

# **Bildung reiner Hüllen in vollständig zerlegbaren torsionsfreien abelschen Gruppen**

**Dissertation zur Erlangung des  
naturwissenschaftlichen Doktorgrades  
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg**

**vorgelegt von**

**Peter Fleischmann**

**aus**

**Fulda**

**Würzburg, 2003**

Eingereicht am: 24. April 2003

bei der Fakultät für Mathematik und Informatik

1. Gutachter: Prof. Dr. O. Mutzbauer

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Heineken

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juni 2003

*Das Schönste, was wir erleben können,  
ist das Geheimnisvolle.*

*Es ist das Grundgefühl, das an der Wiege  
von wahrer Kunst und Wissenschaft steht.*

*Wer es nicht kennt und  
sich nicht mehr wundern,  
nicht mehr staunen kann,  
der ist sozusagen tot  
und seine Augen sind erloschen.*

*Albert Einstein*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Präliminarien</b>	<b>2</b>
2.1	Kombinatorik . . . . .	2
2.2	Torsionsfreie abelsche Gruppen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Projektive Räume</b>	<b>6</b>
3.1	Begriffe . . . . .	6
3.2	Sätze für projektive Räume . . . . .	8
3.3	Ecken eines projektiven Unterraumes . . . . .	10
3.4	Unterraumbasis, Relationenmatrix . . . . .	12
3.5	Spezielle Hyperebenen . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Algorithmen</b>	<b>20</b>
4.1	Bestimmung der Hyper-Ecken zu einem Unterraum . . . . .	20
4.2	Bestimmung von Ecken eines projektiven Raumes . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Bildung reiner Hüllen</b>	<b>22</b>
5.1	Reine Hülle von Elementen in Butlergruppen . . . . .	22
5.2	Reine Hüllen in vollständig zerlegbaren Gruppen . . . . .	27
5.3	Eigenschaften der Eckendarstellung . . . . .	31
5.4	Erzeugung einer Eckendarstellung einer Butlergruppe . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Reine Darstellung von Butlergruppen</b>	<b>35</b>
6.1	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	35
6.2	Reine Darstellung einer Bracketgruppe . . . . .	35
6.3	Beispiele für Eckendarstellungen ausgewählter Butlergruppen . . . . .	37
6.4	Vergleich der Laufzeiten für die Beispiele . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Betrachtung der Ergebnisse und Ausblicke</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Mathematica Programme</b>	<b>45</b>
A.1	Datenstruktur . . . . .	45
A.2	Aufruf der Unterprogramme . . . . .	46
	<b>Literatur</b>	<b>51</b>
	<b>Index</b>	<b>53</b>
	<b>Bezeichnungsindex</b>	<b>54</b>

## **Danksagung**

Ich danke meinen Eltern, die mich während meines Studiums und der Promotion stets unterstützen. Sie haben mich losgelassen, wenn ich meinen Weg gehen wollte, und mir Halt gegeben, wenn ich ihn benötigte.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. Otto Mutzbauer für die sehr gute Betreuung und Anregungen bei der Anfertigung der Dissertation.

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit wird eine wichtige Klasse von torsionsfreien abelschen Gruppen, die Butlergruppen, behandelt. Darunter versteht man in Anlehnung an M. C. R. Butler [5] torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges, die reine Untergruppen von vollständig zerlegbaren Gruppen sind.

Es sind folgende Aussagen für eine torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  äquivalent:

- (i)  $G$  ist Butlergruppe,
- (ii)  $G$  ist reine Untergruppe einer vollständig zerlegbaren torsionsfreien abelschen Gruppe,
- (iii)  $G$  ist homomorphes Bild einer vollständig zerlegbaren torsionsfreien abelschen Gruppe endlichen Ranges.

Da nur torsionsfreie abelsche Gruppen behandelt werden, werden diese Gruppeneigenschaften im Folgenden vorausgesetzt und nicht explizit erwähnt.

Butlergruppen oder allgemein torsionsfreie abelsche Gruppen lassen sich in einen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum gleichen Ranges einbetten. Somit kann man auch eine Butlergruppe als Schnitt einer vollständig zerlegbaren Gruppe mit einem Unterraum ihrer divisiblen Hülle darstellen.

Eine Butlergruppe ist ein homomorphes Bild einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges. Somit läßt sie sich als endliche Summe reiner Hüllen von Gruppenelementen darstellen. Eine solche Menge von Elementen einer Butlergruppe wird als Butler-Erzeugendensystem bezeichnet und ist im allgemeinen nicht eindeutig.

In dieser Arbeit werden Methoden entwickelt, mit deren Hilfe man zu jeder Butlergruppe, die als Summe von Rang-1-Gruppen gegeben ist, einerseits eine reine Darstellung, d.h. die Summanden sind rein in der gesamten Gruppe, und andererseits ein spezielles Erzeugendensystem, die sogenannte Eckendarstellung, finden kann. An dieser Eckendarstellung sind alle (potentiellen) kritischen Typen, sowie die Typuntergruppen, ablesbar. Diese werden für die Bestimmung von regulierenden Untergruppen benötigt. Zur Entwicklung dieser Eckendarstellung werden nur Methoden für Vektorräume benutzt. Dies vereinfacht die Behandlung von Butlergruppen mit dem Computer und gestattet darüberhinaus eine elegantere Darstellung.

Das folgende Kapitel gibt eine kurze Einführung in rationale Gruppen. Bei der Bildung von reinen Hüllen wird häufig die divisible Hülle von Gruppenelementen, die als Unterräume eines Vektorraumes angesehen werden können, benutzt. Insbesondere finden Unterräume der Dimension 1 Verwendung, die im projektiven Raum als Punkte dargestellt werden. Eine Betrachtung im projektiven Raum liegt somit nahe. Kapitel 3 beschäftigt sich mit speziellen Punkten von projektiven Unterräumen, den Ecken, und Hyperebenen, den sogenannte Hyper-Ecken. Die Algorithmen zur Bestimmung der (Hyper-)Ecken zeigt Kapitel 4.

Kapitel 5 zeigt wie (Hyper-)Ecken zur Bestimmung von reinen Hüllen und Eckendarstellungen benutzt werden können. Dies wird in Kapitel 6 anhand von Beispielen praktisch dargelegt.

## 2 Präliminarien

### 2.1 Kombinatorik

Die Menge  $N = \{1, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  sei gegeben. Eine Menge  $\mathcal{F}$  von Untermengen von  $N$  wird **Antikette** genannt, wenn keine Menge aus  $\mathcal{F}$  eine andere Menge aus  $\mathcal{F}$  enthält. Eine solche Menge heißt **maximale Antikette**, wenn für jede Untermengen  $I \subseteq N$  eine Menge  $J \in \mathcal{F}$  existiert mit  $I \subseteq J$  oder  $J \subseteq I$ .

Die Kompositionskette  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = N$  mit  $|A_i| = i$  heißt **Weg**. Mit  $w_i = A_i \setminus A_{i-1}$  kann für eine solche Reihe kurz  $(w_1, \dots, w_n)$  geschrieben werden.  $(w_1, \dots, w_n)$  ist also eine Permutation von  $\{1, \dots, n\}$  und es gibt in  $N$  somit  $n!$  Wege.

Emanuel Sperner [12] stellte 1928 die Frage, wie groß eine Antikette maximal sein kann. Es ist klar, daß jede Menge  $\mathcal{F}_k$  von  $k$ -elementigen Untermengen von  $N$  eine Antikette ist mit  $|\mathcal{F}_k| \leq \binom{n}{k}$  und Gleichheit bei einer maximalen Antikette, also alle  $k$ -elementigen Untermengen enthält. Betrachtet man die Binomialkoeffizienten, so ist  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  das Maximum der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  mit  $k = 0, \dots, n$ .

#### Lemma 2.1

Eine Antikette in der Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge  $N$  besitzt maximal  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  Mengen.

Haben alle Mengen der Antikette eine Mächtigkeit kleiner gleich  $r$ , dann besitzt diese Antikette maximal  $\binom{n}{k}$  mit  $k = \min\{r, \lfloor n/2 \rfloor\}$  Mengen.

#### Beweis

Sei  $\mathcal{F}$  eine Antikette mit  $k$  Mengen. Eine Menge  $A \in \mathcal{F}$  mit  $|A| = m$  ist in  $m! \cdot (n-m)!$  Wegen enthalten. Da das Minimum für  $m = \lfloor n/2 \rfloor$  angenommen wird, ist  $A$  in mindestens  $\lfloor n/2 \rfloor! \cdot (n - \lfloor n/2 \rfloor)!$  Wegen enthalten. Da es maximal  $n!$  Wege in  $N$  gibt, von denen keiner mehr als eine Menge aus  $\mathcal{F}$  enthält, gilt  $k \cdot \lfloor n/2 \rfloor! \cdot (n - \lfloor n/2 \rfloor)! \leq n!$ . Also gilt  $|\mathcal{F}| = k \leq \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor! \cdot (n - \lfloor n/2 \rfloor)!} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

Für alle Mengen  $A$  der Antikette  $\mathcal{F}$  gelte  $|A| \leq r$ . Die Anzahl von Wegen in denen  $A$  mit  $|A| = m$  enthalten ist, ist  $m! \cdot (n-m)!$ . Das Minimum von  $m! \cdot (n-m)!$  mit  $0 \leq m \leq r$  wird somit für  $m = \min\{r, \lfloor n/2 \rfloor\}$  angenommen. Mit der obigen Begründung folgt die Behauptung.  $\square$

Einen weiteren Beweis findet man bei D.Lubell [9] oder in The Book [1, S.135-139].

Nicht jeder Weg in  $\{1, \dots, n\}$  muß eine Menge einer maximalen Antikette enthalten, wie folgendes Beispiel zeigt:

#### Beispiel 2.2

Sein  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ . Dann ist  $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$  eine maximale Antikette, deren Mengen nicht auf den Wegen (1324), (1342), (1423), (1432), (2314), (2341), (2413), (2431) liegen.



## 2.2 Torsionsfreie abelsche Gruppen

Die verwendeten Bezeichnungen beziehen sich weitgehend auf L.Fuchs [6]. Gelegentlich werden jedoch aktualisierte Notationen benutzt, die dann an entsprechender Stelle explizit eingeführt werden.

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  ist additive Untergruppe eines rationalen Vektorraumes, deren **divisible Hülle**  $\mathbb{Q}G = \{qg \mid q \in \mathbb{Q}, g \in G\}$  als Vektorraum aufgefaßt wird. Die Dimension von  $\mathbb{Q}G$  wird als **Rang** der Gruppe  $G$  bezeichnet, in Zeichen  $\text{rank } G = \dim(\mathbb{Q}G)$ . Torsionsfreie abelsche Gruppen vom Rang 1 werden auch als **Rang-1-Gruppen** bezeichnet und sind Untergruppen der rationalen Gruppe  $\mathbb{Q}$ . Die Gruppe  $G$  heißt **vollständig zerlegbar**, wenn sie als direkte Summe von Rang-1-Gruppen darstellbar ist.

Für  $p$  prim, heißt  $\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid b\}$  die  $p$ -Lokalisation von  $\mathbb{Q}$ .

**Definition 2.3 (Vgl. Fuchs [6, §26, §85])**

Sei  $A$  eine torsionsfreie abelsche Gruppe, und  $p$  eine Primzahl. Für  $a \in A \setminus 0$  bezeichnet  $h_p^A(a) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid p^k x = a \text{ ist in } A \text{ lösbar}\}$  oder kurz  $h_p(a)$  die  **$p$ -Höhe von  $a$  in  $A$** . Ist  $p^k x = a$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  lösbar, so ist  $h_p(a) = \infty$ . Insbesondere gilt  $h_p^A(a) = h_p^{\mathbb{Q}_p A}$ . Ist  $h_p^A(a) = n < \infty$ , so gilt  $a \in p^n \mathbb{Q}_p A \setminus p^{n+1} \mathbb{Q}_p A$ .

Sei  $q \in \mathbb{Q}$ . Dann bezeichnet  $o_p(q) = n \in \mathbb{Z}$  mit  $q \in p^n \mathbb{Q}_p \setminus p^{n+1} \mathbb{Q}_p$  die  **$p$ -Ordnung** von  $q$ . Für  $q \in \mathbb{Q}$  gilt insbesondere  $q = \prod_{p \text{ prim}} p^{o_p(q)}$ .

**Beispiel 2.4**

Sei  $p$  prim und  $r, s \in \mathbb{Z}$  teilerfremd zu  $p$ . Für  $q = p^n \cdot \frac{r}{s}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $o_p(q) = n$ , da  $q = p^n \frac{r}{s} \in p^n \mathbb{Q}_p$  mit  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_p$  und  $q = p^{n+1} \frac{r}{ps} \notin p^{n+1} \mathbb{Q}_p$ , da  $\frac{r}{ps} \notin \mathbb{Q}_p$ .

**Definition 2.5**

Sei  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  die Folge der Primzahlen. Die Sequenz der  $p$ -Höhen  $\chi_A(a) = \chi(a) = (h_{p_1}(a), \dots, h_{p_n}(a), \dots)$  wird **Charakteristik** von  $a$  genannt. Zwei Charakteristiken  $\chi(a) = (k_1, \dots, k_n, \dots)$  und  $\chi(b) = (\ell_1, \dots, \ell_n, \dots)$  heißen äquivalent, wenn nur für endlich viele  $i$  gilt  $k_i \neq \ell_i$  und im Fall  $k_i \neq \ell_i$  sowohl  $k_i$  als auch  $\ell_i$  endlich sind. Anders ausgedrückt  $\sum_i |k_i - \ell_i| < \infty$  mit  $\infty - \infty = 0$ . Die so definierte Äquivalenzklasse heißt **Typ**. Ist  $\chi_A(a)$  ein Repräsentant eines Typs  $\tau$ , so sagt man  $a$  ist vom Typ  $\tau$  und schreibt  $\mathbf{t}_A(a) = \tau$ . In einer rationalen Gruppe  $A$  haben alle Elemente  $\neq 0$  denselben Typ. Daher sagt man auch  $A$  hat den Typ  $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}_A(a)$  mit  $a \in A$ .

Sei  $a \in A \subset \mathbb{Q}$ . Dann heißt  $\chi(A) = (h_p^A(a) - o_p(a) \mid p \text{ prim})$  **Charakteristik** von  $A$ . Diese Charakteristik ist unabhängig von der Wahl des Elementes  $a \in A$ . Im Unterschied zur Charakteristik von Elementen einer Gruppe können hier auch negative Einträge vorkommen. Dies geschieht genau dann, wenn  $1 \notin A$ .

Eine Untergruppe  $B$  von  $A$  heißt **rein** in  $A$ , in Zeichen  $B \subset_* A$ , wenn  $nB = B \cap nA$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt. Sie heißt  **$p$ -rein**, wenn  $p^k B = B \cap p^k A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist. Mit anderen Worten, die  $p$ -Höhen der Elemente von  $B$  sind die gleichen in  $A$  und  $B$ . Ist eine Untergruppe  $p$ -rein für alle Primzahlen  $p$ , so ist sie rein.

Sei  $M$  eine Teilmenge von  $A$ . Als **reine Hülle**  $\langle M \rangle_*^A$  von  $M$  in  $A$  bezeichnet man den Durchschnitt aller  $M$  enthaltenden reinen Untergruppen von  $A$ . Es gilt

$\langle M \rangle_*^A = A \cap (\sum_{x \in M} \mathbb{Q}x)$ . Ist  $M$  eine Untergruppe von  $A$ , so ist  $\langle M \rangle_*^A = A \cap \mathbb{Q}M$ .

Für eine Gruppe  $A$  wird  $T_A := \{\mathbf{t}(a) \mid a \in A \setminus 0\}$  die **Typenmenge** von  $A$  genannt. Für jeden Typ  $\tau$  definiert man spezielle **Typuntergruppen**

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \{x \in A \mid \mathbf{t}(x) \geq \tau\}, \\ A^*(\tau) &= \langle x \in A \mid \mathbf{t}(x) > \tau \rangle \text{ und} \\ A^\sharp(\tau) &= \langle A^*(\tau) \rangle_*^A. \end{aligned}$$

Dabei sind  $A(\tau)$  und  $A^\sharp(\tau)$  rein in  $A$  und es gelten die Inklusionen  $A^*(\tau) \subseteq A^\sharp(\tau) \subseteq A(\tau)$ .

Sei  $m$  eine natürliche Zahl. Zu jeder Zerlegung einer vollständig zerlegbaren Gruppe  $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$  in rationale Gruppen  $A_i$  existiert eine  **$m$ -Zerlegungsbasis**  $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  mit  $A_i = \langle u_i \rangle_*^A$ , d.h.  $h_p(u_i) \in \{0, \infty\}$  für alle  $p \mid m$  und  $1 \leq i \leq n$ .

Ist  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  und  $x \in V$ . Dann heißt  $\mathbf{tr}(x) = \{i \mid x = \sum q_i u_i \text{ und } q_i \neq 0\}$  **Träger** von  $x$ .

### Definition 2.6

Seien  $X$  und  $Y$  Untergruppen in einer Gruppe  $G$ . Ist  ${}^X/X \cap Y$  von endlichem Exponenten, so heißt  $X$  **quasi-enthalten** in  $Y$ , in Zeichen  $X \dot{\subset} Y$ .

Eine äquivalente Definition lautet:  $X$  ist quasi-enthalten in  $Y$ , wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $nX \subset Y$ , d.h. es gilt für alle  $x \in X$ :  $nx \in X \cap Y$ . Somit ist  $\exp({}^X/X \cap Y)$  ein Teiler von  $n$  und damit endlich.

Ist auch  ${}^Y/X \cap Y$  von endlichem Exponenten, bzw.  $mY \subset X$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , dann heißt  $X$  **quasi-gleich** zu  $Y$ , in Zeichen  $X \doteq Y$ .

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe von endlichem Rang und einer natürlichen Zahl  $n$  ist  ${}^X/nX$  endlich, also sind für quasigleiche Gruppen  $X$  und  $Y$  stets  ${}^X/X \cap Y$  und  ${}^Y/X \cap Y$  endlich.

Insbesondere gilt für  $q \in \mathbb{Q} \setminus 0$  und  $A$  torsionsfreie abelsche Gruppe:  $qA \doteq A$ , betrachtet als Untergruppen der divisiblen Hülle  $\mathbb{Q}A$  von  $A$ .

### Lemma 2.7

Seien  $A_i, B_i \subset \mathbb{Q}$  für  $1 \leq i \leq n$  mit  $A_i \doteq B_i$ . Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \doteq \bigcap_{i=1}^n B_i.$$

Für  $I \subset \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \dot{\subset} \bigcap_{i \in I} B_i.$$

### Beweis

Da  $A_i \doteq B_i$  gibt es ein  $m_i \in \mathbb{N}$  mit  $m_i A_i \subset B_i$ . Damit gilt:

$$\text{kgV}(m_1, \dots, m_n) \bigcap_{i=1}^n A_i \subset \bigcap_{i=1}^n B_i.$$

Entsprechendes gilt bei Vertauschung von  $A_i$  und  $B_i$ . Also gilt die erste Aussage.

Die zweite Aussage ergibt sich mit

$$\text{kgV}(m_1, \dots, m_n) \bigcap_{i=1}^n A_i \subset \bigcap_{i=1}^n B_i \subset \bigcap_{i \in I} B_i. \quad \square$$

Sind  $A, B \subset \mathbb{Q}$  rationale Gruppen mit  $A \dot{\subset} B$ , dann gilt  $\mathbf{t}(A) \leq \mathbf{t}(B)$ . Entsprechend gilt  $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}(B)$  für  $A \doteq B$ .

Eine spezielle Klasse der torsionsfreien abelschen Gruppen bilden die reinen Untergruppen von vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges. Diese werden **Butlergruppen** genannt.

**Satz 2.8**

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges sind äquivalent:

- (i)  $G$  ist Butlergruppe,
- (ii)  $G$  ist homomorphes Bild einer vollständig zerlegbaren torsionsfreien abelschen Gruppe von endlichem Rang,
- (iii)  $G$  ist reine Untergruppe einer vollständig zerlegbaren torsionsfreien abelschen Gruppe.
- (iv) Die Typenmenge  $T(G)$  von  $G$  ist endlich und für jeden Typ  $\tau$  ist  $G^\sharp(\tau)/G^*(\tau)$  eine Torsionsgruppe und es existiert eine  $\tau$ -homogene vollständig zerlegbare Gruppe  $G_\tau$ , die die sogenannte **Butlergleichung**  $G(\tau) = G_\tau \oplus G^\sharp(\tau)$  erfüllt.

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  bezeichnet  $T_{kr} = \{\tau \in T(G) \mid G(\tau) \neq G^\sharp(\tau)\}$  die **kritische Typenmenge** von  $G$ . Untergruppen  $G_\tau$  von  $G(\tau)$  heißen **Typen-Komplemente** von  $G(\tau)$ , wenn sie die Butlergleichung  $G(\tau) = G_\tau \oplus G^\sharp(\tau)$  lösen.

Nach Satz 2.8(ii) kann jede Butlergruppe als endliche Summe von Rang-1-Gruppen dargestellt werden. Eine solche Summendarstellung heißt **reine Darstellung**, wenn jeder Summand rein in der gesamten Gruppe ist.

Eine Butlergruppe  $G = \sum_{i=1}^n A_i y_i$  vom Rang  $n - 1$  mit  $\sum_{i=1}^n y_i$  wird auch **Bracketgruppe** genannt und als  $\mathcal{G}[A_1, \dots, A_n]$  notiert. Ist  $G = \mathcal{G}[A_1, \dots, A_n] = \sum_{i=1}^n A_i y_i$  eine Bracketgruppe, dann sind jeweils  $n - 1$  Elemente von  $\{y_1, \dots, y_n\}$  linear unabhängig und es gilt  $G \cong U/K$  mit  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  und  $K = (\bigcap_{i=1}^n A_i)(u_1 + \dots + u_n)$ .

## 3 Projektive Räume

### 3.1 Begriffe

Die Bezeichnungen sind nach Kowalsky [7] und Baer [3] gewählt.

