

# DER EINFLUSS DES FUNDAMENTALEN MASSENVERHÄLTNISSSES AUF DIE TEILCHENBESCHLEUNIGUNG DURCH PLASMAINSTABILITÄTEN

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES  
NATURWISSENSCHAFTLICHEN DOKTORGRADES  
DER JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG  
VORGELEGT VON

THOMAS BURKART



LEHRSTUHL FÜR ASTRONOMIE  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK UND ASTROPHYSIK  
JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

WÜRZBURG, NOVEMBER 2010

Eingereicht am: 25.11.2010  
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

Gutachter der Dissertation:  
Prof. Dr. Karl Mannheim  
Prof. Dr. Wolfgang Kinzel

Prüfer im Promotionskolloquium:  
Prof. Dr. Karl Mannheim  
Prof. Dr. Wolfgang Kinzel  
Prof. Dr. Thomas Trefzger

Tag des Promotionskolloquiums: 16.05.2011

Doktorurkunde ausgehändigt am:



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>3</b>
2.1. Einheitensysteme . . . . .	3
2.2. Phänomenologie und Astrophysik . . . . .	4
2.2.1. Aktive Galaxienkerne . . . . .	4
2.2.2. Gamma-Ray Bursts . . . . .	7
2.2.3. Jetphysik . . . . .	10
2.3. Elektrodynamik und Relativitätstheorie . . . . .	12
2.3.1. Die Maxwellgleichungen . . . . .	12
2.3.2. Relativistische Geschwindigkeitsaddition . . . . .	13
2.4. Plasmaphysik . . . . .	15
2.4.1. Charakteristika eines Plasmas . . . . .	15
2.4.2. Kinetische Beschreibung eines Plasmas . . . . .	18
2.4.3. Wellen im Plasma . . . . .	21
2.4.4. Plasmainstabilitäten . . . . .	29
<b>3. Numerik</b>	<b>34</b>
3.1. Terminologie . . . . .	35
3.2. Umsetzung des PiC-Codes . . . . .	35
3.2.1. Speicherung der Felder im Yee-Lattice . . . . .	37
3.2.2. Speicherung der Teilchen . . . . .	38
3.2.3. Randbedingungen . . . . .	39
3.3. Ein Zeitschritt des PiC-Codes . . . . .	42
3.3.1. Bewegung der Teilchen . . . . .	42
3.3.2. Current-Assignment (Strom-Zuweisung) . . . . .	44
3.3.3. Evolution der Maxwell-Gleichungen . . . . .	50

3.3.4. Force-Interpolation . . . . .	52
3.3.5. Zeitliche Abfolge . . . . .	52
3.4. Parallelisierung des PiC-Codes . . . . .	54
3.5. Numerischer Setup des Codes . . . . .	56
3.5.1. Umsetzung der Anfangsbedingungen . . . . .	57
3.5.2. Anforderungen an einen PiC-Code . . . . .	57
3.6. Auswertungswerkzeuge . . . . .	59
3.6.1. Energieverläufe . . . . .	60
3.6.2. Auswertung der Dichten und elektromagnetischen Felder . . . . .	60
3.6.3. Ein- und zweidimensionale Histogramme . . . . .	60
3.7. Test des Codes ACRONYM . . . . .	61
<b>4. Setup der wichtigsten Simulationen</b>	<b>63</b>
<b>5. Ergebnisse</b>	<b>68</b>
5.1. Energieverteilung . . . . .	69
5.2. Entwicklung der Magnetfelder . . . . .	74
5.3. Änderung der Teilchenverteilung . . . . .	78
5.3.1. Teilchenzahl pro Zelle . . . . .	78
5.3.2. Entwicklung der Flussschläuche . . . . .	79
5.3.3. Veränderung der Verteilungsfunktion . . . . .	87
5.4. Analyse des Zeitpunktes des Instabilitätsmaximums . . . . .	104
5.5. Anteil der hochenergetischen Teilchen und Temperaturerhöhung . . . . .	107
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>111</b>
<b>A. Abstract</b>	<b>115</b>
<b>B. Publikationsliste</b>	<b>117</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>138</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>152</b>
<b>Danksagung</b>	<b>154</b>



# 1. Einleitung

Beinahe alle Quellen hochenergetischer Teilchen und Photonen können mit Jet-Phänomenen assoziiert werden. Solche Jets mit hochrelativistischen Teilchen-Ausflüssen kommen vor allem in Aktiven Galaxienkernen und Gamma-Ray Bursts vor. Sie enthalten relativ dünne, kollisionsfreie Plasmen, die am besten durch eine kinetische Beschreibung erfasst werden können. Durch kinetische Simulationen kann gezeigt werden, dass in unmagnetisierten Plasmen durch Instabilitäten Teilchenbeschleunigung bis hin zu ultrarelativistischen Energien auftreten kann. Obwohl die Natur und die Entstehung der Teilchen-Spektren zu einem gewissen Grad verstanden sind, ist die Komposition der Jets von AGN noch unklar. Da solche Jets nur mit den durch die Natur gegebenen Parametern observiert werden können, sind Simulationen in diesem Bereich eine sehr wichtige Stütze der Wissenschaft, da sie durch Abrastern der verschiedenen Parameterräume wichtige Einblicke in nicht observierbare Bereiche geben. Natürlich gibt es jedoch auch eine Reihe von Nachteilen, wenn versucht wird, die Realität zu modellieren, diese hängen fast alle mit der zwar stetig wachsenden, aber doch begrenzten Rechenleistung moderner Supercomputer zusammen. Es ist z.B. in dreidimensionalen Particle-in-Cell Simulationen (noch) nicht möglich mit dem realistischen fundamentalen Massenverhältnis  $m_p/m_e$  zwischen Protonen und Elektronen/Positronen zu rechnen, da es sonst viel zu lange dauert, um die relevanten Bewegungen der Protonen zu beobachten.

Daher soll in dieser Arbeit untersucht werden, welchen Einfluss das oben angesprochene Massenverhältnis  $m_p/m_e$  auf die Ausbildung der Instabilitäten, das Verschmelzen der Flussschläuche und damit auf die Beschleunigung der Teilchen, die Veränderung ihrer Verteilungsfunktion und auf die Beschleunigungseffizienz hat. Dazu wurde ein voll relativistischer, dreidimensionaler Particle-in-Cell Code geschrieben, um anfangs unmagnetisierte gegenströmende Plasmen zu simulieren. Es wurden Simulationen mit Massenverhältnissen  $m_p/m_e$  zwischen 1 und 200 durchgeführt, bei denen jeweils zwei Plasmapopulationen den gesamten Simulationsraum füllen und mit 99.5% der Lichtge-

## 1. Einleitung

schwindigkeit gegeneinander strömen. Dabei waren zumeist gleich viele Positronen und Protonen in dem einem Strom, während der andere nur Protonen als positiv geladene Teilchen enthielt, Elektronen wurden überall so viele hinzugenommen wie nötig, um eine elektrische Neutralität zu gewährleisten.

Es wurden interessante Einblicke in das Verhalten der Teilchen während einer Instabilität in Abhängigkeit vom verwendeten Massenverhältnis  $m_p/m_e$  gefunden. So ist bei kleinen Massenverhältnissen eine starke Kopplung der leichten und schweren Teilchenspezies vorhanden und es bildet sich nur eine gemeinsame Instabilität aus, bei großen dagegen können die Protonen eine völlig von den Elektronen und Positronen unabhängige Instabilität entwickeln. Dies hat große Auswirkungen auf die Ausbildung und das Verschmelzen der Flussschläuche sowie die Entwicklung der Verteilungsfunktion. Außerdem wurde die Beschleunigungseffizienz - also der Anteil der entstehenden suprathermischen Teilchen - in Abhängigkeit des Massenverhältnisses berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 2 zunächst das verwendete Einheitensystem erwähnt, dann werden einige phänomenologische Aspekte angesprochen, anschließend wird kurz auf die Elektrodynamik eingegangen und in Abschnitt 2.4 wird dann die nötige Plasmaphysik in Einzelheiten erläutert. Anschließend wird in Kapitel 3 der komplette Aufbau des selbst verfassten Codes genau beschrieben und der Ablauf einer Simulation erklärt. In Abschnitt 4 werden die durchgeführten Simulationen aufgeführt und schließlich in 5 die Ergebnisse der Arbeit präsentiert, wobei im besonderen auf die Energieverläufe, die Feld-Konfigurationen und die Teilchen-Verteilungsfunktion eingegangen wird. Abschließend werden die Ergebnisse in Kapitel 6 zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf zukünftig interessante Aspekte gegeben.

Die wichtigsten Teile des Codes sowie der selbst verfassten Auswertungswerkzeuge sind auf der dieser Arbeit beigelegten CD zu finden.

## 2. Theorie

Im folgenden Kapitel soll die zum Verständnis der Arbeit und Ergebnisse nötige Theorie behandelt werden. Dabei wird es in Kapitel 2.1 als erstes um die verwendeten Einheiten gehen, im Abschnitt 2.2 wird dann näher auf die astrophysikalischen Phänomene eingegangen, in denen es zu der in dieser Arbeit angesprochenen Teilchenbeschleunigung in gegenströmenden Plasmen kommen kann. Im darauf folgenden Kapitel 2.3 werden einige wichtige Informationen zur Elektrodynamik gegeben und schließlich kommen im Abschnitt 2.4 die Eigenschaften eines Plasmas zur Sprache. Dabei wird auch theoretisch beleuchtet, wann es in einem Plasma zu einer Instabilität kommen kann und wie sich dies im Allgemeinen auswirkt.

### 2.1. Einheitensysteme

In dieser Arbeit wird durchgehend das Gauß'sche (auf dem cgs-System basierende) Einheitensystem verwendet, da es das in der Plasma- und Astrophysik gebräuchliche ist. Es hat in diesem Bereich der Physik vor allem den Vorteil, dass das elektrische und das magnetische Feld identische Einheiten haben, was unterstreicht, dass diese beiden Phänomene nur unterschiedliche Ausprägungen des Elektromagnetismus sind. Der grundlegende Vorteil für diese Arbeit ist, dass die beiden Konstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  gleich eins sind und damit als Faktoren stets weggelassen werden können. Außerdem taucht im cgs-Einheitensystem die Lichtgeschwindigkeit in den Maxwellgleichungen in vollkommen symmetrischer Form auf (siehe Kapitel 2.3.1).

## 2.2. Phänomenologie und Astrophysik

Die in dieser Arbeit betrachteten Plasmaphänomene treten vor allem auf, wenn Jets in ein sie umgebendes Plasma wie das interstellare (ISM) oder das intergalaktische Medium (IGM) einströmen. Dies tritt vor allem bei Aktiven Galaxienkernen (Active Galactic Nuclei, AGN) und Gamma-Ray Bursts (GRBs) auf. Daher sollen diese im Folgenden etwas näher beleuchtet werden, sowie kurz auf die in Jets relevante Physik eingegangen werden.

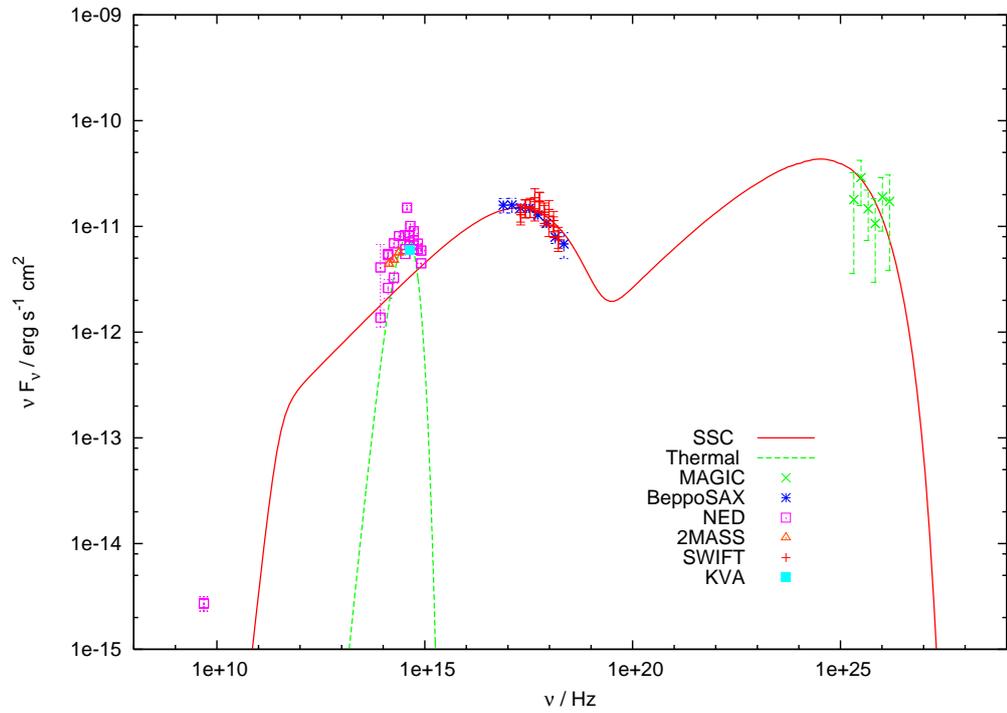
### 2.2.1. Aktive Galaxienkerne

Ein *AGN* ist eine kompakte Region im Zentrum einer Galaxie, die eine vielfach höhere Strahlungsemission aufweist als nicht aktive Galaxien. Vor allem aber emittieren AGNs kein thermisches Spektrum mit einem Peak im Bereich des sichtbaren Lichtes, sondern geben eine nicht-thermische Strahlung über einen sehr großen Wellenlängenbereich ab. Die erhöhte Strahlung wird im Radio- bis Röntgen- und zum Teil auch im Gammastrahlen-Bereich gemessen. Diesen Unterschied kann man sehr gut in Abbildung 2.1 sehen, in der das Spektrum des Blazars 1 ES 1218+30.4 modelliert ist (aus Rieger et al. 2010). Dabei ist die rote Kurve das modellierte Spektrum des AGN, die gestrichelte grüne Linie ist das thermische Spektrum der Hostgalaxie (und repräsentiert damit ein durchschnittliches Spektrum einer nicht aktiven Galaxie).

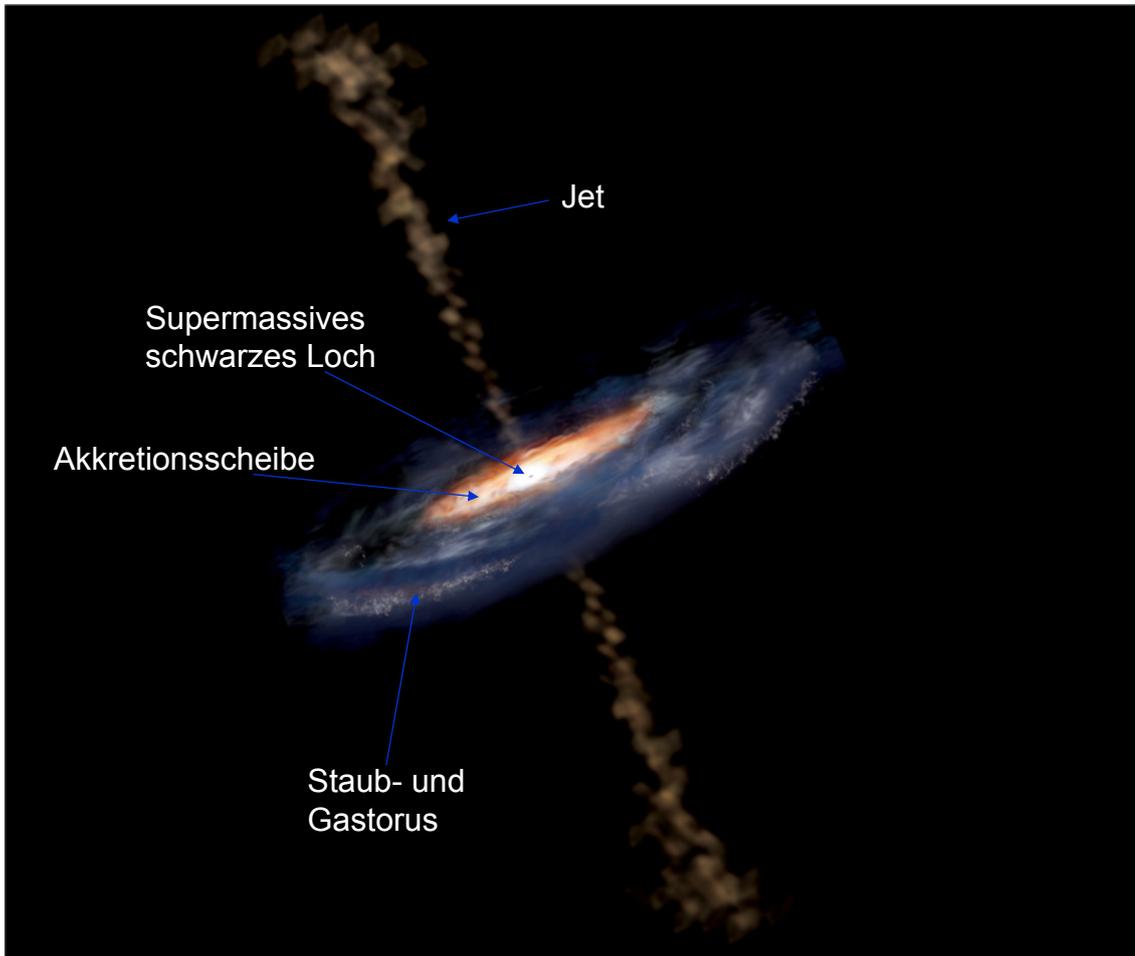
Um diesen Unterschied zu verstehen, soll nun der grundlegende Aufbau eines solchen AGNs erläutert werden. Die wichtigsten Bestandteile (radial von außen nach innen) eines aktiven Galaxienkerns sind folgende (die meisten sind auch in Abbildung 2.2 zu sehen):

- Die Hostgalaxie (in Abbildung 2.2 nicht zu sehen) ist die Galaxie, in deren Zentrum sich der AGN befindet. Sie emittiert wie oben angesprochen ein thermisches Spektrum, das weitestgehend eine Überlagerung des Lichtes aller sichtbaren Sterne ist.
- Ein Staub- und Gasdunst umgibt und füttert die Akkretionsscheibe und verhindert je nach Blickwinkel die direkte Sicht auf die Scheibe. Dies resultiert darin, dass die inneren Regionen der Scheibe, in denen sich das Gas sehr schnell bewegt und deren Emissionslinien dadurch stark verbreitert sind, nicht observiert werden können.
- Die Akkretionsscheibe kommt zustande, weil die vom schwarzen Loch (siehe näch-

## 2. Theorie



**Abbildung 2.1.:** Illustration zum unterschiedlichen Spektrum von AGNs und nicht aktiven Galaxien. Die rote Kurve ist eine Modellierung des Emissionsspektrums von 1 ES 1218+30.4 mit Hilfe des von Michael Rürger erstellten *Synchrotron-Self-Compton-* (SSC-) Codes, die gestrichelte grüne Linie ist das thermische Spektrum der Hostgalaxie. (Quelle: Rürger et al. 2010)



**Abbildung 2.2.:** Aufbau eines AGNs: Die Materie aus dem Staub- und Gas strömt durch die gravitative Anziehung des supermassiven schwarzen Loches in Richtung Zentrum, wo es aufgrund der Drehimpulserhaltung in eine Akkretionsscheibe gezwungen wird. Aus dieser wird entlang der Rotationsachse der hochrelativistische Jet emittiert. (Quelle: NASA, selbst nachbearbeitet)

ster Punkt) angezogene Materie aufgrund der Drehimpulserhaltung nicht geradlinig zum Zentrum stürzen kann, sondern in eine Scheibenform gedrängt wird. Durch die schnelle und differentielle Rotation entsteht Reibung und das Gas der Akkretionsscheibe erhitzt sich stark, was zu einer charakteristischen Verbreiterung der Emissionslinien führt.

- Im Zentrum jeder aktiven Galaxie wird ein supermassives schwarzes Loch vermutet (Lynden-Bell 1969; Schödel et al. 2002), da gravitative Abstrahlung der einzige bekannte Prozess ist, um über einen solch langen Zeitraum diese Menge an Energie freizusetzen. In vielen Galaxien wurden zentrale schwarze Löcher durch die Bewegungen der umliegenden Gasmassen und Sterne auch nachgewiesen (z.B. Ford et al. 1998).
- Der für diese Arbeit wichtigste Teil eines AGNs ist der entlang der Rotationsachse der Akkretionsscheibe und des schwarzen Loches emittierte Jet. In diesem strömen geladene Teilchen mit teilweise hochrelativistischen Geschwindigkeiten weg vom Zentrum. Die Energie entziehen die Teilchen dabei entweder der akkretierten Materie selbst - zum Mechanismus siehe z.B. Blandford (1976); Blandford u. Payne (1982) - oder aber sie entziehen dem schwarzen Loch Rotationsenergie, dieser Mechanismus wird z.B. in Penrose u. Floyd (1971); Blandford u. Znajek (1977) beschrieben. Diese hochrelativistischen Teilchen fliegen in sogenannten Blobs vom zentralen schwarzen Loch weg und erzeugen auf ihrem Weg durch Synchrotron- und Inverse Compton-Streuung ein nicht-thermisches Spektrum (eine genauere Beschreibung dieser Vorgänge innerhalb des Jets findet sich in Abschnitt 2.2.3) und treffen dabei irgendwann auf das den Jet umgebende Medium und die in dieser Arbeit untersuchten gegenströmenden Plasmen entstehen, die Teilchen werden auf diese Art noch weiter beschleunigt.

### 2.2.2. Gamma-Ray Bursts

*GRBs* sind die leuchtkräftigsten Ereignisse im Universum. Sie können von Millisekunden bis zu mehreren Minuten andauern, im Schnitt wenige Sekunden. Erstmals wurden GRBs in den 1960er Jahren von den amerikanischen Vela-Satelliten entdeckt (Klebesadel et al. 1973), die eigentlich konzipiert waren, um geheime Nukleartests mittels Gammastrahlen nachzuweisen. Aus Beobachtungen können auf folgende Eigenschaften

## 2. Theorie

von GRBs geschlossen werden:

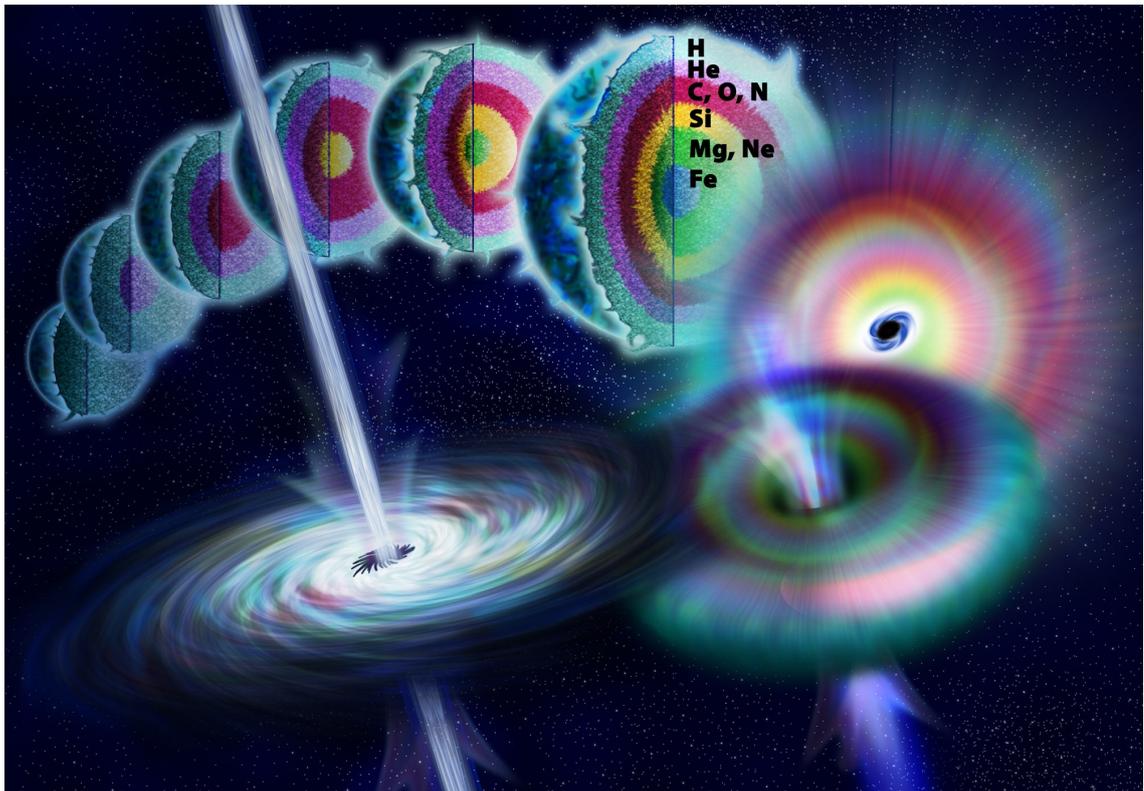
- Die observierte freigesetzte Energie liegt im Bereich von  $10^{51}$  bis  $10^{54}$  ergs, allerdings liegt diese Zahl möglicherweise durch das starke relativistische Beaming der Leuchtkraft um einen Faktor von bis zu 100 über der realen Emission.
- GRBs emittieren ein nicht-thermisches Powerlaw-Spektrum, das im Bereich von einigen GeV in einem Cut-Off endet.
- Es scheint zwei Gruppen von GRBs mit unterschiedlichen physikalischen Ursachen zu geben: lange und kurze, die Grenze liegt etwa bei einer Dauer von zwei Sekunden. Kurze GRBs sind immer noch sehr wenig verstanden, über die Entstehung von langen GRBs wird im Folgenden kurz gesprochen.
- Die Lichtkurve eines GRBs besteht meist aus einem schnellen Anstieg und einem langsamen Abfallen, dem sogenannten *Afterglow*.

Eine vollständige Erklärung zur Entstehung von langen GRBs steht immer noch aus, Meszaros u. Rees (1997), Piran (2000) und Eichler u. Levinson (2000) fassen jedoch die wichtigsten bekannten Punkte und das "Fireball"-Modell zusammen wie folgt.

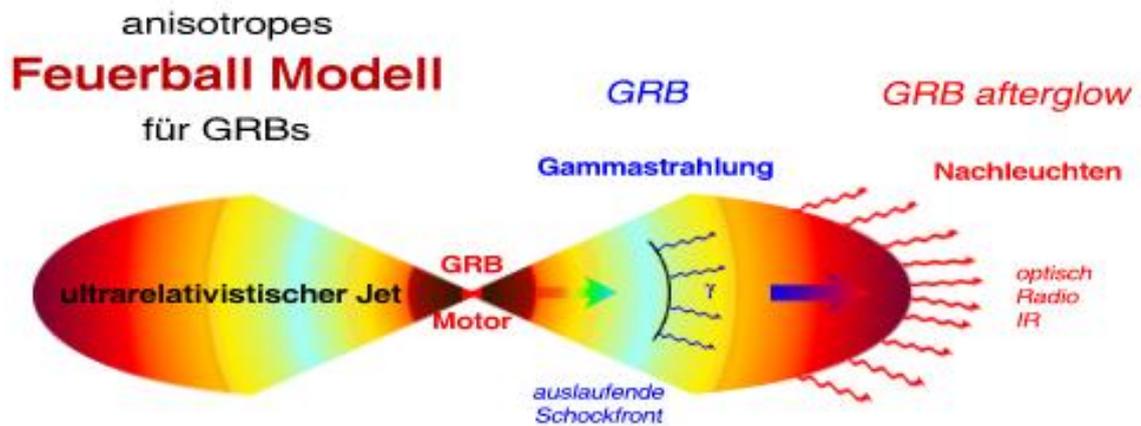
Ein GRB kann mehrere mögliche Vorläufer haben:

- Verschmelzung zweier Neutronensterne,
- Verschmelzung eines Neutronensterns mit einem schwarzen Loch,
- Verschmelzung eines Neutronensterns mit einem weißen Zwerg oder
- eine Hypernova (siehe Abbildung 2.3)

All diesen ist gemeinsam, dass sich ein schnell rotierendes schwarzes Loch mit einer dichten Akkretionsscheibe bildet. Entlang der Rotationsachse des schwarzen Loches wird ein hochenergetischer, stark kollimierter Jet emittiert. In diesem gibt es nach dem Fireball-Modell unterschiedlich schnelle Schichten, die sich gegenseitig ein- und überholen, so dass sich Schocks ausbilden, in denen die Bewegungsenergie des Gases in Strahlungsenergie umgewandelt wird (siehe Abbildung 2.4). Wichtig dabei für diese Arbeit ist vor allem, dass bei einem GRB hochrelativistisches Plasma ins All geschleudert wird, das dann auf ruhende oder langsamere Materie trifft und somit auch hier die Situation gegeneinander strömender Plasmen gegeben ist.



**Abbildung 2.3.:** Entstehung eines Gamma-Ray Bursts aus einem kollabierenden sehr massereichen Stern. Nachdem der Kern zu Eisen fusioniert ist, kollabiert die Hülle des Sterns, der Kern wird zu einem schnell rotierenden schwarzen Loch. (Quelle: NASA)



**Abbildung 2.4.:** Das Fireball-Modell für Gamma-Ray Bursts sagt aus, dass die auslaufende Schockfront auf das ISM, sowie auf langsamer auslaufende Schichten trifft, dabei bilden sich Schocks und Instabilitäten aus und Teilchen werden auf ultrarelativistische Energien beschleunigt. (Quelle: Astro-Lexikon Müller 2010)

### 2.2.3. Jetphysik

In diesem Abschnitt geht es darum, die in relativistischen Jets von AGNs oder GRBs relevanten physikalischen Gegebenheiten zu betrachten. Relativistische Jets sind von Magnetfeldern kollimierte Ausströmungen hochenergetischer Materie aus der Akkretionsscheibe. Das ausströmende Gas besteht vor allem aus freien Elektronen, Positronen und Protonen und ist elektrisch neutral, die genaue Zusammensetzung der Jets ist jedoch immer noch eine viel diskutierte Thema. Abschätzungen zur genauen Zusammensetzung wurden z.B. von Begelman u. Sikora (1987); Sikora u. Madejski (2000); Moderski et al. (2004) durch Messungen gemacht, aber auch Simulationsarbeit trägt dazu bei, dies besser zu verstehen (Scheck et al. 2002, siehe z.B.).

Häufig erfolgt der Ausstoß nicht gleichmäßig, sondern unterliegt starken Dichteschwankungen, so dass sich sogenannte Blobs ausbilden. In diesen Blobs entsteht im hadronischen (siehe Mannheim 1993) beziehungsweise im leptonischen Strahlungsmodell durch Synchrotron-Self-Compton Effekte (für nähere Erläuterungen siehe z.B. Lindfors et al. 2005; Weidinger et al. 2010) eine nicht-thermische Strahlung wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist.

Um den Entstehungsprozess der Jets an der Basis - also nahe des schwarzen Loches

## 2. Theorie

- zu verstehen, wird die Strahlung, die uns erreicht, in vielen Wellenlängenbereichen observiert. Wenn es gelingt, die im Jet ablaufenden Vorgänge besser zu verstehen und erklären zu können, dann wird es irgendwann auch möglich sein, Rückschlüsse auf die Jetentstehungsprozesse zu ziehen. Dazu werden seit langem Simulationen betrieben, um die Strahlungsprozesse innerhalb des Jets zu untersuchen und zu verstehen.

Diese Arbeit soll dazu beitragen, besser zu verstehen, inwiefern Teilchen innerhalb des Jets beschleunigt werden, wenn das Jet-Plasma auf ionisiertes Gas des umgebenden Mediums oder langsamer ausströmende Schichten trifft. Dabei können sich an der Kontaktfläche Schocks ausbilden, aber auch innerhalb der Überlappungszone der beiden Plasmapopulationen entstehen vielfältige Strukturen, Flussschläuche von entgegengesetzten Strömen und Plasmainstabilitäten (siehe Kapitel 2.4.4).

## 2.3. Elektrodynamik und Relativitätstheorie

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird es darum gehen, die Wechselwirkungen zwischen Teilchen und elektromagnetischen Feldern bzw. zwischen Teilchen untereinander zu modellieren. Dafür sind Kenntnisse über die Grundgleichungen der Elektrodynamik nötig, diese werden im kommenden Abschnitt kurz besprochen. Des weiteren sollen anschließend auch noch einige relevante Aspekte der speziellen Relativitätstheorie erwähnt werden, da der für diese Arbeit verfasste Code voll relativistisch ist und somit zur Auswertung z.B. eine Transformation der Teilchen-Geschwindigkeitsverteilung in ein hochrelativistisch bewegtes System von Nöten ist.

### 2.3.1. Die Maxwellgleichungen

Die von James Clerk Maxwell in den Jahren 1861 bis 1864 formulierten fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik zur Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen lauten in den verwendeten *cgs*-Einheiten:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.1d)$$

wobei

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \cdot n(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

die Ladungs- und

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v} \cdot n(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

die Stromdichte darstellen.

Wie man aus den Maxwellgleichungen schon sehen kann, nehmen die Teilchen eines Plasmas durch die Ladungs- und Stromdichten Einfluss auf die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder, die Rückwirkung der Felder auf die Teilchen kommt durch die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.4)$$

zustande.

## 2. Theorie

Nimmt man die Divergenz von Gleichung 2.1d, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2.5)$$

Nachdem die Divergenz der Rotation einer beliebigen Größe immer Null beträgt, kann man auch die rechte Seite gleich Null setzen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.6)$$

und erhält damit nach Verwendung von Gleichung 2.1a die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.7)$$

Unter der Annahme eines Vakuums ( $\rho = 0$ ;  $\mathbf{j} = 0$ ) kann man Gleichung 2.1d zeitlich differenzieren

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

und anschließend Gleichung 2.1c verwenden, um  $\nabla \times \mathbf{E}$  zu ersetzen, so ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Mit Hilfe der Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.10)$$

und Gleichung 2.1a im Vakuum erhält man schließlich eine Wellengleichung für das elektrische Feld (Herleitung für das magnetische Feld analog):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{und} \quad (2.11a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11b)$$

Diese Herleitung gilt natürlich nur im Vakuum, Wellen im Plasma werden später in Kapitel 2.4.3 angesprochen.

### 2.3.2. Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Zum Bereich der Relativitätstheorie soll hier nur ein Punkt angesprochen werden, die relativistische Geschwindigkeitsaddition. Um für die Auswertung die Impulsverteilung

## 2. Theorie

der Teilchen auch in anderen als dem Laborsystem betrachten zu können, muss die Geschwindigkeit jedes einzelnen Teilchens mit der mittleren Bewegungsgeschwindigkeit der jeweiligen Plasmapopulation geboostet werden. Dazu müssen zuerst die (auf die Lichtgeschwindigkeit  $c$  normierten) Geschwindigkeiten  $\beta = v/c$  aus den im Code verwendeten Geschwindigkeiten  $u = \gamma v$  berechnet werden:

$$\beta_x = \frac{u_x}{c^2 + \mathbf{u}^2}, \quad (2.12a)$$

$$\beta_y = \frac{u_y}{c^2 + \mathbf{u}^2} \text{ und} \quad (2.12b)$$

$$\beta_z = \frac{u_z}{c^2 + \mathbf{u}^2}. \quad (2.12c)$$

Anschließend wird aus der Komponente der Teilchengeschwindigkeit in Strömungsrichtung die mittlere Driftgeschwindigkeit  $\beta_{drift}$  einer Population berechnet, jedes Teilchen dann mit  $\beta_{boost} = -\beta_{drift}$  geboostet

$$\beta_{x,neu} = \frac{\beta_x \cdot \sqrt{1 - \beta_{boost}^2}}{1 + \beta_z \cdot \beta_{boost}}, \quad (2.13a)$$

$$\beta_{y,neu} = \frac{\beta_y \cdot \sqrt{1 - \beta_{boost}^2}}{1 + \beta_z \cdot \beta_{boost}}, \quad (2.13b)$$

$$\beta_{z,neu} = \frac{\beta_z + \beta_{boost}}{1 + \beta_z \cdot \beta_{boost}} \quad (2.13c)$$

und schließlich werden die Geschwindigkeiten wieder zurückgerechnet auf

$$u_{x,neu} = \frac{\beta_x c}{\sqrt{1 - \beta_{neu}^2}}, \quad (2.14a)$$

$$u_{y,neu} = \frac{\beta_y c}{\sqrt{1 - \beta_{neu}^2}} \text{ und} \quad (2.14b)$$

$$u_{z,neu} = \frac{\beta_z c}{\sqrt{1 - \beta_{neu}^2}}. \quad (2.14c)$$

## 2.4. Plasmaphysik

Ein Plasma (aus dem Griechischen  $\pi\lambda\alpha\sigma\mu\alpha$ , das Gebilde) ist ein ionisiertes oder teilweise ionisiertes Gas, das viele freie Ladungsträger wie Elektronen, Protonen oder Positronen enthält. Aufgrund der Ionisierung werden die Eigenschaften eines Plasmas größtenteils durch die kollektive Wechselwirkung der Coulombkraft bestimmt.

### 2.4.1. Charakteristika eines Plasmas

Nicht jedes ionisierte Gas kann als ein Plasma bezeichnet werden, dazu muss es folgende Eigenschaften aufweisen:

#### Elektrische Neutralität auf makroskopischen Skalen

Die erste wichtige Eigenschaft eines Plasmas ist die Quasineutralität, d.h. das Plasma erscheint unter Gleichgewichtsbedingungen - also der Abwesenheit externer Kräfte - neutral auf Skalen, die groß genug sind, um viele Teilchen zu enthalten, aber klein gegenüber der charakteristischen Länge des betrachteten Plasmas. Also ist die Ladungsdichte

$$\bar{\rho} = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} q_{\alpha,i} = 0, \quad (2.15)$$

wobei  $\alpha$  die Teilchenspezies und  $N_{\alpha}$  die jeweilige Teilchenzahl repräsentiert.

#### Debye-Länge

Abweichungen von der Neutralität treten nur auf Skalen von der Größenordnung der *Debye-Länge*

$$\lambda_D = \left( \frac{k_B T}{4\pi n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

auf. Diese lässt sich herleiten unter der Annahme, dass es eine Größenskala geben muss, bei der die thermische Energie der Teilchen  $E_{th} \approx k_B T$  mit der durch die Ladungstrennung entstehenden elektrostatischen potentiellen Energie  $E_{pot} = q\phi$  (wobei im elektrostatischen Fall  $\Delta\phi = -4\pi\rho$  gilt) übereinstimmt. Die Debye-Länge ist ein wichtiger physikalischer Parameter zur Beschreibung eines Plasmas, da sie eine Größenskala vorgibt, auf der das elektrische Feld eines einzelnen Teilchens andere Teilchen innerhalb des

## 2. Theorie

Plasmas beeinflussen kann. Die geladenen Teilchen arrangieren sich auf eine Art und Weise, so dass elektrostatische Felder innerhalb von einer Debye-Länge effizient abgeschirmt werden. Eine Voraussetzung für die Existenz eines Plasmas ist damit, dass sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $\lambda_D$  viele Teilchen befinden müssen, also

$$n_e \cdot \lambda_D^3 \gg 1 \quad (2.17)$$

gelten muss, wobei  $n_e$  die Elektronendichte darstellt. Des Weiteren muss das gesamte Plasma deutlich größer sein als eine Debye-Länge, da sonst die oben genannten Abschirmungseffekte nicht auftreten können und somit die Quasineutralität nicht mehr gegeben ist. Somit ist ein weiteres Kriterium für die Existenz eines Plasmas

$$L \gg \lambda_D, \quad (2.18)$$

wobei  $L$  eine charakteristische Größenskala des Plasmas repräsentiert.

### Plasmafrequenz

Auf der Größenordnung einer Debye-Länge gleichen die Elektronen alle auftretenden Störungen quasi sofort aus und das Plasma hat damit die Tendenz seine Neutralität selbst wieder herzustellen. Falls diese Neutralität gestört wird, zum Beispiel durch ein aus seiner Ruhelage ausgelenktes Elektron, so wird dieses zurück schwingen und sich aufgrund seiner Trägheit über die Ruhelage hinaus bewegen, also hin und her oszillieren mit einer charakteristischen Frequenz, die man die *Plasmafrequenz* nennt.

Wenn man ein kollisionsfreies und damit schwach gedämpftes Plasma sowie eine kleine Störung der Ladungsdichte

$$n_e = n_0 + n_1(\mathbf{r}, t) \quad (2.19)$$

annimmt, wobei  $n_0$  die (konstante) mittlere Teilchendichte darstellt und  $n_1 \ll n_0$  gelten soll, kann man damit die oben genannte *Plasmafrequenz* herleiten. Dazu müssen noch die mittlere Elektronengeschwindigkeit  $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$  sowie das erzeugte elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  als kleine Größen betrachtet werden, um Terme höherer Ordnung vernachlässigen zu können. So können die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + n_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.20)$$

und die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.21)$$

## 2. Theorie

aufgestellt werden. Die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  kann dann unter der Annahme, dass die Ionen einfach positiv geladen und aufgrund ihrer viel höheren Masse zu träge sind, der Bewegung der Elektronen zu folgen, hergeleitet werden:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e(n_0 + n_1(\mathbf{r}, t)) + en_0 = -en_1(\mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Damit gilt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho = -4\pi en_1(\mathbf{r}, t) \quad (2.23)$$

und mit Hilfe dieser und der Gleichungen 2.20 sowie 2.21 kann folgende Schwingungsgleichung für die Ladungsdichte  $n_1$  bestimmt werden:

$$\frac{\partial^2 n_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} n_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.24)$$

dabei entspricht die Konstante

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \quad (2.25)$$

der *Plasmafrequenz*.

### Schwache Dämpfung

Die eben angesprochene Schwingung wird durch Kollisionen der Teilchen untereinander gedämpft. Wenn die Oszillationen nur schwach gedämpft werden sollen, so muss die Kollisionsfrequenz  $\omega_{col}$  kleiner sein als die Plasmafrequenz

$$\omega_{pe} > \omega_{col}, \quad (2.26)$$

ansonsten können sich die Elektronen nicht unabhängig bewegen, sondern werden durch die Kollisionen in ein Gleichgewicht mit den neutralen Teilchen gedrängt und das Plasma kann als neutrales Gas betrachtet werden.

### Temperaturdefinition

Die Temperatur eines Plasmas muss unabhängig für jede Teilchenspezies (und unter bestimmten Voraussetzungen auch unabhängig für jede Raumrichtung) definiert werden. Die Temperatur  $T_\alpha$  (für die Teilchenspezies  $\alpha$ ) hängt von der mittleren kinetischen

## 2. Theorie

Energie der zufälligen (also thermischen) Bewegung der Teilchen ab. Nach der thermodynamischen Definition der absoluten Temperatur enthält jeder Freiheitsgrad der Translation die thermische Energie  $k_B T_{\alpha,i}/2$  mit  $i = x, y, z$ . Damit gilt

$$\frac{1}{2}k_B T_{\alpha,i} = \frac{1}{2}m_\alpha \langle v_{\alpha,i}^2 \rangle. \quad (2.27)$$

Wenn die Verteilung isotrop (wie dies z.B. bei der *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* der Fall ist) und das Plasma in einem thermischen Gleichgewicht ist, dann gilt

$$v_{\alpha,x}^2 = v_{\alpha,y}^2 = v_{\alpha,z}^2 = v_\alpha^2/3 \quad (2.28)$$

und damit ist

$$T_\alpha = T_{\alpha,x} = T_{\alpha,y} = T_{\alpha,z} = \frac{1}{3} \frac{m_\alpha}{k_B} v_\alpha^2. \quad (2.29)$$

### 2.4.2. Kinetische Beschreibung eines Plasmas

Ein Plasma ist ein System, das sehr viele interagierende, geladene Teilchen beinhaltet, daher ist ein statistischer Ansatz zur Analyse der Eigenschaften und es Verhaltens gerechtfertigt. Die wichtigsten Konzepte der kinetischen Theorie sind dabei der *Phasenraum* und die *Verteilungsfunktion*. Alle relevanten Informationen sind in der Verteilungsfunktion enthalten, aus ihr lassen sich die physikalisch interessanten Variablen, die für die makroskopische Beschreibung notwendig sind, berechnen. Diese Variablen, wie Temperatur, Dichte oder Druck, können direkt aus verschiedenen gewichteten Mittelwerten der Orte und Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen gewonnen werden.

#### Phasenraum

Jedes Teilchen kann zu jedem Zeitpunkt durch einen Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , der sich in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  und  $\hat{\mathbf{z}}$  folgendermaßen darstellen lässt

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.30)$$

sowie einen Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$ , der sich aus

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.31)$$

ergibt, vollständig beschrieben werden. Man ordnet also jedem Teilchen analog zu seiner Position im Ortsraum  $(x, y, z)$  eine Position im Geschwindigkeitsraum  $(v_x, v_y, v_z)$  zu.

## 2. Theorie

Damit kann man nun sagen, der Zustand jedes Teilchens ist durch die 6 Koordinaten  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  oder durch einen Punkt im sechs-dimensionalen Phasenraum beschrieben. Der Zustand von  $N$  Teilchen ist also durch  $N$  Punkte im Phasenraum vollständig festgelegt.

### Volumenelement und Verteilungsfunktion

Ein kleines Volumenelement im Ortsraum wird durch  $d^3r = dx dy dz$  repräsentiert. Dieses differentielle Element ist hier nicht als infinitesimal klein zu sehen, es muss nur klein gegenüber der charakteristischen Größenskala des Plasmas oder Variationsskala einer makroskopischen Variable wie Dichte oder Temperatur sein, aber groß genug um noch ausreichend viele Teilchen zu enthalten. Ebenso lässt sich der Geschwindigkeitsraum in kleine Volumenelemente  $d^3v = dv_x dv_y dv_z$  unterteilen. Damit kann man nun sagen, ein Teilchen hält sich in  $d^3r d^3v$  auf, wenn seine x- zwischen  $x$  und  $x + dx$ , seine y- zwischen  $y$  und  $y + dy$  sowie seine z-Koordinate zwischen  $z$  und  $z + dz$  liegen, außerdem müssen sich die Komponenten seiner Geschwindigkeit in den Intervallen  $v_x$  bis  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  bis  $v_y + dv_y$  und  $v_z$  bis  $v_z + dv_z$  befinden. Die Anzahl der Teilchen innerhalb des Volumenelements  $d^3r d^3v$  ist im Allgemeinen eine Funktion der Zeit und der Position des Volumenelements.

Die Größe  $d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  beschreibt die Anzahl der Teilchen der Spezies  $\alpha$  im Volumenelement  $d^3r d^3v$  um die Phasenraumkoordinaten  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist die *Verteilungsfunktion*

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3r d^3v} \quad (2.32)$$

als die Dichte der Teilchen vom Typ  $\alpha$  im Phasenraum definiert. Es wird davon ausgegangen, dass diese Dichte sich von einem Phasenraumvolumen zum nächsten nicht sprunghaft ändert, so dass  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  als stetige Funktion von  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $t$  gesehen werden kann.

In einem Volumenelement, dessen Geschwindigkeitskoordinaten sehr groß sind, halten sich immer relativ wenige Teilchen auf, da in jedem makroskopischen System die Anzahl der Teilchen mit sehr hoher Energie niedrig sein muss. Daher muss die Verteilungsfunktion für  $v_x, v_y, v_z \rightarrow c$  gegen Null gehen.

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  ist im Allgemeinen eine Funktion des Ortsvektors  $\mathbf{r}$ , das heißt, das Plasma ist inhomogen. In Abwesenheit externer Kräfte wird das Plasma allerdings durch die

## 2. Theorie

Wechselwirkungen der Teilchen untereinander mit der Zeit einen Gleichgewichtszustand erreichen. Dann hängt die Verteilungsfunktion nicht mehr von  $\mathbf{r}$  ab, das Plasma befindet sich in einem homogenen Zustand.

Im Geschwindigkeitsraum kann  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  von den einzelnen Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  abhängen, dann ist das Plasma in einem anisotropen Zustand, oder nur von  $v = |\mathbf{v}|$ , dann wird es als isotrop bezeichnet.

Statistisch gesehen liefert die Verteilungsfunktion eine vollständige Beschreibung des betrachteten Systems. Mit der Kenntnis von  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  können alle makroskopischen Variablen von Interesse, die die Spezies  $\alpha$  betreffen, abgeleitet werden.

### Teilchendichte und mittlere Geschwindigkeit

Die *Teilchendichte*  $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$  ist eine makroskopische Variable im Ortsraum unabhängig von der Geschwindigkeit, die durch Integration der Verteilungsfunktion über den gesamten Geschwindigkeitsraum

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.33)$$

gewonnen werden kann. Das einzelne Integral muss hierbei selbstverständlich als ein Dreifachintegral über die Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  jeweils von  $-\infty$  bis  $+\infty$  verstanden werden.

Die *mittlere Geschwindigkeit*  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  ist definiert als die makroskopische Flussgeschwindigkeit der Teilchen vom Typ  $\alpha$  beim Ortsvektor  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$ . Sie kann aus der Verteilungsfunktion berechnet werden nach

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.34)$$

Wichtig ist dabei vor allem, dass die beiden Größen  $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  nicht von  $\mathbf{v}$  (also von einzelnen Teilchen) abhängen, und damit makroskopisch messbare Größen sind.

