Analytizitätseigenschaften gewichteter zentraler Pfade bei monotonen Komplementaritätsproblemen und ihre Ausnutzung

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von

Martin Preiß

aus

Neustadt im Schwarzwald

Würzburg 2002

Eingereicht am: 22. April 2002

bei der Fakultät für Mathematik und Informatik

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Stoer
2. Gutachter: Prof. Dr. Chr. Kanzow

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Analytizitätseigenschaften unzulässiger gewichteter zentraler Pfade bei monotonen semidefiniten linearen Komplementaritätsproblemen und ihre Anwendung zur Konstruktion pfadverfolgender Algorithmen. Die hierfür erforderlichen matrixanalytischen Kenntnisse werden in Kapitel 2 zusammengefasst. Kapitel 3 gibt eine genaue Definition des Begriffs „monotones Komplementaritätsproblem“. Die Analytizitätseigenschaften gewichteter zentraler Pfade bei monotonen linearen Komplementaritätsproblemen sind aufgrund der Arbeiten [12, 14] bekannt und werden kurz in Kapitel 4.1 dargestellt. Kapitel 4.2 untersucht die Analytizitätseigenschaften der entsprechenden Pfade bei monotonen semidefiniten linearen Komplementaritätsproblemen unter der Annahme der Existenz einer strikt komplementären Lösung. Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Pfadfunktionen $(X, S)(r, M, \bar{q})$ für $r \in [0, r_0]$, $r_0 > 0$ geeignet gewählt, sind spätestens durch die Arbeiten [8, 9] in sehr allgemeiner Form bekannt. Diese Ergebnisse werden zunächst für $r > 0$ implizit wiederholt, indem mittels funktionalanalytischer und funktionentheoretischer Hilfsmittel die Analytizität der Pfadfunktionen gezeigt wird. Die sich anschließende Diskussion des Grenzverhaltens von $(X, S)(r, M, \bar{q})$ für $r \downarrow 0$ baut auf den Ergebnissen in [7] auf, wo eine entsprechende Analysis für zulässige zentrale Innere-Punkte-Pfade bei semidefiniten Programmen (SDP) durchgeführt wurde. Die entsprechenden Beweise werden vereinfacht auf unzulässige gewichtete zentrale Pfade bei monotonen semidefiniten linearen Komplementaritätsproblemen verallgemeinert. Abschließend wird das Hauptresultat, die analytische Fortsetzbarkeit von $(X, S)(r, M, \bar{q})$ in $r = 0$, bewiesen. Ein erster Ansatz zur Lösung dieses Problems für SDP's wurde bereits in [1] gemacht. Dabei wurde jedoch die Gestalt der Grenzmatrizen $(X^\star, S^\star)$ durch Nichtdegeneriertheitsbedingungen explizit vorgegeben, so dass man Analytizität im Nullpunkt eher durch ein Postulat als durch tatsächliche Kenntnis des Grenzverhaltens der Pfadfunktionen beweisen konnte. Schließlich konnte Halická in [4] die Analytizität der Pfadfunktionen im Grenzpunkt für SDP's mit strikt komplementärer Lösung nachweisen. Das Resultat der vorliegenden Arbeit unterscheidet sich davon einerseits in der Beweistechnik, da auf die Verwendung von Tensorprodukten zugunsten einer eher funktionalanlytischen Betrachtungsweise verzichtet wird. Andererseits ist das Resultat auch allgemeiner, da in [4] lediglich zulässige zentrale Innere-Punkte-Pfade von SDP's betrachtet werden.
Als erste Anwendung des Analytizitätsresultats wird in Kapitel 5 ein von Stoer in [15] vorgeschlagener lokal konvergenter Algorithmus zur Lösung linearer Komplementaritätsprobleme auf den semidefiniten Fall erweitert.
In Kapitel 6 wird ein neuer Algorithmus zur Lösung von monotonen Komplementaritätsproblemen vorgestellt. Hierbei wird im Gegensatz zu den üblichen Innere-Punkte-Verfahren durch geschickte Wahl der den Pfad approximierenden Funktionen erreicht, dass alle Iterierten direkt auf einem der unzulässigen zentralen Pfade liegen. Es wird globale und lokal Q-superlineare Konvergenz sowohl für den monotonen linearen als auch für den monotonen semidefiniten Fall bewiesen.
Die verwendete Notation entspricht dem in der Optimierungsliteratur üblichen Standard.

2 Matrixanalytische Grundlagen

Sei $\mathcal{S}^n$ der Raum der reell-symmetrischen $n \times n$–Matrizen mit Dimension $\tilde{n} := n(n+1)/2$. Der Kegel der symmetrischen positiv (semi-)definiten Matrizen sei mit $\mathcal{S}^n_+$ bzw. $\mathcal{S}^n_{++}$ bezeichnet. Es gilt $\mathcal{S}^n_{++} \subset \mathcal{S}^n_+ \subset \mathcal{S}^n$. Für zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{S}^n$ gilt $A \succeq B$ ($A \succ B$), falls $A - B$ positiv semidefinit (positiv definit) ist. Durch „$\succeq$“ wird auf $\mathcal{S}^n$ eine Halbordnung, die sog. *Löwnersche Halbordnung*, definiert. Die zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konjugiert transponierte Matrix sei mit A^H, die transponierte mit A^T bezeichnet.

Der *Satz über die Spektralzerlegung* besagt, dass zu jeder Matrix $A \in \mathcal{S}^n$ stets eine orthogonale Matrix U mit $U^TAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ existiert. Für Matrizen $A \in \mathcal{S}^n_+$ gilt insbesondere $\lambda_i \geq 0$ für alle i.

Die *Wurzel* der positiv semidefiniten Matrix A, bezeichnet mit $\sqrt{A}$, ist definiert als eindeutig bestimmte Lösung $B \in \mathcal{S}^n_+$ von $A = B^2$. Es gilt $\sqrt{A} = U^T\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})U$. Beim Wurzelziehen bleibt analog zum Reellen die Löwnersche Halbordnung erhalten, d.h. sind $A, B \succeq 0$ mit $A \succeq B$, so gilt auch $\sqrt{A} \succeq \sqrt{B}$.

Die *Spur* der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei mit $\operatorname{tr}(A)$ oder $\operatorname{tr}A$ bezeichnet. Es gilt $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$, $\lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A.

Die Menge der nichtnegativen (positiven) reellen Zahlen sei mit $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_{++}$ bezeichnet.

Sei $\lambda_{\max}(A)$ der größte Eigenwert von $A \in \mathcal{S}^n$.

Lemma 2.1. [21, p.181, problem 19] *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \succ 0, B \succeq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}(A^{-1}B) \geq \frac{\operatorname{tr}(B)}{\lambda_{\max}(A)} \geq \frac{\operatorname{tr}(B)}{\operatorname{tr}(A)} \,.$$

Beweis. Sei U orthogonal mit $U^TAU = \Lambda_A \,, \Lambda_A := \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)) \,, \lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^{-1}B) = \operatorname{tr}(\Lambda_A^{-1}U^TBU) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)^{-1}(U^TBU)_{ii} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(A)} \sum_{i=1}^n (U^TBU)_{ii} = \\ &= \frac{1}{\lambda_{\max}(A)} \operatorname{tr}(U^TBU) = \frac{\operatorname{tr}(B)}{\lambda_{\max}(A)} \geq \frac{\operatorname{tr}(B)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)} = \frac{\operatorname{tr}(B)}{\operatorname{tr}(A)} \,. \qquad \square\end{aligned}$$

Durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^TA)$ wird auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ bzw. $\mathcal{S}^n$ ein inneres Produkt mit (Frobenius-) Norm $\|A\|_F := (\langle A, A\rangle)^{1/2}$ definiert. Statt $\langle A, B\rangle$ ist auch die Schreibweise $A \bullet B$ gebräuchlich.

Für Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|u\|$ stets die 2-Norm von u, $\|u\| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{1/2}$.

Das folgende Lemma zeigt, dass bei blockpartitionierten positiv semidefiniten Matrizen die Norm-Größe der einzelnen Blöcke nicht unabhängig voneinander ist.

Lemma 2.2. [21, p.181, problem 20] *Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \Rightarrow \quad \|B\|_F^2 = \operatorname{tr}(B^TB) \leq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(C).$$

Beweis. Es gilt

$$H(\epsilon) := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} + \epsilon I \succ 0 \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Somit existiert das Schur-Komplement $\tilde{H}(\epsilon) := C + \epsilon I - B^T(A+\epsilon I)^{-1}B$ von $H(\epsilon)$ und ist positiv definit. Aus $\mathrm{tr}(\tilde{H}(\epsilon)) > 0$ folgt wegen Lemma 2.1

$$\mathrm{tr}(C+\epsilon I) > \mathrm{tr}(B^T(A+\epsilon I)^{-1}B) = \mathrm{tr}((A+\epsilon I)^{-1}BB^T) \geq \frac{\mathrm{tr}(BB^T)}{\mathrm{tr}(A+\epsilon I)},$$

so dass

$$\|B\|_F^2 = \mathrm{tr}(B^TB) \leq \mathrm{tr}(A+\epsilon I)\mathrm{tr}(C+\epsilon I) \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt $\|B\|_F^2 = \mathrm{tr}(B^TB) \leq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C)$. □

Der *Betrag* von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $|A|$, ist definiert als $|A| = (A^HA)^{1/2}$. Für hermitesches A sind die Eigenwerte von $|A|$ gerade die Beträge der Eigenwerte von A.

Wir benötigen folgenden Satz:

Satz 2.3. (Hadamardsche Ungleichung) [21, p.176, Th.6.11] *Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit mit Diagonaleinträgen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Dann gilt*

$$\det(A) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Das folgende Lemma liefert eine explizite untere Schranke für $|\det A|$ in Abhängigkeit von $\frac{A+A^H}{2}$:

Lemma 2.4. [21, p.165, problem 26] *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, dass $A + A^H \succeq 0$. Dann gilt*

$$\det\left(\frac{A+A^H}{2}\right) \leq |\det A|.$$

Beweis. Gemäß dem *Satz von Schur* existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix U derart, dass U^HAU eine obere Dreiecksmatrix ist. Wegen $\det(A) = \det(U^HAU)$ kann man o.B.d.A. annehmen, dass A eine obere Dreiecksmatrix ist. Zusammen mit der *Hadamardschen Ungleichung* folgt daraus

$$\det\left(\frac{A+A^H}{2}\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \Re(a_{ii}) \leq \prod_{i=1}^{n} |\Re(a_{ii})| \leq \prod_{i=1}^{n} |a_{ii}| = |\det(A)|.$$ □

Satz 2.5. (Fischersche Ungleichung) [21, p.175, Th.6.10] *Die positiv definite Matrix $A \in \mathcal{S}^n$ sei in folgender Weise partitioniert:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $\det(A) \leq \det(A_{11})\det(A_{22})$.

Definition 2.6. Sei $A \succ 0$. Durch

$$H_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ H_A(X) = AX + XA,$$

wird auf dem Hilbertraum $(\mathbb{R}^{n\times n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein kompakter invertierbarer Operator definiert. Wegen

$$\langle H_A(X), Y\rangle = \operatorname{tr}(Y^T(AX + XA)) = \operatorname{tr}((AY + YA)^T X) = \langle X, H_A(Y)\rangle \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist H_A selbstadjungiert. Somit ist auch H_A^{-1} kompakt und selbstadjungiert.

Definition 2.7. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\sigma(A)$ das Spektrum von A. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $A : B \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine holomorphe Matrixfunktion. Sei $D' \subset D$ offen, und der Rand $\partial D'$ von D' bestehe aus einer endlichen Anzahl einfach geschlossener rektifizierbarer Jordan-Kurven, die positiv orientiert sind. Falls $\sigma(A(z)) \subset D'\ \forall\, z \in B$ und $D' \cup \partial D' \subset D$ gilt, so wird durch

$$f(A(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D'} f(\zeta)\,(\zeta I - A(z))^{-1} d\zeta$$

eine Matrixfunktion $f : B \to \mathbb{C}^{n\times n}$ beschrieben.
Da die Resolvente von $A(z)$, $R(\zeta, z) = (\zeta I - A(z))^{-1}$, auf $\partial D' \times B$ holomorph ist, folgt aus dem Satz von Leibniz die Holomorphie von $f(A(z))$ auf B.

Beispiel 2.8. Die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{z}$ ist auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} : z \le 0\}$ holomorph. Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $A(z) = \sum_{j=0}^{m} A_j z^j$, $A_j \in \mathcal{S}^n\ \forall\, j$, ein Matrixpolynom in z. Für ein reelles Intervall $[a, b]$ und ein $c > 0$ gelte $\sigma(A(z)) \subset [c, \infty)\ \forall\ z \in [a, b]$. Da die Eigenwerte von $A(z)$ stetig von z abhängen, existiert eine beschränkte Umgebung U von $\sigma(A([a, b])) := \{\sigma(A(z)) : z \in [a, b]\}$ mit $U \subset \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} : z \le 0\}$. Sei $\Gamma \subset U$ eine einfach geschlossene Jordankurve, die $\sigma(A([a, b]))$ im positiven Sinn umläuft. Dann gilt

$$\sqrt{A(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \sqrt{\zeta}\,(\zeta I - A(z))^{-1}\, d\zeta \quad \forall z \in [a, b],$$

und $\sqrt{A(z)}$ ist auf $[a, b]$ reell-analytisch.
Wegen $A(t) \in \mathcal{S}^n\ \forall\ t \in [a, b]$ existiert eine orthogonale Matrixfunktion $U : [a, b] \to O^{n\times n}$ mit $A(t) = U^T(t)\Lambda(t)U(t), \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$. Insbesondere gilt die Identität

$$U^T(t)\sqrt{\Lambda(t)}U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \sqrt{\zeta}(\zeta I - A(t))^{-1}\, d\zeta \quad \forall\, t \in [a, b].$$

3 Komplementaritätsprobleme

Gegeben sei ein semidefinites lineares Komplementaritätsproblem (SDLCP) der Gestalt

$$(SDLCP) \qquad \begin{aligned} P(X) + Q(S) &= q, \\ XS &= 0, \\ X, S &\succeq 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $P, Q : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ lineare Operatoren der Form $P(X) = (P_1 \bullet X, \ldots, P_{\tilde{n}} \bullet X)^T$ bzw. $Q(S) = (Q_1 \bullet S, \ldots, Q_{\tilde{n}} \bullet S)^T$ mit $P_i, Q_i \in \mathcal{S}^n$ für alle $i = 1, \ldots, \tilde{n}$ und $q \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$.
Der Nullraum des Operatorenpaares $[P, Q]$ sei definiert als

$$\mathcal{N}([P, Q]) := \{(X, S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n : P(X) + Q(S) = 0\}.$$

$\mathcal{N}([P, Q])$ bzw. $(SDLCP)$ heißen *monoton*, wenn die Bedingung

$$(X, S) \in \mathcal{N}([P, Q]) \Longrightarrow X \bullet S \geq 0 \tag{3.1}$$

erfüllt ist.
Die Menge aller Lösungen von $(SDLCP)$, d.h. die Menge aller $(X, S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$, die $(SDLCP)$ erfüllen, sei mit $\mathcal{F}^\star(q)$ bzw. $\mathcal{F}^\star$ bezeichnet.
Die zulässige Menge $\mathcal{F}$ von $(SDLCP)$ sei mit

$$\mathcal{F} := \{(X, S) \in \mathcal{S}^n_+ \times \mathcal{S}^n_+ : P(X) + Q(S) = q\}$$

abgekürzt.
Einen wichtigen Spezialfall von $(SDLCP)$ erhält man, wenn man zusätzlich fordert, dass die Matrizen X, S Diagonalmatrizen sein sollen. Es ergibt sich dann das (horizontale) lineare Komplementaritätsproblem (LCP)

$$(LCP) \qquad \begin{aligned} Px + Qy &= q, \\ x \circ y &= 0, \\ (x, y) &\geq 0. \end{aligned}$$

mit $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, y, q \in \mathbb{R}^n$ und vektoriellem Ringprodukt $x \circ y := (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)^T$.
Analog zum semidefiniten Fall gilt für den Nullraum

$$\mathcal{N}([P, Q]) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Px + Qy = 0\}.$$

$\mathcal{N}([P, Q])$ bzw. (LCP) heißen *monoton*, wenn

$$(x, y) \in \mathcal{N}([P, Q]) \Longrightarrow x^T y \geq 0 \tag{3.2}$$

erfüllt ist. Entsprechend sind auch $\mathcal{F}^\star$ und $\mathcal{F}$ für (LCP) definiert. Aus dem Zusammenhang wird immer klar hervorgehen, ob sich die Bezeichnungen auf ein SDLCP oder LCP beziehen.

Bei linearen Komplementaritätsproblemen wird die Struktur der Lösungsmenge $\mathcal{F}^\star$ durch drei Indexmengen bestimmt:

$$\begin{aligned} I &:= \{i \mid \exists\,(x,y) \in \mathcal{F}^\star : x_i > 0\}, \\ J &:= \{j \mid \exists\,(x,y) \in \mathcal{F}^\star : y_j > 0\}, \\ K &:= \{k \mid x_k = y_k = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathcal{F}^\star\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Es ist bekannt, dass diese Mengen bei monotonen LCP's mit $\mathcal{F}^\star \neq \emptyset$ disjunkt sind und eine Partition der Menge $N := \{1,\ldots,n\}$ bilden.
Ein wesentliches Problem bei der Lösung von $(SDLCP)$ liegt darin, dass die Funktion $\varphi : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^{\tilde{n}} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $\varphi(X,S) := \left[\begin{smallmatrix} P(X)+Q(S)-q \\ XS \end{smallmatrix}\right]$, eine Abbildung zwischen Räumen unterschiedlicher Dimension vermittelt, so dass beispielsweise das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung von $(SDLCP)$ nicht direkt anwendbar ist. Dieses Problem lässt sich dadurch lösen, dass man den nichtlinearen Anteil von $\varphi(X,S)$, XS, symmetrisiert. In der Literatur wurden zahlreiche Vorschläge zur Symmetrisierung von XS gemacht, für eine Übersicht und Diskussion daraus resultierender Suchrichtungen siehe z. B. [18].
Wir werden uns im folgenden ausschließlich mit der Variante $\frac{1}{2}(XS + SX)$ beschäftigen. $(SDLCP)$ ist damit äquivalent zu

$$\begin{aligned} P(X) + Q(S) &= q, \\ \frac{1}{2}(XS + SX) &= 0, \\ X, S &\succeq 0. \end{aligned}$$

Innere-Punkte-Verfahren zur Lösung *strikt zulässiger* SDLCP's sind im wesentlichen Algorithmen, die versuchen, approximativ den Lösungspfad $Z = (X,S)(r,M), r \downarrow 0$, des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems zu verfolgen:

$$\begin{aligned} P(X) + Q(S) &= q, \\ \frac{1}{2}(XS + SX) &= rM, \\ X, S &\succ 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $M \succ 0$ eine positiv definite Gewichtungsmatrix.
Falls strikt zulässige Lösungen nicht existieren oder unbekannt sind, wählt man $r_0 > 0$ beliebig, X_0, $S_0 \succ 0$ mit $X_0S_0 + S_0X_0 \succ 0$ und $\bar{q} := (P(X_0) + Q(S_0) - q)/r_0$ so, dass

$$\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0) := \{(P(X) + Q(S) - q)/r_0 \mid X, S \succ 0,\ XS + SX \succ 0\}. \tag{3.4}$$

Unzulässige Innere-Punkte-Verfahren versuchen dann, mit Hilfe des Newton-Verfahrens oder einer Taylor-Approximation höherer Ordnung den *gewichteten zentralen unzulässigen Innere-Punkte-Pfad* der Lösungen $Z = (X,S)(r,M,\bar{q})$ des Systems

$$(SDLCP)_{r,M,\bar{q}} \qquad \begin{aligned} P(X) + Q(S) &= q + r\bar{q}, \\ \frac{1}{2}(XS + SX) &= rM, \\ X, S &\succ 0 \end{aligned}$$

iterativ für $r \downarrow 0$ und $M \succ 0$ zu verfolgen. Die Definition von $\bar{q}$ und $\mathcal{M}(r_0)$ garantieren, dass dieses System für $r = r_0$ und $M := (X_0 S_0 + S_0 X_0)/(2r_0) \succ 0$ lösbar ist. Falls dieser Pfad für $r \in (0, r_0]$ existiert und stetig ist und auch $Z^\star := \lim_{r \downarrow 0}(X, S)(r, M, \bar{q})$ existiert, so gilt offenbar $Z^\star \in \mathcal{F}^\star$.
Wir werden im nächsten Kapitel die Analytizitätseigenschaften von $(X, S)(r, M, \bar{q})$ für $(r, M, \bar{q}) \in [0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{M}(r_0)$, $r_0 > 0$, untersuchen.

4 Analysis von Innere-Punkte-Pfaden

4.1 Analytizität gewichteter zentraler Pfade bei monotonen linearen Komplementaritätsproblemen

In diesem Abschnitt werden einige bekannte Resultate über die analytische Struktur zentraler Pfade bei monotonen LCP's zusammengestellt, die insbesondere in Kapitel 6 benötigt werden. Wir nehmen an, dass (LCP) die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

Annahmen 4.1.1.

(1) $\mathrm{rk}[P, Q] = n$;

(2) (LCP) ist monoton, (3.2);

(3) (LCP) hat Lösungen, $\mathcal{F}^\star \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma garantiert die Existenz gewichteter zentraler Pfade und ihrer Limites für $r \downarrow 0$:

Lemma 4.1.2. [15] *Unter den Annahmen 4.1.1 hat das System*

$$(LCP)_{r,\eta,\bar{q}} \qquad \begin{aligned} Px + Qy &= q + r\bar{q}, \\ x \circ y &= r\eta, \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

für alle $0 < r \leq r_0$, $0 < \eta \in \mathbb{R}^n$ und alle $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $(x, y)(r, \eta, \bar{q})$, und die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{r \downarrow 0} (x, y)(r, \eta, \bar{q}) =: (x^\star, y^\star) \in \mathcal{F}^\star, \quad \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{r}} (x_K, y_K)(r, \eta, \bar{q}) =: (\tilde{x}^\star_K, \tilde{y}^\star_K).$$

Die Grenzwerte erfüllen

$$x^\star_I > 0,\ x^\star_J = 0,\ y^\star_I = 0,\ y^\star_J > 0,\ x^\star_K = y^\star_K = 0,\ \tilde{x}^\star_K > 0,\ \tilde{y}^\star_K > 0. \tag{4.1}$$

Die Analytizitätseigenschaften der Pfadfunktionen sind davon abhängig, ob (LCP) strikt komplementäre Lösungen besitzt oder nicht, d.h. ob $K = \emptyset$ oder $K \neq \emptyset$ gilt.

Satz 4.1.3. [15] *Es gelten die Annahmen 4.1.1, $r_0 > 0$, $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$ und $K = \emptyset$. Die Funktionen $(\tilde{x}, \tilde{y})(r, \eta, \bar{q})$ seien durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} (x_I, x_J)(r, \cdot) &=: (\tilde{x}_I, r\tilde{x}_J)(r, \cdot), \\ (y_I, y_J)(r, \cdot) &=: (r\tilde{y}_I, y_J)(r, \cdot) \end{aligned}$$

definiert.Dann sind $(\tilde{x}, \tilde{y})(r, \eta, \bar{q})$ und $(x, y)(r, \eta, \bar{q})$ für alle $0 < r \leq r_0$, $0 < \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$ analytische Funktionen von $(r, \eta, \bar{q})$, die analytisch in $r = 0$ fortgesetzt werden können. Die Grenzwerte von $(\tilde{x}, \tilde{y})$ erfüllen $(\tilde{x}, \tilde{y})(0, \eta, \bar{q}) > 0$.

