetfeldern der Grenzfall des Füllfaktors  $\nu = 1$ , bei dem die HFA als exakt zu betrachten ist. Sie sollte daher generell für ganzzahlige Füllfaktoren, die im IQHE ausgezeichnet sind, eine gute und brauchbare Beschreibung darstellen.

Im Abschnitt 6.2.2 werden zunächst die Grundlagen der selbstkonsistenten Berechnung der Magneto-Subband-Struktur eines Q2DEG erarbeitet und selbstkonsistente Subband-Rechnungen durchgeführt. Dem schließt sich im Abschnitt 6.2.3.1 die Behandlung der kollektiven Intra- und Intersubband-Plasmonen und insbesondere der vertikalen Intersubband-Resonanzen im Rahmen der zeitabhängigen HFA (TDHFA) an. Im anschließenden Teilkapitel 6.3 schließlich werden diese Rechnungen zur Erklärung der experimentellen Befunde herangezogen.

### 6.2.1 Hartree-Fock-Subband-Gleichung im senkrechten Magnetfeld

Die Hartree-Fock-Gleichung zur Bestimmung der Einteilchen-Orbitale und ihrer Energien ist in ihrer allgemeinen Form in den Gleichungen 6.2 und 6.9 angegeben. Für ein homogenes Q2DEG kann der Gleichgewichts-dichteoperator  $\hat{n}_0$  aufgrund der Symmetrie in einer zur Beziehung 6.26 analogen Weise entwickelt werden. Für ein in der Ebene homogenes Q2DEG gilt speziell

$$\hat{n}_0 = \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(z) \hat{n}_{0,\sigma}(z) . \quad (6.83)$$

Damit ergeben sich die Matrixelemente bezüglich der Subband-Landau-Orbitale gemäß der Beziehung 6.50 zu

$$\langle i', n', m', \sigma' | \hat{n}_0 | i, n, m, \sigma \rangle = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{n, n'} \delta_{m, m'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha_{\sigma}(z) \varphi_{i'}^*(z) \varphi_i(z) . \quad (6.84)$$

Aus diesem Ausdruck kann unmittelbar abgeleitet werden, daß auch im wechselwirkenden homogenen Q2DEG die Landau-Orbitale Eigenzustände des effektiven Einteilchen-Problems darstellen. Setzt man für die z-Bewegung die  $\varphi_i(z)$  als Eigenfunktionen voraus, so vereinfachen sich die Matrixelemente des Gleichgewichtsdichteoperators schließlich zu

$$\langle i', n', m', \sigma' | \hat{n}_0 | i, n, m, \sigma \rangle = \nu_{i, n, \sigma} \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{i, i'} \delta_{n, n'} \delta_{m, m'} . \quad (6.85)$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeiten entsprechen dabei den Niveaufüllfaktoren  $\nu_{i, n, \sigma}$ .

Die Matrixelemente des HFA-Hamilton-Operators ergeben sich nach längerer Rechnung unter Verwendung der Darstellung für die Coulomb-Wechselwirkung 6.20, der Beziehung 6.85 sowie der Gleichungen 6.51 und

6.52. Sie lauten

$$\begin{aligned} \langle i', n', m', \sigma' | \hat{h}_{HFA} | i, n, m, \sigma \rangle = & \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{n, n'} \delta_{m, m'} \left\{ \langle i' | \hat{T}_z + V_c(\hat{z}) | i \rangle + \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + g^* \mu_B B \sigma + \sum_{\sigma''} \sum_{i'', n''} \nu_{i'', n'', \sigma''} \left[ \langle i', i'' | \hat{\mathcal{H}} | i, i'' \rangle - \delta_{\sigma, \sigma''} \langle i', i'' | \hat{\mathcal{F}}_{n n''} | i'', i \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Dabei sind in dem nackten Einschlußpotential  $V_c(z)$  sämtliche Potentialbeiträge mit Ausnahme des Hartree-Potentials zusammengefaßt. Die Matrixelemente des Hartree-Potentials sind durch den für alle Subband-Landau-Niveaus einheitlichen Hartree-Kern

$$\mathcal{H}(z, z') = -N_{LL} \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} (z - z') \theta(z - z') \quad (6.87)$$

ausgedrückt. Die Fock-Kerne in den Austausch-Matrixelemente sind durch

$$\mathcal{F}_{n n'}(z, z') = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{sc} l_m} \int_0^\infty dx [J_{n', n}(x)]^2 \exp\left(-\frac{x|z - z'|}{l_m}\right) \quad (6.88)$$

definiert und hängen explizit vom Spin und den Landau-Indizes ab. An dem Ausdruck 6.86 erkennt man, daß sich die Einteilchen-Energien der HFA in der Form

$$\epsilon_{i, n, \sigma} = \epsilon_{i, n, \sigma} + \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + g^* \mu_B B \sigma \quad (6.89)$$

darstellen lassen. Diese Form entspricht einer von den Landau-Indizes und vom Spin abhängigen Renormierung der Subband-Energien. Setzt man in der Gleichung 6.86 an die Stelle von  $\langle i' |$  den Ortszustand  $\langle z |$  ein, so bekommt man nach wenigen Rechenschritten schließlich die HFA-Subbandgleichung

$$\begin{aligned} \epsilon_{i, n, \sigma} \varphi_{i, n, \sigma}(z) = & \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m^*(z)} \frac{\partial}{\partial z} + V_c(z) \right] \varphi_{i, n, \sigma}(z) \\ & + \sum_{\sigma'} \sum_{i', n'} \nu_{i', n', \sigma'} \left[ \left( \int_{-\infty}^\infty dz' \mathcal{H}(z, z') \varphi_{i', n', \sigma'}^*(z') \varphi_{i', n', \sigma'}(z') \right) \varphi_{i, n, \sigma}(z) \right. \\ & \left. - \delta_{\sigma, \sigma'} \left( \int_{-\infty}^\infty dz' \mathcal{F}_{n n'}(z, z') \varphi_{i', n', \sigma'}^*(z') \varphi_{i, n, \sigma}(z') \right) \varphi_{i', n', \sigma'}(z) \right]. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Diese bildet das HFA-Äquivalent zur LDA-Gleichung 2.5. Aufgrund des Austauschterms sind die Subband-Wellenfunktionen  $\varphi_{i', n', \sigma'}(z)$  und Subband-Energien  $\epsilon_{i, n, \sigma}$  im Gegensatz zur LDA nicht mehr einheitlich und hängen explizit vom Landau- und vom Spinindex ab. Die HFA-Gleichung muß daher für jedes Spin-Landau-Niveau  $(n, \sigma)$  separat gelöst werden, wobei die Kopplungen über den nicht-lokalen Austauschterm den rechen-technischen Aufwand gegenüber der LDA um Größenordnungen erhöhen.

Die Berechnung der Subband-Struktur eines Q2DEG gemäß der Gleichung 6.90 erfordert die Lösung eines gekoppelten Systems von Integro-Differentialgleichungen. Beschränkt man sich jedoch auf einen endlichen Teilraum  $\{|i_0\rangle, i = 1, \dots, I\}$  des Subband-Hilbert-Raumes, der durch einen ausgewählten Satz von Zuständen, die z.B. aus der Hartree-Näherung gewonnen werden, so erhält man für die Amplituden  $c_{i_0, i, n, \sigma} = \langle i_0 | i_{n, \sigma} \rangle$  das gekoppelte Matrix-Eigenwertproblem

$$\sum_{i_0} \left\{ \langle i'_0 | \hat{T}_z + V_c(\hat{z}) | i_0 \rangle + \sum_{n_1, \sigma_1} \sum_{i''_{n_1, \sigma_1}} \sum_{i'''_{n_1, \sigma_1}} \nu_{i''_{n_1, \sigma_1}, n_1, \sigma_1} c_{i'_0, i''_{n_1, \sigma_1}}^* c_{i_0, i'''_{n_1, \sigma_1}} \right. \\ \left. \times \left[ \langle i'_0, i'''_0 | \hat{\mathcal{H}} | i_0, i''_0 \rangle - \delta_{\sigma, \sigma_1} \langle i'_0, i'''_0 | \hat{\mathcal{F}}_{n_1} | i''_0, i_0 \rangle \right] \right\} c_{i_0, i_n, \sigma} = \epsilon_{i_n, \sigma, n, \sigma} c_{i_0, i_n, \sigma} . \quad (6.91)$$

Diese Gleichung wird im folgenden mit einem iterativen Verfahren behandelt. Zunächst wird dabei die Gleichung 6.90 in Hartree-Näherung ohne den Austauschterm gemäß dem im Abschnitt 2.2 geschilderten Verfahren selbstkonsistent gelöst und so die Zustandsbasis  $\{|i_0\rangle\}$  mit den Wellenfunktionen  $\{\varphi_i^{(0)}(z)\}$  und die Startenergien  $\epsilon_{i, n, \sigma}^{(HA)}$  gewonnen. Im nächsten Schritt werden die Matrixelemente bezüglich des Einteilchen-Anteils, des Hartree-Kerns sowie der Fock-Kerne in der beschränkten Basis  $\{|i_0\rangle, i = 1, \dots, I\}$  berechnet und in Form einer Zugriffstabelle hinterlegt. Im ersten Schritt der eigentlichen Iteration wird dann  $c_{i_0, i_n, \sigma}^{(0)} = \delta_{i_0, i_n, \sigma}$  gesetzt und mit den partiellen Füllfaktoren  $\nu_{i''_{n_1, \sigma_1}, n_1, \sigma_1}^{(0)}$  sowie den hinterlegten Matrixelementen werden die Hamilton-Matrizen aufgestellt und anschließend diagonalisiert. Mit den daraus gewonnenen Energien  $\epsilon_{i_n, \sigma, n, \sigma}^{(1)}$  werden anschließend die Fermi-Energie  $\epsilon_F^{(1)}$  bestimmt und die Niveaufüllungen  $\nu_{i''_{n_1, \sigma_1}, n_1, \sigma_1}^{(1)}$  berechnet. Diese und die Amplituden  $c_{i_0, i_n, \sigma}^{(1)}$  werden im nächsten Schritt  $k = 2$  eingesetzt und dann durch erneute Diagonalisierung die verfeinerten Energien  $\epsilon_{i_n, \sigma, n, \sigma}^{(2)}$  und  $\epsilon_F^{(2)}$ , Zustandsamplituden  $c_{i_0, i_n, \sigma}^{(2)}$  und Besetzungen  $\nu_{i''_{n_1, \sigma_1}, n_1, \sigma_1}^{(2)}$  berechnet. Das ganze Verfahren wird solange fortgesetzt, bis bei der letzten Stufe  $k = K$  schließlich das gesetzte Abbruchkriterium für den Selbstkonsistenzzyklus in Form einer Schwelle für die Energieänderungen zwischen der letzten und vorletzten Iterationsstufe erfüllt wird.

In der nicht-selbstkonsistenten HFA wird die Zustandsmischung aufgrund des Austauschs vernachlässigt und es gilt  $c_{i_0, i_n, \sigma} = \delta_{i_0, i_n, \sigma}$ . In dieser hier als diagonale Näherung bezeichneten Approximation erhält man das Resultat

$$\epsilon_{i_n, \sigma}^{(diag)} = \epsilon_i^{(HA)} - \sum_{i', n'} \nu_{i', n', \sigma} \Delta_{i, n, i', n'}^{(HFA)} , \quad (6.92)$$

mit

$$\Delta_{i, n, i', n'}^{(HFA)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc} l_m} \int_0^\infty dx [J_{n, n'}(x)]^2 F_{i, i'}(x/l_m) . \quad (6.93)$$

Die  $F_{i, i'}(q) = F_{i, i', i, i'}(q)$  stehen darin wiederum für Subband-Formfaktoren der Coulomb-Wechselwirkung.

## 6.2.2 Selbstkonsistente Hartree-Fock-Subband-Rechnung im senkrechten Magnetfeld

Damit eine selbstkonsistente numerische Berechnung gemäß der Gleichung 6.91 effizient möglich wird, gilt es zunächst das Integral über die normierten Wellenvektoren  $x = ql_m$  innerhalb des Fock-Kerns 6.88 auf analytischem Weg in eine Form zu überführen, die sich für eine numerische Implementierung eignet. Den Ausgangspunkt für die Aufbereitung der Austausch-Integrale 6.88 bildet eine Zerlegung des Integranden gemäß

$$[J_{n', n}(x)]^2 e^{-xy} = \sum_{M=0}^{2n_1} D_M^{n_1, n_2} x^{2M+2n_2} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-xy} , \quad (6.94)$$

mit  $n_1 = \min(n, n')$ ,  $n_2 = \max(n, n') - \min(n, n')$ , den Polynomkoeffizienten  $D_M^{n_1, n_2}$  und der Abkürzung  $y = |z - z'|/l_m$ . Die Koeffizienten lauten explizit

$$D_M^{n_1, n_2} = \frac{n_1!}{(n_1 + n_2)!} \frac{1}{2^{M+n_2}} \sum_{\nu=0}^{n_1} B_\nu^{n_1, n_2} B_{M-\nu}^{n_1, n_2} \quad (6.95)$$

und ergeben sich direkt aus der Darstellung 2.94 und der Definition der assoziierten Laguerre-Polynome  $L_n^m(y) = \sum_{\nu=0}^n B_\nu^{n, m} y^\nu$  durch die Polynomkoeffizienten [Abr55]

$$B_\nu^{n, m} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{(n+m)!}{(\nu+m)!(n-\nu)!} \cdot \quad (6.96)$$

Vermöge der Beziehung

$$\int_0^\infty dx e^{-xy} e^{-\frac{x^2}{2}} x^k = e^{\frac{y^2}{2}} \int_y^\infty du e^{-\frac{u^2}{2}} (u-y)^k \quad (6.97)$$

und der Definition für die verallgemeinerten Fehlerintegrale [Abr55]

$$i^k \operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty du \frac{(u-y)^k}{k!} e^{-u^2} \quad (6.98)$$

beliebiger Ordnung  $k$  beziehungsweise ihrer modifizierten Form

$$i^k \operatorname{ferfc}(y) = e^{y^2} i^k \operatorname{erfc}(y) \quad (6.99)$$

ergibt sich für das Integral im Fock-Kern schließlich die integralfreie Darstellung

$$\int_0^\infty dx [J_{n', n}(x)]^2 e^{-xy} = \sum_{M=0}^{2n_1} D_M^{n_1, n_2} \sqrt{2^{2M+2n_2-1} \pi} (2M+2n_2)! i^{2M+2n_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \cdot \quad (6.100)$$

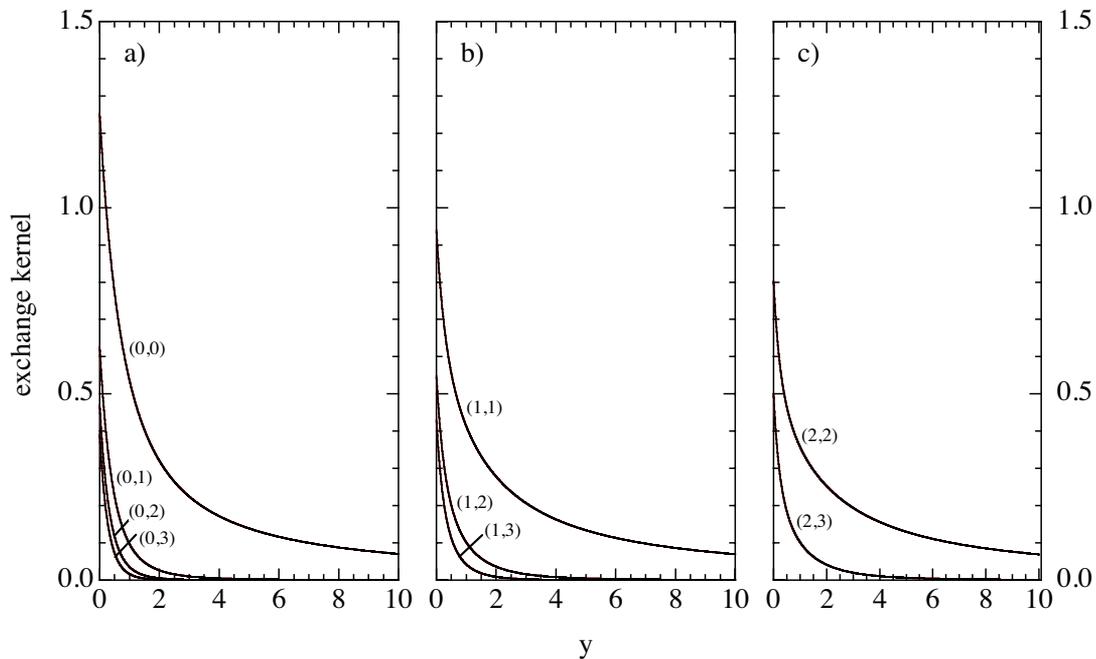
Bei der numerischen Berechnung lassen sich die Fehlerintegrale und ihre modifizierte Form vorteilhafterweise rekursiv mit Hilfe der Formel [Abr55]

$$i^k \operatorname{erfc}(y) = -\frac{y}{k} i^{k-1} \operatorname{erfc}(y) + \frac{1}{2k} i^{k-2} \operatorname{erfc}(y) \quad (6.101)$$

aus der Gauß-Funktion  $i^{-1} \operatorname{erfc}(y) = (2/\sqrt{\pi}) e^{-y^2}$  und der Fehlerfunktion  $i^0 \operatorname{erfc}(y) = (2/\sqrt{\pi}) \int_y^\infty du e^{-u^2}$  erzeugen, wobei letztere standardmäßig in mathematischen Funktionsbibliotheken zu finden ist. Daher erweist sich die Darstellung 6.100 aus numerischen Gesichtspunkten als geeignet, um im Rahmen einer HFA-Subband-Rechnung Verwendung zu finden. Für die im weiteren durchgeführten Rechnungen wurden die Integrale gemäß der Gleichung 6.100 im Vorfeld explizit berechnet, durch eine Form

$$\int_0^\infty dx [J_{n', n}(x)]^2 e^{-xy} = e^{-ay} \sum_{p_1=0}^{12} b_{p_1} y^{p_1} + \sum_{p_2=0}^2 c_{p_2} y^{p_2} \quad (6.102)$$

mit entsprechenden Anpaßparametern  $a, b_{p_1}, c_{p_2}$  approximiert und die gewonnenen Parametersätze hinterlegt. Die Abbildung 6.9 zeigt exemplarisch einige der berechneten Verläufe für die niedrigsten Landau-Niveaus.

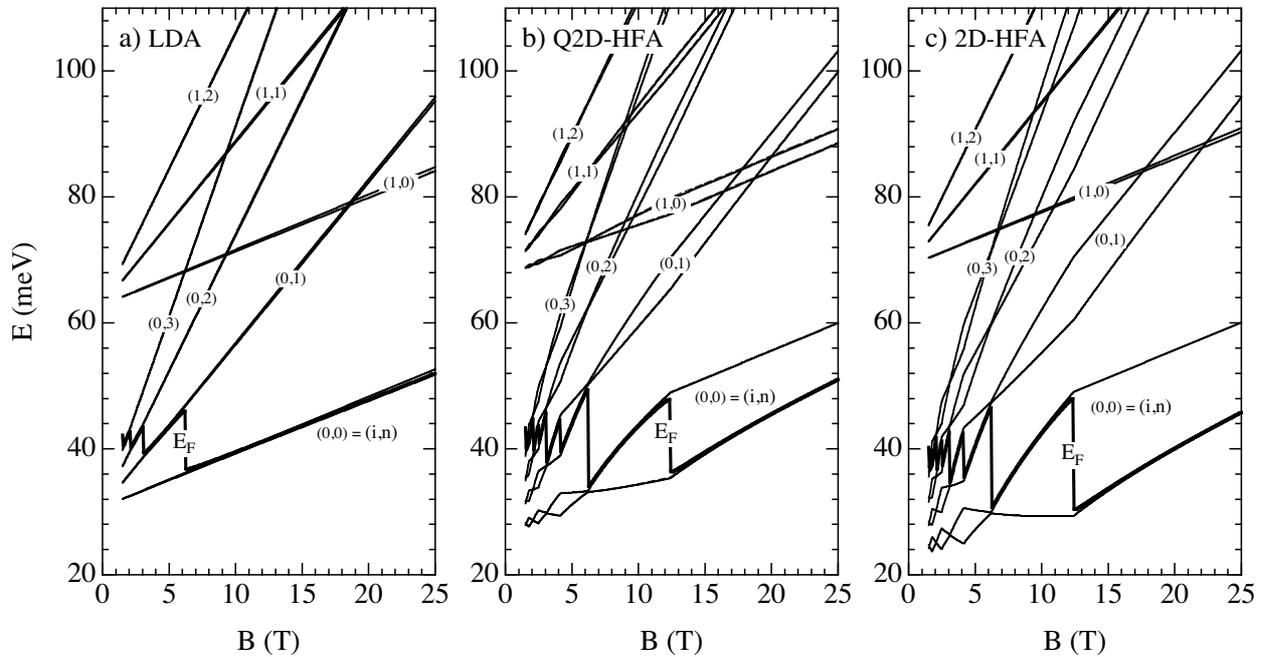


**Abbildung 6.9:** Fock-Kerne für die untersten Landau-Niveaus  $(n, n')$  in Einheiten der Coulomb-Energie  $E_c = e^2 / (4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}l_m)$ . Die berechneten Verläufe und die Anpassungen gemäß der Gleichung 6.102 sind nicht voneinander zu unterscheiden.

### 6.2.2.1 Subband-Landau-Fächer und Gaprenormierung in der HFA

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse selbstkonsistenter Berechnungen der Subband-Struktur in der HFA und der LDA vorgestellt und miteinander verglichen.

Dazu zeigt die Abbildung 6.10 die in verschiedenen Näherungen berechneten Subband-Landau-Fächer für ein 20 nm-Quantentrog-Modellsystem. In den Teilbildern a), b) und c) sind die Subband-Landau-Fächer gemäß der LDA, der selbstkonsistenten HFA entsprechend dem vorherigen Abschnitt und der 2D-HFA dargestellt. Im letzteren Fall wurde die Wirkung des Austauschs für den strengen 2D-Grenzfall lediglich für das unterste Subband berücksichtigt. Während die Landau-Niveaus in der LDA dem Einteilchen-Bild entsprechen, bilden sich in der HFA drastische und mit dem Füllfaktor zusammenhängende Renormierungen aus, die im Falle ungeradzahlicher Füllfaktoren zu außergewöhnlich großen Zeeman-Aufspaltungen vor allem der Landau-Niveaus  $(0, n_F)$  führen, in denen die Fermi-Energie zu liegen kommt. Im Vergleich zwischen den Teilfiguren b) und c) ist ersichtlich, daß die Austauschrenormierung für das unterste Subband durch die endliche Ausdehnung des Q2DEG in Wachstumsrichtung deutlich abgemildert wird. Durch die endliche Ausdehnung des Q2DEG erstreckt sich die Austauschrenormierung generell auch über die höheren Subbänder, wobei die Effekte mit zunehmendem Subband-Index abnehmen. Generell werden durch den Austausch in der HFA sämtliche Energieabstände im Landau-Fächer gegenüber der LDA renormiert. Dabei wird der Landau-Fächer insgesamt abgesenkt und die Landau-Lücken  $\epsilon_{i,n+1,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma}$  sind gegenüber dem Einteilchen-Bild deutlich vergrößert. Die Vergrößerung der Landau-Lücken führt allerdings zu keiner beobachtbaren Erhöhung der Zyklotronresonanzfrequenzen, da sie durch die exzitonische Absenkung der Magneto-Plasmon-Energie für  $q = 0$  gerade kompensiert wird. Dieser Aspekt wird im Abschnitt 7.1.5 tiefer beleuchtet und spiegelt das Kohnsche Theorem wider. Für die Subband-Abstände gilt keine vergleichbare Einschränkung. Im Gegensatz zur Zyk-



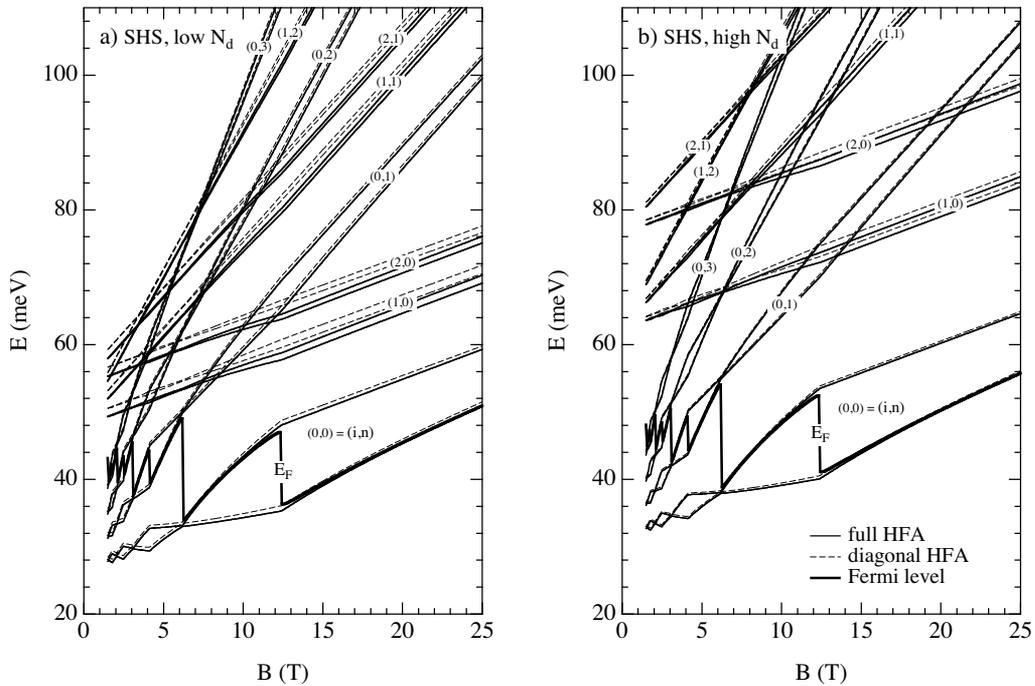
**Abbildung 6.10:** Selbstkonsistent berechnete Subband-Landau-Fächer eines 20 nm-Quantentrogs mit einer Dichte  $N_S = 3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Die Teilbilder a) bis c) zeigen die Verläufe für die LDA-, die Q2D-HFA- und die 2D-HFA-Näherung. Die Parameter lauten:  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ , GaAs:  $m^* = 0.067 m_e$ , AlGaAs:  $m^* = 0.088 m_e$ , Barrierenhöhe  $B = 300 \text{ meV}$ ,  $\varepsilon_{sc} = 12.8$ .

lotronresonanz sollte sich ihre Renormierung experimentell zumindest in Form einer Magnetfeldvariation der ISR-Frequenzen äußern.

Zur Demonstration des Einflusses von Form und Stärke des Potentialeinschlusses auf die Austauscheffekte dient die Abbildung 6.11. In ihr sind die gemäß der selbstkonsistenten und diagonalen Q2DHFA berechneten Landau-Fächer für zwei Einfachheterostrukturen mit unterschiedlicher Verarmungsladung  $N_d$  dargestellt. Für das Modellsystem mit niedriger Verarmungsladung in Teilbild a) liegen die Subbänder energetisch wesentlich dichter beieinander als für die Einfachheterostruktur mit hoher Verarmungsladung in Teilbild b) oder die Doppelheterostruktur aus der Abbildung 6.10. Infolge der geringen Subband-Abstände sind hier die Einflüsse des Austauschs auf die höheren Subbänder am stärksten ausgeprägt. Dies wird insbesondere auch im Vergleich zwischen den Verläufen der selbstkonsistenten Rechnung und denen der diagonalen Näherung erkennbar. Für die Doppelheterostruktur mit ihren großen Subband-Abständen sind keine derartigen Unterschiede zwischen der selbstkonsistenten und der diagonalen HFA-Rechnung feststellbar.

### 6.2.3 Magneto-Kollektivmoden in der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung

Die kollektiven Magneto-Resonanzen eines Q2DEG ergeben sich in der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA) aus einer analogen Vorgehensweise, wie sie für die zeitabhängige LDA-Näherung (TDLDA) in Abschnitt 6.1.3 dargelegt wurde.



**Abbildung 6.11:** Selbstkonsistent berechnete Subband-Landau-Fächer für zwei Einfachheterostrukturen. Die Systeme haben eine Dichte  $N_S = 3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und unterscheiden sich in a)  $N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  und b)  $N_d = 8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Die Verläufe der vollständigen Q2DHFA sind durchgezogen und die der diagonalen Q2DHFA gestrichelt dargestellt. Die Parameter entsprechen ansonsten denen aus Figur 6.10.

Das Pendant zur Selbstkonsistenzgleichung 6.58 lautet in der TDHFA

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{i,n,\sigma}(l,p,\vec{q}) &= \frac{\nu_{i,n\sigma} - \nu_{i+l,n+p,\sigma}}{\hbar\omega^+ - (\epsilon_{i+l,n+p,\sigma} - \epsilon_{i,n,\sigma})} \left\{ \langle i+l | V_\omega(\vec{q}, \hat{z}) | i \rangle A_{n+p,n}(\vec{q}) + \sum_{n',p'} \sum_{\sigma'} \sum_{i',l'} \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Delta}_{i',n',\sigma'}(l',p',\vec{q}) \left[ \mathcal{H}_{n+p,n}^{i+l,i} \quad i'+l',i'(\vec{q}) - \delta_{\sigma,\sigma'} \mathcal{F}_{n+p,n}^{i+l,i} \quad i'+l',i'(\vec{q}) \right] \right\}. \quad (6.103) \end{aligned}$$

Die Matrixelemente der Hartree- und Austauschwechselwirkung sind darin durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n+p,n}^{i+l,i} \quad i'+l',i'(\vec{q}) &= N_{LL} A_{n+p,n}(\vec{q}) A_{n',n'+p'}(-\vec{q}) \langle i+l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{q}) | i, i'+l' \rangle \\ &= N_{LL} \frac{e^2}{2\epsilon_0\epsilon_{sc} q} A_{n+p,n}(\vec{q}) A_{n',n'+p'}(-\vec{q}) F_{i+l,i} \quad i'+l',i'(q) \quad (6.104) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+p,n}^{i+l,i} \quad i'+l',i'(\vec{q}) &= \int \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \exp [il_m^2 (q_y\kappa_x - q_x\kappa_y)] \\ &\quad \times A_{n+p,n'+p'}(\vec{\kappa}) A_{n',n}(-\vec{\kappa}) \langle i+l, i' | \hat{W}^{(dir)}(\vec{\kappa}) | i'+l', i \rangle \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc} l_m} \int d^2\kappa \frac{l_m}{2\pi\kappa} \exp [il_m^2 (q_y\kappa_x - q_x\kappa_y)] \\ &\quad \times A_{n+p,n'+p'}(\vec{\kappa}) A_{n',n}(-\vec{\kappa}) F_{i+l,i} \quad i'+l',i(\kappa) \quad (6.105) \end{aligned}$$

definiert, wobei sämtliche vorkommenden Symbole bereits in den vorausgehenden Abschnitten eingeführt wurden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind hier die Indizes an den Subband-Indizes, welche mit der HFA zusammenhängen und die Zugehörigkeit zu einem Spin-Landau-Niveau kennzeichnen, weggelassen. Zu einer übersichtlichen Form der Selbstkonsistenzgleichung gelangt man wiederum über die Einführung einer Exziton-Indizierung analog zum Abschnitt 6.1.2.1. Die Hamilton-Matrix der Magneto-Kollektivmoden eines Q2DEG mit den Elementen

$$H_{K,L} = \epsilon_K \delta_{K,L} + \sqrt{\bar{\nu}_K \bar{\nu}_L} [\mathcal{H}_{K,L}(\vec{q}) - \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \mathcal{F}_{K,L}(\vec{q})] \quad (6.106)$$

erhält man nach wenigen elementaren Umformungen direkt aus der Gleichung 6.103. Darin stehen  $\bar{\nu}_K = \nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i_K+l_K, n_K+p_K, \sigma_K}$  als Abkürzung für die Füllfaktordifferenzen zwischen den Ausgangs- und Zielniveaus,  $\epsilon_K = \epsilon_{i_K+l_K, n_K+p_K, \sigma_K} - \epsilon_{i_K, n_K, \sigma_K}$  für die Niveauabstände und  $\mathcal{H}_{K,L}(\vec{q}) = \mathcal{H}_{\substack{i_K+l_K, i_K \\ n_K+p_K, n_K} \substack{i_L+l_L, i_L \\ n_L+p_L, n_L}}(\vec{q})$  sowie  $\mathcal{F}_{K,L}(\vec{q}) = \mathcal{F}_{\substack{i_K+l_K, i_K \\ n_K+p_K, n_K} \substack{i_L+l_L, i_L \\ n_L+p_L, n_L}}(\vec{q})$  für die Matrixelemente der Hartree- und Fock-Beiträge.

Die hier angegebene allgemeine Form der Anregungsmatrix beinhaltet sämtliche Inter- und Intrasubband-Kollektivmoden eines Q2DEG. Der sich anschließende Abschnitt widmet sich speziell den vertikalen ISR-Moden für  $\vec{q} = 0$ . Die Zyklotronresonanzen und das Kohnsche Theorem werden gemäß der TDHFA im Abschnitt 7.1.4 behandelt.

### 6.2.3.1 Vertikale Magneto-Intersubband-Resonanzen in der TDHFA

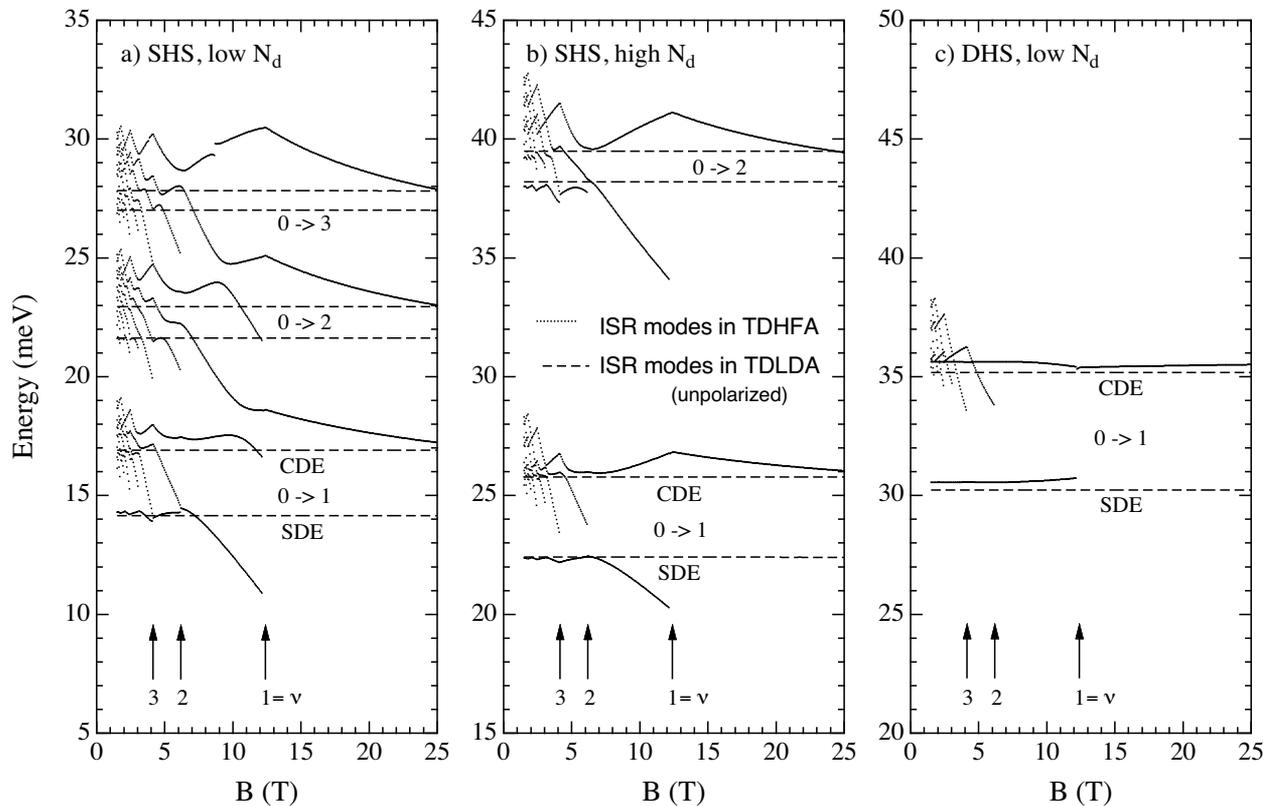
Unter Kenntnis der HFA-Subband-Struktur bestimmen sich die Kollektivmoden eines Q2DEG im Grenzfall  $\vec{q} = 0$  gemäß den Ausführungen der vorausgehenden Abschnitte in der TDHFA aus der Anregungsmatrix

$$H_{K,L}^{ISR} = \epsilon_K^2 \delta_{K,L} + \epsilon_K \epsilon_L [\alpha_{K,L} + \beta_{K,L}] . \quad (6.107)$$

Aufgrund der Auswahlregeln für vertikale Übergänge stehen die Indizes  $K$  für Übergänge  $(i_K, n_K, \sigma_K) \rightarrow (i'_K, n_K, \sigma_K)$  mit  $i'_K > i_K$ . Die im Quadrat auftretenden Übergangsenergien haben hier wiederum ihre Ursache in der bereits vorweggenommenen Zusammenfassung der Absorptions- und Emissionsübergänge, wie es im Abschnitt 6.1.2.1 explizit erläutert ist. Im Gegensatz zur zeitabhängigen LDA-Näherung hängen hier die Übergänge in der Anregungsmatrix explizit von den Landau-Indizes und vom Spin ab. Die Parameter der Hartree- und der Austauschwechselwirkung  $\alpha_{K,L}$  und  $\beta_{K,L}$  lauten

$$\begin{aligned} \alpha_{K,L} &= 2 \sqrt{\frac{(\nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i'_K, n_K, \sigma_K})(\nu_{i_L, n_L, \sigma_L} - \nu_{i'_L, n_L, \sigma_L})}{\epsilon_{i'_K, i_K}(n_K, \sigma_K) \epsilon_{i'_L, i_L}(n_L, \sigma_L)}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi_{i'_K}^*(z) \varphi_{i_K}(z) \mathcal{H}(z, z') \varphi_{i'_L}^*(z') \varphi_{i_L}(z') , \\ \beta_{K,L} &= -2 \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \sqrt{\frac{(\nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i'_K, n_K, \sigma_K})(\nu_{i_L, n_L, \sigma_L} - \nu_{i'_L, n_L, \sigma_L})}{\epsilon_{i'_K, i_K}(n_K, \sigma_K) \epsilon_{i'_L, i_L}(n_L, \sigma_L)}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi_{i'_K}^*(z) \varphi_{i_K}(z) \mathcal{F}_{n_K n_L}(z, z') \varphi_{i'_L}^*(z') \varphi_{i_L}(z') , \end{aligned} \quad (6.108)$$

mit den  $\epsilon_K = \epsilon_{i'_K, i_K}(n_K, \sigma_K) = \epsilon_{i'_K, n_K, \sigma_K} - \epsilon_{i_K, n_K, \sigma_K}$  als Abkürzungen für die Übergangsenergien. Die quadrierten Kollektivmodenenergien  $\epsilon_J^2$  und die zugehörigen Anregungsstärken  $F_J$  erhält man in vollkommener



**Abbildung 6.12:** Magnetfelddispersionen der kollektiven Intersubband-Moden in der TDLDA und der TDHFA im Vergleich. Die Teilfiguren a) bis c) demonstrieren den Einfluß der Form und Stärke des Einschlußpotentials. Die Beschreibung der Modellsysteme und die Parameter sind den Bildbeschreibungen 6.11 und 6.10 zu entnehmen.

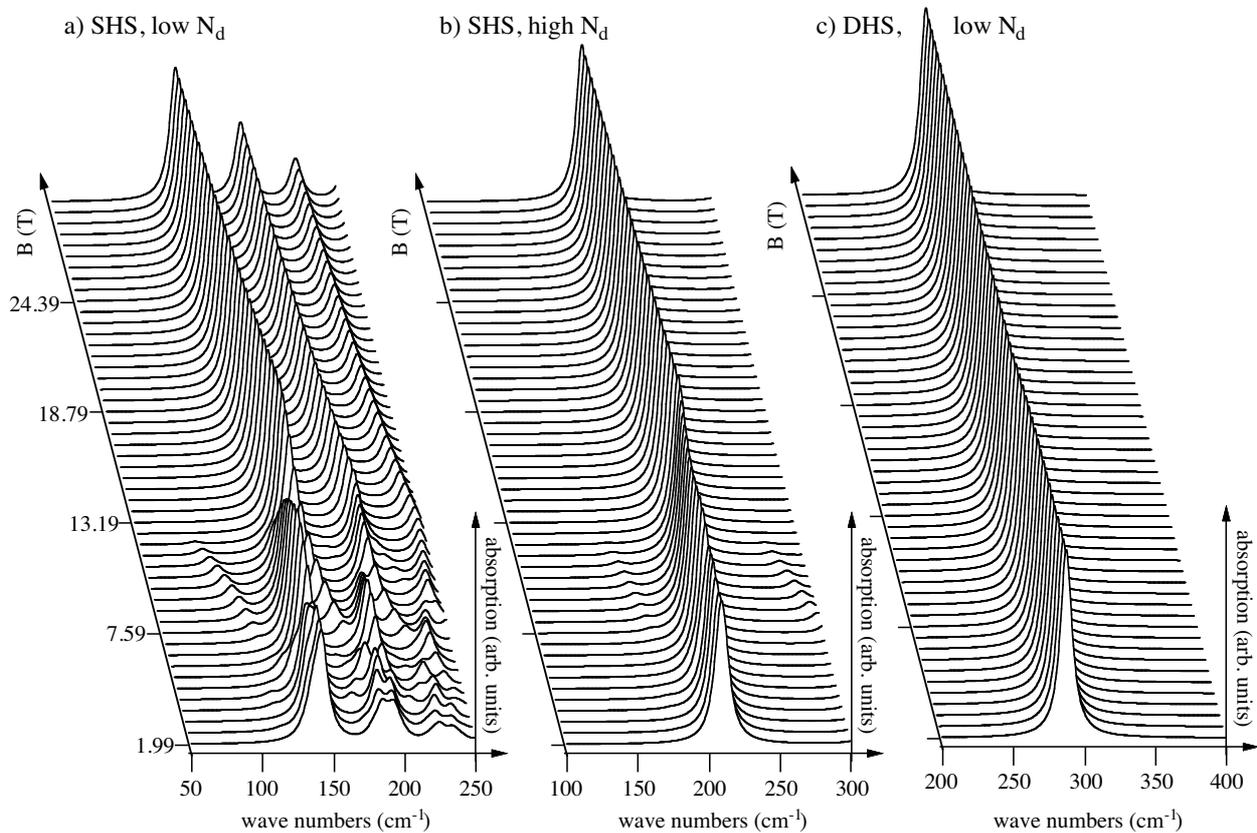
Analogie zum Abschnitt 6.1.2.2 durch Diagonalisierung der Anregungsmatrix und anschließender Projektion der Eigenvektoren  $|\epsilon_J^2\rangle$  auf den Dipolzustand entsprechend

$$F_J \propto \left| \sum_K \sqrt{2(\nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu'_{i'_K, n_K, \sigma_K})} \epsilon_K \langle i'_K | V_\omega(\vec{q}, \hat{z}) | i_K \rangle \langle K | \epsilon_J^2 \rangle \right|^2, \quad (6.109)$$

wobei  $|K\rangle$  die nackten ungekoppelten Anregungszustände ( $\alpha_{K,L}, \beta_{K,L} \rightarrow 0$ ) bezeichnen.

In der TDLDA ist für die Berechnung der Ladungs- und Spindichteanregungen das Aufstellen und Lösen zweier separater Anregungsmatrizen erforderlich. In der TDHFA hingegen sind bereits beide Anregungsformen in der HFA-Anregungsmatrix implizit enthalten. Zum Vergleich der beiden Näherungen dient die Abbildung 6.12. Darin sind die Magnetfeldverläufe der niedrigsten ISR-Kollektivmoden für 3 Modellsysteme aufgezeigt. Die zugrunde liegenden HFA-Landau-Fächer sind in den Abbildungen 6.11 und 6.10 b) dargestellt. Zur Veranschaulichung der in einem FIR-Experiment zu erwartenden Spektren sind in der Abbildung 6.13 die gerechneten Absorptionslinien in einer speziellen Darstellung aufgetragen. Hierbei wurde jeder Resonanz ein mit der jeweiligen Oszillatorstärke gewichtetes Lorentz-Profil einheitlicher Breite zugeordnet. Für die Breite wurde ein Wert gewählt, wie er für experimentelle Intersubband-Resonanzen typisch ist.

Geht man zunächst vom Modellsystem mit dem stärksten Einschluß, dem Quantentrog c), aus, so stellt man für den hier einzig relevanten untersten Intersubband-Übergang eine sehr gute Übereinstimmung zwischen



**Abbildung 6.13:** In der TDHFA berechnete ISR-Absorptionsspektren. Die Linien wurden allesamt mit einer einheitlichen Linienverbreiterung von  $10 \text{ cm}^{-1}$  versehen. Die Teilfiguren a) bis c) demonstrieren den Einfluß der Form und Stärke des Einschlußpotentials. Die Beschreibung der Modellsysteme und die Parameter sind den Bildbeschreibungen 6.11 und 6.10 zu entnehmen.

der TDHFA und der TDLDA sowohl für die Ladungsdichte- als auch für die Spindichteangeregung fest. Die bei niedrigen Magnetfeldern infolge der Beteiligung mehrerer Landau-Spinniveaus vorhandene Überlagerung mehrerer Linien, die sich um das Intersubband-Plasmon (CDE) der TDLDA gruppieren, ist aufgrund der Oszillatorstärkenaufteilung in Verbindung mit der Linienverbreiterung in der Absorption nicht beobachtbar. Dabei verschwinden mit zunehmendem Magnetfeld und abnehmendem Füllfaktor immer mehr Intersubband-Moden und mit Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall bei  $\nu = 1$  schließlich auch die Spindichteangeregung. Bei entsprechend hohen Magnetfeldern bleibt im magnetischen Quantengrenzfall dann letztendlich nur eine einzige Plasmonmode übrig. Sowohl das Plasmon als auch die Spindichteangeregung weisen in der TDHFA gegenüber der TDLDA nur eine leichte und im wesentlichen starre Verschiebung zu höheren Energien hin auf. Eine Magnetfeldvariation der Modenenergien ist zwar vorhanden aber kaum von experimenteller Relevanz.

Zumindest qualitativ ähnlich sind die Verhältnisse auch bei der Einfachheterostruktur b). Auch hier stimmen die Moden der TDLDA und TDHFA für den untersten Intersubband-Übergang zumindest bis zum Füllfaktor  $\nu = 2$  sehr gut überein. Dabei ist auch die Mehrfachlinienüberlagerung um das Plasmon der TDLDA in der Absorption wiederum nicht beobachtbar. Unterhalb des Füllfaktors  $\nu = 2$  jedoch steigt die Plasmonmode energetisch signifikant an, wobei die Spindichtemode nach unten hin abtaucht bis sie bei  $\nu = 1$  vollständig verschwindet. Bei  $\nu = 1$  selbst weist das Intersubband-Plasmon ein Maximum auf, um sich dann mit abnehmendem Füllfaktor wieder dem TDLDA-Wert anzuschmiegen. Ein qualitativ ähnliches Verhalten mit allerdings stärkerer Ausprägung gilt auch für den Übergang  $i = 0 \rightarrow i' = 2$ .

Für die Einfachheterostruktur a) mit dem schwächsten Einschlußpotential liegen die Subband-Abstände derart dicht beieinander, daß sich die spindichtartige Moden eines höheren Subbandes und die ladungsdichtartige Moden des darunter liegenden Subbandes durchkreuzen. Dies führt in den Absorptionslinien zu einem ausgeprägten Modenabstoßungsverhalten mit den entsprechenden Resonanzaufspaltungen. Abgesehen davon sind die Verhältnisse mit der Struktur b) vergleichbar. Aufgrund des weicheren Einschlußpotentials sind die Magnetfeldvariationen in den Resonanzpositionen jedoch stärker ausgeprägt. Dies liegt nicht zuletzt daran, daß bei einem weichen Einschlußpotential die Subband-Orbitale durch den Austausch eine stärkere Modifikation erfahren als bei einem dominierenden harten Einschlußpotential, wie es beispielsweise in einem engen Quantentrog vorliegt.

## 6.3 Experimentelle Intersubband-Resonanz im Regime des IQHE

Nach den theoretischen Untersuchungen des vorausgehenden Abschnittes können zumindest für Einfachheterostrukturen Magnetfeldvariationen in den Intersubband-Modenenergien erwartet werden, die experimentell nachweisbar sein sollten. Die Experimente, die im folgenden vorgestellt werden, dienen als erste Bestätigung der theoretischen Vorhersagen.

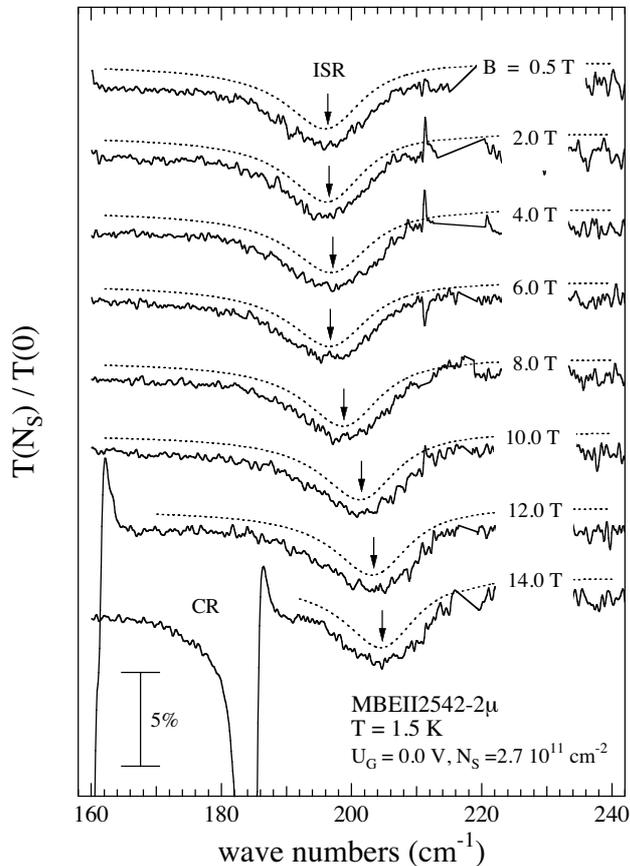
Im ersten Abschnitt 6.3.1 werden zunächst die experimentellen Daten vorgestellt, und im zweiten Abschnitt 6.3.2 detaillierte Anpassungsrechnungen entsprechend der selbstkonsistenten TDHFA durchgeführt.

### 6.3.1 Experimentelle Magnetfeldvariationen in der Intersubband-Resonanz

Zur Übersicht sind zunächst in der Abbildung 6.14 einige gemessene Intersubband-Resonanzen für den niedrigsten Intersubband-Übergang  $i = 0 \rightarrow i' = 1$  bei verschiedenen Magnetfeldern gezeigt, die an einer Einfachheterostruktur mit hoher Verarmungsladung gemessen wurden.

Die Spektren wurden in einem Meßzyklus gewonnen, bei dem zu einem festen Magnetfeld alternierend Spektren bei der gewünschten Gatespannung  $U_G$  und der Referenzspannung  $U_{ref}$  aufgezeichnet wurden. Zur Erreichung eines ausreichenden Signal-Rausch-Verhältnisses wurden entsprechend viele Spektren gleicher Spannung gemittelt und die gemittelten Spektren dividiert. Bei der Referenzspannung war das Elektronengas soweit entleert, daß die ISR bei der gewünschten Spannung (Dichte) vollständig isoliert werden konnte. Zur Bestimmung der Elektronendichte wurde im Vorfeld die Kennlinie  $N_S(U_G)$  mittels Magneto-CV-Messungen bestimmt. Die effektive Ankopplung an die Intersubband-Resonanzen wird durch einen auf die Oberfläche präparierten Gitterkoppler der Streifenperiode  $a = 2 \mu\text{m}$  bereitgestellt.

Man erkennt an der Auftragung eine signifikante und bei  $6 \text{ T} < B < 8 \text{ T}$  einsetzende Verschiebung der Resonanz zu höheren Energien. Beim höchsten Magnetfeld schließlich ist die Zyklotronresonanz zu erkennen, die sich von unten kommend mit zunehmendem Magnetfeld der ISR nähert und diese schließlich bei einem höheren Magnetfeld unter Auftreten der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) durchkreuzt. Dies geht aus der Figur 6.8 hervor. Die aus einer Linienformanpassung an die ISR gewonnenen Parameter sind in den Abbildungen 6.15 und 6.16 für zwei Gatespannungen bei jeweils 3 verschiedenen Temperaturen dargestellt. Man entnimmt den Auftragungen, daß bei der tiefsten Temperatur für beide Dichten Variationen in der Linienpositionen auftreten, die mit den Füllfaktoren  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  korrelieren. An der Linienbreite und Linienamplitude hingegen sind keine besonderen Auffälligkeiten erkennbar. Die Variationen in der Linienposition werden in beiden Fällen durch eine Erhöhung der Temperatur ausgeschmiert. Dabei ist das Ausschmieren



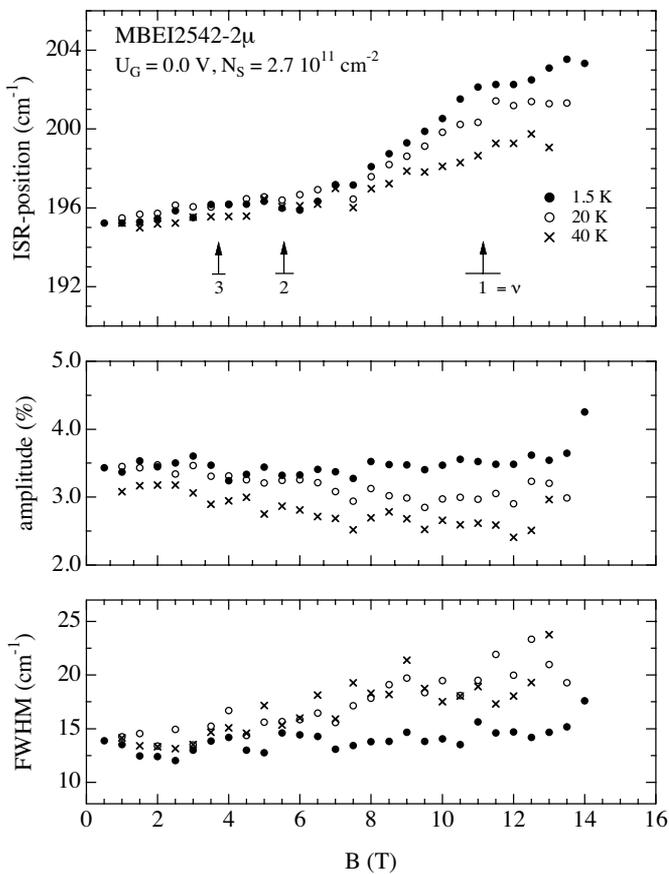
**Abbildung 6.14:** Experimentelle Interband-Resonanzen in Abhängigkeit vom Magnetfeld für eine Einfachheterostruktur mit  $N_d = 0.73 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Den gemessenen Spektren sind die Anpaßkurven gestrichelt unterlegt.

bei der niedrigen Dichte bereits bei  $T = 20 \text{ K}$  vollständig, während bei der höheren Dichte eine Temperatur  $T = 40 \text{ K}$  benötigt wird.