### Vlasov-Gleichung

Um dynamische Prozesse in einem Plasma zu beschreiben, ist es hilfreich, die Einflüsse auf die Bewegungen der Plasma-Teilchen aufzuteilen: in die Beeinflussung durch eventuell vorhandene externe Felder plus die Einflüsse durch die makroskopisch erzeugten

## 2. Theorie

mittleren internen Felder, die durch die Bewegung der Teilchen entstehen. Dies lässt sich sehr gut veranschaulichen anhand der *Vlasov-Gleichung*. Dies ist eine partielle Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion im Phasenraum beschreibt und in die sowohl interne als auch externe Felder integriert werden können. Die einfachste Form lautet

$$\frac{df_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{dt} = 0, \quad (2.35)$$

wenn die Teilchenzahl konstant ist; ansonsten können auch noch Quellterme auf der rechten Seite addiert werden. Die totale Ableitung auf der linken Seite kann ausgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f_\alpha + \frac{\mathbf{F}_{ges}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha = 0 \quad (2.36)$$

mit

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_{ext} + q_\alpha \left( \mathbf{E}_{int} + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{int} \right). \quad (2.37)$$

Hier repräsentiert  $\mathbf{F}_{ges}$  die gesamte Kraft,  $\mathbf{F}_{ext}$  den Anteil, der durch externe Felder auf die Teilchen wirkt und  $\mathbf{E}_{int}$  sowie  $\mathbf{B}_{int}$  die internen, also durch die Anwesenheit und Bewegung der Teilchen selbst erzeugten Felder. Um die internen Felder  $\mathbf{E}_{int}$  und  $\mathbf{B}_{int}$  in Konsistenz mit den makroskopischen Ladungs- und Stromdichten zu halten, müssen sie die Maxwellgleichungen erfüllen. Gleichung 2.36 zusammen mit 2.1a bis 2.3 ergeben ein vollständiges System selbstkonsistenter Gleichungen, das gelöst werden muss, um das Verhalten des Plasmas zu beschreiben. Dies wurde in dieser Arbeit numerisch mit Hilfe eines PiC-Codes (wie in Kapitel 3 beschreiben) umgesetzt.

### 2.4.3. Wellen im Plasma

Wellen in einem Plasma können zunächst einmal in die beiden Bereiche *elektrostatistische* und *elektromagnetische Wellen* eingeteilt werden, je nachdem ob ein oszillierendes Magnetfeld vorhanden ist oder nicht. Wenn man das *faradaysche Induktionsgesetz* 2.1c auf ebene Wellen anwendet, erhält man

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}. \quad (2.38)$$

Dies zeigt, dass elektrostatische Wellen rein longitudinal sein müssen, elektromagnetische dagegen eine transversale Komponente besitzen müssen und zusätzlich einen longitudinalen Anteil haben können. Des weiteren kann man die Wellen danach einteilen, welche Teilchenspezies oszilliert (Ionen oder Elektronen, bei einigen Wellentypen können auch

beide Spezies eine Rolle spielen) und als letztes Unterscheidungsmerkmal tritt noch die Richtung zu einem eventuell vorhandenen Hintergrundmagnetfeld auf.

### Schallwellen

Schallwellen verhalten sich in einem Plasma sehr ähnlich wie in jedem nicht ionisierten Gas auch. Die entscheidenden Kräfte sind bei dieser Art von Welle nicht die langreichweitigen Coulomb-Kräfte, sondern viel mehr die Dichteschwankungen des Gases. Dabei gilt immer die Gleichung

$$p\rho_m^{-\gamma} = \text{const}, \quad (2.39)$$

wobei  $p$  der Druck,  $\rho_m$  die Massendichte und  $\gamma$  der Adiabatenindex sind. Differenziert man Gleichung 2.39, so erhält man

$$\nabla p = \frac{\gamma p}{\rho_m} \cdot \nabla \rho_m = v_s^2 \nabla \rho_m \quad (2.40)$$

mit der adiabatischen Schallgeschwindigkeit

$$v_s = \left( \frac{\gamma p}{\rho_m} \right)^{1/2}, \quad (2.41)$$

die die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle darstellt. In einem kompressiblen leitenden Medium, das ein magnetisches Feld beinhaltet, können sich Schallwellen entlang eines Hintergrundmagnetfeldes  $B_0$  genauso ausbreiten, wie in einem nicht ionisierten Gas, sie sind damit die einfachsten elektrostatischen Wellenmoden im Plasma.

### Magnetosonische Wellen

Bei der Ausbreitung senkrecht zu den magnetischen Feldlinien dagegen stellt man fest, dass zusätzlich zum Druck  $p$  durch die Teilchen ein magnetischer Druckterm  $B_0/8\pi$  nötig ist (siehe z.B. Bittencourt 2004; Salimullah et al. 2006) Damit lässt sich (analog zu 2.40) folgende Gleichung formulieren:

$$\nabla \left( p + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = \frac{\gamma p}{\rho_m} \cdot \nabla \rho_m = v_m^2 \nabla \rho_m, \quad (2.42)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_m^2 = \frac{d}{d\rho_m} \left( p + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = v_s^2 + \frac{d}{d\rho_m} \left( \frac{B_0^2}{8\pi} \right). \quad (2.43)$$

Bei dieser Art von Wellen werden also zusätzlich zu den Dichteschwankungen der Teilchen die Magnetfeldlinien senkrecht zu ihrer Richtung komprimiert (siehe Abbildung 2.5).

### Alfvén-Wellen

Bei *Alfvén-Wellen* kann man sich die magnetischen Feldlinien wie gespannte Schnüre vorstellen, die seitlich ausgelenkt werden. In einem Plasma sind die Teilchen stark an die Magnetfeldlinien gebunden. Damit kann davon ausgegangen werden, analog zur transversalen Vibration von elastischen Schnüren, dass die Magnetfeldlinien transversale Schwingungen ausführen werden (siehe Abbildung 2.5). Die Spannung, die sie wieder in die Ausgangsposition zurückbringen will, beträgt  $B_0^2/(4\pi)$  (Bittencourt 2004). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist

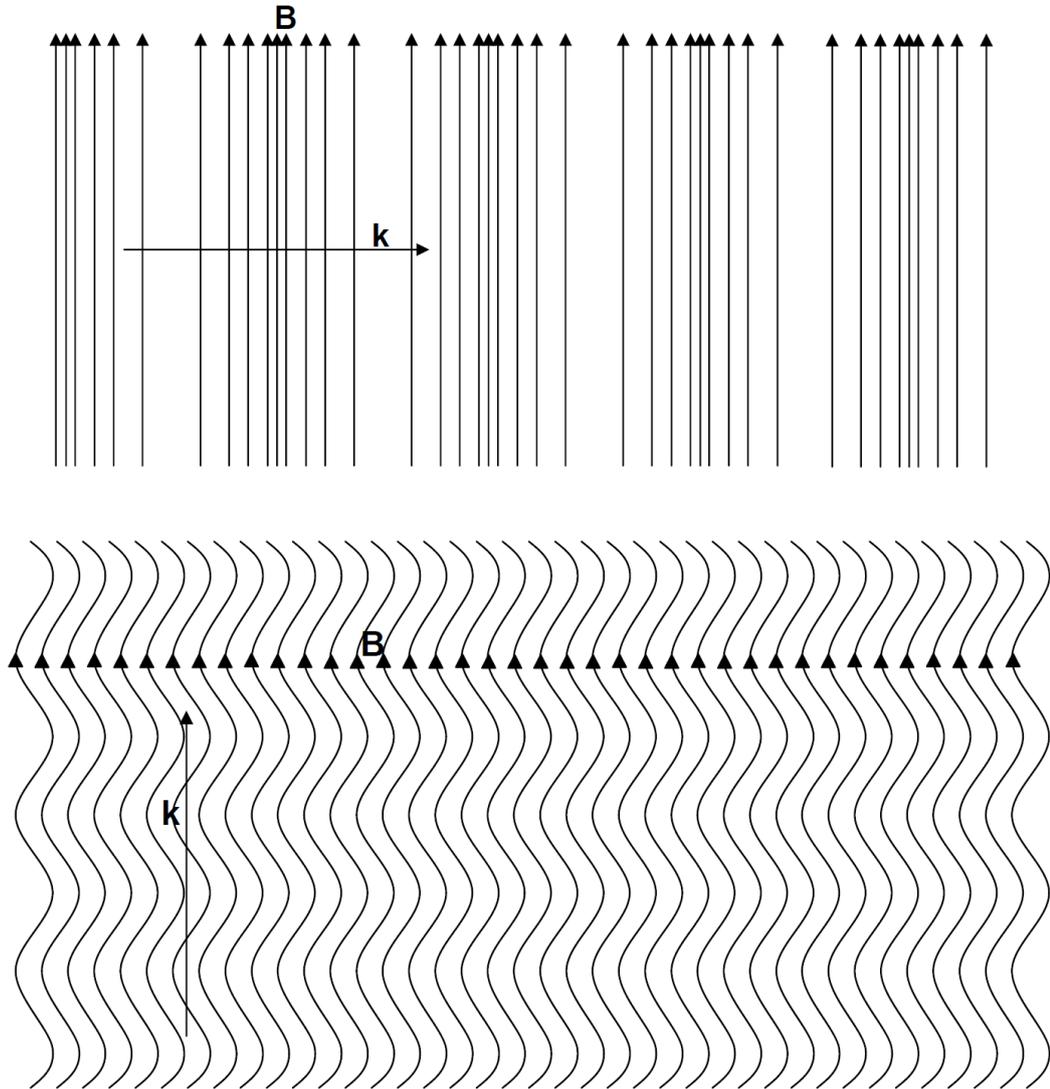
$$v_A = \left( \frac{\text{Spannung}}{\text{Dichte}} \right)^{1/2} = \left( \frac{B_0^2}{4\pi\rho_m} \right)^{1/2}, \quad (2.44)$$

genannt die *Alfvén-Geschwindigkeit* (Alfvén 1942). Eine interessante Eigenschaft dieser Wellen ist, dass es innerhalb des Fluids keinerlei Fluktuationen der Dichte  $\rho_m$  oder des Druckes  $p$  gibt. Zusammen mit den Gleichungen 2.40 und 2.43 stellt man fest, dass es einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den drei Geschwindigkeiten gibt:

$$v_m^2 = v_s^2 + v_A^2 \quad (2.45)$$

### Linearisierung der Vlasov-Gleichung

Um die nächsten Wellentypen und Instabilitäten besser zu verstehen, müssen nun zuerst einige Dinge abgeleitet und beschrieben werden. Dazu wird von der Vlasov-Gleichung 2.36 sowie den Maxwellgleichungen 2.1a bis 2.1d zusammen mit den Gleichungen für die Teilchen- und Stromdichte 2.2 und 2.3 ausgegangen, die zusammen ein Set selbstkonsistenter Gleichungen zur Beschreibung eines Plasmas bilden. Es soll dabei noch erwähnt werden, dass, obwohl kein expliziter Kollisionsterm einbezogen wurde, die Wechselwirkung der Teilchen untereinander über die selbstkonsistent berechneten  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder einen wichtigen Beitrag liefert.



**Abbildung 2.5.:** Illustration zum Aussehen von magnetosonischen (oben) und Alfvén-Wellen (unten). Bei magnetosonischen Wellen steht der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  senkrecht auf den Magnetfeldlinien  $\mathbf{B}$ , bei den Alfvén-Wellen liegen beide Vektoren parallel.

## 2. Theorie

Es soll ein isotropes Elektronen-Ionen Plasma ohne externe Einflüsse im Gleichgewicht betrachtet werden. Wenn einzelne Elektronen aus ihrer Gleichgewichtsposition ausgelenkt werden, wird sich durch die internen Felder aufgrund der Ladungstrennung eine Oszillation ergeben. Dabei wird angenommen, dass die relevanten Zeitskalen so kurz sind, dass die viel schwereren Ionen so gut wie stationär bleiben. Um kleine Abweichungen vom Gleichgewicht zu beschreiben, wird die Verteilungsfunktion der Elektronen  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  linearisiert (so dass Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können) zu

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(|\mathbf{v}|) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2.46)$$

dabei ist  $f_0 \gg f_1$  und  $f_0$  ist nur vom Betrag von  $v$  abhängig, nicht von den einzelnen Komponenten. Da von einem Plasma im Gleichgewicht ausgegangen wird, verschwinden interne  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder und die Ladungs- und Stromdichten gehen gegen Null. Die durch die Störung entstehenden  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder, sowie die Ladungs- und Stromdichten sind somit auch Größen erster Ordnung. Die gestörte Ladungsdichte ist damit

$$\rho(\mathbf{r}, t) = en_0 - e \int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.47)$$

mit der Teilchendichte im Gleichgewicht

$$n_0 = \int_v f_0(v) d^3v. \quad (2.48)$$

Mit Gleichung 2.46 lassen sich die Ladungs- und Stromdichten berechnen zu

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e \int_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \text{ und} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -e \int_v \mathbf{v} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.50)$$

unter der Annahme, dass die Ionen stationär bleiben. Gleichung 2.46 eingesetzt in die Vlasov-Gleichung 2.36 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} \cdot \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \cdot \nabla_v f_0(v) \\ - \frac{e}{m_e} \cdot \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \cdot \nabla_v f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

die sich nun durch Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung stark vereinfachen lässt zu

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} \cdot \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \cdot \nabla_v f_0(v) = 0. \quad (2.52)$$

## 2. Theorie

Nun wird zur Lösung dieser Gleichung eine harmonische Analyse durchgeführt, die Größe  $f_1$  soll sich also periodisch und harmonisch verhalten:

$$f_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{v}) \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.53)$$

dann werden auch folgende Größen die selbe harmonische räumliche und zeitliche Abhängigkeit besitzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.54a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.54b)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \text{ mit } \rho = -e \int_v f_1(\mathbf{v}) d^3v \quad (2.54c)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \text{ mit } \mathbf{j} = -e \int_v \mathbf{v} f_1(\mathbf{v}) d^3v \quad (2.54d)$$

Mit diesen Annahmen wird Gleichung 2.53 zu

$$-i\omega f_1(\mathbf{v}) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_1(\mathbf{v}) - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0 = 0 \quad (2.55)$$

und die Lösung davon lautet

$$f_1(\mathbf{v}) = \frac{ie}{m_e} \frac{\mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0(v)}{\omega - kv_z}, \quad (2.56)$$

wobei angenommen wurde, dass die Welle sich in  $z$ -Richtung ausbreitet, also  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ .

**Komponenten der Stromdichte** Durch Einsetzen von Gleichung 2.56 in 2.54d ergibt sich

$$\mathbf{j} = -\frac{ie^2}{m_e} \int_v \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0(v))}{\omega - kv_z} d^3v, \quad (2.57)$$

aus der sich nach kurzer Rechnung und Umformung die gesuchten Komponenten

$$j_x = -\frac{ie^2}{m_e} E_x \int_v \frac{v_x}{\omega - kv_z} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v_x} d^3v, \quad (2.58a)$$

$$j_y = -\frac{ie^2}{m_e} E_y \int_v \frac{v_y}{\omega - kv_z} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v_y} d^3v \text{ und} \quad (2.58b)$$

$$j_z = -\frac{ie^2}{m_e} E_z \int_v \frac{v_z}{\omega - kv_z} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v_z} d^3v \quad (2.58c)$$

darstellen lassen.

**Moden-Separation** Durch einige geschickte Umformungen ist es möglich, dies in vier voneinander unabhängige Gleichungssysteme zu zerlegen, die jeweils eine Gruppe unterschiedlicher Moden repräsentieren. Dazu werden die beiden Maxwellgleichungen 2.1c und 2.1d mit den linearisierten Feldern 2.54a und 2.54b zu

$$ik\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} \quad (2.59)$$

$$ik\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E} \quad (2.60)$$

kombiniert. In den verwendeten kartesischen Koordinaten ist  $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_x - \hat{\mathbf{x}}E_y$  und  $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}B_x - \hat{\mathbf{x}}B_y$ , damit werden die einzelnen Komponenten der Gleichungen 2.59 und 2.60 zu

$$\frac{\omega}{c}B_x = -kE_y, \quad (2.61a)$$

$$\frac{\omega}{c}B_y = kE_x, \quad (2.61b)$$

$$\frac{\omega}{c}B_z = 0, \quad (2.61c)$$

und

$$\frac{4\pi}{c}j_x - \frac{i\omega}{c}E_x = -ikB_y, \quad (2.62a)$$

$$\frac{4\pi}{c}j_y - \frac{i\omega}{c}E_y = ikB_x, \quad (2.62b)$$

$$\frac{4\pi}{c}j_z - \frac{i\omega}{c}E_z = 0. \quad (2.62c)$$

Nun lässt sich feststellen, dass sich dies in vier unabhängige Gleichungssysteme zerlegen lässt, die jeweils die folgenden Variablen beinhalten:

- $j_z$  und  $E_z$  (Gleichung 2.62c),
- $B_z$  (Gleichung 2.61c)
- $j_y, E_y$  und  $B_x$  (Gleichung 2.61a und 2.62b) sowie
- $j_x, E_x$  und  $B_y$  (Gleichung 2.61b und 2.62a).

Das erste Gleichungssystem enthält kein Magnetfeld, aber eine Stromdichte und ein elektrisches Feld in Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$ , das heißt, diese beiden Größen verändern sich parallel zur Ausbreitungsrichtung. Damit beschreibt diese Gleichung eine elektrostatische Welle, die sogenannte longitudinale Plasmawelle oder auch *Langmuir-Welle* genannt. Die zweite Gruppe entspricht keiner vorkommenden Wellenmode, da kein Strom

## 2. Theorie

erzeugt wird und sie somit auch nicht von der Bewegung der umgebenden Plasmateilchen beeinflusst wird. Im dritten und vierten Gleichungssystem kommen jeweils  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder vor, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegen. Die Ströme und damit die mittleren Teilchenbewegungen sind ebenfalls senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . Diese beiden Gruppen beschreiben die beiden unterschiedlichen Polarisierungen der transversalen elektromagnetischen Wellen.

In den nächsten beiden Abschnitten sollen die eben genannten Wellenmoden noch etwas genauer beleuchtet werden.

### Langmuir-Wellen

Die wichtigsten Eigenschaften einer Welle kann man aus ihrer *Dispersionsrelation* ablesen. Diese Gleichung, die die Variablen  $\omega$  und  $k$  verbindet, bestimmt die natürlichen Wellenmoden eines Systems. Um die Dispersionsrelation für die longitudinale Plasmawelle zu erhalten, kombiniert man die Gleichungen 2.62c und 2.58c mit der Plasmafrequenz 2.25, dividiert den erhaltenen Term durch  $E_z \neq 0$  und erhält so die Dispersionsrelation

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{n\omega} \int_v \frac{v_z}{kv_z - \omega} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v_z} d^3v, \quad (2.63)$$

die durch das Auflösen und Umschreiben des Dreifachintegrals dann schließlich zu

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{nk^2} \int_v \frac{f_0(v)}{(v_z - \omega/k)^2} d^3v \quad (2.64)$$

vereinfacht werden kann. Um noch kurz zu zeigen, dass dieses Ergebnis Sinn macht, soll der Grenzfall eines kalten Plasmas betrachtet werden. Dann ist die Verteilungsfunktion  $f_0(v)$  gegeben durch

$$f_0(v) = n_0 \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z). \quad (2.65)$$

Wenn dies in Gleichung 2.64 eingesetzt und das Integral aufgelöst wird, so erhält man

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2, \quad (2.66)$$

das heißt, die Welle schwingt exakt mit der Plasmafrequenz (Gleichung 2.25).

### Elektromagnetische Wellen

In den oben genannten Gleichungssystemen drei und vier, die sich aus  $j_y$ ,  $E_y$ ,  $B_x$  und  $j_x$ ,  $E_x$ ,  $B_y$  zusammensetzen, sind die beiden Polarisierungen der transversalen elektromagne-

## 2. Theorie

tischen Welle verborgen. Um die Dispersionsrelation abzuleiten, wird  $B_x$  aus Gleichung 2.61a in 2.62b eingesetzt

$$\frac{4\pi}{c} j_y = \left( \frac{i\omega}{c} - \frac{ick^2}{\omega} \right) E_y \quad (2.67)$$

und man erhält durch kurzes Umformen einen Term für  $E_y$

$$E_y = \frac{4\pi i\omega}{c^2 k^2 - \omega^2} j_y, \quad (2.68)$$

der schließlich mit Gleichung 2.58b kombiniert wird, um  $j_y$  zu eliminieren

$$E_y = \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{n(c^2 k^2 - \omega^2)} \cdot E_y \cdot \int_v \frac{v_y}{kv_z - \omega} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v_y} d^3v. \quad (2.69)$$

Analog kann aus den Gleichungen 2.61b, 2.62a und 2.58a dieselbe Gleichung für  $E_x$  hergeleitet werden. Wenn als letzter Schritt noch das Integral vereinfacht wird, so erhält man mit

$$k^2 c^2 - \omega^2 = \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{nk} \int_v \frac{f_0(v)}{(v_z - \omega/k)} d^3v \quad (2.70)$$

die Dispersionsrelation für transversale elektromagnetische Wellen in einem Plasma. Diese gilt für die beiden Felder  $E_x$  und  $E_y$  unter der Annahme, dass sich die Welle in  $z$ -Richtung ausbreitet.

### 2.4.4. Plasmainstabilitäten

In kommenden Abschnitt sollen noch einige der für diese Arbeit so wichtigen Instabilitäten näher betrachtet werden. Dazu wird beispielhaft die Dispersionsrelation für eine *Zweistrominstabilität* in einem kalten Plasma abgeleitet und einige andere kurz angesprochen.

#### Zweistrominstabilität

Als ein Beispiel für eine Situation, in der Welle-Teilchen-Wechselwirkungen zu einer wachsenden Amplitude führen können, indem kinetische Energie von den Teilchen weg transferiert wird, ist die sogenannte Zweistrominstabilität (Pierce 1948). Dass hier die Instabilität ihre Energie aus der Bewegung der Teilchen zieht und diese damit verlangsamt ist im Übrigen kein Widerspruch zum Thema dieser Arbeit - Teilchenbeschleunigung durch die Instabilität - im Gegenteil, es ist notwendig, dass die Teilchen zuerst

## 2. Theorie

Energie abgeben, so dass die Instabilität in Schwung kommen kann und anschließend können einige Teilchen durch die entstehenden Feldkonfigurationen zu sehr hohen Energien beschleunigt werden.

Die Zweistrominstabilität kann in vielen Variationen auftreten, doch hier soll nur der einfache Fall zweier gleichmäßiger Plasmapopulationen mit derselben Teilchendichte  $n/2$  analytisch betrachtet werden. Der eine Strahl bewegt sich mit der Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_D = v_D \hat{\mathbf{z}}$  in die positive  $z$ -Richtung, der andere mit  $\mathbf{v}_D = -v_D \hat{\mathbf{z}}$  entgegengesetzt. Es wird angenommen, dass alle Teilchen exakt die Driftgeschwindigkeit besitzen, das Plasma also kalt ist, so dass sich die Verteilungsfunktion mit Deltafunktionen als

$$f_0(v) = \frac{1}{2}n \delta(v_x)\delta(v_y) (\delta(v_z - v_D) + \delta(v_z + v_D)) \quad (2.71)$$

schreiben lässt. Eine Illustration der  $v_z$ -Komponente dieser Verteilungsfunktion ist in Abbildung 2.6 zu sehen.

Setzt man nun die Verteilungsfunktion 2.71 in die Dispersionsrelation der longitudinalen Plasmawelle 2.64 ein, so erhält man

$$1 = \frac{1}{2}\omega_{pe}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v_x) dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v_y) dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(v_z - v_D) + \delta(v_z + v_D)}{(v_z - \omega/k)^2} dv_z, \quad (2.72)$$

integriert man dann über die einzelnen  $\delta$ -Funktionen, so ergibt sich die Dispersionsrelation

$$1 = \frac{1}{2}\omega_{pe}^2 \left( \frac{1}{(kv_D - \omega)^2} + \frac{1}{(kv_D + \omega)^2} \right) \quad (2.73)$$

für longitudinale Wellen in einem kalten gegenströmenden Plasma. Es wird angenommen,  $k$  sei reell, so dass sich stehende Wellen ergeben, und das Anwachsen der Wellenamplitude wird nun anhand von  $\omega$  analysiert.

Gleichung 2.73 lässt sich zu folgendem Polynom vierten Grades in  $\omega$  umschreiben:

$$\omega^4 - B\omega^2 + C = 0, \quad (2.74)$$

wobei

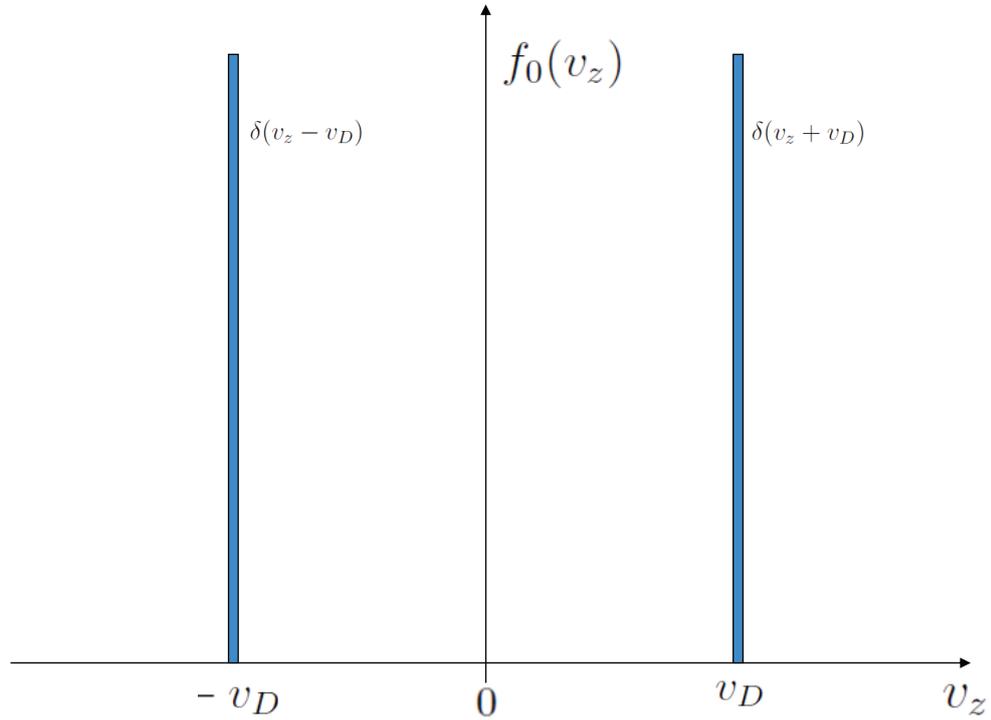
$$B = \omega_{pe}^2 + 2k^2v_D^2 \quad \text{und} \quad (2.75a)$$

$$C = k^2v_D^2(k^2v_D^2 - \omega_{pe}^2). \quad (2.75b)$$

Dabei ist festzustellen, dass die Größe  $B$  immer positiv ist, bei  $C$  hängt es von den Werten in der Klammer ab,

$$C > 0 \quad \text{für} \quad k^2v_D^2 > \omega_{pe}^2 \quad (2.76a)$$

$$C < 0 \quad \text{für} \quad k^2v_D^2 < \omega_{pe}^2. \quad (2.76b)$$



**Abbildung 2.6.:** Illustration der z-Komponente der Verteilungsfunktion zweier kalter gegeneinander strömenden Plasmapopulationen zur Verdeutlichung der Entstehung einer Zweistrominstabilität.

Gleichung 2.74 besitzt zwei Lösungen für  $\omega^2$ , sie lauten

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}B + \left(\frac{1}{4}B^2 - C\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad (2.77a)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}B - \left(\frac{1}{4}B^2 - C\right)^{1/2}. \quad (2.77b)$$

Als erstes ist zu sehen, dass für  $k^2 v_D^2 > \omega_{pe}^2$  die Größe  $C > 0$  ist, damit sind beide Lösungen  $\omega_1^2$  und  $\omega_2^2$  positive reelle Größen, damit sind auch ihre Wurzeln reell und kein Wachstum oder Abfall der Amplitude kann beobachtet werden. Wenn allerdings  $k^2 v_D^2 < \omega_{pe}^2$  ist, dann wird  $C < 0$ ,  $\omega_1^2$  bleibt positiv und reell,  $\omega_2^2$  dagegen wird negativ. Somit hat  $\omega_2$  zwei imaginäre Werte (ein positiver und ein negativer). Der interessante Wert ist der positive imaginäre, dieser entspricht einer instabilen Mode  $e^{\omega_0 t}$  mit  $\omega_0 = i\omega_2$

## 2. Theorie

mit der Wachstumsrate

$$\omega_0 = \left( -\frac{1}{2}B + \left( \frac{1}{4}B^2 - C \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (2.78)$$

oder mit Gleichungen 2.77a und 2.77b wieder eingesetzt

$$\omega_0 = \left( -\left( \frac{1}{2}\omega_{pe}^2 + k^2v_D^2 \right) + \left( \left( \frac{1}{2}\omega_{pe}^2 + k^2v_D^2 \right)^2 - k^2v_D^2(k^2v_D^2 - \omega_{pe}^2) \right)^{1/2} \right)^{1/2}. \quad (2.79)$$

In den folgenden Abschnitten sollen noch einige andere Plasmainstabilitäten angesprochen werden, allerdings nur qualitativ, es werden keine weiteren Rechnungen aufgeführt, da sie für das Ergebnis dieser Arbeit nicht relevant sind.

### Weibel-Instabilität

Die *Weibel-Instabilität* (die erstmals von Weibel (1959) beschrieben wurde) entsteht aus einer Anisotropie im Geschwindigkeitsraum, das heißt, sie entsteht, wenn die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen keine Gauß'sche ist oder in den verschiedenen Richtungen unterschiedliche Temperaturen aufweist. Die Weibel-Instabilität beschreibt anwachsende transversale elektromagnetische Wellen. Durch diese Bedingung tritt die Weibel-Instabilität häufig auch zusammen mit anderen Plasma-Instabilitäten auf.

### Buneman-Instabilität

Die *Buneman-Instabilität* ist eine von Buneman (1958a, b, 1959) vorhergesagte besondere Form der Zweistrom-Instabilität. Sie entwickelt sich in etwas anderen Bereichen der  $\omega - k$ -Ebene und hat damit auch eine andere Wachstumsrate, wie von Iizuka et al. (1979) auch experimentell nachgewiesen wurde.

Die Dispersionsrelation 2.73 und Wachstumsrate der Zweistrominstabilität 2.79 wurden beispielhaft hergeleitet, allerdings mussten dabei eine Reihe von grundlegenden und schwerwiegenden Vereinfachungen gemacht werden, wie z.B. die Beschränkung auf harmonische Moden oder die Annahme des kalten Plasmas. Aus diesem Grund wurden die Instabilitäten in dieser Arbeit nicht analytisch betrachtet, sondern es wurde ein umfangreicher Code zur numerischen Modellierung des Plasmas und der darin ablaufenden

## 2. Theorie

Vorgänge verfasst. Eine detaillierte Beschreibung des Codes findet sich im folgenden Kapitel 3.

## 3. Numerik

Das folgende Kapitel soll der Beschreibung der verwendeten numerischen Methoden und des für diese Arbeit geschriebenen Particle-in-Cell- (PiC-) Codes gewidmet werden. Dazu wird zunächst einmal auf grundlegende Eigenschaften, Voraussetzungen und Beschreibungen von PiC-Codes eingegangen um dann anschließend auf die Vorzüge unseres Codes ACRONYM (**A**nother **C**ode for moving **R**elativistic **O**bjects, **N**ow with **Y**ee-lattice and **M**acroparticles) näher zu beleuchten (siehe auch Burkart et al. (2007) und Burkart et al. (2010)). Die wichtigsten Teile des Codes sind auf der beigelegten CD zu finden.

Wenn es darum geht, das Verhalten von kinetischen Plasmen zu beschreiben, wäre es das Naheliegendste, einfach die Wechselwirkungen der Teilchen unter- und aufeinander zu modellieren. Da die elektromagnetische Wechselwirkung aber eine langreichweitige ist, wäre es damit notwendig, den Einfluss jedes Teilchens auf jedes andere in der Simulationsbox befindliche zu berücksichtigen. Da bei diesen sogenannten N-Body Simulationen der Rechenaufwand aber mit  $N^2$  (mit der Teilchenzahl  $N$ ) steigt, ist dies für  $N \gg 10^7$  in absehbarer Zeit nicht zu realisieren. Daher greift man in diesem Fall auf die sogenannten PiC-Codes zurück (siehe z.B. Birdsall u. Langdon 1985), bei denen man - wie der Name Particle-in-Cell schon sagt - die Teilchen in Zellen steckt und so die elektromagnetischen Wechselwirkungen modelliert. Auf die genaue Funktionsweise eines PiC-Codes wird in Kapitel 3.2 eingegangen, hier soll erstmal eine ganz kurze Einführung gegeben werden. Ein Zeitschritt eines PiC-Codes sieht folgendermaßen aus:

- Bewegung der Teilchen,
- Berechnung der durch die Teilchenbewegung verursachten Ströme,
- zeitliche Entwicklung der Maxwellgleichungen in mehreren Einzelschritten und
- Berechnung der auf die Teilchen wirkenden Kräfte aufgrund der bestehenden elektrischen und magnetischen Felder.

Auf diese Art und Weise kann man mit vertretbarem Rechenaufwand auch Simulationen mit bis zu  $\approx 10^{10}$  Teilchen durchführen. Doch natürlich sind auch hier einige Beschränkungen vorhanden. Da ein PiC-Code auf den mikroskopischen Wechselwirkungen eines Plasmas beruht, muss  $\lambda_D$  (siehe Gleichung 2.16) aufgelöst werden, d.h. eine Zelle darf nicht größer sein als eine Debye-Länge. Des Weiteren muss die Größe eines Zeitschrittes z.B. durch das *Courant-Friedrich-Levy-* (CFL-) Kriterium (Courant et al. 1928) beschränkt werden. Eine genauere Beschreibung der notwendigen Kriterien und wie diese erreicht wurden, findet sich in Kapitel 3.5.2.

### 3.1. Terminologie

In den folgenden Kapiteln werden sehr häufig elektrische und magnetische Feldkomponenten auftauchen, die sowohl räumlich als auch zeitlich diskretisiert sind. Dafür wird folgende Schreibweise verwendet: die Bezeichnung der jeweiligen Komponente wird durch ein hochgestelltes  $x$ ,  $y$  oder  $z$  erfolgen, die räumliche Diskretisierung wird durch tiefgestellte Indizes  $(i, j, k)$  dargestellt und die zeitliche durch ein tiefgestelltes  $t$  nach der Klammer mit den räumlichen Indizes, getrennt durch ein Komma. Des Weiteren wird die zeitliche Diskretisierung geschrieben als  $t - 1$ ,  $t - \frac{1}{2}$ ,  $t$ ,  $t + \frac{1}{2}$ ,  $\dots$  wenn eigentlich  $t - \Delta t$ ,  $t - \frac{1}{2}\Delta t$ ,  $t$ ,  $t + \frac{1}{2}\Delta t$ ,  $\dots$  gemeint ist, das  $\Delta t$  wird zu Gunsten der Übersichtlichkeit weggelassen. Die  $x$ -Komponente des  $\mathbf{E}$ -Feldes an der Stelle  $(i, j + 1, k)$  zum Zeitpunkt  $t - \frac{1}{2}\Delta t$  würde also folgendermaßen aussehen:

$$E_x \left( i \cdot \Delta x, (j + 1) \cdot \Delta x, k \cdot \Delta x, t - \frac{1}{2} \cdot \Delta t \right) = E_{(i,j+1,k),t-\frac{1}{2}}^x$$

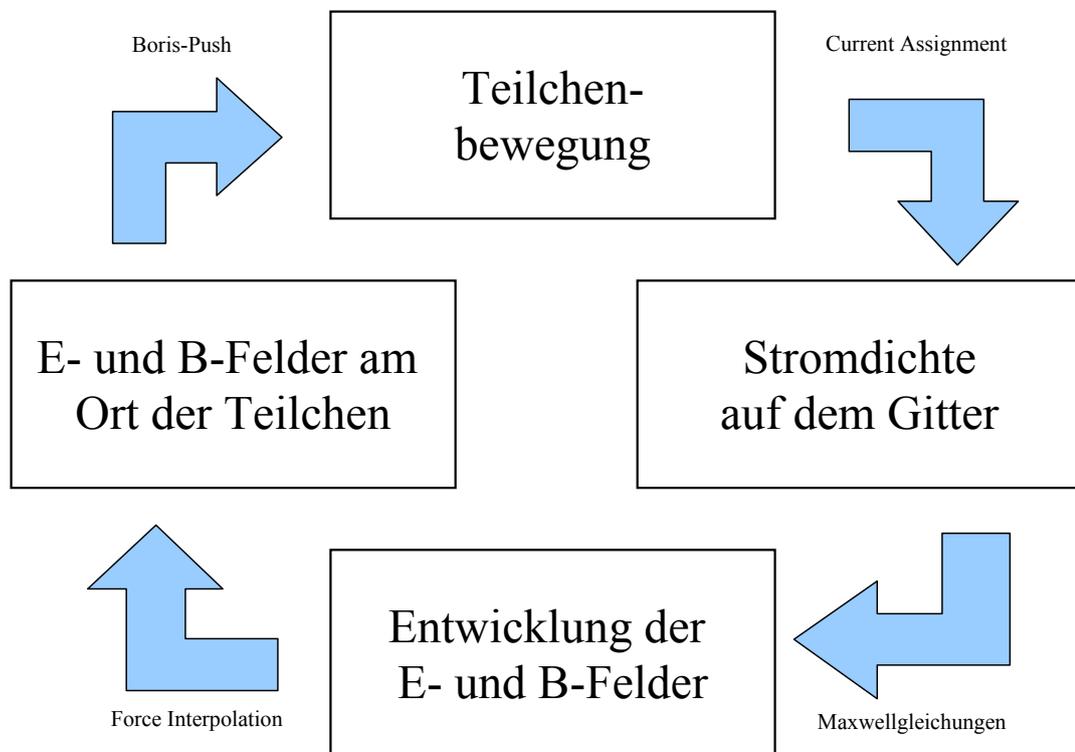
### 3.2. Umsetzung des PiC-Codes

Wie in der Einführung zu Kapitel 3 schon erwähnt, soll hier nun genauer auf die Funktionsweise eines PiC-Codes und die Umsetzung dessen eingegangen werden. Ein PiC-Code ist folgendermaßen aufgebaut (siehe auch Abbildung 3.1):

- Mit Hilfe der bekannten elektromagnetischen Felder werden die Teilchen nach der Methode des *Boris-Push* bewegt, dabei wird auf eine korrekte Beschreibung der auftretenden Effekte aufgrund der teilweise hochrelativistischen Geschwindigkeiten geachtet (Kapitel 3.3.1).

### 3. Numerik

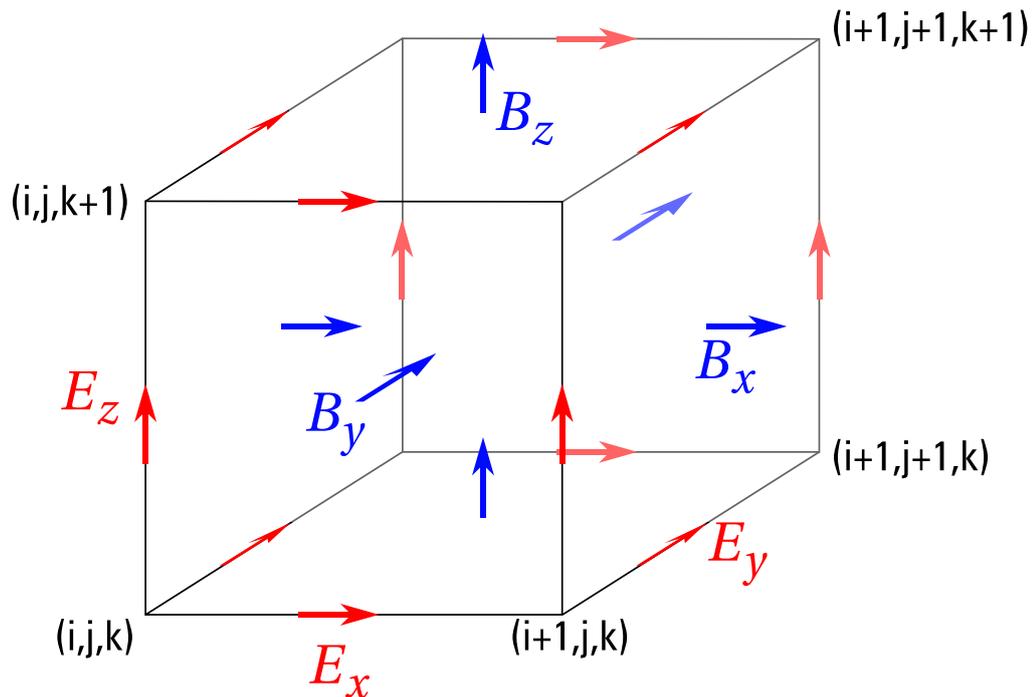
- Die von den Teilchen verursachten Ströme durch die Zellwände werden mit Hilfe einer quadratischen Interpolation, des sogenannten *Triangular Shaped Cloud (TSC)* Verfahrens berechnet und ins Gitter geschrieben (*Current Assignment*, für eine genaue Beschreibung siehe Kapitel 3.3.2).
- In mehreren Schritten werden die elektrischen und magnetischen Felder mit Hilfe der Maxwellgleichungen zum nächsten Zeitschritt berechnet (3.3.3).
- Die nun bekannten Felder müssen nun (wiederum durch das *TSC*-Verfahren) zur Berechnung der Kraftwirkung auf die Teilchen an die Positionen der einzelnen Teilchen interpoliert werden (*Force Interpolation*, Kapitel 3.3.4).



**Abbildung 3.1.:** Schema zum grundlegenden Aufbau eines PiC-Codes: aus der Teilchenbewegung werden Ströme berechnet, mit diesen werden die Maxwellgleichungen zeitlich entwickelt, die neuen elektrischen und magnetischen Felder werden an die Teilchenpositionen interpoliert und diese werden mit Hilfe des Verfahrens des Boris-Push bewegt.

### 3.2.1. Speicherung der Felder im Yee-Lattice

Um die bei der zeitlichen Evolution der Maxwellgleichungen nötigen Rotationen der elektrischen und magnetischen Felder sowie die dazu benötigten Ströme elegant und numerisch möglichst einfach in zweiter Ordnung berechnen zu können, wird in unserem Code ein versetztes Gitter, das sogenannte *Yee-Lattice* (Yee 1966, siehe Abbildung 3.2) verwendet.



**Abbildung 3.2.:** Im PiC-Code wird ein sogenanntes *Yee-Lattice* verwendet, bei dem die Komponenten der Felder an verschiedenen Positionen der Einheitszelle gespeichert werden, um die numerische Genauigkeit zu erhöhen, die Divergenzfreiheit sicher zu stellen und Interpolationen in den nötigen Rotationsberechnungen der elektrischen und magnetischen Feldern zu vermeiden. Nicht eingezeichnet sind die Stromkomponenten, diese sitzen an denselben Stellen wie die  $\mathbf{E}$ -Felder. (MEEP 2009)

Dabei werden die elektrischen Felder und die Ströme jeweils in die Mitte der (in

die selbe Richtung weisenden) Kante einer Einheitszelle geschrieben, die Magnetfelder werden in der Mitte der Fläche positioniert, auf der die jeweilige Komponente senkrecht steht. Die Werte stehen also an den folgenden Positionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \left( j_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^x, j_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^y, j_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^z \right) \\ \mathbf{E} &= \left( E_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^x, E_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^y, E_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^z \right) \\ \mathbf{B} &= \left( B_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^x, B_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^y, B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^z \right) \end{aligned}$$

Durch diese Positionierung müssen für die Berechnungen der Rotationen in den Maxwellgleichungen keine Interpolationen durchgeführt werden (siehe Kapitel 2.3.1), da jede  $\mathbf{E}$ -Feldkomponente ringförmig von  $\mathbf{B}$ -Feldern umgeben ist und umgekehrt.

Ein solches Yee-Gitter zu verwenden, hat sich in den letzten Jahren als eine sehr gute Wahl für PiC-Codes herauskristallisiert, da es mit vergleichsweise wenig Aufwand die divergenzbehafteten Maxwellgleichungen 2.1a und 2.1b stabilisiert und somit die unerwünschte Divergenz des Magnetfeldes  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  klein hält. Des Weiteren entsteht durch die Positionierung der einzelnen Feldkomponenten ganz natürlich eine Art *leapfrog*-Verfahren im Ort, welches numerisch wesentlich stabiler und genauer ist als ein einfaches Euler-Verfahren. Diese Methode des leapfrogging wird später auch in der zeitlichen Evolution der Maxwellgleichungen und in der Bewegung der Teilchen nochmals auftauchen, da es eine sehr einfache Methode ist, die Berechnungen auf zweite Ordnung anzuheben. Ein *leapfrog*-Verfahren entsteht dadurch, dass zwei voneinander abhängige Größen immer um einen halben Zeitschritt versetzt gespeichert und berechnet werden.

Im Code werden die Felder als dreidimensionale, Null-indizierte Arrays mit zusätzlichen *Ghost-Zonen* (dazu mehr in Kapitel 3.2.3) in jeder Richtung außerhalb des Simulationsraumes gespeichert.

### 3.2.2. Speicherung der Teilchen

Die Teilchen wurden jeweils als Objekte mit einer Reihe von Eigenschaften programmiert und werden in beidseitig verketteten Listen gespeichert. Diese Listen haben gegenüber einem Teilchenarray den Vorteil, dass auf einfache Art und Weise an jeder Stelle der Liste ein Teilchen entnommen (wenn es zum Beispiel den Simulationsraum des jeweiligen Prozessors verlässt) oder eingesetzt werden kann. In jedem Zeitschritt geht jeder Pro-

zessor durch die Teilchenliste "seines" Simulationsgebietes und führt die notwendigen Operationen aus. Die vorher erwähnten Eigenschaften eines Teilchens sind folgende:

- der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in drei globalen Koordinaten
- die Geschwindigkeit  $\mathbf{u} = \gamma \cdot \mathbf{v}$
- die Masse  $m$  sowie die Ladung  $q$
- eine fortlaufende Nummer  $n$  zur eindeutigen Identifikation

#### 3.2.3. Randbedingungen

Die ansonsten in dieser Arbeit beschriebenen Vorgänge beziehen sich auf Ereignisse, die innerhalb des Simulationsgebietes stattfinden. Wie jedoch später in Kapitel 3.3.2 gezeigt wird, werden bei der Berechnung der Ströme einer Zelle Beiträge von Teilchen berücksichtigt, die sich bis zu drei Zellen weit von dieser entfernt befinden. Wenn also ein Teilchen in die Nähe des Randes des Simulationsgebietes kommt, liefert es noch Beiträge zu Zellen, die schon gar nicht mehr im simulierten Raum liegen. Umgekehrt ist es zur Berechnung der Kraft auf ein Teilchen nötig, auf  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder in einer Entfernung von einigen Zellen zurückzugreifen (siehe Kapitel 3.3.4). Daher ist es notwendig, sich Gedanken zu machen, wie man dieses Problem des nicht unendlich ausgedehnten simulierten Raumes löst.

Es gibt viele Varianten von Randbedingungen, mit denen dieses Problem gelöst werden kann. Die gebräuchlichsten sind:

#### Periodische Randbedingungen

Bei periodischen Randbedingungen wird angenommen, dass man nur einen kleinen Teil des tatsächlich interessanten Gebietes simuliert und dass sich das simulierte Gebiet in alle Richtungen gleichmäßig periodisch fortsetzen lässt. Numerisch lässt sich dies realisieren, indem man rund um den simulierten Raum einige (in dem in dieser Arbeit verwendeten Code sind es drei) Lagen von sogenannten *Ghost-Zonen* legt, das Gitter also in jeder Richtung um einige Zellen größer macht als das tatsächliche Simulationsgebiet. Dann werden nach jedem Zeitschritt (bzw. manchmal auch im Verlauf eines Zeitschrittes wenn nötig, zum Beispiel während der zeitlichen Evolution der Maxwellgleichungen) die

Felder in den Bereichen nahe am Rand des Simulationsgebiets in die *Ghost-Zonen* des gegenüberliegenden Prozessors kopiert. Damit erreicht man, dass jede Zelle effektiv alle benötigten Nachbarn besitzt, auch wenn diese eigentlich schon nicht mehr im Gebiet des simulierten Raumes liegen, sondern zum Beispiel auf dem nächsten Prozessor bearbeitet werden. Dasselbe wird auch mit den Teilchen gemacht: wenn ein Teilchen über den Rand eines Simulationsgebietes hinaus fliegt, wird es dort vernichtet, aus der Liste gelöscht und im Gebiet des nächsten Prozessors neu erzeugt und in die Liste eingefügt.

Selbst wenn man für den äußeren Rand der kompletten Simulationsgebietes andere Randbedingungen verwendet, so muss man doch zumindest für alle "inneren Ränder" periodische Randbedingungen verwenden. Die *inneren Ränder* treten dadurch auf, dass der PiC-Code mit Hilfe von *MPI* parallelisiert wurde und das Simulationsgebiet somit in viele kleine Einheiten aufgeteilt ist, die jeweils von einem Prozessor bearbeitet werden (siehe dazu auch Abschnitt 3.4).

#### **Offene oder absorbierende Ränder**

Offene Ränder sollen (wie der Name schon sagt) einfach offen sein, also alles was den Rand berührt, soll sich einfach verlustfrei hinaus bewegen können (siehe z.B. Lindman 1975). Für die Teilchen ist dies relativ einfach zu realisieren, ein Teilchen wird genau wie bei den periodischen Randbedingungen einfach vernichtet, wenn es den Rand berührt, allerdings wird es nirgendwo anders erzeugt. Oftmals wird dies auch so umgesetzt, dass auf einer Seite Teilchen injiziert und auf der anderen absorbiert werden.

Für die Felder ist dies nicht so leicht umzusetzen. Dazu müssen alle Wellen, die an den Rand gelangen, absorbiert werden. Dies ist in einem PiC-Code allerdings sehr schwierig, da die Wellenmoden nicht bekannt sind und durch die Teilchenbewegungen unzählige unterschiedliche Moden angeregt werden. Es muss also eine Methode gefunden werden, um Wellen beliebiger Frequenz, Wellenzahl und Richtung zu absorbieren.