Satz 4.1.4. [15] *Es seien die Annahmen 4.1.1 erfüllt. Es gelte* $r_0 > 0$, $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$ *und* $K \neq \emptyset$. *Für* $r \in (0, r_0]$ *setze* $\rho := \sqrt{r}$, $\rho^2 = r$, *und definiere die Funktionen* $(\tilde{x}, \tilde{y})(\rho, \eta, \bar{q})$ *durch*

$$\begin{aligned}(x_I, x_J, x_K)(\rho^2, \cdot) &=: (\tilde{x}_I, \rho^2 \tilde{x}_J, \rho \tilde{x}_K)(\rho, \cdot),\\ (y_I, y_J, y_K)(\rho^2, \cdot) &=: (\rho^2 \tilde{y}_I, \tilde{y}_J, \rho \tilde{y}_K)(\rho, \cdot).\end{aligned}$$

Dann sind $(\tilde{x}, \tilde{y})(\rho, \eta, \bar{q})$ *und* $(x, y)(\rho^2, \eta, \bar{q})$ *für alle* $0 < \rho \leq \rho_0 = \sqrt{r_0}$, $0 < \eta \in \mathbb{R}^n$ *und* $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$ *analytische Funktionen von* $(\rho, \eta, \bar{q})$, *die analytisch in* $\rho = 0$ *fortgesetzt werden können. Die Grenzwerte von* $(\tilde{x}, \tilde{y})$ *erfüllen* $(\tilde{x}, \tilde{y})(0, \eta, \bar{q}) > 0$.

4.2 Analytizität gewichteter zentraler Pfade bei monotonen semidefiniten linearen Komplementaritätsproblemen

Wir wollen ein zu Satz 4.1.3 analoges Resultat für SDLCP's herleiten. Wir treffen dazu folgende Standardannahmen über $(SDLCP)$:

Annahmen 4.2.1.

(1) $\mathcal{R}([P, Q]) := \{P(X) + Q(S) : X, S \in \mathcal{S}^n\} = \mathbb{R}^{\tilde{n}}$;

(2) $(SDLCP)$ ist monoton, (3.1);

(3) $\mathcal{F}^\star \neq \emptyset$, d.h. $(SDLCP)$ ist lösbar.

Sei $r_0 > 0$ und $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0)$. Wir betrachten unzulässige gewichtete zentrale Pfade $(X, S)(r, M)$ $:= (X, S)(r, M, \bar{q})$ als Lösungen von $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$. Ziel wird es im folgenden sein, die Analytizitätseigenschaften von $(X, S)(r, M)$ für $(r, M) \in [0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ zu untersuchen.

Das folgende Lemma spielt in Bezug auf Eindeutigkeitsaussagen eine zentrale Rolle:

Lemma 4.2.2. *Für* $A, B \succ 0$ *gelte* $AB + BA \succeq 0$. *Dann ist das System*

$$\begin{aligned}H_A(\triangle X) + H_B(\triangle Y) &= 0\\ \langle \triangle X, \triangle Y \rangle &\geq 0\end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ *eindeutig lösbar.*

Beweis. Gemäß Definition 2.6 sind H_A, H_B kompakte invertierbare und selbstadjungierte Operatoren, deren Inverse ebenfalls kompakt selbstadjungiert sind. Die erste Gleichung ist äquivalent zu $\triangle X = -H_A^{-1}(H_B(\triangle Y))$, eingesetzt in die zweite ergibt sich

$$\langle H_A^{-1}(H_B(\triangle Y)), \triangle Y \rangle \leq 0 \Longleftrightarrow \langle H_B(\triangle Y), H_A^{-1}(\triangle Y) \rangle \leq 0\,.$$

Mit der Substitution $\triangle Y := H_A(U), U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ist das äquivalent mit

$$0 \geq \langle H_B H_A(U), U \rangle = \langle U, H_A H_B(U) \rangle = \langle H_A H_B(U), U \rangle\,.$$

Somit ist das Ausgangssystem gleichbedeutend mit

$$0 \geq \langle U, (H_A H_B + H_B H_A)(U) \rangle.$$

Offensichtlich ist $H_A H_B + H_B H_A$ ein selbstadjungierter Operator, und eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned}\langle U, (H_A H_B + H_B H_A)(U)\rangle &= \mathrm{tr}(U^T(AB+BA)U) + \mathrm{tr}(U(AB+BA)U^T) + \\ &\quad 2\mathrm{tr}(A^{1/2}U^T BUA^{1/2}) + 2\mathrm{tr}(B^{1/2}U^T AUB^{1/2})\,.\end{aligned}$$

Wegen $AB + BA \succeq 0$ und $A, B \succ 0$ ist $H_A H_B + H_B H_A$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ strikt positiv. Es folgt $U = 0$, also auch $\triangle X = \triangle Y = 0$. $\square$

Lemma 4.2.3. *Seien $X, S \in \mathcal{S}^n_{++}$ mit $XS + SX \succeq 0$. Dann ist die Lösung $(\triangle X, \triangle S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ des Systems*

$$\begin{aligned}P(\triangle X) + Q(\triangle S) &= u\,,\\ \frac{1}{2}(H_X(\triangle S) + H_S(\triangle X)) &= M\end{aligned}$$

für beliebige $u \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $M \in \mathcal{S}^n$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Ausgehend von der linken Seite des obigen Systems definiere man die lineare Abbildung $\Psi : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^{\tilde{n}} \times \mathcal{S}^n$ durch

$$\Psi(\triangle X, \triangle S) = \begin{bmatrix} P(\triangle X) + Q(\triangle S) \\ \frac{1}{2}(H_X(\triangle S) + H_S(\triangle X)) \end{bmatrix}.$$

Wegen $\mathcal{S}^n \cong \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ sind Bild- und Urbildraum von Ψ isomorph. Ist $\Psi(\triangle X, \triangle S) = 0$, so folgt aufgrund von $(\triangle X, \triangle S) \in \mathcal{N}([P, Q])$ gemäß Lemma 4.2.2 $\triangle X = \triangle S = 0$. Also ist Ψ injektiv. Zusammen mit der Isomorphie folgt die Bijektivität von Ψ. $\square$

Es soll zunächst gezeigt werden, dass der gewichtete zentrale Pfad für $r \in (0, r_0]$ existiert, falls System $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$ für $r = r_0$, $M = M_0 \succ 0$ durch $(X, S)(r_0, M_0) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ lösbar ist.

Sei $(X^\star, S^\star) \in \mathcal{F}^\star$ und $(r, M) \in (0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$. Definiere

$$G(r, M) := \{(X, S) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++} : P(X) + Q(S) = q + r\bar{q},\ XS + SX = 2rM\}\,.$$

Dann gilt

Lemma 4.2.4. *Sei $U(M_0) \subset \mathcal{S}^n_{++}$ eine beschränkte Umgebung von $M_0 \succ 0$. Dann ist die Menge*

$$\bigcup_{(r,M)\in(0,r_0]\times U(M_0)} G(r, M)$$

beschränkt.

Beweis. Für $(r, M) \in (0, r_0] \times U(M_0)$ sei $(X(r, M), S(r, M)) \in G(r, M) \neq \emptyset$. Definiere

$$\hat{X}(r, M) := \frac{r}{r_0}X(r_0, M) + (1 - \frac{r}{r_0})X^\star,\ \hat{S}(r, M) := \frac{r}{r_0}S(r_0, M) + (1 - \frac{r}{r_0})S^\star.$$

Dann gilt $P(\hat{X}(r, M_0) - X(r, M)) + Q(\hat{S}(r, M_0) - S(r, M)) = 0$, also auch

$$\langle \hat{X}(r, M_0) - X(r, M), \hat{S}(r, M_0) - S(r, M)\rangle \geq 0\,.$$

Eine einfache Umformung zeigt, dass das äquivalent ist mit

$$r_0 r\,\mathrm{tr} M_0 + r_0^2 \mathrm{tr} M + (r_0 - r)(\langle X^\star, S(r_0, M_0)\rangle + \langle X(r_0, M_0), S^\star\rangle) \geq r_0 \langle X(r, M), S(r_0, M_0)\rangle +$$
$$+ r_0 \langle X(r_0, M_0), S(r, M)\rangle + r_0 \frac{r_0 - r}{r} (\langle X(r, M), S^\star\rangle + \langle X^\star, S(r, M)\rangle)\,.$$

Es ist $\mathrm{tr}M > 0\ \forall\ M \in U(M_0)$, und aufgrund der Beschränktheit von $U(M_0)$ ist $\mathrm{tr}M$ dort auch nach oben beschränkt. Da alle in obiger Gleichung auftretenden Matrizen positiv semidefinit sind, sind alle Skalarprodukte ≥ 0. Somit ist die linke Seite der Gleichung für alle $(r, M) \in (0, r_0] \times U(M_0)$ nichtnegativ und beschränkt. Mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ folgt daraus $0 \leq \langle X(r, M), S(r_0, M_0)\rangle \leq C$ für alle $(r, M) \in (0, r_0] \times U(M_0)$ mit $G(r, M) \neq \emptyset$. Anwendung von Lemma 2.1 ergibt

$$\mathrm{tr} X(r, M) \leq \mathrm{tr}(S(r_0, M_0)^{-1}) \langle S(r_0, M_0), X(r, M)\rangle \leq C' < \infty \quad \forall\ (r, M) \in (0, r_0] \times U(M_0).$$

Wegen $\|X(r, M)\|_F \leq \mathrm{tr} X(r, M)$ folgt die Behauptung für $X(r, M)$. Der Beweis für $S(r, M)$ geht analog. □

Abkürzend setzen wir

$$\Phi(X, S, r, M) := \begin{bmatrix} P(X) + Q(S) - q - r\bar{q} \\ \frac{1}{2}(XS + SX) - rM \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Die partielle Ableitung von Φ nach (X, S) an der Stelle (X, S, r, M) sei mit Ψ bezeichnet. Im folgenden wird wiederholt benutzt, daß wegen Lemma 4.2.3 die zugehörige lineare Abbildung

$$\Psi(\triangle X, \triangle S) = \begin{bmatrix} P(\triangle X) + Q(\triangle S) \\ (H_X(\triangle S) + H_S(\triangle X))/2 \end{bmatrix}$$

für $X \succ 0$, $S \succ 0$, $XS + SX \succeq 0$ bijektiv ist.

Lemma 4.2.5. *Sei $\gamma\colon [0, 1] \to (0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$, $\gamma(t) =: (r(t), M(t))$, ein analytischer Weg von $\gamma(0) =: (r_1, M_1)$ nach $\gamma(1) =: (r_2, M_2)$. Ferner besitze das System*

$$\Phi(X, S, r_1, M_1) = \Phi(X, S, \gamma(0)) = 0$$

eine Lösung (X_1, S_1) mit $X_1 \succ 0$, $S_1 \succ 0$. Dann besitzt das System

$$\Phi(X, S, r(t), M(t)) = \Phi(X, S, \gamma(t)) = 0$$

für jedes $t \in [0, 1]$ eine lokal eindeutige Lösung $(X, S) = (X, S)(\gamma(t))$ mit $X \succ 0$, $S \succ 0$, die analytisch von t abhängt: $(X, S)(\gamma(t))$ setzt die Lösung (X_1, S_1) analytisch längs γ fort.

Beweis. Betrachte für $t \in [0, 1]$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$\psi(X, S, t) := \Phi(X, S, \gamma(t)) = 0.$$

Offensichtlich ist die Funktion $\psi\colon \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times [0, 1] \to R^{\tilde{n}} \times \mathcal{S}^n$ analytisch. Ihre Fréchet-Ableitung bezüglich (X, S),

$$\Psi(X, S, t) := D_{X,S}\, \psi(X, S, t)\colon \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times [0, 1] \to R^{\tilde{n}} \times \mathcal{S}^n,$$

ist für $X = X_1$, $S = S_1$, $t = 0$ wegen $X_1 \succ 0$, $S_1 \succ 0$ eine lineare bijektive Abbildung.Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es deshalb ein maximales $\bar{t} > 0$, $\bar{t} \le 1$, so daß $(X,S)(\gamma(t))$ für $0 \le t < \bar{t}$ eine lokal eindeutige Lösung von $\Phi(X,S,\gamma(t)) = 0$ ist, die analytisch von t abhängt. Aus $X_1 \succ 0$, $S_1 \succ 0$, den Identitäten

$$\begin{aligned} X_1S_1 + S_1X_1 = 2r(0)M(0) &= 2r_1M_1, \\ X(\gamma(t))S(\gamma(t)) + S(\gamma(t))X(\gamma(t)) &= 2r(t)M(t), \end{aligned}$$

der Analytizität von $(X,S)(\gamma(t))$ und $\gamma([0,1]) \subset (0,r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ folgt sofort $X(\gamma(t)) \succ 0$, $S(\gamma(t)) \succ 0$ für alle $t < \bar{t}$. Als nächstes zeigt man, daß $(X,S)(\gamma(t))$ auch noch in $t = \bar{t}$ analytisch ist und $X(\gamma(\bar{t})) \succ 0$, $S(\gamma(\bar{t})) \succ 0$ gilt. Denn wegen der Kompaktheit von $\gamma([0,1]) \subset (0,r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ folgt die Beschränktheit von $\{(X,S)(\gamma(t)) \mid 0 \le t \le \bar{t}\}$ nach Lemma 4.2.4. Es gibt also eine Folge $t_k \uparrow \bar{t}$, für die $\lim_{k\to\infty}(X,S)(\gamma(t_k)) =: (\bar{X},\bar{S})$ existiert. Durch Grenzübergang $k \to \infty$ folgt aus

$$\begin{aligned} P(X(\gamma(t_k))) + Q(S(\gamma(t_k))) &= q + r(t_k)\bar{q}, \\ X(\gamma(t_k))S(\gamma(t_k)) + S(\gamma(t_k))X(\gamma(t_k)) &= 2r(t_k)M(t_k), \\ X(\gamma(t_k)) \succ 0,\, S(\gamma(t_k)) &\succ 0 \end{aligned}$$

sofort

$$\begin{aligned} P(\bar{X}) + Q(\bar{S}) &= q + r(\bar{t})\bar{q}, \\ \bar{X}\bar{S} + \bar{S}\bar{X} &= 2r(\bar{t})M(\bar{t}), \\ \bar{X} \succ 0,\, \bar{S} &\succ 0 \end{aligned}$$

wegen $r(\bar{t}) > 0$, $M(\bar{t}) \succ 0$. Also ist die Fréchet-Ableitung $\Psi(\bar{X},\bar{S},\bar{t})\colon \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^{\tilde{n}} \times \mathcal{S}^n$ eine lineare Bijektion. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann wieder, daß $(\bar{X},\bar{S})$ eine lokal eindeutige Lösung von $\psi(X,S,\bar{t}) = 0$ mit $\bar{X} \succ 0$, $\bar{S} \succ 0$ ist, die die Funktion $(X,S)(\gamma(t))$ analytisch nach $t = \bar{t}$ fortsetzt. Also ist $(X,S)(\gamma(t))$ auch in einer Umgebung von $\bar{t}$ noch analytisch. Aus der Definition von $\bar{t}$ folgt also $\bar{t} = 1$ und die Behauptung des Lemmas. □

Korollar 4.2.6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2.5 ist die analytische Fortsetzung von $(X,S)(\gamma(t))$ für alle $0 \le t \le 1$ eindeutig durch γ und den Startwert $(X,S)(\gamma(0))$ bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es existieren zwei unterschiedliche analytische Fortsetzungen längs γ. Beiden Fortsetzungen entsprechen zwei längs γ analytische Funktionen $(X_1,S_1)(\gamma(t))$ und $(X_2,S_2)(\gamma(t))$. Wegen Lemma 4.2.5 gilt $(X_1,S_1)(\gamma(t)) = (X_2,S_2)(\gamma(t))$ in einer Umgebung von $t = 0$. Wäre $\tau := \sup\{t \in [0,1] \mid (X_1,S_1)(\gamma(\sigma)) = (X_2,S_2)(\gamma(\sigma))\ \forall\ \sigma \in [0,t)\} < 1$, so muss aus Stetigkeitsgründen auch $(X_1,S_1)(\gamma(\tau)) = (X_2,S_2)(\gamma(\tau))$ gelten. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann die Existenz eines $\epsilon > 0$ mit $(X_1,S_1)(\gamma(t)) = (X_2,S_2)(\gamma(t))\ \forall\ t \in [\tau,\tau+\epsilon)$ im Widerspruch zur Definition von τ. Falls $(X_1,S_1)(\gamma(t)) = (X_2,S_2)(\gamma(t))\ \forall\ t \in [0,1)$, so folgt wiederum aus Stetigkeitsgründen direkt $(X_1,S_1)(\gamma(1)) = (X_2,S_2)(\gamma(1))$. □

Lemma 4.2.7. *Falls das System*

$$\begin{aligned} P(X) + Q(S) &= q + r\bar{q}\,, \\ \frac{1}{2}(XS + SX) &= rI\,, \\ X, S &\succeq 0 \end{aligned}$$

für ein $r \in (0, \infty)$ eine Lösung besitzt, so ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis. Für $r \in (0,\infty)$ sei $(X, S) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ Lösung des obigen Systems. Sei U orthogonal mit $U^T XU = \Lambda_X$, $\Lambda_X := \mathrm{diag}(\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X))$. Damit gilt

$$XS + SX = 2rI,\ X, S \succ 0 \Longleftrightarrow \Lambda_X U^T SU + U^T SU \Lambda_X = 2rI,\ \Lambda_X,\ U^T SU \succ 0\,.$$

Ein Vergleich der Matrizeneinträge zeigt, dass auch $U^T SU = \Lambda_S$ gelten muss. Somit sind X und S simultan unitär diagonalisierbar, also auch vertauschbar. Es folgt $XS+SX = 2rI \Longleftrightarrow XS = rI$.
Angenommen, es existieren 2 Matrizenpaare (X_1, S_1), $(X_2, S_2) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ mit $P(X_i) + Q(S_i) = q + r\bar{q}$, $X_i S_i = rI$, $i = 1, 2$. Setze $\triangle X := X_2 - X_1\,, \triangle S := S_2 - S_1\,$. Dann gilt

$$(X_1 + \triangle X)(S_1 + \triangle S) = X_2 S_2 = rI = X_1 S_1 = (X_2 - \triangle X)(S_2 - \triangle S)\,.$$

Letzteres ist äquivalent zu $\triangle X(S_1 + S_2) + (X_1 + X_2)\triangle S = 0\,$. Es folgt

$$\triangle X \bullet \triangle S = -\mathrm{tr}((S_1 + S_2)^{1/2} \triangle X (X_1 + X_2)^{-1} \triangle X (S_1 + S_2)^{1/2}) \le 0\,,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\triangle X = 0$. Wegen $P(\triangle X) + Q(\triangle S) = 0$ gilt nun aber $\triangle X \bullet \triangle S \ge 0$, insgesamt also $\triangle X \bullet \triangle S = 0$. Es folgt $\triangle X = \triangle S = 0$. □

Lemma 4.2.8. *Falls das System $\Phi(X, S, r, M) = 0, X, S \succeq 0$, für ein $(r, M) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ eine Lösung besitzt, so ist diese eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, das System besitzt 2 Lösungen (X_1, S_1), $(X_2, S_2) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$. Der Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ sei definiert durch $\gamma(t) := (r, tI + (1-t)M)$. Gemäß Lemma 4.2.5 lassen sich dann (X_1, S_1) und (X_2, S_2) längs γ analytisch zu einer Lösung $(\bar{X}_1, \bar{S}_1)$ bzw. $(\bar{X}_2, \bar{S}_2)$ von $(SDCLP)_{r,I,\bar{q}}$ fortsetzen. Wegen Lemma 4.2.7 ist aber $(\bar{X}_1, \bar{S}_1) = (\bar{X}_2, \bar{S}_2)$. Die analytische Fortsetzung von $(\bar{X}_1, \bar{S}_1) = (\bar{X}_2, \bar{S}_2)$ längs des inversen Weges $\gamma^-(t) := (r, tM + (1-t)I)$, $t \in [0, 1]$, führt zu den Lösungen (X_1, S_1) und (X_2, S_2) von $(SDCLP)_{r,M,\bar{q}}$ zurück. Aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung (Korollar 4.2.6) folgt die Behauptung. □

Satz 4.2.9. *Falls das System $\Phi(X, S, r, M) = 0, X, S \succeq 0$, für ein $(r_0, M_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ eine Lösung besitzt, so ist es für alle $(r, M) \in (0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ eindeutig lösbar. Die Lösungsfunktionen $X(r, M), S(r, M)$ sind auf $(0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ analytisch.*

Beweis. Folgt aus Lemma 4.2.5, Korollar 4.2.6 und Lemma 4.2.8. □

Nachdem Eindeutigkeit, Existenz und Analytizität der gewichteten zentralen Pfade bewiesen wurde, soll jetzt gezeigt werden, dass der Analytizitätsbereich von $(X, S)(r, M)$ von $(0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ auf $[0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++}$ erweiterbar ist. Um die Analysis zu vereinfachen, wird im folgenden immer ein festes $M := M_0 \succ 0$ unterstellt, und $(X,S)(r)$ steht dann abkürzend für den gewichteten zentralen Pfad $(X,S)(r,M)$.

In Verschärfung der Annahme 4.2.1(3) benötigen wir für den Rest des Abschnitts die folgende zusätzliche Voraussetzung:

Annahme 4.2.10.

Es existiert ein strikt komplementäres Lösungspaar $(X^\star, S^\star) \in \mathcal{F}^\star$, d.h. es gilt $X^\star S^\star = 0,\ X^\star + S^\star \succ 0$.

Da $X^\star$ und $S^\star$ kommutieren, sind sie simultan unitär diagonalisierbar. Nach entsprechender unitärer Transformation von $(SDLCP)$ kann man deshalb o.B.d.A. annehmen, dass $X^\star$ und $S^\star$ diagonal und von der Form

$$X^\star = \begin{bmatrix} \Lambda_B^\star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^\star = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_N^\star \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

sind. Hierbei ist $\Lambda_B^\star = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{|B|}) \succ 0$ und $\Lambda_N^\star = \operatorname{diag}(\lambda_{|B|+1}, \ldots, \lambda_n) \succ 0$. Die im folgenden auftretenden Matrizen seien stets analog zu $X^\star$ bzw. $S^\star$ partitioniert. Z.B. gilt also $X = \left[\begin{smallmatrix} X_B & X_V \\ X_V^T & X_N \end{smallmatrix}\right]$, wobei X_V das Format $|B| \times (n - |B|)$ hat.