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  mit Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  und Dimension  $\geq 3$ . Der **projektive Raum** über dem kommutativen Körper  $\mathbb{Q}$  ist die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume des Vektorraumes  $V$ . Eine Teilmenge  $S$  von  $P$  heißt **(projektiver) Unterraum** von  $P$ , wenn sie aus genau den 1-dimensionalen Unterräumen eines Unterraumes  $U$  von  $V$  besteht, also selbst ein projektiver Raum ist. Als (projektive) Dimension eines (projektiven) Unterraumes  $S$  von  $P$  (in Zeichen:  $\text{Dim } S$ ) wird die um 1 verminderte Dimension des Vektorraumes  $U$  definiert:  $\text{Dim } S = \dim U - 1$ .

Um Mißverständnisse zu vermeiden wird die projektive Dimension mit einem Großbuchstaben gekennzeichnet. Projektive Unterräume der Dimension 0 werden **Punkte**, der Dimension 1 (projektive) **Geraden** und der Dimension 2 (projektive) **Ebenen** genannt.

#### Schreibweisen 3.1

Punkte eines projektiven Raumes werden mit Großbuchstaben  $A, B, \dots, F, X, Y, Z$  bezeichnet, Geraden mit Kleinbuchstaben  $g, h$ . Speziell bezeichnet  $P$  den projektiven Raum,  $R, S, T$  einen Unterraum von  $P$ . Vektoren des zugrundeliegenden Vektorraumes werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Bezeichnet ein Punkt  $X$  den von einem Vektor  $x$  aufgespannten Vektorraum  $\mathbb{Q}x$ , so wird dieser Punkt auch mit  $\mathbb{Q}x$  bezeichnet.

Die projektiven Geraden entsprechen umkehrbar eindeutig den 2-dimensionalen, die projektiven Ebenen den 3-dimensionalen Unterräumen von  $V$ . Dem Nullraum (der von 0 aufgespannte Vektorraum) entspricht dem projektiven Raum der leeren Menge und hat die Dimension  $\text{Dim } \emptyset = -1$ .

Sind  $S$  und  $T$  Unterräume eines projektiven Raumes, dann heißt der von  $S$  und  $T$  aufgespannte Unterraum **Verbindungsraum** von  $S$  und  $T$ , in Zeichen  $S \vee T$ . In der Literatur wird auch die Schreibweise  $S + T$  verwendet. Er enthält alle Punkte, die auf den Geraden durch Punkte aus  $S$  und  $T$  liegen.

Für eine Untermenge  $A$  eines Vektorraumes  $V$  ist die **projektive Hülle**  $\mathbb{Q}A$  von  $A$  der Durchschnitt aller projektiven Unterräume, die  $\{\mathbb{Q}a \mid a \in A\}$  enthalten und ist der Verbindungsraum  $\mathbb{Q}A = \bigvee_{a \in A} \mathbb{Q}a$ .

Sind  $S$  und  $T$  Unterräume eines projektiven Raumes mit  $S \subset T$ , dann wird  $T \setminus S$  **Unterraum-Differenz** genannt.  $T \setminus S$  ist im Allgemeinen kein Unterraum. Mit  $S = \emptyset$  ist wegen  $T = T \setminus S = T \setminus \emptyset$  jeder projektive Unterraum  $T$  auch eine Unterraum-Differenz.

Ein Unterraum  $H$  eines projektiven Raumes  $P$  heißt **Hyperebene**, wenn  $H \neq P$  und  $P = H \vee X$  mit einem Punkt  $X \in P$  gilt.

Ist  $\{U_1, \dots, U_n\}$  eine Menge von Punkten, die den projektiven Raum  $P$  aufspannen, also  $P = \bigvee_{i=1}^n U_i$ , so heißt  $\{U_1, \dots, U_n\}$  **Erzeugendensystem** von  $P$ . Ist dies ein **minimales Erzeugendensystem**, d.h. jede echte Teilmenge spannt nicht den

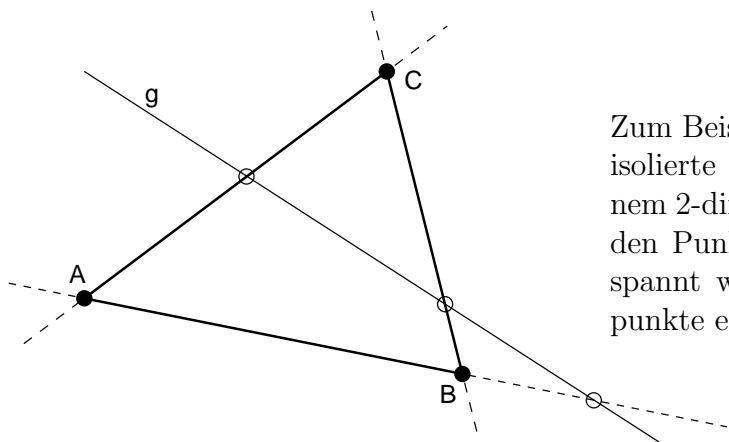
### 3 PROJEKTIVE RÄUME

gesamten Raum auf, so nennt man  $\{U_1, \dots, U_n\}$  **Basis** und  $U_i$  **Basispunkt**.

Ein von Basispunkten einer fixierten Basis  $\{U_1, \dots, U_n\}$  aufgespannter Unterraum  $P_I = \bigvee_{i \in I} U_i$  für  $I \subset \{1, \dots, n\}$  heißt **Basis-Verbindungsraum**. Speziell heißt  $\widehat{P}_i := \bigvee_{j \neq i} U_j$  **Basis-Hyperebene**.

Ein Punkt  $X \in P_I$  eines Basis-Verbindungsraumes mit  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , heißt **innerer Punkt** von  $P_I$ , wenn er in keinem echt kleineren Basis-Verbindungsraum enthalten ist, also  $X \notin P_J$  für alle  $J \subsetneq I$  gilt.  $\mathbf{tr}(X) = I$  heißt dann **Träger** von  $X$ . Ist  $X \in P_I$  kein innerer Punkt, so heißt er **Randpunkt** von  $P_I$ .

Für einen Unterraum  $S$  und einen Basis-Verbindungsraum  $P_I$  mit  $I \subset \{1, \dots, n\}$  heißt  $X \in S \cap P_I$  **Durchstoßpunkt** von  $S$  durch  $P_I$ . Ein Punkt  $X \in S \cap P_I$  heißt **isolierter Durchstoßpunkt** von  $S$  durch  $P_I$ , wenn er innerer Punkt von  $P_I$  und einziger Schnittpunkt von  $S$  und  $P_I$  ist, also  $X = S \cap P_I$ .



Zum Beispiel hat eine Gerade  $g$  drei isolierte Durchstoßpunkte  $\circ$  in einem 2-dimensionalen Raum, der von den Punkten  $\bullet A, B$  und  $C$  aufgespannt wird, wenn sie keine Basispunkte enthält.

Für eine gegebene Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  von  $V$  ist jeder Vektor  $x = \sum \alpha_i u_i \in V$  eindeutig als  $n$ -Tupel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  seiner Koordinaten darstellbar. Man kann auf der Menge der Vektoren aus  $V \setminus 0$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  definieren durch

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \dots, \beta_n) : \iff \text{es gibt ein } q \in \mathbb{Q} \setminus 0 \text{ mit } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = q \cdot (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Jeder Punkt  $X$  aus dem projektiven Raum  $P = P(V)$  repräsentiert eine dieser Äquivalenzklassen. Man sagt ein Punkt  $X$  hat die **homogenen Koordinaten**  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  bezüglich der Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  von  $V$ , falls  $x = \sum \alpha_i u_i$  ein Repräsentant der Äquivalenzklasse  $X = \mathbb{Q}x$  ist.

Es ist klar, daß zwei Koordinatentupel genau dann äquivalent sind, wenn sie homogene Koordinaten desselben Punktes von  $P$  sind. Homogene Koordinaten sind also nicht eindeutig durch den Punkt bestimmt, den sie darstellen. Der scheinbare Nachteil der Nicht-Eindeutigkeit bietet die Möglichkeit die homogenen Koordinaten zu 'normieren'.

Die homogenen Koordinaten  $(q_1, \dots, q_n)$  eines Punktes  $X$  heißen **gekürzt**, wenn

- (i) der erste von Null verschiedene Koeffizient positiv ist,

- (ii) die Koeffizienten  $q_1$  ganzzahlig sind und
- (iii) größten gemeinsamen Teiler 1 haben.

Seien  $(q_1, \dots, q_n)$  die homogenen Koordinaten von  $X$ . Die Menge  $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q_i \neq 0\}$  ist der Träger  $\text{tr}(X)$  von  $X$ .

## 3.2 Sätze für projektive Räume

### Lemma 3.2

Für projektive Unterräume  $R, S, T$  mit  $S \supset T$ , gilt

$$\text{Dim}(R \cap S) - \text{Dim}(R \cap T) \leq \text{Dim}(S) - \text{Dim}(T).$$

### Beweis

Nach Dimensionssatz gelten

$$\begin{aligned} \text{Dim}(R \cap S) &= \text{Dim}(R) + \text{Dim}(S) - \text{Dim}(R \vee S), \\ \text{Dim}(R \cap T) &= \text{Dim}(R) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(R \vee T). \end{aligned}$$

Differenzbildung ergibt

$$\begin{aligned} \text{Dim}(R \cap S) - \text{Dim}(R \cap T) &= \text{Dim}(S) - \text{Dim}(T) - \underbrace{(\text{Dim}(R \vee S) - \text{Dim}(R \vee T))}_{\geq 0 \text{ wegen } R \vee S \supseteq R \vee T} \\ &\leq \text{Dim}(S) - \text{Dim}(T). \end{aligned}$$

□

### Lemma 3.3

Sei  $S$  ein projektiver Unterraum mit  $S \subset P_I$  für ein  $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$  und  $X \notin P_I$ . Dann gilt  $\text{Dim}(S \vee X) = \text{Dim}(S) + 1$ .

### Beweis

Sei  $\{S_1, \dots, S_r\}$  Erzeugendensystem von  $S$ , also  $\text{Dim}(S) = r - 1$ . Wegen  $X \notin P_I \supset S$  gilt  $X \notin S$ . Somit ist  $\{X, S_1, \dots, S_r\}$  Erzeugendensystem von  $S \vee X$  mit  $\text{Dim}(S \vee X) = \text{Dim}(S) + 1$ . □

### Lemma 3.4

Zwei Geraden in einem projektiven Raum schneiden sich genau dann, wenn sie in derselben Ebene liegen.

### Beweis

O.B.d.A. sind die beiden Geraden verschieden. Seien  $A, B, C, D$  verschiedene Punkte mit  $g = A \vee B$  und  $h = C \vee D$ . Nach dem Dimensionssatz gilt

$$\begin{aligned} \text{Dim}(g \cap h) &= \text{Dim}(g) + \text{Dim}(h) - \text{Dim}(g \vee h) \\ &= \text{Dim}(A \vee B) + \text{Dim}(C \vee D) - \text{Dim}(A \vee B \vee C \vee D) \\ &= 1 + 1 - \text{Dim}(A \vee B \vee C \vee D) \end{aligned}$$

### 3 PROJEKTIVE RÄUME

Liegen  $A, B, C, D$  in derselben Ebene, d.h. die beiden Geraden liegen in dieser Ebene, so gilt  $\text{Dim}(g \cap h) = 2 - \text{Dim}(A \vee B \vee C \vee D) = 2 - 2 = 0$ , also schneiden sich die beiden Geraden. Liegen die Punkte nicht in einer Ebene, so gilt  $\text{Dim}(g \cap h) = 2 - \text{Dim}(A \vee B \vee C \vee D) = 2 - 3 = -1$ , also sind die beiden Geraden windschief zueinander und sie schneiden sich nicht.  $\square$

#### Lemma 3.5

Eine Gerade in  $P$  durchstößt alle Hyperebenen. Insbesondere schneidet eine Gerade in einem  $n$ -dimensionalen Raum alle  $(n - 1)$ -dimensionalen Unterräume.

#### Beweis

Sei  $H$  eine Hyperebene. Für  $g \subset H$  durchstößt  $g$  trivialerweise  $H$ . Sei also  $g \not\subset H$  Gerade. Mit dem Dimensionssatz gilt

$$\text{Dim}(g \cap H) = \text{Dim } H + \text{Dim } g - \text{Dim}(g \vee H) = (n - 1) + 1 - n = 0.$$

Also ist der Schnitt nicht leer und  $g$  durchstößt  $H$ .  $\square$

#### Lemma 3.6

Besitzt ein Unterraum  $U$  zwei Durchstoßpunkte durch einen Basis-Verbindungsraum  $P_I$  mit  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , dann enthält  $U$  für alle  $i \in I$  einen Durchstoßpunkt durch  $P_J$  mit  $J = I \setminus i$ .

#### Beweis

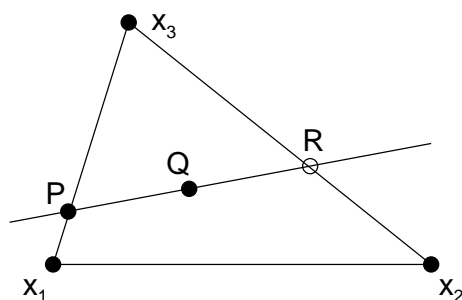
Sei  $g$  die Gerade durch die beiden Durchstoßpunkte. Dann liegt  $g$  in  $P_I$  und  $U$ . Nach Lemma 3.5 durchstößt  $g$  alle Hyperebenen, also speziell auch  $\widehat{P}_i$  mit  $i \in I$ . Also hat  $U$  einen Punkt in  $P_J = P_I \cap \widehat{P}_i$  mit  $J = I \setminus i$  und  $i \in I$ .  $\square$

#### Lemma 3.7

Seien  $P_j \subset P_I$  Basis-Verbindungsräume. Eine Gerade, die einen inneren Punkt von  $P_I$  mit einem inneren Punkt von  $P_j$  verbindet, durchstößt jeden Basis-Verbindungsraum  $P_K$  mit  $K = I \setminus j$  für alle  $j \in J$ . Insbesondere gilt dann  $P_j \not\subset P_K$ ,  $P_K \subset P_I$ .

#### Beweis

Die Punkte, die die Verbindungsgerade festlegen, liegen beide in  $P_I$ , sind also Durchstoßpunkte durch  $P_I$ . Mit Lemma 3.6 und  $K = I \setminus j$  für ein beliebiges  $j \in J$  enthält die Verbindungsgerade einen Durchstoßpunkt von  $P_K$ . Mit  $j \notin K \subset I$  gilt die Behauptung.  $\square$



$P$  bzw.  $Q$  ist innerer Punkt von  $P_{\{1,3\}} = X_1 \vee X_3$  bzw.  $P_{\{1,2,3\}}$ . Die Gerade durch  $P$  und  $Q$  durchstößt  $P_{\{2,3\}} = X_2 \vee X_3$  im Punkt  $R$ .

#### Lemma 3.8

Seien  $P_j \subset P_I$  Basis-Verbindungsräume. Eine Gerade, die einen inneren Punkt von  $P_I$

mit einem inneren Punkt von  $P_J$  verbindet, enthält fast nur innere Punkte von  $P_I$ , d.h. nur endlich viele Punkte sind keine inneren Punkte.

**Beweis**

Sei  $g$  die Verbindungsgerade. Für alle  $K \subsetneq I$  enthält  $P_K$  maximal einen Punkt von  $g$ . Lügen zwei Punkte von  $g$  in  $P_K$  und somit ganz  $g$ , so enthielte  $g$  keinen inneren Punkt von  $P_I$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung. Weiter existieren nur endlich viele Untermengen von  $I$  und somit enthält  $g$  nur endlich viele Punkte, die keine inneren Punkte von  $P_I$  sind.  $\square$

### 3.3 Ecken eines projektiven Unterraumes

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit fixierter Basis  $(U_1, \dots, U_n)$  und Unterraum  $S$ .

Ein Punkt  $X \in S$  heißt **Ecke** von  $S$  bezüglich der fixierten Basis, wenn  $X$  minimalen Träger  $\text{tr}(X)$  in  $S$  hat, d.h. es existiert kein Punkt  $Y \in S$  mit  $\text{tr}(Y) \subsetneq \text{tr}(X)$ . Es wird im folgenden stillschweigend immer eine fixierte Basis vorausgesetzt.

**Lemma 3.9**

Sei  $X$  ein Punkt des Unterraumes  $S$  mit Träger  $I = \text{tr}(X)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $X$  ist Ecke von  $S$ ,
- (ii)  $X$  ist ein isolierter Durchstoßpunkt von  $S$  durch  $P_I$ ,
- (iii)  $X$  ist einziger Punkt in  $S$  mit Träger  $I$ .

**Beweis**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $X$  Ecke von  $S$  und kein isolierter Durchstoßpunkt, d.h. es gibt ein  $Y \in S \cap P_I$  mit  $Y \neq X$  und  $\text{tr}(Y) = I$ . Mit Lemma 3.6 gibt es dann aber einen Punkt  $Z \in S$  mit  $\text{tr}(Z) \subsetneq \text{tr}(X)$  und  $X$  wäre keine Ecke. Also gilt  $X = S \cap P_I$  und  $X$  ist isolierter Durchstoßpunkt von  $S$  durch  $P_I$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Ist  $X$  isolierter Durchstoßpunkt, so gilt  $X = S \cap P_I$  und  $X$  ist einziger Punkt mit Träger  $I$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Ist  $X$  keine Ecke von  $S$ , dann gibt es einen Punkt  $Y \in S$  mit  $\text{tr}(Y) \subsetneq \text{tr}(X)$ . Damit ist  $\{X, Y\} \subset S \cap P_I$ . Mit Lemma 3.8 liegen auf der Geraden  $X \vee Y \subset S \cap P_I$  unendlich viele Punkte mit Träger  $I$ .  $\square$

Seien  $L, S$  Unterräume mit  $S \subset L$ . Dann heißt  $X \in L \setminus S$  **Ecke** von  $L \setminus S$ , wenn  $X$  minimalen Träger  $\text{tr}(X)$  in  $L \setminus S$  hat, d.h. es existiert kein Punkt  $Y \in L \setminus S$  mit  $\text{tr}(Y) \subsetneq \text{tr}(X)$ .

**Lemma 3.10**

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$  und Unterraum  $S$ . Zu jedem Punkt  $X \in S$  gibt es eine Ecke  $M$  von  $S$  mit Träger  $\text{tr}(M) \subseteq \text{tr}(X)$ . Ist  $X$  keine Ecke, dann ist  $\text{tr}(M)$  eine echte Untermenge. Ist  $X$  Ecke, dann ist  $M = X$ .

$S$  enthält nur endlich viele Ecken und verschiedene Ecken haben unterschiedliche Träger. Insbesondere enthält  $S$  maximal  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  Ecken.

**Beweis**

Ist  $X$  Ecke und somit nach Lemma 3.9 isolierter Durchstoßpunkt von  $S$  durch  $P_I$



mit  $I = \mathbf{tr}(X)$ , dann ist  $M = X$ . Ist  $X$  keine Ecke, so gibt es nach Definition ein  $Y \in S$  mit  $\mathbf{tr}(Y) \subsetneq \mathbf{tr}(X)$ . Entweder ist dieses  $Y$  eine Ecke oder man findet induktiv eine Ecke  $Z$  mit  $\mathbf{tr}(Z) \subsetneq \mathbf{tr}(Y) \subsetneq \mathbf{tr}(X)$ .

Mit Lemma 3.9(iii) haben verschiedene Ecken von  $S$  unterschiedliche Träger.

Die Menge  $\{\mathbf{tr}(X) \mid X \text{ ist Ecke von } S\}$  ist eine Untermenge der Potenzmenge von  $\{1, \dots, n\}$ . Mit der Endlichkeit der Potenzmenge enthält  $S$  nur endlich viele Ecken. Insbesondere bildet diese Menge eine Antikette und mit Lemma 2.1 folgt die Abschätzung der Mächtigkeit.  $\square$

**Lemma 3.11**

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$  und Unterraum  $S$ . Sei  $X$  ein Punkt in  $S$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \mathbf{tr}(X)$  eine Ecke  $M$  von  $S$  mit  $i \in \mathbf{tr}(M) \subseteq \mathbf{tr}(X)$ .

**Beweis**

Ist  $X$  eine Ecke, dann ist  $M = X$ . Sonst gibt es nach Lemma 3.10 eine Ecke  $Y$  von  $S$  mit  $\mathbf{tr}(Y) \subset \mathbf{tr}(X)$ . Gilt bereits  $i \in \mathbf{tr}(Y)$ , so ist  $M = Y$  die gesuchte Ecke. Gilt  $i \notin \mathbf{tr}(Y)$ , so schneidet die Gerade  $Y \vee X$  nach Lemma 3.5 die Hyperebene  $\widehat{P}_j$  mit  $j \in \mathbf{tr}(Y) \subset \mathbf{tr}(X)$  in einem Punkt  $Z$ . Sowieso gilt  $i \in \mathbf{tr}(Z) \subsetneq \mathbf{tr}(X)$ . Induktiv findet man dann eine Ecke  $M$  von  $S$  mit  $i \in \mathbf{tr}(M) \subseteq \mathbf{tr}(Z) \subsetneq \mathbf{tr}(X)$ .  $\square$

Seien  $L, S$  Unterräume mit  $S \subset L$ . Die Menge der Ecken von  $S$  bzw.  $L \setminus S$  werde wie folgt bezeichnet

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S &= \{X \mid X \in S, X \text{ ist Ecke von } S\}, \\ \mathcal{M}_{L \setminus S} &= \{X \mid X \in L \setminus S, X \text{ ist Ecke von } L \setminus S\}. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma klärt die Beziehung zwischen diesen beiden Mengen.

**Lemma 3.12**

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$ . Seien  $L, S$  Unterräume mit  $L \subset S$ . Dann gilt:  $\mathcal{M}_{L \setminus S} \subset \mathcal{M}_L \subset \mathcal{M}_{L \setminus S} \dot{\cup} \mathcal{M}_S$ . Insbesondere ist  $\mathcal{M}_{L \setminus S} = \mathcal{M}_L \setminus \mathcal{M}_S$ .