Zwei der am meisten verwendeten Methoden dazu sind folgende:

- **Liao Boundary Conditions** Bei den von Liao et al. (1984) vorgestellten Randbedingungen wird eine räumliche und zeitliche Extrapolation der **E**- und **B**-Felder in den Rand vorgenommen. Es wird also im Rand für die **E**- und **B**-Felder jeweils der Wert berechnet, den eine auslaufende Welle im nächsten Zeitschritt hätte, so findet sehr wenig Reflexion statt (Taflove u. Hagness 2005). Damit haben die

Liao Boundary Conditions den Vorteil, dass für die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder nur ein Rand der Breite von einer Zelle benötigt wird. Allerdings sind die Liao-Randbedingungen zur Verwendung mit Codes mit Yee-Lattice (wie in dem für diese Arbeit verfassten Code ACRONYM) nicht geeignet und wurden daher nicht verwendet.

- **Perfectly Matched Layers** Bei dieser Art von Randbedingung (Lazzi u. Gandhi 1997; Rickard u. Nikolova 2005), legt man sinngemäß eine absorbierende Schicht von mehreren Zellen Dicke um das gesamte simulierte Gebiet. Dazu führt man in diesem Bereich eine *Dielektrizitätskonstante*  $\epsilon$  sowie eine *magnetische Feldkonstante*  $\mu$  ein, die so gewählt werden müssen, dass möglich wenig Reflexion stattfindet, die Wellen aber trotzdem in den zur Verfügung stehenden *Ghost-Zonen* absorbiert werden. Diese Methode hat den Nachteil, dass für diese *Ghost-Zonen* zusätzlich zu den sechs Komponenten der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder auch noch entweder  $\epsilon$  und  $\mu$  oder die Komponenten der Felder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  gespeichert werden müssen.

#### Feste Randwerte

Eine sehr einfache Art der Randbedingung ist es, eine bestimmte Komponente am Rand auf einen festen Wert (meist Null) zu setzen. Dies könnten zum Beispiel die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder sein, die im Falle eines perfekt metallisch leitenden Randes einfach auf Null gesetzt würden. Damit würden alle auslaufenden Wellen in das Simulationsgebiet zurück reflektiert werden, was aber für astrophysikalische Simulationen nur selten eine Bedeutung hat. Trotzdem verwendet wurde dies allerdings in Keshet et al. (2009) und Sironi u. Spitkovsky (2009a, b) um eine leitende Wand zu simulieren, so dass die von einer Seite einströmenden Teilchen dort reflektiert werden und so mit den nachströmenden einen Schock ausbilden. Nachdem in der vorliegenden Arbeit aber keine Schocks betrachtet werden sollen, sind keine festen Randwerte zum Einsatz gekommen.

In allen in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden periodische Randbedingungen für Felder und Teilchen verwendet, es wurden aber auch verschiedene andere im Code implementiert.

### 3.3. Ein Zeitschritt des PiC-Codes

Im folgenden Abschnitt soll im Detail beschrieben werden, wie ein Zeitschritt des PiC-Codes aussieht, was die dafür notwendigen Schritte sind und wie dies im Code umgesetzt wurde.

#### 3.3.1. Bewegung der Teilchen

Mit den aus dem letzten Zeitschritt bekannten  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feldern könnte die Kraft, die diese auf ein beliebiges Teilchen ausüben, berechnet und das Teilchen durch die *Lorentzkraft*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial m\mathbf{u}}{\partial t} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \text{ mit } \mathbf{u} = \gamma \mathbf{v} \quad (3.1)$$

beschleunigt und dann bewegt werden. Doch um diesen Schritt in zweiter Ordnung durchzuführen und die Teilchenbewegung zusätzlich invariant unter Zeitumkehr zu machen, wird die Methode des *Boris-Push* (Boris 1970; Penn et al. 2003) angewandt. Dabei wird zunächst die Hälfte der Beschleunigung des Teilchens durch das  $\mathbf{E}$ -Feld durchgeführt, dann wird die Drehung des Geschwindigkeitsvektors durch das  $\mathbf{B}$ -Feld berücksichtigt und schließlich wird das Teilchen noch einmal durch die zweite Hälfte des elektrischen Feldes beschleunigt. Dies ist in Abbildung 3.3 verdeutlicht.

Mathematisch gesehen sind dazu die folgenden Operationen nötig: aus der bekannten Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{t-\frac{1}{2}}$  wird zuerst eine Hilfsgröße  $\mathbf{u}^-$  berechnet

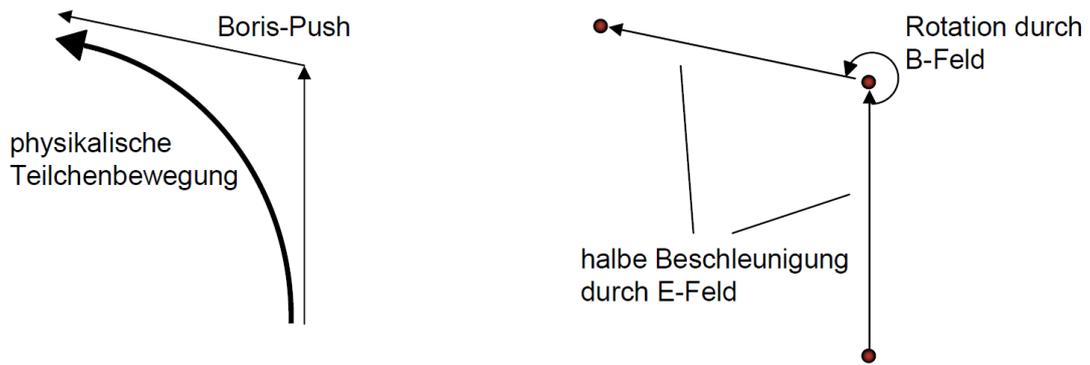
$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}_{t-\frac{1}{2}} + q \cdot \frac{\mathbf{E} \cdot \Delta t}{2m}, \quad (3.2)$$

die die erste Hälfte der Beschleunigung repräsentiert. Als nächstes wird die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}'$  berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u}^- + (\mathbf{u}^- \times \mathbf{s}) \text{ mit} \\ \mathbf{s} &= q \cdot \frac{\mathbf{B} \cdot \Delta t}{2mc\gamma(\mathbf{u}^-)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

die nun der Drehung des Geschwindigkeitsvektors entspricht. Die neue (Hilfs-) Geschwindigkeit danach ist

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \times \mathbf{t}) \text{ mit} \\ \mathbf{t} &= \frac{2\mathbf{s}}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$



**Abbildung 3.3.:** Graphische Veranschaulichung der Methode des *Boris-Push*: das Teilchen erfährt zunächst die halbe Beschleunigung durch das  $\mathbf{E}$ -Feld, anschließend die Drehung des Geschwindigkeitsvektors durch das  $\mathbf{B}$ -Feld und abschließend noch eine halbe Beschleunigung durch das  $\mathbf{E}$ -Feld. Auf diese Weise wird eine höhere Genauigkeit als mit einem Euler-Verfahren erreicht.

Damit kann nun die neue Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t + \frac{1}{2}$

$$\mathbf{u}_{t+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^+ + q \cdot \frac{\mathbf{E} \cdot \Delta t}{2m} \quad (3.5)$$

berechnet werden. Nachdem alle diese Geschwindigkeiten  $\mathbf{u}$  ja als  $\gamma \cdot \mathbf{v}$  definiert sind, muss nun noch auf die wahre Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  geschlossen und die Bewegung des Teilchens durchgeführt werden.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \frac{\mathbf{u}_{t+\frac{1}{2}}}{\gamma(\mathbf{u}_{t+\frac{1}{2}})} \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad (3.6)$$

$$\gamma(\mathbf{u}) = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} \quad (3.7)$$

Der *Boris-Push* hat den großen Vorteil, dass auf diese Art und Weise mit nur geringfügig höherem Aufwand eine wesentlich höhere Genauigkeit der Teilchenbewegung als durch ein Eulerverfahren erreicht wird. Des weiteren wird der Prozess damit symmetrisch unter Zeitumkehr und zu einem impliziten Verfahren, damit also stabil für beliebige Zeitschritte  $\Delta t$ .

### 3.3.2. Current-Assignment (Strom-Zuweisung)

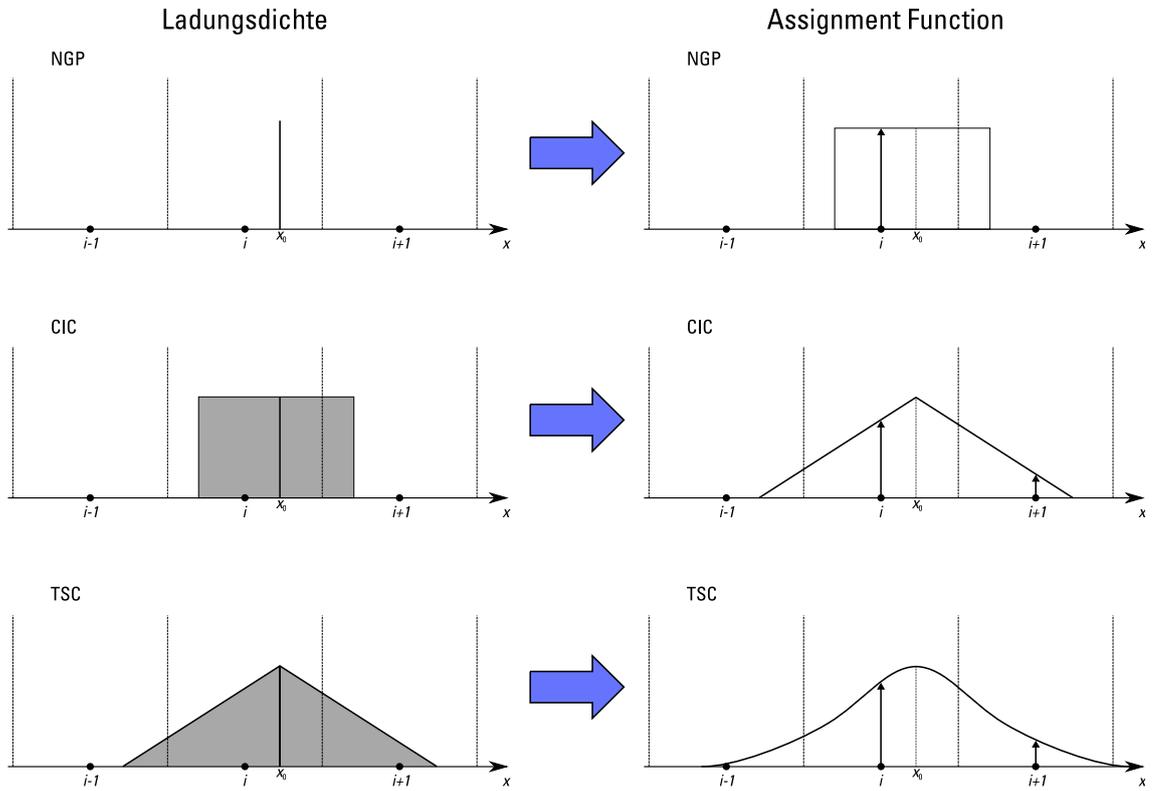
Um später die Maxwellgleichungen in der Zeit weiterzuentwickeln, werden die von den Teilchen erzeugten Ströme benötigt, diese müssen daher im Schritt des *Current Assignments* auf das Gitter geschrieben werden. Um das Verfahren verständlich zu machen, soll es zunächst anhand des einfachsten Schemas, des *Nearest-Grid-Point* (NGP) beschrieben werden.

#### Nearest-Grid-Point

In diesem einfachsten Schema (0. Ordnung) erzeugt jedes Teilchen einen Ladungseintrag am nächstliegenden Gitterpunkt. Dies führt allerdings dazu, dass sich die Ströme sprunghaft ändern, wenn ein Teilchen sich von einer Zelle in die nächste bewegt, die Teilchen dadurch Selbstkräfte erfahren und "actio = reactio" nicht mehr gewährleistet ist. In diesem Schema entspricht das Teilchen einer unendlich kleinen, punktförmigen Ladungswolke mit Gesamtladung  $e$ , die *Shape Function*  $S$  (Beschreibung der eindimensionalen Form der Ladungswolke im Ortsraum) ist also eine Deltafunktion an der Stelle des Teilchens und die *Assignment Function*  $W$  (Funktion der aufintegrierten Ladung, die jedem Gitterpunkt zugeteilt wird) ist damit eine Stufenfunktion, die nur in einer Entfernung von  $\frac{1}{2}\Delta x$  ober- und unterhalb (in jeder Dimension) des Teilchens einen Wert ungleich Null besitzt. Diese beiden Formen sind in der obersten Reihe von Abbildung 3.4 zu sehen.

#### Cloud-In-Cell

Die nächst bessere Methode ist das *Cloud-In-Cell* (CIC) Verfahren (mittlere Reihe in Abbildung 3.4), bei dem das Teilchen als würfelförmige Ladungswolke der Größe  $\Delta x^3$  mit einer gleichmäßigen Ladungsverteilung innerhalb dieses Bereichs betrachtet wird. Die *Assignment Function* nimmt damit (in einer Dimension) eine Dreiecksform mit der Breite  $2\Delta x$  an. Dies bedeutet, dass jedes Teilchen in jeder Dimension Beiträge zu zwei Gitterpunkten liefern kann, in drei Dimensionen also zu acht Zellen. Dieses Verfahren räumt das Problem der Selbstkräfte und der ungleichen Gegenkräfte aus, allerdings ändert sich die Kraftwirkung auf die Teilchen immer noch sprunghaft beim Übergang von einer Zelle zur nächsten.



**Abbildung 3.4.:** *Shape und Assignment Functions* für die drei Verfahren *NGP*, *CIC* und *TSC*. Man sieht, wie die Teilchen bei höherer Ordnung Beiträge zu immer mehr Zellen liefern, damit wird das Verfahren genauer, aber auch rechenintensiver. Im PiC-Code *ACRONYM* ist das *TSC* Schema implementiert. (Quelle: Urs Ganse)

#### **Triangular-Shaped-Cloud**

Um auch dieses Problem zu umgehen, kann ein Verfahren zweiter Ordnung gewählt werden, die sogenannte *Triangular-Shaped-Cloud* (TSC) Methode (siehe z.B. Eastwood (1991)). Wie in der untersten Reihe von Abbildung 3.4 zu sehen ist (und auch aus dem Namen zu erraten ist), ist die *Shape Function* des Teilchens hierbei eine stetige Funktion ohne Sprünge, die wie ein Dreieck der Breite  $2\Delta x$  aussieht, in zwei Dimensionen kann man sich die Form wie eine Pyramide vorstellen. Die *Assignment Function* wird dadurch zu einer stückweise quadratischen Funktion der Breite  $3\Delta x$ , die überall stetig und stetig differenzierbar ist. Dadurch wird nun auch die Kraftwirkung auf die Teilchen bei Überquerung einer Zellgrenze gleichmäßig und glatt. Allerdings hat das Verfahren den Nachteil, dass jedes Teilchen einen Stromeintrag in 27 Zellen bringt. Dies bedeutet natürlich einen erheblichen rechnerischen Mehraufwand gegenüber den Verfahren niedrigerer Ordnung.

#### **Verfahren höherer Ordnung**

Es ist möglich zu noch höheren Ordnungen zu gehen, indem man immer die *Assignment Function* zur *Shape Function* der nächst höheren Ordnung macht. Das Verfahren dritter Ordnung *Piecewise Quadratic Scheme* (PQS) (Eastwood 1986; Hockney u. Eastwood 1988) bringt pro Teilchen schon Beiträge zu 64 Zellen, also nochmals über den doppelten Rechenaufwand.

Wie haben uns daher für das TSC Verfahren entschieden, da es einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Aufwand darstellt. Nachdem der ganze Code zweiter Ordnung ist, hätte es an dieser Stelle auch keine Verbesserung gebracht, eine höhere Ordnung zu verwenden.

#### **Das Esirkepov-Verfahren**

Mit dem nun bekannten *TSC* Schema müssen die durch die Teilchenbewegungen verursachten Ströme berechnet werden. Dazu wurde von Villasenor u. Buneman (1992) ein Verfahren entwickelt, bei dem für jedes Teilchen überprüft werden muss, wie viele Zellwände es in seiner Bewegung durchdringt, dann muss diese in bis zu vier Teilbewegungen aufgeteilt werden und schließlich kann ein einziges Teilchen (schon mit dem CIC-

### 3. Numerik

Schema) Einträge in bis zu 36 Stromkomponenten bringen. Dies ist im dreidimensionalen Raum vom Rechenaufwand her deutlich zu hoch, außerdem ist dieses Verfahren nicht durchgehend zweiter Ordnung. Daher wurde für diese Arbeit das von Esirkepov (2001) beschriebene Verfahren implementiert, da es die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllt und damit eine hohe Genauigkeit bei vertretbarem Rechenaufwand liefert. Die Vorgehensweise wird im Folgenden beschrieben:

Nach kurzer Umformung der Maxwellgleichungen 2.1c und 2.1d durch jeweilige Anwendung des Divergenzoperators von links erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \text{ sowie} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Dies bedeutet, dass falls die Kontinuitätsgleichung 3.8 erfüllt ist, die Divergenz von  $\mathbf{B}$  gleich Null bleibt, wenn sie es zu Anfang ist. Die Kontinuitätsgleichung sieht in diskretisierter Form folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{(i,j,k),t+1} - \rho_{(i,j,k),t}}{\Delta t} + \frac{j_{(i+\frac{1}{2},j,k),t+\frac{1}{2}}^x - j_{(i-\frac{1}{2},j,k),t+\frac{1}{2}}^x}{\Delta x} \\ & + \frac{j_{(i,j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^y - j_{(i,j-\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^y}{\Delta y} + \frac{j_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^z - j_{(i,j,k-\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^z}{\Delta z} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hier lässt sich die Ladungsdichte  $\rho$  aus der *Shape Function*  $S$  der einzelnen Teilchen zusammensetzen:

$$\rho_{(i,j,k)} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \cdot S_{(i,j,k)}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}), \quad (3.11)$$

wobei  $\alpha$  ein einzelnes Makroteilchen repräsentiert,  $q_{\alpha}$  die Ladung desselben darstellt und  $S$  wie folgt definiert ist:

$$S_{(i,j,k)}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) = S(i - x_{\alpha}, j - y_{\alpha}, k - z_{\alpha}) \quad (3.12)$$

mit  $i$ ,  $j$  und  $k$  als Indizes der Gitterzellen in allen drei Dimensionen. Nachdem sich die Gesamtladung durch die Bewegung von Teilchen natürlich nicht ändern darf, muss für die *Shape Function*  $S$  gelten

$$\sum_{i,j,k} S_{(i,j,k)}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) = 1, \quad (3.13)$$

wenn man über alle Gitterpunkte  $i$ ,  $j$ ,  $k$  summiert.

### 3. Numerik

Mit Hilfe der Definition

$$\rho_{(i,j,k)} = q \cdot \frac{W_x(i,j,k)}{\Delta t} + q \cdot \frac{W_y(i,j,k)}{\Delta t} + q \cdot \frac{W_z(i,j,k)}{\Delta t}, \quad (3.14)$$

wobei  $q$  die Gesamtladung des Teilchens angibt und  $W_x$ ,  $W_y$  und  $W_z$  die Beiträge der einzelnen Dimensionen zur Änderung der Ladungsdichte  $\rho$  repräsentieren, lässt sich Gleichung 3.10 nun in drei voneinander unabhängige Gleichungen aufteilen:

$$\begin{aligned} j_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^x - j_{(i-\frac{1}{2},j,k)}^x &= -q \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot W_{(i,j,k)}^x, \\ j_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^y - j_{(i,j-\frac{1}{2},k)}^y &= -q \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot W_{(i,j,k)}^y \quad \text{und} \\ j_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^z - j_{(i,j,k-\frac{1}{2})}^z &= -q \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot W_{(i,j,k)}^z, \end{aligned} \quad (3.15)$$

dabei gilt für die Summe der Beiträge  $W$

$$W^x + W^y + W^z = S(x + dx, y + dy, z + dz) - S(x, y, z). \quad (3.16)$$

Hierzu nehmen wir an, dass die Bewegung eines Teilchens vom Punkt  $(x, y, z)$  nach  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  in drei eindimensionale Bewegungen aufgeteilt werden kann (für den zweidimensionalen Fall ist dies in Abbildung 3.5 dargestellt), diese können z.B. aussehen wie folgt:

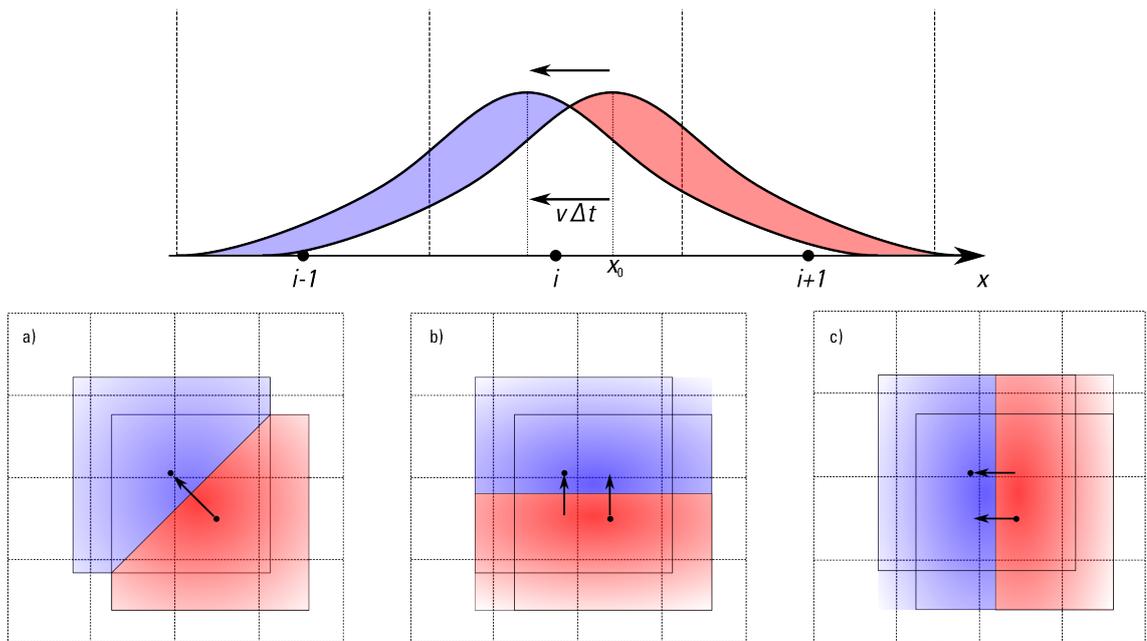
- von  $(x, y, z)$  nach  $(x + dx, y, z)$ ,
- von  $(x + dx, y, z)$  nach  $(x + dx, y + dy, z)$  und
- von  $(x + dx, y + dy, z)$  nach  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ .

Im allgemeinen Fall können also folgende Funktionen eine Rolle spielen:

$$\begin{aligned} &S(x, y, z), S(x + dx, y, z), S(x, y + dy, z), S(x, y, z + dz), \\ &S(x + dx, y + dy, z), S(x + dx, y, z + dz), S(x, y + dy, z + dz), \\ &S(x + dx, y + dy, z + dz) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Werte  $W^x$ ,  $W^y$  und  $W^z$  haben dann folgende Eigenschaften:

- Alle drei Werte  $W$  sind Linearkombinationen der acht Funktionen 3.17.
- Falls eine der Bewegungen  $dx$ ,  $dy$  oder  $dz$  Null ist, so ist auch die korrespondierende Komponente von  $W$  Null.



**Abbildung 3.5.:** Illustration zur Berechnung der Stromkomponenten mit Hilfe des Verfahrens von Esirkepov. Die Bewegung eines Teilchens kann in mehrere Verschiebungen entlang der einzelnen Koordinatenachsen aufgeteilt und die Stromverteilungen vor und nach der Bewegung voneinander subtrahiert werden. (Quelle: Urs Ganse)

Nun lassen sich die Komponenten von  $W$  folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
 W_x = & + \frac{1}{3}S(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{1}{3}S(x, y + dy, z + dz) \\
 & + \frac{1}{6}S(x + dx, y, z + dz) - \frac{1}{6}S(x, y, z + dz) \\
 & + \frac{1}{6}S(x + dx, y + dy, z) - \frac{1}{6}S(x, y + dy, z) \\
 & + \frac{1}{3}S(x + dx, y, z) - \frac{1}{3}S(x, y, z) \\
 W_y = & + \frac{1}{3}S(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{1}{3}S(x + dx, y, z + dz) \\
 & + \frac{1}{6}S(x, y + dy, z + dz) - \frac{1}{6}S(x, y, z + dz) \\
 & + \frac{1}{6}S(x + dx, y + dy, z) - \frac{1}{6}S(x + dx, y, z) \\
 & + \frac{1}{3}S(x, y + dy, z) - \frac{1}{3}S(x, y, z) \\
 W_z = & + \frac{1}{3}S(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{1}{3}S(x + dx, y + dy, z) \\
 & + \frac{1}{6}S(x, y + dy, z + dz) - \frac{1}{6}S(x, y + dy, z) \\
 & + \frac{1}{6}S(x + dx, y, z + dz) - \frac{1}{6}S(x + dx, y, z) \\
 & + \frac{1}{3}S(x, y, z + dz) - \frac{1}{3}S(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Damit können nun alle Stromkomponenten nach Gleichung 3.15 berechnet werden und stehen für den nächsten Schritt zur Verfügung. Dieses Verfahren hat den großen Vorteil, dass alle drei Komponenten der Stromdichte einzeln und unabhängig voneinander berechnet werden können. Somit ist es mit wesentlich weniger Rechenaufwand verbunden, als das von Villasenor u. Buneman (1992) vorgeschlagene und damit bei höherer Genauigkeit deutlich effizienter.

### 3.3.3. Evolution der Maxwell-Gleichungen

Im nächsten Schritt werden die Maxwellgleichungen 2.1c und 2.1d (bei bekannten Strömen) im Vakuum dazu verwendet, die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder in der Zeit zu entwickeln. Dazu müssen sie etwas umgeformt werden zu

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \cdot \nabla \times \mathbf{E} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = +c \cdot \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \tag{3.20}$$

### 3. Numerik

und anschließend diskretisiert in Ort und Zeit. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E_{(i+\frac{1}{2},j,k),t+1}^x &= E_{(i+\frac{1}{2},j,k),t}^x - 4\pi j_{(i+\frac{1}{2},j,k),t+\frac{1}{2}}^x \\
 &+ c \left( B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^z - B_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^z \right. \\
 &\quad \left. + B_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^y - B_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^y \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.21a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{(i,j+\frac{1}{2},k),t+1}^y &= E_{(i,j+\frac{1}{2},k),t}^y - 4\pi j_{(i,j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^y \\
 &+ c \left( B_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^x - B_{(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^x \right. \\
 &\quad \left. + B_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^z - B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^z \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.21b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t+1}^z &= E_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t}^z - 4\pi j_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^z \\
 &+ c \left( B_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^y - B_{(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^y \right. \\
 &\quad \left. + B_{(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^x - B_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^x \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.21c)
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 B_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^x &= B_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}),t-\frac{1}{2}}^x \\
 &+ c \left( E_{(i,j+1,k+\frac{1}{2}),t}^z - E_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t}^z \right. \\
 &\quad \left. + E_{(i,j+\frac{1}{2},k),t}^y - E_{(i,j+\frac{1}{2},k+1),t}^y \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.22a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}),t+\frac{1}{2}}^y &= B_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}),t-\frac{1}{2}}^y \\
 &+ c \left( E_{(i+\frac{1}{2},j,k+1),t}^x - E_{(i+\frac{1}{2},j,k),t}^x \right. \\
 &\quad \left. + E_{(i,j,k+\frac{1}{2}),t}^z - E_{(i+1,j,k+\frac{1}{2}),t}^z \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.22b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k),t+\frac{1}{2}}^z &= B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k),t-\frac{1}{2}}^z \\
 &+ c \left( E_{(i+1,j+\frac{1}{2},k),t}^y - E_{(i,j+\frac{1}{2},k),t}^y \right. \\
 &\quad \left. + E_{(i+\frac{1}{2},j,k),t}^x - E_{(i+\frac{1}{2},j+1,k),t}^x \right) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (3.22c)
 \end{aligned}$$

Wie man nun zusammen mit der Illustration des Yee-Lattices (Abbildung 3.2) direkt sehen kann, wird für die Berechnung einer  $\mathbf{E}$ -Feldkomponente zum Zeitpunkt  $t + 1$  dieselbe  $\mathbf{E}$ -Feldkomponente zum Zeitpunkt  $t$ , die  $\mathbf{j}$ -Komponente zum Zeitpunkt  $t + \frac{1}{2}$  (die sich beide am selben Ort wie die zu berechnende Größe befinden), sowie die  $\mathbf{B}$ -Feldkomponenten zum Zeitpunkt  $t + \frac{1}{2}$ , die im Gitter ringförmig um die zu berechnende Komponente angeordnet sind, benötigt. Dasselbe gilt für die Berechnung der

**B**-Feldkomponenten, auch hier sind die benötigten Größen räumlich und zeitlich um die zu berechnenden zentriert. Durch diese Anordnung wird die zeitliche Evolution der Maxwellgleichungen auf sehr einfache Weise zweiter Ordnung.

Dabei muss nun allerdings noch beachtet werden, dass (wie auch in Kapitel 3.3.5 beschrieben wird) die **E**- und **B**-Felder teilweise in ganzen Zeitschritten ( $\Delta t$ ) und teilweise in halben ( $\frac{1}{2}\Delta t$ ) entwickelt werden müssen, um für weitere Schritte die jeweils benötigten Größen zu den richtigen Zeitpunkten parat zu haben.

### 3.3.4. Force-Interpolation

Nachdem nun die neuen elektrischen und magnetischen Felder zum Zeitpunkt  $t + 1$  auf dem Gitter bekannt sind, müssen diese zu den Teilchenpositionen interpoliert werden, um anschließend die Teilchen bewegen zu können. Dazu muss (wie in Hockney u. Eastwood (1988) gezeigt wird) das exakt selbe Schema angewandt werden wie beim *Current Assignment*, da ansonsten Selbstkräfte auftreten können und zwei Teilchen nicht die selben, entgegengesetzten Kräfte aufeinander ausüben würden. Es wird hier also wieder das *TSC* Verfahren verwendet, die Felder an der Position eines beliebigen Teilchens werden mit der oben genannten Methode (siehe Kapitel 3.3.2 - TSC) aus den Feldern der 27 nächstliegenden Zellen interpoliert.

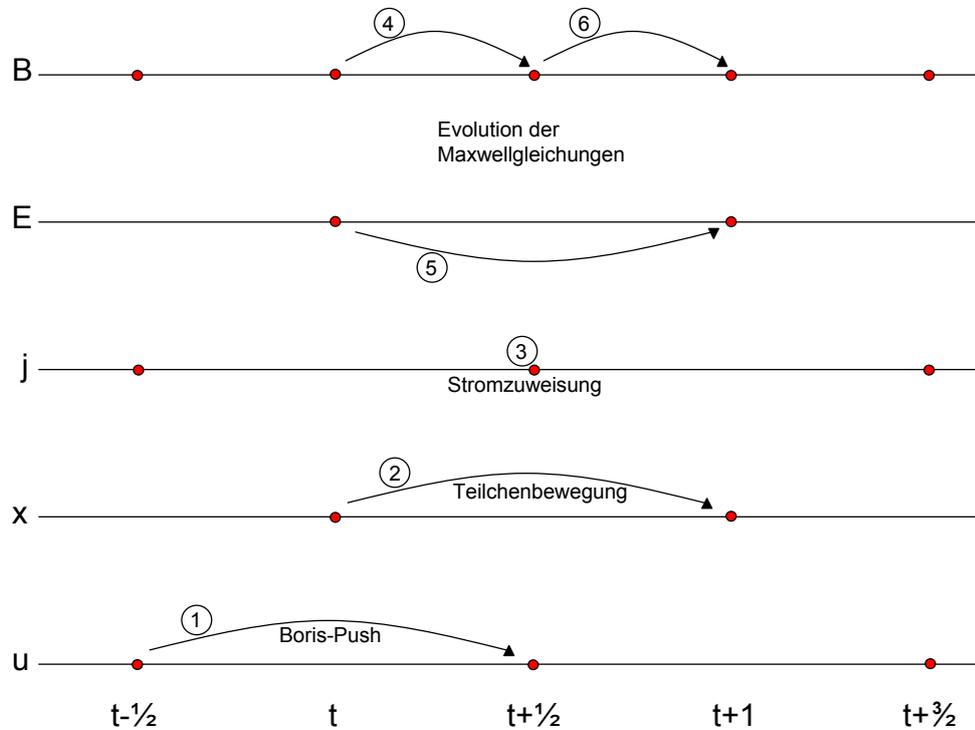
### 3.3.5. Zeitliche Abfolge

Im folgenden Kapitel soll der zeitliche Ablauf der Berechnungen nochmals kurz beleuchtet werden, um zu zeigen, dass das *leapfrog*-Verfahren überall angewandt wird und welche Vorteile dies bringt. Dies kann anhand von Abbildung 3.6 verfolgt werden.

Zum Zeitpunkt des Starts des Kreislaufs sind die Größen zu den folgenden Zeitpunkten bekannt:

- die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  der Teilchen und die Ströme  $\mathbf{j}$  zum Zeitpunkt  $t - \frac{1}{2}$
- der Ort  $\mathbf{x}$  der Teilchen sowie die **E**- und **B**-Felder zum Zeitpunkt  $t$

Nun wird im Schritt des *Boris-Pushes* die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{t-\frac{1}{2}}$  mit Hilfe von  $\mathbf{E}_t$  und  $\mathbf{B}_t$  um einen Zeitschritt avanciert zu  $\mathbf{u}_{t+\frac{1}{2}}$  und anschließend mit dieser neu berechneten Geschwindigkeit der neue Ort der Teilchen  $\mathbf{x}_{t+1}$  berechnet (siehe Abschnitt



**Abbildung 3.6.:** Darstellung der zeitlichen Abläufe eines kompletten Teitschrittes im PiC-Code. Zuerst wird mit Hilfe des Boris-Push die neue Geschwindigkeit berechnet (1), dann wird das Teilchen mit der neuen Geschwindigkeit bewegt (2). Anschließend wird den Zellen anhand des alten und neuen Ortes ein durch die Bewegung des Teilchens erzeugter Strom zugewiesen (3). Nun werden die Felder durch die Maxwellgleichungen zeitlich avanciert (4,5,6) und schließlich sind alle Größen zu den neuen Zeitpunkten bekannt.

3.3.1). Mit Hilfe des Verfahrens von Esirkepov (siehe Kapitel 3.3.2) kann als nächstes aus den bekannten Teilchenpositionen  $\mathbf{x}_t$  und  $\mathbf{x}_{t+1}$  der durch diese Bewegung verursachte Strom  $\mathbf{j}_{t+\frac{1}{2}}$  kalkuliert werden. Damit sind alle nötigen Informationen vorhanden, um die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder zeitlich zu avancieren. Prinzipiell können diese hervorragend in einem *leapfrog*-Verfahren neu berechnet werden, allerdings tritt dabei eine kleine Schwierigkeit auf: für die Kraftberechnung müssen sowohl das elektrische als auch das Magnetfeld zum selben Zeitpunkt vorliegen. Daher entwickelt man zuerst das Magnetfeld mit Hilfe von  $\mathbf{E}_t$  um einen halben Zeitschritt auf  $\mathbf{B}_{t+\frac{1}{2}}$ , anschließend wird das  $\mathbf{E}$ -Feld  $\mathbf{E}_{t+1}$  per *leapfrog*-Verfahren berechnet und zum Schluss wird noch einmal das  $\mathbf{B}$ -Feld mit Hilfe des neuen  $\mathbf{E}$ -Feldes zu  $\mathbf{B}_{t+1}$  avanciert. Nachdem bei der Berechnung von  $\mathbf{B}_{t+1}$  einmal das  $\mathbf{E}$ -Feld zu Beginn und einmal zu Ende des Zeitschrittes verwendet wurde, bringt dieses Verfahren die selbe Genauigkeit wie ein *leapfrog*-Verfahren, bei dem anschließend das  $\mathbf{B}$ -Feld von  $t + \frac{3}{2}$  und  $t + \frac{1}{2}$  zu  $t + 1$  interpoliert würde.

Am Ende des kompletten Zeitschrittes liegen die Größen an den folgenden Zeitpunkten vor

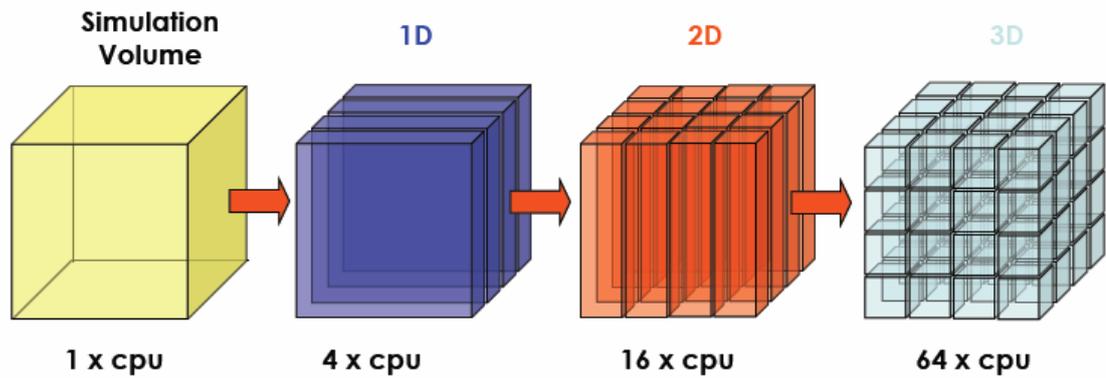
- die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  der Teilchen und die Ströme  $\mathbf{j}$  zum Zeitpunkt  $t + \frac{1}{2}$
- der Ort  $\mathbf{x}$  der Teilchen sowie die  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder zum Zeitpunkt  $t + 1$

und somit kann der nächste Zeitschritt beginnen.

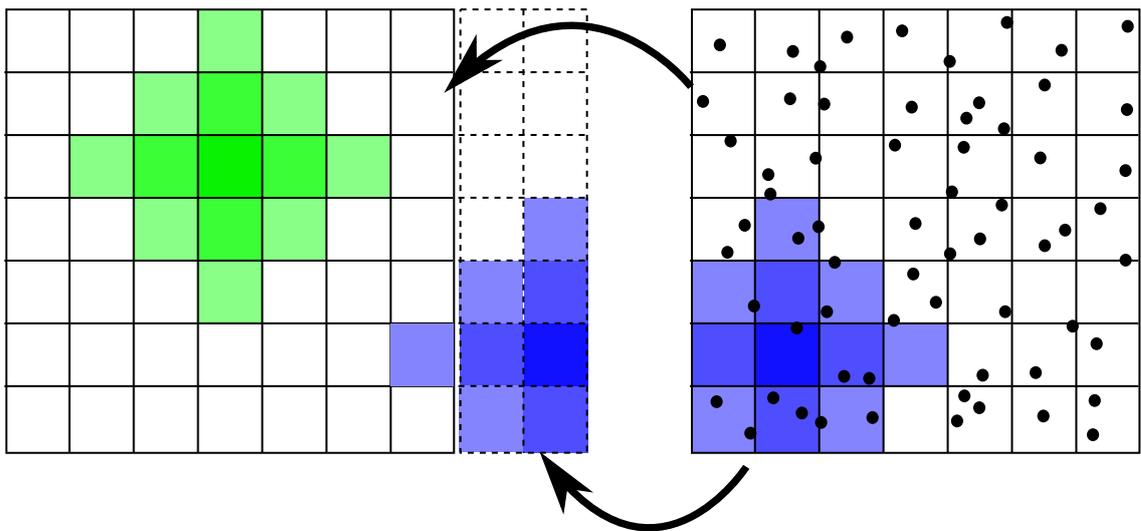
## 3.4. Parallelisierung des PiC-Codes

Der PiC-Code wurde im Rahmen der Diplomarbeit von Urs Ganse (Ganse 2009) per MPI parallelisiert, dabei auch in einigen Teilen umstrukturiert und erheblich beschleunigt (siehe z.B. Ganse 2009; Ganse et al. 2010). Er ist seitdem lauffähig auf einer Vielzahl von Architekturen und Clustern vom Arbeitsplatzrechner bis zum Supercomputer JUGENE in Jülich. Der PiC-Code wurde schließlich im Rahmen der Erweiterung für die Simulation von *Laser Wakefield Acceleration* von Patrick Kilian (Kilian 2010) weiterentwickelt und -beschleunigt.

Zur Parallelisierung wurde das *Message Passing Interface (MPI)* verwendet, da es für C++ eine Vielzahl an nützlichen Befehlen implementiert hat. Dazu wird das komplette Simulationsgebiet (wie in Abbildung 3.7 zu sehen ist) in eine Vielzahl kleinerer und möglichst würfelförmiger Teilbereiche aufgeteilt. Jeder Prozessor bekommt einen dieser



**Abbildung 3.7.:** Illustration zur Parallelisierung des PiC-Codes. Jeder Prozessor bekommt einen kleinen, möglichst würfelförmigen Bereich zum Bearbeiten zugewiesen.



**Abbildung 3.8.:** Schema zur Parallelisierung des PiC-Code: Nach jedem Zeitschritt werden die Felder am Rand des Simulationsgebietes eines Prozessors in die *Ghost-Zonen* des nebenan liegenden Simulationsgebietes kopiert. Teilchen, die das Gebiet verlassen, werden dort vernichtet und im nächsten neu erzeugt. (Quelle: Urs Ganse)

kleineren Bereiche zugewiesen, sowie eine Liste seiner direkten Nachbarn. Dann arbeitet jeder Prozessor seinen Bereich ab und tauscht an den folgenden Stellen Informationen mit seinen Nachbarn aus (siehe auch Abbildung 3.8):

- Nach der Bewegung der Teilchen müssen diejenigen entfernt werden, die sich aus dem Simulationsraum des jeweiligen Prozessors herausbewegt haben und müssen an einer anderen Stelle wieder erzeugt werden. Dazu wird zuerst die Anzahl der auf einen anderen Prozessor zu verschiebenden Teilchen festgestellt und eine Liste mit allen benötigten Eigenschaften dieser Teilchen erzeugt. Anschließend werden die betroffenen Teilchen entfernt, die Liste per *MPI* an den jeweiligen anderen Prozessor versandt und die Teilchen dort neu erzeugt.
- Während des Schrittes des *Current Assignments* erzeugen einzelne Teilchen Ströme in den *Ghost-Zonen*. Da diese bei periodischen Randbedingungen realen Zellen in anderen Bereichen entsprechen, müssen die dort erzeugten zu den in den entsprechenden realen Zellen generierten Strömen addiert und das Ergebnis anschließend in die *Ghost-Zonen* kopiert werden, um für die anschließende Berechnung der neuen **E**- und **B**-Felder überall die aktuellen und korrekten Ströme zur Verfügung zu haben. Dazu wird im Code auf jedem Prozessor jeweils ein Sende- und Empfangs-Array in der Größe der *Ghost-Zone* erstellt, das anschließend per *MPI* verschickt wird.
- Um die **E**- und **B**-Felder in der Zeit weiterzuentwickeln und anschließend an die Teilchenpositionen zu interpolieren, müssen die *Ghost-Zonen* mit den jeweiligen Feldern der Nachbarprozessoren gefüllt werden.

## 3.5. Numerischer Setup des Codes

Im folgenden Abschnitt soll erläutert werden, wie die Anfangsbedingungen numerisch umgesetzt wurden, sowie auf welche Art und Weise die physikalischen Anforderungen an die räumliche und zeitliche Auflösung erfüllt wurden.

### 3.5.1. Umsetzung der Anfangsbedingungen

Da in dieser Arbeit keine Schocks modelliert werden sollen, ist das Simulationsgebiet schon von Anfang an komplett mit zwei Teilchenpopulationen, die in unterschiedliche Richtungen strömen, gefüllt. Dies wird im Code wie folgt umgesetzt: als erstes wird eine durchschnittliche Anzahl an Teilchen pro Zelle (*ppc*) festgelegt und daraus dann die Gesamtzahl berechnet. In einer beispielhaften Simulation sind dies bei 20 *ppc* und  $128 \times 128 \times 512$  Zellen  $\approx 1.68 \cdot 10^8$  Teilchen. Diese Anzahl an Teilchen wird nun mit gleichmäßig zufällig verteilten Ortskomponenten generiert und auf dem jeweils zuständigen Prozessor erzeugt. Die Geschwindigkeiten sind in jeder Dimension normalverteilt um eine vorgegebene thermische Geschwindigkeit von z.B.  $\mathbf{u}_{th} = 0.1 \cdot c$  und werden anschließend mit der vorgegebenen Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_D$  in eine Richtung relativistisch geboostet (genaue Beschreibung und Berechnung in Kapitel 2.3.2).

### 3.5.2. Anforderungen an einen PiC-Code

Um überhaupt einen PiC-Code zur Simulation eines Plasmas verwenden zu können, müssen verschiedene Dinge beachtet werden. Zu einen muss es sich dabei um ein kinetisches, also kollisionsfreies Plasma handeln, zum anderen ist die Größe der Zellen bzw. des Zeitschrittes natürlich gewissen Grenzen unterworfen, die eingehalten werden müssen, um einerseits die numerische Stabilität des Codes zu garantieren als andererseits auch sicherzustellen, dass die relevanten physikalischen Effekte aufgelöst und damit im Code die reale Physik reproduziert wird. Die Anforderungen an diese Größen werden nun kurz dargestellt.

#### Räumliche Auflösung

In dem für diese Arbeit erstellten Code werden viele physikalische Größen wie die Temperatur, die Teilchendichte oder die Debye-Länge nicht explizit vorgegeben, sondern im Laufe der Initialisierung berechnet. Es wird allerdings beim Start eine Plasmafrequenz festgelegt, die für weitere Berechnungen verwendet wird; nachdem alle relevanten Größen mit dieser skalieren, können die Ergebnisse nachträglich auf andere Plasmafrequenzen umgerechnet werden. Mit Hilfe von Gleichung 2.25 wird nun die Elektronendichte

$$n_e = \frac{\omega_p^2 \cdot m_e}{4\pi e^2} \quad (3.23)$$

### 3. Numerik

und mit 2.27 die Temperatur des Plasmas

$$T = \frac{\mathbf{v}_{th}^2 \cdot m_e}{k_B} \quad (3.24)$$

berechnet, um schließlich nach Gleichung 2.16 die Debye-Länge

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n_e e^2}} \quad (3.25)$$

zu bestimmen. Nach Lapenta (2008) muss die Debye-Länge des Plasmas mit mindestens einer Zelle aufgelöst werden, da viele relevante Effekte sich in der Größenordnung von einigen Debye-Längen abspielen. Im PiC-Code ACROMYM ist daher die Größe einer Zelle

$$\Delta x = \lambda_D.$$

Sie liegt in den für diese Arbeit durchgeführten Simulationen in der Größenordnung von  $2 \cdot 10^4$  cm bis  $3 \cdot 10^4$  cm.

Nun kann als Nächstes mit Hilfe der Anzahl der Teilchen pro Zelle der Makrofaktor  $M$  berechnet werden, also die Anzahl der Elektronen, Positronen oder Protonen, die ein Makroteilchen im Code repräsentiert. Dies ist notwendig, da sich selbst innerhalb eines so kleinen Raumes wie einer Debyesphäre immer noch  $\approx 10^{18}$  bis  $10^{20}$  Teilchen aufhalten. Um also realistische Simulationsgrößen und Teilchenzahlen zu erhalten, wird immer eine große Gruppe von Teilchen durch ein Makroteilchen dargestellt.

$$M = \frac{2n_e}{ppc \cdot \Delta x^3} \quad (3.26)$$

Der Makrofaktor liegt in den für diese Arbeit durchgeführten Simulationen zwischen  $10^{11}$  und  $10^{13}$ .

#### **Zeitliche Auflösung**

Nachdem die räumliche Auflösung bestimmt ist, muss noch die maximale Länge eines Zeitschrittes  $\Delta t$  ermittelt werden. Dazu gibt es zwei Kriterien, einmal das Courant-Friedrichs-Lewy (*CFL*)- und zum zweiten das *Langmuir*-Kriterium.

- Das *CFL*-Kriterium (benannt nach den drei deutsch-amerikanischen Mathematikern Richard Courant, Kurt Friedrichs und Hans Lewy) sagt aus, dass sich in einer Simulation keine Information innerhalb eines Zeitschrittes weiter als  $\Delta x / \sqrt{DIM}$

### 3. Numerik

(mit DIM = Dimension der Zelle) durch das Gitter bewegen darf (Courant et al. 1928). Dies bedeutet in unserem Fall, dass eine sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegende Welle (oder ein fast mit  $c$  fliegendes Teilchen) sich nur  $\approx 0.577 \cdot \Delta x$  bewegen darf. Dementsprechend muss die Größe eines Zeitschrittes  $\Delta t$  gewählt werden, so dass

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{3} \cdot c}. \quad (3.27)$$

In einer von Patrick Kilian durchgeführten Untersuchung hat sich herausgestellt, dass es genügt, einen Faktor  $(1 + 10^{-7})$  unterhalb des maximal erlaubten Zeitschrittes zu bleiben, um die Simulationen für genügend lange Zeiten stabil laufen lassen zu können.

- Das Langmuir-Kriterium sagt aus, dass die halbe Plasmafrequenz aufgelöst werden muss, also ein Zeitschritt kürzer sein muss als die inverse halbe Plasmafrequenz (dabei ist allerdings noch zu beachten, dass diese eine relativistische Transformation erfährt). Damit muss gelten

$$\Delta t \leq \frac{2}{\gamma \cdot \omega_p}. \quad (3.28)$$

Dieses Kriterium wird etwa ab einer Driftgeschwindigkeit von ca.  $0.995 \cdot c$  (dies entspricht einem Lorentzfaktor von  $\gamma \approx 10$ ) relevant und vergleichbar mit der Einschränkung durch das CFL-Kriterium.