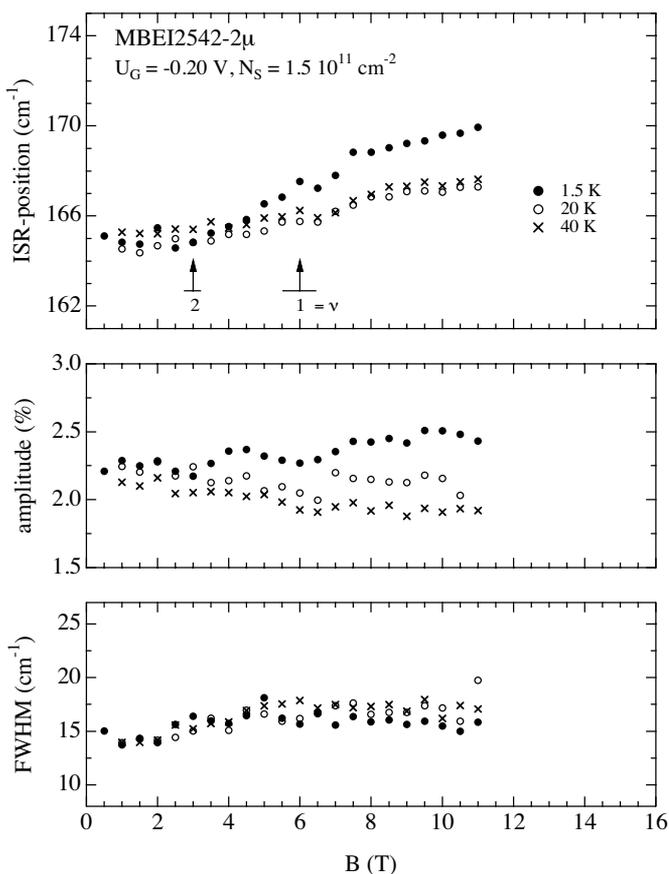
### 6.3.2 Vergleich zwischen Experiment und TDHFA-Rechnungen

Zum direkten Vergleich der gemessenen Magnetfeldvariationen in der ISR-Linienposition mit den theoretischen Voraussagen der TDHFA dienen die Abbildungen 6.17 und 6.18. In diesen sind die bei der niedrigsten Temperatur gemessenen Interband-Energien zusammen mit den gerechneten Resonanzenergien dargestellt.

Im Fall der höheren Dichte in der Abbildung 6.17, die der Gatespannung  $U_G = 0 \text{ V}$  entspricht, erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung der Verläufe bis zum Füllfaktor  $\nu = 1$ . Insbesondere werden das Einsetzen des Anstiegs um  $\nu = 2$  als auch die knickartige Variation bei  $\nu = 1$  gut wiedergegeben. Oberhalb von  $\nu = 1$  allerdings steigt die experimentelle Resonanzlage, was man aus der Position der RSLLC ersehen kann, weiterhin an, anstatt wie vorhergesagt wieder abzufallen. Dieses Verhalten kann jedoch in einem Modenabstoßungsverhalten zwischen der Interband-Resonanz und den Intrasubband-Anregungen, die durch die Zyklotronresonanz repräsentiert werden, begründet sein. Durch eine Modenabstoßung werden die Interband-Moden zu höheren Energien verschoben, sofern die Intrasubband-Moden energetisch unterhalb der Interband-Moden liegen. Eine diamagnetische Verschiebung der Subband-Energien von lediglich  $\Delta\epsilon_{10}^{(dia)} \approx 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}/\text{T}^2 B^2$  aufgrund des aus der RSLLC-Linienaufspaltung und einer Subband-Berechnung ermittelten Verkippungswinkels von maximal  $3^\circ$  zwischen der Probennormalen und der Magnetfeldrichtung kann jedoch als Ursache einer derart starken Verschiebung sicher ausgeschlossen werden.



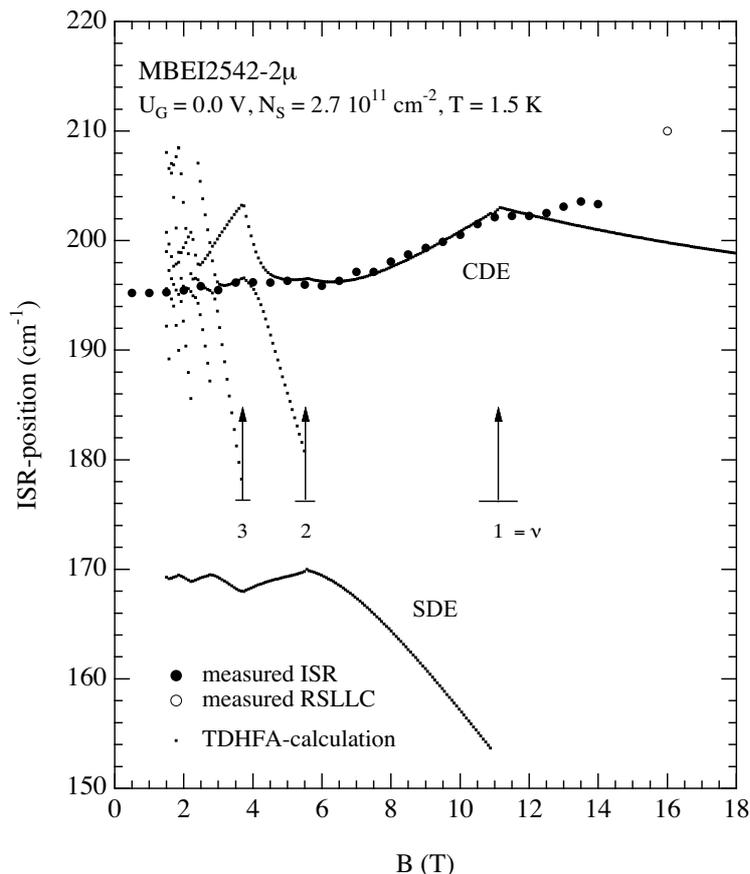
**Abbildung 6.15:** *Linienparameter der Intersubband-Resonanzen als Funktion des Magnetfeldes.*



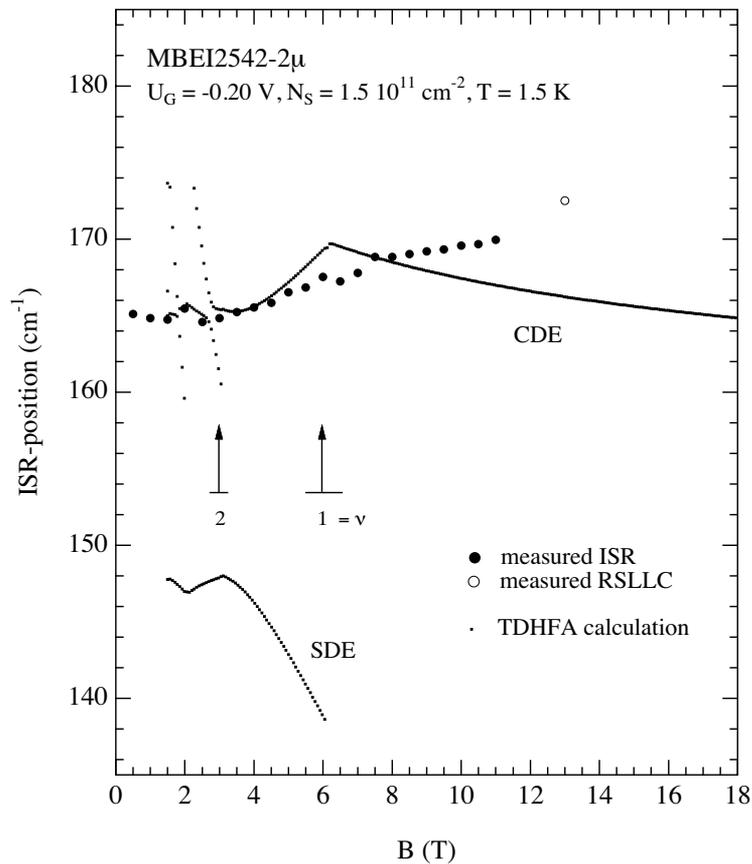
**Abbildung 6.16:** *Linienparameter der Intersubband-Resonanzen als Funktion des Magnetfeldes.*

Für die niedrigere Dichte, die sich nach Anlegen einer negativen Gatespannung einstellte, ist die Übereinstimmung, was die Magnetfeldvariationen anbelangt, zumindest tendenzieller Art. Die weniger gute Übereinstimmung zwischen der Rechnung und dem Experiment kann mehrere Ursachen haben. Einmal deuten Anomalien in den CV-Messungen, die unter Verarmung auftreten, darauf hin, daß eine Inhomogenität in der lateralen Ladungsdichte aufgrund des Gitterkopplers nicht ausgeschlossen werden kann. Eine inhomogene Ladungsdichte kann in Kombination mit dem nichtlinearen statischen Abschirmverhalten im starken Magnetfeld zu Variationen in der Intersubband-Resonanz führen, die grundsätzlich nur wenig bekannt sind. Weiterhin weist auch die Beschreibung der TDHFA gewisse Unzulänglichkeiten auf, da sie die elektronische Abschirmung nicht berücksichtigt. Durch die Abschirmung werden, wie noch im Abschnitt 7.1.3 ausgeführt wird, die Austauschnormierungen generell abgeschwächt. Insbesondere die Inter-Landau-Niveau- und die Intersubband-Abschirmung sind dabei umso stärker ausgeprägt, je geringer die Subband- und Landau-Abstände im Q2DEG liegen. Zudem können sich, wie es im Abschnitt 7.1.6 ausführlich dargelegt ist, im vorliegenden Dichteregime um  $\nu = 1$  Grundzustände ausbilden, bei denen eine Minimierung der Austauschenergie durch die Ausbildung von Spintexturen (Skyrmionen) erreicht wird. Solche Texturen werden in der dargelegten HFA, die eine homogene Ladungs- und Spindichte im Grundzustand voraussetzt, nicht erfaßt und demzufolge auch nicht die Intersubband-Anregungen auf solchen Grundzuständen.

Abschließend kann aufgrund der Güte in der Übereinstimmung zwischen der experimentellen ISR-Magnetfelddispersion und der TDHFA-Beschreibung speziell bei der höheren Dichte darauf geschlossen werden, daß Austauscheffekte, die bislang vor allem in Transportexperimenten an Q2DEG beobachtet werden, auch die Intersubband-Plasmon-Resonanzen beeinflussen.



**Abbildung 6.17:** Experimentelle und gerechnete Magnetfelddispersion des niedrigsten Intersubband-Übergangs im Vergleich. Die in die Rechnung eingehenden Parameter  $N_S = 2.7 \cdot 10^{11}$  cm $^{-2}$  und  $N_d = 7.3 \cdot 10^{10}$  cm $^{-2}$  wurden aus Transportdaten und Anpassungen an die Nullfeld-ISR bestimmt. Die ganzzahligen Füllfaktoren sind durch Pfeile markiert, wobei der Querbalken die Unsicherheit aus der Dichtebestimmung kennzeichnet. Es wird eine parabolische Bandstruktur vorausgesetzt und die weiteren Parameter lauten: Masse in GaAs:  $m^* = 0.067 m_e$ , Masse in AlGaAs:  $m^* = 0.088 m_e$ , Barrierenhöhe: 300 meV und Dielektrizitätskonstante:  $\epsilon_{sc} = 12.8$ .



**Abbildung 6.18:** Experimentelle und gerechnete Magnetfelddispersion des niedrigsten Intersubband-Übergangs im Vergleich. Die in die Rechnung eingehenden Parameter  $N_S = 1.5 \cdot 10^{11}$  cm $^{-2}$  und  $N_d = 7.3 \cdot 10^{10}$  cm $^{-2}$  wurden aus Transportdaten bestimmt bzw. von der hohen Dichte übernommen. Die ganzzahligen Füllfaktoren sind durch Pfeile markiert, wobei der Querbalken die Unsicherheit aus der Dichtebestimmung kennzeichnet. Die weiteren Parameter entsprechen denen aus Figur 6.17.



## Kapitel 7

# Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors $\nu = 1$

Der Füllfaktor  $\nu = 1$  bildet die fließende Grenze zwischen dem Integralen und dem Fraktionalen Quanten-Hall-Effekt. Aufgrund der besonderen physikalischen Gegebenheiten, die mit der Vollfüllung nur eines Landau-Niveaus zusammenhängen, wird er in diesem Kapitel gesondert behandelt. Die Sonderstellung des Füllfaktors  $\nu = 1$  beruht für Q2DEG in GaAs vor allem auf den kürzlich vorhergesagten und mittlerweile auch experimentell bestätigten Quasiteilchen-Anregungen in Form von Spintexturen, die als Skyrmionen bezeichnet werden. Auch aus Sicht der Zyklotronresonanz nimmt der Füllfaktor  $\nu = 1$  eine Sonderstellung ein, da an ihm oftmals die auffälligsten Variationen in der Resonanzfrequenz und der Resonanzbreite beobachtet werden.

Das Hauptaugenmerk dieses Kapitels ist daher auf eine detaillierte und möglichst quantitative Beschreibung der Zyklotronresonanz in diesem Regime gerichtet. Der Abschnitt ist zweigeteilt und untergliedert sich in einen theoretischen Teil 7.1 und einen experimentellen Teil 7.2.

## 7.1 Grundzustand und Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors $\nu = 1$

Im Rahmen der vorwiegend theoretischen Vorbetrachtungen werden zunächst im Abschnitt 7.1.1 der Aspekt der Niveauvollfüllung und im Abschnitt 7.1.2 die elektronische Abschirmung näher betrachtet. Dem schließen sich im Abschnitt 7.1.3 Ausführungen an, welche das Bild der Hartree-Fock-Beschreibung (HFA) eines Q2DEG im quantisierenden Magnetfeld weiterführen und um die Abschirmung zur abgeschirmten HFA (SHFA) erweitern. In dieser Näherung werden anschließend die Landau-Niveauschemata für einige Modellsysteme selbstkonsistent berechnet und gegenübergestellt. Die Behandlung der Magneto-Plasmonen und die explizite Verifikation des Kohnschen Theorems im Rahmen der zeitabhängigen (S)HFA schließen sich in den Abschnitten 7.1.4 und 7.1.5 an. Zuletzt werden im Abschnitt 7.1.6 die Grundlagen zu den Spintexturen (Skyrmionen) dargelegt.

### 7.1.1 Niveauvollfüllung und magnetische Exzitonen

Für das unterste Landau-Niveau mit Index  $n = 0$  lassen sich die Landau-Wellenfunktionen der symmetrischen Eichung in der Form 2.54 schreiben. Vernachlässigt man den Spin und die Subband-Struktur, so ist der Füllfaktor  $\nu = 1$  dadurch ausgezeichnet, daß gerade so viele Elektronen vorhanden sind, wie Orbitale im untersten Landau-Niveau zur Verfügung stehen. In diesem Grenzfall bildet die bei vernachlässigbarer Landau-

Niveaumischung einzig mögliche Slater-Determinante

$$\Psi(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = C \begin{vmatrix} \zeta_1^0 & \zeta_1^1 & \zeta_1^2 & \dots & \zeta_1^{N-1} \\ \zeta_2^0 & \zeta_2^1 & \zeta_2^2 & \dots & \zeta_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_N^0 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \dots & \zeta_N^{N-1} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^N \exp\left(-\frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right) \quad (7.1)$$

den als exakt zu betrachtenden Grundzustand. Dabei steht die tiefgestellte Zahl für die Teilchennummer und der Exponent repräsentiert den Drehimpuls  $m$  des jeweiligen Orbitals. Die Normierungskonstante  $C$  ist für das weitere nicht entscheidend und kann auf  $C = 1$  gesetzt werden. Dieser Grundzustand kann kompakt als

$$\Psi(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \prod_{k < l}^N (\zeta_k - \zeta_l) \exp\left(-\frac{1}{4l_m^2} \sum_l \zeta_l \zeta_l^*\right) \quad (7.2)$$

dargestellt werden und bildet in dieser Form die Schnittstelle zwischen dem IQHE und dem FQHE [Lau83, Lau90, Jai89b, Jai92]. Man erkennt an dieser Darstellung die Faktorisierung der Grundzustandswellenfunktion in das Polynom der Relativbewegung und den Schwerpunktanteil in Form des Exponentialfaktors. Bei einem Zyklotronübergang wirkt gemäß dem Kohnschen Theorem [Koh61, Bre89] das in der Ebene homogene Strahlungsfeld lediglich auf den Schwerpunktanteil.

Rückblickend auf den Abschnitt 6.2.2 führt die mit der Slater-Determinanten 7.2 unmittelbar zusammenhängende Austauschwechselwirkung zu einer Renormierung der Subband-Landau-Niveauenergien gemäß

$$\epsilon_{i,n} = \epsilon_i + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) - \Delta_{i,n}^{(HFA)}, \quad (7.3)$$

wobei in diagonalen Näherung die Q2D-Austauschabsenkung durch

$$\Delta_{i,n}^{(HFA)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}l_m} \int_0^\infty dx [J_{n,0}(x)]^2 F_{i,0}(x/l_m) \quad (7.4)$$

gegeben ist. Der Spinindex ist aufgrund der vollständigen Polarisation des Grundzustandes hier unterdrückt, und in den Subband-Energien  $\epsilon_i$  ist als Vielteilchen-Beitrag lediglich der Hartree-Term enthalten.  $F_{i,0}(q) = F_{i,0,i,0}(q)$  bezeichnet die für den Austausch relevanten Subband-Formfaktoren nach Gleichung 6.29 und  $J_{n,n'}(x)$  die in Gleichung 2.94 definierten Landau-Überlappfunktionen.

Bei vollständiger Niveaufüllung  $\nu = 1$  können die ladungsneutralen Magneto-Plasmon- und Intersubband-Anregungen jeweils auf effektive Zweikörperprobleme abgebildet werden, die dem weithin bekannten Interband-Exziton (siehe z.B. [Yu 96]) analog sind. Daher bezeichnet man in diesem Spezialfall die Dichteanregungen eines Q2DEG auch oftmals als magnetische Exzitonen. Für das magnetische Intrasubband-Exziton ist die Zweikörperwellenfunktion des gebundenen Elektron-Loch-Paars explizit in [Kal84] angegeben. Daß die Renormierung der Landau-Lücken zu keiner beobachtbaren Erhöhung der Zyklotronresonanzenergie führt, liegt an der Bindungsenergie  $B(q)$ , die zwischen dem Elektron im angehobenen Landau-Niveau  $n' = n + 1$  und dem zurückbleibenden Loch im Niveau  $n$  wirksam ist. Diese besitzt die Asymptotik  $\lim_{q \rightarrow 0} B(q) = -\Delta_{n+1,n}^{(HFA)}$ , so daß sie die Vergrößerung der Landau-Lücke für  $q = 0$  gerade kompensiert. Dieser Sachverhalt entspricht dem Kohnschen Theorem und wird im Abschnitt 7.1.4 noch ausführlich erläutert. Generell erscheint daher die Zyklotronresonanz bei der Einteilchen-Übergangsfrequenz, obwohl das zugrunde liegende Niveauschema sich aufgrund der Austauschrenormierung stark vom Einteilchen-Niveauschema unterscheidet. Im Gegen-

satz zum Intraband-Exziton gilt für die Intersubband-Exzitonen im Fall  $q \rightarrow 0$  keine mit dem Kohnschen Theorem vergleichbare Einschränkung. Wie es im vorausgehenden Kapitel aufgezeigt wurde, führt daher die durch das Magnetfeld induzierte Austauschnormierung zu Magnetfeldvariationen in den Intersubband-Übergangsfrequenzen.

Im allgemeinen Fall einer unvollständigen Niveaufüllung werden die Elektron-Loch-Paare durch die dann möglichen Intra-Landau-Übergänge dynamisch abgeschirmt. Die neutralen Dichteanregungen sind dann im Gegensatz zur Ganzfüllung nicht mehr auf Zweikörperprobleme reduzierbar und entsprechen den üblichen Magneto-Plasmonen. Dem Aspekt der elektronischen Abschirmung ist der folgende Abschnitt gewidmet.

## 7.1.2 Elektronische Abschirmung im Q2DEG

Während die LDA-Näherung die experimentell häufig zu beobachtende Austausch-Vergrößerung der Zeeman-Lücken überhaupt nicht beschreibt, wird diese in der HFA zwar korrekt erfaßt, aber generell überschätzt [And76a, Ush90, Smi92]. Um diese Unzulänglichkeit der HFA zumindest teilweise zu beheben, muß man höhere Terme der Störungsentwicklung berücksichtigen [Mad78, Gro86, Smi92]. Die nächsthöhere Stufe der Störungsentwicklung gründet auf dem Prinzip der Abschirmung. Hierbei wird die Coulomb-Wechselwirkung  $W^{(dir)}$  im Austauschterm durch eine abgeschirmte Wechselwirkung  $W^{(sc)}$  ersetzt. In der RPA-Näherung (random phase approximation) folgt aus der Definition 6.37 die Bestimmungsgleichung

$$\sum_{k,k'} \varepsilon_{i' i, k' k}(\vec{q}, \omega) W_{k' k, j' j}^{(sc)}(\vec{q}, \omega) = W_{i' i, j' j}^{(dir)}(\vec{q}) \quad (7.5)$$

für die abgeschirmte Wechselwirkung im Q2D-Subband-Raum [Wen90d, Wen90b, Wen90c]. Die Indizes kennzeichnen hierbei die Subbänder. Ausgeschrieben und geeignet umgeformt lautet sie

$$W_{i' i, j' j}^{(sc)}(\vec{q}, \omega) = W_{i' i, j' j}^{(dir)}(\vec{q}) + \sum_{k,k'} W_{i' i, k k'}^{(dir)}(\vec{q}) P_{k' k}(\vec{q}, \omega) W_{k' k, j' j}^{(sc)}(\vec{q}, \omega) . \quad (7.6)$$

Die  $P_{k' k}(\vec{q}, \omega)$  stehen für die Polarisationsfunktionen nach den Gleichungen 6.40 und 6.59.

### 7.1.2.1 Abschirmung im Einsubband-Grenzfall und Plasmonpol-Näherung

Vernachlässigt man bei Systemen mit großen Subband-Abständen im elektrischen Quantengrenzfall die Abschirmung über virtuelle Intersubband-Anregungen, so bekommt man für die abgeschirmte Coulomb-Wechselwirkung  $W_0^{(sc)}(\vec{q}, \omega) \equiv W_{0,0,0,0}^{(sc)}(\vec{q}, \omega)$  in der RPA (random phase approximation) den Ausdruck

$$W_0^{(sc)}(\vec{q}, \omega) = \frac{W_0^{(dir)}(\vec{q})}{1 - \chi_{00}(\vec{q}, \omega) W_0^{(dir)}(\vec{q})} . \quad (7.7)$$

Dieser läßt sich über die Definition der Dielektrizitätsfunktion

$$\varepsilon(\vec{q}, \omega) = 1 - \chi_{00}(\vec{q}, \omega) W_0^{(dir)}(\vec{q}) \quad (7.8)$$

kompakt als

$$W_0^{(sc)}(\vec{q}, \omega) = \frac{W_0^{(dir)}(\vec{q})}{\varepsilon(\vec{q}, \omega)} \quad (7.9)$$

schreiben.

Das Wesen der Abschirmung als Austausch virtueller Plasmonen wird offenbar, wenn man die Polarisationsfunktion  $\chi_{00}(\vec{q}, \omega)$  nach Gleichung 6.59 gemäß der Form

$$\chi_{00}(\vec{q}, \omega) = \sum_p f_p(\vec{q}) \left[ \frac{1}{\omega^+ - \omega_p(\vec{q})} + \frac{1}{-\omega^+ - \omega_p(\vec{q})} \right] \quad (7.10)$$

darstellt. Die Größen  $f_p(\vec{q})$  und  $\omega_p(\vec{q})$  stehen für die Anregungsstärken und Frequenzen der gegebenenfalls geeignet zusammengefaßten und durch den Index  $p$  indizierten Übergänge im (renormierten) Landau-Niveauschema. Speziell für den langwelligen Grenzfall identifiziert man anhand der Gleichung 6.73 für den dort einzig ( $p = 1$ ) relevanten Zyklotron-Übergang die Parameter  $f_1 = N_S q^2 / (2m^* \omega_c)$  und  $\omega_1 = \omega_c$ . Mit der Zerlegung 7.10 ergibt sich für die abgeschirmte Wechselwirkung nach längerer Rechnung schließlich die Form

$$W_0^{(sc)}(\vec{q}, \omega) = W_0^{(dir)}(\vec{q}) \left\{ 1 + \sum_p \tilde{f}_p(\vec{q}) \left[ \frac{1}{\omega^+ - \tilde{\omega}_p(\vec{q})} + \frac{1}{-\omega^+ - \tilde{\omega}_p(\vec{q})} \right] \right\}, \quad (7.11)$$

mit den kollektiven Anregungsstärken

$$\tilde{f}_p(\vec{q}) = f_p(\vec{q}) \frac{\omega_p(\vec{q})}{\tilde{\omega}_p(\vec{q})} W_0^{(dir)}(\vec{q}) \quad (7.12)$$

und den kollektiven Plasmonfrequenzen  $\tilde{\omega}_p(\vec{q})$ , die durch

$$\tilde{\omega}_p^2(\vec{q}) = \omega_p^2(\vec{q}) + \sum_{p'} 2\omega_{p'}(\vec{q}) f_{p'}(\vec{q}) W_0^{(dir)}(\vec{q}) \quad (7.13)$$

bestimmt sind. Die letzteren Größen lauten für den langwelligen Grenzfall  $\tilde{f}_1 = \omega_{pl}^2 / (2\omega_{mp}^2)$  bzw.  $\tilde{\omega}_1 = \omega_{mp} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_{pl}^2}$ , mit den bereits im Vorfeld eingeführten Plasmon- und Magneto-Plasmonfrequenzen.

Eine häufig vorzufindende Näherung für die abgeschirmte Wechselwirkung 7.11 beruht auf der Zusammenfassung der Polsumme zu einem effektiven einfachen Polterm, der gewissen fundamentalen Summenregeln genügt. Dementsprechend wird eine solche Approximation dann als Plasmonpol-Näherung bezeichnet (PPA) [Vin76, Kat89, Smi92]. Für viele Zwecke ist jedoch die Berücksichtigung lediglich der statischen Abschirmung entsprechend der Ersetzung von  $\varepsilon(\vec{q}, \omega)$  durch  $\varepsilon(\vec{q}, 0) = \varepsilon(\vec{q})$  ausreichend. In dieser Näherung vereinfacht sich die Berechnung der Abschirmeffekte erheblich.

### 7.1.2.2 Statische Thomas-Fermi-Abschirmung im Einsubband-Grenzfall

Die statische Dielektrizitätsfunktion  $\varepsilon(\vec{q})$  lautet im Falle nur eines Subbandes

$$\varepsilon(\vec{q}) = 1 - \left[ \chi_{00}^{(inter)}(\vec{q}) + \chi_{00}^{(intra)}(\vec{q}) \right] W_0^{(dir)}(\vec{q}). \quad (7.14)$$

Darin ist die statische Polarisationsfunktion  $\chi_{00}(\vec{q})$  bereits geeignet in einen Inter-Landau-Niveau-Beitrag

$$\chi_{00}^{(inter)}(\vec{q}) = -2N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_n \sum_{p>0} \frac{\nu_{n,\sigma} - \nu_{n+p,\sigma}}{\epsilon_{n+p,\sigma} - \epsilon_{n,\sigma}} [J_{n+p,n}(l_m q)]^2 \quad (7.15)$$

und einen Intra-Landau-Niveau-Beitrag

$$\chi_{00}^{(intra)}(\vec{q}) \approx -N_{LL} \sum_{\sigma} \sum_n D_{n,\sigma}^{(T)} [J_{n,n}(l_m q)]^2 \quad (7.16)$$

separiert [Man97, Cha02]. In der letzten Gleichung steht

$$D_{n,\sigma}^{(T)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left( -\frac{\partial n_{FD}}{\partial \epsilon} \right) D_{n,\sigma}(\epsilon) \quad (7.17)$$

für die thermische Zustandsdichte eines Landau-Niveaus, die sich durch die spezielle thermische Mittelung aus der Zustandsdichte  $D_{n,\sigma}(\epsilon)$  ableitet.

Die reziproke Dielektrizitätsfunktion  $1/\varepsilon(\vec{q})$  läßt sich durch elementare Umstellungen in die kompakte Thomas-Fermi-Form

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{q})} = \frac{q}{q + \bar{q}_{TF}(q)} \quad (7.18)$$

überführen. Darin ist die effektive reziproke Thomas-Fermi-Abschirmlänge  $\bar{q}_{TF}(q)$  durch den Ausdruck

$$\bar{q}_{TF}(q) = \frac{e^2 N_{LL}}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} F(q) \sum_{\sigma} \sum_n \left\{ D_{n,\sigma}^{(T)} [J_{n,n}(l_m q)]^2 + 2 \sum_{p>0} [J_{n+p,n}(l_m q)]^2 \frac{\nu_{n,\sigma} - \nu_{n+p,\sigma}}{\epsilon_{n+p,\sigma} - \epsilon_{n,\sigma}} \right\} \quad (7.19)$$

gegeben.  $F(q)$  steht hier wiederum für den Subband-Formfaktor des untersten Subbandes.

### 7.1.3 Landau-Niveaus in der statisch abgeschirmten Hartree-Fock-Näherung (SHFA)

Die Landau-Niveauenergien für den Einsubband-Grenzfall lauten ausgehend von den Gleichungen 6.89 und 6.92 in der statisch abgeschirmten Hartree-Fock-Näherung

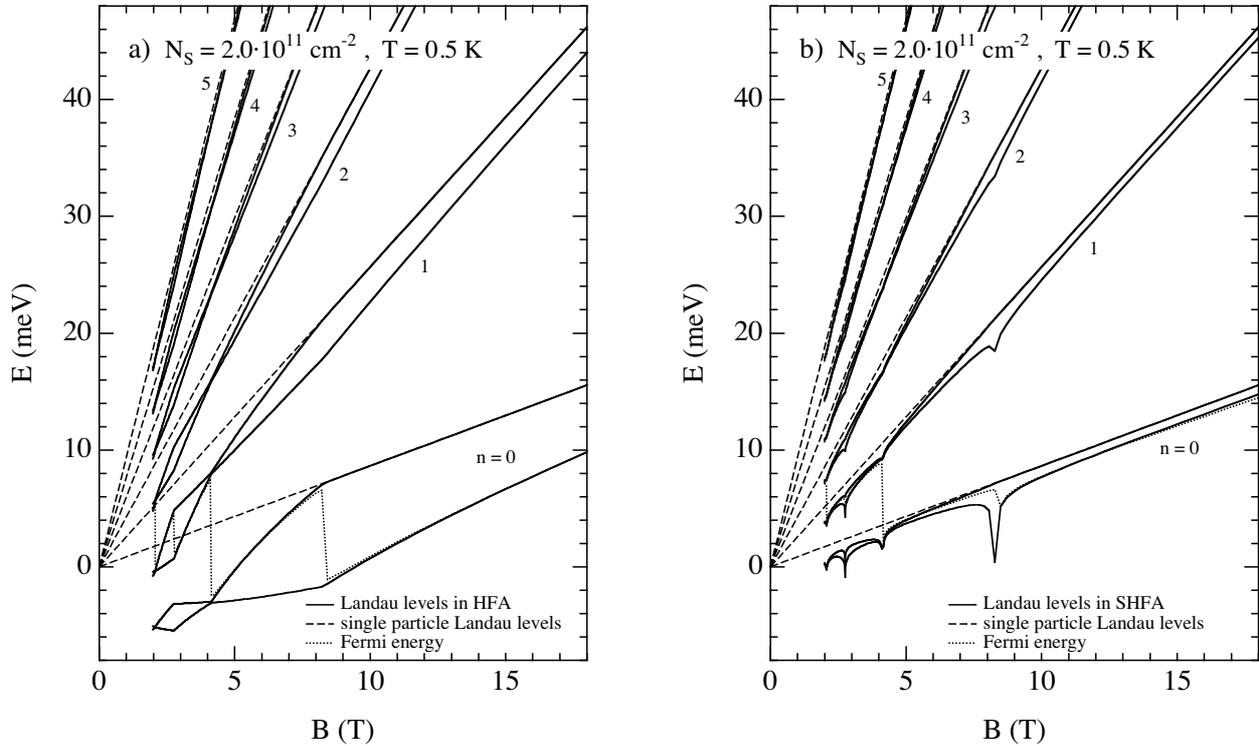
$$\epsilon_{n,\sigma}^{(SHFA)} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + g^* \mu_B B \sigma - \sum_{n'} \nu_{n',\sigma} \Delta_{n,n'}^{(SHFA)}. \quad (7.20)$$

Darin sind die Matrixelemente der abgeschirmten Austauschwechselwirkung durch

$$\Delta_{n,n'}^{(SHFA)} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{sc} l_m} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{x + \bar{x}_{TF}(x)} [J_{n,n'}(x)]^2 F(x/l_m) \quad (7.21)$$

gegeben. Hierbei wurde wiederum die Substitution  $ql_m = x$  durchgeführt und  $\bar{x}_{TF}(x) = l_m \bar{q}_{TF}(x/l_m)$  bezeichnet die reziproke Abschirmlänge in Einheiten der magnetischen Länge.

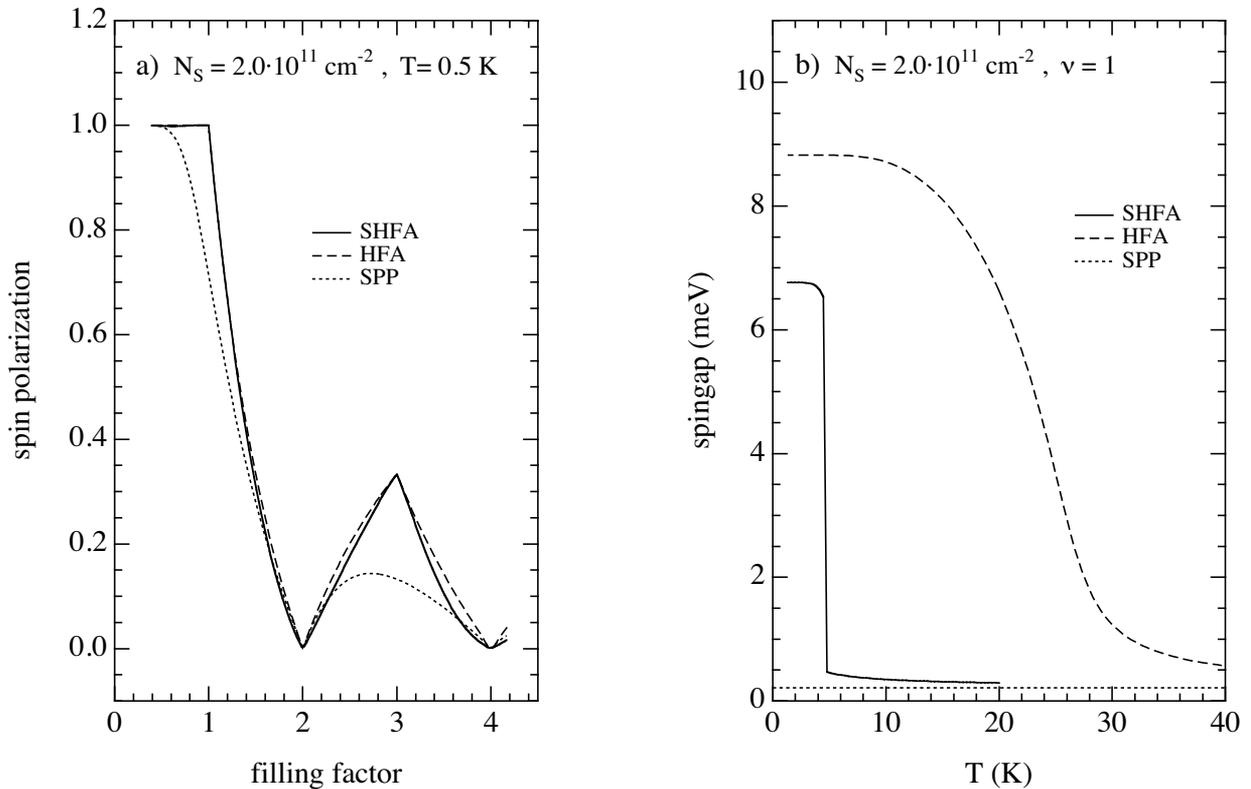
Zur Gegenüberstellung der unabgeschirmten und der abgeschirmten HFA dient die Abbildung 7.1. In ihr sind die numerisch berechneten Landau-Niveauenergien als Funktion des Magnetfeldes dargestellt. Zur Orientierung ist jeweils der Landau-Fächer des Einteilchen-Bildes gestrichelt gezeichnet unterlegt. Insbesondere ist zu erkennen, daß im magnetischen Quantengrenzfall  $0 < \nu < 2$  die Spinlücken  $|\epsilon_{n,+} - \epsilon_{n,-}|$  und Landau-Lücken  $|\epsilon_{n+1,+} - \epsilon_{n,+}|$  in der SHFA lediglich unmittelbar um den Füllfaktor  $\nu = 1$  herum eine starke Austausch-Vergrößerung aufweisen. Der im Vergleich zur HFA ansonsten zu beobachtende weitgehende Zusammenbruch der Niveaunormierung ist eine Folge der Abschirmung. Bei den ganzzahligen Füllfaktoren ist lediglich die Inter-Landau-Niveau-Abschirmung wirksam und für die dortige Reduktion der Energielücken



**Abbildung 7.1:** Gegenüberstellung der in der HFA und SHFA berechneten Landau-Niveaufächer. Als Modellsystem liegt ein 20 nm-Quantentrog mit der im Bild angegebenen Dichte und Temperatur zugrunde. Die Niveaubreiterung wurde für alle Niveaus einheitlich entsprechend einer Beweglichkeit  $\mu = 0.5 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$  gewählt. Die weiteren Parameter lauten:  $m^* = 0.068 m_e$ ,  $g^* = -0.44$ .

verantwortlich. Sie ist stets vorhanden und umso stärker ausgeprägt, je mehr Landau-Niveaus besetzt sind. Die Intra-Landau-Niveau-Abschirmung tritt immer dann auf, wenn das oberste Landau-Niveau nicht vollständig besetzt ist. Sie ist bei Halbfüllung des obersten Landau-Niveaus maximal und dominiert über weite Füllfaktorbereiche aufgrund ihrer Stärke. Infolge der Abschirmung ähneln die Verläufe der SHFA mit Ausnahme der ganzzahligen Füllfaktoren und ihrer unmittelbaren Umgebungen tendenziell eher denen des Einteilchen-Bildes als denen der HFA.

Neben den Niveauenergien und ihren Abständen ist insbesondere die Spinpolarisation  $P = |N_{S,+} - N_{S,-}| / (N_{S,+} + N_{S,-})$  eines Q2DEG, wie noch im nächsten Abschnitt erläutert wird, von besonderer experimenteller und theoretischer Relevanz. In der Figur 7.2 a) sind dazu die berechneten Spinpolarisationen für das Einteilchen-Bild, die HFA und die SHFA als Funktion des Füllfaktors für  $T \rightarrow 0$  gegenübergestellt. In der HFA ist aufgrund der starken Austauschverstärkung der Spinlücken der Polarisationsgrad maximal. Trotz der drastischen Abschwächung des Austauschs durch die Abschirmung ist die Spinpolarisation gemäß der SHFA nur leicht in den Bereichen zwischen ganzzahligen Füllfaktoren gegenüber dem HFA-Verlauf abgesenkt. Mit Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 1$  schließlich ist die Polarisation sowohl in der HFA als auch in der SHFA vollständig. Die Polarisation des Einteilchen-Bildes hingegen liegt aufgrund des Überlapps der lediglich um die natürliche Zeeman-Lücke aufgespaltenen und durch Streuung verbreiterten Landau-Niveaus stets unterhalb der beiden anderen Verläufe und erreicht bei ungeradzahligen Füllfaktoren bei weitem nicht die durch die HFA vorgegebene Sättigung.



**Abbildung 7.2:** Füllfaktorabhängige Spinpolarisation und temperaturabhängige Spinlücke im Modellvergleich. Teilbild a) zeigt die Spinpolarisation eines Q2DEG als Funktion des Füllfaktors für die HFA, SHFA und das Einteilchen-Bild (SPP). Im Teilbild b) sind für die gleichen Modelle die gerechneten Temperaturverläufe der fundamentalen Spinlücke gegenübergestellt. Das Modellsystem entspricht dem aus der Figur 7.1.

Um zuletzt einen Eindruck über die thermische Stabilität der Austauscheffekte zu vermitteln, zeigt die Figur 7.2 b) die gerechneten Verläufe der fundamentalen Spinlücke bei  $\nu = 1$  als Funktion der Temperatur. Daran erkennt man, daß die Austausch-Verstärkung in der HFA eine außerordentlich hohe thermische Stabilität bis hinauf zu Temperaturen in der Größenordnung von 20 – 30 K aufweist. In der SHFA hingegen ist der Temperaturbereich mit Einsetzen der Abschirmung infolge thermisch aktivierter Elektron-Loch-Paare drastisch reduziert. Die Spinlücke bricht hier bereits bei einer Temperatur von der Größenordnung 5 K abrupt ein und schmiegt sich dann sehr schnell an die durch die Bandstruktur vorgegebene Zeeman-Lücke an. Wie die dargestellten Verläufe nahelegen, stellen die HFA und die SHFA hinsichtlich der thermischen Stabilität der Austauschrenormierungen die Eckpunkte dar, zwischen denen eine zutreffende Beschreibung anzusiedeln ist.

#### 7.1.4 Magneto-Intrasubband-Plasmonen in der Hartree-Fock-Näherung

Die kollektiven Intrasubband-Plasmonen mit der Zyklotronresonanz als dem extrem langwelligen Grenzfall sind in den Betrachtungen von Abschnitt 6.2.3.1 als Spezialfall enthalten. Vernachlässigt man die Mischung mit den Übergängen  $\Delta n = n' - n \neq 1$ , so ergibt sich aus den Gleichungen 6.104 bis 6.106 die Magneto-Plasmon-Anregungsmatrix

$$H_{K,L}^{MP}(\vec{q}) = \epsilon_K^2 \delta_{K,L} + 2\sqrt{(n_K + 1)\epsilon_K \bar{\nu}_K} \sqrt{(n_L + 1)\epsilon_L \bar{\nu}_L} [h_{K,L}(\vec{q}) + x_{K,L}(\vec{q})] . \quad (7.22)$$

Aufgrund der Auswahlregel  $\Delta n = n' - n = 1$  für unvermischte Intrasubband-Plasmonen stehen die Übergangsindizes  $K$  für die Übergänge  $(i_K, n_K, \sigma_K) \rightarrow (i_K, n_K + 1, \sigma_K)$ . Auch hier hat das quadratische Auftreten der Energien analog zu den Intersubband-Resonanzen wiederum seine Ursache in der Zusammenfassung der Absorptions- und Emissionsübergänge. In [Mac85a] sind die letzteren nicht berücksichtigt und die Anregungsmatrix nimmt in dieser Näherung die Gestalt

$$H_{K,L}^{MP}(\vec{q}) \approx \epsilon_K \delta_{K,L} + \sqrt{(n_K + 1)\bar{\nu}_K} \sqrt{(n_L + 1)\bar{\nu}_L} [h_{K,L}(\vec{q}) + x_{K,L}(\vec{q})] \quad (7.23)$$

einer vertrauten Hamilton-Matrix an. Die Parameter der Hartree- und der Austauschwechselwirkung  $h_{K,L}(\vec{q})$  und  $x_{K,L}(\vec{q})$  lauten

$$\begin{aligned} h_{K,L}(\vec{q}) &= \frac{E_H(q)}{n_K + 1} \exp\left(-\frac{q^2 l_m^2}{2}\right) \left(\frac{q^2 l_m^2}{2}\right) L_{n_K}^1(q^2 l_m^2/2) L_{n_L}^1(q^2 l_m^2/2) F_{i_K, i_K i_L, i_L}(q) , \\ x_{K,L}(\vec{q}) &= -\delta_{\sigma_K, \sigma_L} E_C \frac{n_L!}{(n_K + 1)!} \int d^2\kappa \frac{l_m}{2\pi\kappa} \exp(i l_m^2 (q_x \kappa_y - q_y \kappa_x)) \exp\left(-\frac{\kappa^2 l_m^2}{2}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\kappa^2 l_m^2}{2}\right)^{n_K - n_L} L_{n_{L+1}}^{n_K - n_L}(\kappa^2 l_m^2/2) L_{n_L}^{n_K - n_L}(\kappa^2 l_m^2/2) F_{i_K, i_L i_L, i_K}(\kappa) . \end{aligned} \quad (7.24)$$

Darin stehen  $\epsilon_K = \epsilon_{i_K, n_K + 1, \sigma_K} - \epsilon_{i_K, n_K, \sigma_K}$  für die Energiedifferenzen im renormierten Niveauschema,  $\bar{\nu}_K = \nu_{i_K, n_K, \sigma_K} - \nu_{i_K, n_K + 1, \sigma_K}$  für die Besetzungsdifferenzen, sowie  $E_H(q) = (N_{LL} e^2)/(2\epsilon_0 \epsilon_{sc} q)$  und  $E_C = e^2/(4\pi \epsilon_0 \epsilon_{sc} l_m)$  für die Energieskalen der Hartree- bzw. Fock-Matrixelemente.  $L_n^m(y)$  bezeichnet die assoziierten Laguerre-Polynome.

Die quadrierten Kollektivmodenenergien  $\epsilon_J^2$  und ihre Anregungsstärken  $F_J$  ergeben sich in Analogie zu den Intersubband-Resonanzen durch die Diagonalisierung der Anregungsmatrix 7.22 und anschließende Projektion ihrer Eigenvektoren  $|\epsilon_J^2\rangle$  auf den Dipolzustand gemäß

$$F_J(\vec{q}) \propto \left| \sum_K \sqrt{2\bar{\nu}_K \epsilon_K} A_{n_K + 1, n_K}(\vec{q}) \langle K | \epsilon_J^2 \rangle \right|^2 , \quad (7.25)$$

mit den unverkoppelten Anregungszuständen  $|K\rangle$  und den in Abschnitt 6.1.3 definierten Koeffizienten  $A_{n,m}(\vec{q})$ .

### 7.1.5 Zyklotronresonanz in der Hartree-Fock-Näherung und das Kohnsche Theorem

Nach den Ausführungen des Kapitels 5 unterliegt die Zyklotronresonanz für ein parabolisches Q2DEG der Einschränkung des Kohnschen Theorems. Gegenstand dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß dieses implizit in der TDHFA-Beschreibung enthalten ist.

Dazu gilt es den Nachweis zu erbringen, daß die Hamilton-Matrix mit den Elementen 7.23 sich für  $q = 0$  auf die Gestalt 5.50 abbilden läßt. Wie man anhand der Hamilton-Matrix 5.50 erkennt, erfüllen deren Matrixelemente die Summenregel

$$H_{K,K}^{CR} - \hbar\omega_c = - \sum_{L \neq K} \sqrt{\frac{f_L}{f_K}} H_{K,L}^{CR} , \quad (7.26)$$

mit den Einteilchen-Übergangsstärken  $f_K = (n_K + 1)\bar{\nu}_K$ . Genügen auch die Matrixelemente der Hamilton-

Matrix 7.23 dieser Gleichung, so ist der Nachweis für das Zutreffen des Kohnschen Theorems erbracht. Durch explizites Einsetzen der HFA-Matrixelemente 7.24 in die Beziehung 7.26 bekommt man nach wenigen elementaren Umstellungen als zu erfüllende Gleichung

$$\sum_L \delta_{\sigma_K, \sigma_L} \left[ \Delta_{i_K, n_K}^{(HFA)} i_{L, n_L} - \Delta_{i_K, n_K+1}^{(HFA)} i_{L, n_L} \right] \nu_{i_L, n_L, \sigma_L} = - \sum_{L'} (n_{L'} + 1) \bar{\nu}_{L'} x_{K, L'}(0) . \quad (7.27)$$

Darin entspricht die linke Seite der Gleichung der Korrektur für die Landau-Lücke  $\Delta_{gap, K}^{(HFA)}$  des Übergangs  $K$  gemäß der HFA-Näherung. Die Summe auf der rechten Seite entspricht seiner effektiven exzitonischen Bindungsenergie  $\Delta_{exc, K}^{(HFA)}(\vec{q} = 0)$ . Damit die kollektive Zyklotronresonanz bei der Einteilchen-Übergangsenergie  $\hbar\omega_c$  auftritt, müssen sich diese beiden Größen für jeden beteiligten Übergang  $K$  gerade kompensieren. Die explizite Auswertung der linken Seite ergibt mit der Substitution  $l_{mK} = x$

$$\Delta_{gap, K}^{(HFA)} = E_C \sum_{i, n} \frac{n_K!}{n!} \int_0^\infty dx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-n_K} \left\{ \left[ L_{n_K}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) \right]^2 - (n_K + 1) \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-1} \left[ L_{n_K+1}^{n-n_K-1} \left(x^2/2\right) \right]^2 \right\} F_{i_K, i, i i_K}(x/l_m) \nu_{i, n, \sigma_K} . \quad (7.28)$$

Die rechte Seite lautet ausgewertet

$$\Delta_{exc, K}^{(HFA)}(\vec{q} = 0) = -E_C \sum_{i, n} \frac{n_K!}{n!} \int_0^\infty dx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-n_K} L_{n_K}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) \times L_{n_K+1}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) F_{i_K, i, i i_K}(x/l_m) (\nu_{i, n, \sigma_K} - \nu_{i, n+1, \sigma_K}) . \quad (7.29)$$

Die  $F_{i, j, j}(q)$  bezeichnen wiederum die im Vorfeld eingeführten Subband-Formfaktoren. Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen bleibt schließlich zu zeigen, daß für alle  $n, n_K$  die Identität

$$\left[ L_{n_K}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) \right]^2 - (n_K + 1) \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-1} \left[ L_{n_K+1}^{n-n_K-1} \left(x^2/2\right) \right]^2 = L_{n_K}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) L_{n_K+1}^{n-n_K} \left(x^2/2\right) - n \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-1} L_{n_K}^{n-n_K-1} \left(x^2/2\right) L_{n_K+1}^{n-n_K-1} \quad (7.30)$$

erfüllt wird. Mit Hilfe der Rekursionsrelationen für die assoziierten Laguerre-Polynome  $L_n^{m-1}(y) = L_n^m(y) - L_{n-1}^m(y)$  und  $L_n^{m-1}(y) = [(n+1)L_{n+1}^m(y) - (n+1-y)L_n^m(y)] / (n+m)$  [Abr55] gelingt dies nach wenigen elementaren Rechenschritten. Damit läßt sich explizit und ganz allgemein zeigen, daß das Kohnsche Theorem in der TDHFA-Beschreibung der Magneto-Plasmonen implizit enthalten ist.

Das Kohnsche Theorem gilt auch für die abgeschirmte Hartree-Fock-Näherung (SHFA) und ihr zeitabhängiges Pendant, die zeitabhängige statisch abgeschirmte HFA (TDSHFA). Dies wird abschließend kurz dargelegt. In der SHFA wird die nackte Coulomb-Wechselwirkung im Austauschbeitrag durch die im allgemeinen dynamisch abgeschirmte Coulomb-Wechselwirkung ersetzt. Im Einsubband-Grenzfall wird die Abschirmung vollständig durch die dielektrische Funktion  $\varepsilon(q, \omega)$  beschrieben. In der statisch abgeschirmten HFA mit der Ersetzung  $\varepsilon(q, \omega) \rightarrow \varepsilon(q, 0) = \varepsilon(q)$  entfällt die komplizierte Polstruktur der Dielektrizitätsfunktion. Die entsprechende zeitabhängige Variante zur Ableitung der kollektiven Anregungsmoden, die TDSHFA, ist dann bis auf das Auftauchen des Abschirmfaktors  $1/\varepsilon(q)$  in den Integralen zur bislang behandelten TDHFA vollständig formäquivalent. Damit ergeben sich in der SHFA bzw. TDSHFA gegenüber der HFA bzw. TDHFA

als Modifikationen lediglich die Gleichung 7.21 für die Landau-Niveauenergien und die Ersetzung der nackten Austausch-Matrixelemente 7.24 durch ihre abgeschirmten Pendant

$$x_{K,L}(\vec{q}) = -\delta_{\sigma_K, \sigma_L} E_C \frac{n_L!}{(n_K + 1)!} \int d^2\kappa \frac{l_m}{2\pi\kappa} \frac{\kappa}{\kappa + \bar{q}_{TF}(\kappa)} F(\kappa) \exp(i l_m^2 (q_x \kappa_y - q_y \kappa_x)) \\ \times \exp\left(-\frac{\kappa^2 l_m^2}{2}\right) \left(\frac{\kappa^2 l_m^2}{2}\right)^{n_K - n_L} L_{n_K - n_L}^{n_K - n_L}(\kappa^2 l_m^2 / 2) L_{n_L}^{n_K - n_L}(\kappa^2 l_m^2 / 2) . \quad (7.31)$$

Die Größe  $\bar{q}_{TF}(q)$  ist in Abschnitt 7.1.2.2 erklärt und  $F(q)$  bezeichnet wiederum den Subband-Formfaktor.

