
**Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg**
Institut für Mathematik

**Globale Minimierung von Linearen Programmen mit
Gleichgewichtsrestriktionen und globale Konvergenz
eines Filter-SQPEC-Verfahrens für Mathematische
Programme mit Gleichgewichtsrestriktionen**

Dissertation
von
Christian Teichert

Würzburg, Juni 2009

**Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg**
Institut für Mathematik

**Globale Minimierung von Linearen Programmen mit
Gleichgewichtsrestriktionen und globale Konvergenz
eines Filter-SQPEC-Verfahrens für Mathematische
Programme mit Gleichgewichtsrestriktionen**

Dissertation zur Erlangung
des naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von

Christian Teichert

Erstgutachter: Prof. Dr. Christian Kanzow, Universität Würzburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. Stephan Dempe, TU Bergakademie Freiberg

Würzburg, Juni 2009

*Auch ein langer Weg
beginnt mit dem ersten Schritt.*

Chinesisches Sprichwort

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Menschen bedanken, ohne deren Unterstützung diese Arbeit nie möglich gewesen wäre:

- Zuallererst bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Christian Kanzow für die hervorragende Betreuung während der letzten Jahre. Er hatte immer ein offenes Ohr für jedes Problem.
- Prof. Dr. Stephan Dempe, der sich freundlicherweise als Zweitgutachter bereit erklärt hat.
- Meine Arbeit wurde durch ein Begabtenstipendium der Hanns-Seidel-Stiftung aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) von Oktober 2005 bis September 2007 gefördert. Ich möchte mich ganz besonders bei der Hanns-Seidel-Stiftung für dieses Promotionsstipendium bedanken!
- Meinen Eltern und Großeltern für die finanzielle und moralische Unterstützung während meiner ganzen Studien- und Promotionszeit.
- Ganz besonders möchte ich mich auch bei meiner Freundin Angela Röhrig dafür bedanken, dass sie mich in letzter Zeit so toll unterstützt hat.
- Meinen Freunden und Kollegen, die ich das ein oder andere Mal, besonders in den letzten Wochen, stark vernachlässigt habe.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Bezeichnungen	11
Abkürzungen	13
I Einführung in die MPEC Theorie	15
1 Theorie allgemeiner nichtlinearer Programme	17
1.1 Regularitätsbedingungen	17
1.1.1 MFCQ und LICQ	17
1.1.2 ACQ und GCQ	18
1.1.3 Zusammenhang der Regularitätsbedingungen	19
1.2 Optimalitätsbedingungen	20
2 Optimalitätsbedingungen für MPECs	21
2.1 Regularitätsbedingungen	21
2.1.1 MPEC-MFCQ und MPEC-LICQ	22
2.1.2 MPEC-ACQ und MPEC-GCQ	25
2.1.3 Zusammenhang der MPEC-Regularitätsbedingungen	26
2.2 Stationaritätskonzepte	27
2.2.1 Starke Stationarität	27
2.2.2 M-Stationarität	29
2.2.3 A-Stationarität und C-Stationarität	29
2.3 Spezielle Klassen von MPECs	33
2.3.1 Mathematische Programme mit affinen Gleichgewichtsrestriktionen	33
2.3.2 MPEC-konvexe Probleme	33
II Ein Branch-and-Bound-Verfahren für LPECs	37
3 Lineare Programme	39
3.1 Allgemeine Theorie	39

3.2	Spezielle Verfahren zur Lösung linearer Programme	41
3.2.1	Das Simplex-Verfahren	41
3.2.2	Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens	43
3.2.3	Das duale Simplex-Verfahren	45
4	Branch-and-Bound-Verfahren für LPECs	47
4.1	Notationseinführung	48
4.2	Der Verzweigungsprozess	49
4.3	Wie man untere und obere Schranken bekommt	53
4.4	Effiziente Lösung der Teilprobleme	57
4.4.1	Effiziente Lösung der linearen Programme im Verzweigungsprozess	57
4.4.2	Effiziente Lösungen der linearen Programme zur Gewinnung oberer Schranken	64
4.5	Ein zusätzliches Abbruchkriterium	66
4.6	Komplementäre Schnittebenen	66
4.6.1	Allgemeine Beschreibung	66
4.6.2	Effiziente Lösung der linearen Programme mit Schnittebenen	68
4.7	Der MPEC-konvexe Fall	70
5	Numerische Resultate	71
5.1	Einige Details zur Implementation	71
5.2	LPECs, die sich aus zweistufigen Optimierungsproblemen ergeben	71
5.3	Weitere klein-dimensionale Beispiele	74
5.4	LPECs, die sich aus dem Risikowert - Optimierungsproblem ergeben	76
5.5	LPECs aus dem Misclassification Minimization Problem	77
III	Globale Konvergenz eines Filter-SQPEC-Verfahrens	81
6	Das Filter-SQPEC-Verfahren	83
6.1	Allgemeine Einführung in das Verfahren	83
6.2	Der komplette Algorithmus	91
7	Ein globaler Konvergenzbeweis	95
8	Numerische Resultate	119
8.1	Hinweise zur Implementation	119
8.1.1	Implementation der Restaurationsphase	119
8.1.2	Allgemeine Hinweise zur Implementation des Verfahrens	120
8.2	Ergebnisse der MacMPEC Testsammlung	120
8.2.1	Übersicht über die gefundenen Ergebnisse	121
8.2.2	Darstellung einzelner Lösungen	124
	Literaturverzeichnis	127

Einleitung

Ein **Mathematisches Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen** (engl.: Mathematical program with equilibrium constraints), kurz **MPEC**, ist ein Optimierungsproblem folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) \\
 \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
 & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
 & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell
 \end{aligned} \tag{1}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g_i, h_i, G_i, H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Manchmal werden diese Probleme auch als **Mathematische Programme mit Komplementaritätsbedingungen** (engl.: Mathematical program with complementarity constraints, kurz **MPCC**) bezeichnet.

Oft treten MPECs auch in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) \\
 \text{u.d.N.} \quad & g(x) \geq 0, h(x) = 0, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^T x_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

auf, wobei $x = (x_0^T, x_1^T, x_2^T)^T$ sei.

Die beiden Probleme sind offenbar äquivalent: Dass Problem (2) ein MPEC in der Gestalt von (1) ist, sieht man sofort, wenn man

$$G(x) := x_1, \quad H(x) := x_2$$

setzt. Durch Einführen von Schlupfvariablen

$$G(x) - x_1 = 0, \quad H(x) - x_2 = 0,$$

erkennt man aber auch, dass umgekehrt jedes MPEC in der Form von (1) auch in der Form von (2) geschrieben werden kann. Wir werden uns hier in dieser Arbeit auf die Formulierung (1) konzentrieren.

MPECs sind eng verwandt mit den so genannten **zweistufigen Optimierungsproblemen** (engl.: Bilevel programs), vgl. z.B. [8, 23, 86] und treten recht häufig im Bereich

der Modellierung von Gleichgewichtsproblemen in den Wirtschaftswissenschaften und bei Ingenieursproblemen auf, vgl. z.B. [62, 64, 69, 74, 76, 78, 92] für eine Vielzahl verschiedener Anwendungen.

MPECs sind als äußerst schwierige Optimierungsprobleme bekannt, was an den Komplementaritätsbedingungen

$$G_i(x) \geq 0, H_i(x) \geq 0, G_i(x)H_i(x) = 0 \iff \min\{G_i(x), H_i(x)\} = 0, \quad (3)$$

für alle $i = 1, \dots, \ell$ liegt. Die Komplementaritätsbedingungen sind der Grund dafür, dass ein MPEC kein konvexes Optimierungsproblem darstellt und dass fast alle Standard-Regularitätsbedingungen (constraint qualifications) in jedem für (1) zulässigen Punkt verletzt sind (vgl. [17, 94]). Z.B. ist LICQ (linear independence constraint qualification) oder MFCQ (Mangasarian–Fromovitz constraint qualification) *nie* erfüllt. Folglich stellen die sonst so wichtigen KKT–Bedingungen bei den MPECs im Allgemeinen keine notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Vorliegen eines Minimums dar. Deshalb haben alle Standard-Verfahren enorme Probleme ein lokales Minimum oder einen geeigneten stationären Punkt zu finden. Aus diesem Grund hat man für MPECs spezielle Regularitätsbedingungen entwickelt, unter denen man verschieden starke Optimalitätsbedingungen beweisen kann, die ihrerseits mit den KKT–Bedingungen verwandt sind und in gewissen Fällen sogar mit diesen übereinstimmen.

In diesem Zusammenhang sei insbesondere auf die Arbeit [82] von Scheel und Scholtes verwiesen, wo die genannte Problematik erstmals ausführlich diskutiert wird. Weitere Resultate finden sich beispielsweise in Pang und Fukushima [75], Outrata [73] sowie Ye [93]. Speziell am Lehrstuhl von Herrn Kanzow sind in diesem Bereich die Arbeiten [29, 32, 31, 30, 33, 34] entstanden, die sich ebenfalls mit dieser Problemstellung auseinandersetzen, wobei auch auf die Dissertation [28] von Flegel für eine ausführliche Diskussion und die Einordnung früherer Resultate in den Kontext der in [32, 34] erzielten Ergebnisse verwiesen sei.

Wie einige Ergebnisse in [3, 38] zeigen, gibt es dennoch manche robuste Solver, die ganz brauchbare Ergebnisse liefern. Im Allgemeinen jedoch müssen speziellere Methoden entwickelt werden, um ein lokales Minimum finden zu können. Bevor wir auf das in dieser Arbeit zu entwickelnde Verfahren eingehen, wollen wir kurz einen groben Überblick über die bisher existierenden Verfahren geben:

Existierende Verfahren für MPECs

Aufgrund der oben genannten Problematik (Standard - Regularitätsbedingungen nicht erfüllt) führt die Anwendung der üblichen Verfahren aus der restringierten Optimierung (welche man z.B. bei Kanzow [46] findet) auf das MPEC (1) im Allgemeinen nicht zum Erfolg. In den letzten Jahren sind daher eine Reihe von speziellen Verfahren zur Lösung von MPECs entwickelt worden, die alle versuchen, die auftretenden Schwierigkeiten mittels geeigneter Modifikation des ursprünglichen Problems (1) zu umgehen. Einen Überblick über die existierenden Verfahren findet man auch in der Dissertation von Veelken, vgl. [90].

SQP-basierte Verfahren:

Bei Fletcher et al. [39] werden MPECs in der Formulierung von (2) betrachtet und dann äquivalent als nichtlineare Programme (NLPs) umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x) \geq 0, h(x) = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^T x_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Auf diese Probleme wenden Fletcher et al. gewöhnliche SQP-Verfahren an und lösen dabei quadratische Teilprobleme der folgenden Gestalt:

$$QP(x_k) \left\{ \begin{array}{ll} \min & \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{u.d.N.} & g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)^T d \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x_k) + \nabla h_i(x_k)^T d = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & (x_k)_1 + d_1 \geq 0, \\ & (x_k)_2 + d_2 \geq 0, \\ & (x_k)_1^T (x_k)_2 + (x_k)_2^T d_1 + (x_k)_1^T d_2 \leq 0, \end{array} \right.$$

wobei B_k die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion von Problem (4) und $d = (d_0^T, d_1^T, d_2^T)^T$ sei. Für dieses SQP-Verfahren wird dann in [39] gezeigt, dass es unter gewissen Voraussetzungen in der Nähe eines stark stationären Punktes quadratisch konvergiert. Numerische Resultate für dieses Verfahren sind in [37] angegeben.

Weitere SQP-basierte-Verfahren finden sich in [55, 61, 62]. Ein SQP-Verfahren für MPECs mit linearen Nebenbedingungen liefern schließlich die folgenden Paper: [43, 50, 95].

Glättungsverfahren

Beim Glättungsverfahren formuliert man das Komplementaritätsproblem (3) mittels einer NCP-Funktion äquivalent um. Dabei wird eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ **NCP-Funktion** genannt, wenn folgendes gilt, vgl. [46, Definition 4.30]:

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0.$$

Benutzt man die Minimum-Funktion

$$\phi(a, b) = 2 \min\{a, b\} = a + b - |a - b| = a + b - \sqrt{(a - b)^2},$$

vgl. [46, Beispiel 4.32], als NCP-Funktion, so erhält man

$$\begin{aligned} G_i(x) \geq 0, H_i(x) \geq 0, G_i(x)H_i(x) = 0 & \iff 2 \min\{G_i(x), H_i(x)\} = 0 \\ & \iff G_i(x) + H_i(x) - |G_i(x) - H_i(x)| = 0 \\ & \iff G_i(x) + H_i(x) - \sqrt{(G_i(x) - H_i(x))^2} = 0, \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, \ell$. Anschließend wird die nichtdifferenzierbare Wurzelfunktion durch Einführung eines Parameters $\mu > 0$ geglättet. Damit erhalten wir das gestörte MPEC

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) + H_i(x) - \sqrt{(G_i(x) - H_i(x))^2 + \mu} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Die Klasse der Glättungsverfahren löst zu einer Folge $\mu_k \downarrow 0$ die zugehörigen gestörten MPECs und erhält auf diese Weise eine Folge $\{x^k\}$, deren Häufungspunkte im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ zumindest geeignete Kandidaten für Lösungen des ursprünglichen MPECs sind. Zugänge dieser Art werden insbesondere in [27, 44] beschrieben.

Weitere Ansätze findet man in [96], wobei hier die Fischer-Burmeister-Funktion

$$\phi(a, b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2},$$

vgl. [46, Beispiel 4.32], als NCP-Funktion verwendet wird. In [51] werden zwei Glättungsverfahren beschrieben, die auf dem SQP-Verfahren basieren.

Regularisierungsmethoden

Die Regularisierungsverfahren vergrößern den zulässigen Bereich des MPECs, indem sie das Komplementaritätsproblem (3) ersetzen durch

$$G_i(x) \geq 0, \quad H_i(x) \geq 0, \quad G_i(x)H_i(x) \leq \tau, \quad \forall i = 1, \dots, \ell,$$

für einen Parameter $\tau > 0$. Das zugehörige regularisierte MPEC lautet daher:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ & G_i(x)H_i(x) \leq \tau, \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Regularisierungsmethoden erzeugen zu einer Folge $\tau_k \downarrow 0$ dann eine zugehörige Folge von Lösungen x^k der regularisierten Probleme (5). Im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ erhält man mit den Häufungspunkten der Folge $\{x^k\}$ dann wieder mögliche Kandidaten für eine Lösung des ursprünglichen Problems (1), vergleiche [80, 83] für eine eingehendere Untersuchung. Eine Variante davon wird in [15] diskutiert, bei der $G_i(x)H_i(x) = \tau$ anstatt $G_i(x)H_i(x) \leq \tau$ gesetzt wird.

In [59] dagegen wird das folgende modifizierte regularisierte MPEC betrachtet:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x)H_i(x) \leq \varepsilon^2, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ & (G_i(x) + \varepsilon)(H_i(x) + \varepsilon) \geq \varepsilon^2, \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \tag{6}$$

In diesem Paper wird dann gezeigt, dass unter der MPEC-LICQ-Bedingung ein Häufungspunkt der stationären Punkte der relaxierten Probleme (6) ein B-stationärer Punkt für das MPEC (1) ist, falls die Folge der kleinsten Eigenwerte der Hesse-Matrizen der zugehörigen Lagrange-Funktionen der Probleme (6) nach unten beschränkt ist.

In [58] werden MPECs der folgenden Gestalt betrachtet:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x, y) \leq 0, \quad h(x, y) = 0, \\ & F(x, y) \geq 0, \quad y \geq 0, \\ & y^T F(x, y) = 0, \end{aligned}$$

wobei $f : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^q$ und $F : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$ sei. Die relaxierten Probleme sehen dabei wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x, y) \leq 0, \quad h(x, y) = 0, \quad y \geq 0, \\ & (e_i^k - y)^T F(x, y) \geq 0, \quad \forall i = 0, \dots, m, \end{aligned}$$

wobei $e_i^k = (1/k)e + ke_i$ sei. Dabei ist $e = (1, \dots, 1)^T$, $e_0 = (0, \dots, 0)^T$ und e_i der i -te Einheitsvektor.

Veelken und Ulbrich, vgl. [90, 91], betrachten MPECs in der Form von (2) und kombinieren die SQP-Methode von Fletcher et al. aus [39] mit einem Regularisierungsansatz. Anstatt der vollständigen Regularisierung

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^T x_2 \leq t$$

wird für Paare $(x_{1i}, x_{2i}) \in \mathbb{R}^2$ nur eine Teilmenge des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(0, t)$ betrachtet. Allerdings wird das in der Nähe einer Lösung x^* von (2) nur für degenerierte Komponenten des Vektors x^* durchgeführt, d.h. nur wenn $x_{1i}^* = x_{2i}^* = 0$ gilt.

Einen weiteren neueren Regularisierungsansatz findet man bei Stein [85]. Mit Hilfe der Menge

$$L := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0, b \geq 0, ab = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(a, b) = 0\},$$

wobei ϕ eine NCP-Funktion sei, lassen sich die Komplementaritätsbedingungen (3) auch durch

$$x \in M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (G_i(x), H_i(x)) \in L, \forall i = 1, \dots, \ell\}$$

beschreiben. Die Idee dieses Papers ist es dann, die nichtglatte Menge L als orthogonale Projektion einer geeigneten glatten Menge des \mathbb{R}^3 aufzufassen. Anschließend führt man eine Regularisierung des gelifteten Problems durch.

Penalty–Methoden

Die Penalty–Methoden ersetzen z.B. das eigentliche MPEC durch ein Problem der Gestalt

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} G_i(x)H_i(x) \\
\text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
& h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
& G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
& H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell
\end{aligned} \tag{7}$$

mit einem gewissen Penalty–Parameter $\alpha > 0$. Der kritische Ausdruck in den Gleichgewichtsrestriktionen (3) wird hier also als Strafterm in die Zielfunktion mit aufgenommen. Die Penalty–Methoden versuchen nun, zu einer streng monoton wachsenden Folge $\{\alpha_k\}$ eine zugehörige Folge $\{x^k\}$ von Lösungen des entsprechenden Problems (7) zu berechnen. Die Häufungspunkte der Folge $\{x^k\}$ sind dann wieder Kandidaten für Lösungen des ursprünglich gegebenen MPECs, vergleiche [49, 80] für weitere Einzelheiten.

In Scholtes und Stöhr [84] wird ein weiteres Penalty–Verfahren vorgestellt, das auf der $S\ell_1QP$ –Methode von Fletcher [35] basiert, welches ein SQP–Trust–Region–Verfahren ist. Dabei werden dann Teilprobleme der Gestalt

$$\begin{aligned}
\min \quad & \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d + \alpha_k p(d) \\
\text{u.d.N.} \quad & \|d\|_{\infty} \leq \rho_k,
\end{aligned} \tag{8}$$

betrachtet, wobei

$$\begin{aligned}
p(d) := & \sum_{i=1}^{\ell} |\min \{G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d, H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d\}| + \\
& \sum_{i=1}^m \max \{g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d, 0\} + \sum_{i=1}^p |h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d|
\end{aligned}$$

die Penalty–Funktion ist. Die Matrizen B_k und der Penalty–Parameter α_k werden dabei von Iteration zu Iteration aufdatiert. Allerdings ist Problem (8) nichtkonvex und deshalb schwer zu lösen, so dass Scholtes und Stöhr vorschlagen, stattdessen das folgende Problem zu lösen:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d + \alpha_k p_{I_k}(d) \\
\text{u.d.N.} \quad & \|d\|_{\infty} \leq \rho_k,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
p_{I_k}(d) := & \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I_k}}^{\ell} \max \{|G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d|, -(H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d)\} + \\
& \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I_k}}^{\ell} \max \{|H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d|, -(G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d)\} + \\
& \sum_{i=1}^m \max \{g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d, 0\} + \sum_{i=1}^p |h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d|
\end{aligned}$$

die neue Penalty-Funktion ist. Hier werden zusätzlich die Indexmengen I_k von Iteration zu Iteration aufdatiert.

Schließlich finden sich weitere Penalty-Verfahren in [57, 62, 63].

Innere-Punkte-Methoden

Bei Leyffer et al. [56] werden MPECs in der Gestalt von (2) behandelt und durch das l_1 -Penalty Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \pi x_1^T x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ersetzt, wobei $\pi > 0$ der Penalty-Parameter sei. Um dieses Problem zu lösen werden die folgenden Barriere-Probleme

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \pi x_1^T x_2 - \mu \sum_{i=1}^m \ln s_i - \mu \sum_{i=1}^{\ell} \ln x_{1i} - \mu \sum_{i=1}^{\ell} \ln x_{2i} \\ \text{u.d.N.} \quad & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & g_i(x) - s_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

betrachtet, wobei μ der Barriere-Parameter und s eine Schlupfvariable ist.

Weitere Methoden, die auf den Innere-Punkte-Methoden basieren, finden sich in [19, 20, 60, 79].

Elastic-Mode-Verfahren

Bei Anitescu et al. [5] werden folgende MPECs betrachtet:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x) \geq 0, h(x) = 0, \\ & G^T x \geq 0, H^T x \geq 0, (G^T x)^T (H^T x) = 0. \end{aligned}$$

Dabei seien $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p, h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ zweimal stetig differenzierbar und G, H $n \times m$ Matrizen. Anschließend wird das folgende Problem gelöst:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + c\zeta + c(G^T x)^T (H^T x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x) \geq -\zeta e, \zeta e \geq h(x) \geq -\zeta e, 0 \leq \zeta \leq \bar{\zeta} \\ & G^T x \geq 0, H^T x \geq 0, \end{aligned}$$

wobei e jeweils der Vektor entsprechender Dimension sei, der aus lauter Einsen bestehe, $c > 0$ der Penalty-Parameter und $\bar{\zeta} \in [0, \infty)$ eine obere Schranke sei. Dieses Penalty-Verfahren ähnelt dem von [80], vgl.(7). Dort wurde allerdings zusätzlich $\zeta = 0$ gefordert. Weitere Elastic-Mode-Verfahren finden sich bei Anitescu [2, 3, 4], die teilweise auch auf SQP-Verfahren basieren.

Weitere Verfahren

Es gibt noch viele weitere Verfahren, die hier nicht alle berücksichtigt werden können. Es sollen aber dennoch ein paar wenige erwähnt werden:

- Die kombinatorische Struktur ermöglicht eine Umformulierung des MPECs als Mixed-Integer Problem (vgl. [6] für mehr Details), so dass existierende Mixed-Integer-Löser verwendet werden können.
- Heuristische Methoden, um das globale Minimum spezieller Klassen von MPECs zu finden, werden in [14] und in [26] präsentiert.
- Die Relaxation-Methode von [87] kann auf MPECs angewendet werden, verlangt allerdings eine spezielle Struktur von G und H (H ist unabhängig von den Variablen in G).
- Für ein MPEC mit linearen Nebenbedingungen existiert das Verfahren der aktiven Menge von Júdice et al. [53].
- In [73] findet man einen impliziten Zugang, der allerdings eine speziellere Struktur für das MPEC voraussetzt.
- Für die zweistufigen Optimierungsprobleme gibt es zahlreiche Verfahren, die allerdings nicht so ohne weiteres auf MPECs verallgemeinert werden können. Ein Standardwerk ist in diesem Zusammenhang das Buch von Dempe [23]. Weitere Verfahren liefern z.B. [1, 9, 10, 18, 21, 22, 24, 25, 47, 70, 71, 72, 88, 89].

Ziel der Dissertation

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein weiteres Verfahren zur Lösung von MPECs zu entwickeln, nämlich ein Filter-SQPEC-Verfahren. Dabei steht SQPEC für **sequential quadratic programming with equilibrium constraints**. Das Filter-Verfahren basiert auf dem Filter-SQP-Verfahren von Fletcher, Leyffer, Toint, vgl. [36, 40, 41], dessen Konvergenzsatz allerdings MFCQ voraussetzt, so dass dieses Verfahren nicht ohne weiteres auf MPECs angewendet werden kann und deshalb modifiziert werden muss. Der Hauptunterschied besteht darin, dass keine quadratischen Teilprobleme, sondern Teilprobleme folgender Gestalt gelöst werden müssen:

$$\begin{array}{ll}
 \min & q(d) := f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B d \\
 \text{u.d.N.} & \begin{array}{ll}
 g_i(x) + \nabla g_i(x)^T d & \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
 h_i(x) + \nabla h_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
 G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 (G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d) (H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d) & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 \|d\|_\infty & \leq \rho.
 \end{array}
 \end{array}$$

Dieses Optimierungsproblem hängt von den aktuellen Iterierten x und dem Trust-Region-Radius ρ ab. Man beachte, dass dieses Teilproblem eng verwandt ist mit dem Teilproblem (8) von Scholtes und Stöhr [84]. Bei uns werden die Nebenbedingungen linearisiert, aber stehengelassen. Bei Scholtes und Stöhr [84] werden sie zusätzlich noch in eine Penalty-Funktion eingesetzt und zur Zielfunktion hinzugefügt. Unsere Funktion $c(x)$, die wir später in (7.18) definieren werden und die Verletzung der Nebenbedingung im Filter-Verfahren angibt, stimmt genau mit dieser Penalty-Funktion überein, außer dass die Nebenbedingungen direkt eingesetzt sind und nicht erst linearisiert wurden.

Wir werden im Konvergenzsatz sehen, dass wir einen M-stationären Punkt x erhalten, sofern das Verfahren mit der Lösung $d = 0$ für das Teilproblem abbricht. Ist die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt, so bricht das Verfahren in diesem Fall sogar mit einem stark stationären Punkt ab. In allen anderen Fällen (in denen nicht mit einer Lösung $d = 0$ eines Teilproblems abgebrochen wird) erhalten wir unter der MPEC-MFCQ-Bedingung zumindest einen A-stationären Punkt als Häufungspunkt.

Da die Zielfunktion der Teilprobleme quadratisch und alle anderen Funktionen linear (genauer affin-linear) sind, haben wir es hier mit einem QPEC (quadratic program with equilibrium constraints) zu tun, welches zur Klasse der MPEC-konvexen Programme gehört. Setzt man $B = 0$, so ist auch die Zielfunktion linear und wir erhalten ein LPEC (linear program with equilibrium constraints) als Teilproblem. Im ersten Teil dieser Arbeit soll daher zunächst ein spezieller Algorithmus erarbeitet werden, der für LPECs und dann auch allgemein für MPEC-konvexe Programme möglichst ein globales Minimum finden soll. Die oben vorgestellten Verfahren finden bestenfalls nur ein lokales Minimum des MPECs (streng genommen nur Kandidaten hierfür, indem gewisse notwendige Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind), selbst wenn die beteiligten Funktionen f, g_i, h_i, G_i, H_i allesamt nur linear sind.

Obwohl ein LPEC ein kontinuierliches Optimierungsproblem ist, hat es auch eine kombinatorische Struktur. Dies liegt daran, dass entweder die Nebenbedingung $G_i(x) \geq 0$ oder die Nebenbedingung $H_i(x) \geq 0$ aktiv ist. Deshalb kann man die Branch-and-Bound Idee verwenden, um eine Lösung für LPECs zu erhalten. Dies wurde auch schon vorher getan, hauptsächlich für die zweistufigen Optimierungsprobleme. Zum Beispiel wird bei Bard, vgl. [7], solch eine Verzweigungsmethode beschrieben, die allerdings stark auf der zweistufigen Struktur basiert und deshalb nicht auf allgemeine MPECs in der Form von (1) angewendet werden kann. Die Paper [10] und [47] benutzen leicht veränderte Branch-and-Bound-Strategien. All diese Paper gehen bei ihrer Suche nach einem Minimum zuerst in die Tiefe, wohingegen in dieser Arbeit zuerst in die Breite gegangen wird, vgl. die Art und Weise wie obere und untere Schranken gefunden werden. Die Methode wird desweiteren verbessert, indem noch die Idee von komplementären Schnittebenen aufgefasst wird, vgl. [52]. Außerdem wird ein Kriterium benutzt, welches an ein Ergebnis aus [93] angelehnt ist.

Literatur zur Auffindung eines globalen Minimums des MPECs aus (1) existiert kaum. Mir sind in diesem Zusammenhang lediglich die beiden Arbeiten [7] von Bard sowie [76] von Pang und Leyffer bekannt. Die Arbeit von Pang und Leyffer behandelt ein sehr spezielles MPEC, das durch geeignete Formulierung eines Problems aus der Finanzmathematik

entstammt. Das von den Autoren benutzte Branch- und Bound-Verfahren ist vom Ansatz her allerdings identisch mit dem von uns verwendeten Zugang. Die in diesem Zusammenhang äußerst wichtige Konstruktion von geeigneten unteren und oberen Schranken für den optimalen Funktionswert des MPECs geschieht bei uns aber auf eine andere Art und Weise (in [76] wird hierzu die sehr spezielle Struktur des konkret aus der Anwendung stammenden MPECs ausgenutzt).

Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in drei Hauptkapitel. In Kapitel I soll in die MPEC Theorie eingeführt werden. Dazu wird dieses Kapitel in zwei Unterabschnitte gegliedert, indem zuerst die Regularitätsbedingungen und Optimalitätsbedingungen für allgemeine nichtlineare Programme angegeben werden. Im zweiten Unterkapitel wird speziell auf die besondere Struktur eines MPECs eingegangen. Dazu werden die MPEC-Regularitätsbedingungen, Stationaritätskonzepte und spezielle Klassen von MPECs präsentiert.

Im zweiten Hauptkapitel, welches sich in drei Unterkapitel gliedert, soll das oben angesprochene Branch-and-Bound-Verfahren für LPECs hergeleitet werden. Nach einer kurzen Einführung in die bekannte Theorie von linearen Programme, beschreibt der zweite Unterabschnitt genau, wie der Verzweigungsprozess des Branch-and-Bound-Verfahrens funktioniert und wie man obere und untere Schranken erzeugt. Außerdem werden gewisse Abbruchkriterien angegeben, sowie die effiziente Lösung der Teilprobleme präsentiert. Am Schluss wird noch auf den MPEC-konvexen Fall eingegangen. Im dritten Unterkapitel wird das Verfahren schließlich für verschiedene Klassen getestet.

In Kapitel III wird der Filter-Algorithmus sowie ein globaler Konvergenzbeweis angegeben. Schließlich werden im letzten Teilkapitel die Ergebnisse präsentiert, die man mit dem Filter-SQPEC-Verfahren erhält, wenn man ihn auf die MPEC-Testsammlung MacMPEC, vgl. [54], anwendet.

Zum Schluss noch etwas Notation:

Für jeden zulässigen Punkt x des MPECs (1) definieren wir die folgenden Indexmengen. Sie werden uns in der gesamten Arbeit wieder begegnen:

$$\begin{aligned}
 \alpha & := \alpha(x) & := \{i \mid G_i(x) = 0, H_i(x) > 0\}, \\
 \beta & := \beta(x) & := \{i \mid G_i(x) = 0, H_i(x) = 0\}, \\
 \gamma & := \gamma(x) & := \{i \mid G_i(x) > 0, H_i(x) = 0\}, \\
 \underline{\mathcal{I}}_g & := \underline{\mathcal{I}}_g(x) & := \{i \mid g_i(x) = 0\}, \\
 \overline{\mathcal{I}}_g & := \overline{\mathcal{I}}_g(x) & := \{i \mid g_i(x) < 0\}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Bezeichnungen

Notation	Erklärung
Mengen	
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	der n-dimensionale Raum der reellen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathcal{T}(x)$	Tangentialkegel im Punkt x
$\mathcal{T}^{lin}(x)$	linearisierter Tangentialkegel im Punkt x
$\mathcal{T}_{MPEC}^{lin}(x)$	MPEC-linearisierter Tangentialkegel im Punkt x
$B_\varepsilon(x)$	ε -Kugel um den Punkt x
$A \cup B$	Vereinigung von A und B
$A \cap B$	Schnitt von A und B
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B
$A \setminus B$	Menge A ohne die Menge B
$A = B$	A gleich B
$\mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{N}, \dots$	Indexmengen
$\alpha := \alpha(x)$	Indexmenge $\{i G_i(x) = 0, H_i(x) > 0\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ des MPECs (1)
$\beta := \beta(x)$	Indexmenge $\{i G_i(x) = 0, H_i(x) = 0\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ des MPECs (1)
$\gamma := \gamma(x)$	Indexmenge $\{i G_i(x) > 0, H_i(x) = 0\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ des MPECs (1)
$\mathcal{I}_g = \mathcal{I}_g(x)$	Indexmenge $\{i g_i(x) = 0\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ des MPECs (1)
$\overline{\mathcal{I}}_g = \overline{\mathcal{I}}_g(x)$	Indexmenge $\{i g_i(x) < 0\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ des MPECs (1).
(β_1, β_2)	Partition von β , d.h. es gilt $\beta_1 \cup \beta_2 = \beta$ und $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$
Vektoren	
$x \in \mathbb{R}^n$	Spaltenvektor im \mathbb{R}^n
x^T	Zeilenvektor
x_i	i -te Komponente des Vektors x
$x_{\mathcal{I}}$	Vektor der aus den Komponenten x_i besteht, wobei $i \in \mathcal{I}$ gilt
e_j	j -ter Einheitsvektor
e	der Vektor $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$
0	Vektor bestehend aus lauter Nullen
$x \geq y$ bzw. $x > y$	$x_i \geq y_i$ bzw. $x_i > y_i$ für alle i
$\ x\ _p$	p -Norm des Vektors x

$\|x\|_\infty$ Maximumsnorm des Vektors x

Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $n \times m$ -dimensionale Matrix
 I Einheitsmatrix
 A^{-1} Inverse von A
 A_i i -te Spalte von A
 $A(x)$ Matrix A , die vom Punkt x abhängt

Funktionen

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ Funktion f , die von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m abbildet
 f_i i -te Komponentenfunktion von f
 $f_i(x) \geq 0$ $f_i(x) \geq 0$ für alle i
 $f_i(x) = 0$ $f_i(x) = 0$ für alle i
 $\nabla f(x)$ Gradient von f ausgewertet in x
 $\nabla^2 f_i(x)$ Hesse-Matrix der Funktion f_i ausgewertet in x
 $\min(f(x), g(x))$ komponentenweise Minimumfunktion:
 $(\min(f_1(x), g_1(x)), \dots, \min(f_m(x), g_m(x)))$ für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

Folgen

$\{c^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Folge im \mathbb{R}^n
 $(c^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ Folge im \mathbb{R}^n
 $(c^k)_{k \in \mathcal{S}} \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilfolge der Folge $(c^k)_{k \in \mathbb{N}}$
 $c^k \rightarrow c$ Folge $\{c^k\}$ konvergiert gegen den Grenzwert c
 $\lim_{k \rightarrow \infty} c^k$ Grenzwert der Folge $\{c^k\}$

Lineare Programme

P_j^k Lineares Programm der Ebene j und des Blattes k
 \mathcal{G}_j^k $\{i | G_i(x) = 0 \text{ ist Nebenbedingung von } P_j^k\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$
 \mathcal{H}_j^k $\{i | H_i(x) = 0 \text{ ist Nebenbedingung von } P_j^k\} \subseteq \{1, \dots, \ell\}$

Filter-SQPEC-Verfahren

$c(x)$ gibt die Verletzung der Nebenbedingung an:
 $c(x) = \|\max\{0, g(x)\}\|_1 + \|h(x)\|_1 + \|\min\{G(x), H(x)\}\|_1$
 Δf tatsächliche Reduktion: $\Delta f = f(x^k) - f(x^k + d^k)$
 Δq vorhergesagte Reduktion: $\Delta q = q(0) - q(d^k)$
 \mathcal{F}_k Indexmenge des Filters:
 $\{j \in \{1, \dots, k-1\} | (f^j, c^j) \text{ ist ein Eintrag des Filters}\}$
 τ^k minimalster c -Wert der Paare des Filters: $\tau^k = \min_{j \in \mathcal{F}_k} c_j$

Abkürzungen

ACQ	Regularitätsbedingung von Abadie (Abadie constraint qualification)
GCQ	Regularitätsbedingung von Guignard (Guignard constraint qualification)
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LICQ	Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit (Linear independence constraint qualification)
LP	Lineares Programm (Linear program)
LPEC	Lineares Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen (Linear program with equilibrium constraints)
MFCQ	Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz (Mangasarian-Fromovitz constraint qualification)
MPAEC	Mathematisches Programm mit affinen Gleichgewichtsrestriktionen (Mathematical program with affine equilibrium constraints)
MPEC	Mathematisches Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen (Mathematical program with equilibrium constraints)
MPEC-ACQ	MPEC-Regularitätsbedingung von Abadie
MPEC-GCQ	MPEC-Regularitätsbedingung von Guignard
MPEC-LICQ	MPEC-Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit
MPEC-MFCQ	MPEC-Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz
MPCC	Mathematisches Programm mit Komplementaritätsbedingungen (Mathematical program with complementarity constraints)
NLP	Nichtlineares Programm (Nonlinear program)
QPEC	Quadratisches Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen (Quadratic program with equilibrium constraints)
SQPEC	Sequential quadratic programming with equilibrium constraints
TNLP	Verschärfte nichtlineare Programm (Tightened nonlinear program)

Teil I

Einführung in die MPEC Theorie

Kapitel 1

Theorie allgemeiner nichtlinearer Programme

In diesem Abschnitt betrachten wir das allgemeine **nichtlineare Programm** (engl.: non-linear program, kurz: **NLP**)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(x) \leq 0, \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Man beachte, dass unser MPEC (1) ein Spezialfall dieses allgemeinen nichtlinearen Programms (1.1) ist. Von zentraler Bedeutung für das theoretische Verständnis und die Konstruktion geeigneter Verfahren zur Lösung von restringierten Optimierungsproblemen sind die so genannten *KKT-Bedingungen*, bei denen es sich unter gewissen *Regularitätsbedingungen* um notwendige Optimalitätskriterien für das Vorliegen eines Minimums handelt.

1.1 Regularitätsbedingungen

1.1.1 MFCQ und LICQ

Die wohl bekanntesten Regularitätsbedingungen für das NLP (1.1) sind die Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit und die Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz, vgl. z.B. [11, 12, 46, 77]. Deshalb führen wir sie in den folgenden beiden Definitionen ein:

Definition 1.1 *Seien x ein zulässiger Punkt des Optimierungsproblems (1.1) und $\mathcal{I}_g(x) = \{i | g_i(x) = 0\}$ die Menge der aktiven Ungleichungsrestriktionen. Dann genügt x der **Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit** (engl.: linear independence constraint qualification, kurz: **LICQ**), wenn die folgenden Gradienten linear unabhängig sind:*

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x), \quad & \forall i \in \mathcal{I}_g(x), \\ \nabla h_i(x), \quad & \forall i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Definition 1.2 Seien x ein zulässiger Punkt des Optimierungsproblems (1.1) und $\mathcal{I}_g(x) = \{i | g_i(x) = 0\}$ die Menge der aktiven Ungleichungsrestriktionen. Dann genügt x der **Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz** (engl.: Mangasarian-Fromovitz constraint qualification, kurz: **MFCQ**), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Die Gradienten

$$\nabla h_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, p,$$

sind linear unabhängig.

(b) Es existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d &< 0, & \forall i \in \mathcal{I}_g(x), \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, & \forall i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

In Zukunft werden wir der Einfachheit halber für die Indexmenge $\mathcal{I}_g(x)$ auch \mathcal{I}_g schreiben. Dabei sollten wir allerdings beachten, dass sie eigentlich vom Punkte x abhängig ist.

1.1.2 ACQ und GCQ

Eine weitere wichtige Regularitätsbedingung ist die Regularitätsbedingung von Abadie. Um diese definieren zu können, benötigen wir noch die Begriffe des Tangentialkegels und des linearisierten Tangentialkegels. Bevor wir beide definieren, führen wir den Begriff des Kegels und des dualen Kegels ein, vgl. [12, 46, 81]:

Definition 1.3 (a) Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein **Kegel** (engl.: cone), falls

$$\lambda x \in \mathcal{C}$$

für alle $x \in \mathcal{C}$ und alle $\lambda \geq 0$ gilt.

(b) Für einen Kegel \mathcal{C} definieren wir den **dualen Kegel** (engl.: dual cone)

$$\mathcal{C}^* := \{v \in \mathbb{R}^n | v^T d \geq 0, \forall d \in \mathcal{C}\}.$$

Nun sind wir in der Lage, den Tangentialkegel, bzw. den linearisierten Tangentialkegel einzuführen, vgl [46, Definition 2.28 und 2.31]:

Definition 1.4 Es seien $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ die zulässige Menge des Optimierungsproblems (1.1) und $x \in \mathcal{X}$ beliebig. Dann nennen wir

$$\mathcal{T}(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x^k\} \subseteq \mathcal{X}, \exists t_k \downarrow 0 : x^k \rightarrow x \text{ und } \frac{x^k - x}{t_k} \rightarrow d \right\}$$

den **(Bouligand-) Tangentialkegel (contingent cone)** von \mathcal{X} in Richtung x und

$$\mathcal{T}^{lin}(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d &\leq 0, & i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, & i = 1, \dots, p \end{aligned} \right\}$$

den **linearisierten Tangentialkegel** von \mathcal{X} in x .