Es ist zunächst erforderlich, das Grenzverhalten der Blöcke $X_B(r), X_N(r)$ und $X_V(r)$ von $X(r)$ und entsprechend von $S(r)$ für $r \downarrow 0$ zu untersuchen. Neben der üblichen O- und o-Notation sollen dabei folgende Bezeichnungen verwendet werden: Für eine Matrixfunktion $A : \mathbb{R}_{++} \to \mathcal{S}^n$ gelte $A = O(r)$ und $A = o(r)$, falls $\|A(r)\|_F = O(r)$ bzw. $\|A(r)\|_F = o(r)$. Es sei $A(r) = \Theta(r)$, falls ein $a > 0$ existiert mit $\frac{1}{a} I \preceq \frac{1}{r} A(r) \preceq aI$ für alle genügend kleinen $r > 0$.

Lemma 4.2.11. *Es gilt*

$$\|S_B(r)\|_F = O(r),\ \|X_N(r)\|_F = O(r),\ \|X_V(r)\|_F = O(\sqrt{r}),\ \|S_V(r)\|_F = O(\sqrt{r})\,.$$

Beweis. Sei $(X^\star, S^\star) \in \mathcal{F}^\star$ strikt komplementär mit $X^\star = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{|B|}, 0, \ldots, 0)$ und $S^\star = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \lambda_{|B|+1}, \ldots, \lambda_n)$. Aus dem Beweis von Lemma 4.2.4 folgt die Existenz eines $C > 0$ mit

$$0 \le \frac{r_0 - r}{r}\left(\langle X(r), S^\star\rangle + \langle X^\star, S(r)\rangle\right) \le C \quad \forall\, r \in (0, r_0].$$

Somit ist $\langle X^\star, S(r)\rangle + \langle X(r), S^\star\rangle = O(r)$. Damit erhält man

$$\sum_{i=1}^{|B|} \underbrace{\lambda_i}_{>0} s_{ii}(r) + \sum_{i=|B|+1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} x_{ii}(r) = O(r)\,.$$

Hieraus folgt wegen $s_{ii}(r) = O(r)$

$$\|S_B(r)\|_F = \Big(\sum_{i=1}^{|B|} \lambda_i^2(S_B(r))\Big)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{|B|} \lambda_i(S_B(r)) = \sum_{i=1}^{|B|} s_{ii}(r) = O(r)\,.$$

Analog verläuft der Beweis für $\|X_N(r)\|_F$.
Die Behauptung über $\|X_V(r)\|_F$ und $\|S_V(r)\|_F$ folgt direkt aus Lemma 2.2, da $X_B(r)$ und $S_N(r)$ wegen Lemma 4.2.4 für $r \downarrow 0$ beschränkt sind . □

Jetzt lässt sich das Grenzverhalten der Diagonalblöcke von X und S genauer charakterisieren.

Lemma 4.2.12. *Es gilt* $X_B(r) = \Theta(1)$, $S_N(r) = \Theta(1)$, $X_N(r) = \Theta(r)$, $S_B(r) = \Theta(r)$.

Beweis. Sei $X := X(r)$, $S := S(r)$. Für $r \in (0, r_0]$ gilt $\frac{1}{2}(\frac{XS}{r} + \frac{SX}{r}) = M$.Aus Lemma 2.4 folgt $\det(\frac{XS}{r}) \geq \det M > 0$. Für $r > 0$ gilt $X = \begin{bmatrix} X_B & X_V \\ X_V^T & X_N \end{bmatrix} \succ 0$ und $S = \begin{bmatrix} S_B & S_V \\ S_V^T & S_N \end{bmatrix} \succ 0$. Aufgrund der Fischerschen Ungleichung 2.5 gilt

$$0 < \det M \leq \det\left(\frac{XS}{r}\right) = \frac{1}{r^n} \det X \det S \leq \det X_B \det\left(\frac{X_N}{r}\right) \det S_N \det\left(\frac{S_B}{r}\right).$$

Logarithmieren liefert

$$\log\det M \leq \log\det X_B + \underbrace{\log\det\left(\frac{X_N}{r}\right)}_{(1)} + \log\det S_N + \underbrace{\log\det\left(\frac{S_B}{r}\right)}_{(2)}.$$

Wegen $\|X_N(r)\|_F = O(r)$ ist Term (1) nach oben beschränkt, analoges gilt für Term (2). Wegen Lemma 4.2.4 sind auch die beiden anderen Terme nach oben beschränkt. Es folgt $\underline{\lim}\log\det X_B > -\infty$, $\underline{\lim}\log\det S_N > -\infty$, $\underline{\lim}\log\det\left(\frac{X_N}{r}\right) > -\infty$, $\underline{\lim}\log\det\left(\frac{S_B}{r}\right) > -\infty$. □

Die Grenzaussagen bezüglich $X_V(r)$ und $S_V(r)$ lassen sich noch etwas verschärfen:

Lemma 4.2.13. *Es gilt* $\|X_V(r)\|_F = o(\sqrt{r})$, $\|S_V(r)\|_F = o(\sqrt{r})$.

Beweis. Sei $(r_k)_k$, $r_k > 0\ \forall k$, Nullfolge und $(X(r_k))_k, (S(r_k))_k$ konvergente Folgen mit $\lim_{k\to\infty} X(r_k) = \bar{X}^\star, \lim_{k\to\infty} S(r_k) = \bar{S}^\star$. Aufgrund des bisher Bewiesenen gilt $\bar{X}^\star = \begin{bmatrix} \bar{X}_B^\star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{X}_B^\star \succ 0$, und $\bar{S}^\star = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_N^\star \end{bmatrix}$, $\bar{S}_N^\star \succ 0$, und $(\bar{X}^\star, \bar{S}^\star)$ löst $(SDLCP)$. Setze

$$\tilde{X}_N(r_k) := \frac{X_N(r_k)}{r_k},\ \tilde{S}_B(r_k) := \frac{S_B(r_k)}{r_k},\ \tilde{S}_V(r_k) := \frac{S_V(r_k)}{\sqrt{r_k}},\ \tilde{X}_V(r_k) := \frac{X_V(r_k)}{\sqrt{r_k}}.$$

Wegen Lemma 4.2.11 kann man o.B.d.A. annehmen, dass auch die zugehörigen Grenzwerte existieren, also z.B. $\lim_{k\to\infty} \tilde{X}_N(r_k) = \tilde{X}_N^\star$, usw.
Setzt man im Beweis von Lemma 4.2.4 $M_0 = M$ und $r = r_k$, so folgt $\mathrm{tr}M \geq \tilde{X}_N^\star \bullet \bar{S}_N^\star + \bar{X}_B^\star \bullet \tilde{S}_B^\star$ für $r_k \to 0$. Andererseits folgt aus $X_B \bullet S_B + 2X_V \bullet S_V + X_N \bullet S_N = r\mathrm{tr}M$, dass $\bar{X}_B^\star \bullet \tilde{S}_B^\star + 2\tilde{X}_V^\star \bullet \tilde{S}_V^\star + \tilde{X}_N^\star \bullet \bar{S}_N^\star = \mathrm{tr}M$ gilt. Somit muss $\tilde{X}_V^\star \bullet \tilde{S}_V^\star \geq 0$ sein.
Wegen $X_B(r)S_V(r) + X_V(r)S_N(r) + S_B(r)X_V(r) + S_V(r)X_N(r) = rM_V$ ist aber

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{r}}(X_B(r)S_V(r) + X_V(r)S_N(r) + S_B(r)X_V(r) + S_V(r)X_N(r)) = 0.$$

Damit gilt

$$\bar{X}_B^\star \tilde{S}_V^\star + \tilde{X}_V^\star \bar{S}_N^\star = 0 \Longleftrightarrow \tilde{S}_V^\star = -\bar{X}_B^{\star\,-1} \tilde{X}_V^\star \bar{S}_N^\star,$$

so dass
$$\tilde{X}_V^\star \bullet \tilde{S}_V^\star = -\mathrm{tr}(\bar{S}_N^{\star\,1/2} \tilde{X}_V^{\star\,T} \bar{X}_B^{\star\,-1} \tilde{X}_V^\star \bar{S}_N^{\star\,1/2}) \leq 0,$$
mit Gleichheit genau dann, wenn $\tilde{X}_V^\star = 0$. Insgesamt erhält man $\tilde{X}_V^\star \bullet \tilde{S}_V^\star = 0$, also auch $\tilde{X}_V^\star = \tilde{S}_V^\star = 0$. □

Wir kommen jetzt zum Hauptresultat:

Satz 4.2.14. *Es seien die Annahmen 4.2.1 und 4.2.10 erfüllt und $\bar{q} \in \mathcal{M}(r_0), r_0 > 0$. Falls System $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$ für $(r_0, M_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}_{++}^n$ lösbar ist, so sind $(X,S)(r,M)$ analytisch auf $[0, r_0] \times \mathcal{S}_{++}^n$. Unter Annahme der Existenz einer Lösung der Gestalt (4.3) gelten in einer Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{++}^n$ von $(0, M_0)$ Potenzreihenentwicklungen der Form*

$$X(r,M) = \begin{bmatrix} A_0(M) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1(M) & C_1(M) \\ C_1^T(M) & D_1(M) \end{bmatrix} r + \sum_{j=2}^{\infty} \begin{bmatrix} A_j(M) & C_j(M) \\ C_j^T(M) & D_j(M) \end{bmatrix} r^j ,$$
$$S(r,M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_0(M) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(M) & F_1(M) \\ F_1^T(M) & E_1(M) \end{bmatrix} r + \sum_{j=2}^{\infty} \begin{bmatrix} H_j(M) & F_j(M) \\ F_j^T(M) & E_j(M) \end{bmatrix} r^j ,$$

wobei $A_0(M), H_1(M) \succ 0$, $E_0(M), D_1(M) \succ 0 \; \forall \, M \in V$.

Beweis. Wegen Satz 4.2.9 ist nur noch die analytische Fortsetzbarkeit von $(X,S)(r,M)$ von $(0, r_0] \times \mathcal{S}_{++}^n$ auf $[0, r_0] \times \mathcal{S}_{++}^n$ zu beweisen. Aus Gründen der Vereinfachung wird nur die Analytizität bezüglich r bei festem $M \succ 0$ gezeigt, die Analytizität bezüglich (r, M) folgt daraus leicht.
Definitionsgemäß gilt $P(X) = [P_1 \bullet X, \ldots, P_{\tilde{n}} \bullet X]^T$. Man setze

$$P_i := \begin{bmatrix} P_i^{(B)} & P_i^{(V)} \\ P_i^{(V)T} & P_i^{(N)} \end{bmatrix}, \; P_{i,B} := \begin{bmatrix} P_i^{(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; P_{i,V} := \begin{bmatrix} 0 & P_i^{(V)} \\ P_i^{(V)T} & 0 \end{bmatrix}, \; P_{i,N} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_i^{(N)} \end{bmatrix},$$

so dass $P_i = P_{i,B} + P_{i,V} + P_{i,N}$, und entsprechendes für Q_i.
Weiter gelte $P_{k:j}(X) := [P_k \bullet X, \ldots, P_j \bullet X]^T$ usw.
Damit lautet das System $P(X) + Q(S) = q + r\bar{q}$

$$(P_{i,B} + P_{i,V} + P_{i,N}) \bullet X + (Q_{i,B} + Q_{i,V} + Q_{i,N}) \bullet S = q_i + r\bar{q}_i \, , \; i = 1, \ldots, \tilde{n} \, .$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus liefert folgendes äquivalente System:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}_{i,B} + \tilde{P}_{i,V} + \tilde{P}_{i,N}) \bullet X + (\tilde{Q}_{i,B} + \tilde{Q}_{i,V} + \tilde{Q}_{i,N}) \bullet S &= \tilde{q}_i + r\tilde{\bar{q}}_i \, , \; i = 1, \ldots, l_1 \, , \\ (\tilde{P}_{i,V} + \tilde{P}_{i,N}) \bullet X + (\tilde{Q}_{i,B} + \tilde{Q}_{i,V}) \bullet S &= \tilde{q}_i + r\tilde{\bar{q}}_i \, , \; i = l_1 + 1, \ldots, l_2 \, , \\ \tilde{P}_{i,N} \bullet X + \tilde{Q}_{i,B} \bullet S &= \tilde{q}_i + r\tilde{\bar{q}}_i \, , \; i = l_2 + 1, \ldots, \tilde{n}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wegen der Annahme 4.2.1(1) kann der Algorithmus so gestaltet werden, dass

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{span}\{[\tilde{P}_{i,B}, \tilde{Q}_{i,N}] : i = 1, \ldots, l_1\}) &= l_1, \\ \dim(\mathrm{span}\{[\tilde{P}_{i,V}, \tilde{Q}_{i,V}] : i = l_1 + 1, \ldots, l_2\}) &= l_2 - l_1, \\ \dim(\mathrm{span}\{[\tilde{P}_{i,N}, \tilde{Q}_{i,B}] : i = l_2 + 1, \ldots, \tilde{n}\}) &= \tilde{n} - l_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

gilt. Man kann deshalb im folgenden o.B.d.A. stets annehmen, dass das System $P(X)+Q(S) = q + r\bar{q}$ die Form (4.4) hat und die Bedingungen (4.5) erfüllt. Man beachte, dass aus (4.5) insbesondere folgt, dass die Abbildung

$$(Z_1,\ldots,Z_6) \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \quad f(Z_1,\ldots,Z_6) = \begin{bmatrix} P^{(B)}_{1:l_1}(Z_1)+Q^{(N)}_{1:l_1}(Z_2) \\ P^{(V)}_{l_1+1:l_2}(Z_3)+Q^{(V)}_{l_1+1:l_2}(Z_4) \\ P^{(N)}_{l_2+1:\tilde{n}}(Z_5)+Q^{(B)}_{l_2+1:\tilde{n}}(Z_6) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

surjektiv ist.
Sei $r > 0$. Gemäß Lemma 4.2.12 und 4.2.13 gilt auf dem gewichteten zentralen Pfad

$$X(r) := \begin{bmatrix} X_B(r) & X_V(r) \\ X_V^T(r) & X_N(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(1) & o(\sqrt{r}) \\ o(\sqrt{r}) & \Theta(r) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S(r) = \begin{bmatrix} S_B(r) & S_V(r) \\ S_V^T(r) & S_N(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(r) & o(\sqrt{r}) \\ o(\sqrt{r}) & \Theta(1) \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Es soll jetzt zunächst gezeigt werden, dass tatsächlich $X_V(r), S_V(r) = O(r)$ ist.
Für $r > 0$ setze $\rho := \sqrt{r} > 0$. Das Grenzverhalten von $X(r), S(r)$ motiviert folgende Definition von $\tilde{X}(\rho), \tilde{S}(\rho)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_B(\rho) := X_B(r),\ X_V(r) =: \rho\tilde{X}_V(\rho),\ X_N(r) =: \rho^2\tilde{X}_N(\rho), \\ &S_B(r) =: \rho^2\tilde{S}_B(\rho),\ S_V(r) =: \rho\tilde{S}_V(\rho),\ \tilde{S}_N(\rho) := S_N(r). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Insbesondere gilt

$$\tilde{X}(\rho) := \begin{bmatrix} \tilde{X}_B(\rho) & \tilde{X}_V(\rho) \\ \tilde{X}_V^T(\rho) & \tilde{X}_N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(1) & o(1) \\ o(1) & \Theta(1) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{S}(\rho) = \begin{bmatrix} \tilde{S}_B(\rho) & \tilde{S}_V(\rho) \\ \tilde{S}_V^T(\rho) & \tilde{S}_N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(1) & o(1) \\ o(1) & \Theta(1) \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

und $\tilde{X}(\rho), \tilde{S}(\rho)$ sind auf $(0, \sqrt{r_0}]$ analytisch.
Das System $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$ läßt sich damit für $\rho > 0$ schreiben als

$$(P_{i,B} + P_{i,V} + P_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} \tilde{X}_B & \rho\tilde{X}_V \\ \rho\tilde{X}_V^T & \rho^2\tilde{X}_N \end{bmatrix} + (Q_{i,B} + Q_{i,V} + Q_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} \rho^2\tilde{S}_B & \rho\tilde{S}_V \\ \rho\tilde{S}_V^T & \tilde{S}_N \end{bmatrix} = q_i + \rho^2\bar{q}_i,\ i = 1,\ldots,l_1, \tag{4.10a}$$

$$(P_{i,V} + P_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} 0 & \rho\tilde{X}_V \\ \rho\tilde{X}_V^T & \rho^2\tilde{X}_N \end{bmatrix} + (Q_{i,B} + Q_{i,V}) \bullet \begin{bmatrix} \rho^2\tilde{S}_B & \rho\tilde{S}_V \\ \rho\tilde{S}_V^T & 0 \end{bmatrix} = q_i + \rho^2\bar{q}_i,\ i = l_1+1,\ldots,l_2, \tag{4.10b}$$

$$P_{i,N} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\tilde{X}_N \end{bmatrix} + Q_{i,B} \bullet \begin{bmatrix} \rho^2\tilde{S}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = q_i + \rho^2\bar{q}_i,\ i = l_2+1,\ldots,\tilde{n}, \tag{4.10c}$$

$$\tilde{X}_B\tilde{S}_B + \tilde{S}_B\tilde{X}_B + \tilde{X}_V\tilde{S}_V^T + \tilde{S}_V\tilde{X}_V^T = 2M_B \tag{4.10d}$$

$$\tilde{X}_B\tilde{S}_V + \tilde{X}_V\tilde{S}_N + \rho^2\tilde{S}_B\tilde{X}_V + \rho^2\tilde{S}_V\tilde{X}_N = 2\rho M_V \tag{4.10e}$$

$$\tilde{S}_N\tilde{X}_N + \tilde{X}_N\tilde{S}_N + \tilde{X}_V^T\tilde{S}_V + \tilde{S}_V^T\tilde{X}_V = 2M_N\,. \tag{4.10f}$$

Sei $(r_k)_k$ Folge mit $r_k > 0\ \forall\ k$ und $r_k \downarrow 0$, sowie $\rho_k := \sqrt{r_k}$. Aus (4.9) folgt die Beschränktheit von $(\tilde{X}(\rho_k),\ \tilde{S}(\rho_k))$. O.B.d.A. kann man also annehmen, dass $\lim_{k\to\infty}(\tilde{X}(\rho_k), \tilde{S}(\rho_k)) =: (\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ existiert. Einsetzen von ρ_k und $(\tilde{X}_k, \tilde{S}_k) := (\tilde{X}, \tilde{S})(\rho_k)$ in (4.10b)-(4.10c) und Grenzübergang liefert $q_i = 0$ für $i = l_1+1,\ldots,\tilde{n}$. Für $\rho > 0$ ist also (4.10) äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
(P_{i,B} + P_{i,V} + P_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} \tilde{X}_B & \rho\tilde{X}_V \\ \rho\tilde{X}_V^T & \rho^2\tilde{X}_N \end{bmatrix} + \\
(Q_{i,B} + Q_{i,V} + Q_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} \rho^2\tilde{S}_B & \rho\tilde{S}_V \\ \rho\tilde{S}_V^T & \tilde{S}_N \end{bmatrix} - q_i - \rho^2\bar{q}_i &= 0,\ i = 1,\dots,l_1, \quad (4.11a)\\
(P_{i,V} + P_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_V \\ \tilde{X}_V^T & \rho\tilde{X}_N \end{bmatrix} + \\
(Q_{i,B} + Q_{i,N}) \bullet \begin{bmatrix} \rho\tilde{S}_B & \tilde{S}_V \\ \tilde{S}_V^T & 0 \end{bmatrix} - \rho\bar{q}_i &= 0,\ i = l_1+1,\dots,l_2, \quad (4.11b)\\
P_{i,N} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_N \end{bmatrix} + Q_{i,B} \bullet \begin{bmatrix} \tilde{S}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \bar{q}_i &= 0,\ i = l_2+1,\dots,\tilde{n}\,, \quad (4.11c)\\
\tilde{X}_B\tilde{S}_B + \tilde{S}_B\tilde{X}_B + \tilde{X}_V\tilde{S}_V^T + \tilde{S}_V\tilde{X}_V^T - 2M_B &= 0\,, \quad (4.11d)\\
\tilde{X}_B\tilde{S}_V + \tilde{X}_V\tilde{S}_N + \rho^2\tilde{S}_B\tilde{X}_V + \rho^2\tilde{S}_V\tilde{X}_N - 2\rho M_V &= 0\,, \quad (4.11e)\\
\tilde{S}_N\tilde{X}_N + \tilde{X}_N\tilde{S}_N + \tilde{X}_V^T\tilde{S}_V + \tilde{S}_V^T\tilde{X}_V - 2M_N &= 0\,. \quad (4.11f)
\end{aligned}
$$

Definiere $\Psi(\tilde{X}, \tilde{S}; \rho)$ als linke Seite des vorstehenden Gleichungssystems. Dann ist Ψ analytisch auf $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}$ und nach Grenzübergang $\rho_k \to 0$, $(\tilde{X}_k, \tilde{S}_k) \to (\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star)$ gilt

$$\Psi(\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star; 0) = 0. \tag{4.12}$$

Insbesondere folgt

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_B^\star\tilde{S}_B^\star + \tilde{S}_B^\star\tilde{X}_B^\star = 2M_B \succ 0,\\
\tilde{S}_N^\star\tilde{X}_N^\star + \tilde{X}_N^\star\tilde{S}_N^\star = 2M_N \succ 0\,.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Die Richtungsableitung von Ψ an der Stelle $(\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star; 0)$ in Richtung $(\triangle\tilde{X}, \triangle\tilde{S})$ lautet

$$\Psi'(\tilde{X}^\star,\, \tilde{S}^\star; 0)(\triangle\tilde{X}, \triangle\tilde{S}) = \begin{bmatrix}
P_{1:l_1,B}\Big(\begin{bmatrix} \triangle\tilde{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big) + Q_{1:l_1,N}\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\tilde{S}_N \end{bmatrix}\Big) \\
P_{l_1+1:l_2,V}\Big(\begin{bmatrix} 0 & \triangle\tilde{X}_V \\ \triangle\tilde{X}_V^T & 0 \end{bmatrix}\Big) + Q_{l_1+1:l_2,V}\Big(\begin{bmatrix} 0 & \triangle\tilde{S}_V \\ \triangle\tilde{S}_V^T & 0 \end{bmatrix}\Big) \\
P_{l_2+1:\tilde{n},N}\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\tilde{X}_N \end{bmatrix}\Big) + Q_{l_2+1:\tilde{n},B}\Big(\begin{bmatrix} \triangle\tilde{S}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big) \\
\triangle\tilde{X}_B\tilde{S}_B^\star + \tilde{S}_B^\star\triangle\tilde{X}_B + \triangle\tilde{S}_B\tilde{X}_B^\star + \tilde{X}_B^\star\triangle\tilde{S}_B \\
\tilde{X}_B^\star\triangle\tilde{S}_V + \triangle\tilde{X}_V\tilde{S}_N^\star \\
\triangle\tilde{S}_N\tilde{X}_N^\star + \tilde{X}_N^\star\triangle\tilde{S}_N + \triangle\tilde{X}_N\tilde{S}_N^\star + \tilde{S}_N^\star\triangle\tilde{X}_N
\end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Wir wollen zeigen, dass $\Psi'(\tilde{X}^\star,\, \tilde{S}^\star; 0)$ nichtsingulär ist:
Es gelte also

$$\Psi'(\tilde{X}^\star,\, \tilde{S}^\star; 0)(\triangle\tilde{X}, \triangle\tilde{S}) = 0\,. \tag{4.15}$$