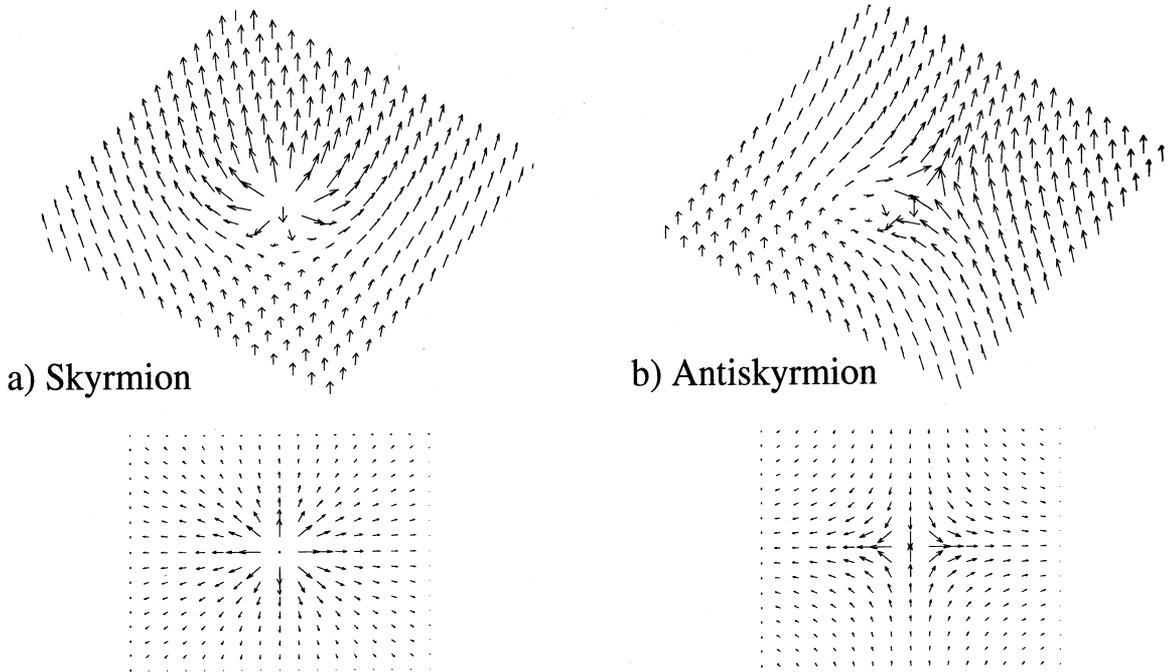
### 7.1.6 Formation von Spintexturen (Skyrmionen)

Mit Abweichung von der Niveaullfüllung kommt in der störungstheoretischen Behandlung eines Q2DEG im Magnetfeld die Intrasubband-Abschirmung ins Spiel. Diese führt, wie es im vorausgehenden Abschnitt ausführlich dargelegt wurde, zu deutlichen Abweichungen gegenüber der unabgeschirmten Hartree-Fock-Näherung. Eine andere Betrachtungsweise der physikalischen Verhältnisse speziell um den Füllfaktor  $\nu = 1$  herum basiert auf einem speziellen Quasiteilchen-Modell, das Spintexturen, sogenannte Syrmionen, als Teilchen-Zustände aufweist [Lee90, Son93, Fer94, Byc96].

Als Ausgangspunkt des Skyrmion-Modells dient eine Betrachtungsweise, bei der ein zusätzliches Elektron ( $\nu < 1$ ) beziehungsweise Loch ( $\nu > 1$ ) dem Vakuumzustand, der hier der Slater-Determinaten 7.1 entspricht, hinzugefügt wird. Im Falle eines zusätzlichen Elektrons besetzt dieses in der Hartree-Fock-Betrachtungsweise zunächst ein um die Austausch- und die Zeeman-Lücke erhöhtes Einteilchen-Niveau mit einer dem Vakuumzustand entgegengerichteten Spineinstellung. Infolge des abrupten Übergangs zwischen der Spinorientierung des Zusatzelektrons und der des vollgefüllten untersten Landau-Niveaus ist die Austauschenergie maximal. Diese kann jedoch abgesenkt werden, indem sich um das zusätzliche Elektron herum die Spinorientierungen der Elektronen im vollbesetzten Landau-Spinniveau graduell anpassen. Die Anpassung der Spins erfolgt dabei derart, daß der Anstieg der Zeeman-Energie infolge des graduellen Umklappens der Majoritätsspins gerade noch durch die Absenkung der Austauschenergie kompensiert wird. Als Quasiteilchen-Anregung auf dem Vakuumzustand mit  $\nu = 1$  liegt daher ein Elektron nahe, das von einer Spintextur begleitet wird. Eine solche Spintextur entspricht einer Windung in der Verteilung des Spinfeldes und wird zurückgehend auf Skyrme, der solche Gebilde erstmalig in der Elementarteilchen-Physik zur Erklärung der Mesonen und Baryonen einführte, als Skyrmion (Sk) bezeichnet [Sky62]. Skyrmionen werden durch ihre Windungszahl charakterisiert und besitzen als Besonderheit eine topologische Ladung, die der Windungszahl entspricht. Eine analoge Betrachtungsweise gilt auch für die Quasiloeh-Anregung, bei welcher aus dem vollgefüllten Landau-Niveau ein Elektron entfernt wird. Das von einer Spintextur umgebene Loch entspricht dem zum Skyrmion konjugierten Antiteilchen und wird Antiskyrmion (ASk) genannt.

Die Skyrmion- und Antiskyrmion-Anregungen auf dem vollgefüllten Landau-Niveau  $\nu = 1$  können durch ein komplexes Feld mit einer effektiven Lagrange-Funktion beschrieben werden. Durch Lösen der entsprechenden Feldgleichung ergeben sich die Spin- und Ladungsverteilungen (in Einheiten von -e)  $\vec{\sigma}_{Sk/ASk}(x, y) = (\hbar/2) \vec{n}_{Sk/ASk}$  bzw.  $q_{Sk/ASk}(r)$  im Limes kleiner g-Faktoren  $g^* \rightarrow 0$  näherungsweise zu [Son93]

$$\begin{pmatrix} n_x(x, y) \\ n_y(x, y) \\ n_z(x, y) \end{pmatrix}_{Sk/ASk} = \frac{1}{r^2 + 4\lambda^2} \begin{pmatrix} 4\lambda x \\ \pm 4\lambda y \\ r^2 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$



**Abbildung 7.3:** Spintexturen auf dem  $\nu = 1$ -Vakuum. Die beiden Teilbilder a) und b) zeigen ein Skyrmion bzw. Antiskyrmion in dreidimensionaler Pfeildarstellung (jeweils oben) und deren zweidimensionaler Projektion (jeweils unten).

sowie

$$q_{Sk/ASk}(r) = \pm \frac{1}{\pi} \frac{4\lambda^2}{(r^2 + 4\lambda^2)^2} ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (7.33)$$

Die darin vorkommende Länge  $\lambda$  kennzeichnet die Ausdehnung der Spintexturen und  $l_m$  die magnetische Länge. In Figur 7.3 sind exemplarisch die Spinverteilungen für das Skyrmion und das Antiskyrmion graphisch dargestellt. Die Spintexturen werden durch die Zahl  $S_{Sk}$  bzw.  $S_{ASk}$  der gegenüber dem Vakuumzustand umgeklappten Spins gekennzeichnet. Diese Zahl hängt gemäß

$$S_{Sk/ASk} = \int dx \int dy n_{z,Sk/ASk}(x, y) \quad (7.34)$$

unmittelbar mit ihrer Ausdehnung  $\lambda$  zusammen. Die Ausdehnung eines (Anti-)Skyrmions und seine Energie ergeben sich aus dem Wechselspiel von Coulomb- und Zeeman-Energie. Im Grenzfall  $g^* \ll 1$  gelten die näherungsweisen Ausdrücke [Son93]

$$\lambda = l_m \left[ \frac{9\pi^2}{2^8} \frac{l_m}{\varepsilon_{sc} a_B} \frac{1}{|g^*| |\ln(|g^*|)|} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7.35)$$

für die Ausdehnung des (Anti-)Skyrmions und

$$E_{Sk/ASk} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} l_m} \left[ 1 + \frac{3\pi}{4} \left( \frac{18}{\pi} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{\varepsilon_{sc} a_B}{l_m} \right)^{\frac{1}{3}} (|g^*| |\ln(|g^*|)|)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (7.36)$$

für die Energie des (Anti-)Skyrmions. Hierin kennzeichnet  $a_B$  den Bohr-Radius,  $l_m$  die magnetische Länge und  $\varepsilon_{sc}$  die relative Dielektrizitätskonstante. Die Skyrmion-Antiskyrmion-Paarerzeugungslücke ist durch  $\Delta = 2E_{Sk/ASk}$  gegeben. Überschreitet  $|g^*|$  einen kritischen Wert, so besitzt ein Skyrmion bzw. Antiskyrmion keine Ausdehnung. Dies entspricht dem Fall eines einzelnen umgeklappten Spins gegenüber dem vollgefüllten untersten Landau-Niveau und damit der im Vorfeld dargelegten Hartree-Fock-Betrachtung. Im Grenzfall einer verschwindenden Zeeman-Lücke hingegen sind die (Anti-)Skyrmionen unendlich ausgedehnt. Weitere, in manchen Aspekten verfeinerte Betrachtungsweisen der Skyrmion-Formation auf  $\nu = 1$  werden in [Fer94, Byc96, Mac96, Abo97] behandelt. Gemäß dem Skyrmion-Bild eines Q2DEG um  $\nu = 1$  bildet sich für  $\nu > 1$  auf dem  $\nu = 1$ -Vakuumzustand ein Gas von Skyrmionen mit Ladung  $-e$  und für  $\nu < 1$  ein Gas von Antiskyrmionen mit Ladung  $+e$  aus. Die Wechselwirkung zwischen diesen entspricht der Coulomb-Wechselwirkung, welche allerdings infolge der Ladungsverteilung innerhalb der Spingebilde gegenüber derjenigen zwischen Punktladungen modifiziert ist. Bei niedrigen Skyrmion- bzw. Antiskyrmion-Dichten wird die Wechselwirkung häufig vernachlässigt. Im Falle hoher (Anti-)Skyrmion-Dichten wurde in [Bre95] eine reguläre Anordnung in Form eines Skyrmion-Kristalls vorgeschlagen und theoretisch untersucht.

Infolge des graduellen Umklappens von Majoritätsspins zur Minimierung der Austauschenergie wird die Spinpolarisation nach dem Skyrmion-Bild sowohl im Falle  $\nu > 1$  als auch im Falle  $\nu < 1$  gegenüber der Spinpolarisation entsprechend der Hartree-Fock-Beschreibung abgesenkt. Daher ist der direkte experimentelle Nachweis der Skyrmion-Formation in der Spinpolarisation eines Q2DEG um  $\nu = 1$  zu suchen. In [Bar95] wurde in diesem Zusammenhang ein einfaches Modell vorgeschlagen, welches das Verhalten der Spinpolarisation als Funktion des Füllfaktors um  $\nu = 1$  beschreibt. Grundlage dieses Modells ist eine Reduktion des Gesamtspins von  $P(\nu = 1) = FN_{LL}$  ( $F$ : Probenfläche,  $N_{LL}$ : Fassungsvermögen eines Landau-Niveaus pro Flächeneinheit) um  $A_{Sk}$  bzw.  $A_{ASk}$  umgeklappte Spins pro überschüssigem Elektron oder Loch gegenüber dem Vakuum. Die Dichte  $N_{e/h} = |N_{LL} - N_S|$  der überzähligen Elektronen bzw. Löcher entspricht dabei der Dichte  $N_{Sk/ASk}$  der sich ausbildenden Skyrmionen bzw. Antiskyrmionen. Gemäß dieser Vorstellung wird die Spinpolarisation des (Anti-)Skyrmion-Gases durch den Ausdruck

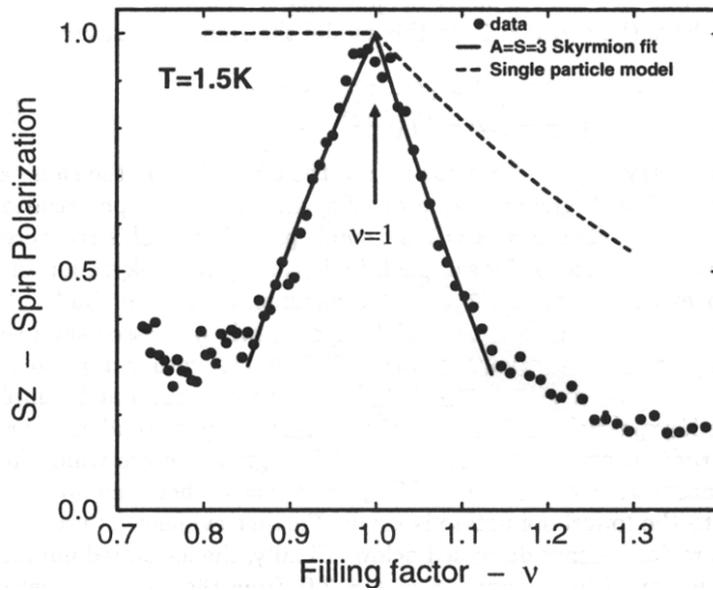
$$P_{Sk/ASk}(\nu) = \begin{cases} A_{Sk} \left(\frac{2-\nu}{\nu}\right) - (A_{Sk} - 1) & , \nu > 1 \\ \frac{1}{\nu} - (2A_{ASk} - 1) \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right) & , \nu < 1 \end{cases} \quad (7.37)$$

beschrieben. Die Hartree-Fock-Beschreibung ist darin als Spezialfall  $A_{Sk} = A_{ASk} = 1$  enthalten und aufgrund der Elektron-Loch-Symmetrie wird generell  $A_{Sk} = A_{ASk}$  gefordert.

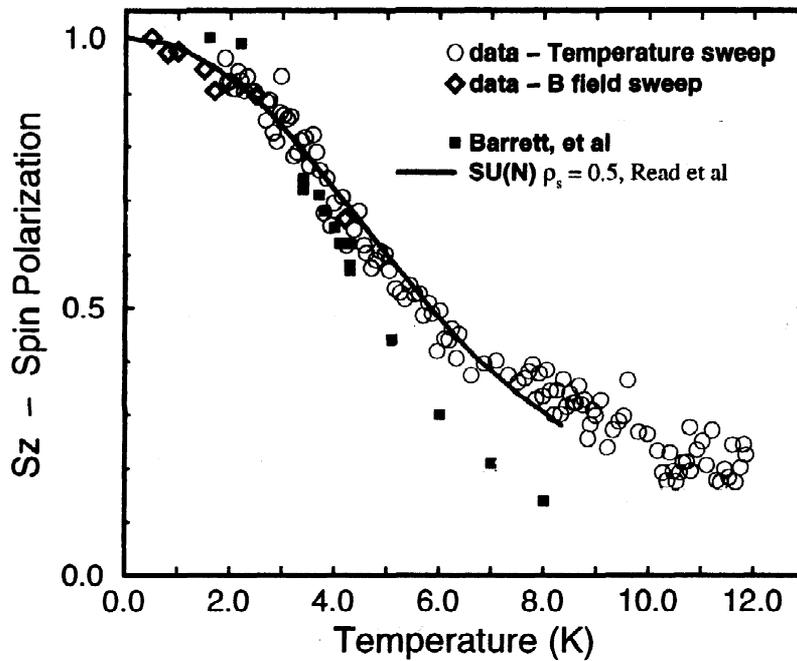
Der direkte experimentelle Nachweis der Skyrmion-Formation über eine Messung der Spinpolarisation wurde mittlerweile mittels zweier unterschiedlicher experimenteller Verfahren erbracht:

Der erste Nachweis gelang in [Bar95] mittels einer speziellen NMR-Technik, bei der die für die Detektion des NMR-Signals notwendige Polarisation der als Sonden dienenden  $^{71}\text{Ga}$ -Kernspins durch optisches Pumpen bereitgestellt wird [Bar94]. Dabei ist die Knight-Verschiebung der  $^{71}\text{Ga}$ -Kerne im Quantentrog, in dem das Q2DEG lokalisiert ist, direkt proportional zur Änderung der interessierenden Spinpolarisation des Q2DEG. Die Ergebnisse wurden mittel der Beziehung 7.37 analysiert und ergaben Werte  $A_{Sk} \approx 3 - 4$ , wie sie theoretisch im Vorfeld für GaAs-Systeme bei den entsprechenden Elektronendichten vorhergesagt wurden.

Eine zweite Lichtspektroskopische Technik wurde in [Aif96] entwickelt und basiert auf der Analyse der polarisationsabhängigen Lumineszenz eines Quantentrog. Bei diesem Verfahren werden die Linienstärken spezieller optischer Übergänge, die eindeutig den beiden Spinprojektionen des Q2DEG zugeordnet werden können, über ihre Polarisation selektiert und analysiert. Anhand von Übergangsstärken und Auswahlregeln, die im Vorfeld berechnet werden, kann dabei die Änderung der Spinpolarisation aus den Variationen der Linienstärken aus-



**Abbildung 7.4:** Gemessene Spinpolarisation eines Quantentrogens als Funktion des Füllfaktors. Den experimentellen Punkten, die aus Lumineszenzmessungen gewonnen wurden, ist eine Anpassung gemäß der Gleichung 7.37 in Form einer durchgezogenen Linie unterlegt. Zur Orientierung ist die Spinpolarisation entsprechend dem Hartree-Fock-Modell gestrichelt eingezeichnet. Die ausgewerteten Skyrmion-Parameter  $A_{Sk}$  und  $A_{ASk}$  sind im Bild als  $S$  und  $A$  bezeichnet. Die Probandaten lauten:  $N_S = 1.8 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , Trogbreite  $d_w = 25 \text{ nm}$ . Aus [Gol96].



**Abbildung 7.5:** Gemessene Spinpolarisation eines Quantentrogens bei Vollfüllung  $\nu = 1$  als Funktion der Temperatur. Den experimentellen Punkten ist eine Anpassung nach einem Modell nach [Rea95] unterlegt, das die Anregungen auf einem Kontinuumferromagneten beschreibt. Die Struktur, an welcher die Daten gewonnen wurden, entspricht derjenigen aus Figur 7.4. Aus [Gol96].

gewertet werden. In der Abbildung 7.4 ist das Ergebnis eines solchen Experimentes dargestellt und mit dem Modell gemäß der Gleichung 7.37 unterlegt. Der Hartree-Fock-Grenzfall mit  $A_{Sk} = A_{ASk} = 1$  ist darin ebenfalls als gestrichelte Linie eingezeichnet.

Ein weiteres Indiz für die Ausbildung von Skyrmionen ergab sich aus Magneto-Transportexperimenten im verkippten Magnetfeld, von denen in [Sch95] berichtet wird. Bei diesen Untersuchungen wurden mittels der Technik der thermischen Aktivierung die Energielücken  $\Delta_\nu$  bei ungeradzahligem Füllfaktor als Funktion des für die Zeeman-Lücke relevanten totalen Magnetfeldes  $B$  analysiert. Hierbei wurde die für die Landau-Quantisierung relevante senkrechte Magnetfeldkomponente  $B_\perp$  konstant gehalten. Die Energielücken besitzen unter diesen Gegebenheiten die funktionale Form

$$\Delta_\nu(B_\perp, B) = \Delta_{0,\nu}(B_\perp) + S_{pair} \frac{\hbar}{2} |g^*| \mu_B B . \quad (7.38)$$

Der erste Beitrag  $\Delta_{0,\nu}(B_{\perp})$  rührt von den Wechselwirkungen her und hängt im wesentlichen von  $B_{\perp}$  ab. Der Ursprung des zweiten Beitrags ist die Zeeman-Energie, wobei  $S_{pair}$  die Anzahl der umgeklappten Spins bezeichnet, die ein thermisch erzeugtes Quasiteilchen-Quasiloch-Paar aufweist. Entsprechend der experimentellen Durchführung führt lediglich der zweite Beitrag zu einer Veränderung der gemessenen Lücken, so daß aus der gemessenen Steigung  $\partial\Delta_{\nu}(B_{\perp}, B)/\partial B|_{B_{\perp}}$  unmittelbar auf die Anzahl der umgeklappten Spins pro Teilchen-Loch-Paar geschlossen werden kann. Die Auswertung der Experimente ergab für  $\nu = 1$   $A_{pair} \approx 14$ . Dieser Wert legt die thermische Aktivierung von Skyrmion-Antiskyrmion-Paaren mit  $A_{Sk} = A_{ASk} = A_{pair}/2 \approx 7$  nahe. Diese Interpretation, wie auch die Anzahl der umgeklappten Spins ist in weitgehender Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [Bar95, Aif96]. Die höhere Anzahl an umgeklappten Spins ist dabei auf das günstigere Verhältnis von Coulomb- und Zeeman-Energie zurückzuführen, das bei den niedrigen verwendeten Elektrodendichten gegeben ist. Als weiteres wichtiges Ergebnis der Transportexperimente bleibt noch zu erwähnen, daß die anomale Erhöhung des Spins  $A_{pair}$  bereits bei einer Beweglichkeit  $\mu = 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$  auftrat.

Über den Füllfaktor  $\nu = 1$  hinaus wurden auch die höheren ungeraden Füllfaktoren  $\nu = 3$  und  $\nu = 5$  untersucht. Für diese ergaben sich allerdings in Einklang mit den theoretischen Vorhersagen keine signifikanten Abweichungen gegenüber den Voraussagen der Hartree-Fock-Betrachtung, was auf die Form der Coulomb-Wechselwirkung in den höheren Landau-Niveaus zurückführbar ist.

Mit einem ähnlichen Transport-Meßverfahren, wie dem eben geschilderten, wurde in [Lea97] der Füllfaktor  $\nu = 1/3$  untersucht. Die Durchstimmung der Zeeman-Energie bei ansonsten gleich bleibender Landau-Quantisierung gelang dabei durch Variation des g-Faktors über hydrostatischen Druck. Auch hier ergab sich in Einklang mit Vorhersagen der Theorie eine verstärkte Variation des Zeeman-Beitrags in der thermischen Energielücke, die auf eine Formation von Skyrmionen schließen läßt. Als Besonderheit sind diese Skyrmionen wiederum aus Quasiteilchen und Quasilöchern aufgebaut, die sich unter den Bedingungen des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) ausbilden. Der FQHE und seine Quasiteilchen-Anregungen werden im Kapitel 8 ausführlich behandelt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird kurz noch auf die Temperaturentwicklung der Spinpolarisation auf dem  $\nu = 1$ -Zustand eingegangen. Hierzu zeigt die Abbildung 7.5 die experimentellen Ergebnisse aus [Gol96], die mit einer Anpassung an ein Modell unterlegt sind, das in [Rea95] entwickelt wurde. An der Darstellung erkennt man einen graduell verlaufenden Abbau der Spinpolarisation, der bei etwa  $2 - 3 \text{ K}$  einsetzt und bei etwa  $10 \text{ K}$  in einen Verlauf einmündet, der sich asymptotisch der Nulllinie annähert. Aus dieser Auftragung geht direkt die Stabilität des ferromagnetischen Grundzustandes hervor. Vergleicht man anhand von Figur 7.2 b) die Temperaturentwicklung der Spinpolarisation mit derjenigen der Spinlücke entsprechend der Hartree-Fock- bzw. der abgeschirmten Hartree-Fock-Näherung, so stellt man fest, daß der beobachtete experimentelle Verlauf durch die letzteren Fälle eingegrenzt wird. Der Theorie in [Rea95] liegt ein Modell für einen zweidimensionalen Kontinuum-Quantenferromagneten zugrunde, das um für den Quanten-Hall-Effekt spezifische Terme erweitert wurde. Es weist (Anti-)Skyrmionen als Anregungen auf, die infolge thermischer Aktivierung zu einem Abbau der Spinpolarisation führen.

Insgesamt erhärten mittlerweile eine Reihe experimenteller Befunde die Existenz skyrmionartiger Anregungen in Quanten-Hall-Systemen auf GaAs bei den Füllfaktoren  $\nu = 1$  und  $\nu = 1/3$ . Der nachfolgende experimentelle Teil dieses Kapitels widmet sich deshalb zum Großteil dem experimentellen Nachweis der Skyrmion-Formation in der Zyklotronresonanz dieser Systeme.

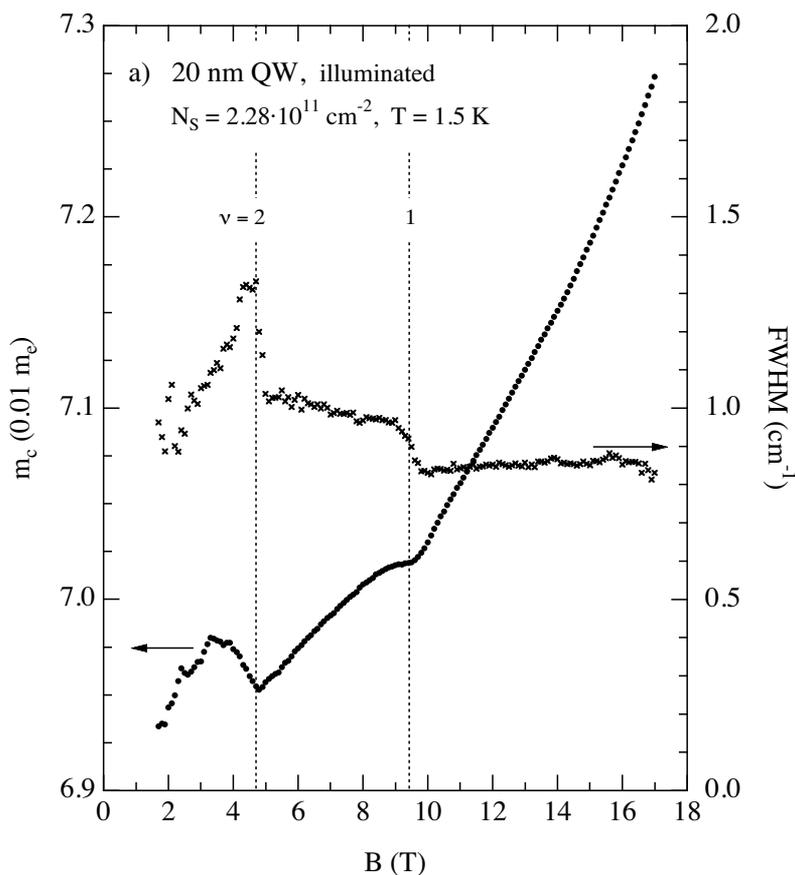
## 7.2 Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors $\nu = 1$

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Ergebnisse zur Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors  $\nu = 1$  dargelegt. Zunächst wird im Abschnitt 7.2.1 ein Überblick zum Stand der Zyklotronresonanz im relevanten Regime gegeben. Im Abschnitt 7.2.2 wird die Phänomenologie zur Probenabhängigkeit und zum Temperatureinfluß dargestellt. Die Rolle der Polaron-Kopplung auf die Zyklotronmasse wird im Abschnitt 7.2.3 quantitativ erarbeitet. Diese wird dann im darauffolgenden Abschnitt 7.2.4 dazu verwendet, um die Manifestation der Skyrmion-Formation über die Spinbesetzungsabhängigkeit der Polaron-Renormierung nachzuweisen. Im Umkehrschluß wird im Abschnitt 7.2.5 die Spinpolarisation um  $\nu = 1$  aus der Massenvariation extrahiert. Zuletzt wird im Abschnitt 7.2.6 eine Universalität in der Variation der Linienbreite näher beleuchtet.

### 7.2.1 Überblick und experimenteller Stand der Zyklotronresonanz im Quantengrenzfall

In mehreren Artikeln zur Zyklotronresonanz hochbeweglicher Elektronengase in GaAs [Sch87, Hop87, Ens87, Bat88, Nic89, Pee92] wurde bereits auf Besonderheiten und Anomalien hingewiesen, die mit dem Eintritt in die Quantengrenzfälle  $\nu = 2$  bzw.  $\nu = 1$  zusammenhängen. Die experimentellen Beobachtungen weisen dabei Gemeinsamkeiten auf, die sich an einem hochbeweglichen Quantentrog in der Abbildung 7.6 in besonders klarer Ausprägung widerspiegeln.

Um den Füllfaktor  $\nu = 2$  ist häufig eine deutliche Überhöhung in der Linienbreite zu beobachten, wobei die Zyklotronmasse ein lokales Minimum aufweist. Das Verhalten der Zyklotronmasse um  $\nu = 2$  wurde im Abschnitt 5.3.3 ausführlich behandelt und wird durch die Nichtparabolizität erklärt. Als Erklärung für das Maximum in der Linienbreite um  $\nu = 2$  wurde häufig der Verlust der Abschirmfähigkeit des Q2DEG bei der



**Abbildung 7.6:** Ausgewertete Linienformparameter der Zyklotronresonanzen eines hochbeweglichen Quantentrogs als Funktion des Magnetfeldes. Zur Erreichung der hohen Beweglichkeit wurde die Probe im kalten Zustand mit NIR-Strahlung beleuchtet.

Niveauvollfüllung herangezogen, der eine vermehrte Streuung und damit eine Verbreiterung der Zyklotronresonanz zur Folge hat. Rückblickend auf die Ergebnisse des Abschnitts 5.3.2 stellt die Linienbreitenüberhöhung bei  $\nu = 2$  aller Voraussicht nach einen Vorboten der bei den hohen Dichten vorhandenen Linienaufspaltung dar. Entsprechend dieser Interpretation läge zumindest ein Teil ihrer Ursache in der mit der Nichtparabolizität zusammenhängenden Mehrkomponentigkeit der Zyklotronresonanz in einem realen Q2DEG.

Beim Füllfaktor  $\nu = 1$  ist ein vollkommen anderes Verhalten zu beobachten. Hier fällt die Linienbreite von höheren Füllfaktoren (niedrigen Magnetfeldern) kommend und ohne ein Maximum aufzuweisen bei  $\nu \approx 1$  mehr oder weniger abrupt ab, um dann vorerst einen nahezu konstanten Wert anzunehmen. Gleichzeitig ist eine signifikante Variation in der Zyklotronmasse zu beobachten, die sich in einem oftmals scharfen Einknicken der Zyklotronmasse nahe bei  $\nu = 1$  äußert [Ens87, Nic89]. Der Verlauf der Linienbreite widerspricht dabei dem einfachen Bild, nach welchem bei der Niveauvollfüllung aufgrund des Wegfalls der Intra-Landau-Niveaue Abschirmung und der damit verknüpften Inkompressibilität ein Maximum in der Resonanzbreite zu erwarten wäre. Auch die hervorstechende Massenvariation, die auf dem infolge der Nichtparabolizität mit zunehmendem Magnetfeld linearen Anstieg der Masse eine Absenkung darstellt, verhält sich gegenteilig zu dem Verlauf, der bei höheren ganzzahligen Füllfaktoren vorzufinden ist (siehe Abschnitt 5.3.4) und mit der Wirkung von Störstellen in Zusammenhang steht. In [Pee92, Wu,00] wurde gezeigt, daß die Ursache für die charakteristische Massenvariation bei  $\nu = 1$  im wesentlichen auf den Einfluß der Polaron-Kopplung und auf die für sie relevanten Besetzungseffekte (Pauli-Blockade) zurückzuführen ist.

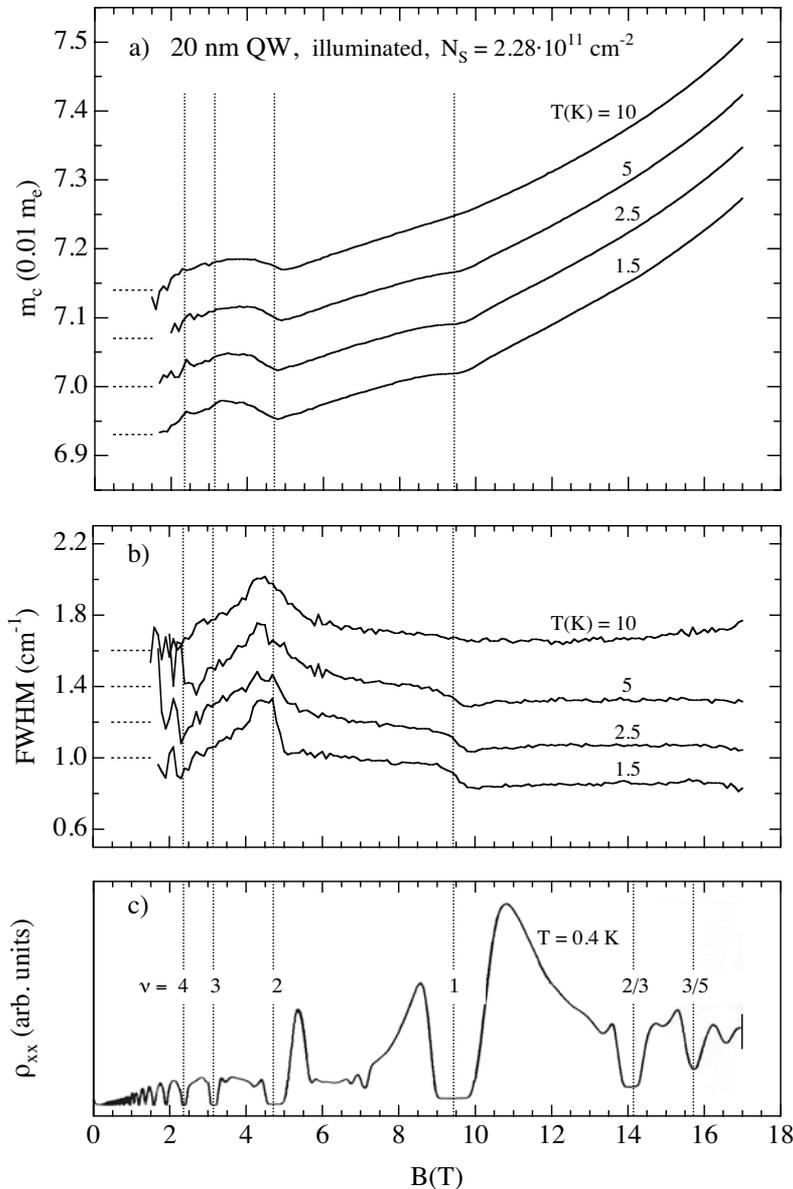
### 7.2.2 Probenabhängigkeit und Temperatureinfluß

Die Abbildungen 7.7, 7.8 und 7.9 zeigen die ausgewerteten Zyklotronmassen (Teilfiguren a)) und Linienbreiten (Teilfiguren b)) als Funktion des Magnetfeldes für drei unterschiedliche Dichten bei jeweils mehreren Temperaturen. Zur präzisen Bestimmung der Elektronendichte und des Füllfaktors sind jeweils die bei der  $L^3\text{He}$ -Temperatur gemessenen Magneto-Transportkurven (Teilfiguren c)) dargestellt. Die beiden ersten Figuren zeigen die Messungen an einem 20 nm-Quantentrog, bei dem die höhere Dichte durch Beleuchtung mit NIR-Strahlung eingestellt wurde und die dritte Figur für eine Einfachheterostruktur, die ebenfalls nach Beleuchtung vermessen wurde.

Die wesentlichen Merkmale der Auftragungen in Figur 7.7 wurden bereits im Vorfeld anhand der Figur 7.6 erläutert. Als neuer Aspekt geht aus der Darstellung die Temperaturentwicklung der Zyklotronmasse und der Linienbreite hervor. Man erkennt, wie die bei der vergleichsweise hohen Dichte deutlich ausgeprägten Strukturen um den Füllfaktor  $\nu = 1$  mit zunehmender Temperatur schwächer werden und schließlich nahezu vollständig verschwinden. Die Strukturen um  $\nu = 2$  hingegen werden mit zunehmender Temperatur zwar verschmiert. In ihrem Wesen jedoch bleiben sie vollständig erhalten.

In der Abbildung 7.8 sind die Ergebnisse für den identischen Quantentrog wie aus der Figur 7.7 allerdings im unbeleuchteten Zustand aufgezeigt. Hier weist insbesondere der Massenverlauf bei der entsprechend niedrigeren Dichte um  $\nu = 1$  die Strukturen, die bei der hohen Dichte auffällig hervortreten, lediglich in sehr schwacher Ausprägung auf. Zur Hervorhebung der schwachen Strukturen sind deshalb die gemessenen Verläufe mit einer gerechneten Vergleichskurve unterlegt. Auch hier wird im Teilbild b) der Eintritt in den Quantengrenzfall  $\nu = 1$  von einem Abfall in der Linienbreite begleitet. Im Gegensatz zur hohen Dichte allerdings weist hier die Linienbreite keine plateauartigen Bereiche auf und steigt mit abnehmendem Füllfaktor im Quantengrenzfall wieder an.

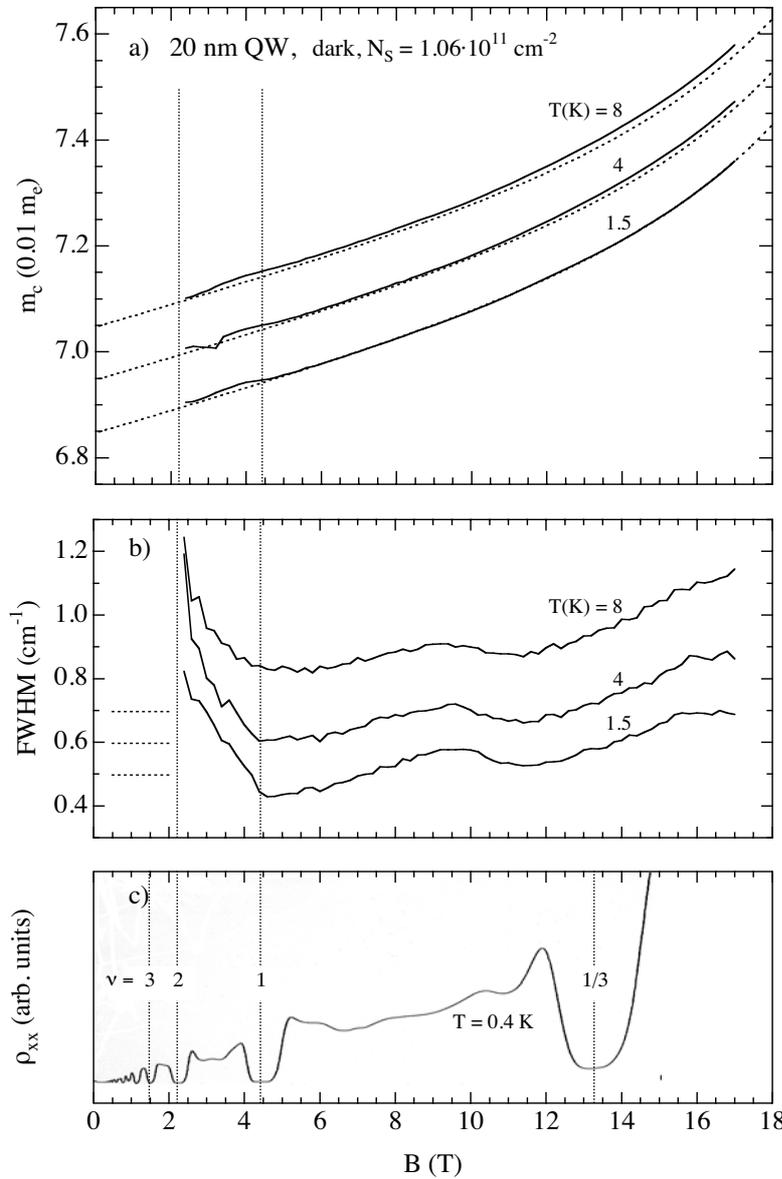
Zuletzt sind in der Abbildung 7.9 die Meßergebnisse für eine Einfachheterostruktur dargestellt. Deren Dichte liegt nur wenig oberhalb der des unbeleuchteten Quantentrogs. Dennoch weisen die Verläufe um  $\nu = 1$  und



**Abbildung 7.7:** Zyklotronmasse und Linienbreite eines 20 nm-Quantentroges als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. In den Teilfiguren a) und b) sind die Massen- bzw. Linienbreitenverläufe zur besseren Übersicht starr gegeneinander verschoben. Die wagrechten Linien deuten die Referenzniveaus und die senkrechten Linien die ausgezeichneten Füllfaktoren an. Aus der insitu-gemessenen Transportkurve in c) gehen unmittelbar die Füllfaktoren und damit die Elektronendichte hervor. Die vergleichsweise hohe Dichte wurde durch Beleuchtung mit NIR-Licht eingestellt. Die mit der Beleuchtung zusammenhängende hohe Beweglichkeit im Regime  $2 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  wird durch die deutliche Ausprägung der Minima in  $\rho_{xx}$  bei den fraktionellen Füllfaktoren  $\nu = 2/3$  und  $\nu = 3/5$  belegt.

$\nu = 2$  abgesehen von der schwächeren Ausprägung qualitativ die gleichen Besonderheiten auf, wie sie bereits am beleuchteten Quantentrog mit annähernd doppelter Dichte diskutiert wurden. Zusätzlich treten für  $\nu < 1$  aufgrund der niedrigen Subband-Abstände parasitäre Resonanzkopplungen zwischen der Subband- und der Landau-Quantisierung (RSLLC) auf, die auf einer nur bedingt vermeidbaren Mißorientierung zwischen der Probenormalen und der Magnetfeldachse beruhen. Sie sind für die hier durchgeführten Betrachtungen nicht weiter von Belang.

Die qualitative Übereinstimmung der Massen- und Linienbreitenverläufe um  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  der im Aufbau und der Elektronendichte sehr verschiedenen Proben aus den Figuren 7.7 und 7.9, die beide jeweils mit NIR-Licht beleuchtet wurden und infolge dessen außergewöhnlich hohe Beweglichkeiten aufweisen, legt nahe, daß die Zyklotronresonanz hochbeweglicher und auf GaAs-basierender Q2DEG sich im betrachteten Dichteregime weitgehend universell verhält. Einer detaillierten Untersuchung der Zyklotronresonanz um  $\nu = 1$  sind die folgenden Abschnitte gewidmet.

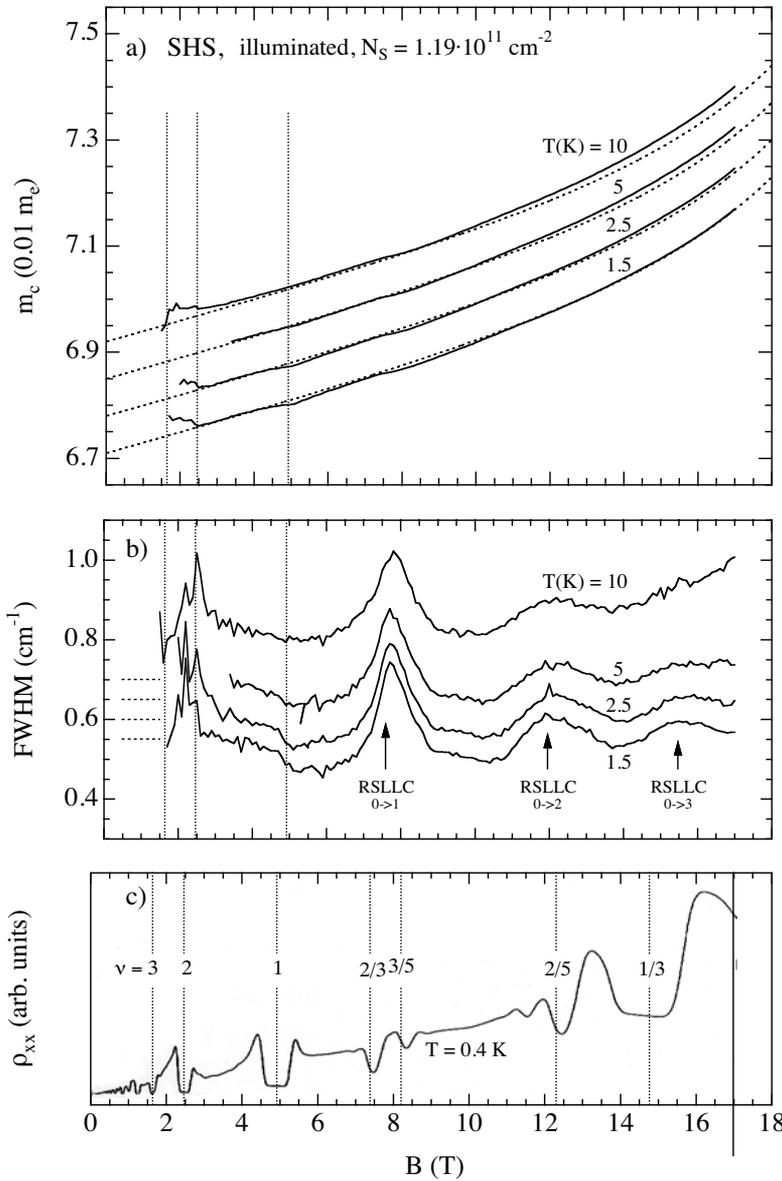


**Abbildung 7.8:** Zyklotronmasse und Linienbreite eines 20 nm-Quantentrogtes als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. In den Teilfiguren a) und b) sind die Massen- bzw. Linienbreitenverläufe zur besseren Übersicht starr gegeneinander verschoben. Die gestrichelten Kurven in a) und die wagrechten Linien in b) dienen zur Orientierung. Der gerechnete Massenverlauf basiert auf einem einfachen Polaron-Modell und wurde visuell an den Verlauf der niedrigsten Temperatur angepaßt. Die senkrechten Linien markieren die ausgezeichneten Füllfaktoren. Aus der insitugemessenen Transportkurve in c) gehen unmittelbar die Füllfaktoren und damit die Elektronendichte hervor. Die Probe wurde im unbeleuchteten Zustand bei der intrinsischen Elektronendichte vermessen. Ihre Beweglichkeit liegt im Regime  $1 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ .

### 7.2.3 Massenrenormierung und Polaron-Kopplung um $\nu = 1$

In Abschnitt 4.3 wurde bereits ausführlich die Bedeutung der Polaron-Kopplung zwischen dem Elektronengas und den polaren Gitterschwingungen in Bezug auf die Zyklotronresonanz dargelegt. Insbesondere wurde dabei die Rolle von Besetzungseffekten, die sich in einer Pauli-Blockade der virtuellen Emissionsübergänge und damit der Polaron-Renormierung manifestieren, herausgearbeitet. Entsprechend den theoretischen Vorhersagen wird die Pauli-Blockade mit Eintritt in die magnetischen Quantengrenzfälle  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  schrittweise aufgehoben. Insbesondere tritt dabei um  $\nu = 1$  für den Fall, daß der Spin in den Niveaubesetzungen aufgelöst wird, eine ausgeprägte und charakteristische Massenvariation zutage, die zumindest qualitativ die experimentellen Verläufe, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, erklärt.

Als Basis für die weiteren Analysen wird im folgenden zunächst das im Abschnitt 4.1.2.2 vorgestellte Modell von Wu, Peeters und Devreese zur Polaron-Zyklotronresonanz für  $\nu < 2$  bei ausschließlicher Besetzung des untersten Landau-Niveaus mit Landau-Index  $n = 0$  näher betrachtet. Für die hier relevanten Magnetfelder



**Abbildung 7.9:** Zyklotronmasse und Linienbreite einer Einfachheterostruktur als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Temperaturen. In den Teilfiguren a) und b) sind die Massen- bzw. Linienbreitenverläufe zur besseren Übersicht starr gegeneinander verschoben. Die gestrichelten Kurven in a) und die wagrechten Linien in b) dienen zur Orientierung. Der gerechnete Massenverlauf basiert auf einem einfachen Polaron-Modell und wurde visuell an den Verlauf der niedrigsten Temperatur angepaßt. Die senkrechten Linien markieren die ausgezeichneten Füllfaktoren. Aus der insitugemessenen Transportkurve in c) gehen unmittelbar die Füllfaktoren und damit die Elektronendichte hervor. Die Probe wurde nach Bestrahlung mit NIR-Licht vermessen. Ihre Beweglichkeit liegt im Regime  $4 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ , was durch die sehr gut ausgeprägten Minima in  $\rho_{xx}$  bei den Füllfaktoren  $\nu = 1/3$ ,  $\nu = 2/5$ ,  $\nu = 2/3$  und  $\nu = 3/5$  belegt wird.

und Temperaturen trifft durchweg das Regime der nicht-resonanten Polaron-Kopplung zu. In diesem Regime kann die Frequenz  $\omega$  in der Memoryfunktion 4.57 in guter Näherung durch die Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  ersetzt werden. Separiert man anschließend entsprechend der Gleichung 4.55 die Renormierung der Zyklotronfrequenz infolge der Polaron-Kopplung in einen nicht-resonanten Beitrag  $\Delta\omega_{c,pol}^{(non-res)}(\sigma)$  und einen resonanten Beitrag  $\Delta\omega_{c,pol}^{(res)}(\sigma)$ , so ergeben sich für die beiden Beiträge die näherungsweise Ausdrücke

$$\Delta\omega_{c,pol}^{(non-res)}(\sigma) \approx \alpha \sum_{n'=1} \frac{(\omega_c \omega_{LO})^{3/2}}{\omega_{LO} + n'\omega_c} \left[ \frac{1}{\omega_{LO} + (n'+1)\omega_c} - \frac{1}{\omega_{LO} + (n'-1)\omega_c} \right] M_{0,n'} \quad (7.39)$$

und

$$\Delta\omega_{c,pol}^{(res)}(\sigma) \approx \alpha (\omega_c \omega_{LO})^{3/2} \left[ \frac{1}{\omega_{LO} + \omega_c} - \frac{1}{\omega_{LO} - \omega_c} \right] M_{0,0} [1 - \nu_{0,\sigma}] \quad (7.40)$$

Nach dieser Zerlegung hängt für  $\nu < 2$  lediglich der resonante Beitrag explizit von den Spinbesetzungen

$\nu_{0,\sigma}$  ab. Der nicht-resonante Beitrag hingegen ist von den Niveaufüllungen vollkommen unabhängig. Die Unterschiede in den Übergangsenergien aufgrund der Nichtparabolizität sind hierbei generell vernachlässigbar und  $\omega_c$  bezeichnet die über die beiden Spineinstellungen gemittelte Zyklotronfrequenz. Die Matrixelemente  $M_{n,n'}$  der polaronischen Memoryfunktion lauten unter Berücksichtigung der statischen Abschirmung für die Elektron-Phonon-Wechselwirkung [Wu,86a, Wu,87b, Wu,87a]

$$M_{n,n'} = \frac{1}{2^{3/2}} \int_0^\infty dx x^2 \left[ \frac{x}{x + \bar{x}_{TF}(x)} \right]^2 [J_{n,n'}(x)]^2 F(x/l_m) . \quad (7.41)$$

Der Subband-Formfaktor  $F(q)$ , die Landau-Überlappfunktionen  $J_{n,n'}(x)$  und die effektive reziproke Thomas-Fermi-Abschirmlänge  $\bar{q}_{TF} = \bar{x}_{TF}/l_m$  wurden bereits im Abschnitt 7.1.2.2 und den vorausgehenden definiert. Im Quantengrenzfall und  $T \rightarrow 0$  K ist der Inter-Landau-Niveau-Beitrag zur Abschirmung unabhängig von den Spinbesetzungen und hat die Gestalt

$$\bar{x}_{TF}^{(Inter-LL)}(x) = l_m \frac{e^2 N_S}{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc}} F(x/l_m) \sum_{n' > 0} \frac{[J_{0,n'}(x)]^2}{n' \hbar \omega_c} . \quad (7.42)$$

Der Intra-Landau-Niveau-Beitrag zur Abschirmung ist generell schwierig quantitativ zu fassen und verschwindet aufgrund der Niveauvollbesetzung bei  $\nu = 2$  und auch bei  $\nu = 1$ , sofern der Spin bei entsprechend tiefen Temperaturen in den Niveaubesetzungen aufgelöst wird.