**Beweis**

Sei  $X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$  mit Träger  $I$  Ecke in  $L \setminus S$ . Sowieso gilt  $X \in L$ .

Annahme:  $X$  ist keine Ecke von  $L$ . Dann gibt es mit Lemma 3.10 ein  $Y \in L$  mit kleinerem Träger, d.h.  $\mathbf{tr}(Y) \subsetneq \mathbf{tr}(X)$ . Insbesondere ist  $Y \in S$ , sonst wäre  $X \notin \mathcal{M}_{L \setminus S}$ . Weiter gilt  $X, Y \in P_I$  und somit auch  $g := X \vee Y \subset P_I$  mit  $g \subset L$  und  $g \cap S = \{Y\}$ . Da nur ein Punkt von  $g$  in  $S$  liegt, müssen alle anderen Punkte von  $g$  in  $L \setminus S$  liegen, also  $g \cap (L \setminus S) = g \setminus \{Y\} \subset P_I \cap L \setminus S$ . Da nach Lemma 3.8 fast alle Punkte von  $g \setminus \{Y\}$  den Träger  $I$  haben, insbesondere liegt auch  $X$  auf  $g$ , ist  $X$  keine Ecke von  $L \setminus S$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt  $\mathcal{M}_{L \setminus S} \subset \mathcal{M}_L$ .

Sei  $X$  Ecke von  $L$ . Dann ist  $X$  auch Ecke jeder Untermenge von  $L$ , die  $X$  enthält, insbesondere Ecke von  $S$  bzw.  $L \setminus S$ . Da  $S$  und  $L \setminus S$  offensichtlich disjunkt sind, gilt  $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{M}_{L \setminus S} \dot{\cup} \mathcal{M}_S$ .  $\square$

**Lemma 3.13**

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$ . Seien  $S$  und  $L$  Unterräume mit  $S \subset L$ . Gibt es einen Basis-Verbindungsraum  $P_J$  mit  $S = L \cap P_J$ , dann gilt  $\mathcal{M}_S \subset \mathcal{M}_L$ . Insbesondere ist dann  $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L \setminus S} \dot{\cup} \mathcal{M}_S$ .

**Beweis**

Mit Lemma 3.12 genügt es  $\mathcal{M}_S \subset \mathcal{M}_L$  zu zeigen. Sei  $X \in \mathcal{M}_S$  Ecke in  $S$  mit Träger  $I = \mathbf{tr}(X)$ , d.h.  $X$  ist innerer Punkt von  $P_I$ . Mit  $X \in S = L \cap P_J$  gilt  $I \subset J$ .

Annahme:  $X$  ist keine Ecke von  $L$ , also  $X \notin \mathcal{M}_L$ . Dann gibt es mit Lemma 3.10 eine Ecke  $Y \in L$  mit Träger  $\mathbf{tr}(Y) \subsetneq \mathbf{tr}(X) \subset J$ . Insbesondere gilt dann  $Y \in P_J$ , also  $Y \in L \cap P_J = S$ . Somit ist  $X$  keine Ecke in  $S$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist  $X$  eine Ecke von  $L$  und es gilt  $\mathcal{M}_S \subset \mathcal{M}_L$ . Mit 3.12 ist  $\mathcal{M}_L$  wie gewünscht darstellbar.  $\square$

**3.4 Unterraumbasis, Relationenmatrix****Definition 3.14**

Zwei Matrizen  $A, B$  heißen **g|-äquivalent**, wenn es eine invertierbare Matrix  $G$  gibt mit  $B = GA$ . Sie heißen **d|-äquivalent**, wenn es eine invertierbare Diagonalmatrix  $D$  gibt mit  $B = DA$  und **s|-äquivalent**, wenn es eine Permutationsmatrix  $P$  gibt mit  $B = PA$ . Analog wird **|g-**, **|d-** bzw. **|s-Äquivalenz** und deren Verbindungen definiert. Zum Beispiel heißen zwei Matrizen  $A, B$  **g|s-äquivalent**, wenn es eine invertierbare Matrix  $G$  und eine Permutationsmatrix  $P$  gibt mit  $B = GAP$ .

Eine Matrix  $M$  hat **hermite Normalform**, wenn  $M = (E, A)$  mit Einheitsmatrix  $E$ .

Eine Matrix  $M$  hat **quasi-hermite Form**, wenn sie **d|s-äquivalent** zu einer Matrix in hermitescher Normalform ist.

Eine Matrix  $M$  über einem Ring  $\mathcal{R}$  hat den Determinantenrang  $r$ , wenn es eine  $(r \times r)$ -Untermatrix von  $M$  gibt, deren Determinante eine Einheit in  $\mathcal{R}$  ist, und die Determinante jeder  $(r+1) \times (r+1)$ -Untermatrix keine Einheit ist. Ist  $\mathcal{R}$  ein Körper, so sind Rang und Determinantenrang gleich

**Lemma 3.15**

Sei  $H$  eine  $(r \times n)$ -Matrix über einem Ring  $\mathcal{R}$  mit  $r < n$ , vom Determinantenrang  $r$ . Dann existiert eine invertierbare  $(r \times r)$ -Matrix  $M$  und eine  $(n \times n)$ -Permutationsmatrix  $P$ , so daß  $MHP = (E_r, A)$  in hermitescher Normalform ist.

**Beweis**

Da  $H$  vom Determinantenrang  $r$  ist, existiert eine invertierbare  $(r \times r)$ -Untermatrix von  $H$ . Diese wird durch eine Spaltenpermutation  $P$  nach vorne permutiert und führt dort durch Linksmultiplikation mit ihrer Inversen  $M$  zur Einheitsmatrix  $E_r$ . D.h. die obige Formel gilt.  $\square$

Sei  $(U_1, \dots, U_n)$  Basis eines projektiven Raumes mit Unterraum  $S$  und  $(S_1, \dots, S_r)$  eine Basis von  $S$ . Für  $1 \leq i \leq r$  ist  $S_i$  durch homogene Koordinaten  $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$  darstellbar. Die Matrix  $A = (\alpha_{ij})$  mit  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq n$  heißt **Relationenmatrix der Basis  $(S_i)$  bezüglich der Basis  $(U_i)$** . Eine Relationenmatrix bezüglich projektiver Basen ist bis auf **d|d-Äquivalenz** eindeutig.

Sind zusätzlich Repräsentanten  $u_1, \dots, u_n$  mit  $U_i = \mathbf{Q}u_i$  festgelegt, so ist die Relationenmatrix bis auf **d|-Äquivalenz** eindeutig und es gilt  $S_i = \mathbf{Q} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j \right)$  für

### 3 PROJEKTIVE RÄUME

$1 \leq i \leq r$ .

Im Folgenden wird immer davon ausgegangen, daß die Repräsentanten  $u_1, \dots, u_n$  für alle Relationenmatrizen festgelegt sind.

**Lemma 3.16**

Sei  $(U_1, \dots, U_n)$  Basis eines projektiven Raumes mit Unterraum  $S$ . Hat die Relationenmatrix der Basis  $(W_1, \dots, W_r)$  von  $S$  bezüglich  $(U_1, \dots, U_n)$  quasi-hermite Form, dann sind alle  $W_i$  Ecken von  $S$ .

**Beweis**

O.B.d.A sei die Relationenmatrix  $\mathbf{d}$ -äquivalent zu einer hermiteschen Normalform, also  $i \in \mathbf{tr}(S_i) \subset \{i, r+1, \dots, n\}$  für  $1 \leq i \leq r$ .

Exemplarisch wird gezeigt, daß  $W_1$  eine Ecke von  $S$  ist. Wir nehmen an  $W_1$  ist keine Ecke von  $S$ .

Dann gibt es einen Punkt  $X \in S \cap P_{\{1, r+1, \dots, n\}}$ , der einen kleineren Träger als  $W_1$  besitzt. Es gilt  $\text{Dim}(X \vee S) = \text{Dim}(S) = r-1$ . Wegen  $W_1 \neq X$  gilt  $\text{Dim}(W_1 \vee X) = 1$ .

Für  $2 \leq j \leq r$  gilt  $W_j \notin P_{\{1, \dots, j-1, r+1, \dots, n\}} \supset X \vee \bigvee_{i=1}^{j-1} W_i$  und mit wiederholter

Anwendung von Lemma 3.3 für die Dimension  $\text{Dim}(X \vee \bigvee_{i=1}^j W_i) = \text{Dim}(X \vee \bigvee_{i=1}^{j-1} W_i) +$

$1 = \dots = j$ . Also  $\text{Dim}(X \vee \underbrace{\bigvee_{i=1}^r W_i}_{=S}) = r$ . Ein Widerspruch.

Somit ist  $W_1$  Ecke von  $S$ . Analog sind auch  $W_2, \dots, W_r$  Ecken von  $S$ . □

**Lemma 3.17**

Sei  $(U_1, \dots, U_n)$  Basis eines projektiven Raumes mit Unterraum  $S$  und  $W$  eine Ecke von  $S$ . Dann gibt es eine Basis  $(W_1, \dots, W_r)$  von  $S$  mit  $W_1 = W$ , so daß die Relationenmatrix von  $(W_i)$  bezüglich  $(U_i)$  in quasi-hermitescher Normalform ist.

**Beweis**

Sei  $\{W, W'_2, \dots, W'_r\}$  eine Basis von  $S$  mit Relationenmatrix  $R = (\alpha_{ij})$  bezüglich  $(U_j)$ . Insbesondere sind  $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$  die homogenen Koordinaten von  $W$ . Weiter seien o.B.d.A. die Spalten von  $R$  so permutiert, daß  $\alpha_{11} = \dots = \alpha_{1l} = 0, \alpha_{1j} \neq 0$  für  $j > l$  gilt. Durch elementare Zeilenumformungen kann erreicht werden, daß zusätzlich  $\alpha_{i,l+1} = 0$  für  $i > 1$  gilt. Sei nun  $U$  die  $(r \times l)$ -Untermatrix aus den ersten  $l$  Spalten von  $R$ . Sei  $s$  der Determinantenrang von  $U$ . Da die erste Zeile von  $U$  eine Nullzeile ist, hat  $U$  maximal Determinantenrang  $r-1$ .

$$R = \left( \begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1,l+1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & U & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{array} \right).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \times l}$

Es können nun folgende Fälle auftreten:

- (i)  $s < r - 1$  : Dann gibt es eine Linearkombination der Zeilen  $2, \dots, r$ , so daß die ersten  $l + 1$  Komponenten verschwinden, d.h. der Träger dieser Linearkombination ist echt kleiner als der Träger von  $W$  und somit kann  $W$  keine Ecke sein.
- (ii)  $s = r - 1$  : Wegen der speziellen Form der Matrix  $R$  hat die Untermatrix aus den Spalten  $1, \dots, l+1$  den Determinantenrang  $r$  und enthält eine invertierbare  $(r \times r)$ -Untermatrix, die insbesondere die  $(l + 1)$ -te Spalte enthält. Es folgt die Behauptung.

□

**Korollar 3.18**

Sei  $P$  ein  $n$ -dimensionaler projektiver Raum mit  $r$ -dimensionalem Unterraum  $S$ . Ist  $X$  eine Ecke von  $S$ , so ist  $|\text{tr}(X)| \leq n - r + 1$ .

**Lemma 3.19**

Sei  $k \in \{1, \dots, r\}$  und  $(S_1, \dots, S_r)$  eine Basis von  $S$ . Sei  $H = \bigvee \{S_i \mid 1 \leq i \leq r, i \neq k\}$ . Sei  $X \in S$  mit  $X \notin H$ . Dann ist auch  $(S_1, \dots, S_{k-1}, X, S_{k+1}, \dots, S_r)$  eine Basis von  $S$ .

**Beweis**

Sei  $L = X \vee H$ , d.h.  $(S_1, \dots, S_{k-1}, X, S_{k+1}, \dots, S_r)$  ist Basis von  $L$ . Offensichtlich gilt  $H \subseteq S \cap H$  und  $X, S_k \notin H$ . Sei  $g = X \vee S_k$ . Nach Lemma 3.5 schneidet  $g$  den Unterraum  $H$  in einem Punkt  $Y \in L$ . Mit  $g = X \vee Y = X \vee S_k \subset L$  ist  $S_k \in L$ , also  $H \vee S_k \subseteq L$ . Aus Dimensionsgründen gilt  $S = L$  und es folgt die Behauptung. □

**Lemma 3.20**

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$  und einem echten Unterraum  $S$ . Dann gibt es eine Basis von  $S$ , die bezüglich  $(U_1, \dots, U_n)$  eine Relationenmatrix  $M$  in quasi-hermitescher Normalform hat. Diese Basis von  $S$  besteht aus Ecken von  $S$ .

**Beweis**

Der Beweis wird sowohl geometrisch, als auch durch elementare Matrixumformungen geführt. Es wird dabei folgende Notation benutzt:  $*$  ist ein beliebiger Eintrag (auch Null) und  $\otimes$  ein von Null verschiedener Eintrag. Die durch die Relationenmatrix beschriebenen Punkte werden mit  $X_i$  bezeichnet, dabei stehen die homogenen Koordinaten von  $X_i$  in der  $i$ -ten Zeile.

Sei  $\text{Dim}(S) = r - 1$  und eine Relationenmatrix  $(\alpha_{ij})$  einer Basis von  $S$  bezüglich  $(u_1, \dots, u_n)$  gegeben.

Für  $X_1$  wähle ein  $j$  mit  $X_1 \notin P_j$ , d.h. die erste Zeile enthält in der  $j$ -ten Spalte einen nicht verschwindenden Eintrag. Für  $2 \leq i \leq r$  ersetze  $X_i$  durch den Schnittpunkt der Geraden  $X_1 \vee X_i$  mit  $P_j$ .

Wähle in der ersten Zeile ein  $j$  mit  $\alpha_{1j} \neq 0$ . Durch Zeilentransformation lassen sich alle anderen Einträge der  $j$ -ten Spalte nullsetzen.

### 3 PROJEKTIVE RÄUME

Mit  $j = 1$  hat die Relationenmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} \circledast & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Für  $k = 2, \dots, r$  wiederhole:

Für  $X_k$  wähle ein  $j = j_k$  mit  $X_k \notin P_j$ , d.h. die  $k$ -te Zeile enthält in der  $j$ -ten Spalte einen nicht verschwindenden Eintrag. Für  $1 \leq i \leq r$  mit  $i \neq k$  ersetze  $X_i$  durch den Schnittpunkt der Geraden  $X_k \vee X_i$  mit  $P_j$ .

Wähle in der  $k$ -ten Zeile ein  $j = j_k$  mit  $\alpha_{kj} \neq 0$ . Durch Zeilentransformation lassen sich alle anderen Einträge der  $k$ -ten Spalte nullsetzen.

Für  $k = 2$  und  $j_k = 2$  hat die Relationenmatrix nun die Form

$$\begin{pmatrix} \circledast & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \circledast & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

und schließlich die Form

$$\begin{pmatrix} \circledast & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 0 & & \vdots & \\ 0 & 0 & \circledast & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Die Punkte  $X_1, \dots, X_r$  bilden eine Basis von  $S$  und sind nach Lemma 3.16 Ecken von  $S$ . □

#### Lemma 3.21

Sei  $P$  ein projektiver Raum mit Basis  $(U_1, \dots, U_n)$  und einem echten Unterraum  $S$ . Dann gibt es eine Basis von  $S$ , die bezüglich  $(U_1, \dots, U_n)$  eine Relationenmatrix  $M$  in quasi-hermitescher Normalform mit Einträgen aus  $\mathbb{Q}_p$  hat.

#### Beweis

Der Beweis entspricht dem Beweis des vorhergehenden Lemmas, nur die Wahl der Spalte ist eingeschränkt. Die Einschränkung auf Einträge aus  $\mathbb{Q}_p$  ist geometrisch nicht motiviert. Daher wird der Beweis nur durch elementare Matrixumformungen geführt.

Sei  $(\alpha_{ij})$  eine Relationenmatrix einer Basis von  $S$  bezüglich  $(U_1, \dots, U_n)$ . Da eine Relationenmatrix nur bis auf Vielfache ihrer Zeilen eindeutig ist, können die Einträge von  $(\alpha_{ij})$  aus  $\mathbb{Q}_p$  gewählt werden. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß die erste Zeile eine Einheit in  $\mathbb{Q}_p$  enthält. Sonst kann die Zeile durch den größten gemeinsamen

Teiler ihrer Einträge geteilt werden, da die Relationenmatrix nur bis auf Vielfache der Zeile eindeutig ist.

Wählt man in der ersten Zeile ein  $j$  mit  $\alpha_{1j}$  Einheit in  $\mathbb{Q}_p$  und teilt die erste Zeile durch  $\alpha_{1j}$ , so erhält man eine 1 an dieser Stelle und die restlichen Einträge der  $j$ -ten Spalte lassen sich mit elementaren Zeilentransformationen annullieren.

Induktiv läßt sich das Verfahren auf die folgenden Zeilen anwenden und man erhält die gewünschte Form der Relationenmatrix.  $\square$

### Lemma 3.22

Jeder Unterraum eines projektiven Raumes von endlicher Dimension mit fester Basis ist das Erzeugnis seiner Ecken.

#### Beweis

Sei  $S$  ein Unterraum. Nach Lemma 3.16 gibt es eine Basis von  $S$ , die nur aus Ecken von  $S$  besteht, also in  $\mathcal{M}_S$  enthalten ist. Somit bildet  $\mathcal{M}_S$  ein Erzeugendensystem von  $S$ .  $\square$

### Lemma 3.23

Sei  $L$  Unterraum und  $P_I$  ein Basis-Verbindungsraum. Sei weiter  $S = L \cap P_I$ . Dann bildet  $\mathcal{M}_L \cap P_I$  ein Erzeugendensystem von  $S$ . Speziell gilt  $\mathcal{M}_S = \mathcal{M}_L \cap P_I$ .

Mit  $Y \in L$  mit Träger  $I = \text{tr}(Y)$  gilt dann insbesondere

$$Y \in \bigvee \{X \mid X \in \mathcal{M}_S\} = \bigvee \{X \mid X \in \mathcal{M}_L \text{ und } \text{tr}(X) \subseteq \text{tr}(Y)\}.$$

#### Beweis

Da die Voraussetzungen von Lemma 3.13 erfüllt sind, gilt  $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L \setminus S} \dot{\cup} \mathcal{M}_S$  und  $\mathcal{M}_{L \setminus S} \cap P_I = \emptyset$ . Somit ist  $\mathcal{M}_S = \mathcal{M}_L \cap P_I$ , und mit Lemma 3.22 bildet  $\mathcal{M}_L \cap P_I$  ein Erzeugendensystem von  $S$ .  $\square$

## 3.5 Spezielle Hyperebenen

### Definition 3.24

Sei  $P = \bigvee U_i$  ein projektiver Raum endlicher Dimension und  $V = \bigoplus \mathbb{Q}u_i$  Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  und  $U_i = \mathbb{Q}u_i$ . Weiter sei auf  $V$  ein Standardskalarprodukt  $\ll \sum a_i u_i, \sum b_i u_i \gg = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  definiert. Somit bildet  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis.

Seien  $X$  und  $Y$  Punkte in  $P$  mit homogenen Koordinaten  $(a_1, \dots, a_n)$  beziehungsweise  $(b_1, \dots, b_n)$ , d.h.  $X = \mathbf{Q}x$  mit  $x = \sum a_i u_i \in V$  bzw.  $Y = \mathbf{Q}y$  mit  $y = \sum b_i u_i$ . Sei  $\beta_{\mathcal{B}} : P \times P \rightarrow \{0, 1\}$  definiert durch

$$\beta_{\mathcal{B}}(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ll x, y \gg = 0, \\ 1 & \text{falls } \ll x, y \gg \neq 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist  $\beta_{\mathcal{B}}$  wohldefiniert und wird als **Quasi-Skalarprodukt** bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  bezeichnet.

Die Punkte  $X$  und  $Y$  heißen bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  zueinander  **$\mathcal{B}$ -konjugiert**, in Zeichen  $X \perp Y$ , wenn  $\beta_{\mathcal{B}}(X, Y) = 0$  ist. Ist die Basis bekannt, so heißen  $X$  und  $Y$  zueinander **konjugiert**.

Ist  $S$  ein projektiver Unterraum von  $P$ , so heißt der Unterraum  $S^\perp := \{X \in P \mid X \perp Y \text{ für alle } Y \in S\}$  **Polare** von  $S$ .

Sei  $H$  eine Hyperebene des projektiven Raumes  $P = \vee U_i$ . Dann heißt  $\text{cotr}(H) = \{i \mid U_i \subset H\}$  **Co-Träger** von  $H$ .

Das folgende Lemma gilt für eine feste Wahl einer Basis  $\mathcal{B}$ .

**Lemma 3.25**

Sei  $P = \vee_{i=1}^n U_i$  ein projektiver Raum und  $V = \bigoplus \mathbb{Q}u_i$  Vektorraum mit Orthogonalbasis  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  und  $U_i = \mathbb{Q}u_i$ . Weiter seien  $A, B, S, T$  Unterräume von  $P$ . Dann gilt

- (i)  $U_i \perp U_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$ ,
- (ii) Aus  $A, B \subset S^\perp$  folgt  $A \vee B \subset S^\perp$ ,
- (iii)  $U_i^\perp = \widehat{P}_i$  für  $1 \leq i \leq n$ ,
- (iv)  $P_I^\perp = P_J$  für  $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$ ,
- (v)  $X$  ist nicht zu sich selbst konjugiert, d.h.  $X \not\perp X$ ,
- (vi)  $S \cap S^\perp = \emptyset$ ,
- (vii)  $S \vee S^\perp = P$ ,
- (viii)  $\text{Dim } S^\perp = \text{Dim } P - \text{Dim } S - 1$ ,
- (ix)  $(S^\perp)^\perp = S$ ,
- (x)  $T \subset S \iff S^\perp \subset T^\perp$ ,
- (xi)  $(S \cap T)^\perp = S^\perp \vee T^\perp$ ,
- (xii)  $(S \vee T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$ .