Nachdem immer beide Kriterien erfüllt sein müssen, werden im Code beide berechnet und jeweils das restriktivere angewandt. Die daraus resultierenden Zeitschritte liegen in den durchgeführten Simulationen im Bereich von  $0.03$  bis  $0.06 \cdot \omega_p^{-1}$ .

## 3.6. Auswertungswerkzeuge

Um die großen Datenmengen in angemessener Zeit analysieren zu können, bedarf es ausgeklügelter Auswertungswerkzeuge, von denen einige selbst entworfen wurden, andere wurden vollständig übernommen oder abgewandelt und für unsere Zwecke angepasst. Diejenigen, die dazu dienen, die später im Kapitel 5 gezeigten Bilder und Diagramme zu erstellen, sollen hier kurz vorgestellt und erklärt werden.

### 3.6.1. Energieverläufe

Um den zeitlichen Verlauf der Energien der einzelnen im Plasma vorhandenen Komponenten (wie  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder oder einzelne Komponenten davon, sowie die Teilchen) darzustellen wurde das Programm `gnuplot` (GNU PLOT 2007) verwendet und einige Skripte dazu geschrieben, um automatisiert die jeweils gleichen Informationen aus vielen Simulationsergebnissen zu extrahieren. Ein Beispiel für ein solches Diagramm ist in Abbildung 5.3 zu sehen. Diese Verläufe von z.B. der transversalen magnetischen Energie sind ein wichtiger Indikator dafür, wann die Instabilität einsetzt, ihren Höhepunkt erreicht oder in eine zweite Phase übergeht. Außerdem lassen sich hier sehr gut die Energieumschichtungen von den Teilchen in die verschiedenen Feldkomponenten beobachten und damit Erkenntnisse über den inneren Mechanismus der Instabilität und Teilchenbeschleunigung gewinnen.

### 3.6.2. Auswertung der Dichten und elektromagnetischen Felder

Wie später in Kapitel 5 näher erläutert wird, ergeben sich bei gegeneinander strömenden Plasmen meist Flussschläuche, also Regionen in denen ein durchweg positiver Strom zu finden ist und umgekehrt. Diese werden von ringförmigen Magnetfeldern zusammengehalten und von den strömenden Teilchen stabilisiert. Um die Natur dieser Flussschläuche zu ergründen, wurden häufig zweidimensionale Schnitte der Magnetfelder oder Teilchendichten senkrecht zur Strömungsrichtung herausgearbeitet. Dazu wurden die jeweils relevanten Daten mit Hilfe von selbst verfassten *python*-Skripten extrahiert und aus diesen Daten dann mit *gnuplot* die jeweilige Größe mit Hilfe einer Farbskala in zwei Dimensionen dargestellt. Ein beispielhaftes Diagramm ist in Abbildung 5.9 zu sehen.

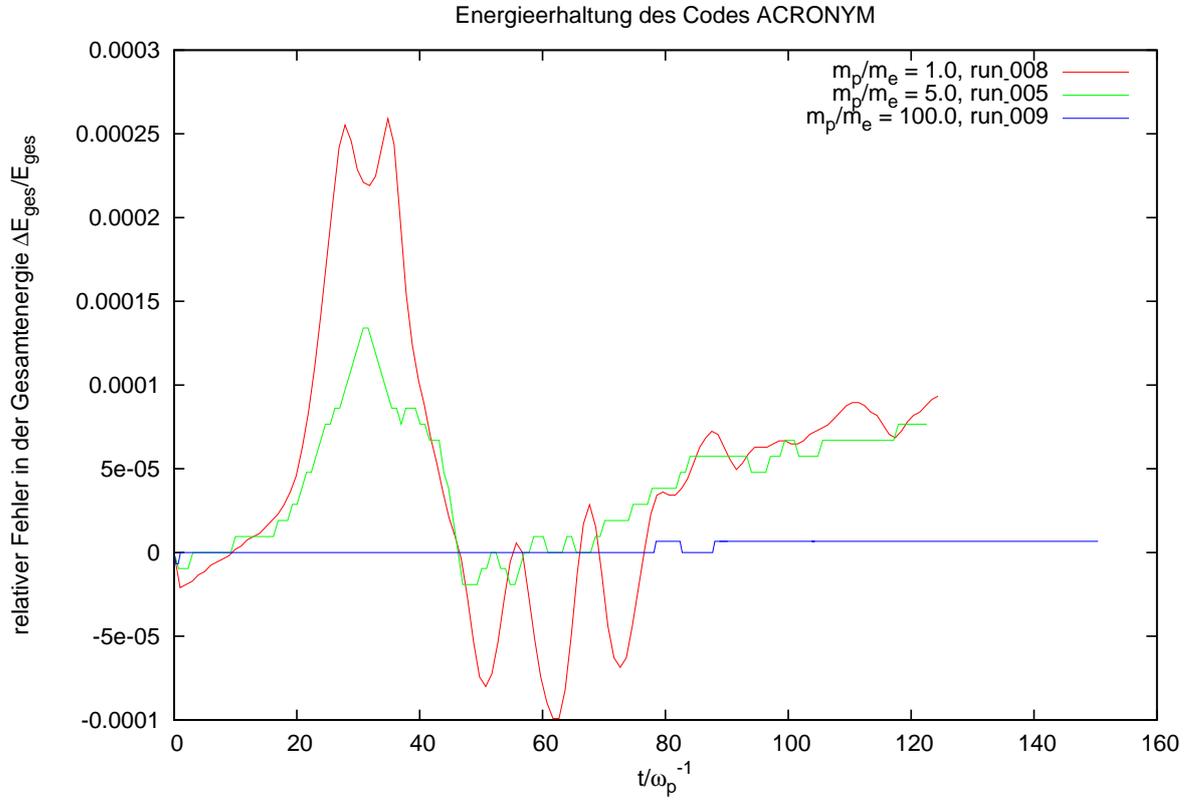
### 3.6.3. Ein- und zweidimensionale Histogramme

Des weiteren wurden ein- und zweidimensionale Histogramme erstellt, um die Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten oder -energien zu verschiedenen Zeitpunkten zu illustrieren (siehe z.B. Abbildung 5.16). Damit können Erkenntnisse über die Art und den Mechanismus der Teilchenbeschleunigung gewonnen werden. Zur Datenextraktion wurde hier ein selbst verfasstes Programm basierend auf der *GNU Scientific Library* (GSL 2008) verwendet und die so gewonnenen Daten wurden wieder mit *gnuplot* dargestellt.

### 3.7. Test des Codes ACRONYM

Selbstverständlich wurde der Code ACRONYM nach Fertigstellung sehr intensiv getestet. Dazu wurde mit einfachen Testfällen begonnen, wie z.B. der freien Bewegung eines einzelnen geladenen Teilchens im Vakuum. Dabei muss der PiC-Code die durch das Teilchen generierten elektrischen und magnetischen Felder korrekt erzeugen und das Teilchen muss sich trotzdem, ohne beschleunigt oder abgelenkt zu werden, geradlinig bewegen. Dies wurde für Bewegungen entlang aller drei Gitterachsen, sowie entlang der Diagonalen und schließlich in verschiedenen, beliebigen Winkeln durchgeführt. Des Weiteren wurde die Energieerhaltung während allen laufenden Simulationen überprüft (siehe Abbildung 3.9), dabei wurde festgestellt, dass selbst im schlechtesten Fall die gesamte im Simulationsgebiet enthaltene Energie mit einem Fehler von unter 0.03% erhalten ist, in den allermeisten Fällen sogar auf unter 0.01%. Außerdem wurde darauf geachtet, dass die Divergenz des Magnetfeldes  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  klein bleibt. Durch das Yee-Lattice und das Verfahren zweiter Ordnung wurde schließlich erreicht, dass immer und für alle Simulationen  $|\nabla \cdot \mathbf{B}/B| < 10^{-12}/\lambda_D$  gilt.

### 3. Numerik



**Abbildung 3.9.:** Entwicklung des Fehlers der Gesamtenergie für verschiedene Massenverhältnisse in Abhängigkeit von der Zeit. Der größte Fehler entsteht in der Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1$ , dieser ist aber im Maximum immer noch kleiner als 0.03%. Die Stufen im Energiegraph der Simulation *run\_009* mit  $m_p/m_e = 100$  kommen daher, dass durch die höheren Protonenmassen die Gesamtenergie deutlich höher ist, der absolute Fehler aber gleich bleibt. Damit stößt der relative Fehler an der Grenzen der Fließpunkt-Genauigkeit.

## 4. Setup der wichtigsten Simulationen

In verschiedenen PiC-Simulationen der letzten Jahre wurde gezeigt, dass der Großteil der Teilchenbeschleunigung im Jet vor sich geht (Nishikawa et al. 2003, 2005, 2006, 2008, 2009; Chang et al. 2008; Spitkovsky 2008a; Dieckmann et al. 2008; Frederiksen et al. 2004; Hededal et al. 2004; Hededal u. Nishikawa 2005; Martins et al. 2009; Ramirez-Ruiz et al. 2007; Silva et al. 2003) und zu einem erheblichen Teil durch Plasmainstabilitäten wie die Weibel- (Weibel 1959; Califano et al. 1997) oder Zweistrom-Instabilität (Buneman 1958a; Fried 1959) hervorgerufen wird. Die Weibel-Instabilität wird durch eine Temperatur-Anisotropie hervorgerufen, die Zweistrom-Instabilität entsteht durch eine Geschwindigkeits-Anisotropie, es kann daher auch vorkommen, dass beide Instabilitäten gleichzeitig auftreten. Außerdem wird sowohl die Weibel- als auch die Zweistrom-Instabilität gelegentlich als Filamentierungs-Instabilität bezeichnet (Hao et al. 2009a, b), generell werden diese Bezeichnungen in der Literatur oft nicht sehr präzise verwendet, da auch bei Zweistrom-Instabilitäten Stromfilamente auftreten oder die Weibel-Instabilität in gegenströmenden Plasmen auftreten kann. Beide Instabilitäten kreieren Flussschläuche mit umgebenden kreisförmigen Magnetfeldern und sind somit eine plausible Quelle für hochenergetische Teilchen.

Teilchenbeschleunigung kann auch in Zusammenhang mit Schocks auftreten, z.B. durch Fermibesleunigung erster Ordnung (Fermi 1949), dies konnte erst vor kurzem auch mit Hilfe von PiC-Simulationen reproduziert werden (Spitkovsky 2008b; Riquelme u. Spitkovsky 2010).

In dieser Arbeit wurde Teilchenbeschleunigung in gegenströmenden Plasmen (dies tritt z.B. auf, wenn ein Jet in das ihn umgebende Medium eindringt) betrachtet, dabei wurden Schocks außer acht gelassen, statt dessen wurde die viel größere Beschleunigungsregion hinter dem Schock betrachtet, in dem die beiden Plasmen ineinander strömen. Im Speziellen wurde der Einfluss des in PiC-Simulationen meist im Bereich von 1 bis 64 gewählten Parameters des fundamentalen Massenverhältnisses  $m_p/m_e$  auf die Beschleu-

#### 4. Setup der wichtigsten Simulationen

nigung der Teilchen und die damit verbundene Veränderung der Verteilungsfunktion und der Temperatur sowie der Beschleunigungseffizienz untersucht. Dazu wurden mehrere Simulationen mit Massenverhältnissen zwischen 1.0 und 200.0 und Teilchenzahlen zwischen 20 und 40 *ppc* sowie unterschiedlichen Kompositionen durchgeführt.

Dazu wurden jeweils zwei Plasma-Populationen erstellt (im Code Jet und Background genannt, obwohl beide gleichgestellt sind und diese Bezeichnungen somit austauschbar sind), die beide das komplette Simulationsgebiet ausfüllen und damit von Anfang an komplett durchmischt sind. Alle weiteren Parameter wie Teilchenzahl pro Zelle (*ppc*), Drift- und thermische Geschwindigkeit ( $\mathbf{u}_D$  und  $\mathbf{u}_{th}$ ), das Massenverhältnis  $m_p/m_e$ , die Anzahl der Zellen in jede Dimension oder die Anzahl der Zeitschritte werden beim Start einer Simulation über ein cat-file eingelesen. Dies sieht exemplarisch aus wie folgt (entspricht der Simulation *run\_009*):

```
ganzzahl = 123456789          // seed for random generator

gesamt_zeitschritte = 4000 // number of timesteps
output_zeitschritte = 10   // number of timesteps for output
part_output_zeitschritte = 100 // number of timesteps for
    particle output

nx0 = 128                    // number of cells in x-direction
nx1 = 128                    // number of cells in y-direction
nx2 = 512                    // number of cells in z-direction

mpzume = 100.0              // mass-ratio
rescale_dt = 1.000001      // criteria for stability
rescale_dx = 1.0

initial = 1                  // 0=temperature, 1=velocity known
widthbg = 0.1                // thermal velocity [c]
widthj = 0.1
vjetx = 0.
vjety = 0.
vjetz = 0.995               // drift velocity [c]
```

#### 4. Setup der wichtigsten Simulationen

```
vbgx = 0.
vbgy = 0.
vbgz = -0.995

electronnumberbg = 6 // electrons per cell (background)
electronnumberj = 4 // electrons per cell (jet)
protonnumberbg = 6 // protons per cell (background)
protonnumberj = 2 // protons per cell (jet)
positronnumberbg = 0 // positrons per cell (background)
positronnumberj = 2 // positrons per cell (jet)

plasmafreq = 1.e5 // standard value

xperiodic = 1 // periodic boundary conditions
yperiodic = 1
zperiodic = 1
```

Aus den in dieser Datei festgehaltenen Angaben werden alle anderen relevanten Größen, wie in Kapitel 3.5.2 beschreiben, berechnet. In den meisten durchgeführten Simulationen wurden zu jedem zehnten Zeitschritt die Daten aller Felder (also Ladungs- und Stromdichten,  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder) und zu jedem 50. oder 100. Zeitschritt die Eigenschaften aller Teilchen herausgeschrieben und gespeichert. Für die oben genannte Simulation entstehen dadurch zu jedem Output-Zeitpunkt für die 10 Felder ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\rho$  und  $\mathbf{j}$ ), die in jedem Gitterpunkt als *double*-Größen mit je 8 Byte gespeichert sind, folgende Datenmengen:

$$10 \times 128 \times 128 \times 512 \times 8 \text{ Byte} = 640 \text{ MB.}$$

Der Output aller Teilchen (jedes Teilchen besitzt neun Eigenschaften:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $m$ ,  $q$  sowie eine fortlaufende Nummer zur Identifizierung) ergibt bei 20 Teilchen pro Zelle

$$20 \times 128 \times 128 \times 512 \times 9 \times 8 \text{ Byte} = 11.25 \text{ GB}$$

zu jedem Zeitschritt, an dem die Teilchendaten geschrieben werden. Die tatsächlich entstehenden Datenmengen weichen leicht von den eben genannten Abschätzungen ab, da die Werte der Felder in den Ghost-Zonen mit gespeichert werden und durch die

#### 4. Setup der wichtigsten Simulationen

$m_p/m_e$	Simulationsnummer	Datenmenge
1.0	run_008	416 GB
5.0	run_005	280 GB
5.0	run_014	547 GB
20.0	run_006	322 GB
42.8	run_007	154 GB
100.0	run_009	703 GB
100.0	run_012	599 GB
100.0	run_016	5013 GB
200.0	run_018	1055 GB

Tabelle 4.1.: Diese Datenmengen wurden bei den durchgeführten Simulationen jeweils gespeichert.

parallelisierte Ausführung auf bis zu 512 Prozessoren diese einen großen Teil ausmachen. Die angefallenen Datenmengen aller Simulationen sind in Tabelle 4.1 zu sehen.

In Tabelle 4.2 sind die relevanten Input-Parameter für die durchgeführten Simulationen zu sehen. Die im cat-file aufgeführten Parameter, die in der Tabelle nicht auftauchen, haben für alle Simulationen folgende Werte:

- die thermische Geschwindigkeit beträgt bei allen durchgeführten Simulationen  $\mathbf{u}_{th} = 0.1c$ .
- die Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_D$  wurde immer zu  $0.995c$  bzw  $-0.995c$  in  $z$ -Richtung gewählt.

In Tabelle 4.3 sind die physikalischen Größen der jeweiligen Simulationen aufgeführt. Die wichtigsten sind die Dauer eines Zeitschrittes in Einheiten der inversen Plasmafrequenz, die Größe einer Zelle (die einer Debye-Länge entspricht) sowie die Anzahl der aufgelösten *skin depths* der Ionen, die die Größenskala vieler Plasmaphänomene beschreibt.

#### 4. Setup der wichtigsten Simulationen

$m_p/m_e$	Simulationsnummer	Anzahl der Zellen	Teilchen pro Zelle (background)	Teilchen pro Zelle (jet)
1.0	run_008	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
5.0	run_005	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
5.0	run_014	$128 \times 128 \times 512$	$12e^-, 12p^+$	$8e^-, 4e^+, 4p^+$
20.0	run_006	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
42.8	run_007	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
100.0	run_009	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
100.0	run_012	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 4p^+$
100.0	run_016	$256 \times 256 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$
200.0	run_018	$128 \times 128 \times 512$	$6e^-, 6p^+$	$4e^-, 2e^+, 2p^+$

Tabelle 4.2.: Die wichtigsten numerischen Input-Parameter der durchgeführten Simulationen.

$m_p/m_e$	Simulationsnummer	$\Delta t[\omega_p^{-1}]$	$\Delta x[\text{cm}]$	Anzahl ion skin depths
1.0	run_008	0.0498	23225	$120 \times 120 \times 480$
5.0	run_005	0.0385	23107	$57 \times 57 \times 228$
5.0	run_014	0.0445	23107	$13 \times 13 \times 52$
20.0	run_006	0.0360	21614	$28 \times 28 \times 112$
42.8	run_007	0.0355	21338	$20 \times 20 \times 80$
100.0	run_009	0.0408	21198	$13 \times 13 \times 52$
100.0	run_012	0.0408	21198	$13 \times 13 \times 52$
100.0	run_016	0.0574	29831	$36 \times 36 \times 72$
200.0	run_018	0.0574	29831	$9 \times 9 \times 36$

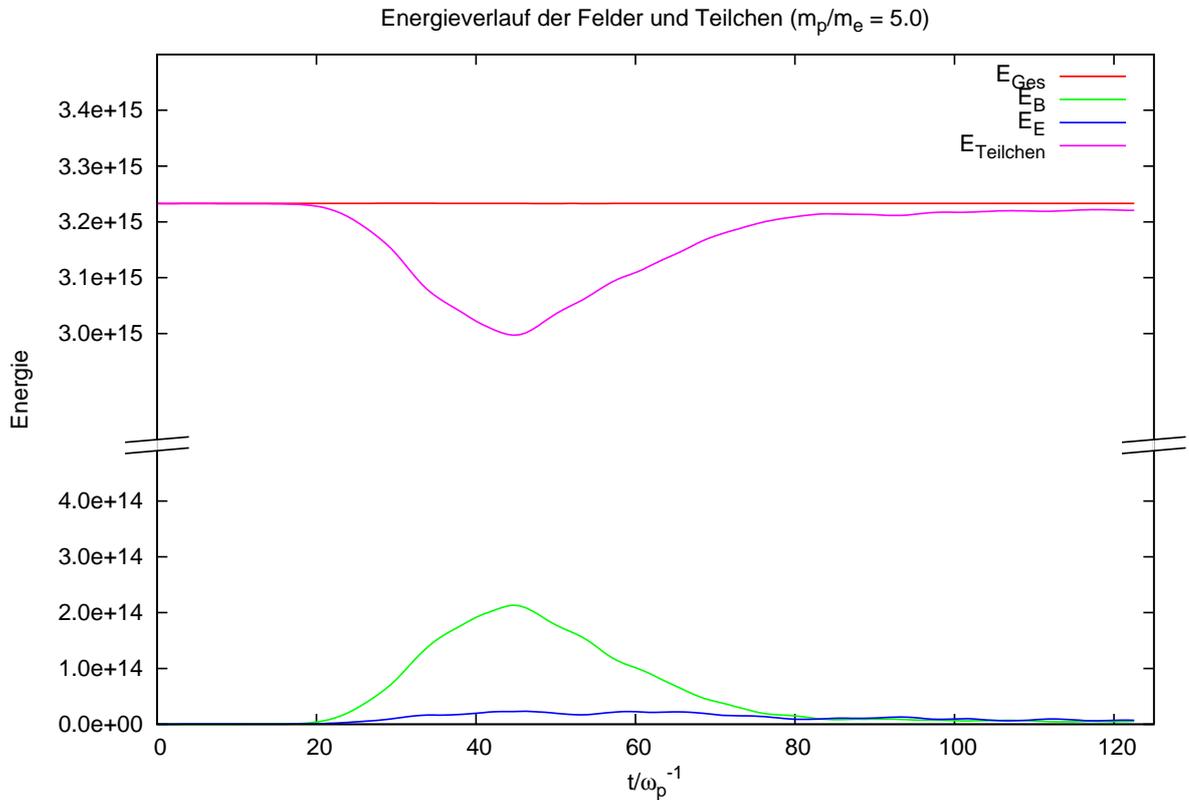
Tabelle 4.3.: Die wichtigsten physikalischen Daten der durchgeführten Simulationen.

## 5. Ergebnisse

Die Ergebnisse der durchgeführten Simulationen lassen sich grob in drei Bereiche einteilen. In Kapitel 5.1 wird auf die Energien, die in den einzelnen Feldern und Teilchenkomponenten stecken, eingegangen und wie sich im Allgemeinen die Energien in einem Plasma während einer Instabilität entwickeln und verändern. Im nächsten Abschnitt 5.2 werden die Einsichten in das generelle Verhalten der Magnetfelder während einer Zweistrominstabilität beschrieben. Es wird erläutert, wie Flussschläuche entstehen, stabilisiert und verstärkt werden und wie starke Magnetfelder generiert werden. In Abschnitt 5.3 wird dann beschrieben, welche Auswirkungen diese Flussschläuche und Magnetfelder auf die Teilchen haben. Dabei wird genau auf die Energieverteilung zwischen den einzelnen Teilchenspezies und der unterschiedlichen Beschleunigung der verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten abhängig vom jeweils verwendeten Massenverhältnis eingegangen. Des weiteren wird eine Extrapolation zum realen Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1836$  durchgeführt und auf die Veränderung von einer thermischen zu einer nicht-thermischen Verteilung, inklusive Berechnung des Anteils an hochenergetischen Teilchen, eingegangen.

## 5.1. Energieverteilung

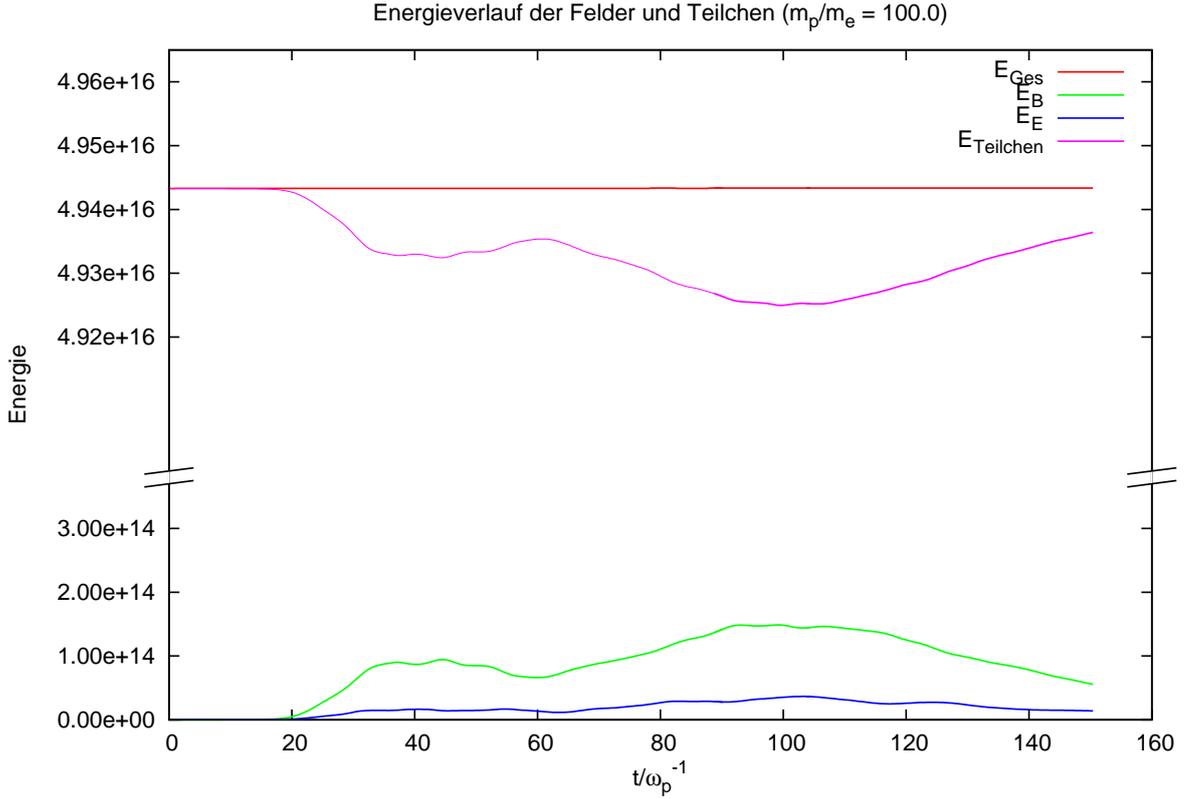
In diesem Kapitel wird es um die Verteilung der Energien auf die einzelnen Feld- und Teilchenkomponenten gehen und wie sich diese Zusammensetzung im Verlauf der Simulation in Abhängigkeit des gewählten Massenverhältnisses  $m_p/m_e$  verändert.



**Abbildung 5.1.:** Entwicklung der Energien (Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis  $m_p/m_e = 5.0$ ) der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder sowie der Teilchen im Laufe der Instabilität. Anfangs geben die Teilchen ihre Energie an die Felder ab, im späteren Verlauf wird die Energie zu einem großen Teil wieder zurück auf die Teilchen transferiert.

Als erstes soll gezeigt werden, dass sich die Instabilität aus der Energie der Teilchen speist, diese dann aber an die Teilchen zurückgibt. Wie in den Abbildungen 5.1 und 5.2 für die Massenverhältnisse  $m_p/m_e = 5.0$  bzw.  $100.0$  zu sehen ist, steckt am Anfang nur die kinetische Energie der Teilchen im System, da alle  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder mit Null initialisiert werden, sich aber sehr schnell auf die physikalisch korrekten Werte hin ent-

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.2.:** Entwicklung der Energien (Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis  $m_p/m_e = 100.0$ ) der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder sowie der Teilchen im Laufe der Instabilität. Anfangs geben die Teilchen ihre Energie an die Felder ab, im späteren Verlauf wird die Energie zu einem großen Teil wieder zurück auf die Teilchen transferiert.

wickeln. Als nächstes ist in beiden Plots deutlich zu sehen, dass das elektrische Feld etwas zunimmt, noch stärker entwickelt sich aber das Magnetfeld während des Aufbaus der Instabilität, es nimmt fast die gesamte von den Teilchen abgegebene Energie auf.

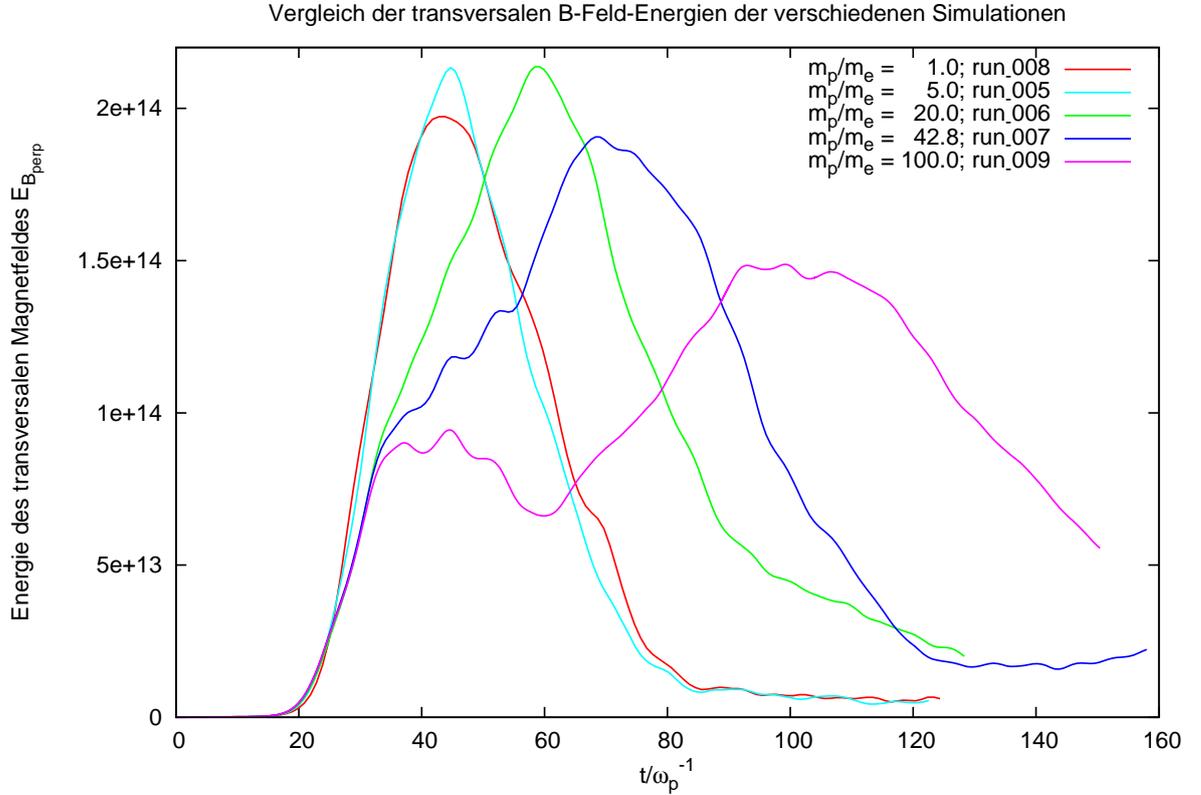
Eine wichtige Größe, wenn es um die Betrachtung einer Zweistrom-Instabilität in einem Plasma geht, ist die Stärke des transversalen Magnetfeldes, bzw. die Energie, die in diesem steckt

$$E_{B_\perp} = \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{B}_x^2 + \mathbf{B}_y^2}{8\pi}, \quad (5.1)$$

über den gesamten Raum aufsummiert. Die während der Instabilität entstehenden und verschmelzenden Flusschläuche (siehe Kapitel 5.2 und die Abbildungen 5.8 bis 5.12) werden von ringförmigen Magnetfeldern zusammengehalten, stabilisiert und verstärkt.

## 5. Ergebnisse

Daher ist  $E_{B_\perp}$  ein hervorragender Indikator für das Auftreten und die Stärke einer Instabilität. In Abbildung 5.3 ist der Verlauf der transversalen  $\mathbf{B}$ -Feld-Energie für die Simulationen *run\_005* bis *run\_009* zu sehen.



**Abbildung 5.3.:** Entwicklung der transversalen  $\mathbf{B}$ -Feld-Energien der Simulationen *run\_005* bis *run\_009*. Man sieht deutlich die Instabilität ( $E_{B_\perp}$  ist ein hervorragender Indikator für das Auftreten der Instabilität) im Bereich zwischen  $t = 30\omega_{pe}^{-1}$  und (je nach Massenverhältnis) 70 bis  $120\omega_{pe}^{-1}$  und das anschließende Abfallen, während der Thermalisierung des Plasmas. Des weiteren ist ab einem Massenverhältnis von  $> 20$  die Trennung der Instabilität in zwei Phasen zu erkennen.

Sehr deutlich ist die Instabilität am Anstieg des transversalen Magnetfeldes zu erkennen, außerdem sieht man das anschließende Abfallen aufgrund der Thermalisierung des Plasmas. Des weiteren ist für Massenverhältnisse  $m_p/m_e > 20$  die Trennung der Instabilität in zwei Phasen zu erkennen, wobei die Trennung für  $m_p/m_e = 42.8$  in Simulation *run\_007* noch nicht voll ausgeprägt, aber erkennbar ist. Um das Verhalten bei großen

## 5. Ergebnisse

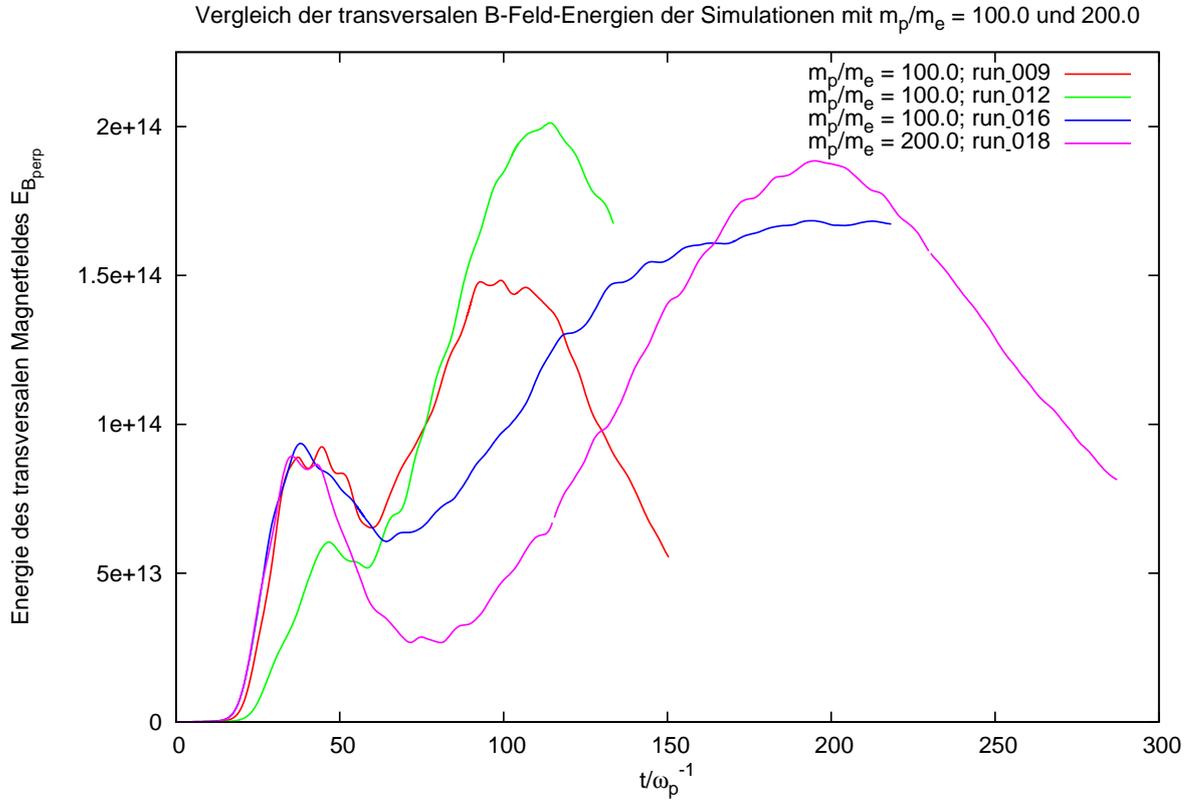
Massenverhältnissen genauer unter die Lupe zu nehmen, wurden für  $m_p/m_e = 100.0$  und  $200.0$  noch weitere Simulationen durchgeführt, deren Magnetfeld-Energien sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

Dabei haben *run\_009* und *run\_016* die selbe Teilchenkomposition ( $6e^-$ ,  $6p^+$  in die eine Richtung und  $4e^-$ ,  $2p^+$  und  $2e^+$  in die andere Richtung), allerdings ist die Simulation *run\_016* in den beiden Querdimensionen doppelt so groß ( $256 \times 256 \times 512$  Zellen) wie alle anderen. Die erste Phase der Instabilität in der größeren Simulation (blaue Kurve) sieht genauso aus wie in der kleineren (rot). Die zweite Phase dagegen hat eine deutlich kleinere Anwachsrate. Dies lässt sich wie folgt erklären: die Minima und Maxima der Magnetfeld-Energie treten immer dann auf, wenn die über das gesamte Simulationsgebiet aufsummierte Stromdichte einen Vorzeichenwechsel durchmacht. Dies ist in *run\_016* bei  $t \approx 65\omega_{pe}^{-1}$  der Fall, allerdings sind zu diesem Zeitpunkt noch mehr als zwei Flussschläuche im Simulationsgebiet vorhanden (siehe Abbildung 5.11). Daher kann die Protonen-Instabilität hier nicht mit derselben Rate anwachsen wie in den kleineren Simulationen.

*run\_012* unterscheidet sich insofern von den anderen Simulationen, dass hier die Positronen durch Protonen ersetzt wurden. Dies erklärt auch die etwas andere Form der grünen Energiekurve, da hier weniger Teilchen für erste Phase der Instabilität zur Verfügung stehen und dafür mehr schwere für die zweite Phase vorhanden sind.

Betrachtet man die einzige mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$  durchgeführte Simulation *run\_018*, so ist zu sehen, dass die beiden Phasen der Instabilität noch stärker voneinander getrennt sind, das Minimum zwischen den beiden Peaks liegt deutlich tiefer. Außerdem ist festzustellen, dass das Maximum der zweiten Phase gegenüber den gleich großen Simulationen mit  $m_p/m_e = 100.0$  nochmals um einen Faktor von ca. zwei später auftritt.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.4.:** Entwicklung der transversalen  $\mathbf{B}$ -Feld-Energien der Simulationen *run\_009*, *run\_012*, *run\_016* und *run\_018*. Auch hier erkennt man deutlich die Instabilität, allerdings ist hier in allen vier Kurven eine Zweiteilung zu sehen. Dies liegt an den großen Massenunterschieden in allen dargestellten Simulationen. Im ersten Hügel läuft eine Instabilität der leichten Teilchen ab, anschließend lösen sich die Flussschläuche wieder auf (vergleiche z.B. Abbildung 5.10) und die Instabilität der Protonen setzt ein.

## 5.2. Entwicklung der Magnetfelder

In diesem Kapitel soll auf die Entwicklung der Magnetfelder eingegangen werden. Wie oben schon erwähnt, sind die transversalen Magnetfelder sehr wichtig für die Entstehung der Flussschläuche und damit für die Entwicklung der Instabilität. Dies soll nun im kommenden Abschnitt anhand von über die gesamte  $z$ -Richtung aufsummierten Magnetfeldern und deren Veränderungen im Laufe der Simulationen gezeigt werden. Dies wurde mit Hilfe von selbst verfassten Python-Skripten durchgeführt.

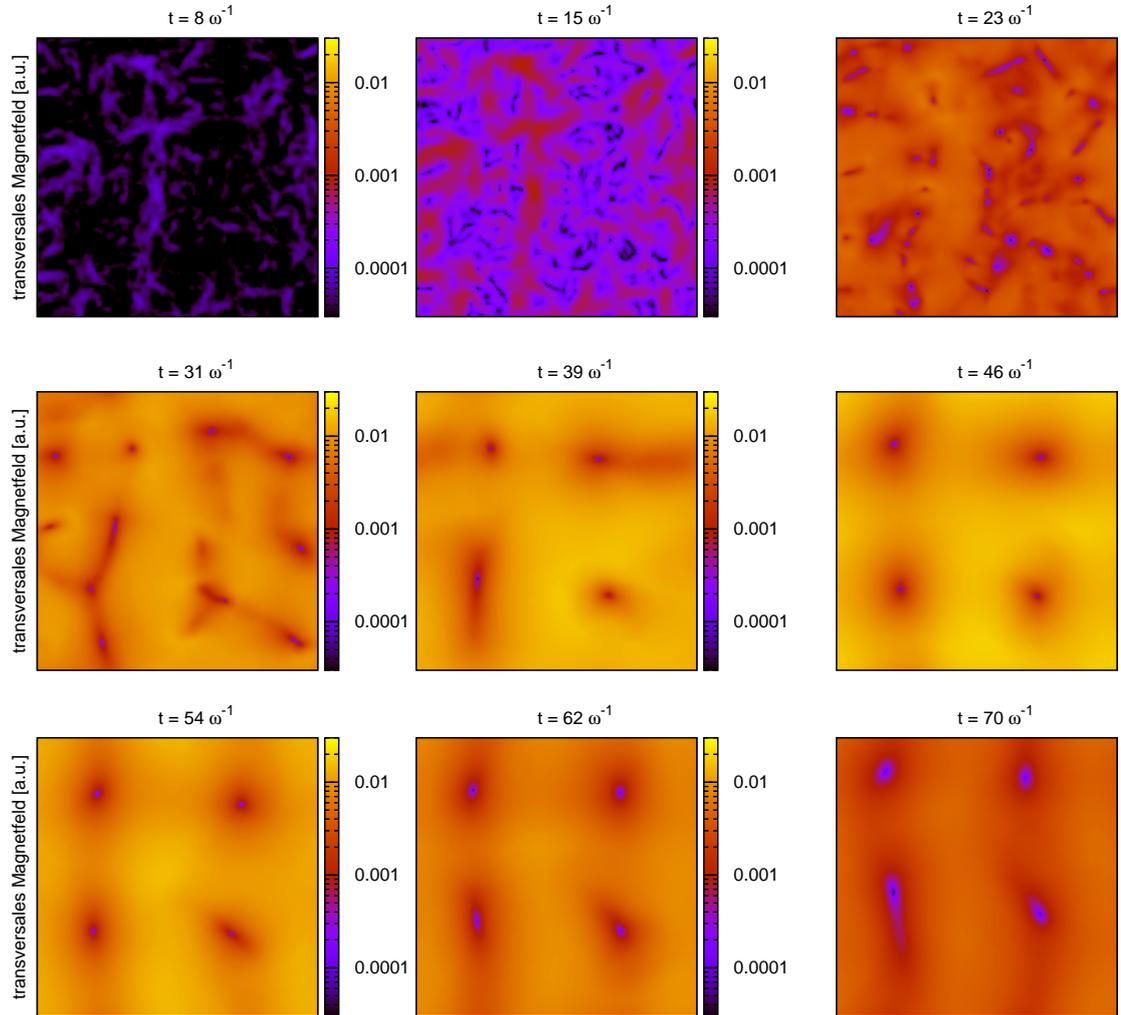
**Massenverhältnis 5.0** Für Abbildung 5.5 wurde der Betrag des transversalen Magnetfeldes

$$B_{\perp} = \sqrt{\mathbf{B}_x^2 + \mathbf{B}_y^2} \quad (5.2)$$

in jeder Zelle der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  gebildet und anschließend über die gesamte Länge der  $z$ -Achse der Simulationsbox aufintegriert. Hier ist deutlich zu sehen, wie sich Partien ausbilden, in denen das Magnetfeld mehr als 100-mal so hoch ist wie in anderen Regionen, z.B. um die Flussschläuche verglichen mit dem Inneren derselben. Im Speziellen ist zu erkennen, dass sich ringförmige Magnetfelder um die Flussschläuche herum ausbilden, die diese zusammenhalten und stabilisieren. Diese Magnetfelder verstärken sich bis  $t \approx 45\omega_{pe}^{-1}$ , dann werden sie wieder abgeschwächt. Dies spiegelt den Verlauf der hellblauen Linie in Abbildung 5.3 wieder, auch dort ist zu sehen, dass die Instabilität ab etwa diesem Zeitpunkt abzuflauen beginnt und das Plasma langsam thermalisiert.

**Massenverhältnis 100.0** In Abbildung 5.6 ist der Betrag des transversalen Magnetfeldes über die  $z$ -Achse aufintegriert für die Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$  dargestellt. Auch hier ist wieder deutlich zu sehen, dass sich mit der Zeit starke ringförmige Magnetfelder ausbilden und innerhalb der Flussschläuche relativ geringe Magnetfeldstärken herrschen. Hier ist außerdem zu beobachten, dass sich ab etwa  $t = 75\omega_{pe}^{-1}$  um den Flussschlauch unten rechts ein stärkeres Magnetfeld ausbildet als irgendwo sonst im Simulationsgebiet. Dies ist der Schlauch, der in der zweiten Phase der Instabilität mehr Protonen und damit eine deutlich höhere Teilchendichte enthält, als die anderen Schläuche (siehe Abbildung 5.10). In diesem findet der Großteil der Teilchenbeschleunigung in der zweiten Phase der Instabilität statt. Des weiteren ist

## 5. Ergebnisse



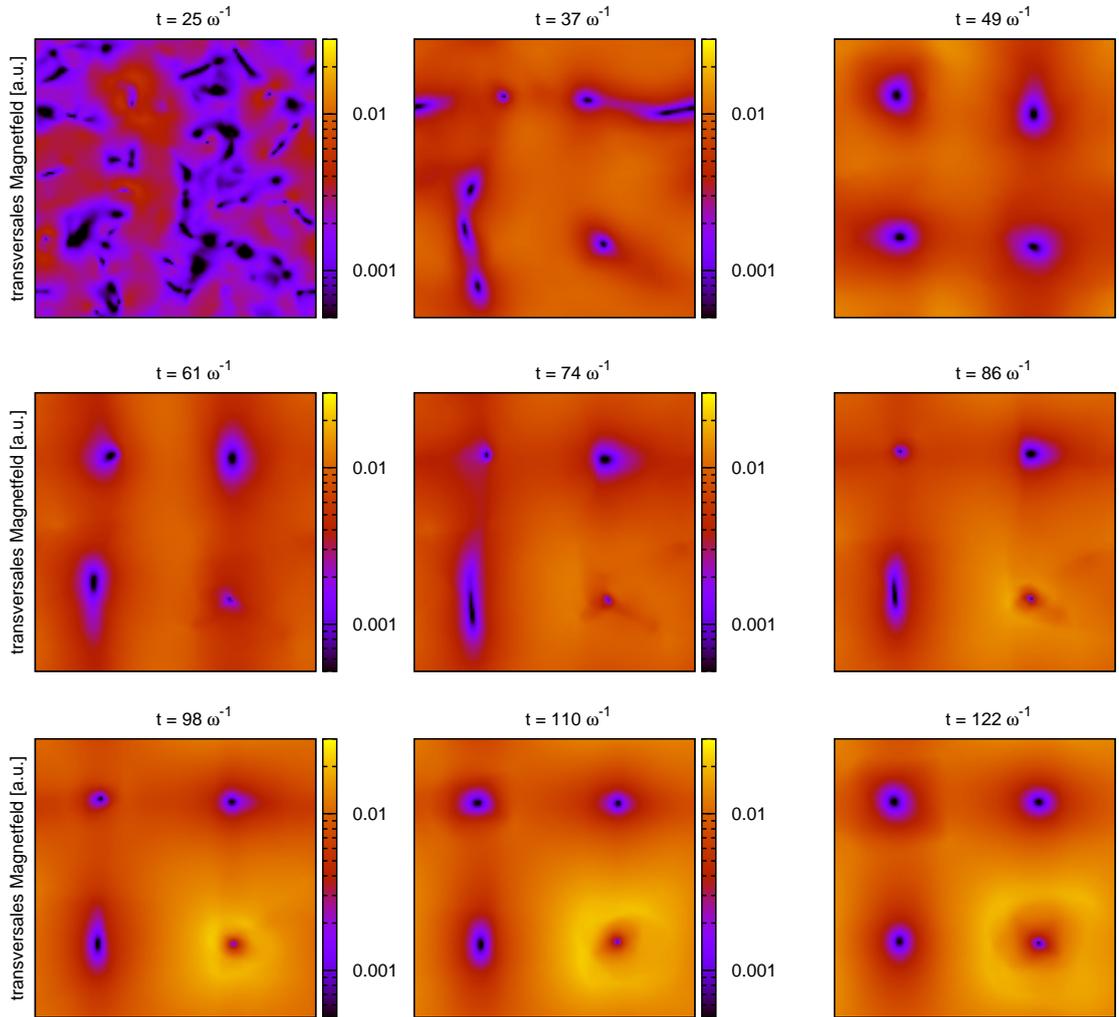
**Abbildung 5.5.:** Integration des transversalen Magnetfeldes der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von 5.0 über die  $z$ -Achse zur Verdeutlichung der ringförmigen Magnetfelder, die die Flussschläuche zusammenhalten. Im Maximum liegt das Magnetfeld um den Flussschlauch bei mehr als dem 100-fachen des Magnetfeldes innerhalb. Es baut sich bis zum Zeitpunkt  $t \approx 45\omega_{pe}^{-1}$  auf, danach endet die Instabilität.

## 5. Ergebnisse

zu beobachten, dass das Magnetfeld ab  $t \approx 110\omega_{pe}^{-1}$  beginnt, auseinander zu driften, es kann den Fluss Schlauch nicht mehr stabilisieren und die Instabilität endet, das Plasma thermalisiert.

**Zusammenfassung** Es ist deutlich erkennbar, dass sich im Laufe der Simulation starke ringförmige Magnetfelder rund um die Flussschläuche herum ausbilden, die diese zusammenhalten und stabilisieren. Zunächst entstehen in allen Simulationen etwa gleich starke Magnetfelder um alle Flussschläuche, im Falle eines großen Massenverhältnisses wie  $m_p/m_e = 100.0$  werden die Magnetfelder um den Protonen-Schlauch in der zweiten Phase der Instabilität deutlich stärker als irgendwo anders im Simulationsgebiet. Dies unterstützt die Annahme der separaten Instabilitäten bei diesen hohen Massenverhältnissen und zeigt weiterhin auf, dass die transversalen Magnetfelder ein hervorragender Indikator für das Auftreten und die Stärke einer Zweistrom-Instabilität sind.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.6.:** Aufintegration der transversalen Magnetfeldstärke entlang der  $z$ -Achse, also der Strömungsrichtung für die Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$ . Es ist zu sehen, wie sich starke ringförmige Magnetfelder aufbauen, die die Flussschläuche zusammenhalten. Ab ca.  $t = 75\omega_{pe}^{-1}$  bildet sich um den Flussschlauch unten rechts ein stärkeres  $\mathbf{B}$ -Feld auf als um die anderen (dies stützt die Hypothese der Instabilität in zwei Phasen), dieses beginnt ab  $t \approx 110\omega_{pe}^{-1}$  auseinander zu driften und die Instabilität endet.