Aufgrund der Modenkopplung durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung ist im Regime der Dichten  $N_S < 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  experimentell nur eine einzelne Zyklotronresonanz ausmachbar. Diese Resonanz tritt im Quantengrenzfall  $\nu < 2$  nach den Ergebnissen aus dem Kapitel 5 bei einer mittleren Frequenz

$$\omega_c = \frac{1}{\nu_{0,+} + \nu_{0,-}} [\nu_{0,+} \omega_c(0, +) + \nu_{0,-} \omega_c(0, -)] \quad (7.43)$$

auf, die sich durch Mittelung über die mit den Besetzungen  $\nu_{0,\pm}$  gewichteten Zyklotronfrequenzen  $\omega_c(0, \pm)$  für die beiden Spineinstellungen  $\sigma = \pm(1/2)$  ergibt. Unter Berücksichtigung der Polaron-Beiträge 7.39 und 7.40 sowie der Nichtparabolizität entsprechend dem Abschnitt 2.6 lautet die mittlere Zyklotronfrequenz als Zyklotronmasse ausgedrückt

$$m_c(\nu, P) = m_0 + \Delta m_{c,np}^{(Landau)} + \Delta m_{c,np}^{(spin)}(P) + \Delta m_{c,pol}^{(non-res)} + \Delta m_{c,pol}^{(res)}(\nu, P) , \quad (7.44)$$

mit den Bandstrukturbeiträgen

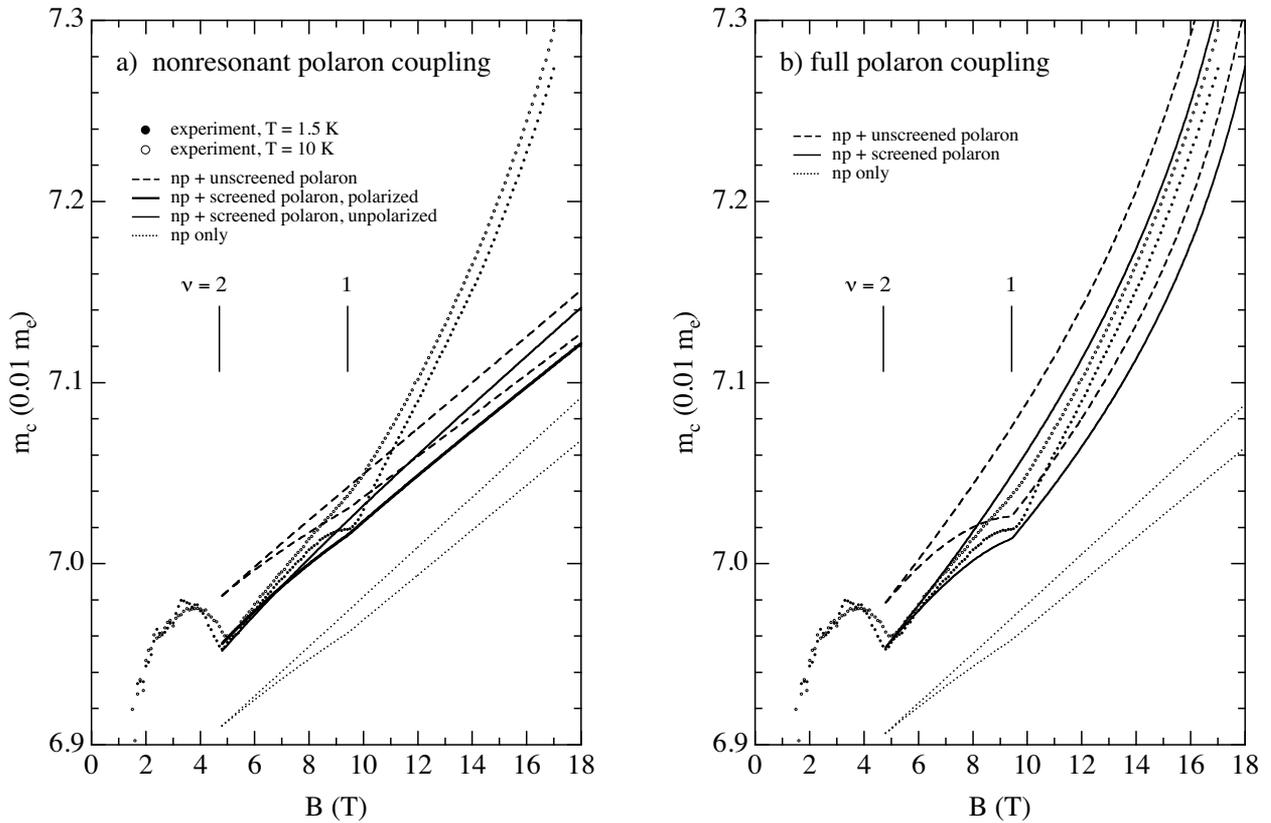
$$\Delta m_{c,np}^{(Landau)} \approx m_0 \frac{2\hbar\omega_c}{E_g^*} \quad (7.45)$$

und

$$\Delta m_{c,np}^{(spin)}(P) \approx -\frac{\gamma_1}{2} B P , \quad (7.46)$$

sowie den Polaron-Beiträgen

$$\Delta m_{c,pol}^{(non-res)} \approx m_0 \alpha \sum_{n'=1} \frac{(\omega_c \omega_{LO})^{3/2}}{\omega_{LO} + n' \omega_c} \left[ \frac{1}{\omega_{LO} + (n' - 1) \omega_c} - \frac{1}{\omega_{LO} + (n' + 1) \omega_c} \right] M_{0,n'} \quad (7.47)$$



**Abbildung 7.10:** Experimentelle und theoretische Polaron-Zyklotronmasse als Funktion des Magnetfeldes für einen hochbeweglichen 20 nm-Quantentrog. Die experimentellen Kurven sind als offene bzw. geschlossene Kreise dargestellt und die gerechneten Kurven als durchgezogene, gestrichelte sowie gepunktete Linien. Teilfigur a) zeigt die Anpassung an das Polaron-Modell gemäß der Gleichung 7.44 ohne und die Teilfigur b) mit Einbeziehung des resonanten Beitrags 7.48. Die durchgezogenen Linien beschreiben jeweils das vollständige Modell mit und die gestrichelten Kurven das reduzierte Modell ohne die Inter-Landau-Niveau-Abschirmung. Die gepunkteten Linien repräsentieren die zugrunde liegende Bandstruktur. Die jeweils oben liegenden der gerechneten Kurven repräsentieren den spinentarteten und die unten liegenden den maximal polarisierten Fall. Die Elektronendichte beträgt  $2.28 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und die weiteren den Anpassungen zugrunde liegenden Parameter sind im Text angegeben.

und

$$\Delta m_{c,pol}^{(res)}(\nu, P) \approx m_0 \alpha \sqrt{\omega_c \omega_{LO}} \left[ \frac{1}{\omega_{LO} - \omega_c} - \frac{1}{\omega_{LO} + \omega_c} \right] M_{0,0} \left[ 1 - \frac{\nu}{2} (1 + P^2) \right] . \quad (7.48)$$

Die Masse an der (Sub-)Bandkante ist darin mit  $m_0$  bezeichnet und der Spinaufspaltungsparameter  $\gamma_1 = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}_e \text{T}^{-1}$  ist in der Gleichung 2.112 definiert. In sämtlichen Massenbeiträgen sind die Partialfüllungen  $\nu_{0,+}$  und  $\nu_{0,-}$  durch den Gesamtfüllfaktor  $\nu = \nu_{0,+} + \nu_{0,-}$  und die Spinpolarisation

$$P = \frac{\nu_{0,+} - \nu_{0,-}}{\nu} \quad (7.49)$$

ausgedrückt.

Die Anpassung des beschriebenen Modells an den experimentellen Massenverlauf des Quantentrogas aus

Abbildung 7.7 erfolgt in zwei Stufen, die in der Figur 7.10 illustriert sind:

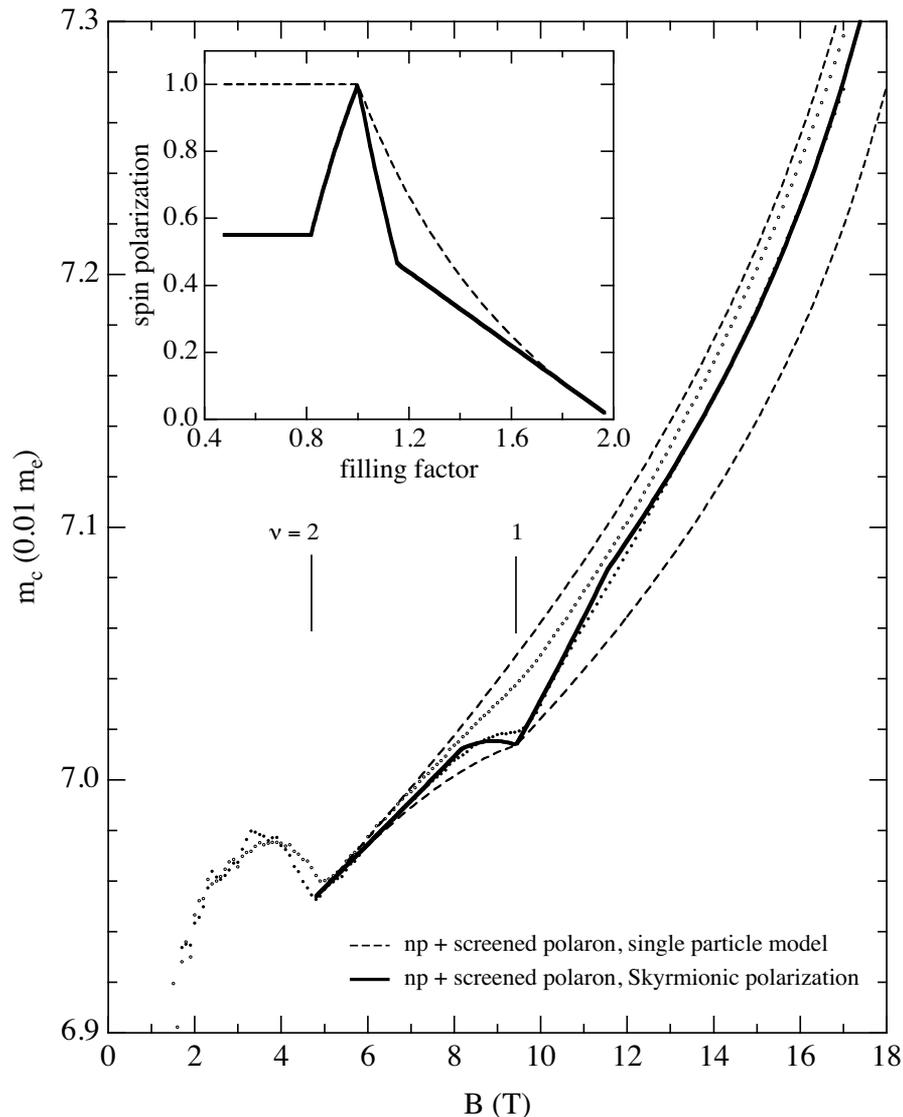
In der ersten Stufe wird dem Umstand Rechnung getragen, daß bei den Füllfaktoren  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  sowohl der resonante Polaron-Beitrag als auch die Intra-Landau-Niveau-Abschirmung identisch verschwinden. Daraus resultiert die in der Teilfigur a) gezeigte Anpassung. Von den dargestellten theoretischen Kurven entspricht die dick hervorgehobene dem Massenverlauf für ein maximal spinpolarisiertes System, bei dem die Leitungsband-Nichtparabolizität und die nicht-resonante Polaron-Korrektur unter Einbeziehung des Inter-Landau-Niveau-Beitrags zur Abschirmung berücksichtigt sind. Der endlichen Ausdehnung der Subband-Wellenfunktion wird hierbei durch Verwendung des Formfaktors 4.28 mit einer Trogbreite  $d_w = 20$  nm Rechnung getragen. Die Parameter der Elektron-Phonon-Kopplung  $\alpha = 0.065$  und  $\omega_{LO} = 295$  cm<sup>-1</sup> wurden aus der Anpassung bei hohen Temperaturen entnommen (siehe Tabelle 4.1) und die Masse an der Bandkante  $m_0^*$  und die effektive Lücke  $E_g^* = 1700$  meV wurden derart gewählt, daß der gerechnete Verlauf die experimentellen Massenwerte bei  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  für die niedrige Temperatur  $T = 1.5$  K wiedergibt. Für den Spinaufspaltungparameter  $g_1 = 0.0105$  T<sup>-1</sup> wurde der Wert von Volumen-GaAs herangezogen. An dieser Stelle ist anzumerken, daß die auf diese Weise ausgewertete effektive Lücke  $E_g^* = 1700$  meV sehr gut mit derjenigen zusammenfällt, die aus der Auswertung der bei den ungeraden Füllfaktoren  $\nu = 3, 5, 7$  bei hohen Dichten aufgespaltenen Zyklotronresonanzen in Abschnitt 5.3.2 ermittelt wurde. Dabei zeigen entsprechende Berechnungen, daß die Linienaufspaltung bei diesen Füllfaktoren kaum von der Polaron-Renormierung beeinflusst wird und dort im wesentlichen die unmaskierte Nichtparabolizität der Bandstruktur zutage tritt.

In der zweiten Stufe wird die resonante Polaron-Massenkorrektur berücksichtigt. Die Teilfigur b) zeigt dazu die gerechneten Verläufe, die sich bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen ergeben. Bemerkenswert ist zunächst, daß die beiden durchgezogenen Kurven, welche die beiden Grenzszenarien des maximal spinpolarisierten (obere Kurve) und des vollständig unpolarisierten Systems (untere Kurve) beschreiben, die beiden experimentellen Verläufe auffallend gut einhüllen. Speziell der experimentelle Massenverlauf für die höhere Temperatur  $T = 10$  K, bei der eine weitgehende Spinentartung zu erwarten ist, wird von dem bei kompletter Spinentartung gerechneten Verlauf sehr gut beschrieben. Zum Vergleich zeigen die beiden gestrichelt eingezeichneten Kurven die entsprechenden theoretischen Polaron-Zyklotronmassen bei verschwindender Abschirmung. In diesem Fall ist die Polaron-Zyklotronmasse ganz generell gegenüber der Bandstruktur-Zyklotronmasse (gepunktete Linien) zu noch höheren Werten hin verschoben, wobei die Massendifferenz zwischen dem maximal polarisierten und dem spinentarteten Fall bei  $\nu = 1$  gegenüber der Polaron-Masse mit abgeschirmter Elektron-Phonon-Wechselwirkung einen nahezu verdoppelten Wert aufweist.

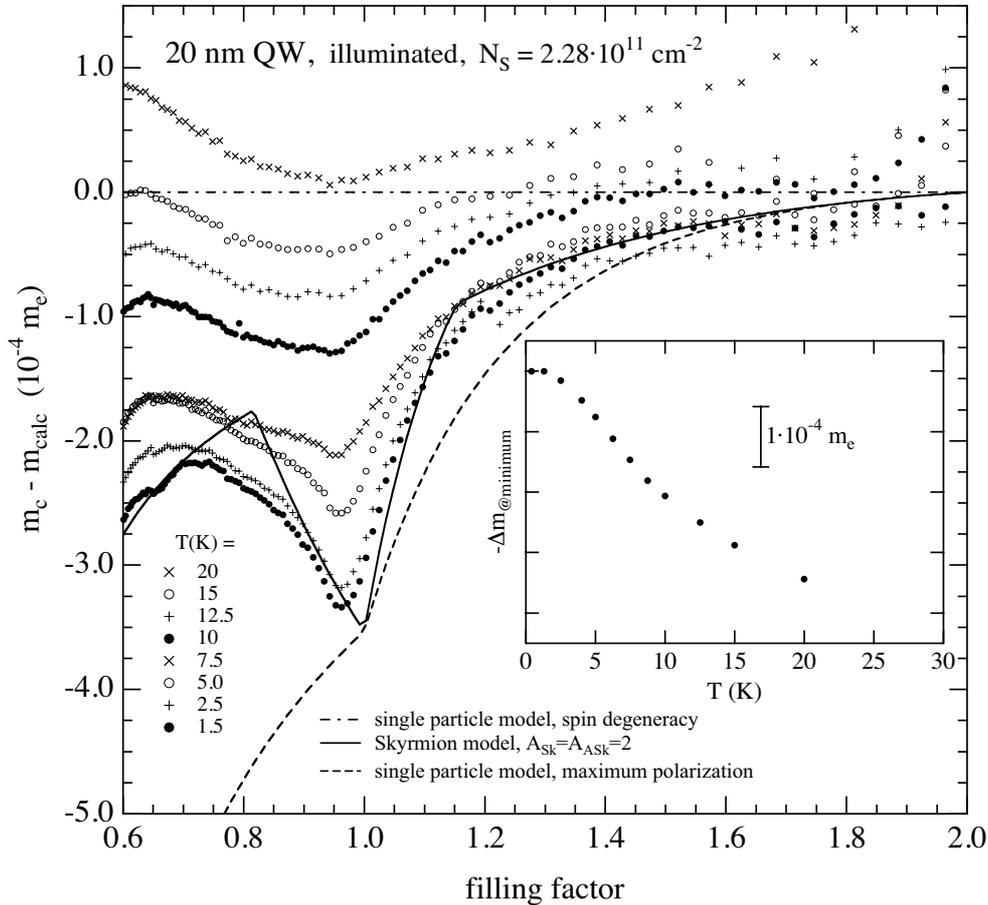
Insgesamt kann man anhand der in Abbildung 7.10 b) gezeigten Anpassungen feststellen, daß sich die Abweichungen der Zyklotronmasse in hochbeweglichen Q2DEG von dem durch die Nichtparabolizität vorgegebenen Verlauf sowohl qualitativ und, wie sich im folgenden Abschnitt noch zeigen wird, auch weitgehend quantitativ durch die Polaron-Kopplung erklären lassen. Dabei spielen bei tiefen Temperaturen sowohl die Besetzungseffekte wie auch die Abschirmung der Elektron-Phonon-Wechselwirkung bedeutende Rollen. Die Aufklärung der Diskrepanzen, die noch zwischen den experimentellen und den gerechneten Massenverläufen bei sehr tiefen Temperaturen  $T < 2$  K existieren, erfolgt im nächsten Abschnitt und bezieht den Aspekt der Skyrmion-Formation in die Betrachtungen mit ein. Die größte Diskrepanz manifestiert sich in der Teilfigur 7.10 b) in Form einer ungewöhnlich schnellen Relaxation des gemessenen Massenverlaufs bei der Temperatur  $T = 1.5$  K von dem Wert  $m_c(\nu = 1)$  hin zum Verlauf des unpolarisierten Systems, die zu beiden Seiten von  $\nu = 1$  auftritt.

### 7.2.4 Manifestation der Skyrmion-Formation in der Polaron-Zyklotronmasse

Wie im Abschnitt 7.1.6 ausführlich erläutert wurde, weist eine Reihe experimenteller Befunde darauf hin, daß sich auf dem Grundzustand mit  $\nu = 1$  bei kleinen Zeeman-Lücken spezielle Quasiteilchen-Anregungen ausbilden. Bei diesen Quasiteilchen wird ein Elektron ( $\nu > 1$ ) bzw. ein Loch ( $\nu < 1$ ) von einer Spintextur (Skyrmion bzw. Antiskyrmion) begleitet. Die hervorstechende Eigenschaft eines Gases solcher Quasiteilchen (Skyrmionen) bzw. Quasilöcher (Antiskyrmionen) manifestiert sich in einem mit der Besetzungsabweichung  $\Delta\nu = |\nu - 1|$  sehr schnell und weitgehend symmetrisch zu  $\nu = 1$  erfolgenden Abbau der Spinpolarisation, der im Einteilchen-Bild (hier einschließlich der HFA und SHFA) nicht erklärt werden kann.



**Abbildung 7.11:** Anpassung des Modells der Skyrmionischen Polaron-Zyklotronmasse an die experimentellen Daten für einen 20 nm-Quantentrog. Die Symbole kennzeichnen die gemessenen Werte und die Linien die berechneten Verläufe. Die gestrichelten Kurven markieren die Einteilchen-Grenzfälle mit maximaler (unten) und verschwindender (oben) Polarisation und die fette volle Linie das Skyrmionische Modell, dessen Polarisation im Inset dargestellt ist. Die verwendeten Modell-Parameter entsprechen denen der Figur 7.10.



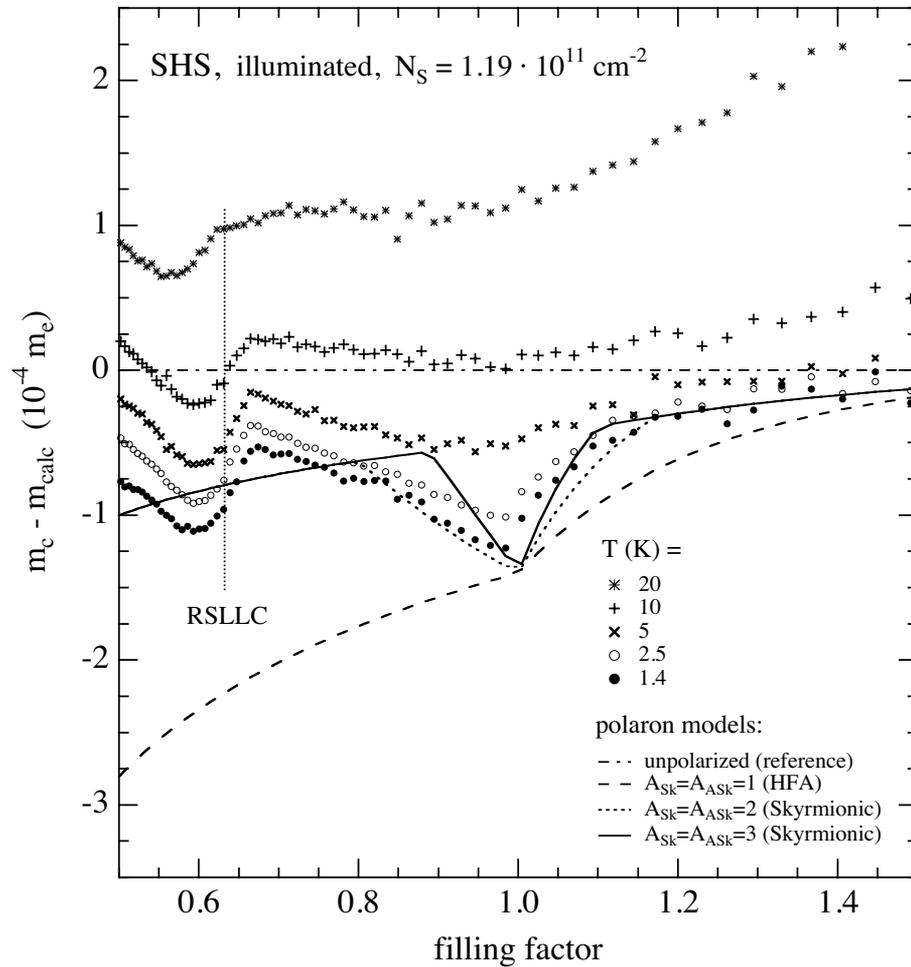
**Abbildung 7.12:** Experimentelle und theoretische Variation der Zyklotronmasse als Funktion des Füllfaktors um  $\nu = 1$  für einen 20 nm-Quantentrog. Dargestellt ist jeweils die Massendifferenz gegenüber dem theoretischen Verlauf für den spinentarteten Fall. Die Symbole kennzeichnen die experimentellen Werte und die durchgezogenen Kurven die gerechneten Polaron-Zyklotronmassen für die bereits in der Abbildung 7.50 vorgestellten Modelle. Im Insert ist der Betrag der Massenabsenkung im Minimum bei  $\nu \approx 1$  als Funktion der Temperatur aufgetragen. Die Parameter der Anpassung lauten:  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.065$ ,  $m_0^* = 0.0684 m_e$ ,  $E_g^* = 1700 \text{ meV}$ ,  $g_0 = -0.44$ ,  $g_1 = 0.0105 \text{ T}^{-1}$  und Trogbreite  $d_w = 20 \text{ nm}$ .

Die Skyrmion-Formation kann vergleichsweise leicht in das Modell der Polaron-Zyklotronmasse einbezogen werden, indem man in der resonanten Massenkorrektur 7.48 den Ausdruck 7.37 für die Spinpolarisation um  $\nu = 1$  berücksichtigt. Um eine Anpassung eines solchen Modells an die Zyklotronmasse im gesamten Füllfaktorbereich  $0 < \nu < 2$  vornehmen zu können, wird die Spinpolarisation  $S(\nu)$  mit Rücksicht auf den experimentell gemessenen Verlauf in der Abbildung 7.4 durch die modifizierte Form

$$P(\nu) = \begin{cases} \max \{ P_{Sk/ASk}(\nu), (2 - \nu) P_0 \} & , \quad 1 < \nu < 2 \\ \max \{ P_{Sk/ASk}(\nu), P_0 \} & , \quad \nu \leq 1 \end{cases} \quad (7.50)$$

modelliert. Darin steht  $P_0$  für einen phänomenologischen Plateauwert, in den die Spinpolarisation im extremen Quantenlimit einmündet. Ein solcher Verlauf ist im Insert der Abbildung 7.11 gezeigt.

Die Anpassung des infolge der (Anti-)Skyrmion-Formation modifizierten Modells für die Polaron-Zyk-



**Abbildung 7.13:** Experimentelle und theoretische Variation der Zyklotronmasse als Funktion des Füllfaktors um  $\nu = 1$  für eine hochbewegliche Einfachheterostruktur. Dargestellt ist jeweils die Massendifferenz gegenüber einem glatten berechneten Verlauf. Die Symbole kennzeichnen die experimentellen Werte und die durchgezogenen Kurven die gerechneten Polaron-Zyklotronmassen für zwei Skyrmion-Modelle. Die Parameter der Anpassung lauten:  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.085$ ,  $m_0^* = 0.06687 m_e$ ,  $E_g^* = 1700 \text{ meV}$ ,  $g_0 = -0.44$ ,  $g_1 = 0.0105 \text{ T}^{-1}$  und effektive Fang-Howard-Verarmungsdichte  $N^* = N_{dep} + \frac{11}{32} N_S = 8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ .

lotronmasse an die bereits in der Abbildung 7.10 vorgestellten Daten geht aus der Darstellung 7.11 hervor. Die gestrichelten Verläufe beschreiben darin die theoretische Polaron-Zyklotronmasse für die Einteilchen-Grenzszenerarien entsprechend dem vorausgehenden Abschnitt. Die dazwischen verlaufende fett gezeichnete Kurve gibt die Anpassung an die experimentellen Daten für  $T = 1.5 \text{ K}$  wieder, der das beschriebene Skyrmionische Modell mit den Parametern  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2$  und  $P_0 = 0.55$  zugrunde liegt. In der Berechnung sind sowohl die Inter-Landau-Niveau-Abschirmung und der Subband-Formfaktor der LO-Phonon-Kopplung als auch die Bandstruktur-Nichtparabolizität berücksichtigt. Die offensichtlich gute Übereinstimmung zwischen dem theoretischen Modell und dem Experiment wird in der Auftragung 7.12 noch deutlicher. Hier sind zur Hervorhebung der interessierenden Struktur um  $\nu = 1$  jeweils die Differenzen  $\Delta m_c(\nu) = m_{c,exp}(B(\nu)) - m_{c,calc}(B(\nu))$  zwischen dem experimentellen Massenverlauf und dem für die Spinartung gerechneten Verlauf als Funktion des Füllfaktors gezeigt. Wiederum sind die Massenverläufe für die maximale Polarisierung und die Spinartung als Referenzen eingetragen, wobei gemäß der gewählten Darstellung die Nulllinie den letz-

teren Fall repräsentiert. Wie man erkennt, wird die in dieser Auftragung bei tiefen Temperaturen als Minimum hervortretende Massenvariation sehr gut durch die berechnete Kurve approximiert. Sie unterscheidet sich weiterhin substantiell von den beiden Einteilchen-Grenzfällen. Auch quantitativ stimmt die Höhe des Masseneinbruchs gut mit der theoretischen Vorhersage überein, auch wenn das experimentelle Minimum nicht exakt beim Füllfaktor  $\nu = 1$  zu finden, sondern leicht zu niedrigeren Füllfaktoren hin verschoben ist. Eine derartige Verschiebung kann der Wirkung von extrinsischen Einflüssen wie Störstellen und Inhomogenitäten zugeschrieben werden, die nur schwierig zu erfassen sind. Die Güte der Anpassung läßt weiterhin darauf schließen, daß dem hier vernachlässigten Intra-Landau-Niveau-Beitrag zur Abschirmung keine bedeutende Rolle zukommt. Das mag unter anderem darin begründet sein, daß die Abschirmung über (Anti-)Skyrmionen aufgrund ihrer räumlich weit ausgedehnten Ladungsverteilungen zumindest bei größeren Wellenvektoren deutlich gegenüber derjenigen durch Elektronen (Löcher) reduziert ist, die im Abschnitt 7.1.2 beschrieben wurde.

Aus der Figur 7.12 geht weiterhin die thermische Entwicklung der Zyklotronmasse bis zu einer Temperatur  $T = 20$  K hervor. Die Zunahme der Temperatur führt dabei, wie es bereits im Vorfeld diskutiert wurde, zu einer weitgehenden Auslöschung des Minimums. Dabei wird die Nulllinie bei der höchsten Temperatur überschritten und es bleibt auch eine wannenförmige Einbuchtung im Verlauf erhalten, die von einer nur unvollständigen thermischen Aufhebung der Spinpolarisation zeugt. Das Insert der Figur schließlich zeigt die Entwicklung des Betrages der Massenabsenkung im Minimum als Funktion der Temperatur. Diese Auftragung vermittelt einen Eindruck über die thermische Stabilität des polarisierten Grundzustandes bei  $\nu = 1$ . Qualitativ stimmt der funktionale Verlauf der Massenabsenkung gut mit einem Verhalten überein, das experimentell in [Bar95, Gol96] für die Spinpolarisation gemessen wurde und zum Vergleich in der Figur 7.5 dargestellt ist.

Zur Untermauerung der vorgestellten Befunde zeigt die Figur 7.13 eine analoge Auswertung für die in der Abbildung 7.10 gezeigten Zyklotronmassen einer hochbeweglichen Einfachheterostruktur. Dieses System weist verglichen mit dem Quantentrog eine fast um die Hälfte geringere Dichte und, was die Linienbreitenvariationen infolge der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) belegen, extrem niedrige Subband-Abstände auf. Wiederum sind die experimentellen Daten mit Anpassungen unterlegt. Die Parameter des zugrunde liegenden Skyrmion-Modells lauten für die beiden gerechneten Verläufe  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2$  bzw.  $A_{Sk} = A_{ASk} = 3$  mit  $P_0 = 0.5$ . Die Anpassungen geben jeweils eine der beiden Flanken des experimentellen Verlaufs der niedrigsten Temperatur gut wieder. Deshalb kann hier keine eindeutige Festlegung auf die Anzahl der in einer Spintextur gegenüber dem  $\nu = 1$ -Grundzustand umgekehrten Spins erfolgen. Hervorzuheben ist jedoch wiederum die gute quantitative Übereinstimmung zwischen der Theorie und dem Experiment, was die Höhe des Masseneinbruchs bei  $\nu = 1$  anbelangt. Vergleicht man die Fröhlich-Kopplungskonstanten  $\alpha$  und die effektiven Lücken  $E_g^*$  der Heterostruktur und des Quantentrogs, die jeweils in den Bildbeschriftungen angegeben sind, so kann man Unterschiede feststellen. Allerdings ist zu bedenken, daß aufgrund der sehr niedrigen Subband-Abstände die Intersubband-Abschirmung, welche in den Rechnungen nicht berücksichtigt ist, in der Heterostruktur eine nicht unerhebliche Rolle spielt. Diese kann zusammen mit Unzulänglichkeiten der Fang-Howard-Approximation für den Subband-Formfaktor als mögliche Ursache für die Abweichungen in den Parametern gegenüber dem Quantentrog verantwortlich sein.

Zusammenfassend sind in der Zyklotronfrequenz hochbeweglicher Q2DEG starke Indizien für die Ausbildung von Spintexturen auf dem  $\nu = 1$ -Quanten-Hall-Zustand ausmachbar. Diese treten indirekt über die Besetzungseffekte der Polaron-Kopplung zutage und können unter Einbeziehung der Inter-Landau-Niveau-Abschirmung auch weitgehend quantitativ beschrieben werden.

### 7.2.5 Auswertung der Spinpolarisation um $\nu = 1$

Im vorausgehenden Abschnitt wurde belegt, daß die charakteristische Variation in der Zyklotronmasse um  $\nu = 1$  mit dem für die Skyrmion-Formation typischen Verhalten der Spinpolarisation erklärt werden kann. Es ist nun naheliegend einen Schritt weiter zu gehen und die Spinpolarisation direkt aus der Zyklotronmasse zu extrahieren.

Gemäß den Gleichungen 7.44 bis 7.48 kann die (mittlere) Zyklotronmasse  $m_c(\nu, P)$  in die Form

$$m_c(\nu, P) = m_c(\nu, P = 0) - A_{pol}(\nu) P^2 - A_{np} P \quad (7.51)$$

mit den Parametern

$$A_{pol}(\nu) = \frac{\nu}{2} m_0 \alpha \sqrt{\omega_c \omega_{LO}} \left[ \frac{1}{\omega_{LO} - \omega_c} - \frac{1}{\omega_{LO} + \omega_c} \right] M_{0,0} \quad (7.52)$$

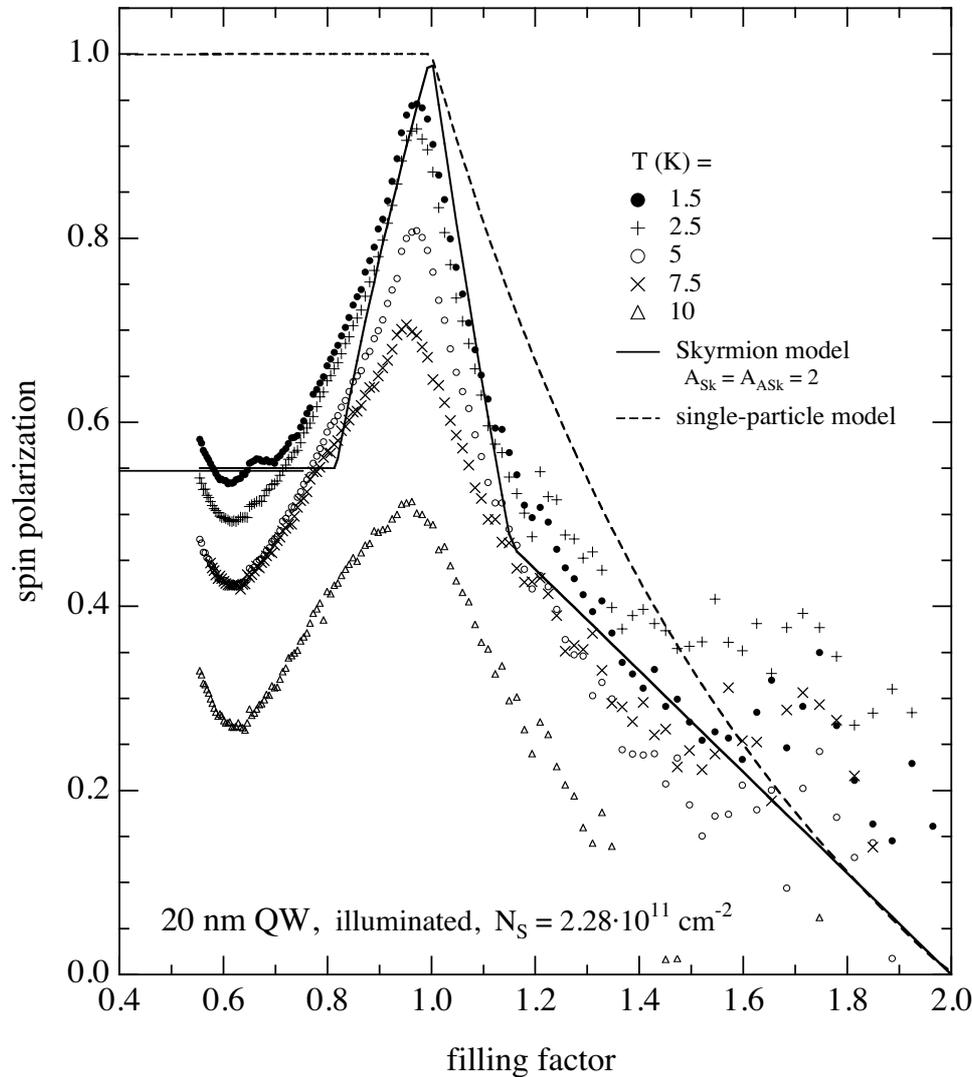
und

$$A_{np} = \frac{\gamma_1}{2} B \quad (7.53)$$

überführt werden. Die darin auftretenden Größen sind im Abschnitt 7.2.3 angegeben. Gemäß dieser Binomform ergibt sich die experimentelle Spinpolarisation  $P^{(exp)}$  aus der gemessenen Zyklotronmasse  $m_c^{(exp)}$  über die Berechnungsvorschrift

$$P^{(exp)} = \frac{A_{np}}{2A_{pol}} \left[ \sqrt{A_{np}^2 - 4A_{pol} \left[ m_c^{(exp)} - m_c(\nu, P = 0) \right]} - 1 \right] . \quad (7.54)$$

Die Abbildung 7.14 zeigt die entsprechend der Gleichung 7.54 ausgewertete Spinpolarisation für den hochbeweglichen 20 nm-Quantentrog, dessen Massenadjustierungen bereits in den Figuren 7.11 und 7.12 ausführlich dargelegt wurden. Wie man an der Auftragung erkennt, zeigt die Spinpolarisation zumindest für die tiefen Temperaturen ein Verhalten, wie es auch in optischen Experimenten [Aif96, Gol96] und NMR-Experimenten [Bar95] beobachtet wird. Für Temperaturen  $T > 10$  K ist die Auswertung der Spinpolarisation allerdings problematisch. Das liegt daran, daß die Massenverläufe insgesamt, wie man anhand der Abbildung 7.12 erkennt, mit steigender Temperatur infolge thermischer Aktivierung zunehmend zu höheren Werten hin verschoben. Dadurch wird die Auswertung der Spinpolarisation nicht nur verfälscht, sondern für den Fall, daß die experimentelle Masse die theoretische Masse  $m_c(\nu, P = 0)$  übersteigt und das Argument der Wurzel in Gleichung 7.54 negativ wird, generell unmöglich. Eine Erklärung für den thermisch aktivierten Massenanstieg über den durch die Polaron-Renormierung und die Nichtparabolizität vorgegebenen Rahmen hinaus kann durch die lokalisierende Wirkung des Störstellen-Hintergrundpotentials erklärt werden. Dieser Aspekt wird im unmittelbar folgenden Abschnitt noch im Detail behandelt und beruht auf der thermischen Freisetzung der Ladungsträger aus den Potentialminima mit vorwiegend positiven lokalen Krümmungen bei höheren Temperaturen. Infolge einer solchen Freisetzung nimmt die vom Elektronengas im Mittel wahrgenommene Potentialkrümmung, die gemäß den Betrachtungen aus den Abschnitten 5.2.2.4 und 5.3.4 eine Erhöhung der Zyklotronfrequenz bewirkt, mit ansteigender Temperatur ab. Dadurch wird die bei  $T = 0$  maximale Blauverschiebung der Zyklotronfrequenz aufgrund der Störstellen mit steigender Temperatur zunehmend geringer. Infolge dessen steigt die Zyklotronmasse mit der Temperatur insgesamt an, was das beobachtete Verhalten tendenziell erklärt.



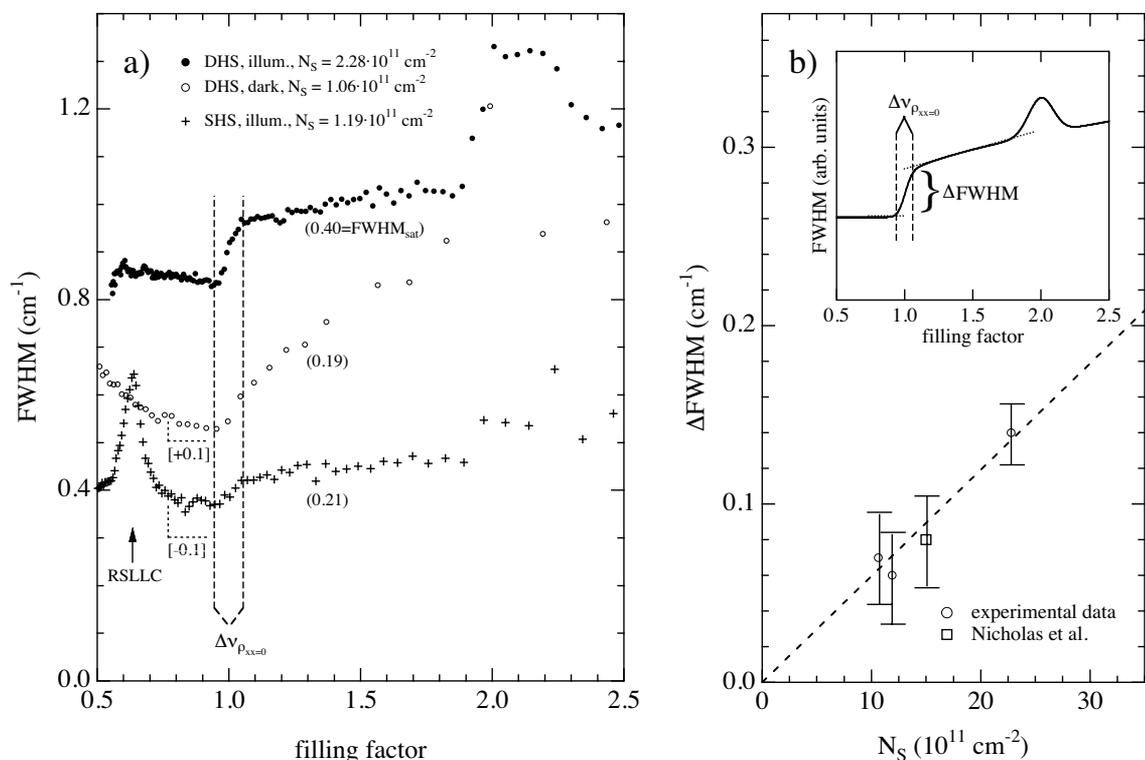
**Abbildung 7.14:** Aus der Zyklotronresonanz ausgewertete Spinpolarisation im Quantengrenzfall  $\nu < 2$ . Die Symbole kennzeichnen die ausgewertete Spinpolarisation als Funktion des Füllfaktors für jeweils verschiedene Temperaturen und die durchgezogenen Kurven die gerechneten Modellverläufe. Die Parameter der Anpassung lauten:  $\omega_{LO} = 295 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.065$ ,  $m_0^* = 0.0684 m_e$ ,  $E_g^* = 1700 \text{ meV}$ ,  $g_0 = -0.44$ ,  $g_1 = 0.0105 \text{ T}^{-1}$  und Trogbreite  $d_w = 20 \text{ nm}$ .

Zusammenfassend wurde gezeigt, daß die Spinpolarisation eines Q2DEG im Quantengrenzfall  $\nu < 2$  bei sehr tiefen Temperaturen  $T < 10 \text{ K}$  aus der Zyklotronresonanz extrahiert werden kann. Eine solche Auswertung setzt jedoch einerseits eine hinreichende Probenbeweglichkeit derart voraus, daß die extrinsischen Einflüsse (Störstellen) die intrinsischen Einflüsse (Nichtparabolizität und Polaron-Kopplung) nicht überdecken. Andererseits müssen insbesondere die Parameter der Polaron-Kopplung (Abschirmung und Subband-Formfaktoren) hinreichend gut definiert sein. Diese Voraussetzung ist bei engen Quantentrögen besonders gut erfüllt, da in diesen Systemen, im Gegensatz zu Einfachheterostrukturen, die Effekte der elektrischen Subband-Struktur aufgrund der dort vorliegenden großen Subband-Abstände keine Rolle spielen.

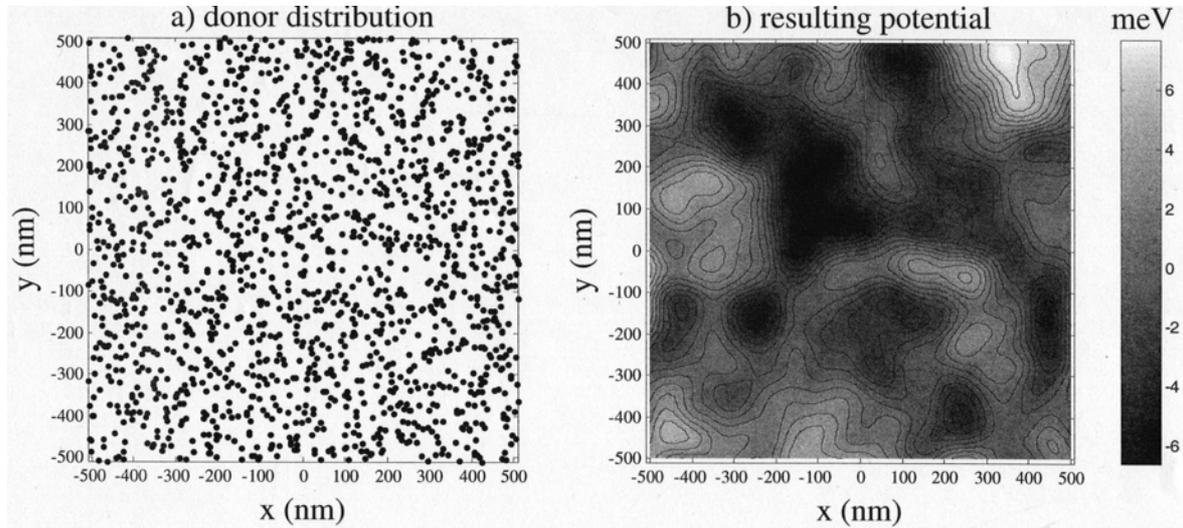
### 7.2.6 Linienbreite der Zyklotronresonanz um $\nu = 1$

Den Abschluß der Ausführungen zur Zyklotronresonanz um  $\nu = 1$  bildet eine Gegenüberstellung der Linienbreiten der Zyklotronresonanz für die drei im Abschnitt 7.2.2 vorgestellten Systeme unter dem Gesichtspunkt universeller Gemeinsamkeiten.

In der Figur 7.15 a) sind die bei  $T = 1.5$  K gemessenen Verläufe gemeinsam als Funktion des Füllfaktors dargestellt. Wie bereits im Abschnitt 7.2.2 diskutiert wurde, erfolgt mit Eintritt in den extremen Quantengrenzfall  $\nu < 1$  bei  $\nu \approx 1$  jeweils ein signifikanter Abfall der Linienbreite. Dieser Abfall vollzieht sich charakteristischerweise gerade innerhalb eines Füllfaktorbereichs, in dem  $\rho_{xx}$  infolge des Quanten-Hall-Effektes verschwindet bzw. aufgrund der verwendeten Meßgeometrie ein Plateau aufweist. Dies kann aus den Abbildungen 7.7 bis 7.9 entnommen werden. Die Teilfigur 7.15 b) zeigt die Höhen des Linienbreitenabfalls, welche gemäß der im Insert skizzierten Auswertevorschrift bestimmt wurden, als Auftragung gegen die Elektronendichte.



**Abbildung 7.15:** Experimentelle Zyklotronresonanz-Linienbreiten hochbeweglicher Q2DEG als Funktion des Füllfaktors. Die Teilfigur a) zeigt die experimentellen Daten. Die beiden unteren Kurven sind jeweils um die in eckigen Klammern angegebenen Werte entlang der y-Achse verschoben. Gemäß dem Abschnitt 1.4 sind die Resonanzprofile aufgrund des optischen Effektes verbreitert. Aus diesem Grund ist der Beitrag der Sättigung zur Linienbreite entsprechend der Gleichung 1.21 jeweils in Klammern unter den Kurven angegeben. Die gestrichelten senkrechten Linien um  $\nu = 1$  markieren den einheitlichen Füllfaktorbereich, in dem bei tiefen Temperaturen der longitudinale Magneto-Widerstand  $\rho_{xx}$  für alle drei Proben verschwindet. Die Teilfigur b) zeigt die Höhe des Linienbreitenabfalls als Auftragung gegen die Elektronendichte. Die zugrunde liegende Auswertevorschrift ist im Insert skizziert. Die gestrichelte Linie durch die Meßpunkte dient lediglich zur Orientierung. Der zusätzliche durch ein Quadrat gekennzeichnete Punkt entstammt [Nic89].



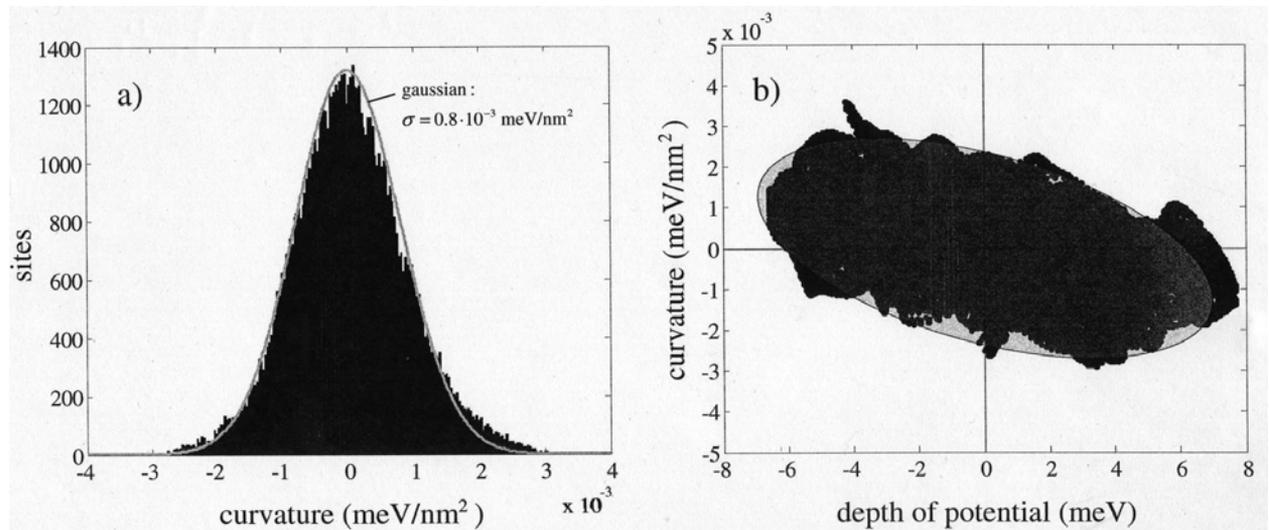
**Abbildung 7.16:** Zufällige Verteilung geladener Störstellen und die daraus resultierende Potentiallandschaft im Q2DEG. In a) ist die ausgewürfelte Verteilung der geladenen Donatoren hinter der Spacerschicht gezeigt. Dabei wurden entsprechend einer Störstellendichte von  $1.6 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  innerhalb von jeweils  $100 \times 100 \text{ nm}^2$  großen Gebieten die Positionen von jeweils 16 Störstellen zufällig ausgewürfelt. In b) ist die sich daraus ergebende Potentiallandschaft in einer mit Höhenlinien unterlegten Grauwertdarstellung gezeigt. Als Dicke der Spacerschicht ist hier  $d_{sp} = 60 \text{ nm}$  gewählt.

Im Angesicht der starken Indizien für die Ausbildung von Spintexturen mit einer symmetrisch zu  $\nu = 1$  abfallenden Spinpolarisation erscheint ein asymmetrisches Verhalten, wie es in der Linienbreite hervortritt, zunächst ungewöhnlich.

Die experimentellen Zyklotronresonanzen, die an gezielt mit Akzeptoren (Be oder C) verunreinigten Systemen mit Beweglichkeiten um  $3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  gemessen wurden [Ric89, Wid98], weisen überraschenderweise ein qualitativ ähnliches Verhalten auf, wenn auch mit quantitativ deutlich stärkerer Ausprägung. Insbesondere zeigen die Ergebnisse in [Wid98] für Füllfaktoren  $2 < \nu < 1$  eine Aufspaltung der Zyklotronresonanz, die dann mit Eindringen in den Quantengrenzfall  $\nu < 1$  innerhalb eines nur relativ schmalen Übergangsbereichs verschwindet. Dabei ist besonders bemerkenswert, daß die verschwindende Resonanz  $\omega_1 \approx \omega_c$  bei der Zyklotronfrequenz und die durchgehende Resonanz bei einer signifikant verschobenen Frequenz  $\omega_2 \approx \omega_c + \Omega_0^2/\omega_c$  auftritt. Die Verschiebung kann dabei nach den Ausführungen in den Abschnitten 5.2.2.4 und 5.3.4 auf eine effektive harmonische Rückstellkraft  $\Omega_0^2$  infolge des Störstellenpotentials zurückgeführt werden. Eine solche Linienaufspaltung wird auch in [Ric89] beobachtet. Sie verschwindet jedoch und entwickelt sich zu einer Linienverbreiterung, die dann bei  $\nu \approx 1$  abrupt abfällt. Dieses Verhalten gleicht dem hier an den hochbeweglichen Systemen beobachteten Verhalten qualitativ. Diese Gemeinsamkeit legt den Schluß nahe, daß auch bei den hochbeweglichen Systemen das Störstellen-Hintergrundpotential die Ursache für die Linienbreitenvariation um  $\nu = 1$  bildet.

Als Basis zur Entwicklung eines einfachen Modells zur Erklärung der experimentellen Beobachtungen dient die Abbildung 7.16. In ihr ist die Potentiallandschaft

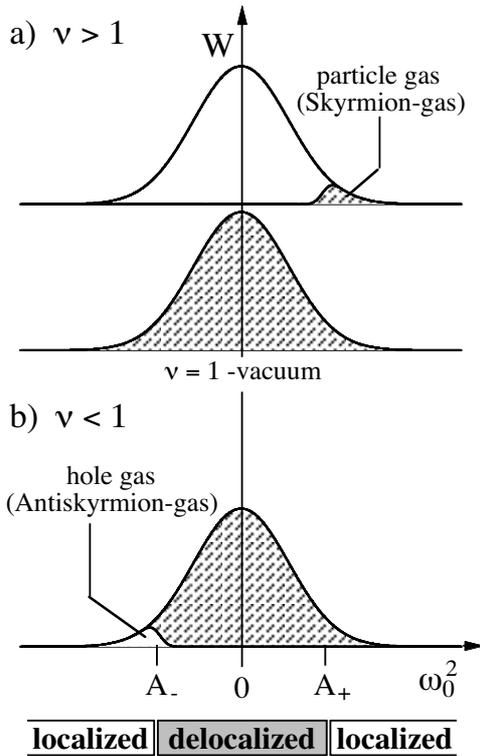
$$V_{imp}(x, y) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc}} \sum_k \frac{q_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + d_{sp}^2}} \quad (7.55)$$



**Abbildung 7.17:** Verteilung der Krümmungen im Störstellen-Hintergrundpotential. In a) ist das Histogramm der Krümmungen der Potentiallandschaft aus Figur 7.16 b) auf einem Raster mit 5 nm Maschenlänge gezeigt und mit einer Gauß-Verteilung unterlegt. In b) sind die Krümmungen an den Rasterpunkten gegen die Potentialtiefen aufgetragen und mit einer verkippten Ellipse als grobes Modell für die Punktwolke unterlegt.

in einem  $1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m}$  Gebiet dargestellt, die von den zufällig verteilten ionisierten Donatoren ( $q_k = +e$ ) aus der Dotierschicht, die einen Abstand  $d_{sp}$  zum funktionalen Q2DEG hat, resultiert. Die gewählten Parameter sind in der Bildbeschreibung angegeben. Die Potentiallandschaft weist Berge und Täler mit einer Ausdehnung auf Längenskalen einiger 10 bis 100 nm auf, die groß sind im Vergleich zur magnetischen Länge bei den hohen im Experiment verwendeten Magnetfeldern. Bei Abweichung von der Niveaувollfüllung  $\nu = 1$  werden die Elektronen (bzw. Skyrmionen) und Löcher (bzw. Antiskyrmionen) aufgrund ihrer Ladung die Minima respektive Maxima der Potentiallandschaft bevölkern. Das Q2DEG hat daher die generelle Tendenz, sofern dies mit den Niveaubesetzungen vereinbar ist, die Mulden der Potentiallandschaft, wo vorwiegend positive Krümmungen herrschen, bevorzugt zu besetzen. Zur Veranschaulichung dieser und der weiteren Überlegungen dient die Abbildung 7.17. In der Teilfigur a) ist das Histogramm der zusammengefaßten Krümmungen  $\omega_{0x,i}^2 = (1/m^*) \partial^2 V_{imp}(x,y)/\partial x^2|_{(x_i,y_i)}$  bzw.  $\omega_{0y,i}^2 = (1/m^*) \partial^2 V_{imp}(x,y)/\partial y^2|_{(x_i,y_i)}$  der Potentiallandschaft aus Figur 7.16 auf den Positionen  $i$  eines gleichmaschigen quadratischen Rasters dargestellt. Die daraus gewonnene Verteilung der Krümmungen  $W(\omega_0^2)$  ist nahezu symmetrisch und wird gut durch eine Normalverteilung beschrieben. Die Teilfigur b) zeigt die Auftragung der Potentialkrümmungen gegen die Potentialtiefen. Die resultierende Punktwolke ist mit einer verkippten Ellipse unterlegt, welche die erstere brauchbar approximiert. Aus dieser Auftragung geht hervor, daß, wie im Vorfeld qualitativ diskutiert wurde, die tiefen Potentiallagen bevorzugt positive  $\omega_0^2 > 0$  und die hohen Potentiallagen bevorzugt negative Krümmungen  $\omega_0^2 < 0$  aufweisen.