**Beweis**

Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine Orthogonalbasis von  $V$  mit  $U_i = \mathbb{Q}u_i$ . Die homogenen Koordinaten von  $U_i$  sind  $(0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)$  mit einem nicht verschwindenden Eintrag  $\alpha_i$  an der  $i$ -ten Stelle.

- (i) Es gilt  $\ll \alpha_i u_i, \alpha_j u_j \gg = \alpha_i \alpha_j \ll u_i, u_j \gg = 0$  und somit  $\beta_{\mathcal{B}}(U_i, U_j) = 0$ , also  $U_i \perp U_j$ .
- (ii) Es genügt zu zeigen, daß jede Verbindungsgerade von zwei Punkten  $X \in A$  und  $Y \in B$  ganz in  $S^\perp$  liegt. Sei also  $X \in A$  und  $Y \in B$  beliebig gewählt und  $x, y \in V$  mit  $X = \mathbb{Q}x$  und  $Y = \mathbb{Q}y$ . Dann ist jeder Punkt  $Z \in X \vee Y$  auf der Verbindungsgeraden darstellbar als  $Z = \mathbb{Q}z$  mit  $z = \beta x + \gamma y$  und für alle Punkte  $W = \mathbb{Q}w \in S$  mit  $w \in V$  gilt  $\ll w, z \gg = \ll w, \beta x + \gamma y \gg = \beta \ll w, x \gg + \gamma \ll w, y \gg = 0 + 0 = 0$ , also  $\beta(W, Z) = 0$ . Da  $W$  beliebig aus  $S$  gewählt werden kann, gilt  $W \in S^\perp$ . Also ist die Verbindungsgerade  $X \vee Y$  in  $S^\perp$  enthalten und es folgt die Behauptung.
- (iii) Für  $j \neq i$  gilt nach (i) sowieso  $U_j \in U_i^\perp$ . Mit (ii) gilt dann weiter  $\widehat{P}_i = \vee_{j \neq i} U_j \subset U_i^\perp$ . Sei nun umgekehrt  $X \in U_i^\perp$ . Dann hat  $X$  einen Träger mit  $i \notin \text{tr}(X)$ , d.h.  $U_i^\perp \subset \widehat{P}_i$ . Es folgt die Behauptung wie gewünscht.
- (iv) Die Behauptung folgt direkt aus (i) und (ii).

- (v) Sei  $x \in V$  mit  $X = \mathbf{Q}x$ , dann gilt  $\ll x, x \gg \neq 0$ , also  $\beta(X, X) = 1$  und somit  $X \not\perp X$ .
- (vi) Die Annahme der Existenz eines  $X \in S \cap S^\perp$  führt zu  $X \perp X$ , ein Widerspruch zu (v).
- (vii) Ergibt sich aus dem Analogon für Vektorräume.
- (viii) Mit dem Dimensionssatz für projektive Räume aus Lemma 3.2 gilt:
- $$\dim S^\perp = \underbrace{\dim S \vee S^\perp}_{=P} - \dim S + \underbrace{\dim S \cap S^\perp}_{=\emptyset} = \dim P - \dim S - 1.$$
- (ix) Sowieso gilt  $S \subset (S^\perp)^\perp$ . Aus Dimensionsgründen gilt die Gleichheit.
- (x) Sei  $X \in S^\perp$ . Dann ist  $X \perp Y$  für alle  $Y \in S$ . Insbesondere ist  $X \perp Y$  für alle  $Y \in T \subset S$ . Somit gilt  $S^\perp \subset T^\perp$ . Mit (ix) folgt die Äquivalenz.
- (xi) Es gilt  $S \cap T \subset S$ . Mit (x) gilt dann  $S^\perp \subset (S \cap T)^\perp$ . Analog gilt  $T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$  und mit (ii) folgt dann  $(S \cap T)^\perp \supset S^\perp \vee T^\perp$ .
- Sei nun  $X \in (S^\perp \vee T^\perp)^\perp$ . Dann gilt insbesondere  $X \in S^{\perp\perp} \stackrel{(ix)}{=} S$  und  $X \in T$ . Somit gilt  $X \in (S \cap T)$ , also  $(S^\perp \vee T^\perp)^\perp \subset S \cap T$  und mit (x) dann  $(S \cap T)^\perp \subset S^\perp \vee T^\perp$ .
- (xii) Mit (xi) folgt  $(S \vee T)^\perp = (S^\perp \cap T^\perp)^{\perp\perp} = S^\perp \cap T^\perp$ . □

### Lemma 3.26

Sei  $H$  eine Hyperebene des projektiven Raumes  $P = \bigvee_{i=1}^n U_i$  und  $X = H^\perp$ . Dann ist  $X$  ein Punkt und es gilt  $\{1, \dots, n\} = \mathbf{tr}(X) \dot{\cup} \mathbf{cotr}(H)$ .

### Beweis

Mit Lemma 3.25 iii) ist  $H^\perp$  aus Dimensionsgründen ein Punkt. Sei  $X = H^\perp$  mit homogenen Koordinaten  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $i \in \mathbf{cotr}(H)$ , d.h.  $U_i \in H$ . Die homogenen Koordinaten von  $U_i$  seien  $(b_1, \dots, b_n)$  mit  $b_i \neq 0$  und  $b_j = 0$  für  $j \neq i$ . Wegen  $X \perp U_i$  gilt  $\sum_{j=1}^n a_j b_j = a_i b_i = 0$  und somit  $a_i = 0$ , also  $i \notin \mathbf{tr}(X)$ .

Ist umgekehrt  $i \notin \mathbf{tr}(X)$ , also  $a_i = 0$ , dann ist  $U_i \in H = X^\perp$ , also  $i \in \mathbf{cotr}(H)$ . □

### Definition 3.27

Sei  $S$  ein echter Unterraum des projektiven Raumes  $P$ . Eine Hyperebene  $H \supseteq S$  heißt **Hyper-Ecke** von  $S$ , wenn es keine Hyperebene  $H' \supseteq S$  gibt mit  $\mathbf{cotr}(H') \supsetneq \mathbf{cotr}(H)$ . Die Menge aller Hyper-Ecken von  $S$  werde mit  $\mathcal{H}_S$  bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{H}_S = \{H \mid H \text{ ist Hyper-Ecke von } S\}.$$

### Lemma 3.28

Sei  $S$  ein echter Unterraum von  $P = \bigvee_{i=1}^n U_i$  und  $A, B$  verschiedene Hyperebenen, die  $S$  enthalten mit  $\mathbf{cotr}(A) = \mathbf{cotr}(B)$ . Dann gibt es eine Hyperebene  $C$  in  $P$ , die  $S$  enthält mit  $\mathbf{cotr}(C) \supsetneq \mathbf{cotr}(A)$ .

Sind insbesondere  $A, B \in \mathcal{H}_S$ , so ist  $A = B$ .



**Beweis**

Sei  $T = S \vee (\bigvee \{U_i \mid i \in \mathbf{cotr}(A)\})$ . Da  $T \subset A \cap B$  und  $A \neq B$ , kann  $T$  aus Dimensionsgründen, d.h.  $\dim(T) < \dim(A) = \dim(P) - 1$ , keine Hyperebene sein. Also gibt es ein  $i$  mit  $U_i \notin T$ , insbesondere gilt  $i \notin \mathbf{cotr}(A)$ . Dann ist  $T \vee U_i$  entweder eine Hyperebene oder es gibt eine Hyperebene  $C$ , die  $T \vee U_i$  enthält. Weiter gilt dann  $\mathbf{cotr}(C) \supseteq \mathbf{cotr}(A) \cup \{i\} \supsetneq \mathbf{cotr}(A)$ , wie behauptet.  $\square$

**Lemma 3.29**

Sei  $S$  ein Unterraum eines projektiven Raumes  $P$  und  $H$  eine Hyperebene mit  $S \subseteq H$ . Es gilt:  $H \in \mathcal{H}_S$  genau dann, wenn  $X = H^\perp$  Ecke von  $S^\perp$  ist.

Insbesondere ist  $\mathcal{H}_S = \{X^\perp \mid X \text{ ist Ecke von } S^\perp\}$ .

**Beweis**

Mit  $H \in \mathcal{H}_S$  hat  $H$  maximalen Co-Träger und nach Lemma 3.26 ist dann  $\mathbf{tr}(X) = \{1, \dots, n\} \setminus \mathbf{cotr}(H)$ , der Träger von  $X$ , minimal für alle  $X \in S^\perp$ , also Ecke von  $S^\perp$ . Ist umgekehrt  $X$  eine Ecke von  $S^\perp$ , so ist mit Lemma 3.26 der Co-Träger von  $H$  maximal, also  $H \in \mathcal{H}_S$  eine Hyper-Ecke.  $\square$

**Lemma 3.30**

Sei  $S$  ein Unterraum eines projektiven Raumes  $P$ . Dann gilt:  $\bigcap \{H \mid H \in \mathcal{H}_S\} = S$ .

**Beweis**

Nach Lemma 3.29 ist  $\mathcal{H}_S = \{X^\perp \mid X \text{ ist Ecke von } S^\perp\}$ . Mit Lemma 3.25(xi) gilt dann

$$\begin{aligned} \bigcap \{H \mid H \in \mathcal{H}_S\} &= \bigcap \{X^\perp \mid X \text{ ist Ecke von } S^\perp\} \\ &= \left( \bigvee \{X \mid X \text{ ist Ecke von } S^\perp\} \right)^\perp. \end{aligned}$$

Da die Ecken von  $S^\perp$  ganz  $S^\perp$  erzeugen gilt  $\bigcap \{H \mid H \in \mathcal{H}_S\} = (S^\perp)^\perp = S$ .  $\square$

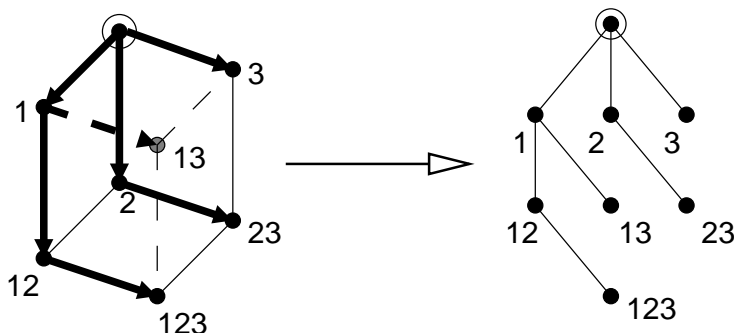
## 4 Algorithmen

### 4.1 Bestimmung der Hyper-Ecken zu einem Unterraum

Sei  $S$  ein Unterraum eines projektiven Raumes  $P$  mit Basis  $\{U_0, \dots, U_n\}$ . Offensichtlich hat  $P$  die Dimension  $n$  und die Hyper-Ecken von  $S$  haben die Dimension  $n - 1$ . O.B.d.A. sei  $\text{Dim } S < n - 1$ , d.h.  $S$  ist weder der ganze Raum noch eine Hyperebene.

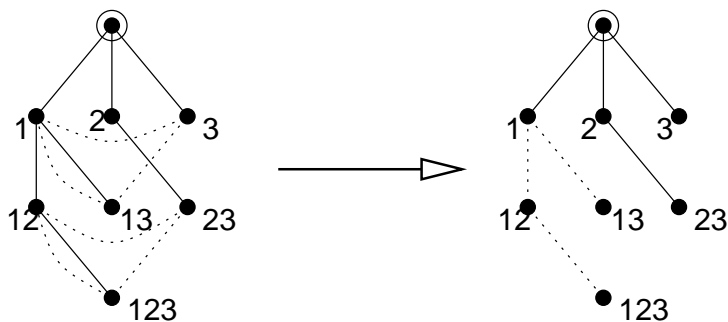
Man erhält *eine* Hyper-Ecke von  $S$  indem man solange (verschiedene) Basispunkte  $U_i$  zu  $S$  hinzufügt, bis man eine Hyperebene erhält. Man erhält sicher ALLE Hyper-Ecken von  $S$  indem man JEDE MÖGLICHKEIT des Hinzufügens von Basispunkten ausprobiert.

Den so entstandenen Suchraum kann man anschaulich als eine Wanderung auf einem  $(n+1)$ -dimensionalen Würfel beschreiben, auf dessen Kanten man sich bewegt. Hinzufügen von Basispunkt  $U_i$  entspricht einer Wanderung von einer Ecke des Würfels in Richtung der  $i$ -ten Raumrichtung zur nächsten Ecke. Die Bezeichnungen der Knoten in folgendem Bild geben diejenigen Basispunkte an, die an dieser Stelle zu  $S$  hinzugefügt wurden. Zum Beispiel entspricht dem Knoten 12 der Unterraum  $S \vee U_1 \vee U_2$ . Der Knoten  $\odot$  ist Startknoten und entspricht  $S$ .



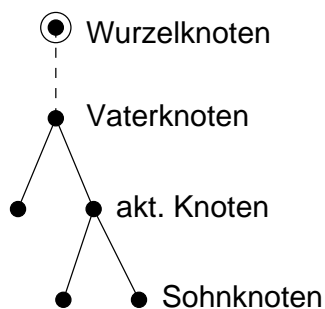
Da es unerheblich ist, ob man zuerst Basispunkt  $U_i$  und dann Basispunkt  $U_j$  zu  $S$  hinzufügt oder in umgekehrter Reihenfolge, kann man die Suchwege einschränken. Dies erreicht man, indem nach Hinzufügen von Basispunkt  $U_i$  nur noch Basispunkte  $U_j$  mit  $j > i$  hinzugefügt werden dürfen. Durch diese Einschränkung zerfällt das Würfelnetz zu einem Baum, der durch Tiefensuche mit Backtracking durchschritten werden kann.

Durch lineare Abhängigkeiten der Basispunkte modulo  $S$  können verschiedene Knoten denselben Unterräumen entsprechen. Die von solchen äquivalenten Knoten abhängigen Teilbäume enthalten nur Knoten, zu denen es einen äquivalenten Knoten außerhalb dieses Teilbaumes gibt. Daher können bei der Suche diejenigen Knoten ausgelassen werden, die eine äquivalente Entsprechung an einem später besuchten Knoten besitzen.



Sind zum Beispiel  $U_1$  und  $U_3$  in  $U/S$  linear abhängig, dann sind im linken Baum die mit gepunkteten Linien verbundenen Knoten äquivalent, d.h. sie stellen denselben Unterraum dar. Somit braucht der im rechten Baum gepunktete Teil nicht durchwandert zu werden. Genaugenommen wäre auch der Besuch des Knotens 1 nicht nötig, da er äquivalent zum Punkt 3 ist. Zur Erkennung der Äquivalenz ist aber die Bestimmung des entsprechenden Unterraumes notwendig.

#### Algorithmus 4.1 (Verfahren zur Bestimmung aller Hyper-Ecken)



1. Zerlege den Suchraum in einen Baum und starte am Wurzelknoten
2. Gibt es keinen nicht bereits besuchten Sohnknoten, weiter mit Schritt 8.
3. Gehe zu einem Sohnknoten mit kleinstem  $i$ , der  $U_i$  hinzufügt.
4. Markiere diesen Knoten als besucht und bestimme den zugehörigen Unterraum  $T$ .
5. Falls ein  $U_j \in T$  existiert mit  $j > i$ , weiter mit Schritt 8.
6. Ist  $T$  keine Hyperebene, gehe zu Schritt 3.
7. Der Unterraum  $T$  ist nun eine der gesuchten Hyperebenen. Jeder Sohn des aktuellen Knotens repräsentiert entweder dieselbe Hyperebene, oder den gesamten Raum.
8. Hat der aktuelle Knoten keine Vaterknoten, Fertig. Sonst gehe zum Vaterknoten.
9. Weiter mit Schritt 3.

## 4.2 Bestimmung von Ecken eines projektiven Raumes

Nach Lemma 3.29 sind die Ecken eines projektiven Unterraumes  $S$  von  $P$ , gerade die Polaren der Hyper-Ecken von  $S^\perp$ . Daher kann man die Ecken von  $S$  über den obigen Algorithmus für Hyper-Ecken angewendet auf  $S^\perp$  bestimmen.

## 5 Bildung reiner Hüllen

### 5.1 Reine Hülle von Elementen in Butlergruppen

Für eine vollständig zerlegbare Gruppe wird zunächst die Bestimmung der reinen Hülle eines Gruppenelementes betrachtet.

#### Lemma 5.1

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe und  $x = \sum_{i=1}^n q_i u_i \in U$ . Dann gilt:

$$\langle x \rangle_*^U = \left( \bigcap_{q_i \neq 0} q_i^{-1} A_i \right) x.$$

#### Beweis

Sei  $\alpha x \in \langle x \rangle_*^U$  mit  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Dann ist  $\alpha x \in U$ , also  $\alpha x = \sum_{i=1}^n (\alpha q_i) u_i = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \in U$ .

Da  $(u_1, \dots, u_n)$  linear unabhängig ist, folgt  $\beta_i = \alpha q_i$ . Für  $i = 1, \dots, n$  mit  $q_i \neq 0$  ist  $\alpha = q_i^{-1} \beta_i \in q_i^{-1} A_i$  und somit  $\alpha x \in \bigcap_{q_i \neq 0} q_i^{-1} A_i x$ . Sei umgekehrt  $\alpha x \in \bigcap_{q_i \neq 0} q_i^{-1} A_i x$ .

Dann ist  $\alpha q_i \in A_i$  und somit  $\alpha x = \sum_{i=1}^n \alpha q_i u_i \in U$ . Daraus folgt  $\alpha x \in \langle a \rangle_*^U$ . □

Da die reine Hülle von  $x$  in  $U$  dieselbe ist wie für  $\alpha x$  in  $U$  für  $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$ , d.h.  $\langle x \rangle_*^U = \langle \alpha x \rangle_*^U$ , ist es sinnvoll den von  $x$  aufgespannten 1-dimensionalen Unterraum  $X = \mathbb{Q}x$  von  $\mathbb{Q}U$ , als einen Punkt im projektiven Raum, zu betrachten.

#### Korollar 5.2

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \bigvee U_i$  und  $\mathbb{Q}u_i = U_i$ . Sei  $X \in P$  mit homogenen Koordinaten  $(q_1, \dots, q_n)$  und  $x = \sum_{i=1}^n q_i u_i$ . Dann gilt:

$$X \cap U = \left( \bigcap_{q_i \neq 0} q_i^{-1} A_i \right) x.$$

#### Beweis

Mit Lemma 5.1 und  $\langle x \rangle_*^U = \mathbb{Q}x \cap U = X \cap U$  folgt die Behauptung. □

#### Lemma 5.3

Sei  $U$  torsionsfreie abelsche Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $a \in U$  und  $a^* = a + K$  die Nebenklasse von  $a$  modulo  $K$ . Dann gilt

$$\langle a^* \rangle_*^{U/K} = \sum_{x \in a^*} \left( \langle x \rangle_*^U + K/K \right).$$

#### Beweis

Fuchs [6, §85.5] erwähnte bereits folgende Tatsache:

$$\chi_{U/K}(a^*) = \bigcup \{ \chi_U(x) \mid x \in a^* \}.$$

Da die Charakteristik eines Elementes in einer Gruppe gleich der Charakteristik der 1 im Koeffizientenbereich dieses Elementes ist, gilt also:

$$\begin{aligned} \langle a^* \rangle_*^{U/K} &= \bigcup_{x \in a^*} \langle x \rangle_*^U + K/K \subset \sum_{x \in a^*} \langle x \rangle_*^U + K/K \\ &= \left\langle \bigcup_{x \in a^*} \langle x \rangle_*^U + K/K \right\rangle = \left\langle \langle a^* \rangle_*^{U/K} \right\rangle \\ &= \langle a^* \rangle_*^{U/K}. \end{aligned}$$

Somit gilt Gleichheit und die Behauptung.  $\square$

Dieselbe Aussage unter Verwendung von projektiven Räumen ist folgendes Korollar.

**Korollar 5.4**

Sei  $U$  torsionsfreie abelsche Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $S = \mathbf{Q}K$  projektive Hülle von  $K$ .

Für  $a \in U \setminus K$  sei  $a^* = a + K$  die Nebenklasse von  $a$  modulo  $K$  und  $L = \mathbf{Q}a \vee S$  projektiver Unterraum. Dann gilt:

$$\langle a^* \rangle_*^{U/K} = \sum_{X \in L \setminus S} \frac{(X \cap U) + K}{K}.$$

**Beweis**

Mit  $\langle x \rangle_*^U = X \cap U$  für  $X = \mathbf{Q}x$  und  $L \setminus S = \mathbf{Q}(a + K) \setminus \mathbf{Q}K$  folgt aus Lemma 5.3 die Behauptung.  $\square$

Bildet man die Summe der reinen Hüllen in einer vollständig zerlegbaren Gruppe  $U$  nicht über alle Punkte  $X \in L \setminus S$ , sondern nur über die endliche Menge der Ecken von  $L \setminus S$ , so kann man die reine Hülle bereits bis auf endlichen Index angeben. Später wird gezeigt, daß sogar Gleichheit gilt.

**Lemma 5.5**

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $P = \mathbf{Q}U$  projektive Hülle von  $U$  mit Basis  $\{\mathbf{Q}u_i \mid i\}$  und  $S$  projektive Hülle von  $K$ . Für  $a \in U \setminus K$  sei  $a^* = a + K$  die Nebenklasse von  $a$  modulo  $K$  und  $L = \mathbf{Q}a \vee S$  projektiver Unterraum. Sei  $X \in L \setminus S$  und  $Y \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$  Ecke in  $L \setminus S$  mit  $\text{tr}(Y) \subset \text{tr}(X)$ . Dann gilt:

$$\frac{(X \cap U) + K}{K} \subset \frac{(Y \cap U) + K}{K}.$$

**Beweis**

Seien  $(a_1, \dots, a_n)$  die homogenen Koordinaten von  $X$ , also  $X = \mathbf{Q}x$  mit  $x = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ , und  $(b_1, \dots, b_n)$  die homogenen Koordinaten von  $Y$ , also  $Y = \mathbf{Q}y$  mit  $y = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ .

Mit Lemma 2.7 gilt dann:

$$\frac{(X \cap U) + K}{K} = \frac{\left( \bigcap_{a_i \neq 0} a_i^{-1} A_i \right) x + K}{K} \subset \frac{\left( \bigcap_{b_i \neq 0} b_i^{-1} A_i \right) y + K}{K} = \frac{(Y \cap U) + K}{K}.$$

□

**Lemma 5.6**

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $P = \mathbf{Q}U$  projektive Hülle von  $U$  mit Basis  $\{\mathbf{Q}u_i | i\}$  und  $S$  projektive Hülle von  $K$ .

Für  $a \in U \setminus K$  sei  $a^* = a + K$  die Nebenklasse von  $a$  modulo  $K$  und  $L = \mathbf{Q}a \vee S$  projektiver Unterraum. Dann gilt:

$$\langle a^* \rangle_*^{U/K} \doteq \sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K}.$$

**Beweis**

Für  $X \in L \setminus S$  gilt  $\frac{(X \cap U) + K}{K} \subset \langle x + K \rangle_*^{U/K} = \sum_{X \in L \setminus S} \frac{(X \cap U) + K}{K}$ , also auch speziell für

$X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$ . Sei  $X \in L \setminus S$  und  $Y \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$  mit  $\mathbf{tr}(Y) \subseteq \mathbf{tr}(X)$ . Mit Lemma 5.5 gilt dann  $\frac{(X \cap U) + K}{K} \dot{\subset} \frac{(Y \cap U) + K}{K}$ , also

$$\sum_{X \in L \setminus S} \frac{(X \cap U) + K}{K} \dot{\subset} \sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K} \subset \sum_{X \in L \setminus S} \frac{(X \cap U) + K}{K}.$$

Somit gilt quasi-Gleichheit. Mit Korollar 5.4 folgt die Behauptung. □

Es gilt sowieso

$$\sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K} \subseteq \langle a^* \rangle_*^{U/K}.$$

Da der Rang der reinen Hülle von  $a^*$  gleich 1 ist, genügt es für die Gleichheit nachzuweisen, daß für jede Primzahl  $p$  ein Summand in der Summe  $p$ -rein in  $U/K$  ist.

**Lemma 5.7**

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $P = \mathbf{Q}U$  projektive Hülle von  $U$  mit Basis  $\{\mathbf{Q}u_i | i\}$  und  $S$  projektive Hülle von  $K$ . Weiter sei  $L \supset S$  projektiver Unterraum von  $P$  mit  $\dim(L) = \dim(S) + 1$ .

Für jede Primzahl  $p$  gibt es ein  $Y \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$ , so daß für alle  $X \in L \setminus S$  gilt:

$$\mathbb{Q}_p \left[ \frac{(X \cap U) + K}{K} \right] \subseteq \mathbb{Q}_p \left[ \frac{(Y \cap U) + K}{K} \right],$$

d.h.  $\frac{(Y \cap U) + K}{K}$  ist  $p$ -rein in  $U/K$ .

**Beweis**

O.B.d.A. sei  $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  eine  $p$ -Zerlegungsbasis mit  $h_p^{A_i}(1) = 0$  für  $1 \leq i \leq t$  und  $h_p^{A_i}(1) = \infty$  für  $i > t$  für ein passendes  $t$ .

Für beliebiges  $x = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \in U$  mit  $X = \mathbf{Q}x$  gilt:

$$\mathbb{Q}_p(X \cap U) = \mathbb{Q}_p \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mu_j \neq 0}} \mu_j^{-1} A_j x = \mathbb{Q}_p \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq t \\ \mu_j \neq 0}} \mu_j^{-1} A_j x.$$

Somit haben die  $A_j$  für  $j > t$  keinen Einfluß auf  $\mathbb{Q}_p(X \cap U)$  und es kann im folgenden  $t = n$  angenommen werden. D.h. für alle  $i$  ist  $h_p^{A_i}(1) = 0$  und es gilt  $A_i \subseteq \mathbb{Q}_p$ .

Nach Lemma 3.20 gibt es eine Basis  $(\mathbf{Q}w_i)$  von  $S$  mit  $\dim S = r - 1$ , so daß  $(\mathbf{Q}w_i)$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{Q}u_1, \dots, \mathbf{Q}u_n)$  von  $P$  eine Relationenmatrix  $M$  über  $\mathbb{Q}_p$  in quasi-hermitescher Normalform hat. Es kann angenommen werden, daß  $M$  bereits hermitesche Normalform hat mit

$$M = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & & 0 & \gamma_{1,r+1} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \gamma_{r,r+1} & \cdots & \gamma_{r,n} \end{array} \right).$$

Wegen der speziellen Struktur von  $M$  beziehungsweise der  $w_i$  mit  $w_i = u_i + \sum_{j>r} \gamma_{ij}u_j$  gilt für alle  $k \in K \setminus 0$ , daß der Träger von  $\mathbf{Q}k$  nicht in  $\{r+1, \dots, n\}$  enthalten ist, genauer  $\mathbf{tr}(\mathbf{Q}k) \cap \{1, \dots, r\} \neq \emptyset$ .

Sei  $a = \sum_{i=1}^n q_i u_i$  eine Darstellung von  $a \in U \setminus K$  und  $L = \mathbf{Q}a \vee S$ . Da  $\{u_i \mid i\}$  eine Zerlegungsbasis ist, gilt  $q_i \in A_i \subseteq \mathbb{Q}_p$ . Sei nun  $y = a - \sum_{i=1}^r q_i w_i = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i u_i \in a + K$  mit passendem  $\alpha_i \in \mathbb{Q}_p$ . Dann hat  $Y = \mathbf{Q}y$  den Träger  $\mathbf{tr}(Y) \subset \{r+1, \dots, n\}$ .

Für alle  $x \in a + K \setminus \{y\}$ , also für alle  $X = \mathbf{Q}x \in (L \setminus S) \setminus \{Y\}$ , gilt  $x = y + k$  mit  $k \in K \setminus \{0\}$ . Also hat der Träger von allen  $X \in (L \setminus S) \setminus \{Y\}$  einen nichttrivialen Schnitt mit  $\{1, \dots, r\}$ . Wegen  $\mathbf{tr}(Y) \subseteq \{r+1, \dots, n\}$  ist  $Y$  dann eine Ecke in  $L \setminus S$  und es gilt  $Y \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$ .

Es kann nun gezeigt werden, daß dieses  $Y$  die Behauptung erfüllt.

Für  $y = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i u_i$  in  $U$  gilt mit  $\mathcal{A}_y = \left( \bigcap_{\substack{j>r \\ \alpha_j \neq 0}} \alpha_j^{-1} A_j \right)$ , d.h.  $\mathcal{A}_y y \subset_* U$ :

$$\frac{(Y \cap U) + K}{K} = \underbrace{\left( \bigcap_{\substack{j>r \\ \alpha_j \neq 0}} \alpha_j^{-1} A_j \right)}_{\mathcal{A}_y :=} y + K/K.$$

Sei  $x = y + \sum_{i=1}^r \gamma_i w_i$  ein beliebiger Vektor aus  $a + K$ , also  $X \in (Y \vee S) \setminus S = L \setminus S$ . Insbesondere gilt dann

$$x = \sum_{j=1}^r \gamma_j u_j + \sum_{j>r}^n \lambda_j u_j$$

mit

$$\lambda_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k \gamma_{kj} \quad \text{für } j = r+1, \dots, n. \quad (1)$$

und weiter mit  $\mathcal{A}_x = \left[ \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^r \gamma_j^{-1} A_j \right) \cap \left( \bigcap_{\substack{j=r+1 \\ \lambda_j \neq 0}}^n \lambda_j^{-1} A_j \right) \right]$ , d.h.  $\mathcal{A}_x x \subset_* U$ :

$$\frac{(X \cap U) + K}{K} = \underbrace{\left[ \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^r \gamma_j^{-1} A_j \right) \cap \left( \bigcap_{\substack{j=r+1 \\ \lambda_j \neq 0}}^n \lambda_j^{-1} A_j \right) \right]}_{\mathcal{A}_x :=} x + K/K.$$

Wegen  $x + K = y + K$  sind nur noch die Koeffizientenbereiche  $\mathcal{A}_x$  und  $\mathcal{A}_y$  miteinander zu vergleichen. Diese sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^r \gamma_j^{-1} A_j \right) \cap \left( \bigcap_{\substack{j=r+1 \\ \lambda_j \neq 0}}^n \lambda_j^{-1} A_j \right), \\ \mathcal{A}_y &= \left( \bigcap_{\substack{j=r+1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \alpha_j^{-1} A_j \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Da die Relationenmatrix  $M = (\gamma_{ij})$  nur Einträge aus  $\mathbb{Q}_p$  besitzt, also  $\gamma_{ij} \in \mathbb{Q}_p$ , sind mit  $\alpha_j, \gamma_k \in \mathbb{Q}_p$  auch die Koeffizienten  $\lambda_j$  in  $\mathcal{A}_x$  aus  $\mathbb{Q}_p$ .

Die  $p$ -Ordnungen werden mit  $o_p$  bezeichnet. Da  $\{u_i \mid i\}$  eine  $p$ -Zerlegungsbasis ist, also  $h_p^{A_j}(1) = 0$ , gilt  $\mathbb{Q}_p A_j = \mathbb{Q}_p$  und mit  $n_y = \min(o_p(\alpha_k) \mid k > r, \alpha_k \neq 0)$  weiter

$$\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_y = \left( \bigcap_{\substack{j=r+1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \alpha_j^{-1} \mathbb{Q}_p \right) = p^{-n_y} \mathbb{Q}_p$$

Mit  $n_x = \min(o_p(\gamma_j), o_p(\lambda_k) \mid 1 \leq j \leq r < k \leq n, \gamma_j, \lambda_k \neq 0)$  gilt analog  $\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_x = p^{-n_x} \mathbb{Q}_p$ .

Sei angenommen  $\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_x \supsetneq \mathbb{Q}_p \mathcal{A}_y$ , also  $n_x > n_y$ .

Aus (2) folgt dann einerseits

$$n_y = \min(o_p(\alpha_k) \mid k > r, \alpha_k \neq 0) < o_p(\gamma_j) \text{ für } j = 1, \dots, r \text{ mit } \gamma_j \neq 0 \quad (3)$$

und andererseits

$$n_y = \min(o_p(\alpha_k) \mid k > r, \alpha_k \neq 0) < o_p(\lambda_j) \text{ für } j = r+1, \dots, n \text{ mit } \lambda_j \neq 0. \quad (4)$$

Das Minimum werde für  $k_0$  angenommen. Aus der Ungleichung (3) und der Beziehung (1) folgt dann weiter  $o_p(\alpha_{k_0}) = o_p(\lambda_{k_0})$ , ein Widerspruch zur Ungleichung (4) mit  $j = k_0$ .

Also gilt  $\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_x \subseteq \mathbb{Q}_p \mathcal{A}_y$  und weiter

$$\mathbb{Q}_p \left[ \frac{(X \cap U) + K}{K} \right] = \frac{\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_x x + K}{K} \subseteq \frac{\mathbb{Q}_p \mathcal{A}_y y + K}{K} = \mathbb{Q}_p \left[ \frac{(Y \cap U) + K}{K} \right]. \quad \square$$



**Korollar 5.8**

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $P = \mathbf{Q}U$  projektive Hülle von  $U$  mit Basis  $\{\mathbf{Q}u_i | i\}$  und  $S$  projektive Hülle von  $K$ . Weiter sei  $L \supset S$  projektiver Unterraum mit  $\text{Dim}(L) = \text{Dim}(S) + 1$ . Dann gilt

$$\sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K} \subset_* U/K.$$

**Beweis**

Nach Lemma 5.7 gibt es zu jeder Primzahl  $p$  ein  $Y \in \mathcal{M}_{L \setminus S}$  mit  $\frac{(Y \cap U) + K}{K}$  ist  $p$ -rein in  $U/K$ . Damit ist  $\sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K}$  ebenfalls  $p$ -rein in  $U/K$  für alle Primzahlen  $p$ ,

also rein in  $U/K$ . □

Der folgende Satz ist eine Verschärfung von Lemma 5.6, da hier Gleichheit gilt.

**Satz 5.9**

Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  vollständig zerlegbare Gruppe mit reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $P = \mathbf{Q}U$  projektive Hülle von  $U$  mit Basis  $\{\mathbf{Q}u_i | i\}$  und  $S$  projektive Hülle von  $K$ .

Für  $a \in U \setminus K$  sei  $a^* = a + K$  die Nebenklasse von  $a$  modulo  $K$  und  $L = \mathbf{Q}a \vee S$  projektiver Unterraum. Dann gilt:

$$\langle a^* \rangle_*^{U/K} = \sum_{X \in \mathcal{M}_{L \setminus S}} \frac{(X \cap U) + K}{K}.$$

**Beweis**

Die Behauptung folgt mit Korollar 5.8 aus Lemma 5.6. □

## 5.2 Reine Hüllen in vollständig zerlegbaren Gruppen

Sei  $U$  eine vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe von endlichem Rang mit Untergruppe  $G$ . Die reine Hülle von  $G$  in  $U$  ist darstellbar als endliche Summe von Rang-1-Gruppen. Es entsteht die Frage, wie gelangt man zu einer solchen Darstellung? Da die reine Hülle der Untergruppe gleich dem Schnitt von  $U$  mit der divisiblen Hülle von  $G$  ist, kann man auch nach einer Darstellung dieses Schnittes als endliche Summe von Rang-1-Gruppen fragen.

In der Arbeit von Berger [4] wurde bereits in einem Satz der Schnitt einer vollständig zerlegbaren (torsionsfreien) Gruppe mit der divisiblen Hülle einer Untergruppe behandelt. Jedoch konnte der Schnitt nur bis auf endlichen Index bestimmt werden, siehe Satz 5.12.

**Lemma 5.10**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbf{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \mathbf{Q}U = \bigvee \mathbf{Q}u_i$  und  $X$  ein Punkt in  $P$ . Dann gilt

$$\mathbf{t}(X \cap U) = \bigcap \{ \mathbf{t}(A_i) \mid i \in \text{tr}(X) \}.$$

**Beweis**

Seien  $(q_1, \dots, q_n)$  die homogenen Koordinaten von  $X$  und  $x = \sum_{i \in \mathbf{tr}(X)} q_i u_i$ . Mit Korollar 5.2 gilt dann  $X \cap U = \left( \bigcap_{i \in \mathbf{tr}(X)} q_i^{-1} A_i \right) x \doteq \bigcap_{i \in \mathbf{tr}(X)} A_i x$ , also  $\mathbf{t}(X \cap U) = \bigcap_{i \in \mathbf{tr}(X)} \mathbf{t}(A_i)$ .  $\square$

**Lemma 5.11**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \mathbf{Q}U = \bigvee \mathbf{Q}u_i$ . Sei  $S \neq 0$  ein Unterraum von  $P$ . Dann gilt für einen Punkt  $Y \in S$ :

$$\mathbf{t}(Y \cap U) = \bigcap \{ \mathbf{t}(X \cap U) \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ mit } \mathbf{tr}(X) \subset \mathbf{tr}(Y) \}.$$

**Beweis**

Nach Lemma 3.11 gibt es zu jedem  $i \in \mathbf{tr}(Y)$  eine Ecke  $X_i$  in  $S$  mit  $i \in \mathbf{tr}(X) \subseteq \mathbf{tr}(Y)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(Y \cap U) &\leq \bigcap \{ \mathbf{t}(X \cap U) \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ mit } \mathbf{tr}(X) \subseteq \mathbf{tr}(Y) \} \\ &\leq \bigcap \{ \mathbf{t}(X_i \cap U) \mid i \in \mathbf{tr}(Y) \} \\ &\leq \bigcap \{ \mathbf{t}(A_i) \mid i \in \mathbf{tr}(Y) \}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.10 gilt die Gleichheit wie gewünscht.  $\square$

**Satz 5.12 ([4, Satz 4.2])**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \bigvee_{i=1}^n U_i$  und  $U_i = \mathbf{Q}u_i$ . Sei  $S$  ein Unterraum von  $P$ . Dann gilt

$$S \cap U \doteq \sum \{ X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S \}.$$

**Beweis**

Sei  $G = \sum \{ X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S \}$ . Offensichtlich ist  $G$  eine Untergruppe von  $S \cap U$ . Weiter ist  $S \cap U = \sum_Y Y \cap U$  eine Butlergruppe und somit als endliche Summe mit Punkten  $Y$  darstellbar. Nach Lemma 3.23 gilt für jeden dieser Punkte  $Y \in \bigvee \{ X \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ und } \mathbf{tr}(X) \subseteq \mathbf{tr}(Y) \}$ , also gilt mit Lemma 5.11 für den Typ

$$\mathbf{t}(Y \cap G) \geq \bigcap \{ \mathbf{t}(X \cap U) \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ und } \mathbf{tr}(X) \subseteq \mathbf{tr}(Y) \} = \mathbf{t}(Y \cap U).$$

Mit  $G \subseteq S \cap U$  gilt umgekehrt  $\mathbf{t}(Y \cap U) \geq \mathbf{t}(Y \cap G)$ , also Gleichheit.

Somit ist  $G = \sum \{ X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S \}$  eine Untergruppe von endlichem Index, also quasi-gleich.  $\square$

In derselben Arbeit konnte Berger [4] für einige Spezialfälle die Gleichheit nachweisen.

**Lemma 5.13 ([4, Lemma 5.1,5.3])**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \mathbf{Q}U = \bigvee \mathbf{Q}u_i$ . Sei  $S$  ein Unterraum von  $P$  und  $\mathcal{M}_S = \{ X \in S \mid X \text{ ist Ecke in } S \}$ . Es gilt  $S \cap U = \sum_{X \in \mathcal{M}_S} X \cap U$ , falls

- (1)  $\dim S = 0$  , d.h.  $S$  ist ein Punkt,
- (2)  $\dim S = n - 1$ , d.h.  $S = P$ ,
- (3) die Träger der Punkte in  $\mathcal{M}_S$  paarweise disjunkt sind oder
- (4)  $\text{rank } U \leq 3$ .

Für einige spezielle Fälle mit  $\text{rank}(U) = 4$  konnte auch Gleichheit nachgewiesen werden [4, Lemma 5.2]. Daher entstand auch die Vermutung, daß in allen Fällen die Gleichheit gilt. Mit den hier entwickelten Hilfsmitteln läßt sich diese Vermutung nun beweisen.

**Lemma 5.14**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \mathbf{Q}U = \bigvee \mathbf{Q}u_i$ . Sei  $S$  ein Unterraum von  $P$  und  $G = S \cap U$  eine Butlergruppe. Sei weiter  $\tau$  ein Typ. Dann gilt für die Typuntergruppe:

$$G(\tau) = \sum \{X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ mit } \mathbf{t}(X \cap U) \geq \tau\}.$$

**Beweis**

Sei  $H = \sum \{X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S \text{ mit } \mathbf{t}(X \cap U) \geq \tau\}$ . Sowieso ist  $H$  Untergruppe von  $G(\tau)$ . Für  $G(\tau) \subset H$  genügt zu zeigen, daß  $G(\tau)_p := \mathbb{Q}_p G(\tau) \subset H_p := \mathbb{Q}_p H$  für jede Primzahl  $p$  gilt.

Sei  $0 \neq x = \sum q_i u_i \in G(\tau)_p$  mit Träger  $\mathbf{tr}(x)$ . Sei  $Y$  Ecke von  $S$  mit Träger  $\mathbf{tr}(Y) \subseteq \mathbf{tr}(x)$  und  $0 \neq y = \sum r_i u_i \in Y \cap \mathbb{Q}_p U \subset H_p$ . Insbesondere ist  $Y = \mathbf{Q}y$ . Sei  $j \in \mathbf{tr}(y)$  so gewählt, daß  $h_p^{A_j u_j}(r_j u_j) = \min\{h_p^{A_j u_j}(r_j u_j) \mid i \in \mathbf{tr}(Y)\}$  gilt. Es gilt  $0 \neq q_j = q \cdot r_j$  für ein passendes  $q \in \mathbb{Q}$  und mit der Wahl von  $j$  gilt  $qy \in H_p \subseteq G(\tau)_p$ . Sei  $x' = x - qy \in G(\tau)_p$ . Dann gilt  $|\mathbf{tr}(x')| < |\mathbf{tr}(x)|$ , da  $\mathbf{tr}(x') \subseteq \mathbf{tr}(x) \setminus \{j\}$ . Mit Induktion nach  $|\mathbf{tr}(x)|$  ist  $x' \in H_p$ . Wegen  $qy \in H_p$  ist dann auch  $x = x' + qy \in H_p$ , also  $G(\tau)_p \subseteq H_p$ .

Mit  $G(\tau) = \bigcap_p G(\tau)_p \subset \bigcap_p H_p = H \subset G(\tau)$  gilt die Gleichheit wie gewünscht. □

**Satz 5.15**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit projektiver Hülle  $P = \mathbf{Q}U = \bigvee \mathbf{Q}u_i$ . Sei  $S$  ein Unterraum von  $P$ . Dann ist der Schnitt von  $U$  mit dem Unterraum darstellbar als Summe von Ecken.

$$S \cap U = \sum \{X \cap U \mid X \text{ ist Ecke in } S\}.$$

**Beweis**

Sei  $G = S \cap U$  und  $\tau_0 = \inf\{\mathbf{t}(x) \mid x \in G\}$ . Dann gilt  $G = G(\tau_0)$  und  $\tau_0 \leq \mathbf{t}(X \cap U)$  für alle Ecken  $X$  von  $S$ . Mit Lemma 5.14 folgt die Behauptung. □

Die Darstellung einer Butlergruppe als Summe von Ecken wird **Eckendarstellung** genannt.