### 5.3. Änderung der Teilchenverteilung

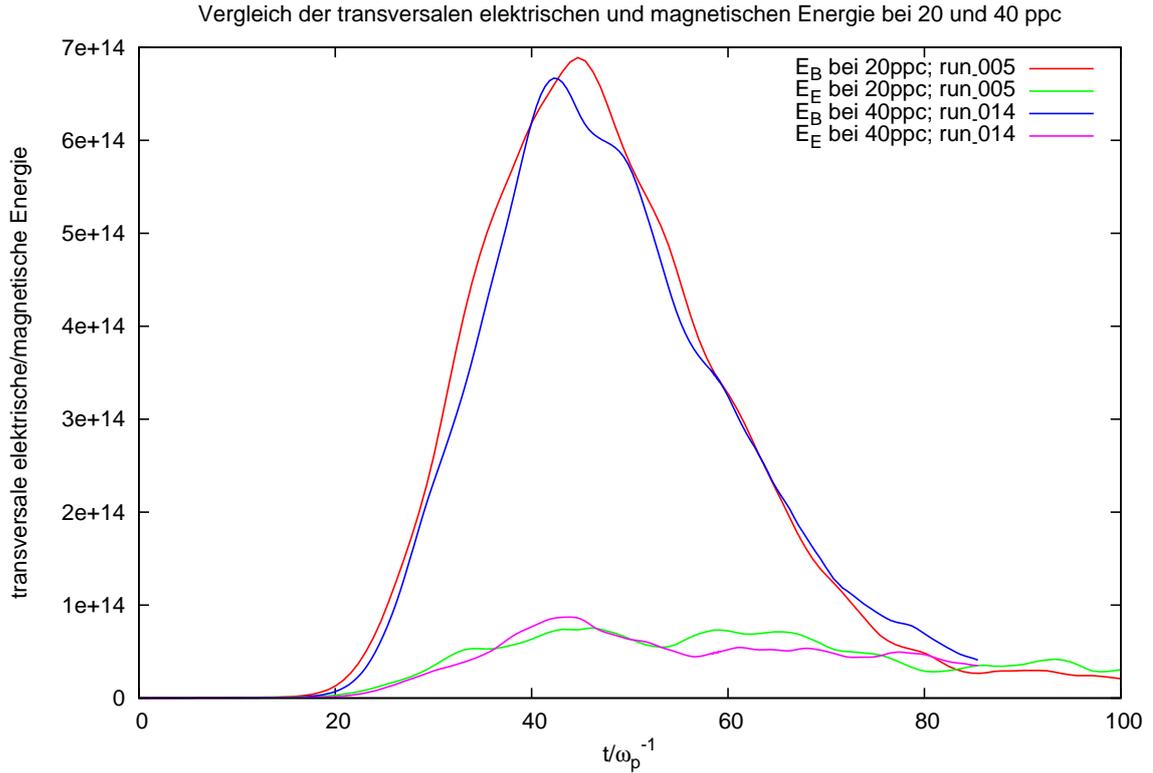
Im folgenden Abschnitt sollen die Veränderungen der Teilchendichten im Simulationsraum sowie der Verteilungsfunktion näher betrachtet werden. Dazu wurden zum Einen zur Illustration der Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche Schnitte durch das Simulationsgebiet senkrecht zur Strömungsrichtung der Teilchen gemacht, um so die Verteilung der Teilchendichte über die Länge der Simulationsbox als auch die Homogenität der Strukturen zu demonstrieren. Zum Anderen wurden ein- und zweidimensionale Histogramme erzeugt, die z.B. den Impuls der Teilchen parallel gegen senkrecht (diese Angaben sind immer relativ zur Strömungsrichtung - also der  $z$ -Richtung - gemeint) zeigen, oder im eindimensionalen die Energieverteilung im Ruhesystem der jeweiligen Plasmapopulationen oder des Labors zeigen.

Außerdem wurde anschließend noch der Anteil der Teilchen berechnet, der durch die Instabilität in hochenergetische Bereiche oberhalb der Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschleunigt wurde, diese Größe entspricht der Beschleunigungseffizienz.

#### 5.3.1. Teilchenzahl pro Zelle

Wie in Fonseca et al. (2008) festgestellt, genügen bei einem PiC-Code zweiter Ordnung in den meisten Fällen 20 Teilchen pro Zelle ( $ppc$ ) im Mittel, um eine gleichmäßige Verteilung zur Vermeidung starker numerischer Fluktuationen im Raum zu gewährleisten und alle physikalisch relevanten Aspekte aufzulösen und darzustellen. Um dies auch für die in dieser Arbeit wichtigen Konfigurationen zu überprüfen, wurden zwei Simulationen (*run\_005* und *run\_014*) mit 20 bzw. 40  $ppc$  und ansonsten identischem Setup durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.7 anhand eines Vergleiches der Energien der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder der beiden Simulationen dargestellt. Es ist klar zu sehen, dass die beiden Simulationen, abgesehen von statistischen Fluktuationen, dieselben Ergebnisse zeigen. Daher wurden alle anderen Simulationen mit 20  $ppc$  durchgeführt, da dies nur den halben Speicher- und Rechenaufwand benötigt.

## 5. Ergebnisse

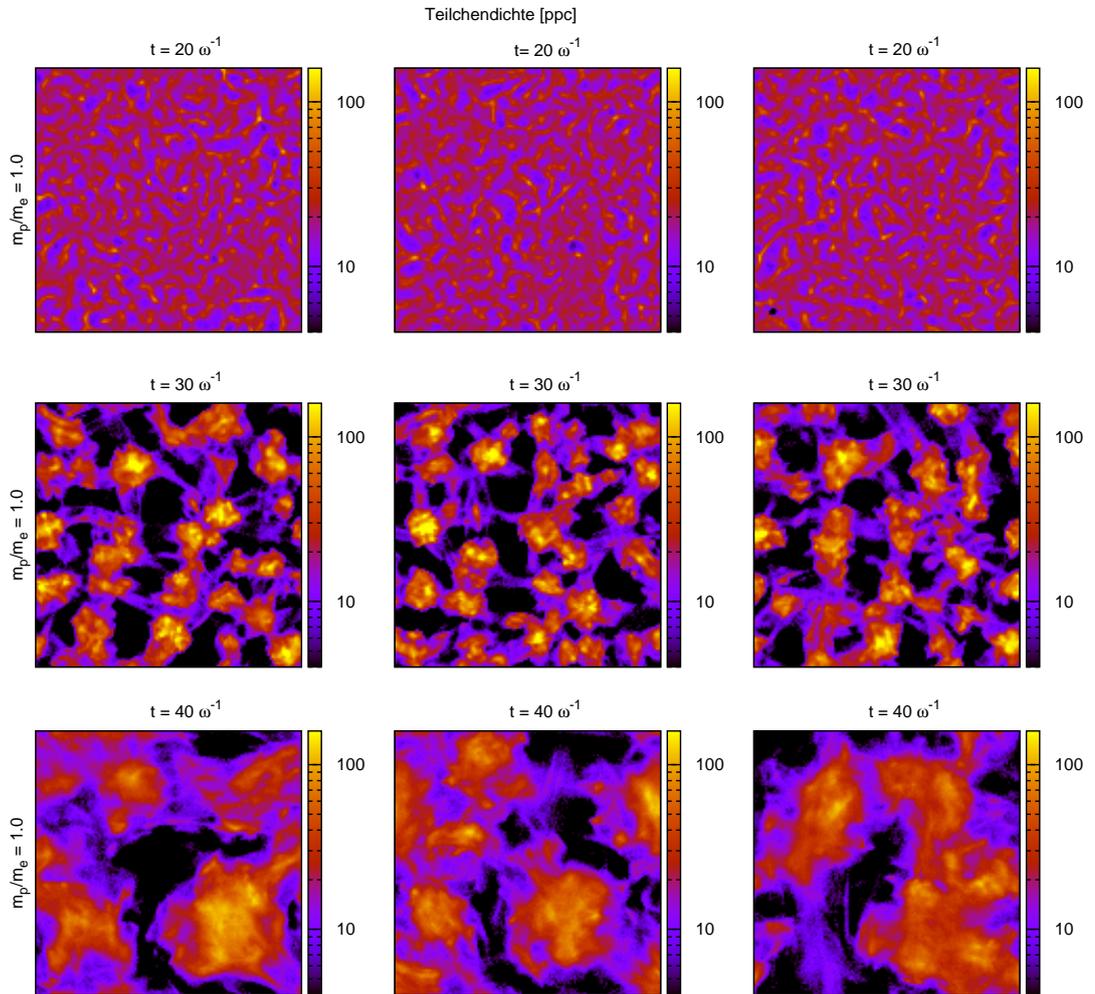


**Abbildung 5.7.:** Graph zur Untersuchung des Einflusses der durchschnittlichen Teilchenzahl pro Zelle ( $ppc$ ) bei ansonsten identischer Konfiguration anhand der transversalen Energien der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder. Bis auf statistische Fluktuationen sind keine Unterschiede festzustellen, deshalb wurden alle anderen Simulationen mit 20  $ppc$  durchgeführt.

### 5.3.2. Entwicklung der Flussschläuche

Zur Demonstration der Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche wurden an verschiedenen Stellen (jeweils bei  $100$ ,  $300$  und  $500\Delta x$ ) in  $z$ -Richtung senkrechte Schnitte der Teilchendichte erstellt. Dabei zeigen die Farben auf einer logarithmischen Skala die Teilchendichte in Teilchen pro Zelle an, wobei die durchschnittliche Dichte bei 20 Teilchen pro Zelle ( $ppc$ ) liegt. In allen folgenden Abbildungen (5.8 bis 5.12) ist zu erkennen, dass sich mit der Zeit Flussschläuche ausbilden, in denen die Dichte deutlich höher ist, als in den sie umgebenden Gebieten. Auf die einzelnen Abbildungen wird im Folgenden genauer eingegangen:

## 5. Ergebnisse



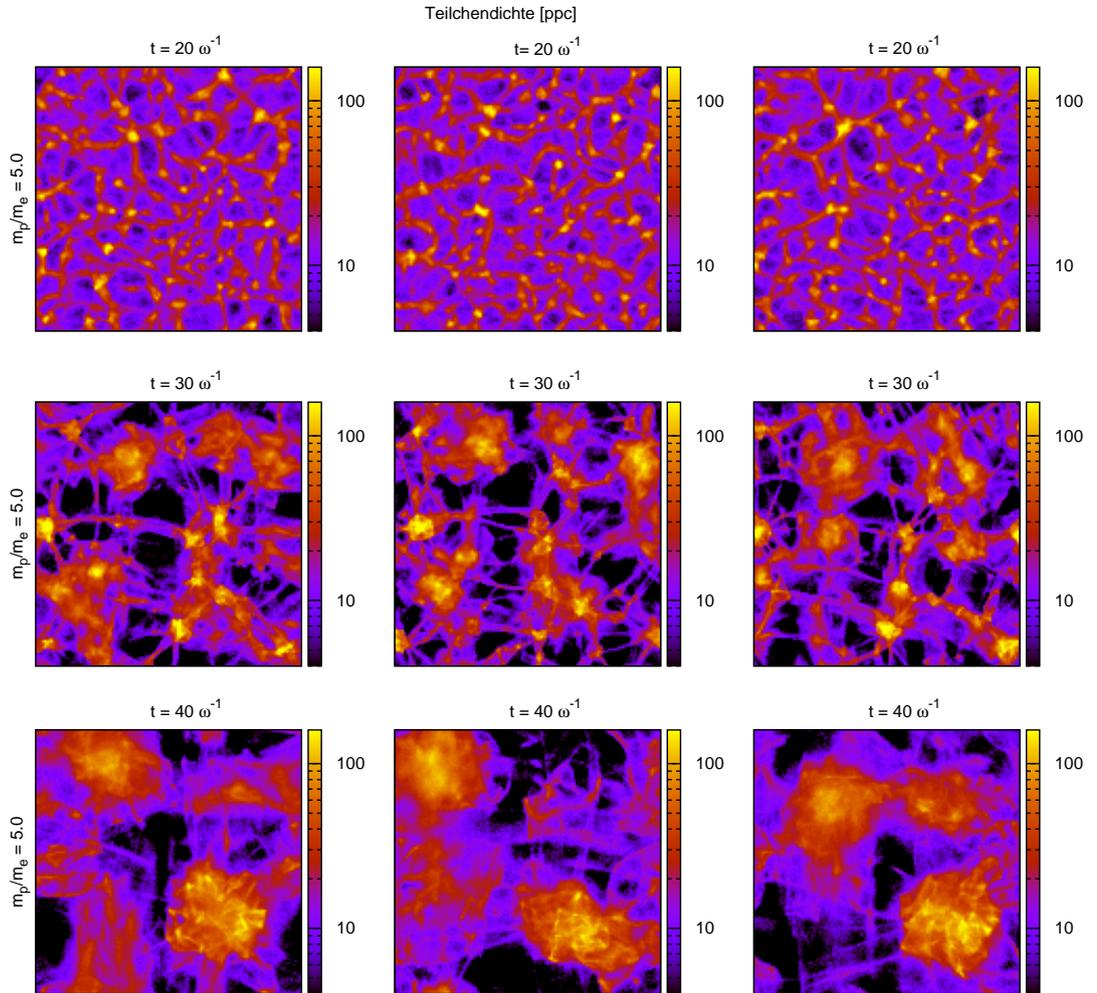
**Abbildung 5.8.:** Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche der Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$ . Die Farben zeigen die Teilchendichte (in Teilchen pro Zelle - im Schnitt sind es 20 *ppc*) senkrecht zur Strömungsrichtung an drei verschiedenen Stellen (bei 100, 300 und 500  $\Delta x$ ) zu drei Zeitpunkten. Man sieht deutlich die Entstehung und das Verschmelzen der Flussschläuche, bis nur noch wenige vorhanden sind. Diese haben etwa dieselbe Stärke, da hier ein Elektron-Positron-Plasma simuliert wurde.

**Massenverhältnis 1.0** In Abbildung 5.8, die Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$  zeigt, ist zu sehen, dass sich viele kleine Flussschläuche ausbilden, die dann relativ schnell zu wenigen großen zusammenwachsen. Die Zeitskala entspricht genau der aus Abbildung 5.3 erwarteten. Dabei ist zu beachten, dass diese Simulation einem Elektron-Positron-Plasma entspricht und damit natürlich nur eine Instabilität zu erwarten ist, da alle Teilchen die gleiche Masse besitzen.

**Massenverhältnis 5.0** In Abbildung 5.9 der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  ist in der oberen Reihe zum Zeitpunkt  $t = 20\omega_{pe}^{-1}$  die Ausbildung vieler Flussschläuche zu beobachten, die sich dann (Mitte) zu mehreren zusammenschließen, während die Instabilität noch im Anwachsen ist und schließlich im Höhepunkt (unten) zu zwei Schläuchen zusammengewachsen sind (im Vergleich mit Abbildung 5.3 ist zu sehen, dass die Instabilität bei  $t = 40\omega_{pe}^{-1}$  ihr Maximum erreicht). Es ist auch hier keinerlei Trennung in zwei Instabilitäten zu sehen, man kann also schlussfolgern, dass bei diesem Massenverhältnis die beiden Teilchenspezies noch sehr stark aneinander gekoppelt sind.

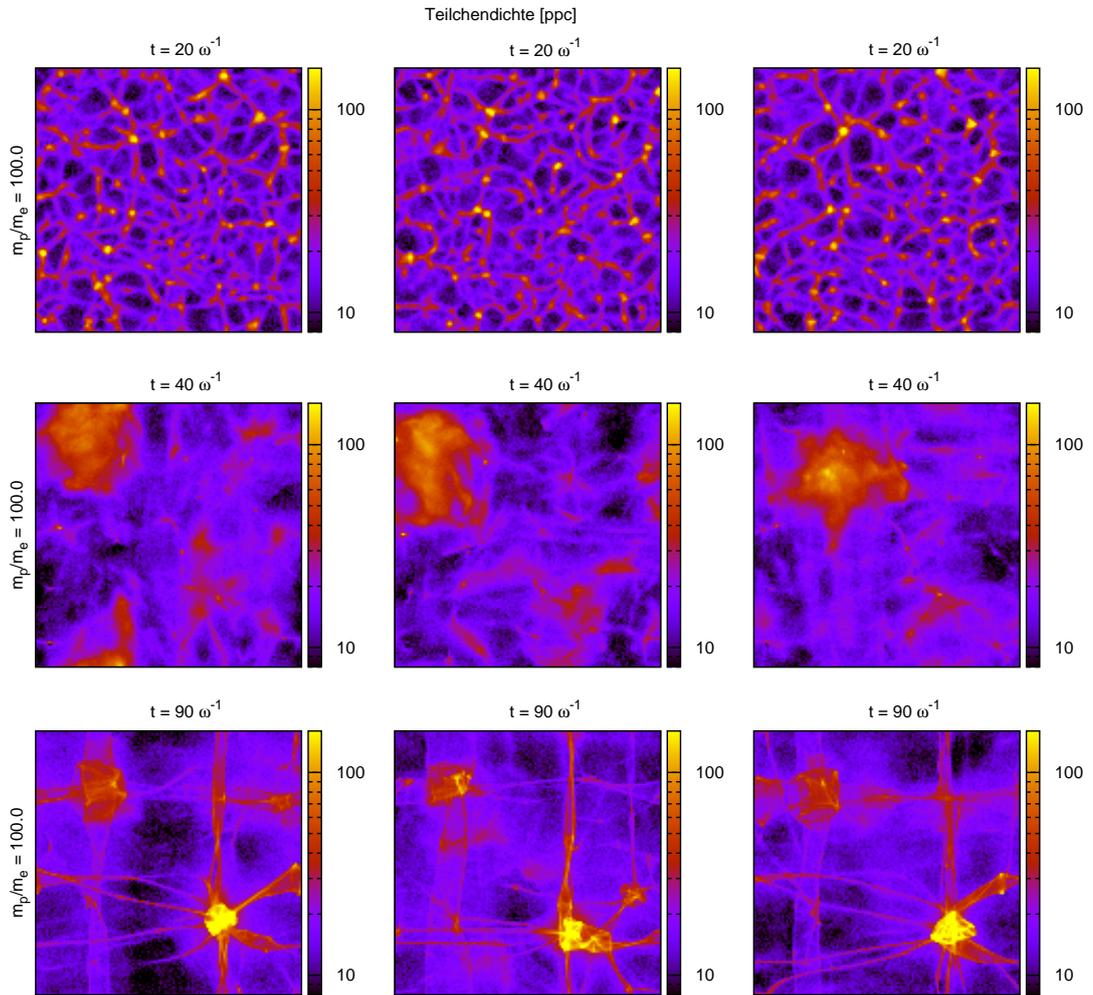
**Massenverhältnis 100.0** Simulation *run\_009* wurde mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$  durchgeführt, um weitere Einblicke in die Aufspaltung der Instabilität in zwei Phasen zu bekommen. Wie in Abbildung 5.10 zu sehen ist, bilden sich im Laufe der ersten Phase der Instabilität zwei Flussschläuche aus, von denen der eine (in den Bildern der mittleren Reihe jeweils oben links zu sehen) stärker und deutlicher ist. Diese lösen sich dann wieder fast komplett auf (nicht gezeigt) und schließlich bilden sich in der zweiten Phase zwei schmälere Schläuche aus, wobei hier der andere stärker betont ist. Dies liegt daran, dass in der ersten Phase die leichten Teilchen beschleunigt werden, von denen im Flussschlauch oben links mehr vorhanden sind ( $6e^-$  pro Zelle strömen in positive  $z$ -Richtung,  $4e^-$  und  $2e^+$  in die negative, es sind also acht leichte Teilchen, die einen negativen Strom verursachen und nur vier, die einen positiven erzeugen), in der zweiten Phase sind es die Protonen, die den Schlauch stabilisieren und von diesen sind mehr im Schlauch unten rechts zu finden. Die quasiparallelen Linien sind sogenannte *current sheets*, schmale Ebenen, in denen die Ströme höher sind als in der Umgebung. Um herauszufinden, wo diese herkommen und ob sie eine Rolle spielen, wurde die Simulation *run\_016* auch mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$ , aber mit einer doppelt

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.9.:** Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$ . Man sieht deutlich die Entstehung und das Verschmelzen der Flussschläuche, bis nur noch zwei vorhanden sind. Beide haben dieselbe Stärke, was verdeutlicht, dass die Instabilitäten der Elektronen/Positronen und Protonen bei diesem Massenverhältnis noch stark gekoppelt sind.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.10.:** Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche der Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$ . Zu sehen ist in der oberen Reihe, die Ausbildung der Flussschläuche, die dann zu zwei zusammenwachsen, von denen einer stärker als der andere ist. Im zweiten Teil der Instabilität ist der andere Schlauch stärker, was an der unterschiedlichen Zahl der an der Instabilität beteiligten Teilchen liegt. Die senk- und waagrechten Linien sind sogenannte *current sheets*, die von den periodischen Randbedingungen herrühren, aber keine weitere Rolle spielen.

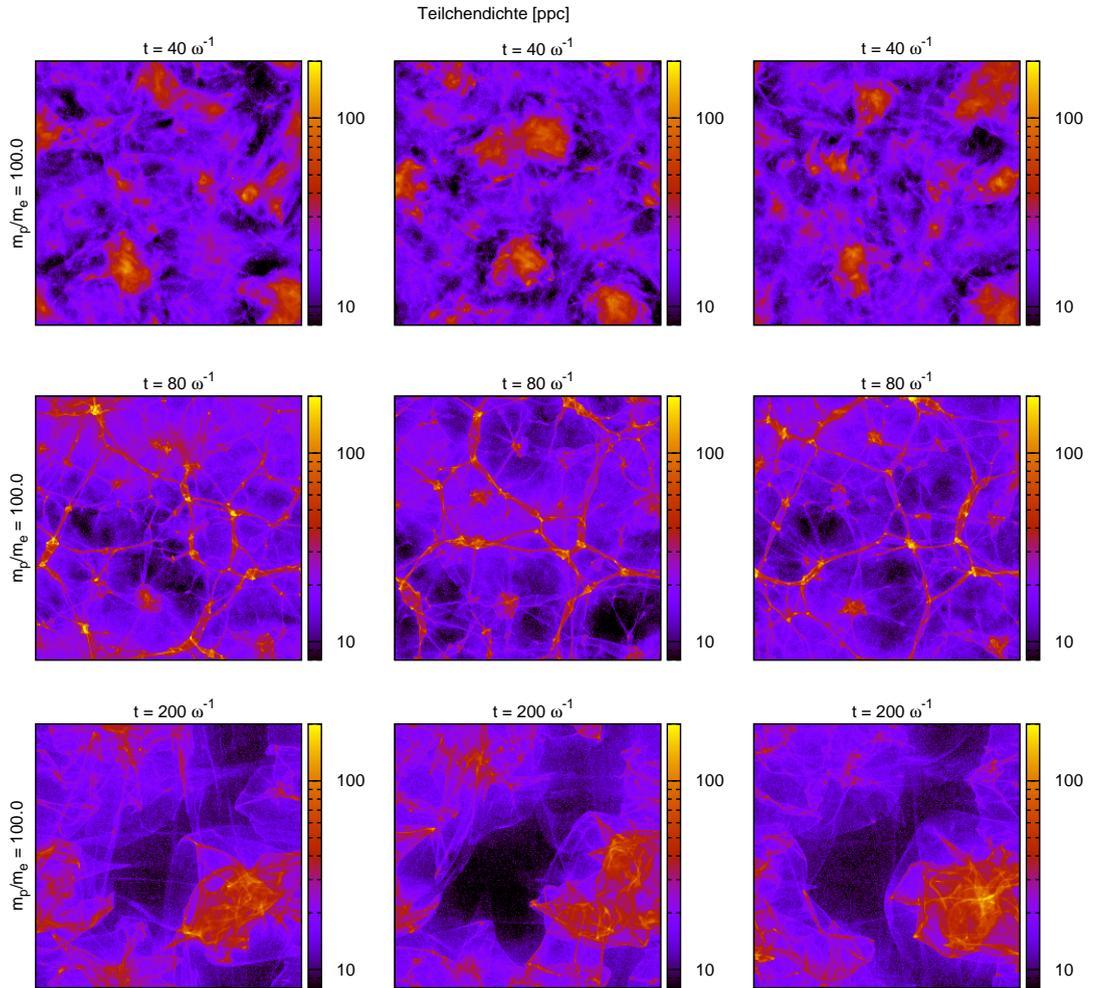
## 5. Ergebnisse

so breiten Simulationsbox in  $x$ - und  $y$ -Richtung durchgeführt, das heißt, sie umfasst den vierfachen Raum und enthält damit bei gleicher Teilchendichte von 20 *ppc* vier mal so viele Teilchen wie die meisten anderen durchgeführten Simulationen. Hier sind diese Querlinien auch verschwunden, damit ist klar, dass sie vom Einfluss der periodischen Randbedingungen kommen. Ansonsten wurden aber keinerlei Einflüsse auf die anderen Ergebnisse festgestellt, deshalb wurden alle anderen Simulationen weiterhin mit  $128 \times 128 \times 512$  Zellen durchgeführt, da auf diese Weise der Speicher- und Rechenzeitbedarf nur ein Viertel von dem der größeren Simulation beträgt.

In Abbildung 5.11, die *run\_016* zeigt, ist in der oberen Reihe die Teilchendichte während des Maximums der ersten Instabilität zu sehen. Diese Flussschläuche haben es im Laufe der Elektronen-Positronen-Instabilität nicht geschafft zu nur zwei Schläuchen zu verschmelzen und sie lösen sich daher (mittlere Reihe) im Minimum zwischen den beiden Instabilitäten (siehe blauen Linie in Abbildung 5.4 bei  $80\omega_{pe}^{-1}$ ) wieder fast komplett auf. Wenn dann die Protonen-Instabilität einsetzt, bildet sich vor allem ein starker Schlauch aus. Dies liegt daran, dass in der einen Plasmapopulation (im Code *background* genannt) nur Protonen und keine Positronen strömen, in der anderen (*jet*) Positronen und Protonen (siehe auch Kapitel 4 und Tabelle 4.2). Dadurch enthält der bei  $t = 220\omega_{pe}^{-1}$  stärkere Fluss Schlauch deutlich mehr Protonen, die zwar länger brauchen, um beschleunigt zu werden, die allerdings im zweiten Teil der Instabilität den Fluss Schlauch dadurch auch wesentlich stärker und stabiler machen. Hier ist deutlich die Trennung der beiden Instabilitäten zu erkennen.

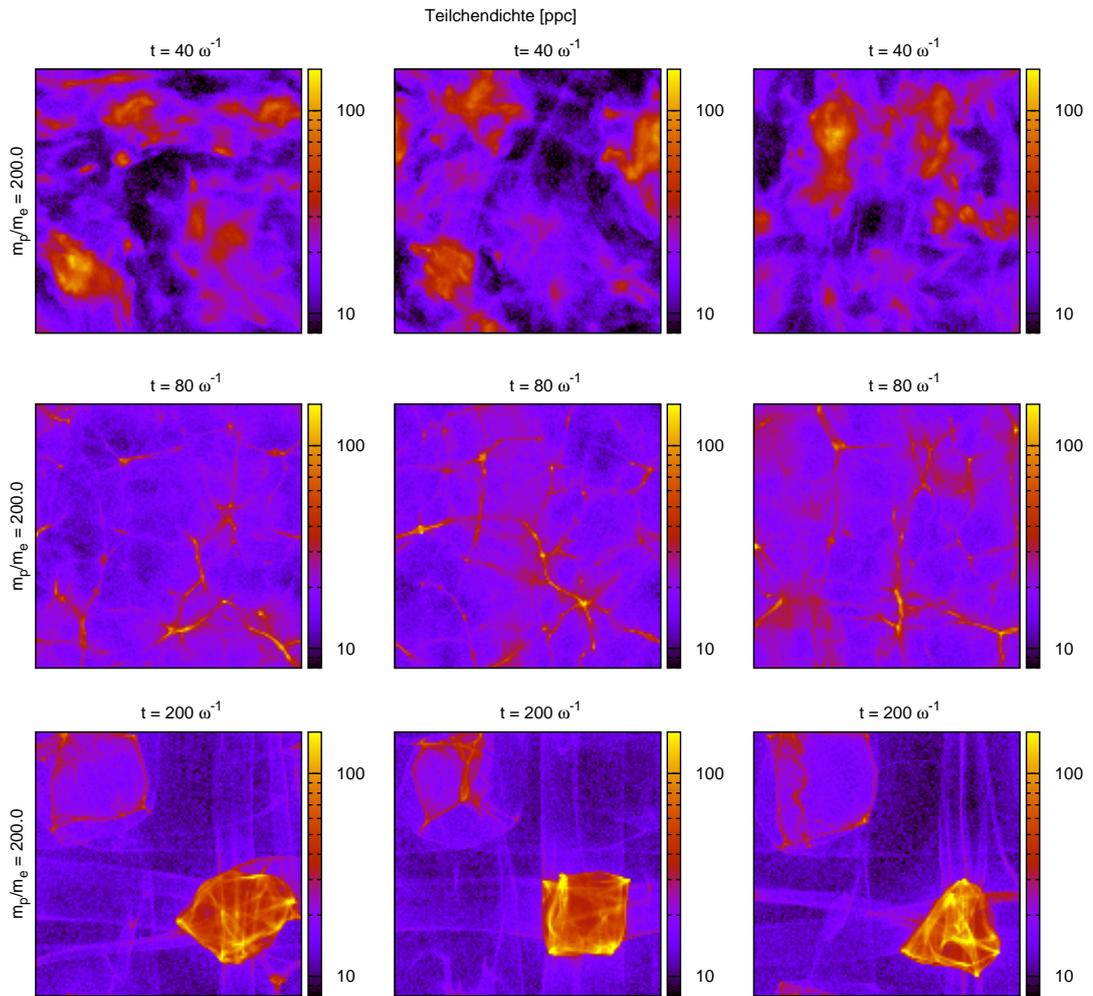
**Massenverhältnis 200.0** In der letzten Abbildung dieser Art (Bild 5.12) ist Simulation *run\_018* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$  zu sehen. Die Erkenntnisse hier sind ganz ähnlich wie bei Simulation *run\_009*: es bilden sich Fluss schläuche aus, die im Minimum zwischen den beiden Instabilitäten wieder verschwinden und während der Protonen-Instabilität bildet sich dann vor allem ein starker Schlauch aus, der von einigen *current sheets* begleitet wird, die von den periodischen Randbedingungen herrühren. Da diese Simulation denselben Aufbau hat wie *run\_009*, allerdings mit dem doppelten Massenverhältnis, ist vor allem noch anzumerken, dass es hier nochmals doppelt so lange dauert, bis die Protonen-Instabilität ihren Höhepunkt erreicht.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.11.:** Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche der Simulation *run\_016* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$  und der doppelten Zellenanzahl in den beiden Querdimensionen. In den oberen drei Bildern ist zu sehen, dass zuerst Flussschläuche entstehen, die später (mittlere Reihe) wieder fast komplett verschwinden (dies entspricht dem Minimum der Magnetfeldenergie der blauen Linie in Abbildung 5.4) und anschließend wird der Fluss Schlauch in der unteren rechten Ecke stärker. Dies entspricht den unabhängigen Instabilitäten bei großen Massenverhältnissen.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.12.:** Entstehung und Entwicklung der Flussschläuche der Simulation *run\_018* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$ . In den oberen drei Bildern ist zu sehen, dass zuerst Flussschläuche entstehen, die später (wie in der mittleren Reihe zu sehen) wieder fast komplett verschwinden (dies entspricht dem Minimum der Magnetfeldenergie der pinken Linie in Abbildung 5.4) und anschließend wird der Flussschlauch in der unteren rechten Ecke stärker. Dies entspricht den unabhängigen Instabilitäten bei großen Massenverhältnissen. Die quasiparallelen Linien in der untersten Reihe sind Artefakte, die durch die periodischen Ränder entstehen, jedoch keine Rolle spielen.

**Zusammenfassung** Zusammengefasst lässt sich sagen, dass in den Simulationen mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 20.0$  und kleiner nur eine Instabilität zu sehen ist, da die Teilchenmassen noch so ähnlich sind, dass eine starke Kopplung zwischen den beiden Spezies vorliegt. Dies ist daran zu erkennen, dass sich nach einer Weile Flussschläuche ausbilden, die mit der Zeit zu immer stärkeren verschmelzen, bis nur noch zwei übrig sind, dies ist das typische Verhalten bei Filamentierungsinstabilitäten.

Bei den Simulationen mit einem größeren Massenverhältnis lässt sich beobachten, dass sich zuerst viele kleine Flussschläuche ausbilden, die dann zu zwei oder mehreren verschmelzen und sich anschließend fast komplett wieder auflösen. Wenn die Instabilität der schwereren Teilchenspezies einsetzt, bildet sich zumeist ein stärkerer und ein schwächerer Flussschlauch aus. Dies kommt daher, dass in die eine Richtung sechs Protonen strömen, während sich nur zwei in die andere Richtung bewegen und diese zweite Phase von den Protonen dominiert wird. Die Instabilität spaltet sich komplett in zwei Phasen auf, dieses Verhalten ist also auch beim realen Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1836.2$  zu erwarten.

### 5.3.3. Veränderung der Verteilungsfunktion

Im kommenden Abschnitt wird die Änderung der Impuls- und Energieverteilung der Teilchen besprochen. Dazu wurden ein- und zweidimensionale Histogramme der Impulse der Teilchen im Labor- und Ruhesystem der jeweiligen Populationen erstellt.

Für die zweidimensionalen Graphen wurden die Impulse der Teilchen  $\gamma\mathbf{v}/c$  in einen Anteil parallel und senkrecht zur Strömung zerlegt

$$\gamma\frac{\mathbf{v}}{c} = \gamma\frac{\mathbf{v}_\perp}{c} + \gamma\frac{\mathbf{v}_\parallel}{c}, \quad (5.3)$$

dann wurde der gesamte Impulsraum in Intervalle eingeteilt und alle Teilchen danach sortiert (der dafür verwendete Code wurde von Urs Ganse, Patrick Kilian und mir selbst geschrieben und ist auf der beigelegten CD zu finden). Aus diesen Graphen sollen Informationen über die Richtung der Teilchenbeschleunigung gewonnen werden.

In den eindimensionalen Histogrammen ist zum einen die Impulsverteilung im Laborsystem und zum anderen im System der jeweiligen strömenden Verteilungen (Jet und Background) dargestellt. Für die Umrechnung der Impulse in die anderen Bezugssysteme wurde der in Abschnitt 2.3.2 dargestellte Formalismus verwendet: Zuerst wurde die

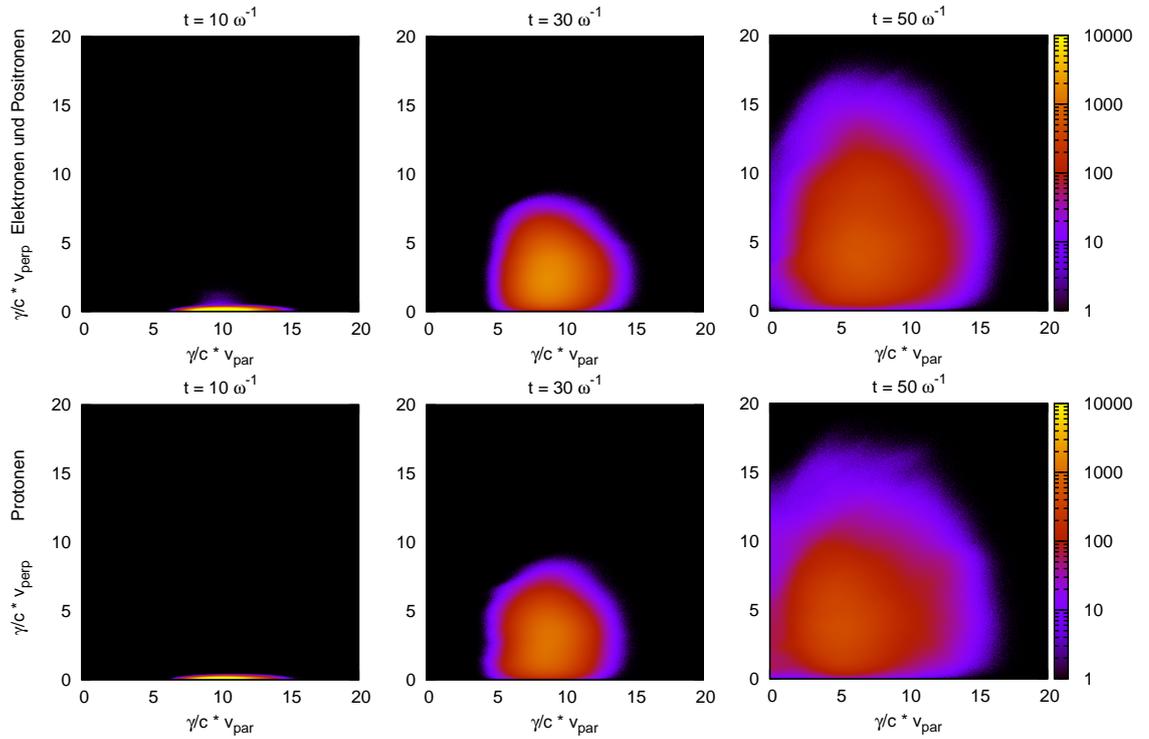
durchschnittliche Driftgeschwindigkeit der jeweiligen Population berechnet und anschließend wurden alle Teilchen mit dem negativen Wert dieser Durchschnittsgeschwindigkeit geboostet.

**Massenverhältnis 1.0** In Abbildung 5.13 ist die zeitliche Entwicklung der Teilchenverteilung (des Impulses parallel zur Strömungsrichtung gegen senkrecht) von Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$  zu sehen. In der oberen Reihe sind Elektronen und Positronen gezeigt, in der unteren Reihe die Protonen. Nachdem diese alle gleich schwer sind, sind keine großen Unterschiede in den Verteilungen zu sehen. Die kleinen Unterschiede sind statistische Fluktuationen und dem Umstand zu verdanken, dass 50% mehr Elektronen und Positronen als Protonen vorhanden sind. Es ist zu sehen, dass ein großer Teil der Beschleunigung in der transversalen Dimension auftritt, ein typisches Phänomen bei Filamentierungsinstabilitäten.

Um die Energieverteilung der Teilchen noch etwas genauer unter die Lupe zu nehmen, wurden eindimensionale Histogramme über  $\gamma v/c$  einmal im Laborsystem und einmal im jeweiligen Ruhesystem der sich nach rechts oder links bewegenden Population angefertigt. Die Verteilung im Ruhesystem ist in Abbildung 5.14 zu sehen. Die anfängliche Verteilung verbreitert sich stark, dies bedeutet, dass einige Teilchen zu hohen Energien um  $\gamma \approx 25$  beschleunigt werden. Nachdem hier alle Teilchen gleich schwer sind, entspricht diese Simulation einem Paar-Plasma und die Protonen sind deshalb nicht extra aufgeführt.

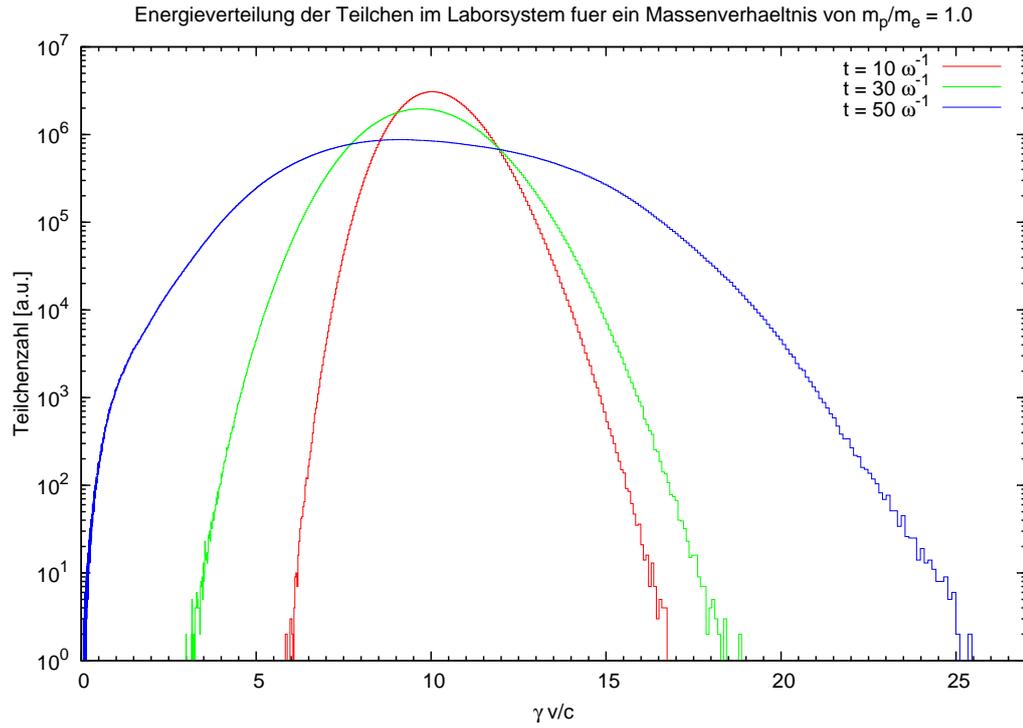
In Abbildung 5.15 ist die Verteilungsfunktion der Teilchen im Ruhesystem der jeweiligen Plasmapopulationen zu sehen (die Impulse der Teilchen der *background*- und der *jet*-Population wurden ins Ruhesystem der jeweiligen Verteilung umgerechnet und dann alle in einen Graphen gezeichnet, da sich die Verteilungen kaum unterscheiden), es ist deutlich zu erkennen, wie die Maximalenergie ansteigt und die Teilchen beschleunigt werden. Dies ist kein Widerspruch zur Erhaltung der Gesamtenergie, die hohen Energien im Ruhesystem des strömenden Plasmas entstehen dadurch, dass die Teilchen im Laufe der Instabilität einen großen Impuls in die Transversal-Richtung erhalten, der sich zusammen mit der anfänglichen Driftgeschwindigkeit von  $\gamma = 10$  zu den hohen erreichten Energien um  $\gamma \approx 200$  addiert; die Gesamtenergie ist selbstverständlich auch in diesem Bezugssystem erhalten.

## 5. Ergebnisse



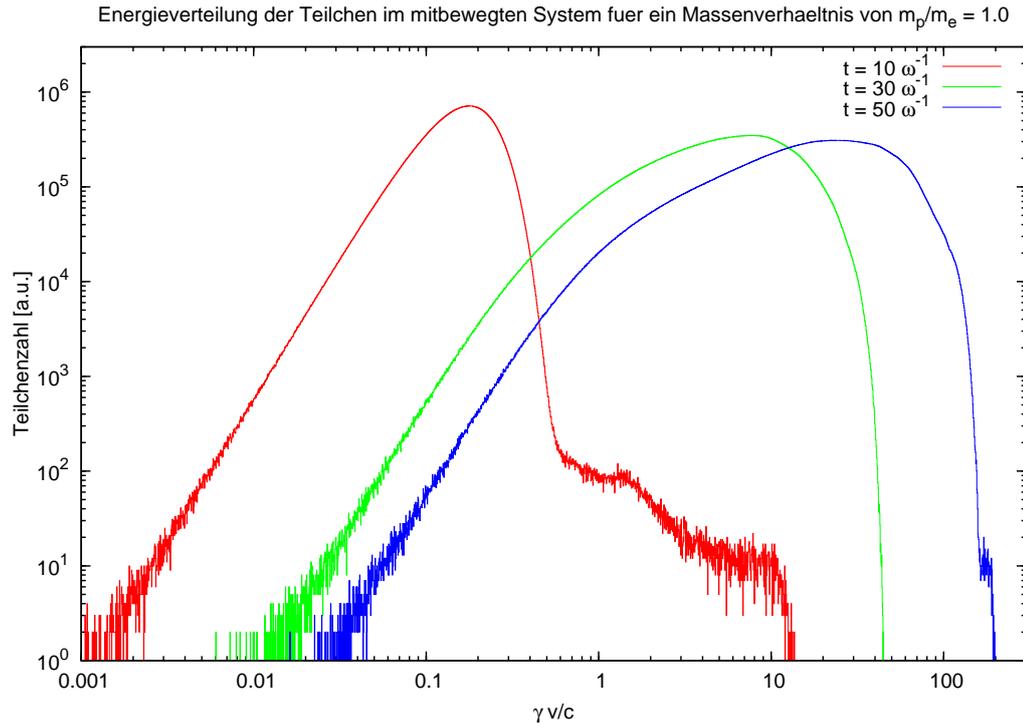
**Abbildung 5.13.:** Entwicklung der Verteilung der Teilchenimpulse parallel und senkrecht ( $\gamma \mathbf{v}_{\parallel}$  und  $\gamma \mathbf{v}_{\perp}$ ) der Elektronen/Positronen (oben) und Protonen (unten) der Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$ . Damit sind alle Teilchen gleich schwer und es sind kaum Unterschiede zwischen den Bildern oben und unten zu sehen.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.14.:** Energieverteilung aller Teilchen im Laborsystem der Simulation *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$ . Die Entwicklung eines hochenergetischen Anteils bis zu einer Energie von  $\gamma \approx 25$  ist zu beobachten.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.15.:** Energieverteilung aller Teilchen der Simulation *run\_008* im Ruhesystem der jeweiligen Populationen. Es ist zu erkennen, wie sich die Verteilung zu höheren Energien hin verschiebt und die höchstenergetischen Teilchen Energien um  $\gamma \approx 200$  erreichen.

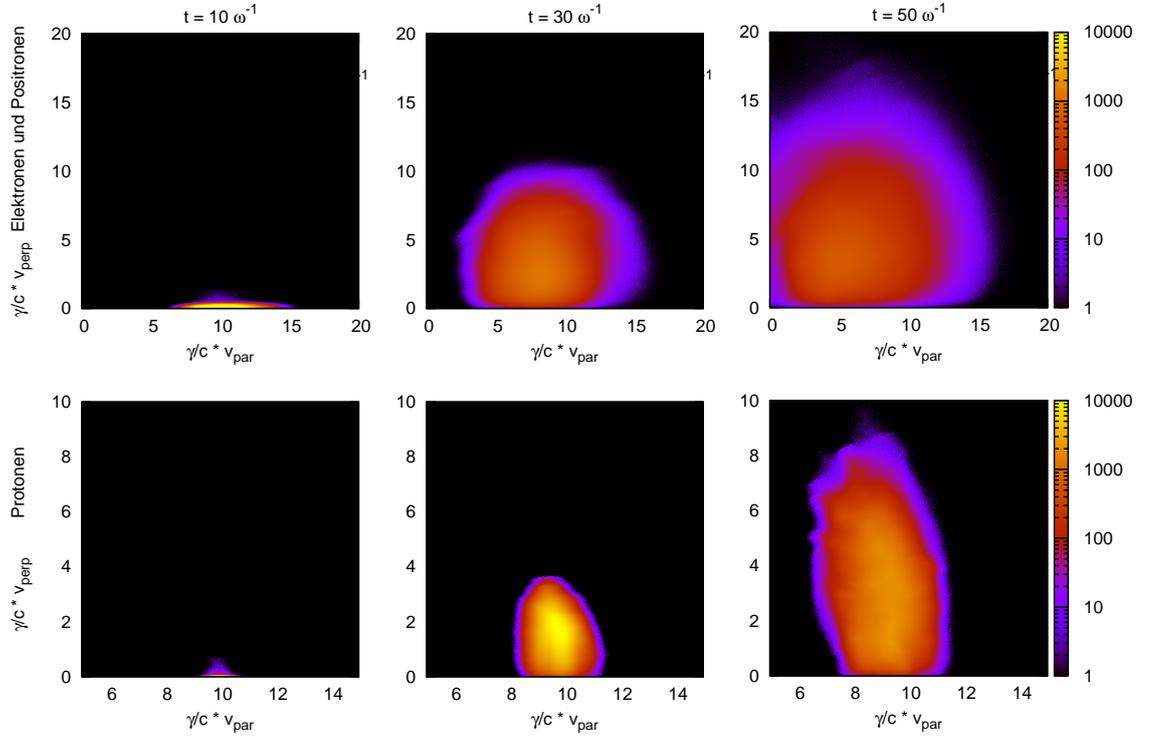
**Massenverhältnis 5.0** Die zweidimensionale Teilchenverteilung von Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  ist in Abbildung 5.16 dargestellt. Wieder sind oben die Elektronen und Positronen geplottet, unten die Protonen. Hier ist nun schon ein deutlicher Unterschied zur vorherigen Abbildung 5.13 zu erkennen, die Protonen sind hier fünfmal so schwer. Dadurch haben sie zunächst eine deutlich schmalere Verteilung, da die thermische Geschwindigkeit invers mit  $m_p/m_e$  skaliert. Es ist aber auch zu sehen, dass sowohl die leichten als auch die schweren Teilchen über den gesamten Zeitraum der Instabilität beschleunigt werden. Dies bedeutet vor allem (wie auch in Abbildung 5.3 zu sehen ist), dass die Instabilitäten aufgrund der ähnlichen Massen aller beteiligten Teilchen noch gekoppelt sind und sich damit gegenseitig sehr stark beeinflussen.

In Abbildung 5.17 ist die dazugehörige Energieverteilung zu den selben Zeitpunkten wie oben zu sehen. Dazu wurde die Anzahl der Teilchen pro  $\gamma v/c$ -Intervall dargestellt, die durchgezogenen Linien repräsentieren alle Teilchen, die gestrichelten zeigen die Protonenverteilungen. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich die Verteilung, die anfangs um  $\gamma = 10$  zentriert ist, aufweitet und somit hochenergetische Teilchen erzeugt werden. Des Weiteren wird die Steigung des *High-Energy-Tails* flacher, von einem sauberen Power-law kann aber nicht gesprochen werden. Bei diesem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  werden einzelne Teilchen im Laborsystem auf Energien von  $\gamma \approx 25$  beschleunigt.