Das folgende Lemma behandelt den Zusammenhang dieser beiden Begriffe.

Lemma 1.5 *Es gilt stets*

$$\mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}^{lin}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{X}$, wobei \mathcal{X} die zulässige Menge von (1.1) sei.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir z.B. auf [46, Lemma 2.32]. □

Das Lemma besagt also gerade, dass der Tangentialkegel immer eine Teilmenge des linearisierten Tangentialkegels darstellt. Im Falle der Gleichheit kommt man zur bereits angesprochenen Regularitätsbedingung von Abadie, vgl. z.B. [12, 46, 77]. Eine weitere Regularitätsbedingung erhält man, indem man beide Tangentialkegel dualisiert, vgl. [12, 77]:

Definition 1.6 *Ein zulässiger Punkt x des restringierten Optimierungsproblems (1.1) genügt der **Regularitätsbedingung von Abadie** (engl.: *Abadie constraint qualification*), kurz: **ACQ**, wenn*

$$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}^{lin}(x)$$

gilt.

*Man sagt, x genügt der **Regularitätsbedingung von Guignard** (engl.: *Guignard constraint qualification*), kurz: **GCQ**, wenn*

$$\mathcal{T}(x)^* = \mathcal{T}^{lin}(x)^*$$

gilt.

Offensichtlich impliziert die ACQ-Bedingung die GCQ-Bedingung. In [77] findet man ein Beispiel, dass GCQ im Allgemeinen tatsächlich schwächer ist. In Standardwerken ist ACQ normalerweise die schwächste Regularitätsbedingung, die betrachtet wird. Allerdings ist ACQ im Zusammenhang mit MPECs immer noch zu stark. Deshalb müssen wir auch die etwas schwächere GCQ betrachten.

1.1.3 Zusammenhang der Regularitätsbedingungen

Der folgende Satz behandelt den Zusammenhang zwischen allen bisher eingeführten Regularitätsbedingungen.

Satz 1.7 *Es sei x ein zulässiger Punkt des Optimierungsproblems (1.1). Dann gilt die folgende Kette von Implikationen:*

$$\text{LICQ} \Rightarrow \text{MFCQ} \Rightarrow \text{ACQ} \Rightarrow \text{GCQ}.$$

Beweis. Dass die MFCQ-Bedingung aus der LICQ-Bedingung folgt, wird im Beweis von Satz 2.41 in [46] gezeigt. Dass die MFCQ-Bedingung die ACQ-Bedingung impliziert, folgt aus dem Beweis von Satz 2.39 in [46]. □

1.2 Optimalitätsbedingungen

Alle vier Regularitätsbedingungen eignen sich, um notwendige Optimalitätsbedingungen für das Optimierungsproblem (1.1) herzuleiten. Die Optimalitätsbedingungen spielen bei der Konstruktion von Verfahren zur Lösung des Problems (1.1) eine zentrale Rolle, vgl. [46]. Dazu benötigen wir noch den Begriff der Lagrange-Funktion und des KKT-Punktes, vgl. z.B. [11, 12, 46, 65]:

Definition 1.8 Die durch

$$L(x, \lambda^g, \lambda^h) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h h_i(x)$$

definierte Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lagrange-Funktion** des restringierten Optimierungsproblems (1.1).

Desweiteren heißen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda^g, \lambda^h) &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) = 0, \\ h(x) &= 0, \\ \lambda^g &\geq 0, \quad g(x) \leq 0, \quad g(x)^T \lambda^g = 0 \end{aligned}$$

Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen, kurz: **KKT-Bedingungen**, des Optimierungsproblems (1.1).

Jeder Vektor $(x, \lambda^g, \lambda^h)$, der die KKT-Bedingungen erfüllt, heißt **Karush-Kuhn-Tucker-Punkt**, kurz: **KKT-Punkt**, des Optimierungsproblems (1.1); die Komponenten von λ^g und λ^h werden auch **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

Nun sind wir in der Lage, lokale Minima des Optimierungsproblems (1.1) mit den KKT-Bedingungen von (1.1) in Verbindung zu setzen:

Satz 1.9 Es sei x^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (1.1), welches der GCQ-Bedingung genüge. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren λ^g und λ^h derart, dass das Tripel $(x^*, \lambda^g, \lambda^h)$ ein KKT-Punkt von (1.1) ist.

Beweis. Für einen Beweis verweisen wir auf [12, Theorem 6.2.4], bzw. [28, Proposition 4.4]. \square

Das Resultat besagt folglich, dass die KKT-Bedingungen eine notwendige Optimalitätsbedingung darstellen, sofern das lokale Minimum der Regularitätsbedingung von Guignard genügt. Da LICQ, MFCQ und ACQ die Regularitätsbedingung von Guignard implizieren, vgl. Satz 1.7, kann in Satz 1.9 GCQ auch durch jede der anderen drei Regularitätsbedingungen ersetzt werden.

Um Satz 1.9 zu beweisen, benutzt man das folgende Resultat, welches wir später noch für den Beweis von Satz 7.7 benötigen werden. Für einen Beweis, vgl. [46, Lemma 2.30].

Lemma 1.10 Es sei x^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (1.1). Dann gilt

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{T}(x^*).$$

Kapitel 2

Optimalitätsbedingungen für MPECs

Bei einem MPEC sind die üblichen Regularitätsbedingungen wie LICQ (Linear independence constraint qualification) oder MFCQ (Mangasarian–Fromovitz constraint qualification) *nie* erfüllt. Aus diesem Grunde stellen die KKT–Bedingungen bei den MPECs im Allgemeinen keine notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Vorliegen eines Minimums dar, vgl. Satz 1.9. Deshalb hat man für MPECs spezielle Regularitätsbedingungen entwickelt, unter denen man verschieden starke Optimalitätsbedingungen beweisen kann, die ihrerseits mit den KKT–Bedingungen verwandt sind und in gewissen Fällen sogar mit diesen übereinstimmen.

2.1 Regularitätsbedingungen

Leider sind die in Kapitel 1.1 eingeführten Regularitätsbedingungen LICQ und MFCQ für das MPEC (1) *nie* erfüllt. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes. Den Beweis findet man auch in [17, 28].

Satz 2.1 *Es sei x ein beliebiger zulässiger Punkt des MPECs (1). Dann sind MFCQ und LICQ in x verletzt.*

Beweis. Nach Satz 1.7 genügt es die Aussage für die MFCQ-Bedingung zu beweisen.

Nehmen wir also an, der Vektor x genüge MFCQ, d.h.:

Die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla(G_i(x)H_i(x)) = G_i(x)\nabla H_i(x) + H_i(x)\nabla G_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \end{aligned} \quad (2.1)$$

sind linear unabhängig und es existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &> 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d &> 0, \quad \forall i \in \beta \cup \gamma, \\ \nabla(G_i(x)H_i(x))^T d &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei seien die Indexmengen $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{I}_g$ wie in (9) definiert. Wegen

$$\nabla(G_i(x)H_i(x)) = \underbrace{G_i(x)}_{=0} \nabla H_i(x) + \underbrace{H_i(x)}_{=0} \nabla G_i(x) = 0$$

für alle $i \in \beta = \{i | G_i(x) = 0, H_i(x) = 0\}$, folgt $\beta = \emptyset$, denn der Nullvektor ist kein Element der linear unabhängigen Gradienten (2.1).

Damit gilt $\alpha \neq \emptyset$ oder $\gamma \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $\alpha \neq \emptyset$, dann gilt nach (2.2) für alle $i \in \alpha = \{i | G_i(x) = 0, H_i(x) > 0\}$:

$$0 = \nabla(G_i(x)H_i(x))^T d = \underbrace{G_i(x)}_{=0} \nabla H_i(x)^T d + \underbrace{H_i(x)}_{>0} \underbrace{\nabla G_i(x)^T d}_{>0} > 0,$$

ein Widerspruch. Damit kann MFCQ nicht erfüllt sein. \square

Für die Regularitätsbedingung von Abadie ist es auch sehr unwahrscheinlich, dass sie für MPECs erfüllt ist. Das liegt an der folgenden Tatsache:

Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Damit ACQ in x erfüllt ist, müssen der Tangentialkegel $\mathcal{T}(x)$ und der linearisierte Tangentialkegel $\mathcal{T}^{lin}(x)$ übereinstimmen, vgl. Definition 1.6. Nun kann aber gezeigt werden, dass $\mathcal{T}^{lin}(x)$ konvex ist, vgl. [12, Theorem 3.2.4]. Diese Aussage gilt nicht nur für MPECs, sondern für alle nichtlinearen Programme (1.1). Auf der anderen Seite ist $\mathcal{T}(x)$ schon für allgemeine nichtlineare Programme (1.1) nicht notwendig konvex. Erst recht gilt das für MPECs, da ihre zulässige Menge nie konvex ist. Für weitere Untersuchungen, vgl. [30].

Da also die üblichen Regularitätsbedingungen MFCQ und LICQ für MPECs nie erfüllt sind und ACQ fast nie erfüllt ist, führt man spezielle Regularitätsbedingungen für MPECs ein.

2.1.1 MPEC-MFCQ und MPEC-LICQ

Dazu betrachten wir zunächst das **verschärfte nichtlineare Programm** (engl.: tightened nonlinear program) TNLP(x), vgl. [30]:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(z) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(z) \leq 0, \\ & h(z) = 0, \\ & G_{\alpha \cup \beta}(z) = 0, \\ & G_{\gamma}(z) \geq 0, \\ & H_{\gamma \cup \beta}(z) = 0, \\ & H_{\alpha}(z) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha & := \alpha(x) := \{i | G_i(x) = 0, H_i(x) > 0\}, \\ \beta & := \beta(x) := \{i | G_i(x) = 0, H_i(x) = 0\}, \\ \gamma & := \gamma(x) := \{i | G_i(x) > 0, H_i(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Dieses Programm wird verschärftes nichtlineares Programm genannt, da die zulässige Menge eine Teilmenge der zulässigen Menge des MPECs (1) darstellt. Deshalb ist ein lokales Minimum x^* von (1) immer auch ein lokales Minimum des zugehörigen $\text{TNLP}(x^*)$. Nun sind wir in der Lage die MPEC-Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz, bzw. die MPEC-Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit einzuführen, vgl. [30, Definition 2.1] und [82]:

Definition 2.2 *Das MPEC (1) genügt in einem zulässigen Punkt x der MPEC - Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz, kurz: MPEC-MFCQ, falls das zugehörige verschärfte nichtlineare Programm $\text{TNLP}(x)$ im Punkte x MFCQ genügt.*

Das MPEC (1) genügt in einem zulässigen Punkt x der MPEC-Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit, kurz: MPEC-LICQ, falls das zugehörige verschärfte nichtlineare Programm $\text{TNLP}(x)$ im Punkte x LICQ genügt.

Schreibt man die Bedingungen aus, so erkennt man, dass man die Regularitätsbedingungen auch wie folgt hätte definieren können:

Definition 2.3 *Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Der Vektor x genügt der MPEC-Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz (engl: MPEC - Mangasarian-Fromovitz constraint qualification, kurz: MPEC-MFCQ), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Die Gradienten*

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x), \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x), \quad \forall i \in \beta \cup \gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

sind linear unabhängig.

(b) *Es existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \beta \cup \gamma. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Definition 2.4 *Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Der Vektor x genügt der MPEC-Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit (engl.: MPEC-Linear independence constraint qualification, kurz MPEC-LICQ), wenn die folgenden Gradienten linear unabhängig sind:*

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x), \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x), \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x), \quad \forall i \in \beta \cup \gamma. \end{aligned}$$

Wir haben die Definitionen noch einmal explizit angegeben, da wir mit diesen später arbeiten werden. Als Nächstes beweisen wir ein Hilfsresultat für Vektoren, die MPEC-MFCQ erfüllen. Wir werden dieses später für den Beweis von Lemma 2.23 benötigen.

Lemma 2.5 *Genügt x der MPEC-MFCQ-Bedingung, dann existiert für jede Partition (β_1, β_2) von β ein $d := d(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d &< 0, & \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &= 0, & \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T d &> 0, & \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T d &= 0, & \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T d &> 0, & \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei (β_1, β_2) eine beliebige Partition von β . Nach (2.5) existiert ein d_1 mit

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d_1 &< 0, & \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d_1 &= 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d_1 &= 0, & \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d_1 &= 0, & \forall i \in \beta \cup \gamma. \end{aligned}$$

Da die Vektoren

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x), & \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x), & \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x), & \quad \forall i \in \beta \cup \gamma \end{aligned}$$

nach (2.4) linear unabhängig sind, besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \nabla h_i(x)^T, & i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T, & i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T, & i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_1. \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$$

eine Lösung d_2 . Dabei seien 0 der Vektor entsprechender Dimension, der nur aus Nullen bestehe und e der Vektor mit lauter Einsen. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x)^T d_2 &= 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d_2 &= 0, & \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T d_2 &> 0, & \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T d_2 &= 0, & \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T d_2 &> 0, & \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Für $d := d_1 + \delta d_2$ mit $\delta > 0$ gilt dann das Gewünschte, denn es folgt:

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x)^T d &= \underbrace{\nabla h_i(x)^T d_1}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla h_i(x)^T d_2}_{=0} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &= \underbrace{\nabla G_i(x)^T d_1}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla G_i(x)^T d_2}_{=0} = 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T d &= \underbrace{\nabla G_i(x)^T d_1}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla G_i(x)^T d_2}_{=0} > 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T d &= \underbrace{\nabla H_i(x)^T d_1}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla H_i(x)^T d_2}_{>0} = 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T d &= \underbrace{\nabla H_i(x)^T d_1}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla H_i(x)^T d_2}_{>0} > 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Falls δ hinreichend klein ist, ergibt sich außerdem:

$$\nabla g_i(x)^T d = \underbrace{\nabla g_i(x)^T d_1}_{<0} + \delta \nabla g_i(x)^T d_2 < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g.$$

□

2.1.2 MPEC-ACQ und MPEC-GCQ

Um die MPEC-Regularitätsbedingung von Abadie einführen zu können, schauen wir uns erstmal den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}^{lin}(x)$ für das MPEC (1) an:

$$\mathcal{T}^{lin}(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} \nabla g_i(x)^T d & \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g(x), \\ \nabla h_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \beta \cup \gamma, \\ \nabla(G_i(x)H_i(x))^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \end{array} \right\}.$$

Berücksichtigt man $\nabla(G_i(x)H_i(x)) = G_i(x)\nabla H_i(x) + H_i(x)\nabla G_i(x)$ und die Definition der Indexmengen α, β, γ , so sieht man relativ schnell, dass dann $\mathcal{T}^{lin}(x)$ auch wie folgt geschrieben werden kann, vgl. [30]:

$$\mathcal{T}^{lin}(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} \nabla g_i(x)^T d & \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g(x), \\ \nabla h_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i \in \alpha, \\ \nabla H_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i \in \gamma, \\ \nabla G_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \beta \end{array} \right\}.$$

Wie oben erwähnt, ist ACQ für MPECs fast nie erfüllt, was daran liegt, dass $\mathcal{T}^{lin}(x)$ im Gegensatz zu $\mathcal{T}(x)$ immer konvex ist. Deshalb versuchen wir die Konvexität zu zerstören, indem wir $\mathcal{T}^{lin}(x)$ verkleinern, vgl. auch [30]:

Definition 2.6 Es sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ die zulässige Menge des MPECs (1) und $x \in \mathcal{X}$ beliebig. Dann nennen wir

$$\mathcal{T}_{\text{MPEC}}^{\text{lin}}(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} \nabla g_i(x)^T d & \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g(x), \\ \nabla h_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i \in \alpha, \\ \nabla H_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i \in \gamma, \\ \nabla G_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i \in \beta, \\ (\nabla G_i(x)^T d) \cdot (\nabla H_i(x)^T d) & = 0, \quad \forall i \in \beta \end{array} \right\}$$

den **MPEC-linearisierten Tangentialkegel** von \mathcal{X} in x .

Das folgende Resultat beschreibt den Zusammenhang aller bisher eingeführten Tangentialkegel:

Lemma 2.7 Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Dann gelten die Inklusionen:

$$\mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}_{\text{MPEC}}^{\text{lin}}(x) \subseteq \mathcal{T}^{\text{lin}}(x).$$

Beweis. Für den Beweis der ersten Inklusion verweisen wir z.B. auf [30, Lemma 3.2]. \square

Das Lemma besagt also gerade, dass der Tangentialkegel immer eine Teilmenge des MPEC-linearisierten Tangentialkegels darstellt. Im Falle der Gleichheit kommt man zur bereits angesprochenen MPEC-Regularitätsbedingung von Abadie. Indem man beide Kegel dualisiert, erhält man die MPEC-Regularitätsbedingung von Guignard, vgl. z.B. [33, Definition 2.1]:

Definition 2.8 Ein zulässiger Punkt x des MPECs (1) genügt der **MPEC - Regularitätsbedingung von Abadie** (engl.: MPEC-Abadie constraint qualification), kurz: **MPEC-ACQ**, wenn

$$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}_{\text{MPEC}}^{\text{lin}}(x) \tag{2.6}$$

gilt. Er genügt der **MPEC-Regularitätsbedingung von Guignard** (engl.: MPEC-Guignard constraint qualification), kurz: **MPEC-GCQ**, wenn

$$\mathcal{T}(x)^* = \mathcal{T}_{\text{MPEC}}^{\text{lin}}(x)^* \tag{2.7}$$

gilt.

2.1.3 Zusammenhang der MPEC-Regularitätsbedingungen

In diesem Unterabschnitt möchten wir den Zusammenhang aller bisher betrachteten MPEC-Regularitätsbedingungen betrachten. Wir beginnen mit zwei einfachen Folgerungen:

Korollar 2.9 Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Dann gilt:

$$\text{MPEC-LICQ} \Rightarrow \text{MPEC-MFCQ}.$$

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus Satz 1.7 und der Definition 2.2. \square

Korollar 2.10 *Ist für einen zulässigen Punkt des MPECs (1) die MPEC-ACQ-Bedingung erfüllt, so auch die MPEC-GCQ-Bedingung.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort, wenn man (2.6) dualisiert. \square

Das folgende Lemma beschreibt den Zusammenhang zwischen MPEC-MFCQ und MPEC-ACQ, vgl. [30, Theorem 3.1]:

Lemma 2.11 *Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1), welcher MPEC-MFCQ erfüllt. Dann ist auch MPEC-ACQ erfüllt.*

Zusammen mit Korollar 2.9 und Korollar 2.10 ergibt sich damit:

Satz 2.12 *Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1). Dann gilt:*

$$\text{MPEC-LICQ} \Rightarrow \text{MPEC-MFCQ} \Rightarrow \text{MPEC-ACQ} \Rightarrow \text{MPEC-GCQ}.$$

Das folgende Resultat sagt etwas über den Zusammenhang zwischen MPEC-LICQ und GCQ aus. Für einen Beweis verweisen wir auf [32, Theorem 4.6].

Satz 2.13 *Es sei x ein zulässiger Punkt des MPECs (1), welcher MPEC-LICQ erfüllt. Dann ist auch GCQ erfüllt.*

2.2 Stationaritätskonzepte

2.2.1 Starke Stationarität

Wir wollen in diesem Kapitel geeignete Optimalitätskriterien für das MPEC (1) angeben. Dazu schauen wir uns zuerst die KKT-Bedingungen für das MPEC (1) an, vgl. auch [32]: Es sei $(x, \bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H, \bar{\lambda}^{GH})$ ein KKT-Punkt des MPECs (1). Dann ist x zulässig für das MPEC (1) und es gelten die Bedingungen

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\bar{\lambda}_i^G \nabla G_i(x) + \bar{\lambda}_i^H \nabla H_i(x) - \bar{\lambda}_i^{GH} \nabla (G_i(x)H_i(x))], \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} G(x) &\geq 0, & \bar{\lambda}^G &\geq 0, & (\bar{\lambda}^G)^T G(x) &= 0, \\ H(x) &\geq 0, & \bar{\lambda}^H &\geq 0, & (\bar{\lambda}^H)^T H(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0, & \bar{\lambda}^g &\geq 0, & (\bar{\lambda}^g)^T g(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wegen $G_\gamma(x) > 0$ bzw. $H_\alpha(x) > 0$ folgt insbesondere $\bar{\lambda}_\gamma^G = 0$ bzw. $\bar{\lambda}_\alpha^H = 0$. Setzt man nun

$$\lambda^g := \bar{\lambda}^g, \lambda^h := \bar{\lambda}^h,$$

sowie

$$\begin{aligned}\lambda_i^G &:= \bar{\lambda}_i^G - \bar{\lambda}_i^{GH} H_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \lambda_i^H &:= \bar{\lambda}_i^H - \bar{\lambda}_i^{GH} G_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, \ell,\end{aligned}$$

so erkennt man $\lambda_\beta^G = \bar{\lambda}_\beta^G \geq 0$, $\lambda_\gamma^G = 0$ und $\lambda_\beta^H = \bar{\lambda}_\beta^H \geq 0$, $\lambda_\alpha^H = 0$. Beachtet man noch $\nabla(G_i(x)H_i(x)) = G_i(x)\nabla H_i(x) + H_i(x)\nabla G_i(x)$ und sortiert in (2.8) nach den Gradienten, so erhält man einen stark stationären Punkt, vgl. [32, 82]:

Definition 2.14 *Es sei x ein zulässiger Punkt für das MPEC (1). Falls Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ existieren, so dass (x, λ) die Bedingungen*

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)], \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^G &\text{ frei}, & \lambda_\beta^G &\geq 0, & \lambda_\gamma^G &= 0, \\ \lambda_\gamma^H &\text{ frei}, & \lambda_\beta^H &\geq 0, & \lambda_\alpha^H &= 0, \\ g(x) &\leq 0, & \lambda^g &\geq 0, & (\lambda^g)^T g(x) &= 0,\end{aligned} \quad (2.11)$$

erfüllt, dann nennt man x einen **stark stationären Punkt** (engl.: *strongly stationary point*).

Umgekehrt kann man auch zeigen, dass jeder stark stationäre Punkt ein KKT-Punkt ist, deshalb gilt nach [32, Proposition 4.2]:

Lemma 2.15 *Es sei x zulässig für das MPEC (1). Dann ist x genau dann ein KKT-Punkt, wenn er ein stark stationärer Punkt ist.*

Die folgenden beiden Sätze besagen, dass starke Stationarität eine notwendige Optimalitätsbedingung darstellt, sofern das lokale Minimum der GCQ-Bedingung oder der MPEC-LICQ-Bedingung genügt:

Satz 2.16 *Es sei x^* ein lokales Minimum des MPECs (1), welches der GCQ-Bedingung genüge. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ derart, dass (x^*, λ) ein stark stationärer Punkt ist.*

Beweis. Dieses Resultat folgt sofort aus Satz 1.9 und Lemma 2.15, vgl. auch [32, Theorem 4.3]. \square

Satz 2.17 *Sei x^* ein lokales Minimum des MPECs (1) und sei die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$, so dass (x^*, λ) ein stark stationärer Punkt ist.*

Beweis. Da die MPEC-LICQ-Bedingung die GCQ-Bedingung impliziert, vgl. Satz 2.13, folgt dies sofort aus Satz 2.16. Man vgl. aber auch [29, Theorem 3.4]. \square

Damit ist starke Stationarität eine notwendige Optimalitätsbedingung unter GCQ oder MPEC-LICQ. Allerdings gilt das nicht für die schwächeren Regularitätsbedingungen wie MPEC-MFCQ, MPEC-ACQ oder MPEC-GCQ, vgl. [28, Beispiel 4.13] oder [82] für ein Gegenbeispiel. Daher ist es notwendig weitere Stationaritätskonzepte einzuführen:

2.2.2 M-Stationarität

Schwächt man die Bedingungen eines stark stationären Punkts etwas ab, so kommt man zum M-stationären Punkt, vgl. [31, 33]:

Definition 2.18 *Es sei x ein zulässiger Punkt für das MPEC (1). Falls Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ existieren, so dass (x, λ) die Bedingungen*

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)],$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ & \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & & \lambda_{\alpha}^H = 0, \\ & (\lambda_i^G > 0 \wedge \lambda_i^H > 0) \vee \lambda_i^G \lambda_i^H = 0, & \forall i \in \beta, & \\ & g(x) \leq 0, \quad \lambda^g \geq 0, \quad (\lambda^g)^T g(x) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt, dann nennt man x einen **M-stationären Punkt**.

Der folgende Satz besagt, dass M-Stationarität eine notwendige Optimalitätsbedingung unter MPEC-GCQ darstellt, vgl. [28, Theorem 5.25] bzw. [33, Theorem 3.1]:

Satz 2.19 *Sei x^* ein lokales Minimum des MPECs (1) und sei die MPEC-GCQ-Bedingung erfüllt. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$, so dass (x^*, λ) ein M-stationärer Punkt ist.*

Durch eine erneute Abschwächung des M-stationären Punktes erhält man einen A-stationären bzw. C-stationären Punkt, vgl. z.B. [29, 30, 82]:

2.2.3 A-Stationarität und C-Stationarität

Definition 2.20 *Es sei x ein zulässiger Punkt für das MPEC (1). Falls Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ existieren, so dass (x, λ) die Bedingungen*

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ & \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & & \lambda_{\alpha}^H = 0, \quad \lambda_i^G \geq 0 \text{ oder } \lambda_i^H \geq 0, \quad \forall i \in \beta, \\ & g(x) \leq 0, & & \lambda^g \geq 0, \quad (\lambda^g)^T g(x) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt, dann nennt man x einen **A-stationären Punkt**. Erfüllt x die Bedingung (2.12) und zusätzlich

$$\begin{aligned} & \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ & \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & & \lambda_{\alpha}^H = 0, \quad \lambda_i^G \lambda_i^H \geq 0, \quad \forall i \in \beta, \\ & g(x) \leq 0, & & \lambda^g \geq 0, \quad (\lambda^g)^T g(x) = 0, \end{aligned}$$

so nennt man x einen **C-stationären Punkt**.

Bemerkung 2.21 Der Unterschied zwischen einem A-stationären und einem C-stationären Punkt besteht folglich in den Bedingungen:

$$\lambda_i^G \geq 0 \text{ oder } \lambda_i^H \geq 0, \quad \forall i \in \beta,$$

bzw.

$$\lambda_i^G \lambda_i^H \geq 0, \quad \forall i \in \beta.$$

Deshalb gibt es auch keine Beziehung zwischen beiden Stationärskonzepten, im Gegensatz zu den anderen, denn es gilt:

$$\text{stark stationär} \implies \text{M-stationär} \implies \text{A-stationär und C-stationär.}$$

Als Nächstes möchten wir ein Hilfsresultat beweisen, welches etwas darüber aussagt, falls A-Stationarität nicht erfüllt ist. Dazu benötigen wir den Alternativsatz von Farkas, vgl. [65, Theorem 2.4.6]:

Lemma 2.22 (Alternativsatz von Farkas) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann ist entweder das System

$$A^T y = b, y \geq 0$$

lösbar, oder das System

$$Ad \leq 0, b^T d > 0$$

hat eine Lösung.

Nun kommen wir zum angesprochenen Lemma:

Lemma 2.23 Es sei x zulässig für das MPEC (1), aber kein A-stationärer Punkt. Dann existiert für jede Partition (β_1, β_2) von β ein $d := d(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x)^T d &< 0, \\ \nabla g_i(x)^T d &\leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T d &\geq 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T d &\geq 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Genügt x zusätzlich der MPEC-MFCQ-Bedingung, dann existiert sogar ein $\bar{d} := \bar{d}(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x)^T \bar{d} &< 0, \\ \nabla g_i(x)^T \bar{d} &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T \bar{d} &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T \bar{d} &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T \bar{d} &> 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T \bar{d} &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T \bar{d} &> 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei (β_1, β_2) eine beliebige Partition von β und

$$A := \begin{pmatrix} \nabla g_i(x)^T, & i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T, & i = 1, \dots, p, \\ -\nabla h_i(x)^T, & i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T, & i \in \alpha \cup \beta_1, \\ -\nabla G_i(x)^T, & i \in \alpha \cup \beta_1, \\ -\nabla G_i(x)^T, & i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ -\nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ -\nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Da x kein A-stationärer Punkt ist, existiert kein $y \geq 0$ mit $A^T y = -\nabla f(x)$:
Ansonsten bezeichnen wir die Komponenten von y mit

$$\begin{aligned} \lambda_i^g, & \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \lambda_i^{+h}, & \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i^{-h}, & \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i^{+G}, & \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \lambda_i^{-G}, & \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \lambda_i^G, & \quad \forall i \in \beta_2, \\ \lambda_i^{+H}, & \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \lambda_i^{-H}, & \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \lambda_i^H, & \quad \forall i \in \beta_1 \end{aligned}$$

und setzen zusätzlich

$$\begin{aligned} \lambda_i^h &= \lambda_i^{+h} - \lambda_i^{-h} & \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i^G &= \lambda_i^{-G} - \lambda_i^{+G} & \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \lambda_i^G &= 0 & \forall i \in \gamma, \\ \lambda_i^H &= \lambda_i^{-H} - \lambda_i^{+H} & \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \lambda_i^H &= 0 & \forall i \in \alpha, \\ \lambda_i^g &= 0 & \forall i \in \overline{\mathcal{I}}_g. \end{aligned}$$

Dies ist dann aber doch ein A-stationärer Punkt, denn es gilt

$$\begin{aligned} A^T y &= -\nabla f(x) \Leftrightarrow \\ 0 &= \nabla f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \underbrace{(\lambda_i^{+h} - \lambda_i^{-h})}_{=\lambda_i^h} \nabla h_i(x) - \sum_{i \in \alpha \cup \beta_1} \underbrace{(\lambda_i^{-G} - \lambda_i^{+G})}_{=\lambda_i^G} \nabla G_i(x) \\ &\quad - \sum_{i \in \beta_2} \lambda_i^G \nabla G_i(x) - \sum_{i \in \beta_2 \cup \gamma} \underbrace{(\lambda_i^{-H} - \lambda_i^{+H})}_{=\lambda_i^H} \nabla H_i(x) - \sum_{i \in \beta_1} \lambda_i^H \nabla H_i(x) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)]$$

und

$$\lambda_{\gamma}^G = 0, \lambda_{\alpha}^H = 0, \lambda_{\beta_2}^G \geq 0, \lambda_{\beta_1}^H \geq 0, g(x) \leq 0, \lambda^g \geq 0, (\lambda^g)^T g(x) = 0.$$

Deshalb gibt es kein $y \geq 0$ mit $A^T y = -\nabla f(x)$. Nach dem Alternativsatz von Farkas, vgl. Lemma 2.22, existiert dann aber ein d mit $Ad \leq 0$ und $-\nabla f(x)^T d > 0$. Also existiert ein $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x)^T d &< 0, \\ \nabla g_i(x)^T d &\leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T d &\geq 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T d &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T d &\geq 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Gilt sogar die MPEC-MFCQ-Bedingung, dann existiert nach Lemma 2.5 ein $s \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T s &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T s &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T s &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T s &> 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T s &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T s &> 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Für $\bar{d} := d + \delta s$ mit $\delta > 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla g_i(x)^T d}_{\leq 0} + \delta \underbrace{\nabla g_i(x)^T s}_{< 0} < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla h_i(x)^T d}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla h_i(x)^T s}_{=0} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla G_i(x)^T d}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla G_i(x)^T s}_{=0} = 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla G_i(x)^T d}_{=0} + \delta \underbrace{\nabla G_i(x)^T s}_{> 0} > 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla H_i(x)^T d}_{\geq 0} + \delta \underbrace{\nabla H_i(x)^T s}_{> 0} = 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x)^T \bar{d} &= \underbrace{\nabla H_i(x)^T d}_{\geq 0} + \delta \underbrace{\nabla H_i(x)^T s}_{> 0} > 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned}$$

Falls δ hinreichend klein ist, ergibt sich auch noch

$$\nabla f(x)^T \bar{d} = \underbrace{\nabla f(x)^T d}_{< 0} + \delta \nabla f(x)^T s < 0.$$

□

2.3 Spezielle Klassen von MPECs

2.3.1 Mathematische Programme mit affinen Gleichgewichtsrestriktionen

Beginnen wir gleich mit der Definition einer wichtigen Klasse, den Mathematischen Programmen mit affinen Gleichgewichtsrestriktionen, die als Spezialfall die für uns so wichtigen LPECs beinhalten:

Definition 2.24 *Ein Optimierungsproblem der Gestalt*

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) \\
 \text{u.d.N.} \quad & A_i x - a_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
 & B_i x - b_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
 & D_i x - d_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & E_i x - e_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & (D_i x - d_i)(E_i x - e_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $A_i, B_i, D_i, E_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $a_i, b_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}$, heißt **Mathematisches Programm mit affinen Gleichgewichtsrestriktionen** (engl.: *mathematical program with affine equilibrium constraints*), kurz: **MPAEC**. Gilt zusätzlich noch

$$f(x) = c^T x,$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, so heißt das Programm (2.13) ein **Lineares Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen** (engl.: *linear program with equilibrium constraints*), kurz: **LPEC**. Gilt

$$f(x) = c^T x + x^T B x$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so heißt (2.13) ein **Quadratisches Programm mit Gleichgewichtsrestriktionen** (engl.: *quadratic program with equilibrium constraints*), kurz: **QPEC**.

Für MPAECs lässt sich der folgende Satz beweisen, vgl. [30, Theorem 3.2]:

Satz 2.25 *Ist x ein zulässiger Punkt des MPAECs (2.13), dann genügt x der MPEC-ACQ-Bedingung.*

2.3.2 MPEC-konvexe Probleme

In diesem Abschnitt stellen wir den Begriff des MPEC-konvexen Problems vor und beweisen ein Resultat, das später im Kapitel über LPECs hilfreich sein wird.

Definition 2.26 Ein MPEC-konvexes Programm ist ein Optimierungsproblem der Gestalt:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
& B_i x - b_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
& D_i x - d_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
& E_i x - e_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
& (D_i x - d_i)(E_i x - e_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell
\end{aligned} \tag{2.14}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ stetig differenzierbar und konvex, $B_i, D_i, E_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und $b_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}$.

Man beachte, dass jedes LPEC insbesondere auch ein MPEC-konvexes Programm ist.

Als Nächstes wollen wir ein einfaches hinreichendes Kriterium für ein globales Minimum eines MPEC-konvexen Programms angeben.

Wie wir in Kapitel 2.2.1 gesehen haben, ist starke Stationarität ein notwendiges Optimalitätskriterium unter GCQ oder MPEC-LICQ. Die nächsten zwei Sätze besagen, dass starke Stationarität auch ein hinreichendes Kriterium für MPEC-konvexe Programme darstellt. Dieses Resultat ist ein Spezialfall eines etwas allgemeineren Resultats von Ye [93]. Wir geben dennoch einen Beweis an, da unser zweites Resultat etwas stärker ist. Man beachte, dass dies für MPEC-konvexe Probleme gültig ist, insbesondere also auch für LPECs.

Satz 2.27 Es sei (1) ein MPEC-konvexes Programm und (x^*, λ) ein stark stationärer Punkt von (1). Dann ist x^* ein lokales Minimum des MPEC-konvexen Programms.

Beweis. Sei x zulässig für das MPEC (1). Benutzt man die Konvexität von f, g_i , und die Linearität von h_i, G_i, H_i , so erhält man zusammen mit (2.10) und (2.11):

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \\
&= f(x^*) - \sum_{i \in I_g} \underbrace{\lambda_i^g \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*)}_{\substack{\geq 0 \\ \leq g_i(x) - g_i(x^*) \\ = g_i(x) \leq 0}} - \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \underbrace{\nabla h_i(x^*)^T (x - x^*)}_{= h_i(x) - h_i(x^*) = 0} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^G \nabla G_i(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^H \nabla H_i(x^*)^T (x - x^*) \\
&\geq f(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^G \nabla G_i(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^H \nabla H_i(x^*)^T (x - x^*) \\
&= f(x^*) + \sum_{i \in \alpha} \underbrace{\lambda_i^G \nabla G_i(x^*)^T (x - x^*)}_{\substack{\text{frei} \\ = G_i(x) - G_i(x^*) \\ = G_i(x) \geq 0}} + \sum_{i \in \beta} \underbrace{\lambda_i^G \nabla G_i(x^*)^T (x - x^*)}_{\substack{\geq 0 \\ = G_i(x) - G_i(x^*) \\ = G_i(x) \geq 0}} \\
&\quad + \sum_{i \in \beta} \underbrace{\lambda_i^H \nabla H_i(x^*)^T (x - x^*)}_{\substack{\geq 0 \\ = H_i(x) - H_i(x^*) \\ = H_i(x) \geq 0}} + \sum_{i \in \gamma} \underbrace{\lambda_i^H \nabla H_i(x^*)^T (x - x^*)}_{\substack{\text{frei} \\ = H_i(x) - H_i(x^*) \\ = H_i(x) \geq 0}} \\
&\geq f(x^*) + \sum_{i \in \alpha} \lambda_i^G G_i(x) + \sum_{i \in \gamma} \lambda_i^H H_i(x).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden beliebigen zulässigen Punkt x . Nun nehmen wir an, x liege in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* . Aus Stetigkeitsgründen gilt dann auch $H_i(x) > 0$ für alle $i \in \alpha$ und $G_i(x) > 0$ für alle $i \in \gamma$. Benutzt man die Komplementaritätsbedingung, erhalten wir $G_i(x) = 0$ für alle $i \in \alpha$ und $H_i(x) = 0$ für alle $i \in \gamma$. Zusammen mit der obigen Kette von Ungleichungen ergibt sich $f(x) \geq f(x^*)$ für alle zulässigen x in der Nähe von x^* , d.h., x^* ist ein lokales Minimum. \square

Als Konsequenz des vorherigen Resultats und des Beweises erhalten wir das folgende hinreichende Kriterium für ein globales Minimum. Dazu müssen wir noch kurz das relaxierte Problem definieren:

Definition 2.28 *Gegeben sei das MPEC (1). Das zugehörige so genannte **relaxierte Problem** erhält man, wenn man die Komplementaritätsbedingungen*

$$G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

weglässt:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Satz 2.29 *Es sei (1) ein MPEC-konvexes Programm und (x^*, λ) ein stark stationärer Punkt, so dass zusätzlich $\lambda_\alpha^G \geq 0$ und $\lambda_\gamma^H \geq 0$ gelte. Dann ist x^* ein globales Minimum des relaxierten Problems (2.16), insbesondere ist x^* ein globales Minimum des MPECs (1).*

Beweis. Man beachte, dass die Ungleichungskette (2.15) für alle x , die für das relaxierte Problem (2.16) zulässig sind, gültig ist, d.h., Komplementarität wird in (2.15) nicht benötigt. Mit den Voraussetzungen an die Vorzeichen der Multiplikatoren $\lambda_\alpha^G \geq 0$ und $\lambda_\gamma^H \geq 0$, folgt dann die Behauptung. \square

Die folgenden 2 Beispiele zeigen zweierlei: Im ersten sind die Voraussetzungen von Satz 2.29 erfüllt und das zweite zeigt, dass die Voraussetzungen hinreichend aber nicht notwendig für ein globales Minimum sind.

Beispiel 2.30 (a) Betrachte das folgende MPEC-konvexe Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1 + 5)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 5)^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1x_2 = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

mit $G(x) := G_1(x) := x_1, H(x) := H_1(x) := x_2$ in unserer Standardnotation von (1). Offensichtlich ist der Vektor $x^* = (0, 5)^T$ eine globale Lösung des Problems. Mit $\lambda^G = 5, \lambda^H = 0$, folgt

$$0 = \begin{pmatrix} x_1^* + 5 \\ x_2^* - 5 \end{pmatrix} - \lambda^G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(0, 5)^T$ ein stark stationärer Punkt von (2.17) mit $\lambda_\alpha^G \geq 0$ und $\lambda_\gamma^H \geq 0$, d.h., die hinreichende Bedingung von Satz 2.29 ist erfüllt.

