

# Chaossynchronisation in Netzwerken mit zeitverzögerten Kopplungen

Dissertation zur Erlangung des  
naturwissenschaftlichen Doktorgrades  
der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

vorgelegt von  
Anja Englert  
aus Würzburg



Würzburg 2011

Eingereicht am: 25.03.2011  
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

1. Gutachter: Prof. Wolfgang Kinzel (Betreuer)  
2. Gutachter: Prof. Haye Hinrichsen  
der Dissertation

1. Prüfer: Prof. Wolfgang Kinzel (Betreuer)  
2. Prüfer: Prof. Haye Hinrichsen  
3. Prüfer: Prof. Jean Geurts  
im Promotionskolloquium

Tag des Promotionskolloquiums: 22.07.2011

Doktorurkunde ausgehändigt am:

# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Chaossynchronisation in Netzwerken mit zeitverzögerten Kopplungen. Ein Netzwerk chaotischer Einheiten kann isochron und vollständig synchronisieren, auch wenn der Austausch der Signale einer oder mehreren Verzögerungszeiten unterliegt. In einem Netzwerk identischer Einheiten hat sich als Stabilitätsanalyse die Methode der Master Stability Funktion von Pecora und Carroll etabliert. Diese entspricht für ein Netzwerk gekoppelter iterativer Bernoulli-Abbildungen Polynomen vom Grade der größten Verzögerungszeit. Das Stabilitätsproblem reduziert sich somit auf die Untersuchung der Nullstellen dieser Polynome hinsichtlich ihrer Lage bezüglich des Einheitskreises. Eine solche Untersuchung kann beispielsweise numerisch mit dem Schur-Cohn-Theorem erfolgen, doch auch analytische Ergebnisse lassen sich erzielen.

In der vorliegenden Arbeit werden Bernoulli-Netzwerke mit einer oder mehreren zeitverzögerten Kopplungen und/oder Rückkopplungen untersucht. Hierbei werden Aussagen über Teile des Stabilitätsgebietes getroffen, welche unabhängig von den Verzögerungszeiten sind. Des Weiteren werden Aussagen zu Systemen gemacht, welche sehr große Verzögerungszeiten aufweisen. Insbesondere wird gezeigt, dass in einem Bernoulli-Netzwerk keine stabile Chaossynchronisation möglich ist, wenn die vorhandene Verzögerungszeit sehr viel größer ist als die Zeitskala der lokalen Dynamik, bzw. der Lyapunovzeit. Außerdem wird in bestimmten Systemen mit mehreren Verzögerungszeiten anhand von Symmetriebetrachtungen stabile Chaossynchronisation ausgeschlossen, wenn die Verzögerungszeiten in bestimmten Verhältnissen zueinander stehen. So ist in einem doppelt bidirektional gekoppeltem Paar ohne Rückkopplung und mit zwei verschiedenen Verzögerungszeiten stabile Chaossynchronisation nicht möglich, wenn die Verzögerungszeiten in einem Verhältnis von teilerfremden ungeraden ganzen Zahlen zueinander stehen. Es kann zudem Chaossynchronisation ausgeschlossen werden, wenn in einem bipartiten Netzwerk mit zwei großen Verzögerungszeiten zwischen diesen eine kleine Differenz herrscht.

Schließlich wird ein selbstkonsistentes Argument vorgestellt, das das Auftreten von Chaossynchronisation durch die Mischung der Signale der einzelnen Einheiten interpretiert und sich unter anderem auf die Teilerfremdheit der Zyklen eines Netzes stützt.

Abschließend wird untersucht, ob einige der durch die Bernoulli-Netzwerke gefundenen Ergebnisse sich auf andere chaotische Netzwerke übertragen lassen. Hervorzuheben ist die sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse eines Bernoulli-Netzwerkes mit den Ergebnissen eines gleichartigen Netzwerkes gekoppelter Halbleiterlasergleichungen, sowie die Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen eines Systems von Halbleiterlasern.



# Abstract

A network consisting of chaotic units can exhibit isochronal and complete synchronization even if the signals need certain delay times from one unit to another. A common method to analyze the stability of such a synchronization is the master stability function by Pecora and Carroll. For a network of coupled iterative Bernoulli maps the master stability function reduces to the solution of polynomials with degree of the largest delay time. Therefore analyzing the stability means analyzing the roots of these polynomials concerning their value with respect to the unit circle. This can be done numerically by using the Schur-Cohn theorem, but analytic results are possible, as well.