**Korollar 5.16**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit  $A_i \subset \mathbb{Q}$  und reiner Untergruppe  $K$ . Sei  $S$  eine weitere Untergruppe von  $U$ . Sei nun weiter  $P = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{Q}u_i$  projektive Hülle von  $U$  und  $L = \mathbf{Q}(S + K)$  projektive Hülle von  $S + K$ . Dann gilt:

$$\left\langle \frac{S + K}{K} \right\rangle_*^{U/K} = \sum_{X \in \mathcal{M}_L \setminus \mathbf{Q}K} \frac{(X \cap U) + K}{K}.$$

**Beweis**

Nach Satz 5.15 gilt:

$$\langle S + K \rangle_*^U = U \cap \mathbf{Q}(S + K) = \sum_{x \in \mathcal{M}_L} X \cap U \subset_* U.$$

Mit Fuchs [6, Lemma 26.2 (ii)] gilt dann

$$\sum_{X \in \mathcal{M}_L} \frac{(X \cap U) + K}{K} \subset_* U/K.$$

Für  $X \in \mathbf{Q}K$  gilt  $X \cap U \subset K$  und es genügt nur über die Ecken in  $L$  zu summieren, die nicht in  $\mathbf{Q}K$  liegen, d.h. mit Lemma 3.12 die Summe über  $\mathcal{M}_L \setminus \mathbf{Q}K = \mathcal{M}_L \setminus \mathcal{M}_{\mathbf{Q}K}$  zu bilden. Dann gilt

$$\sum_{X \in \mathcal{M}_L \setminus \mathbf{Q}K} \frac{(X \cap U) + K}{K} \subset_* U/K$$

und es folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 5.17**

Die im vorhergehenden Korollar angegebenen Summanden sind nicht notwendigerweise rein in  $U/K$ .

Sei  $U = 2\mathbb{Z}a \oplus 3\mathbb{Z}b$  mit  $K = 6\mathbb{Z}(a + b) \subset_* U$ . Weiter sei  $S = 2\mathbb{Z}a$ . Die projektive Hülle von  $S + K$  ist dann  $L = \mathbf{Q}a \vee \mathbf{Q}b$  mit den Ecken  $\mathbf{Q}a$  und  $\mathbf{Q}b$ . Nach Korollar 5.16 ist dann

$$\left\langle \frac{2\mathbb{Z}a + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)} \right\rangle_*^{U/K} = \frac{2\mathbb{Z}a + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)} + \frac{3\mathbb{Z}b + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)} = U/K.$$

Aber beide Summanden sind nicht rein in  $U/K$ , da beide das Element  $u = [4a + 3b] + 6\mathbb{Z}(a + b) \in U/K$  nicht enthalten, aber

$$2u = [8a + 6b] + 6\mathbb{Z}(a + b) = 2a + 6\mathbb{Z}(a + b) \in \frac{2\mathbb{Z}a + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)},$$

$$3u = [12a + 9b] + 6\mathbb{Z}(a + b) = -3b + 6\mathbb{Z}(a + b) \in \frac{3\mathbb{Z}b + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)}$$

gilt. Insbesondere gilt  $\frac{\mathbb{Z}u + 6\mathbb{Z}(a + b)}{6\mathbb{Z}(a + b)} = U/K$ .

### 5.3 Eigenschaften der Eckendarstellung

Die Eckendarstellung einer Butlergruppe hat einige Eigenschaften, die sich als hilfreich bei der Bestimmung der kritischen Typenmenge und der Typuntergruppen erweisen.

#### Lemma 5.18

Sei  $G = \sum B_i$  eine Butlergruppe in Eckendarstellung und  $\tau$  ein kritischer Typ von  $G$ . Dann gibt es ein  $i$  mit  $\tau = \mathbf{t}(B_i)$ . D.h. als kritische Typen von  $G$  können nur die Typen der Ecken auftauchen.

#### Beweis

Sei  $\tau$  ein Typ aus der Typenmenge von  $G$ . Dann gilt mit Lemma 5.14

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) \geq \tau\} \quad \text{und} \\ G^\sharp(\tau) &= \langle G(\rho) \mid \rho > \tau \rangle_*^G = \left\langle \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\} \right\rangle_*^G. \end{aligned}$$

Falls  $\tau$  nicht Typ einer Ecke ist, also  $\tau \neq \mathbf{t}(B_i)$  für alle  $i$ , dann ist  $\{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) \geq \tau\} = \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\}$ . Also ist  $G(\tau) = \langle G(\tau) \rangle_*^G = \langle \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\} \rangle_*^G = G^\sharp(\tau)$ . Die Zerlegung  $G(\tau) = G_\tau \oplus G^\sharp(\tau)$  ist trivial und  $\tau$  kein kritischer Typ von  $B$ .  $\square$

#### Beispiel 5.19

Folgendes Beispiel zeigt eine Gruppe  $G$  als Summe reiner Summanden. In Kapitel 6.7 wird diese Gruppe nochmals allgemeiner behandelt und auch eine vollständig zerlegbare Gruppe angegeben, in der  $G$  reine Untergruppe ist.

Sei  $G = \mathbb{Z}[2^{-1}, 5^{-1}]a + \mathbb{Z}[2^{-1}, 7^{-1}]b + \mathbb{Z}[3^{-1}, 5^{-1}]c + \mathbb{Z}[3^{-1}, 7^{-1}](a + b + c)$  eine Darstellung von  $G$  mit reinen Summanden. Jedoch ist nicht jeder kritische Typ, z.B.  $\mathbf{t}(a+b) = (\infty, \infty, 0, 0, \dots)$  oder  $\mathbf{t}(a+c) = (0, 0, \infty, \infty, \dots)$ , Typ eines Summanden. Eine Eckendarstellung von  $G$ , die insbesondere auch alle kritischen Typen enthält, wäre:

$$\begin{aligned} G = & \mathbb{Z}[2^{-1}, 5^{-1}] a & + & \mathbb{Z}[2^{-1}, 7^{-1}] b \\ & + \mathbb{Z}[3^{-1}, 5^{-1}] c & + & \mathbb{Z}[3^{-1}, 7^{-1}] (a + b + c) \\ & + \mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}] (a + b) & + & \mathbb{Z}[5^{-1}, 7^{-1}] (a + c) \\ & + & \mathbb{Z} & (b + c). \end{aligned}$$

#### Lemma 5.20

Sei  $U$  eine vollständig zerlegbare Gruppe und  $S$  projektive Hülle einer Untergruppe von  $U$ . Sei weiter  $G = \sum B_i = S \cap U$  eine Butlergruppe in Eckendarstellung mit kritischem Typ  $\tau$ . Weiter sei  $S_\tau^\sharp = \bigvee \{X \mid X \text{ ist Ecke von } S \text{ mit } \mathbf{t}(X \cap U) > \tau\} = \bigvee \{\mathbf{Q}B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\}$  das Erzeugnis derjenigen Ecken  $X$  von  $S$ , für die  $X \cap U$  einen größeren Typ als  $\tau$  besitzt. Dann gilt:

$$G^\sharp(\tau) = \sum \{Y \cap U \mid Y \text{ ist Ecke von } S_\tau^\sharp\}.$$

#### Beweis

Es gilt  $S_\tau^\sharp = \mathbf{Q} \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\}$ . Also ist  $G^\sharp(\tau) = \langle \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\} \rangle_*^G = U \cap S_\tau^\sharp$  und mit Satz 5.15 folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.21**

Sei  $U$  eine vollständig zerlegbare Gruppe und  $S$  projektive Hülle einer Untergruppe von  $U$ . Sei weiter  $G = \sum B_i = S \cap U$  eine Butlergruppe in Eckendarstellung mit kritischem Typ  $\tau$ . Haben  $S_\tau^\# = \mathbf{Q} \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\}$  und  $S_\tau = \mathbf{Q} \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\}$  trivialen Schnitt, so ist  $G_\tau = \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\}$  ein Typenkomplement, d.h. es gilt die Butlergleichung

$$G(\tau) = \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\} \oplus G^\#(\tau).$$

**Beweis**

Sowieso gilt

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\} + \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) > \tau\} \\ &\subseteq \sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\} + G^\#(\tau) \\ &\subseteq G(\tau), \end{aligned}$$

mit Gleichheit. Weiter gilt  $\sum \{B_i \mid \mathbf{t}(B_i) = \tau\} \cap G^\#(\tau) \subset S_\tau \cap S_\tau^\# = 0$ , da nach Voraussetzung  $S_\tau$  und  $S_\tau^\#$  trivialen Schnitt besitzen. Somit ist diese Zerlegung direkt und es gilt die Butlergleichung wie behauptet.  $\square$

## 5.4 Erzeugung einer Eckendarstellung einer Butlergruppe

Im Allgemeinen ist eine Butlergruppe  $G$  nur als Summe rationaler Gruppen gegeben, wobei die Menge der Typen der einzelnen Summanden nicht alle kritischen Typen von  $G$  enthält. Zur Bestimmung einer Eckendarstellung von  $G$  benötigt man eine vollständig zerlegbare Gruppe, in der  $G$  als reine Untergruppe eingebettet ist. Arnold und Vinsonhaler [2] konnten zeigen, daß eine passende vollständig zerlegbare Gruppe isomorph zu einer direkten Summe von speziellen Rang-1-Faktorgruppen von  $G$  ist. Diese Rang-1-Faktorgruppen lassen sich über spezielle Hyperebenen, den Hyper-Ecken aus Definition 3.27, mit Algorithmus 4.1 bestimmen.

**Definition 5.22**

Sei eine Butlergruppe  $G = \sum_{i=1}^n A_i y_i$  gegeben mit  $\mathbb{Z} \subseteq A_i \subseteq \mathbb{Q}$ . Dann sei  $\Phi_G : V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q} u_i \rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbb{Q} y_i$  der **kanonische Homomorphismus** definiert durch  $\Phi_G(u_i) = y_i$  für  $1 \leq i \leq n$  mit  $K_G = \text{Kern}(\Phi_G)$ . Ist klar, welche Butlergruppe gemeint ist, wird auch kurz  $\Phi$  bzw.  $K$  geschrieben.

**Lemma 5.23**

Sei  $G = \sum_{i=1}^n A_i y_i$  eine Butlergruppe und  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$ . Sei  $\Phi := \Phi_G$  kanonischer Homomorphismus mit  $K := \text{Kern}(\Phi)$ . Dann gilt  $G \cong U/U \cap K$ .

Sei  $H \subset V = \mathbb{Q}U$  ein Unterraum der Dimension  $n - 1$  mit  $K \subset H$ . Dann ist  $U/U \cap H \cong G/G \cap \Phi(H)$  eine torsionsfreie Rang-1-Gruppe.

Insbesondere ist für alle Hyper-Ecken  $H \in \mathcal{H}_K$ , die  $K$  enthalten,  $U/U \cap H$  eine Rang-1-Faktorgruppe.

**Beweis**

Mit  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  ist  $\Phi|_U : U \rightarrow G$  ein Epimorphismus auf  $G$  mit  $\Phi(U) = G$ , also  $G \cong U/U \cap \text{Kern}(\Phi) = U/U \cap K$ .

Ist  $H$  ein Unterraum der Dimension  $n - 1$ , dann ist  $U + H/H \cong U/U \cap H$  eine torsionsfreie Rang-1-Gruppe und es gilt

$$G/G \cap \Phi(H) \cong G + \Phi(H)/\Phi(H) \cong U + H/H \cong U/U \cap H.$$

Da die Hyper-Ecken  $H \in \mathcal{H}_K$  von der Dimension  $n - 1$  sind, folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.24**

Sei  $V$  ein rationaler Vektorraum mit Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  und  $K \subset V$  ein Unterraum. Sei  $\mathcal{H}_K$  die Menge der Hyper-Ecken von  $K$ . Dann hat die Abbildung  $g : V \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}_K} V/H$  definiert durch  $g(v) = (v + H \mid H \in \mathcal{H}_K)$  den Kern  $K = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_K} H$ . Insbesondere ist

für  $U = \bigoplus A_i u_i$  die von  $g$  auf  $U/U \cap K$  induzierte Einschränkung  $f : U/U \cap K \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}_K} U/U \cap H$  definiert durch  $f(u + U \cap K) = (u + U \cap H \mid H \in \mathcal{H}_K)$  injektiv

**Beweis**

Für  $v \in \text{Kern}(g)$  gilt  $v + H = H$  für alle  $H \in \mathcal{H}_K$ . Mit Lemma 3.30 ist  $\text{Kern}(g) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_K} H = K$ . Der induzierte Homomorphismus  $\bar{g} : V/K \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}_K} V/H$  ist somit injektiv. Insbesondere gilt dies auch für die Einschränkung von  $\bar{g}$  auf  $U/U \cap K$ .  $\square$

**Lemma 5.25**

Sei  $V$  ein rationaler Vektorraum mit Basis  $(u_1, \dots, u_n)$  und  $K \subset V$  ein Unterraum. Sei  $H$  eine Hyper-Ecke von  $K$  und  $U = \bigoplus A_i u_i$ . Seien weiter  $(q_1, \dots, q_n)$  die homogenen Koordinaten von  $H^\perp$ . Dann gilt  $U/U \cap H \cong \sum_{i \in \text{tr}(H^\perp)} q_i A_i$ .

**Beweis**

Seien  $(q_1, \dots, q_n)$  die homogenen Koordinaten von  $H^\perp$  und  $\phi : V \rightarrow \mathbb{Q}$  definiert durch  $\phi(u_i) = q_i$  für alle  $i$ . Es gilt

$$x = \sum \alpha_i u_i \in \text{Kern}(\phi) \iff \sum \alpha_i q_i = 0 \iff x \in H.$$

Also ist  $\text{Kern}(\phi) = H$  und mit Einschränkung auf  $U$  induziert  $\phi$  einen Isomorphismus von  $U/U \cap H$  auf  $\sum q_i A_i = \sum_{i \in \text{tr}(H^\perp)} q_i A_i \cong \sum_{i \in \text{tr}(H^\perp)} A_i$ .  $\square$

**Lemma 5.26**

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Butlergruppe. Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  mit kanonischem Epimorphismus  $\Phi_G = \Phi : \mathbb{Q}U \rightarrow \mathbb{Q}G$  definiert durch  $\Phi(u_i) = y_i$  für alle  $i$ . Dann ist  $\text{Kern}(\Phi) = K$ . Sei nun  $\mathcal{H}_K = \{H_j \mid 1 \leq j \leq m\}$  die Menge der Hyper-Ecken von  $K$ . Weiter seien  $(q_{j1}, \dots, q_{jn})$  die homogenen Koordinaten von  $H_j^\perp$  für alle  $j$ . Dann ist  $\phi : U/U \cap K \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m (\sum q_{ji} A_i)$  definiert durch  $\phi(u_i + U \cap K) = (q_{ji} \mid 1 \leq j \leq m)$  eine reine Einbettung.

**Beweis**

Nach Arnold und Vinsonhaler [2, Theorem 1.4] ist  $G \cong U/U \cap K$  rein einbettbar in  $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_K} U/U \cap H$ . Dabei wird die in Lemma 5.24 definierte Abbildung  $f$  verwendet.

Nach Lemma 5.25 ist  $U/U \cap H_j$  isomorph zu  $\sum q_{ji}A_i$  vermöge  $u_i + U \cap H_j \mapsto q_{ji}$ .  $\square$

**Satz 5.27**

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Butlergruppe. Sei  $U = \bigoplus A_i u_i$  mit kanonischem Epimorphismus  $\Phi_G = \Phi : \mathbb{Q}U \rightarrow \mathbb{Q}G$  definiert durch  $\Phi(u_i) = y_i$  für alle  $i$ . Dann ist  $\text{Kern}(\Phi) = K$ . Sei nun  $\mathcal{H}_K = \{H_j \mid 1 \leq j \leq m\}$  die Menge der Hyper-Ecken von  $K$ . Weiter seien  $(q_{j1}, \dots, q_{jn})$  die homogenen Koordinaten von  $H_j^\perp$  für alle  $j$ . Sei

$$D = \bigoplus_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n q_{ji} A_i \right] b_j \quad \text{und} \quad B = \sum_{i=1}^n A_i (q_{1i} b_1 + \dots + q_{mi} b_m).$$

Dann gilt  $G \cong B \subset_* D$ . Insbesondere ist  $B = D \cap \mathbb{Q} \langle q_{1i} b_1 + \dots + q_{mi} b_m \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ .

**Beweis**

Nach Lemma 5.26 ist  $\phi(U/U \cap K) = B \subset_* D$  eine reine Einbettung. Nach Lemma 5.25 ist  $\phi$  injektiv und mit  $G \cong U/U \cap K$  gilt  $G \cong B \subset_* D$ . Mit  $\mathbb{Q}B = \mathbb{Q} \langle q_{1i} b_1 + \dots + q_{mi} b_m \mid 1 \leq i \leq n \rangle$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.28**

Der Isomorphismus  $G \cong B$  läßt sich zu einem Vektorraumisomorphismus fortsetzen, der zu einer Identifizierung von  $G$  und  $B$  benutzt werden kann und es gilt  $G \subset_* D$ .



## 6 Reine Darstellung von Butlergruppen

### 6.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit den im vorausgehenden Kapitel entwickelten Sätzen sind nun reine Hüllen in einer Butlergruppe  $G$  berechenbar. Dabei müssen zwei verschiedene Fälle betrachtet werden.

**Fall 1:**  $G$  ist nur als Summe von Rang-1-Gruppen gegeben, d.h. es ist keine vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  bekannt, in der  $G$  rein ist.

1. Die reine Hülle eines Summanden kann mit Satz 5.9 und die reine Hülle einer beliebigen Untergruppe mit Korollar 5.16 bestimmt werden.
2. Über Satz 5.27 gelangt man zu einer vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$ , in der  $G$  rein ist.

**Fall 2:** Zur Butlergruppe  $G$  ist eine vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  gegeben, in der  $G$  eine reine Untergruppe ist, d.h.  $G \subset_* U$ .

1. Mit Satz 5.15 gelangt man zu einer Eckendarstellung von  $G$ . Nur die Typen der Summanden in der Eckendarstellung können auch kritische Typen sein.
2. Ebenso ist mit Satz 5.15 über die vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  die reine Hülle jeder beliebigen Untergruppe von  $G$  in  $G$  bestimmbar. Diese sind dann auch rein in  $D$ .

### 6.2 Reine Darstellung einer Bracketgruppe

Für Bracketgruppen ist die Bestimmung einer reinen Darstellung auch direkt möglich, d.h. Satz 5.9 wird nicht benötigt.

#### Definition 6.1

Sei  $\mathcal{G}[A_1, \dots, A_{n+1}]$  eine Bracketgruppe mit  $\tau_i = \mathbf{t}(A_i)$ . Dann bezeichnet man  $\tau_i$  als cogeordnet (engl. cotrimmed), wenn  $\tau_i \geq \bigcap_{j \neq i} \tau_j$ .

Wählt man  $\tau'_i = \tau_i \vee \bigcap_{j \neq i} \tau_j$ , so sind alle  $\tau'_i$  cogeordnet und man bezeichnet  $\tau'_1, \dots, \tau'_n$  als cogeordnete Version von  $\tau_1, \dots, \tau_n$ .

#### Bemerkung 6.2

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Bracketgruppe mit  $\tau_i = \mathbf{t}(A_i)$ . Dann folgt aus  $A_i y_i$  rein in  $G$  stets auch  $\tau_i$  ist cogeordnet. Die Umkehrung gilt nicht, da  $A_i$  durch seinen Typ nur bis auf einen endlichen Faktor festgelegt wird, d.h. ist  $\tau_i$  cogeordnet, so gibt es ein  $q \in \mathbb{Q} \setminus 0$ , so daß  $q A_i y_i$  rein in  $G$  ist.

#### Lemma 6.3

Sei  $G = \sum_{i=1}^n A_i y_i$  eine Bracketgruppe. Genau dann ist dies eine reine Darstellung, wenn für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt  $\bigcap_{j \neq i} A_j \subseteq A_i$ .

**Beweis**

Sei  $U = \bigoplus_{i=1}^n A_i u_i$  und  $K = (\bigcap_{i=1}^n A_i)(u_1 + \dots + u_n)$ . Dann ist  $G \cong U/K$ . Da  $K$  vom Rang 1 ist, hat  $\mathbb{Q}\langle u_i + K \rangle$  die Dimension 2 und enthält 2 Ecken mit disjunkten Trägern. Diese sind  $\mathbf{Q}u_i$  und  $\mathbf{Q}\sum_{j \neq i} u_j$ . Für die reine Hülle von  $y_i$  in  $G$  gilt mit Satz

5.9 somit  $\langle y_i \rangle_*^U = (A_i + \bigcap_{j \neq i} A_j)y_i$ .

Die Darstellung von  $G$  ist also genau dann eine reine Darstellung, wenn für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt  $A_i = A_i + \bigcap_{j \neq i} A_j$ , also wie gewünscht  $\bigcap_{j \neq i} A_j \subseteq A_i$ .  $\square$

**Korollar 6.4**

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Bracketgruppe und  $K = \bigcap A_i$ . Genau dann ist  $\sum A_i y_i$  eine Darstellung von  $G$  mit reinen Summanden, wenn für alle  $i$  gilt  $\bigcap_{j \neq i} A_j = K$ .

**Beweis**

Mit  $\bigcap_{j \neq i} A_j \subseteq A_i$  für alle  $i$  gilt  $K = \bigcap_{j \neq i} A_j \cap A_i = \bigcap_{j \neq i} A_j$ . Für alle  $i$  folgt aus  $\bigcap_{j \neq i} A_j = \bigcap_i A_i = K$  umgekehrt  $\bigcap_{j \neq i} A_j \subseteq A_i$ . Mit Lemma 6.3 folgt die Behauptung.  $\square$

Eine andere Bedingung für die reine Darstellung einer Bracketgruppe gibt folgendes Lemma.

**Lemma 6.5**

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Bracketgruppe und  $K = \bigcap A_i$ . Genau dann ist  $\sum A_i y_i$  eine Darstellung von  $G$  mit reinen Summanden, wenn es zu jeder Primzahl  $p$  zwei verschiedene Indizes  $i, j$  gibt, so daß  $\mathbb{Q}_p A_i = \mathbb{Q}_p A_j = \mathbb{Q}_p K$  gilt.