Ein Modell, das auf einer derartigen Verteilung der Krümmungen basiert und die beobachtete Linienbreitenvariation zu beschreiben vermag, ist in der Figur 7.18 dargelegt. Es geht von einer symmetrischen Verteilung  $W(\omega_0^2)$  mit einem Gauß-Profil der Breite  $\sigma$  aus. Die angedeuteten Schranken  $A_+ > 0$  und  $A_- < 0$  grenzen die Bereiche mit großen positiven und negativen Krümmungen, die Gebieten in der Potentiallandschaft mit starker Teilchen- bzw. Loch-Lokalisierung entsprechen, von den Bereichen ab, in denen die Teilchen bzw. Löcher de-



**Abbildung 7.18:** Modell zur Verteilung der Krümmungen des Störstellen-Hintergrundpotentials und ihrer Besetzungen. Die Teilfiguren a) und b) beschreiben die Situation der Überfüllung respektive der Unterfüllung gegenüber dem  $\nu = 1$ -Vakuumbestand. Die gemusterten Gebiete sind mit Elektronen besetzt. In den Gebieten stärkster lokaler Krümmung sind die Teilchen- und Loch-Anregungen auf dem  $\nu = 1$ -Vakuumbestand lokalisiert.

lokalisiert sind. Die Besetzung der Krümmungen  $p(\omega_0^2)$  leitet sich aus der Figur 7.17 b) ab. Qualitativ werden mit Abweichung von der Vollfüllung durch die teilchen- und lochartigen Anregungen bevorzugt die stark positiven bzw. stark negativen Krümmungen in den Ausläufern der Normalverteilung besetzt. Die beiden Szenarien a) und b) beschreiben die Situationen bei Über- und Unterfüllung gegenüber  $\nu = 1$ . Im Fall a) unterteilt sich das Gesamtsystem in das inerte  $\nu = 1$ -Vakuumbestand und das Teilchen-Gas (Skyrmion-Gas) auf diesem. Im Fall b) ist aus Sicht des elektronischen Gesamtsystems keine derartige Aufteilung in Subsysteme möglich. Basierend auf diesem Modell sind in der Tabelle 7.1 qualitativ die für eine makroskopische Aussage relevanten Kenngrößen Mittelwert

$$\langle \omega_0^2 \rangle_K = \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega_0^2) \omega_0^2 W(\omega_0^2) p_K(\omega_0^2) \quad (7.56)$$

und Streuung

$$\Gamma_K = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} d(\omega_0^2) [\omega_0^2 - \langle \omega_0^2 \rangle_K]^2 W(\omega_0^2) p_K(\omega_0^2)} \quad (7.57)$$

abgeschätzt. Die Besetzungen der durch den Index  $K$  unterschiedenen Subsysteme sind mit  $p_K(\omega_0^2)$  bezeichnet. Bei der Vollfüllung  $\nu = 1$  ist das System inkompressibel. Daher wird die Potentiallandschaft ungeachtet der lokalen Beschaffenheiten homogen besetzt. Dabei verschwindet die mittlere Krümmung identisch und die Streuung nimmt den Wert  $\sigma$  an. Bei Überfüllung  $\nu > 1$  werden energetisch die Mulden der Potentiallandschaft mit ihren positiven Krümmungen besetzt. Deshalb erfährt die Teilchen-Komponente eine mittlere Krümmung von der Größenordnung  $A \propto \sigma$  und eine nur geringe Streuung. Überwiegt dabei die Differenzfrequenz  $\Delta\omega_c = \omega_{c,2} - \omega_{c,1} \approx \langle \omega_0^2 \rangle_2 / \omega_c$  die Elektron-Elektron-Kopplungsstärke  $\omega_I$ , existiert lediglich eine einzige vollständig hybridisierte Zyklotronresonanz mit einer über beide Subsysteme gemittelten Verschiebung

Regime	Komponenten	mittlere Krümmung	Streuung um mittlere Krümmung
$\nu \geq 1$	$\nu = 1$ -Untergrund	$\langle \omega_0^2 \rangle_1 = 0$	$\Gamma_1 = \sigma$
	Teilchen- bzw. Skyrmion-Gas	$\langle \omega_0^2 \rangle_2 = O(A)$	$\Gamma_2 \ll \Gamma_1$
	vollständige Hybridisierung	$0 < \langle \omega_0^2 \rangle_> < \sigma$	$\Gamma_> > \Gamma_1$
$\nu < 1$	Löcher- bzw. Antiskyrmion-Gas	$0 < \langle \omega_0^2 \rangle_< < \sigma$	$\Gamma_< < \Gamma_1$

**Tabelle 7.1:** Qualitative Kenngrößen zu den vom Elektronengas um  $\nu = 1$  wahrgenommenen Krümmungen des Hintergrundpotentials. Den Betrachtungen liegt das in der Abbildung 7.18 skizzierte Modell mit einer symmetrischen Verteilung der Krümmungen ( $A = A_+ = |A_-| \propto \sigma$ ) zugrunde.

$\langle \omega_0^2 \rangle_> / \omega_c$  gegenüber der (nackten) Zyklotronfrequenz. Im anderen Fall dominiert die Aufspaltung über die Kopplung und es treten 2 dipolaktive Zyklotronresonanzen auf, wie sie bei den gezielt verunreinigten Systemen beobachtet werden [Ric89, Wid98]. Die Streuung der Krümmungen des komplett hybridisierten Systems ist gegenüber der Vollfüllung  $\nu = 1$  erhöht, da durch die vermehrte Besetzung der stark positiven Krümmungen die gewichtete Verteilung  $P(\omega_0^2) = W(\omega_0^2) (p_1(\omega_0^2) + p_2(\omega_0^2))$  effektiv breiter wird. Bei Unterfüllung  $\nu < 1$  besetzen die Löcher (bzw. Antiskyrmionen) die Potentialberge mit negativer Krümmung. Dadurch wird die mittlere Krümmung für das Elektronengas insgesamt positiv und die Streuung gegenüber  $\nu = 1$  nimmt ab, da die gewichtete Verteilung durch den Wegfall der negativsten Krümmungen insgesamt schmaler wird.

Die Verbreiterung einer Zyklotronresonanzlinie in einem vollständig hybridisierten System kann im Rahmen des ausgeführten Modells durch die Streuung der Krümmungen des Störstellen-Hintergrundpotentials erklärt werden. Gemäß der in der Tabelle zusammengefaßten Überlegungen tritt mit dem Übergang  $\nu > 1 \rightarrow \nu < 1$  eine Abnahme der Streuung der vom Elektronengas wahrgenommenen Potentialkrümmungen  $\Gamma_> > \Gamma_1 > \Gamma_<$  auf. Dieser Umstand vermag die experimentell beobachtete Variation der Linienbreite um  $\nu = 1$  qualitativ zu erklären. Auch die Beobachtung, daß die Abnahme der Linienbreite sich in einem Füllfaktorintervall vollzieht, in dem gerade  $\rho_{xx}$  im Magneto-Transport verschwindet, kann im Rahmen des vorgestellten Modells erklärt werden. Sobald nämlich die Mobilitätskante von der Fermi-Energie überschritten wird, werden ausgedehnte Zustände besetzt. Diese Zustände erfahren Krümmungen der Potentiallandschaft, die weitgehend symmetrisch um  $\omega_0^2 = 0$  verteilt sind und deren gewichtetes Mittel verschwindet. Daher enden mit Überschreiten der Mobilitätskanten von  $\nu = 1$  kommend der Anstieg ( $\nu > 1$ ) bzw. die Abnahme ( $\nu < 1$ ) der Zyklotron-Linienbreite relativ abrupt, um dann jeweils in plateauartige Verläufe einzumünden. Das Überschreiten der Mobilitätskanten wird nach dem Verständnis des Quanten-Hall-Effektes durch das Ausbilden der Plateaus und das gleichzeitige Verschwinden des Longitudinalwiderstands angezeigt. Diese Koinzidenz mit den Transportmessungen legt die Manifestation eines Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergangs in der Zyklotronresonanz-Linienbreite nahe.

Zusammenfassend kann die an vielen Systemen um  $\nu = 1$  zu beobachtende und als universell anzusehende Linienbreitenvariation in der Zyklotronresonanz mit der lokalisierenden Wirkung des Störstellenhintergrundes erklärt werden. Die Asymmetrie des beobachteten Verlaufs bezüglich  $\nu = 1$  ist dabei nicht im Widerspruch zu den Spintexturen auf dem  $\nu = 1$ -Vakuum, die sich in der Zyklotronfrequenz (Zyklotronmasse) manifestieren.



## Kapitel 8

# Elektronische Zyklotronresonanz im Regime des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes

Mit der Entdeckung des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) durch Tsui und Störmer [Tsu82] und seiner Erklärung durch Laughlin [Lau83] wurde das weite und bis heute ungebremst aktuelle Feld der zweidimensionalen Quanten-Hall-Flüssigkeiten mit ihren ungewöhnlichen Eigenschaften eröffnet. Diese Entdeckung hat die Physik insbesondere um fraktional geladene Quasiteilchen- und Quasiloche-Anregungen sowie zusammengesetzte Teilchen bereichert (composite fermions, composite bosons), deren Statistik durch das Anhaften virtueller Flußquanten je nach Fragestellung von fermionisch nach bosonisch und umgekehrt transformiert werden kann. Solche Teilchen-Anregungen fungieren, wie mittlerweile eindrucksvoll experimentell demonstriert wurde, nicht nur als theoretische Hilfskonstrukte, sondern sie wurden als die eigentlichen Quanten des Ladungstransports in diesem Regime identifiziert. Die Bedeutung des FQHE für die physikalische Grundlagenforschung wurde 1998 mit der Vergabe des Nobelpreises an Tsui, Störmer und Laughlin untermauert.

Der Großteil der experimentellen Bemühungen auf dem Gebiet des FQHE beruft sich auf Magneto-Transportexperimente, die bei statischen Verfahren beginnend ein Frequenzregime bis hinauf zu Radiofrequenzen umfassen können [Sto84, Cha90, Cha95]. Damit verglichen bedient sich nur eine relativ kleine Gruppe von Experimentatoren lichtspektroskopischer Methoden. Deren Aktivitäten wiederum beruhen zum Großteil auf Meßverfahren im NIR oder im sichtbaren Frequenzbereich, die auf der Lumineszenz- [Kuk96] und der Raman-Spektroskopie [Pin93] basieren. Im Bereich der Infrarotspektroskopie liegen die Magneto-Plasmonen und insbesondere die Zyklotronresonanz im Fokus des Interesses. Daß in diesem Regime die experimentelle Aktivität vergleichsweise gering ausfällt, hat zwei Ursachen. Zum einen ist dieses Frequenzregime verglichen mit dem NIR-Regime experimentell schwierig zu beherrschen. Zum anderen können die hohen Wellenvektoren  $q \approx 1/l_m$  ( $l_m$ : magnetische Länge), bei denen sich die speziellen Korrelationen der FQH-Zustände in der Dispersion der Magneto-Plasmonen offenbaren, technologisch (noch) nicht bereitgestellt werden. Experimentelle Untersuchungen der Zyklotronresonanz wurden bereits kurz nach der Entdeckung des FQHE durchgeführt [Sch87, Rik85, Sei87, Bes92]. Sie ergaben jedoch keine klaren Signaturen, die Rückschlüsse auf Besonderheiten des FQHE zuließen. Der Grund für die Insensitivität der Zyklotronresonanz auf die Korrelationen des FQHE liegt im Kohnschen Theorem [Koh61, Bre89], das im Kapitel 5 dargelegt wurde. Signaturen in der Zyklotronresonanz, die auf den FQHE zurückgehen, werden daher nur indirekt über die Verletzung des Kohnschen Theorems durch Streuung, Leitungsband-Nichtparabolizität und den Polaron-Effekt sichtbar.

Der Abschnitt 8.1 dieses Kapitels befaßt sich mit den Grundlagen des FQHE. Im Abschnitt 8.2 werden die gewonnenen experimentellen Ergebnisse zur Zyklotronresonanz unter FQHE-Bedingungen vorgestellt.

## 8.1 Grundlagen des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE)

Der Fraktionale Quanten-Hall-Effekt stellt noch immer eines der aktivsten Felder auf dem Gebiet der festkörperphysikalischen Grundlagenforschung dar. Entsprechend hoch und auch unübersichtlich ist mittlerweile die Zahl der Veröffentlichungen, die sich mit ihm beschäftigen. Unter den zahlreichen Übersichtsartikeln sei hier besonders auf die Ausführungen in [Pra90] und [Cha95] verwiesen. Diese vermitteln eine fundierte experimentelle und theoretische Basis des FQHE.

### 8.1.1 Übersicht und Phänomenologie

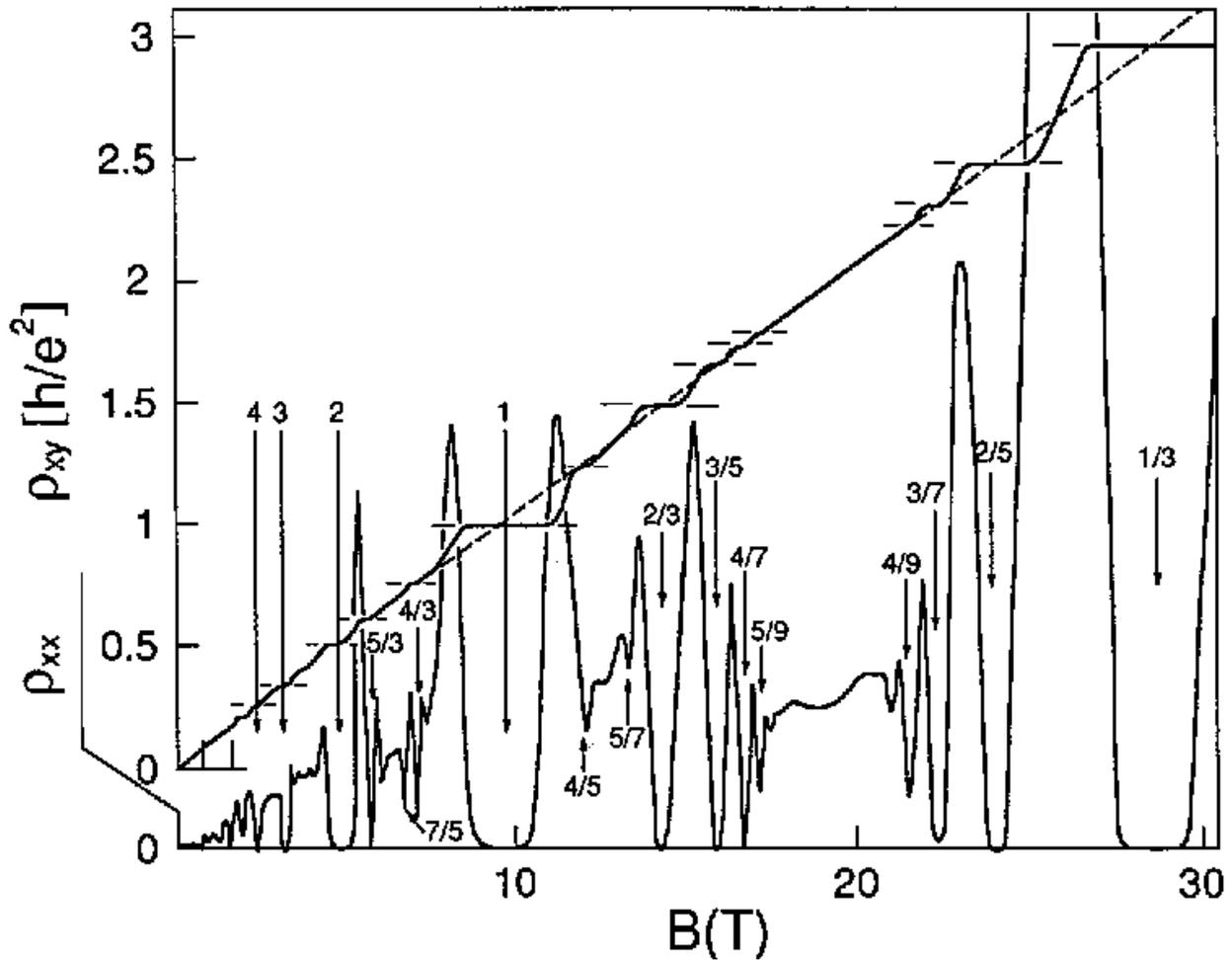
Die Erscheinung des FQHE mit quantisierten Plateaus im Hall-Widerstand  $R_{xy}$  und gleichzeitig verschwindendem longitudinalen Magneto-Widerstand  $R_{xx}$  ist der des IQHE (siehe Abschnitt 5.1.1) weitgehend analog. Allerdings treten die Niveaus mit den quantisierten Werten

$$R_{xy} = R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} = \frac{h}{e^2} \frac{q}{r}, \quad q = 3, 5, 7, \dots, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

bei fraktionalen Füllfaktoren  $\nu = r/q$  auf. Die Nenner der Füllfaktoren  $q$  nehmen dabei in einkomponentigen Systemen (vollständige Spinpolarisation) nur ungeradzahlige ganze Werte an. Die Abbildung 8.1 zeigt exemplarisch die Hall-Quantisierung an einem Q2DEG hoher Beweglichkeit bei Temperaturen im Regime weniger mK, wie sie dem experimentellen Stand gegen Ende der 1980er Jahre entspricht. Die Beobachtbarkeit von Minima im longitudinalen Magneto-Widerstand erstreckt sich darin bis hin zu Nennern  $q = 11$ . In aktuellen Systemen mit Beweglichkeiten von mehreren  $10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  werden mittlerweile Hall-Plateaus und Minima in  $\rho_{xx}$  mit Nennern  $q > 20$  beobachtet [Pan03]. Im Gegensatz zum IQHE weist das Einteilchen-Energieschema bei den Füllfaktoren des FQHE keine Energielücken  $\Delta \approx \hbar\omega_c$  auf, welche die vollbesetzten Niveaus von den unbesetzten trennen und das Elektronengas bei Vollfüllung in inkompressible Zustände zwingen.

Schon kurz nach der Entdeckung des FQHE wurde klar, daß die Ursache des FQHE in der Wechselwirkung zwischen den Elektronen zu finden ist. Diese führt bei den fraktionalen Füllfaktoren dazu, daß sich eine Energielücke ausbildet, welche die nicht-entarteten inkompressiblen FQHE-Grundzustände von den Anregungszuständen trennt [Cha95]. Die Größe dieser Energielücke entscheidet dabei über die Beobachtbarkeit eines FQH-Grundzustandes und dessen thermische Stabilität. Je kleiner die Lücke ist, desto leichter wird der jeweilige Zustand durch Streuung an Störstellen und thermische Aktivierung aufgebrochen. Daher bedarf die Beobachtung von FQHE-Zuständen sowohl außerordentlich hoher Beweglichkeiten als auch extrem tiefer Temperaturen. Gleichzeitig steigen die experimentellen Anforderungen, insbesondere an die Magnetfeldstärken und die Elektronenbeweglichkeiten, mit zunehmenden Nennern superlinear an. Die Energielücken im FQHE können via thermischer Aktivierung aus Magneto-Transportmessungen [Boe85, Cha90] oder nach einem speziellen Photolumineszenz-Messverfahren [Kuk96] experimentell bestimmt werden.

Die neben dem Auftreten der FQH-Zustände auffälligste Phänomenologie offenbart sich in Symmetrien der Magneto-Transporterscheinungen um Füllfaktoren mit geradzahligen Nennern bei  $\nu = 1/2p$ ,  $p = 1, 2, \dots$  und  $\bar{\nu} = 1 - 1/2p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Von diesen tritt, wie man an der Figur 8.1 erkennt, der Füllfaktor  $\nu = 1/2$  (zwischen  $4/9$  und  $5/9$ ) am deutlichsten hervor, gefolgt von  $\nu = 3/4$  (zwischen  $4/5$  und  $5/7$ ), sowie  $\nu = 3/2$  (zwischen  $4/3$  und  $5/3$ ). Diese speziellen Füllfaktoren markieren die Quellpunkte, aus denen sich jeweils Hierarchien von FQHE-Zuständen zu beiden Seiten der Magnetfeldachse hin entwickeln. Die Hierarchien von



**Abbildung 8.1:** Magneto-Transport im Regime des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes. Das Bild ist aus [Sto92] entnommen. Die Zahlenwerte bezeichnen darin die FQHE-Füllfaktoren  $\nu = p/r$ .

FQH-Zuständen werden im Quantengrenzfall  $\nu < 1$  bei vollständiger Spinpolarisation durch die Sequenz

$$\nu_p(n) = \frac{n}{2pn + 1}, \quad (8.2)$$

und ihre Elektron-Loch-Konjugierte

$$\bar{\nu}_p(n) = 1 - \frac{n}{2pn + 1} \quad (8.3)$$

gebildet. Die Hauptserie  $\nu = \nu_1(n = 1, 2, \dots) = 1/3, 2/5, 3/7, 4/9, \dots \rightarrow 1/2^-$  und ihre Elektron-Loch-Konjugierte  $\nu = \bar{\nu}_1(n = 1, 2, \dots) = 2/3, 3/5, 4/7, 5/9, \dots \rightarrow 1/2^+$  mit  $p = 1$  beschreiben die stabilsten und durchwegs dominierenden FQH-Zustände. Die Stabilität eines Zustandes einer Serie nimmt dabei mit zunehmendem  $n = 1, 2, 3, \dots$  generell ab. Die höheren Serien mit ganzzahligen  $p > 1$  münden in die Füllungen  $\nu_p(n) \rightarrow 1/2p^-$  bzw.  $\bar{\nu}_p(n) \rightarrow (2p - 1)/2p^+$  ein und weisen gegenüber der Hauptserie deutlich kleinere Energielücken und entsprechend geringere Stabilitäten auf. Die prominentesten Vertreter für  $p = 2$  sind  $\nu = 1/5$  und  $\nu = 2/7$  bzw. ihre Elektron-Loch-Konjugierten  $\nu = 4/5$  und  $\nu = 5/7$ . Die FQH-Serien und

einige der Elektron-Loch-Konjugierten können entsprechend

$$\nu_{p,\pm}(n) = \frac{n}{2pn \pm 1} \quad (8.4)$$

in einem Ausdruck zusammengefaßt werden [Jai89a, Jai92, Jai94]. Dabei ergibt sich z.B. für den prominentesten Vertreter  $\nu = 1/3 = \nu_{1,+}(1)$  und für sein Gegenüber  $\nu = 2/3 = \nu_{1,-}(2) = \bar{\nu}_1(1)$ .

Über das unterste Spin-Landau-Niveau ( $n_L = 0, \sigma = +1/2$ ) ( $n_L$ : Landau-Index) bei Füllungen  $\nu < 1$  hinaus werden FQH-Signaturen sowohl im ersten angeregten Spin-Niveau ( $n_L = 0, \sigma = -1/2$ ) bei  $1 < \nu < 2$  als auch im ersten angeregten Landau-Niveau ( $n_L = 1$ ) sowie bei extrem reinen Q2DEG und entsprechend tiefen Temperaturen auch noch im zweiten angeregten Landau-Niveau ( $n_L = 2$ ) beobachtet [Wil87, Yeh99, Pan99]. Für die dort auftretenden FQH-Zustände sind lediglich die partiell gefüllten Valenz-Landau-Niveaus von Relevanz und die vollständig gefüllten Rumpf-Landau-Niveaus bilden lediglich das Vakuum, auf dem sie existieren. Auch die FQH-Zustände in den höheren Landau-Niveaus mit  $n_L > 0$  sind daher auf die fundamentalen FQH-Zustände bei  $\nu < 1$  zurückzuführen und ergeben sich durch entsprechende Anwendung der Landau-Hebeoperatoren  $\hat{a}_i^+$  ( $i$ : Teilchen-Index, siehe Gleichungen 2.50 und 2.51) auf die entsprechenden fundamentalen FQH-Zustände mit  $\nu < 1$  [Mac84a].

Das wesentliche theoretische Verständnis des FQHE geht auf die Überlegungen von Laughlin zurück [Lau83, Lau90]. Laughlin gelang es, explizite Grundzustandswellenfunktionen für die FQH-Grundzustände bei den elementaren Füllfaktoren  $\nu = 1/m$ ,  $m = 3, 5, 7, \dots$  und für ihre Elektron-Loch-Konjugierten aufzustellen. Als Besonderheit weisen diese Grundzustände neben den erforderlichen Lücken im Energiespektrum Quasiteilchen und Quasilöcher mit fraktionalen Ladungen  $e^* = \mp e/m$  als Anregungen auf. Die Quasiteilchen und -löcher entsprechen dabei Wirbelzuständen auf der Elektronenflüssigkeit. Diese wurden mittlerweile experimentell als die eigentlichen Quanten des Ladungstransportes bestätigt [Sam97, dP97, Rez99]. Die ersten Erweiterungen der Laughlinschen Theorie auf die höheren FQH-Zustände sind in [Hal83] und [Hal84] ausgeführt. Die Gemeinsamkeit beider Ansätze liegt darin, daß die höheren FQH-Zustände als Folge einer Kondensation von Quasiteilchen und Quasilöcher in wiederum inkompressible Quasiteilchen- bzw. Quasiloch-Flüssigkeiten zustande kommen. Eine Kaskade solcher Kondensationen ist über mehrere Generationen von Quasiteilchen bzw. Quasilöchern fortsetzbar und gestattet es, die höheren FQH-Zustände aus den elementaren Laughlin-Zuständen sukzessive abzuleiten [Hal90].

Einen wesentlichen Schritt zum übergreifenden Verständnis des FQHE gelang Jain mit seinem Bild der zusammengesetzten Fermionen (composite fermions, kurz CF) [Jai89a, Jai92, Jai94]. Diesem Bild liegt eine tiefere Interpretation des Laughlinschen Ansatzes zugrunde, wonach sich die FQH-Grundzustände durch das Anheften einer geraden Zahl  $m = 2p$ ,  $p = (0), 1, 2, \dots$  von virtuellen Flußquanten an jedes Elektron direkt aus den Integralen Quanten-Hall-Zuständen bei  $\nu = 1, 2, \dots$  ableiten. Beispielsweise ergibt sich der prominenteste FQH-Zustand bei  $\nu = 1/3$  durch das Anheften jeweils zweier fiktiver Flußquanten pro Elektron aus dem  $\nu = 1$ -Zustand. Durch die fiktive Flußanhaftung binden die Elektronen mit Dichte  $N_S = N_{LL}/3$  ( $N_{LL}$ : Flächendichte der Flußquanten) zwei Drittel des die Probe durchdringenden Flusses. Die Flächendichte der ungebundenen Flußquanten entspricht daher genau derjenigen der Verbundfermionen, so daß diese beim CF-Füllfaktor  $\nu_{CF} = 1$  gerade ein CF-Landau-Niveau vollständig füllen. Nach der Jainschen Interpretation ist der FQHE direkt auf den IQHE der Verbundfermionen zurückzuführen. Im allgemeinen können nach dem Jainschen Schema sämtliche FQH-Zustände nach den Hierarchien in den Gleichungen 8.4 und 8.2 auf jeweils  $\nu_{CF} = n$  vollständig gefüllte CF-Landau-Niveaus mit  $2p$ ,  $p = (0), 1, 2, \dots$  angehefteten Flußquanten pro Elektron mit Orientierung in (+) oder entgegen der Magnetfeldrichtung (-) zurückgeführt werden. Die Kor-

relationen innerhalb der FQH-Flüssigkeiten aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung wirken nach der Jain'schen Theorie im wesentlichen derart, als ob (nahezu) wechselwirkungsfreie Composite-Fermionen sich durch ihre Flußquanten über den Aharonov-Bohm-Effekt [Aha59] gegenseitig beeinflussen. Die tiefere Begründung für das Zutreffen dieser Beschreibung wurde in [Lop91] sowie [Hal93] im Rahmen einer effektiven Chern-Simons Feldtheorie, der anerkannten Landau-Ginzburg-Beschreibung für den FQHE, gegeben.

Heftet man den Elektronen einer FQH-Flüssigkeit hingegen eine ungerade Zahl von Flußquanten an, so werden sie in Verbundbosonen überführt (composite bosons, kurz: CB) [Wil82a]. Darauf und auf einer tieferen Interpretation der Laughlin-Wellenfunktionen in [Gir87] basierend wurde in [Rea89, Zha89, Zha92] eine bosonische Chern-Simons-Feldtheorie des FQHE aufgestellt. Im Bild der Composite-Bosonen erscheint der FQH als Bose-Einstein-Kondensation der CB in einen supraleitenden Grundzustand. Speziell für den  $\nu = 1/3$ -Zustand kondensieren die mit  $m = 3$  Flußquanten behafteten Verbundbosonen bei einem effektiven Magnetfeld  $B^* \approx 0$  in einen inkompressiblen supraleitenden Zustand mit perfekter Leitfähigkeit in Längsrichtung. Die Quantisierung der Hall-Spannung erklärt sich in diesem Bild aus der mit dem Strom der fiktiven Verbundbosonen verbundenen Flußänderung. Der Durchstrom an fiktivem Fluß, der für  $\nu = 1/3$  das dreifache des Teilchenstromes  $I/e$  ( $I$ : elektrischer Strom) beträgt, führt über das Faradaysche Induktionsgesetz zu einer Querspannung  $U_H = 3hI/e^2$  und somit zu dem Querwiderstand  $R_H = U_H/I = 3h/e^2$ . Eine Gegenüberstellung der fermionischen und bosonischen Chern-Simons-Feldtheorien des FQHE erfolgt in [Lop91].

Bei geeigneten Probenparametern (Elektronendichte und Subband-Quantisierung) werden in Transportexperimenten mit verkippten Magnetfeldern ( $B_\perp = \text{const}$ ,  $B(\theta) = B_\perp/\cos(\theta)$ ,  $\theta$ : Verkippungswinkel) für eine Reihe von Füllfaktoren mit zunehmendem Verkippungswinkel zunächst verschwindende und dann später bei größeren Verkippungen wieder auftretende FQH-Signaturen ("reentrant FQH-states") beobachtet [Cla89, Eis89]. Das variable (totale) Magnetfeld  $B$  wirkt dabei lediglich auf die Zeeman-Lücke. Ein solches Verhalten belegt die Relevanz des Elektronenspins bei den FQH-Grundzuständen dieser Füllfaktoren. Unter Beteiligung des Elektronenspins treten neben den vollständig polarisierten FQH-Zuständen, deren prominentester Vertreter  $\nu = 1/3$  ist, auch unpolarisierte (z.B.  $2/3 = 1/3_+ + 1/3_-$ ,  $\sigma = \pm(1/2)$ ) und gemischt polarisierte (z.B.  $3/5 = 2/5_+ + 1/5_-$ ) FQH-Grundzustände auf. Diese Zustände setzen sich jeweils aus fraktional gefüllten Spin-Landau-Niveaus beider Spinorientierungen zusammen. Das Wechselspiel zwischen der Zeeman-Energie  $E_Z = g^* \mu_B B$ , die linear mit dem Magnetfeld skaliert, und der Wechselwirkungsenergie  $E_C \propto e^2/(4\pi\epsilon_0\epsilon_{sc} l_m) \propto \sqrt{B}$  ( $l_m$ : magnetische Länge,  $\epsilon_{sc}$ : relative Dielektrizitätskonstante), die im strengen 2D-Grenzfall wurzelförmig in  $B$  anwächst, entscheidet darüber, in welcher Gestalt sich ein FQH-Grundzustand ausbildet. Die Spinpolarisation eines FQH-Zustandes kann mittels einer speziellen Lumineszenz-Meßtechnik direkt bestimmt werden [Kuk99]. Da das Verhältnis  $E_Z/E_C \propto \sqrt{B} \rightarrow \infty$ ,  $B \rightarrow \infty$  divergiert, übersteigt bei hohen Magnetfeldern der für die Ausbildung eines un- oder nur teilweise polarisierten FQH-Grundzustandes nötige Aufwand an Zeeman-Energie den Gewinn, der aus einer Minimierung der Coulomb-Energie resultiert. Daher stellt sich bei Magnetfeldern  $B > B_c(\nu)$  oberhalb des füllfaktorspezifischen kritischen Feldes  $B_c(\nu)$  stets der maximal polarisierte Zustand ein (z.B.  $2/3 = 2/3_+ + 0_-$ ,  $3/5 = 3/5_+ + 0_-$ ). Insgesamt wird unter Beteiligung des Elektronenspins die ohnehin schon große Mannigfaltigkeit der Phänomene des FQHE nochmals potenziert. Der Spinfreiheitsgrad erstreckt sich dabei nicht nur auf die FQH-Grundzustände, sondern auch auf ihre Quasiteilchen- und Quasiloche-Anregungen [Cha90, Cha95]. Dabei können beispielsweise auch auf einem vollständig polarisierten FQH-Grundzustand spinumgekehrte oder spingemischte Quasiteilchen (Quasilöcher) sowie skyrmionartige (siehe Abschnitt 7.1.6) Anregungen [Lea97] mit komplexen räumlichen Spinstrukturen existieren. Die mit dem Spin zusammenhängenden Phänomene lassen sich ebenfalls in den Rahmen des CF-Bildes eingliedern, wenn man den CF einen Spin und einen g-Faktor  $g_{CF}^*$  zubilligt [Du,95, Du,97].

## 8.1.2 Laughlinsche Theorie der fundamentalen FQH-Zustände

### 8.1.2.1 Laughlin-Wellenfunktionen

Für die fundamentalen FQHE-Zustände bei Füllungen  $\nu = 1/m$ ,  $m = 1, 3, 5, \dots$  gelang es Laughlin explizite Grundzustandswellenfunktionen abzuleiten, sowie die Quasiteilchen- und Quasiloeh-Anregungen auf diesen anzugeben. Die Laughlinschen Grundzustände haben die besondere Eigenschaft, sämtliche der

$$\binom{N_\Phi}{N} = \frac{(mN)!}{((m-1)N)!N!} \quad (8.5)$$

makroskopisch vielen Konfigurationen (Slater-Determinanten) mit  $N$  Elektronen im Q2DEG verteilt auf die  $N_\Phi = mN$  Einteilchen-Orbitale (Flußquanten) im untersten Spin-Landau-Niveau maximal auszuschöpfen und auf diese Weise eine hoch-korrelierte Quantenflüssigkeit zu beschreiben.

Den Ausgangspunkt der Laughlinschen Beschreibung bildet die Form 2.54, der ein allgemeiner Vielteilchen-Zustand im untersten Landau-Niveau im Hochfeldlimites genügen muß. Basierend auf dieser Form lautet der Laughlinsche Variationsansatz für die FQH-Grundzustände

$$\Psi(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \prod_{k < l}^N f(\zeta_k - \zeta_l) \exp\left(-\sum_l^N \frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right), \quad (8.6)$$

mit der analytischen Jastrow-Variationsfunktion  $f(\zeta)$  und der Definition  $\zeta = x - iy$ . Die Jastrow-Funktion  $f(\zeta)$  muß dem Pauli-Prinzip  $f(0) = 0$  und der Fermionizitätsbedingung  $f(-\zeta) = -f(\zeta)$  bei Teilchen-Vertauschung genügen. Da die Vielteilchen-Wellenfunktion aufgrund der Drehinvarianz innerhalb der Ebene ferner eine Eigenfunktion des Bahndrehimpulsoperators  $\hat{L}_z$  sein muß, wird die Jastrow-Funktion auf Potenzfunktionen  $f(\zeta) = \zeta^m$  mit ungeraden ganzzahligen Exponenten  $m = 1, 3, 5, \dots$  eingeschränkt [Lau90]. Der Zusammenhang zwischen den zulässigen Exponenten  $m$  und dem Füllfaktor ist durch die maximale in  $\Psi(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  auftretende Potenz  $M = m(N-1) \approx mN$ ,  $N \rightarrow \infty$  für jedes  $\zeta_l$  gegeben. Diese entspricht gerade der Zahl an Flußquanten  $N_\Phi$ , welche die Probenfläche durchdringen. Daraus folgen unmittelbar die Laughlin-Füllfaktorbedingung

$$\nu = \frac{N}{N_\Phi} = \frac{1}{m} \quad (8.7)$$

und die fundamentalen Laughlin-Wellenfunktionen

$$\Psi_{\frac{1}{m}}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \prod_{k < l}^N (\zeta_k - \zeta_l)^m \exp\left(-\sum_l^N \frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right). \quad (8.8)$$

Mit  $m = 1$  ist in dieser Form die Slater-Determinante 7.2 für  $\nu = 1$  als Spezialfall enthalten. Der Spinindex ist hier aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt und es wird vollständige Spinpolarisation vorausgesetzt.

Numerische Berechnungen an Systemen mit endlicher Teilchenzahl haben gezeigt, daß die Überlappungen zwischen den Laughlin-Wellenfunktionen und den wahren Grundzuständen nahezu 1 betragen [Hal85, Hal90]. Da für zunehmendes  $m > 1$  die Wahrscheinlichkeitsdichte mit den Teilchenabständen  $\zeta_{k,l} = \zeta_k - \zeta_l$  schnell verschwindet, meiden sich die Elektronen sehr effektiv, so daß die Coulomb-Energie insgesamt minimiert wird. Diese Minimierung führt zu einer Bevorzugung der Laughlinschen Quantenflüssigkeit gegenüber einem

zweidimensionalen Wigner-Kristall mit räumlich modulierter Ladungsdichte [Lau90], wie er vor der Entdeckung des FQHE theoretisch vorausgesagt wurde und im Regime sehr niedriger Füllfaktoren vermutet wird [Mac84b, Zhu95]. Mit den Laughlin-Zuständen konkurrierende Zustände mit streifen- oder blasenartigen Modulationen wurden beispielsweise in [Kou96] für partielle Füllungen in den höheren Landau-Niveaus mit Landau-Indizes  $n_L > 0$  theoretisch vorausgesagt.

### 8.1.2.2 Quasiteilchen, Quasilöcher und Wirbelzustände

Zum tieferen Verständnis des FQHE führen die Quasiteilchen- und Quasiloch-Anregungen. Eine lochartige Anregung ergibt sich, wenn bei der Bildung eines Grundzustandes  $|\Psi_m\rangle$  gerade ein Flußquant überzählig ist, entsprechend  $N_\Phi = mN + 1$ . Die Wellenfunktion  $\Psi_m^{(qh)}$  für ein Laughlinsches Quasiloch am Ort  $\zeta_0$  ist durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Psi_{\frac{1}{m}}^{(qh)}(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) &= \hat{D}^+(\zeta_0) \Psi_{\frac{1}{m}}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ &= \prod_j^N (\zeta_j - \zeta_0) \prod_{k<l}^N (\zeta_k - \zeta_l)^m \exp\left(-\sum_l^N \frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right)\end{aligned}\quad (8.9)$$

gegeben [Lau90]. Der entsprechende Ausdruck, den Laughlin für die Quasiteilchen-Wellenfunktion  $\Psi_m^{(qp)}$  am Ort  $\zeta_0$  für  $N_\Phi = mN - 1$  angegeben hat, ist weniger intuitiv und lautet [Lau90]

$$\begin{aligned}\Psi_{\frac{1}{m}}^{(qp)}(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) &= \hat{D}^-(\zeta_0) \Psi_{\frac{1}{m}}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ &\approx \exp\left(-\sum_l^N \frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right) \prod_j^N \left(2l_m^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \zeta_0^*\right) \prod_{k<l}^N (\zeta_k - \zeta_l)^m.\end{aligned}\quad (8.10)$$

Wie numerische Studien zeigen, leistet auch die mit dem Quasiloch 8.9 unmittelbar verwandte Gestalt

$$\Psi_{\frac{1}{m}}^{(qp)}(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) \approx \prod_j^N (\zeta_j^* - \zeta_0^*) \prod_{k<l}^N (\zeta_k - \zeta_l)^m \exp\left(-\sum_l^N \frac{\zeta_l \zeta_l^*}{4l_m^2}\right)\quad (8.11)$$

eine ähnlich gute Beschreibung des Quasiteilchens [Hal85, Hal90]. Diese liegt jedoch aufgrund der  $\zeta_l^*$  im ersten Polynomprodukt nicht vollständig im untersten Landau-Niveau.

Die Erzeugeroperatoren für das Quasiloch und das Quasiteilchen  $\hat{D}^+(\zeta_0)$  und  $\hat{D}^-(\zeta_0)$  sind, wie in [Byc86] gezeigt wurde, unmittelbar auf die Erzeugenden der magnetischen Translationen

$$\begin{aligned}\hat{t}_+(\zeta_0) &= \hat{t}_x(\zeta_0) + i\hat{t}_y(\zeta_0) = \frac{\partial}{\partial \zeta^*} - \frac{1}{2l_m^2}(\zeta - \zeta_0), \\ \hat{t}_-(\zeta_0) &= \hat{t}_x(\zeta_0) - i\hat{t}_y(\zeta_0) = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{2l_m^2}(\zeta^* - \zeta_0^*)\end{aligned}\quad (8.12)$$

zurückzuführen. Die magnetischen Translationen  $\hat{T}_m(\vec{a})$  mit Translationsvektor  $\vec{a}$  sind dabei in der symmetrischen Eichung durch

$$\hat{T}_m(\vec{a}) = \exp\left[\frac{i}{2l_m^2}(\hat{e}_z \times \vec{r})\right] \hat{T}(\vec{a}), \quad \hat{T}(\vec{a}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{a}\right]\quad (8.13)$$

definiert. Sie sind die magnetischen Pendanten der gewöhnlichen Translationen  $\hat{T}(\vec{a})$  in translationsinvarianten Systemen, deren Erzeugenden  $-\frac{i}{\hbar}p_{x/y}$  durch die Komponenten des Impulsoperators  $\vec{p}$  gegeben sind [Sak85]. Die Erzeugenden  $\hat{t}_{+/-}(\vec{r}_0)$  der magnetischen Translationen resultieren aus der linearen Approximation

$$\hat{T}_m(\delta\vec{a}) \approx 1 + \delta\vec{a}\hat{t} = 1 + \frac{1}{2}(\delta\alpha^* \hat{t}_- + \delta\alpha \hat{t}_+) , \quad (8.14)$$

mit  $\alpha = a_x - ia_y$  und einer Verlegung des Koordinatenursprungs auf  $\vec{r}_0$  (bzw.  $\zeta_0$ ).

Bringt man die Quasiloch- und Quasiteilchen-Wellenfunktionen 8.9 und 8.11 für  $\zeta_0 = 0$  in die Gestalt

$$\Psi_{\frac{1}{m}}^{(qh/qp)}(0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) = \exp \left[ \mp i \sum_j^N \varphi_j \right] \exp \left[ \sum_j^N \ln(r_j) \right] \Psi_{\frac{1}{m}}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) , \quad (8.15)$$

mit den  $\varphi_j = -\arg(\zeta_j) = \arctan(y_j/x_j)$  als Azimutwinkeln und den  $r_j = \sqrt{\zeta_j^* \zeta_j}$  als Radien, so wird das Wesen dieser Anregungen offenbar. Der Phasenfaktor  $\exp \left[ \mp i \sum_j^N \varphi_j \right]$  führt nämlich zu einer rein azimutalen Stromverteilung

$$\langle \hat{J} \rangle_{qh/qp}(\vec{r}) = \mp f(r) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \mp f(r) \frac{\hat{e}_\varphi}{r} , \quad (8.16)$$

die einem bei  $\vec{r} = 0$  lokalisierten Wirbelzustand mit radialem Stromprofil  $f(r)$  entspricht [Gir90]. Wie von Laughlin in einer als 2D-Plasmaanalogie bezeichneten Betrachtungsweise gezeigt wurde, tragen diese Wirbelzustände als Besonderheit fraktionale Ladungen [Lau83, Lau90]

$$e_{qh/qp}^* = \pm e\nu = \pm \frac{e}{m} . \quad (8.17)$$

Qualitativ wird dies für das Quasiloch anhand der Gleichung 8.9 deutlich, wo die Gesamtwellenfunktion an der Stelle  $\vec{r}_0$  verschwindet. Dort liegt eine Verarmung an Elektronen vor, wodurch der neutralisierende Ionenhintergrund vermehrt durchscheint und dem Quasiloch eine positive Ladung verleiht. In [Aro84] wurde gezeigt, daß die Quasilöcher und Quasiteilchen ferner einer fraktionalen Statistik unterliegen. Die Ursache dafür liegt darin, daß bei der Vertauschungsoperation zweier Quasilöcher (Quasiteilchen) eine statistische Phase

$$\gamma = \nu\pi = \frac{\pi}{m} \quad (8.18)$$

auftritt. Für  $m = 1$  gilt  $\gamma = \pi$  und aufgrund des damit verbundenen Vorzeichenwechsels entsprechen die Quasilöcher (Quasiteilchen) Fermionen. Bei  $m = 3, 5, \dots$  hingegen ist die statistische Phase fraktional und die Quasiteilchen (Quasilöcher) sind weder Bosonen ( $\gamma_B = 2\pi$ ) noch Fermionen ( $\gamma_F = \pi$ ). Entsprechend [Wil82b] werden sie als Anyonen (“any phase change”) bezeichnet, da sie nicht dem Spin-Statistik-Theorem gehorchen. Die Verletzung des Spin-Statistik-Theorems ist allerdings nur scheinbar, da die Quasilöcher (Quasiteilchen) einer FQH-Flüssigkeit im Gegensatz zu den sonst in der Natur üblichen Teilchen rein zweidimensionale Gebilde darstellen. Zurückgehend auf [Lei77] hängt die Statistik jedoch alleinig von der Raumtopologie ab. Diese läßt im dreidimensionalen nur  $\gamma = \pi, 2\pi$  und damit Fermionen und Bosonen zu. Im zweidimensionalen Raum jedoch besteht keinerlei derartige Einschränkung. Demzufolge sind Anyonen die natürlichen Teilchen-Anregungen in einer rein zweidimensionalen Welt. In [Aro84] ist dargelegt, daß die fraktionale Ladung und die fraktionale Statistik der Quasilöcher (Quasiteilchen) unmittelbar miteinander zusammenhängen.

In einer Reihe von Experimenten wurde mittlerweile nachgewiesen, daß die Laughlinschen Quasilöcher und Quasiteilchen nicht nur theoretische Gebilde darstellen, sondern als die eigentlichen Träger des elektrischen Stromes in FQH-Systemen fungieren [Sam97, dP97, Rez99]. Bei diesen Experimenten wurde das Tunneln von Ladungsträgern zwischen zwei gegenüberliegenden Randkanälen einer definierten Verengung im Q2DEG untersucht. Das Schottkysche Schrotrauschen des Tunnelstromes läßt dabei unmittelbare Rückschlüsse auf die Granularität der transportierten Ladung zu [Sch18, Kan94, Fen95]. Eine detaillierte Auswertung des Rauschverhaltens im Regime des FQHE ergab dabei für die Ladung der tunnelnden Teilchen die fraktionalen Werte 8.17. Dieses Ergebnis wird als unmittelbarer Beweis für die Existenz der Laughlinschen Quasilöcher (Quasiteilchen) als Träger des elektrischen Stromes angesehen.

Die Kenntnis der geladenen Wirbelzustände eröffnet abschließend eine tiefere Interpretation der Laughlin-Wellenfunktionen 8.8. Demnach bindet beim Füllfaktor  $\nu = 1/m$  jedes Elektron gerade  $m$  Wirbel (Nullstellen) der FQH-Flüssigkeit. Die Wirbel tragen jeweils eine positive Ladung  $e/m$  und führen so zu einer Ladungsverarmung um das Elektron, an dem sie gebunden sind. Durch das Anbinden der Wirbel vermeiden sich die Elektronen sehr effektiv und bilden so eine hoch korrelierte Quantenflüssigkeit, bei der die repulsive Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen insgesamt minimiert wird. Demnach stellt die Laughlin-Flüssigkeit einen stabilen gebundenen Zustand aus  $N$  Elektronen und  $N_\Phi = mN$  Wirbeln dar.

### 8.1.3 Das Verbundfermionenbild des FQHE

#### 8.1.3.1 Eichtransformation, Aharonov-Bohm-Phase und Verbundelektronen

Aufgrund der Eichinvarianz in der Elektrodynamik ist das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  bis auf einen von der Eichung abhängigen Beitrag  $\vec{A}_g(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$  unbestimmt [Jac62, Sak85]. Eine spezielle Eichtransformation ist durch

$$\Lambda(\varphi) = \frac{\Phi}{2\pi} \varphi \quad (8.19)$$

gegeben. Darin stehen  $\varphi$  für den Azimutwinkel in Zylinderkoordinaten und  $\Phi$  den magnetischen Fluß, der in einem infinitesimal dünnen Selenoid parallel zur z-Achse bei  $\vec{r} = 0$  konzentriert ist. Aus dieser Eichtransformation ergibt sich der Beitrag

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (8.20)$$

zum Vektorpotential, der abgesehen vom magnetischen Fluß bei  $\vec{r} = 0$  ansonsten mit keinem Magnetfeld verbunden ist. Umkreist ein Elektron ein solches Fluß-Selenoid, so erfährt die Wellenfunktion  $\psi$  aufgrund des Vektorpotentials  $\vec{A}_g(\vec{r})$  einen zusätzlichen Aharonov-Bohm-Phasenfaktor entsprechend [Aha59, Sak85]

$$\tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \exp \left[ -2\pi i \frac{\Lambda(\vec{r})}{\Phi_0} \right] \psi(\vec{r}, t) = \exp \left[ -i \frac{\Phi}{\Phi_0} \varphi \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (8.21)$$

wobei  $\Phi_0 = h/e$  für das elementare Flußquant steht. Speziell ein Elektron im untersten Landau-Niveau  $n_L = 0$  mit Aufpunkt-Quantenzahl  $m_L$  wird in Gegenwart eines Fluß-Selenoids mit  $\Phi = \pm\Phi_0$  bei  $\vec{r} = 0$  gemäß

$$\tilde{\psi}_{m_L}^{(\mp\Phi_0)}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{r}{\sqrt{2m_L l_m^2}} \tilde{\psi}_{m_L-1}(\vec{r}) & , \Phi = -\Phi_0 \\ \frac{\sqrt{2(m_L+1)l_m^2}}{r} \tilde{\psi}_{m_L+1}(\vec{r}) & , \Phi = +\Phi_0 \end{cases} \quad (8.22)$$

modifiziert. Dabei wird abgesehen von den Vorfaktoren ein Landau-Niveau mit  $m_L$  in das jeweils benachbarte mit  $m_L \mp 1$  vergleichbar einem Schieberegister transformiert. In komplexer Notation  $\zeta = x - iy$  wirkt die Transformation entsprechend  $\zeta^{m_L} \rightarrow \zeta^{m_L \mp 1}$  auf den Polynomanteil der Einteilchen-Landau-Orbitale 2.54.

Girvin und MacDonald legten in [Gir87] die Grundlage für die Chern-Simons-Feldtheorie und das CF-Bild des FQHE. Den Ausgangspunkt bildet die spezielle singuläre Eichtransformation

$$\vec{A}_g(\vec{r}, \vec{r}_k) = \frac{m\Phi_0}{2\pi} \hat{e}_z \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \quad (8.23)$$

mit  $\Phi = m\Phi_0$ . Mit Hilfe einer solchen Transformation wird einem Elektron mit Index  $k$  eine ganze Anzahl von  $|m|$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Flußquanten angeheftet.

Das Anheften virtueller Flußquanten hat in zwei Dimensionen einen tiefgreifenden Einfluß auf die Statistik der zusammengesetzten Teilchen [Wil82a, Wil82b]. Im zweidimensionalen entspricht nämlich die Operation der Teilchen-Vertauschung einer Drehung des einen Elektrons um  $\pi$  um das andere und einer anschließenden Translation beider Elektronen um den Verbindungsvektor. Bei einer Vertauschungsoperation respektive Relativdrehung um  $\pi$  führt der Aharanov-Bohm-Phasenfaktor 8.21 zu einem zusätzlichen Vorfaktor  $(-1)^m$  für die Gesamtwellenfunktion. Ist  $|m| = 2k$ ,  $k = (0), 1, 2, \dots$  geradzahlig, hat dieser Vorfaktor den Wert  $(-1)^{2k} = 1$  und die Gesamtwellenfunktion bleibt ungeachtet der Flußanhaftung fermionisch. Die mit einer geraden Anzahl von Flußquanten behafteten Elektronen werden entsprechend als Verbundfermionen oder Composite-Fermionen bezeichnet. Anders liegen die Verhältnisse, wenn die zusammengesetzten Elektronen eine ungerade Anzahl  $|m| = 2k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  an Flußquanten binden. In diesem Fall nimmt der Phasenvorfaktor für die Teilchen-Vertauschung den Wert  $(-1)^{2k+1} = -1$  an. Die fermionischen Elektronen transformieren daher infolge der Anhaftung einer ungeraden Anzahl von Flußquanten in zusammengesetzte Bosonen (Composite-Bosonen).

Aufgrund ihrer Flußquanten erzeugen die Verbundelektronen ein virtuelles Chern-Simons-Magnetfeld

$$\vec{b}(\vec{r}, t) = m\Phi_0 n(\vec{r}, t) , \quad (8.24)$$

das der Flußquantendichte und damit der Elektronendichte  $n(\vec{r}, t)$  proportional ist. Fließt ferner ein Elektronenstrom  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , führt der damit verbundene Strom an Flußquanten über das Faradaysche Induktionsgesetz zu einem elektrischen Chern-Simons-Feld

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = -m\Phi_0 \hat{e}_z \times \vec{j}(\vec{r}, t) , \quad (8.25)$$

das senkrecht zur Stromdichte orientiert und zu dieser proportional ist.