In this work Bernoulli networks with one or more time-delayed couplings and/or self-feedbacks are analyzed.

Parts of the stability region which are independent of the value of the delay times have been found. Furthermore systems with large time delays have been analyzed. There is no stable chaos synchronization if the delay time is much larger than the internal time scale or the Lyapunov time, respectively.

Stable synchronization can be excluded for certain systems with several delay times due to symmetry arguments concerning the ratios between the delay times. For example, a pair which is bidirectionally coupled with two delay times cannot exhibit stable chaos synchronization if these two delay times are in a ratio of relatively prime, odd numbers.

Furthermore, chaos synchronization can be excluded for a bipartite network in which two large delay times differ by a small amount.

Finally, a self consistent argument is presented which interprets chaos synchronization as a result of mixing signals of each unit in the network and which is supported by results of non-negative matrices concerning relatively prime cycles in a network.

The results of the Bernoulli networks are tested on several chaotic networks. There is a very good agreement of the analytic results of Bernoulli networks with networks of coupled semiconductor laser equations as well as a very good agreement with real life experiments of semiconductor laser systems.



# Liste der eigenen Veröffentlichungen

- A. Englert, S. Heiligenthal, W. Kinzel, and I. Kanter. Synchronization of chaotic networks with time-delayed couplings: An analytic study. *Phys. Rev. E* 83, 046222 (2011)
- I. Kanter, M. Zigzag, A. Englert, F. Geissler, and W. Kinzel. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. *Europhys. Lett.* 93, 60003 (2011)
- W. Kinzel, A. Englert and I. Kanter. Chaos synchronization with time-delayed couplings: Three conjectures. In *From physics to control through an emergent view.* ed. by L. Fortuna, A. Fradkov, M. Frasca, World Scientific (2010)
- A. Englert, W. Kinzel, Y. Aviad, M. Butkovski, I. Reidler, M. Zigzag, I. Kanter, and M. Rosenbluh. Zero lag synchronization of chaotic systems with time delayed couplings. *Phys. Rev. Lett* 104, 114102 (2010)
- M. Zigzag, M. Butkowski, A. Englert, W. Kinzel, and I. Kanter. Zero-lag synchronization and multiple time delays in two coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E* 81, 036215 (2010)
- W. Kinzel, A. Englert, and I. Kanter. On chaos synchronization and secure communication. *Phil. Trans. R. Soc. A* 368, 379-389 (2010)
- W. Kinzel, A. Englert, G. Reents, M. Zigzag, and I. Kanter. Synchronization of networks of chaotic units with time-delayed couplings. *Phys. Rev. E* 79, 056207 (2009)
- M. Zigzag, M. Butkovski, A. Englert, W. Kinzel and I. Kanter. Zero-lag synchronization of chaotic units with time-delayed couplings. *Europhys. Lett.* 85, 60005 (2009)





# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Chaos und Synchronisation . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Die Master Stability Funktion für Netzwerke mit Zeitverzögerung . .             | 4         |
| 2.3      | Das Bernoulli-Netzwerk . . . . .  | 6         |
| 2.4      | Lokaler Lyapunov-Exponent . . . . .   | 8         |
| <b>3</b> | <b>Von den Verzögerungszeiten unabhängige stabile und instabile Gebiete</b>     | <b>9</b>  |
| 3.1      | Chaotische Trajektorie des Gesamtsystems . . . . .                              | 9         |
| 3.2      | Instabilität einer Störungsmoden $k$ . . . . .                                  | 11        |
| <b>4</b> | <b>Große Verzögerungszeiten</b>   | <b>15</b> |
| 4.1      | Netzwerk mit einer Verzögerungszeit . . . . .                                   | 15        |
| 4.1.1    | Stabilitätsanalyse für allgemeine Netze und allgemeine $\tau$ . . .             | 15        |
| 4.1.2    | Allgemeine Netzwerke mit $\tau \rightarrow \infty$ . . . . .                    | 19        |
| 4.1.3    | Netzwerk ohne Rückkopplung und mit $\tau \rightarrow \infty$ . . . . .          | 20        |
| 4.2      | Netzwerk mit mehreren Verzögerungszeiten . . . . .                              | 21        |
| <b>5</b> | <b>Symmetrien im Phasenraum</b>   | <b>25</b> |
| 5.1      | Netzwerk mit zwei Zeitverzögerungen . . . . .                                   | 25        |
| 5.1.1    | Symmetrien in Netzwerken ohne lokalen Term . . . . .                            | 26        |
| 5.1.2    | Symmetrien in Netzwerken mit lokalem Term und $\tau_i \rightarrow \infty$ . .   | 30        |
| 5.2      | Netzwerk mit mehreren Zeitverzögerungen . . . . .                               | 31        |
| <b>6</b> | <b>Kleine Abweichungen der Verzögerungszeiten voneinander</b>                   | <b>37</b> |
| <b>7</b> | <b>Mischungsargument</b>  | <b>39</b> |
| 7.1      | Mischungsargument in stark zusammenhängenden Netzwerken . . . .                 | 39        |
| 7.2      | Mischungsargument in zusammenhängenden Netzwerken . . . . .                     | 42        |
| 7.3      | Mischungsargument und optimale Kopplungsparameter . . . . .                     | 44        |
| 7.4      | Mischungsargument und Potenzen der Kopplungsmatrix . . . . .                    | 49        |
| 7.5      | Mischungsargument in Netzwerken mit mehreren Verzögerungszeiten                 | 50        |
| <b>8</b> | <b>Exemplarische Darstellung der Ergebnisse in anderen chaotischen Systemen</b> | <b>55</b> |
| 8.1      | Rössler-Netzwerk ohne Rückkopplung mit großer Verzögerungszeit .                | 56        |