**Beweis**

O.B.d.A. gelte  $\mathbb{Z} \subseteq A_i$  für alle  $i$ . Sei  $G = \sum A_i u_i$  eine Darstellung mit reinen Summanden, d.h. für alle  $i$  gilt  $\bigcap_{j \neq i} A_j \subseteq A_i$ . Für jede Primzahl  $p$  gilt somit

$$(*) \quad \min(h_p^{A_j}(1) \mid j \neq i) \leq h_p^{A_i}(1).$$

Sei  $p$  prim. Dann gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so daß

$$(**) \quad h_p^K(1) = h_p^{A_i}(1) = \min(h_p^{A_j}(1) \mid j).$$

Mit (\*) gilt dann auch  $\min(h_p^{A_j}(1) \mid j \neq i) \leq h_p^{A_j}(1)$  und es existiert ein  $i \neq j$  mit  $h_p^{A_i}(1) \leq h_p^{A_j}(1) \leq h_p^{A_i}(1)$ , also Gleichheit. Somit ist  $\mathbb{Q}_p A_i = \mathbb{Q}_p A_j = \mathbb{Q}_p K$ .

Sei nun  $G = \sum A_i u_i$  keine Darstellung mit reinen Summanden. O.B.d.A. sei  $A_1 u_1$  nicht rein in  $G$  und somit  $\bigcap_{i \neq 1} A_i \not\subseteq A_1$ . Es gibt somit eine Primzahl  $p$  mit  $h_p^{\bigcap_{i \neq 1} A_i}(1) = \min(h_p^{A_i}(1) \mid i \neq 1) > h_p^{A_1}(1)$ , also  $\mathbb{Q}_p A_1 \not\subseteq \mathbb{Q}_p A_j$  für alle  $j > 1$ .  $\square$

**Lemma 6.6**

Sei  $G = \sum A_i y_i$  eine Bracketgruppe mit reinen Summanden und  $K = \bigcap A_i$ . Falls  $A_j = K$  für ein  $j$ , so ist  $G$  vollständig zerlegbar und es gilt  $G = \bigoplus_{i \neq j} A_i y_i$ .

**Beweis**

Aus  $A_j = K = \bigcap_{i \neq j} A_i$  folgt  $A_j u_j = \bigcap_{i \neq j} A_i \sum_{i \neq j} u_i \subset \sum_{i \neq j} A_i u_i$ . Da die  $\{u_i \mid i \neq j\}$  linear unabhängig sind, folgt die vollständige Zerlegbarkeit in eine direkte Summe.  $\square$

**6.3 Beispiele für Eckendarstellungen ausgewählter Butlergruppen**

Am Beispiel einer Bracketgruppe, wird die Bestimmung einer vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$  mit  $G \subset_* D$ , sowie einer Eckendarstellung beschrieben.

**Beispiel 6.7**

Sei  $G = A_1 a + A_2 b + A_3 c + A_4 d \subset \mathbb{Q}a + \mathbb{Q}b + \mathbb{Q}c$  mit  $a + b + c + d = 0$  eine beliebige Butlergruppe. Mit  $U = A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \oplus A_3 x_3 \oplus A_4 x_4$  und  $K = \mathbb{Q}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$  ist  $G \cong_{U/U \cap K}$ . Die Hyper-Ecken  $H_i$  von  $K$  in  $\mathbb{Q}U$  sind dann von der Form  $\mathbb{Q}\langle x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_k, x_\ell \rangle$  mit  $1 \leq k < \ell \leq 4$ . Es gibt also  $\binom{4}{2} = 6$  verschiedene Hyper-Ecken  $H_1, \dots, H_6$ . Die homogenen Koordinaten von  $H_i^\perp$  sind  $(q_{i1}, \dots, q_{i4})$  mit

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anwendung von Satz 5.27 führt zur vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$  mit

$$\begin{aligned} D &= (A_1 + (-A_4))b_1 \oplus (A_1 + (-A_3))b_2 \oplus \dots \oplus (A_3 + (-A_4))b_6 \\ &= (A_1 + A_4)b_1 \oplus (A_1 + A_3)b_2 \oplus \dots \oplus (A_3 + A_4)b_6 \end{aligned}$$

und zur Darstellung von  $B \cong G$  bezüglich der Zerlegungsbasis  $(b_1, \dots, b_6)$  der Form

$$B = A_1(b_1 + b_2 + b_3) + A_2(-b_3 + b_4 + b_5) + A_3(-b_2 - b_5 + b_6) + A_4(-b_1 - b_4 - b_6)$$

mit Isomorphismus  $\phi : \begin{cases} a \mapsto (b_1 + b_2 + b_3) \\ b \mapsto -(b_3 - b_4 - b_5) \\ c \mapsto -(b_2 + b_5 - b_6) \\ d \mapsto -(b_1 + b_4 + b_6). \end{cases}$

Die Vorzeichen wurden bewußt in den Darstellungen belassen, um das Nachvollziehen der einzelnen Schritte zu vereinfachen.

Sei  $A_{ij} = A_i + A_j$  für  $1 \leq i, j \leq 4$ . Dann ist

$$\begin{aligned} G \cong & (A_{14}b_1 \oplus A_{13}b_2 \oplus A_{12}b_3 \oplus A_{24}b_4 \oplus A_{23}b_5 \oplus A_{34}b_6) \\ & \cap \mathbb{Q}\langle \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_{=\phi(a)}, \underbrace{-(b_3 - b_4 - b_5)}_{=\phi(b)}, \underbrace{-(b_2 + b_5 - b_6)}_{=\phi(c)} \rangle. \end{aligned}$$

### 6.3 Beispiele für Eckendarstellungen ausgewählter Butlergruppen

Für eine Eckendarstellung von  $B \cong G$  mittels Satz 5.15 werden noch die Ecken von  $\mathbf{Q}B$  benötigt. Diese können einerseits nach Lemma 3.17 durch Gaußelimination unter Berücksichtigung jeder Möglichkeit bestimmt werden oder unter Ausnutzung von Lemma 3.29 durch Bestimmung der Hyper-Ecken von  $(\mathbf{Q}B)^\perp$ . Die Ecken von  $\mathbf{Q}B$  sind dann die Polaren  $H^\perp$  zu den Hyper-Ecken  $H$ .

Die 7 Ecken von  $\mathbf{Q}B$  sind:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3, & \quad b_1 + b_2 + b_4 + b_5, \\ b_3 - b_4 - b_5, & \quad b_1 + b_3 - b_5 + b_6, \\ b_2 + b_5 - b_6, & \quad b_2 + b_3 - b_4 - b_6, \\ b_1 + b_4 + b_6. & \end{aligned}$$

Mit Satz 5.15 gilt dann

$$\begin{aligned} G \cong B = & \quad (A_{12} \cap A_{13} \cap A_{14}) \quad (b_1 + b_2 + b_3) \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{23} \cap A_{24}) \quad (b_3 - b_4 - b_5) \\ + & \quad (A_{13} \cap A_{23} \cap A_{34}) \quad (b_2 + b_5 - b_6) \\ + & \quad (A_{14} \cap A_{24} \cap A_{34}) \quad (b_1 + b_4 + b_6) \\ + & \quad (A_{13} \cap A_{14} \cap A_{23} \cap A_{24}) \quad (b_1 + b_2 + b_4 + b_5) \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{14} \cap A_{23} \cap A_{34}) \quad (b_1 + b_3 - b_5 + b_6) \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{13} \cap A_{24} \cap A_{34}) \quad (b_2 + b_3 - b_4 - b_6). \end{aligned}$$

Führt man einen Basiswechsel (Anwendung von  $\phi^{-1}$ ) aus, erhält man die Eckendarstellung von  $G$ .

$$\begin{aligned} G = & \quad (A_{14} \cap A_{13} \cap A_{12}) \quad a \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{24} \cap A_{23}) \quad b \\ + & \quad (A_{13} \cap A_{23} \cap A_{34}) \quad c \\ + & \quad (A_{14} \cap A_{24} \cap A_{34}) \quad d \\ + & \quad (A_{13} \cap A_{14} \cap A_{23} \cap A_{24}) \quad (a + b) \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{14} \cap A_{23} \cap A_{34}) \quad (a + c) \\ + & \quad (A_{12} \cap A_{13} \cap A_{24} \cap A_{34}) \quad (a + d). \end{aligned}$$

Die Darstellung der Koeffizientenbereiche läßt sich noch etwas vereinfachen und es gilt

$$\begin{aligned} G = & \quad [A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap A_4)] \quad a \\ + & \quad [A_2 + (A_1 \cap A_3 \cap A_4)] \quad b \\ + & \quad [A_3 + (A_1 \cap A_2 \cap A_4)] \quad c \\ + & \quad [A_4 + (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \quad d \\ + & \quad [(A_1 \cap A_2) + (A_3 \cap A_4)] \quad (a + b) \\ + & \quad [(A_1 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4)] \quad (a + c) \\ + & \quad [(A_1 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3)] \quad (a + d). \end{aligned}$$

Seien  $\tau_1, \dots, \tau_4$  die Typen von  $A_1, \dots, A_4$ . Dann kommen nach Lemma 5.18 alle kritischen Typen als Typen der Summanden vor, sind also in der Menge

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} \tau_i \cup \bigcap_{j \notin I} \tau_j \mid \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, 2, 3, 4\} \right\}$$

enthalten.

**Lemma 6.8**

Sei  $G = \mathcal{G}[A_1, \dots, A_n]$  eine Bracketgruppe. Dann hat die mit der hier vorgestellten Methode entwickelte vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  mit  $G \subset_* D$  den Rang  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  und  $G$  eine Eckendarstellung mit  $2^{n-1} - 1$  Summanden.

**Beweis**

Die Hyper-Ecken von  $G$  sind immer von der Form  $\mathbb{Q}\langle x_1 + \dots + x_n, x_i \mid i \in I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = n - 2 \rangle$  mit Polaren  $x_i - x_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$ . Also gibt es  $m = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$  Hyper-Ecken. Es folgt der Rang der Gruppe  $D$ .

Die Relationenmatrix der divisiblen Hülle von  $G$  bezüglich der Zerlegungsbasis von  $D$  hat die Form  $((n - 1) \times m)$

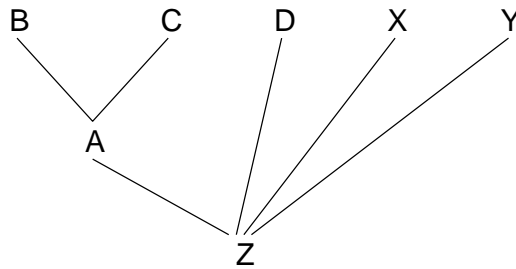
$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc} 1 & & & & 0 & -1 & \dots & \dots & -1 & & 0 \\ & \ddots & & & & 1 & & & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \ddots & & & -1 \\ 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Aus Ranggründen sind die ersten  $n - 1$  Einträge jeder Ecke entweder 0 oder 1. Somit ergeben sich  $2^{n-1} - 1$  Kombinationsmöglichkeiten, wobei nur Nullen nicht möglich ist. □

Die Butlergruppe des nächsten Beispiels stammt aus einer Arbeit von Mutzbauer [11, Prop. 1.3] siehe auch Mader [10, Example 3.15].

**Beispiel 6.9**

Seien  $\mathbb{Z} \subset A, B, C, D, X, Y \subseteq \mathbb{Q}_p$  für eine Primzahl  $p$  mit kritischen Typen  $\tau_A, \tau_B, \tau_C, \tau_D, \tau_X, \tau_Y$ . Weiter gelte  $A = B \cap C$ . Die Typenbeziehungen zueinander zeigt folgendes Hassediagramm.



Sei  $G = Aa + Bpb + Cpc + Dpd + X(a + b + d) + Y(c - d) \subsetneq \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b \oplus \mathbb{Q}c \oplus \mathbb{Q}d$ . Dann hat  $G$  eine Eckendarstellung der Form

$$\begin{aligned} &A(a) + A(a + b + c) + A(b + c) + pA(a + b) + pA(a + c) \\ &+ pB(b) + pC(c) + pD(d) + X(a + b + d) + Y(c - d) \\ &+ \mathbb{Z}(a - c + d) + \mathbb{Z}(b + d) + p\mathbb{Z}(a + b - c + d) + p\mathbb{Z}(b - c) + p\mathbb{Z}(a + d). \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.10**

Die Typuntergruppen des vorausgehenden Beispiels 6.9 sind für den nicht maximalen Typ  $\tau_A$  :

$$\begin{aligned} G(\tau_A) &= A(a) + A(a + b + c) + A(b + c) + pA(a + b) + pA(a + c) + pBb + pCc, \\ G^\sharp(\tau_A) &= \langle pBb, pCc \rangle_*^U = A(b + c) + pBb + pCc. \end{aligned}$$

Passende Butlerkomplemente  $G_{\tau_A}$  haben die Form  $A(a + k(b + c))$  mit  $0 \leq k < p$ . Da die übrigen Typen aus der Menge  $\tau_{max} = \{\tau_B, \tau_C, \tau_D, \tau_X, \tau_Y\}$  maximale Typen sind, d.h.  $G^\sharp(\tau) = 0$  für  $\tau \in \tau_{max}$ , sind die regulierenden Untergruppen

$$V_k = A(a + k(b + c)) + \underbrace{Bpb + Cpc + Dpd + X(a + b + d) + Y(c - d)}_{R:=} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{Z}(a + b + c) &\subseteq X(a + b + d) + Y(c - d) \\ Ap(b + c) &\subseteq Bpb + Cpc \end{aligned} \right\} \subseteq R.$$

Nach Lehrmann [8, Lemma 2.7] ist

$$V_k = A(a + k(b + c)) + R = \begin{cases} V_1 = A(a + b + c) + R & \text{für } k \equiv_p 1, \\ G = Aa + R & \text{für } k \not\equiv_p 1, \end{cases}$$

und die verschiedenen regulierenden Untergruppen von  $G$  sind:

$$\begin{aligned} V_0 &= A(a) + Bpb + Cpc + Dpd + X(a + b + d) + Y(c - d), \\ V_1 &= A(a + b + c) + Bpb + Cpc + Dpd + X(a + b + d) + Y(c - d). \end{aligned}$$

Diese sind hier wiederum Summen von Ecken. Man könnte also vermuten, daß sich die regulierenden Untergruppen immer als Summe von Ecken darstellen lassen.

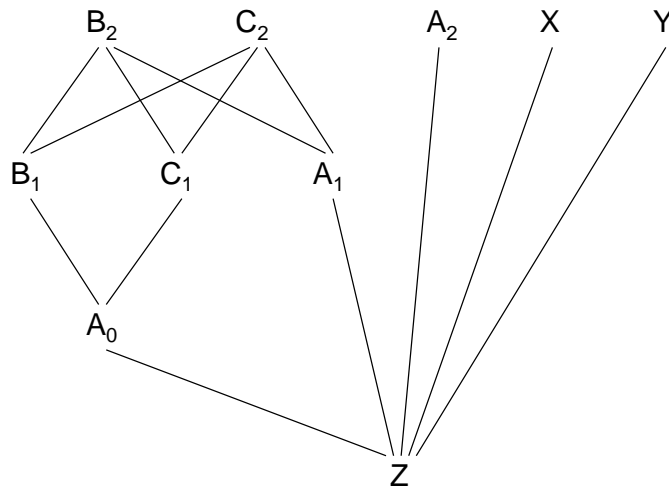
Betrachtet man die Butlergruppe aus Beispiel 6.12 so hat die dortige Butlergruppe  $H$  nach Lehrmann, Mutzbauer [8, Bemerkung 3.2] genau  $p$  verschiedene regulierende Untergruppen. Es darf also vermutet werden, daß bei passend groß gewählter Primzahl  $p$  die Anzahl der regulierenden Untergruppen größer als die Anzahl der Summanden der Eckendarstellung ist.

Bei den folgenden Butlergruppen von größerem Rang und Typenmengen wird nicht mehr die vollständige Eckendarstellung, sondern nur noch die Anzahl der Summanden in dieser Darstellung angegeben.

Die folgende Gruppe vom Rang 7 und kritischer Typenmenge der Mächtigkeit 9 stammt aus einem unveröffentlichtem Manuskript von Lehrmann und besitzt eine Regulatorkette der Länge 2.

**Beispiel 6.11**

Sei  $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, X, Y \subseteq \mathbb{Q}_p$  für eine Primzahl  $p$  mit einer Typenrelation nach folgendem Hassediagramm.



Sei

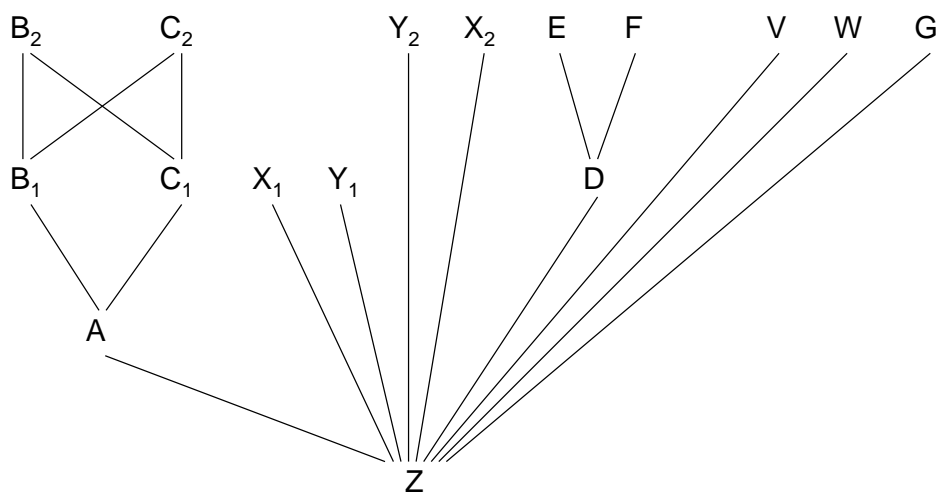
$$\begin{aligned}
 G &= p(A_0 a_0 + A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2 c_2) \\
 &\quad + X(p^2 a_0 + p a_1 + p b_1) + X(p a_1 + a_2 + b_2) + Y(p c_1 - p a_1) + Y(c_2 - a_2) \\
 &\subseteq \mathbb{Q} a_0 + \mathbb{Q} a_1 + \mathbb{Q} a_2 + \mathbb{Q} b_1 + \mathbb{Q} b_2 + \mathbb{Q} c_1 + \mathbb{Q} c_2.
 \end{aligned}$$

Dann hat die vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  mit  $G \subset_* D$  die Dimension 34 und die Eckendarstellung besteht aus 1129 Summanden. Alle Summanden vom Typ  $\mathfrak{t}(\mathbb{Z})$ , ein offensichtlich nicht-kritischer Typ, kann man weglassen, da sowieso  $G = G^\sharp(\mathfrak{t}(\mathbb{Z}))$  gilt. Damit läßt sich die Darstellung auf 104 Summanden vom Typ größer als  $\mathfrak{t}(\mathbb{Z})$  reduzieren.

Die folgende Butlergruppe stammt aus einer Arbeit von Lehrmann und Mutzbauer [8, Proposition 3.1] und hat eine Regulatorkette der Länge 2.

**Beispiel 6.12**

Seien  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E, F, G, V, W, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{Q}_p$  für eine Primzahl  $p$  mit einer Typenrelation nach folgendem Hassediagramm.



Weiter sei

$$\begin{aligned}
 H &= Aa + B_1pb_1 + C_1pc_1 + B_2pb_2 + C_2pc_2 + Dpd + Epe + Fpf + Gpg \\
 &\quad + X_1(pa + pb_1 + pd) + Y_1(pc_1 - pd) + X_2(pb_1 + b_2 + g) + Y_2(c_2 - g) \\
 &\quad + V(pd + e + f) + W(f - g) \\
 &\subseteq \mathbb{Q}a + \mathbb{Q}b_1 + \mathbb{Q}b_2 + \mathbb{Q}c_1 + \mathbb{Q}c_2 + \mathbb{Q}d + \mathbb{Q}e + \mathbb{Q}f + \mathbb{Q}g.
 \end{aligned}$$

Dann hat  $H$  den Rang 9 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 15.

Die vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  mit  $H \subset_* D$  hat die Dimension 138.

Nach Korollar 3.18 haben die Träger der Ecken maximal die Mächtigkeit  $138 - 9 + 1 = 128$ , also sind mit Lemma 2.1 mindestens  $\binom{138}{128} = \binom{138}{8} \approx 2,6 \cdot 10^{12}$  verschiedene Ecken zu erwarten. Im schlimmsten Falle gäbe es nach Lemma 3.10 maximal  $\binom{138}{138/2} = \binom{138}{69} \approx 2,3 \cdot 10^{40}$  Ecken. Offensichtlich ist hier eine Berechnung der Eckendarstellung aus Zeitgründen nicht sinnvoll.

## 6.4 Vergleich der Laufzeiten für die Beispiele

Sowohl für die Bestimmung der vollständig zerlegbaren Gruppe als auch der Ecken für den Schnitt werden die Hyper-Ecken eines Unterraumes  $U$  im projektiven Raum  $P$  bestimmt. Die folgende Tabelle gibt die jeweilige Laufzeit der Algorithmen in Sekunden für die verschiedenen Dimensionen von  $S$  und  $V$  an.

Dabei steht für jede betrachtete Gruppe  $G \cong U/K$  jeweils in der ersten Zeile eines Blockes  $\dim(P) + 1 = \dim(U) = \text{Anzahl der Summanden}$  und  $\dim(S) + 1 = \dim(K)$ . Die zweite Zeile gibt die jeweiligen Werte für den Schnitt der vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$  mit der divisiblen Hülle von  $G$  an, also  $\dim(D)$  und  $\dim(D) - \text{rank}(G)$ .

Für Bracketgruppen von Rang 4 bis 8 ergeben sich mit Mathematica auf einem PC mit Taktfrequenz von 2 GHz die folgenden Laufzeiten.