(b) Betrachte das ähnliche Problem

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1 - 5)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 5)^2 \\ \text{u.d.N.} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 x_2 = 0, \end{array} \quad (2.18)$$

Erneut ist $x^* = (0, 5)^T$ ein globales Minimum (das andere ist $(5, 0)^T$) und mit $\lambda^G := -5, \lambda^H := 0$ folgt

$$0 = \begin{pmatrix} x_1^* - 5 \\ x_2^* - 5 \end{pmatrix} - \lambda^G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Bedingungen für einen stark stationären Punkt erfüllt. Allerdings sind die Voraussetzungen von Satz 2.29 nicht erfüllt. \diamond

Wir weisen auch darauf hin, dass es einen weiteren Nachteil von Satz 2.29 gibt: Es gibt MPECs (sogar LPECs), bei denen das globale Minimum x^* kein stark stationärer Punkt ist, vgl. [82] für ein einfaches Gegenbeispiel. Deswegen mussten auch die Optimalitätsbedingungen M-Stationarität und A-Stationarität eingeführt werden.

Teil II

Ein Branch-and-Bound-Verfahren für Lineare Programme mit Gleichgewichtsrestriktionen (LPECs)

Kapitel 3

Lineare Programme

In diesem Kapitel wollen wir kurz an die existierende Theorie über lineare Programme und im Speziellen des Simplex-Verfahrens erinnern, da wir diese bei der effizienten Lösung der Teilprobleme des Branch-and-Bound-Verfahrens benötigen werden.

3.1 Allgemeine Theorie

Ein lineares Programm ist ein Optimierungsproblem der Gestalt (1.1), wobei die Funktionen f, g und h alle affin-linear sind. Jedes lineare Programm kann in die **Standardform**

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (3.1)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c, x \in \mathbb{R}^n$, transformiert werden, vgl. z.B. [46, Kapitel 3.1]: Mit Hilfe von Schlupfvariablen wird aus einer Ungleichungsrestriktion eine Gleichungsrestriktion und indem man $x_i = x_i^+ - x_i^-$ setzt, wobei $x_i^+, x_i^- \geq 0$ seien, wandelt man jede freie Variable x_i in 2 vorzeichenbeschränkte Variablen um. Wenn man das Simplex-Verfahren verwendet, kommt man um den Begriff des Basisvektors nicht herum, welcher wie folgt definiert werden kann, vgl. [46, Definition 3.4]:

Definition 3.1 Sei $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\text{Rang}(A) = m$. Ein zulässiger Punkt $x \in P$ heißt **Basisvektor** von P , wenn eine aus genau m Elementen bestehende Indexmenge $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(m)\}$ existiert mit $x_j = 0$ für alle $j \notin \mathcal{B}$, so dass die Spaltenvektoren $A_{\mathcal{B}(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) linear unabhängig sind. Die Matrix

$$B = [A_{\mathcal{B}(1)}, A_{\mathcal{B}(2)}, \dots, A_{\mathcal{B}(m)}]$$

heißt **Basismatrix**, die Matrix

$$N = (A_j)_{j \notin \mathcal{B}}$$

Nichtbasismatrix.

Als Nächstes wollen wir den Hauptsatz über lineare Programme angeben, der insbesondere besagt, dass jedes lineare Programm, dessen Matrix A vollen Rang besitzt, einen Basisvektor als Lösung besitzt, vgl. z.B. [46, Satz 3.6]:

Satz 3.2 (Hauptsatz der linearen Optimierung) Sei $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\text{Rang}(A) = m$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Ist $P \neq \emptyset$, so besitzt P mindestens einen Basisvektor.
- (b) Das Polyeder P hat höchstens endlich viele Basisvektoren.
- (c) Besitzt das lineare Programm

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in P$$

eine Lösung, so ist auch einer der Basisvektoren von P eine Lösung.

Es genügt also, sich bei der Suche nach einer Lösung des linearen Programms auf Basisvektoren zu beschränken. Eng verbunden mit dem **primalem linearen Programm** (3.1) ist das zugehörige **duale lineare Programm**:

$$\max b^T \lambda \quad \text{u.d.N.} \quad A^T \lambda + s = c, s \geq 0, \quad (3.2)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ und $s \in \mathbb{R}^n$. Es gelten folgende Zusammenhänge, vgl. [46, Satz 3.8, Korollar 3.9 und Satz 3.7]:

Satz 3.3 Sei $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für das primale Problem (3.1) und $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ zulässig für das duale Problem (3.2). Dann gilt $b^T \lambda \leq c^T x$. Gilt $b^T \lambda = c^T x$, dann ist x eine Lösung von (3.1) und (λ, s) eine Lösung von (3.2).

Satz 3.4 (Optimalitätsbedingungen) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Das primale Problem (3.1) besitzt eine Lösung x^* .
- (b) Das duale Problem (3.2) besitzt eine Lösung (λ^*, s^*) .
- (c) Die so genannten Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} A^T \lambda + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x_i s_i &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ x, s &\geq 0, \end{aligned}$$

besitzen eine Lösung (x^*, λ^*, s^*) .

3.2 Spezielle Verfahren zur Lösung linearer Programme

3.2.1 Das Simplex-Verfahren

Zunächst geben wir das Simplex-Verfahren in seiner Grundform an, so wie man es in jedem Standardbuch finden kann. Diese Version ist [13, Kapitel 3.2], bzw. [46, Kapitel 3.2] entnommen:

Wir beschreiben hier einen typischen Schritt des Simplex-Verfahrens. Dazu gehen wir davon aus, dass das lineare Programm in der Standardform (3.1) vorliegt, A den vollen Rang m besitzt (was man aber erreichen kann, wenn man linear unabhängige Zeilen streicht, vgl. [46, Aufgabe 3.2]) und wir einen Basisvektor x mit zugehöriger Basis \mathcal{B} gegeben haben. Definieren wir noch die komplementäre Indexmenge

$$\mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B},$$

dann gilt

$$Az = Bz_{\mathcal{B}} + Nz_{\mathcal{N}}$$

für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$. Speziell für den Basisvektor x folgt

$$Bx_{\mathcal{B}} = b \iff x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad (3.3)$$

wegen $x_{\mathcal{N}} = 0$, vgl. Definition 3.1.

Als Nächstes wollen wir den Zielfunktionswert eines beliebigen für (3.1) zulässigen Punkts z mit dem Zielfunktionswert von x vergleichen. Aus $b = Az = Bz_{\mathcal{B}} + Nz_{\mathcal{N}}$ ergibt sich $z_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}Nz_{\mathcal{N}}$, da die Basismatrix invertierbar ist. Es folgt für die Zielfunktionswerte:

$$\begin{aligned} c^T z &= c_{\mathcal{B}}^T z_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T z_{\mathcal{N}} \\ &= c_{\mathcal{B}}^T (B^{-1}b - B^{-1}Nz_{\mathcal{N}}) + c_{\mathcal{N}}^T z_{\mathcal{N}} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + (c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}N) z_{\mathcal{N}} \\ &\stackrel{x_{\mathcal{N}}=0}{=} c^T x + \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{c}_i z_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit den **reduzierten Kosten**

$$\bar{c}_i = c_i - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}A_i.$$

Hieraus erhält man das

1. Abbruchkriterium:

Gilt $\bar{c}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{N}$, dann ist der Basisvektor x eine optimale Lösung des linearen Programms (3.1). Wegen $z_i \geq 0$ folgt dies sofort aus (3.4).

Ist das 1. Abbruchkriterium **nicht** erfüllt, so existiert ein $j \in \mathcal{N}$ mit $\bar{c}_j < 0$.

Wir suchen dann einen zulässigen Vektor z , der einen kleineren Zielfunktionswert als x besitzt und nur eine Komponente z_i , $i \in \mathcal{N}$, von Null verschieden ist, nämlich z_j . Ist $z_j =: t$

dann positiv, so hat man einen kleineren Zielfunktionswert gefunden, vgl. (3.4). Wir machen also den Ansatz:

$$z_j(t) := t, \quad z_i(t) := 0 \quad \text{für alle } i \in \mathcal{N} \setminus \{j\}.$$

Wegen (3.4) gilt dann

$$c^T z(t) = c^T x + t\bar{c}_j. \quad (3.5)$$

Desweiteren lautet die Zulässigkeitsbedingung für $z(t)$ wie folgt:

$$Bz_{\mathcal{B}}(t) + tA_j = b \iff z_{\mathcal{B}}(t) = B^{-1}(b - tA_j) = x_{\mathcal{B}} - tB^{-1}A_j = x_{\mathcal{B}} - tu \quad (3.6)$$

mit $u := B^{-1}A_j$. Hieraus erhält man das

2. Abbruchkriterium:

Gilt $u_i \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$, so ist das lineare Programm (3.1) nach unten unbeschränkt, denn dann ist $z(t)$ für alle t zulässig, vgl. (3.6) und es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} c^T z(t) = -\infty$, vgl. (3.5) und beachte $\bar{c}_j < 0$.

Ist auch das zweite Abbruchkriterium nicht erfüllt, so existiert ein $u_i > 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Setzt man nun

$$\theta^* := \min_{\{i=1, \dots, m \mid u_i > 0\}} \frac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i} = \frac{x_{\mathcal{B}(l)}}{u_l} \quad \text{mit } l \in \{1, \dots, m\},$$

dann erhält man nach [46, Satz 3.20] einen neuen Basisvektor y , indem man

$$\begin{aligned} y_j &= \theta^*, \\ y_{\mathcal{B}(i)} &= x_{\mathcal{B}(i)} - \theta^* u_i, \quad i \neq l, \\ y_i &= 0, \quad i \in (\mathcal{N} \setminus \{j\}) \cup \{\mathcal{B}(l)\}, \end{aligned}$$

setzt. Für diesen Basisvektor ist $\{\mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(l-1), j, \mathcal{B}(l+1), \dots, \mathcal{B}(m)\}$ eine neue Basis und es gilt $c^T y \leq c^T x$, d.h. der Zielfunktionswert ist kleiner geworden bzw. zumindest nicht größer. Wie man Zyklen vermeidet (was vorkommen kann, wenn man entartete Basisvektoren vorliegen hat), erfährt man z.B. in [46] unter dem Stichwort Regel von Bland. Zusammenfassend erhält man dann folgenden Algorithmus, vgl. [13]:

Ein Iterationsschritt des Simplex-Verfahrens:

1. In einem typischen Iterationsschritt beginnen wir mit einem Basisvektor x , der zugehörigen Basis $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(1), \mathcal{B}(2), \dots, \mathcal{B}(m)\}$, sowie der Basismatrix $B = [A_{\mathcal{B}(1)}, A_{\mathcal{B}(2)}, \dots, A_{\mathcal{B}(m)}]$.
2. Bestimme die reduzierten Kosten $\bar{c}_i = c_i - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A_i$ für alle Nichtbasisindizes i . Sind alle \bar{c}_i nichtnegativ, dann bricht der Algorithmus mit der Lösung x ab; andernfalls bestimmt man ein j mit $\bar{c}_j < 0$.
3. Berechne $u = B^{-1} A_j$. Falls keine Komponente von u positiv ist, ist das lineare Programm nach unten unbeschränkt und der Algorithmus bricht ab.
4. Falls mindestens eine Komponente von u positiv ist, setze man

$$\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m \mid u_i > 0\}} \frac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i} = \frac{x_{\mathcal{B}(l)}}{u_l} \quad \text{mit } l \in \{1, \dots, m\}.$$

5. Eine neue Basis erhält man, indem man $\mathcal{B}(l)$ durch j ersetzt. Für einen neuen zulässigen Basisvektor y setzt man $y_j = \theta^*$ und $y_{\mathcal{B}(i)} = x_{\mathcal{B}(i)} - \theta^* u_i$, $i \neq l$.

Der größte Aufwand besteht in der Bestimmung der reduzierten Kosten \bar{c} und von $u = B^{-1} A_j$. Dazu kann man die linearen Gleichungssysteme $B^T y = c_{\mathcal{B}}$ (wegen $c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} N = (N^T (B^T)^{-1} c_{\mathcal{B}})^T$) bzw. $Bu = A_j$ lösen. Der Aufwand wäre $O(m^3)$. Es gibt allerdings eine wesentlich effizientere Möglichkeit:

3.2.2 Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens

Wir beginnen mit einem Basisvektor x , der zugehörigen Basis $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(1), \mathcal{B}(2), \dots, \mathcal{B}(m)\}$, der Basismatrix $B = [A_{\mathcal{B}(1)}, A_{\mathcal{B}(2)}, \dots, A_{\mathcal{B}(m)}]$ und dem **Simplextableau**, vgl. [13, Kapitel 3.3]:

$-c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b$	$c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A$
$B^{-1} b$	$B^{-1} A$

 \Leftrightarrow

$-c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}$	\bar{c}_1	\dots	\bar{c}_n
$x_{\mathcal{B}(1)}$			
\vdots	$B^{-1} A_1$	\dots	$B^{-1} A_n$
$x_{\mathcal{B}(m)}$			

Zuerst führen wir ein paar Bezeichnungen des Tableaus ein:

Definition 3.5 Die erste Spalte wird mit **nullter Spalte**, die anderen mit **i-ter Spalte** bezeichnet. Die j -te Spalte $u = B^{-1} A_j$ heißt **Pivotspalte**, falls j der Index ist, der in die Basis \mathcal{B} aufgenommen wird. Falls die l -te Basisvariable aus der Basis gestrichen wird, bezeichnet man die l -te Zeile des Tableaus als **Pivotzeile**. Das **Pivoelement** $u_l = (B^{-1} A_j)_l$ ist das, welches sowohl zur Pivotzeile als auch zur Pivotspalte gehört. Das erste Element

der **nullten Zeile** enthält den Wert $-c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}$, welcher das Negative des aktuellen Zielfunktionswertes ist, der Rest sind die **reduzierten Kosten** $\bar{c}^T = c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A$.

Als Nächstes erklären wir, welchen Vorteil die Tableau-Schreibweise bietet. Dazu erinnern wir uns an das letzte Teilkapitel: Der Hauptaufwand des Simplex-Verfahrens besteht darin, Vektoren der Gestalt $y = (B^T)^{-1} c_{\mathcal{B}}$ bzw. $u = B^{-1} A_j$ zu bestimmen. Dazu können lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dabei ist der Aufwand allerdings zu groß, denn die Matrix B^{-1} kann auch von Iterationsschritt zu Iterationsschritt aufdatiert werden:

Um dies einzusehen, nehmen wir an, das aktuelle Tableau liegt in der oben genannten Form vor. Unser Ziel ist es dann, das Tableau der nächsten Iteration zu bestimmen, nachdem der Index $\mathcal{B}(l)$ aus der Basis gestrichen und der Index j in die Basis aufgenommen wurde, d.h.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}} &:= \{\bar{\mathcal{B}}(1), \dots, \bar{\mathcal{B}}(l-1), \bar{\mathcal{B}}(l), \bar{\mathcal{B}}(l+1), \dots, \bar{\mathcal{B}}(m)\} \\ &:= \{\mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(l-1), j, \mathcal{B}(l+1), \dots, \mathcal{B}(m)\}\end{aligned}$$

ist die neue Basis und

$$\bar{B} = [A_{\mathcal{B}(1)}, \dots, A_{\mathcal{B}(l-1)}, A_j, A_{\mathcal{B}(l+1)}, \dots, A_{\mathcal{B}(m)}]$$

die neue Basismatrix. Das neue Tableau hat damit dann die Gestalt

$-c_{\bar{\mathcal{B}}}^T \bar{B}^{-1} b$	$c^T - c_{\bar{\mathcal{B}}}^T \bar{B}^{-1} A$
$\bar{B}^{-1} b$	$\bar{B}^{-1} A$

Dieses gilt es effizient aus dem alten Tableau zu bestimmen. Es sei $u = B^{-1} A_j$. Dann gilt:

$$B^{-1} \bar{B} = [e_1, \dots, e_{l-1}, u, e_{l+1}, \dots, e_m] = \begin{bmatrix} 1 & & & u_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & u_l & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & u_m & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Man sieht, dass durch elementare Zeilenoperationen die Einheitsmatrix I erreicht werden kann (man beachte, dass u_l positiv ist). Folglich existiert eine reguläre Matrix Q mit

$$QB^{-1} \bar{B} = I \Leftrightarrow \bar{B}^{-1} = QB^{-1},$$

d.h. man bekommt $\bar{B}^{-1} b = QB^{-1} b$ und $\bar{B}^{-1} A = QB^{-1} A$ aus $B^{-1} b$ bzw. $B^{-1} A$ durch elementare Zeilenoperationen, die den Vektor $u = B^{-1} A_j$ in den Einheitsvektor e_l verwandeln. Genauer gesagt müssen wir ein Vielfaches der Pivotzeile zu jeder Zeile addieren, so dass das Pivotelement u_l Eins und alle anderen Einträge Null werden. Zusätzlich kann man zeigen, dass man die Zeilenoperationen auch auf die nullte Zeile anwenden kann, um die Einträge $-c_{\bar{\mathcal{B}}}^T \bar{B}^{-1} b$ bzw. $c^T - c_{\bar{\mathcal{B}}}^T \bar{B}^{-1} A$ zu bekommen. D.h. man addiert ein Vielfaches der

Pivotzeile zur nullten Zeile, so dass das Element $c_j^T - c_B^T B^{-1} A_j$ in der j -ten Spalte Null wird. Für mehr Einzelheiten, vgl. [13, Kapitel 3.3].

Zum Schluss geben wir wieder eine typische Iteration der Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens an, wie man sie in [13] findet:

Eine Iteration der Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens

1. Eine typische Iteration beginnt mit dem Tableau und einer zugehörigen Basismatrix B , sowie einem Basisvektor x .
2. Untersuche die reduzierten Kosten in der nullten Zeile des Tableaus. Sind alle nicht-negativ, dann ist der aktuelle Basisvektor eine optimale Lösung und der Algorithmus bricht ab. Andernfalls wähle man ein j mit $\bar{c}_j < 0$.
3. Betrachte den Vektor $u = B^{-1} A_j$, welcher der j -ten Spalte des Tableaus entspricht. Falls keine Komponente von u positiv ist, ist das lineare Programm nach unten unbeschränkt und der Algorithmus bricht ab.
4. Für jedes i , für das u_i positiv ist, bestimme man $x_{\mathcal{B}(i)}/u_i$. Es sei l der Index der zum kleinsten Bruch gehört. In der Basis ersetze man $\mathcal{B}(l)$ durch j .
5. Zu jeder Zeile des Tableaus addiert man ein Vielfaches der l -ten Zeile, so dass das Pivotelement u_l Eins und alle anderen Einträge der Pivotspalte Null werden.

3.2.3 Das duale Simplex-Verfahren

Das duale Simplex-Verfahren findet seine Anwendung, falls man zwar keinen zulässigen Basisvektor vorliegen hat, aber einen Quasi-Basisvektor:

Definition 3.6 x heiße **Quasi-Basisvektor** des linearen Programms (3.1), falls

- $Ax = b$ gilt,
- eine Basis $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(m)\}$ mit genau m Elementen existiert, so dass die Basismatrix $B = (A_{\mathcal{B}(1)}, \dots, A_{\mathcal{B}(m)})$ regulär ist und $x_{\mathcal{N}} = 0$ für die Nichtbasis $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$ gilt,
- die reduzierten Kosten $c^T - c_B^T B^{-1} A$ nichtnegativ sind.

Man beachte, dass bei einem Quasi-Basisvektor $x_B = B^{-1}b$ auch negative Komponenten enthalten kann. Deshalb muss er auch nicht für das lineare Programm zulässig sein. Das zugehörige Simplextableau lautet erneut:

$-c_B^T B^{-1}b$	$c^T - c_B^T B^{-1}A$
$B^{-1}b$	$B^{-1}A$

Wegen $c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A \geq 0$ gilt $c \geq A^T (B^{-1})^T c_{\mathcal{B}}$, d.h. $\bar{\lambda} := (B^{-1})^T c_{\mathcal{B}}$ ist ein zulässiger Punkt für das duale lineare Programm

$$\max b^T \lambda \quad \text{u.d.N. } A^T \lambda \leq c.$$

Für den Zielfunktionswert von $\bar{\lambda}$ gilt:

$$b^T \bar{\lambda} = b^T (B^{-1})^T c_{\mathcal{B}} \stackrel{B^{-1}b = x_{\mathcal{B}}}{=} c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}.$$

Dies ist das Negative des ersten Eintrags des Tableaus, deshalb besitzt unser dual zulässiger Punkt den selben Zielfunktionswert, wie unser primaler Quasi-Basisvektor. Wäre $x_{\mathcal{B}}$ positiv, so wäre x auch zulässig für das primale Problem und wir hätten eine Lösung gefunden, da der Zielfunktionswert von primalem und dualem Problem übereinstimmen würden, vgl. Satz 3.3. Andererseits können wir ähnlich wie in Teilkapitel 3.2.2 eingeführt, Basisänderungen durchführen, vgl. [13, Kapitel 4.5] für nähere Ausführungen. Von Iteration zu Iteration steigen die aktuellen Kosten des dualen Problems und deshalb muss der Algorithmus irgendwann abbrechen, da es nur endlich viele Basisvektoren gibt, vgl. Satz 3.2. Dies ist der Fall, wenn $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$ und eine optimale Lösung gefunden wird, oder falls alle Einträge v_1, \dots, v_n in der Pivotzeile nichtnegativ sind. Analog zum primalen Simplex-Verfahren ist der duale Zielfunktionswert dann $+\infty$ und das primale Problem ist unzulässig.

Zum Schluss geben wir noch eine Zusammenfassung des Algorithmus an, vgl. erneut [13]:

Ein Iterationsschritt des dualen Simplex-Verfahrens

1. Bei einem typischen Iterationsschritt startet man mit dem Tableau, einem Quasi-Basisvektor mit zugehöriger Basis \mathcal{B} und Basismatrix B . Insbesondere sind alle reduzierten Kosten nichtnegativ.
2. Untersuche die Komponenten des Vektors $B^{-1}b$ in der nullten Spalte des Tableaus. Falls alle Komponenten nichtnegativ sind, haben wir eine Lösung gefunden und können den Algorithmus abbrechen. Andernfalls wähle man ein l , so dass $x_{\mathcal{B}(l)} < 0$ gilt.
3. Betrachte die l -te Zeile des Tableaus: $x_{\mathcal{B}(l)}, v_1, \dots, v_n$ (die Pivotzeile). Falls $v_i \geq 0$ für alle i ist, dann ist der Zielfunktionswert $+\infty$ und der Algorithmus bricht ab.
4. Für jedes i mit $v_i < 0$ bestimme man den Quotienten \bar{c}_i/v_i und es sei j der Index der Spalte, die zum kleinsten Quotienten gehört. In der Basis ersetze man $\mathcal{B}(l)$ durch j .
5. Man addiere zu jeder Zeile ein Vielfaches der l -ten Zeile, so dass das Pivotelement v_j Eins und alle anderen Elemente der Pivotspalte Null werden.

Kapitel 4

Branch-and-Bound-Verfahren für LPECs

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Branch-and-Bound-Methode, mit der wir versuchen eine Lösung für das folgende LPEC zu finden:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) \\
 \text{u.d.N.} \quad & g_i(x) \leq 0, & \forall i = 1, \dots, m, \\
 & h_i(x) = 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\
 & G_i(x) \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & H_i(x) \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & G_i(x)H_i(x) = 0, & \forall i = 1, \dots, \ell,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit linearen Funktionen $f, g_i, h_i, G_i, H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Da alle diese Funktionen linear sind, existieren Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, E \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ und Vektoren $c \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^p, d \in \mathbb{R}^\ell, e \in \mathbb{R}^\ell$, so dass (4.1) auch in der folgenden Form geschrieben werden kann, vgl. Definition 2.24:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x \\
 \text{u.d.N.} \quad & A_i x - a_i \leq 0, & \forall i = 1, \dots, m, \\
 & B_i x - b_i = 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\
 & D_i x - d_i \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & E_i x - e_i \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & (D_i x - d_i)(E_i x - e_i) = 0, & \forall i = 1, \dots, \ell.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wir teilen dieses Kapitel in mehrere Unterabschnitte. Wir beginnen mit der Einführung der Notation und Vorstellung des Verfahrens bei vollständiger Verzweigung. Danach stellen wir einige hilfreiche Methoden vor, die es uns ermöglichen, den Aufwand des Algorithmus deutlich zu reduzieren. Außerdem gehen wir in einer Verallgemeinerung der Methode auch noch auf MPEC-konvexe Probleme ein.

4.1 Notationseinführung

Obwohl die Details noch im weiteren Verlauf der Arbeit beschrieben werden, möchten wir hier einige Begriffe definieren und unsere Notation einführen, die innerhalb der ganzen Arbeit benutzt werden wird.

Zu diesem Zweck schauen wir uns den **Verzweigungsbaum** in Abbildung 4.1 an. Dieser Baum besteht aus den **Ebenen** $j = 0, 1, \dots, \ell$ und jede Ebene j besitzt 2^j **Blätter**. Zusammen haben wir damit $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^\ell = 2^{\ell+1} - 1$ Blätter. Folglich steigt die Anzahl der Blätter exponentiell. Dieser Super-Gau wird allerdings, wie wir später sehen werden, in der Praxis nicht auftreten.

Jedes Blatt entspricht einem linearen Optimierungsproblem, welches wir mit P_j^k bezeich-

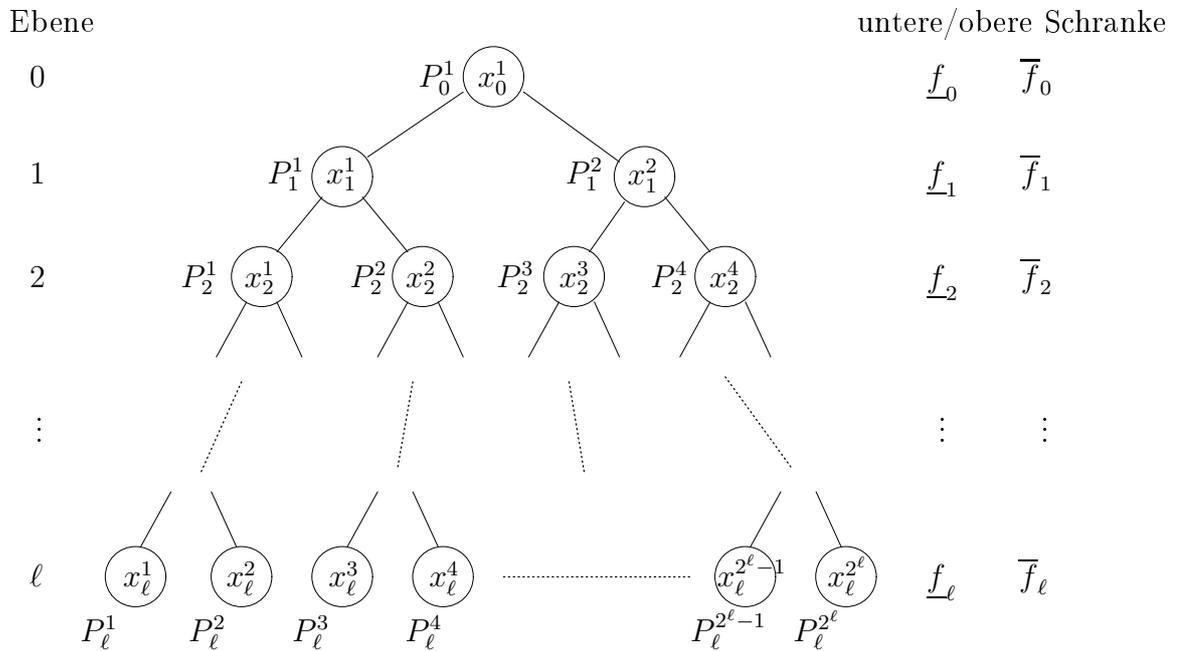


Abbildung 4.1: Basisnotation für eine komplette Verzweigung

nen. Dabei bezeichnet der untere Index die Ebene des Verzweigungsbaums (folglich gilt $j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$) und der obere Index das Blatt innerhalb dieser Ebene (diese sind von $k = 1, 2, 3, \dots, 2^j$ nummeriert). Die Lösung des Programms P_j^k bezeichnen wir mit x_j^k .

Desweiteren werden wir für jede Ebene $j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ eine untere Schranke \underline{f}_j und eine obere Schranke \bar{f}_j des optimalen Funktionswertes f_* unseres LPECs bestimmen, so dass

$$\underline{f}_0 \leq \underline{f}_1 \leq \dots \leq \underline{f}_\ell \leq f_* \quad (4.3)$$

und

$$\bar{f}_0 \geq \bar{f}_1 \geq \dots \geq \bar{f}_\ell \geq f_* \quad (4.4)$$

gilt, d.h., die unteren Schranken sind monoton steigend und die oberen monoton fallend. Die untere Schranke der Ebene j erhält man, indem man die 2^j Programme $P_j^k, k = 1, \dots, 2^j$ löst, wohingegen man die obere Schranke durch Lösen eines weiteren linearen Programms erhalten wird. Die Anzahl linearer Programme, die man bei kompletter Verzweigung zu lösen hat, ist dementsprechend $2^{\ell+1} - 1 + (\ell + 1) = 2^{\ell+1} + \ell$.

4.2 Der Verzweigungsprozess

In diesem Abschnitt beschreiben wir den Verzweigungsprozess unseres Branch-and-Bound-Verfahrens für LPECs. Insbesondere wird erklärt, wie die Blätter in Abbildung 4.1 als Konsequenz unserer Verzweigungstechnik entstehen.

Die Grundidee ist die folgende: Wir starten in Ebene 0, indem wir eine Lösung x_0^1 des **relaxierten Problems** P_0^1

$$\mathbf{P}_0^1 : \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \end{array} \quad (4.5)$$

bestimmen. Man beachte, dass man (4.5) aus (4.1) erhält, indem man die komplementären Terme weglässt. Da wir ein LPEC betrachten, ist (4.5) ein lineares Programm. Daher gibt es folgende mögliche Ergebnisse für (4.5): Entweder ist (4.5) unzulässig, nach unten unbeschränkt oder es besitzt eine Lösung. Deshalb definieren wir unsere erste untere Schranke wie folgt:

$$\underline{f}_0 := \begin{cases} +\infty, & \text{falls } P_0^1 \text{ unzulässig ist,} \\ f(x_0^1), & \text{falls eine Lösung } x_0^1 \text{ von } P_0^1 \text{ gefunden wird,} \\ -\infty, & \text{falls } P_0^1 \text{ nach unten unbeschränkt ist.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Da die zulässige Menge von (4.5) größer ist als die zulässige Menge des Ausgangsproblems (4.1), ist \underline{f}_0 eine untere Schranke für den optimalen Funktionswert f_* von (4.1). Falls $\underline{f}_0 = +\infty$ gilt, so können wir unser Verfahren sogar hier schon stoppen, da dann auch das Ausgangsproblem unzulässig ist. Die anderen beiden Fälle, in denen entweder $\underline{f}_0 = f(x_0^1)$ endlich ist oder $\underline{f}_0 = -\infty$ gilt, können beide auftreten, vgl. zum Beispiel [76] für eine Klasse von Beispielen, bei denen beides vorkommt.

Nehmen wir für den Moment an, dass eine Lösung x_0^1 von (4.5) existiert. Falls diese auch die Komplementaritätsbedingungen

$$G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell,$$

erfüllt, dann ist x_0^1 offensichtlich auch eine Lösung für das ursprüngliche LPEC und wir sind fertig. Andernfalls gibt es einen Index $r \in \{1, \dots, \ell\}$ mit

$$G_r(x_0^1)H_r(x_0^1) > 0$$

und x_0^1 ist nicht zulässig für das ursprüngliche LPEC. Als Nächstes betrachten wir dann zwei weitere Teilprobleme, indem wir zu den Nebenbedingungen von (4.5) noch

$$G_r(x) = 0$$

bzw.

$$H_r(x) = 0$$

hinzufügen. Folglich erhalten wir die beiden linearen Programme P_1^1 und P_1^2 in Ebene 1 aus Abbildung 4.1:

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) \\
 \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
 \mathbf{P}_1^1 : & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
 & G_r(x) = 0, \\
 & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}, \\
 & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell,
 \end{array} \tag{4.7}$$

bzw.

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) \\
 \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
 \mathbf{P}_1^2 : & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
 & H_r(x) = 0, \\
 & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
 & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}.
 \end{array} \tag{4.8}$$

Falls $\underline{f}_0 = -\infty$ gilt, teilen wir das Programm P_0^1 in der gleichen Weise in zwei Teilprobleme, indem wir den Index $r \in \{1, \dots, \ell\}$ beliebig wählen.

Es seien x_1^1 bzw. x_1^2 die Lösungen der zwei Programme (4.7) bzw. (4.8) (falls sie existieren). Man beachte, dass diese zwei Programme erneut lineare Optimierungsprobleme sind, so dass x_1^1 und x_1^2 z.B. mit Hilfe des Simplex-Verfahrens, vgl. Kapitel 3.2.1, bestimmt werden können.

Nun betrachten wir das Problem (4.7), d.h., wir sehen uns Problem P_1^1 an. Löst man dieses Programm, so gibt es erneut drei Fälle: Entweder ist (4.7) unzulässig, nach unten unbeschränkt oder es existiert eine Lösung x_1^1 . Falls P_1^1 unzulässig ist, dann macht es keinen Sinn den Zweig weiterhin zu verfolgen, da auch alle anderen nachfolgenden Teilprobleme unzulässig wären. Falls eine Lösung x_1^1 existiert und falls diese die verbleibenden Komplementaritätsbedingungen

$$G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\} \tag{4.9}$$

erfüllt, so ist x_1^1 zulässig für das LPEC, deshalb ist $f(x_1^1)$ eine obere Schranke an den optimalen Zielfunktionswert f_* . Wir speichern den aktuellen Punkt x_1^1 als einen möglichen Kandidaten für ein globales Minimum und stoppen diesen Zweig.

Falls x_1^1 existiert, aber (4.9) verletzt ist, so können wir einen Index

$$s \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}$$

mit

$$G_s(x_1^1)H_s(x_1^1) > 0$$

finden und dann betrachten wir erneut zwei Teilprobleme von (4.7), indem wir fordern, dass zusätzlich entweder

$$G_s(x) = 0$$

oder

$$H_s(x) = 0$$

gilt. Dies sind die Programme P_2^1 und P_2^2 von Ebene 2 aus der Abbildung 4.1. Ausgeschrieben lauten sie:

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_2^1 : \\ \min \quad f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad \quad h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \quad \quad \quad G_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{r, s\}, \\ \quad \quad \quad G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r, s\}, \\ \quad \quad \quad H_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_2^2 : \\ \min \quad f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad \quad h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \quad \quad \quad G_r(x) = 0, \\ \quad \quad \quad H_s(x) = 0, \\ \quad \quad \quad G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}, \\ \quad \quad \quad H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{s\}. \end{array}$$

Falls (4.7) schließlich nach unten unbeschränkt ist, erhalten wir die zwei Teilprobleme in gleicher Weise, indem wir den Index

$$s \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}$$

beliebig wählen.

In analoger Weise verfahren wir mit dem Programm (4.8):

Falls P_1^2 eine Lösung x_1^2 besitzt und falls diese die verbleibenden Komplementaritätsbedingungen

$$G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\} \tag{4.10}$$

erfüllt, so ist x_1^2 zulässig für das LPEC, deshalb ist $f(x_1^2)$ wieder eine obere Schranke an den optimalen Zielfunktionswert f_* . Wir speichern den aktuellen Punkt x_1^2 als einen möglichen Kandidaten für ein globales Minimum und stoppen diesen Zweig.

Falls x_1^2 existiert, aber (4.10) verletzt ist, so finden wir einen Index

$$t \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}$$

mit

$$G_t(x_1^2)H_t(x_1^2) > 0,$$

und betrachten dann erneut zwei Teilprobleme von (4.8), indem wir fordern, dass zusätzlich entweder

$$G_t(x) = 0$$

oder

$$H_t(x) = 0$$

gilt. Dies sind die Programme P_2^3 und P_2^4 von Ebene 2 aus der Abbildung 4.1:

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_2^3 : \\ \min \quad f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \quad \quad G_t(x) = 0, \\ \quad \quad H_r(x) = 0, \\ \quad \quad G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{t\}, \\ \quad \quad H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r\}, \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_2^4 : \\ \min \quad f(x) \\ \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \quad \quad H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{r, t\}, \\ \quad \quad G_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \\ \quad \quad H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{r, t\}. \end{array}$$

Dieses Prinzip setzen wir in den folgenden Ebenen fort. Allgemein erhalten wir somit aus einem linearen Programm P_j^k die neuen linearen Programme $P_{j+1}^{2k-1}, P_{j+1}^{2k}$, indem wir noch die Gleichung

$$G_r(x) = 0$$

bzw.

$$H_r(x) = 0$$

für ein $r \in \{1, \dots, \ell\}$ mit

$$G_r(x_j^k)H_r(x_j^k) > 0 \tag{4.11}$$

hinzufügen. D.h. einmal wird aus einer G -Ungleichungsrestriktion eine G -Gleichungsrestriktion und einmal aus einer H -Ungleichungsrestriktion eine H -Gleichungsrestriktion. Falls der Index r nicht eindeutig bestimmt ist, nehmen wir das kleinste r mit

$$G_r(x_j^k)H_r(x_j^k) = \max\{G_i(x_j^k)H_i(x_j^k) \mid i \in \{1, \dots, \ell\}\}.$$

In Zukunft bezeichnen wir

$$\mathcal{G}_j^k := \{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid G_i(x) = 0 \text{ ist eine Nebenbedingung des linearen Programms } P_j^k\}$$

bzw.

$$\mathcal{H}_j^k := \{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid H_i(x) = 0 \text{ ist eine Nebenbedingung des linearen Programms } P_j^k\}.$$

Dabei werden diese Mengen wie folgt rekursiv definiert:

$$\mathcal{G}_0^1 = \mathcal{H}_0^1 = \emptyset, \mathcal{G}_{j+1}^{2k-1} = \mathcal{G}_j^k \cup \{r\}, \mathcal{H}_{j+1}^{2k-1} = \mathcal{H}_j^k, \mathcal{G}_{j+1}^{2k} = \mathcal{G}_j^k, \mathcal{H}_{j+1}^{2k} = \mathcal{H}_j^k \cup \{r\},$$

für alle $j = 0, \dots, \ell - 1$ und $k = 1, \dots, 2^j$, wobei r der Index aus (4.11) ist. Das lineare Programm P_j^k hat dann allgemein folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \mathbf{P}_j^k : & G_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{G}_j^k, \\ & H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{H}_j^k, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{G}_j^k, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{H}_j^k. \end{array} \quad (4.12)$$

Die Verzweigung führen wir nun solange fort, bis wir die Ebene ℓ erreichen und der Verzweigungsprozess vollständig ist. Das globale Minimum erhält man dann, indem man die Lösung x_j^k des lösbaren Programms P_j^k wählt, welche alle Komplementaritätsbedingungen erfüllt und den niedrigsten Funktionswert besitzt. Diese Verzweigungsmethode wurde bereits im Zusammenhang mit *zweistufigen Optimierungsproblemen (Bilevel Programs)* beschrieben, vgl. [7], und wird das Grundgerüst unserer weiteren Ausführung sein. Man beachte, dass man bis jetzt noch alle Zweige und Blätter von Abbildung 4.1 betrachten muss, außer ein solches Programm P_j^k erweist sich als unlösbar (in diesem Fall muss man die weiteren Teilprobleme nicht betrachten, da diese auch alle unzulässig sind) oder erfüllt alle Komplementaritätsbedingungen, in welchem Fall man einen Kandidaten für ein globales Minimum gefunden hat.

Als Nächstes präsentieren wir eine nützliche Technik, die es uns erlauben wird, einige weitere Zweige nicht mehr betrachten zu müssen.