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 8.2      | Logistische Abbildung mit zwei Verzögerungszeiten . . . . .  | 57        |
| 8.3      | Lang-Kobayashi-Gleichungen mit zwei Verzögerungszeiten . . . . .   | 59        |
| 8.3.1    | Die Jacobi-Matrizen der Lang-Kobayashi-Gleichungen . . . . .   | 59        |
| 8.3.2    | Bernoulli, Lang-Kobayashi und experimentelle Ergebnisse in<br>einem System mit zwei Verzögerungszeiten . . . . . | 63        |
| <b>9</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>  | <b>65</b> |
| 9.1      | Zusammenfassung . . . . .  | 65        |
| 9.2      | Ausblick . . . . .   | 66        |
| <b>A</b> | <b>Anhang</b>  | <b>67</b> |
| A.1      | Master Stability Funktion anhand eines Beispiels . . . . .   | 67        |
| A.2      | Schur-Cohn-Theorem . . . . .   | 71        |

# 1 Einführung

Ein chaotisches System reagiert auf geringe Änderungen seiner Anfangsbedingungen äußerst empfindlich [1]. Entwickeln sich zwei oder mehr chaotische Einheiten mit geringfügigen Abweichungen ihres Startzustandes voneinander, so befinden sie sich innerhalb kurzer Zeit in völlig unterschiedlichen Zuständen. Dieses exponentielle Anwachsen kleiner Unterschiede wurde erstmals von E. N. Lorenz vor einem halben Jahrhundert im Rahmen computerbasierter Wettervorhersagen entdeckt [2] und ist seither als sogenannter Schmetterlingseffekt bekannt geworden. Setzt man sich mit dem Wetter, der Populationsdynamik von Tieren oder der Börse als chaotischen Systemen auseinander, erstaunt es, dass es möglich ist, chaotische Systeme zu synchronisieren. Hierbei werden chaotische Einheiten unidirektional oder bidirektional über eine oder mehrere ihrer Variablen miteinander gekoppelt und können so unter bestimmten Bedingungen in bestimmten Parameterbereichen synchronisieren [3, 4]. Kleine Abweichungen zwischen den Einheiten führen demnach nicht mehr zu divergierenden Zuständen, vielmehr schrumpfen die Differenzen zwischen den Trajektorien, und die Einheiten folgen einer gemeinsamen chaotischen Dynamik [5–8].

Handelt es sich nicht um instantane, sondern um zeitverzögerte Kopplungen, so kann die Synchronisation zeitversetzt stattfinden [9], jedoch abhängig vom Aufbau des Netzes auch isochron [10]. Des Weiteren kann Phasensynchronisation [4] oder verallgemeinerte Synchronisation [5] auftreten, wobei bei letzterer ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Trajektorien besteht, diese jedoch im Allgemeinen nicht identisch sind. Eine isochrone Synchronisation der Trajektorien wird im Allgemeinen als vollständige Synchronisation bezeichnet. In dieser Arbeit wird ausschließlich die vollständige Synchronisation behandelt.