Für $\mu \in \mathbb{R}$ setze

$$\bar{X}(\mu) := \begin{bmatrix} U_1 & W_1 \\ W_1^T & \triangle\tilde{X}_N \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \triangle\tilde{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{S}(\mu) := \begin{bmatrix} \triangle\tilde{S}_B & W_2 \\ W_2^T & U_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\tilde{S}_N \end{bmatrix}.$$

Hierbei seien $U_1 \in \mathcal{S}^{|B|}$, $W_1,\, W_2 \in \mathbb{R}^{|B|\times|N|}$, $U_2 \in \mathcal{S}^{|N|}$ so gewählt, dass

$$P\Big(\begin{bmatrix} U_1 & W_1 \\ W_1^T & \triangle\tilde{X}_N \end{bmatrix}\Big) + Q\Big(\begin{bmatrix} \triangle\tilde{S}_B & W_2 \\ W_2^T & U_2 \end{bmatrix}\Big) = 0 \tag{4.16}$$

gilt.
Das ist möglich aufgrund der Surjektivität von (4.6), denn (4.16) ist unter Berücksichtigung von (4.4) äquivalent zu

$$\begin{aligned} P^{(N)}_{l_2+1:\tilde{n}}(\triangle\tilde{X}_N) + Q^{(B)}_{l_2+1:\tilde{n}}(\triangle\tilde{S}_B) &= 0, \\ P^{(V)}_{l_1+1:l_2}(W_1) + Q^{(V)}_{l_1+1:l_2}(W_2) &= -\frac{1}{2}(P^{(N)}_{l_1+1:l_2}(\triangle\tilde{X}_N) + Q^{(B)}_{l_1+1:l_2}(\triangle\tilde{S}_B)), \\ P^{(B)}_{1:l_1}(U_1) + Q^{(N)}_{1:l_1}(U_2) &= -(2P^{(V)}_{1:l_1}(W_1) + P^{(N)}_{1:l_1}(\triangle\tilde{X}_N) + \\ &\quad +2Q^{(V)}_{1:l_1}(W_2) + Q^{(B)}_{1:l_1}(\triangle\tilde{S}_B)). \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen ist wegen (4.15) erfüllt, so dass sich die übrigen durch Einsetzen der bereits bestimmten Unbekannten in die rechte Seite (i. a. nicht eindeutig) lösen lassen. Gemäß (4.4) sind $P_{i,B} = 0$ und $Q_{i,N} = 0$ für $i = l_1+1, \ldots, \tilde{n}$. Wegen

$$P\Big(\begin{bmatrix} \triangle\tilde{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big) + Q\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\tilde{S}_N \end{bmatrix} \Big) = P_{1:\tilde{n},B}\Big(\begin{bmatrix} \triangle\tilde{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big) + Q_{1:\tilde{n},N}\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\tilde{S}_N \end{bmatrix} \Big) = 0$$

(siehe (4.14) und (4.15)) folgt

$$P(\bar{X}(\mu)) + Q(\bar{S}(\mu)) = 0 \quad \forall\, \mu \in \mathbb{R}\,. \tag{4.17}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \bar{X}(\mu) \bullet \bar{S}(\mu) &= U_1 \bullet \triangle\tilde{S}_B + 2W_1 \bullet W_2 + U_2 \bullet \triangle\tilde{X}_N + \\ &\quad +\mu(\triangle\tilde{X}_B \bullet \triangle\tilde{S}_B + \triangle\tilde{X}_N \bullet \triangle\tilde{S}_N) \quad \forall\, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Das impliziert

$$\triangle\tilde{X}_B \bullet \triangle\tilde{S}_B + \triangle\tilde{X}_N \bullet \triangle\tilde{S}_N = 0\,.$$

Sei o.B.d.A. $\triangle\tilde{X}_B \bullet \triangle\tilde{S}_B \ge 0$. Aus $\triangle\tilde{X}_B\tilde{S}^\star_B + \tilde{S}^\star_B\triangle\tilde{X}^\star_B + \triangle\tilde{S}_B\tilde{X}^\star_B + \tilde{X}^\star_B\triangle\tilde{S}_B = 0$ (siehe (4.14) und (4.15)) folgt wegen $\tilde{X}^\star_B,\ \tilde{S}^\star_B \succ 0$, (4.13) und Lemma 4.2.2, dass $\triangle\tilde{X}_B = \triangle\tilde{S}_B = 0$ gelten muss. Wegen $\triangle\tilde{X}_N \bullet \triangle\tilde{S}_N = 0$ folgt mit derselben Argumentation, dass auch $\triangle\tilde{X}_N = \triangle\tilde{S}_N = 0$ ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $\triangle\tilde{X}_V = \triangle\tilde{S}_V = 0$.
Wegen (4.14) und (4.15) ist $\triangle\tilde{S}_V = -\tilde{X}^{\star\,-1}_B\triangle\tilde{X}_V\tilde{S}^\star_N$, so dass

$$\triangle\tilde{X}_V \bullet \triangle\tilde{S}_V = -\mathrm{tr}(\tilde{S}^{\star\,1/2}_N \triangle\tilde{X}^T_V \tilde{X}^{\star\,-1}_B \triangle\tilde{X}_V \tilde{S}^{\star\,1/2}_N) \le 0 \tag{4.19}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\triangle\tilde{X}_V = \triangle\tilde{S}_V = 0$.
Sei

$$\bar{X} := \begin{bmatrix} U_3 & \triangle\tilde{X}_V \\ \triangle\tilde{X}^T_V & 0 \end{bmatrix},\ \bar{S} := \begin{bmatrix} 0 & \triangle\tilde{S}_V \\ \triangle\tilde{S}^T_V & U_4 \end{bmatrix},$$

wobei $U_3 \in \mathcal{S}^{|B|}$, $U_4 \in \mathcal{S}^{|N|}$ so gewählt sind, dass $P(\bar{X}) + Q(\bar{S}) = 0$ (wiederum möglich wegen der Surjektivität von (4.6)). Aufgrund von $(\bar{X}, \bar{S}) \in \mathcal{N}([P,Q])$ gilt $0 \le \bar{X} \bullet \bar{S} = 2\triangle\tilde{X}_V \bullet \triangle\tilde{S}_V$, so dass wegen (4.19) $\triangle\tilde{X}_V \bullet \triangle\tilde{S}_V = 0$ und $\triangle\tilde{X}_V = \triangle\tilde{S}_V = 0$ folgen.
Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt: System $\Psi(\tilde{X},\ \tilde{S}; \rho) = 0$ ist in einer Umgebung von $(\tilde{X},\ \tilde{S}; \rho) = (\tilde{X}^\star,\ \tilde{S}^\star; 0)$ lokal eindeutig nach $\tilde{X}$, $\tilde{S}$ auflösbar, d.h. für $|\rho| < \epsilon, \epsilon > 0$ genügend klein, existieren analytische Funktionen $\hat{X}(\rho), \hat{S}(\rho)$, die $\Psi(\hat{X}(\rho),\ \hat{S}(\rho); \rho) \equiv 0$

erfüllen. Mit einer Argumentation analog zu der in Lemma 4.2.5 folgt $\tilde{X}(\rho) = \hat{X}(\rho)$ und $\tilde{S}(\rho) = \hat{S}(\rho)$ für $\epsilon > \rho \geq 0$. Definiere $\tilde{X}(\rho) :\equiv \hat{X}(\rho)$, $\tilde{S}(\rho) :\equiv \hat{S}(\rho)$ für $-\epsilon < \rho < 0$. Damit folgt die analytische Fortsetzbarkeit von $(\tilde{X}, \tilde{S})(\rho)$ in $\rho = 0$.
Speziell gelten wegen $\lim_{\rho\downarrow 0}(\tilde{X}_V, \tilde{S}_V)(\rho) = (0, 0)$ in einer Umgebung von $\rho = 0$ mit geeigneten Matrizen A_i, B_i Potenzreihenentwicklungen der Form

$$\tilde{X}_V(\rho) = \rho \sum_{i=0}^{\infty} A_i \rho^i, \quad \tilde{S}_V(\rho) = \rho \sum_{i=0}^{\infty} B_i \rho^i \,.$$

Gemäß (4.8) erhält man damit $X_V(r) = O(r), S_V(r) = O(r)$.
Man führe nun dieselben Überlegungen wie oben an den skalierten Matrizen

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_B(r) := X_B(r),\; X_V(r) =: r\tilde{X}_V(r),\; X_N(r) =: r\tilde{X}_N(r), \\ &S_B(r) =: r\tilde{S}_B(r),\; r\tilde{S}_V(r) := S_V(r),\; \tilde{S}_N(r) := S_N(r) \end{aligned} \tag{4.20}$$

durch.
Aus dem bisher Bewiesenen folgt

$$\tilde{X}(r) := \begin{bmatrix} \tilde{X}_B(r) & \tilde{X}_V(r) \\ \tilde{X}_V^T(r) & \tilde{X}_N(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(1) & O(1) \\ O(1) & \Theta(1) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{S}(r) := \begin{bmatrix} \tilde{S}_B(r) & \tilde{S}_V(r) \\ \tilde{S}_V^T(r) & \tilde{S}_N(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(1) & O(1) \\ O(1) & \Theta(1) \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Für die Funktion $\Psi(\tilde{X}, \tilde{S}; r)$ gilt jetzt

$$\Psi(\tilde{X}, \tilde{S}; r) = \begin{bmatrix} P_{1:l_1}\left(\begin{bmatrix} \tilde{X}_B & r\tilde{X}_V \\ r\tilde{X}_V^T & r\tilde{X}_N \end{bmatrix}\right) + Q_{1:l_1}\left(\begin{bmatrix} r\tilde{S}_B & r\tilde{S}_V \\ r\tilde{S}_V^T & \tilde{S}_N \end{bmatrix}\right) - q_{1:l_1} - r\bar{q}_{1:l_1} \\ P_{l_1+1:l_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_V \\ \tilde{X}_V^T & \tilde{X}_N \end{bmatrix}\right) + Q_{l_1+1:l_2}\left(\begin{bmatrix} \tilde{S}_B & \tilde{S}_V \\ \tilde{S}_V^T & 0 \end{bmatrix}\right) - \bar{q}_{l_1+1:l_2} \\ P_{l_2+1:\tilde{n}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_N \end{bmatrix}\right) + Q_{l_2+1:\tilde{n}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{S}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - \bar{q}_{l_2+1:\tilde{n}} \\ \tilde{X}_B\tilde{S}_B + \tilde{S}_B\tilde{X}_B + r\tilde{X}_V\tilde{S}_V^T + r\tilde{S}_V\tilde{X}_V^T - 2M_B \\ \tilde{X}_B\tilde{S}_V + \tilde{X}_V\tilde{S}_N + r\tilde{S}_B\tilde{X}_V + r\tilde{S}_V\tilde{X}_N - 2M_V \\ \tilde{S}_N\tilde{X}_N + \tilde{X}_N\tilde{S}_N + r\tilde{X}_V^T\tilde{S}_V + r\tilde{S}_V^T\tilde{X}_V - 2M_N \end{bmatrix}.$$

Sei $(r_k)_k, r_k \downarrow 0$, Folge mit $\lim_{r_k\to 0}(\tilde{X}, \tilde{S})(r_k) = (\bar{X}^\star, \bar{S}^\star)$. Die Richtungsableitung von Ψ in $(\bar{X}^\star, \bar{S}^\star; 0)$ in Richtung $(\triangle\bar{X}, \triangle\bar{S})$ lautet jetzt

$$\Psi'(\bar{X}^\star, \bar{S}^\star; 0)(\triangle\bar{X}, \triangle\bar{S}) = \begin{bmatrix} P_{1:l_1}\left(\begin{bmatrix} \triangle\bar{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + Q_{1:l_1}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\bar{S}_N \end{bmatrix}\right) \\ P_{l_1+1:l_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & \triangle\bar{X}_V \\ \triangle\bar{X}_V^T & \triangle\bar{X}_N \end{bmatrix}\right) + Q_{l_1+1:l_2}\left(\begin{bmatrix} \triangle\bar{S}_B & \triangle\bar{S}_V \\ \triangle\bar{S}_V^T & 0 \end{bmatrix}\right) \\ P_{l_2+1:\tilde{n}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \triangle\bar{X}_N \end{bmatrix}\right) + Q_{l_2+1:\tilde{n}}\left(\begin{bmatrix} \triangle\bar{S}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \triangle\bar{X}_B\bar{S}_B^\star + \bar{S}_B^\star\triangle\bar{X}_B + \triangle\bar{S}_B\bar{X}_B^\star + \bar{X}_B^\star\triangle\bar{S}_B \\ \triangle\bar{X}_B\bar{S}_V^\star + \bar{X}_B^\star\triangle\bar{S}_V + \triangle\bar{X}_V\bar{S}_N^\star + \bar{X}_V^\star\triangle\bar{S}_N \\ \triangle\bar{S}_N\bar{X}_N^\star + \bar{X}_N^\star\triangle\bar{S}_N + \triangle\bar{X}_N\bar{S}_N^\star + \bar{S}_N^\star\triangle\bar{X}_N \end{bmatrix}.$$

Eine zum Beweis der Nichtsingularität von $\Psi'(\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star; \rho)$ an der Stelle $(\tilde{X}^\star, \tilde{S}^\star; 0)$ analoge Argumentation zeigt ebenfalls die Nichtsingularität von $\Psi'(\bar{X}^\star, \bar{S}^\star; 0)$.Wie oben folgt die analytische Fortsetzbarkeit von $(\tilde{X}, \tilde{S})(r)$ bzw. $(X, S)(r)$ in $r = 0$.

Die Aussagen über die Potenzreihenentwicklungen von $X(r), S(r)$ in $r = 0$ folgen aus (4.20) und (4.21). $\square$

Bemerkung 4.2.15. Die Menge $\mathcal{M}(r_0)$ (siehe (3.4)) ist offen in $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$: Definiert man die Funktion $f : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ durch $f(X,S) = XS + SX$, so ist $f^{-1}(\mathcal{S}^n_{++}) \cap (\mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++})$ aufgrund der Offenheit von $\mathcal{S}^n_{++}$ und der Stetigkeit von f offen in $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$. Wegen Annahme 4.2.1(1) folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung auch die Offenheit von $\mathcal{M}(r_0)$. Eine geringfügige Erweiterung der Sätze und Lemmata, die zu Satz 4.2.14 führten, zeigt, dass $(X,S)(r, M, \bar{q})$ auf $[0, r_0] \times \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{M}(r_0)$ eindeutig bestimmt und analytisch ist.

Bemerkungen 4.2.16.

a) Die Aussage des Satzes 4.2.9 ist nicht neu. Insbesondere die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Pfadfunktionen $(X,S)(r)$ wurde bereits in [8, 9] mit Mitteln der nichtlinearen Analysis gezeigt, allerdings ohne Ausnutzung der Differenzierbarkeit von $\Phi(X, S, r, M)$, (4.2).

b) Die Aussagen über das Grenzverhalten der Matrizen $X(r), S(r)$ (Lemmata 4.2.11, 4.2.12, 4.2.13) stellen Verallgemeinerungen von Ergebnissen in [7] dar.

c) Ein zu Satz 4.2.14 analoges Resultat für semidefinite Programme wurde von Halická in [4] bewiesen.

d) Weiterhin offen ist die Frage, ob sich das Analytizitätsresultat des Satzes 4.2.14 auch auf SDLCP's ohne strikt komplementäre Lösung (4.3) übertragen lässt.

5 Eine Langschrittmethode zur Lösung monotoner semidefiniter Komplementaritätsprobleme

In diesem Kapitel soll ein von Stoer in [15] für lineare Komplementaritätsprobleme vorgeschlagener Algorithmus auf den semidefiniten Fall übertragen werden. Wir gehen aus vom $(SDLCP)$ aus Kapitel 3 und setzen voraus, dass die Annahmen 4.2.1 und 4.2.10 erfüllt sind. Wir betrachten unzulässige Innere-Punkte-Pfade $(X, S)(r, M, \bar{q})$ zur Lösung von $(SDLCP)$. Die Menge der zulässigen Residuen sei mit

$$\mathcal{M} := \{P(X) + Q(S) - q : X, S \succ 0, (XS + SX)/2 \succ 0\} \tag{5.1}$$

bezeichnet.
Wegen Bemerkung 4.2.15 ist $\mathcal{M}$ offen in $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$.
Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet folgendes Kompaktheitsargument: Ist $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{S}^n_{++} \times \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ eine kompakte Teilmenge des Analytizitätsbereichs von $X(r, M, \bar{q})$, $S(r, M, \bar{q})$, so gelten für die Ableitungen von X, S bezüglich r Abschätzungen der Form

$$\|D^k_r X(r, M, \bar{q})\|_F \, , \|D^k_r S(r, M, \bar{q})\|_F \le c_k \quad \forall\, (r, M, \bar{q}) \in \mathcal{C}, \tag{5.2}$$

wobei $c_k \ge 0, k = 0, 1, 2, \ldots$ geeignete Konstanten.
Für $\mu_0 > 0$ sei $\bar{q}^{(0)} \in \mathcal{M}/\mu_0$ und $0 < \theta < 1$ so gewählt, dass

$$Q_\theta := \{\alpha \bar{q}^{(0)} : \theta \le \alpha \le \theta^{-1}\} \subset \mathcal{M}/\mu_0 \, . \tag{5.3}$$

Das ist möglich aufgrund der Offenheit von $\mathcal{M}$.
Sei $0 < \underline{\gamma} < \gamma_0 < 1$, $\delta_0 := (\gamma_0 - \underline{\gamma})/2$, und $\gamma_{k+1} = \gamma_k - \delta_k$, $\delta_{k+1} := \delta_k/2$ für $k \ge 0$. Man sieht leicht, dass dann $\gamma_{k+1} = (\gamma_k + \underline{\gamma})/2$. Wir benötigen die folgenden Abschätzungen für unendliche Produkte:

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1 + \delta_j) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 + 2^{-j}\delta_0) \le e^{2\delta_0} < e^{1-\underline{\gamma}} =: \underline{\theta}^{-1}, \tag{5.4a}$$

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1 - \delta_j) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - 2^{-j}\delta_0) \ge e^{-2\delta_0} > e^{-(1-\underline{\gamma})} =: \underline{\theta}. \tag{5.4b}$$

Weiter sei $\underline{\gamma}$ so gewählt, dass $Q_{\underline{\theta}} \subset Q_\theta \subset \mathcal{M}/\mu_0$.
Der Algorithmus geht aus von Startmatrizen $X^{(0)}, S^{(0)} \succ 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} P(X^{(0)}) + Q(S^{(0)}) &= q + \mu_0 \bar{q}^{(0)}, \\ \frac{1}{2}(X^{(0)}S^{(0)} + S^{(0)}X^{(0)}) &\succeq \mu_0 \gamma_0 I, \end{aligned}$$

wobei
$$\mu_0 := X^{(0)} \bullet S^{(0)}/n.$$
(Als Startmatrizen können z.B. $X^{(0)} = S^{(0)} = \zeta I$, $\zeta > 0$, gewählt werden. Es ist dann $\mu_0 = \zeta^2$, und $\bar{q}^{(0)}$ wird über die lineare Gleichung definiert).
Es folgt $E^{(0)} := (X^{(0)}S^{(0)} + S^{(0)}X^{(0)})/(2\mu_0) \succ \gamma_0 I$, $\mathrm{tr}(E^{(0)}) = n$ und
$$(X^{(0)}, S^{(0)}) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma_0),$$
wobei für $0 < \gamma < 1$ durch
$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) := \big\{(X,S) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++} : (XS+SX)/2 \succeq \gamma\mu I, \mu := \tfrac{X \bullet S}{n}\big\} \tag{5.5}$$
eine (weite) Umgebung des zentralen Pfades definiert wird.
Ziel der zu beschreibenden Langschrittmethode ist die Erzeugung einer Folge
$$(X^{(k)}, S^{(k)}) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$$
und damit verbundener Größen
$$\mu_k := X^{(k)} \bullet S^{(k)}/n, \quad E^{(k)} := (X^{(k)}S^{(k)} + S^{(k)}X^{(k)})/(2\mu_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$
die für alle $k \geq 0$ folgende Eigenschaften erfüllen:
$$\begin{aligned} \mu_k > \mu_{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0&, \\ \|P(X^{(k)}) + Q(S^{(k)}) - q\| = O(\mu_k)&, \\ (X^{(k)}, S^{(k)}) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma_k)&, \end{aligned} \tag{5.6}$$
wobei die μ_k Q-superlinear mit hoher Konvergenzordnung gegen 0 konvergieren.
Insbesondere gilt hierbei
$$P(X^{(k)}) + Q(S^{(k)}) - q = \mu_k \alpha_k \bar{q}^{(0)}$$
mit $\bar{q}^{(k)} = \alpha_k \bar{q}^{(0)} \in Q_{\underline{\theta}} \subset \mathcal{M}/\mu_0$, d.h. die $\bar{q}^{(k)}$ sind positive Vielfache von $\bar{q}^{(0)}$.
Wegen $\gamma_0 > \underline{\gamma}$ und $\gamma_{k+1} = (\gamma_k + \underline{\gamma})/2$ ist auch
$$\gamma_k > \gamma_{k+1} > \underline{\gamma} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{5.7}$$
Die Eigenwerte $\lambda_i(A)$ der Matrix $A \in \mathcal{S}^n$ seien der Größe nach geordnet, $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$. Für $\gamma > 0$ und alle $(X,S) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ folgt
$$\lambda_i\big((XS+SX)/(2\mu)\big) \geq \gamma \quad \forall\, i$$
und
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\big((XS+SX)/(2\mu)\big) = \mathrm{tr}\big((XS+SX)/(2\mu)\big) = X \bullet S/\mu = n.$$
Daher ist
$$\mathcal{K}_\gamma := \big\{(XS+SX)/(2\mu) : (X,S) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)\big\} \subset \mathcal{S}^n_{++}$$

für beliebiges $\gamma > 0$ kompakt. In Verbindung mit der Kompaktheit von $Q_{\underline{\theta}}$, Satz 4.2.14 und Bemerkung 4.2.15 folgt:

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mu_0, \underline{\gamma}, \underline{\theta}) := [0, \mu_0] \times \mathcal{K}_{\underline{\gamma}} \times Q_{\underline{\theta}}$$

ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^n_{++} \times \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, und $(X, S)(\mu, M, \bar{q})$ sind auf $\mathcal{C}$ definiert und dort analytisch.
Insbesondere ist wegen $\mathcal{K}_{\gamma_k} \subset \mathcal{K}_{\underline{\gamma}}$ (siehe (5.7)) auch

$$(\mu_k, M_k, \bar{q}^{(k)}) \in \mathcal{C} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.8}$$

wobei $M_k := (X_k S_k + S_k X_k)/(2\mu_k)$.
Damit sind die Kompaktheitsschlüsse (5.2) anwendbar.
Wir wollen jetzt die Konvergenz einer Langschrittmethode zur Lösung von $(SDLCP)$ untersuchen, die die Eigenschaften (5.6) und (5.8) besitzt. Da die Konvergenzanalysis nur lokal ist, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $0 < \mu_0 \leq 1$ gilt.
Zur Beschreibung eines typischen Iterationsschrittes

$$\mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++} \ni (X^{(k)}, S^{(k)}) \to (X^{(k+1)}, S^{(k+1)})$$

benutzen wir die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{gathered} Z := (X, S) := (X^{(k)}, S^{(k)}),\ \mu := \frac{X \bullet S}{n},\ E := \frac{1}{2}(XS + SX)/\mu, \\ \bar{q} := \bar{q}^{(k)} = (P(X) + Q(S) - q)/\mu,\ \gamma := \gamma_k,\ \delta := \delta_k, \gamma_+ := \gamma_{k+1} = \gamma - \delta, \end{gathered}$$

und nehmen induktiv an, dass

$$(\mu, E, \bar{q}) \in \mathcal{C}$$

(richtig für $k = 0$, wenn $\mu_0 \leq 1$). Für gegebenes $0 < \mu$ betrachte man für $0 \leq \nu \leq \mu \leq \mu_0 \leq 1$ die Lösung $\bar{Z}(\nu) := (\bar{X}, \bar{S})(\nu)$ des Systems

$$\begin{aligned} P(\bar{X}) + Q(\bar{S}) &= q + \nu\bar{q}, \\ \frac{1}{2}(\bar{X}\bar{S} + \bar{S}\bar{X}) &= \nu E(\nu), \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei

$$E(\nu) := E + (\mu - \nu)(I - E)$$

mit $E \succeq \gamma I,\ \operatorname{tr}(E) = n$, linear von ν abhängt. Insbesondere gilt hierbei $\bar{Z}(\mu) = (X, S),\ E(\mu) = E$.
Eigenschaften für $0 \leq \nu \leq \mu \leq \mu_0 \leq 1$:

(1) $E(\nu) = (1 - (\mu - \nu))E + (\mu - \nu)I \in \operatorname{conv}\{I, E\}$.
Wegen der Konvexität des Kegels der positiv definiten Matrizen folgt hieraus $E(\nu) \succ 0$.