4.3 Wie man untere und obere Schranken bekommt

Dieser Abschnitt beschreibt, wie man für den optimalen Funktionswert f_* unseres LPECs geeignete untere und obere Schranken gewinnt. Der schwierigste Part dabei ist es, gute untere Schranken zu finden. Dabei benutzen wir in jeder Ebene $j = 0, 1, \dots, \ell$, eine ziemlich einfache Idee, um diese unteren Schranken zu bekommen. Die untere Schranke \underline{f}_0 erhält

man durch die Lösung des Programms P_0^1 , wie wir es in (4.6) beschrieben haben. Leider ist es in Ebene 1 (und auch in allen weiteren Ebenen) nicht mehr möglich, den Funktionswert $f(x_1^1)$ oder $f(x_1^2)$ der optimalen Lösungen der beiden Programme (4.7) bzw. (4.8) direkt als untere Schranke für f_* zu verwenden. Da jedoch eine Lösung unseres LPECs durch die Komplementaritätsbedingung entweder die Nebenbedingung

$$G_r(x) = 0$$

oder die Nebenbedingung

$$H_r(x) = 0$$

erfüllen muss, folgt, dass

$$\underline{f}_1 := \min\{f(x_1^1), f(x_1^2)\}$$

eine untere Schranke für f_* darstellt. Desweiteren ist das sogar im Vergleich zu \underline{f}_0 eine verbesserte untere Schranke, denn es gilt

$$\underline{f}_1 \geq \underline{f}_0,$$

da die zulässigen Mengen von (4.7) und (4.8) Teilmengen der zulässigen Menge von (4.5) sind. Falls eines dieser beiden Programme nach unten unbeschränkt ist, dann haben wir selbstverständlich

$$\underline{f}_1 = -\infty.$$

In einer ähnlichen Weise bekommt man aus den beiden Teilproblemen, die sich aus (4.7) und aus den zwei Teilproblemen, die sich aus (4.8) ergeben (genauer gesagt die vier Teilprobleme P_2^1, P_2^2, P_2^3 , bzw. P_2^4 aus Ebene 2 in Abbildung 4.1), eine neue untere Schranke, indem man

$$\underline{f}_2 := \min\{f(x_2^1), f(x_2^2), f(x_2^3), f(x_2^4)\}$$

setzt. Erneut handelt es sich dabei wegen

$$\underline{f}_2 \geq \underline{f}_1 \geq \underline{f}_0$$

um eine bessere untere Schranke. Hierbei setzen wir erneut

$$\underline{f}_2 = -\infty,$$

falls eines der Programme

$$P_2^k, k \in \{1, \dots, 4\},$$

nach unten unbeschränkt ist. Führt man dies nun so fort, so erhält man eine Folge unterer Schranken

$$\underline{f}_i, i = 0, 1, \dots, \ell,$$

so dass (4.3) gilt.

Obere Schranken erhält man viel einfacher, da jeder zulässige Punkt des LPECs insbesondere eine obere Schranke für f_* ist. In der Praxis benutzen wir zuerst einen NLP - Solver um das LPEC (4.1) zu lösen. In der Regel erhalten wir dadurch ein lokales Minimum \bar{x}^0 von (4.1), welches insbesondere ein zulässiger Punkt von (4.1) ist, so dass

$$f(\bar{x}^0) \geq f_*$$

gilt. Deshalb definieren wir

$$\bar{f}_0 := f(\bar{x}^0).$$

Man beachte, dass dies das einzige *nichtlineare* Programm ist, welches wir innerhalb unseres Branch-and-Bound-Verfahrens zu lösen haben. Falls kein solcher NLP - Solver verfügbar ist, oder er keinen zulässigen Punkt findet, so setzen wir einfach

$$\bar{f}_0 := +\infty.$$

Die Erfahrung zeigt jedoch, dass man dadurch oft geeignete obere Schranken erhält, so dass es sich durchaus lohnt an dieser Stelle einen NLP-Solver einzusetzen, um eine obere Schranke \bar{f}_0 zu erhalten. Für einige klein-dimensionale Probleme erhält man sogar schon die spätere globale Lösung als obere Schranke. Leider müssen wir selbst in diesem Fall erst noch nachweisen, dass es sich tatsächlich um das globale Minimum handelt.

Als Nächstes betrachten wir Ebene 1 und nehmen o.B.d.A. an, dass die untere Schranke

$$\underline{f}_1 = \min\{f(x_1^1), f(x_1^2)\}$$

durch den Zielfunktionswert der Lösung von Problem P_1^1 gegeben ist, d.h. es gelte

$$\underline{f}_1 = f(x_1^1).$$

Dann definieren wir die nichtleere Indexmenge

$$\mathcal{I}_1 := \{i \mid G_i(x_1^1) = 0\}$$

der aktiven G_i -Nebenbedingungen in x_1^1 und

$$\bar{\mathcal{I}}_1 := \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{I}_1$$

sei die zugehörige komplementäre Indexmenge. Nun bestimmen wir eine Lösung \bar{x}^1 des linearen Programms (sofern dieses zulässig ist)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_1, \\ & H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \bar{\mathcal{I}}_1, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \bar{\mathcal{I}}_1, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_1. \end{array}$$

Offensichtlich ist \bar{x}^1 zulässig für unser LPEC und damit gilt

$$f(\bar{x}^1) \geq f_*.$$

Unsere neue obere Schranke erhalten wir dann, indem wir

$$\bar{f}_1 := \min\{\bar{f}_0, f(\bar{x}^1)\}$$

setzen. Es ist offensichtlich, dass dann

$$f_* \leq \bar{f}_1 \leq \bar{f}_0$$

gilt. Man beachte, dass es natürlich noch viele weitere Möglichkeiten gibt, um obere Schranken zu gewinnen. Wir haben uns für die oben vorgestellte Variante entschieden, da wir der Meinung sind, dass x_1^1 schon ein sehr guter Kandidat für das globale Minimum ist, folglich stimmt die Menge der aktiven G_i -Nebenbedingungen \mathcal{I}_1 mehr oder weniger mit denen der richtigen Lösung überein.

Auf die gleiche Weise erhalten wir auch in Ebene j eine obere Schranke: Wir verwenden das lineare Programm P_j^k , welches den niedrigsten der Funktionswerte $f(x_j^1), f(x_j^2), \dots, f(x_j^{2^j})$ besitzt und definieren damit die Indexmenge

$$\mathcal{I}_j := \{i | G_i(x_j^k) = 0\},$$

welche die aktiven G_i -Nebenbedingungen enthält und die komplementäre Indexmenge

$$\bar{\mathcal{I}}_j := \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{I}_j.$$

Damit lösen wir das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_j, \\ & H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \bar{\mathcal{I}}_j, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \bar{\mathcal{I}}_j, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_j. \end{array}$$

So fahren wir bis Ebene ℓ fort. Um geeignete obere Schranken zu gewinnen, haben wir somit in jeder Ebene zusätzlich ein lineares Programm zu lösen. Auf Grund unserer Ausführungen ist sofort klar, dass diese oberen Schranken (4.4) erfüllen.

Offensichtlich haben wir eine globale Lösung unseres LPECs, falls

$$\underline{f}_j = \bar{f}_j$$

für ein $j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ gilt. Im schlimmsten Fall tritt diese Gleichheit erst in Ebene ℓ ein (vorausgesetzt (4.1) besitzt eine Lösung). Wir hoffen aber, dass dies viel früher der Fall ist

und unsere Ergebnisse haben auch gezeigt, dass dies normalerweise zutrifft.

Man beachte auch, dass wir einen Zweig nur solange zu betrachten haben, bis der optimale Funktionswert eines Programms P_j^k größer oder gleich ist, als die aktuelle obere Schranke \bar{f}_j . Abhängig von der Qualität der oberen Schranke können so viele der noch zu untersuchenden Blätter des Verzweigungsbaums aus Abbildung 4.1 gelöscht werden. Falls sogar eines der Programme P_j^k eine Lösung x_j^k besitzt, die alle Komplementaritätsbedingungen erfüllt (d.h. x_j^k ist für unser LPEC zulässig und damit ein Kandidat für ein globales Minimum), können wir die obere Schranke \bar{f}_j durch

$$\bar{f}_j := \min\{f(x_j^k), \bar{f}_j\}$$

ersetzen.

4.4 Effiziente Lösung der Teilprobleme

In diesem Kapitel soll die Frage geklärt werden, wie man die linearen Programme, die als Teilprobleme unseres Branch-and-Bound-Verfahrens auftreten, effizient lösen kann.

4.4.1 Effiziente Lösung der linearen Programme im Verzweigungsprozess

Zuerst beschäftigen wir uns damit, wie aus Problem P_j^k die beiden Teilprobleme P_{j+1}^{2k-1} , P_{j+1}^{2k} effizient gelöst werden können. Allgemein hat P_j^k folgende Gestalt:

$$\mathbf{P}_j^k : \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & G_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{G}_j^k, \\ & H_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{H}_j^k, \\ & G_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{G}_j^k, \\ & H_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{H}_j^k, \end{array}$$

vgl. (4.12), bzw.

$$\mathbf{P}_j^k : \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{u.d.N.} & A_i x - a_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & B_i x - b_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ & D_i x - d_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{G}_j^k, \\ & E_i x - e_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{H}_j^k, \\ & D_i x - d_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{G}_j^k, \\ & E_i x - e_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{H}_j^k, \end{array} \quad (4.13)$$

wenn wir berücksichtigen, dass es ein LPEC ist, vgl. (4.2). Um dieses Problem mit dem Simplex-Verfahren lösen zu können, müssen wir es zunächst noch in Standardform umschreiben, vgl. Kapitel 3.1. Dazu definieren wir

$$\bar{\mathcal{G}}_j^k := \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{G}_j^k$$

bzw.

$$\bar{\mathcal{H}}_j^k := \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{H}_j^k.$$

Dann lautet (4.13) in Standardform:

$$\begin{aligned} & \min c^T(x^+ + x^-) \text{ u.d.N.} \\ \mathbf{P}_j^k : & \begin{pmatrix} A & -A & I & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{G}_j^k} & -D_{\mathcal{G}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{H}_j^k} & -E_{\mathcal{H}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ D_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} & -D_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} & 0 & -I & 0 \\ E_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} & -E_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d_{\mathcal{G}_j^k} \\ e_{\mathcal{H}_j^k} \\ d_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} \\ e_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nehmen wir an, wir haben mit dem Simplex-Verfahren eine Lösung \bar{x} dieses linearen Programms gefunden. Insbesondere ist die Lösung dann ein Basisvektor. Wir wollen nun diesen Basisvektor dazu benutzen, die aus dem Programm P_j^k resultierenden Teilprobleme P_{j+1}^{2k-1} bzw. P_{j+1}^{2k} effizient zu lösen. Um diese beiden Probleme zu definieren, suchen wir ein

$$r \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{\mathcal{G}_j^k \cup \mathcal{H}_j^k\} = \bar{\mathcal{G}}_j^k \cap \bar{\mathcal{H}}_j^k$$

mit

$$(D_r(\bar{x}^+ - \bar{x}^-) - d_r) (E_r(\bar{x}^+ - \bar{x}^-) - e_r) > 0 \iff \bar{x}_r^G \bar{x}_r^H > 0. \quad (4.15)$$

Um das Programm P_{j+1}^{2k-1} zu erhalten, wird dann zu Programm P_j^k noch die Gleichung

$$D_r(x^+ - x^-) = d_r \iff x_r^G = 0$$

hinzugefügt, um P_{j+1}^{2k} zu erhalten, fügt man

$$E_r(x^+ - x^-) = e_r \iff x_r^H = 0$$

hinzu.

Wir betrachten hier nur Programm P_{j+1}^{2k} , das andere behandelt man analog. Programm

P_{j+1}^{2k} lautet dann in Standardform:

$$\mathbf{P}_{j+1}^{2k} : \left\{ \begin{array}{l} \min c^T(x^+ + x^-) \text{ u.d.N.} \\ \left(\begin{array}{cccccc} A & -A & I & 0 & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{G}_j^k} & -D_{\mathcal{G}_j^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{H}_j^k} & -E_{\mathcal{H}_j^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & -D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} & -E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} & 0 & 0 & -I & 0 \\ E_r & -E_r & 0 & 0 & 0 & -1 \\ E_r & -E_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{c} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}}^H \\ x_r^H \end{array} \right)}_{\geq 0} = \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ d_{\mathcal{G}_j^k} \\ e_{\mathcal{H}_j^k} \\ d_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} \\ e_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} \\ e_r \\ e_r \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Man beachte, dass hier ausnahmsweise e_r nicht der r -te Einheitsvektor sondern die r -te Komponente des Vektors e ist.

Da die Notation doch etwas kompliziert ist und für die weiteren Betrachtungen keine Rolle spielt, vereinfachen wir sie etwas. Dazu definieren wir:

$$Z := \left(\begin{array}{cccccc} A & -A & I & 0 & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{G}_j^k} & -D_{\mathcal{G}_j^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{H}_j^k} & -E_{\mathcal{H}_j^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & -D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} & -E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} & 0 & 0 & -I & 0 \end{array} \right), \quad x := \left(\begin{array}{c} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}}^H \end{array} \right), \quad z := \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ d_{\mathcal{G}_j^k} \\ e_{\mathcal{H}_j^k} \\ d_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} \\ e_{\overline{\mathcal{H}}_j^k \setminus \{r\}} \end{array} \right),$$

$$g := \left(\begin{array}{c} c \\ c \\ 0 \end{array} \right), \quad Y := (E_r \quad -E_r \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Damit lauten (4.14) und (4.16) dann:

$$\mathbf{P}_j^k : \quad \min g^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \left(\begin{array}{cc} Z & 0 \\ Y & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ x_r^H \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} z \\ e_r \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{c} x \\ x_r^H \end{array} \right) \geq 0, \quad (4.17)$$

bzw.,

$$\mathbf{P}_{j+1}^{2k} : \quad \min g^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \left(\begin{array}{cc} Z & 0 \\ Y & -1 \\ Y & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ x_r^H \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} z \\ e_r \\ e_r \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{c} x \\ x_r^H \end{array} \right) \geq 0. \quad (4.18)$$

Offensichtlich muss $x_r^H = 0$ für eine Lösung von (4.18) gelten. Deshalb kann Programm

P_{j+1}^{2k} auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathbf{P}_{j+1}^{2k} : \quad \min g^T x \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix}; \quad x \geq 0. \quad (4.19)$$

Unser Problem ist nun, dass wir keinen Start-Basisvektor für Programm (4.19) haben. Deshalb untersuchen wir im Folgenden das Programm:

$$\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{2k} : \quad \min g^T x + Mx_r^H \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_r^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ x_r^H \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.20)$$

Dabei sei $M > 0$. Das ist im Wesentlichen die Big-M Methode (vgl. [46, Satz 3.29]), die beim Simplex-Verfahren dafür verwendet wird, eine Lösung zu bestimmen, wenn man keinen Startbasisvektor zur Verfügung hat. Bei uns ist die Situation schon etwas einfacher, da wir davon ausgehen, dass wir für Problem (4.17), d.h. für P_j^k , eine Lösung kennen. Da der zulässige Bereich von (4.17) und (4.20) übereinstimmt, ist die alte Lösung x_j^k ein Startbasisvektor für (4.20). Um den Hauptsatz dieses Abschnitts angeben zu können, benötigen wir noch ein Hilfsresultat:

Lemma 4.1 Falls Problem (4.19) zulässig ist, dann gilt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \text{Rang } Z + 1.$$

Beweis. Es sei x zulässig für Problem (4.19) und $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}$ die Lösung von Problem P_j^k mit $\bar{x}_r^H > 0$, vgl. (4.15). Es gilt also

$$\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

und

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ Y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Angenommen, die Zeile Y wäre linear abhängig von den Zeilen $(Z_i)_{1 \leq i \leq m}$ der Matrix Z . Dann gibt es $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$Y = \sum_{i=1}^m \alpha_i Z_i. \quad (4.23)$$

Damit folgt:

$$e_r \stackrel{(4.22)}{=} Y \bar{x} - \underbrace{\bar{x}_r^H}_{>0} < Y \bar{x} \stackrel{(4.23)}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \underbrace{Z_i \bar{x}}_{\stackrel{(4.22)}{=} z_i} = \sum_{i=1}^m \alpha_i z_i \stackrel{(4.21)}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i Z_i x \stackrel{(4.23)}{=} Y x \stackrel{(4.21)}{=} e_r,$$

ein Widerspruch. Somit ist Y nicht linear abhängig von den Zeilen von Z und es folgt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \text{Rang } Z + 1.$$

□

Nun sind wir in der Lage, den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen. Dieser setzt die Lösungen der beiden Programme (4.19) und (4.20) miteinander in Verbindung. Der Beweis geht ähnlich zum Beweis des Satzes der Big-M-Methode, vgl. [46, Satz 3.29]:

Satz 4.2 *Es gelten die beiden folgenden Aussagen:*

a) Falls $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}$ eine Lösung von Programm \bar{P}_{j+1}^{2k} (4.20) ist und zusätzlich $\bar{x}_r^H = 0$ gilt, dann ist \bar{x} eine Lösung von P_{j+1}^{2k} (4.19).

b) Falls Problem P_{j+1}^{2k} lösbar ist, dann existiert eine Konstante M^* , so dass für alle $M > M^*$ Problem \bar{P}_{j+1}^{2k} eine Lösung $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}$ mit $\bar{x}_r^H = 0$ besitzt. Benutzt man das Simplex-Verfahren und liefert dies eine Lösung von \bar{P}_{j+1}^{2k} mit $r \in \mathcal{B}$, dann kann dieses r ausgetauscht werden, d.h. es existiert ein $s \notin \mathcal{B}$, so dass $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}$ eine optimale Basislösung mit zugehöriger Basis

$$\bar{\mathcal{B}} := (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{s\}$$

ist.

Beweis. a) Wegen $\bar{x}_r^H = 0$ ist die Zulässigkeit von \bar{x} für (4.19) klar. Sei nun x ein beliebiger zulässiger Vektor für (4.19), dann ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ zulässig für Problem (4.20). Aus der Optimalität von $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt dann mit

$$g^T \bar{x} = g^T \bar{x} + M \cdot 0 \leq g^T x + M \cdot 0 = g^T x$$

die Optimalität von \bar{x} für (4.19).

b) Hier betrachten wir von P_{j+1}^{2k} bzw. \bar{P}_{j+1}^{2k} die dualen Programme:

$$\text{D1 :} \quad \max \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ u.d.N. } (Z^T \quad Y^T) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \leq g, \quad (4.24)$$

$$\text{D2 :} \quad \max \begin{pmatrix} z \\ e_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ u.d.N. } \begin{pmatrix} Z^T & Y^T \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} g \\ M \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Da P_{j+1}^{2k} nach Voraussetzung lösbar ist, ist nach Satz 3.4 auch D1 lösbar. Es sei $\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung. Desweiteren definieren wir

$$M^* := -\bar{\lambda}_2.$$

Sei nun $M > M^*$, dann ist $\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix}$ auch eine Lösung von $D2$, denn der Vektor ist zulässig und die zulässige Menge von $D2$ ist eine Teilmenge der zulässigen Menge von $D1$.

Nach Satz 3.4 besitzt dann aber auch \bar{P}_{j+1}^{2k} eine Lösung $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}$. Aus den Komplementaritätsbedingungen, vgl. erneut Satz 3.4, folgt:

$$\left[\begin{pmatrix} g \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z^T & Y^T \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} \right]_i \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_r^H \end{pmatrix}_i = 0.$$

Ausgeschrieben lautet die letzte Bedingung:

$$(M + \bar{\lambda}_2)\bar{x}_r^H = 0$$

Wegen $M > -\bar{\lambda}_2$ folgt $\bar{x}_r^H = 0$.

Sei nun \mathcal{B} die zu $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ gehörige Basis mit $r \in \mathcal{B}$. Desweiteren sei

$$A := \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Y & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$B = (A_i)_{i \in \mathcal{B}}$$

die zugehörige Basismatrix. Wir wählen nun einen Index $s \notin \mathcal{B}$, für den gilt:

$$Bd = A_s \implies d_r \neq 0. \quad (4.26)$$

(Dass solch ein s existiert, werden wir am Ende des Beweises sehen.)

Unser Ziel ist es zu beweisen, dass

$$\bar{\mathcal{B}} := (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{s\}$$

auch eine Basis ist. Dazu müssen wir Folgendes zeigen:

- $\bar{x}_i = 0 \quad \forall i \notin \bar{\mathcal{B}}$
- Die Spalten $(A_i)_{i \in (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{s\}}$ sind linear unabhängig.

Wegen $\bar{x}_r^H = 0$ ist der erste Punkt klar. Um den zweiten Punkt zu beweisen, seien $\gamma_i \in \mathbb{R}$ gegeben, für die

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} \gamma_i A_i + \gamma_s A_s = 0$$

gelte. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} \gamma_i A_i + \gamma_s A_s \\
&\stackrel{(4.26)}{=} \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} \gamma_i A_i + \gamma_s B d \\
&= \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} \gamma_i A_i + \sum_{i \in \mathcal{B}} \gamma_s A_i d_i \\
&= \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} (\gamma_i A_i + \gamma_s d_i A_i) + \gamma_s d_r A_r \\
&= \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} (\gamma_i + \gamma_s d_i) A_i + \gamma_s d_r A_r.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Da B eine Basismatrix ist, sind die Spalten $(A_i)_{i \in \mathcal{B}}$ linear unabhängig und somit folgt

$$\begin{aligned}
\gamma_i + \gamma_s d_i &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{B}, i \neq r, \\
\gamma_s d_r &= 0.
\end{aligned}$$

Da $d_r \neq 0$ gilt, vgl. (4.26), erhalten wir aus der zweiten Gleichung $\gamma_s = 0$ und somit aus der ersten auch $\gamma_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}$, dies war zu beweisen.

Zum Schluss müssen wir noch zeigen, dass es einen solchen Index s tatsächlich gibt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gilt für alle Indices $s \notin \mathcal{B}$: Für jeden Vektor d mit $Bd = A_s$ folgt $d_r = 0$. Setzen wir nun $\gamma_s = 1$ und $\gamma_i = -d_i \quad \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}$, dann folgt analog (4.27):

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} \gamma_i A_i + \gamma_s A_s \stackrel{(4.27)}{=} \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ i \neq r}} (\underbrace{\gamma_i}_{=-d_i} + \underbrace{\gamma_s}_{=1} d_i) A_i + \gamma_s \underbrace{d_r}_{=0} A_r = 0$$

und die Spalten von $(A_i)_{i \in \mathcal{B} \setminus \{r\} \cup \{s\}}$ wären immer linear abhängig. Dies kann aber nicht sein, denn es gilt:

- $\text{Rang } A = \text{Rang} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Y & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang } Z + 1$ und
- nach Lemma 4.1: $\text{Rang} \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \text{Rang } Z + 1$.

Insgesamt folgt also

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Y & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

und deshalb muss ein $s \notin \mathcal{B}$ mit den geforderten Eigenschaften existieren. \square

Was man nun zu tun hat, ist klar: Man startet mit einem Basisvektor des alten Programms P_j^k und vergrößert die Konstante M von \bar{P}_{j+1}^{2k} Schritt für Schritt (z.B. indem man sie jedes Mal mit dem konstanten Faktor 10 multipliziert). Dies wiederholt man solange, bis \bar{P}_{j+1}^{2k} eine Lösung mit $\bar{x}_r^H = 0$ besitzt oder eine obere Schranke für M erreicht wird (und Problem P_{j+1}^{2k} höchstwahrscheinlich unzulässig ist). Gibt es eine Lösung mit $\bar{x}_r^H = 0$, so existiert eine Lösung für das Programm P_{j+1}^{2k} , die zugleich auch ein Basisvektor ist. Dieser dient dann später wieder als Startbasisvektor für die Lösung der sich hieraus ergebenden Probleme P_{j+2}^{4k-1} bzw. P_{j+2}^{4k} .

4.4.2 Effiziente Lösungen der linearen Programme zur Gewinnung oberer Schranken

In diesem Unterkapitel betrachten wir das Problem, eine geeignete obere Schranke zu finden. In Kapitel 4.3 schlugen wir vor, dabei wie folgt vorzugehen: In Ebene j erhält man eine obere Schranke, indem man das zugehörige Optimierungsproblem, das durch die Indexmenge

$$\mathcal{I}_j = \{i \mid G_i(x_j^k) = 0\}$$

definiert ist, löst. Dabei ist x_j^k die Lösung des linearen Programms P_j^k , welches den niedrigsten der Funktionswerte $f(x_i^1), f(x_i^2), \dots, f(x_i^{2^i})$ besitzt. Desweiteren sei noch

$$\bar{\mathcal{I}}_j := \{1, \dots, \ell\} \setminus \mathcal{I}_j,$$

die komplementäre Indexmenge. Gehen wir nun also davon aus, wir haben eine Lösung des Problems P_j^k in Standardform:

$$\begin{aligned} & \min c^T(x^+ + x^-) \text{ u.d.N.} \\ \mathbf{P}_j^k : & \begin{pmatrix} A & -A & I & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{G}_j^k} & -D_{\mathcal{G}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{H}_j^k} & -E_{\mathcal{H}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ D_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} & -D_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} & 0 & -I & 0 \\ E_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} & -E_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d_{\mathcal{G}_j^k} \\ e_{\mathcal{H}_j^k} \\ d_{\bar{\mathcal{G}}_j^k} \\ e_{\bar{\mathcal{H}}_j^k} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

gefunden. Zur Bestimmung der oberen Schranke muss dann folgendes lineare Programm gelöst werden:

$\min c^T(x^+ + x^-)$ u.d.N.

$$\begin{pmatrix} A & -A & I & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{I}_j} & -D_{\mathcal{I}_j} & 0 & 0 & 0 \\ E_{\overline{\mathcal{I}}_j} & -E_{\overline{\mathcal{I}}_j} & 0 & 0 & 0 \\ D_{\overline{\mathcal{I}}_j} & -D_{\overline{\mathcal{I}}_j} & 0 & -I & 0 \\ E_{\mathcal{I}_j} & -E_{\mathcal{I}_j} & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d_{\mathcal{I}_j} \\ e_{\overline{\mathcal{I}}_j} \\ d_{\overline{\mathcal{I}}_j} \\ e_{\mathcal{I}_j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.29)$$

Dies geschieht völlig analog zu unseren Ausführungen aus Kapitel 4.4.1 mit Hilfe der Big-M- Methode, indem man folgendes lineare Programm löst:

$\min c^T(x^+ + x^-) + M \cdot \sum_{i \in \mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k} x_i^G + M \cdot \sum_{i \in \overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k} x_i^H$ u.d.N.

$$\begin{pmatrix} A & -A & I & 0 & 0 \\ B & -B & 0 & 0 & 0 \\ D_{\mathcal{G}_j^k} & -D_{\mathcal{G}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{H}_j^k} & -E_{\mathcal{H}_j^k} & 0 & 0 & 0 \\ D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & -D_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} & 0 & -I & 0 \\ E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k} & -E_{\overline{\mathcal{H}}_j^k} & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d_{\mathcal{G}_j^k} \\ e_{\mathcal{H}_j^k} \\ d_{\overline{\mathcal{G}}_j^k} \\ e_{\overline{\mathcal{H}}_j^k} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x^g \\ x^G \\ x^H \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.30)$$

Man beachte wieder, dass (4.28) und (4.30) die gleiche zulässige Menge besitzen und der einzige Unterschied in der Zielfunktion im Summanden

$$M \cdot \sum_{i \in \mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k} x_i^G + M \cdot \sum_{i \in \overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k} x_i^H$$

besteht. Analog zu Satz 4.2 gilt hier das folgende Resultat:

Satz 4.3 a) Falls

$$\left(\overline{x}^T \quad \overline{x}_{\mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k}^G \quad \overline{x}_{\overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k}^H \right)^T$$

eine Lösung von (4.30) ist mit

$$\begin{aligned} \overline{x}_i^G &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k, \\ \overline{x}_i^H &= 0, \quad \forall i \in \overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k, \end{aligned} \quad (4.31)$$

dann ist \overline{x} eine Lösung von (4.29).

b) Falls Problem (4.29) lösbar ist, dann existiert eine Konstante M^* , so dass für alle $M > M^*$ Problem (4.30) eine Lösung $\left(\overline{x}^T \quad \overline{x}_{\mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k}^G \quad \overline{x}_{\overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k}^H \right)^T$ mit

$$\begin{aligned} \overline{x}_i^G &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_j \setminus \mathcal{G}_j^k, \\ \overline{x}_i^H &= 0, \quad \forall i \in \overline{\mathcal{I}}_j \setminus \mathcal{H}_j^k, \end{aligned} \quad (4.32)$$

besitzt.

4.5 Ein zusätzliches Abbruchkriterium

Mit Hilfe von Satz 2.29 erhält man ein einfaches Kriterium, um zu überprüfen, ob ein zulässiger Punkt eines MPEC-konvexen Programms, vgl. (2.14), ein globales Minimum ist: Ist (x^*, λ) ein stark stationärer Punkt eines MPEC-konvexen Programms und gilt zusätzlich $\lambda_\alpha^G \geq 0, \lambda_\gamma^H \geq 0$, dann ist x^* ein globales Minimum des relaxierten Problems, vgl. Definition 2.28 bzw. (4.5), also insbesondere auch für das MPEC-konvexe Programm, da dessen zulässige Menge eine Teilmenge des relaxierten Problems ist. Da jedes LPEC ein MPEC-konvexes Programm ist, können wir dieses Resultat auch in unser Verfahren einbauen.

Genauer gesagt, können wir dieses Kriterium auf den Punkt, der mit Hilfe des NLP - Solvers gefunden wird, anwenden. Damit kann überprüft werden, ob wir schon zu Beginn abbrechen können.

Auf der anderen Seite ist es nicht nötig eine Überprüfung dieses Kriterium für die anderen Knotenpunkte in Ebenen mit $j \geq 1$ in unserem Branch-and-Bound-Verfahren einzubauen. Der Grund dafür ist der, dass wir, falls das Kriterium erfüllt wäre, sowieso abbrechen würden. Um dies einzusehen, nehmen wir an, dass die Voraussetzungen von Satz 2.29 erfüllt sind. Dann ist x^* ein globales Minimum für das relaxierte Problem (4.5) und es gilt $f(x) \geq f(x^*)$ für alle x , die für das relaxierte Problem P_0^1 zulässig sind. Insbesondere ist dann $f(x_0^1) \geq f(x^*)$, wobei x_0^1 die Lösung des relaxierten Problems P_0^1 sei. Allerdings gilt nach Definition des relaxierten Problems $f(x_0^1) \leq f(x^*)$ und deshalb insgesamt $f(x_0^1) = f(x^*)$. Wir erhalten somit

$$\underline{f}_0 = \underline{f}_1 = \dots = \underline{f}_\ell = f(x^*).$$

Folglich stoppt unser Algorithmus, sobald das globale Minimum x^* in Ebene j gefunden wird, denn dann gilt

$$\underline{f}_j = \bar{f}_j = f(x^*),$$

und das Kriterium aus Satz 2.29 muss nicht mehr verifiziert werden.

4.6 Komplementäre Schnittebenen

4.6.1 Allgemeine Beschreibung

Die Idee, die hier beschrieben wird, ist dem Paper [52] entnommen und basiert auf dem klassischen **Schnittebenenverfahren** der ganzzahligen Optimierung.

Betrachten wir ein festes Problem P_j^k mit einer Lösung x_j^k . O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Nebenbedingungen dieses linearen Programms in Standardform

$$Ax = b, x \geq 0$$

gegeben sind. Desweiteren nehmen wir an, dass die Lösung x_j^k ein Basisvektor der zulässigen Menge ist, was bedeutet, dass die Lösung x_j^k mit Hilfe des Simplex-Verfahrens, vgl. Kapitel 3.2.1, gefunden wurde. Es seien \mathcal{B} bzw. \mathcal{N} die zugehörigen Indexmengen, die die Indizes der

Basisvariablen bzw. Nichtbasisvariablen enthalten. Entsprechend sei B die Basismatrix und N die Nichtbasismatrix. Dann kann die zulässige Menge des Programms P_j^k in folgender Weise umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
Ax = b, \quad x \geq 0 \\
\iff Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} = b, \quad x \geq 0 \\
\iff x_{\mathcal{B}} + \underbrace{B^{-1}N}_{=:C} x_{\mathcal{N}} = \underbrace{B^{-1}b}_{=:g}, \quad x \geq 0 \\
\iff x_r + \sum_{i \in \mathcal{N}} c_{ri} x_i = g_r \quad \forall r \in \mathcal{B}, \quad x \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Man beachte, dass man die Matrix C nicht extra bestimmen muss, wenn man für die Lösung der linearen Programme die Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens, vgl. Kapitel 3.2.2, benutzt, denn die Spalten der Matrix $B^{-1}N$ sind auch Spalten des Tableaus. Nehmen wir nun an, dass die Lösung x_j^k von P_j^k nicht die Komplementaritätsbedingung

$$G_i(x)H_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell,$$

erfüllt. Dann gibt es einen Index r mit

$$G_r(x_j^k) > 0$$

und

$$H_r(x_j^k) > 0.$$

Dies impliziert auf Grund unserer Standardform $Ax = b, x \geq 0$, dass es zwei Indizes r_1, r_2 mit $(x_j^k)_{r_1} > 0$ und $(x_j^k)_{r_2} > 0$ gibt (beachte dazu, dass man Schlupfvariablen einführen muss, um die Standardform zu erreichen, vgl. Kapitel 4.4.1). Insbesondere gilt dann $r_1, r_2 \in \mathcal{B}$. Allerdings muss jeder zulässige Punkt unseres LPECs (4.1) zusätzlich zu den Nebenbedingungen $Ax = b, x \geq 0$ auch die Komplementaritätsbedingungen erfüllen, d.h. entweder die Komponente r_1 oder die Komponente r_2 ist Null.

Deshalb folgt aus (4.33) für die Indizes $r = r_1$ bzw. $r = r_2$, dass jeder zulässige Punkt x unseres LPECs entweder die Gleichung

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_{r_1 i} x_i = g_{r_1}$$

oder die Gleichung

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_{r_2 i} x_i = g_{r_2}$$

erfüllt. Teilt man diese durch $g_{r_1} = (x_j^k)_{r_1} > 0$ bzw. $g_{r_2} = (x_j^k)_{r_2} > 0$ (vgl. (4.33) und beachte, dass $(x_j^k)_{\mathcal{N}} = 0$ gilt, da x_j^k eine Basisvariable ist), erhält man entweder

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{c_{r_1 i}}{g_{r_1}} x_i = 1$$

oder

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{c_{r_2 i}}{g_{r_2}} x_i = 1.$$

Deshalb erfüllt jeder zulässige Punkt unseres MPECs die Ungleichung

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} d_i x_i \geq 1 \quad \text{mit} \quad d_i := \max \left\{ \frac{c_{r_1 i}}{g_{r_1}}, \frac{c_{r_2 i}}{g_{r_2}} \right\}.$$

Auf Grund ihrer Herleitung nennen wir das eine **komplementäre Schnittebene**. Man beachte, dass man so eine Ungleichung für jeden Index r , für den Komplementarität verletzt ist, erhalten kann. Die Lösung x_j^k des aktuellen Programms P_j^k erfüllt dann alle diese Ungleichungen nicht, aber jede Lösung des Ausgangsproblems (4.1), die in den aktuellen Zweig hineinfällt, muss diese Bedingungen erfüllen. Deshalb ist es sicherlich sehr sinnvoll, diese komplementären Schnittebenen zum Problem P_j^k und zu allen folgenden Programmen in diesem Zweig des Baums hinzuzufügen.

4.6.2 Effiziente Lösung der linearen Programme mit Schnittebenen

Kommen wir nun zu der Frage, wie man dieses neue lineare Programm effizient lösen kann. Dazu sei

$$\mathcal{I} := \{r \in \{1, \dots, \ell\} \mid G_r(x_j^k) H_r(x_j^k) > 0\}$$

mit $|\mathcal{I}| = s$. Dann lautet das neue lineare Programm nach Hinzufügen der Schnittebenen wie folgt:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b, \\ & \sum_{i \in \mathcal{N}} d_{ri} x_i \geq 1, \quad \forall r \in \mathcal{I}, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Da die Lösung x_j^k von Problem P_j^k ein Basisvektor ist, gilt $(x_j^k)_i = 0$ für jedes $i \in \mathcal{N}$ und deshalb ist x_j^k kein zulässiger Vektor für (4.34). Als Nächstes schreiben wir (4.34) in Standardform um:

$$\begin{aligned} \min \quad & (c^T, 0) \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+s} \end{pmatrix} \\ \text{u.d.N.} \quad & \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+s} \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

mit $D := (d_{ri})_{\substack{r \in \mathcal{I}, \\ i \in \mathcal{B} \cup \mathcal{N}}}$ wozu wir $d_{ri} := 0 \quad \forall i \in \mathcal{B}$ setzen.

Wegen

$$Dx_j^k = D_{\mathcal{B}}(x_j^k)_{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{N}}(x_j^k)_{\mathcal{N}} = 0 \cdot (x_j^k)_{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{N}} \cdot 0 = 0$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j^k \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir einen zulässigen Punkt gefunden, der die Nebenbedingungen des neuen linearen Programms (4.35) erfüllt, aber leider negative Komponenten besitzt. Deshalb kann er nicht als Startbasisvektor für das Simplex-Verfahren verwendet werden. Allerdings ist es möglich das duale Simplex-Verfahren zu benutzen, da hierfür nur ein Quasi-Basisvektor benötigt wird, vgl Kapitel 3.2.3. Gehen wir also davon aus, dass wir das Problem P_j^k mit der Tableau-Schreibweise des Simplex-Verfahrens, vgl. Kapitel 3.2.2, gelöst haben und als Endresultat folgendes Tableau erhalten haben:

$-c_{\mathcal{B}}^T (x_j^k)_{\mathcal{B}}$	$c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A$
$(x_j^k)_{\mathcal{B}}$	$B^{-1} A$

Als Nächstes erstellen wir dann basierend auf diesem Tableau das Starttableau für das duale Simplex-Verfahren um Problem (4.35) zu lösen:

- Da B eine Basismatrix für das Ausgangsproblem P_j^k ist, bekommen wir für (4.35) die neue Basismatrix

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix}$$

Man beachte dazu: $D_{\mathcal{B}} = 0$ und $\det \bar{B} = (-1)^s \det B \neq 0$. Die Inverse von \bar{B} lautet:

$$\bar{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix}$$

- Für die reduzierten Kosten bekommen wir:

$$[c^T \quad 0] - [c_{\mathcal{B}}^T \quad 0] \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{bmatrix} =$$

$$[c^T \quad 0] - [c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \quad 0] \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{bmatrix} = [c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A \quad 0] \geq 0,$$

denn auf Grund der Optimalität der Lösung x_j^k für das Ausgangsproblem gilt

$$c^T - c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} A \geq 0,$$

vgl. das 1. Abbruchkriterium des Simplex-Verfahrens in Kapitel 3.2.1.

- Das Haupttableau hat folgende Gestalt:

$$\overline{B}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}A & 0 \\ -D & I_s \end{bmatrix}.$$

- Der Basisanteil unseres Quasi-Basisvektors ist: $\begin{bmatrix} (x_j^k)_B \\ -e_s \end{bmatrix}$.
- Die aktuellen Kosten sind: $\begin{bmatrix} c_B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_j^k)_B \\ -e_s \end{bmatrix} = c_B^T (x_j^k)_B$

Dann sieht unser Starttableau wie folgt aus:

$-c_B^T (x_j^k)_B$	$c^T - c_B^T B^{-1}A$	0
$(x_j^k)_B$	$B^{-1}A$	0
$-e_s$	$-D$	I_s

Man beachte, dass jeder Eintrag des Tableaus schon aus dem vorherigen Tableau bekannt ist, oder leicht aus diesen Einträgen bestimmt werden kann, wie z.B. die Matrix D . Mit diesem Tableau können wir nun das duale Simplex-Verfahren starten, vgl. Kapitel 3.2.3.

4.7 Der MPEC-konvexe Fall

In diesem Abschnitt diskutieren wir noch kurz die Erweiterung unseres Branch-and-Bound-Verfahrens auf den MPEC-konvexen Fall.

Die Verzweigungsprozedur bleibt beim MPEC-konvexen Problem analog zum LPEC erhalten. Auch die Bestimmung von oberen und unteren Schranken bleibt im Prinzip gleich. Der Hauptunterschied besteht darin, dass unsere Teilprobleme, die wir in jedem Knoten lösen müssen, anstatt linearer Programme nun (nichtlineare) konvexe Programme sind. Dies hat einige Auswirkungen: Wir können nicht mehr garantieren (selbst bei exakter Arithmetik), dass wir nach endlich vielen Schritten das (globale) Minimum dieser Teilprobleme finden. Außerdem ist es nicht mehr möglich, die vorherige Lösung so effizient wie bei linearen Programmen als Startpunkt für die nachfolgenden Teilprobleme zu benutzen.

Auf der anderen Seite gelten Satz 2.27 und 2.29 auch für den MPEC-konvexen Fall, so dass das Abbruchkriterium von Satz 2.29 auch hier verwendet werden kann. Die komplementären Schnittebenen können allerdings nicht mehr uneingeschränkt benutzt werden, da diese ja sehr stark von der linearen Struktur der Nebenbedingungen abhängen. Deshalb kann diese Technik nur dann weiterhin benutzt werden, wenn alle Nebenbedingungen linear bleiben und nur die Zielfunktion f konvex ist.