### 8.1.3.2 Verbundfermionen-Bild einkomponentiger FQH-Flüssigkeiten

Durch die Anheftung einer geraden Anzahl  $2p$  von Flußquanten an jedes Elektron wird der  $\nu = 1$ -Zustand  $\Psi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  in den Zustand

$$\tilde{\Psi}_{1,2p}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \left[ \prod_{k<l} e^{-i2p(\varphi_k - \varphi_l)} \right] \Psi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \left[ \prod_{k<l} \frac{(\zeta_k - \zeta_l)^{2p}}{|\zeta_k - \zeta_l|^{2p}} \right] \Psi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \quad (8.26)$$

überführt. Dieser Zustand entspricht bis auf die Nenner im geklammerten Produkt der von Laughlin aufgestellten Wellenfunktion  $\Psi_{1/(2p+1)}$  (siehe Gleichung 8.8). Jain leitete daraus unmittelbar die Wellenfunktionen [Jai89a, Jai92, Jai94]

$$\Psi_{n,2p}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = Z_{2p}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \Psi_n(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \quad (8.27)$$

ab. Bei dieser Form werden durch den Jain-Faktor  $Z_{2p} = \prod_{k<l} (\zeta_k - \zeta_l)^{2p}$  jedem Elektron im Integralen QH-Zustand  $\Psi_n$  mit  $n$  vollständig gefüllten Landau-Niveaus  $2p$  virtuelle Flußquanten angeheftet. Durch das Weglassen der Nenner im Jain-Faktor erhält die Wellenfunktion die notwendige Eigenschaft, daß die mit dem Anfügen der Flußquanten verbundene Flußerhöhung durch eine Vergrößerung der Systemausdehnung derart ausgeglichen wird, daß die magnetische Flußdichte  $B$  konstant bleibt [Jai89a]. In den Jain-Grundzuständen sind die Laughlin-Wellenfunktionen als Spezialfälle  $\Psi_{1,2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  enthalten.

Die Füllfaktoren der Jain-Zustände ergeben sich aus der Flußbilanz  $N_\Phi = N_S/n + 2p N_S$  zu

$$\nu = \frac{n}{2pn + 1} . \quad (8.28)$$

Dabei werden  $2p N_S$  Flußquanten für die Transformation der Elektronen in Composite-Fermionen (CF) benötigt und weitere  $N_S/n$ , um  $n$  CF-Landau-Niveaus vollständig aufzufüllen. Die Transformation von Elektronen in Verbundfermionen ist in Abbildung 8.2 veranschaulicht. Im daraus resultierenden Bild ist der FQHE als IQHE der Verbundelektronen aufzufassen, wodurch der FQHE und der IQHE eine anschauliche Vereinigung finden. Für den Fall, daß bei  $n > 1$  mehr als ein CF-Landau-Niveau vollständig besetzt wird, liegen die Zustände  $\Psi_n$ , auf denen die Jain-Zustände gründen, nicht mehr vollständig im untersten Landau-Niveau. Wie in [Jai89a] aufgezeigt ist, bewirkt allerdings der Jain-Faktor  $Z_{2p}$  eine sehr effektive Entmischung der betroffenen FQH-Zustände. Dabei nehmen die Amplituden  $a_{n_L}$  der höheren Landau-Niveaus  $n_L > 1$  mit der Teilchenzahl entsprechend  $a_{n_L}/a_0 \propto (1/\sqrt{N})^{n_L}$  ab, so daß die Jain-Zustände im thermodynamischen Limes (nahezu) vollständig im untersten Landau-Niveau  $n_L = 0$  zu liegen kommen.

Bei der fundamentalen Jain-Serie sind die Flußquanten parallel zum äußeren Magnetfeld orientiert. Es ist jedoch darüber hinaus auch eine antiparallele Ausrichtung der gebundenen Flußquanten zum externen Magnetfeld möglich. Die zugehörige Flußbilanz ergibt die Füllfaktoren

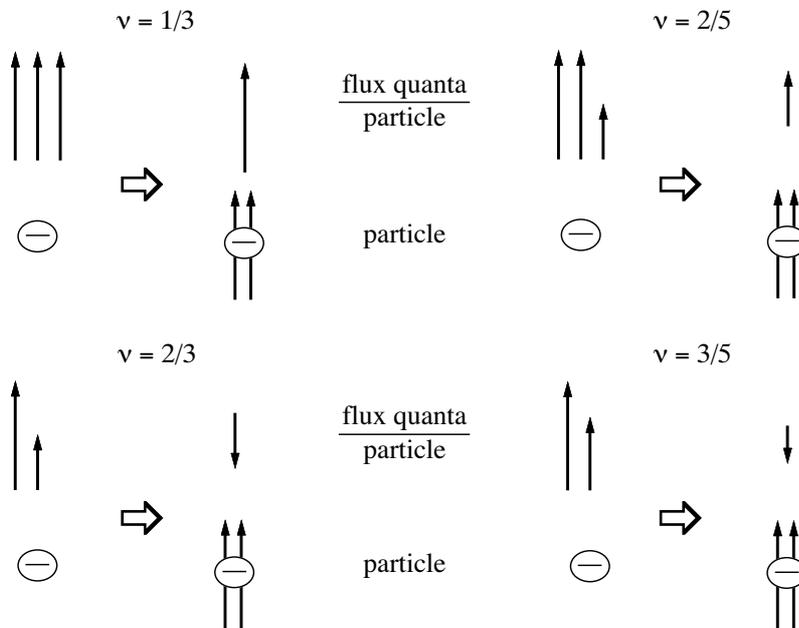
$$\nu = \frac{n}{2pn - 1} . \quad (8.29)$$

Die explizite Konstruktion ihrer Wellenfunktionen ist allerdings nicht derart offensichtlich wie diejenige bei paralleler Flußquanten-Ausrichtung. Über die betrachteten Füllungen hinaus gilt ohne Spinfreiheitsgrad die Elektron-Loch-Symmetrie zwischen den Füllungen  $\nu$  und  $1 - \nu$  und mit Spinfreiheitsgrad die Elektron-Loch-Symmetrie zwischen den Füllungen  $\nu$  und  $2 - \nu$ . Damit ergeben sich als weitere Zustände im Jain-Schema im Falle ohne Spin die Elektron-Loch-konjugierten Füllfaktoren

$$\nu = 1 - \frac{n}{2pn \pm 1} \quad (8.30)$$

und im Falle mit Spin die Elektron-Loch-konjugierten Füllfaktoren

$$\nu = 2 - \frac{n}{2pn \pm 1} . \quad (8.31)$$



**Abbildung 8.2:** Veranschaulichung der Transformation von Elektronen in Verbundfermionen für die prominentesten Jain-Zustände. Die reziproke Anzahl der ungebundenen Flussquanten pro Verbundfermion  $1/n_{\Phi} = \nu^* = 1, 2, 3, \dots$  entspricht der Anzahl an vollständig gefüllten CF-Landau-Niveaus und damit auch dem Zähler des Elektronen-Füllfaktors  $\nu = \nu^*/q$  des entsprechenden FQH-Zustandes.

In [Jai89a] wurde darauf hingewiesen, daß das CF-Bild und das hierarchische Bild, das in [Hal83] und [Hal84] entwickelt wurde, eng verwandt sind. Im hierarchischen Schema bilden sich auf den Laughlin-Zuständen bei Überfüllung ein Gas von Quasiteilchen und bei Unterfüllung ein Gas von Quasilöchern aus. Diese Gase kondensieren wiederum bei geeigneten Füllungen in inkompressible Zustände. Bei Über- bzw. Unterfüllung dieser abgeleiteten Zustände entstehen wiederum aus Quasiteilchen bzw. Quasilöchern zusammengesetzte Quasiteilchen bzw. Quasilöcher, die ihrerseits wiederum in inkompressible Zustände kondensieren können. Durch eine entsprechende Kaskadierung lassen sich so die höheren FQH-Zustände aus den fundamentalen Laughlin-Zuständen erzeugen. Betrachtet man beispielsweise den  $\nu = 2/5$ -Zustand, den man im Jain-Schema bei Vollfüllung zweier CF-Landau-Niveaus mit 2 angehefteten Flußquanten pro Elektron bekommt, so manifestiert sich dieser im hierarchischen Schema als Kondensat von  $N_S/2$  Quasiteilchen auf dem Laughlin-Zustand mit  $\nu = 1/3$ . Der Zustand bei  $\nu = 3/7$  mit 3 gefüllten CF-Landau-Niveaus ergibt sich im hierarchischen Schema aus dem letzteren durch Kondensation von  $N_S/3$  abgeleiteten Quasiteilchen. Im Jainschen Schema kommt bei der Serie  $1/3 \rightarrow 2/5 \rightarrow 3/7$  jeweils die Füllung eines weiteren CF-Landau-Niveaus hinzu. Die Anzahl der in einem CF-Landau-Niveau enthaltenen Verbundelektronen  $N_S/n$  stimmt dabei gerade mit der Anzahl der im hierarchischen Schema kondensierenden Quasiteilchen überein, was die Äquivalenz der beiden Bilder belegt.

Zuletzt werden kurz die Quasiloch- und Quasiteilchen-Anregungen auf den Jain-Zuständen betrachtet. Diese tragen die fraktionalen Ladungen [Jai89b]

$$e^* = \pm \frac{e}{2pn \pm 1} \quad (8.32)$$

und können analog zu den Laughlinschen Quasiteilchen und Quasilöchern entsprechend dem Abschnitt 8.1.2.2 durch Anwendung der Quasiteilchen- und Quasiloch-Erzeugungoperatoren konstruiert werden. Von Jain wurde basierend auf dem CF-Bild eine spezielle Konstruktion für die Quasiteilchen vorgeschlagen, die als exakt angesehen wird. Dazu wird dem Zustand  $\Psi_n$  ein weiteres Teilchen im nächsthöheren Landau-Niveau mit  $n_L = n$  hinzugefügt, und dieser Zustand  $\Psi_n^{(+1)}$  dann durch Anheften der entsprechenden Anzahl  $2p$  an Flußquanten in das Composite-Fermion-Bild transformiert [Jai89a, Jai89b]. Die Konstruktion der Quasilöcher erfolgt im Jain-Bild aus dem Zustand  $\Psi_n^{(-1)}$ , der ein fehlendes Teilchen im Zustand  $\Psi_n$  beschreibt. Nach

Anheften der Flußquanten resultieren für  $n = 1$  exakt die Laughlinschen Quasilöcher.

### 8.1.3.3 Metallisches CF-Gas und CF-Landau-Quantisierung

Für  $n \rightarrow \infty$  münden die Jain-Serien in die Füllfaktoren  $\nu = 1/2p$ ,  $p = 1, 2, \dots$  bzw.  $\nu = 1 - 1/2p$ . Bei diesen Füllungen werden unendlich viele CF-Landau-Niveaus  $\nu^* = n \rightarrow \infty$  besetzt, so daß das effektive Magnetfeld bei der Halbfüllung

$$B^* = B - B_{\nu=1/2} \quad (8.33)$$

gerade verschwindet.

Halperin, Lee und Read wiesen darauf hin, daß in diesem Fall  $\nu = 1/2p$  für das CF-Gas ein metallisches Verhalten zu erwarten ist, das sich in einer hohen Abschirmfähigkeit manifestiert [Hal93]. Entsprechend dem Abschnitt 8.1.3.1 erfahren die Verbundelektronen neben dem äußeren elektrischen und magnetischen Feld die Chern-Simons-Felder  $\vec{b}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{e}(\vec{r}, t)$ , die sich selbstkonsistent aus den Gleichungen 8.24 und 8.25 bestimmen. Als Hauptergebnis der Betrachtungen von Halperin, Lee und Read wird speziell bei  $\nu = 1/2$  für die Longitudinalleitfähigkeit die Abhängigkeit

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{8\pi\hbar} \frac{q}{k_F^*}, \quad q \gg l_{imp} \quad (8.34)$$

vorausgesagt. Darin bezeichnen  $k_F^* = \sqrt{2}k_F = \sqrt{4\pi N_S}$  den Fermi-Wellenvektor der Verbundfermionen und  $l_{imp}$  die mittlere freie Transportweglänge. Ersterer unterscheidet sich aufgrund der vollständigen Spinpolarisation um einen Faktor  $\sqrt{2}$  vom Fermi-Wellenvektor der Elektronen  $k_F$ . Eine solche Leitfähigkeit erklärt die experimentell beobachtete Dissipation von piezoelektrischen Rayleigh-Oberflächenwellen [Wil93], die durch das CF-Gas bei  $\nu = 1/2$  besonders gedämpft werden.

Das Verhalten bei kleinen  $B^*$  kann in guter Näherung semi-klassisch beschrieben werden [Fle96]. In einer solchen Beschreibung stellt der CF-Zyklotronradius

$$R^* = \frac{\hbar k_F^*}{eB^*} \quad (8.35)$$

die entscheidende Größe dar. Ein Großteil der experimentellen Bestätigungen des CF-Bildes basiert auf Q2DEG, die mit geeigneten Mikrostrukturen versehen sind. Die Nachweise beruhen auf Resonanzerscheinungen im Magneto-Transport, die dann auftreten, wenn der CF-Zyklotronradius  $R^*$  bei Durchstimmung von  $N_S$  oder  $B$  in Übereinstimmung mit der für die Struktur charakteristischen Länge gebracht wird. Exemplarisch seien hier die Kommensurabilitätsoszillationen in Antidot-Übergittern [Kan93], sowie die Fokussierresonanzen in speziellen Gatterstrukturen [Sme96] genannt, die insgesamt das CF-Bild des FQHE bestätigen.

Verläßt man das semiklassische Regime kleiner  $B^*$ , so bilden sich CF-Landau-Niveaus aus, die in guter Näherung durch die Niveauenergien

$$\epsilon_{CF}(n_L, \sigma) = \hbar \frac{e|B^*|}{m_{CF}^*} \left( n_L + \frac{1}{2} \right) \quad (8.36)$$

beschrieben werden. Darin bezeichnet  $m_{CF}^*$  die effektive Masse der Verbundfermionen, die ihren Ursprung in der Elektron-Elektron-Wechselwirkung hat und damit vollständig auf potentieller Energie beruht.  $n_L$  be-

zeichnet den CF-Landau-Index. Das Abschnüren der Landau-Niveaus in der CF-Zustandsdichte führt zuerst zu Shubnikov-de Haas-Oszillationen im Magneto-Widerstand und bei entsprechenden Probenparametern schließlich auch zur Quantisierung des Hall-Widerstandes bei den entsprechenden fraktionalen Füllfaktoren. Eine experimentelle Bestimmung der CF-Masse erfolgt mittels Shubnikov-de Haas-Messungen [Lea94, Du,94], Messungen der Aktivierungsenergie [Du,93, Man94] oder Lumineszenzmessungen [Kuk94]. Der direkteste Nachweis wurde jedoch in [Kuk02] erbracht. Darin gelang es in Mikrowellenabsorptionsexperimenten die CF-Zyklotronresonanzen, die im CF-Landau-Schema Übergängen mit  $n_L \rightarrow n_L + 1$  entsprechen und die Übergangsenergie  $\hbar\omega_c^*$  besitzen, unmittelbar zu detektieren. Die experimentell bestimmten Massenwerte für die Verbundelektronen bewegen sich typischerweise im Regime  $0.5 m_e < m_{CF}^* < 1.1 m_e$  [Du,94]. Gemäß dem CF-Bild skalieren die Energielücken für die fundamentalen Jain-Serien 8.28 und 8.29 unter der Annahme einer weitgehend konstanten CF-Zyklotronmasse gemäß

$$\hbar\omega_c^* \approx \hbar \frac{eB_{\nu=1}}{m_{CF}^*} \frac{1}{|p|} . \quad (8.37)$$

Dieses Verhalten wurde experimentell mit Aktivierungsmessungen im bestätigt und erklärt die Hierarchie der FQH-Zustände auf transparente Weise. Damit ist das CF-Bild nicht nur in der Lage einige FQH-Zustände zu beschreiben, sondern ein übergreifendes Bild des FQH-Effektes zu liefern. Dieses vermag sowohl die FQH-Füllungen selbst, ihre Hierarchie als auch die Übergangsbereiche zu erklären [Sto96].

Beim CF-Bild des FQHE wird eine hoch-korrelierte Elektronenflüssigkeit durch die Flußanhaftung auf ein Gas von schwach wechselwirkenden Verbundelektronen transformiert. Die Restwechselwirkungen zwischen den CF sind dabei sehr viel schwächer als die zwischen den nackten Elektronen, so daß das Einteilchen-Bild für die Verbundfermionen bereits eine gute Näherung darstellt. In diesem Bild erscheint der FQHE als IQHE der zusammengesetzten und effektiv nur schwach wechselwirkenden CF. In [Pan03] wurden darüber hinaus experimentelle Hinweise für einen FQHE der Verbundfermionen selbst gefunden. Hierbei bilden sich aufgrund der Restwechselwirkungen zwischen den Verbundfermionen bei fraktionalen CF-Füllungen  $\nu^* = n + p^*/q^*$ ,  $n, p^* = 0, 1, 2, \dots$ ,  $q^* = 3, 5, 7, \dots$  Jain-Zustände auf einem Verbundfermionen-Gas aus. Diese speziellen CF-Füllungen entsprechen den Elektronen-Füllungen  $\nu = \nu^*/(2p\nu^* \pm 1)$  und weisen Lücken im Anregungsspektrum auf, die wiederum Anlaß zu inkompressiblen höheren FQH-Zuständen geben. Beispielsweise können in einem solchen Schema die Ursprünge der FQH-Zustände bei den Füllfaktoren  $\nu = 4/11$ ,  $\nu = 5/13$ ,  $\nu = 6/17$ ,  $\nu = 4/13$ ,  $\nu = 5/17$  und  $\nu = 7/11$  erklärt werden. Diese Zustände entsprechen im CF-Bild den CF-Füllungen  $\nu_2^* = 1 + 1/3$ ,  $\nu_3^* = 1 + 2/3$ ,  $\nu_5^* = 1 + 1/5$ ,  $\nu_{-4}^* = 1 + 2/3$ ,  $\nu_{-4}^* = 1 + 1/3$  und  $\nu_{-2}^* = 2 + 1/3$ , wobei der tiefgestellte Index die Zahl und Orientierung der einem Elektron anhaftenden Flußquanten kennzeichnet. Demnach besteht innerhalb des FQHE eine Selbstähnlichkeit, nach der sich das CF-Schema auch in den höheren FQH-Zuständen für die Verbundfermionen selbst wiederfindet.

#### 8.1.3.4 Verbundfermionen-Bild unter Beteiligung des Spins

Eine Erweiterung der CF-Theorie um den Spinfreiheitsgrad ist auf konzeptionell einfache Weise möglich. Hierzu werden in den Jain-Zuständen 8.27 anstelle der einkomponentigen Zustände  $\Psi_n(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  mit  $n$  vollständig besetzten Landau-Niveaus die zweikomponentigen Zustände  $\Psi_{n_+, n_-}(\zeta_1, \dots, \zeta_{N_+}; \zeta_1, \dots, \zeta_{N_-})$  mit  $n = n_+ + n_-$  eingesetzt. Diese bestehen aus  $n_+ = 0, 1, 2 \dots$  Landau-Niveaus mit paralleler und  $n_- = 0, 1, 2 \dots$  Landau-Niveaus mit antiparalleler Orientierung zum externen Magnetfeld [Jai89b]. Die zweikomponentigen Jain-Zustände lauten explizit

$$\Psi_{n_+, n_-, 2p} = Z_{2p} \Psi_{n_+, n_-} \quad (8.38)$$

und besitzen die partiellen Elektronen-Füllfaktoren

$$\begin{aligned}\nu_+(n_+, n_-, 2p) &= \frac{n_+}{2p(n_+ + n_-) \pm 1} , \\ \nu_-(n_+, n_-, 2p) &= \frac{n_-}{2p(n_+ + n_-) \pm 1}\end{aligned}\quad (8.39)$$

und den Polarisationsgrad

$$P(n_+, n_-, 2p) = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-} . \quad (8.40)$$

In [Du,95, Du,97] wurde auf den experimentellen Befunden um  $\nu = 3/2$  basierend ein einfaches CF-Einteilchen-Modell entwickelt. Dieses ist in der Lage, die wesentliche Phänomenologie der zweikomponentigen FQH-Flüssigkeiten wiederzugeben. In Anlehnung an das Elektronen-Landau-Schema wird der CF-Landau-Fächer gemäß

$$\epsilon_{CF}(n_L, \sigma) = \hbar \frac{e|B^*|}{m_{CF}^*} \left( n_L + \frac{1}{2} \right) + g_{CF}^* \mu_B B \sigma \quad (8.41)$$

um einen Zeeman-Term erweitert, wobei  $n_L = 0, 1, 2, \dots$  den CF-Landau-Index und  $g_{CF}^*$  den g-Faktor der CF bezeichnet. In den Zeeman-Beitrag geht im Gegensatz zum Orbitalbeitrag das totale Magnetfeld ein. Deshalb weisen die Verbundfermionen auch im magnetfeldfreien Fall  $B^* = 0$  eine Zeeman-Lücke auf. Nach diesem Schema findet eine Durchkreuzung zweier Spin-CF-Landau-Niveaus dann statt, wenn ganzzahlige Vielfache der CF-Zyklotronenergie und der CF-Zeeman-Energie gerade übereinstimmen, gemäß der Bedingung

$$\hbar \frac{e|B^*|}{m_{CF}^*} j = g_{CF}^* \mu_B B , \quad j = 1, 2, \dots . \quad (8.42)$$

Das Verhältnis  $B/|B^*|$  für solche Durchkreuzungen liegt auf einem Fächer

$$\frac{B}{|B^*|} = j \Lambda_{CF} , \quad j = 1, 2, \dots , \quad (8.43)$$

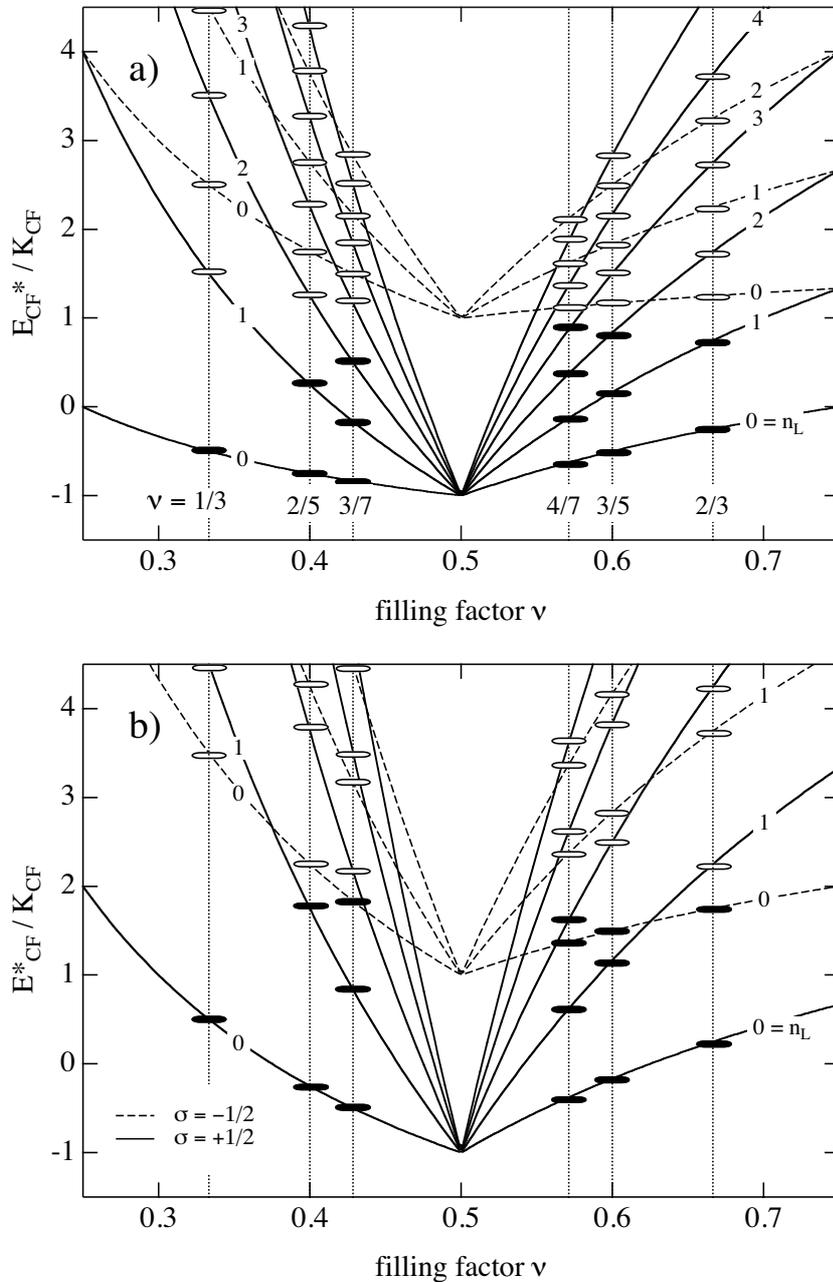
der durch die Größe  $\Lambda_{CF} = \hbar e / (\mu_B g_{CF}^* m_{CF}^*) = 2m_e / (g_{CF}^* m_{CF}^*)$  parametrisiert ist und im  $B-|B^*|$ -Phasenraum die Phasengrenzen zwischen FQH-Flüssigkeiten unterschiedlichen Polarisationsgrades markiert.

Nach Umstellung von Gleichung 8.41 und unter Verwendung der Beziehungen  $B = B_{\nu=1}/\nu$ ,  $B^* = B_{\nu=1} (1/\nu - 2)$  und  $B_{\nu=1} = N_S \hbar / e$  (siehe Gleichung 2.63) gelangt man um  $\nu = 1/2$  zu dem Ausdruck

$$\frac{\epsilon_{CF}(n, \sigma)}{K_{CF}} = \Lambda_{CF} \left| \frac{1}{\nu} - 2 \right| \left( n_L + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\nu} \sigma \quad (8.44)$$

für das auf die Energieskala  $K_{CF} = (\hbar/e) N_S \mu_B g_{CF}^*$  normierte CF-Landau-Niveauschema als Funktion des Füllfaktors. Das CF-Energieschema ist in dieser Darstellung alleinig durch  $\Lambda_{CF}$  bestimmt und in Abbildung 8.3 veranschaulicht. Die beiden Teilfiguren zeigen die Niveauschemata für die beiden Fälle, daß a) nur spinpolarisierte und b) auch teilweise polarisierte ( $\nu = 3/7, 3/5, 4/7$ ) oder unpolarisierte ( $\nu = 2/3$ ) Grundzustände bei den fraktionalen Füllfaktoren vorkommen. Aus Gründen der Einfachheit wird in beiden Fällen  $\Lambda_{CF}$  als unabhängig vom Füllfaktor betrachtet.

Unter Berücksichtigung des Spins gilt in zweikomponentigen FQH-Flüssigkeiten die Elektron-Loch-Kon-



**Abbildung 8.3:** CF-Landau-Fächer als Funktion des Füllfaktors. In a) ist der Parameter  $\Lambda_{CF} = 0.25$  so gewählt, daß aufgrund der großen Zeeman-Lücke nur vollständig polarisierte Grundzustände bei den fraktionalen Füllfaktoren  $\nu = \nu^*/q$  vorkommen, bei denen  $\nu^* = 1, 2, 3, 4, \dots$  CF-Landau-Niveaus vollständig aufgefüllt sind ( $q = 3, 5, 7, \dots$ ). In b) ist für  $\Lambda_{CF} = 0.5$  die Zeeman-Lücke derart klein, daß auch teilweise oder unpolarisierte Grundzustände vorliegen, wenn CF-Niveaus der energetisch höheren Spineinstellung besetzt werden. Die durchgezogenen Verläufe markieren die Energien der energetisch abgesenkten und die gestrichelten Linien die der energetisch angehobenen Spin-Niveaus. Die senkrechten Linien kennzeichnen die Füllfaktoren der prominentesten Jain-Grundzustände. Die CF-Landau-Niveaus und ihr Füllgrad (leer weiß oder vollständig gefüllt schwarz) sind durch die taschenartigen Felder angedeutet.

jugation zwischen den Füllfaktoren  $\nu$  und  $2 - \nu$ . Die zur Jain-Serie  $\nu = n/(2n \pm 1)$  Elektron-Loch-konjugierte Serie ist dementsprechend  $\nu = (3n \pm 2)/(2n \pm 1)$  und entwickelt sich aus dem zu  $\nu = 1/2$  konjugierten Füllfaktor  $\nu = 3/2$  heraus. Das effektive CF-Magnetfeld um  $\nu = 3/2$  beträgt

$$B^* = 3 \left( B_{\perp} - B_{\perp, \nu = \frac{3}{2}} \right) \quad (8.45)$$

und ergibt sich aus der Anhaftung von 2 Flußquanten an jedes Loch gegenüber  $\nu = 2$ . Die Lochdichte bei  $\nu = 3/2$  beträgt  $N_H = N_S/3$ , woraus unmittelbar der Vorfaktor 3 in Gleichung 8.45 resultiert. Die Überprüfung des CF-Modells mit Spin um  $\nu = 3/2$  in [Du,95, Du,97] ergab eine sehr gute Übereinstimmung der Phasengrenzen zwischen FQH-Grundzuständen unterschiedlicher Polarisation mit der Gleichung 8.43. Bei den Phasengrenzen verschwinden bei Durchstimmung von  $B$  gegenüber  $B^* = const$  unter Variation des Verkip-

pungswinkels zunächst vorhandene FQH-Signaturen bei  $B_j$ , um dann später wieder aufzutauchen.

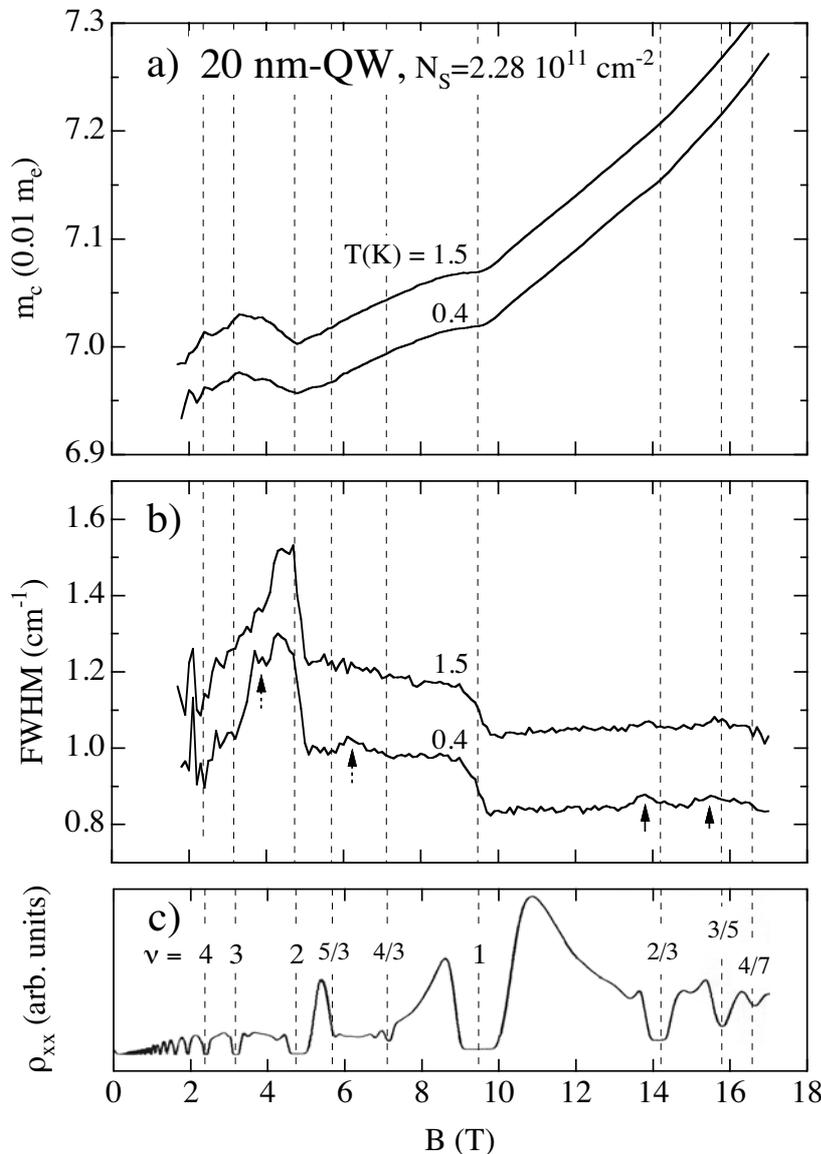
Eine detaillierte Auswertung des Produktes  $g_{CF}^* m_{CF}^*$  unter Zuhilfenahme der aus Shubnikov-de Haas-Messungen bestimmten CF-Masse  $m_{CF}^*$  ergab einen CF-g-Faktor  $g_{CF}^* = g_{CF,3/2}^* + \alpha B^* = 0.61 + 0.08 (T^{-1}) B^*$  [Du,95, Du,97]. Dieser liegt sehr nahe bei dem Wert  $|g_0^*| = 0.44$  für die Elektronen und ist, was die Abhängigkeit von  $B^*$  andeutet, gegenüber dem Elektronenwert durch Wechselwirkungseffekte gemäß  $g_{CF}^* = 0.42 (1 + I P)$  abhängig vom Polarisationsgrad  $P$  mit  $I \approx 1.5$  kollektiv verstärkt. Eine solche kollektive Erhöhung ist ein weiteres Indiz für eine Restwechselwirkung, die zwischen den CF wirkt und die Ursache für den FQHE der Verbundfermionen selbst bildet, wie er in [Pan03] nahegelegt wird.

## 8.2 Experimentelle Zyklotronresonanz im Regime des FQHE

Aufgrund des Kohnschen Theorems ist in einem Q2DEG ohne Störstellen und mit einer parabolischen Bandstruktur kein Einfluß des FQHE auf die Zyklotronresonanz vorhanden. Damit Signaturen des FQHE auch in der Zyklotronresonanz sichtbar werden, bedarf es der Verletzung des Kohnschen Theorems entweder durch Streuung oder durch die Nichtparabolizität der Energiedispersion aufgrund der realen Bandstruktur und des Polaron-Effektes. Bislang wurde jedoch aufgrund der Kleinheit der Effekte und der in Einfachheterostrukturen entsprechender Qualität häufig dominierenden resonanten Subband-Landau-Niveau-Kopplung (RSLLC) keine eindeutige Manifestation des FQHE in der Zyklotronresonanzfrequenz ausgemacht. Die ersten Zyklotronresonanzexperimente im Regime des FQHE zeigten eine signifikante Verringerung der Resonanzbreite mit Eintritt in den Quantengrenzfall  $\nu < 1$ , jedoch keine besonderen Auffälligkeiten bei den fraktionalen Füllungen selbst [Sch87]. In [Rik85] und [Sei87] wurden bei einer detaillierteren Analyse Resonanzverbreiterungen bei den Füllfaktoren  $\nu = 2/3, 4/3$  und  $5/3$  nachgewiesen, die mit der Abnahme der Intra-Landau-Niveau-Abschirmung infolge der Ausbildung der inkompressiblen FQH-Lücken erklärt wurden. In [Bes93] wird ferner von Anomalien in der Zyklotronmasse bei  $\nu = 2/3, 4/3$  und  $5/3$  berichtet.

Die nachfolgenden Ausführungen widmen sich einer systematischen Durchleuchtung der Zyklotronresonanz im Regime des FQHE. Um insbesondere auch subtile Variationen in der Linienlage nachweisen zu können, wurden im Experiment vornehmlich hochbewegliche enge Quantentröge untersucht. Diese weisen aufgrund ihrer hohen Subband-Abstände die bei den Einfachheterostrukturen meist dominierende und feine Variationen überdeckende RSLLC nicht auf und lassen so eine Untersuchung der Effekte zu, die mit der Elektron-Elektron-Wechselwirkung und damit dem FQHE zusammenhängen.

Die Abbildung 8.4 zeigt zur Übersicht zunächst die ausgewerteten Zyklotronmassen und Linienbreiten für einen hochbeweglichen Quantentrog mit einer Trogbreite von  $d_w = 20$  nm für die Temperaturen  $T = 0.4$  K und  $T = 1.5$  K. Die Massenvariationen für  $T \geq 1.5$  K wurden bereits in den Abschnitten 7.2.2 und 7.2.3 ausführlich erläutert. Die Ausprägung der FQH-Signaturen bei den Füllungen  $\nu = 2/3, 3/5$  und  $4/7$  sowie in schwächerer Form bei  $\nu = 4/3$  und  $5/3$  wird durch die gemessenen Magneto-Transportkurven belegt. Man erkennt an den Auftragungen in a) und b), daß die Zyklotronresonanz im Gegensatz zum Magneto-Widerstand von der Ausbildung der FQH-Zustände kaum merklich beeinflusst wird. Lediglich in der Linienbreite sind in der Nähe von  $\nu = 2/3$  und  $3/5$  sowie  $\nu = 3/2$  und  $5/2$  Überhöhungen ausmachbar, die mit der Absenkung der Temperatur und damit der Ausbildung des FQHE zusammenhängen. Für die Füllungen  $\nu = 2/3$  und  $3/5$  wurden qualitativ vergleichbare Befunde bereits in [Rik85] und [Sei87] geschildert.

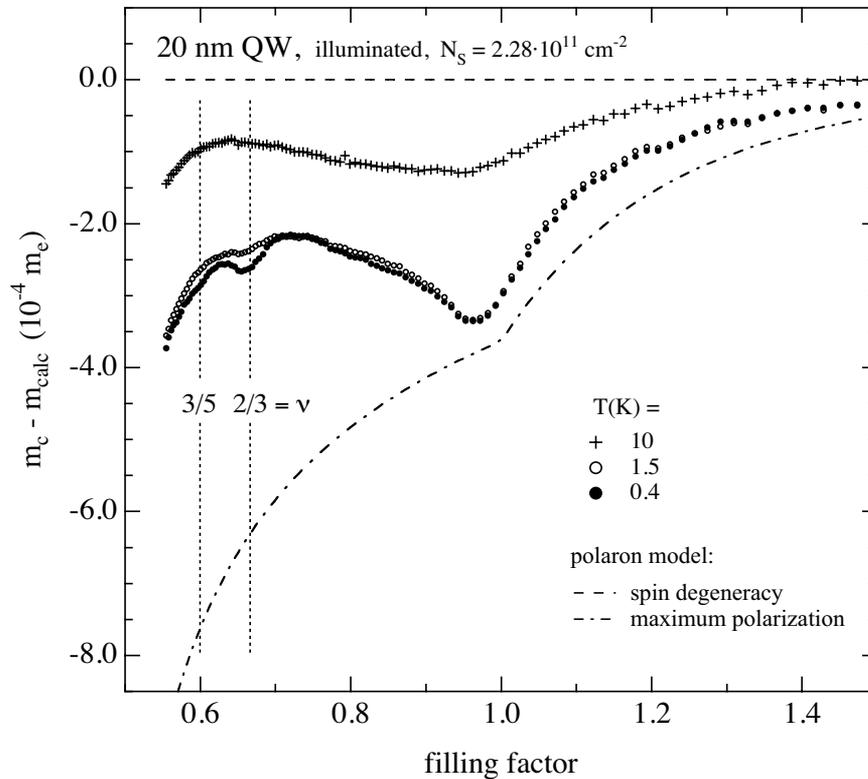


**Abbildung 8.4:** Zyklotronmasse und Linienbreite eines 20 nm-Quantentroges als Funktion des Magnetfeldes bei  $T = 0.4$  K und  $T = 1.5$  K. In den Teilfiguren a) und b) sind die Massen- bzw. Linienbreitenverläufe zur besseren Übersicht gegeneinander verschoben. Die senkrechten Linien deuten die ausgezeichneten Füllfaktoren an. Aus der bei  $T = 0.4$  K gemessenen Transportkurve in c) gehen die Füllfaktoren und damit auch die Elektronendichte hervor. Veränderungen, die mit der Absenkung der Temperatur zusammenhängen, sind durch Pfeile angezeigt.

### 8.2.1 Manifestation der FQH-Zustände in der Zyklotronmasse

Variationen in der Zyklotronfrequenz respektive Zyklotronmasse sind in der direkten Auftragung aufgrund ihrer Kleinheit kaum erkennbar. Zur besseren Hervorhebung kleiner Variationen zeigen daher die Abbildungen 8.5 und 8.6 die bei tiefen Temperaturen gemessenen Zyklotronmassen in einer Auftragung gegen den Füllfaktor, die auf dem im Abschnitt 7.2.4 dargelegten Modell der polaronischen Zyklotronresonanz basiert. Dieses Modell gestattete es unter Verwendung einer skyrmionischen Spinpolarisation den Einbruch der Zyklotronmasse um  $\nu = 1$  nahezu quantitativ zu beschreiben. Man erkennt an diesen Auftragungen, daß Abweichungen zwischen der bei  $T = 1.5$  K und der bei  $T = 0.4$  K gemessenen Zyklotronmasse auftreten, die insbesondere für den Quantentrog bei  $\nu = 2/3$  zu einem lokalen Minimum und für die Heterostruktur zu einer mit  $\nu \approx 0.75$  einsetzenden stufenartigen Massenabsenkung führen. Dabei dominieren für die Heterostruktur im Regime  $\nu < 1$  die bis an das dritte angeregte Subband reichenden resonanten Subband-Landau-Niveauekopplungen (RSLLC), so daß keine mit den fraktionalen Füllfaktoren zusammenhängende Strukturen wahrnehmbar sind.

Um einen tieferen Einblick zu bekommen, zeigt die Figur 8.7 die relative Massenänderung  $\Delta m_c / m_c =$

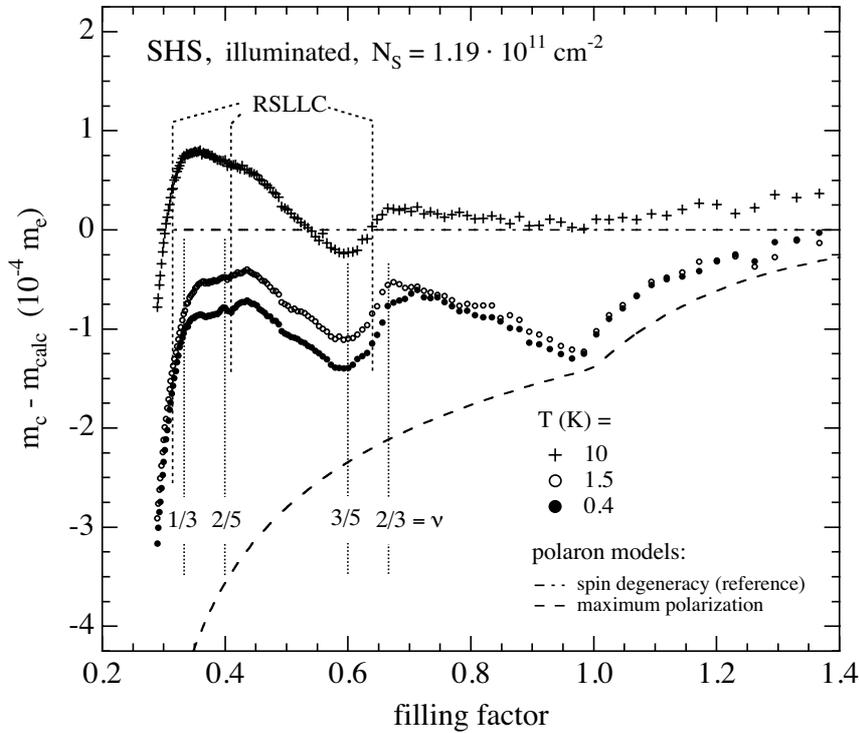


**Abbildung 8.5:** Experimentell ermittelte Zyklotronmassen relativ zur Anpassung an das polaronische Referenzmodell aus Abschnitt 7.2.3 für einen 20 nm-Quantentrog. Dargestellt ist jeweils die Massendifferenz gegenüber dem theoretischen Verlauf für den spinentarteten Fall als Funktion des Füllfaktors. Die Symbole kennzeichnen die experimentellen Werte und die durchgezogenen Kurven die berechneten Massenverläufe. Die Parameter der Anpassung entsprechen denen der Figur 7.12.

$[m_c(0.4 \text{ K}) - m_c(1.5 \text{ K})]/m_c(1.5 \text{ K})$  als Funktion des Füllfaktors im Regime  $\nu < 2$ . In dieser Auftragung werden Variationen in der Zyklotronmasse sichtbar, die mit der Ausbildung des FQHE bei tiefen Temperaturen zusammenhängen und die bereits durch eine geringe thermische Aktivierung beeinflusst werden. Den Massenverläufen sind zum Vergleich die ausgewerteten Linienbreiten für  $T = 0.4 \text{ K}$  unterlegt. In den Inserts sind die Magneto-Transportkurven aufgetragen, aus denen die FQH-Füllungen hervorgehen.

In der Teilfigur a) erkennt man für den 20 nm-Quantentrog, dessen vergleichsweise hohe Dichte durch den persistenten Photoeffekt eingestellt wurde, lokale Minima in der Massenänderung bei den Füllungen  $\nu = 2/3$  und  $3/5$ . Diese wurden bereits in [Bes93] experimentell beobachtet. Für den identischen unbeleuchteten Quantentrog bildet sich bei der geringen Dichte ein ausgeprägtes Maximum bei  $\nu = 1/3$  aus. Bei dieser Dichte unterscheidet sich das Ergebnis für  $\nu = 2/3$  quantitativ und qualitativ deutlich von der hohen Dichte in Teilfigur a). Anstelle eines Minimums tritt ein breites Maximum auf, das annähernd die Nulllinie erreicht. Die Nulllinie zeigt dabei an, daß die Zyklotronmasse in diesem Regime bei tiefen Temperaturen keine Temperaturabhängigkeit aufweist. Unter Zuhilfenahme der Transportdaten, die bei  $\nu = 2/3$  kein FQH-Minimum zeigen, kann man darauf schließen, daß dort im Gegensatz zu a) kein FQH-Zustand ausgebildet ist. Wie man der Linienbreite in der Abbildung c) entnimmt, dominiert für die Einfachheterostruktur die resonante Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC). Da diese jedoch im Regime des FQHE nicht von der Temperatur abhängt, tritt sie in der Massenänderung  $\Delta m_c/m_c$  nicht auf. Aus diesem Grund sind die feinen Variationen aufgrund des FQHE auch hier sichtbar. In dieser Struktur sind bei den Füllungen  $\nu = 2/3$  und  $3/5$  lokale Minima, bei  $\nu = 1/3$  und  $2/5$  hingegen lokale Maxima wahrnehmbar. Damit faßt die Einfachheterostruktur das Verhalten zusammen, das im Quantentrog bei unterschiedlichen Dichten getrennt beobachtet wird. Sämtliche beobachtbaren Massenänderungen bewegen sich betragsmäßig auf einem Niveau  $< 0.4$  Promille und fallen für die Füllungen  $\nu = 1/3$  und  $\nu = 2/3$  bis auf das Vorzeichen in ihrem Betrag ähnlich aus.

Die augenfällige Absenz des FQH für  $\nu = 2/3$  in b) beruht auf dem Elektronenspin. Im Bild der Ver-

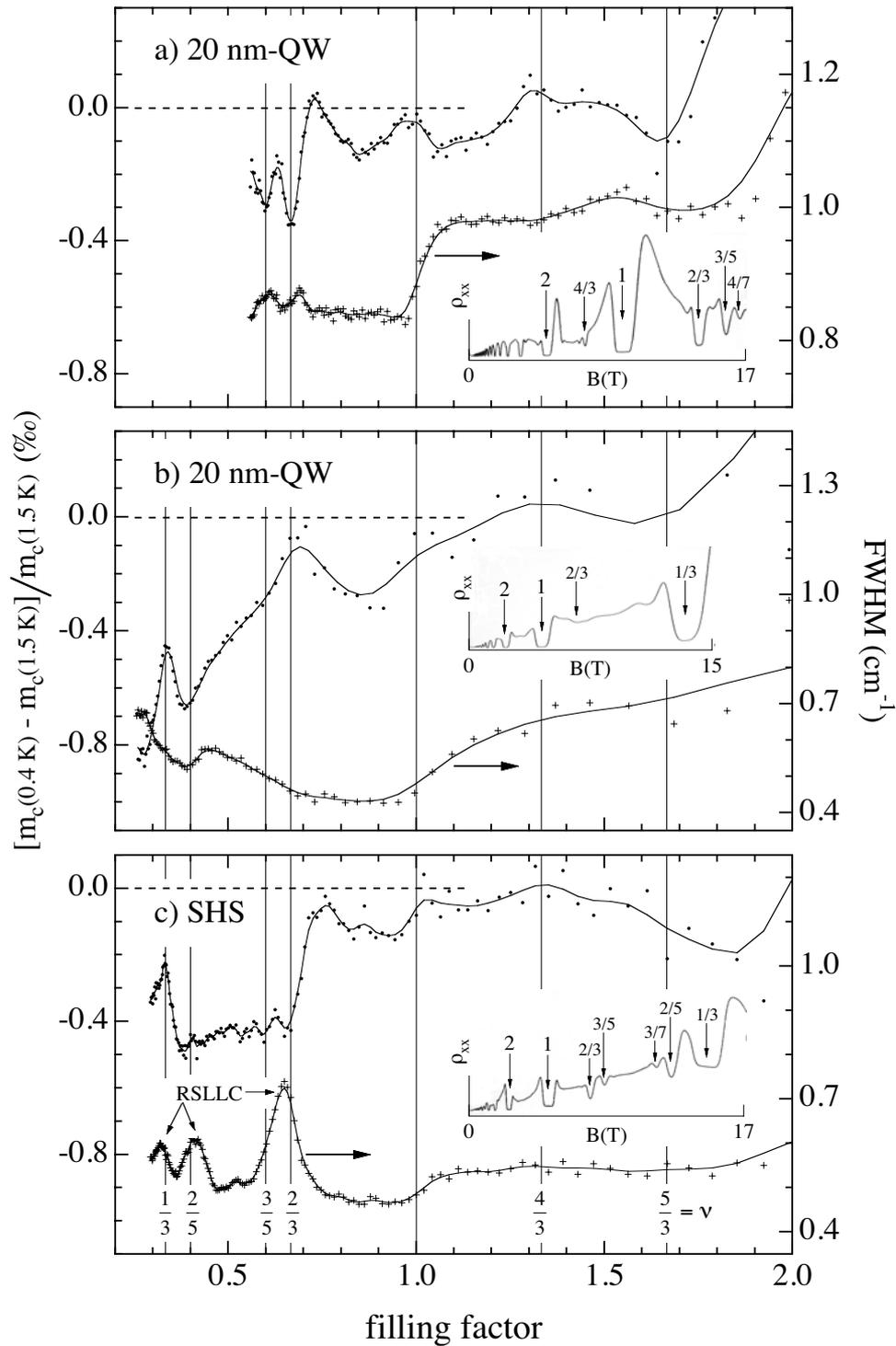


**Abbildung 8.6:** Experimentell ermittelte Zyklotronmassen relativ zur Anpassung an das polaronische Referenzmodell aus Abschnitt 7.2.3 für eine Einfachheterostruktur. Dargestellt ist jeweils die Massendifferenz gegenüber dem theoretischen Verlauf für den spinentarteten Fall als Funktion des Füllfaktors. Die Symbole kennzeichnen die experimentellen Werte und die durchgezogenen Kurven die berechneten Massenverläufe. Die Parameter der Anpassung entsprechen denen der Figur 7.13.

bundfermionen können die CF-Landau-Niveaus unterschiedlicher Spineinstellung (CF-Zeeman-Aufspaltung) energetisch entarten (siehe dazu Figur 8.3), daß sich kein inkompressibler Grundzustand mehr ausbilden kann. Diese Situation liegt offenbar in der Teilfigur b) vor, während in den Teilfiguren a) und c) die FQH-Signaturen vollständig ausgeprägt sind. Da die Magnetfelder für  $\nu = 2/3$  sowohl in a) als auch in c) höher liegen als in b), kann davon ausgegangen werden, daß dort die Zeeman-Aufspaltung  $E_Z \propto B$  die Coulomb-Energie  $E_C \propto \sqrt{B}$  überwiegt und deshalb dort vollständig polarisierte FQH-Grundzustände für  $\nu = 2/3$  vorliegen. Allerdings ist eine vollständige Spinpolarisation, an den Auftragungen 8.5 und 8.6 nicht erkennbar. Im Gegensatz zu  $\nu = 1$  erreicht die Masse in beiden Systemen bei weitem nicht den theoretischen Verlauf, der für ein vollständig spinpolarisiertes Polaron-Gas vorhergesagt wird. Als Erklärung für diesen Befund liegt zuerst die bei  $\nu = 1$  nicht vorhandene Abschirmung über virtuelle Intra-Landau-Niveaueübergänge nahe, welche die Elektron-Phonon-Kopplung stark abschwächt und zu einer Verringerung der Massenaufspaltung zwischen einem unpolarisierten und einem maximal polarisierten Elektronengas führt.

Nimmt man die Ergebnisse aus Abbildung 8.7 zusammen, so ist experimentell für vollständig polarisierte FQH-Flüssigkeiten bei Füllfaktoren  $\nu < 1/2$  eine Überhöhung und bei Füllungen  $\nu > 1/2$  hingegen eine Absenkung der relativen Massenänderung ausmachbar. Ein qualitativ ähnliches Verhalten ist in Teilfigur a) auch bei den Füllfaktoren  $\nu = 4/3$  und  $5/3$  erkennbar, die im polarisierten Fall mit den Füllfaktoren  $\nu = 1/3$  und  $\nu = 2/3$  vergleichbar sind. Es tritt für  $1 < \nu < 3/2$  eine Überhöhung und für  $3/2 < \nu < 2$  eine Absenkung der relativen Massenänderung auf. Allerdings sind hier die Transportdaten nicht derart klar wie für  $\nu < 1$ . Speziell bei  $\nu = 5/3$  sind sowohl in a) als auch in b) die FQHE-Signaturen kaum wahrnehmbar.

Eine Erhöhung der Zyklotronmasse bei Ausbildung eines FQH-Zustandes, wie sie für Füllungen  $\nu < 1/2$  auftritt, kann durch eine Reihe von Effekten verursacht sein:



**Abbildung 8.7:** Relative durch thermische Aktivierung induzierte Änderungen in der Zyklotronmasse (Punkte) und Zyklotronresonanz-Linienbreiten (Kreuze, Pfeile auf rechte Achse) als Funktion des Füllfaktors für drei unterschiedliche Q2DEG-Systeme. Die Teilbilder a) und b) zeigen die Messergebnisse für einen 20 nm-Quantentrog nach ( $N_S = 2.28 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ) bzw. vor Beleuchtung ( $N_S = 1.06 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ) mit NIR-Strahlung und c) für eine Einfachheterostruktur ( $N_S = 1.19 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ). Die Symbole kennzeichnen die Messwerte und die durchgezogenen Linien glättende Interpolationskurven. Die Inserts zeigen jeweils die Verläufe des Magneto-Widerstandes bei  $T = 0.4 \text{ K}$ , aus denen die fraktionellen Füllungen und die Elektronendichte ausgewertet wurden.