Ein beliebtes physikalisches System zur experimentellen Untersuchung von Chaossynchronisation sind Netzwerke gekoppelter chaotischer Halbleiterlaser [11–16]. Diese zeichnen sich vor allem durch ihre hervorragende Eignung zur Nachrichtenübertragung aus [14, 17–22], vor allem aufgrund der möglichen hohen Datenrate verglichen mit elektronischen Schaltungen [20, 21]. Die Möglichkeit, Nachrichten per Chaossynchronisation in den bereits vorhandenen Glasfasernetzen zu verschicken, wie sie in [16] experimentell über eine Entfernung von 120 km überprüft wurde, macht die chaotischen Halbleiterlaser zu einem vielversprechenden Forschungsgegenstand. Verglichen mit der herkömmlichen Methode der Nachrichtenübertragung konventioneller Laser bietet die Chaossynchronisation das Potential abhörsicherer Kommunikation [23–27]. Ein weiteres aktives Feld in der Chaossynchronisation ist die Verwendung synchronisierter chaotischer Einheiten als Modell für neurobiologische Phänomene [28–31].

Eine weitverbreitete Methode, die Stabilität der Chaossynchronisation zu ana-

lysieren, ist die Berechnung der zur Synchronisationsmannigfaltigkeit transversalen Lyapunov-Exponenten [32–34]. Stabile Chaossynchronisation zeichnet sich hierbei durch negative transversale Lyapunov-Exponenten aus. Besteht das Netzwerk aus identischen Einheiten, so hat sich der Formalismus der Master Stability Funktion (MSF) etabliert [35], bei welchem Abweichungen der Einheiten von der Synchronisationsmannigfaltigkeit nach den Eigenvektoren der Kopplungsmatrix entwickelt werden. Die Gleichungen werden auf diese Weise voneinander entkoppelt. Es lassen sich Aussagen über die einzelnen Störungsmoden treffen, welche mit der Topologie des Netzes zusammenhängen [36–38]. Inzwischen wurde dieser Formalismus auch auf Netzwerke mit nicht identischen Einheiten ausgeweitet [39]. Die in [35] vorgestellte MSF ist für instantane Kopplungen ausgelegt. Sowohl in Netzwerken aus Halbleiterlasern, als auch in Populationen von Neuronen benötigt das Signal jedoch eine gewisse Verzögerungszeit um von einer Einheit zur nächsten zu gelangen. Aus diesem Grund ist eine Betrachtung von Chaossynchronisation in Netzwerken mit zeitverzögerten Kopplungen von Bedeutung. In [28] wurde die MSF mit einer Verzögerungszeit erweitert; auch sind Netzwerke mit mehr als einer Verzögerungszeit Gegenstand aktueller Forschung [40, 41].

Im Rahmen der Synchronisation chaotischer Einheiten gibt es verschiedene Kopplungsmodelle.

In der Chaossteuerung (*chaos control*) wird vom zeitverzögerten Signal das instantane Signal der Einheit abgezogen [42–44]. Hierdurch wird das System auf eine periodische Trajektorie gezwungen, das chaotische Verhalten wird unterdrückt. Man spricht von einer nichtinvasiven Kopplung, da der Kontrollterm auf der erwünschten Trajektorie verschwindet.

Eine weitere nichtinvasive Kopplung ist die diffusive Kopplung. Hier wird vom zeitverzögerten Kopplungsterm der instantane Teil des Signals nicht abgezogen. Die Topologie des Netzwerkes wird jedoch durch eine Laplace-Matrix beschrieben, die Trajektorie des Netzwerkes entspricht somit auf der Synchronisationsmannigfaltigkeit der Trajektorie einer ungekoppelten chaotischen Einheit [45, 46].

In einem Netzwerk aus Halbleiterlasern wird im Allgemeinen eine invasive Kopplung verwendet. Die Rückkopplung eines Teils des Laserstrahls in den Resonator sorgt für eine chaotische Trajektorie der Laser [12, 47]. Die Kopplungen führen zur Chaossynchronisation, in der sich das gesamte System durch eine gemeinsame chaotische Dynamik auszeichnet. Inspiriert von diesen gekoppelten Halbleiterlasern werden in dieser Arbeit Netzwerke von chaotischen Einheiten mit zeitverzögerten invasiven Kopplungen betrachtet. Um analytische Ergebnisse zu erzielen, werden Netzwerke gekoppelter iterativer Bernoulli-Abbildungen untersucht. Ein ausführlicher Vergleich zwischen einem solchen Netzwerk und gekoppelten Lasergleichungen ist in [48] zu finden, in der vorliegenden Arbeit wird ein solcher Vergleich anhand eines Beispiels angedeutet.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Chaos und Synchronisation