Kapitel 5

Numerische Resultate

5.1 Einige Details zur Implementation

Das Verfahren, das im vorigen Abschnitt beschrieben wurde, wurde in Matlab implementiert. Um unsere erste obere Schranke \bar{f}_0 zu erhalten, benutzen wir den SNOPT-Solver von TOMLAB, vgl. [48], der im Zusammenhang mit MPECs ganz brauchbare Ergebnisse liefert. Man beachte, dass dies das einzige nichtlineare Programm ist, welches in unserem gesamten Algorithmus gelöst werden muss. Alle anderen Teilprobleme sind linear, so dass wir für die Lösung dieser das Simplex-Verfahren, vgl. Kapitel 3.2.1, benutzen können. Dies hat insbesondere den Vorteil, dass wir Informationen aus der Lösung von vorherigen Problemen für die Lösung der folgenden linearen Programme viel besser nutzen können, als dies bei Innere-Punkte-Methoden der Fall wäre.

Die linearen Programme, die als Blätter in unserem Baum auftauchen, unterscheiden sich nur wenig voneinander, so dass wir Standardtechniken der linearen Optimierung zur Lösung dieser benutzen können. Insbesondere geschieht das in den folgenden Situationen:

- im Verzweigungsprozess, vgl. Kapitel 4.4.1,
- in der Lösung des linearen Programms um obere Schranken zu erhalten, vgl. Kapitel 4.4.2,
- wenn wir Schnittebenen hinzufügen, vgl. Kapitel 4.6.2.

5.2 LPECs, die sich aus zweistufigen Optimierungsproblemen ergeben

In [42, Kapitel 9.2] sind mehrere (klein-dimensionale) Beispiele für lineare **zweistufige Optimierungsprobleme (Bilevel programs)** gegeben. Ein lineares zweistufiges Optimierungsproblem ist ein Problem folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
& \min_{x, y} && c_1^T x + d_1^T y \\
& \text{u.d.N.} && A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\
& && C_1 x + D_1 y = e_1, \\
& && y \text{ löst} \\
& && \min_y && c_2^T x + d_2^T y \\
& && \text{u.d.N.} && A_2 x + B_2 y \leq b_2, \\
& && && C_2 x + D_2 y = e_2.
\end{aligned}$$

Benutzt man für das Problem in der unteren Ebene die KKT-Bedingungen, vgl. Definition 1.8, so erhält man das folgende LPEC:

$$\begin{aligned}
& \min_{x, y} && c_1^T x + d_1^T y \\
& \text{u.d.N.} && A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\
& && C_1 x + D_1 y = e_1, \\
& && d_2^T + \lambda^T B_2 + \mu^T D_2 = 0, \\
& && A_2 x + B_2 y + s = b_2, \\
& && C_2 x + D_2 y = e_2, \\
& && \lambda^T s = 0, \\
& && \lambda, s \geq 0.
\end{aligned}$$

Wenden wir unser Branch-and-Bound-Verfahren auf die Probleme [42] in der Gestalt von LPECs an, so erhalten wir die Ergebnisse, die in Tabelle 5.1 angegeben sind. Diese Tabelle

Beispiel	f_*	x^*	y^*	i	LP
1	-13	5	(4,2)	1	2
2	-16	4	4	3	6
3	-29.2	(0,0.9)	(0,0.6,0.4,0,0,0)	4	12
4	-37	19	14	2	4
5	-1	0	(0,1)	1	2
6	-49	16	11	2	4
7	-26	(0,0.9)	(0,0.6,0.4)	3	6
8	-3.25	(2,0)	(1.5,0)	2	4
9	3.111	0.889	2.222	3	6
10	$-\infty$	–	–	5	10

Tabelle 5.1: Numerische Ergebnisse für die Testbeispiele von [42]

gibt für jedes Beispiel das Folgende an:

- den optimalen Funktionswert f_* , der von unserem Verfahren gefunden wurde,
- die Lösungen x^* und y^* der Probleme der oberen bzw. unteren Ebene,
- die Ebene i , bis zu welcher wir verzweigen mussten,
- sowie die Anzahl der linearen Programme, die gelöst werden mussten.

Man beachte, dass unsere Ergebnisse für die Beispiele 8 und 10 von denen, die in [42] angegeben sind, abweichen. Daher wollen wir diese genauer betrachten. Sehen wir uns zuerst Beispiel 8 an, welches ursprünglich in [9] auftrat:

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & -2x_1 + x_2 + 0.5y_1 \\ \text{u.d.N.} \quad & x \geq 0, \\ & y \text{ löst} \\ & \min_y \quad -4y_1 + y_2 + x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -2x_1 + y_1 - y_2 \leq -2.5, \\ & x_1 - 3x_2 + y_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -y_1 \leq 0, \\ & -y_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben die Lösung $x = (2, 0)^T, y = (1.5, 0)^T$ gefunden, wobei sowohl [42] als auch [9] behaupten, dass $x = (1, 0)^T, y = (0.5, 1)^T$ das globale Minimum sei. Da unsere Lösung zulässig und der Wert der Zielfunktion geringer ist (-3.25 statt -1.75), ist es gerechtfertigt zu behaupten, dass die Lösung in [42, 9] nicht richtig sein kann. Desweiteren stimmt unsere Lösung auch mit derjenigen aus [89] überein.

Kommen wir nun zu Beispiel 10, welches wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & -2x_1 + x_2 + 0.5y_1 \\ \text{u.d.N.} \quad & y \geq 0, \\ & x \geq 0, \\ & y \text{ löst} \\ & \min_y \quad -4y_1 + y_2 + x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -2x_1 + y_1 - y_2 \leq -2.5, \\ & x_1 - 3x_2 + y_2 \leq 2, \\ & -y_1 \leq 0, \\ & -y_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Die in [42] angegebene Lösung lautet $x = (2, 0)^T, y = (1.5, 0)^T$ und der zugehörige Zielfunktionswert ist -3.25 . Allerdings ist das Problem, so wie es in [42] angegeben ist, nach unten unbeschränkt:

Dazu betrachten wir die Vektoren

$$(x_1, x_2) = \left(t, \frac{t-2}{3} \right)$$

mit $t \geq 2$. Man sieht leicht, dass das innere lineare Programm die Lösung

$$(y_1, y_2) = (2t - 2.5, 0)$$

besitzt, da aus der zweiten Nebenbedingung $y_2 \leq 0$ und damit insgesamt $y_2 = 0$ folgt. Als Konsequenz erhalten wir aus der ersten Nebenbedingung

$$y_1 \leq -2.5 + 2t$$

und die innere Zielfunktion ist genau dann minimal, wenn Gleichheit herrscht. Setzt man diese Ergebnisse nun in die äußere Zielfunktion ein, so ergibt sich:

$$-2x_1 + x_2 + 0.5y_1 = -2t + \frac{t-2}{3} + t - \frac{5}{4} \rightarrow -\infty$$

für $t \rightarrow \infty$.

5.3 Weitere klein-dimensionale Beispiele

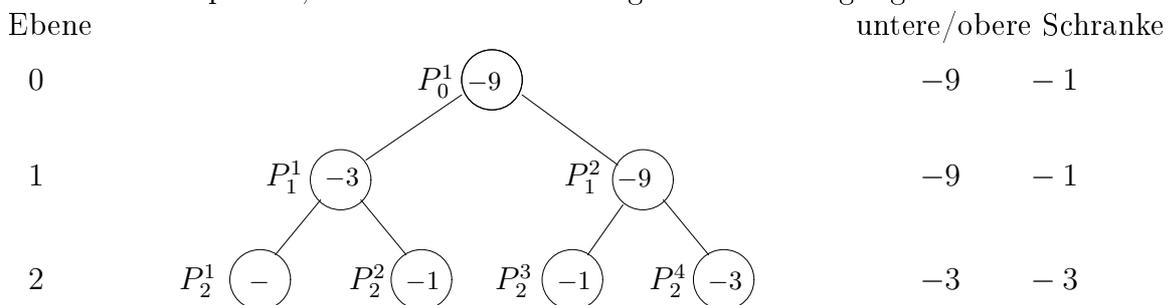
Hier geben wir eine Klasse von Beispielen aus [16] an, die den Effekt der Schnittebenen demonstrieren sollen.

Beispiel 5.1 Betrachte das lineare zweistufige Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & L(x, y) = -\sum_{k=1}^3 x_k + \sum_{k=1}^3 y_k \\ \text{u.d.N.} \quad & -y \leq 0 \\ & 1 \leq x_k \leq 3, \quad k = 1, \dots, 3, \\ & y \text{ löst} \\ & \min \quad -\sum_{k=1}^3 y_k \\ \text{u.d.N.} \quad & x_k + y_k \leq p_k, \quad k = 1, \dots, 3, \\ & -2x_k + y_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, 3, \end{aligned} \tag{5.1}$$

welches man aus [16] erhält, indem man $n_x = n_y = 3$ setzt, die additive Konstante $3n_x$ in der Zielfunktion ignoriert und die zusätzliche Ungleichung $y \geq 0$ hinzufügt. Desweiteren setzen wir $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 9$. In diesem Fall ist der optimale Funktionswert $f_* = -3$, vgl. [16].

Wenden wir unser Branch-and-Bound-Verfahren (inklusive Schnittebenen, vgl. Kapitel 4.6) auf dieses Beispiel an, so erhalten wir den folgenden Verzweigungsbaum:

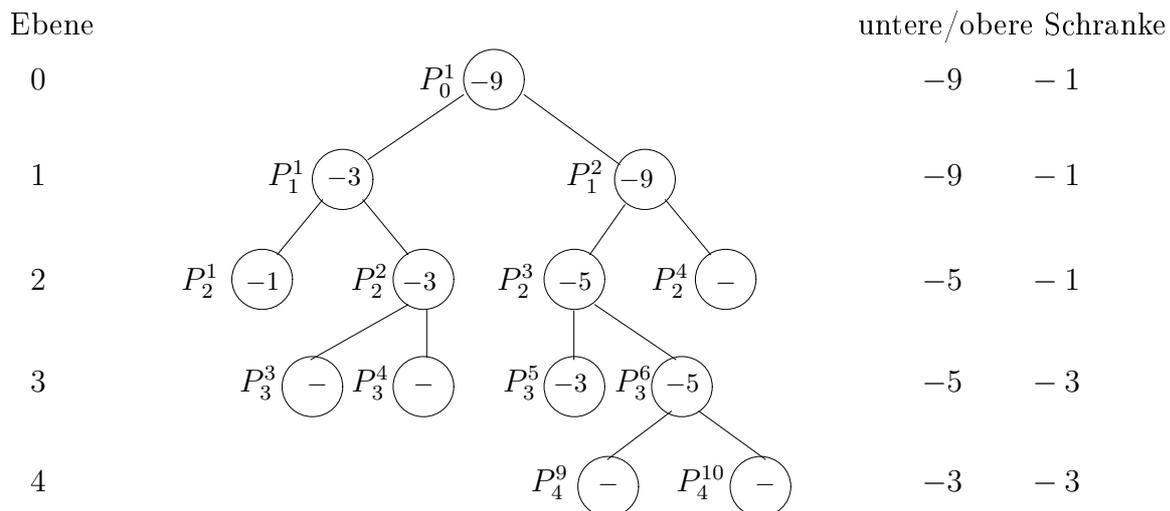


In jedem Blatt ist der optimale Zielfunktionswert der Lösung von P_j^k angegeben. Ein $-$ bedeutet, dass das Problem nicht zulässig ist. Wenden wir unser Verfahren andernfalls ohne

n_x	n_y	p	f_*	x^*	y^*	i_1	LP_1	i_2	LP_2
1	1	3	-3	3	0	1	2	1	2
1	1	5	-1	3	2	3	6	3	6
1	1	7	1	1	2	3	6	3	6
1	1	8	1	1	2	3	6	3	6
1	1	9	1	1	2	3	6	3	6
3	3	(3, 5, 7)	-3	(3, 3, 1)	(0, 2, 2)	3	8	5	14
4	4	(3, 5, 7, 9)	-2	(3, 3, 1, 1)	(0, 2, 2, 2)	4	14	7	30
5	5	(3, 5, 7, 8, 9)	-1	(3, 3, 1, 1, 1)	(0, 2, 2, 2, 2)	4	16	9	62
6	6	(3, 4, 5, 7, 8, 9)	-3	(3, 3, 3, 1, 1, 1)	(0, 1, 2, 2, 2, 2)	4	14	10	90
4	6	(3, 4, 5, 7)	-5	(3, 3, 3, 1)	(0, 1, 2, 2, 0, 0)	3	8	6	22
6	4	(5, 9, 3, 6)	-9	(3, 1, 3, 3, 3, 3)	(2, 2, 0, 3)	4	14	7	28
10	8	(7, 5, 8, 3, 4, 7, 6, 9)	-8	(1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3)	(2, 2, 2, 0, 1, 2, 3, 2)	4	16	13	318

Tabelle 5.2: Numerische Resultate für einige Beispiele aus [16]

Schnittebenen an, so sieht der Verzweigungsbaum wie folgt aus:



Obwohl das Problem ziemlich klein-dimensionale ist, so folgt, dass die Anzahl zu lösender linearer Programme im Fall mit Schnittebenen deutlich niedriger ist. Darüber hinaus können wir schon viel früher abbrechen (nach der 2. Ebene anstatt der 4. Ebene). \diamond

Als Nächstes präsentieren wir einige weitere Ergebnisse, die wir aus den Beispielen von [16] erhalten haben. Wir benutzen diese Beispiele erneut, um die Unterschiede zwischen unseren beiden Versionen zu demonstrieren. Dabei benutzt Version 1 die Schnittebenen-Strategie und Version 2 ist unser Verfahren ohne Schnittebenen. Tabelle 5.2 enthält die zugehörigen Ergebnisse, wobei

- n_x, n_y die Dimension der x, y -Variablen angibt,
- p die rechte Seite der Nebenbedingungen in (5.1) ist,
- f_* den optimalen Funktionswert angibt, der von unserer Methode gefunden wurde,

- x_*, y_* die optimalen Lösungen für das innere/äußere Programm sind,
- i_1, i_2 die höchste Ebene bezeichnet, bis zu welcher wir in unseren beiden Versionen gehen mussten und
- LP_1, LP_2 die Anzahl an linearen Programmen angibt, die durch Version1/Version2 gelöst werden mussten.

Auch bei diesen Ergebnissen sieht man deutlich die Tendenz, dass die Anzahl zu lösender linearer Programme im Fall mit Schnittebenen oft deutlich niedriger ist.

5.4 LPECs, die sich aus dem Risikowert - Optimierungsproblem ergeben

Das Risikowert-Optimierungsproblem ergibt sich im Bereich der finanziellen Risiko-Analyse. Das Paper [76] enthält für dieses Problem eine LPEC-Formulierung und gibt eine Branch-and-Bound artige Methode an um das globale Minimum zu finden, indem die besondere Struktur des Problems ausgenutzt wird. Wir verwenden das in [76] angegebene Problem (bzw. die Klasse von Problemen) als ein Testbeispiel (bzw. Testbeispiele) für unser Verfahren. Die (Klasse von) Beispiele, die in [76] betrachtet werden, lauten wir folgt:

Beispiel 5.2 Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll}
 \min & m \\
 \text{u.d.N.} & x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1, \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq f, \\
 & \left. \begin{array}{l}
 \tau_j \geq 0, \frac{p_j}{1-\beta} - \lambda_j \geq 0, \\
 \tau_j \left(\frac{p_j}{1-\beta} - \lambda_j \right) = 0, \\
 \lambda_j \geq 0, m + \tau_j - x^T y^j \geq 0, \\
 \lambda_j (m + \tau_j - x^T y^j) = 0,
 \end{array} \right\} j = 1, \dots, k, \\
 & \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,
 \end{array}$$

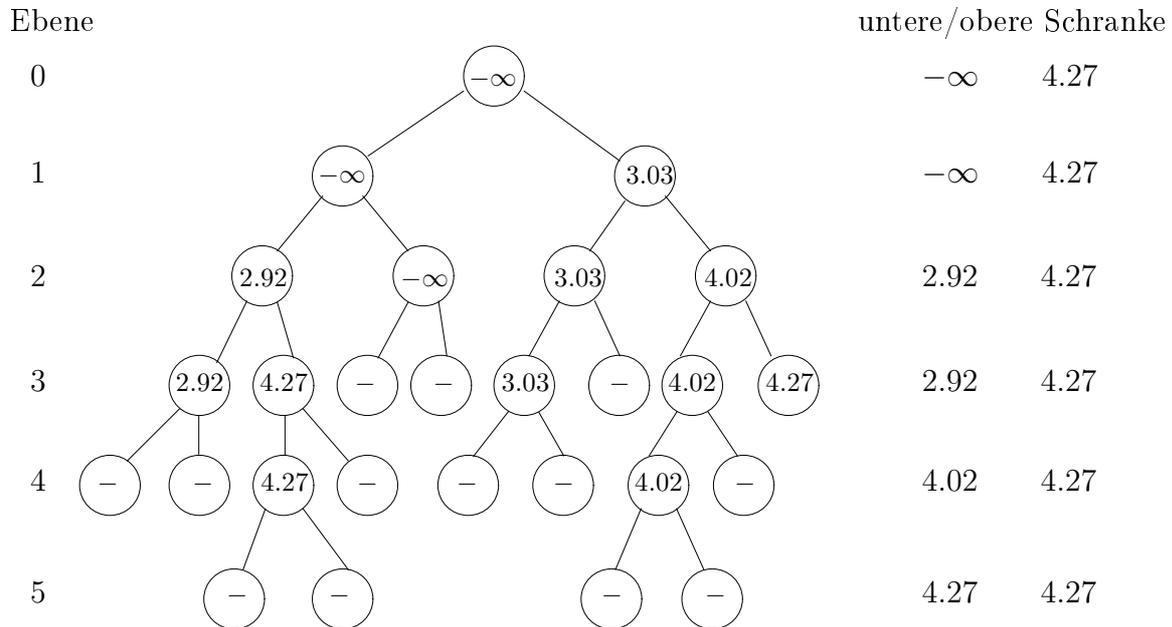
mit $n = 3, k = 27, r = (-1/3, 2/3, -1), f = 1/10, \beta = 0.9, p_j = 1/27$ für alle j . Desweiteren seien die Vektoren y^j wie folgt erzeugt: Es sei

$$\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(d.h. d^i ist die i -te Zeile der Matrix auf der rechten Seite). Dann definieren wir für alle möglichen Kombinationen von $j_1, j_2, j_3 \in \{1, 2, 3\}$ die $3^3 = 27$ Vektoren y^j , wobei $j = 9(j_1 - 1) + 3(j_2 - 1) + j_3$ gelte, wie folgt:

$$y^j := (d_{j_1}^1, d_{j_2}^2, d_{j_3}^3)^T.$$

Für dieses Problem haben wir mit unserem Verfahren dann folgenden Verzweigungsbaum erhalten:



◇

Indem man die Matrix $d = (d^1; d^2; d^3)$ zufällig ändert, erhalten wir andere Varianten des obigen Beispiels. Die Ergebnisse einiger dieser Varianten sind in Tabelle 5.3 angegeben. Erneut betrachten wir die zwei Versionen unserer Methode, Version 1 mit Schnittebenen und Version 2 ohne diese. In Tabelle 5.3 gilt:

- Die Spalten i_1, i_2 bzw. LP_1, LP_2 geben das höchste Level bzw. die Anzahl linearer Programme, die jeweils von Version1/Version2 gelöst werden mussten, an.
- f_* ist der optimale Zielfunktionswert, den wir gefunden haben.
- Desweiteren wird in der ersten Spalte noch die Matrix d angegeben.

Auch hier ist die Tendenz zu erkennen, dass die Methode mit Schnittebenen früher (im Sinne von: weniger Ebenen werden durchlaufen) eine Lösung findet.

5.5 LPECs aus dem Misclassification Minimization Problem

Das Problem, zwei Punkt Mengen \mathcal{A} und \mathcal{B} im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n zu trennen, bezeichnet man als **Misclassification Minimization** (vergleiche, z.B., [64]). Falls die beiden Mengen, die durch die $m \times n$ und $k \times n$ Matrizen A und B repräsentiert werden, disjunkte konvexe Hüllen besitzen, können sie durch die Ebene

$$w^T x = \gamma$$

d	i_1	LP_1	i_2	LP_2	f_*
$(-8, -9, 3; 9, 6, 5; -1, -1, -10)$	6	24	6	24	3.81474
$(8, 0, 7; -10, 8, 8; 7, 9, -7)$	6	20	9	30	7.84545
$(-1, -3, 8; -5, 6, -3; -10, 2, 5)$	5	22	6	32	3.84666
$(1, -8, -2; -4, 4, 3; -3, -9, -1)$	6	28	10	50	3.81474
$(-4, 1, 4; 1, -2, 0; 2, 2, 9)$	4	8	4	8	1.00000
$(2, 1, -6; -4, 9, -1; 1, -10, 2)$	6	28	8	40	4.72924
$(5, 2, 4; -3, 7, -6; -7, 2, -8)$	6	32	9	44	4.57142
$(-8, 4, 4; -8, 8, -9; -6, 5, 9)$	7	34	11	70	5.73332
$(-2, 4, 4; 2, 3, -2; 2, -9, -9)$	5	26	6	28	2.20625
$(-5, 6, -4; -2, 7, 10; -5, 4, 0)$	7	30	13	48	6.12142
$(1, -8, -9; 7, 7, -3; -5, -9, -7)$	5	18	6	36	2.39998
$(-8, 2, 5; -6, -9, -2; 2, 0, 10)$	4	14	4	14	-2.00000
$(8, 1, 10; 8, 7, -6; -7, 5, -8)$	5	26	7	54	6.61489
$(-1, 4, 3; 4, 7, -4; 5, 6, 0)$	6	30	6	32	5.15216
$(-1, -4, 4; -7, -5, -10; -3, 9, 3)$	4	14	4	14	-5.00000

Tabelle 5.3: Numerische Resultate für LPECs, die sich aus dem Risikowert-Optimierungsproblem ergeben

strikt getrennt werden. Äquivalent dazu ist es, einen Vektor w und ein Skalar γ mit

$$Aw - e\gamma - e \geq 0, \quad -Bw + e\gamma - e \geq 0,$$

zu finden, wobei e der Vektor entsprechender Dimension sei, der aus lauter Einsen bestehe. Falls die Trennung der beiden Mengen nicht möglich ist, kann man immerhin noch die Anzahl fehlklassifizierter Punkte minimieren:

$$\min_{w, \gamma} e^T(-Aw + e\gamma + e)_* + e^T(Bw - e\gamma + e)_*.$$

Dabei sei $(\cdot)_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Stufenfunktion, die durch

$$(x)_* = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert ist. Wie in [64] gezeigt wird, ist dieses Problem äquivalent zu folgendem LPEC:

$$\begin{array}{ll} \min_{x, y} & er + es \\ \text{u.d.N.} & u + Aw - e\gamma - e \geq 0, \quad v - Bw + e\gamma - e \geq 0, \\ & r \geq 0, \quad s \geq 0, \\ & r(u + Aw - e\gamma - e) = 0, \quad s(v - Bw + e\gamma - e) = 0, \\ & -r + e \geq 0, \quad -s + e \geq 0, \\ & u \geq 0, \quad v \geq 0, \\ & u(-r + e) = 0, \quad v(-s + e) = 0. \end{array}$$

$ T_A $	$ T_B $	$ F_A $	$ F_B $	%
10	10	15	25	5.8%
20	20	8	19	4.0%
50	50	24	8	4.7%
70	70	10	10	2.9%
100	50	11	15	3.8%
100	100	13	1	2.1%
130	50	5	20	3.7%
120	70	7	17	3.5%
110	80	14	3	2.5%

Tabelle 5.4: Numerische Resultate für das Misclassification Minimization Problem unter Verwendung verschiedener Trainingsmengen

Das Beispiel, das in diesem Abschnitt betrachtet wird (und schon in zahlreichen früheren Papers benutzt wurde, vgl. z.B. [66, 67]) ist der Wisconsin Breast Cancer Datenbank entnommen, vgl. [68], und besteht aus 682 Vektoren, von denen 443 gutartig und 239 bösartig sind. Jeder Vektor besteht aus 9 Komponenten. Wie schon oben erwähnt, müssen wir eine Ebene finden, die diese beiden Mengen trennt. Dies ist für die gegebenen Vektoren nicht vollständig möglich. Unser Ziel ist es daher, eine Ebene zu finden, die die Anzahl an fehlklassifizierten Punkten minimiert. Deshalb ist es sinnvoll das oben angesprochene LPEC zu lösen. Wendet man unseren Algorithmus an, dann erhält man folgende Ebene als Lösung (bei Betrachtung aller 682 Vektoren):

$$w = \begin{pmatrix} -0.0703 \\ -0.0923 \\ -0.0234 \\ -0.0344 \\ 0.0211 \\ -0.0608 \\ 0.0220 \\ -0.0527 \\ -0.0602 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma = -1.1226.$$

Für diese (optimale) Ebene sind 7 der gutartigen und 3 der bösartigen Daten fehlklassifiziert. Dies ist nur ein Prozentsatz von $10/682 = 1.5\%$. Leider hat es sehr sehr lange gedauert um diese Lösung des LPECs zu bestimmen, da die Lösung erst in Ebene 26 gefunden wurde. Bis zu diesem Zeitpunkt mussten 3,173,471 lineare Programme gelöst werden. Auf der anderen Seite, wenn man berücksichtigt, dass der Baum bis Ebene 26 aus $2^{27} - 1 = 134,217,727$ Knoten besteht, ist die obige Zahl gar nicht so schlecht. Der vollständige Verzweigungsbaum besteht sogar aus $2^{1265} - 1$ Knoten! Als Nächstes haben wir noch zufällige Trainingsmengen T_A und T_B als Teilmengen von A und B genommen. Mit der berechneten optimalen Ebene für die Trainingsmengen haben wir dann überprüft,

wie die ursprüngliche Datenmenge getrennt wurde. Tabelle 5.4 enthält die zugehörigen Ergebnisse, wobei folgendes gilt:

- $|T_A|$ bzw. $|T_B|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der Trainingsmenge der gutartigen und bösartigen Daten.
- $|F_A|$ bzw. $|F_B|$ geben die Anzahl der verbleibenden Daten, die in der falschen Halbebene liegen, an.
- Schließlich geben wir in der letzten Spalte den Prozentsatz an fehlklassifizierten Punkten an.

Teil III

Globale Konvergenz eines Filter-SQPEC-Verfahrens für MPECs

Kapitel 6

Das Filter-SQPEC-Verfahren

In diesem Kapitel wird ein Filter-Verfahren vorgestellt, welches die Idee des Filter-SQP-Verfahrens von Fletcher, Leyffer und Toint, vgl. [36, 40, 41] aufgreift. Da der Konvergenzsatz von Fletcher et al. für allgemeine nichtlineare Programme der Form (1.1) geschrieben ist und als Voraussetzung MFCQ benötigt, kann dieses Verfahren nicht ohne weiteres auf MPECs angewendet werden und muss deshalb modifiziert werden.

Da man bei dem hier vorgestellten Filter-Verfahren in jedem Iterationsschritt ein QPEC als Teilproblem zu lösen hat (bei Fletcher et al. war dies noch ein quadratisches Programm), sprechen wir von **Filter Sequential Quadratic Programming with Equilibrium Constraints**, kurz **Filter-SQPEC-Verfahren**.

Wir werden in Satz 6.1 sehen, dass wir einen M-stationären Punkt x erhalten, falls das Verfahren mit der Lösung $d = 0$ für das zugehörige Teilproblem abbricht. Ist zusätzlich für x die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt, so bricht das Verfahren in diesem Fall mit einem stark stationären Punkt ab. In allen anderen Fällen (in denen nicht mit einer Lösung $d = 0$ eines Teilproblems abgebrochen wird) erhalten wir unter der MPEC-MFCQ-Bedingung zumindest einen A-stationären Punkt als Häufungspunkt, vgl. den Konvergenzsatz 7.6.

6.1 Allgemeine Einführung in das Verfahren

Hauptbestandteil unseres Algorithmus ist ein QPEC, das von der aktuellen Iterierten x und dem Trust-Region-Radius ρ abhängt:

$$\text{QPEC}(x, \rho) \left\{ \begin{array}{ll} \min & q(d) := f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B d \\ \text{u.d.N.} & \begin{array}{ll} g_i(x) + \nabla g_i(x)^T d & \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) + \nabla h_i(x)^T d & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d & \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ (G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d) (H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d) & = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \|d\|_\infty & \leq \rho. \end{array} \end{array} \right.$$

Tatsächlich hängt das QPEC auch von der Matrix B ab, an die wir später noch die Forderung der positiven Definitheit stellen werden. In unserem Konvergenzbeweis spielt diese Matrix allerdings nur eine untergeordnete Rolle. Deshalb haben wir dies auch in der Notation nicht explizit kenntlich gemacht. Es sei hier aber auch noch mal ausdrücklich erwähnt, dass man im Falle $B = 0$ ein LPEC erhält. Warum dieses Teilproblem so enorme Bedeutung hat, wird durch den folgenden Satz ersichtlich. Er besagt, dass wenn $d^* = 0$ eine Lösung des QPECs (x, ρ) ist, dann ist x zumindest ein M-stationärer Punkt:

Satz 6.1 *Ist $d^* = 0$ ein lokales Minimum des QPECs (x, ρ) , dann ist x ein M-stationärer Punkt des MPECs (1). Gilt für x zusätzlich die MPEC-LICQ-Bedingung, dann ist x ein stark stationärer Punkt des MPECs (1).*

Beweis. Sei 0 ein lokales Minimum des QPECs (x, ρ) . Wie man leicht sieht, ist x dann zulässig für das MPEC (1). Wir bezeichnen im Folgenden die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des QPECs wie folgt:

$$\begin{aligned}\bar{f}(d) &:= f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B d, \\ \bar{g}_i(d) &:= g_i(x) + \nabla g_i(x)^T d, & \forall i = 1, \dots, m, \\ \bar{h}_i(d) &:= h_i(x) + \nabla h_i(x)^T d, & \forall i = 1, \dots, p, \\ \bar{G}_i(d) &:= G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \bar{H}_i(d) &:= H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d, & \forall i = 1, \dots, \ell.\end{aligned}$$

Dabei lassen wir die Nebenbedingung $\|d\|_\infty \leq \rho$ weg, da sie für $d = 0$ nicht aktiv ist und damit alle auftretenden Lagrange-Multiplikatoren 0 sind. Desweiteren beachte man noch, dass die Indexmengen $\mathcal{I}_g(x), \alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ des MPECs (1) mit den Indexmengen $\mathcal{I}_{\bar{g}}(0), \alpha(0), \beta(0), \gamma(0)$ des QPECs übereinstimmen. Wie man sofort sieht, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}\nabla \bar{f}(0) &= \nabla f(x), \\ \nabla \bar{g}_i(0) &= \nabla g_i(x), & \forall i = 1, \dots, m, \\ \nabla \bar{h}_i(0) &= \nabla h_i(x), & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla \bar{G}_i(0) &= \nabla G_i(x), & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \nabla \bar{H}_i(0) &= \nabla H_i(x), & \forall i = 1, \dots, \ell.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Da jedes QPEC insbesondere ein MPAEC ist, vgl. Definition 2.24, gilt für 0 die MPEC-ACQ-Bedingung, vgl. Satz 2.25. Aus MPEC-ACQ folgt MPEC-GCQ, vgl. Korollar 2.10, also ist 0 nach Satz 2.19 ein M-stationärer Punkt des QPECs, d.h. es existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla \bar{f}(0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla \bar{g}_i(0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla \bar{h}_i(0) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla \bar{G}_i(0) + \lambda_i^H \nabla \bar{H}_i(0)] \\ \lambda_\alpha^G &\text{ frei,} & (\lambda_i^G > 0 \wedge \lambda_i^H > 0) \vee \lambda_i^G \lambda_i^H = 0, & \forall i \in \beta, & \lambda_\alpha^G = 0, \\ \lambda_\gamma^H &\text{ frei,} & & & \lambda_\alpha^H = 0 \\ \bar{g}(0) &\leq 0, & \lambda^g \geq 0, & (\lambda^g)^T \bar{g}(0) = 0.\end{aligned}$$

Wegen (6.1) ist dies aber äquivalent dazu, dass Lagrange-Multiplikatoren existieren mit

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)]$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & \quad (\lambda_i^G > 0 \wedge \lambda_i^H > 0) \vee \lambda_i^G \lambda_i^H = 0, \quad \forall i \in \beta, & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & & \lambda_{\alpha}^H = 0, \\ g(x) \leq 0, \quad \lambda^g \geq 0, \quad (\lambda^g)^T g(x) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist x ein M-stationärer Punkt des MPECs (1), vgl. Definition 2.18.

Genügt x zusätzlich der MPEC-LICQ-Bedingung bzgl. des MPECs (1), dann sind die folgenden Gradienten linear unabhängig:

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x) &= \nabla \bar{g}_i(0), & \forall i \in \mathcal{I}_g \\ \nabla h_i(x) &= \nabla \bar{h}_i(0), & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x) &= \nabla \bar{G}_i(0), & \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x) &= \nabla \bar{H}_i(0), & \forall i \in \beta \cup \gamma. \end{aligned}$$

Also genügt 0 der MPEC-LICQ-Bedingung bzgl. des QPECs (x, ρ) . Nach Satz 2.17 ist 0 dann ein stark stationärer Punkt des QPECs, d.h. es existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$, so dass $(0, \lambda)$ die Bedingungen

$$0 = \nabla \bar{f}(0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla \bar{g}_i(0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla \bar{h}_i(0) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla \bar{G}_i(0) + \lambda_i^H \nabla \bar{H}_i(0)]$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & \quad \lambda_{\beta}^G \geq 0, & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & \quad \lambda_{\beta}^H \geq 0, & \lambda_{\alpha}^H = 0, \\ \bar{g}(0) \leq 0, & \quad \lambda^g \geq 0, & (\lambda^g)^T \bar{g}(0) = 0, \end{aligned}$$

erfüllt. Erneut wegen (6.1) ist dies äquivalent dazu, dass Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ existieren mit,

$$0 = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^g \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{\ell} [\lambda_i^G \nabla G_i(x) + \lambda_i^H \nabla H_i(x)]$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha}^G \text{ frei,} & \quad \lambda_{\beta}^G \geq 0, & \lambda_{\gamma}^G = 0, \\ \lambda_{\gamma}^H \text{ frei,} & \quad \lambda_{\beta}^H \geq 0, & \lambda_{\alpha}^H = 0, \\ g(x) \leq 0, & \quad \lambda^g \geq 0, & (\lambda^g)^T g(x) = 0, \end{aligned}$$

folglich ist x ein stark stationärer Punkt des MPECs (1), vgl. Definition 2.14. □

Tritt dieser Fall nicht ein und ist 0 keine Lösung des QPECs (x, ρ) , dann hat man mehrere Möglichkeiten:

Man kann z.B. als neue Iterierte den Punkt $x + d^*$ betrachten und dann versuchen das QPEC $(x + d^*, \rho)$ zu lösen, oder ähnlich wie bei den klassischen Trust-Region-Verfahren der unrestringierten Optimierung, den Trust-Region-Radius ρ verändern.

Bevor wir zu den Details des Algorithmus kommen, zunächst noch ein paar Notationen und Definitionen:

Im Folgenden bezeichne d^k die globale Lösung (sofern sie existiert) des QPECs(x^k, ρ), wobei x^k die aktuelle Iterierte sei. Desweiteren sei

$$\Delta q := q(0) - q(d^k) = -\nabla f(x^k)^T d^k - \frac{1}{2} d^{kT} B d^k \quad (6.2)$$

die **vorhergesagte Reduktion** und

$$\Delta f := f(x^k) - f(x^k + d^k) \quad (6.3)$$

die **tatsächliche Reduktion**.

Bei den Trust-Region-Verfahren in der unrestringierten Optimierung benutzt man das Kriterium

$$\Delta f \geq \sigma \Delta q, \quad (6.4)$$

mit $\sigma \in (0,1)$ nahe bei Eins, um zu überprüfen, ob der Schritt erfolgreich war. Dabei ist $\Delta q > 0$, falls x noch kein stationärer Punkt war. In einem NLP Algorithmus kann es allerdings durchaus vorkommen, dass Δq negativ oder Null ist. Deshalb wird das Kriterium in unserem Algorithmus nur angewendet, falls Δq positiv ist.

Als Maß für die Zulässigkeit eines Punktes x für das MPEC (1) wählen wir die Größe:

$$\begin{aligned} c(x) &:= \|\max\{0, g(x)\}\|_1 + \|h(x)\|_1 + \|\min\{G(x), H(x)\}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{i=1}^p |h_i(x)| + \sum_{i=1}^{\ell} |\min\{G_i(x), H_i(x)\}|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Offensichtlich gilt:

$$x \text{ ist zulässig für das MPEC (1)} \iff c(x) = 0.$$

Ist x^k ein durch das Verfahren erzeugter Punkt, so setzen wir häufig:

$$f^k := f(x^k),$$

bzw.

$$c^k := c(x^k).$$

Damit kommen wir nun zum zentralen Begriff für die Filter-Verfahren, vgl. [36]:

Definition 6.2 Ein Vektor $x^k \in \mathbb{R}^n$ **dominiert** einen zweiten Vektor x^l , wenn sowohl

$$c(x^k) \leq c(x^l) \quad \text{als auch} \quad f(x^k) \leq f(x^l)$$

gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, sagt man auch, dass das Paar $(c(x^k), f(x^k))$ das Paar $(c(x^l), f(x^l))$ **dominiert**.

Ein Vektor $x^k \in \mathbb{R}^n$ dominiert folglich einen zweiten Vektor x^l genau dann, wenn sowohl der Zielfunktionswert als auch die Verletzung der Nebenbedingung in x^k kleiner (oder zumindest gleich) als in x^l ist. Deshalb ist der Punkt x^k aus Sicht der Optimierung der bessere Punkt und wir können bei den weiteren Untersuchungen auf x^l vollständig verzichten. Kommen wir nun zum Begriff des Filters, vgl. [36], der genau das tut: er berücksichtigt nur die "besseren" Punkte:

Definition 6.3 *Ein Filter ist eine Liste von Paaren (c^j, f^j) , so dass kein Paar ein anderes dominiert. Wir schreiben in der k -ten Iteration:*

$$\mathcal{F}_k = \{j \in \{1, \dots, k-1\} | (f^j, c^j) \text{ ist ein Eintrag aus dem Filter}\}. \quad (6.6)$$

Wenn ein Vektor x^j zum Filter gehört, bzw. $j \in \mathcal{F}_k$ gilt, so besitzt er also einen kleineren Zielfunktionswert oder hat eine bessere Zulässigkeit als jeder andere Punkt aus dem Filter. Ursprünglich hieß ein Paar $(c(x), f(x))$, bzw. der Punkt x **akzeptabel**, wenn für alle Paare (c^j, f^j) aus dem Filter

$$c(x) < c(x^j) \quad \text{oder} \quad f(x) < f(x^j) \quad (6.7)$$

galt, wenn $(c(x), f(x))$ also durch kein Paar aus dem Filter dominiert wurde, vgl. [36].

Für den Beweis unseres globalen Konvergenzsatzes ist die Akzeptanz-Regel (6.7) nicht ausreichend, da man in der Zielfunktion oder in der Zulässigkeit eine hinreichende Verbesserung benötigt. Ansonsten könnte es zu Häufungen in der Umgebung eines Punktes mit $c^j > 0$ kommen. Dieses Problem wurde auch schon bei Fletcher und Leyffer [36] korrigiert. Sie schlagen eine Hülle um den aktuellen Filter vor, in der keine Punkte akzeptiert werden. Eine ähnliche Lösung wurde von Fletcher, Leyffer und Toint in ihrem Paper über die globale Konvergenz eines SLP-Filter Algorithmus vorgeschlagen, vgl. [40]. Dort ist ein Punkt x zum aktuellen Filter (beschrieben durch die Indexmenge \mathcal{F}_k) akzeptabel, falls für das Paar $(c(x), f(x))$

$$c(x) \leq \beta c(x^j) \quad \text{oder} \quad f(x) \leq f(x^j) - \gamma c(x^j) \quad (6.8)$$

für alle $j \in \mathcal{F}_k$ gilt, wobei $0 < \gamma < \beta < 1$ sei und γ nahe bei Null, sowie β nahe bei Eins liege. Bei diesem Test gibt es allerdings ein weiteres Problem, vgl. das später folgende Beispiel. Deshalb definieren wir den Begriff "akzeptabel" wie folgt, vgl. [41]:

Definition 6.4 *Ein Paar $(c(x), f(x))$, bzw. der Punkt x heißt **akzeptabel**, wenn für alle Paare $(c(x^j), f(x^j))$ aus dem Filter*

$$c(x) \leq \beta c(x^j) \quad \text{oder} \quad f(x) + \gamma c(x) \leq f(x^j) \quad (6.9)$$

gilt, wobei $0 < \gamma < \beta < 1$ sei und γ nahe bei Null, sowie β nahe bei Eins liege.