(2) $$\begin{aligned} E(\nu) - \gamma_+ I &\succeq (1 - (\mu - \nu))\gamma I + (\mu - \nu)I - (\gamma - \delta)I \\ &= (\mu - \nu)(1 - \gamma)I + \delta I \\ &\succeq \delta I. \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{tr}(E(\nu)) = n,\ \bar{\mu}(\nu) := (\bar{X}(\nu) \bullet \bar{S}(\nu))/n = (\nu\,\mathrm{tr}(E(\nu)))/n = \nu.$

Wir wollen den durch $\bar{Z}(\nu)$ gegebenen Pfad durch ein Matrix-Taylor-Polynom p-ter Ordnung in der Nähe von $\nu = \mu$ approximieren. Dazu setzen wir

$$\hat{Z}(\nu) := (\hat{X}(\nu), \hat{S}(\nu)) = Z + (\nu - \mu)Z_1 + \ldots + (\nu - \mu)^p Z_p\,,$$

mit skalierten Ableitungen

$$Z_j = (X_j, S_j) := \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \nu^j}\,(\bar{X}, \bar{S})(\nu)\Big|_{\nu=\mu}. \tag{5.10}$$

Man erhält die Z_j aus (5) durch fortgesetztes Differenzieren nach ν in $\nu = \mu$. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} P(X_1) + Q(S_1) &= \bar{q} \\ \tfrac{1}{2}(H_S(X_1) + H_X(S_1)) &= E - \mu(I - E), \\ P(X_2) + Q(S_2) &= 0 \\ H_S(X_2) + H_X(S_2) &= -H_{X_1}(S_1) - 2(I - E)\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Man beachte, dass die obigen Gleichungssysteme wegen Lemma 4.2.3 stets eindeutig lösbar sind und dass der zu invertierende Operator für alle Ableitungen identisch ist. Aus den **Eigenschaften** (1)-(3) folgt $(\bar{\mu}(\nu), E(\nu), \bar{q}) \in \mathcal{C}\ \forall\ 0 \le \nu \le \mu$, und aufgrund der Analytizität von $E(\nu)$ sind auch $(\bar{X}, \bar{S})(\nu) := (\bar{X}, \bar{S})(\nu, E(\nu), \bar{q})$ analytisch bezüglich ν auf $\mathcal{C}$. Insbesondere gelten für die Komponenten $\bar{x}_{ij}$ von $\bar{X}$ bzw. $\bar{s}_{ij}$ von $\bar{S}$ auf $\mathcal{C}$ Abschätzungen der Form

$$\left|\frac{\partial^k \bar{x}_{ij}(\nu)}{\partial \nu^k}\right|,\ \left|\frac{\partial^k \bar{s}_{ij}(\nu)}{\partial \nu^k}\right| \le d_k,\ k = 0, 1, \ldots \tag{5.12}$$

Zur Bestimmung der $(k+1)$-ten Iterierten verwenden wir folgende Linesearch-Regel:

$$\begin{aligned} \nu_+ &:= \inf\{\nu > 0 : \hat{Z}(\nu) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma_+),\ |\hat{\mu}(\nu) - \nu| \le \delta\nu, \hat{\mu}(\nu) \le \mu\} \\ &= \inf\{\nu > 0 : \hat{Z}(\nu) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++},\ (\hat{X}(\nu)\hat{S}(\nu) + \hat{S}(\nu)\hat{X}(\nu))/2 \succeq \gamma_+\hat{\mu}(\nu)I, \\ &\qquad |\hat{\mu}(\nu) - \nu| \le \delta\nu,\ \hat{\mu}(\nu) \le \mu\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

und setzen abkürzend für die neuen Iterierten

$$\begin{gathered} \mu_+ := \hat{\mu}(\nu_+),\ X_+ := \hat{X}(\nu_+),\ S_+ := \hat{S}(\nu_+), \\ (X^{(k+1)}, S^{(k+1)}, \mu_{k+1}) := (X_+, S_+, \mu_+)\,. \end{gathered}$$

Wegen $0 < \delta < \delta_0 < \frac{1}{2}$ gilt

$$\nu_+(1 - \delta) \le \hat{\mu}(\nu_+) \le \nu_+(1 + \delta)\,, \tag{5.14}$$

insbesondere also $\hat{\mu}(\nu_+) \ge 0$.
Wir wollen zeigen, dass mit $(\mu, E, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ auch $(\mu_+, E_+, \bar{q}_+) \in \mathcal{C}$ gilt:

(1) Gemäß (5.10) und (5.11) gilt

$$P(X_+) + Q(S_+) = q + \nu_+\bar{q}\,.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Falls $\mu_+ = 0$, so ist wegen (5.14) auch $\nu_+ = 0$. Andererseits folgt aus der Definition von ν_+, dass $X_+, S_+ \in \mathcal{S}_+^n$. Es folgt $(X_+, S_+) \in \mathcal{F}$, und wegen $X_+ \bullet S_+ = n\mu_+ = 0$ löst (X_+, S_+) Problem $(SDLCP)$.
- Falls $\mu_+ > 0$, so ist
$$P(X_+) + Q(S_+) = q + \mu_+ \left(\frac{\nu_+}{\mu_+}\bar{q}\right).$$
Es folgt
$$\bar{q}_+ = \frac{\nu_+}{\mu_+}\bar{q} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\delta} \le \frac{\nu_+}{\mu_+} \le \frac{1}{1-\delta}.$$
Induktiv erhält man $\bar{q}_+ = \left(\prod_{l=1}^{k+1} \frac{\nu_l}{\mu_l}\right)\bar{q}^{(0)}$, sowie wegen (5.4)
$$\underline{\theta} < \prod_{l=0}^{\infty}(1+\delta_l)^{-1} \le \prod_{l=1}^{k+1} \frac{\nu_l}{\mu_l} \le \prod_{l=0}^{\infty}(1-\delta_l)^{-1} < \underline{\theta}^{-1},$$
d.h. $\bar{q}_+ \in Q_{\underline{\theta}}$.

(2) $\mu_+ \in [0, \mu]$ und $E_+ \in \mathcal{K}_{\gamma_+} \subset \mathcal{K}_{\underline{\gamma}}$ folgen direkt aus der Definition von ν_+.

Damit folgt $(\mu_+, E_+, \bar{q}_+) \in \mathcal{C}$, induktiv also auch $(\mu_k, E_k, \bar{q}^{(k)}) \in \mathcal{C}\ \forall\ k$.
Zur Untersuchung der Konvergenz gehen wir davon aus, dass im k-ten Iterationsschritt ein $(\mu, E, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ gegeben sei. Dann ist auch $(\nu, E(\nu), \bar{q}) \in \mathcal{C}\ \forall\ 0 \le \nu \le \mu$.
Aufgrund der Taylorformel, angewandt auf Matrizen, gilt

$$\begin{aligned}
\bar{X}(\nu) &= \hat{X}(\nu) + \frac{1}{(p+1)!}(D_\nu^{p+1}\bar{x}_{ij}(\xi_{ij}))(\nu-\mu)^{p+1},\ \xi_{ij} \in (\nu, \mu),\\
\bar{S}(\nu) &= \hat{S}(\nu) + \frac{1}{(p+1)!}(D_\nu^{p+1}\bar{s}_{ij}(\theta_{ij}))(\nu-\mu)^{p+1},\ \theta_{ij} \in (\nu, \mu).
\end{aligned}$$

Es folgt unter Berücksichtigung von (5.12)

$$\hat{X}(\nu) = \bar{X}(\nu) + O(|\nu-\mu|^{p+1}), \hat{S}(\nu) = \bar{S}(\nu) + O(|\nu-\mu|^{p+1}),$$

wobei die O-Terme aufgrund der Symmetrie von $\hat{X}(\nu), \bar{X}(\nu), \hat{S}(\nu), \bar{S}(\nu)$ symmetrische Matrixfunktionen in ν darstellen. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\hat{X}(\nu)\hat{S}(\nu) + \hat{S}(\nu)\hat{X}(\nu)) &= \frac{1}{2}(\bar{X}(\nu)\bar{S}(\nu) + \bar{S}(\nu)\bar{X}(\nu)) + O(|\nu-\mu|^{p+1})\\
&= \nu E(\nu) + O(|\nu-\mu|^{p+1}),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(\nu) = \frac{\hat{X}(\nu) \bullet \hat{S}(\nu)}{n} &= \bar{\mu}(\nu) + O(|\nu-\mu|^{p+1})\\
&= \nu + O(|\nu-\mu|^{p+1}) = \nu + O(\mu^{p+1}).
\end{aligned}$$

Es folgt die Existenz einer Konstanten $c = c(\underline{\gamma}) > 0$, so dass für alle $0 \le \nu \le \mu$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\hat{X}(\nu)\hat{S}(\nu) + \hat{S}(\nu)\hat{X}(\nu)) - \gamma_+\hat{\mu}(\nu)I &= \nu E(\nu) - \gamma_+\nu I + O(|\nu - \mu|^{p+1}) \\ &\succeq \nu(E(\nu) - \gamma_+ I) - c(\mu - \nu)^{p+1} I \\ &\succeq \nu\delta I - c\mu^{p+1} I,\end{aligned}$$

sowie

$$|\hat{\mu}(\nu) - \nu| \le c(\mu - \nu)^{p+1} \le c\mu^{p+1}\,.$$

Für alle ν mit

$$\frac{c}{\delta}\mu^{p+1} \le \nu \le \mu \tag{5.15}$$

folgt

$$\frac{1}{2}(\hat{X}(\nu)\hat{S}(\nu) + \hat{S}(\nu)\hat{X}(\nu)) - \gamma_+\hat{\mu}(\nu)I \succeq 0\,, \tag{5.16}$$

$$|\hat{\mu}(\nu) - \nu| \le c\mu^{p+1} \le \delta\nu\,. \tag{5.17}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\mu - \hat{\mu}(\nu) &\ge \mu - \nu - c(\mu - \nu)^{p+1} \\ &= (\mu - \nu)(1 - c(\mu - \nu)^p) \ge (\mu - \nu)(1 - c\mu^p) \\ &\ge (\mu - \nu)(1 - c\mu_0^p) \ge 0\,,\end{aligned} \tag{5.18}$$

sofern μ_0 klein genug ist,

$$\mu_0 \le \min\{1, c^{-1/p}\}. \tag{5.19}$$

Sei jetzt vorausgesetzt, dass Ungleichung (5.15) eine Lösung besitzt, d.h. $\frac{c}{\delta}\mu^p \le 1$ gilt. Wegen (5.17) und (5.18) gilt dann $\mu \ge \hat{\mu}(\nu) > 0$ für alle ν, die (5.15) erfüllen. Wegen (5.16), $(\hat{X}, \hat{S})(\mu) = (X, S) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ und der Stetigkeit von $(\hat{X}, \hat{S})(\nu)$ ist folglich auch $(\hat{X}, \hat{S})(\nu) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++}$ für alle $\nu \in [\frac{c}{\delta}\mu^{p+1}, \mu]$. Gemäß Definition (5.13) von ν_+ gilt also $\nu_+ \le (c/\delta)\mu^{p+1}$, und wegen $0 < \delta < 1/2$ und (5.17) hat man auch

$$\mu_{k+1} = \mu_+ \le \nu_+(1 + \delta) \le 2\nu_+ \le \frac{2c}{\delta}\mu^{p+1} = \frac{2c}{\delta_k}\mu_k^{p+1}\,. \tag{5.20}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\frac{c}{\delta_k}\mu_k^p \le \frac{1}{2^{k+2}} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \tag{5.21}$$

gilt, sofern $\mu_0 \in (0, 1]$ so klein gewählt ist, dass

$$\frac{c}{\delta_0}\mu_0^p \le \frac{1}{8}\,.$$

Für $k = 0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Insbesondere ist auch (5.19) erfüllt. Angenommen, die Behauptung ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ schon bewiesen. Dann gilt auch $(c/\delta_k)\mu_k^p \le 1$, so dass (5.20) anwendbar ist. Mit $\delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k$ und $p \in \mathbb{N}$ folgt

$$\mu_{k+1}^p \frac{c}{\delta_{k+1}} = 2\frac{c}{\delta_k}\mu_{k+1}^p \le \frac{2c}{\delta_k}\left(2\frac{c}{\delta_k}\mu_k^{p+1}\right)^p = \left(2\frac{c}{\delta_k}\mu_k^p\right)^{p+1} \le \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{p+1} \le \frac{1}{2^{2k+2}} \le \frac{1}{2^{k+3}}\,.$$

Aus der linken Seite der Ungleichungskette geht insbesondere hervor, dass $\mu_1^p c/\delta_1 \leq 1/16$ ist, so dass (5.21) auch für $k = 1$ richtig ist.

Für die lokale Konvergenzuntersuchung wollen wir (5.19) verschärfen zu

$$\mu_0 \leq \min\left\{1, (\delta_0/8)^{1/p} c^{-1/p}\right\} = \min\left\{1, ((\gamma_0 - \underline{\gamma})/16)^{1/p} c^{-1/p}\right\} =: \beta(\underline{\gamma}) .$$

Insbesondere folgt aus (5.20) und (5.21) auch

$$\mu_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \mu_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 . \tag{5.22}$$

Man beachte, dass aus (5.20) wegen $\delta_k \to 0$ nicht folgt, dass μ_k Q-superlinear mit Ordnung $p+1$ gegen 0 konvergiert. Man kann jedoch zeigen, dass die Konvergenzordnung „fast“ $p+1$ ist:

Satz 5.1. *Falls ($SDLCP$) die Voraussetzungen 4.2.1 und 4.2.10 erfüllt und der Startwert μ_0 die Bedingung $\mu_0 \leq \beta(\underline{\gamma})$ erfüllt, so ist der über die Linesearch (5.13) definierte Algorithmus lokal Q-superlinear konvergent mit Konvergenzordnung $p + 1 - 0$, d.h. zu jedem $\epsilon \in (0, 1/2]$ existieren Konstanten $k(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ und $d(\epsilon) > 0$ derart, dass für alle $k \geq k(\epsilon)$*

$$\mu_{k+1} \leq d(\epsilon) \mu_k^{p+1-\epsilon} .$$

Beweis. Die (superlineare) Konvergenz folgt aus $\mu_0 \leq 1$ und (5.22). Weiter folgt aus (5.22) induktiv, dass

$$\mu_{k+1} \leq \left(\prod_{j=1}^{k+1} 2^{-j}\right) \mu_0 \leq 2^{-\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 .$$

Unter Berücksichtigung von (5.20) und $\delta_k = 2^{-k}\delta_0$ folgt daraus

$$\mu_{k+1} \leq \left(\frac{2c}{\delta_k} \mu_k^{\epsilon}\right) \mu_k^{p+1-\epsilon} \leq \left(\frac{c}{\delta_0} 2^{-\frac{1}{2}\epsilon k^2 + \frac{1}{2}(2-\epsilon)k + 1}\right) \mu_k^{p+1-\epsilon} .$$

Da für $\epsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} 2^{-\frac{1}{2}\epsilon k^2 + \frac{1}{2}(2-\epsilon)k+1} = 0$$

gilt, folgt für alle $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ die Existenz eines $d(\epsilon)$ mit der im Satz geforderten Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 5.2. Man kann Q_θ z.B. auf folgende Weise bestimmen:
Seien $r_0 > 0$, $M_0 \succ 0$, $X_0, S_0 \succ 0$ gegeben mit

$$\begin{aligned} P(X_0) + Q(S_0) &= q + r_0 \bar{q} , \\ \frac{1}{2}(X_0 S_0 + S_0 X_0) &= r_0 M_0 . \end{aligned}$$

Man bestimme dann die Ableitung $(X_1, S_1)(r_0, M_0)$ aus

$$\begin{aligned} P(X_1) + Q(S_1) &= \bar{q} , \\ \frac{1}{2}(X_1 S_0 + S_0 X_1 + S_1 X_0 + X_0 S_1) &= M_0, \end{aligned}$$

und setze in einer Approximation erster Ordnung

$$\hat{X}(r) := X_0 + (r - r_0)X_1,\ \hat{S}(r) := S_0 + (r - r_0)S_1\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P(\hat{X}(r)) + Q(\hat{S}(r)) &= q + r\bar{q}\,, \\ \frac{1}{2}(\hat{X}(r)\hat{S}(r) + \hat{S}(r)\hat{X}(r)) &= rM_0 + \frac{1}{2}(r - r_0)^2(X_1S_1 + S_1X_1)\,. \end{aligned}$$

Sei

$$\tau := \sup\{\sigma > r_0 : \hat{X}(r)\hat{S}(r) + \hat{S}(r)\hat{X}(r) \succ 0\ \forall\, r \in [r_0, \sigma)\}.$$

Aufgrund von Satz 4.2.14 gilt dann

$$\frac{r}{r_0}\bar{q} = (P(\hat{X}(r)) + Q(\hat{S}(r)) - q)/r_0 \in \mathcal{M}/r_0 \quad \forall\, r \in (0, \tau),$$

so dass auch

$$\{\alpha\bar{q} : r_0/\tau < \alpha < \tau/r_0\} \subset \mathcal{M}/r_0\,.$$

Falls $\tau = +\infty$, so wähle in Definition (5.3) $\theta^{-1} > 1$ beliebig.
Ansonsten setze $\theta^{-1} := \frac{r_0+\tau}{2r_0} = 1 + \frac{\tau - r_0}{2r_0}$.
Insbesondere gilt

$$\hat{X}(r)\hat{S}(r) + \hat{S}(r)\hat{X}(r) \succ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad rI + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 M_0^{-1/2}(X_1S_1 + S_1X_1)M_0^{-1/2} \succ 0.$$

Ist U orthogonal mit

$$U^T(M_0^{-1/2}(X_1S_1 + S_1X_1)M_0^{-1/2})U = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

so folgt

$$\hat{X}(r)\hat{S}(r) + \hat{S}(r)\hat{X}(r) \succ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad rI + \frac{1}{2}(r - r_0)^2\Lambda \succ 0.$$

Man setze $\bar{\lambda} := \max_{i:\lambda_i<0}\{|\lambda_i|\}$, falls $\Lambda \not\succeq 0$. Für τ erhält man damit

$$\tau = \begin{cases} +\infty\,, & \text{falls } \Lambda \succeq 0, \\ r_0 + (1 + \sqrt{1 + 2r_0\bar{\lambda}}\,)/\bar{\lambda} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

6 Über die Lösung von Komplementaritätsproblemen mittels Wurzelfunktionen

6.1 Analytizität und Kompaktheit

Gegeben sei ein SDLCP, das $(SDLCP)$ und die Annahmen 4.2.1 und 4.2.10 erfüllt. Wir betrachten unzulässige Innere-Punkte-Pfade als Lösungen $(X,S)(r,M,\bar{q})$ von $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$. Aus Satz 4.2.14 und Bemerkung 4.2.15 folgt, dass $(X,S)(r,M,\bar{q})$ auf der Menge

$$\mathcal{P} := \{(r,M,\bar{q}) \mid \exists r_0 > 0 : 0 \leq r \leq r_0, \bar{q} \in \mathcal{M}(r_0),\ M \succ 0\} \tag{6.1}$$

analytisch ist.
Für den Fall kompakter Teilmengen $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ folgt die Existenz von Konstanten $\delta := \delta(\mathcal{C}) > 0$, $c_j := c_j(\mathcal{C}) > 0, j = 0, 1, \ldots$ derart, dass

$$\|D_r^j(X,S)(r,M,\bar{q})\|_F \leq c_j,\ j = 0,1,2,\ldots \tag{6.2}$$

$$\delta I \preceq X(r,M,\bar{q}) + S(r,M,\bar{q}) \preceq \frac{1}{\delta} I\,. \tag{6.3}$$

für alle $(r,M,\bar{q}) \in \mathcal{C}$ gilt. Hierbei bezeichnet D_r^j die partielle Ableitung j-ter Ordnung bezüglich r.
Wir wollen eine kompakte Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ explizit angeben. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 6.1.1. *Seien $X_0, S_0 \succ 0$ mit $X_0S_0 + S_0X_0 \succ 0$ und $B_r := \{(\triangle X, \triangle S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \mid \|(\triangle X, \triangle S)\|_F < r\}$. Sei $\bar{r}$ die positive Lösung von*

$$\lambda_{\min}(X_0S_0 + S_0X_0) - 2(\|X_0\|_F + \|S_0\|_F)r - 2r^2 = 0.$$

Dann gilt für alle $(\triangle X, \triangle S) \in B_{\bar{r}}$

$$(X_0 + \triangle X)(S_0 + \triangle S) + (S_0 + \triangle S)(X_0 + \triangle X) \succ 0,\ X_0 + \triangle X \succ 0,\ S_0 + \triangle S \succ 0.$$

Beweis. Setze $F(\triangle X, \triangle S) := (X_0 + \triangle X)(S_0 + \triangle S) + (S_0 + \triangle S)(X_0 + \triangle X)$. Es ist $F(\triangle X, \triangle S) \in \mathcal{S}^n$ und gemäß dem Satz von *Rayleigh-Ritz* gilt

$$\min_{\mathbb{R}^n \ni u, \|u\|_2 = 1} u^T F(\triangle X, \triangle S) u = \lambda_{\min}(F(\triangle X, \triangle S)).$$