Ein chaotisches System zeichnet sich dadurch aus, dass kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen zu gravierenden Veränderungen im Verhalten des Systems führen. Dieser Effekt wurde erstmals von E. N. Lorenz im Rahmen von computerbasierten Wettervorhersagen entdeckt [2]. Da sich bei realen physikalischen Systemen Anfangsbedingungen nie beliebig genau angeben lassen, ist es von Interesse, wie diese Systeme auf kleine Abweichungen in ihren Anfangsbedingungen reagieren [49, S. 55]. Hierfür untersucht man Modellsysteme auf ihre Stabilität. Ein geeignetes Werkzeug hierfür sind die Lyapunov-Exponenten. Mit ihnen lässt sich exponentiell divergentes oder konvergentes Verhalten benachbarter Trajektorien im Phasenraum untersuchen. In chaotischen Systemen spielen hierbei seltsame Attraktoren eine wichtige Rolle; sie ziehen zwar alle Trajektorien in einem gewissen Einzugsbereich an, auf dem Attraktor selbst entfernen sich jedoch Trajektorien, welche nahe beieinander lagen, exponentiell voneinander [49].

Man betrachte eine eindimensionale iterative chaotische Abbildung

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.1)$$

Der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  dieser Abbildung wird nun definiert als die mittlere exponentielle Divergenz oder Konvergenz benachbarter Punktfolgen [49]

$$|\delta x_t| \approx e^{\lambda t} |\delta x_0| \quad (2.2)$$

für  $t \rightarrow \infty$  und  $|\delta x_0| \rightarrow 0$ .  $x_t$  ist hierbei die dynamische Variable des Systems. Die Ableitung der Abbildung lautet  $f'(x)$ . Es ist also

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.3)$$

Ein positiver Lyapunov-Exponent ist somit notwendig für chaotisches Verhalten einer Abbildung. Betrachtet man nun ein Netzwerk solch chaotischer Abbildungen, wie in Gl. (2.4) beschrieben, in der die Dynamik der einzelnen Einheiten sowohl einen lokalen Abbildungsterm aufweisen, als auch einen oder mehrere Kopplungsterme, so lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen Synchronisation beobachten [3]. In dieser Arbeit wird ausschließlich die vollständige isochrone Synchronisation untersucht, d. h. die Trajektorien der einzelnen Einheiten stimmen zeitgleich überein. Doch auch Phasensynchronisation, zeitverschobene Synchronisation oder verallgemeinerte

Synchronisation sind Gegenstand aktueller Forschung [4, 27, 31, 50–56]. Die Stabilität der Synchronisation hängt dabei zum einen von den Kopplungsparametern ab, wobei diese zeitlich variabel sein können [57, 58], von der verwendeten Abbildung, und von der Topologie des Netzwerkes. Im Zusammenhang mit der Topologie des Netzwerkes sind es vor allem die spektralen Eigenschaften der Kopplungsmatrix, welche die Synchronisation maßgeblich beeinflussen. So skaliert die Synchronisationszeit invers mit dem zweitgrößten Eigenwert der Kopplungsmatrix [5]. Der zweitgrößte Eigenwert beeinflusst außerdem maßgeblich die Größe des Synchronisationsgebietes im Kopplungsparameterraum, wie in Abschnitt 2.2 erläutert wird.

## 2.2 Die Master Stability Funktion für Netzwerke mit Zeitverzögerung

Die gängigste Methode zur Untersuchung der Stabilität von Chaossynchronisation in Netzwerken identischer Einheiten ist die *Master Stability Funktion* (MSF) [5, 59]. Diese ursprüngliche von Pecora und Carroll vorgestellte Funktion [35] liefert ein notwendiges Kriterium für die vollständige Synchronisation eines chaotischen Netzwerkes mit  $N$  identischen Einheiten und Kopplungen ohne Zeitverzögerung<sup>1</sup>. Die Kopplungsfunktionen sind hierbei für alle Einheiten gleich, das Kopplungsschema linear. Um die MSF anzuwenden, werden die dynamischen Gleichungen des Systems um eine Abweichung von der Synchronisationsmannigfaltigkeit (SM) linearisiert. Durch die Diagonalisierung der Kopplungsmatrix entkoppelt man das Gleichungssystem in  $N$  unabhängige Gleichungen. Jede dieser Gleichungen entspricht einer der Störungsmoden  $k$  bezüglich der SM. Eine der Störungsmoden liegt hierbei parallel zur SM, die anderen liegen transversal dazu.