Wir sagen, ein Punkt x wird in den Filter aufgenommen bzw. dem Filter hinzugefügt, wenn das akzeptable Paar $(c(x), f(x))$ zu den Paaren aus der Liste des Filters hinzugefügt wird und alle Paare des Filters, die von dem neuen Paar dominiert werden, aus dem Filter gestrichen werden.

Zusätzlich sagen wir, dass ein Paar $(c(x), f(x))$ zu einem anderen Paar $(c(x'), f(x'))$ akzeptabel ist, falls folgendes gilt:

$$c(x) \leq \beta c(x') \quad \text{oder} \quad f(x) + \gamma c(x) \leq f(x'). \quad (6.10)$$

Abbildung 6.1 demonstriert den akzeptablen Bereich eines Filters.

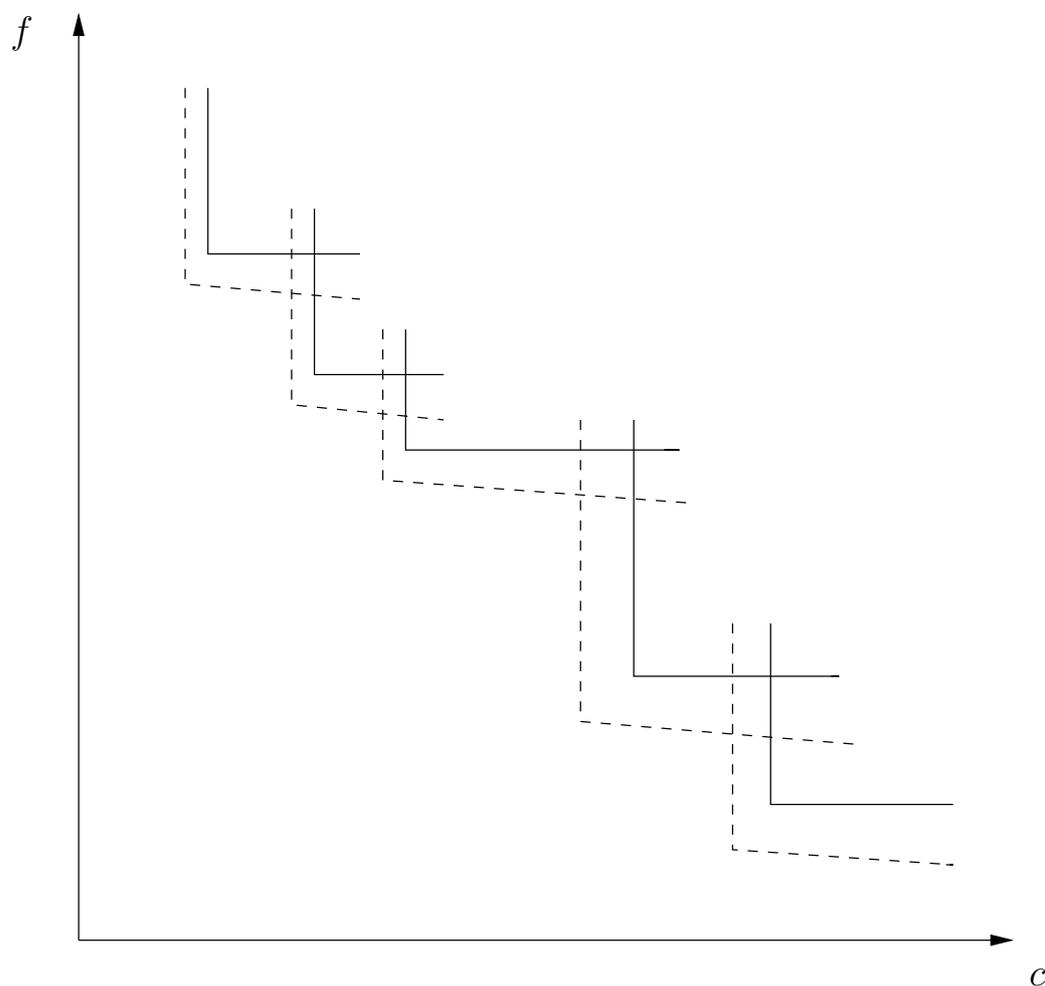


Abbildung 6.1: Ein Filter mit Hülle

Bemerkung 6.5 Der Vorteil von (6.9) gegenüber (6.8) liegt in der **Inklusion Property**, wie es im Originaltext von Fletcher, Leyffer, Toint [41] heißt: Wenn ein Paar $(c(x), f(x))$ dem Filter hinzugefügt wird, dann enthält die Menge der unakzeptablen Punkte des neuen Filters stets die Menge der unakzeptablen Punkte des vorherigen Filters, bzw. anders ausgedrückt, die Menge der akzeptablen Punkte des neuen Filters ist eine Teilmenge der des alten Filters.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass ein Paar unakzeptabel bleibt, wenn ein neues Paar dem Filter hinzugefügt wird. Sei deshalb (c^r, f^r) ein Paar im unakzeptablen Bereich, d.h. es gibt ein Paar (c^j, f^j) im Filter, so dass

$$c^r > \beta c^j \quad \text{und} \quad f^r + \gamma c^r > f^j \quad (6.11)$$

gilt. Als Nächstes werde ein neues akzeptables Paar (c^k, f^k) in den Filter aufgenommen. Bleibt das Paar (c^j, f^j) im Filter, so liegt (c^r, f^r) auch weiterhin im unakzeptablen Bereich, d.h. hier gilt die Aussage. Nehmen wir also an, dass das Paar (c^k, f^k) das Paar (c^j, f^j) dominiere und das Paar (c^j, f^j) deshalb aus dem Filter gestrichen wird, insbesondere gilt folglich:

$$c^k \leq c^j \quad \text{und} \quad f^k \leq f^j. \quad (6.12)$$

Dann ergibt sich

$$c^r \stackrel{(6.11)}{>} \beta c^j \stackrel{(6.12)}{\geq} \beta c^k$$

und

$$f^r + \gamma c^r \stackrel{(6.11)}{>} f^j \stackrel{(6.12)}{\geq} f^k,$$

d.h. das Paar (c^r, f^r) liegt auch weiterhin im unakzeptablen Bereich. \square

Dies ist bei (6.8) nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 6.6 Es sei $\beta = 0.9$ und $\gamma = 0.1$. Der Filter bestehe aus dem Eintrag $(3, 1)$. Dann liegt das Paar $(3, 0.8)$ im Sinne von (6.8) im unakzeptablen Bereich, denn es gilt sowohl $3 > 2.7 = \beta \cdot 3$, als auch $0.8 > 0.7 = 1 - \gamma \cdot 3$, und folglich ist es nicht akzeptabel zum Paar $(3, 1)$. Fügt man nun das akzeptable Paar $(1, 1)$ zum Filter hinzu, so wird der vorherige Eintrag gestrichen und der Filter besteht nur noch aus dem Paar $(1, 1)$. Nun liegt aber der Punkt $(3, 0.8)$ im akzeptablen Bereich, da jetzt $0.8 \leq 0.9 = 1 - \gamma \cdot 1$ gilt.

Offensichtlich erzielt man durch die linke Ungleichung in (6.9) eine hinreichende Verringerung von c . Analog erhält man durch die rechte Ungleichung eine hinreichende Verringerung des Zielfunktionswertes f . Das folgende Lemma und das Korollar zeigen, dass durch diese Definitionen c^k gegen Null konvergiert und damit Richtung Zulässigkeit für das MPEC (1). Dabei ist das Lemma ganz allgemein gehalten und gilt für beliebige Folgen, nicht nur für welche, die durch den Algorithmus erzeugt werden. Man findet beide auch in [41]. Der leicht modifizierte Beweis ist hier aus Gründen der Vollständigkeit dennoch angegeben.

Lemma 6.7 *Es seien beliebige Folgen $\{c^k\}$ und $\{f^k\}$ gegeben, so dass $c^k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte und f^k monoton fallend und beschränkt sei. Desweiteren gebe es Konstanten β und γ mit $0 < \gamma < \beta < 1$ und es gelte für alle k*

$$c^{k+1} \leq \beta c^k \quad \text{oder} \quad f^k - f^{k+1} \geq \gamma c^{k+1}.$$

Dann gilt $c^k \rightarrow 0$.

Beweis. Falls ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$c^{k+1} \leq \beta c^k$$

für alle $k \geq K$ gilt, dann konvergiert c^k gegen 0.

Andernfalls gibt es eine Teilfolge \mathcal{S} , auf der

$$f^k - f^{k+1} \geq \gamma c^{k+1} \quad (6.13)$$

für alle $k \in \mathcal{S}$ und

$$c^{k+1} \leq \beta c^k$$

für alle $k \notin \mathcal{S}$ gilt.

Da f^k monoton fallend und beschränkt ist, konvergiert die Folge f^k , sagen wir gegen f^* . Damit folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f^k - f^{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f^k - f^{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^1 - f^{n+1}) = f^1 - f^*.$$

Da $f^k - f^{k+1} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (f^k ist monoton fallend), ist $\sum_{k=1}^{\infty} (f^k - f^{k+1})$ damit eine konvergente Majorante für $\sum_{k \in \mathcal{S}} (f^k - f^{k+1})$ und somit wegen (6.13) auch für $\sum_{k \in \mathcal{S}} \gamma c^{k+1}$. Also folgt $c^{k+1} \rightarrow 0$ für $k \in \mathcal{S}$. Für $k \notin \mathcal{S}$ gilt aber $c^{k+1} \leq \beta c^k$ und damit folgt $c^k \rightarrow 0$ auf der ganzen Folge. \square

Korollar 6.8 *Es seien die Folgen $\{c^k\}$ und $\{f^k\}$ gegeben, so dass alle Paare (c^k, f^k) jeweils in den Filter aufgenommen wurden, $c^k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte und f^k nach unten beschränkt sei. Dann gilt $c^k \rightarrow 0$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Folge $\{c^k\}$ gegen 0 konvergiert. Dazu nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Wegen $c^k \geq 0$ hat sie dann entweder einen Häufungspunkt $\eta > 0$ oder ist nach oben unbeschränkt. Wir führen beide Fälle zum Widerspruch:

- **1. Fall: c^k besitzt einen Häufungspunkt $\eta > 0$**

Dann gibt es eine Teilfolge $(c_k)_{k \in \mathcal{S}}$, so dass c^k auf \mathcal{S} gegen η konvergiert und

$$|c^k - \eta| < \frac{(1 - \beta)\eta}{1 + \beta}$$

für alle $k \in \mathcal{S}$ gilt. Das heißt, es gilt

$$c^k \in \left(\eta - \frac{(1 - \beta)\eta}{1 + \beta}, \eta + \frac{(1 - \beta)\eta}{1 + \beta} \right) = \left(\frac{2\beta\eta}{1 + \beta}, \frac{2\eta}{1 + \beta} \right)$$

für alle $k \in \mathcal{S}$. Dann haben wir aber für jeden Nachfolger k^+ von k in \mathcal{S} :

$$c^{(k^+)} > \frac{2\beta\eta}{1 + \beta} = \beta \frac{2\eta}{1 + \beta} > \beta c^k. \quad (6.14)$$

Nach der Inklusion Property, vgl. Bemerkung 6.5, ist $(c^{(k^+)}, f^{(k^+)})$ zu (c^k, f^k) akzeptabel. Wegen (6.14) muss dann

$$f^k - f^{(k^+)} \geq \gamma c^{(k^+)}$$

für jeden Nachfolger k^+ von $k \in \mathcal{S}$ gelten, vgl. Definition 6.4. Damit ist f^k auf \mathcal{S} monoton fallend und nach Lemma 6.7 gilt $c^k \rightarrow 0$ auf \mathcal{S} , im Widerspruch zu $c^k \rightarrow \eta$ auf \mathcal{S} . Damit ist die Annahme, dass die Folge c^k einen Häufungspunkt $\eta > 0$ besitzt, nicht zu halten.

- **2. Fall: c^k ist unbeschränkt**

Dann gibt es eine streng monoton wachsende Teilfolge $(c^k)_{k \in \mathcal{S}}$. Deshalb gilt erneut für jeden Nachfolger k^+ von $k \in \mathcal{S}$:

$$c^{(k^+)} > \beta c^k.$$

Analog zum ersten Fall folgert man dann auch mit Lemma 6.7: $c^k \rightarrow 0$ auf \mathcal{S} , im Widerspruch dazu, dass $c^k \rightarrow \infty$ auf \mathcal{S} .

Insgesamt muss folglich $c^k \rightarrow 0$ gelten. □

Desweiteren ist es noch üblich, eine obere Schranke für die Verletzung der Nebenbedingungen einzuführen:

$$c(x) \leq \beta u \tag{6.15}$$

mit $u > 0$. Dies geschieht, indem der erste Eintrag im Filter $(u, -\infty)$ lautet. Dadurch wird verhindert, dass die Iterierten zu weit von der Unzulässigkeit entfernt sind.

6.2 Der komplette Algorithmus

Kommen wir nun zum Hauptbestandteil dieses Kapitels, dem Algorithmus, der in Abbildung 6.2 beschrieben wird, vgl. [41]. Schauen wir uns die k -te Iteration einmal genauer an. Es sei \mathcal{F}_k die Indexmenge des aktuellen Filters und (c^k, f^k) ein Paar, das sich noch nicht im Filter befindet aber akzeptabel dazu ist. Falls das QPEC(x^k, ρ) nicht zulässig ist, findet eine Restaurationsphase statt. Zuerst wird das Paar (c^k, f^k) zum Filter hinzugefügt, der Iterationszähler um 1 erhöht und ein zum Filter akzeptabler Punkt x^k gesucht, für den das QPEC(x^k, ρ) für ein $\rho \geq \rho^0$ zulässig ist. Dabei sei ρ^0 ein gegebener Parameter. Ist dieser Suchvorgang erfolgreich, wird das QPEC(x^k, ρ) gelöst (die globale Lösung sei d^k , welche existiert, da die zulässige Menge kompakt ist) und man tritt in die innere Schleife ein. In dieser wird zunächst untersucht, ob $d = 0$ auch eine Lösung ist, was genau dann eintritt wenn

$$q(d^k) = q(0) = f(x^k)$$

gilt. In diesem Fall bricht man ab und hat mindestens einen M-stationären Punkt gefunden. Ist für x^k sogar die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt, dann hat man einen stark stationären Punkt gefunden, vgl. Satz 6.1. Ansonsten bestimmt man

$$\Delta f = f(x^k) - f(x^k + d^k)$$

bzw.

$$\Delta q = q(0) - q(d^k)$$

und untersucht, ob $x^k + d^k$ akzeptabel zum Filter und zum Paar (c^k, f^k) ist, d.h. es wird untersucht ob dieser Punkt zum aktuellen Filter akzeptabel ist und auch dann noch akzeptabel wäre, wenn das Paar (c^k, f^k) später zum Filter hinzugefügt werden sollte. (Hier sei

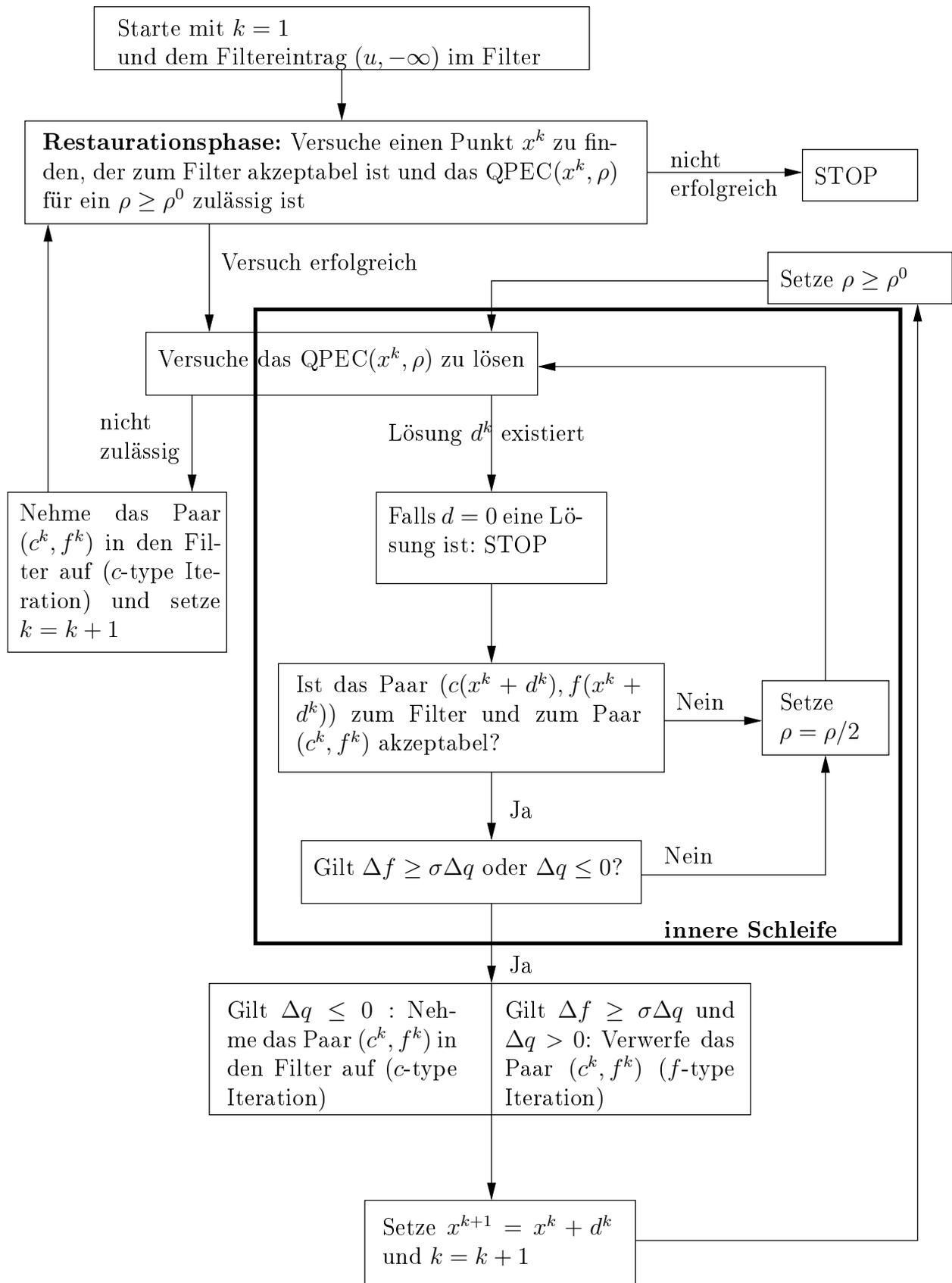


Abbildung 6.2: Filter-SQPEC-Algorithmus

erwähnt, dass dieses Paar noch nicht zum Filter hinzugefügt worden ist. Der Grund dafür wird im Folgenden klar werden.) Ist der Punkt nicht akzeptabel oder aber

$$\Delta f < \sigma \Delta q \quad \text{und} \quad \Delta q > 0,$$

so wird der Trust-Region-Radius ρ halbiert und es wird versucht das daraus entstehende QPEC zu lösen. Diese innere Schleife wird solange durchlaufen und damit ρ sukzessive verkleinert, bis entweder das QPEC unzulässig ist (dann folgt erneut eine Restaurationsphase) oder bis ein akzeptabler Punkt gefunden wird, für den

$$\Delta f \geq \sigma \Delta q \quad \text{oder} \quad \Delta q \leq 0 \tag{6.16}$$

gilt. (Dass dies irgendwann der Fall ist, vgl. Lemma 7.5.) Es gibt dann 2 Fälle:

- **1.Fall:** $\Delta q \leq 0$

In diesem Fall ist unser vorrangiges Ziel die Verkleinerung von c . Wir nehmen deshalb auch eine Vergrößerung des Zielfunktionswertes f in Kauf. Dies wird mit **c -type Iteration** bezeichnet, vgl. Fletcher, Leyffer, Toint [41]. Hier wird auch das Paar (c^k, f^k) zum aktuellen Filter hinzugefügt. Eine c -type Iteration tritt auch vor der Restaurationsphase auf, falls das QPEC nicht zulässig ist.

- **2.Fall:** $\Delta q > 0$ und $\Delta f \geq \sigma \Delta q$

In diesem Fall sprechen wir von einer **f -type Iteration**, da es hier vorrangig darum geht, den Zielfunktionswert f zu verkleinern, wobei eine Vergrößerung von c in Kauf genommen wird. Eine notwendige Bedingung an eine f -type Iteration ist folglich durch

$$\Delta q > 0 \quad \text{und} \quad \Delta f \geq \sigma \Delta q \tag{6.17}$$

gegeben.

Als Nächstes möchten wir 2 Bemerkungen angeben, die im Konvergenzbeweis noch wichtig werden:

Bemerkung 6.9 Da ρ in der inneren Schleife ständig halbiert wird, vergrößert sich der Zielfunktionswert $q(d^k)$ der Lösung d^k des QPECs, da die zulässige Menge verkleinert wird. Folglich sinkt der Wert von Δq in der inneren Schleife und somit werden immer zuerst alle Möglichkeiten für eine f -type Iteration überprüft (und dann abgebrochen) und erst dann die für eine c -type Iteration.

Bemerkung 6.10 Wie oben schon erwähnt, wird nur bei einer c -type Iteration ein Punkt in den Filter aufgenommen. Eine Konsequenz davon ist, dass stets

$$c^j > 0$$

für alle $j \in \mathcal{F}_k$ gilt.

Beweis. Denn, angenommen dies ist nicht der Fall und es gilt $c^j = 0$ für ein $j \in \mathcal{F}_k$. Dann ist der Punkt x^j zulässig für das MPEC (1) und $d = 0$ zulässig für das QPEC(x^j, ρ) für jedes beliebige $\rho > 0$, d.h. das QPEC(x^j, ρ) ist immer lösbar. Da das Paar (c^j, f^j) in den Filter aufgenommen wurde, war $d = 0$ keine Lösung in der inneren Schleife (sonst wäre der Algorithmus gestoppt worden) und die innere Schleife musste mit einer c -type Iteration abgebrochen worden sein. Folglich galt $\Delta q \leq 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\Delta q = q(0) - \underbrace{q(d^k)}_{< q(0)} > 0.$$

□

Das Minimum aller $c^j, j \in \mathcal{F}_k$ bezeichnen wir mit τ^k . Auf Grund von Bemerkung 6.10 gilt:

$$\tau^k := \min_{j \in \mathcal{F}_k} c^j > 0. \quad (6.18)$$

Kapitel 7

Ein globaler Konvergenzbeweis

In diesem Abschnitt werden wir den globalen Konvergenzsatz für das Filter-SQPEC-Verfahren beweisen. Dabei haben wir den Konvergenzbeweis aus [41] für unser MPEC umgewandelt. Zunächst ein paar generelle Voraussetzungen:

Standardvoraussetzungen:

- Alle Punkte x , die vom Algorithmus erzeugt werden, liegen in einer nichtleeren abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Menge \mathcal{X} .
- Die Funktionen f, g, h, G, H seien auf einer offenen Menge, die \mathcal{X} enthalte, zweimal stetig differenzierbar.
- Die Matrizen B^k seien positiv semidefinit und es existiere ein $M > 0$, so dass die Matrizen B^k für alle k Folgendes erfüllen:

$$\|B^k\|_2 \leq M.$$

Eine Folge der Standardvoraussetzungen ist, dass die Gradienten und die Hesse-Matrizen von f, g_i, h_i, G_i, H_i auf \mathcal{X} beschränkt sind. O.B.d.A gelte auch hier

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x)\|_2 &\leq M, \\ \|\nabla g_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \|\nabla h_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \|\nabla G_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \|\nabla H_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 f(x)\|_2 &\leq M, \\ \|\nabla^2 g_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \|\nabla^2 h_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \|\nabla^2 G_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \|\nabla^2 H_i(x)\|_2 &\leq M, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{X}$.

Bemerkung 7.1 Wenn die Standardvoraussetzungen erfüllt sind, ist die Folge $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, da \mathcal{X} kompakt und f stetig ist.

Bevor wir zu unserem Hauptresultat kommen, müssen wir noch einige Hilfsresultate beweisen. Als erstes betrachten wir notwendige und hinreichende Bedingungen an das Minimum einer quadratischen Funktion, vgl. [41, Lemma 2]:

Lemma 7.2 *Es sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ eine quadratische Funktion mit $\Phi'(0) \leq 0$. Das Minimum auf dem Intervall $[0, 1]$ wird in $\alpha = 1$ genau dann angenommen, wenn*

$$\Phi'' + \Phi'(0) \leq 0$$

gilt. In diesem Fall ist

$$\Phi(0) - \Phi(1) \geq -\frac{1}{2}\Phi'(0).$$

Beweis. Es sei $\Phi(\alpha) = a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$. Dann folgt $\Phi(0) = a_0$, $\Phi'(0) = a_1$ und $\Phi'' = 2a_2$. Deshalb gilt:

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}\Phi''\alpha^2 + \Phi'(0)\alpha + \Phi(0).$$

- **1.Fall:** $\Phi'' \leq 0$. Zusammen mit der Voraussetzung $\Phi'(0) \leq 0$ gilt dann:

$$\Phi'' + \Phi'(0) \leq 0$$

und

$$\Phi(1) = \frac{1}{2}\Phi'' + \Phi'(0) + \Phi(0) \leq \frac{1}{2}\Phi''\alpha^2 + \Phi'(0)\alpha + \Phi(0) = \Phi(\alpha)$$

für alle $\alpha \in [0, 1]$, d.h. das Minimum wird an der Stelle $\alpha = 1$ angenommen. Folglich ist die Behauptung, dass das Minimum in $\alpha = 1$ genau dann angenommen wird, wenn $\Phi'' + \Phi'(0) \leq 0$ gilt, in diesem Fall erfüllt.

- **2.Fall:** $\Phi'' \geq 0$. Dann gilt:

Das Minimum wird in $\alpha = 1$ angenommen

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \Phi(1) \leq \Phi(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Phi'' + \Phi'(0) + \Phi(0) \leq \frac{1}{2}\Phi''\alpha^2 + \Phi'(0)\alpha + \Phi(0) \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Phi''(1 - \alpha^2) + \Phi'(0)(1 - \alpha) \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Phi''(1 + \alpha) + \Phi'(0) \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \Phi'' + \Phi'(0) \leq 0 \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich, dass das Minimum auf dem Intervall $[0, 1]$ in $\alpha = 1$ genau dann angenommen wird, wenn

$$\Phi'' + \Phi'(0) \leq 0$$

gilt. In diesem Fall folgt zusätzlich:

$$\begin{aligned}
\Phi(0) - \Phi(1) &= \Phi(0) - \frac{1}{2}\Phi'' - \Phi'(0) - \Phi(0) \\
&= -\frac{1}{2}\Phi'' - \Phi'(0) \\
&= -\frac{1}{2}(\Phi'' + \Phi'(0)) - \frac{1}{2}\Phi'(0) \\
&\geq -\frac{1}{2}\Phi'(0).
\end{aligned}$$

□

Sei nun d zulässig für ein QPEC(x^k, ρ), dann besagt das folgende Lemma, dass $x^k + d$ zum Filter akzeptabel ist, falls ρ hinreichend klein ist. Der Beweis orientiert sich an [41, Lemma 3+4], wurde aber für MPECs modifiziert.

Lemma 7.3 *Seien die Standardvoraussetzungen erfüllt und d zulässig für das QPEC(x^k, ρ). Dann gilt:*

$$\Delta f \geq \Delta q - n\rho^2 M, \quad (7.1)$$

und

$$c(x^k + d) \leq \frac{1}{2}n\rho^2 zM \quad (7.2)$$

mit

$$z := m + p + \ell. \quad (7.3)$$

Insbesondere ist $x^k + d$ zum Filter akzeptabel, falls

$$\rho \leq \sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}}$$

gilt. Dabei sei $\tau^k = \min_{j \in \mathcal{F}_k} c^j$ wie in (6.18) definiert.

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Taylor ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(x^k + d) &= f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 f(y^f)d, \\
g_i(x^k + d) &= g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 g_i(y_i^g)d, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\
h_i(x^k + d) &= h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 h_i(y_i^h)d, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
G_i(x^k + d) &= G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 G_i(y_i^G)d, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\
H_i(x^k + d) &= H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 H_i(y_i^H)d, \quad \forall i = 1, \dots, \ell,
\end{aligned}$$

wobei $y^f, y_i^g, y_i^h, y_i^G, y_i^H$ jeweils auf der Verbindungsstrecke von x^k und $x^k + d$ liegen. Mit (6.2), (6.3), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Verträglichkeit der Matrixnorm folgt

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x^k) - f(x^k + d) \\
&= -\nabla f(x^k)^T d - \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(y^f) d \\
&\stackrel{(6.2)}{=} \Delta q + \frac{1}{2} d^T (B^k - \nabla^2 f(y^f)) d \\
&\geq \Delta q - \frac{1}{2} \|d\|_2 \|B^k - \nabla^2 f(y^f)\|_2 \|d\|_2 \\
&\geq \Delta q - \frac{1}{2} \underbrace{\|d\|_2^2}_{\leq n\|d\|_\infty^2} \left(\underbrace{\|B^k\|_2}_{\leq M} + \underbrace{\|\nabla^2 f(y^f)\|_2}_{\leq M} \right) \\
&\geq \Delta q - n\rho^2 M.
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung wurde $\|d\|_2^2 \leq n\|d\|_\infty^2 \leq n\rho^2$ und die Beschränktheit der Matrizen B^k und $\nabla^2 f(y^f)$ ausgenutzt.

Analog folgt auf Grund der Zulässigkeit von d für das QPEC(x^k, ρ):

- $g_i(x^k + d) = \underbrace{g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d}_{\leq 0} + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 g_i(y_i^g) d \leq \frac{1}{2} d^T \nabla^2 g_i(y_i^g) d \leq \frac{1}{2} n\rho^2 M$
für alle $i = 1, \dots, m$.
- $|h_i(x^k + d)| = \underbrace{|h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d|}_{=0} + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 h_i(y_i^h) d = |\frac{1}{2} d^T \nabla^2 h_i(y_i^h) d| \leq \frac{1}{2} n\rho^2 M$
für alle $i = 1, \dots, p$.

Als Nächstes wollen wir

$$|\min\{G_i(x^k + d), H_i(x^k + d)\}| \leq \frac{1}{2} n\rho^2 M$$

für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ zeigen. Sei dazu $i \in \{1, \dots, \ell\}$ und o.B.d.A. gelte

$$G_i(x^k + d) \leq H_i(x^k + d).$$

Da d zulässig für das QPEC ist, gilt

$$G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d = 0$$

oder

$$H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d = 0.$$

Machen wir eine Fallunterscheidung:

- **1. Fall:** $G_i(x^k + d) \leq 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|\min\{G_i(x^k + d), H_i(x^k + d)\}| &= -G_i(x^k + d) \\
&= -\left(\underbrace{G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d}_{\geq 0} + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 G_i(y_i^G)d\right) \\
&\leq -\frac{1}{2}d^T \nabla^2 G_i(y_i^G)d \\
&\leq \frac{1}{2}n\rho^2 M.
\end{aligned}$$

- **2. Fall:** $G_i(x^k + d) > 0$

- **2.1. Fall:** $G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d = 0$. Hier folgt:

$$\begin{aligned}
|\min\{G_i(x^k + d), H_i(x^k + d)\}| &= G_i(x^k + d) \\
&= \left(\underbrace{G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d}_{=0} + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 G_i(y_i^G)d\right) \\
&= \frac{1}{2}d^T \nabla^2 G_i(y_i^G)d \\
&\leq \frac{1}{2}n\rho^2 M.
\end{aligned}$$

- **2.2. Fall:** $H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d = 0$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
|\min\{G_i(x^k + d), H_i(x^k + d)\}| &= G_i(x^k + d) \\
&\leq H_i(x^k + d) \\
&= \left(\underbrace{H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d}_{=0} + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 H_i(y_i^H)d\right) \\
&= \frac{1}{2}d^T \nabla^2 H_i(y_i^H)d \\
&\leq \frac{1}{2}n\rho^2 M.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned}
c(x^k + d) &= \|\max\{0, g(x^k + d)\}\|_1 + \|h(x^k + d)\|_1 + \|\min\{G(x^k + d), H(x^k + d)\}\|_1 \\
&= \sum_{i=1}^m |\max\{0, g_i(x^k + d)\}| + \sum_{i=1}^p |h_i(x^k + d)| + \sum_{i=1}^{\ell} |\min\{G_i(x^k + d), H_i(x^k + d)\}| \\
&\leq \frac{1}{2}n\rho^2 M \underbrace{(m + p + \ell)}_{=z} \\
&= \frac{1}{2}n\rho^2 zM.
\end{aligned}$$

Falls $\rho \leq \sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}}$ gilt, dann folgt

$$c(x^k + d) \leq \beta\tau^k \leq \beta c^j$$

für alle $j \in \mathcal{F}_k$ und auf Grund von (6.9) ist $x^k + d$ zum Filter akzeptabel. \square

Nun kommen wir zum entscheidenden Hilfsresultat für den Konvergenzsatz. Der Beweis orientiert sich am Beweis von [41, Lemma 5], wurde aber natürlich erneut für MPECs umgeschrieben.

Lemma 7.4 *Es seien die Standardvoraussetzungen erfüllt und $x^* \in \mathcal{X}$ ein zulässiger Punkt für das MPEC (1), der der MPEC-MFCQ-Bedingung genüge, aber kein A - stationärer Punkt sei. Dann gibt es eine Umgebung \mathcal{N} von x^* und positive Konstanten κ, μ und η , so dass für alle $x \in \mathcal{N} \cap \mathcal{X}$ und alle ρ mit*

$$\mu c(x) \leq \rho \leq \eta$$

folgt, dass das QPEC(x, ρ) einen zulässigen Punkt d besitzt, für den die vorhergesagte Reduktion Δq der Ungleichung

$$\Delta q \geq \frac{1}{3}\rho\kappa$$

genügt, die notwendige Bedingung (6.17) für eine f -type Iteration erfüllt ist und für den die tatsächliche Reduktion Δf der Ungleichung

$$\Delta f \geq \gamma c(x + d)$$

genügt.

Bemerkung: Es kann durchaus vorkommen, dass es für ein $x \in \mathcal{N}$ kein ρ gibt, für das $\mu c(x) \leq \rho \leq \eta$ gilt und das Hilfsresultat sagt in diesem Fall nichts aus. Wir werden aber im späteren Konvergenzsatz, wenn wir dieses Hilfsresultat anwenden, nur Fälle betrachten, in denen $c(x)$ gegen 0 konvergiert und somit ist hier die Menge der ρ nicht leer.

Beweis. Wählen wir zunächst ε_1 so, dass

$$\begin{aligned} G_i(x) &\leq H_i(x), \quad \forall i \in \alpha, \\ H_i(x) &\leq G_i(x), \quad \forall i \in \gamma, \end{aligned}$$

für alle $x \in B_{\varepsilon_1}(x^*)$ gilt. Dies ist wegen $G_\alpha(x^*) = 0 < H_\alpha(x^*)$ und $H_\gamma(x^*) = 0 < G_\gamma(x^*)$ aus Stetigkeitsgründen möglich.

Da x^* kein A-stationärer Punkt ist, aber der MPEC-MFCQ-Bedingung genügt, existiert nach Lemma 2.23 für jede Partition (β_1, β_2) von β ein s^* mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^T s^* &< 0, \\ \nabla g_i(x^*)^T s^* &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x^*)^T s^* &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x^*)^T s^* &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla G_i(x^*)^T s^* &> 0, \quad \forall i \in \beta_2, \\ \nabla H_i(x^*)^T s^* &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma, \\ \nabla H_i(x^*)^T s^* &> 0, \quad \forall i \in \beta_1. \end{aligned} \tag{7.4}$$

O.B.d.A. sei $\|s^*\|_2 = 1$. Da x^* der MPEC-MFCQ-Bedingung genügt, sind die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla h_i(x^*), \quad & \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x^*), \quad & \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla H_i(x^*), \quad & \forall i \in \beta_2 \cup \gamma \end{aligned}$$

für jede Partition (β_1, β_2) linear unabhängig. Es bezeichne $A(x)$ die Matrix, deren Spalten gerade aus diesen Gradienten besteht, ausgewertet an einem Punkt x . Es gilt also:

$$A(x)^T := \begin{pmatrix} \nabla h_i(x)^T, & i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T, & i \in \alpha \cup \beta_1, \\ \nabla H_i(x)^T, & i \in \beta_2 \cup \gamma \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Man bedenke hier auch, dass die Matrix $A(x)$ nicht nur vom Punkt x abhängt, sondern auch von der gewählten Partition, obwohl das hier nicht explizit in der Notation deutlich gemacht wurde. Dies wird auch bei allen weiteren Definitionen, die auf dieser beruhen, so gehandhabt. Zum Beispiel definieren wir die Matrix

$$C(x) := (A(x)^T A(x))^{-1} A(x)^T. \quad (7.6)$$

Diese ist auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Spalten von $A(x^*)$ und aus Stetigkeitsgründen in einer Umgebung von x^* wohldefiniert und beschränkt. Da es nur endlich viele Partitionen von β gibt, existiert ein $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, so dass $C(x)^T$ für alle Partitionen und alle $x \in B_{\varepsilon_2}(x^*)$ beschränkt ist, d.h. es gibt ein $L > 0$, so dass

$$\|C(x)^T\|_2 \leq L \quad (7.7)$$

für alle $x \in B_{\varepsilon_2}(x^*)$ gilt. Desweiteren definieren wir auf $B_{\varepsilon_2}(x^*)$ den Vektor

$$r(x) := -C(x)^T b(x), \quad (7.8)$$

wobei

$$b(x) := \begin{pmatrix} h_i(x), & \forall i = 1, \dots, p, \\ G_i(x), & \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\ H_i(x), & \forall i \in \beta_2 \cup \gamma \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

sei.

Zu s^* definieren wir nun für alle $x \in B_{\varepsilon_2}(x^*)$ den Vektor

$$s(x) := \frac{(I - A(x)C(x))s^*}{\|(I - A(x)C(x))s^*\|_2}.$$

Für diesen gilt:

- Er liegt im Kern von $A(x)^T$:

$$\begin{aligned}
A(x)^T s(x) &= \frac{A(x)^T (I - A(x)C(x))s^*}{\|(I - A(x)C(x))s^*\|_2} \\
&= \frac{(A(x)^T - A(x)^T A(x)C(x))s^*}{\|(I - A(x)C(x))s^*\|_2} \\
&\stackrel{(7.6)}{=} \frac{\left(A(x)^T - A(x)^T A(x) (A(x)^T A(x))^{-1} A(x)^T \right) s^*}{\|(I - A(x)C(x))s^*\|_2} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{7.10}$$

und deshalb gilt auch

$$C(x)s(x) \stackrel{(7.6)}{=} (A(x)^T A(x))^{-1} A(x)^T s(x) = 0$$

bzw.

$$r(x)^T s(x) \stackrel{(7.8)}{=} -b(x)^T C(x)s(x) = 0. \tag{7.11}$$

- $s(x^*) = s^*$:

$$\begin{aligned}
s(x^*) &= \frac{(I - A(x^*)C(x^*))s^*}{\|(I - A(x^*)C(x^*))s^*\|_2} \\
&\stackrel{(7.6)}{=} \frac{s^* - A(x^*)(A(x^*)^T A(x^*))^{-1} A(x^*)^T s^*}{\|s^* - A(x^*)(A(x^*)^T A(x^*))^{-1} A(x^*)^T s^*\|_2} \\
&= \frac{s^*}{\|s^*\|_2} \\
&= s^*,
\end{aligned}$$

da $A(x^*)^T s^* = 0$ ist, vgl. (7.4) und (7.5).

Mit $s(x^*) = s^*$, (7.4) und aus Stetigkeitsgründen existiert folglich ein $\kappa > 0$ und ein $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ mit

$$\begin{aligned}
\nabla f(x)^T s(x) &\leq -\kappa, \\
\nabla g_i(x)^T s(x) &\leq -\kappa, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\
\nabla G_i(x)^T s(x) &\geq \kappa, \quad \forall i \in \beta_2, \\
\nabla H_i(x)^T s(x) &\geq \kappa, \quad \forall i \in \beta_1, \\
g_i(x) &\leq -\kappa, \quad \forall i \notin \mathcal{I}_g, \\
G_i(x) &\geq \kappa, \quad \forall i \in \gamma, \\
H_i(x) &\geq \kappa, \quad \forall i \in \alpha,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

für alle Partitionen (β_1, β_2) von β und für alle $x \in B_{\varepsilon_3}(x^*)$. (Zuerst existiert für jede Partition ein κ und ein ε_3 . Man nehme dann das kleinste dieser endlich vielen.)