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\|_2 = 1$ und $(\triangle X, \triangle S) \in B_r$. Wegen $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ und $\|\triangle X\|_F,\ \|\triangle S\|_F \leq \|(\triangle X, \triangle S)\|_F$ folgt

$$\begin{aligned}
&u^T F(\triangle X, \triangle S) u = \\
&\quad = u^T(X_0S_0 + S_0X_0)u + u^T(H_{S_0}(\triangle X) + H_{X_0}(\triangle S))u + u^T(\triangle X \triangle S + \triangle S \triangle X)u \\
&\quad \geq \lambda_{\min}(X_0S_0 + S_0X_0) - \|H_{S_0}(\triangle X)\|_2 - \|H_{X_0}(\triangle S)\|_2 - 2\|\triangle X\|_2 \|\triangle S\|_2 \\
&\quad \geq \lambda_{\min}(X_0S_0 + S_0X_0) - 2(\|\triangle X\|_F \|S_0\|_F + \|X_0\|_F \|\triangle S\|_F + \|\triangle X\|_F \|\triangle S\|_F) \\
&\quad > \lambda_{\min}(X_0S_0 + S_0X_0) - 2(\|X_0\|_F + \|S_0\|_F)r - 2r^2.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lambda_{\min}(F(\triangle X, \triangle S)) > 0 \quad \forall\, (\triangle X, \triangle S) \in B_{\bar{r}}. \tag{6.4}$$

Die Menge $B_{\bar{r}}$ ist konvex, insbesondere also (weg-)zusammenhängend. Wegen $F(0,0) \succ 0, X_0,\ S_0 \succ 0$ und der Nichtsingularität von $F(\triangle X, \triangle S)$ auf $B_{\bar{r}}$ gemäß (6.4) folgt daraus aus Stetigkeitsgründen auch $X_0 + \triangle X,\ S_0 + \triangle S \succ 0\ \forall\, (\triangle X, \triangle S) \in B_{\bar{r}}$. □

Der Operator $A : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ sei durch $A\left(\left(\begin{smallmatrix} X \\ S \end{smallmatrix}\right)\right) := P(X) + Q(S)$ definiert. Für das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}^n \oplus \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \oplus \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$, $X \oplus Y := \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$, gelte $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} X_1 \\ S_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} X_2 \\ S_2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle := X_1 \bullet X_2 + S_1 \bullet S_2$. Damit folgt für alle $y \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ und alle $X, S \in \mathcal{S}^n$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{\tilde{n}} y_i \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, P(X) \rangle + \langle y, Q(S) \rangle = \langle y, A\left(\left(\begin{smallmatrix} X \\ S \end{smallmatrix}\right)\right) \rangle = \langle A^\star y, \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} \rangle,$$

so dass

$$A^\star(y) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} y_i \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix}.$$

Wegen Annahme 4.2.1(1) gilt $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, also $\mathcal{N}(A^\star) = \mathcal{R}(A)^\perp = \{0\}$. Somit ist $A^\star$ injektiv und $AA^\star$ strikt positiv, also invertierbar.
Zu gegebenem $(X_0, S_0, r_0) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ mit $X_0 S_0 + S_0 X_0 \succ 0$ sei der Störungsvektor $\bar{q}$ in $(SDLCP)_{r,M,\bar{q}}$ definiert durch $\bar{q} := (P(X_0) + Q(S_0) - q)/r_0$, und es gelte $M := \frac{1}{2}(X_0 S_0 + S_0 X_0)$. Sei $\bar{r}$ wie in Lemma 6.1.1 gewählt. Definiere für $(\hat{X}, \hat{S}) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$

$$\hat{q} := (P(\hat{X}) + Q(\hat{S}) - q)/r_0,\ \triangle q := \hat{q} - \bar{q},\ \triangle Z := \begin{pmatrix} \hat{X} - X_0 \\ \hat{S} - S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle X \\ \triangle S \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$r_0 \triangle q = A(\triangle Z).$$

Wenn $A^+ := A^\star (AA^\star)^{-1}$ die *Moore-Penrose-Inverse* von A bezeichnet, dann gilt

$$\triangle Z = r_0 A^+(\triangle q) = \operatorname{argmin}\{\|\triangle W\|_F : A(\triangle W) = r_0 \triangle q,\ \triangle W \in \mathcal{S}^n\}.$$

Das Problem, die größtmögliche abgeschlossene Kugel $\bar{B}_\lambda(0)$ um den Ursprung zu finden, die

$$\|A^+ \triangle q\| \le \bar{r}/(2r_0)$$

für alle $\triangle q \in \bar{B}_\lambda(0)$ erfüllt, führt auf das Minimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} & \min\ \|\triangle q\| \\ \triangle q : & \\ & \quad \|A^+ \triangle q\| = \bar{r}/(2r_0). \end{array}$$

Standard-Argumente aus der Linearen Algebra zeigen, dass letzteres System durch einen Eigenvektor $\triangle q^*$ zum kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min} > 0$ von $AA^\star$ gelöst werden kann. Wegen

$$\frac{\bar{r}^2}{4r_0^2} = \|A^+ \triangle q^*\|^2 = \triangle q^{*T} (AA^\star)^{-1} \triangle q^* = \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\triangle q^*\|^2$$

folgt, dass

$$\lambda = \|\triangle q^*\| = \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\bar{r}}{2r_0}\,.$$

Zu jedem $\hat{q} \in \bar{B}_\lambda(\bar{q})$ existiert also ein $(\hat{X},\hat{S}) \in \bar{B}_{\bar{r}/2}((X_0,S_0)) := \{(X,S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \mid \|(X-X_0, S-S_0)\|_F \leq \bar{r}/2\}$. Wegen Lemma 6.1.1 ist aber $XS+SX \succ 0$, $X \succ 0, S \succ 0\; \forall\, (X,S) \in \bar{B}_{\bar{r}/2}((X_0,S_0))$. Aufgrund der Kompaktheit von $\bar{B}_{\bar{r}/2}((X_0,S_0))$ gilt für geeignetes $\delta > 0$ sogar $\delta I \preceq XS+SX \preceq \frac{1}{\delta}I\; \forall\, (X,S) \in \bar{B}_{\bar{r}/2}((X_0,S_0))$. Aus Satz 4.2.14 und Bemerkung 4.2.15 folgt:

$$\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}(r_0, I, \bar{q}) := \{(r, I, \bar{q}') \mid 0 \leq r \leq r_0, \|\bar{q}' - \bar{q}\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\bar{r}}{2r_0}\} \tag{6.5}$$

ist kompakte Teilmenge von $\mathcal{P}$.

Bemerkung 6.1.2. Es gilt

$$AA^\star = PP^\star + QQ^\star = [P(P_1) + Q(Q_1), \ldots, P(P_{\tilde{n}}) + Q(Q_{\tilde{n}})].$$

Bemerkung 6.1.3. Es seien die Annahmen 4.1.1 erfüllt und die Indexmengen I, J, K durch (3.3) definiert. Zu (6.1)-(6.3) analoge Definitionen und Formeln gelten dann auch für LCP's ohne strikt komplementäre Lösung, d.h. mit $K \neq \emptyset$. Wegen Satz 4.1.4 sind die unzulässigen Innere-Punkte-Pfade $(x,y)(\rho,\eta,\bar{q})$, definiert als Lösungen des nichtlinearen Systems $(LCP)_{\rho^2,\eta,\bar{q}}$, analytisch auf

$$\mathcal{P} := \{(\rho,\eta,\bar{q}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \mid \exists \rho_0 > 0 : 0 \leq \rho \leq \rho_0, \bar{q} \in \mathcal{M}(\rho_0^2),\ \eta > 0\}, \tag{6.6}$$

wobei

$$\mathcal{M}(\rho_0^2) := \{(Px + Qy - q)/\rho_0^2 : x, y > 0\}.$$

Für kompakte Teilmengen $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ gelten jetzt mit Konstanten $\delta := \delta(\mathcal{C}) > 0$, $c_j := c_j(\mathcal{C}) > 0, j = 0, 1, \ldots$ Abschätzungen der Form

$$\|D^j_\rho(x,y)(\rho,\eta,\bar{q})\| \leq c_j,\ j = 0,1,2,\ldots \tag{6.7}$$

$$\delta e_I \leq x_I(\rho,\eta,\bar{q}) \leq \frac{1}{\delta}e_I,\ \delta e_J \leq y_J(\rho,\eta,\bar{q}) \leq \frac{1}{\delta}e_J, \tag{6.8}$$

wobei $e_I := (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^{|I|}$ und $e_J := (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^{|J|}$.
Die zu (6.5) analoge Formel lautet

$$\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}(\rho_0, e, \bar{q}) := \{(\rho, e, \bar{q}') \mid 0 \leq \rho \leq \rho_0, \|\bar{q}' - \bar{q}\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\bar{r}}{2\rho_0^2}\}, \tag{6.9}$$

wobei $e := (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_{\min}$ den kleinsten (positiven) Eigenwert von $PP^T + QQ^T$ bezeichnet.

6.2 Der Algorithmus für lineare Komplementaritätsprobleme ohne strikt komplementäre Lösung

Wir gehen aus von einem LCP der Form (LCP), das die Annahmen 4.1.1 und $K \neq \emptyset$ erfüllt. Wir betrachten unzulässige Innere-Punkte-Pfade $(x,y)(\rho,\eta,\bar{q})$, $\rho \downarrow 0$, für $(LCP)_{\rho^2,\eta,\bar{q}}$.
Ausgehend von Startvektoren x_0, $y_0 > 0$ mit $x_0 \circ y_0 = \rho_0^2 e$, $\rho_0 > 0$, und einem Störungsvektor $\hat{q}_0 := \bar{q}_0 = (Px_0 + Qy_0 - q)/\rho_0^2$ erzeugt der Algorithmus eine Folge von Iterierten $(x_k, y_k, \rho_k, \bar{q}_k), k = 0, 1, 2, \dots$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
Px_k + Qy_k &= q + \rho_k^2 \bar{q}_k, \\
x_k \circ y_k &= \rho_k^2 e, \\
\rho_k > \rho_{k+1} &\xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \\
(\rho_k, e, \bar{q}_k) \in \mathcal{C} &\subset \mathcal{P},\ \mathcal{C} \text{ kompakt}.
\end{aligned}$$

Zur Beschreibung eines typischen Iterationsschrittes $k \to k+1$ setzen wir abkürzend $x := x_k$, $x_+ := x_{k+1}$, $\rho := \rho_k$ usw.
Sei $(x,y)(\sigma) := (x,y)(\sigma, e, \bar{q})$ der für $\sigma \in [0, \rho]$ durch

$$\begin{aligned}
Px(\sigma) + Qy(\sigma) &= q + \sigma^2 \bar{q} \\
x(\sigma) \circ y(\sigma) &= \sigma^2 e \\
x(\sigma),\ y(\sigma) &> 0
\end{aligned}$$

charakterisierte zentrale Pfad.
Es ist dann insbesondere $x(\rho) = x$, $y(\rho) = y$.
Sei $\sqrt{u} = u^{1/2} := (u_1^{1/2}, \dots, u_n^{1/2})^T$ die komponentenweise (positive) Quadratwurzel des Vektors $u \in \mathbb{R}^n_+$.
Zur Approximation von $(x,y)(\sigma)$ in der Nähe von $\sigma = \rho$ verwendet der Algorithmus die Wurzelfunktionen

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q}) &:= \sqrt{f^2(\sigma; \rho, \bar{q}) + \sigma^2 e} + f(\sigma; \rho, \bar{q}), \\
\bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q}) &:= \sqrt{f^2(\sigma; \rho, \bar{q}) + \sigma^2 e} - f(\sigma; \rho, \bar{q}).
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich bei $f(\sigma; \rho, \bar{q})$ um ein Vektorpolynom in σ vom Grad ≤ 2, das die Differenzenfunktion

$$\triangle(\sigma, \bar{q}) := \frac{1}{2}(x(\sigma) - y(\sigma)) \tag{6.10}$$

in $\sigma = \rho$ interpoliert, mit

$$f^{(j)}(\rho; \rho, \bar{q}) := \frac{\partial^j f(\sigma; \rho, \bar{q})}{\partial \sigma^j}\Big|_{\sigma=\rho} = \frac{\partial^j \triangle(\sigma, \bar{q})}{\partial \sigma^j}\Big|_{\sigma=\rho} =: \triangle^{(j)}(\rho, \bar{q}),\ j = 0, 1, 2. \tag{6.11}$$

Explizit gilt

$$f(\sigma; \rho, \bar{q}) = \sum_{j=0}^{2} a_j(\rho, \bar{q}) \sigma^j, \tag{6.12}$$

wobei sich die $a_j := a_j(\rho, \bar{q})$ im Sinne einer Hermite-Interpolation als eindeutige Lösungen des Systems

$$\begin{bmatrix} I & \rho I & \rho^2 I \\ 0 & I & 2\rho I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle(\rho, \bar{q}) \\ \triangle^{(1)}(\rho, \bar{q}) \\ \frac{1}{2}\triangle^{(2)}(\rho, \bar{q}) \end{bmatrix}$$

ergeben. Explizit erhält man daraus für a_0, a_1, a_2 folgende Darstellung:

$$\begin{bmatrix} a_0(\rho, \bar{q}) \\ a_1(\rho, \bar{q}) \\ a_2(\rho, \bar{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\rho I & \rho^2 I \\ 0 & I & -2\rho I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle(\rho, \bar{q}) \\ \triangle^{(1)}(\rho, \bar{q}) \\ \frac{1}{2}\triangle^{(2)}(\rho, \bar{q}) \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q})$, $\bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q})$ folgende Eigenschaften besitzen:

Lemma 6.2.1. *Eigenschaften von* $(\bar{x}, \bar{y})(\sigma; \rho, \bar{q})$
Für $(\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ *gilt:*

a) $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q}), \bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q}) \geq 0 \quad \forall\, \sigma \geq 0;$

b) $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q}) \circ \bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q}) = \sigma^2 e \quad \forall\, \sigma \geq 0;$

c) $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q}), \bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q})$ *sind stetig für* $\sigma \geq 0$ *und analytisch für* $\sigma > 0$.

Beweis. Spezialfall von Lemma 6.4.1 in Abschnitt 6.4. □

Das folgende Lemma zeigt, dass $(\bar{x}, \bar{y})(\sigma; \rho, \bar{q})$ und $(x, y)(\sigma, e, \bar{q})$ an der Stelle $\sigma = \rho$ in zweiter Ordnung übereinstimmen:

Lemma 6.2.2. *Es gelten*

$$\bar{x}^{(j)}(\rho; \rho, \bar{q}) := \frac{\partial^j \bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q})}{\partial \sigma^j}\Big|_{\sigma=\rho} = \frac{\partial^j x(\sigma, e, \bar{q})}{\partial \sigma^j}\Big|_{\sigma=\rho} =: x^{(j)}(\rho, e, \bar{q}) \text{ für } j = 0, 1, 2,$$

sowie analoge Formeln für $\bar{y}^{(j)}(\rho; \rho, \bar{q})$ *und* $y^{(j)}(\rho, e, \bar{q})$.

Beweis. Spezialfall von Lemma 6.4.2 in Abschnitt 6.4. □

Man erhält die neuen Iterierten, indem man über eine Linesearch ein $\rho_+ \in (0, \rho]$ bestimmt und $x_+ := \bar{x}(\rho_+; \rho, \bar{q})$, $y_+ := \bar{y}(\rho_+; \rho, \bar{q}), \bar{q}_+ := (Px_+ + Qy_+ - q)/\rho_+^2$ setzt.

Im folgenden ist $\kappa > 0$ so zu wählen, dass

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\rho_0, e, \bar{q}_0) := \{(\sigma, e, \bar{q}') \mid 0 \leq \sigma \leq \rho_0, \|\bar{q}' - \bar{q}_0\| \leq \kappa\} \tag{6.14}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{P}$ ist. Angesichts von (6.9) kann man z.B. $\kappa = \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\bar{r}}{2\rho_0^2}$ wählen.
Im folgenden bezeichne $e = 2.718282\ldots$ die Eulersche Konstante.

Algorithmus 6.2.3.

1) (Initialisierung): Wähle

$$\rho_0 > 0,\, x_0 := x(\rho_0),\, y_0 := y(\rho_0) \text{ mit } x_0, y_0 > 0 \text{ und } x_0 \circ y_0 = \rho_0^2 e,$$
$$\hat{q}_0 = \bar{q}_0 := (Px_0 + Qy_0 - q)/\rho_0^2, \epsilon \in (0, 0.5), \hat{\epsilon} \in (0, 1 - 2\epsilon),$$
$$C := \kappa \frac{1}{\rho_0 + \frac{1}{1 - 2^{(2\epsilon + \hat{\epsilon} - 1)e \ln(1+\epsilon)}}}. \tag{6.15}$$

Setze $k := 0$.

2) Bestimme $(x_k^{(j)}, y_k^{(j)}) := (x^{(j)}(\rho_k), y^{(j)}(\rho_k)),\ j = 1, 2,$ als Lösungen der Systeme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P & Q \\ Y_k & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ y_k^{(1)} \end{bmatrix} &= 2\rho_k \begin{bmatrix} \bar{q}_k \\ e \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} P & Q \\ Y_k & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(2)} \\ y_k^{(2)} \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} \bar{q}_k \\ e - x_k^{(1)} \circ y_k^{(1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Setze (siehe (6.10) und (6.13))

$$a_0 := a_0(\rho_k, \bar{q}_k),\ a_1 := a_1(\rho_k, \bar{q}_k),\ a_2 := a_2(\rho_k, \bar{q}_k),$$

und bilde damit

$$\begin{aligned} \bar{x}(\sigma) &:= \sqrt{(a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2)^2 + \sigma^2 e} + (a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2), \\ \bar{y}(\sigma) &:= \sqrt{(a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2)^2 + \sigma^2 e} - (a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2). \end{aligned}$$

(Beachte: $\bar{x}(\rho_k) = x(\rho_k), \bar{y}(\rho_k) = y(\rho_k)$)

3) (Short step) Bestimme

$$\rho_{k+1}^{(1)} := \inf \left\{ 0 < \sigma \leq \rho_k \mid \frac{\|P\bar{x}(\sigma) + Q\bar{y}(\sigma) - q - \sigma^2 \bar{q}_k\|}{\sigma^2} \leq (\rho_k - \sigma)\, C \right\}.$$

Falls $\rho_{k+1}^{(1)} = 0$, so stoppe: $x_{k+1} := \bar{x}^{(k)}(0), y_{k+1} := \bar{y}^{(k)}(0)$ lösen (LCP).

4) (Long step) Falls $\rho_k \leq \frac{1}{2}$, so prüfe, ob

$$\frac{\|P\bar{x}(\rho_k^{1+\epsilon}) + Q\bar{y}(\rho_k^{1+\epsilon}) - q - \rho_k^{2(1+\epsilon)} \bar{q}_k\|}{\rho_k^{2(1+\epsilon)}} \leq \rho_k^{1-2\epsilon-\hat{\epsilon}}\, C.$$

Falls nein, so setze $\rho_{k+1} := \rho_{k+1}^{(1)}$, goto 5). Falls ja, so bestimme

$$\rho_{k+1}^{(2)} := \inf \left\{ 0 < \sigma \leq \rho_k^{1+\epsilon} \mid \frac{\|P\bar{x}(\sigma) + Q\bar{y}(\sigma) - q - \sigma^2 \bar{q}_k\|}{\sigma^2} \leq \rho_k^{1-2\epsilon-\hat{\epsilon}}\, C \right\}.$$

Wenn $\rho_{k+1}^{(2)} = 0$, so stoppe: $x_{k+1} := \bar{x}(0), y_{k+1} := \bar{y}(0)$ lösen (LCP).
Sonst setze $\rho_{k+1} := \min \left\{ \rho_{k+1}^{(1)}, \rho_{k+1}^{(2)} \right\}$.

5) Setze

$$\hat{q}_{k+1} := \frac{P\bar{x}(\rho_{k+1}) + Q\bar{y}(\rho_{k+1}) - q - \rho_{k+1}^2 \bar{q}_k}{\rho_{k+1}^2},$$

$$\bar{q}_{k+1} := \bar{q}_k + \hat{q}_{k+1}, x_{k+1} := \bar{x}(\rho_{k+1}), y_{k+1} := \bar{y}(\rho_{k+1}), k := k+1, \text{ goto 2}).$$

Bemerkungen 6.2.4.

1) ρ_{k+1} ist für alle k wohldefiniert, da die Bedingung innerhalb der Infimum-Klammer in Schritt 3) für $\sigma = \rho_k$ erfüllt ist.

2) Die Werte $\rho_{k+1}^{(1)}$ and $\rho_{k+1}^{(2)}$ garantieren, dass nach jedem Schritt $k \to k+1$ in Algorithmus 6.2.3 die Bedingung $\|\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_0\| \leq \kappa$, und daher auch $(\rho_{k+1}, e, \bar{q}_{k+1}) \in \mathcal{C}$ erfüllt bleibt. Während $\rho_{k+1}^{(1)}$ die globale Konvergenz des Algorithmus sichert, garantiert $\rho_{k+1}^{(2)}$ lokal superlineare Konvergenz.
In der Praxis ist es i.a. nicht möglich, beide Werte exakt zu berechnen. Es wird jedoch im Konvergenzbeweis von Abschnitt 6.3 gezeigt werden, dass Näherungswerte, die man z.B. über Bisektion erhält, für die Q-superlineare Konvergenz des Algorithmus ausreichend sind.

3) Wegen $(\rho_k, e, \bar{q}_k) \in \mathcal{C}$ für alle k folgt aus Lemma 6.2.2 aufgrund der Analytizitätseigenschaften von unzulässigen Innere-Punkte-Pfaden die Beschränktheit der Folge $(\bar{x}_k, \bar{y}_k) := (\bar{x}, \bar{y})(\rho_k; e, \bar{q}_k)$.

4) Aus Lemma 6.2.1 folgt $\bar{x}(\rho_{k+1}; e, \bar{q}_k) \circ \bar{y}(\rho_{k+1}; e, \bar{q}_k) = \rho_{k+1}^2 e$ und $(\bar{x}, \bar{y})(\rho_{k+1}; e, \bar{q}_k) > 0$ für $\rho_{k+1} > 0$.

5) Man beachte, dass trotz der Asymmetrie der Formeln für $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q})$ und $\bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q})$ keine Annahmen über die relative Größe der Komponenten von $\bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q})$ und $\bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q})$ in Abhängigkeit von σ möglich sind, da die Funktionen $a_i(\rho, \bar{q})$, $i = 0, 1, 2$, auch negative Werte annehmen können. Der Algorithmus macht keinen Gebrauch von den Indexmengen I, J und K.