Anhand der Verteilung im mitbewegten Bezugssystem in Abbildung 5.18 ist nochmals klar zu sehen, wie alle Teilchen (auch die Protonen) über den gesamten Verlauf der Simulation beschleunigt werden. Die Elektronen/Positronen mit den höchsten Energien erreichen etwa  $\gamma \approx 200$ , die höchstenergetischen Protonen finden sich bei  $\gamma \approx 50$ .

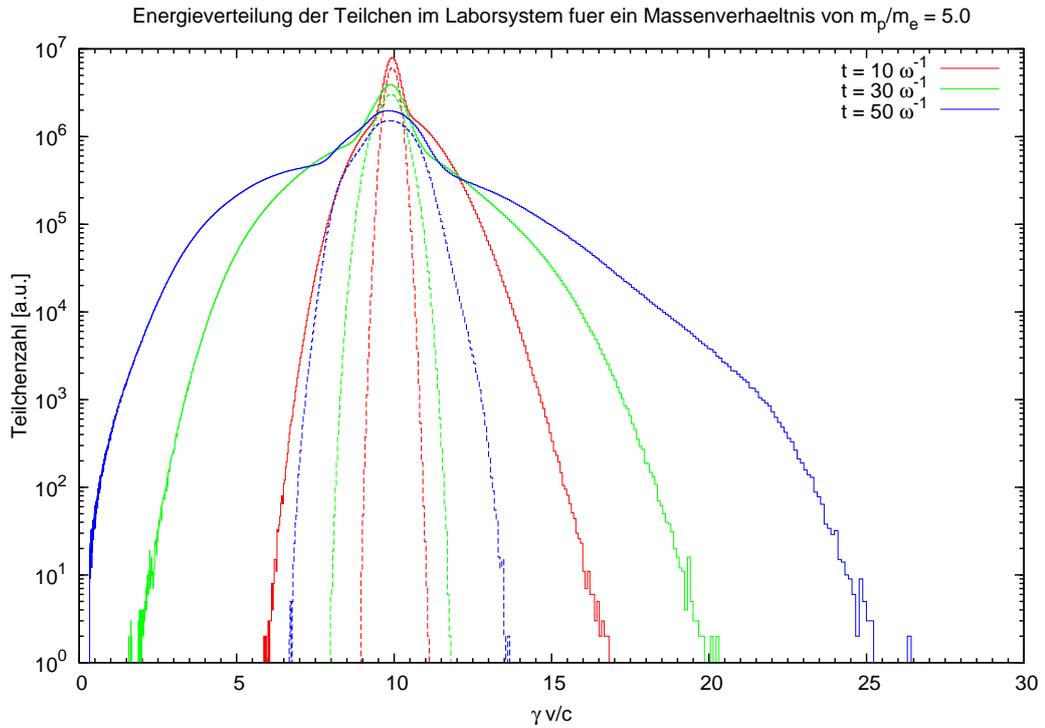
**Massenverhältnis 100.0** Auch für die Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$  wurden sowohl zwei- als auch ein dimensionale Histogramme erstellt. In Abbildung 5.19 ist der parallele Impuls der Teilchen gegen den senkrechten aufgetragen. Da in diesem Fall die Protonen aber wesentlich schwerer als die anderen Spezies sind, erfahren diese eine deutlich kleinere Beschleunigung, die Skalierung der Achsen wurde daher gegenüber den anderen ähnlichen Graphen verändert. In der oberen Reihe ist zu sehen, dass die Elektronen und Positronen bis zu einem Zeitpunkt von  $t = 70\omega_{pe}^{-1}$  beschleunigt werden, anschließend dann aber ihre Verteilungsfunktion nicht mehr nennenswert ändern. Die Protonen dagegen werden durch die gesamte Instabilität

## 5. Ergebnisse



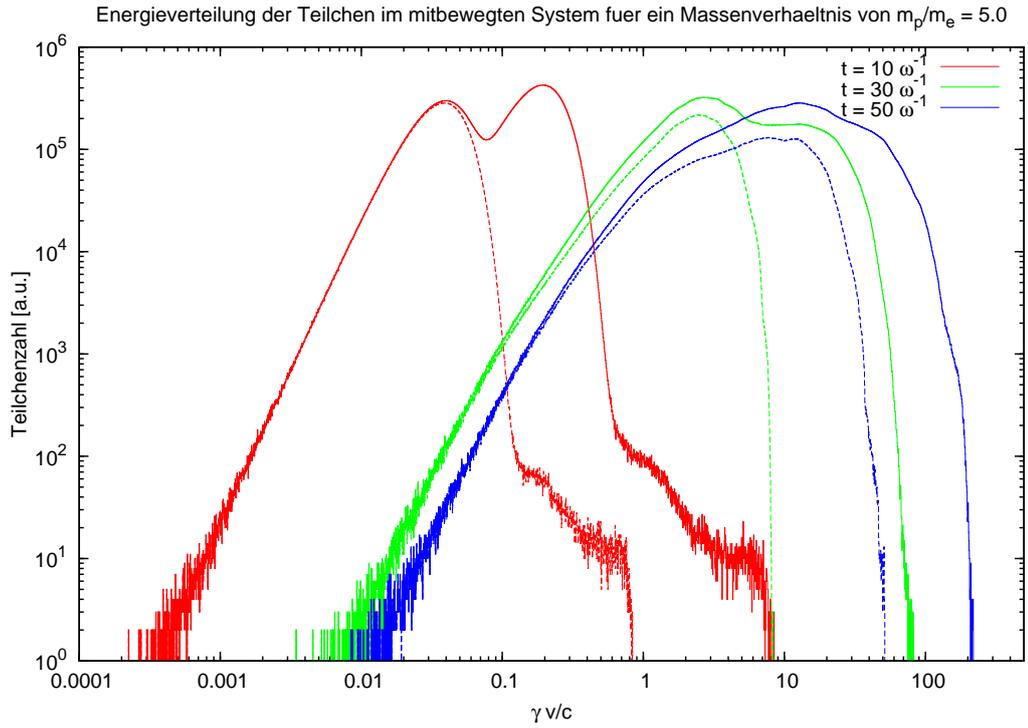
**Abbildung 5.16.:** Entwicklung der Verteilung der Teilchenimpulse parallel und senkrecht ( $\gamma \mathbf{v}_{\parallel}$  und  $\gamma \mathbf{v}_{\perp}$ ) der Elektronen/Positronen (oben) und Protonen (unten) der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$ . Es ist zu erkennen, dass die leichten und schweren Teilchen allesamt über den gesamten Zeitraum der Instabilität beschleunigt werden, das heißt, die Instabilitäten sind aufgrund des geringen Massenunterschiedes noch stark gekoppelt.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.17.:** Energieverteilung der Teilchen der Simulation *run\_005* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  im Laborsystem. Die jeweils durchgezogene Linie zeigt alle Teilchen, die gestrichelte nur die Protonen. Anfangs ist die Verteilung relativ eng um  $\gamma = 10$  zentriert, mit der Zeit werden einzelne Teilchen bis zu einer Energie von  $\gamma \approx 25$  beschleunigt.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.18.:** Energieverteilung aller Teilchen (durchgezogen) und der Protonen (gestrichelt) für ein Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5.0$  im mitbewegten System der beiden Populationen. Alle Teilchenspezies werden über den gesamten Zeitraum der Simulation beschleunigt, die energiereichsten sind am Ende bei  $\gamma \approx 200$  zu finden.

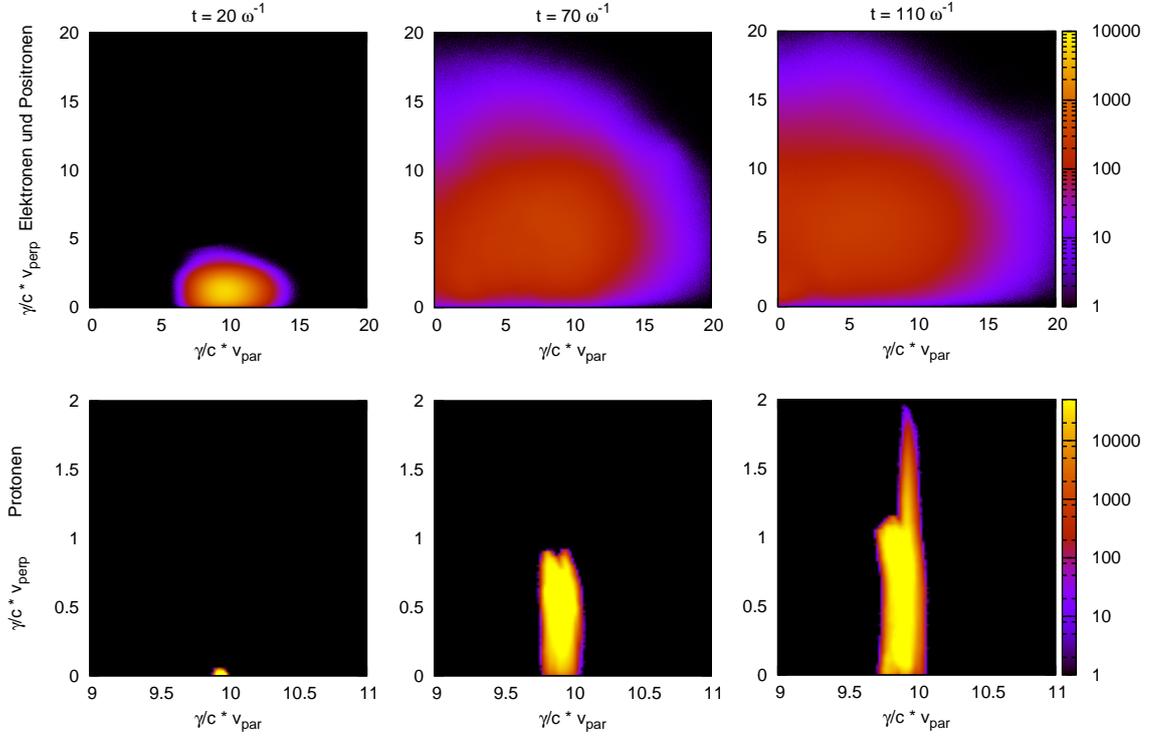
hindurch beschleunigt bis zum Thermalisieren des Plasmas, das bei etwa  $t = 110\omega_{pe}^{-1}$  einsetzt. Auch hier ist wiederum zu beobachten, dass der Großteil der Beschleunigung in der Transversal-Richtung auftritt.

Die Gesamtenergie im Laborsystem wurde in Abbildung 5.20 aufgetragen, dabei repräsentieren wieder die durchgezogenen Linien alle Teilchen, die gestrichelten zeigen nur die Protonen. Dabei ist zu beobachten, dass die anfangs um  $\gamma = 10$  zentrierte Verteilung eine nicht-thermische Form annimmt und sich immer mehr Teilchen im Hochenergiebereich ansammeln, an Ende erreichen einige Elektronen/Positronen eine Energie um  $\gamma \approx 35$ . Die Beschleunigung der Protonen ist in dieser Abbildung nicht besonders gut zu erkennen, umso besser dafür aber bei einer Betrachtung von Abbildung 5.21, in der wieder die Energieverteilung im Ruhesystem der jeweiligen Plasmapopulation aufgetragen wurde. Hier kann (wie auch schon im zweidimensionalen Graphen 5.19) beobachtet werden, dass die leichteren Teilchen den Großteil ihrer Beschleunigung vor  $t = 70\omega_{pe}^{-1}$  erfahren und nur die schwereren Protonen danach noch bis  $110\omega_{pe}^{-1}$  weiter beschleunigt werden.

**Massenverhältnis 200.0** Zuletzt sollen auch noch die Impuls- und Energieverteilungen der Simulation mit dem höchsten Massenverhältnis,  $m_p/m_e = 200.0$ , präsentiert werden. Als erstes ist in Abbildung 5.22 die Verteilung der Teilchen aufgeteilt in parallel und senkrecht dargestellt. Dabei ist zu beobachten, dass auch hier der Großteil der Elektronen- und Positronenbeschleunigung in der ersten Phase der Instabilität (bis etwa  $t = 80\omega_{pe}^{-1}$ ) auftritt, diese leichten Teilchen behalten anschließend ihre Verteilung annähernd bei. Die Protonen dagegen erfahren bis zum Ende der Instabilität weiterhin eine deutliche Beschleunigung, die - wie auch schon zuvor gesehen - zum Großteil in die Querrichtung auftritt.

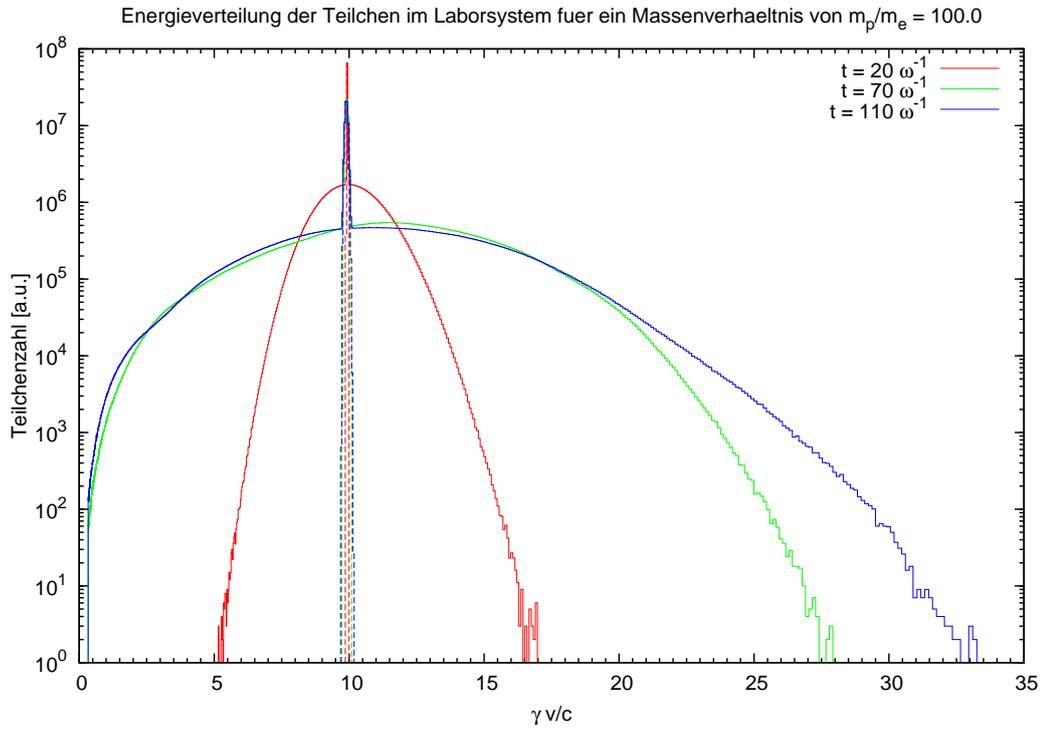
In Abbildung 5.23 ist dann die Energieverteilung im Laborsystem zu sehen, der schmale gestrichelte Peak in der Mitte repräsentiert die Protonen, die breite Verteilung die leichten Teilchen. Es ist wieder zu erkennen, wie im Laufe der Simulation der Anteil hochenergetischer Teilchen stark anwächst und einige eine Energie um  $\gamma \approx 40$  erreichen. Da hier die Protonen wiederum nur schlecht zu sehen sind, ist in Abbildung 5.24 auch für dieses Massenverhältnis die Verteilung im mit der Strömung mitbewegten Bezugssystem dargestellt. Hier zeigt der jeweils linke Peak die Protonen (das hochenergetische Ende der Protonenverteilung ist gestrichelt zusätzlich eingezeichnet) und der

## 5. Ergebnisse



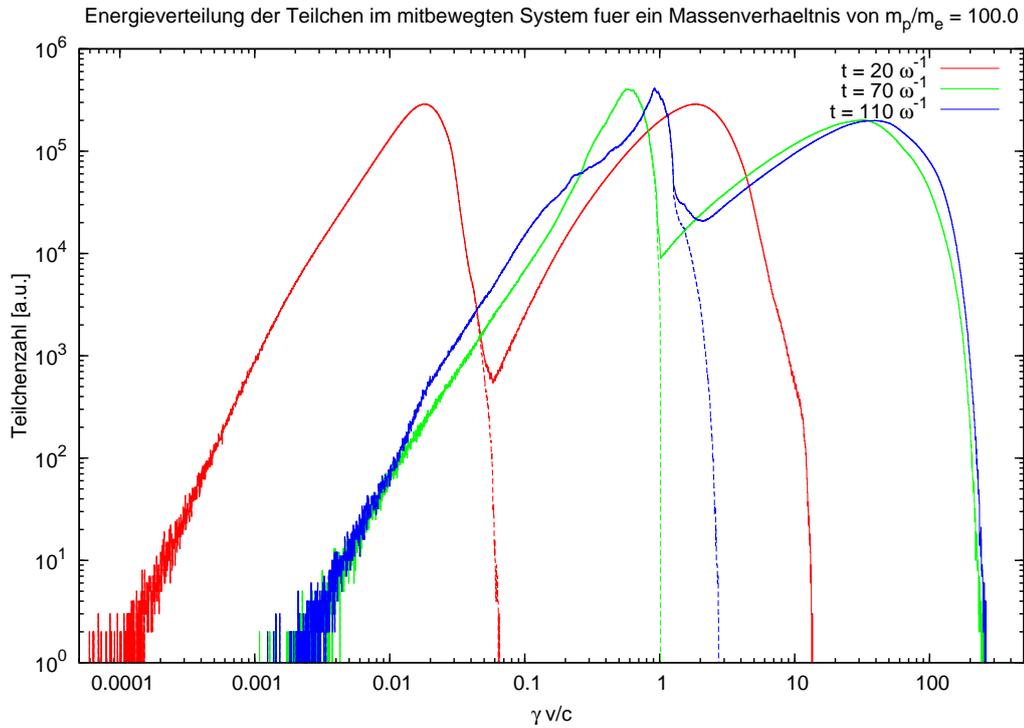
**Abbildung 5.19.:** Entwicklung der Verteilung von  $\gamma \mathbf{v}_{\parallel}$  und  $\gamma \mathbf{v}_{\perp}$  der Elektronen/Positronen (oben) und Protonen (unten) der Simulation *run\_009* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$ . Es ist deutlich zu sehen, dass ab  $t = 70\omega_{pe}^{-1}$  die Elektronen/Positronen kaum mehr beschleunigt werden, die Protonen aber bis  $t = 110\omega_{pe}^{-1}$  immer noch weiter Energie gewinnen. Daraus kann gefolgert werden, dass bei  $70\omega_{pe}^{-1}$  die Instabilität der leichten Teilchen bereits vorüber ist (siehe auch die pinke Linie in Abbildung 5.3).

## 5. Ergebnisse



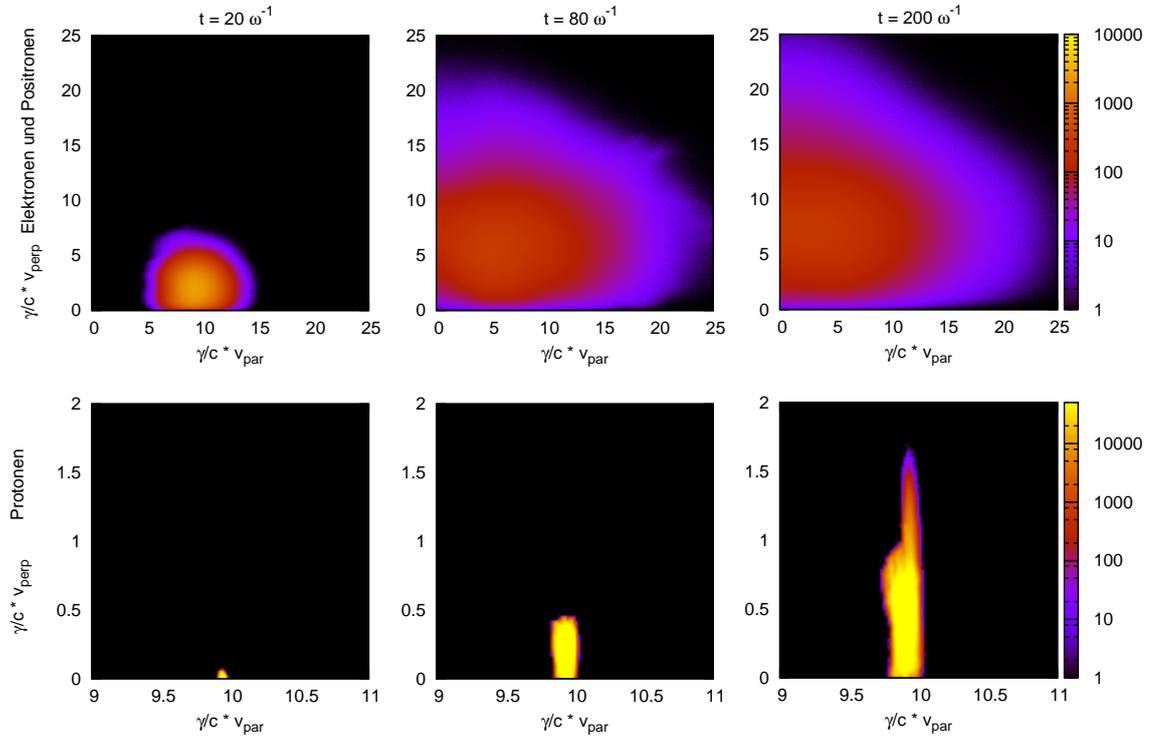
**Abbildung 5.20.:** Darstellung der Gesamtenergie der Teilchen im Laborsystem für ein Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$ , die durchgezogene Linie zeigt jeweils alle Teilchen, die gestrichelte nur die Protonen. Im Laufe der Simulation sammeln sich immer mehr Elektronen und Positronen im hochenergetischen Bereich an, einzelne erreichen Energien um  $\gamma \approx 35$ .

## 5. Ergebnisse



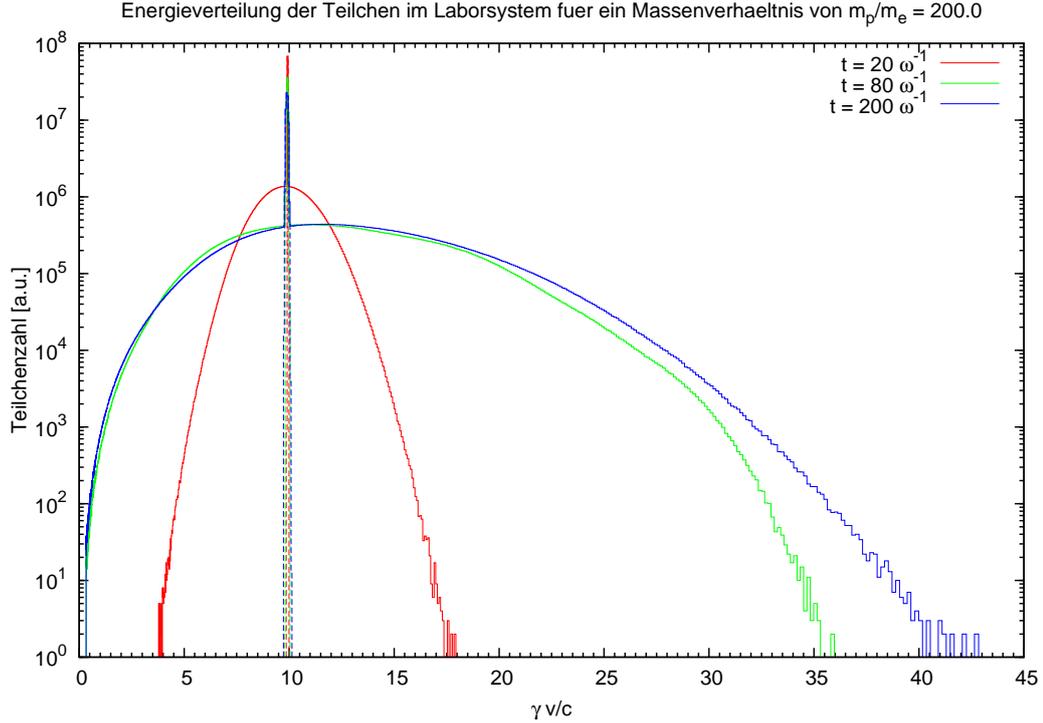
**Abbildung 5.21.:** Bei einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 100.0$  sind die beiden Instabilitäten deutlich voneinander getrennt, die leichten Teilchen (rechter Peak) werden nur in der ersten Phase signifikant beschleunigt, die schwereren Protonen (links, gestrichelt) gewinnen über den gesamten Zeitraum der Simulation Energie, die höchstenergetischen erreichen im mitbewegten Bezugssystem Energien um  $\gamma \approx 250$ .

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.22.:** Entwicklung der zweidimensionalen Impulsverteilung parallel gegen senkrecht der Elektronen und Positronen (oben) sowie Protonen (unten) der Simulation *run\_018* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$ . Die leichten Teilchen werden nur in der ersten Phase der Instabilität (bis etwa  $t = 80\omega_{pe}^{-1}$ ) signifikant beschleunigt, die Protonen dagegen über den gesamten Simulationszeitraum.

## 5. Ergebnisse

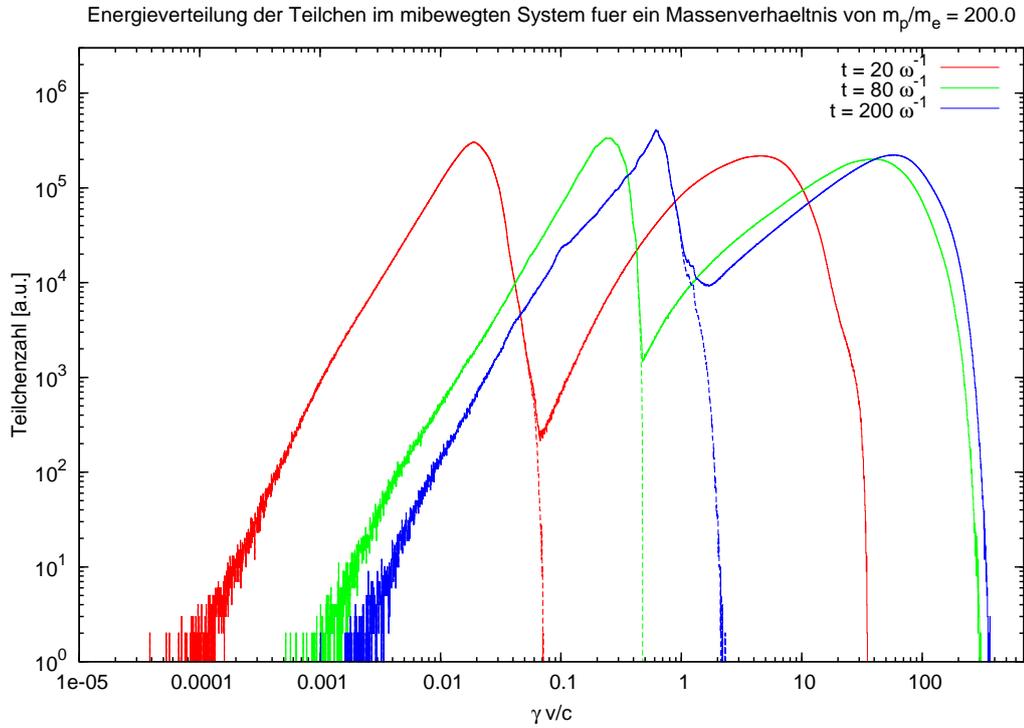


**Abbildung 5.23.:** Gesamtenergieverteilung aller Teilchen der Simulation *run\_018* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$  im Laborsystem, die Verteilung der Protonen ist zusätzlich gestrichelt eingezeichnet. Wie zu erkennen ist, sammeln sich im Laufe der Simulation immer mehr Teilchen im hochenergetischen Bereich oberhalb von  $\gamma \approx 25$ , einige Teilchen erreichen sogar Energien um  $\gamma \approx 40$ .

rechte stellt die Elektronen und Positronen dar. Wie schon in den Abbildungen 5.19 bis 5.21 zu sehen war, erfahren die leichten Teilchenspezies nur in der ersten Phase der Instabilität bis etwa  $t = 80\omega_{pe}^{-1}$  eine signifikante Beschleunigung, danach gewinnen nur noch die Protonen weiter Energie. Die am stärksten beschleunigten Teilchen liegen am Ende im Bereich von  $\gamma \approx 250$  bis 300.

**Zusammenfassung** Aus den Graphen der ein- und zweidimensionalen Energieverteilungen 5.13 bis 5.24 ist zu erkennen, dass sich die Instabilität bei Massenverhältnissen von  $m_p/m_e = 100.0$  und  $200.0$  in zwei Phasen entwickelt, ein Phänomen, das bei kleineren Massenverhältnissen nicht auftritt. In einer ersten Phase werden die jeweils leichten Teilchen in den entstehenden Flussschläuchen beschleunigt, sofern auch schwere

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.24.:** In der Energieverteilung im mit der Strömung bewegten Bezugssystem sind hier die Protonen (links) sowie die Elektronen und Positronen (rechter Peak) der Simulation *run\_018* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 200.0$  dargestellt. Die leichten Teilchen erfahren nur in der ersten Phase der Instabilität eine signifikante Beschleunigung und erreichen damit Energien um  $\gamma \approx 250$ , während die Protonen noch bis  $t = 200\omega_{pe}^{-1}$  weiter beschleunigt werden.

## 5. Ergebnisse

Teilchen beteiligt sind, erfahren diese dann in einer zweiten Phase, in der sich die zuvor verschwundenen Flussschläuche neu ausbilden, eine starke Beschleunigung, während sich die Energieverteilung der Elektronen und Positronen kaum mehr ändert.

## 5.4. Analyse des Zeitpunktes des Instabilitätsmaximums

In Tabelle 5.1 sowie in Abbildung 5.25 sind die Zeitpunkte, zu denen die Instabilität der Elektronen/Positronen bzw. der Protonen jeweils ihr Maximum erreicht, abhängig vom in der jeweiligen Simulation verwendeten Massenverhältnis  $m_p/m_e$  aufgetragen. Es ist deutlich zu sehen, wie der Zeitpunkt des Maximums der Elektronen-/Positronen-Instabilität fast konstant bei etwa  $t_{peak} \approx 42\omega_{pe}^{-1}$  bleibt, bei einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 5$  bzw. 20 aber von den etwas schwereren Protonen nach oben gezogen wird.

$m_p/m_e$	Simulationsnummer	$t_{peak}(e^-/e^+)$ [ $\omega_{pe}^{-1}$ ]	$t_{peak}(p^+)$ [ $\omega_{pe}^{-1}$ ]
1.0	run_008	43.3	43.3
5.0	run_005	44.7	44.7
20.0	run_006	59.0	59.0
42.8	run_007	44.9	68.3
100.0	run_009	42.6	99.2
200.0	run_018	41.0	195.1

Tabelle 5.1.: Übersicht über die Zeitpunkte, zu denen die Elektronen-/Positronen- bzw. die Protonen-Instabilität abhängig von den in den jeweiligen Simulationen verwendeten Massenverhältnissen ihren Höhepunkt erreicht (siehe auch Abbildung 5.25).

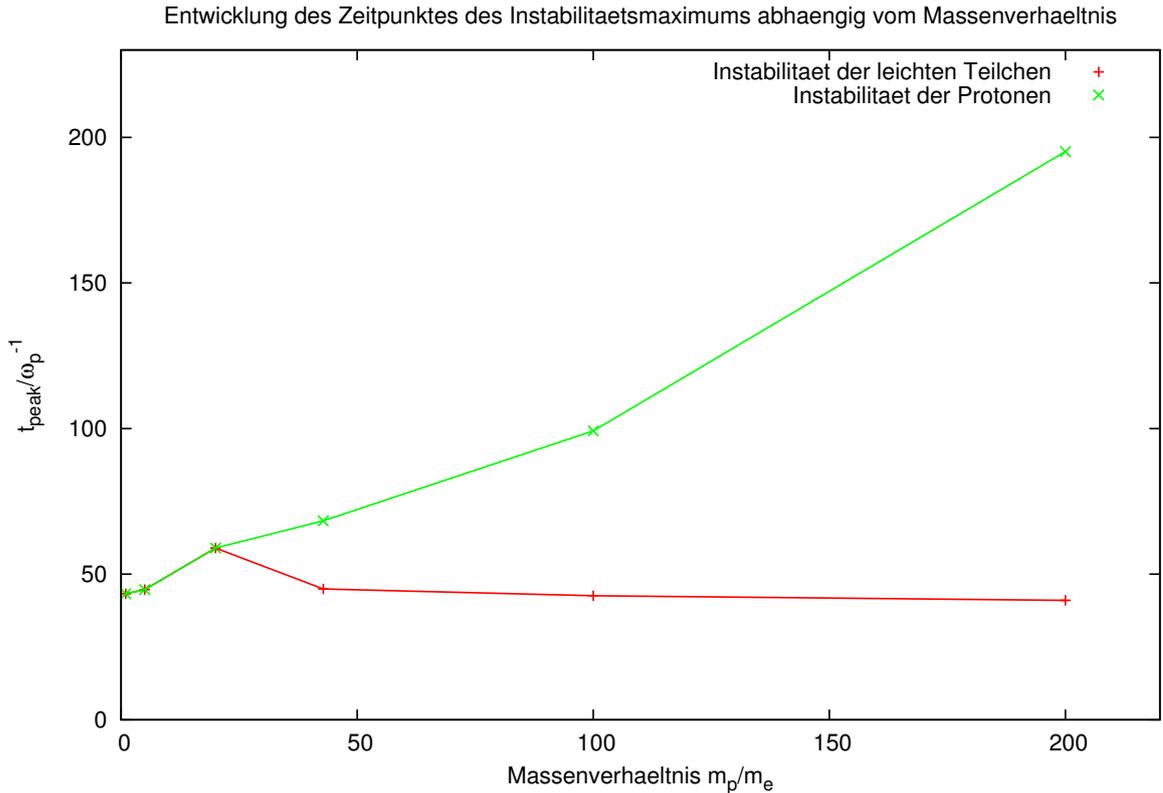
Die Protonen-Instabilität dagegen hat ihren Peak zu immer späteren Zeitpunkten, je höher das Massenverhältnis  $m_p/m_e$  ist. Um dies etwas genauer zu quantifizieren, wurde eine lineare Regression durchgeführt, um die Steigung der grünen Linie in Abbildung 5.25 zu bestimmen. Mit den in Tabelle 5.1 genannten Zeitpunkten ergibt sich folgende Geradengleichung

$$t_{peak} = ((0.743 \pm 0.051) \cdot (m_p/m_e) + (39.2 \pm 4.7)) \omega_{pe}^{-1} \quad (5.4)$$

für den Zeitpunkt des Protonen-Instabilitäts-Maximums. Damit kann nun der Zeitpunkt zum realen Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1836.2$  extrapoliert werden, es ergibt sich

$$t_{peak} = (1403 \pm 98) \omega_{pe}^{-1}.$$

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.25.:** Auftragung des Zeitpunktes, zu dem die Elektronen-/Positronen- bzw. die Protonen-Instabilität abhängig vom in der jeweiligen Simulation verwendeten Massenverhältnis ihren Höhepunkt erreicht. Bei kleinen Massenverhältnissen ( $m_p/m_e \leq 20$ ) sind die beiden Peaks nicht zu unterscheiden, erst später laufen die Linien dann deutlich auseinander.

Dies bedeutet, dass die Simulation nochmals ungefähr sieben mal so lange (gemessen an der simulierten Zeit in  $\omega_{pe}^{-1}$ ) laufen müsste, wenn mit dem realen Massenverhältnis simuliert würde. Dies entspricht allerdings noch nicht dem Mehraufwand an Rechenzeit. Wie der Unterschied zwischen Simulation *run\_009* und *run\_016* zeigt, muss die Simulationsbox bei weiterer Erhöhung des Massenverhältnisses in den beiden transversalen Dimensionen vergrößert werden, um Randeffekte zu minimieren. Daher würde vermutlich für eine Simulation mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1836.2$  eine Simulationsbox von ca.  $2500 \times 2500 \times 1000$  Zellen benötigt, also nochmals etwa 200 mal größer als die größte durchgeführte Simulation. Dies würde natürlich auch in einer um denselben

## 5. Ergebnisse

Faktor erhöhten Teilchenzahl und damit auch Rechenaufwand resultieren, es müsste insgesamt mit einer um etwa den Faktor 1400 erhöhten Anzahl an CPU-Stunden gerechnet werden.

## 5.5. Anteil der hochenergetischen Teilchen und Temperaturerhöhung

Ein Beschleunigungsprozess zeichnet sich vor allem durch zweierlei Dinge aus: (1) er ist imstande, die Temperatur der Verteilung zu erhöhen, also das Plasma zu heizen und (2) er erzeugt superthermische Teilchen. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit sollen diese beiden Punkte für die durchgeführten Simulationen untersucht werden. Die Aussage, dass sich die Verteilung von einer thermischen zu einer nicht-thermischen verändert, quantifiziert werden.

Dazu wird für die Teilchenverteilung auf dem Höhepunkt der Instabilität die durchschnittliche Driftgeschwindigkeit der beiden entgegengesetzt strömenden Plasmapopulationen berechnet (diese liegen etwa bei  $\gamma \approx 9$  bis 10) und diese dann jeweils mit dem negativen Wert davon geboostet, um die Energieverteilung dieser Teilchen innerhalb ihres Ruhesystems zu erhalten. Dann wird die Gesamtenergie und -teilchenzahl jeder Population ermittelt und damit eine Maxwell-Jüttner-Verteilung an diese gefittet.

Die Maxwell-Jüttner-Verteilung (siehe z.B. Chacón-Acosta et al. 2010) entspricht der Boltzmann-Verteilung für relativistische Geschwindigkeiten und sieht aus wie folgt:

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^2 \beta}{\theta K_2(1/\theta)} \cdot e^{(-\frac{\gamma}{\theta})}, \quad (5.5)$$

wobei  $\theta = kT/mc^2$  und  $K_2$  die modifizierte Besselfunktion zweiter Ordnung ist.

Auf diese Weise kann die Verschiebung der Teilchenenergien visualisiert werden (siehe Abbildung 5.26 und 5.27), es ist deutlich zu sehen, wie die Teilchenverteilung gegenüber der berechneten thermischen Verteilung verbreitert ist. Damit kann nun durch Subtraktion der beiden voneinander der Anteil der Teilchen im *High-Energy-Tail* der Verteilung berechnet werden. Dies wird als Beschleunigungseffizienz des jeweiligen Prozesses bezeichnet.

Das Ergebnis ist in Abbildung 5.26 und 5.27 illustriert, dort sind jeweils die beiden Verteilungen, sowie die Differenz der beiden für die Simulationen *run\_008* mit einem Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1.0$  (5.26) und *run\_009* mit  $m_p/m_e = 100.0$  (5.27) jeweils für die sich in der Simulation in negative (oben) bzw in positive (unten) z-Richtung bewegenden Teilchen gezeigt. Die resultierenden Beschleunigungseffizienzen sind in Tabelle 5.2 zu sehen, sie liegen alle im Bereich von 2 bis 4%. Damit wird die zur Erklärung

## 5. Ergebnisse

der gemessenen *Cosmic Ray* Anzahl geforderte Rate von 10% (Helder et al. 2009, 2010) zwar nicht ganz erreicht, liegt aber in der erwarteten Größenordnung. Betrachtet man die Entwicklung der Effizienzen bei Veränderung des Massenverhältnisses, so findet man, dass die Effizienz in der in die negative Richtung strömenden Plasmapopulation unabhängig ist und der Anteil hochenergetischer Teilchen in der positiven Richtung leicht abnimmt. Dies hat seine Ursache vermutlich in der unterschiedlichen Zusammensetzung der beiden Populationen.

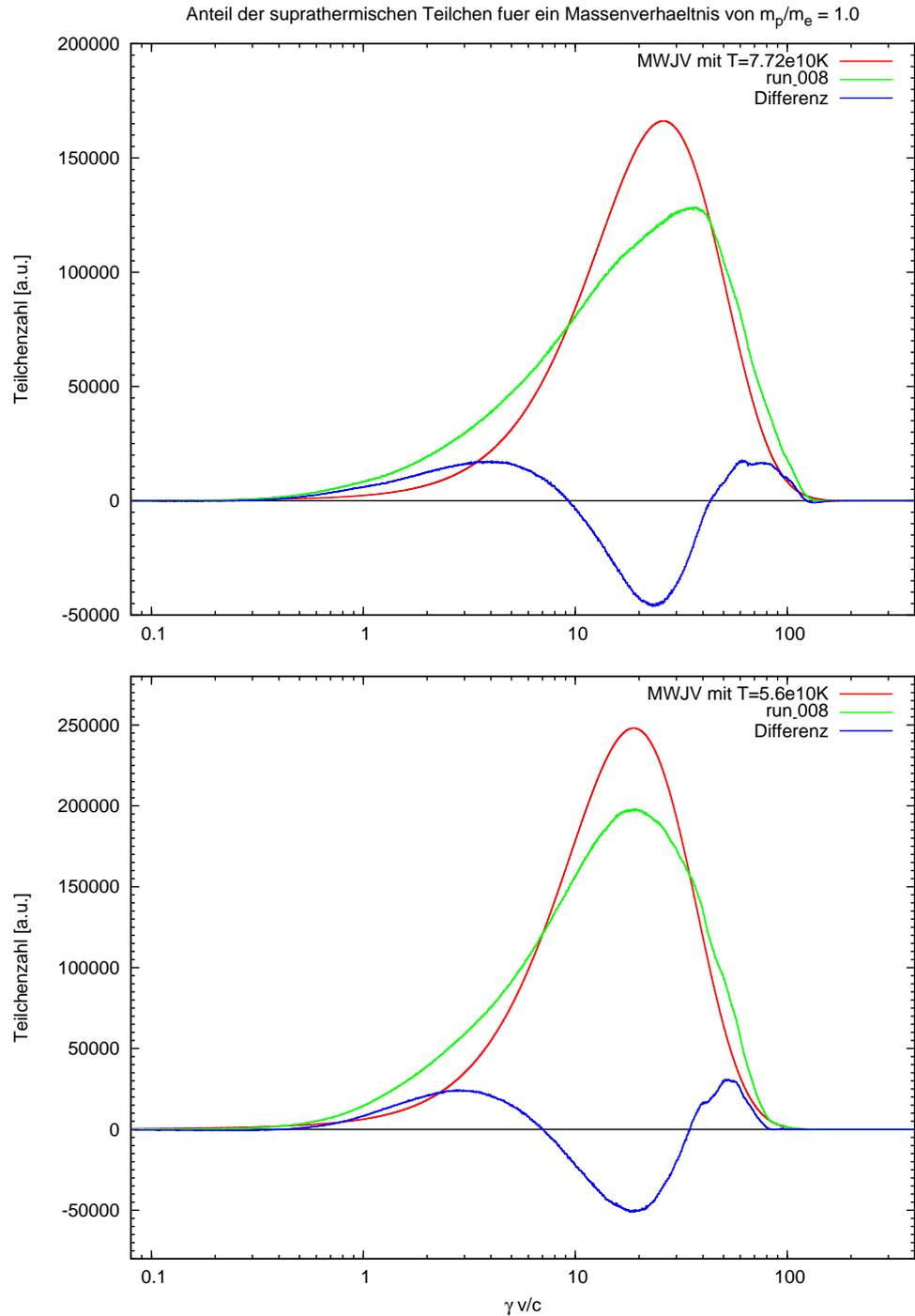
$m_p/m_e$	Simulationsnummer	Strömungsrichtung	Temperatur	Anteil der hochenergetischen Teilchen
1.0	run_008	negativ	$7.72 \cdot 10^{10} \text{K}$	3.72%
		positiv	$5.60 \cdot 10^{10} \text{K}$	3.21%
100.0	run_009	negativ	$1.20 \cdot 10^{11} \text{K}$	3.56%
		positiv	$7.85 \cdot 10^{10} \text{K}$	2.02%

Tabelle 5.2.: Übersicht über die Temperaturen der einzelnen Maxwell-Jüttner-Verteilungen sowie die berechneten Beschleunigungseffizienzen für die unterschiedlichen Massenverhältnisse und Plasmapopulationen.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der hier sichtbar wird, ist die Erhöhung der Plasmatemperatur, die zu Beginn jeder Simulation  $T = 5.87 \cdot 10^7 \text{K}$  beträgt. Die Temperatur des Plasmas nach der Instabilität beträgt aber zwischen  $10^{10}$  und  $10^{11} \text{K}$ , das Plasma wurde also durch die Instabilität geheizt. Die Differenz der Temperaturen zwischen den beiden entgegengesetzt strömenden Teilchenpopulationen entspricht fast genau dem Unterschied der Teilchenzahlen, in der in negative Richtung strömenden Population sind 50% mehr Teilchen enthalten als in der anderen und die Temperatur liegt etwa um den selben Faktor höher.

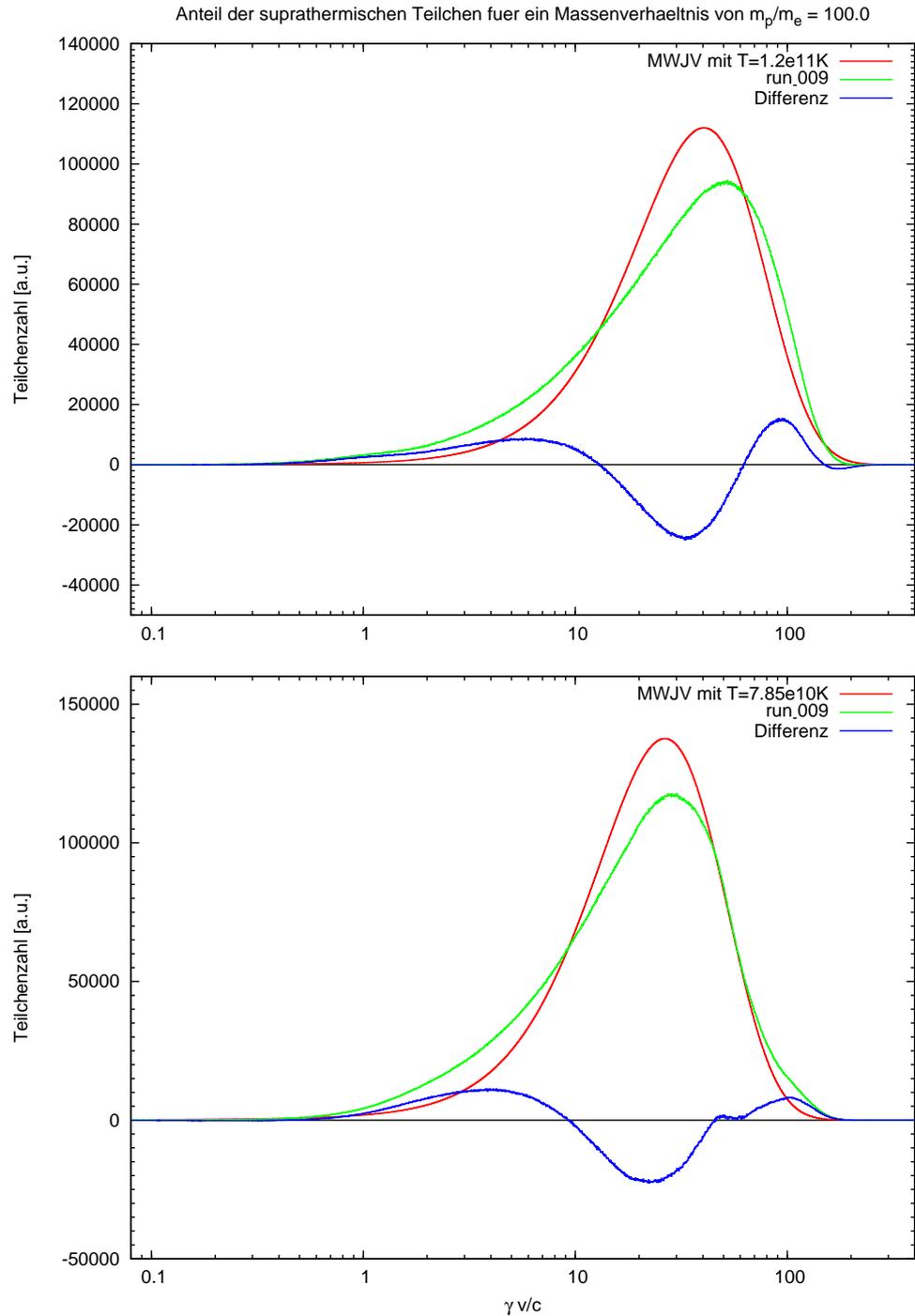
Abschließend ist anzumerken, dass die Temperaturerhöhung zwischen Simulationsbeginn und -ende relativ hoch ist, daraus resultiert wohl auch die geringe Beschleunigungseffizienz von nur 2 bis 4%, da so der Großteil der Teilchenbeschleunigung über die Temperaturerhöhung eintritt.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.26.:** Energieverteilung der sich in negativer (oben) bzw. positiver (unten)  $z$ -Richtung bewegendem Teilchen auf dem Höhepunkt der Instabilität der Simulation *run\_008* sowie die daran gefittete Maxwell-Jüttner-Verteilung mit einer Temperatur von  $T = 7.72 \cdot 10^{10}K$  (oben) und  $5.60 \cdot 10^{10}K$  (unten). Außerdem ist jeweils die Differenz der beiden Verteilungen zur Berechnung der Beschleunigungseffizienz geplottet.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.27.:** Energieverteilung der sich in negativer (oben) bzw. positiver (unten)  $z$ -Richtung bewegenden Teilchen auf dem Höhepunkt der Instabilität der Simulation *run\_009* sowie die daran gefittete Maxwell-Jüttner-Verteilung mit einer Temperatur von  $1.20 \cdot 10^{11}K$  (oben) und  $7.85 \cdot 10^{10}K$  (unten). Außerdem ist jeweils die Differenz der beiden Verteilungen zur Berechnung der Beschleunigungseffizienz geplottet.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein dreidimensionaler vollrelativistischer und parallelisierter Particle-in-Cell Code geschrieben, ausführlich getestet und angewandt. Der Code ACRONYM ist variabel einsetzbar und von der Genauigkeit und Stabilität her State-of-the-Art und somit konkurrenzfähig zu den sonstigen in der Astrophysik eingesetzten Codes anderer Gruppen. Die Energie bleibt bis auf einen Fehler von  $< 0.03\%$  erhalten, die Divergenz des Magnetfeldes bleibt immer unter einem Wert von  $10^{-12}$  und die Skalierung wurde mittlerweile bis zu einer Clustergröße von einigen 10000 CPUs getestet.