Als Nächstes definieren wir noch

$$\mu := \max \left\{ \frac{1 + ML + L\kappa}{\kappa}, \frac{6L(\kappa + M)}{\kappa} \right\} \tag{7.13}$$

und

$$\eta := \min \left\{ \frac{2\sigma\kappa}{3\gamma nzM}, \frac{(1-\sigma)\kappa}{3nM}, \frac{\kappa}{M} \right\}. \quad (7.14)$$

Dabei ist M die Konstante aus den Standardvoraussetzungen, $z = m+p+\ell$ die aus Lemma 7.3, σ die Konstante aus (6.17) und γ aus (6.9).

Sei nun $\mathcal{N} := B_{\varepsilon_3}(x^*)$ und $x \in \mathcal{N} \cap \mathcal{X}$ beliebig gegeben (aber fest),

$$c(x) = \|\max\{0, g(x)\}\|_1 + \|h(x)\|_1 + \|\min\{G(x), H(x)\}\|_1$$

wie in (6.5) definiert und ρ gegeben mit

$$\mu c(x) \leq \rho \leq \eta. \quad (7.15)$$

Wir wählen eine Partition (β_1, β_2) von β so, dass

$$G_i(x) \leq H_i(x), \quad \forall i \in \beta_1 \quad (7.16)$$

und

$$H_i(x) \leq G_i(x), \quad \forall i \in \beta_2 \quad (7.17)$$

gilt. Wegen $x \in B_{\varepsilon_1}(x^*)$ gilt auch $G_i(x) \leq H_i(x)$ für alle $i \in \alpha$ und $H_i(x) \leq G_i(x)$ für alle $i \in \gamma$, vgl. den Anfang des Beweises. Dann ist

$$\begin{aligned} c(x) &= \|\max\{0, g(x)\}\|_1 + \|h(x)\|_1 + \sum_{i \in \alpha \cup \beta_1} |G_i(x)| + \sum_{i \in \beta_2 \cup \gamma} |H_i(x)| \\ &\geq \|b(x)\|_1 \\ &\geq \|b(x)\|_2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

vgl. die Definition von $b(x)$ in (7.9). Wegen $\mu \geq \frac{1+ML+L\kappa}{\kappa} = \frac{1+ML}{\kappa} + L \geq L$ folgt dann:

$$\|r(x)\|_2 \stackrel{(7.8)}{=} \|C(x)^T b(x)\|_2 \leq \underbrace{\|C(x)^T\|_2}_{\leq L, \text{vgl. (7.7)}} \underbrace{\|b(x)\|_2}_{\leq c(x)} \leq Lc(x) \leq \mu c(x) \stackrel{(7.15)}{\leq} \rho, \quad (7.19)$$

insbesondere also $\|r(x)\|_2 \leq \rho$. Betrachten wir jetzt das QPEC(x, ρ). Unser Ziel ist es, einen zulässigen Punkt d zu konstruieren, der die geforderten Bedingungen erfüllt, solange $\mu c(x) \leq \rho \leq \eta$ gilt. Dazu definieren wir

$$d(x) := r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2)s(x)$$

Dann gilt:

- Da $r(x)$ und $s(x)$ orthogonal sind, vgl. (7.11), $s(x)$ normiert ist und $\|r(x)\|_2 \leq \rho$ gilt, vgl. (7.19), folgt:

$$\|d(x)\|_\infty \leq \|d(x)\|_2$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\|r(x)\|_2^2 + 2(\rho - \|r(x)\|_2)r(x)^T s(x) + (\rho - \|r(x)\|_2)^2 \|s(x)\|_2^2} \\
&= \sqrt{\|r(x)\|_2^2 + (\rho - \|r(x)\|_2)^2} \\
&= \sqrt{\rho^2 - 2\rho\|r(x)\|_2 + 2\|r(x)\|_2^2} \\
&= \sqrt{\rho^2 + 2\|r(x)\|_2(\|r(x)\|_2 - \rho)} \\
&\leq \rho,
\end{aligned}$$

Damit erfüllt $d(x)$ die Trust-Region-Ungleichung des QPECs(x, ρ).

- Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
b(x) + A(x)^T d(x) &= b(x) + A(x)^T \left(r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) s(x) \right) \\
&= b(x) + A(x)^T \underbrace{r(x)}_{\stackrel{(7.8)}{=} -C(x)^T b(x)} + (\rho - \|r(x)\|_2) \underbrace{A(x)^T s(x)}_{=0, \text{vgl. (7.10)}} \\
&= b(x) - A(x)^T C(x)^T b(x) \\
&= b(x) - \underbrace{(C(x)A(x))^T b(x)}_{=I, \text{vgl. (7.6)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich haben wir:

$$\begin{aligned}
h_i(x) + \nabla h_i(x)^T d(x) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\
G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d(x) &= 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta_1, \\
H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d(x) &= 0, \quad \forall i \in \beta_2 \cup \gamma,
\end{aligned}$$

vgl. die Definition von $b(x)$ (7.9) und von $A(x)^T$ (7.5). Wegen $\alpha \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \gamma = \{1, \dots, \ell\}$ ist insbesondere die Komplementaritätsforderung unseres QPECs(x, ρ) erfüllt.

- Für alle $i \in \mathcal{I}_g$ folgt mit (7.12):

$$\begin{aligned}
g_i(x) + \nabla g_i(x)^T d(x) &= g_i(x) + \nabla g_i(x)^T r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) \underbrace{\nabla g_i(x)^T s(x)}_{\leq -\kappa} \\
&\leq g_i(x) + \nabla g_i(x)^T r(x) - (\rho - \|r(x)\|_2) \kappa \\
&\leq \underbrace{\max\{0, g_i(x)\}}_{\stackrel{(7.18)}{\leq} c(x)} + \underbrace{\|\nabla g_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\stackrel{(7.19)}{\leq} Lc(x)} - \underbrace{\rho\kappa}_{\stackrel{(7.15)}{\geq} \mu c(x)\kappa} + \underbrace{\|r(x)\|_2 \kappa}_{\leq Lc(x)} \\
&\leq c(x) \underbrace{[1 + ML - \mu\kappa + L\kappa]}_{\leq 0, \text{vgl. (7.13)}} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

- Für alle $i \in \beta_2$ gilt $G_i(x) \geq H_i(x)$, vgl. (7.17), und damit folgt analog mit (7.12):

$$\begin{aligned}
G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d(x) &= \underbrace{G_i(x)}_{\geq H_i(x)} + \nabla G_i(x)^T r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) \underbrace{\nabla G_i(x)^T s(x)}_{\geq \kappa} \\
&\geq H_i(x) + \nabla G_i(x)^T r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) \kappa \\
&\geq - \underbrace{|H_i(x)|}_{\leq c(x) \text{ vgl. (7.18)}} - \underbrace{\|\nabla G_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\leq Lc(x)} + \underbrace{\rho \kappa}_{\geq \mu c(x) \kappa} - \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\leq Lc(x)} \kappa \\
&\geq c(x) \underbrace{[-1 - ML + \mu \kappa - \kappa L]}_{\geq 0, \text{ vgl. (7.13)}} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt für alle $i \in \beta_1$ wegen $H_i(x) \geq G_i(x)$, vgl. (7.16):

$$\begin{aligned}
H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d(x) &= \underbrace{H_i(x)}_{\geq G_i(x)} + \nabla H_i(x)^T r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) \underbrace{\nabla H_i(x)^T s(x)}_{\geq \kappa} \\
&\geq G_i(x) + \nabla H_i(x)^T r(x) + (\rho - \|r(x)\|_2) \kappa \\
&\geq - \underbrace{|G_i(x)|}_{\leq c(x) \text{ vgl. (7.18)}} - \underbrace{\|\nabla H_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\leq Lc(x)} + \underbrace{\rho \kappa}_{\geq \mu c(x) \kappa} - \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\leq Lc(x)} \kappa \\
&\geq c(x) [-1 - ML + \mu \kappa - \kappa L] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

- Außerdem gilt mit (7.12) und der Definition von η , vgl. (7.14),

$$\underbrace{g_i(x)}_{\leq -\kappa} + \nabla g_i(x)^T d(x) \leq -\kappa + \underbrace{\|\nabla g_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|d(x)\|_2}_{\leq \rho} \leq -\kappa + M \underbrace{\rho}_{\leq \eta, \text{ vgl. (7.15)}} \leq -\kappa + M\eta \leq 0,$$

für alle $i \notin \mathcal{I}_g$,

$$\underbrace{G_i(x)}_{\geq \kappa} + \nabla G_i(x)^T d(x) \geq \kappa - \underbrace{\|\nabla G_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|d(x)\|_2}_{\leq \rho} \geq \kappa - M \underbrace{\rho}_{\leq \eta, \text{ vgl. (7.15)}} \geq \kappa - M\eta \geq 0,$$

für alle $i \in \gamma$ und

$$\underbrace{H_i(x)}_{\geq \kappa} + \nabla H_i(x)^T d(x) \geq \kappa - \underbrace{\|\nabla H_i(x)\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|d(x)\|_2}_{\leq \rho} \geq \kappa - M \underbrace{\rho}_{\leq \eta, \text{ vgl. (7.15)}} \geq \kappa - M\eta \geq 0,$$

für alle $i \in \alpha$.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $d(x)$ zulässig für das QPEC(x, ρ) ist, sofern $\mu c(x) \leq \rho \leq \eta$ gilt.

Als Nächstes geben wir eine untere Schranke für die vorhergesagte Reduktion Δq an. Dazu definieren wir

$$\Phi(\tau) := q\left(r(x) + \tau(\rho - \|r(x)\|_2)s(x)\right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi'(\tau) &= (\rho - \|r(x)\|_2) s(x)^T \nabla q\left(r(x) + \tau(\rho - \|r(x)\|_2) s(x)\right) \\ &= (\rho - \|r(x)\|_2) s(x)^T \left(\nabla f(x) + B(r(x) + \tau(\rho - \|r(x)\|_2) s(x)) \right).\end{aligned}$$

Mit (7.12), den Standardvoraussetzungen und $\|r(x)\|_2 \leq \rho \leq \eta$, vgl. (7.19), folgt:

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= (\rho - \|r(x)\|_2) \left(\underbrace{\nabla f(x)^T s(x)}_{\leq -\kappa} + s(x)^T B r(x) \right) \\ &\leq (\rho - \|r(x)\|_2) (s(x)^T B r(x) - \kappa) \\ &\leq (\rho - \|r(x)\|_2) \left(\underbrace{\|s(x)\|_2}_{=1} \underbrace{\|B\|_2}_{\leq M} \|r(x)\|_2 - \kappa \right) \\ &\leq (\rho - \|r(x)\|_2) \left(M \underbrace{\|r(x)\|_2}_{\leq \eta} - \kappa \right) \\ &\leq \underbrace{(\rho - \|r(x)\|_2)}_{\geq 0} \left(\underbrace{M\eta - \kappa}_{\leq 0, \text{ vgl. (7.14)}} \right) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\Phi'' &= (\rho - \|r(x)\|_2)^2 s(x)^T B s(x) \\ &\leq (\rho - \|r(x)\|_2)^2 \underbrace{\|s(x)\|_2}_{=1} \underbrace{\|B\|_2}_{\leq M} \underbrace{\|s(x)\|_2}_{=1} \\ &\leq (\rho - \|r(x)\|_2)^2 M\end{aligned}$$

folgt für alle $\rho \leq \eta$:

$$\begin{aligned}\Phi'' + \Phi'(0) &\leq (\rho - \|r(x)\|_2)^2 M + (\rho - \|r(x)\|_2) (M\|r(x)\|_2 - \kappa) \\ &= (\rho - \|r(x)\|_2) ((\rho - \|r(x)\|_2) M + M\|r(x)\|_2 - \kappa) \\ &= (\rho - \|r(x)\|_2) \left(\underbrace{\rho}_{\leq \eta} M - \kappa \right) \\ &\leq \underbrace{(\rho - \|r(x)\|_2)}_{\geq 0} \left(\underbrace{\eta M - \kappa}_{\leq 0, \text{ vgl. (7.14)}} \right) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.2 nimmt die quadratische Funktion $\Phi(\tau)$ ihr Minimum an der Stelle $\tau = 1$ an und es gilt

$$\Phi(0) - \Phi(1) \geq -\frac{1}{2} \Phi'(0).$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q(0) - q(d(x)) \\
&= f(x) - \Phi(1) \\
&= \underbrace{\Phi(0) - \Phi(1)}_{\geq -\frac{1}{2}\Phi'(0)} - \underbrace{\Phi(0)}_{=q(r(x))} + f(x) \\
&\geq -\frac{1}{2}(\rho - \|r(x)\|_2)(M\|r(x)\|_2 - \kappa) - \nabla f(x)^T r(x) - \frac{1}{2}r(x)^T B r(x) \\
&\geq -\frac{1}{2}(\rho - \|r(x)\|_2)(M\|r(x)\|_2 - \kappa) - \underbrace{\|\nabla f(x)\|_2 \|r(x)\|_2}_{\leq M} - \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2 \underbrace{\|B\|_2}_{\leq M} \\
&\geq \frac{1}{2}\rho\kappa - \frac{1}{2}\rho M\|r(x)\|_2 + \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2 M - \frac{1}{2}\|r(x)\|_2 \kappa - M\|r(x)\|_2 - \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2 M \\
&= \frac{1}{3}\rho\kappa + \frac{1}{6}\underbrace{\rho}_{\geq \mu c(x)} \kappa - \frac{1}{2}\underbrace{\|r(x)\|_2}_{\stackrel{(7.19)}{\leq} Lc(x)} \left(\underbrace{\rho M}_{\leq \eta M \stackrel{(7.14)}{\leq} \kappa} + \kappa + 2M \right) \\
&\geq \frac{1}{3}\rho\kappa + \frac{1}{6}\mu c(x)\kappa - Lc(x)(\kappa + M) \\
&= \frac{1}{3}\rho\kappa + Lc(x) \underbrace{\left(\frac{1}{6L}\mu\kappa - \kappa - M \right)}_{\geq 0 \text{ vgl. (7.13)}} \\
&\geq \frac{1}{3}\rho\kappa.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 7.3 folgt für alle $\rho \leq \eta$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta q} \geq 1 - \frac{n\rho^2 M}{\Delta q} \geq 1 - \frac{3n\rho^2 M}{\rho\kappa} = 1 - \frac{3n\rho M}{\kappa} \geq 1 - \frac{3n\eta M}{\kappa} \stackrel{(7.14)}{\geq} \sigma,$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta f - \gamma c(x + d(x)) &\geq \sigma \Delta q - \gamma c(x + d(x)) \\
&\stackrel{(7.2)}{\geq} \frac{1}{3}\sigma\rho\kappa - \frac{1}{2}\rho^2\gamma n z M \\
&= \frac{1}{2}\rho \left(\frac{2\sigma\kappa}{3} - \underbrace{\rho}_{\leq \eta} \gamma n z M \right) \\
&\geq \frac{1}{2}\rho \underbrace{\left(\frac{2\sigma\kappa}{3} - \eta\gamma n z M \right)}_{\geq 0, \text{ vgl. (7.14)}} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

d.h. (6.17) und alle weiteren Behauptungen sind erfüllt und das Lemma ist bewiesen. \square

Das folgende Lemma besagt, dass die innere Schleife irgendwann abbrechen muss, vgl. auch [41, Lemma 6].

Lemma 7.5 *Wenn die Standardvoraussetzungen gelten, dann bricht die innere Schleife des Filter-SQPEC-Verfahrens nach endlich vielen Schritten ab.*

Beweis. Es sei x^k ein fester Punkt. Angenommen, die innere Schleife bricht nicht nach endlich vielen Schritten ab. Dann gilt $\rho \rightarrow 0$, da ρ in jeder Iteration halbiert wird. Wir betrachten 2 Fälle:

- $c(x^k) > 0$:

Dann existiert ein Index i , so dass

$$g_i(x^k) > 0, h_i(x^k) \neq 0$$

oder

$$\min\{G_i(x^k), H_i(x^k)\} \neq 0$$

gilt.

Im Falle $g_i(x^k) > 0$ folgt für alle d mit $\|d\|_\infty \leq \rho$:

$$\begin{aligned} g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d &\geq g_i(x^k) - \underbrace{\|d\|_2}_{\leq \sqrt{n}\|d\|_\infty} \|\nabla g_i(x^k)\|_2 \\ &\geq g_i(x^k) - \sqrt{n}\rho \|\nabla g_i(x^k)\|_2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

falls entweder $\|\nabla g_i(x^k)\|_2 = 0$ oder $\rho < \frac{g_i(x^k)}{\sqrt{n}\|\nabla g_i(x^k)\|_2}$ ist. Die g -Nebenbedingung $g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d \leq 0$ ist also für kleine ρ nicht mehr erfüllbar.

Analog zeigt man das, falls $h_i(x^k) > 0$, $h_i(x^k) < 0$, $G_i(x^k) < 0$ oder $H_i(x^k) < 0$ gilt. Betrachten wir nun den Fall, dass $\min\{G_i(x^k), H_i(x^k)\} > 0$ ist, also $G_i(x^k) > 0$ und $H_i(x^k) > 0$. Analog zu oben folgt für alle d mit $\|d\|_\infty \leq \rho$:

$$G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d \geq G_i(x^k) - \sqrt{n}\rho \|\nabla G_i(x^k)\|_2 > 0,$$

falls entweder $\|\nabla G_i(x^k)\|_2 = 0$ oder $\rho < \frac{G_i(x^k)}{\sqrt{n}\|\nabla G_i(x^k)\|_2}$ gilt und

$$H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d \geq H_i(x^k) - \sqrt{n}\rho \|\nabla H_i(x^k)\|_2 > 0,$$

im Fall $\|\nabla H_i(x^k)\|_2 = 0$ oder $\rho < \frac{H_i(x^k)}{\sqrt{n}\|\nabla H_i(x^k)\|_2}$. Insgesamt folgt

$$(G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d)(H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d) > 0,$$

falls entweder die Norm beider Gradienten Null ist oder

$$\rho < \min \left\{ \frac{G_i(x^k)}{\sqrt{n}\|\nabla G_i(x^k)\|_2}, \frac{H_i(x^k)}{\sqrt{n}\|\nabla H_i(x^k)\|_2} \right\}$$

gilt.

Falls ρ hinreichend klein ist, bricht die innere Schleife also doch ab, da die Nebenbedingungen des QPECs(x^k, ρ) dann nicht mehr erfüllbar sind. Es beginnt eine Restaurationsphase.

- $c(x^k) = 0$: In diesem Fall ist x^k zulässig für das MPEC und es existieren $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{I}_g$ mit:

$$\begin{aligned}
g_i(x^k) &= 0, & \forall i \in \mathcal{I}_g, \\
g_i(x^k) &< 0, & \forall i \notin \mathcal{I}_g, \\
h_i(x^k) &= 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\
G_i(x^k) &= 0, & \forall i \in \alpha \cup \beta, \\
G_i(x^k) &> 0, & \forall i \in \gamma, \\
H_i(x^k) &= 0, & \forall i \in \beta \cup \gamma, \\
H_i(x^k) &> 0, & \forall i \in \alpha.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Da $\rho \rightarrow 0$ gilt (nach Voraussetzung bricht die innere Schleife ja nicht ab), existiert zu jedem QPEC(x^k, ρ) eine Lösung d , denn ansonsten würde wieder eine Restaurationsphase starten. Desweiteren ist 0 zwar immer ein zulässiger Punkt, aber nie eine Lösung, sonst würde der Algorithmus zumindest mit einem M-stationären Punkt abbrechen, vgl. Satz 6.1. Sei nun ein ρ hinreichend klein gegeben, so dass für die Lösung d^* des zugehörigen QPECs(x^k, ρ) Folgendes gilt:

$$\underbrace{G_i(x^k)}_{>0} + \nabla G_i(x^k)^T d^* > 0, \quad \forall i \in \gamma, \tag{7.21}$$

und

$$\underbrace{H_i(x^k)}_{>0} + \nabla H_i(x^k)^T d^* > 0, \quad \forall i \in \alpha. \tag{7.22}$$

Für die Lösung d^* gilt weiterhin:

$$\Delta q = q(0) - \underbrace{q(d^*)}_{< q(0)} = -\nabla f(x^k)^T d^* - \frac{1}{2} d^{*T} B d^* > 0.$$

Da B positiv semidefinit ist, folgt sogar $\nabla f(x^k)^T d^* < 0$, es existiert also ein $\kappa > 0$ mit

$$\nabla f(x^k)^T d^* = -\kappa. \tag{7.23}$$

Mit der Zulässigkeit von d^* für das QPEC(x^k, ρ) gilt außerdem:

$$\begin{aligned}
g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d^* &\leq 0, & \forall i = 1, \dots, m, \\
h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d^* &= 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\
G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d^* &\geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d^* &\geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
(G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d^*)(H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d^*) &= 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\
\|d^*\|_\infty &\leq \rho.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Nun verkleinern wir ρ weiter, so dass

$$\rho \leq \min \left\{ g_{min}, H_{min}, G_{min}, \frac{\kappa \sigma}{(\gamma n z M \|d^*\|_\infty)}, \frac{(1 - \sigma) \kappa}{2 n M \|d^*\|_\infty}, \sqrt{\frac{2 \beta \tau^k}{z n M}}, \frac{\kappa}{n M \|d^*\|_\infty} \right\} \tag{7.25}$$

erfüllt ist. Dabei sei

$$g_{min} := \min \left\{ \frac{-g_i(x^k)}{\sqrt{n} \|\nabla g_i(x^k)\|_2} \mid i \notin \mathcal{I}_g \right\}, \quad (7.26)$$

$$G_{min} := \min \left\{ \frac{G_i(x^k)}{\sqrt{n} \|\nabla G_i(x^k)\|_2} \mid i \in \gamma \right\}, \quad (7.27)$$

und

$$H_{min} := \min \left\{ \frac{H_i(x^k)}{\sqrt{n} \|\nabla H_i(x^k)\|_2} \mid i \in \alpha \right\}. \quad (7.28)$$

Hier gelte $\frac{c}{0} = \infty$, falls ein Gradient Null ist. Desweiteren definieren wir

$$d_\mu = \frac{\mu \rho d^*}{\|d^*\|_\infty}$$

mit $\mu \in [0, 1]$. Dabei ist d^* die Lösung des alten QPECs, wobei d_μ ein zulässiger Punkt des neuen QPECs(x^k, ρ) ist, nachdem ρ verkleinert wurde, denn es gilt:

- Erstmal liegt d_μ im Trust-Region-Bereich:

$$\|d_\mu\|_\infty = \mu \rho \leq \rho.$$

- Zusammen mit (7.20) und (7.24) folgt weiter:

$$\begin{aligned} \underbrace{g_i(x^k)}_{=0} + \nabla g_i(x^k)^T d_\mu &= \frac{\mu \rho}{\|d^*\|_\infty} \underbrace{\nabla g_i(x^k)^T d^*}_{\leq 0} \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \underbrace{h_i(x^k)}_{=0} + \nabla h_i(x^k)^T d_\mu &= \frac{\mu \rho}{\|d^*\|_\infty} \underbrace{\nabla h_i(x^k)^T d^*}_{\leq 0} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \underbrace{G_i(x^k)}_{=0} + \nabla G_i(x^k)^T d_\mu &= \frac{\mu \rho}{\|d^*\|_\infty} \underbrace{\nabla G_i(x^k)^T d^*}_{\geq 0} \geq 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \underbrace{H_i(x^k)}_{=0} + \nabla H_i(x^k)^T d_\mu &= \frac{\mu \rho}{\|d^*\|_\infty} \underbrace{\nabla H_i(x^k)^T d^*}_{\geq 0} \geq 0, \quad \forall i \in \beta \cup \gamma. \end{aligned}$$

- Für alle $i \notin \mathcal{I}_g$ gilt:

$$\begin{aligned} g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d_\mu &\leq g_i(x^k) + \underbrace{\|d_\mu\|_2}_{\leq \sqrt{n} \|d_\mu\|_\infty} \|\nabla g_i(x^k)\|_2 \\ &\leq g_i(x^k) + \sqrt{n} \rho \|\nabla g_i(x^k)\|_2 \\ &\stackrel{(7.25)+(7.26)}{\leq} 0. \end{aligned}$$

- Für alle $i \in \gamma$ gilt:

$$G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d_\mu \geq G_i(x^k) - \underbrace{\|d_\mu\|_2}_{\leq \sqrt{n} \|d_\mu\|_\infty} \|\nabla G_i(x^k)\|_2$$

$$\begin{aligned}
&\geq G_i(x^k) - \sqrt{n}\rho \|\nabla G_i(x^k)\|_2 \\
(7.25)+(7.27) \quad &\geq 0.
\end{aligned}$$

– Für alle $i \in \alpha$ haben wir:

$$\begin{aligned}
H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d_\mu &\geq H_i(x^k) - \underbrace{\|d_\mu\|_2}_{\leq \sqrt{n}\|d_\mu\|_\infty} \|\nabla H_i(x^k)\|_2 \\
&\geq H_i(x^k) - \sqrt{n}\rho \|\nabla H_i(x^k)\|_2 \\
(7.25)+(7.28) \quad &\geq 0.
\end{aligned}$$

– Die Komplementaritätsbedingungen sind auch erfüllt, denn für alle $i \in \beta$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\underbrace{G_i(x^k)}_{=0} + \nabla G_i(x^k)^T d_\mu) (\underbrace{H_i(x^k)}_{=0} + \nabla H_i(x^k)^T d_\mu) &= \\
\frac{(\mu\rho)^2}{\|d^*\|_\infty^2} (\nabla G_i(x^k)^T d^*) (\nabla H_i(x^k)^T d^*) &= \\
\frac{(\mu\rho)^2}{\|d^*\|_\infty^2} (\underbrace{G_i(x^k)}_{=0} + \nabla G_i(x^k)^T d^*) (\underbrace{H_i(x^k)}_{=0} + \nabla H_i(x^k)^T d^*) &\stackrel{(7.24)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wegen

$$(\underbrace{G_i(x^k)}_{=0} + \nabla G_i(x^k)^T d^*) (\underbrace{H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d^*}_{>0, \text{vgl.}(7.22)}) \stackrel{(7.24)}{=} 0$$

folgt außerdem $\nabla G_i(x^k)^T d^* = 0$ und deshalb auch $\underbrace{G_i(x^k)}_{=0} + \nabla G_i(x^k)^T d_\mu = 0$,

für alle $i \in \alpha$.

Wegen

$$(\underbrace{G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d^*}_{>0, \text{vgl.}(7.21)}) (\underbrace{H_i(x^k) + \nabla H_i(x^k)^T d^*}_{=0}) \stackrel{(7.24)}{=} 0$$

folgt analog $\nabla H_i(x^k)^T d^* = 0$ und damit $\underbrace{H_i(x^k)}_{=0} + \nabla H_i(x^k)^T d_\mu = 0$, für alle $i \in \gamma$.

Somit ist die Zulässigkeit von d_μ für das QPEC(x^k, ρ) bewiesen.

Definieren wir jetzt

$$\Phi(\mu) = q(d_\mu),$$

dann gilt:

$$\Phi'(0) = \frac{\rho \nabla f(x^k)^T d^*}{\|d^*\|_\infty} \stackrel{(7.23)}{=} \frac{-\kappa\rho}{\|d^*\|_\infty} < 0$$

und

$$\Phi'' = \left(\frac{\rho}{\|d^*\|_\infty} \right)^2 d^{*T} B d^* \leq \left(\frac{\rho}{\|d^*\|_\infty} \right)^2 \underbrace{\|d^*\|_2^2}_{\leq n\|d^*\|_\infty^2} \underbrace{\|B\|_2}_{\leq M} \leq n\rho^2 M.$$

Somit ergibt sich:

$$\Phi'' + \Phi'(0) \leq \frac{-\kappa\rho}{\|d^*\|_\infty} + n\rho^2 M = \rho \underbrace{\left(nM\rho - \frac{\kappa}{\|d^*\|_\infty} \right)}_{\leq 0, \text{ vgl. (7.25)}} \leq 0.$$

Mit Lemma 7.2 folgt, dass die Funktion $\Phi(\mu)$ ihr Minimum an der Stelle $\mu = 1$ annimmt und dass

$$\Phi(0) - \Phi(1) \geq -\frac{1}{2}\Phi'(0) = \frac{1}{2} \frac{\rho\kappa}{\|d^*\|_\infty}$$

gilt. Damit ergibt sich auch:

$$q(0) - q(d_1) = \Phi(0) - \Phi(1) \geq \frac{1}{2} \frac{\rho\kappa}{\|d^*\|_\infty}.$$

Für die Lösung \bar{d} des QPECs(x^k, ρ) gilt dann:

$$\Delta q = q(0) - \underbrace{q(\bar{d})}_{\leq q(d_1)} \geq q(0) - q(d_1) \geq \frac{1}{2} \frac{\rho\kappa}{\|d^*\|_\infty} > 0. \quad (7.29)$$

Mit Lemma 7.3 ergibt sich $\Delta f \geq \Delta q - n\rho^2 M$, $c(x^k + \bar{d}) \leq \frac{1}{2}n\rho^2 zM$ und $x^k + \bar{d}$ ist zum Filter akzeptabel, da $\rho \leq \sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}}$ gilt, vgl. (7.25). Es folgt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta q} \geq 1 - \frac{n\rho^2 M}{\Delta q} \stackrel{(7.29)}{\geq} 1 - \frac{2n\rho^2 M\|d^*\|_\infty}{\rho\kappa} = 1 - \frac{2n\rho M\|d^*\|_\infty}{\kappa} \stackrel{(7.25)}{\geq} \sigma,$$

d.h. es gilt $\Delta f \geq \sigma\Delta q$ und

$$\begin{aligned} f(x^k) - f(x^k + \bar{d}) - \gamma c(x^k + \bar{d}) &= \Delta f - \gamma c(x^k + \bar{d}) \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\sigma\rho\kappa}{\|d^*\|_\infty} - \frac{1}{2}\gamma n\rho^2 zM \\ &= \frac{1}{2}\rho \underbrace{\left(\frac{\sigma\kappa}{\|d^*\|_\infty} - \gamma n\rho zM \right)}_{\geq 0 \text{ vgl. (7.25)}} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

d.h. $x^k + \bar{d}$ ist auch akzeptabel zum Paar (c^k, f^k) , vgl. (6.9). Insgesamt sind somit alle Bedingungen für eine f -type Iteration erfüllt und die innere Schleife bricht auch in diesem Fall nach endlich vielen Schritten ab. □

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels, vgl. auch [41, Theorem 7]:

Satz 7.6 *Es seien die Standardvoraussetzungen erfüllt. Dann tritt für den Filter SQPEC-Algorithmus einer der drei folgenden Fälle ein:*

- (A) *In der Restaurationsphase wird kein x gefunden, das vom Filter akzeptiert wird und für den das QPEC(x, ρ) für ein $\rho \geq \rho^0$ zulässig ist.*
- (B) *Der Algorithmus bricht in der k -ten Iteration mit der Lösung $d = 0$ ab und x^k ist ein M -stationärer Punkt des MPECs (1). Ist für x^k sogar die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt, dann ist x^k ein stark stationärer Punkt.*
- (C) *Es existiert ein Häufungspunkt der Folge x^k , der zulässig ist und entweder ein A -stationärer Punkt von (1) ist oder nicht die MPEC-MFCQ-Bedingung erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass weder (A) noch (B) eintritt. Die Behauptungen in (B) gelten dabei nach Satz 6.1. Da die innere Schleife nach endlich vielen Schritten abbricht, vgl. Lemma 7.5, erhalten wir durch die äußere Schleife eine unendliche Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Nach den Standardvoraussetzungen ist diese Folge beschränkt, deshalb existiert mindestens ein Häufungspunkt.

Angenommen, (C) ist nicht erfüllt, d.h. für jeden Häufungspunkt gilt: er ist nicht zulässig für das MPEC (1), oder falls er doch zulässig ist, gelte MPEC-MFCQ, aber keine A -Stationarität. Wir betrachten zwei Fälle:

- **1.Fall:** Die Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ enthält unendlich viele c -type Iterationen. Betrachten wir die Teilfolge dieser c -type Iterationen, etwa $(x^k)_{k \in \mathcal{K}}$. Nur bei einer c -type Iteration wird (c^k, f^k) am Ende der Iteration vom Filter akzeptiert. Da $(f^k)_{k \in \mathcal{K}}$ nach unten beschränkt ist, vgl. Bemerkung 7.1, folgt mit Korollar 6.8 dann $c^k \rightarrow 0$ für $k \in \mathcal{K}$ und $k \rightarrow \infty$. Wegen $\tau^k = \min_{j \in \mathcal{F}_k} c^j$ gilt auch $\tau^k \rightarrow 0$. Nach Definition unseres Verfahrens können nur c -type Iterationen τ^k verkleinern und es gibt eine weitere Teilfolge, für die

$$\tau^{k+1} = c^k < \tau^k$$

gilt, dazu beachte man die Definition von τ_k in (6.18) und die Definition von \mathcal{F}_k in (6.6). Da \mathcal{X} beschränkt ist, existiert erneut eine Teilfolge, die gegen einen Häufungspunkt x der Ausgangsfolge konvergiert, sei diese $(x^k)_{k \in \mathcal{S}}$. Wegen $x^k \rightarrow x$ und $c^k \rightarrow 0$ folgt, dass x zulässig für das MPEC (1) ist. Da nach unserer Annahme (C) nicht erfüllt ist und der Häufungspunkt x für (1) zulässig ist, muss MPEC-MFCQ erfüllt sein, aber x ist kein A -stationärer Punkt. Nach Lemma 7.4 existiert folglich eine Umgebung \mathcal{N} von x und positive Konstanten μ und η , so dass für alle $x^k \in \mathcal{N} \cap \mathcal{X}$ und alle ρ mit $\mu c(x^k) \leq \rho \leq \eta$ folgt, dass das QPEC(x^k, ρ) eine Lösung d besitzt, für die die vorhergesagte Reduktion Δq der Ungleichung $\Delta f \geq \sigma \Delta q > 0$ genügt und $\Delta f \geq \gamma c(x^k + d)$ erfüllt ist.

Sei $k \in \mathcal{S}$ so groß, dass folgendes gilt:

1. $x^k \in \mathcal{N}$
2. $\sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}} \leq \eta$. Dies ist wegen $\tau^k \rightarrow 0$ möglich.

3.

$$\frac{\sqrt{c^k}}{c^k} \geq \frac{2\mu}{\sqrt{\frac{2\beta}{znM}}} \iff \sqrt{\frac{2\beta c^k}{znM}} \geq 2\mu c^k.$$

Dies ist wegen

$$\lim_{\substack{c^k \rightarrow 0 \\ k \in S}} \frac{\sqrt{c^k}}{c^k} = \lim_{\substack{c^k \rightarrow 0 \\ k \in S}} \frac{1}{\sqrt{c^k}} = \infty$$

möglich.

Mit der dritten Bedingung folgt mit $\tau^k > c^k$ sofort

$$\sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}} > \sqrt{\frac{2\beta c^k}{znM}} \geq 2\mu c^k. \quad (7.30)$$

Betrachten wir dann für dieses k das zugehörige $\text{QPEC}(x^k, \rho)$. Angenommen die innere Schleife bricht vorher nicht ab und ρ wird so klein, dass

$$\mu c^k \leq \rho \leq 2\mu c^k \quad (7.31)$$

gilt (da ρ in der inneren Schleife ständig halbiert wird, muss das zwangsläufig irgendwann der Fall sein). Dann folgt mit der 2. Bedingung und (7.30):

$$\mu c^k \leq \rho \leq 2\mu c^k < \sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}} \leq \eta. \quad (7.32)$$

Nach dem oben erwähnten Lemma besitzt das zugehörige $\text{QPEC}(x^k, \rho)$ eine Lösung d für die

$$\Delta f \geq \sigma \Delta q > 0 \quad \text{und} \quad \Delta q > 0$$

sowie

$$\Delta f \geq \gamma c(x^k + d)$$

erfüllt ist, d.h. die notwendige Bedingung (6.17) für eine f -type Iteration ist erfüllt und $x^k + d$ ist akzeptabel zum Paar (c^k, f^k) . Da

$$\rho^2 \leq 2\beta\tau^k/(znM)$$

gilt, ist $x^k + d$ auch zum Filter akzeptabel, vgl. Lemma 7.3. Insgesamt sind damit alle Bedingungen für eine f -type Iteration erfüllt. Dies ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass unsere Teilfolge nur aus c -type Iterationen besteht. Also muss die innere Schleife vorher (bevor ρ in das Intervall aus (7.31) hineinfällt) mit einer c -type-Iteration abbrechen. Das ist aber ein Widerspruch zu Bemerkung 6.9, denn wenn es irgendwann eine f -type Iteration für ein ρ gibt, kann es nicht sein, dass vorher eine c -type Iteration auftritt. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass unsere Annahme in diesem Fall nicht erfüllt sein kann.

- **2.Fall:** Die Folge enthält nur endlich viele c -type Iterationen.

In diesem Fall gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ nur noch f -type Iterationen auftreten. Dann gilt $\Delta f^k \geq \sigma \Delta q^k > 0$ und (c^{k+1}, f^{k+1}) ist immer zu (c^k, f^k) akzeptabel, d.h. es gilt

$$c(x^{k+1}) \leq \beta c(x^k) \quad \text{oder} \quad f(x^{k+1}) + \gamma c(x^{k+1}) \leq f(x^k). \quad (7.33)$$

Für $k \geq K$ ist die Funktionenfolge f^k damit streng monoton fallend und nach unten beschränkt, vgl. Bemerkung 7.1. Folglich ist f^k konvergent, der Grenzwert sei f^* . Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq K} \Delta f^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=K}^n \Delta f^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=K}^n f^k - f^{k+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f^K - f^{n+1}) = f^K - f^* < \infty. \end{aligned}$$

Desweiteren ergibt sich mit Lemma 6.7 (die Funktionenfolge f^k ist monoton fallend und beschränkt), dass $c^k \rightarrow 0$ gilt. Analog zu oben ist damit jeder Häufungspunkt der Folge x^k ein zulässiger Punkt für das MPEC (1).

Sei x nun ein Häufungspunkt der Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, welcher existiert, da \mathcal{X} beschränkt ist. Außerdem sei \mathcal{S} die dazugehörige Teilfolge, d.h. es gelte $x^k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$ und $k \in \mathcal{S}$. Da nach unserer Annahme (C) nicht erfüllt ist, gilt für x die MPEC-MFCQ-Bedingung, aber x ist kein A-stationärer Punkt.

Da es ab K nur f -type Iterationen gibt, wird vom Filter kein weiterer Punkt akzeptiert und τ^k bleibt konstant: $\tau^k = \tau^K$ für alle $k \geq K$. Analog zum ersten Fall existiert nach Lemma 7.4 eine Umgebung \mathcal{N} von x und positive Konstanten κ, μ und η , so dass für alle $x^k \in \mathcal{N} \cap \mathcal{X}$ und alle ρ mit $\mu c(x^k) \leq \rho \leq \eta$ folgt, dass das QPEC(x^k, ρ) eine Lösung d besitzt, für die die vorhergesagte Reduktion Δq der Ungleichung $\Delta f \geq \sigma \Delta q > 0$ genügt, $\Delta f \geq \gamma c(x^k + d)$ erfüllt ist und $\Delta q \geq \frac{1}{3} \rho \kappa$ ist.

Wählen wir nun $k \in \mathcal{S}$ so groß, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $x^k \in \mathcal{N}$
2. $\min \left\{ \sqrt{\frac{2\beta\tau^k}{znM}}, \eta \right\} \geq 2\mu c(x^k)$ Dies ist möglich, da die linke Seite konstant ist, sagen wir $\bar{\rho} = \min \left\{ \sqrt{\frac{2\beta\tau^K}{znM}}, \eta \right\}$ und die rechte Seite gegen Null konvergiert.