6.3 Konvergenzanalysis

Ziel dieses Abschnitts ist es, die globale und lokal Q-superlineare Konvergenz von Algorithmus 6.2.3 zu zeigen.
Zur Vereinfachung wollen wir $J = \emptyset$ annehmen: Das wird möglich durch geeignetes Vertauschen assoziierter Variablen x_i und y_i (und der korrespondierenden Spalten von P und Q), da sich das Problem (LCP) durch diese Operationen nicht ändert.
Es sei

$$\begin{gathered}(\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C} \text{ mit } 0 < \rho \leq \rho_0, \\ a_i := a_i(\rho, \bar{q}),\ i = 0, 1, 2,\end{gathered}$$

$$\bar{x}(\sigma) := \bar{x}(\sigma; \rho, \bar{q}) = \sqrt{(a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2)^2 + \sigma^2 e} + a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2, \tag{6.17a}$$

$$\bar{y}(\sigma) := \bar{y}(\sigma; \rho, \bar{q}) = \sqrt{(a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2)^2 + \sigma^2 e} - (a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2), \tag{6.17b}$$

Insbesondere gilt

$$P\bar{x}(\rho) + Q\bar{y}(\rho) = q + \rho^2 \bar{q},$$

und unter Berücksichtigung von Lemma 6.2.1,c) und (6.16) ergibt die Taylorapproximation zweiter Ordnung um $\sigma_0 = \rho$

$$P\Big(\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!}\bar{x}^{(j)}(\rho)(\sigma-\rho)^j\Big) + Q\Big(\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!}\bar{y}^{(j)}(\rho)(\sigma-\rho)^j\Big) = q + \sigma^2\bar{q} \tag{6.18}$$

Wegen Lemma 6.2.1,c) ist die Taylorsche Formel auf $\bar{x}(\sigma), \bar{y}(\sigma)$ für $0 < \sigma \leq \rho$ anwendbar. Unter Berücksichtigung von (6.18) ergibt die Entwicklung um ρ

$$\begin{aligned} P\bar{x}(\sigma) + Q\bar{y}(\sigma) = {} & q + \sigma^2\bar{q} + \frac{1}{3!}[\langle P^1, \bar{x}^{(3)}(\xi_1)\rangle + \langle Q^1, \bar{y}^{(3)}(\xi_1)\rangle, \ldots, \\ & \langle P^n, \bar{x}^{(3)}(\xi_n)\rangle + \langle Q^n, \bar{y}^{(3)}(\xi_n)\rangle]^T(\sigma-\rho)^3, \end{aligned}$$

wobei $\xi_i \in (\sigma, \rho)\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$ und P^{i^T} und Q^{i^T} die i-te Zeile der Matrix P bzw. Q bezeichnet.
Sei

$$g(\sigma) := \sqrt{(a_0 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2)^2 + \sigma^2 e}\,. \tag{6.19}$$

Wegen (6.17) gilt

$$\bar{x}^{(3)}(\sigma) = \frac{\partial^3}{\partial\sigma^3}\, g(\sigma) = \bar{y}^{(3)}(\sigma)\,. \tag{6.20}$$

Um die Größe des Störungsvektors

$$\hat{q} := \frac{1}{3!}[\langle P^1, \bar{x}^{(3)}(\xi_1)\rangle + \langle Q^1, \bar{y}^{(3)}(\xi_1)\rangle, \ldots, \langle P^n, \bar{x}^{(3)}(\xi_n)\rangle + \langle Q^n, \bar{y}^{(3)}(\xi_n)\rangle]^T \frac{(\sigma-\rho)^3}{\sigma^2}$$

abschätzen zu können, ist es notwendig, obere Schranken für die Ableitungen $\bar{x}^{(3)}(\xi_j)$, $\bar{y}^{(3)}(\xi_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ anzugeben.
Aufgrund der Definitionen (6.10) und (6.13) und der Analytizität von $(x, y)(\rho)$ auf $\mathcal{C}$ existiert eine Konstante $M > 0$ derart, dass

$$\|a_j(\rho, \bar{q})\| \leq M,\ j = 0, 1, 2, \quad \forall\ (\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}\,. \tag{6.21}$$

Es bezeichne $a_{j,i}$ die i-te Komponente des Vektors a_j.
Je nach Zugehörigkeit der i-ten Komponente $\bar{x}_i^{(3)}$ von $\bar{x}^{(3)}$ bzw. $\bar{y}_i^{(3)}$ von $\bar{y}^{(3)}$ zur Indexmenge I oder K sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $i \in I$
Wegen (6.8), (6.10) und (6.13) gilt

$$\lim_{\rho\downarrow 0} a_{0,i}(\rho, \bar{q}) = \frac{1}{2}\lim_{\rho\downarrow 0}(x_i(\rho) - y_i(\rho)) = \frac{1}{2}x_i(0) > 0\ \forall\ (0, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}.$$

Aus der Stetigkeit von $a_{0,i}(\rho, \bar{q})$ auf dem Kompaktum $\mathcal{C}$ folgt die Existenz einer Konstanten $d_1 > 0$ mit

$$a_{0,i}(\rho, \bar{q}) \geq d_1 > 0$$

für alle $(\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ mit genügend kleinem ρ. Mit geeigneten Konstanten $d_2, \hat{\rho} > 0$ und $\chi \in [0, 1)$ folgt daraus

$$(a_{0,i} + \sigma a_{1,i} + \sigma^2 a_{2,i})^2 + \sigma^2 \geq d_2 > 0, \tag{6.22}$$

gültig

$$\forall\, \sigma \geq 0,\, \forall\, (\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C} \text{ mit } \rho \in [0, \hat{\rho}] \subset [0, \rho_0] \tag{6.23}$$

bzw.

$$\forall\, (\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C},\, \forall\, \sigma \in [\chi\rho, \rho]. \tag{6.24}$$

Wegen (6.21) ist aber $(a_{0,i} + \sigma a_{1,i} + \sigma^2 a_{2,i})^2 + \sigma^2$ für $(\sigma, \rho, e, \bar{q}) \in [0, \rho_0] \times \mathcal{C}$ auch nach oben beschränkt.
Daraus folgt mit (6.19),(6.20),(6.22) und einer Konstanten $M_1 > 0$ insgesamt

$$|\bar{x}_i^{(3)}(\sigma)|,\, |\bar{y}_i^{(3)}(\sigma)| \leq M_1, \tag{6.25}$$

gültig für alle $(\sigma, \rho, e, \bar{q})$ mit (6.23) oder (6.24).

Fall 2: $i \in K$
Da $x_i(\sigma, e, \bar{q})$ für $(\sigma, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ analytisch ist und $x_i(0, e, \bar{q}) = 0$ gilt (siehe (4.1)), erhält man über die Taylorsche Formel

$$\begin{aligned}
x_i(\sigma, e, \bar{q}) &= x_i^{(1)}(0, e, \bar{q})\sigma + \frac{1}{2}x_i^{(2)}(0, e, \bar{q})\sigma^2 + \frac{1}{3!}x_i^{(3)}(\xi_i, e, \bar{q})\sigma^3\,,\ \xi_i \in (0, \sigma)\,,\\
x_i^{(1)}(\sigma, e, \bar{q}) &= x_i^{(1)}(0, e, \bar{q}) + x_i^{(2)}(0, e, \bar{q})\sigma + \frac{1}{2}x_i^{(3)}(\theta_i, e, \bar{q})\sigma^2\,,\ \theta_i \in (0, \sigma)\,,\\
x_i^{(2)}(\sigma, e, \bar{q}) &= x_i^{(2)}(0, e, \bar{q}) + x_i^{(3)}(\chi_i, e, \bar{q})\sigma\,,\ \chi_i \in (0, \sigma)\,,
\end{aligned}$$

und analoge Formeln für $y_i(\sigma, e, \bar{q})$.
Einsetzen dieser Formeln in Definition (6.13) von $a_0(\rho, \bar{q})$ ergibt unter Berücksichtigung von (6.7)

$$a_{0,i}(\rho, \bar{q}) = O(\rho^3) \quad \forall\, (\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}\,. \tag{6.26}$$

Wir wollen

$$\left|g_i'''(\sigma)\right| = \left|\bar{x}_i^{(3)}(\sigma)\right| = \left|\bar{y}_i^{(3)}(\sigma)\right|$$

für $\sigma > 0$ abschätzen (siehe (6.20)). Eine längere Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}
g_i'''(\sigma) \;=\; &-3\Big(\frac{a_{0,i}}{\sigma^2} - a_{2,i}\Big)\Big(\frac{a_{0,i}^2}{\sigma^3}(a_{1,i} + 4a_{2,i}\sigma) + a_{2,i}(1 + a_{1,i}^2 + a_{1,i}a_{2,i}\sigma) + \\
&+ \frac{a_{0,i}}{\sigma^2}(1 + a_{1,i}^2 + 6a_{1,i}a_{2,i}\sigma + 4a_{2,i}^2\sigma^2)\Big)\Big(\big(\frac{a_{0,i}}{\sigma} + a_{1,i} + a_{2,i}\sigma\big)^2 + 1\Big)^{-5/2}
\end{aligned}$$

Aufgrund von (6.21) und (6.26) folgt mit geeigneten Konstanten $M_3 > 0$ und $M_4 > 0$

$$\begin{aligned}
\left|g_i'''(\sigma)\right| \leq\; & 3\left(\frac{O(\rho^3)}{\sigma^2} + M_2\right)\left(\frac{O(\rho^3)^2}{\sigma^3} + 4M_2\rho_0 + M_2(1 + M_2^2 + M_2^2\rho_0)\right.\\
&\left. + \frac{O(\rho^3)}{\sigma^2}(1 + M_2^2 + 6M_2^2\rho_0) + 4M_2^2\rho_0^2\right)\\
\leq\; & M_3\left[\frac{O(\rho^3)^3}{\sigma^5} + \frac{O(\rho^3)^2}{\sigma^4} + \frac{O(\rho^3)^2}{\sigma^3} + \frac{O(\rho^3)}{\sigma^2} + 1\right]\\
\leq\; & M_4\left[\frac{\rho^9}{\sigma^5} + \frac{\rho^6}{\sigma^4} + \frac{\rho^6}{\sigma^3} + \frac{\rho^3}{\sigma^2} + 1\right],
\end{aligned}$$

gültig für alle $\sigma \in (0, \rho_0]$.

Die Fälle 1 und 2 zusammenfassend, erhält man mit $M_5 := \max\{M_1, M_4\}$ schließlich

$$\left|\bar{x}_i^{(3)}(\sigma; \rho, \bar{q})\right| = \left|\bar{y}_i^{(3)}(\sigma; \rho, \bar{q})\right| \leq M_5 \left[\frac{\rho^9}{\sigma^5} + \frac{\rho^6}{\sigma^4} + \frac{\rho^6}{\sigma^3} + \frac{\rho^3}{\sigma^2} + 1\right], \; i = 1, \ldots, n, \tag{6.27}$$

gültig für alle $(\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ und $\sigma \in (0, \rho_0]$, die (6.23) oder (6.24) erfüllen. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|\hat{q}\| &= \frac{\|P\bar{x}(\sigma) + Q\bar{y}(\sigma) - q - \sigma^2 \bar{q}\|}{\sigma^2} \\
&\leq \frac{1}{3!} \|[\langle P^1, \bar{x}^{(3)}(\xi_1)\rangle + \langle Q^1, \bar{y}^{(3)}(\xi_1)\rangle, \ldots, \langle P^n, \bar{x}^{(3)}(\xi_n)\rangle + \langle Q^n, \bar{y}^{(3)}(\xi_n)\rangle]^T\| \frac{(\rho - \sigma)^3}{\sigma^2} \\
&\leq \frac{1}{3!}(\|P\|_F + \|Q\|_F) \max_{\xi \in (\sigma, \rho)} \|\bar{x}^{(3)}(\xi)\| \frac{(\rho - \sigma)^3}{\sigma^2} \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{3!}\sqrt{n}(\|P\|_F + \|Q\|_F)}_{=:M} \max_{\xi \in (\sigma, \rho)} \|\bar{x}^{(3)}(\xi)\|_\infty \frac{(\rho - \sigma)^3}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Wegen (6.27) erhält man mit $\hat{M} := MM_5$

$$\|\hat{q}\| \leq \hat{M} \left[\frac{\rho^9}{\sigma^5} + \frac{\rho^6}{\sigma^4} + \frac{\rho^6}{\sigma^3} + \frac{\rho^3}{\sigma^2} + 1\right] \frac{(\rho - \sigma)^3}{\sigma^2} \tag{6.28}$$

für alle $(\rho, e, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ und $\sigma \in (0, \rho_0]$, die (6.23) oder (6.24) erfüllen. Damit lässt sich folgendes Hauptresultat beweisen:

Satz 6.3.1. *Die durch Algorithmus 6.2.3 erzeugte Folge $(\rho_k)_k$ konvergiert global und lokal Q-superlinear gegen 0.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Algorithmus nicht nach endlich vielen Schritten abbricht. Zunächst ist zu zeigen, dass in jedem Schritt $(\rho_k, e, \bar{q}_k) \in \mathcal{C}$ erfüllt ist. Aufgrund der Schritte 3) und 4) des Algorithmus ist die Folge $(\rho_k)_k$ wohldefiniert, monoton fallend und nach unten beschränkt, d.h. konvergent mit $\lim_{k\to\infty} \rho_k =: \rho^* \geq 0$. Aus der Definition von $\bar{q}_0$ im Initialisierungsschritt und der Definition von $\bar{q}_{k+1}$ in Schritt 5) folgt induktiv

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_0 + \sum_{j=1}^{k+1} \hat{q}_j, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sei $K := \{k_0, k_1, k_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}_0$ mit $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ diejenige Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ mit $\rho_{k_0} \leq \frac{1}{2}$ und

$$\|\hat{q}_{k_i+1}\| \leq \rho_{k_i}^{1-2\epsilon-\hat{\epsilon}} C \text{ und } \rho_{k_i+1} \leq \rho_{k_i}^{1+\epsilon} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_0$$

(d.h. Schritt 4) wird ausgeführt).

Dann gilt

$$\rho_{k_0} \leq \frac{1}{2}, \; \rho_{k_1} \leq \rho_{k_0+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\epsilon}, \; \rho_{k_2} \leq \rho_{k_1+1} \leq \rho_{k_1}^{1+\epsilon} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\epsilon)^2},$$

und induktiv folgt

$$\rho_{k_l} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\epsilon)^l}, \; l = 0, 1, 2, \ldots$$

Damit erhält man

$$\|\hat{q}_{k_i+1}\| \leq (2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1})^{(1+\epsilon)^i} \, C, \; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Für alle übrigen Iterierten $\hat{q}_{k+1}$ mit $k \notin K$ gilt (siehe Schritt 3))

$$\|\hat{q}_{k+1}\| \leq (\rho_k - \rho_{k+1}) C \, .$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
\|\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_0\| = \|\sum_{j=1}^{k+1} \hat{q}_j\| &\leq \sum_{j=1}^{k+1} \|\hat{q}_j\| \\
&\leq C \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\rho_j - \rho_{j+1}) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1}\right)^{(1+\epsilon)^j} \right] \\
&= C \left[\rho_0 - \rho^* + \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1}\right)^{(1+\epsilon)^j} \right].
\end{aligned}$$

Die unendliche Reihe im letzten Ausdruck kann durch eine geometrische Reihe nach oben abgeschätzt werden:
Die Funktion $h(j) := j \ln(1+\epsilon) - \ln j$, $j \in (0, \infty)$, nimmt für beliebiges $\epsilon > 0$ ihr absolutes Minimum an der Stelle $j^\star = \frac{1}{\ln(1+\epsilon)}$ an. Es folgt

$$1 + \ln(\ln(1+\epsilon)) = h(j^\star) \leq h(j) = j \ln(1+\epsilon) - \ln j \quad \forall \, j > 0.$$

Wegen $e^{h(j)} = \frac{(1+\epsilon)^j}{j}$ ist das äquivalent zu

$$(1+\epsilon)^j \geq j e \ln(1+\epsilon) \quad \forall \, j > 0,$$

und diese Ungleichung ist offensichtlich auch für $j = 0$ gültig.
Aufgrund der Definition von ϵ und $\hat{\epsilon}$ im Initialisierungsschritt des Algorithmus gilt $\frac{1}{2} < 2^{2\epsilon+\hat{\epsilon}-1} < 1$, so dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1}\right)^{(1+\epsilon)^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1}\right)^{je\ln(1+\epsilon)} .$$

Unter Berücksichtigung der Definition (6.15) von C folgt daraus für alle $k \geq 0$ die gewünschte Abschätzung $\|\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_0\| \leq \kappa$.

Lineare Konvergenz:
Sei $(\rho_k, e, \bar{q}_k) \in \mathcal{C}$. Wegen (6.28) kann der Störvektor $\hat{q}_{k+1}$ abgeschätzt werden durch

$$\|\hat{q}_{k+1}\| \leq \hat{M} \left[\frac{\rho_k^9}{\rho_{k+1}^5} + \frac{\rho_k^6}{\rho_{k+1}^4} + \frac{\rho_k^6}{\rho_{k+1}^3} + \frac{\rho_k^3}{\rho_{k+1}^2} + 1 \right] \frac{(\rho_k - \rho_{k+1})^3}{\rho_{k+1}^2}.$$

Setzt man $\rho_{k+1} := \lambda\rho_k, \lambda \in (0,1]$, und berücksichtigt $\rho_k \leq \rho_0$, so erhält man

$$\|\hat{q}_{k+1}\| \leq \hat{M}\left[\frac{\rho_0^4}{\lambda^5} + \frac{\rho_0^2}{\lambda^4} + \frac{\rho_0^3}{\lambda^3} + \frac{\rho_0}{\lambda^2} + 1\right]\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2}(\rho_k - \rho_{k+1}).$$

Damit existiert ein $\bar{\lambda} \in [\chi, 1)$, χ aus (6.24), so dass für alle $\rho_{k+1} = \lambda\rho_k$ mit $\lambda \in [\bar{\lambda}, 1]$

$$\|\hat{q}_{k+1}\| \leq C(\rho_k - \rho_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es folgt $\rho_{k+1} \leq \rho_{k+1}^{(1)} \leq \bar{\lambda}\rho_k$, gültig für alle $k \geq 0$.
Lokal Q-superlineare Konvergenz:
Sei k so groß, dass $\rho_k < 1$. Ersetzt man ρ_{k+1} durch $\tilde{\rho}_{k+1} := \rho_k^{1+\epsilon}$, so ergibt sich wegen (6.28)

$$\begin{aligned}\|\hat{q}_{k+1}\| &\leq \hat{M}\left[\rho_k^{4-5\epsilon} + \rho_k^{2-4\epsilon} + \rho_k^{3-3\epsilon} + \rho_k^{1-2\epsilon} + 1\right](1-\rho_k^{\epsilon})^3\rho_k^{1-2\epsilon} \\ &\leq 5\hat{M}\rho_k^{\hat{\epsilon}} \cdot \rho_k^{1-2\epsilon-\hat{\epsilon}}.\end{aligned}$$

Aufgrund der globalen linearen Konvergenz existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ auch $5\hat{M}\rho_k^{\hat{\epsilon}} < C$ und $\rho_k \in (0, \hat{\rho}]$, $\hat{\rho}$ aus (6.23), erfüllt ist. Folglich hat man gemäß Schritt 4) $\rho_{k+1} \leq \tilde{\rho}_{k+1} = \rho_k^{1+\epsilon}\ \forall\, k \geq k_0$, d.h. lokal Q-superlineare Konvergenz mit Konvergenzrate $1+\epsilon$, wobei ϵ im Initialisierungsschritt des Algorithmus definiert ist. □

Korollar 6.3.2. *Die durch Algorithmus 6.2.3 erzeugten Folgen* $(\bar{q}_k)_k$ *und* $((x_k, y_k))_k$ *konvergieren, und es gilt* $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) =: (x^*, y^*) \in \mathcal{F}^\star$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 6.3.1 hat man für alle $l \geq m \geq 1$

$$\begin{aligned}\|\bar{q}_l - \bar{q}_m\| = \|\sum_{j=m+1}^{l}\hat{q}_j\| &\leq \sum_{j=m+1}^{l}\|\hat{q}_j\| \\ &\leq C\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}(\rho_j - \rho_{j+1}) + \sum_{j=j(m)}^{\infty}\left(2^{\hat{\epsilon}+2\epsilon-1}\right)^{(1+\epsilon)^j}\right],\end{aligned}$$

wobei $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $j(m) \to \infty$ für $m \to \infty$ beschreibt.
Folglich gilt $\|\bar{q}_l - \bar{q}_m\| \to 0$ für $m, l \to \infty$. Somit ist $(\bar{q}_k)_k$ eine Cauchyfolge, also konvergent mit Grenzwert $\bar{q}^*$.
Wegen Lemma 6.2.2 gilt $(x_k, y_k) = (x, y)(\rho_k, e, \bar{q}_k)\ \forall\ k$, und aufgrund von $\mathcal{C} \ni (\rho_k, e, \bar{q}_k) \to (0, e, \bar{q}^*) \in \mathcal{C}$ und der Stetigkeit von (x, y) auf $\mathcal{C}$ folgt $(x_k, y_k) \to (x, y)(0, e, \bar{q}^*) \in \mathcal{F}^\star$. □

6.4 Erweiterung auf monotone semidefinite lineare Komplementaritätsprobleme

Wir wollen den in Abschnitt 6.2 beschriebenen Algorithmus jetzt auf semidefinite Komplementaritätsprobleme übertragen. Wir gehen aus von dem in Kapitel 3 eingeführten monotonen semidefiniten Komplementaritätsproblem ($SDLCP$), das die Annahmen 4.2.1 und 4.2.10

erfüllt. Zur Lösung des Problems betrachten wir ausschließlich *zentrale* unzulässige Innere-Punkte-Pfade als Lösungen $(X,S)(r,I,\bar{q})$ des Systems

$$P(X)+Q(S) = q+r\bar{q} \tag{6.29a}$$
$$\frac{1}{2}(XS+SX) = rI \tag{6.29b}$$
$$X,S \succeq 0\,. \tag{6.29c}$$

Seien Startwerte $r_0>0$, $X_0,S_0\succ 0$, $\bar{q}_0 := (P(X_0)+Q(S_0)-q)/r_0$ gegeben, die (6.29) erfüllen. (Möglich z.B. mit $r_0>0$ beliebig, $X_0=S_0:=\sqrt{r_0}I$).
Sei

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(r_0,I,\bar{q}) := \{(r,I,\bar{q}') \mid 0\le r\le r_0, \|\bar{q}'-\bar{q}\|\le\kappa\} \tag{6.30}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{P}$, (6.1). Man kann etwa $\mathcal{C}=\mathcal{C}_0$ (siehe (6.5)) wählen.
Analog zum vektoriellen Fall erzeugt der Algorithmus eine Folge von Iterierten $(X_k,S_k)\in\mathcal{S}^n_{++}\times\mathcal{S}^n_{++}$ und $(r_k,I,\bar{q}_k)\in\mathcal{C}$ mit $r_k\downarrow 0$ und

$$P(X_k)+Q(S_k) = q+r_k\bar{q}_k,$$
$$\frac{1}{2}(X_kS_k+S_kX_k) = r_kI\,.$$

Zur Approximation des zentralen Pfades benutzt der Algorithmus die Funktionen

$$\bar{X}(\sigma;r,\bar{q}) := \sqrt{F_l^2(\sigma;r,\bar{q})+\sigma I}+F_l(\sigma;r,\bar{q})\,, \tag{6.31a}$$
$$\bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) := \sqrt{F_l^2(\sigma;r,\bar{q})+\sigma I}-F_l(\sigma;r,\bar{q})\,. \tag{6.31b}$$

Hierbei ist $F_l(\sigma;r,\bar{q})$ ein Matrixpolynom in *symmetrischen* Matrizen vom Grad $\le l$, das

$$D(\sigma,\bar{q}) := \frac{1}{2}(X(\sigma,I,\bar{q})-S(\sigma,I,\bar{q})) \tag{6.32}$$

in $\sigma=r$ interpoliert, mit

$$F_l^{(j)}(r;r,\bar{q}) = D^{(j)}(r,\bar{q}),\ j=0,1,\ldots,l. \tag{6.33}$$

Explizit gilt

$$F_l(\sigma;r,\bar{q}) = \sum_{j=0}^{l} A_j(r,\bar{q})\sigma^j\,, \tag{6.34}$$

wobei sich die $A_j := A_j(r,\bar{q})\in\mathcal{S}^n$ als eindeutige Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l} A_jr^j &= D(r,\bar{q})\,,\\ \sum_{j=1}^{l} jA_jr^{j-1} &= D^{(1)}(r,\bar{q})\,,\\ &\vdots\\ l!A_l &= D^{(l)}(r,\bar{q})\end{aligned} \tag{6.35}$$

ergeben.