In dieser Arbeit wurde dann, nach der Entwicklung des Codes, der Einfluss des fundamentalen Massenverhältnisses  $m_p/m_e$  auf die Teilchenbeschleunigung durch Plasmainstabilitäten untersucht. Dies ist relevant und wichtig, da in PiC-Simulationen in den allermeisten Fällen nicht mit dem realen Massenverhältnis gerechnet wird, da sonst viel zu viel Rechenleistung benötigt würde, um zu sehen, was mit den Protonen geschieht und was ihr Einfluss auf die leichten Teilchen wie Elektronen und Positronen ist.

Zu diesem Zweck wurden Simulationen mit Massenverhältnissen zwischen  $m_p/m_e = 1.0$  und  $200.0$  durchgeführt. Diese haben alle gemeinsam, dass periodische Randbedingungen verwendet wurden und das zur Verfügung stehende Simulationsgebiet mit jeweils zwei gegeneinander strömenden Plasmapopulationen vollständig gefüllt wurde, um jegliche Art von auftretenden Schocks auszuschließen.

Die Rohdaten der einzelnen Simulationen wurden auf vielfältige Art und Weise analysiert, es wurden z.B. Schnitte durch die Teilchenverteilung erstellt, sowie ein- oder zweidimensionale Histogramme und Energieverläufe betrachtet.

Dabei haben sich folgende Kernpunkte ergeben:

- Für Massenverhältnisse bis etwa  $m_p/m_e \approx 20$  bildet sich die gesamte Zweistrom-Instabilität in nur einer Phase aus, das heißt, es bilden sich von ringförmigen Magnetfeldern umgebene Flussschläuche aus, die dann verschmelzen, bis nur noch zwei übrig sind und alle Teilchen werden über den gesamten Verlauf der Instabilität beschleunigt. Es ist damit zu folgern, dass die unterschiedlich schweren Teilchenspezies Protonen und Elektronen/Positronen durch die relativ nahe beieinander liegenden Massen noch so stark gekoppelt sind, dass sich nur eine Instabilität entwickeln kann.
- Bei großen Massenverhältnissen ( $m_p/m_e > 20$ ) ist eine deutliche Trennung in zwei Phasen der Instabilität zu erkennen. Zuerst bilden sich wiederum Flussschläuche aus, diese verschmelzen miteinander (zu zweien oder mehr), bevor der erste Teil der Instabilität abflaut. Anschließend entstehen wieder ringförmige Magnetfelder und Flussschläuche, von denen einer meist deutlich stärker ist als all die anderen, das bedeutet, dass dieser von stärkeren Magnetfeldern umgeben ist und eine höhere Teilchendichte aufweist. Im Rahmen dieser zweigeteilten Instabilität werden die Elektronen und Positronen nur in der ersten Phase signifikant beschleunigt, die deutlich schwereren Protonen gewinnen über den gesamten Zeitraum Energie. Die höchstenergetischen Teilchen erreichen im Ruhesystem der jeweiligen Plasmapopulation Werte um  $\gamma \approx 250$ .

Man kann daraus für zukünftige Untersuchungen mit Hilfe von PiC-Codes den Schluss ziehen, dass Rückschlüsse auf das tatsächliche Verhalten beim realen Massenverhältnis von  $m_p/m_e = 1836.2$  nur aus den Simulationen mit  $m_p/m_e \gg 20$  gezogen werden können, da die starke Kopplung der leichten und schweren Teilchen bei kleineren Massenverhältnissen die Ergebnisse sehr stark beeinflusst. Es wurde anhand der gemessenen Zeitpunkte der Instabilitätsmaxima eine Extrapolation durchgeführt, die zeigt, dass die Instabilität beim realen Massenverhältnis etwa bei  $t \approx 1400 \omega_{pe}^{-1}$  auftreten würde. Um dies wirklich zu simulieren müsste allerdings mehr als die 1000-fache Anzahl an CPU-Stunden aufgewandt werden.

Des Weiteren wurde eine Maxwell-Jüttner-Verteilung an die Teilchenverteilungen der einzelnen Simulationen auf dem Höhepunkt der Instabilität gefittet, um sowohl die neue Temperatur des Plasmas als auch die Beschleunigungseffizienz des Prozesses zu berechnen. Die Temperatur erhöht sich demnach durch die Instabilität von etwa  $10^8\text{K}$  auf  $10^{10}$

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

bis  $10^{11}\text{K}$ , der Anteil suprathemischer Teilchen beträgt 2 bis 4%.

Alle diese Erkenntnisse wurden durch Energieverläufe belegt, in denen man das Ansteigen und wieder Abfallen der transversalen Magnetfeldenergie (aus den ringförmigen Magnetfeldern) ein bzw. zweimal sehen kann. Des weiteren konnte aus der Entwicklung der Teilchendichte (anhand von Schnitten senkrecht zur Strömungsrichtung zu verschiedenen Zeitpunkten) und der Stärke der transversalen Magnetfelder die Entstehung der Flussschläuche beobachtet werden. Zu Letzt wurde noch auf die Verteilung der Teilchenimpulse transversal und in Strömungsrichtung sowie auf die Veränderung der Energie der unterschiedlichen Teilchenspezies im Laborsystem und im Ruhesystem der jeweiligen Plasmapopulation eingegangen.

Mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Code können auch viele andere Szenarien der Hochenergie-Astrophysik simuliert werden, es wäre z.B. ohne weiteren Aufwand möglich, auf der einen Seite der Simulationsbox eine reflektierende Wand einzustellen, von der anderen Seite Teilchen einströmen zu lassen und so die Ausbildung und den Einfluss eines Schocks auf die Teilchenbeschleunigung zu untersuchen. Des weiteren kann der Code auch in anderen Bereichen wie der solaren Physik und der Laser Wakefield Acceleration gewinnbringend eingesetzt werden.

Der Lehrstuhl für Astronomie der Universität Würzburg hat mit dem vielseitig einsetzbaren Code ACRONYM ein potentes Werkzeug an der Hand, mit dem in den kommenden Jahren sicher noch viele weitere interessante Ergebnisse in unterschiedlichsten Bereichen der Astrophysik erzielt werden können.



# A. Abstract

In this thesis a three-dimensional, fully relativistic and parallelised Particle-in-Cell Code was developed, tested and used for astrophysical purposes. The Code ACRONYM can be used for a variety of different scenarios, it is state-of-the-art in matters of stability and accuracy.

After the development the code was used to investigate the influence of the fundamental mass ratio  $m_p/m_e$  on particle acceleration by plasma instabilities. This is important, because usually in PiC-simulations the mass ratio used isn't the real one  $m_p/m_e = 1836.2$ , because this would take too much CPU-time in order to see what happens to the protons and what is their influence on the lighter particles like electrons and positrons.

For this purpose simulations with mass ratios between 1.0 and 200.0 have been performed. They all have in common that periodic boundary conditions were used and that the whole computational domain has been filled with particles that are counterstreaming along the  $z$ -direction with  $\gamma \approx 10$  each in order to exclude any development of shocks.

The resulting main issues are the following:

- For mass ratios below  $m_p/m_e \approx 20$  the whole instability develops in only one phase, i.e. current filaments surrounded by circular magnetic fields develop and merge together. All particles are accelerated over the whole run, so one can conclude that the different species are still strongly coupled because of the very similar masses of electrons/positrons and the protons and therefore only one instability can arise.
- For higher mass ratios a distinctive separation of the instability in two phases is observable. First some flux tubes develop and merge until the first phase is over. Afterwards new magnetic fields and flux tubes are arising, where one of them usually is particularly strong compared to the others, i.e. it is surrounded by stronger magnetic fields and holds a much higher particle density. In the context of

## A. Abstract

this split instability, the electrons and positrons are getting accelerated significantly only in the first phase, the much heavier protons gain energy over the whole time.

One can therefore conclude for future investigations with PiC codes that informations about the behaviour at the realistic mass ratio of  $m_p/m_e = 1836.2$  can only be gained from the simulations with  $m_p/m_e \gg 20$  because of the strong coupling of the light and heavy particles at low mass ratios. An extrapolation to the real mass ratio shows that the peak of the instability would occur approximately seven times later than the runtime of the longest simulation at about  $t \approx 1400 \omega_{pe}^{-1}$ , but in order to realize this, at least 1000 times the now used CPU-hours would be necessary.

Furthermore the acceleration efficiency for this process was calculated by fitting a Maxwell-Jüttner-Distribution to the particle distribution from the simulations during the peak of the instabilities. The calculated fraction of superthermal particles is in the range of 2 to 4% and the temperatures of the plasma streams rise from  $10^8$  at the beginning of the simulations to values around  $10^{10}$  to  $10^{11}$ K.

## B. Publikationsliste

- Burkart, T. ; Elbracht, O. ; Ganse, U. ; Spanier, F.: *The influence of the mass-ratio on the acceleration of particles by filamentation instabilities*. In: *Astrophysical Journal* 720 (2010), September, S. 1318-1324
- Burkart, T. ; Elbracht, O. ; Spanier, F.: *Presentation of simulation results of our 3D PIC Code*. In: *Astronomische Nachrichten* 328 (2007), September, S. 662
- Ganse, U. ; Burkart, T. ; Spanier, F. ; Vainio, R.: *Kinetic Simulations of Solar Type II Radio Burst Emission Processes*. In: *Twelfth International Solar Wind Conference* 1216 (2010), März, S. 245-248. DOI 10.1063/1.3395846
- Rödiger, C. ; Burkart, T. ; Elbracht, O. ; Spanier, F.: *Multiwavelength periodicity study of Markarian 501*. In: *Astronomy and Astrophysics* 501 (2009), Juli, S. 925-932. DOI 10.1051/0004-6361/200911814

Burkart, T. ; Elbracht, O. ; Ganse, U. ; Spanier, F.: *The influence of the mass-ratio on the acceleration of particles by filamentation instabilities.*  
In: Astrophysical Journal 720 (2010), September, S. 1318-1324

# Kinetic Simulations of Solar Type II Radio Burst Emission Processes

Urs Ganse\*, Thomas Burkart\*, Felix Spanier\* and Rami Vainio†

\*Lehrstuhl für Astronomie, Universität Würzburg, Germany

†Department of Physics, University of Helsinki, Finland

**Abstract.** Using our kinetic Particle-in-Cell simulation code, we have examined the behavior of different plasma modes in the environment close to a CME shock front, with special focus on the modes that may contribute to the formation of type II radio bursts. Apart from electron velocity spectra, numerical dispersion plots obtained from simulation data allow for analysis of wave modes in the simulated plasma, especially showing growth and damping of these modes over time. These plots reveal features at  $2\omega_p$  which are not predicted by linear wave theory, that may be results of nonlinear three wave interaction processes as theoretically predicted for type II emission processes.

**Keywords:** Type II Radio Bursts, Plasma, Particle-in-Cell

**PACS:** 94.05.Dd, 94.05.Pt, 96.60.Tf, 52.65.Rr

## INTRODUCTION

Since the beginning of solar radio observations in the 1950ies, radio bursts have been recorded as transient phenomena in the sun's radio spectrum [1]. While satisfactory theoretical explanations have been found for most of the radio burst types, the precise origin of type II radio bursts is still an open question in solar physics today.

Observational evidence shows that type II radio emissions are closely coupled to CME shocks [2, 3], and numerous theoretical models for the localization of radio emissions around these bursts exist [4, 5]. However, only limited numerical studies[6] have been performed of the microphysical events in the emission region that lead to three-wave coupling and ultimately fundamental and harmonic emission of radio waves, thus producing the characteristic two-band spectrum of a type II burst.

## THREE-WAVE COUPLING

The canonically accepted mechanism for production of transversal electromagnetic emissions at both  $\omega_p$  and  $2\omega_p$  is through nonlinear three-wave interaction of Langmuir waves [4, 7, 8]:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L' + S && \text{reflection} \\ L &\rightarrow T(\omega_p) + S' && \text{emission at } \omega_p \\ L + L' &\rightarrow T(2\omega_p) && \text{emission at } 2\omega_p \end{aligned}$$

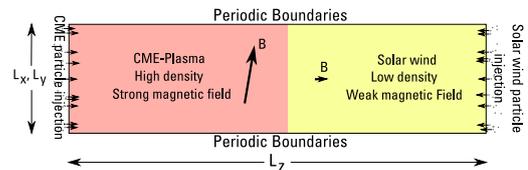
The Langmuir waves for this reaction are created by fast electrons accelerated by shock drift acceleration (SDA) at the CME shock. The existence of accelerated

electrons and Langmuir waves has been proven by in-situ satellite measurements[9].

CME shocks are very extensive structures in the heliosphere which span distances of multiple solar radii, and hence contain plasmas with strongly different densities and plasma frequencies. Yet, the fact that radio spectra from type II bursts show quite narrow bandwidths indicates that special conditions in small-scale structures along the shock front must be present to produce localized emissions.

## MODELING

Creating a suitable model of a CME shock using a particle-in-cell simulation entails a number of numerical difficulties. Since the code needs to numerically resolve  $\lambda_D$  and  $\omega_p$  of the modeled plasma, the maximum length- and timescales are quite limited unless large amounts of computational resources are employed.



**FIGURE 1.** Schematic illustration of the general simulation setup, modeling a CME shock in the center of the simulation area. The “short” directions employ periodic boundary conditions, while in the “long” direction, absorbing boundaries with particle injection are used.

With the resources available to the authors, length scales of about  $l \approx 50$  m and timescales of  $t \approx 1 \mu$ s

**TABLE 1.** Parameters of the up- and downstream plasmas.

	CME (downstream)	Solar wind (upstream)
$n$	$502 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$	$125 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$
$T$	$25 \cdot 10^6 \text{ K}$	$3 \cdot 10^6 \text{ K}$
$ \vec{B} $	50 G	5 G
$v^*$	$1.5 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$	$-1.5 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$
$\omega_p$	363 MHz	182 MHz
$\beta$	0.08	0.26

\* Shock-relative velocity

are attainable. Since these lie far below structural or hydrodynamic scales of a CME shock, simulations can ever only model small parts of the actual emission region, with suitably predefined environment conditions.

Our simulations center the model area around the density discontinuity of the CME shock structure, as shown in figure 1. In a co-moving system with the shock in the center, the plasma at the upstream side of the shock has properties of solar wind above an active region (taken from [10]), while the region downstream contains a denser and hotter plasma with a much stronger magnetic field, which is modeled according to [11]. Detailed parameters of both plasma regions are shown in Table 1.

Simulations were performed with different numbers of cells, from  $4 \times 4 \times 2048$  up to  $16 \times 16 \times 8192$  (the results in this paper were derived from the largest ones). Each simulation contained 24 electrons and 24 protons per cell, with a triangular-shaped cloud (TSC) form factor. In  $x$  and  $y$  direction, periodic boundaries are employed, while in the  $z$  directions, fixed boundary conditions were used, with plasma particle injection corresponding to the physical parameters for the respective plasma.

The strong magnetic field gradient at the central discontinuity causes some problems in practice, since strong initial electromagnetic waves are created here, at the start of a simulation. In order to dampen these waves (which would be interfering with the observation of physical effects we are looking for) and to give the shock a possibility to relax to a more self-consistent state, a damping term is introduced in the maxwell equations, fading out after 1000 timesteps. Only data after that has been used in the analysis.

## PARTICLE-IN-CELL SIMULATION CODE

The simulations used in this paper were performed using the kinetic particle-in-cell simulation Code “ACRONYM” (Advanced Computational Relativistic Observatory - Nice Yee-Lattice Maxwellsolver), developed in our working group[12]. It is a three-

dimensional, MPI-parallelized fully relativistic kinetic plasma simulation code, and has been extensively tested with analytical test cases and numerical simulations of independent groups.

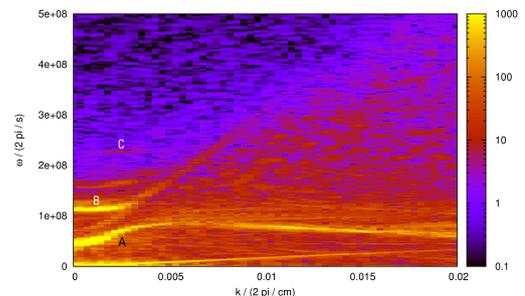
The applicability of this code ranges over a vast number of length scales and it can be used to study phenomena in the laboratory, heliosphere, and astrophysical plasma. Studies of plasma phenomena where in situ measurements of the particles and fields can be done are the key to verifying the validity of the numerical code.

## RESULTS

The following figures show dispersion relations of the simulated plasmas. By taking both the temporal and spatial fourier transform of suitable simulation quantities and then plotting the intensities in an  $\omega$ - $k$ -plot, wave modes in the plasma can be visualised. Using a longitudinal component of the electric field primarily shows Langmuir wave intensity, while a transverse components of magnetic or electric fields allows analysis of electromagnetic wave modes.

It should be noted that the fourier transform was spatially limited to the upstream region of the simulation, hence only wave modes from the upstream plasma are represented in the plots below.

The results in this paper were obtained from simulations on our in-house 64-CPU Opteron cluster, as well as 48-CPU SunFire E6900 Systems.



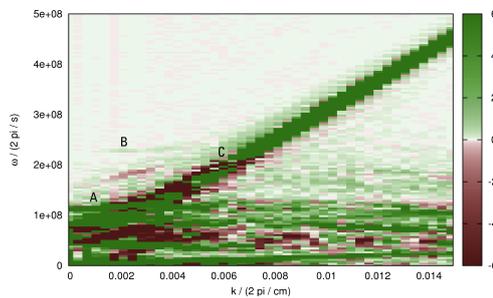
**FIGURE 2.** Longitudinal dispersion plot of the shock model plasma. Langmuir waves (A) and quasi-longitudinal X-mode contributions (B) are dominant, but additional modes not predicted by linear theory (C) are observable.

The simulations of the shock model, each running for 12000 time steps with a physical time  $t = 0.52 \mu\text{s}$ , show interesting features in their dispersion relations: apart from the expected Langmuir waves and electromagnetic modes with maxima at the plasma frequency, additional modes are visible in the dispersion plots (figures 2 and 3), with dominant emissions at the first harmonic of  $\omega_p$ . Since these are obviously no modes predicted by linear

theory, it seems likely that these modes are products of nonlinear interaction processes.

By taking the difference of dispersion plots at two different times, growth and damping of individual wave modes can be observed. Figure 3 shows the change in intensities for transverse modes. A strong growth of modes at the plasma frequency is visible (denoted by “A” in Figure 3), and modes at the first harmonic of the plasma frequency, but not identical to the electromagnetic modes, show growth tendencies (“B”).

Looking at the electromagnetic wave dispersion relation in figure 3, we see that a loss of intensity occurs between the plasma frequency and its first harmonic, but a sudden gain in intensity is visible upwards from  $2\omega_p$  (“C”).



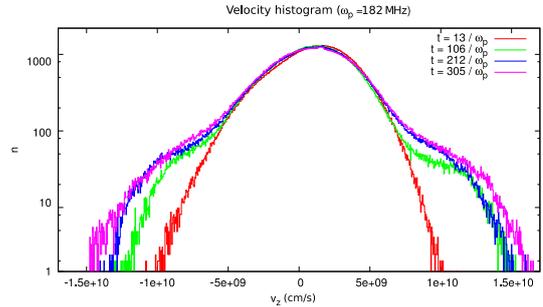
**FIGURE 3.** Growth and damping of transverse modes. Increase in emissions at  $\omega_p$  is very strong (A), but growth of modes at  $2\omega_p$  is also visible (B). Electromagnetic waves also grow from this frequency upwards (C).

While it is not entirely clear whether these processes are in fact the ones assumed by common theoretical descriptions, they do show emission at twice the plasma frequency and are therefore possible candidates for type II radio emission.

Additionally, particle acceleration at the shock is visible (see figure 4), which is consistent with theory. The development of the electron distribution functions suggest that a steady state has not yet been reached after these times, so no quantitative analysis of the electron distribution is performed here. It should however be noted that no electron *beams* (meaning a bump-on-tail in the velocity distribution) have formed within the timescales of the simulation.

## DISCUSSION

The results obtained using kinetic particle-in-cell simulations show growth of transversal electromagnetic wave modes at the plasma frequency and its first harmonic. The harmonic emissions are, at least in part, created with dispersion relations not predicted by linear theory, and are therefore assumed to stem from nonlinear wave in-



**FIGURE 4.** Histogram of electron velocities in a shock model simulation. A development of superthermal parts of the distribution function is visible, but no steady state has developed at the end of the simulation.

teraction processes. The resulting emission with  $\omega_p$  and  $2\omega_p$  contributions qualitatively corresponds to the observed spectra of type II radio bursts, as observed in conjunction with CME shock fronts.

The problem with the shock model employed in these simulations, simplified for reasons of numerical feasibility, has some shortcomings, in that it does not accurately depict the situations at a CME shock front. However, length scales for a realistic global shock model are not computationally possible with the resources available to the authors.

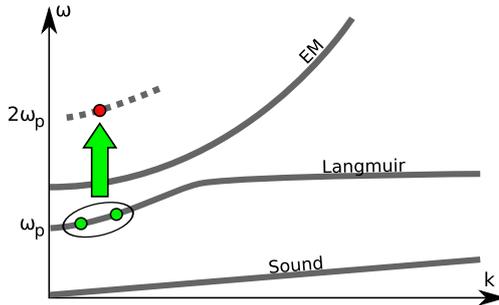
Nonetheless, the creation of nonlinear wave modes, apparent in the dispersion plots, are encouraging results, showing that the creation processes for radio bursts can in fact be modeled using our particle-in-cell simulation code.

In contrast to observations, where radio emissions at the fundamental and harmonic frequencies show roughly the same intensities, the relative amplitudes of electromagnetic emissions at the plasma frequency are much stronger than the features which are visible at the first harmonic. It should be noted that these dispersion plots are not the actual emission spectra, and the precise meaning of signals apart from the linear theory solutions is not well understood. The features visible at  $2\omega_p$  may very well be caused by the onset of three wave interaction processes, and their relative intensities need not be indicative of the resulting radio emissions.

An attempt to interpret the  $2\omega_p$  features in the dispersion plots using nonlinear wave interactions is illustrated in figure 5. Through three-wave interaction of counter-propagating Langmuir waves,  $2\omega_p$  excitations are created.

Alternatively, the feature at  $2\omega_p$  could be explained as a beat wave created by nonlinear interaction of two electromagnetic waves in the upstream region.

Further research is necessary to refine the simulation



**FIGURE 5.** Possible explanation of the feature visible in dispersion plots, through interaction of two Langmuir waves (with opposite directions, which is not depicted in the plot).

model, or potentially replace the ad-hoc shock model with a model more consistently representable in a PiC simulation. Especially with theoretical and observational data pointing to CME foreshock region as emission region for type II radio bursts [4, 9], a more detailed look at the conditions and particle spectra in this region will be necessary.

### SUMMARY

Using our kinetic Particle-in-Cell simulation code, we have performed simulations of CME shock environments, with special focus on the emission processes of type II radio bursts. Using spatial and temporal fourier transform of the simulation results, dispersion plots of wave modes present in the plasma were obtained.

Apart from the sound- electromagnetic- and Langmuir waves predicted by linear theory, these dispersion plots show additional excitations at twice the plasma frequency, but distinct from the dispersion relation of electromagnetic waves.

While these results can not conclusively prove or disprove theoretical predictions of three wave coupling in the creation of type II radio bursts, it shows that our ongoing research using kinetic simulations can provide many new insights in the emission process.

### ACKNOWLEDGMENTS

UG likes to thank the Elite Network of Bavaria for funding, UG and TB thank the DFG-funded graduate school (GRK 1147), FS would like to thank the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG SP 1124/1), RV acknowledges financial support from the Academy of Finland.

### REFERENCES

1. J. Wild, and L. McCready, *Australian Journal of Scientific Research* **3**, 387–398 (1950).
2. H. V. Cane, and W. C. Erickson, *The Astrophysical Journal* **623**, 1180–1194 (2005).
3. Y. Liu, J. G. Luhmann, S. D. Bale, , and R. P. Lin, *The Astrophysical Journal Letters* **691**, L151–L155 (2009).
4. S. A. Knock, I. H. Cairns, P. A. Robinson, and Z. Kuncic, *Journal of Geophysical Research* **106**, 25041–25052 (2001).
5. J. M. Schmidt, and N. Gopalswamy, *Journal of Geophysical Research* **113**, A08104 (2008).
6. M. Karlický, and M. Vandas, *Planetary and Space Science* **55**, 2336–2339 (2007).
7. D. B. Melrose, *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1986.
8. F. Spanier, and R. Vainio, *Advanced Science Letters* **2**, 337–346(10) (September 2009).
9. M. Pulupa, and S. D. Bale, *Astrophysical Journal* **676**, 1330–1337 (2008).
10. S. Mancuso, J. C. Raymond, J. Kohl, Y.-K. Ko, M. Uzzo, and R. Wu, *Astronomy and Astrophysics* **400**, 347–353 (2003).
11. M. Minarovjech, V. Rušin, and M. Saniga, *Solar Physics* **248**, 167–176 (2008).
12. T. Burkart, O. Elbracht, and F. Spanier, *Astronomische Nachrichten* **328**, 662–+ (2007).

## Multiwavelength periodicity study of Markarian 501

C. Rödiger, T. Burkart, O. Elbracht, and F. Spanier

Lehrstuhl für Astronomie, Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg, Germany  
 e-mail: [fspanier@astro.uni-wuerzburg.de](mailto:fspanier@astro.uni-wuerzburg.de)

Received 9 February 2009 / Accepted 27 April 2009

### ABSTRACT

**Context.** Active galactic nuclei (AGN) are highly variable emitters of electromagnetic waves from the radio to the gamma-ray regime. This variability may be periodic, which in turn could be the signature of a binary black hole. Systems of black holes are strong emitters of gravitational waves whose amplitude depends on the binary orbital parameters such as the component mass, the orbital semi-major-axis and eccentricity.

**Aims.** It is our aim to prove the existence of periodicity of the AGN Markarian 501 from several observations in different wavelengths. A simultaneous periodicity in different wavelengths provides evidence of bound binary black holes in the core of AGN.

**Methods.** Existing data sets from observations by Whipple, SWIFT, RXTE, and MAGIC have been analysed with the Lomb-Scargle method, the epoch-folding technique and the SigSpec software.

**Results.** Our analysis shows a 72-day period, which could not be seen in previous works due to the limited length of observations. This does not contradict a 23-day period that can be derived as a higher harmonic from the 72-day period.

**Key words.** galaxies: active – BL Lacertae objects: individual: Mrk 501 – X-rays: galaxies – gamma rays: observations

### 1. Introduction

Active galactic nuclei (AGN) have been a class of most interesting astronomical sources for a long time, mainly for their high variability on time scales from years down to minutes. Nowadays these variations may be observed from radio up to gamma-rays (>10 TeV). In most cases the variation in the AGN do not show signs of periodicity but an unpredictable switching between quiescent and active states and flaring behaviour. The explanation of such behaviour requires several different approaches in order to explain the very different time scales. Most of the models make use of the source size (the black hole radius) for the minimum time scales or the accretion efficiency and outer scales for the maximum time scales.

Some sources show a periodicity of the order of several tens of days in the optical, X-ray, or TeV data like Mrk 421, Mrk 501, 3C66A, and PKS 2155-304 (Hayashida et al. 1998; Lainela et al. 1999; Kranich et al. 2001; Osone & Teshima 2001), whereas the long-term optical light curves from classical sources such as BL Lacertae, ON 231, 3C273, OJ 287, PKS 0735+178, 3C345 and AO 0235+16 usually suggest (observed) time scales of several years (e.g. Sillanpaa et al. 1988; Fan et al. 1997; Raiteri et al. 2001). Models invoked to describe aperiodic variability do not give rise to explanations for periodic variations. It is therefore necessary to develop new models. One of these models is the binary black hole (BBH) model, which is explained in detail in the next section. It is worth noting that the origin of these quasi-periodic objects (QPOs) may be related to the instabilities of (optically thin) accretion disks (cf. e.g. Fan et al. (2008) and citations within). We do not want to stress this point but concentrate on the BBH model to explain the variability.

The existence of BBHs seems plausible since the host galaxies of most AGN are elliptical galaxies that originate from galaxy mergers. The study of BBHs and their interactions become of primary importance from both the astrophysical and theoretical points of view now that the first gravitational wave detectors have started operating: gravitational waves, while certainly

extremely weak, are also extremely pervasive and thus a novel and very promising way of exploring the universe. For a review of BBHs the reader is referred to Komossa (2003).

BBHs have already been detected (Hudson et al. 2006; Sudou 2003; Sillanpaa 1998; Romero et al. 2003), but most sources are far too distant to be separated into radio or X-rays (for a detailed discussion of the emission mechanisms see Bogdanović et al. 2008). By using a multi-messenger technique (combined electromagnetic and gravitational wave astronomy), it should be possible to identify periodic AGN as BBH systems by means of their gravitational wave signal, on the one hand, while on the other, possible targets for gravitational wave telescopes could easily be identified by X-ray and gamma-astronomy.

The aim of this paper is to present a complete data analysis of Markarian 501 in different wavelengths searching for periodicity. This will allow for restricting possible black hole masses and the distance between the two black holes. Taking the model of Rieger & Mannheim (2000) into account, where the smaller companion is emitting a jet with Lorentz factor  $\gamma$  towards the observer, we expect periodic behaviour over the complete AGN spectrum.

This paper is organised as follows. In Sect. 2 we review a model used to explain the variability and present the equations used to determine the parameters of the binary system under study. Then in Sect. 3 the data we used and the experiments are described. In Sect. 4 we describe methodology for data analysis, and in 5 we present the results of the analysis, discuss our findings and draw some conclusions.

### 2. The binary black hole model

As discussed above, the presence of close supermassive binary black hole (SMBBH) systems has been repeatedly invoked as plausible source for a number of observational findings in blazar-type AGN, ranging from misalignment and precession of

jets to helical trajectories and quasi-periodic variability (cf. e.g. Komossa 2006).

What makes the BBH model a unique interpretation is that it facilitates facts otherwise not possible: (1.) it is based on quite general arguments for bottom-up structure formation; (2.) it incorporates helical jet trajectories observed in many sources; (3.) it provides a reasonable explanation for long term periodic variability; (4.) it can explain, to some extend, quasi-periodic variability on different time-scales in different energy bands (e.g. Rieger 2007).

The nearby TeV blazar Mrk 501 ( $z = 0.033$ ) attracted attention in 1997, when the source underwent a phase of high activity becoming the brightest source in the sky at TeV energies. Recent contributions like Rieger & Mannheim (2000, 2001) have proposed a possible periodicity of  $P_{\text{obs}} = 23$  days, during the 1997 high state of Mrk 501, which could be related to the orbital motion in a SMBBH system. The proposed model relies on the following assumptions: (1.) the observed periodicity is associated with a relativistically moving feature in the jet (e.g. knot); (2.) due to the orbital motion of the jet-emitting (secondary) BH, the trajectory of the outward moving knot is expected to be a long drawn helix. The orbital motion is thus regarded as the underlying driving power for periodicity; (3.) the jet, which dominates the observed emission, is formed by the less massive BH; (4.) the observed periodicity arises due to a Doppler-shifted flux modulation which is caused by a slight change of the inclination angle with respect to the line of sight.

Following Rieger & Mannheim (2000, hereinafter RM), we assume that the observed signal periodicity has a geometrical origin, being a consequence of a Doppler-shifted modulation. It is therefore possible to relate the observed signal period  $P_{\text{obs}}$  to the Keplerian orbital period

$$\Omega_k = \frac{\sqrt{G(m+M)}}{d^{3/2}}, \quad (1)$$

by the equation (cf. Camenzind & Krockenberger 1992; Roland et al. 1994)

$$P_{\text{obs}} = (1+z) \left(1 - \frac{v_z}{c} \cos i\right) P_K, \quad (2)$$

where  $v_z$  is the typical jet velocity assumed to be  $v_z = c(1 - \gamma_b^{-2})^{1/2}$ . Current emission models (e.g. Spada 1999) favour an inclination angle  $i \approx 1/\gamma_b$ , with typical bulk Lorentz factors in the range 10–15 (e.g. Mannheim et al. 1996; Spada et al. 1999).

For a resolved emission region (e.g. a blob of plasma) with spectral index  $\alpha$ , the spectral flux modulation by Doppler boosting can be written as

$$S(\nu) = \delta(t)^{3+\alpha} S'(\nu), \quad (3)$$

where  $S'$  is the spectral flux density measured in the co-moving frame and  $\delta(t)$  denotes the Doppler factor given by

$$\delta(t) = \frac{1}{\gamma_b [1 - \beta_b \cos \theta(t)]}, \quad (4)$$

where  $\theta(t)$  is the angle between the direction of the emission region (e.g. blob) and the line of sight. Due to the orbital motion around the centre-of-mass, the Doppler factor for the emission region is a periodical function of time. In the simplest case (without determination) the Doppler factor may be written as follows (RM)

$$\delta(t) = \frac{\sqrt{1 - (v_z^2 + \Omega_k^2 R^2)/c^2}}{1 - (v_z \cos i + \Omega_k R \sin i \sin \Omega_k t)/c}. \quad (5)$$

A periodically changing viewing angle may thus naturally lead to a periodicity in the observed lightcurves even for an intrinsically constant flux.

Depending on the position of the jet-emitting BH along its orbit, the Doppler factor has two extremal values, so that one obtains the condition

$$\delta_{\text{max}}/\delta_{\text{min}} \approx f^{1/(3+\alpha)}, \quad (6)$$

where  $f = S_{\text{max}}(\nu)/S_{\text{min}}(\nu)$  is the observed maximum to minimum ratio. Consequently, by inserting Eq. (5) into Eq. (6) one finds

$$\Omega_k R = \frac{f^{1/(3+\alpha)} - 1}{f^{1/(3+\alpha)} + 1} \left( \frac{1}{\sin i} - \frac{v_z}{c} \cot i \right) c. \quad (7)$$

Finally, by using the definition of the Keplerian orbital period Eq. (1) and noting that  $R = Md/(m+M)$  one derives the binary mass ratio equation (RM)

$$\frac{M}{(m+M)^{2/3}} = \frac{P_{\text{obs}}^{1/3} (\sin i)^{-1} c}{[(1+z) 2\pi G]^{1/3}} \frac{f^{1/(3+\alpha)} - 1}{f^{1/(3+\alpha)} + 1} \left(1 - \frac{v_z}{c} \cos i\right)^{2/3} \quad (8)$$

and from Eq. (2) we get

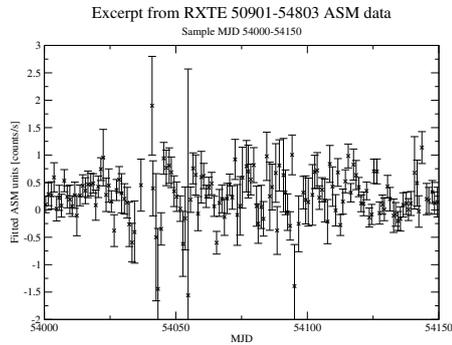
$$m+M = \left( \frac{2\pi(1+z) \left(1 - \frac{v_z}{c} \cos i\right)^2 d^3}{P_{\text{obs}}} \right) \frac{d^3}{G}. \quad (9)$$

To be able to determine the primary and secondary black hole masses  $m$  and  $M$  by solving simultaneously Eqs. (8) and (9) we have to provide an additional assumption or a third equation. RM obtained the binary separation  $d$  by equating the time-scale for gravitation radiation with the gas dynamical time-scale (Begelman et al. 1980). We have not adopted this condition since it is somewhat arbitrary to assume  $T_{\text{gas}} = T_{\text{GW}}$ , nowadays. Therefore we will leave the distance  $d$  as a free parameter in the equations. Instead, we solve Eqs. (8) and (9) by adopting reasonable values for the total binary mass from observational findings,  $M+m = 10^{8.62}$  solar masses (Woo et al. 2005).

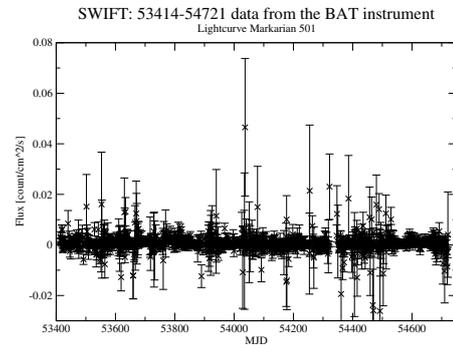
As outlined, we can determine the orbital parameters of the system in case of a perfectly circular orbit. Notably, the assumption of a perfectly circular orbit is simplifying the problem to some extend. It is true that the orbits tend to circularise due to gravitational radiation, but this happens within a time-scale of the same order of magnitude as the merging time-scale (Peters & Mathews 1963; Fitchett 1987). Therefore it is possible that the constituting black holes of a binary system are still on eccentric orbits, in which case the method by RM will be only an approximation to the real situation. Recently De Paolis et al. (2002, 2003) extended the model of RM to elliptical orbits including the eccentricity  $e$ , which reduces to the circular model in case of  $e \rightarrow 0$ . In case of an eccentric orbit a degeneracy in the solutions appears making it impossible to determine the orbital parameters in a unique fashion. As pointed out further by De Paolis et al. (2002) the degeneracy can only be solved by the detection of a gravitational wave signal.

### 3. Data

Data was taken from a variety of different sources, earthbound telescopes like MAGIC or WHIPPLE, but also from satellite experiments like RXTE and SWIFT. In contrast to any previous studies on this source, we explicitly excluded the time of the flare in 1997, so as to determine whether a periodicity would still be present in the quiescent state of Mrk 501. We didn't



**Fig. 1.** Subset of the whole available ASM data on Mrk 501. The sampling is not equidistant and the data points clearly differ significantly from zero.



**Fig. 2.** Complete available data for SWIFT containing 1153 data points with error bars. Background has already been subtracted before data retrieval (for details see Swift 2009a).

make use of any raw data material, but only used data that was background-corrected and processed by the respective collaborations, to which we refer for more details. Therefore the units of the plots are arbitrary, a fact that doesn't cause any problems for our analysis as we are not interested in any absolute flux values of the source.

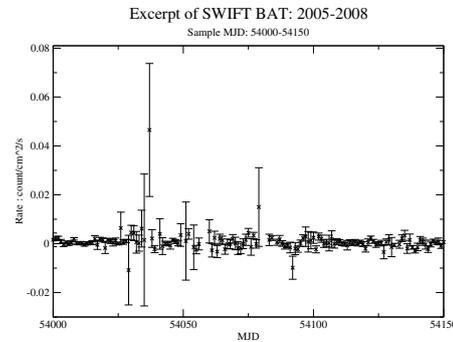
### 3.1. RXTE

The Rossi X-ray Timing Explorer (RXTE) is an orbital X-ray telescope for the observation of black holes, neutron stars, pulsars and X-ray binaries. The RXTE has three instruments on board: the Proportional Counter Array (PCA, 2–60 keV), the High-Energy X-ray Timing Experiment (HEXTE, 15–250 keV) and the so-called All Sky Monitor (ASM, 2–10 keV). The PCA is an array of five proportional counters with a time resolution of  $1 \mu\text{s}$  and an angular of  $1^\circ$  FWHM, the energy resolution amounts to 18% at 6 keV. For HEXTE the time sampling is  $8 \mu\text{s}$  with a field of view of  $1^\circ$  FWHM at an energy resolution of 15% at 60 keV and the ASM consists of three wide-angle cameras which scan 80% of the sky every 90 mn (Jahoda et al. 1996; RXTE 2009).

The data from RXTE we used was gathered by the ASM from March 1998 until December 2008 and a sample from the whole data set can be seen in Fig. 1 (in arbitrary units). We are only plotting a subset to show the actual sampling structure of the RXTE data, firstly because the data is extremely plentiful (it contains 3697 data points) and secondly to have a direct comparison to the SWIFT data in Fig. 3. The data shows a rms of  $5.15 \times 10^{-1}$  with an average signal-to-noise ratio of 1.22.

### 3.2. SWIFT

The SWIFT satellite is part of the SWIFT Gamma-Ray Burst Mission planned and executed by NASA dedicated to the study of GRBs and their afterglows. It consists of three instruments, the Burst Alert Telescope (BAT) which detects gamma-rays in a range from 15 to 150 keV with a field of view of about 2 sr and computes their position on the sky with arc-minute positional accuracy. After the detection of a GRB by the BAT, its image and spectrum can be observed with the X-ray Telescope (XRT, 300 eV–10 keV) and the Ultraviolet/Optical Telescope (UVOT, 170–650 nm) with an arc-second positional accuracy (Barthelmy & Swift Team 2003; Swift 2009b).

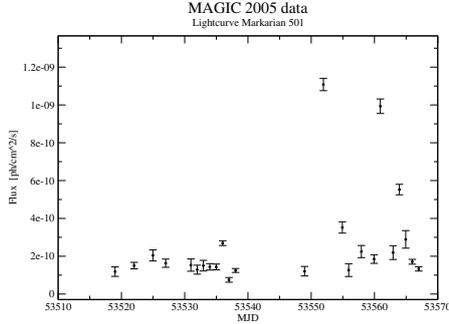


**Fig. 3.** Subset of SWIFT data around the maximum amplitude in order to show the single points more clearly. The highest peak lies  $12.8\sigma$  above the mean flux and is therefore considered a fluctuation. So the remaining of the lightcurve is believed to consist merely of zeroes.

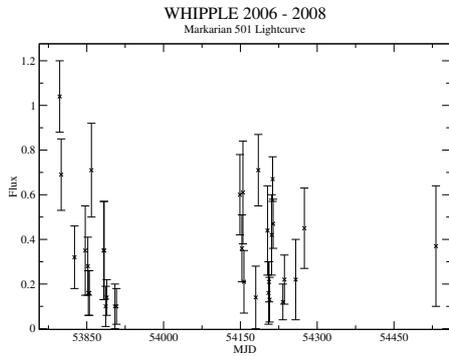
The data that was used can be obtained from a database at the website of the NASA (Swift 2008). We made use of data from February 2005 to September 2008. As can be seen in Fig. 2, the lightcurve (in arbitrary units) provided by the SWIFT satellite looks very much like background noise. Especially when comparing the size of the error-bars to the amplitude of the signal in the subset in Fig. 3, common sense implies that this lightcurve should be regarded with caution. The subset was chosen around the maximum amplitude measured within the whole sample and the same time-span was then plotted for RXTE in Fig. 1 for comparison. The rms of the flux of the whole data sample is  $35.7 \times 10^{-4}$  with an average signal-to-noise ratio of only 0.570. As a result of this, we consider the data from SWIFT merely as an indicator, but not as solid evidence that seriously influences the outcome of the hypothesis tests.

### 3.3. MAGIC

MAGIC is an Imaging Air Cherenkov Telescope (IACT) situated at the Roque de los Muchachos on one of the Canary Islands, La Palma. It has an active mirror surface of  $236 \text{ m}^2$  and a hexagonal camera with a diameter of 1.05 m consisting of 576 photomultipliers. The trigger and analysis thresholds are 50–70 GeV and the upper detection limit is 30 TeV, for



**Fig. 4.** Measured high-energy data from MAGIC in 2005, the set contains 24 data points.



**Fig. 5.** Preliminary high-energy data measured by WHIPPLE from 2006 to 2008, the set contains 33 data points.

further details on the MAGIC telescope see [Petry & The MAGIC Telescope Collaboration \(1999\)](#). The data (in arbitrary units) we used was collected from May to July 2005 in the energy range of 150 GeV to 10 TeV ([Albert et al. 2007](#)) and can be seen in [Fig. 4](#). It contains of 24 data points with a rms of  $2.63 \times 10^{-10}$  and an average signal-to-noise ratio of 11.0.

### 3.4. WHIPPLE

In the early 1980s, the 10 m Whipple Telescope was built at the Fred Lawrence Whipple Observatory in southern Arizona. It is still fully operational and is nowadays used for long-term monitoring of some interesting astrophysical sources in the energy range from 100 GeV to 10 TeV. The data (in arbitrary units) of Mrk501 we used was taken from March 2006 to March 2008 and is preliminary ([WHIPPLE 2008](#)). It shows a rms of  $2.33 \times 10^{-1}$  and an average signal-to-noise ratio of 2.45 (see [Fig. 5](#)).

## 4. Analysis technique

In observational sciences the observer can often not completely control the time of the observations, but must simply accept a certain dictated set of observation times  $t_j$ . In order to process unevenly sampled data, simple Fourier-transformations cannot be used, but must be replaced by a more elaborate analysis. There are several ways of how to tackle this problem. In our work we made use of three different methods. These we selected by the criterion of being mutually fairly orthogonal so as to reduce

systematic errors. In the following paragraphs two of them will be outlined briefly, the third was gratefully accepted from the Dept. for Astroseismology of the University of Vienna.

### 4.1. Lomb-scargle and epoch folding

#### 4.1.1. Lomb-scargle

A full derivation of the Lomb normalised periodogram (spectral power as a function of angular frequency  $\omega \equiv 2\pi f > 0$ ) may be found in [Lomb \(1976\)](#) and [Scargle \(1982\)](#). The algorithm transforms a discretely and unevenly sampled set of data points into a quasi-continuous function in Fourier space, essentially by applying a  $\chi^2$ -test on an equivalent to linear least square fitting to the model

$$h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (10)$$

In order to detect low frequency signals, the oversampling method ([Press et al. 2003](#)) is usually considered. However, spurious effects are thus introduced and particular attention is necessary in analysing the resulting periodogram (see also [Vaughan 2005](#)). An ill-chosen value of the oversampling parameter is found to produce artificial oscillations in the periodogram that can easily be interpreted wrongly. We used the oversampling method and in [Sect. 4.3](#) describe means of controlling these oscillations and we depict a way of statistically evaluating them as one of the major contributions to the uncertainty of an identified period.

#### 4.1.2. Epoch folding

Following [Leahy et al. \(1983\)](#), the epoch-folding statistic is defined as

$$\chi^2(P) = \sum_{j=1}^M \frac{(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sigma_j^2} \quad (11)$$

where  $M$  denotes the number of phase bins and  $\sigma_j^2$  the population variance of  $\bar{x}_j$ . A high  $\chi^2$  value ( $\gg M-1$ ) will signal the presence of a periodicity for which the significance can be estimated from the  $\chi^2_{M-1}$  distribution (cf. [Larsson 1996](#); [Schwarzenberg-Czerny 1997](#)). Therefore, this method yields an estimate of whether or not the data is distributed Gaussianly; in the case of coloured noise being part of the experimental error, as is the case in the present study, the method may not yield reliable results, as the noise itself, if the signal to noise ratio is too bad, could cause the distribution of the data to be non-Gaussian. We used this method especially in order to cross-check the results of the other algorithms for artifacts. This means, whenever a periodogram shows high values in Fourier power, we construct the phase diagram of the corresponding period and try fits onto formulae of periodic signals, like:

$$y = A_0 + A_1 \cdot \sin(A_2 \cdot x + A_3) \quad (12)$$

where the  $A_i$  are the degrees of freedom in the fit. We also tried higher derivatives or higher powers of trigonometric functions, however the formula [Eq. \(12\)](#) proved to yield the best results.

### 4.2. SigSpec

This software (for details see [Reegen 2007](#)) presents a combination of the techniques mentioned above, and has many more

other features in addition. One aspect that needs to be mentioned is that where the Lomb-Scargle Periodogram is presented as a continuous function of the period, SigSpec only provides discrete values of those periods, that are above a certain threshold-level of spectral significance. The latter is the inverse False-Alarm-Probability  $P(> y) = 1 - (1 - \exp(-y))^M$  scaled logarithmically (specified significance threshold  $y$  and number of independent frequencies  $M$ ). The conversion of a chosen threshold for maximum spectral significance into its corresponding “individual” spectral significance threshold for accepting detected peaks is very similar to Scargle (1982) and can be found in Reegen (2007). SigSpec cannot deal with coloured noise, however it is possible to choose different spectral significance thresholds for different frequency regions (Reegen 2007).

#### 4.3. Random-noise-modelling and Random-sampling

In order to handle the uncertainties of the results we used two approaches as follows. One way of testing the significance of the resulting Fourier  $\leftrightarrow$  Lomb-Scargle-transformation is “Random-sampling”: we randomly choose a certain number  $P$  of data points from the original data set thus creating  $n$  subsets, transform all of them (using one of the three algorithms at a time) individually and add the thus acquired  $n$  Fourier-sets together so to form one single periodogram.  $P$  was chosen to be  $2/3$  of the original length of the lightcurve so as to guarantee sufficient degrees of freedom for permutation whereas at the same time not forfeiting the low frequency detection for the short data sets, which gets the more difficult the shorter the subset becomes. In order to facilitate proper summation of the results, the transformations of the  $n$  subsets need to have the same frequency resolution and frequency window so one really sums up the function at equal points. If the resulting periodogram still shows appreciably high  $\chi^2$  values, it can be deduced that the corresponding periods are actually physically relevant. If otherwise the peaks become increasingly broadened, it is rather likely that they do not correspond to a physically relevant period but stem from noise and/or aliasing effects.