Einmal werden in Gegenwart von Streuzentren im kompressiblen Fall die energetisch tiefliegenden Täler der Potentiallandschaft bevorzugt besetzt, so daß die dort vorherrschende positive Potentialkrümmung die Zyklotronresonanz zu höheren Energien verschiebt. Dieser Mechanismus wurde im Vorfeld (siehe Abschnitt 7.2.6) ausführlich dargelegt. Bei Ausbildung eines inkompressiblen FQH-Zustandes wird hingegen die Bevorzugung der energetisch günstigen Lagen durch die Inkompressibilität eingeschränkt, was einen Anstieg der Masse gegenüber der inkompressiblen Flüssigkeit zur Folge hat. Weiterhin führt der Zusammenbruch des Intra-Landau-Niveau-Beitrags zur Abschirmung mit Einsetzen der Inkompressibilität zu einer Erhöhung der Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Dieser Mechanismus führt ebenfalls zu einer Erhöhung der Zyklotronmasse bei den FQH-Zuständen. Beide Effekte erklären jeweils eine Zunahme der Zyklotronmasse bei Ausbildung eines FQH-Zustandes, wie sie für  $\nu < 1/2$  beobachtet wird. Allerdings treffen die beiden Mechanismen für sämtliche inkompressiblen Zustände zu, und damit auch für die FQH-Zustände mit  $\nu > 1/2$ , wo experimentell Massenabsenkungen beobachtet werden.

Demnach werden im Füllfaktorregime  $1/2 < \nu < 1$  die Abschirmeffekte bei den FQH-Zuständen von Effekten überdeckt, die zu einer Absenkung der Zyklotronmasse bei den FQH-Zuständen führen. Anhand des hier qualitativ zutreffenden CF-Landau-Schemas 8.3 a) erkennt man, daß für  $\nu > 1/2$  im Gegensatz zu  $\nu < 1/2$  das dem obersten vollgefüllten CF-Landau-Niveau energetisch nächstgelegene leere CF-Landau-Niveau generell eine entgegengesetzte Spinorientierung aufweist. Deshalb führt in diesem Regime eine thermische Aktivierung zur Anregung entgegengesetzt polarisierter Verbundfermionen (CF) und damit unmittelbar zu einem Abbau der Spinpolarisation. Im Umkehrschluß nimmt die Spinpolarisation bei Ausbildung einer polarisierten FQH-Flüssigkeit zu und es werden dabei Streukanäle im Majoritätsspin-Landau-Niveau für die virtuelle Emission und Reabsorption von Phononen blockiert. Dadurch wird die Polaron-Kopplung insgesamt abgeschwächt und die Zyklotronmasse nimmt ab. Dieser Mechanismus wurde im Abschnitt 7.2.3 und folgenden ausführlich erläutert und bildet die Grundlage des polaronischen Referenzmodells in den Abbildungen 8.5 und 8.6. Bei einer Erhöhung der Polarisation trägt zudem die Leitungsband-Nichtparabolizität über die Spinaufspaltung zu einer Absenkung der Zyklotronmasse bei. Jedoch ist ihr Einfluß gegenüber der resonanten Polaron-Kopplung gering.

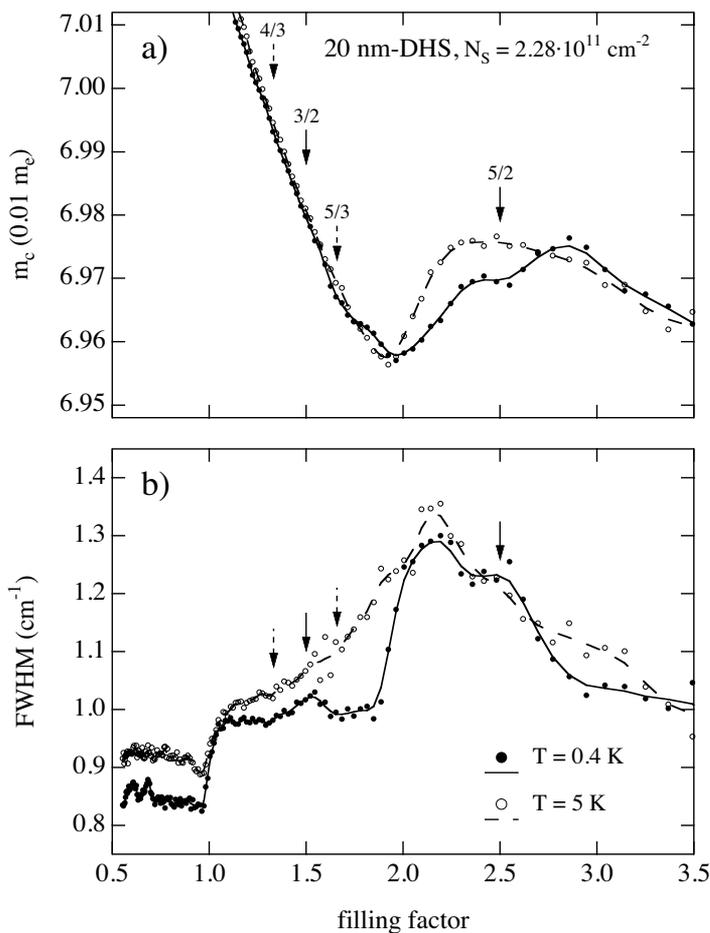
Zusammenfassend liegt nach dem für spinpolarisierte Grundzustände gültigen CF-Niveauschema 8.3 a) der augenfälligste Unterschied zwischen den Regimes  $\nu > 1/2$  und  $\nu < 1/2$  in der Spinzusammensetzung der CF-Quasiteilchen und CF-Quasilöcher auf den FQH-Grundzuständen mit vollständig gefüllten CF-Landau-Niveaus. Während für  $\nu < 1/2$  hauptsächlich polarisierte Quasiteilchen-Anregungen vorkommen, treten für  $\nu > 1/2$  vorwiegend unpolarisierte Quasiteilchen-Anregungen auf. Über die Spinniveau-Besetzungsabhängigkeit der Polaron-Kopplung und der Leitungsband-Nichtparabolizität (siehe Gleichungen 7.44 bis 7.48) führt die Ausbildung von polarisierten FQHE-Zuständen für  $\nu > 1/2$  zu einer Absenkung der Zyklotronmasse, wie sie experimentell beobachtet wird. In Abwesenheit von Spinniveau-Umbesetzungen wird bei der Ausbildung von FQHE-Zuständen in Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden für  $\nu < 1/2$  ein Ansteigen der Zyklotronmasse erwartet, das auf den Rückgang der Abschirmfähigkeit bei der Ausbildung inkompressibler Grundzustände basiert.

Neben der Polaron-Kopplung, dem Einfluß von Störstellen und der Nichtparabolizität kommen unter anderen noch die Landau-Niveaumischung (Landau level mixing) [MA95, Mur02], die durch Streuzentren induzierte Kopplung der Zyklotronresonanz an Magneto-Plasmonen [Sch84, Bat87, Pin93, Kan01] als mögliche Mechanismen zur Beeinflussung der Zyklotronresonanz in Frage. Allerdings sind bereits die bekannten dominierenden Effekte schwierig und nur qualitativ voneinander separierbar, so daß eine tiefergehende Interpretation der Ergebnisse in diese Richtungen insgesamt wenig aufschlußreich ist.

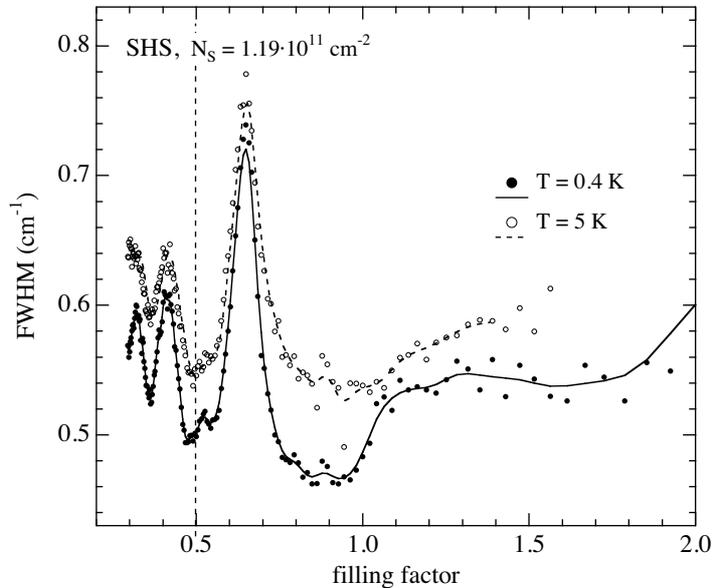
### 8.2.2 Dissipationsüberhöhung bei halbzahligen Füllfaktoren

Während in der Zyklotronmasse die fraktionalen Füllungen mit ungeraden Nennern als Maxima und Minima ausgezeichnet sind, treten in der Linienbreite insbesondere die höheren halbzahligen Füllungen  $\nu = 3/2$  und  $\nu = 5/2$  als lokale Maxima hervor. Dies wird anhand der Abbildung 8.8 b) für den Quantentrog, dessen Ergebnisse bereits in den Abbildungen 8.4 und 8.7 dargestellt wurden, deutlich. Eine vergleichbare, wenn auch in ihrer Ausprägung schwächere Linienbreitenüberhöhung ist auch beim Füllfaktor  $\nu = 1/2$  für die hochbewegliche Einfachheterostruktur bereits in der Figur 8.7 c) wahrnehmbar. Zur Verdeutlichung ist dieser Linienbreitenverlauf nochmals in der Abbildung 8.9 dem Verlauf bei der höheren Temperatur  $T = 5$  K gegenübergestellt. Man entnimmt den Auftragsungen 8.8 und 8.9 ferner, daß die beschriebenen Linienbreitenüberhöhungen thermisch instabil sind und mit zunehmender Temperatur schnell ausschmieren. Bei der Füllung  $\nu = 5/2$  tritt im Gegensatz zu  $\nu = 3/2$  und  $\nu = 1/2$  zusätzlich eine Absenkung der Zyklotronmasse auf. Dieser qualitative Unterschied weist darauf hin, daß trotz der Gemeinsamkeiten durchaus qualitative Unterschiede zwischen den halbzahligen Füllungen bestehen, die mit den unterschiedlichen zur Zyklotronresonanz beitragenden Landau-Niveaus zusammenhängen.

Eine Zunahme der Zyklotronresonanz-Linienbreite ist auf einen rascheren Zerfall der Kollektivanregung in Einteilchen-Anregungen infolge einer erhöhten Dissipation im Elektronensystem zurückzuführen. Im Regime des FQHE ist eine maximale Dissipation gerade bei den halbzahligen Füllfaktoren zu erwarten. Dort bildet sich jeweils bei einem verschwindenden effektiven Magnetfeld ein Gas (nahezu) freier zusammengesetzter Fermio-



**Abbildung 8.8:** Relative durch thermische Aktivierung induzierte Änderungen in der Zyklotronmasse (a) und Linienbreiten (b) eines mit NIR-Strahlung beleuchteten 20 nm-Quantentrogs mit der Elektronendichte  $2.28 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  als Funktion des Füllfaktors. Die hier interessierenden Merkmale sind in Teilbild b) durch volle Pfeile angezeigt.



**Abbildung 8.9:** Linienbreite der Zyklotronresonanz als Funktion des Füllfaktors für eine Einfachheterostruktur mit der Elektronendichte  $1.19 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Beim Füllfaktor  $\nu = 1/2$  (gestrichelte senkrechte Linie) ist zwischen den dominanten Strukturen infolge der resonanten Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) eine schwach ausgeprägte lokale Überhöhung ausmachbar.

nen (CF) mit maximaler Zustandsdichte für die Zerfallskanäle von Kollektivanregungen aus. Ein solches Gas weist aufgrund der maximalen Dichte freier CF-Quasiteilchen-Zustände um die CF-Fermi-Energie im Vergleich zu den anderen FQH-Grundzuständen mit ganz oder teilweise gefüllten CF-Landau-Niveaus eine erhöhte Abschirmfähigkeit auf, wobei im statischen Grenzfall für die longitudinale Leitfähigkeit die Beziehung 8.34 theoretisch vorhergesagt wird. Die erhöhte Leitfähigkeit wurde experimentell für  $\nu = 1/2$  anhand der Dämpfung von Rayleigh-Oberflächenwellen eindrucksvoll nachgewiesen [Wil93]. Für  $q \rightarrow 0$  jedoch verschwindet die CF-Leitfähigkeit, so daß der Zerfall einer Schwerpunktanregung, wie sie die Zyklotronresonanz darstellt, über CF-Quasiteilchenanregungen zunächst ungewöhnlich erscheint. In einem Elektronengas mit mehreren besetzten Landau-Niveaus, die infolge der Bandstruktur der Polaron-Kopplung oder unter dem Einfluß von Störstellen unterschiedliche Einteilchen-Zyklotronfrequenzen aufweisen, sind die gekoppelten Schwerpunktbewegungen der Teilsysteme allerdings derart gestört, daß Relativbewegungen unvermeidlich sind und zu einer Dämpfung der kollektiven Zyklotronresonanz führen. Die Störung der Schwerpunktanregungen ist dabei umso stärker ausgeprägt, je mehr Landau-Übergänge zur Zyklotronresonanz beitragen und je größer die Differenzen in den Einteilchen-Übergangsfrequenzen ausfallen. Im magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 1$  ist im polarisierten Elektronengas nur ein einziger Zyklotronübergang aktiv. Als einziger Zerfallsmechanismus ist deshalb lediglich die Streuung an Störstellen wirksam. Dies wird in extrem hochbeweglichen Q2DEG insbesondere dadurch belegt, daß die Zyklotronresonanz-Linienbreite im magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 1$  deutlich geringer ausfällt als bei den Füllfaktoren  $\nu > 1$ . Bei einem insgesamt niedrigen Störniveau fällt allerdings ein sich bei den halbzahligen Füllungen öffnender Zerfallskanal über freie CF-Anregungen weniger ins Gewicht als bei einem höheren Störniveau, das bei den Füllungen  $\nu > 1$  infolge der dort gegebenen Verstimmung der Zyklotron-Übergangsfrequenzen durch die Nichtparabolizität und die Polaron-Renormierung vorliegt. Infolge des höheren Störniveaus erscheint eine stärkere Ausprägung der Linienbreitenüberhöhung bei den Füllungen  $\nu = 3/2$  und  $\nu = 5/2$  gegenüber  $\nu = 1/2$  im Lichte des CF-Bildes durchaus als plausibel.

Die dargelegten experimentellen Befunde und ihre Interpretation fügen sich sehr gut in das Bild der zusammengesetzten Fermionen (CF), die aufgrund ihres verschwindenden effektiven Magnetfeldes bei den halbzahligen Füllfaktoren einen zusätzlichen Zerfallskanal für die kollektive Zyklotronresonanz ausbilden. Insgesamt erweist sich die Zyklotronresonanz auch auf dem Gebiet des FQHE als interessante -wenn auch indirekte- Sonde, um tiefere Einblicke in Physik der korrelierten Quantenflüssigkeiten eines Q2DEG zu bekommen.

# Zusammenfassung

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stand das Studium der langwelligen Magneto-Kollektivmoden quasi-zweidimensionaler Elektronengase (Q2DEG) in GaAs. Diese Anregungen, die sich in Zyklotronresonanzen und Magneto-Intersubband-Resonanzen untergliedern, wurden mittels der Ferninfrarot-Fourierspektroskopie in einem Magnetfeldregime  $0 \text{ T} \leq B \leq 17 \text{ T}$  untersucht.

Die Zyklotronresonanz wurde über einen sehr weiten und umfassenden Dichtebereich  $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} < N_S < 1.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  im Temperaturintervall  $0.3 \text{ K} < T < 80 \text{ K}$  vermessen. Dabei kamen grundlegend unterschiedliche Proben-Strukturen mit Elektronenbeweglichkeiten im Bereich  $5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/(\text{V s}) < \mu < 7 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$  zum Einsatz, die von unterschiedlichen Herstellern stammten und unter unterschiedlichen Optimierungsgesichtspunkten hergestellt wurden. Mit den verfügbaren Proben und Parametern konnten mittels der Zyklotronresonanz die Regimes des Integralen (IQHE) und des Fraktionalen Quanten-Hall-Effektes (FQHE) abgedeckt und die bei hohen Temperaturen dominierenden Polaron-Renormierungen grundlegend charakterisiert werden. Zur Analyse und Interpretation der experimentellen Daten wurden theoretische Modelle zur mehrkomponentigen Zyklotronresonanz unter den Aspekten der Polaron-Renormierung, der Leitungsband-Nichtparabolizität, der Streuung an Störstellen, der Abschirmung, sowie der Elektron-Elektron-Wechselwirkung und den mit ihr zusammenhängenden Grundzuständen entwickelt und mit diesen numerische Modell- und Anpassungsrechnungen durchgeführt.

Die Magneto-Intersubband-Resonanzen wurden im Regime des IQHE experimentell untersucht. Dabei wurde die Gitterkopplertechnik zur Ankopplung des Lichtfeldes an diese Anregungen eingesetzt. Zum Verständnis und zur Interpretation der Messergebnisse wurden die selbstkonsistenten Gleichungen zur Berechnung der Magneto-Landau-Subband-Struktur und der dazu kompatiblen Dichteantwort im Rahmen der Hartree-Fock-(HFA) bzw. der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA) aufgestellt und der numerische Lösungsweg dargelegt. Anhand von Anpassungsrechnungen wurde daraufhin die Magnetfeldabhängigkeit der Intersubband-Resonanzen analysiert.

Am Anfang dieser Arbeit stand eine Untersuchung der Polaron-Effekte, die insbesondere bei hohen Magnetfeldern und bei hohen Temperaturen teils drastische Auswirkungen auf die Zyklotronresonanz haben. Zunächst wurden die theoretischen Grundlagen zum Verständnis der Polaron-Kopplung im Rahmen des Bildes nicht-wechselwirkender Elektronen anhand dreier theoretischer Modelle dargelegt und die besondere Bedeutung der Landau-Niveaubesetzungen anhand numerischer Modellrechnungen diskutiert. Die betrachteten Modelle umfassten ein anschauliches Quasiteilchen-Bild, das eine Erweiterung der Einteilchen-Polaron-Modelle darstellt, und zwei Modelle, die auf dem Kubo-Formalismus der dynamischen Leitfähigkeit basieren und abhängig vom Regime ihre speziellen Vorzüge und Limitationen aufweisen. Das Quasiteilchen-Modell und das Modell nach Cho und Choi [Bad87, Cho93] wurden bevorzugt zur Beschreibung der resonanten Polaron-Kopplungen eingesetzt, wobei das letztere zur korrekten Beschreibung der Blockadeeffekte modifiziert werden musste. Das Modell nach Wu, Peeters und Devreese [Pee83, Pee86b, Wu,86b] erwies sich im Regime der nicht-resonanten Polaron-Kopplung den beiden anderen Modellen als überlegen.

Experimentell wurden zunächst die (Intrasubband-)Polaron-Resonanzerscheinungen höherer Ordnung in der Zyklotronresonanz bei hohen Temperaturen  $T > 40$  K experimentell ausgiebig untersucht. Diese korrelieren energetisch mit ganzzahligen Teilern  $\omega_{LO}/N$ ,  $N = 2, 3, \dots$  der Frequenz des LO-Phonons von GaAs und werden dann sichtbar, wenn die Pauli-Blockade für die virtuellen Phonon-Emissionsübergänge von höheren Landau-Niveaus ins unterste Landau-Niveau thermisch aufgehoben ist. Sie äußern sich bei höheren Dichten  $N_S > 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  als resonante Linienverbreiterungen und bei niedrigen Dichten  $N_S < 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  als Linienaufspaltungen, die zudem eine stark von der Dichte und der Temperatur abhängige Verschiebung zu niedrigen Energien bzw. Magnetfeldern hin aufweisen.

Die Linienaufspaltungen bei den niedrigen Dichten wurden mit einem von Hu et al. in [Hu,96a, Hu,96b] entwickelten und hier um die Pauli-Blockaden erweiterten Modell unter Einbeziehung der Modenhybridisierung aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung quantitativ erklärt. Dabei wurde eine Charakterisierung der Polaron-Kopplungsparameter durchgeführt, die im wesentlichen das Bild einer effektiven Ankopplung an die LO-Phononen des Wirtskristalls GaAs bestätigte. Diese Information ermöglichte es schließlich im Regime der LHe-Temperaturen die infolge von Besetzungsblockaden stark abgeschwächten Polaron-Einflüsse von den Auswirkungen der Leitungsband-Nichtparabolizität und der Störstellen abzuseparieren. Darüber hinaus wurden im Regime niedriger Dichten die Intersubband-Polaron-Kopplungen höherer Ordnung ausgemacht und anhand der Polstruktur im Phonon-replizierten Subband-Landau-Niveauschema erklärt und bestätigt.

Für Dichten  $N_S > 4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  wurde unabhängig vom Probenaufbau und der Dichte in der Energiedomäne ein universelles Verhalten der Polaron-Resonanzerscheinungen beobachtet und mittels einer analytischen Polaron-Linienformfunktion ein Bezug zwischen den Magnetfeldvariationen der Resonanzlage und der Linienbreite hergestellt. Die weiteren Untersuchungen ergaben, daß eine scheinbar abgesenkte und vom Probenaufbau und der Dichte unabhängige Phononfrequenz  $\omega_{LO,eff} = 280 \text{ cm}^{-1}$  weniger auf die Schichtphononen als vielmehr auf die Nichtparabolizität des Leitungsbandes zurückzuführen ist. Das Zutreffen des Bildes nicht-wechselwirkender Polaronen bei den hohen Dichten und die scheinbare Absenz der Elektron-Elektron-Wechselwirkung wurden mit der starken elektronischen Abschirmung bei hohen Dichten und Temperaturen erklärt. Weiterhin wurden experimentelle Indizien für Feinstrukturen der Polaron-Resonanzerscheinungen gefunden, die auf eine aufgehobene Entartung der Resonanzpole im Phonon-replizierten Landau-Niveauschema infolge der Nichtparabolizität oder aufgrund einer aufgespaltenen Phononfrequenz deuten.

Vorbereitend für die Zyklotronresonanz-Experimente bei LHe-Temperaturen erfolgte zuletzt eine Analyse der nicht-resonanten Polaron-Effekte. Anhand von Modellrechnungen wurde aufgezeigt, wie sich diese Effekte der Bandstruktur-Nichtparabolizität überlagern, wie für den Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall  $\nu < 2$  die Besetzungsblockade für die resonante Vollfeldkopplung ( $N = 1$ ) zunehmend aufgehoben wird, und daß bei ungeradzahligen Füllfaktoren  $\nu = 3, 5, \dots$  im Einteilchen-Übergangsschema eine von Polaron-Effekten nahezu unmaskierte Aufspaltung der Zyklotronresonanz vorliegt, welche die nackte Nichtparabolizität der Bandstruktur repräsentiert. Die experimentellen Resultate bestätigten zunächst für Füllfaktoren  $\nu > 2$  das Bild einer durch Polaron-Effekte renormierten Nichtparabolizität, die durch eine effektive Energielücke  $E_g^* \approx 1050 \text{ meV}$  parametrisiert ist. Letztere ist durch die Polaron-Kopplung gegenüber der durch die 3 Band-k · p-Beschreibung vorhergesagten Lücke  $E_g^* \approx 1750 \text{ meV}$  deutlich erniedrigt.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit wurden mit der erstmaligen experimentellen Beobachtung von Linienaufspaltungen in der Zyklotronresonanz von GaAs-Systemen bei den ganzzahligen Füllfaktoren  $\nu = 2, 3, 5$  und 7 im Regime des Integralen Quanten-Hall-Effekts, sowie der Abseparation der intrinsischen Einflüsse von den extrinsischen Einflüssen auf die Zyklotronresonanz erzielt.

Zur Beschreibung und Erklärung der mehrkomponentigen Zyklotronresonanz unter Einbeziehung der Hybridisierung durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung wurden zunächst drei theoretische Modelle entwickelt.

Das erste basiert auf einem rein klassischen Drude-Ansatz und berücksichtigt die Kopplungsmechanismen, die auf quantenmechanischen Austausch- und Korrelationseffekten im Elektronengas basieren, phänomenologisch auf anschauliche Weise. Ein zweites quantenmechanisches Modell wurde basierend auf dem Kohnschen Theorem [Koh61, Bre89] unter der Benutzung lediglich elementarer Regeln der Hilbert-Raum-Algebra aufgestellt. Aus diesem Modell konnten unmittelbar Summenregeln für die Oszillatorstärken und das erste energetische Moment der kollektiven mehrkomponentigen Zyklotronresonanz abgeleitet werden, mit deren Hilfe die experimentellen Ergebnisse quantitativ interpretiert wurden. Im quantenmechanisch formulierten Modell der harmonisch gekoppelten Schwerpunkte finden die beiden ersten Modelle eine anschauliche Vereinigung.

Die beobachteten Landau-Aufspaltungen in der Zyklotronresonanz traten am ausgeprägtesten bei den Füllungen  $\nu = 3, 5$  und  $7$  auf. Sie setzen, wie ihre Labilität unter thermischer Aktivierung zeigte, eine durch Austauscheffekte kollektiv verstärkte Zeeman-Lücke voraus. Die Landau-Aufspaltungen wie auch die bei  $\nu = 2$  beobachtete Spinaufspaltung konnten mit der unter den entsprechenden Spinbesetzungen vorliegenden Absenz einer ansonsten starken Austausch-Verkopplung der Zyklotron-Übergänge erklärt werden. Die bei den Vollfüllungen verbleibende und vergleichsweise schwache Korrelations-Verkopplung vermag ab einer vom konkreten Füllfaktor abhängigen kritischen Dichte die im Einteilchen-Bild mit zunehmender Dichte stärker werdende Linien-Aufspaltung nicht mehr zu unterdrücken. Eine quantitative Analyse der ungeraden Füllfaktoren ergab für den Nichtparabolizitätsparameter  $E_g^* \approx 1700$  meV. Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem von der  $k \cdot p$ -Methode vorhergesagten Wert überein und bestätigt die theoretisch vorausgesagte Absenz der Polaron-Renormierung für die Linienaufspaltungen bei diesen Füllfaktoren. Für die Spinaufspaltung bei  $\nu = 2$  ergab sich eine gute Übereinstimmung mit der in Volumen-GaAs vorliegenden. Die ausgewerteten Kopplungsfrequenzen  $\omega_I$ , die als Energielücken zwischen der Ladungsdichte- (CDE) und der Spindichte- (SDE) Anregung zu interpretieren sind, gehorchen erwartungsgemäß einem  $\propto 1/l_m \propto \sqrt{B}$ -Verhalten ( $l_m$ : magnetische Länge,  $B$ : Magnetfeld) entsprechend  $\omega_I = C_\nu \sqrt{B}$ . Die Auswertung ergab für die Parameter  $C_{\nu=3,5} = -0.50 \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1/2}$  und  $C_{\nu=2} = -0.35 \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1/2}$ , wobei das in beiden Fällen negative Vorzeichen eine energetische Absenkung der Spindichte- gegenüber der Ladungsdichte- Anregung (Zyklotronresonanz) bedeutet.

Es konnte weiterhin die Frequenzsummenregel für die kollektive Zyklotronresonanz experimentell bestätigt werden. Diese bildete die Basis für die Auswertung der über die Einzelresonanzen gemittelten Zyklotronmasse. In dieser konnten für Beweglichkeiten  $\mu > 1 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$  die Signaturen einer intrinsischen Zyklotronresonanz ohne die Maskierung durch die extrinsischen Einflüsse infolge von Störstellen nachgewiesen werden. Diese äußern sich in einem charakteristischen Massenverlauf, wie er infolge der Leitungsband-Nichtparabolizität theoretisch vorhergesagt wird. Der aus der mittleren Zyklotronmasse ausgewertete Nichtparabolizitätsparameter  $E_g^* = 1050$  meV enthält im Gegensatz zu dem aus der Linienaufspaltung ausgewerteten Parameter  $E_g^* = 1700$  meV einen wesentlichen Beitrag aufgrund der nicht-resonanten Polaron-Kopplung. Anhand der im Vorfeld durchgeführten Modellrechnungen zur Polaron-Kopplung konnte dieser scheinbare Widerspruch zweier unterschiedlicher Nichtparabolizitätsparameter aufgelöst werden.

Die Signaturen einer extrinsischen Zyklotronresonanz traten bei den Proben mit den höchsten Dichten in Form von stark oszillierenden Magnetfeldvariationen mit Maxima bei den ganzzahligen Füllfaktoren, die bis hinauf zum Füllfaktor  $\nu = 18$  reichten, auffällig hervor. Unter Kenntnis der intrinsischen Zyklotronresonanz konnten diese dem Einfluß der mit der Elektronendichte zunehmenden Anzahl geladener Störstellen zugewiesen werden. Die Maxima in der Zyklotronmasse bei den Niveau-Vollfüllungen, die häufig auch in Systemen mit mittleren Elektronenbeweglichkeiten weniger  $10^5 \text{ cm}^2/(\text{V s})$  zu beobachten sind, wurden anhand eines einfachen Modells qualitativ erklärt. Das Modell gründet auf der Verteilung der Krümmungen des Störstellen-Hintergrundpotentials, die auf die Elektronen wirken und ihre lokalen Zyklotronfrequenzen modifizieren, in Verbindung mit der bei ganzzahligen Füllungen vorliegenden Inkompressibilität des Elektronengases.

Den Abschluß zur Zyklotronresonanz im Regime des IQHE bildeten die Ergebnisse zur Subband-aufgespaltenen

Zyklotronresonanz. Letztere konnte an einem sehr hochbeweglichen Q2DEG hoher Dichte und mit derart geringen Subband-Abständen beobachtet werden, daß eine durch das Magnetfeld induzierte und mit dem Füllfaktor oszillierende Besetzung des zweiten Subbandes auftrat. Anhand von selbstkonsistenten Magneto-Subband-Rechnungen konnten die auf der hochenergetischen Seite der Hauptresonanz auftretenden Nebenresonanzen als Zyklotronresonanz des zweiten Subbandes identifiziert werden. In Einklang mit den theoretischen Vorüberlegungen konnte aufgrund der schwachen Austausch-Kopplung zwischen Subbändern keine Hybridisierung zwischen der Zyklotronresonanz des ersten und des zweiten Subbandes beobachtet werden. An diesem Q2DEG gelang es weiterhin erstmals sämtliche der möglichen Aufspaltungsszenarien der Zyklotronresonanz, Landau-, Spin- und Subband-Aufspaltung, im Regime des IQHE gleichzeitig nachzuweisen.

In der Magneto-Intersubband-Resonanz eines Q2DEG mit nur einem besetzten Subband wurden im Regime des IQHE signifikante vom Füllfaktor abhängige Magnetfeldvariationen beobachtet. Diese wurden anhand selbstkonsistenter Hartree-Fock-Berechnungen für die Subband-Struktur und der auf ihr basierenden kollektiven Dichteantwort eines in der Ebene homogenen Elektronengases beschrieben und als Auswirkung der infolge der Landau-Quantisierung verstärkten Austauscheffekte erklärt.

Basierend auf der Näherung des selbstkonsistenten Feldes wurden zunächst die Grundlagen der theoretischen Beschreibung der Magneto-Kollektivmoden eines Q2DEG dargelegt. Mit diesen wurden dann in der bewährten selbstkonsistenten Lokaldichtenäherung (LDA) [And77a] die kollektiven Intersubband-Resonanzen berechnet und mit den experimentellen Resonanzen verglichen. Dabei konnte für ein System niedriger Dichte ( $N_S = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ) eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den experimentellen Resonanzlagen, die aus der Zyklotronresonanz über die resonante Subband-Landau-Niveauekopplung (RSLLC) bestimmt wurden, erzielt werden. In einem System mittlerer Dichte ( $N_S = 2.7 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ) ergaben sich jedoch zwischen den beim Magnetfeld  $B = 0 \text{ T}$  mittels der Gitterkopplertechnik direkt gemessenen Intersubband-Resonanzen und den bei hohen Magnetfeldern über die RSLLC bestimmten Magneto-Intersubband-Resonanzen Unterschiede in den Resonanzlagen. Diese werden in der LDA-Näherung, die keine Magnetfeldabhängigkeit für die Resonanzen berücksichtigt, nicht beschrieben.

Aufgrund dieses Befundes und der Vermutung, daß die mit der Dichte zunehmenden und infolge der Landau-Quantisierung verstärkten Austauscheffekte [And76a] für dieses Verhalten verantwortlich sind, wurde eine selbstkonsistente Hartree-Fock-Beschreibung der Magneto-Subband-Struktur und der Magneto-Kollektivmoden formuliert. Es wurden zunächst für einige Modellsysteme in der Hartree-Fock-Näherung die stark durch Austauscheffekte in ihren Energielücken renormierten Subband-Landau-Niveaufächer selbstkonsistent berechnet und denen der LDA-Näherung gegenübergestellt. Basierend auf den berechneten Landau-Subband-Strukturen wurden dann in der Näherung des selbstkonsistenten Feldes (SCFA) die durch die Depolarisations- (Hartree-Beiträge) und die Exzitoneffekte (Austausch-Beiträge) stark geprägten Kollektivmoden berechnet. Für Doppelheterostrukturen mit starkem Potentialeinschluß, in denen den Austauscheffekten infolge der Landau-Quantisierung nur eine untergeordnete Rolle zukommt, ergab sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Modenenergien der HFA- und der LDA-Beschreibung. In Einfachheterostrukturen mit schwachem Potentialeinschluß hingegen wurden in der HFA-Beschreibung charakteristische mit dem Füllfaktor zusammenhängende Magnetfeldvariationen vorhergesagt, die speziell beim Füllfaktor  $\nu = 1$  eine maximale Überhöhung der Modenenergien gegenüber der LDA-Beschreibung aufweisen. Die zudem bei hohen Füllfaktoren in diesen Systemen vorhergesagten Modenüberlagerungen sind aufgrund der typischen Linienbreiten experimentell nicht zu erwarten, wie auch die für sehr niedrige Subband-Abstände in der HFA-Näherung vorhergesagten Modenhybridisierungen zwischen sich durchkreuzenden Spin- und Ladungsdichtemoden, die von benachbarten Subbändern ausgehen und durch die nicht-berücksichtigte Abschirmung unterdrückt werden.

Die experimentellen Ergebnisse, die an einer Einfachheterostruktur mit über Gatelektrode durchstimmbarer

Dichte und Gitterkoppler gewonnen wurden, zeigten für eine Dichte  $N_S = 2.7 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  in wesentlichen Punkten eine Übereinstimmung mit den Vorhersagen der selbstkonsistenten zeitabhängigen Hartree-Fock-Rechnungen (TDHFA). Es wurde eine vorausgesagte, mit  $\nu = 2$  einsetzende Resonanzverschiebung zu höheren Energien ausgemacht, die beim Füllfaktor  $\nu = 1$  in ihrem Verlauf abknickt, um dann allerdings im Quantengrenzfall  $\nu < 1$  entgegen der Vorhersage anstatt abzufallen mit zunächst deutlich reduzierter Steigung weiter ansteigt. Ein solches Ansteigen konnte nicht im Rahmen der TDHFA-Beschreibung erklärt werden und weist auf ein überlagertes Modenabstoßungsverhalten ungeklärter Art hin. Bei der geringeren Dichte  $N_S = 1.5 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  konnte im Ansatz ein vergleichbares Verhalten beobachtet werden, das allerdings eine deutlich schwächere Ausprägung hatte. Bei diesen Dichten werden jedoch in GaAs aufgrund der geringen Zeeman-Lücke komplexe Spingemische (Skyrmionen) als Grundzustände um  $\nu = 1$  vorhergesagt [Son93], deren Beschreibung in der HFA-Näherung eines homogenen Q2DEG nicht enthalten ist.

Belastbare Belege für die Formation von Skyrmionen als die Quasiteilchen-Anregungen auf dem  $\nu = 1$ -Vakuum sowie für einen Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang wurden schließlich in der Zyklotronresonanz im Regime des Füllfaktors  $\nu = 1$  ausgemacht.

Für die Interpretation der experimentellen Ergebnisse in diesem Regime wurden zunächst im Rahmen der theoretischen Betrachtungen die elektronische Abschirmung speziell in der statischen Thomas-Fermi-Näherung ausführlich behandelt. Weiterhin wurden die Betrachtungen zu den Magneto-Plasmonen mit der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung (TDHFA) und der Berücksichtigung der statischen Abschirmung vervollständigt, sowie ein expliziter Beweis für das Kohnsche Theorem und seine Interpretation im Exzitonen-Bild dargelegt. Die experimentellen Resultate bei  $L^4\text{He}$ -Temperaturen ( $T \geq 1.5 \text{K}$ ) bestätigten zunächst im wesentlichen eine in der Literatur bereits zuvor geschilderte Variation in der Zyklotronmasse bei  $\nu = 1$ , sowie eine stufenartige Verschmälerung der Linienbreite mit Eintritt in den Quantengrenzfall  $\nu < 1$ . Zur quantitativen Beschreibung der charakteristischen Massenvariation, die mit der Aufhebung der polaronischen Besetzungsblokade für das unterste Spin-Landau-Niveau in Zusammenhang steht, wurde das Polaron-Modell von Wu, Peeters und Devreese entsprechend erweitert, um einer skyrmionischen Spinpolarisation im Elektronengas Rechnung tragen zu können. Dieses erweiterte Modell ergab unter Berücksichtigung der statischen Abschirmung der Elektron-Phonon-Wechselwirkung durch virtuelle Inter-Landau-Niveau-Übergänge eine erstaunlich gute Beschreibung des Magnetfeldverlaufs der Zyklotronmasse im Regime  $\nu < 2$  sowohl für einen 20 nm-Quantentrog mit  $N_S = 2.3 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  als auch für eine Einfachheterostruktur mit  $N_S = 1.2 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ . Als Anzahl  $A_{Sk}$  bzw.  $A_{ASk}$  der pro überschüssigem Elektron bzw. pro fehlendem Elektron (überschüssiges Loch) umgekehrten Spins in einem Skyrmion (Sk,  $\nu = 1 + \Delta\nu$ ) bzw. Antiskyrmion (ASk,  $\nu = 1 - \Delta\nu$ ,  $\Delta\nu \ll 1$ ) wurden für den Quantentrog  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2$  und für die Einfachheterostruktur  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2 - 3$  ausgewertet. Für die effektive Lücke der Bandstruktur ergab sich aus den Anpassungen ein Wert  $E_g^* = 1700 \text{meV}$ , der wiederum die Vorhersage der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode bestätigte. Aufgrund der guten Beschreibung der Zyklotronmassenvariation, die gemäß den gewonnenen Resultaten als Manifestation einer skyrmionischen Polaron-Zyklotronresonanz aufgefaßt werden kann, wurde das Modell im Umkehrschluß zur Bestimmung der Spinpolarisation des Quantentrogges verwendet. Der Verlauf der ausgewerteten Spinpolarisation ergab dabei eine gute Übereinstimmung mit den Verläufen, die zuvor aus Kernspinresonanz-Experimenten [Bar95] oder mittels spezieller Lumineszenzverfahren [Aif96] gewonnen wurden. Auch der Temperaturverlauf der Zyklotronmasse bei  $\nu = 1$  zeigte qualitativ eine gute Korrelation mit Voraussagen, die den thermischen Abbau der Spinpolarisation über Skyrmion-Antiskyrmion-Paare berücksichtigen [Rea95].

Die stufenartige und in ihrem Wesen universelle Verringerung der Zyklotronresonanz-Linienbreite beim Eintritt in den magnetischen Quantengrenzfall wurde mit den störstelleninduzierten Linienaufspaltungen im Falle starker Akzeptor-Verunreinigungen [Ric89, Wid98] in Verbindung gebracht. Basierend auf dieser Erkenntnis

wurde das Modell des Störstelleneinflusses auf die Zyklotronresonanz derart erweitert, daß ein Zusammenhang zwischen der Abnahme der Linienbreite und der lokalisierenden Wirkung des Störstellenpotentials auf die Teilchen- und Loch-Anregungen des  $\nu = 1$ -Zustandes hergestellt werden konnte. Dieses Modell gestattete es sowohl den stufenartigen Übergang als auch dessen Begrenzungen, die gleichzeitig den Begrenzungen der Hall-Plateaus mit dem Wiedereinsetzen eines nicht-verschwindenden Magneto-Widerstandes entsprechen, qualitativ zu erklären.

Zuletzt wurden bei  $L^3\text{He}$ -Temperaturen ( $T \geq 0.4 \text{ K}$ ) in der Zyklotronresonanz extrem hochbeweglicher Elektronengase sowohl Signaturen der fraktionalen Hall-Quantisierung bei Füllfaktoren mit ungeradzahli- gen Nennern ( $\nu = 1/3, 2/3, 2/5, 3/5$ ) als auch Signaturen metallischer Composite-Fermion-Zustände (CF-Zustände) bei Füllfaktoren mit halbzahli- gen Nennern ( $\nu = 1/2, 3/2, 5/2$ ) gefunden.

Die Einflüsse der fraktionalen Hall-Quantisierung auf die Zyklotronfrequenz fallen aufgrund der geringen Verletzung des Kohnschen Theorems im relevanten Füllfaktorregime  $\nu < 2$  und tiefen Temperaturen  $0.4 \text{ K} < T < 1.5 \text{ K}$  generell sehr klein aus. Sie konnten jedoch anhand der Temperaturvariation der Zyklotronmasse ausgemacht werden, wobei die zugrunde liegenden FQH-Zustände im Magneto-Widerstand identifiziert wurden. Es stellte sich heraus, daß für die spinpolarisierten Grundzustände im Regime  $\nu < 1$  oberhalb und unterhalb  $\nu = 1/2$  für die Zyklotronresonanz qualitativ unterschiedliche Verhältnisse vorliegen. Diese äußern sich für  $\nu < 1/2$  in einem Anstieg und für  $\nu > 1/2$  in einer Absenkung der Zyklotronmasse bei Ausbildung der inkompressiblen FQH-Flüssigkeiten. Anhand des Verbundfermionen-Bildes wurde ein Zusammenhang zwischen diesem Verhalten und der Spinzusammensetzung der Quasiteilchen-Anregungen hergestellt, deren Wesen qualitativ aus einem Verbundfermion-Landau-Niveauschema hervorgeht. Entspricht die Spinzusammensetzung der Quasiteilchen-Anregungen derjenigen der zugrunde liegenden polarisierten FQH-Flüssigkeit, so führt der Verlust an Abschirmfähigkeit bei Ausbildung der Inkompressibilität über die Polaron-Kopplung und den Störstelleneinfluß zu einem Ansteigen der Zyklotronmasse. Sind hingegen die Quasiteilchen dem FQH-Grundzustand zum Hauptteil entgegengesetzt polarisiert, so werden die Abschirmeffekte von den Auswirkungen der Spinbesetzungseffekte auf die Polaron-Renormierung und die Leitungsband-Nichtparabolizität überdeckt, was eine Absenkung der Zyklotronmasse bei Zunahme des Spinpolarisationsgrades erklärt.

Hinweise auf eine Manifestation metallischer Verbundfermionen-Grundzustände in der Zyklotronresonanz wurden schließlich bei den halbzahli- gen Füllfaktoren im Linienbreitenverlauf gefunden. Die thermisch sehr labilen lokalen Maxima und Schultern wurden auf einen sich über freie Verbundfermion-Anregungen zusätzlich öffnenden Zerfallskanal für die infolge von Störstellenstreuung, Polaron-Kopplung und Nichtparabolizität ver- stimmten Kollektivmoden zurückgeführt. Die mit dem Füllfaktor von  $\nu = 1/2$  über  $3/2$  bis  $5/2$  zunehmende Ausprägung der Signaturen wurde schließlich mit dem Verstimmtheitsgrad der zur kollektiven Zyklotronreso- nanz hybridisierten Zyklotron-Übergänge in Verbindung gebracht, der mit der Anzahl der an der Zyklotronreso- nanz beteiligten Landau-Niveaus zunimmt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde insgesamt ein übergreifendes Verständnis der Magneto-Kollektivmoden in quasi-zweidimensionalen Elektronengasen auf GaAs-Basis erzielt. Dabei gelang es die vielfältigen Facetten des Wechselspiels von Grundzuständen, kollektiven Effekten, Elektron-Phonon-Wechselwirkung, Bandstruktur, Störstellenstreuung und Lokalisierung experimentell aufzudecken und mit geeigneten Modellen nicht nur qualitativ, sondern häufig auch quantitativ zu beschreiben.

# Summary

This thesis is dedicated to the long wavelength collective excitations of quasi two-dimensional electron systems (Q2DEG) in GaAs under the influence of high magnetic fields. These excitations, which are classified into cyclotron resonances and magneto intersubband resonances, were experimentally investigated by means of far infrared Fourier spectroscopy.

Cyclotron resonances were studied in a magnetic field range  $0 < B < 17$  T using different sample structures with electron densities  $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} < N_S < 1.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  at temperatures  $0.3 \text{ K} < T < 80 \text{ K}$ . The molecular beam epitaxially grown samples showed electron mobilities in the range  $5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/(\text{V s}) < \mu < 7 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ , and allowed an access to the regimes of the Integral (IQHE) and also the Fractional Quantum Hall Effects (FQHE) as well as to the regime of prominent polaron coupling at high temperatures. For the analysis and the interpretation of the experimental data, various theoretical models were presented and applied to the data. The theory took into account the multi-component character of cyclotron resonance in the presence of polaron coupling, bands nonparabolicity, and disorder under the combined influence of electronic screening and electron-electron coupling.

The magneto intersubband resonances were investigated in the regime of the Integral Quantum Hall Effect. The grating coupler technique was used in order to couple the electromagnetic field to these collective excitations. Self consistent calculations of the subband structure and the collective modes were performed in the framework of the Hartree-Fock approximation scheme. These calculations were used for an interpretation of the experimental observations.

The actual work starts with a profound analysis of polaron coupling. This effect has distinct influence on the cyclotron resonance, especially at higher temperatures. The polaron coupling is classified into the resonant and the non-resonant effects. Three different theoretical models were applied for the description of the polaron coupling with special focus on the Landau level occupation effects. The first model is based on a quasiparticle picture, whereas the other both models ground on the Kubo response formalism. All models neglect the electron-electron interaction, and have their strengths and limitations in dependence of the polaron regime. The quasiparticle model and the model of Cho und Choi [Bad87, Cho93] were preferably used in the resonant polaron regime, whereas the model of Wu, Peeters, and Devreese [Pee83, Pee86b, Wu,86b] revealed as being superior in the non-resonant coupling regime.

The experimental work started with a characterization of the resonant polaron coupling effects of higher orders  $N = 2, 3, \dots$  at temperatures  $T > 40 \text{ K}$ . These resonant couplings energetically correlate with integer fractions of the LO-phonon frequency  $\omega_{LO}/N$ , and can be observed under thermal activation, when the Pauli blocking of virtual phonon emission processes from higher Landau levels into the ground level is released. At higher densities  $N_S > 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , these couplings manifest themselves as resonant line broadenings, whereas at low densities  $N_S < 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  resonant line splittings of the cyclotron resonance occur. Compared to the line broadenings, the line splittings appear at lower energies and magnetic fields, respectively, and show strong dependence on electron density and temperature. They were quantitatively interpreted in the framework

of a model developed by Hu et al. [Hu,96a, Hu,96b], which takes explicitly into account the hybridisation of the collective cyclotron resonances as a consequence of the electron-electron interaction. This model was extended in order to correctly taking into account Pauli blocking effects. The quantitative characterization of the polaron coupling parameters in the framework of this modified model confirmed the picture of an effective coupling to the bulk LO-phonons of GaAs. It yielded a parametrization that proved to be essential for a separation of the strongly reduced non-resonant polaron coupling effects from the influences due to band structure and impurity effects at LHe-temperatures. In the low density regime, further resonant intersubband polaron couplings between Landau levels of the first and the second electronic subband were observed. These resonances could be identified and explained in the framework of the pole structure scheme of the phonon replicated subband Landau levels.

For the density regime  $N_S > 4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , an universal behaviour, independent of the density and the sample layout, was observed in the energy domain representation. Under the assumption of an analytical polaron lineshape function, a connection has been drawn between the magnetic field variations of the resonance position and the linewidth. The further investigations showed that an apparently lowered phonon frequency  $\omega_{LO,eff} = 280 \text{ cm}^{-1}$ , that revealed as being independent from the sample layout and the electron density, was explained as a consequence of the bands nonparabolicity. No hint was found that pointed out the role of the confined layer phonons in the context of resonant polaron coupling. The successful description of the polaron cyclotron resonances in the framework of non-interacting polarons and the apparent absence of electron-electron interaction effects were explained by the strong electronic screening at high densities and temperatures. In addition, experimental indications for polaron fine structures in the resonant coupling were observed, that are related to the lifting of the pole degeneracies in the phonon replicated Landau level scheme due to either bands nonparabolicity or a split phonon doublet.

As preparatory work for the cyclotron resonance experiments at the LHe-temperatures, an analysis of the non-resonant polaron coupling was performed. By means of model calculations it could be shown how the polaron effects superimpose onto the influences of bands nonparabolicity and how the occupation blockade for the main resonant polaron coupling ( $N = 1$ ) is increasingly released in the magnetic quantum limit regime  $\nu < 2$ . It was elaborated that at odd filling factors  $\nu = 3, 5, \dots$  cyclotron resonance splittings due to the bands nonparabolicity are to be expected, that are nearly free from polaron effects. The experimental results subsequently confirmed the picture of a nonparabolicity that is renormalized by the non-resonant polaron coupling and described by an effective bandgap  $E_g^* \approx 1050 \text{ meV}$ . As a consequence of polaron coupling, this effective gap is significantly reduced compared to the gap  $E_g^* \approx 1750 \text{ meV}$  predicted by the three-band  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -description.

The most important results of this work are combined with the first experimental observation of cyclotron resonance line splittings in GaAs systems at integer Landau-level fillings  $\nu = 2, 3, 5$ , and  $7$  in the regime of the IQHE. In this context, extrinsic influences on the cyclotron resonance due to impurities could be separated from the intrinsic influences as a consequence of bands nonparabolicity and polaron coupling.

Three theoretical models were developed to describe the multi-component cyclotron resonance under the influence of electron-electron interaction. The first model is based on a classical Drude-type ansatz. It takes into account the originally quantum mechanical coupling mechanisms in a phenomenological and transparent way. A second, quantum mechanical description foos on the theorem of Kohn [Koh61, Bre89] and uses elementary rules of Hilbert space algebra only. Sum rules for the oscillator strength and the first energetic moment of the hybridized multi-component cyclotron resonance were derived from this model. These sum rules finally enabled a quantitative interpretation of the experimental observations. In the last model, that describes the coupled cyclotron resonances in the framework of a quantum mechanical system of harmonically coupled center of masses, the both former models find a picturesque interpretation.

Within the framework of this thesis, experimental cyclotron resonance line splittings at odd fillings  $\nu = 3, 5,$  and  $7$  were observed for the first time under IQHE-conditions. Their lability under thermal excitation confirmed the existence of a Zeeman gap for their observation that is strongly enhanced due to quantum mechanical exchange. The Landau splittings at odd fillings as well as the spin splitting at  $\nu = 2$  were explained by the absence of a strong quantum mechanical exchange coupling for the the spin level occupations at integer fillings. At these fillings, above a critical electron density the coupling via electron correlation is not sufficient to hybridize the single particle transitions into a single collective resonance. For odd fillings, a quantitative analysis resulted in a Landau splitting that is parametrized by an effective gap  $E_g^* \approx 1700$  meV, in accordance to predictions of the  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -method. This observation confirmed the theoretical model calculations, that predicted Landau splittings unmasked from polaron renormalization at odd fillings. The evaluation of the spin splitting at  $\nu = 2$  gave a good agreement with the spin splitting in bulk GaAs. The evaluated coupling frequencies  $\omega_I$ , which correspond to energy gaps between the collective charge density (CDE) and the collective spin density excitations (SDE), obey an expected  $\propto 1/l_m \propto \sqrt{B}$ -behaviour ( $l_m$ : magnetic length,  $B$ : magnetic field) according to  $\omega_I = C_\nu \sqrt{B}$ . The determined parameters are  $C_{\nu=3,5} = -0.50 \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1/2}$  and  $C_{\nu=2} = -0.35 \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1/2}$ . The negative sign indicates that the spin density excitation in both cases energetically lies below the charge density excitation (cyclotron resonance).

A detailed analysis of the magnetic field dependence of the cyclotron resonance gave a confirmation of frequency sum rule theoretically predicted. This sum rule served as basis for the evaluation of the cyclotron resonances in terms of a frequency average over the split resonances. The sum rule states that the first energetic moment of the cyclotron resonance lines corresponds to the average cyclotron frequency according to the single particle transition scheme. For samples with very high mobilities  $\mu > 1 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ , the analysis of the average cyclotron frequency revealed a manifestation of an intrinsic cyclotron resonance nearly uninfluenced by impurities. The intrinsic influences manifest themselves in a characteristic behaviour of the average cyclotron frequency as it is predicted for the bands nonparabolicity. The effective gap that parametrizes the (effective) bands nonparabolicity for the average cyclotron frequency is  $E_g^* = 1050$  meV. A comparison of this value to that from the line splittings  $E_g^* = 1700$  meV indicates that the nonparabolicity, with the exception of the odd fillings, is strongly renormalized by polaron coupling. In the light of the formerly performed numerical calculations of polaron coupling, the apparant contradiction of two different nonparabolicity parameters could be resolved.

The signatures of an extrinsic cyclotron resonance were clearly observed in the samples with the highest densities. They revealed as strong oscillations in the magnetic field dependence of the cyclotron mass with maxima at integer fillings, which were resolved up to filling factors  $\nu = 18$ . Having the knowledge on the intrinsic cyclotron resonance, these features could be identified as being due to charged impurities, whose influence increases with raising densities. The maxima in the cyclotron mass at integer fillings, which are also frequently observed in samples with electron mobilities below  $\approx 10^5 \text{ cm}^2/(\text{V s})$ , were explained in the framework of a simple qualitative model. The model is based on the distribution of the curvatures of the impurity background potential. These curvatures give raise to local modifications of the cyclotron frequencies due to the random confinement of the electrons, in connection with the incompressibility of the electron gas at integer Landau level fillings.