Dim $P + 1$	Dim $S + 1$	Anzahl (Hyper-)Ecken	Laufzeit (Sekunden)	
4	1	6	< 0,01	Bsp. 6.7
6	6-(4-1)= 3	7	< 0,01	
5	1	10	0,02	Bracketgrp. vom Rang 4
10	10-(5-1)= 4	15	0,05	
6	1	15	0,02	Bracketgrp. vom Rang 5
15	15-(6-1)= 10	31	0,09	
7	1	21	0,02	Bracketgrp. vom Rang 6
21	21-(7-1)= 15	63	3,19	
8	1	21	0,03	Bracketgrp. vom Rang 7
28	28-(8-1)= 21	127	41,63	

Wie man leicht sieht, wächst die Laufzeit zur Bestimmung einer Eckendarstellung für Bracketgruppen mindestens exponentiell mit dem Rang.



## 6 REINE DARSTELLUNG VON BUTLERGRUPPEN

Für die übrigen Beispiele ergeben sich folgende Laufzeiten.

Dim $P + 1$	Dim $S + 1$	Anzahl (Hyper-)Ecken	Laufzeit (Sekunden)	
6	2	10	0,01	Bsp. 6.9
10	$10-(6-2)=6$	15	0,06	
11	4	34	0,29	Bsp. 6.11
34	$34-(11-4)=27$	1129	1229,16	
15	6	138	3,32	Bsp. 6.12
138	$138-(15-6)=129$	$\gg 10^{12}$		

Das letzte Beispiel 6.12 zeigt sehr anschaulich, daß schon für eine Butlergruppe von relativ geringem Rang 6 mit 15 Summanden eine vollständige Bestimmung der Ecken nicht mehr möglich ist.

## 7 Betrachtung der Ergebnisse und Ausblicke

Aus der Eckendarstellung einer Butlergruppe lassen sich sofort alle Typuntergruppen sowie eine endliche Obermenge der kritischen Typen ablesen.

Es ergeben sich folgenden Gesichtspunkte:

- Der Aufwand für die Bestimmung einer Eckendarstellung wächst mindestens exponentiell mit dem Rang der Gruppe.

Der Tabelle der Laufzeiten für die Beispiele in Kapitel 6.4 zeigt dies anschaulich. Es ist daher für größere Ränge nicht mehr sinnvoll eine komplette Eckendarstellung zu entwickeln, sondern im allgemeinen nur noch diejenigen Ecken zu bestimmen, deren Typ größer als der Schnitt aller vorkommenden Typen, in den Beispielen war dies  $\mathfrak{t}(\mathbb{Z})$ , ist.

Sei zum Beispiel  $D = \bigoplus B_i b_i$  eine vollständig zerlegbare Gruppe mit  $\tau = \mathfrak{t}(B_1) \cap \mathfrak{t}(B_2) = \bigcap_i \mathfrak{t}(B_i)$  und reiner Untergruppe  $G$ . Dann hat in der Eckendarstellung von  $G$  jeder Summand mit einem Träger, der  $\{1, 2\}$  enthält, den Typ  $\tau$  und kann voraussichtlich in der Darstellung fortgelassen werden. Dies bringt in Beispiel 6.11 eine Verringerung von 1129 auf 104 Summanden.

- Die Zerlegungsbasis einer Eckendarstellung ist unabhängig von den vorkommenden Typen

Bei der Bestimmung einer Eckendarstellung von  $G = \sum_i A_i y_i$  fließen die Typen der  $A_i$ 's nicht ein. Eine Veränderung an einem Koeffizientenbereich  $A_i$  hat somit keine Auswirkungen auf die Zerlegungsbasis der vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$  mit  $G \subset_* D$  bzw. der Eckendarstellung von  $G$ .

- Bestimmung der regulierenden Untergruppen bzw. des Regulators aus der Eckendarstellung.

Die Kenntnis der kritischen Typenmenge und Typuntergruppen ist notwendig zur Bestimmung der verschiedenen Butlerkomplemente  $G_\tau$  für den kritischen Typ  $\tau$  in der Butlergleichung  $G(\tau) = G_\tau \oplus G^\sharp(\tau)$ . Die Summe  $\sum_{\tau \text{ kritisch}} G_\tau$  ist eine regulierende Untergruppe. Der Schnitt aller regulierenden Untergruppen der Regulator.

Es bleibt die Frage, inwieweit die Eckendarstellung die automatische Bestimmung aller regulierenden Untergruppen bzw. des Schnittes dieser Untergruppen, des Regulators, durch Algorithmen ermöglicht.

# A Mathematica Programme

## A.1 Datenstruktur

Die verwendeten Programme wurden in Mathematica [13] erstellt.

Mit den gegebenen Programmen können nicht alle torsionsfreien abelsche Gruppen endlichen Ranges behandelt werden. Es besteht die Einschränkung auf diejenigen Gruppen, deren Summanden in der Summendarstellung von Ringtyp sind, d.h. der Typ besitzt nur an endlich vielen Stellen einen von 0 verschiedenen Eintrag. Durch diese Einschränkung ist es möglich die Charakteristiken der Summanden zu notieren.

Sei  $A$  eine rationale Gruppe von Ringtyp. Dann wird die Charakteristik  $\chi(A)$  als Menge von Tupeln  $\{\{p, h_p^A(a) - o_p(a)\} \mid p \text{ prim}\}$  beschrieben. Dabei müssen nur alle Tupel mit  $h_p^A(a) - o_p(a) \neq 0$  angegeben werden.

Sei  $G = \sum_{i=1}^n A_i a_i \subset \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{Q} u_j$  mit  $a_i = \sum_{j=1}^k q_{ij} u_j$ . Dann wird  $G$  als Liste von Tupeln für jeden Summanden der Form  $\{\{q_{i1}, \dots, q_{ik}\}, \chi(A_i)\}$  dargestellt. Abstrakt wird also  $G$  in Mathematica dargestellt durch

$$\text{Transpose} \left[ \left( \begin{array}{ccc} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nk} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \chi(A_1) \\ \vdots \\ \chi(A_n) \end{array} \right) \right].$$

Zum Beispiel hat die Gruppe

$$G = \mathbb{Z}[3^-] a + 2\mathbb{Z}[3^-, 5^-] b + 2\mathbb{Z}[3^-, 7^-] c + 2\mathbb{Z}[11^-] d \\ + \mathbb{Z}[13^-] (a + b + d) + \mathbb{Z}[17^-] (c - d)$$

die Darstellung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \{1, 0, 0, 0\}, \{\{3, \infty\}\} \}, \\ \{ \{0, 1, 0, 0\}, \{\{2, -1\}, \{3, \infty\}, \{5, \infty\}\} \}, \\ \{ \{0, 0, 1, 0\}, \{\{2, -1\}, \{3, \infty\}, \{7, \infty\}\} \}, \\ \{ \{0, 0, 0, 1\}, \{\{2, -1\}, \{11, \infty\}\} \}, \\ \{ \{1, 1, 0, 1\}, \{\{13, \infty\}\} \}, \\ \{ \{0, 0, 1, -1\}, \{\{17, \infty\}\} \} \end{array} \right\}.$$

Das Ergebnis bei der Bestimmung der vollständig zerlegbaren Gruppe  $D = \bigoplus_{i=1}^m B_i b_i$  und der Unterraum  $S \subset \mathbb{Q}D$  mit  $G \cong D \cap S$  wird in einer ähnlichen Form dargestellt. Sei  $\{s_1, \dots, s_k\}$  ein Erzeugendensystem von  $S$  mit  $s_j = \sum_{i=1}^m r_{ij} b_i$ . Dann ist

$$\text{Transpose} \left[ \left( \begin{array}{ccc} r_{11} & \dots & r_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mk} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \chi(B_1) \\ \vdots \\ \chi(B_m) \end{array} \right) \right]$$

die Darstellung der vollständig zerlegbaren Gruppe  $D$  und des Unterraumes  $S$ . Dabei stellt die  $k$ -te Spalte von  $(r_{ij})$  das Bild der  $k$ -ten Zeile von  $(q_{ij})$  aus der Darstellung von  $G$  unter der Abbildung  $\phi$  aus Lemma 5.26 dar.

## A.2 Aufruf der Unterprogramme

Der Aufruf `Eckenbestimmung[G]` bestimmt zu  $G$  eine vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  (`VollstZerl`) und bestimmt dann eine Eckendarstellung von  $G$  bezüglich der Zerlegungsbasis von  $D$  (`Schnitt`). Durch einen Basiswechsel wird der Vergleich zur ursprünglichen Darstellung möglich (`BasisWechsel`).

```
Eckenbestimmung[GR_] :=
Block[{VZ, ST, BW},
  Do[
    VZ = VollstZerl[GR];
    ST = Schnitt[VZ];
    BW = BasisWechsel[VZ, ST];
  ];
  BW
]
```

Die Funktion `VollstZerl[G]` bestimmt mit Algorithmus 4.1 (`URErzB`) die Hyper-Ecken zu  $G$  und daraus die vollständig zerlegbare Gruppe  $D$  mit den zugehörigen Charakteristiken der Zerlegungsbasis.

```
VollstZerl[Xb_] :=
Block[ {G, GK, MO, MX},
  Do[
    G = Transpose[Transpose[Xb][[1]]]; (* Zerlegungsbasis *)
    GK = Transpose[Xb][[2]];          (* Charakteristiken *)
    Print["Erzeuge rank-1 Faktorgruppe"];
    MO = URErzeugB[NullSpace[G]];
    Print["Bestimme Typ der Faktorgruppen"];
    MX = Table[{MO[[j]], GetTypMax[MO[[j]], GK]}, {j, 1, Length[MO]}];
    Print["Vollst. Zerl :\n", GroupShow[MX]];
  ];
  MX
]
```

Die Funktion `Schnitt[S]` bestimmt über Hyper-Ecken die Ecken und dann die Charakteristiken der Zerlegungsbasis.

```
Schnitt[MX_] :=
Block[ {M, MT, L, X},
  Do[
```

## A MATHEMATICA PROGRAMME

```

M = Transpose[Transpose[MX][[1]]];
MT = Transpose[MX][[2]];
(* Bestimme Eckendarstellung *)
(* MX : { M, MT } *)
(* M : Unterraum S *)
(* MT : Charakteristik der Zerlegungsbasis *)

Print["Bestimme Ecken", M];
L = URErzeugB[NullSpace[M]];
(* Falls M bereits den gesamten Raum aufspannt,
   ist L leer, ist aber die Standardbasis *)
If[L == {}, L = IdentityMatrix[Dimensions[M][[2]]]];
Print[L];
Print["Bestimme Typen der Ecken"];
X = Table[{L[[j]], GetTyp[ L[[j]] , MT]},
  {j, 1, Dimensions[L][[1]]};
Print["Neue Eckendarstellung:\n", GroupShow[X]];
];
X
]

```

Die Funktion `BasisWechsel[G,S]` gibt die Darstellungsmatrix des Schnittes bezüglich der ursprünglichen Basis wieder indem ein passender Basiswechsel gesucht wird bei dem die Erzeugenden des Unterraumes  $S$  soweit möglich als Basis verwendet werden.

```

BasisWechsel[MX_, X_] :=
Block[ {M, MT, L, Y, MA, Xc},
  Do[
    M = Transpose[Transpose[MX][[1]]];
    MT = Transpose[MX][[2]];
    Print["Basiswechsel"];
    L = NullSpace[M];
    Y = Inverse[Join[M[[Range[Length[NullSpace[L]]]]], L]];
    MA = Transpose[Transpose[X][[1]].Y];
    While[(Traeg[MA[[Length[MA]]]] == {} && Length[MA] > 0),
      MA = Delete[MA, Length[MA]]
    ];
    Xc = Transpose[{Transpose[MA], Transpose[X][[2]]}];
    Print[GroupShow[Xc]];
  ];
  Xc
]

```

Die Funktion URErzeugB[S] bestimmt nach Algorithmus 4.1 die Polaren zu allen Hyper-Ecken von  $S$ .

```

URErzeugB[A_] :=
Block[{Ia,Ib,J,ende,m,n,Id,Ns,ok,L},
  L={};
  If[Length[A]==0,Return[{}]];
  n=Dimensions[A][[2]];
  Print["Dimension",n];
  Ns=NULLSpace[A];
  m=Length[Ns]-1;
  Id=IdentityMatrix[n];
  Ia=Range[1,n];
  Ib={};
  (* Falls in Erzeugnis von A schon U_{i}'s enthalten sind,
     entferne diejenigen Knoten, die diese U_{i}'S hinzufügen *)
  Map[(If[Apply[Plus,(Ns.Id[[Ia[#]]])]^2]==0,
        AppendTo[Ib,#];Print[#];
        ])&,Range[1,n]];
  Ia=Complement[Ia,Ib];
  n=Length[Ia];

  (* Durchlaufe alle Knoten in aufsteigender Reihenfolge *)
  If[n>0,J={1},J={}];
  (* Start bei Knoten 1 *)
  While[J!={},
    (* Schritt 4: Bestimme den zugehoerigen Raum T =Ns^{\bot} *)
    Ns=NULLSpace[Union[A,Id[[Ia[[J]]]]]];
    ok=True;
    (* Schritt 5 Test auf Existenz ein U_{i} *)
    Map[(If[Apply[Plus,(Ns.Id[[Ia[#]]])]^2]==0,ok=False)]&,
      Range[Last[J]+1,n]];
    If[ok,
      (* Hyper-Ecke erreicht ? *)
      If[Length[Ns]==1,
        (* Falls ja, merken *)
        L=Union[L,Ns],
        (* sonst naechsten Knoten vorbereiten *)
        J=Append[J,J[[-1]]]
      ];
    ];
  // Print["-",J];
  (* Naechsten mglichen Knoten whlen *)
  J[[-1]]++;

```

## A MATHEMATICA PROGRAMME

```

While[(Length[J]>0 && J[[-1]]>n-m+Length[J]),
  Do[
    J=Delete[J,-1];
    If[Length[J]>0,J[[-1]]++;];
  ];
];
];
L
]

```

Für die Bestimmung der Charakteristik der Summe  $\sum q_i A_i$  bzw. Schnitt  $\bigcap q_i^{-1} A_i$  von rationalen Gruppen wird `GetTypMax`[( $q_i$ ), ( $\chi(A_i)$ )] bzw. `GetTyp`[( $q_i$ ), ( $\chi(A_i)$ )] verwendet. Dabei wird zunächst die Charakteristik der Summanden und danach die Vereinigung `TypListMax` bzw. der Schnitt `TypList` bestimmt

```

GetTypMax[L_,K_]:=
Block[{A,B,k},
  A={};
  (* Bestimme Charakteristik der Summanden *)
  For[k=1,k<=Length[L],k++,
    If[L[[k]]!=0,
      Do[
        B=FactorInteger[1/Abs[L[[k]]]];
        A=Append[A,If[Length[B]==0,K[[k]],TypAdd[K[[k]],B ]]];
      ];
    ];
  (* Bestimme Charakteristik der Summe *)
  TypListMax[A]
]

```

```

GetTyp[L_,K_]:=
Block[{A,B,k},
  A={};
  (* Bestimme Charakteristik der zu schneidenden Gruppen *)
  For[k=1,k<=Length[L],k++,
    If[L[[k]]!=0,
      Do[
        B=FactorInteger[Abs[L[[k]]]];
        A=Append[A,If[Length[B]==0,K[[k]],TypAdd[K[[k]],B ]]];
      ];
    ];
  ];
]

```

```

(* Bestimme Charakteristik des Schnittes *)
TypListMin[A]
]

TypListMin[A_]:=
Block[{At,Bt,Index,idx},
  At=Transpose[Flatten[A,1]][[1]];
  Bt=Transpose[Flatten[A,1]][[2]];
  Index=Union[At];
  Table[{Index[[i]],
    idx=Flatten[Position[At,Index[[i]] ] ] ;
    If[Length[idx]==Length[A],Min[Bt[[idx]]],Min[Bt[[idx]],0]]},
    {i, 1, Length[Index]}
  ]
];

TypListMax[A_]:=
Block[{At,Bt,Index,idx},
  At=Transpose[Flatten[A,1]][[1]];
  Bt=Transpose[Flatten[A,1]][[2]];
  Index=Union[At];
  Table[{Index[[i]],
    idx=Flatten[Position[At,Index[[i]] ] ] ;
    If[Length[idx]==Length[A],Max[Bt[[idx]]],Max[Bt[[idx]],0]]},
    {i, 1, Length[Index]}
  ]
];

```



## Literatur

- [1] M. AIGNER. *Proofs from THE BOOK*. Springer, (1998).
- [2] D. M. ARNOLD UND C. VINSONHALER. *Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups II*. In *Abelian Group Theory, Lecture Notes in Mathematics*, Band 1006, Seiten 97–143. Springer Verlag, New York, (1983).
- [3] R. BAER. *Linear Algebra and Projective Geometry*. Academic Press, (1952).
- [4] U. BERGER. *Die Bildung reiner Hüllen in Butlergruppen*. Diplomarbeit, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, (1997).
- [5] M. C. R. BUTLER. *A class of torsion-free abelian groups of finite rank*. In *Proc. London Math. Soc.*, Band 15, Seiten 680–698. (1965).
- [6] L. FUCHS. *Infinite Abelian Groups I+II*. Academic Press, New York, (1970,1973).
- [7] H.-J. KOWALSKY. *Lineare Algebra*. 9. de Gruyter, (1979).
- [8] S. LEHRMANN UND O. MUTZBAUER. *Eine Butlergruppe mit Regulator-kette der Länge 2*. *Publ. Math.* 50, No.1-2, Seiten 37–55, (1997).
- [9] D. LUBELL. *A short proof of Sperner's theorem*. *J. Combinatorial Theory*, 1:299, (1966).
- [10] A. MADER, O. MUTZBAUER UND K. RANGASWAMY. *A Generalisation on Butler Groups*. In *Contemporary Mathematics*, Band 171, Seiten 257–275. (1994).
- [11] O. MUTZBAUER. *Regulating subgroups of Butler groups*. In *Abelian groups: Proc. 1991 Curaçao Conf., Notes Pure Appl. Math.*, Band 146, Seiten 209–217. Marcel Dekker, (1993).
- [12] E. SPERNER. *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*. In *Math. Zeitschrift*, Band 27, Seiten 544–548. (1928).
- [13] WOLFRAM RESEARCH INC. *Mathematica*. Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, Version 4, (1999).



# Index

- Antikette, 2
  - Antikette
    - maximale, 2
  - Basispunkt, 7
  - Bracketgruppe, 5
  - Butlergleichung, 5
  - Butlergruppe, 5
  - Charakteristik
    - Element, 3
    - Gruppe, 3
  - Co-Träger, 17
  - Darstellung, reine, 5
  - Durchstoßpunkt, 7
    - isolierter, 7
  - Ecke, 10
  - Eckendarstellung, 29
  - Erzeugendensystem, 6
  - hermite Normalform, 12
  - homogene Koordinaten, 7
  - homogene Koordinaten
    - gekürzt, 7
  - Homomorphismus, kanonischer, 32
  - Hülle
    - divisible, 3
    - projektive, 6
    - reine, 3
  - Hyper-Ecke, 18
  - Hyperebene, 6
  - Hyperebene
    - Basis-, 7
  - innerer Punkt, 7
  - Matrizen Äquivalenzen, 12
  - p-Höhe, 3
  - $p$ -Lokalisation, 3
  - p-Ordnung, 3
  - Polare, 17
  - projektiver Raum, 6
  - Punkt, 6
  - Punkt
    - innerer, 7
    - Rand-, 7
  - Punkte
    - konjugiert, 17
  - quasi-enthalten, 4
  - quasi-gleich, 4
  - quasi-hermite Form, 12
  - Quasi-Skalarprodukt, 16
  - Randpunkt, 7
  - Rang, 3
  - Rang-1-Gruppe, 3
  - rein, 3
  - reine Darstellung, 5
  - Relationenmatrix, 12
  - Träger, 4, 7
  - Typ, 3
  - Typen-Komplemente, 5
  - Typenmenge, 4
    - kritische, 5
  - Typuntergruppe, 4
  - Verbindungsraum, 6
  - Weg, 2
  - zerlegbar, vollständig, 3
  - Zerlegungsbasis, 4
-

## Bezeichnungsindex

$\beta_{\mathcal{B}}(X, Y)$	Quasi-Skalarprodukt von $X$ und $Y$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$
$\chi_A(x)$	Charakteristik von $x$ in $A$
$\chi(A)$	Charakteristik der Rang-1-Gruppe $A$
$\text{cotr}(H)$	Co-Träger der Hyperebene $H$
$G(\tau), G^*(\tau), G^\sharp(\tau)$	Typuntergruppen von $G$
$\mathcal{G}[A_1, \dots, A_n]$	Bracketgruppe
$h_p(x) = h_p^A(x)$	$p$ -Höhe von $x$ in $A$
$\mathcal{H}_S$	Menge der Hyper-Ecken von $S$
$\mathcal{M}_S, \mathcal{M}_{L \setminus S}$	Menge der Ecken von $S$ bzw. $L \setminus S$
$o_p(x)$	$p$ -Ordnung
$P_I$	Basis-Verbindungsraum
$\hat{P}_i$	Basis-Hyperebene
$\mathbb{Q}G$	divisible Hülle von $G$
$\mathbf{Q}G$	projektive Hülle von $G$
$\mathbb{Q}_p G$	$p$ -Lokalisation von $G$
$S^\perp$	Polare von $S$
$T_G$	Typenmenge von $G$
$\text{tr}(x), \text{tr}(X)$	Träger von $x$ bzw. des projektiven Punktes $X$
$\mathbf{t}_A(a)$	Typ von $a$ in $A$
$\mathbf{t}(A)$	Typ der Rang-1-Gruppe $A$
$A \subset_* B$	$A$ ist reine Untergruppe von $B$
$\langle M \rangle_*^A$	reine Hülle von $M$ (in $A$ )
$X \dot{\subset} Y$	$X$ quasi-enthalten in $Y$
$X \dot{=} Y$	$X$ quasi-gleich $Y$
$\Phi_G$	kanonischer Homomorphismus zu $G$

---