Another method is “Random-noise-modelling”: We take the data points  $x_i$  and their error-bars  $\delta_i$ , create a uniformly distributed random number  $\xi_i \in [-\delta_i, +\delta_i]$  and add  $\xi_i$  to the corresponding  $x_i$ . The idea behind this is to weigh the influence of a bad signal-to-noise ratio. If a data set has good signal-to-noise ratio, the random-noise-modelling will scarcely effect the resulting periodogram at all as the interval  $\pm\delta_i$  is small and therefore the new set, created by the Random-noise-modelling is almost identical to the original one. If, however, the  $\delta_i$  are large, i.e. the data has a bad signal-to-noise ratio, the new set will differ significantly from the old and it is to be expected that the period-analysis will yield different results. So we have found a way of assigning tendentially larger uncertainties to the results from data sets of bad quality. It might be argued that the distribution of the  $\xi_i$  should be Gaussian, other than uniform, however, we preferred the uniform distribution as it leads to larger differences of the new sets and the originals and gives therefore a larger uncertainty in the final results, which we are otherwise underestimating. The variance of the new set is statistically converging towards that of the original as for each data-point  $x_i$  the  $\delta_i$  and from that the  $\xi_i$  is calculated. The distribution of the variance is given in Fig. 6. This graph shows that the distribution of the variance, and thus of the rms of the simulated lightcurves, is gaussianly distributed around the original variance. We fitted

with the formula

$$y = \frac{1}{N \sqrt{2\pi} A_0} \times \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{(2\pi A_0^2)}\right) \quad (13)$$

where  $\mu = 0.306117$  is the mean of the original set and  $N = 0.030765$  a constant for normalisation. The fit yielded  $A_0 = 0.009955$  with a correlation coefficient of 0.975010. Thus we are left with a new lightcurve, that will, statistically, have similar rms and variance as the original one. We, again, pick  $n$  of the new lightcurves and execute the transformation.

Throughout the analysis we took  $n = 3$  representative samples, each.

The results are accumulated (= added up) onto one final periodogram, which provides the means of determining the significance level  $\sigma$  of the whole analysis. If now the periodogram resulting from the summation should exhibit its highest peak at places where the underlying single curves show nothing but a forest of little noise peaks, we deduce that the corresponding period is merely due to noise and has no physical meaning whatsoever. This effect is mainly observed for very small periods ( $P < 10$  days), whereas for higher periods the displacement of the large peaks along the *period*-axis dominate.

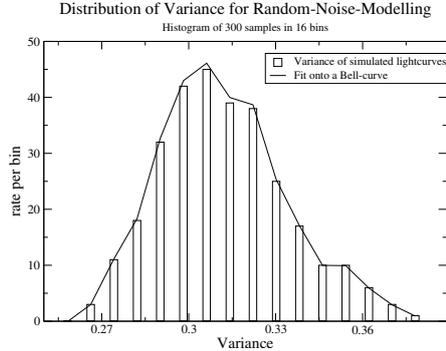
Both random-methods were applied to all data sets independently, i.e. the original sets were taken, for each of them we created 3 sets using the Random-noise-modelling and (again from the original) 3 subsets using the random-sampling. The analysis of the data and its random models was carried out respecting all three numerical methods (see above). The simulated light curves are treated on equal footing as the original set, no weighing is applied, nor are the curves mixed. Only the very final periodograms (Fig. 7) present the sum of all 7, individually analysed, lightcurves for each experiment. As shown in Fig. 8 the Lomb-technique for high oversampling parameters may display oscillations, which appear to be Gaussian-shaped and more or less symmetrical around some central period. We believe these oscillations to be a mere artifact due to choosing the oversampling parameter slightly too big, a choice which is however necessary in order to resolve larger periods at all. Therefore we chose to fit enveloping Gaussian curves onto these structures. The  $\sigma$  levels were extracted from the HWHM value of the envelope, that was fitted onto the final (accumulated and normalised) periodograms.

For the SigSpec tool, however, this formula is not applicable and also the method of fitting the envelope is generally underestimating the uncertainty. According to Kataoka (2008) the normalised power spectral density exhibits a power-law  $P(f) \propto f^{-1.0}$  for low (pink) frequencies, and the transformations were consequently corrected thus (“pink corrected”). In order to avoid spurious signatures from gaps, the data sets were each examined for their sampling structure so as to treat peaks arising around the positions of recurring data-gaps with additional caution.

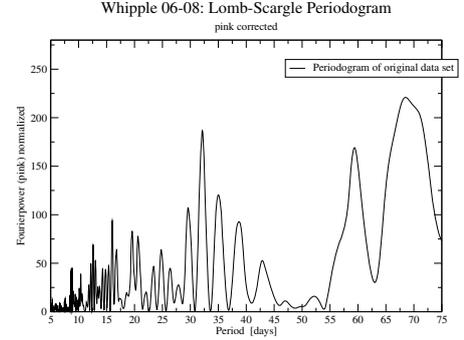
## 5. Results and discussion

In this section we present the results of our analysis methods applied to the various data sets available for Markarian 501. First of all we show the periodograms calculated from the data (Figs. 7, 8), then we present the results of the hypothesis tests (in Figs. 11–14) and summarise all this in Table 1.

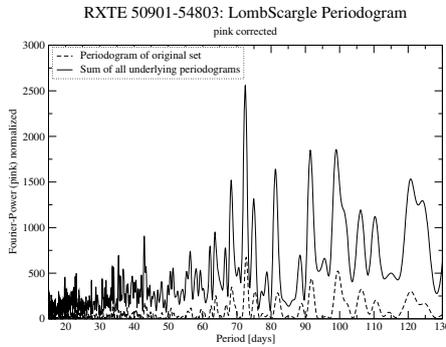
In Figs. 7 and 8 we show the typical signatures of the fundamental frequency in RXTE and the first harmonic in WHIPPLE, respectively. The periodogram of the preliminary WHIPPLE data was produced using a very high oversampling parameter, so as to resolve the long periods; however the data set is too



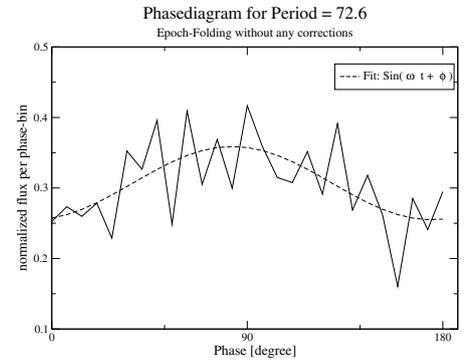
**Fig. 6.** Histogram of the variance of 300 random-noise-modelling samples and the one-parameter fit onto a Gaussian-distribution yielding a correlation coefficient of 0.975010.



**Fig. 8.** Pink-corrected Lomb-Scargle periodogram for the preliminary WHIPPLE data 2006–2008 of Mrk 501. This final periodogram was produced using a very high oversampling parameter so as to resolve long periods in this short data set. Thus the influence of artifacts dominates for periods larger than 30 days.



**Fig. 7.** Pink-corrected Lomb-Scargle periodogram for the RXTE data: 1998–2008 of Mrk 501. This final periodogram is the sum of the periodograms of the original lightcurve and the simulated lightcurves. The dashed graph is the periodogram of the original data set.



**Fig. 9.** Phase diagram of the period = 72.6 day in the RXTE 1998–2008 data: The Signature is clearly that of a sinusoidal signal. The fit with the formula:  $y = A_0 + A_1 \cdot \sin(A_2 \cdot x + A_3)$  yielded  $A_0 = 0.306917$ ,  $A_1 = 0.051881$ ,  $A_2 = 0.086545$ ,  $A_3 = -0.466277$ .

short for the Lomb-Scargle algorithm to produce reliable results. In addition the Epoch-Folding-phase diagram in Fig. 9 shows the signature of the 72.6 day-period to be clearly sinusoidal. The overall hypothesis tests for both the first and second harmonic of  $72 \pm 4.3$  days are shown in Figs. 11 - 14. The hypothesis-tests are evaluated according to standard statistics using two-sided tests on the specified confidence level. The points with their error-bars are the identified periods with their  $1-\sigma$ -uncertainties whereas the boxes show the area in which the hypothesis can be accepted, if overlapping. We find, that the 23-day period can be accepted on a 5%-level for the SigSpec results (cf. Fig. 12) and on a 1%-level for the Lomb-Scargle results (cf. Fig. 11) when all four experiments, that we consider significant, are compared. That means, that we accept a hypothesis even if the SWIFT results indicate the contrary (see Sect. 3 for discussion). For the Lomb-Scargle analysis of the 36-day period only the data-sets of sufficient length could be considered due to the fact that the detection of low frequencies requires longer time spans in the original data. Figure 13 shows that a period of  $1/2 \cdot (72.2 \pm 2.3)$  days can be considered present in the two data sets on a 5%-level. In Fig. 14 we show that on a 5%-level, the first harmonic, 36 days, as identified by the SigSpec algorithm is still consistent within the  $1-\sigma$  uncertainties of the fundamental period,  $1/2 \cdot (72.6 \pm 4.3)$  days, even though we probably underestimated the uncertainties in our method for this algorithm. The

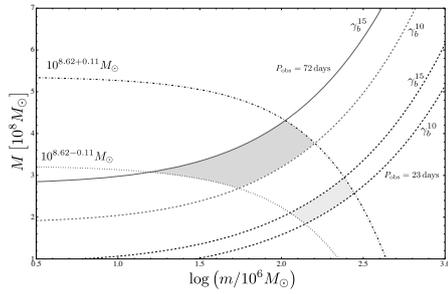
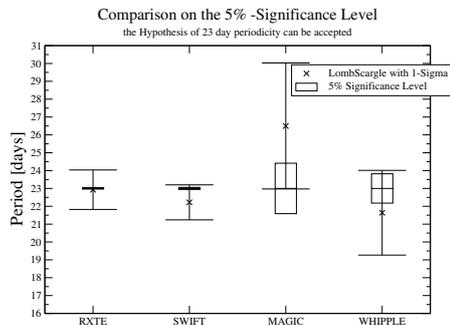
phase diagram in Fig. 9 shows that of the 4-parameter fit onto Eq. (12) yields 0.621577 for the correlation coefficient, with an rms per cent error of 0.18285 for the parameter  $A_2 = 0.0865454$ , which corresponds to a period of 72.6 days via the fundamental relation  $\omega = 2\pi/T$ . We interpret this high correlation coefficient as a clear sign the periodicity itself to be of sinusoidal shape.

The approach to look for the harmonics of 72 days is motivated chiefly by Figs. 7 and 9 for this period dominates over all other structures. However, the ASM data is the only set, plentiful and long enough so the algorithms can detect and identify a period clearly. Given the fact that all other samples are dominated either by noise or gaps it is of great importance to seek for the persistent appearance of the harmonics throughout all sets, even though a single detection of a period in one sole set would for itself scarcely be considered significant.

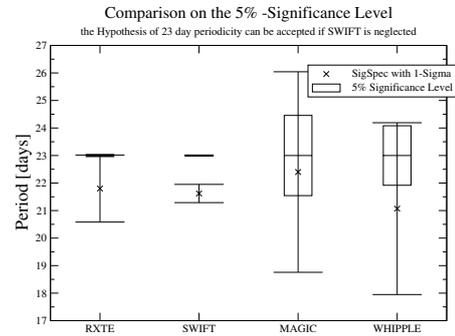
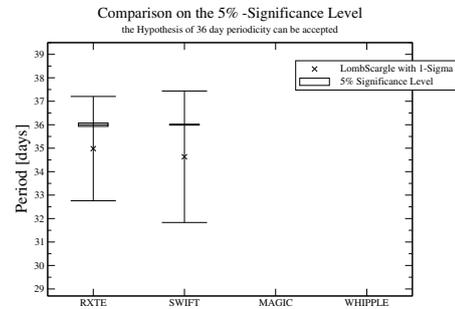
This study allows for a new limit on black hole masses in the possible BBH system in Mrk 501. These limits are in accordance with measurements with the total black hole mass derived with other techniques. For Mrk 501 the observed data corresponds to  $f = 8$  (where  $f = S_{\max}(\nu)/S_{\min}(\nu)$  is the observed maximum to minimum ratio of the spectral flux density) and a TeV spectral index of  $\alpha \approx (1.2-1.7)$  (cf. Aharonian et al. 1999). Together with our proposed periodicity of 72 days we can determine the

**Table 1.** The 5%- significance levels of the corresponding hypothesis tests brought face to face with the identified 72 day period and its higher harmonics.

RXTE		5%-	SWIFT		Lomb-Scargle		MAGIC		5%-	WHIPPLE		5%-
Period [days]		level	Period [days]		5%-	Period [days]	5%-	Period [days]	level	Period [days]	level	
$72.2 \pm 2.3$		0.074										
$35.0 \pm 2.2$		0.072	$34.6 \pm 2.8$		0.16							
$22.9 \pm 1.1$		0.036	$22.2 \pm 1.0$		0.057	$26.5 \pm 3.5$		1.4		$21.6 \pm 2.4$		0.82
RXTE		5%-	SWIFT		SigSpec		MAGIC		5%-	WHIPPLE		5%-
Period [days]		level	Period [days]		5%-	Period [days]	5%-	Period [days]	level	Period [days]	level	
$72.6 \pm 4.3$		0.14										
$36.9 \pm 2.3$		0.073	$32.7 \pm 0.5$		0.029	$36.6 \pm 4.1$		0.88				
$21.8 \pm 1.2$		0.039	$21.6 \pm 0.3$		0.019	$22.4 \pm 3.5$		1.5		$21.1 \pm 3.5$		1.1

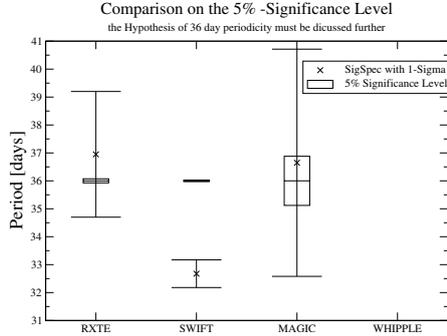

**Fig. 10.** Required mass dependence for a BBH system in Mrk 501. The dotted and dot-dashed lines show the upper and lower limits of the binary mass estimation derived from the  $M_{\bullet}-\sigma$  relation (Woo et al. 2005), respectively. The solid ( $\gamma_b = 15$ ) and dashed ( $\gamma_b = 10$ ) thick curves are given by the Doppler condition for inclination angles  $i = 1/\gamma_b$  and an observed period of 72 days. The dashed thin curves represent the same relation for a period of 23 days. The allowed mass-range has been indicated by filled areas. A TeV spectral index of  $\alpha = 1.2$  has been applied for the calculation.

**Fig. 11.** The two sided-hypothesis test of whether the 23-day period can be accepted within the 5%-level for the Lomb-Scargle algorithm: All found periodicities are consistent on the 5% confidence level.

masses of the constituting black holes of the binary system by simultaneously solving Eqs. (8) and (9). The results are shown in Table 2, where a total mass of  $10^{8.62} M_{\odot}$  (Woo et al. 2005) and a TeV spectral index of  $\alpha = 1.2$  have been applied for the calculations. In Fig. 10 we show the limiting black hole masses for the large as well for the small black hole. These are compared for the new found 72-day period and the previously found 23-day period.


**Fig. 12.** The two sided-hypothesis test of the 23-day period for the SigSpec algorithm: The SWIFT data does not support the hypothesis, however, we very much doubt the quality of that data set and consider the hypothesis as valid on the 5%-level.

**Fig. 13.** The two sided-hypothesis test of the 36-day period for the Lomb-Scargle algorithm: the frequencies of the first harmonic are consistent on the 5%-level. The data sets from the experiments, which are not included, were too short for the algorithm to produce reliable results.

The obtained value for the separation of the BBH obviously changes in time as a consequence of gravitational radiation. In Fig. 10 we show the limiting black hole masses for the large as well for the small black hole. These are compared for the new found 72-day period and the previously found 23-day period.

Our analysis shows two main results: Even for the quiescent state of the source Mrk501 we find that on the one hand the well-established 23-day period (Osone 2006) is still undefeated, while on the other a 72-day period is upcoming. These results are not in contradiction since the 23- and also the 36-day



**Fig. 14.** The two sided-hypothesis test of 36-day period for the SigSpec algorithm: This period can be found to be persistent in the data on a 5%-level, if again SWIFT is not taken into account.

**Table 2.** The maximum masses of the constituting black holes, the separation  $d$  and the intrinsic orbital period for the inclination angles  $i = 1/\gamma_b$  with bulk Lorentz factor  $\gamma_b$ .

$i = 1/\gamma_b$	1/10	1/15
$m [10^8 M_\odot]$	1.68	0.52
$M [10^8 M_\odot]$	2.49	3.65
$d [10^{16} \text{ cm}]$	7.98	13.70
$P_k [\text{yrs}]$	19.11	42.96

periods can, within the uncertainties, be regarded as the second and first harmonic of the  $72 \pm 4.3$ -day period, respectively. Figure 7 clearly identifies the 72 days, together with the persistent appearance of the first and second harmonics in the data sets (save for SWIFT, see discussion above). It is not fully clear how robust the applied methods are by themselves, however the combination of different approaches showing concordant results provides a solid argument in favour of the SMBBH model.

This finding has possible consequences for our model of Mrk 501: It allows for a new limit on the black hole masses in the source's possible BBH system. A limit which is firstly in accordance with measurements of the total black hole mass as derived from other techniques and secondly allows for a higher ratio  $r = M_{\text{total}}/m_{\text{BH2}}$  between the total mass of the binary and the mass of the companion BH. A scenario which is much more likely to exhibit the helical structure as proposed by Rieger & Mannheim (2000).

There is a reason why this has not yet been found: Short data sets are not able to show the 72-day feature since their length has to be well above these 72 days or aliasing will smear out this feature.

Regarding the physical model there is now, with a multi-wavelength analysis, more reason to support the BBH model, but still long time observations, especially in very high energies, are needed to prove our results.

The results of this study have an impact on X-ray, gamma-ray and gravitational wave astronomy: With evidence of multi-wavelength periodic variability, gravitational wave telescopes may help to tackle the problem of the origin of such variations and also aid in restricting the parameters of these sources.

*Acknowledgements.* The authors would like to thank the anonymous referee for his detailed comments, which greatly helped improving the paper.

C.R. thanks Mr Piet Reegen for supplying her with the source of his SIGSPEC – code. C.R. acknowledges support from the Max-Weber-foundation, O. E. is grateful for funding from the Elite Network of Bavaria. T.B. thanks the Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt and the LISA-Germany collaboration for funding. This research has made use of data obtained through the High Energy Astrophysics Science Archive Research Center Online Service, provided by the NASA/Goddard Space Flight Center.

## References

- Aharonian, F. A., Akhperjanian, A. G., & Barrio, J. A., et al. 1999, *A&A*, 349, 11
- Albert, J., Aliu, E., & Anderhub, H., et al. 2007, *ApJ*, 669, 862
- Barthelmy, S. D., & Swift Team 2003, in *BA&AS*, 35, BA&AS, 767
- Begelman, M. C., Blandford, R. D., & Rees, M. J. 1980, *Nature*, 287, 307
- Bogdanović, T., Smith, B. D., Sigurdsson, S., & Eracleous, M. 2008, *ApJS*, 174, 455
- Camenzind, M., & Krockenberger, M. 1992, *A&A*, 255, 59
- De Paolis, F., Ingresso, G., & Nucita, A. A. 2002, *A&A*, 388, 470
- De Paolis, F., Ingresso, G., & Nucita, A. A., et al. 2003, *A&A*, 410, 741
- Fan, J. H., Rieger, F. M., Hua, T. X., et al. 2008, *Astrop. Phys.*, 28, 508
- Fan, J. H., Xie, G. Z., Lin, R. G., et al. 1997, *A&AS*, 125, 525
- Fitchett, M. 1987, *MNRAS*, 224, 567
- Hayashida, N., Hirasawa, H., & Ishikawa, F., et al. 1998, *ApJ*, 504, L71
- Hudson, D. S., Reiprich, T. H., & Clarke, T. E., et al. 2006, *A&A*, 453, 433
- Jahoda, K., Swank, J. H., Giles, A. B., et al. 1996, in *SPIE Conf. Ser.* 2808, ed. O. H. Siegmund, & M. A. Gummin, 59
- Kataoka, J. 2008, in *Blazar Variability across the Electromagnetic Spectrum*
- Komossa, S. 2003, in *The Astrophysics of Gravitational Wave Sources*, ed. J. M. Centrella, *AIP Conf. Ser.*, 686, 161
- Komossa, S. 2006, *Mem. Soc. Astron. Ital.*, 77, 733
- Kranich, D., The HEGRA Collaboration, de Jager, O., Kestel, M., & Lorenz, E. 2001, in *International Cosmic Ray Conference*, 7, 2630
- Lainela, M., Takalo, L. O., Sillanpää, A., et al. 1999, *ApJ*, 521, 561
- Larsson, S. 1996, *A&AS*, 117, 197
- Leahy, D. A., Darbro, W., & Elsner, R. F., et al. 1983, *ApJ*, 266, 160
- Lomb, N. R. 1976, *Ap&SS*, 39, 447
- Mannheim, K., Westerhoff, S., & Meyer, H., et al. 1996, *A&A*, 315, 77
- Osone, S. 2006, *Astrop. Phys.*, 26, 209
- Osone, S., & Teshima, M. 2001, in *International Cosmic Ray Conference*, *International Cosmic Ray Conference*, 7, 2695
- Peters, P. C., & Mathews, J. 1963, *Phys. Rev.*, 131, 435
- Petry, D. 1999, The MAGIC Telescope Collaboration, *A&AS*, 138, 601
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T., et al. 2003, *Eur. J. Phys.*, 24, 329
- Raiteri, C. M., Villata, M., Aller, H. D., et al. 2001, *A&A*, 377, 396
- Reegen, P. 2007, *A&A*, 467, 1353
- Rieger, F. M. 2007, *Ap&SS*, 309, 271
- Rieger, F. M., & Mannheim, K. 2000, *A&A*, 359, 948
- Rieger, F. M., & Mannheim, K. 2001, in *AIP Conf. Ser.* 558, ed. F. A. Aharonian, & H. J. Völk, 716
- Roland, J., Teysmier, R., & Roos, N. 1994, *A&A*, 290, 357
- Romero, G. E., Fan, J.-H., & Nuza, S. E. 2003, *Chin. J. Astron. Astrophys.*, 3, 513
- RXTE. 2009, [http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xte/xhp\\_geninfo.html](http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xte/xhp_geninfo.html) [Online; accessed 02-February-2009]
- Scargle, J. D. 1982, *ApJ*, 263, 835
- Schwarzenberg-Czerny, A. 1997, *ApJ*, 489, 941
- Sillanpää, A. K. 1998, in *19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, ed. J. Paul, T. Montmerle, & E. Aubourg
- Sillanpää, A., Haarala, S., Valtonen, M. J., Sundelius, B., & Byrd, G. G. 1988, *ApJ*, 325, 628
- Spada, M. 1999, *Astrop. Phys.*, 11, 59
- Spada, M., Salvati, M., & Pacini, F. 1999, *ApJ*, 511, 136
- Sudou, H. 2003, *Astronomical Herald*, 96, 656
- Swift 2008, <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/swift/swiftsc.html> [Online; accessed 01-December-2008]
- Swift 2009a, [http://xte.mit.edu/ASM\\_lc.html](http://xte.mit.edu/ASM_lc.html) [Online; accessed 02-February-2009]
- Swift 2009b, [http://swift.gsfc.nasa.gov/docs/swift/about\\_swift/](http://swift.gsfc.nasa.gov/docs/swift/about_swift/) [Online; accessed 02-February-2009]
- Vaughan, S. 2005, *A&A*, 431, 391
- Whipple 2008, <http://veritas.sao.arizona.edu/content/blogsection/6/40/> [Online; accessed 06-August-2008]
- Woo, J.-H., Urry, C. M., & van der Marel, R. P., et al. 2005, *ApJ*, 631, 762



# Literaturverzeichnis

## **Alfvén 1942**

ALFVÉN, H.: Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. In: Nature 150 (1942), Oktober, S. 405–406. <http://dx.doi.org/10.1038/150405d0>. – DOI 10.1038/150405d0

## **Begelman u. Sikora 1987**

BEGELMAN, M. C. ; SIKORA, M.: Inverse Compton scattering of ambient radiation by a cold relativistic jet - A source of beamed, polarized continuum in blazars? In: Astrophysical Journal 322 (1987), November, S. 650–661. <http://dx.doi.org/10.1086/165760>. – DOI 10.1086/165760

## **Birdsall u. Langdon 1985**

BIRDSALL, C.K. ; LANGDON, A.B.: *Plasma physics via computer simulation*. New York : McGraw-Hill, 1985

## **Bittencourt 2004**

BITTENCOURT, J. A.: *Fundamentals of Plasma Physics*. Fundamentals of Plasma Physics, Third Edition by J.A. Bittencourt. Published by Springer-Verlag, New York, Inc.; 2004. ISBN 0-387-20975-1., 2004

## **Blandford 1976**

BLANDFORD, R. D.: Accretion disc electrodynamics - A model for double radio sources. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 176 (1976), September, S. 465–481

## **Blandford u. Payne 1982**

BLANDFORD, R. D. ; PAYNE, D. G.: Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 199 (1982), Juni, S. 883–903

**Blandford u. Znajek 1977**

BLANDFORD, R. D. ; ZNAJEK, R. L.: Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 179 (1977), Mai, S. 433–456

**Boris 1970**

BORIS, J. P.: The Acceleration Calculation from a Scalar Potential. In: *Plasma Physics Laboratory Report MATT-769* (1970)

**Buneman 1958a**

BUNEMAN, O.: Instability, Turbulence, and Conductivity in Current-Carrying Plasma. In: *Physical Review Letters* 1 (1958), Juli, S. 8–9. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.1.8>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.1.8

**Buneman 1958b**

BUNEMAN, O.: Transverse Plasma Waves and Plasma Vortices. In: *Physical Review* 112 (1958), Dezember, S. 1504–1512. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.112.1504>. – DOI 10.1103/PhysRev.112.1504

**Buneman 1959**

BUNEMAN, O.: Dissipation of Currents in Ionized Media. In: *Physical Review* 115 (1959), August, S. 503–517. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.115.503>. – DOI 10.1103/PhysRev.115.503

**Burkart et al. 2010**

BURKART, T. ; ELBRACHT, O. ; GANSE, U. ; SPANIER, F.: The influence of the mass-ratio on the acceleration of particles by filamentation instabilities. In: *Astrophysical Journal* 720 (2010), September, S. 1318–1324

**Burkart et al. 2007**

BURKART, T. ; ELBRACHT, O. ; SPANIER, F.: Presentation of simulation results of our 3D PIC Code. In: *Astronomische Nachrichten* 328 (2007), September, S. 662

**Califano et al. 1997**

CALIFANO, F. ; PEGORARO, F. ; BULANOV, S. V.: Spatial structure and time evolution of the Weibel instability in collisionless inhomogeneous plasmas. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), Juli, S. 963–969. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.56.963>. – DOI 10.1103/PhysRevE.56.963

**Chacón-Acosta et al. 2010**

CHACÓN-ACOSTA, G. ; DAGDUG, L. ; MORALES-TÉCOTL, H. A.: Manifestly covariant Jüttner distribution and equipartition theorem. In: *Phys. Rev. E* 81 (2010), Februar, Nr. 2, S. 021126. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.81.021126>. – DOI 10.1103/PhysRevE.81.021126

**Chang et al. 2008**

CHANG, P. ; SPITKOVSKY, A. ; ARONS, J.: Long-Term Evolution of Magnetic Turbulence in Relativistic Collisionless Shocks: Electron-Positron Plasmas. In: *Astrophysical Journal* 674 (2008), Februar, S. 378–387. <http://dx.doi.org/10.1086/524764>. – DOI 10.1086/524764

**Courant et al. 1928**

COURANT, R. ; FRIEDRICHS, K. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928)

**Dieckmann et al. 2008**

DIECKMANN, M. E. ; SHUKLA, P. K. ; DRURY, L. O. C.: The Formation of a Relativistic Partially Electromagnetic Planar Plasma Shock. In: *Astrophysical Journal* 675 (2008), März, S. 586–595. <http://dx.doi.org/10.1086/525516>. – DOI 10.1086/525516

**Eastwood 1986**

EASTWOOD, J. W.: Particle simulation methods in plasma physics. In: *Computer Physics Communications* 43 (1986), Dezember, S. 89–106. [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655\(86\)90055-X](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655(86)90055-X). – DOI 10.1016/0010-4655(86)90055-X

**Eastwood 1991**

EASTWOOD, J. W.: The virtual particle electromagnetic particle-mesh method. In: *Computer Physics Communications* 64 (1991), Mai, S. 252–266. [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655\(91\)90036-K](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655(91)90036-K). – DOI 10.1016/0010-4655(91)90036-K

**Eichler u. Levinson 2000**

EICHLER, D. ; LEVINSON, A.: A Compact Fireball Model of Gamma-Ray Bursts. In: *Astrophysical Journal* 529 (2000), Januar, S. 146–150. <http://dx.doi.org/10.1086/308245>. – DOI 10.1086/308245

**Esirkepov 2001**

ESIRKEPOV, T. Z.: Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form-factor. In: *Computer Physics Communications* 135 (2001), April, S. 144–153. [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(00\)00228-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(00)00228-9). – DOI 10.1016/S0010-4655(00)00228-9

**Fermi 1949**

FERMI, E.: On the Origin of the Cosmic Radiation. In: *Physical Review* 75 (1949), April, S. 1169–1174. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.75.1169>. – DOI 10.1103/PhysRev.75.1169

**Fonseca et al. 2008**

FONSECA, R. A. ; MARTINS, S. F. ; SILVA, L. O. ; TONGE, J. W. ; TSUNG, F. S. ; MORI, W. B.: One-to-one direct modeling of experiments and astrophysical scenarios: pushing the envelope on kinetic plasma simulations. In: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 50 (2008), Dezember, Nr. 12, S. 124034. <http://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/50/12/124034>. – DOI 10.1088/0741-3335/50/12/124034

**Ford et al. 1998**

FORD, H. C. ; TSVETANOV, Z. I. ; FERRARESE, L. ; JAFFE, W.: HST detections of massive black holes in the centers of galaxies (Review). In: Y. SOFUE (Hrsg.): *The Central Regions of the Galaxy and Galaxies* Bd. 184, 1998, S. 377

**Frederiksen et al. 2004**

FREDERIKSEN, J. T. ; HEDEDAL, C. B. ; HAUGBØLLE, T. ; NORDLUND, Å.: Magnetic Field Generation in Collisionless Shocks: Pattern Growth and Transport. In: *Astrophysical Journal, Letters* 608 (2004), Juni, S. L13–L16. <http://dx.doi.org/10.1086/421262>. – DOI 10.1086/421262

**Fried 1959**

FRIED, B. D.: Mechanism for Instability of Transverse Plasma Waves. In: *Physics of Fluids* 2 (1959), Mai, S. 337. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1705933>. – DOI 10.1063/1.1705933

**Ganse et al. 2010**

GANSE, U. ; BURKART, T. ; SPANIER, F. ; VAINIO, R.: Kinetic Simulations of Solar

Type II Radio Burst Emission Processes. In: *Twelfth International Solar Wind Conference* 1216 (2010), März, S. 245–248. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3395846>.  
– DOI 10.1063/1.3395846

**Ganse 2009**

GANSE, Urs: *Typ II Radiobursts bei koronalen Masseauswürfen - Simulation mit PiC-Codes*, Lehrstuhl für Astronomie, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Diplomarbeit, März 2009

**GNU PLOT 2007**

GNU PLOT: *Thomas Williams, Pixar Corporation and Collin Kelley, Version 4.2.2, 2007*. <http://www.gnuplot.info>. Version: 2007

**GSL 2008**

GSL: *Free Software Foundation, Inc., Version 1.4, November 2008*. <http://www.gnu.org/software/gsl>. Version: 2008

**Hao et al. 2009a**

HAO, B. ; DING, W.-J. ; SHENG, Z.-M. ; REN, C. ; ZHANG, J.: Plasma thermal effect on the relativistic current-filamentation and two-stream instabilities in a hot-beam warm-plasma system. In: *Phys. Rev. E* 80 (2009), Dezember, Nr. 6, S. 066402. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.80.066402>. – DOI 10.1103/PhysRevE.80.066402

**Hao et al. 2009b**

HAO, B. ; SHENG, Z.-M. ; REN, C. ; ZHANG, J.: Relativistic collisional current-filamentation instability and two-stream instability in dense plasma. In: *Phys. Rev. E* 79 (2009), April, Nr. 4, S. 046409. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.046409>. – DOI 10.1103/PhysRevE.79.046409

**Heddal et al. 2004**

HEDEDAL, C. B. ; HAUGBØLLE, T. ; FREDERIKSEN, J. T. ; NORDLUND, Å.: Non-Fermi Power-Law Acceleration in Astrophysical Plasma Shocks. In: *Astrophysical Journal, Letters* 617 (2004), Dezember, S. L107–L110. <http://dx.doi.org/10.1086/427387>. – DOI 10.1086/427387

**Heddal u. Nishikawa 2005**

HEDEDAL, C. B. ; NISHIKAWA, K.-I.: The Influence of an Ambient Magnetic

Field on Relativistic collisionless Plasma Shocks. In: *Astrophysical Journal, Letters* 623 (2005), April, S. L89–L92. <http://dx.doi.org/10.1086/430253>. – DOI 10.1086/430253

**Helder et al. 2010**

HELDER, E. A. ; KOSENKO, D. ; VINK, J.: Cosmic-ray Acceleration Efficiency versus Temperature Equilibration: The Case of SNR 0509-67.5. In: *Astrophysical Journal, Letters* 719 (2010), August, S. L140–L144. <http://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/719/2/L140>. – DOI 10.1088/2041-8205/719/2/L140

**Helder et al. 2009**

HELDER, E. A. ; VINK, J. ; BASSA, C. G. ; BAMBA, A. ; BLEEKER, J. A. M. ; FUNK, S. ; GHAVAMIAN, P. ; VAN DER HEYDEN, K. J. ; VERBUNT, F. ; YAMAZAKI, R.: Measuring the Cosmic-Ray Acceleration Efficiency of a Supernova Remnant. In: *Science* 325 (2009), August, S. 719–. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1173383>. – DOI 10.1126/science.1173383

**Hockney u. Eastwood 1988**

HOCKNEY, R. W. ; EASTWOOD, J. W.: *Computer simulation using particles*. Bristol: Hilger, 1988

**Iizuka et al. 1979**

IIZUKA, S. ; SAEKI, K. ; SATO, N. ; HATTA, Y.: Buneman instability, Pierce instability, and double-layer formation in a collisionless plasma. In: *Physical Review Letters* 43 (1979), November, S. 1404–1407. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.1404>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.43.1404

**Keshet et al. 2009**

KESHET, U. ; KATZ, B. ; SPITKOVSKY, A. ; WAXMAN, E.: Magnetic Field Evolution in Relativistic Unmagnetized Collisionless Shocks. In: *Astrophysical Journal, Letters* 693 (2009), März, S. L127–L130. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/693/2/L127>. – DOI 10.1088/0004-637X/693/2/L127

**Kilian 2010**

KILIAN, Patrick: *Teilchenbeschleunigung in Laserplasmen: Kinetische Simulationen*, Lehrstuhl für Astronomie, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Diplomarbeit, Februar 2010

**Klebesadel et al. 1973**

KLEBESADEL, R. W. ; STRONG, I. B. ; OLSON, R. A.: Observations of Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin. In: *Astrophysical Journal, Letters* 182 (1973), Juni, S. L85. <http://dx.doi.org/10.1086/181225>. – DOI 10.1086/181225

**Lapenta 2008**

LAPENTA, G.: The algorithms of the implicit moment method for plasma simulation. In: *ArXiv e-prints* (2008), Januar

**Lazzi u. Gandhi 1997**

LAZZI, G. ; GANDHI, O. P.: On the optimal design of the PML absorbing boundary condition for the FDTD code. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 45 (1997), Mai, S. 914–917. <http://dx.doi.org/10.1109/8.575651>. – DOI 10.1109/8.575651

**Liao et al. 1984**

LIAO, Z. P. ; WONG, H. L. ; YANG, B. ; YUAN, Y.: A transmitting boundary for transient wave analysis. In: *Sci. Sin., Ser. A*, 27 (1984), S. 1063–1076

**Lindfors et al. 2005**

LINDFORS, E. J. ; VALTAOJA, E. ; TÜRLER, M.: SSC mechanism in the gamma-ray blazar 3C 279. In: *Astronomy and Astrophysics* 440 (2005), September, S. 845–853. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20040196>. – DOI 10.1051/0004-6361:20040196

**Lindman 1975**

LINDMAN, E. L.: "Free-Space" Boundary Conditions for the Time Dependent Wave Equations. In: *Journal of Computational Physics* 18 (1975), Mai, S. 66–+. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90102-3](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(75)90102-3). – DOI 10.1016/0021-9991(75)90102-3

**Lynden-Bell 1969**

LYNDEN-BELL, D.: Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars. In: *Nature* 223 (1969), August, S. 690–694. <http://dx.doi.org/10.1038/223690a0>. – DOI 10.1038/223690a0

**Mannheim 1993**

MANNHEIM, K.: The proton blazar. In: *Astronomy and Astrophysics* 269 (1993), März, S. 67–76

**Martins et al. 2009**

MARTINS, S. F. ; FONSECA, R. A. ; SILVA, L. O. ; MORI, W. B.: Ion Dynamics and Acceleration in Relativistic Shocks. In: *Astrophysical Journal, Letters* 695 (2009), April, S. L189–L193. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/695/2/L189>. – DOI 10.1088/0004-637X/695/2/L189

**MEEP 2009**

MEEP: *MIT Electromagnetic Equation Propagation (MEEP)*. [http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Yee\\_lattice](http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Yee_lattice). Version: 2009

**Meszáros u. Rees 1997**

MESZAROS, P. ; REES, M. J.: Optical and Long-Wavelength Afterglow from Gamma-Ray Bursts. In: *Astrophysical Journal* 476 (1997), Februar, S. 232. <http://dx.doi.org/10.1086/303625>. – DOI 10.1086/303625

**Müller 2010**

MÜLLER, Andreas: *Astronomiewissen*. <http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen>. Version: 2010

**Moderski et al. 2004**

MODERSKI, R. ; SIKORA, M. ; MADEJSKI, G. M. ; KAMAE, T.: Soft X-Ray Precursors of the Nonthermal Flares in Blazars: Theoretical Predictions. In: *Astrophysical Journal* 611 (2004), August, S. 770–779. <http://dx.doi.org/10.1086/422381>. – DOI 10.1086/422381

**Nishikawa et al. 2003**

NISHIKAWA, K.-I. ; HARDEE, P. ; RICHARDSON, G. ; PREECE, R. ; SOL, H. ; FISHMAN, G. J.: Particle Acceleration in Relativistic Jets Due to Weibel Instability. In: *Astrophysical Journal* 595 (2003), September, S. 555–563. <http://dx.doi.org/10.1086/377260>. – DOI 10.1086/377260

**Nishikawa et al. 2005**

NISHIKAWA, K.-I. ; HARDEE, P. ; RICHARDSON, G. ; PREECE, R. ; SOL, H. ; FIS-

FISHMAN, G. J.: Particle Acceleration and Magnetic Field Generation in Electron-Positron Relativistic Shocks. In: *Astrophysical Journal* 622 (2005), April, S. 927–937. <http://dx.doi.org/10.1086/428394>. – DOI 10.1086/428394

**Nishikawa et al. 2006**

NISHIKAWA, K.-I. ; HARDEE, P. E. ; HEDEDAL, C. B. ; FISHMAN, G. J.: Acceleration Mechanics in Relativistic Shocks by the Weibel Instability. In: *Astrophysical Journal* 642 (2006), Mai, S. 1267–1274. <http://dx.doi.org/10.1086/501426>. – DOI 10.1086/501426

**Nishikawa et al. 2009**

NISHIKAWA, K.-I. ; MEDVEDEV, M. ; ZHANG, B. ; HARDEE, P. ; NIEMIEC, J. ; NORDLUND, Å. ; FREDERIKSEN, J. ; MIZUNO, Y. ; SOL, H. ; FISHMAN, G. J.: Radiation from relativistic jets in turbulent magnetic fields. In: C. MEEGAN, C. KOUVELIOTOU, & N. GEHRELS (Hrsg.): *American Institute of Physics Conference Series* Bd. 1133, 2009, S. 235–237

**Nishikawa et al. 2008**

NISHIKAWA, K.-I. ; NIEMIEC, J. ; SOL, H. ; MEDVEDEV, M. ; ZHANG, B. ; NORDLUND, Å. ; FREDERIKSEN, J. ; HARDEE, P. ; MIZUNO, Y. ; HARTMANN, D. H. ; FISHMAN, G. J.: New Relativistic Particle-In-Cell Simulation Studies of Prompt and Early Afterglows from GRBs. In: AHARONIAN, F. A. (Hrsg.) ; HOFMANN, W. (Hrsg.) ; RIEGER, F. (Hrsg.): *American Institute of Physics Conference Series* Bd. 1085, 2008, S. 589–593

**O’C. Drury et al. 2009**

O’C. DRURY, L. ; AHARONIAN, F. A. ; MALYSHEV, D. ; GABICI, S.: On the plasma temperature in supernova remnants with cosmic-ray modified shocks. In: *Astronomy and Astrophysics* 496 (2009), März, S. 1–6. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200811394>. – DOI 10.1051/0004-6361/200811394

**Penn et al. 2003**

PENN, G. ; STOLTZ, P. H. ; CARY, J. R. ; WURTELE, J.: Boris push with spatial stepping. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 29 (2003), Nr. 8, 1719–1722. <http://stacks.iop.org/0954-3899/29/1719>

**Penrose u. Floyd 1971**

PENROSE, R. ; FLOYD, G. R.: Black holes-Extraction of rotational energy. In: Nature 229 (1971), Februar, S. 177

**Pierce 1948**

PIERCE, J. R.: Possible Fluctuations in Electron Streams Due to Ions. In: *Journal of Applied Physics* 19 (1948), März, S. 231–236. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1715050>. – DOI 10.1063/1.1715050

**Piran 2000**

PIRAN, T.: Gamma-ray bursts - a puzzle being resolved. In: Phys. Rep. 333 (2000), August, S. 529–553. [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00036-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00036-3). – DOI 10.1016/S0370-1573(00)00036-3

**Ramirez-Ruiz et al. 2007**

RAMIREZ-RUIZ, E. ; NISHIKAWA, K.-I. ; HEDEDAL, C. B.:  $e^{+/-}$  Pair Loading and the Origin of the Upstream Magnetic Field in GRB Shocks. In: *Astrophysical Journal* 671 (2007), Dezember, S. 1877–1885. <http://dx.doi.org/10.1086/522072>. – DOI 10.1086/522072

**Rickard u. Nikolova 2005**

RICKARD, Y. S. ; NIKOLOVA, N. K.: Enhancing the PML Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53 (2005), März, S. 1242–1246. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2004.842584>. – DOI 10.1109/TAP.2004.842584

**Riquelme u. Spitkovsky 2010**

RIQUELME, M. A. ; SPITKOVSKY, A.: Magnetic Amplification by Magnetized Cosmic Rays in Supernova Remnant Shocks. In: *Astrophysical Journal* 717 (2010), Juli, S. 1054–1066. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/717/2/1054>. – DOI 10.1088/0004-637X/717/2/1054

**Rödiger et al. 2009**

RÖDIG, C. ; BURKART, T. ; ELBRACHT, O. ; SPANIER, F.: Multiwavelength periodicity study of Markarian 501. In: *Astronomy and Astrophysics* 501 (2009), Juli, S. 925–932. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200911814>. – DOI 10.1051/0004-6361/200911814

**Rüger et al. 2010**

RÜGER, M. ; SPANIER, F. ; MANNHEIM, K.: Spectral modelling of 1 ES 1218+30.4. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 401 (2010), Januar, S. 973–976. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15738.x>. – DOI 10.1111/j.1365-2966.2009.15738.x

**Salimullah et al. 2006**

SALIMULLAH, M. ; KHAN, M. I. U. ; ISLAM, M. K. ; AMIN, M. R. ; SHUKLA, P. K.: Magnetosonic wave instability in a streaming dusty plasma. In: Phys. Scr 73 (2006), April, S. 320–324. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/73/4/002>. – DOI 10.1088/0031-8949/73/4/002

**Scheck et al. 2002**

SCHECK, L. ; ALOY, M. A. ; MARTÍ, J. M. ; GÓMEZ, J. L. ; MÜLLER, E.: Does the plasma composition affect the long-term evolution of relativistic jets? In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 331 (2002), April, S. 615–634. <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05210.x>. – DOI 10.1046/j.1365-8711.2002.05210.x

**Schödel et al. 2002**

SCHÖDEL, R. ; OTT, T. ; GENZEL, R. ; HOFMANN, R. ; LEHNERT, M. ; ECKART, A. ; MOUAWAD, N. ; ALEXANDER, T. ; REID, M. J. ; LENZEN, R. ; HARTUNG, M. ; LACOMBE, F. ; ROUAN, D. ; GENDRON, E. ; ROUSSET, G. ; LAGRANGE, A.-M. ; BRANDNER, W. ; AGEORGES, N. ; LIDMAN, C. ; MOORWOOD, A. F. M. ; SPYROMILIO, J. ; HUBIN, N. ; MENTEN, K. M.: A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. In: Nature 419 (2002), Oktober, S. 694–696. <http://dx.doi.org/10.1038/nature01121>. – DOI 10.1038/nature01121

**Sikora u. Madejski 2000**

SIKORA, M. ; MADEJSKI, G.: On Pair Content and Variability of Subparsec Jets in Quasars. In: Astrophysical Journal 534 (2000), Mai, S. 109–113. <http://dx.doi.org/10.1086/308756>. – DOI 10.1086/308756

**Silva et al. 2003**

SILVA, L. O. ; FONSECA, R. A. ; TONGE, J. W. ; DAWSON, J. M. ; MORI, W. B. ; MEDVEDEV, M. V.: Interpenetrating Plasma Shells: Near-equipartition Magnetic

Field Generation and Nonthermal Particle Acceleration. In: *Astrophysical Journal, Letters* 596 (2003), Oktober, S. L121–L124. <http://dx.doi.org/10.1086/379156>. – DOI 10.1086/379156

**Sironi u. Spitkovsky 2009a**

SIRONI, L. ; SPITKOVSKY, A.: Particle Acceleration in Relativistic Magnetized Collisionless Pair Shocks: Dependence of Shock Acceleration on Magnetic Obliquity. In: *Astrophysical Journal* 698 (2009), Juni, S. 1523–1549. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/698/2/1523>. – DOI 10.1088/0004-637X/698/2/1523

**Sironi u. Spitkovsky 2009b**

SIRONI, L. ; SPITKOVSKY, A.: Synthetic Spectra from Particle-In-Cell Simulations of Relativistic Collisionless Shocks. In: *Astrophysical Journal, Letters* 707 (2009), Dezember, S. L92–L96. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/707/1/L92>. – DOI 10.1088/0004-637X/707/1/L92

**Spitkovsky 2008a**

SPITKOVSKY, A.: On the Structure of Relativistic Collisionless Shocks in Electron-Ion Plasmas. In: *Astrophysical Journal, Letters* 673 (2008), Januar, S. L39–L42. <http://dx.doi.org/10.1086/527374>. – DOI 10.1086/527374

**Spitkovsky 2008b**

SPITKOVSKY, A.: Particle Acceleration in Relativistic Collisionless Shocks: Fermi Process at Last? In: *Astrophysical Journal, Letters* 682 (2008), Juli, S. L5–L8. <http://dx.doi.org/10.1086/590248>. – DOI 10.1086/590248

**Taflove u. Hagness 2005**

TAFLOVE, A. ; HAGNESS, S. C.: *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed.* 2005

**Villasenor u. Buneman 1992**

VILLASENOR, J. ; BUNEMAN, O.: Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers. In: *Computer Physics Communications* 69 (1992), März, S. 306–316. [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655\(92\)90169-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655(92)90169-Y). – DOI 10.1016/0010-4655(92)90169-Y

**Weibel 1959**

WEIBEL, E. S.: Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an

Anisotropic Velocity Distribution. In: *Physical Review Letters* 2 (1959), Februar, S. 83–84. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.2.83>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.2.83

**Weidinger et al. 2010**

WEIDINGER, M. ; RÜGER, M. ; SPANIER, F.: Modelling the steady state spectral energy distribution of the BL-Lac Object PKS 2155-30.4 using a selfconsistent SSC model. In: *Astrophysics and Space Sciences Transactions* 6 (2010), Januar, S. 1–7

**Yee 1966**

YEE, K.: Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14 (1966), Mai, S. 302–307. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693>. – DOI 10.1109/TAP.1966.1138693



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Thomas Burkart



# Danksagung

Die Anfertigung einer Doktorarbeit ist nicht nur ein persönlicher Erfolg, sondern auch der endgültige Abschluss der äußerst spannenden und lehrreichen Studien- und Promotionszeit. Daher möchte ich nun all denjenigen danken, die mich während dieser Zeit begleitet und unterstützt, aufgemuntert und zum Lachen gebracht haben.

Als Allererstes gebührt mein Dank *Karl Mannheim*, der es mir ermöglicht hat, diese vorliegende Arbeit am Lehrstuhl für Astronomie in Würzburg anzufertigen, der immer wieder interessante Diskussionen und hervorragende Ideen angeregt und mir andererseits die für eine Doktorarbeit nötige Freiheit gelassen hat.

Des weiteren danke ich *Felix Spanier* für die Themenstellung und die ausführliche Betreuung, für Hilfe und Hinweise bei der Code-Entwicklung sowie bei allen möglichen Fragestellungen rund um die Plasmaphysik, Computer und viele andere Dinge.

Außerdem danke ich *Wolfgang Kinzel* für die spontane Bereitschaft, die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen.

Meinen Kollegen am Lehrstuhl, vor allem *Oliver Elbracht*, *Michael Rüger* und *Mattias Weidinger*, danke ich für offene Ohren bei Problemen aller Art, für die manchmal nötige Ablenkung vom wissenschaftlichen Alltag, für entspannende Mittagspausen in der Cafete und beim Bomberclone...

Und was wäre die Studienzeit ohne großartige Freunde? Danke an *Magda* und *Markus Klein*, an *Andi Nuber*, meine *Unterwasserrugbymannschaft* und viele mehr für eine unvergessliche Zeit...

Ein ganz besonderes Dankeschön geht natürlich an meine Freundin *Karo Schwan*, sowie an meine Eltern *Erika* und *Robert Treffler*, *Karla* und *Rudi Burkart* für langjährige und immerwährende Unterstützung.

Danke Euch allen!