Betrachten wir jetzt für dieses k das QPEC(x^k, ρ). Dann bricht die innere Schleife irgendwann ab, spätestens wenn

$$\frac{1}{2}\bar{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$$

gilt (da ρ in der inneren Schleife immer halbiert wird, ist das zwangsläufig irgendwann der Fall), denn dann gilt wegen

$$\mu c(x^k) \leq 2\mu c(x^k) \leq \bar{\rho} = \min \left\{ \sqrt{\frac{2\beta\tau^K}{znM}}, \eta \right\} \leq \eta$$

auch

$$\mu c(x^k) \leq \rho \leq \eta \quad (7.34)$$

und wir haben nach Lemma 7.4 eine f -type Iteration mit:

$$\Delta q \geq \frac{1}{3} \underbrace{\rho}_{\geq \frac{1}{2}\bar{\rho}} \kappa \geq \frac{1}{6} \bar{\rho} \kappa.$$

Es gilt $\Delta q \geq \frac{1}{6} \bar{\rho} \kappa$ auch dann, wenn die innere Schleife schon für ein $\rho > \bar{\rho}$ abbricht und erst gar nicht das Intervall (7.34) erreicht wird, da Δq in der inneren Schleife verkleinert wird, wenn ρ verkleinert wird. Insgesamt gilt folglich:

$$\Delta f^k \geq \frac{1}{6} \sigma \kappa \bar{\rho}$$

für alle $k \in \mathcal{S}$ und k hinreichend groß. Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\sum_{k \geq K} \Delta f^k < \infty.$$

Damit ist (C) ist auch in diesem Fall erfüllt.

□

Wir erhalten das folgende zusätzliche Resultat:

Korollar 7.7 *Falls bei unserem Filter-SQPEC-Algorithmus der Fall (C) aus dem Konvergenzsatz 7.6 eintritt, dann kann für den existierenden Häufungspunkt x einer der beiden folgenden Fälle eintreten:*

- *Es existiert ein ρ , so dass das zugehörige QPEC(x, ρ) die Lösung $d = 0$ besitzt. In diesem Fall ist x dann nach Satz 6.1 ein M -stationärer Punkt. Ist sogar die MPEC-LICQ-Bedingung erfüllt, dann ist x ein stark stationärer Punkt.*
- *Es existiert kein ρ , so dass das zugehörige QPEC(x, ρ) eine Lösung $d = 0$ besitzt. Dann erfüllt x die MPEC-MFCQ-Bedingung nicht oder ist ein A -stationärer Punkt, aber kein lokales Minimum unseres MPECs (1).*

Beweis. Sämtliche Behauptungen folgen mit Satz 6.1 bzw. Satz 7.6. Es bleibt lediglich zu beweisen, dass im zweiten Fall x kein lokales Minimum des MPECs (1) ist, falls x der MPEC-MFCQ-Bedingung genügt und ein A -stationärer Punkt ist.

Wir setzen wie im Beweis zu Lemma 7.5

$$G_{min} := \min \left\{ \frac{G_i(x^k)}{\sqrt{n} \|\nabla G_i(x^k)\|_2} \mid i \in \gamma \right\} \quad (7.35)$$

und

$$H_{min} := \min \left\{ \frac{H_i(x^k)}{\sqrt{n} \|\nabla H_i(x^k)\|_2} \mid i \in \alpha \right\}. \quad (7.36)$$

Weiterhin wählen wir ein ρ mit

$$\rho \leq \min \{H_{min}, G_{min}\}. \quad (7.37)$$

Lösen wir dann mit diesem ρ das QPEC(x, ρ), gilt für die Lösung d^* :

$$\begin{aligned} \nabla f(x)^T d^* + \frac{1}{2} d^{*T} B d^* &< 0 \\ g_i(x) + \nabla g_i(x)^T d^* &\leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) + \nabla h_i(x)^T d^* &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d^* &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d^* &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ (G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d^*) (H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d^*) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \|d^*\|_\infty &\leq \rho. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Die erste Bedingung gilt, da $d = 0$ keine Lösung ist und deshalb haben wir:

$$\Delta q = q(0) - \underbrace{q(d^*)}_{< q(0)} = -\nabla f(x)^T d^* - \frac{1}{2} d^{*T} B d^* > 0.$$

Da B positiv semidefinit ist, folgt sogar $\nabla f(x)^T d^* < 0$. Außerdem ist d^* ein Element des MPEC-linearisierten Tangentialkegels, vgl. Definition 2.6, denn es gilt:

- Zusammen mit (7.38) und der Zulässigkeit von x für das MPEC (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x)^T d^* &\leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_g, \\ \nabla h_i(x)^T d^* &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(x)^T d^* &\geq 0, \quad \forall i \in \alpha \cup \beta, \\ \nabla H_i(x)^T d^* &\geq 0, \quad \forall i \in \beta \cup \gamma, \\ (\nabla G_i(x)^T d^*) (\nabla H_i(x)^T d^*) &= 0, \quad \forall i \in \beta. \end{aligned}$$

- Für alle $i \in \gamma$ gilt $G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d^* > 0$, vgl. (7.35) und (7.37). Deshalb folgt

$$\underbrace{(G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d^*)}_{>0} \underbrace{(H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d^*)}_{=0} \stackrel{(7.38)}{=} 0$$

bzw.

$$\nabla H_i(x)^T d^* = 0.$$

- Für alle $i \in \alpha$ gilt $H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d^* > 0$, vgl. (7.36) und (7.37). Deshalb folgt

$$\underbrace{(G_i(x) + \nabla G_i(x)^T d^*)}_{=0} \underbrace{(H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d^*)}_{>0} \stackrel{(7.38)}{=} 0$$

also auch

$$\nabla G_i(x)^T d^* = 0.$$

Folglich existiert ein $d^* \in \mathcal{T}_{\text{MPEC}}^{\text{lin}}(x)$ mit $\nabla f(x)^T d^* < 0$. Da x der MPEC-MFCQ-Bedingung genügt, genügt x auch der MPEC-ACQ-Bedingung, vgl. Lemma 2.11. Deshalb sind Tangentialkegel und MPEC-linearisierter Tangentialkegel gleich, vgl. Definition 2.8, und es existiert ein $d^* \in \mathcal{T}(x)$ mit $\nabla f(x)^T d^* < 0$. Nach Lemma 1.10 ist x kein lokales Minimum. \square

Da wir für den Beweis nur die positive Definitheit der Matrix B benötigen, wollen wir hier noch mal explizit erwähnen, dass durchaus auch $B = 0$ sein kann, d.h. die Teilprobleme dürfen auch LPECs sein.

Kapitel 8

Numerische Resultate

8.1 Hinweise zur Implementation

8.1.1 Implementation der Restaurationsphase

Wenn man das Filter-SQPEC-Verfahren aus Abbildung 6.2 implementieren möchte, hat man das Problem, dass man in der Restaurationsphase in Iteration k ein x finden muss, so dass das QPEC(x, ρ) für ein $\rho \geq \rho^0$ zulässig ist und x zum Filter und zum Paar (c^k, f^k) akzeptabel ist. Dabei hat man mehrere Möglichkeiten, vgl. auch [40, 41]. Man kann z.B. versuchen, einen zulässigen Punkt für das MPEC (1) zu finden, indem man das folgende unrestringierte Optimierungsproblem löst:

$$\begin{aligned} \min q(x) := & \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{i=1}^p |h_i(x)| + \\ & \sum_{i=1}^{\ell} [\max\{0, -G_i(x)\} + \max\{0, -H_i(x)\} + |G_i(x)H_i(x)|] \end{aligned} \quad (8.1)$$

Offensichtlich ist q nach unten durch 0 beschränkt und für jeden zulässigen Punkt x von (1) gilt auch tatsächlich $q(x) = 0$, wie man sofort sieht. Schreibt man das Programm (8.1) um, so erhält man folgendes restringierte Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{i=1}^p (\beta_i^+ + \beta_i^-) + \sum_{i=1}^{\ell} (\gamma_i + \delta_i + \eta_i^+ + \eta_i^-) \\ \text{u.d.N.} & \begin{aligned} g_i(x) & \leq \alpha_i, & \alpha_i & \geq 0, & \forall i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) & = \beta_i^+ - \beta_i^-, & \beta_i^+, \beta_i^- & \geq 0, & \forall i = 1, \dots, p, \\ -G_i(x) & \leq \gamma_i, & \gamma_i & \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ -H_i(x) & \leq \delta_i, & \delta_i & \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ G_i(x)H_i(x) & = \eta_i^+ - \eta_i^-, & \eta_i^+, \eta_i^- & \geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Dieses Optimierungsproblem hängt von den Variablen $x, \alpha, \beta^+, \beta^-, \gamma, \delta, \eta^+, \eta^-$ ab. Für ein

beliebiges x erhält man offensichtlich einen zulässigen Punkt für (8.2) und damit einen Startwert für sämtliche Verfahren, wenn man

$$\begin{aligned}\alpha &= \max\{0, g(x)\}, \\ \beta^+ &= \max\{0, h(x)\}, \\ \beta^- &= \max\{0, -h(x)\}, \\ \gamma &= \max\{0, -G(x)\}, \\ \delta &= \max\{0, -H(x)\}, \\ \eta^+ &= \max\{0, G(x)H(x)\}, \\ \eta^- &= \max\{0, -G(x)H(x)\}\end{aligned}$$

setzt. Hat man eine Lösung von (8.2) gefunden und damit einen zulässigen Punkt x^* für das MPEC (1), so erfüllt er auch die geforderten Eigenschaften in der Restaurationsphase und sie bricht ab:

- Das QPEC(x, ρ) ist dann für jedes ρ zulässig, da $d = 0$ ein zulässiger Punkt ist.
- Nach Bemerkung 6.10 gilt für alle Paare, die in den Filter aufgenommen werden $c^j > 0$. Wegen $c(x^*) = 0$ ist dann aber das Paar $(c(x^*), f(x^*))$ zum Filter akzeptabel, vgl. (6.9).

8.1.2 Allgemeine Hinweise zur Implementation des Verfahrens

Der Filter-SQPEC-Algorithmus wurde in Matlab implementiert. Um in der Restaurationsphase einen zulässigen Punkt von (8.2) zu finden, wurde der TOMLAB-Solver `nlpSolve` verwendet, den man von der TOMLAB-Seite [48] beziehen kann. `nlpSolve` ist eine Matlab-Implementation des Filter-SQP Algorithmus von Roger Fletcher und Sven Leyffer, der auch schon als Grundlage für unseren Filter-SQPEC Algorithmus gedient hat, vgl. [36, 41]. Außerdem wurden folgende Konstanten benutzt: $\rho^0 = 1, u = 100, \beta = 0.99, \gamma = 0.01, \sigma = 0.1$. Gestartet wurde am Anfang mit $\rho = 100$ und als Toleranzgrenze für das Abbruchkriterium $d = 0$ wurde $1e - 8$ verwendet.

Für die Matrix B wurde $B = 0$ gesetzt, weshalb alle Teilprobleme Lineare Mathematische Programme mit Gleichgewichtsrestriktionen (LPECs) sind, für die die Theorie aus Kapitel II verwendet werden kann.

8.2 Ergebnisse der MacMPEC Testsammlung

Das Filter-SQPEC-Verfahren (eigentlich ein Filter-SLPEC-Verfahren, da $B = 0$ gesetzt wurde) wurde an der MPEC-Testsammlung MacMPEC von Sven Leyffer getestet, die im Internet unter [54] zu finden ist. Die Testprobleme sind dabei in der Modellierungssprache AMPL geschrieben. Mit der C-Funktion `amplfunc.c` (welche man sich im Internet downloaden kann) kann eine Mex-Funktion erstellt werden, mit deren Hilfe die Beispiele dann mit Matlab getestet werden können. Genauere Hinweise dazu findet man in [45]. Die Testsammlung beinhaltet die verschiedensten MPECs. Die meisten MPECs davon haben lineare bzw.

quadratische Zielfunktionen sowie lineare bzw. quadratische Nebenbedingungen. Für eine detailliertere Beschreibung der Probleme und auch ihrer Herkunft, vgl. [54].

8.2.1 Übersicht über die gefundenen Ergebnisse

Die folgende Tabelle enthält die Lösungen, die mittels des Filter-SQPPEC-Verfahrens erzielt wurden. Dabei wird Folgendes angegeben:

- Spalte 1 enthält den Namen des Beispiels,
- Spalte 2 enthält die Anzahl n der Variablen,
- Spalte 3-5 die jeweilige Anzahl m, p, l der Nebenbedingungen,
- Spalte 6 enthält den optimalen Zielfunktionswert $f(x^*)$, der gefunden wurde,
- Spalte 7 die CPU-Zeit, die unser Rechner benötigt hat, um die Lösung zu finden,
- Spalte 8 den Wert des Iterationszähler k , als die Lösung gefunden wurde und schließlich
- Spalte 9 die Anzahl an Teilproblemen, die insgesamt gelöst werden mussten.

Wir haben uns dabei weitestgehend auf Probleme mit $l \leq 50$ beschränkt, da es sonst sehr lange gedauert hat, bis die Teilprobleme gelöst wurden.

Beispiel	n	m	p	l	$f(x^*)$	Cpu-Zeit	k	$QPPEC$
bard1	5	2	1	3	17.00000000	0.40	2	4
bard2	12	18	5	3	6163.00000000	2.84	2	2
bard3	6	6	3	1	-12.67871094	0.55	3	3
bard1m	6	3	1	3	17.00000000	0.59	2	4
bard2m	18	18	8	6	-6598.00000000	408.36	5	3
bard3m	6	4	1	3	-12.67871094	0.58	3	3
bilevel1	10	5	2	6	0.00000000	1.22	2	2
bilevel2	16	13	4	8	-6600.00000000	7.19	7	39
bilevel3	11	4	6	3	-12.67871094	0.75	4	4
bilevel1m	16	5	6	8	-10.00000000	433.93	4	2
bilevel2m	16	13	4	8	-6600.00000000	8.46	7	39
bilin	8	3	1	6	0.00000000	0.55	2	2
dempe	3	0	1	1	31.25000002	43.43	47	504

Beispiel	n	m	p	l	$f(x^*)$	Cpu-Zeit	k	$QPEC$
design-cent-4	22	7	10	8	0.00000000	0.26	2	2
design-cent-31	15	3	6	3	0.00001997	65.11	88	644
desilva	6	4	2	2	-0.99999999	0.27	1	1
df1	2	4	1	1	0.00000000	5.05	8	32
ex9.1.1	13	1	7	5	-13.00000000	2.54	2	2
ex9.1.2	8	5	5	2	-6.25000000	0.67	1	1
ex9.1.3	23	8	15	6	-29.20000000	1.10	2	2
ex9.1.4	8	4	5	2	-37.00000000	3.19	2	2
ex9.1.5	13	3	7	5	-1.00000000	0.37	2	2
ex9.1.6	14	2	7	6	-49.00000000	2.51	2	2
ex9.1.7	17	5	9	6	-26.00000000	0.88	2	2
ex9.1.8	11	6	5	3	-3.25000000	0.43	2	2
ex9.1.9	12	2	6	5	3.11111111	0.91	2	2
ex9.1.10	11	6	5	3	-3.25000000	0.43	2	2
ex9.2.1	10	2	5	4	17.00000000	1.59	2	5
ex9.2.2	9	5	4	3	100.00000000	1.65	1	1
ex9.2.3	14	9	8	4	5.00000000	1.50	2	2
ex9.2.4	8	3	5	2	0.50000000	6.17	7	62
ex9.2.5	8	2	4	3	5.00000000	7.08	11	68
ex9.2.6	16	4	6	6	-1.00000000	1.76	3	12
ex9.2.7	10	2	5	4	17.00000000	1.38	2	5
ex9.2.8	6	3	3	2	1.50000000	0.29	2	2
ex9.2.9	9	4	5	3	2.00000000	0.44	2	2
flp2	4	4	1	2	0.00000000	6.67	7	63
flp4-1	80	30	1	30	0.00000001	59.20	48	469
flp4-2	110	50	1	60	0.00000000	40.23	20	190
flp4-3	140	100	1	70	0.00000000	76.31	23	208
flp4-4	200	150	1	100	0.00000004	789.86	70	868
gauvin	3	2	1	2	20.00000000	4.51	5	17
gnash10	13	2	4	8	-230.82320672	21.29	9	65
gnash11	13	2	4	8	-129.91192351	19.20	13	61
gnash12	13	2	4	8	-36.93310678	18.47	11	61
gnash13	13	2	4	8	-7.06178327	21.72	12	79
gnash14	13	2	4	8	-0.17904631	13.48	9	48
gnash15	13	2	4	8	-354.69905881	3.45	1	1
gnash16	13	2	4	8	-241.44197661	2.68	1	1
gnash17	13	2	4	8	-90.74910178	22.27	10	65
gnash18	13	2	4	8	-25.69821527	28.10	11	88
gnash19	13	2	4	8	-6.11670822	19.29	11	62
gnash10m	18	4	9	8	-230.82320672	41.35	14	71

Beispiel	n	m	p	l	$f(x^*)$	Cpu-Zeit	k	$QPEC$
gnash11m	18	4	9	8	-129.91192351	40.91	12	69
gnash12m	18	4	9	8	-36.93310678	34.43	11	61
gnash13m	18	4	9	8	-7.06178327	35.39	12	79
gnash14m	18	4	9	8	-0.17904631	25.47	9	48
gnash15m	18	4	9	8	-354.69905881	12.65	2	2
gnash16m	18	4	9	8	-241.44197661	9.70	1	1
gnash17m	18	4	9	8	-90.74910178	30.42	11	66
gnash18m	18	4	9	8	-25.69821527	34.90	11	88
gnash19m	18	4	9	8	-6.11670822	24.74	11	62
hs044-i	20	12	4	10	15.61776889	16.39	8	48
incid-set1-8	118	77	50	49	0.00000000	22.55	13	53
incid-set1c-8	117	82	49	49	0.00000000	22.48	16	69
incid-set2-8	117	75	49	49	0.00504318	31.00	12	66
incid-set2c-8	117	82	49	49	0.00563081	41.91	23	134
jr1	2	0	1	1	0.50000000	3.97	8	69
jr2	2	0	1	1	0.50000000	1.95	5	21
kth1	2	0	1	1	0.00000000	0.18	2	2
kth2	2	0	1	1	0.00000000	1.14	5	19
kth3	2	0	1	1	0.50000000	6.28	8	71
liswet1-050	152	51	52	50	0.01399589	95697.87	102	81
nash1	6	4	2	2	0.00000000	12.38	10	61
nash1a	6	4	2	2	0.00000000	6.22	10	62
nash1b	6	4	2	2	0.00000000	8.95	14	106
nash1c	6	4	2	2	0.00000000	6.20	11	60
nash1d	6	4	2	2	0.00000000	8.69	13	88
nash1e	6	4	2	2	0.00000000	7.86	16	90
outrata31	5	2	1	4	3.20770002	1.18	7	10
outrata32	5	2	1	4	3.44940357	11.83	14	93
outrata33	5	2	1	4	4.60425365	15.26	23	154
outrata34	5	2	1	4	6.59268383	17.98	17	124
pack-comp1-8	107	49	49	49	0.60000000	13.54	3	3
pack-comp1c-8	107	56	49	49	0.60000000	13.31	3	3
pack-comp1p-8	107	34	49	49	0.59999995	14.45	3	3
pack-comp2-8	107	49	49	49	0.67311715	116.69	105	901
pack-comp2c-8	107	56	49	49	0.67345796	18.94	19	50
pack-comp2p-8	107	34	49	49	0.67362039	711.47	510	4670
pack-rig1-8	87	59	46	32	0.78792769	167.57	69	415
pack-rig1c-8	87	66	46	32	0.78829751	103.27	75	313
pack-rig1p-8	105	62	49	47	0.78793254	493.80	74	405
pack-rig2-8	85	59	46	30	0.78040386	143.45	90	505

Beispiel	n	m	p	l	$f(x^*)$	Cpu-Zeit	k	$QPEC$
pack-rig2c-8	85	66	46	30	0.79930582	226.56	98	661
pack-rig2p-8	103	62	49	45	0.78040353	327.77	83	482
pack-rig3-8	85	59	46	30	0.73520211	3277.73	1053	12676
pack-rig3c-8	85	66	46	30	0.75347262	196.88	98	555
portfl-i-1	87	62	13	12	0.00001503	102.92	19	206
portfl-i-3	87	62	13	12	0.00000627	82.38	22	227
qpec1	30	0	1	20	80.00000000	2.79	8	26
qpec2	30	0	1	20	45.00000000	604.83	5	20
ralph1	2	1	1	1	0.00000000	0.35	1	1
ralph2	2	0	1	1	0.00000000	4.82	5	65
scholtes1	3	1	1	1	2.00000000	4.79	9	83
scholtes2	3	1	1	1	15.00000000	0.33	3	3
scholtes3	2	0	1	1	0.50000000	2.88	5	32
scholtes4	3	2	1	1	0.00000000	0.61	2	2
scholtes5	3	0	1	2	1.00000000	4.70	10	81
scale1	2	0	1	1	1.00000000	10.83	9	140
scale2	2	0	1	1	1.00000000	1.77	5	20
scale3	2	0	1	1	1.00000000	2.30	5	20
scale4	2	0	1	1	1.00000000	11.49	9	140
scale5	2	0	1	1	100.00000000	2.23	5	20
sl1	8	6	2	3	0.00010000	0.97	2	2
stackelberg1	3	2	1	1	-3266.66666667	5.59	11	71
tap-09	86	40	32	32	110.19722547	1331.64	54	304
taxmcp	15	6	3	11	0.81870499	0.73	1	1

8.2.2 Darstellung vereinzelter Lösungen

In der folgenden Tabelle sind einige Lösungsvektoren von klein-dimensionalen Beispielen konkret angegeben, die einen anderen Zielfunktionswert besitzen, als in [54] angegeben:

Beispiel	Lösungsvektor	Abbruch mit $d = 0$?
bard2	$(0, 6, 31, 0, 4.2, 1.8, 12.4368, 18.6, 20, 0, 0, 13.3)^T$	Ja
bilin	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	Ja
ex9.1.6	$(16, 11, 28, 12, 0, 0, 12, 11, 0, 0, 3, 0, 0, 0)^T$	Ja
ex9.1.7	$(0, 0.9, 0, 0.6, 0.4, 0, 0, 0, 0, 0.6, 0.4, 0, 1, 3, 6, 0, 0)^T$	Ja
ex9.2.1	$(1, 0, 0, 3, 6, 0, 3.5, 0, 0, 0)^T$	Ja
ex9.2.3	$(5, 10, 25, 30, 5, 0, 15, 15, 20, 10, 0, 0, 0, 0)^T$	Ja
ex9.2.5	$(3, 1, 0, 7, 7, 4, 0, 0)^T$	Ja
ex9.2.7	$(1, 0, 0, 3, 6, 0, 3.5, 0, 0, 0)^T$	Ja

Die folgende Tabelle gibt abschließend die Beispiele aus, bei der bei uns eine andere Lösung gefunden wurde, wie bei Leyffer [54] oder Veelken [90]:

Beispiel	unsere Lösung	Lösung von Leyffer	Lösung von Veelken
bard2	6163.00000000	-6598	-6598
bilevel1	0.00000000	0	-10
bilevel1m	-10.00000000	-55	-
bilin	0.00000000	5.6	-14.6
design-cent-4	0.00000000	3.0792	-3341.0
design-cent-31	0.00001997	3.72337	-
ex9.1.3	-29.20000000	-29.2	-23
ex9.1.4	-37.00000000	-37	-63
ex9.1.6	-49.00000000	-15	-49
ex9.1.7	-26.00000000	-6	-23
ex9.2.1	17.00000000	25	17
ex9.2.3	5.00000000	-55	5
ex9.2.5	5.00000000	9	9
ex9.2.7	17.00000000	25	17
hs044-i	15.61776889	15.6178	17.090
incid-set2-8	0.00504318	$4.518E - 03$	$0.45179E - 02$
incid-set2c-8	0.00563081	$5.471E - 03$	$0.54713E - 02$
nash1a	0.00000000	$7.88861E - 30$	-
nash1b	0.00000000	$7.88861E - 30$	-
nash1c	0.00000000	$7.88861E - 30$	-
nash1d	0.00000000	$7.88861E - 30$	-
nash1e	0.00000000	$7.88861E - 30$	-
pack-comp2p-8	0.67362039	0.673117	0.673117
pack-rig1-8	0.78792769	0.787932	0.78793
pack-rig1p-8	0.78793254	0.787932	0.78793
tap-09	110.19722547	109.143	109.13

Literaturverzeichnis

- [1] M. Amouzegar und K. Moshirvaziri: *A penalty method for linear bilevel programming problems*. In A. MIGDALAS, P.M. PARDALOS UND P. VÄRBRAND: *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1998, 251–271.
- [2] M. ANITESCU: *On solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs*. Technical Report, Argonne National Laboratory, 2004.
- [3] M. ANITESCU: *On using the elastic mode in nonlinear programming approaches to mathematical programs with complementarity constraints*. SIAM Journal on Optimization 15(4), 2005, 1203–1236.
- [4] M. ANITESCU: *Global convergence of an elastic mode approach for a class of mathematical programs with complementarity constraints*. SIAM Journal on Optimization 16, 2005, 120–145.
- [5] M. ANITESCU, P. TSENG UND S.J. WRIGHT: *Elastic-mode algorithms for mathematical programs with equilibrium constraints: Global convergence and stationarity properties*. Mathematical Programming 110(2), 2007, 337–371.
- [6] C. AUDET, P. HANSEN, B. JAUMARD UND G. SAVARD: *Links between linear bilevel and mixed 0-1 programming problems*. Journal of Optimization Theory and Applications 93(2), 1997, 273–300.
- [7] J.F. BARD: *Convex two-level optimization*. Mathematical Programming 40, 1988, 15–27.
- [8] J.F. BARD: *Practical Bilevel Optimization. Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- [9] J.F. BARD UND J.E. FALK: *An explicit solution to the multi-level programming problem*. Computers and Operations Research 9, 1982, 77–100.
- [10] J.F. BARD UND J.T. MOORE: *A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 11(2), 1990, 281–292.

- [11] M.S. BAZARAA, H.D. SHERALI UND C.M. SHETTY: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, New York, third ed., 2006.
- [12] M.S. BAZARAA UND C.M. SHETTY: *Foundations of Optimization*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [13] D. BERTSIMAS UND J.N. TSITSIKLIS: *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, Belmont, MA, 1997.
- [14] S. BRAUN UND J.E. MITCHELL: *A semidefinite programming heuristic for quadratic programming problems with complementarity constraints*. Computational Optimization and Applications 31, 2005, 5–29.
- [15] G. BOUZA UND G. STILL: *Mathematical programs with complementarity constraints: Convergence properties of a smoothing method*. Mathematics of Operations research 32(2), 2007, 467–483.
- [16] P.H. CALAMAI UND L.N. VICENTE: *Generating linear and linear-quadratic bilevel programming problems*. SIAM Journal on Scientific Computing 14, 1993, 770–782.
- [17] Y. CHEN UND M. FLORIAN: *The nonlinear bilevel programming problem: Formulations, regularity and optimality conditions*. Optimization 32, 1995, 193–209.
- [18] B. COLSON, P. MARCOTTE UND G. SAVARD: *A trust-region method for nonlinear bilevel programming: algorithm and computational experience*. Computational Optimization and Applications 30, 2005, 211–227.
- [19] V. DEMIGUEL, M.P. FRIEDLANDER, F.J. NOGALES UND S. SCHOLTES: *An interior-point method for MPECs based on strictly feasible relaxations*. Technical Report, Argonne National Laboratory, April 2004.
- [20] V. DEMIGUEL, M.P. FRIEDLANDER, F.J. NOGALES UND S. SCHOLTES: *A two-sided relaxation scheme for mathematical programs with equilibrium constraints*. SIAM Journal on Optimization 16(2), 2005, 587–609.
- [21] S. DEMPE: *A bundle algorithm applied to bilevel programming problems with non-unique lower level solutions*. Computational Optimization and Applications 15(2), 2000, 145–166.
- [22] S. DEMPE: *Bilevel programming: the implicit function approach*. Encyclopedia of Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Volume I, 2001, 167–173.
- [23] S. DEMPE: *Foundations of Bilevel Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2002.

- [24] S. DEMPE: *Bilevel programming*. In: C. AUDET, P. HANSEN, G. SAVARD: *Essays and Surveys in Global Optimization*. Kluwer Academic Publisher, Boston et al., 2005, 165–194.
- [25] S. DEMPE UND J.F. BARD: *Bundle trust-region algorithm for bilinear bilevel programming*. Journal of Optimization Theory and Applications, 110(2), 2001, 265–288.
- [26] J.-P. DUSSAULT, P. MARCOTTE, S. ROCH UND G. SAVARD: *A smoothing heuristic for a bilevel pricing problem*. European Journal of Operational Research 174, 2006, 1396–1413.
- [27] F. FACCHINEI, H. JIANG UND L. QI: *A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints*. Mathematical Programming 85, 1999, 107–134.
- [28] M.L. FLEGEL: *Constraint Qualifications and Stationarity Concepts for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Dissertation, Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Würzburg, März 2005.
- [29] M.L. FLEGEL UND C. KANZOW: *A Fritz John approach to first order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints*. Optimization 52(3), 2003, 277–286.
- [30] M.L. FLEGEL UND C. KANZOW: *Abadie-type constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 124(3), 2005, 595–614.
- [31] M.L. FLEGEL UND C. KANZOW: *On M -stationary points for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 310, 2005, 286–302.
- [32] M.L. FLEGEL UND C. KANZOW: *On the Guignard constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints*. Optimization 54(6), 2005, 517–534.
- [33] M.L. FLEGEL UND C. KANZOW: *A direct proof for M -stationarity under MPEC-GCQ for mathematical programs with equilibrium constraints*. In S. DEMPE UND V. KALASHNIKOV: *Optimization with Multivalued Mappings*. Springer Optimization and Its Applications 2, 2006, 111–122.
- [34] M.L. FLEGEL, C. KANZOW UND J.V. OUTRATA: *Optimality conditions for disjunctive programs with application to mathematical programs with equilibrium constraints*. Set-Valued Analysis 15, 2007, 139–162.
- [35] R. FLETCHER: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, New York, Second Edition, 2000.
- [36] R. FLETCHER UND S. LEYFFER: *Nonlinear programming without a penalty function*. Mathematical Programming 91(2), 2002, 239–269.

- [37] R. FLETCHER UND S. LEYFFER: *Numerical experience with solving MPECs as NLPs*. Numerical Analysis Report NA/210, Department of Mathematics, University of Dundee, 2002.
- [38] R. FLETCHER UND S. LEYFFER: *Solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs*. Optimization Methods and Software 19, 2004, 15–40.
- [39] R. FLETCHER, S. LEYFFER, D. RALPH UND S. SCHOLTES: *Local convergence of SQP methods for mathematical programs with equilibrium constraints*. SIAM Journal on Optimization 17, 2006, 259–286.
- [40] R. FLETCHER, S. LEYFFER UND P.L. TOINT: *On the global convergence of an SLP-filter algorithm*. Report NA/183, Department of Mathematics, Dundee University, Dundee, Scotland, 1999.
- [41] R. FLETCHER, S. LEYFFER UND P.L. TOINT: *On the global convergence of a filter-SQP Algorithm*. SIAM Journal on Optimization 13, 2002, 44–59.
- [42] C.A. FLOUDAS, P.M. PARDALOSA, C.S. ADJIMAN, W.R. ESPOSITO, Z.H. GÜMÜS, S.T. HARDING, J.L. KLEPEIS, C.A. MEYER UND C.A. SCHWEIGER: *Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [43] M. FUKUSHIMA, Z.-Q. LUO UND J.-S. PANG: *A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints*. Computational Optimization and Applications 10, 1998, 5–34.
- [44] M. FUKUSHIMA UND J.-S. PANG: *Convergence of a smoothing continuation method for mathematical programs with equilibrium constraints*. In M. THÉRA UND R. TICHATSCHKE (eds.): *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, 99–110.
- [45] D.M. GAY: *Hooking your solver to AMPL*. Technical Report 97-4-06 Computing Sciences Research Center, Bell Laboratories, Lucent Technologies, Murray Hill, New Jersey, 1997. Vergleiche <http://www.ampl.com/REFS/hooks2.pdf>.
- [46] C. GEIGER UND C. KANZOW: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [47] P. HANSEN, B. JAUMARD UND G. SAVARD: *New branch-and-bound rules for linear bilevel programming*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 13(5), 1992, 1194–1217.
- [48] K. HOLMSTRÖM: *Tomlab Optimization*. Webpage, <http://tomopt.com/tomlab>.

- [49] X.M. HU UND D. RALPH: *Convergence of a penalty method for mathematical programming with complementarity constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 123(2), 2004, 365–390.
- [50] J.-B. JIAN, J.-L. LI UND X.-D. MO: *A strongly and superlinearly convergent SQP algorithm for optimization problems with linear complementarity constraints*. Applied Mathematics and Optimization 54, 2006, 17–46.
- [51] H. JIANG UND D. RALPH: *Smooth SQP methods for mathematical programs with nonlinear complementarity constraints*. SIAM Journal on Optimization 10(3), 1999, 779–808.
- [52] J.J. JÚDICE, H.D. SHERALI, I.M. RIBEIRO UND A.M. FAUSTINO: *A complementarity-based partitioning and disjunctive cut algorithm for mathematical programming problems with equilibrium constraints*. Journal of Global Optimization 36, 2006, 89–114.
- [53] J.J. JÚDICE, H.D. SHERALI, I.M. RIBEIRO UND A.M. FAUSTINO: *Complementarity active-set algorithm for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 134(3), 2007, 467–481.
- [54] S. LEYFFER: *MacMPEC: Ampl Collection of Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Webpage, <http://wiki.mcs.anl.gov/leyffer/index.php/MacMPEC>, 2000.
- [55] S. LEYFFER: *Complementarity constraints as nonlinear equations: Theory and numerical experience*. In S. DEMPE UND V. KALASHNIKOV: *Optimization with Multivalued Mappings*. New York, NY: Springer. Springer Optimization and its Applications 2, 2006, 169–208.
- [56] S. LEYFFER, G. LÓPEZ-CALVA UND J. NOCEDAL: *Interior methods for mathematical programs with complementarity constraints*. SIAM Journal on Optimization 17, 2006, 52–77.
- [57] G.-H. LIN UND M. FUKUSHIMA: *Some exact penalty results for nonlinear programs and mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 118, 2003, 67–80.
- [58] G.-H. LIN UND M. FUKUSHIMA: *New relaxation method for mathematical programs with complementarity constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 118, 2003, 81–116.
- [59] G.-H. LIN UND M. FUKUSHIMA: *A modified relaxation scheme for mathematical programs with complementarity constraints*. Annals of Operations Research 133, 2005, 63–84.

- [60] X. LIU UND J. SUN: *Generalized stationary points and an interior-point method for mathematical programs with equilibrium constraints*. Mathematical Programming 101, 2004, 231–261.
- [61] G.S. LIU UND J.J. YE: *Merit-function piecewise SQP algorithm for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 135(3), 2007, 623–641.
- [62] Z.-Q. LUO, J.-S. PANG UND D. RALPH: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [63] Z.-Q. LUO, J.-S. PANG, D. RALPH UND S.-Q. WU: *Exact penalization and stationarity conditions of mathematical programs with equilibrium constraints*. Mathematical Programming 75, 1996, 19–76.
- [64] O.L. MANGASARIAN: *Misclassification Minimization*. Journal of Global Optimization 5(4), 1994, 309–323.
- [65] O.L. MANGASARIAN: *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, New-York, NY 1969 (Nachdruck bei SIAM, Philadelphia, PA, 1994).
- [66] O.L. MANGASARIAN, R. SETIONO UND W.H. WOLBERG: *Pattern recognition via linear programming: Theory and application to medical diagnosis*. In T.F. COLEMAN UND Y. LI (eds.): *Large-Scale Numerical Optimization*. SIAM, Philadelphia, PA, 1990, 22–31.
- [67] O.L. MANGASARIAN UND W.H. WOLBERG: *Cancer Diagnosis via Linear Programming*. SIAM News 23, 1990, 1–18.
- [68] O.L. MANGASARIAN UND W.H. WOLBERG: *Machine Learning for Cancer Diagnosis and Prognosis*. Webpage, <http://pages.cs.wisc.edu/~olvi/uwmp/cancer.html>
- [69] P. MARCOTTE, G. SAVARD UND F. SEMET: *A bilevel programming approach to the travelling salesman problem*. Operations Research Letters 32(3), 2004, 240–248.
- [70] A.G. MERSHA: *Solution Methods for Bilevel Programming Problems*. Dissertation, TU Bergakademie Freiberg (Sachsen), Verlag Dr. Hut, 2009.
- [71] A.G. MERSHA UND S. DEMPE: *Direct search algorithm for bilevel programming problems*. Preprint, TU Bergakademie Freiberg, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2009.
- [72] A.G. MERSHA UND S. DEMPE: *Feasible direction method for bilevel programming problem*. Preprint, TU Bergakademie Freiberg, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2009.

- [73] J.V. OUTRATA: *Optimality conditions for a class of mathematical programs with equilibrium constraints*. Mathematics of Operations Research 24(3), 1999, 627–644.
- [74] J.V. OUTRATA, M. KOČVARA UND J. ZOWE: *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints*. Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- [75] J.-S. PANG UND M. FUKUSHIMA: *Complementarity constraint qualifications and simplified B-stationarity conditions for mathematical programs with equilibrium constraints*. Computational Optimization and Applications 13, 1999, 111–136.
- [76] J.-S. PANG UND S. LEYFFER: *On the global minimization of the value-at-risk*. Optimization Methods and Software 19(5), 2004, 611–631.
- [77] D.W. PETERSON: *A review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces*. SIAM Review, 15(3), 1973, 639–654.
- [78] A.U. RAGHUNATHAN UND L.T. BIEGLER: *Mathematical programs with equilibrium constraints (MPECs) in process engineering*. Computers and Chemical Engineering 27(10), 2003, 1381–1392.
- [79] A.U. RAGHUNATHAN UND L.T. BIEGLER: *An interior point method for mathematical programs with complementarity constraints (MPCCs)*. SIAM Journal on Optimization 15(3), 2005, 720–750.
- [80] D. RALPH UND S.J. WRIGHT: *Some properties of regularization and penalization schemes for MPECs*. Optimization Methods and Software 19(5), 2004, 527–556.
- [81] R.T. ROCKAFELLAR: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [82] H. SCHEEL UND S. SCHOLTES: *Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity*. Mathematics of Operations Research 25, 2000, 1–22.
- [83] S. SCHOLTES: *Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints*. SIAM Journal on Optimization 11(4), 2001, 918–936.
- [84] S. SCHOLTES UND M. STÖHR: *Exact penalization of mathematical programs with equilibrium constraints*. SIAM Journal on Control and Optimization 37(2), 1999, 617–652.
- [85] O. STEIN: *Lifting mathematical programs with complementarity constraints*. AOR-Preprint 3/2008, Lehrstuhl für Anwendungen des OR, Universität Karlsruhe(TH), 2008.

- [86] K. SHIMIZU, Y. ISHIZUKA UND J.F. BARD: *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1997.
- [87] N.V. THOAI, Y. YAMAMOTO UND A. YOSHISE: *Global optimization method for solving mathematical programs with linear complementarity constraints*. Journal of Optimization Theory and Applications 124(2), 2005, 467–490.
- [88] H. TUY UND S. GHANNADAN: *A new branch and bound method for bilevel linear programs*. In A. MIGDALAS, P.M. PARDALOS UND P. VÄRBRAND: *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997, 231–249.
- [89] H. TUY, A. MIGDALAS UND P. VÄRBRAND: *A global optimization approach for the linear two-level program*. Journal of Global Optimization 3, 1993, 1–23.
- [90] S. VEELKEN: *A New Relaxation Scheme for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: Theory and Numerical Experience*. Dissertation, Technische Universität München, Zentrum Mathematik, 2008.
- [91] S. VEELKEN UND M. ULBRICH: *A new relaxation scheme for mathematical programs with equilibrium constraints*. Preprint, Fakultät für Mathematik, TU München, 2009.
- [92] W.H. WOLBERG UND O.L. MANGASARIAN: *Multisurface method of pattern separation for medical diagnosis applied to breast cytology*. Proceedings of the National Academy of Sciences 87, 1990, 9193–9196.
- [93] J.J. YE: *Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 307, 2005, 350–369.
- [94] J.J. YE UND D.L. ZHU: *Optimality conditions for bilevel programming problems*. Optimization 33, 1995, 9–27.
- [95] J.Z. ZHANG, G.S. LIU UND S.Y. WANG: *A globally convergent approximately active search algorithm for solving mathematical programs with linear complementarity constraints*. Numerische Mathematik 98(3), 2004, 539–558.
- [96] Z. ZHU, Z. LUO UND J. ZENG: *A new smoothing technique for mathematical programs with equilibrium constraints*. Applied Mathematics and Mechanics 28(10), 2007, 1407–1414.