Finally an investigation of the subband splitting of the cyclotron resonance in the regime of the IQHE was performed. The subband splitting could be observed in a high mobility sample with suitable parameters, so that a magnetic field induced occupation of the second electronic subband was established. With the support of self consistent magneto subband calculations, the observed blue shifted sideband structures of the cyclotron resonance could be identified as the cyclotron resonance of electrons occupying the second subband. In accordance with theoretical considerations, the weak exchange interaction between different subbands was not sufficient

enough in order to hybridize the cyclotron resonances of the first and second subband into one collective mode. Furthermore, in this sample all possible splitting scenarios of the cyclotron resonance, i. e. Landau splitting, spin splitting, and subband splitting were observed simultaneously in the regime of the IQHE for the first time.

In the IQHE-regime, the observation of magnetic field induced and filling factor dependent features in the magneto intersubband resonances of a one-subband Q2DEG gave strong hints to the influence of quantum mechanical exchange on these excitations. The observed features were theoretically predicted and explained by self consistent subband calculations and time dependent response calculations in the Hartree-Fock approximation scheme.

At the beginning of the studies concerning the intersubband resonances the basics for their theoretical description were presented in the framework of the self consistent field approximation (SCFA). This response calculation scheme was then subsequently applied to deduce the collective response from the subband structure, which was calculated in the local density approximation (LDA). The experimental intersubband resonance frequencies of a system with low electron density ( $N_S = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ), which were evaluated from the resonant subband Landau level couplings (RSLLC) in the cyclotron resonance, proved to be in very good agreement with the theoretical prediction according to the well established time dependent expansion of the LDA scheme, the TDLDA [And77a]. However, for a Q2DEG with the medium electron density ( $N_S = 2.7 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ), significant differences were observed between the intersubband resonance frequencies in the absence of a magnetic field and those deduced from the cyclotron resonance via RSLLC at high magnetic fields. Such a difference is not described in the framework of the LDA, which does not predict any magnetic field dependence for the intersubband resonances in the one subband case.

This observation gave strong indications on the effect of the magnetic field induced enhancement of quantum mechanical exchange [And76a] on the intersubband modes. To confirm this explanation, a theoretical description of the magneto subband structure and the corresponding collective transitions was formulated in the framework of a self consistent Hartree-Fock approximation. Using this description, the strongly renormalized magneto subband structures of Q2DEG systems were numerically calculated and compared to those obtained in the LDA scheme. Based on the resulting subband-Landau levels, the magneto intersubband response was deduced according to the self consistent field approximation expansion of the HFA, the time dependent HFA (TDHFA). The calculated collective magneto intersubband modes are strongly influenced by collective depolarization and excitonic (exchange) effects. However, in contrast to the cyclotron resonance, in general the excitonic effects do not fully compensate for the gap renormalization of the subband Landau level structure. For quantum well structures, with strong confinement and a correspondingly minor role of the enhanced exchange, the TDHFA and the TDLDA gave comparable results with only very small differences. For single heterojunctions with a weak confinement compared to narrow quantum wells, however, the HFA calculation predicts characteristic filling factor dependent intersubband resonances with a maximum blueshift at  $\nu = 1$ . Additionally, for these systems a multiple mode behaviour at high fillings and a mode anticrossing between the spin and charge density excitations of neighboured subbands are predicted according to the TDHFA calculations for very low subband separations. An observation of these features is however unlikely, since on the one hand the linewidth is too large in real samples and on the other hand the HFA does not take into account the electronic screening which strongly suppresses the exchange renormalizations in the subband Landau level scheme at noninteger fillings properly.

For a single heterojunction with a gate electrode and a grating coupler, the experimental results that were obtained for a density of  $N_S = 2.7 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  were in a good accordance with the self consistent TDHFA calculations. Indications for the predicted blueshift of the fundamental intersubband transition starting at  $\nu \approx 2$  and reaching a cusp like maximum at  $\nu \approx 1$  were found. With the entrance into the extreme quantum limit

$\nu < 1$ , however, the blueshift further increased with a strongly reduced steepness instead of to relax as predicted. This behaviour is not described by the TDHFA calculations and hinted on a superimposed mode repulsion behaviour of unexplained origin. At a lower density of  $N_S = 1.5 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ , a similar behaviour has been observed. Its appearance was much weaker compared to the calculations. Furthermore, at these densities in GaAs systems complex spin textures (Skyrmions) are predicted as a consequence of the small ratio between the intrinsic Zeeman gap and its exchange contribution [Son93]. These textures act as quasiparticle excitations on the  $\nu = 1$ -vacuum state and are not contained in the HFA description of a (spin-)uniform Q2DEG. They strongly diminish the exchange effects.

Very strong indications both for the Skyrmion formation on the  $\nu = 1$ -vacuum state and for a localization-delocalization transition in this regime were deduced from cyclotron resonance experiments.

For the interpretation of the corresponding experimental results, in the theoretical part first of all the electronic screening was treated in the static Thomas-Fermi approximation. Furthermore, the theoretical description of magneto-plasmons in the time TDHFA were completed with the incorporation of the static screening. Additionally, an explicit proof of Kohn's theorem was given and an interpretation within the framework of an exciton picture was presented.

The experimental results at temperatures of  $\text{L}^4\text{He}$  ( $T \geq 1.5 \text{ K}$ ) confirmed an already formerly observed anomaly of the cyclotron mass at  $\nu = 1$ , as well as a steplike narrowing of the linewidth that occurs with the entrance into the extreme quantum limit  $\nu < 1$ . For a quantitative description of the characteristic mass anomaly, which is directly combined with the relaxation of the occupation blockade of the lowest spin Landau level, the polaron theory of Wu, Peeters, and Devreese has been modified in order to take into account a skyrmionic spin polarisation in the electron gas. With the inclusion of static screening for the electron-phonon interaction, this extended model gave an extraordinary good description of the magnetic field dependence of the cyclotron mass both of a 20 nm wide quantum well with a density of  $N_S = 2.3 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  and a single heterostructure with a density of  $N_S = 1.2 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  in the filling factor regime  $\nu < 2$ . The evaluation of the experimental data yielded as skyrmionic model parameters  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2$  for the quantum well and  $A_{Sk} = A_{ASk} = 2 - 3$  for the single heterostructure. These parameters  $A_{Sk}$  and  $A_{ASk}$  correspond to the number of reversed spins per surplus electron and hole, that are contained in a skyrmion (Sk,  $\nu = 1 + \Delta\nu$ ) and antiskyrmion (ASk,  $\nu = 1 - \Delta\nu$ ,  $\Delta\nu \ll 1$ ), respectively. Again the model fits gave an effective bandgap for the bands nonparabolicity  $E_g^* = 1700 \text{ meV}$ , which is very close to the prediction of the  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -theory. Due to the good accordance with the theory of a skyrmionic polaron cyclotron resonance, the model was used for the quantum well in the reverse direction to evaluate the spin polarization from the cyclotron mass. The subsequently deduced magnetic field dependence of the spin polarization well agreed with those data that were obtained formerly from nuclear spin resonance measurements [Bar95] and from experiments using a special luminescence technique [Aif96]. In addition, the temperature dependence of the cyclotron mass reduction at  $\nu = 1$ , which is an indirect measure for the maximum spin polarization, was in good coincidence with theoretical predictions. These predictions foot on a model of a quantum ferromagnet that incorporates the thermal decay of the polarization via skyrmion-antiskyrmion pair excitations [Rea95].

The linewidth shrinkage that accompanies the entrance into the extreme magnetic quantum limit was related to the impurity induced line splittings in Q2GEG systems with strong acceptor impurity doping [Ric89, Wid98]. With this realization, the model for the impurity influences on the cyclotron resonance was extended. The extension allowed to draw a connection between the decrease of the linewidth and the localizing effect of the impurity background for the particle and hole excitations on the  $\nu = 1$ -state. Within this model, both the step-like transition and its boundaries were explained in a qualitative way. These boundaries pretty well coincide with the edges of the Hall quantization steps, that mark the transition from a localized to a delocalized Q2DEG

system.

In the final chapter, signatures both for Fractional Quantum Hall quantization at filling factors with odd denominators ( $\nu = 1/3, 2/3, 2/5, 3/5$ ) and for a metallic composite fermion gas at half integer filling factors ( $\nu = 1/2, 3/2, 5/2$ ) were found at temperatures of  $L^3He$  ( $T \geq 0.4$  K) in the cyclotron resonances of very high mobile Q2DEG samples.

Since the conditions of Kohn's theorem are only slightly violated in the filling factor regime  $\nu < 2$  at low temperatures  $0.4 \text{ K} < T < 1.5 \text{ K}$ , the influences on cyclotron resonance are expected to be very small. However, small variations in the cyclotron frequency due to the Fractional Quantum Hall quantization were detected under thermal activation. The underlying FQH states were identified in situ by magneto transport measurements. The experiments revealed two qualitatively different regimes for the cyclotron resonance above and below the filling factor  $\nu = 1/2$ , respectively. For fillings  $\nu < 1/2$ , an increase of the cyclotron mass was observable when a FQH state established. In contrast to this, a decreasing mass showed up for the observable FQH states at  $\nu > 1/2$ . In the framework of the composite fermion picture including the spin degree of freedom, a relation between this behaviour and the spin composition of the quasi-particle excitation was drawn on the basis of the underlying CF Landau level scheme. If the spin composition of the quasi-particle excitations is identical to that of the underlying FQH state, the loss of the screening ability due to the incompressibility that acts via polaron coupling and impurity influence explains the observed increase of the cyclotron mass. If, however, the spin composition of the quasi-particles is at least partially reversed to that of the polarized ground state, the screening effects are overcompensated by the effects of the modified level occupations. These level occupation effects strongly affect the resonant polaron coupling and the bands nonparabolicity.

Finally, hints for a manifestation of metallic composite fermion ground states were found in the cyclotron resonance linewidth at half integer fillings. The local maxima and shoulders in the linewidth, which revealed to be thermally very unstable, were related to an additional decay channel for the collective cyclotron resonance excitation, which establishes with half integer fillings. This channel is activated by the presence of disturbances due to the impurity scattering and the detuning of the underlying single particle cyclotron frequencies as a consequence of bands nonparabolicity and polaron coupling. The strengths of the features which ascend in the order  $\nu = 1/2, 3/2, 5/2$  can be interpreted as a measure for the degree of detuning, which is expected to increase with the number of Landau levels that are involved into the collective cyclotron transition.

To summarize this work, a profound and comprehensive experimental and theoretical understanding of the magneto collective modes of the Q2DEG in GaAs was obtained. Numerous aspects of the interplay between ground states, collective effects, electron phonon interaction, bands structure, impurity scattering, and localization were revealed experimentally and explained by the use of adequate qualitative and in many cases quantitative models.

# Literaturverzeichnis

- [Abo97] M. Abolfath, J. J. Palacios, H. A. Fertig, S. M. Girvin, and A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **56**, 6795 (1997).
- [Abr55] M. Abramowitz and I. A. Stegun (editors). *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications, New York 1955).
- [Abs74] G. Abstreiter, P. Kneschaurek, J. P. Kotthaus, and J. F. Koch. Phys. Rev. Lett. **32**, 104 (1974).
- [Ada85] S. Adachi. J. Appl. Phys. **58**, R1 (1985).
- [Aha59] Y. Aharanov and D. Bohm. Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [Ahl01] E. Ahlswede, P. Weitz, J. Weis, K. v. Klitzing, and W. Eberl. Physica B **298**, 562 (2001).
- [Ahl02] E. Ahlswede, P. Weitz, J. Weis, K. v. Klitzing, and W. Eberl. Physica E **12**, 165 (2002).
- [Aif96] E. H. Aifer, B. B. Goldberg, and D. A. Broido. Phys. Rev. Lett. **76**, 680 (1996).
- [All74] S. J. Allen, Jr., D. C. Tsui, and J. V. Dalton. Phys. Rev. Lett. **32**, 107 (1974).
- [All76] S. J. Allen, Jr., D. C. Tsui, and B. Vinter. Solid State Comm. **20**, 425 (1976).
- [All77] S. J. Allen, Jr., D. C. Tsui, and R. A. Logan. Phys. Rev. Lett. **38**, 980 (1977).
- [All83] S. J. Allen, Jr., H. L. Störmer, and J. C. M. Hwang. Phys. Rev. B **28**, 4875 (1983).
- [And74] T. Ando. J. Phys. Soc. Jap. **37**, 622 (1974).
- [And76a] T. Ando. J. Phys. Soc. Japan **37**, 1046 (1976).
- [And76b] T. Ando. Z. Physik B **24**, 33 (1976).
- [And77a] T. Ando. Z. Physik B **26**, 263 (1977).
- [And77b] T. Ando. Solid State Comm. **21**, 801 (1977).
- [And79] T. Ando. Phys. Rev. B **19**, 2106 (1979).
- [And82] T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern. Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [Ant90] D. Antoniou, A. H. MacDonald, and J. C. Swihart. Phys. Rev. B **15**, 5440 (1990).
- [Ant92] D. Antoniou and A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **46**, 15225 (1992).
- [Aok81] H. Aoki and T. Ando. Solid State Comm. **38**, 1079 (1981).

- [Aok87] H. Aoki. Rep. Prog. Phys. **50**, 655 (1987).
- [App78] J. Appeland A. W. Overhauser. Phys. Rev. B **18**, 758 (1978).
- [Aro84] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek. Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
- [Asa96] K. Asano and T. Ando. J. Phys. Soc Jpn. **65**, 1191 (1996).
- [Asa98] K. Asano and T. Ando. Phys. Rev. B **58**, 1485 (1998).
- [Ash76] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. Solid State Physics, (Saunders College Publishing, Philadelphia 1976).
- [Bad87] S. Badjou and P. N. Argyres. Phys. Rev. B **35**, 5964 (1987).
- [Bar75] A. S. Barker, Jr. and A. J. Sievers. Rev. Mod. Phys. **47**, Suppl. 2 (1975).
- [Bar94] S. E. Barrett, R. Tycko, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Phys. Rev. Lett. **72**, 1368 (1994).
- [Bar95] S. E. Barrett, G. Dabbagh, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and R. Tycko. Phys. Rev. Lett. **74**, 5112 (1995).
- [Bas81] G. Bastard. Phys. Rev. B **24**, 5693 (1981).
- [Bas88] G. Bastard. *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures*, Les Ulis: Les Editions de Physique, (Halsted, New York 1988).
- [Bat84] E. Batke and D. Heitmann. Infrared Phys. **24**, 189 (1984).
- [Bat85] E. Batke, D. Heitmann, J. P. Kotthaus, and K. Ploog. Phys. Rev. Lett. **54**, 2367 (1985).
- [Bat86] E. Batke and C. W. Tu. Phys. Rev. B **34**, 3027 (1986).
- [Bat87] E. Batke and C. W. Tu. Phys. Rev. Lett. **58**, 2474 (1987).
- [Bat88] E. Batke, H. L. Störmer, A. C. Gossard and J. H. English. Phys. Rev. B **37**, 3093 (1988).
- [Bat89] E. Batke, G. Weimann, and W. Schlapp. Phys. Rev. B **39**, 11171 (1989).
- [Bat91] E. Batke. In *Festkörperprobleme: Advances in Solid State Physics, Vol. 31*, edited by U. Rössler, (Vieweg, Braunschweig, 1991). S. 297.
- [Bat93] E. Batke, K. Bollweg, U. Merkt, C. M. Hu, K. Köhler, and P. Ganser. Phys. Rev. B **48**, 8761 (1993).
- [Bel72] R. J. Bell. *Introductory Fourier Transform Spectroscopy*, (Academic Press, New York 1972).
- [Bes92] W. M. Besson, E. Gornik, C. M. Engelhardt, and G. Weimann. Semicond. Sci. Technol. **7**, 1274 (1992).
- [Bes93] M. Besson, E. Gornik, G. Böhm, and G. Weimann. Surf. Sci. **263**, 650 (1993).
- [Bla82] R. Blachnik and W. Kress. In *Landolt-Börnstein, Vol. 17a*, edited by K. H. Hellwege, (Springer, Berlin, 1982). S. 234.
- [Boe85] G. S. Boebinger, A. M. Chang, H. L. Störmer, and D. C. Tsui. Phys. Rev. Lett. **55**, 1606 (1985).

- [Bor70] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*, (Oxford 1970).
- [Bra83] B. A. Bransden and C. J. Joachain. *Physics of Atoms and Molecules*, (Longman, New York 1983).
- [Bra85] M. Braun and U. Rössler. *J. Phys. C: Solid State Phys.* **18**, 3365 (1985).
- [Bre89] L. Brey, N. F. Johnson, and B. I. Halperin. *Phys. Rev. B* **40**, 10647 (1989).
- [Bre95] L. Brey, H. A. Fertig, R. Côté, and A. H. MacDonald. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2562 (1995).
- [Bue88] M. Büttiker. *Phys. Rev. B* **38**, 9375 (1988).
- [Bur92] M. G. Burt. *J. Phys.: Condens. Matter* **4**, 6651 (1992).
- [Byc86] Y. A. Bychkov and E. I. Rashba. *JETP* **63**, 200 (1986).
- [Byc96] Y. A. Bychkov, T. Maniv, and I. D. Vagner. *Phys. Rev. B* **53**, 10148 (1996).
- [Car82] M. Cardona and G. Harbeke. In *Landolt-Börnstein Vol. 17a*, edited by K. H. Hellwege, (Springer, Berlin, 1982). S. 242.
- [Cha68] I. F. Chang and S. S. Mitra. *Phys. Rev.* **172**, 924 (1968).
- [Cha86] M. P. Chaubey and C. M. Van Vliet. *Phys. Rev. B* **34**, 3932 (1986).
- [Cha90] M. Chang. In *Graduate Texts in Contemporary Physics: The Quantum Hall Effect*, second edition, edited by R. E. Prange and S. M. Girvin, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).
- [Cha95] T. Chakraborty and P. Pietiläinen. *The Quantum Hall Effects*, second edition, edited by K. v. Klitzing, Springer Series in Solid-State Sciences **85**, Springer-Verlag, (Berlin, Heidelberg, New York 1995).
- [Cha02] M.-C. Chang and H. H. Cheng. *Physica E* **15**, 238 (2002).
- [Che76] W. P. Chen, Y. J. Chen, E. Burstein. *Surf. Sci.* **58**, 263 (1976).
- [Chi74] K. W. Chiu and J. J. Quinn. *Phys. Rev. B* **9**, 4724 (1974).
- [Chk92] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, and L.I. Glazman. *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).
- [Cho76] A. Y. Cho and J. R. Arthur. In *Progress in Solid State Chemistry*, edited by J. O. McCaldin and G. Somorjai, Vol. **10**, 157 (Pergamon, Oxford 1976).
- [Cho93] Y. J. Cho and S. D. Choi. *Phys. Rev. B* **47**, 9273 (1993).
- [Chu92] S. L. Chuang, M. S.-C. Luo, S. Schmitt-Rink, and A. Pinczuk. *Phys. Rev. B* **46**, 1897 (1992).
- [Cla89] R. G. Clark, S. R. Haynes, A. M. Suckling, J. R. Mallett, P. A. Wright, J. J. Harris, and C. T. Foxon. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1536 (1989).
- [Con66] J. Connes and P. Connes. *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 896 (1966).
- [Coo94] N. R. Cooper and J. T. Chalker. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2057 (1994).
- [Dah77] D. A. Dahl and L. J. Sham. *Phys. Rev. B* **16**, 651 (1977).

- [Dat95] S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- [Dev72] J. T. Devreese. In *Polarons and in Ionic Crystals and Polar Semiconductors and Ionic Crystals*, edited by J. T. Devreese, (North Holland publishing company, Amsterdam 1972).
- [Din78] R. Dingle, H. L. Störmer, A. C. Gossard, and W. Wiegmann. *Appl. Phys. Lett.* **33**, 665 (1978).
- [Dob88] M. Dobers, F. Malcher, G. Lommer, K. v. Klitzing, U. Rössler, K. Ploog, and G. Weimann. In *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics II*, edited by G. Landwehr, Springer Series in Solid-State Sciences **87**, 386 (1988).
- [Dob94] J. F. Dobson. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2244 (1994).
- [dP97] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, and D. Mahalu. *Nature* **389**, 162 (1997).
- [Dre53] G. Dresselhaus, A. F. Kip, and C. Kittel. *Phys. Rev.* **92**, 827 (1953).
- [Dre55] G. Dresselhaus, A. F. Kip, and C. Kittel. *Phys. Rev.* **98**, 368 (1955).
- [Dre90] R. M. Dreizler and E. K. U. Gross. *Density Functional Theory*, (Springer, Berlin, 1990).
- [Du,93] R. R. Du, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2944 (1993).
- [Du,94] R. R. Du, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, A. S. Yeh, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3274 (1994).
- [Du,95] R. R. Du, A. S. Yeh, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3926 (1995).
- [Du,97] R. R. Du, A. S. Yeh, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. B* **55**, R7351 (1997).
- [Dum93] T. Dumelow, T. J. Parker, S. R. P. Smith, and D. R. Tilley. *Surf. Sci. Rep.* **17**, 151 (1993).
- [Ehr59] H. Ehrenreich and M. H. Cohen. *Phys. Rev.* **115**, 786 (1959).
- [Eis89] J. P. Eisenstein, H. L. Stoermer, L. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1540 (1989).
- [Eng94] C. M. Engelhardt, E. Gornik, M. Besson, G. Böhm, and G. Weimann. *Surf. Sci.* **305**, 23 (1994).
- [Ens87] K. Ensslin, D. Heitmann, H. Sigg, and K. Ploog. *Phys. Rev. B* **36**, 8177 (1987).
- [Ens88] K. Ensslin. *Doktorarbeit, Universität Stuttgart* (1988).
- [Esa76] L. Esaki and L. L. Chang. *Thin Solid Films* **36**, 285 (1976).
- [Fai93] J. Faist, F. Capasso, A. L. Hutchinson, L. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3573 (1993).
- [Fai94a] J. Faist, C. Sirtori, F. Capasso, L. Pfeiffer, and K. W. West. *Appl. Phys. Lett.* **64**, 872 (1994).
- [Fai94b] J. Faist, F. Capasso, D. L. Sivco, C. Sirtori, A. L. Hutchinson, and A. Y. Cho. *Science* **264**, 553 (1994).

- [Fan66] F. F. Fang and W. E. Howard. Phys. Rev. Lett. **16**, 797 (1966).
- [Fel58] P. Fellgett. J. Phys. Radium **19**, 187 (1958).
- [Fen95] P. Fendley, A. W. W. Ludwig, and H. Saleur. Phys. Rev. Lett. **75**, 2196 (1995).
- [Fer94] H. A. Fertig, L. Brey, R. Côté, and A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **50**, 11018 (1994).
- [Fet71] A. L. Fetter and J. K. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [Fle96] R. Fleischmann, T. Geisel, C. Holzknicht, and R. Ketzmerick. Europhys. Lett. **36**, 167 (1996).
- [Fri96a] K.-J. Friedland, R. Hey, H. Kostial, R. Klann, and K. Ploog. Phys. Rev. Lett. **77**, 4616 (1996).
- [Fri96b] T. Friedrich. Dissertation, Universität Würzburg (1996).
- [Fri96c] T. Friedrich, M. Rösch, V. Latussek, E. Batke, K. Köhler, and P. Ganser. In *23rd International Conference on the Physics of Semiconductors*, edited by M. Scheffler and R. Zimmermann, (World Scientific, Singapore, 1996). S. 2295.
- [Fro54] H. Froehlich. Adv. Phys. **3**, 325 (1954).
- [Gei75] R. Geick. In *Topics in Current Chemistry*, Vol. 58, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975).
- [Gen69] L. Genzel. *Fourier Spektroskopie*, (Teubner, Stuttgart 1969).
- [Ger75] R. R. Gerhardts. Z. Physik **B21**, 275 (1975).
- [Gir86] S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman. Phys. Rev. B **33**, 2481 (1986).
- [Gir87] S. M. Girvin and A. H. MacDonald. Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987).
- [Gir90] S. M. Girvin. In Graduate Texts in Contemporary Physics: *The Quantum Hall Effect*, second edition, edited by R. E. Prange and S. M. Girvin, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).
- [Goe72] W. Goetze and P. Woelfle. Phys. Rev. B **6**, 1226 (1972).
- [Gol96] B. B. Goldberg, M. J. Manfra, E. H. Aifer, D. A. Broido, L. Pfeiffer, and K. West. In *High Magnetic Fields in the Physics of Semiconductors II*, edited by G. Landwehr and W. Ossau, Vol. **1**, 263 (World Scientific, Singapore 1996).
- [Gro86] E. K. U. Groß and E. Runge. Vielteilchentheorie, (Teubner, Stuttgart 1986).
- [Gud87] V. Gudmundsson, R. R. Gerhardts. Phys. Rev. B **35**, 8005 (1987).
- [Gue03] K. Gueven and R. R. Gerhardts. Phys. Rev. B **67**, 115327 (2003).
- [Gun76] O. Gunnarsson and B. I. Lundqvist. Phys. Rev. B **13**, 4274 (1976).
- [Hai90] G.-Q. Hai, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **42**, 11063 (1990).
- [Hai93] G.-Q. Hai, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **47**, 10358 (1993).
- [Hal82] B. I. Halperin. Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).

- [Hal83] F. D. M. Haldane. Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983).
- [Hal84] B. I. Halperin. Phys. Rev. Lett. **52**, 1583, 2390(E) (1984).
- [Hal85] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi. Phys. Rev. Lett. **54**, 237 (1985).
- [Hal90] F. D. M. Haldane. In Graduate Texts in Contemporary Physics: *The Quantum Hall Effect*, second edition, edited by R. E. Prange and S. M. Girvin, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).
- [Hal93] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read. Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
- [Hau93] H. Haug and S. W. Koch. In *Quantum theory of the optical and the electronic properties of semiconductors*, second edition, 364 (World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993).
- [Hei86] D. Heitmann, M. Ziesmann, and L. L. Chang. Phys. Rev. B **34**, 7463 (1986).
- [Hei87] D. Heitmann. *Physics and Applications of Quantum Wells and Superlattices*, (Plenum Press, New York 1987).
- [Hei91] D. Heitmann and K. Ensslin. *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, edited by B. Kramer, (Plenum Press, New York 1991).
- [Hir90] K. Hirakawa, Y. Hashimoto, and T. Ikoma. Appl. Phys. Lett. **57**, 2555 (1990).
- [Hiy82] S. Hiyamizu and T. Mimura. J. Crystal Growth **56**, 455 (1982).
- [Hoh64] P. Hohenberg and W. Kohn. Phys. Rev. **136**, B864 (1964).
- [Hop87] M.A. Hopkins, R. J. Nicholas, M. A. Brummell, J. J. Harris, and C. T. Foxon. Phys. Rev. B **36**, 4789 (1987).
- [Hu,95a] C.-M. Hu, E. Batke, K. Köhler, and P. Ganser. Phys. Rev. Lett. **75**, 918 (1995).
- [Hu,95b] C.-M. Hu, T. Friedrich, E. Batke, K. Köhler, and P. Ganser. Phys. Rev. B **52**, 12090 (1995).
- [Hu,96a] C. M. Hu, E. Batke, K. Köhler, and P. Ganser. Phys. Rev. Lett. **76**, 1904 (1996).
- [Hu,96b] C. M. Hu, E. Batke, K. Köhler, and P. Ganser. Surf. Sci. **361/362**, 456 (1996).
- [Hua63] K. Huang. *Statistical Mechanics*, (Wiley, New York, 1963).
- [Hua88] K. Huang and B.-F. Zhu. Phys. Rev. B **38**, 13377 (1988).
- [Hua96a] D. Huang and M. O. Manasreh. Phys. Rev. B **54**, 2044 (1996).
- [Hua96b] D. Huang and M. O. Manasreh. Phys. Rev. B **54**, 5620 (1996).
- [Jac60] P. Jacquino. Rep. Prog. Phys. **23**, 267 (1960).
- [Jac62] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York, 1962).
- [Jai89a] J. K. Jain. Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).
- [Jai89b] J. K. Jain. Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989).

- [Jai92] J. K. Jain. *Adv. Phys.* **41**, 105 (1992).
- [Jai94] J. K. Jain. *Science* **266**, 1199 (1994).
- [Joh66] E. J. Johnson and D. M. Larsen. *Phys. Rev. Lett.* **16**, 655 (1966).
- [Joh94] P. Johansson. *Phys. Rev. B* **50**, 14734 (1994).
- [Kal84] C. Kallin and B. I. Halperin. *Phys. Rev. B* **30**, 5655 (1984).
- [Kal85] C. Kallin and B. I. Halperin. *Phys. Rev. B* **31**, 3635 (1985).
- [Kal88a] C. Kallin. In *NATO ASI Series: Interfaces, Quantum wells, and Superlattices*, edited by C. R. Leavens and R. Taylor, Vol. **179**, 163 (Plenum Press, New York and London, Oxford 1988).
- [Kal88b] C. Kallin. In *NATO ASI Series: Interfaces, Quantum wells, and Superlattices*, edited by C. R. Leavens and R. Taylor, Vol. **179**, 175 (Plenum Press, New York and London, Oxford 1988).
- [Kam74] A. Kamgar, P. Kneschaurek, and G. Dorda. *Phys. Rev. Lett.* **32**, 1251 (1974).
- [Kam93] M. Kaminska and E. R. Weber. In *Imperfections in III-V Materials*, edited by E. R. Weber, Semiconductors and Semimetals Vol. 38, (Academic Press, New York, 1993). S. 59.
- [Kan57] E. O. Kane. *J. Phys. Chem. Solids* **1**, 249 (1957).
- [Kan66] E. O. Kane. In *Semiconductors and Semimetals*, Vol. **1**, edited by R. K. Willardson and A. C. Beer, (Academic Press, New York 1966).
- [Kan93] W. Kang, H. L. Stoermer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. West. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3850 (1993).
- [Kan94] C. L. Kane and M. P. A. Fisher. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 724 (1994).
- [Kan01] M. Kang, A. Pinczuk, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. West. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2637 (2001).
- [Kat89] S. Katayama and T. Ando. *Solid State Comm.* **70**, 97 (1989).
- [Kir99] V. E. Kirpichev, L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, K. v. Klitzing, K. Eberl, and W. Wegscheider. *Phys. Rev. B* **59**, R12751 (1999).
- [Kla91] U. Klaß, W. Dietsche, K. v. Klitzing, and K. Ploog. *Z. Phys. B - Condensed Matter* **82**, 351 (1991).
- [Kne76] P. Kneschaurek, A. Kamgar, and J. F. Koch. *Phys. Rev. B* **14**, 1610 (1976).
- [Kni76] Z. Knittel. *Optics of Thin Films*, (John Wiley & Sons, London 1976).
- [Koh61] W. Kohn. *Phys. Rev.* **123**, 1242 (1961).
- [Koh65] W. Kohn and L. J. Sham. *Phys. Rev.* **140**, A1133 (1965).
- [Kos63] G. F. Koster, J. O. Dimmock, R. G. Wheeler, and H. Statz. *Properties of the Thirty-Two Point Groups*, (M.I.T. Press, Cambridge Massachusetts 1963).
- [Kou96] A. A. Koulakov, M. M. Fogler, and B. I. Shklovskii. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 499 (1996).
- [Kra96] T. Kraft. Doktorarbeit, Universität Halle-Wittenberg (1996).

- [Kub57] R. Kubo. J. Phys. Soc Jpn. **12**, 570 (1957).
- [Kub91] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. Statistical Physics II, (Springer, Berlin 1991).
- [Kuk94] I. V. Kukushkin, R. J. Haug, K. v. Klitzing, and K. Ploog. Phys. Rev. Lett. **72**, 736 (1994).
- [Kuk96] I. V. Kukushkin and V. B. Timofeev. Advances in Physics **45**, 147 (1996).
- [Kuk99] I. V. Kukushkin, K. v. Klitzing, and K. Eberl. Phys. Rev. Lett. **82**, 3665 (1999).
- [Kuk02] I. V. Kukushkin, J. H. Smet, K. v. Klitzing, and W. Wegscheider. Nature **415**, 409 (2002).
- [Lan30] L. D. Landau. Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [Lan88] C. J. G. M. Langerak, J. Singleton, P. J. van der Wel, J. A. A. J. Perenboom, D. J. Barnes, R. J. Nicholas, M. A. Hopkins, and C. T. B. Foxon. Phys. Rev. B **38**, 13133 (1988).
- [Lau81] R. B. Laughlin. Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [Lau83] R. B. Laughlin. Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [Lau90] R. B. Laughlin. In Graduate Texts in Contemporary Physics: *The Quantum Hall Effect*, second edition, edited by R. E. Prange and S. M. Girvin, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).
- [Lax60] B. Lax and J. G. Mavroides. In *Solid-State Physics*, edited by F. Seitz and D. Turnbull, Vol. **11**, (Academic Press, New York, 1960).
- [Lea94] D. R. Leadley, R. J. Nicholas, C. T. Foxon, and J. J. Harris. Phys. Rev. Lett. **72**, 1906 (1994).
- [Lea97] D. R. Leadley, R. J. Nicholas, D. K. Maude, A. N. Utjuzh, J. C. Portal, J. J. Harris, and C. T. Foxon. Phys. Rev. Lett. **79**, 4246 (1997).
- [Lee90] D. H. Lee and C. L. Kane. Phys. Rev. Lett. **64**, 1313 (1990).
- [Lei77] J. M. Leinaas and J. Myrheim. Nuovo Cim. **37**, 1 (1977).
- [Lev87] B. F. Levine, K. K. Choi, C. G. Bethea, J. Walker, and R. J. Malik. Appl. Phys. Lett. **50**, 1092 (1987).
- [Lev93] B. F. Levine. J. Appl. Phys. **74**, R1 (1993).
- [Lia91] X.-X. Liang and X. Wang. Phys. Rev. B **43**, 5155 (1991).
- [Lin83] G. Lindemann, R. Lassnig, W. Seidenbusch, and E. Gornik. Phys. Rev. B **28**, 4693 (1983).
- [Loe51] P. Loewdin. J. Chem. Phys. **19**, 1396 (1951).
- [Lom85] G. Lommer, F. Malcher, and U. Rössler. Phys. Rev. B **32**, 6965 (1985).
- [Lop91] A. Lopez and E. Fradkin. Phys. Rev. B **44**, 5246 (1991).
- [Luo93] M. S.-C. Luo, S. L. Chuang, S. Schmitt-Rink, and A. Pinczuk. Phys. Rev. B **48**, 11086 (1993).
- [Lut55] J. M. Luttinger and W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
- [MA95] V. Melik-Alaverdian and N. E. Bonesteel. Phys. Rev. B **52**, R17032 (1995).

- [Mac84a] A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **30**, 3550 (1984).
- [Mac84b] A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **30**, 4392 (1984).
- [Mac85a] A. H. MacDonald. J. Phys. C: Solid State Phys. **18**, 1003 (1985).
- [Mac85b] A. H. MacDonald, H. C. A. Oji, and S. M. Girvin. Phys. Rev. Lett. **55**, 2208 (1985).
- [Mac86a] A. H. MacDonald and D. S. Ritchie. Phys. Rev. B **33**, 8336 (1986).
- [Mac86b] A. H. MacDonald, H. C. A. Oji, and K. L. Liu. Phys. Rev. B **34**, 2681 (1986).
- [Mac89] A. H. MacDonald and C. Kallin. Phys. Rev. B **40**, 5795 (1989).
- [Mac96] A. H. MacDonald, H. A. Fertig, and L. Brey. Phys. Rev. Lett. **76**, 2153 (1996).
- [Mad78] O. Madelung. In *Introduction to Solid-State Theory*, edited by M. Cardona, P. Fulde, and H.-J. Queisser, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978).
- [Mad87] O. Madelung (editor). *Landolt-Börnstein*, New Series III, Vol. **22a** (Semiconductors), (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1987). S. 82 ff.
- [Man94] H. C. Manoharan, M. Shayegan, and S. J. Klepper. Phys. Rev. Lett. **73**, 3270 (1994).
- [Man97] A. Manolescu and R. R. Gerhardt. Phys. Rev. B **56**, 9707 (1997).
- [McC68] B. D. McCombe and R. Kaplan. Phys. Rev. Lett. **21**, 756 (1968).
- [Men86] J. Menéndez, A. Pinczuk, D. J. Werder, A. C. Gossard, and J. H. English. Phys. Rev. B **33**, 8862 (1986).
- [Mer96] U. Merkt. Phys. Rev. Lett. **76**, 1134 (1996).
- [Mic94] J. G. Michels, S. Hill, R. J. Warburton, G. M. Summers, P. Gee, J. Singleton, R. J. Nicholas, C. T. Foxon, and J. J. Harris. Surf. Sci. **305**, 33 (1994).
- [Mic96] J. G. Michels, M. S. Daly, P. Gee, S. Hill, R. J. Nicholas, J. Singleton, G. M. Summers, R. J. Warburton, C. T. Foxon, and J. J. Harris. Phys. Rev. B **54**, 13807 (1996).
- [Mur02] G. Murthy and R. Shankar. Phys. Rev. B **65**, 245309 (2002).
- [Nic89] R. J. Nicholas, D. J. Barnes, R. G. Clark, S. R. Haynes, J. R. Mallett, A. M. Suckling, A. Usher, J. J. Harris, C. T. Foxon, and R. Willett. In *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics II*, edited by G. Landwehr, Springer Series in Solid-State Sciences **87**, 115 (Berlin, Heidelberg, New York 1989).
- [Ogg66] N. R. Ogg. Proc. Phys. Soc. London **89**, 431 (1966).
- [Oji86] H. C. A. Oji and A. H. MacDonald. Phys. Rev. B **34**, 1371 (1986).
- [Pan99] W. Pan, J.-S. Xia, V. Shvarts, D. E. Adams, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West. Phys. Rev. Lett. **83**, 3530 (1999).
- [Pan03] W. Pan, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. West. Phys. Rev. Lett. **90**, 16801 (2003).

- [Pee83] F. M. Peeters and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **28**, 6051 (1983).
- [Pee85] F. M. Peeters, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **31**, 3689 (1985).
- [Pee86a] F. M. Peeters and J. T. Devreese. Physica Scripta **T13**, 282 (1986).
- [Pee86b] F. M. Peeters and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **34**, 7246 (1986).
- [Pee86c] F. M. Peeters, X.-G. Wu, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **34**, 1160 (1986).
- [Pee86d] F. M. Peeters, X.-G. Wu, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **33**, 4338 (1986).
- [Pee88] F. M. Peeters, X.-G. Wu, and J. T. Devreese. Phys. Rev. B **37**, 933 (1988).
- [Pee92] F. M. Peeters, X. G. Wu, J. T. Devreese, C. J. G. M. Langerak, J. Singleton, D. J. Barnes, and R. J. Nicholas. Phys. Rev. B **45**, 4296 (1992).
- [Pfe90] P. Pfeiffer and W. Zawadzki. Phys. Rev. B **41**, 1561 (1990).
- [Pfe96] P. Pfeiffer and W. Zawadzki. Phys. Rev. B **53**, 12813 (1996).
- [Pin88] A. Pinczuk, J. P. Valladares, D. Heiman, A. C. Gossard, J. H. English, C. W. Tu, L. Pfeiffer, and K. West. Phys. Rev. Lett. **61**, 2701 (1988).
- [Pin89] A. Pinczuk, S. Schmitt-Rink, G. Danan, J. P. Valladares, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Phys. Rev. Lett. **63**, 1633 (1989).
- [Pin93] A. Pinczuk, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. West. Phys. Rev. Lett. **70**, 3983 (1993).
- [Pou01] A. J. L. Poulter, J. Zeman, D. K. Maude, M. Potemski, G. Martinez, A. Riedel, R. Hey, and K. J. Friedland. Phys. Rev. Lett. **86**, 336 (2001).
- [Pra82] M. Prasad. Phys. Stat. Sol. (b) **109**, 11 (1982).
- [Pra90] R. E. Prange and S. M. Girvin (editors). Graduate Texts in Contemporary Physics: *The Quantum Hall Effect*, second edition, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).
- [Rea89] N. Read. Phys. Rev. Lett. **62**, 86 (1989).
- [Rea95] N. Read and S. Sachdev. Phys. Rev. Lett. **75**, 3509 (1995).
- [Rez99] M. Reznikov, R. de-Picciotto, T. G. Griffiths, M. Heiblum, V. Umansky, and D. Mahalu. Nature **399**, 238 (1999).
- [Ric89] R. Richter, H. Sigg, K. v. Klitzing, and K. Ploog. Phys. Rev. B **39**, 6268 (1989).
- [Rik85] G. L. J. A. Rikken, H. W. Myron, P. Wyder, G. Weimann, W. Schlapp, R. E. Horstmann, and J. Wolter. J. Phys. C: Solid State Phys. **18**, L175 (1985).
- [Sak85] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Redwood City 1985).
- [Sam97] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, and B. Etienne. Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).
- [Sar84] S. Das Sarma. Phys. Rev. B **29**, 2334 (1984).
- [Sar85] S. Das Sarma and B. A. Mason. Annals of Physics **163**, 78 (1985).

- [Sch18] W. Schottky. *Ann. Phys. (Leipzig)* **57**, 541 (1918).
- [Sch83] Z. Schlesinger, J. C. M. Hwang, and S. J. Allen, Jr. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2098 (1983).
- [Sch84] Z. Schlesinger, S. J. Allen, Jr., J. C. M. Hwang, P. M. Platzmann, and N. Tzoar. *Phys. Rev. B* **30**, 435 (1984).
- [Sch87] Z. Schlesinger, W. I. Wang, and A. H. MacDonald. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 73 (1987).
- [Sch95] A. Schmeller, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4290 (1995).
- [Scr93] J. Scriba, A. Wixforth, J. P. Kotthaus, C. Bolognesi, C. Nguyen, and H. Kroemer. *Solid State Comm.* **86**, 633 (1993).
- [Sei87] W. Seidenbusch, E. Gornik, and G. Weimann. *Phys. Rev. B* **36**, 9155 (1987).
- [Sid04] A. Siddiki and R. R. Gerhardts. *Phys. Rev. B* **70**, 195335 (2004).
- [Sig85] H. Sigg, P. Wyder, and J. A. A. J. Perenboom. *Phys. Rev. B* **31**, 5253 (1985).
- [Sky62] T. H. R. Skyrme. *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962).
- [Sme96] J. H. Smet, D. Weiss, R. H. Blick, G. Luetjering, and K. v. Klitzing. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2272 (1996).
- [Smi85] T. P. Smith, B. B. Goldberg, P. J. Stiles, M. Heiblum. *Phys. Rev. B* **32**, 2696 (1985).
- [Smi92] A. P. Smith, A. H. MacDonald, and G. Gumbs. *Phys. Rev. B* **45**, 8829 (1992).
- [Son93] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi. *Phys. Rev. B* **47**, 16419 (1993).
- [Ste67] F. Stern. *Phys. Rev. Lett.* **18**, 546 (1967).
- [Ste72] F. Stern. *Phys. Rev. B* **5**, 4891 (1972).
- [Ste85] F. Stern and S. Das Sarma. *Phys. Rev. B* **30**, 840 (1985).
- [Sto84] H. L. Stoermer. In *Festkörperprobleme: Advances in Solid State Physics, Vol. 24*, edited by P. Grosse, (Vieweg, Braunschweig, 1984). S. 25.
- [Sto92] H. L. Stoermer. *Physica B* **177**, 401 (1992).
- [Sto96] H. L. Stoermer. In *High Magnetic Fields in the Physics of Semiconductors II*, edited by G. Landwehr and W. Ossau, Vol. **1**, 243 (World Scientific, Singapore 1996).
- [Sum93] G. M. Summers, R. J. Warburton, J. G. Michels, R. J. Nicholas, J. J. Harris, and C. T. Foxon. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2150 (1993).
- [Suz74] K. Suzuki and J. C. Hensel. *Phys. Rev. B* **9**, 4184 (1974).
- [Tak78] Y. Takada and T. Ando. *J. Phys. Soc Jpn.* **44**, 905 (1978).
- [Tak80] Y. Takada. *Surf. Sci.* **98**, 442 (1980).
- [Thi87] F. Thiele, U. Merkt, J. P. Kotthaus, G. Lommer, F. Malcher, U. Rössler, and G. Weimann. *Solid State Comm.* **62**, 841 (1987).

- [Tin76] C. S. Ting, S. C. Ying, and J. J. Quinn. Phys. Rev. Lett. **37**, 215 (1976).
- [Tin77] C. S. Ting, S. C. Ying, and J. J. Quinn. Phys. Rev. B **16**, 5394 (1977).
- [Tsu82] D. C. Tsui, H. L. Stoermer, and A. C. Gossard. Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [Ull98] C. A. Ullrich and G. Vignale. Phys. Rev. B **58**, 15756 (1998).
- [Uma97] V. Umansky, R. de-Picciotto, and M. Heiblum. Appl. Phys. Lett. **71**, 683 (1997).
- [Ush90] A. Usher, R. J. Nicholas, J. J. Harris, and C. C. T. Foxon. Phys. Rev. B **41**, 1129 (1990).
- [Vin76] B. Vinter. Phys. Rev. B **13**, 4447 (1976).
- [Vin77] B. Vinter. Phys. Rev. B **15**, 3947 (1977).
- [vK80] K. v. Klitzing, Y. Dorda, and M. Pepper. Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [Wan97] Y. J. Wang, H. A. Nickel, B. D. McCombe, F. M. Peeters, J. M. Shi, G. Q. Hai, X.-G. Wu T. J. Eustis, and W. Schaff. Phys. Rev. Lett. **79**, 3226 (1997).
- [Wan01] Y. J. Wang, Y. A. Leem, B. D. McCombe, X.-G. Wu, F. M. Peeters, E. D. Jones, J. R. Reno, X. Y. Lee, and H. W. Jiang. Phys. Rev. B **64**, 161303 (2001).
- [Wei81] M. H. Weiler. In *Semiconductors and Semimetals* Vol. **16**, edited by R. K. Willardson and A. C. Beer, (Academic Press, New York 1981).
- [Wen85] L. Wendler. Phys. Stat. Sol. (b) **129**, 513 (1985).
- [Wen86] L. Wendler and R. Pechstedt. Phys. Stat. Sol. (b) **138**, 197 (1986).
- [Wen87a] L. Wendler and R. Haupt. Phys. Stat. Sol. (b) **143**, 487 (1987).
- [Wen87b] L. Wendler and R. Haupt. Phys. Stat. Sol. (b) **141**, 493 (1987).
- [Wen89] L. Wendler and V. G. Grigoryan. Solid State Comm. **71**, 527 (1989).
- [Wen90a] L. Wendler and R. Pechstedt. J. Phys.: Condens. Matter **2**, 8881 (1990).
- [Wen90b] L. Wendler, R. Haupt, and V. G. Grigoryan. Physica B **167**, 101 (1990).
- [Wen90c] L. Wendler, R. Haupt, and V. G. Grigoryan. Physica B **167**, 113 (1990).
- [Wen90d] L. Wendler, R. Haupt, and V. G. Grigoryan. Physica B **167**, 91 (1990).
- [Wen93a] L. Wendler A. V. Chaplik, R. Haupt, and O. Hipólito. J. Phys.: Condens. Matter **5**, 8031 (1993).
- [Wen93b] L. Wendler and E. Kändler. Phys. Stat. Sol. (b) **177**, 9 (1993).
- [Wen94] L. Wendler. private Mitteilung, (1994).
- [Wen96] L. Wendler and T. Kraft. Phys. Rev. B **54**, 11436 (1996).
- [Wen99a] L. Wendler and T. Kraft. Physica B **271**, 33 (1999).
- [Wen99b] L. Wendler ,T. Kraft. Physica B **271**, 33 (1999).

- [Wid98] M. Widmann, U. Merkt, M. Cortes, W. Häusler, and K. Eberl. *Physica B* **249-251**, 762 (1998).
- [Wie89] A. D. Wieck, F. Thiele, U. Merkt, K. Ploog, G. Weimann, and W. Schlapp. *Phys. Rev. B* **39**, 3785 (1989).
- [Wig34] E. Wigner. *Phs. Rev.* **46**, 1002 (1934).
- [Wig90] G. Wiggins, R. J. Nicholas, J. J. Harris, and C. T. Foxon. *Surf. Sci.* **229**, 488 (1990).
- [Wil80] B. A. Wilson, S. J. Allen, Jr., and D. C. Tsui. *Phys. Rev. Lett* **44**, 479 (1980).
- [Wil82a] F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1144 (1982).
- [Wil82b] F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
- [Wil87] R. Willet, J. P. Eisenstein, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
- [Wil93] R. L. Willet, R. R. Ruel, K. W. West, and L. N. Pfeiffer. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3846 (1993).
- [Wu,85] J.-W. Wu, Pawel Hawrylak, and J. J. Quinn. *Phys. Rev. B* **31**, 6592 (1985).
- [Wu,86a] X.-G. Wu, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. *Phys. Rev. B* **34**, 2621 (1986).
- [Wu,86b] X.-G. Wu, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. *Phys. Rev. B* **34**, 8800 (1986).
- [Wu,87a] X.-G. Wu, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. *Phys. Stat. Sol (b)* **143**, 581 (1987).
- [Wu,87b] X.-G. Wu, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. *Phys. Rev. B* **36**, 9760 (1987).
- [Wu,89] X.-G. Wu, F. M. Peeters, and J. T. Devreese. *Phys. Rev. B* **40**, 4090 (1989).
- [Wu,00] X.-G. Wu, F. M. Peeters, Y. J. Wang and B. D. McCombe. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4934 (2000).
- [Yeh99] A. S. Yeh, H. L. Stoermer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 592 (1999).
- [Yu 96] P. Y. Yu and M. Cardona. *Fundamentals of Semiconductors*, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1996).
- [Za185] M. Załuzny. *Solid State Comm.* **56**, 235 (1985).
- [Zar91] E. Zaremba. *Phys. Rev. B* **44**, 1379 (1991).
- [Zaw85] W. Zawadzki. *Solid State Comm.* **56**, 43 (1985).
- [Zha89] S.-C. Zhang, T. Hansson, and S. Kivelson. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82 (1989).
- [Zha92] S.-C. Zhang. *Intern. J. Mod. Phys. B* **6**, 25 (1992).
- [Zhe91] L. Zheng and W. L. Schaich. *Phys. Rev. B* **43**, 4515 (1991).
- [Zhu83] Q. G. Zhu and H. Kroemer. *Phys. Rev. B* **27**, 3519 (1983).
- [Zhu95] X. Zhu and S. G. Louie. *Phys. Rev. B* **52**, 5863 (1995).
- [Zun95] M. Zunke, R. Schorer, G. Abstreiter, W. Klein, G. Weimann, and M. P. Chamberlain. *Solid State Comm.* **93**, 847 (1995).



# Publikationsliste

1. "Electron cyclotron resonance in the regime of strong electron-electron coupling"  
M. Manger , H. Pfeufer, E. Batke, A. B. Dzyubenko, K. Köhler, and P. Ganser, 24th Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Jerusalem, Israel, 1998, World Scientific, Singapore
2. "Filling-factor-dependent electron correlations observed in cyclotron resonance"  
M. Manger , E. Batke, R. Hey, K. J. Friedland, K. Köhler, and P. Ganser, Phys. Rev. B 63, 121203 (2001)
3. "Cyclotron resonance at fractional Landau-level fillings"  
M. Manger , E. Batke, and W. Wegscheider, Solid State Commun. 120, 463 (2001)
4. "High-frequency conductivity of the multi-component cyclotron resonance: a classical approach"  
M. Manger and E. Batke, Superlattices and Microstructures 33, 249 (2003)



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Batke für die Möglichkeit, die Arbeit in seiner Arbeitsgruppe anfertigen zu können, seine Unterstützung und sein fortwährendes Interesse an meiner Arbeit danken.

Vielen Dank an die ehemaligen Mitglieder der Arbeitsgruppe für die angenehme Atmosphäre und die Hilfsbereitschaft in allen Belangen. Hervorheben möchte ich dabei die freundschaftliche und inspirierende Zusammenarbeit mit Dr. Matthias Rösch und Dr. Can-Ming Hu.

Mein besonderer Dank gilt auch den geduldigen Korrekturlesern Dr. Rainer Hoch, Dr. Michael Keil, Dr. Matthias Rösch und Dr. Carmen Schmitt von der Carl Zeiss SMT AG für ihre außerordentliche Hilfsbereitschaft und das Aufbringen der dafür notwendigen Geduld.

Danken möchte ich auch meinen Vorgesetzten Dr. Oswald Gromer und Dr. Joachim Stühler von der Carl Zeiss SMT AG für ihren Ansporn, das Angefangene trotz der herrschenden beruflichen und familiären Belastungen zu einem würdigen Ende zu bringen.

Weiterhin danke ich den Herren Dr. R. Hey und K. J. Friedland vom Paul-Drude-Institut in Berlin, Dr. K. Köhler und Dr. P. Ganser vom Fraunhofer IAF in Freiburg, sowie Prof. Dr. W. Wegscheider (mittlerweile Universität Regensburg) und Dr. M. Bichler von der Technischen Universität München für die Zurverfügungstellung des Probenmaterials. Dr. Matthias Rösch sei für die Unterstützung bei der Mikrostrukturierung der Gitterkopplerproben und die Beratung in technologischen und experimentellen Fragen gedankt. Dr. Volker Latussek und Dr. Lutz Wendler gilt mein Dank für die anregenden Diskussionen zu vornehmlich theoretischen Fragestellungen.

Vor allem gebührt der Dank meiner lieben Frau Anke. Sie brachte in der oftmals schwierigen Zeit der Fertigstellung dieser Arbeit über das Maß hinausreichendes Verständnis auf und schenkte mir zudem zwei wundervolle Kinder. Peter und Madita, möchte ich auf diesem Weg um Nachsicht dafür bitten, einen nicht unerheblichen Teil der kostbaren Zeit ihrer Kindheit mit der Fertigstellung dieser Arbeit anstatt mit ihnen im Spiel verbracht zu haben.

Ich danke zuletzt meinen Eltern, Rosa und Ferdinand, für die Ermöglichung meiner Hochschulausbildung und die liebevolle Unterstützung. Leider war es ihnen nicht vergönnt, die Beendigung der Promotion zu erleben.

# Erklärung

Hiermit erkläre ich ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Die Dissertation wurde bisher weder vollständig noch teilweise einer anderen Hochschule mit dem Ziel, einen akademischen Grad zu erwerben, vorgelegt.

Am 24.01.1995 wurde mir von der Universität Würzburg der akademische Grad "Diplom-Physiker (Univ.)" verliehen. Weitere akademische Grade habe ich weder erworben noch versucht zu erwerben.

Aalen, den