Lemma 6.4.1. *Eigenschaften von* $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q}), \bar{S}(\sigma;r,\bar{q})$
Für $(r,I,\bar{q}) \in \mathcal{C}$ *gilt:*

a) $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q}), \bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) \succ 0 \quad \forall\, \sigma > 0,\ \bar{X}(\sigma;r,\bar{q}), \bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) \succeq 0$ *für* $\sigma = 0$*;*

b) $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q}), \bar{S}(\sigma;r,\bar{q})$ *sind stetig für* $\sigma \geq 0$ *und analytisch für* $\sigma > 0$*;*

c) $\frac{1}{2}(\bar{X}(\sigma;r,\bar{q})\bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) + \bar{S}(\sigma;r,\bar{q})\bar{X}(\sigma;r,\bar{q})) = \sigma I \quad \forall\, \sigma > 0.$

Beweis.

a) Es ist $F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) + \sigma I \succeq F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) \succeq 0 \quad \forall\, \sigma \geq 0$. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion folgt $\sqrt{F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) + \sigma I} \succeq |F_l(\sigma;r,\bar{q})|$, also auch $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q}) \succeq |F_l(\sigma;r,\bar{q})| + F_l(\sigma;r,\bar{q}) \succeq 0$ bzw. $\bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) \succeq |F_l(\sigma;r,\bar{q})| - F_l(\sigma;r,\bar{q}) \succeq 0$. Für $\sigma > 0$ gilt sogar $F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) + \sigma I \succ F_l^2(\sigma;r,\bar{q})$.

b) Für $\sigma > 0$ ist $F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) + \sigma I \succ 0$. Da außerdem $F_l(\sigma;r,\bar{q})$ als Matrixpolynom in σ auch analytisch bzgl. σ ist, folgt mit Beispiel 2.8 die Analytizität der Quadratwurzelfunktionen. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $F_l(\sigma;r,\bar{q})$ und $F_l^2(\sigma;r,\bar{q}) + \sigma I \succeq 0$ für $\sigma \geq 0$.

c) Da $F_l(\sigma;r,\bar{q})$ für alle $\sigma \geq 0$ symmetrisch ist, existiert gemäß Spektralsatz eine unitäre Matrixfunktion $U(\sigma)$ mit $U(\sigma)^T F_l(\sigma;r,\bar{q})U(\sigma) = \Lambda_l(\sigma;r,\bar{q})$, $\Lambda_l(\sigma;r,\bar{q}) = \operatorname{diag}(\lambda_1(F_l(\sigma;r,\bar{q})), \ldots, \lambda_n(F_l(\sigma;r,\bar{q})))$. Einsetzen dieser Zerlegung von $F_l(\sigma;r,\bar{q})$ in $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q})$ und $\bar{S}(\sigma;r,\bar{q})$ ergibt nach einfacher Umformung $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q})\bar{S}(\sigma;r,\bar{q}) = \sigma I$. □

Das folgende Lemma zeigt, dass $\bar{X}(\sigma;r,\bar{q})$ und $X(\sigma,I,\bar{q})$ bzw. $\bar{S}(\sigma;r,\bar{q})$ und $S(\sigma,I,\bar{q})$ an der Stelle $\sigma = r$ in l-ter Ordnung übereinstimmen. Das entsprechende Resultat für den vektoriellen Fall (siehe Lemma 6.2.2) erhält man, indem man alle auftretenden Matrizen als Diagonalmatrizen auffasst.

Lemma 6.4.2. *Für* $(r,I,\bar{q}) \in \mathcal{C}$ *mit* $r > 0$ *gilt*

$$\bar{X}^{(j)}(r;r,\bar{q}) = X^{(j)}(r,I,\bar{q}),\ \bar{S}^{(j)}(r;r,\bar{q}) = S^{(j)}(r,I,\bar{q}),\ j = 0,1,\ldots,l.$$

Beweis. Setze abkürzend $\bar{X}^{(j)} := \bar{X}^{(j)}(r;r,\bar{q})$, $X^{(j)} := X^{(j)}(r,I,\bar{q})$, usw., sowie $\triangle X^{(j)} := \bar{X}^{(j)} - X^{(j)}$, $\triangle S^{(j)} := \bar{S}^{(j)} - S^{(j)}$. Wegen (6.31) gilt $\frac{1}{2}(\bar{X}^{(j)} - \bar{S}^{(j)}) = F_l^{(j)}(r;r,\bar{q})$, so dass wegen (6.32) und (6.33)

$$\triangle X^{(j)} = \triangle S^{(j)}, \quad j = 0,1,\ldots,l. \tag{6.36}$$

Sei zunächst $j = 0$. Angenommen, es ist $\triangle X = \triangle S \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\bar{X}\bar{S} + \bar{S}\bar{X} = 2rI &\iff (X + \triangle X)(S + \triangle S) + (S + \triangle S)(X + \triangle X) = 2rI \\
&\iff \triangle XS + S\triangle X + \triangle SX + X\triangle S + \triangle X\triangle S + \triangle S\triangle X = 0 \\
&\iff \triangle X(S + X) + (S + X)\triangle X + 2\triangle X^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\triangle X \in \mathcal{S}^n$ existiert ein unitäres U mit $\triangle X = U\Lambda U^H$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1(\triangle X), \ldots, \lambda_n(\triangle X))$. Damit ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$2\Lambda^2 + \Lambda U^H(S + X)U + U^H(S + X)U\Lambda = 0\,.$$

Speziell folgt für die Diagonalelemente

$$\lambda_i^2 + \lambda_i (U^H (S+X) U)_{ii} = 0,$$

so dass $\lambda_i = 0$ oder $\lambda_i = -(U^H(S+X)U)_{ii} < 0$ (wegen $X + S \succ 0$) gelten muss. Wegen $\bar{X} + \bar{S} \succ 0$ (siehe Lemma 6.4.1,a))gilt auch

$$0 \prec U^H(X + \triangle X + S + \triangle S)U = U^H(X+S)U + 2U^H \triangle X U = U^H(X+S)U + 2\Lambda\,.$$

Angenommen, es ist $\lambda_i = -(U^H(X+S)U)_{ii}$. Dann folgt aus der letzten Gleichung

$$0 < (U^H(S+X)U)_{ii} + 2\lambda_i = -(U^H(X+S)U)_{ii} < 0\,,$$

ein Widerspruch.
Somit ist $\lambda_i = 0 \;\forall\, i,$ d.h. $\triangle X = \triangle S = 0$.
Der Rest folgt induktiv:
Angenommen, es ist $\bar{X}^{(j)} = X^{(j)}$, $\bar{S}^{(j)} = S^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, k$, $0 \le k < l$.
Allgemein gilt für die ν-te Ableitung von $\hat{X}\hat{S} + \hat{S}\hat{X}$ mit $(\hat{X}, \hat{S}) := (X, S)(\sigma, I, \bar{q})$ bzw. $(\hat{X}, \hat{S}) := (\bar{X}, \bar{S})(\sigma; r, \bar{q})$, $0 < \sigma \le r$:

$$\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu}(\hat{X}\hat{S} + \hat{S}\hat{X}) = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} (\hat{X}^{(j)}\hat{S}^{(\nu-j)} + \hat{S}^{(\nu-j)}\hat{X}^{(j)})\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} X(\sigma, I, \bar{q})S(\sigma, I, \bar{q}) + S(\sigma, I, \bar{q})X(\sigma, I, \bar{q}) &= 2\sigma I \\ &= \bar{X}(\sigma; r, \bar{q})\bar{S}(\sigma; r, \bar{q}) + \bar{S}(\sigma; r, \bar{q})\bar{X}(\sigma; r, \bar{q}), \end{aligned}$$

gültig für alle $\sigma > 0$ mit $(\sigma, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$, erhält man also für die $(k+1)$-te Ableitung an der Stelle $\sigma = r$:

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (\bar{X}^{(j)}\bar{S}^{(k+1-j)} + \bar{S}^{(k+1-j)}\bar{X}^{(j)}) =$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (X^{(j)}S^{(k+1-j)} + S^{(k+1-j)}X^{(j)})\,.$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung und der Induktionsannahme ist das äquivalent zu

$$X\bar{S}^{(k+1)} + \bar{S}^{(k+1)}X + \bar{X}^{(k+1)}S + S\bar{X}^{(k+1)} = XS^{(k+1)} + S^{(k+1)}X + X^{(k+1)}S + SX^{(k+1)}$$

bzw. wegen (6.36) mit

$$\triangle X^{(k+1)}(S+X) + (S+X)\triangle X^{(k+1)} = 0.$$

Wegen $S + X \succ 0$ folgt daraus $0 = \triangle X^{(k+1)} = \triangle S^{(k+1)}$. □

Algorithmus 6.4.3.

1) (Initialisierung): Wähle

$$
\begin{gathered}
r_0 > 0, (X_0, S_0) \in \mathcal{S}^n_{++} \times \mathcal{S}^n_{++} \text{ mit } X_0 S_0 + S_0 X_0 = 2 r_0 I, \\
\hat{q}_0 = \bar{q}_0 := (P(X_0) + Q(S_0) - q)/r_0,\ \epsilon \in (0, 0.5),\ \hat{\epsilon} \in (0, \epsilon), \\
C := \kappa \frac{1}{r_0 + 1/(1 - 2^{-\epsilon\,\hat{\epsilon}\ln(l+1-\epsilon)})}\,.
\end{gathered}
$$

Setze $k := 0$.

2) Bestimme

$$
(X_k^{(j)}, S_k^{(j)}) := \frac{\partial^j}{\partial r^j}(X, S)(r, I, \bar{q}_k)\Big|_{r=r_k},\ j = 1, \ldots, l
$$

rekursiv durch Lösen der Systeme

$$
\begin{aligned}
P(X_k^{(1)}) + Q(S_k^{(1)}) &= \bar{q}_k, && (6.37)\\
H_{S_k}(X_k^{(1)}) + H_{X_k}(S_k^{(1)}) &= 2I, \\
\text{für } j = 2, \ldots, l: & \\
P(X_k^{(j)}) + Q(S_k^{(j)}) &= 0, && (6.38)\\
H_{S_k}(X_k^{(j)}) + H_{X_k}(S_k^{(j)}) &= -\sum_{m=1}^{j-1} \binom{j}{m} (X_k^{(m)} S_k^{(j-m)} + S_k^{(j-m)} X_k^{(m)})\,.
\end{aligned}
$$

Setze unter Berücksichtigung von (6.32), (6.34) und (6.35)

$$
\begin{aligned}
\bar{X}(\sigma; r_k, \bar{q}_k) &:= \sqrt{F_l^2(\sigma; r_k, \bar{q}_k) + \sigma I} + F_l(\sigma; r_k, \bar{q}_k), \\
\bar{S}(\sigma; r_k, \bar{q}_k) &:= \sqrt{F_l^2(\sigma; r_k, \bar{q}_k) + \sigma I} - F_l(\sigma; r_k, \bar{q}_k)\,.
\end{aligned}
$$

(Beachte: $\bar{X}(r_k; r_k, \bar{q}_k) = X(r_k, I, \bar{q}_k), \bar{S}(r_k; r_k, \bar{q}_k) = S(r_k, I, \bar{q}_k)$)

3) (Short step) Bestimme

$$
r_{k+1}^{(1)} := \inf \left\{ 0 < \sigma \le r_k \mid \frac{\| P(\bar{X}(\sigma; r_k, \bar{q}_k)) + Q(\bar{S}(\sigma; r_k, \bar{q}_k)) - q - \sigma \bar{q}_k \|}{\sigma} \le (r_k - \sigma) C \right\}.
$$

Falls $r_{k+1}^{(1)} = 0$, so stoppe: $X_{k+1} := \bar{X}_k(0; r_k, \bar{q}_k), S_{k+1} := \bar{S}_k(0; r_k, \bar{q}_k)$ lösen $(SDLCP)$.

4) (Long step) Falls $r_k \le \frac{1}{2}$, so prüfe, ob

$$
\frac{\| P(\bar{X}(r_k^{l+1-\epsilon}; r_k, \bar{q}_k)) + Q(\bar{S}(r_k^{l+1-\epsilon}; r_k, \bar{q}_k)) - q - r_k^{l+1-\epsilon} \bar{q}_k \|}{r_k^{l+1-\epsilon}} \le r_k^{\hat{\epsilon}}\, C.
$$

Falls nein, so setze $r_{k+1} := r_{k+1}^{(1)}$, goto 5). Falls ja, so bestimme

$$
r_{k+1}^{(2)} := \inf \left\{ 0 < \sigma \le r_k^{l+1-\epsilon} \mid \frac{\| P(\bar{X}(\sigma; r_k, \bar{q}_k)) + Q(\bar{S}(\sigma; r_k, \bar{q}_k)) - q - \sigma \bar{q}_k \|}{\sigma} \le r_k^{\hat{\epsilon}}\, C \right\}.
$$

Wenn $r_{k+1}^{(2)} = 0$, so stoppe: $X_{k+1} := \bar{X}_k(0; r_k, \bar{q}_k), S_{k+1} := \bar{S}_k(0; r_k, \bar{q}_k)$ lösen $(SDLCP)$.
Sonst setze $r_{k+1} := \min \left\{ r_{k+1}^{(1)}, r_{k+1}^{(2)} \right\}$.

5) Setze

$$\hat{q}_{k+1} := \frac{P(\bar{X}(r_{k+1}; r_k, \bar{q}_k)) + Q(\bar{S}(r_{k+1}; r_k, \bar{q}_k)) - q - r_{k+1}\bar{q}_k}{r_{k+1}},$$
$$\bar{q}_{k+1} := \bar{q}_k + \hat{q}_{k+1},\ (X_{k+1}, S_{k+1}) := (\bar{X}, \bar{S})(r_{k+1}; r_k, \bar{q}_k),\ k := k+1, \text{goto 2).}$$

Wir wollen noch kurz auf die Konvergenzanalysis eingehen.
Aufgrund der Analytizität von $D(\sigma, \bar{q})$ sind die $A_j(\sigma, \bar{q})$, $j = 0, 1, \ldots, l$ selbst analytische Funktionen auf $\mathcal{C}$ (siehe die Definition von $A_j(\sigma, \bar{q})$ in (6.35)). Insbesondere ist $F_l(\sigma; r, \bar{q})$ stetig für alle $\sigma \geq 0$ und alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$.
Gemäß Definition von $F_l(\sigma; r, \bar{q})$ gilt

$$F_l(0; 0, \bar{q}) := \lim_{\sigma \downarrow 0} \lim_{r \downarrow 0} F_l(\sigma; r, \bar{q}) = A_0(0, \bar{q}).$$

Andererseits ist wegen (6.35) auch

$$A_0(0, \bar{q}) = \lim_{\sigma \downarrow 0} D(\sigma, \bar{q}) = \frac{1}{2}(X(0, I, \bar{q}) - S(0, I, \bar{q})) \quad \forall\ (0, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}\,.$$

Gemäß Satz 4.2.14 sind jedoch $(X, S)(0, I, \bar{q})$ strikt komplementäre Lösungen von $(SDLCP)$, so dass $A_0(0, \bar{q})$ für alle $(0, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ nichtsingulär ist.
Aus Stetigkeitsgründen folgt: Es existieren Konstanten $\delta > 0$, $\tilde{r} > 0$ und $\chi \in [0, 1)$, so dass

$$F_l^2(\sigma; r, \bar{q}) + \sigma I \succeq \delta I \tag{6.39}$$

für alle $\sigma \geq 0$ und alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ mit $r \in [0, \tilde{r}] \subset [0, r_0]$ bzw. für alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ und alle $\sigma \in [\chi r, r]$ erfüllt ist.
Wegen (6.39), der Analytizität von $F_l(\sigma; r, \bar{q})$ und $f \in C^\infty(\mathcal{S}^n_{++})$ für $f(X) = \sqrt{X}$ (siehe Beispiel 2.8) ist die Taylorsche Formel auf $\bar{X}(\sigma; r, \bar{q})$, $\bar{S}(\sigma; r, \bar{q})$ anwendbar.
Folglich gilt mit einer Konstanten $M > 0$

$$\|\bar{X}(\sigma; r, \bar{q}) - \sum_{j=0}^{l} \frac{\bar{X}^{(j)}(r; r, \bar{q})}{j!}(\sigma - r)^j\|_F \leq M\,|\sigma - r|^{l+1} \tag{6.40}$$

für alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ und alle $\sigma \in [\chi r, r]$ bzw. für alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ mit $r \in [0, \tilde{r}]$ und alle $\sigma \in [0, r_0]$. Eine analoge Formel mit demselben M gilt auch für $\bar{S}(\sigma; r, \bar{q})$.
Setzt man $(X, S)(\sigma) := (X, S)(\sigma, I, \bar{q})$, so ist

$$\begin{aligned} P(X(\sigma)) + Q(S(\sigma)) &= q + \sigma\bar{q}, \\ P(X^{(1)}(\sigma)) + Q(S^{(1)}(\sigma)) &= \bar{q}, \\ P(X^{(j)}(\sigma)) + Q(S^{(j)}(\sigma)) &= 0,\ j = 2, \ldots, l. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 6.4.2 ergibt die Taylorapproximation l-ter Ordnung von $(\bar{X}, \bar{S})(\sigma; r, \bar{q})$ an der Stelle $\sigma_0 = r \geq 0$ folglich

$$P\Big(\sum_{j=0}^{l} \frac{\bar{X}^{(j)}(r; r, \bar{q})}{j!}(\sigma - r)^j\Big) + Q\Big(\sum_{j=0}^{l} \frac{\bar{S}^{(j)}(r; r, \bar{q})}{j!}(\sigma - r)^j\Big) = q + \sigma\bar{q}\,. \tag{6.41}$$

Aus (6.40) und (6.41) folgt somit mit der Konstanten $\tilde{M} :=(\|P\| + \|Q\|)M$, wobei $\|P\| := \max_{\|X\|_F=1} \|P(X)\|_2$,

$$\|P(\bar{X}(\sigma; r, \bar{q})) + Q(\bar{S}(\sigma; r, \bar{q})) - q - \sigma\bar{q}\| \le \tilde{M}|r - \sigma|^{l+1} ,$$

gültig für alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ und alle $\sigma \in [\chi r, r]$ bzw. für alle $(r, I, \bar{q}) \in \mathcal{C}$ mit $r \in [0, \tilde{r}]$ und alle $\sigma \in [0, r_0]$.
Mit einer ähnlichen Beweisargumentation wie im Abschnitt 6.3 erhält man jetzt im semidefiniten Fall die folgenden Resultate:

Satz 6.4.4. *Die durch Algorithmus 6.4.3 erzeugte Folge* $(r_k)_k$ *konvergiert global und lokal mit der Q-Konvergenzordnung* $l + 1 - \epsilon$ *gegen 0.*

Korollar 6.4.5. *Die durch Algorithmus 6.4.3 erzeugten Folgen* $(\bar{q}_k)_k$ *und* $((X_k, S_k))_k$ *konvergieren, und es gilt* $\lim_{k\to\infty}(X_k, S_k) =: (\bar{X}^*, \bar{S}^*) \in \mathcal{F}^\star$, $\bar{X}^* + \bar{S}^* \succ 0$.

Literaturverzeichnis

[1] Alizadeh, F./Haeberly J.-P./Overton, M.: *Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: Convergence rates, stability and numerical results*, Report 721, NYU Computer Science Dep., 1996.

[2] Bhatia, R.: *Matrix Analysis*, New York: Springer-Verlag, 1997 (Graduate Texts in Mathematics, Nr.169).

[3] Cottle, R.W./Pang, J.-S./Venkateswaran, V.: *Sufficient matrices and the linear complementarity problem*, Linear Algebra Appl. 114/115(1989), 231-249.

[4] Halická, M.: *Analyticity of the central path at the boundary point in semidefinite programming*, Faculty of mathematics, physics and informatics, Comenius university, Bratislava, 2000.

[5] Kojima, M. u.a.: *A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*, Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[6] Kojima, M./Shindoh, S./Hara, S.: *Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*, SIAM Journal on Optimization 7(1997), 86-125.

[7] Luo, Z./Sturm, J./Zhang, S: *Superlinear convergence of a symmetric primal-dual path following algorithm for semidefinite programming*, Technical report, Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam, 1996.

[8] Monteiro, R.D.C./Pang, J.-S.: *On two interior-point mappings for nonlinear semidefinite complementarity problems*, Mathematics of Operations Research 23(1998), 39-60.

[9] Monteiro, R.D.C./Zanjácomo, P.: *General Interior-Point Maps and Existence of Weighted Paths for Nonlinear Semidefinite Complementarity Problems*, Mathematics of Operations Research 25(2000), 381-399.

[10] Roos, C./Terlaky, T./Vial, J.-Ph.: *Theory and Algorithms for Linear Optimization*, Chichester: John Wiley & Sons, 1997.

[11] Stoer, J./Bulirsch, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[12] Stoer, J./Wechs, M.: *Infeasible-interior-point paths for sufficient linear complementarity problems and their analyticity*, Math. Programming 83(1998), 407-423.

[13] Stoer, J./Wechs, M./Mizuno, S.: *High order infeasible-interior-point methods for solving sufficient linear complementarity problems*, Math. of Operations Research 23(1998), 832-862.

[14] Stoer, J./Wechs, M.: *On the analyticity properties of infeasible-interior-point paths for monotone linear complementarity problems*, Numer. Math. 81(1999), 631-645.

[15] Stoer, J.: *Improved High Order Long-Step Methods for Solving Linear Complementary Problems*, Technical report, Universität Würzburg, 1999.

[16] Sznajder, R./Gowda, M. Seetharama: *Generalizations of P_0- and P-Properties; Extended Vertical and Horizontal Linear Complementarity Problems*, Linear Algebra Appl. 223/224(1995), 695-715.

[17] Tütüncü, R.H./Todd M.J.: *Reducing Horizontal Linear Complementarity Problems*, Linear Algebra Appl. 223/224(1995), 717-729.

[18] Todd, M.J.: *A study of search directions in primal-dual interior-point methods for semidefinite programming*, Technical report, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1999.

[19] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil 1: Grundlagen*, Stuttgart: Teubner-Verlag, 2000.

[20] Wright, S.: *Primal-Dual Interior-Point Methods*, Philadelphia: SIAM, 1996.

[21] Zhang, F.: *Matrix Theory*, New York: Springer-Verlag, 1999.

[22] Yosida, K.: *Functional Analysis*, 6.Aufl., Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[23] Zhang, Y.: *On the convergence of a class of infeasible interior-point algorithm for the horizontal complementarity problem*, SIAM J. Optim. 4(1994), 208-227.

[24] Väliaho, H.: *P_*-matrices are just sufficient*, Linear Algebra Appl. 239(1996), 103-108.

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Stoer für die zahlreichen Hinweise und Verbesserungsvorschläge während der Erstellung meiner Arbeit bedanken. Ebenso danke ich Herrn Launer für seine Hilfe bei Fragen zu TEX bzw. LATEX.

Gerolzhofen, April 2002

Martin Preiß