Inzwischen wurde die MSF auch auf Netzwerke mit nichtidentischen Einheiten angewandt [39, 60], in [28] wurde sie um Kopplungen mit Zeitverzögerungen erweitert. Des Weiteren wurde mit der MSF Untergittersynchronisation, bzw. Clustersynchronisation untersucht [37, 38].

In der vorliegenden Arbeit werden Netzwerke identischer Einheiten, betrachtet. Um analytische Aussagen zu erzielen, beschränken wir uns in Kapitel 3-7 auf Netzwerke der iterativen Bernoulli-Abbildung. Sowohl die interne Dynamik, als auch Rückkopplung und Kopplung werden hierbei durch die selbe Funktion  $f(x)$ , mit  $x \in [0, 1]$ , beschrieben, siehe Gl. (2.4). Die Netzwerke weisen  $M$  verschiedene Verzögerungszeiten  $\tau_l$  auf, wobei  $l = 1, \dots, M$ . Des Weiteren werden invasive Kopplungen verwendet, für die Kopplungsmatrizen  $G_l$  gilt also  $\sum_j G_{l,ij} \neq 0$ . Eine invasive Kopplung verändert die Trajektorie des gekoppelten Systems, d. h. die Dynamik des synchronisierten Netzes entspricht nicht der des ungekoppelten Systems, wie es bei der diffusiven Kopplung der Fall ist. Hierdurch ändert sich die Stabilitätsfunktion. Eine Ausnahme bildet hierbei ein Netzwerk aus Bernoulli-Einheiten. Durch die konstante Ableitung dieser Abbildung ist die Stabilitätsfunktion eines Netzes auch bei invasiver Kopplung gleich der einer ungekoppelten Einheit mit gleichen Parametern. Man

---

<sup>1</sup>siehe Anhang A.1

beachte, dass ein Großteil der Literatur zum Thema Synchronisation, bzw. spektraler Graphentheorie [7, 61–64], Netzwerke behandelt, in denen  $\sum_j G_{l,ij} = 0$  gilt. Gerade im Zusammenhang mit gekoppelten Halbleiterlasern [8, 13–16, 19, 25, 50, 65–76] ist es jedoch von Interesse, Netzwerke mit invasiven Kopplungen zu untersuchen.

Die Dynamik einer Einheit  $x_t^i \in [0, 1]$  in einem Netzwerk mit  $N$  Einheiten zum diskreten Zeitschritt  $t$  lässt sich wie folgt beschreiben

$$x_t^i = \eta_0 f(x_{t-1}^i) + \sum_l^M \left[ \eta_l f(x_{t-\tau_l}^i) + \sigma_l \sum_j^N G_{l,ij} f(x_{t-\tau_l}^j) \right] \quad (2.4)$$

Es ist hierbei  $i$  mit  $i = 1, \dots, N$  der Index der Einheit. Jede der Einheiten verfügt über eine interne Dynamik  $f(x_{t-1}^i)$ , die mit  $\eta_0$  gewichtet ist. Des Weiteren ist die Einheit über  $M$  verschiedene Verzögerungszeiten  $\tau_l$  mit sich selbst (Rückkopplungen) und mit anderen Einheiten (Kopplungen) verbunden. O. B. d. A. gelte, dass  $\tau_M$  die größte Verzögerungszeit sei, und  $\tau_M > \tau_{M-1} > \dots > \tau_1$ . Hierbei werden die Rückkopplungen mit  $\eta_l$  gewichtet, die Kopplungen mit  $\sigma_l$ . Zu jeder Kopplung gehört eine Kopplungsmatrix  $G_l$ , wobei es für die Anwendung der Master Stability Funktion notwendig ist, dass alle  $G_l$  miteinander kommutieren um ein gemeinsames Set von Eigenvektoren, also Eigenstörungen, zu gewährleisten. Die Kopplungsmatrizen sind normalisiert mit  $\sum_j G_{l,ij} = 1$  und es gilt  $G_{ij} \geq 0$ . Da Rückkopplungen in  $G_l$  nicht enthalten sind, sondern in einem gesonderten Term aufgeführt werden, gilt  $G_{l,ii} = 0$ .

Die vollständige isochrone Synchronisation  $x_t^1 = \dots = x_t^N = s_t$  ist eine Lösung von Gl. (2.4). Die synchronisierte Trajektorie  $s_t$  ist hierbei gegeben durch

$$s_t = \eta_0 f(s_{t-1}) + \sum_l^M (\eta_l + \sigma_l) f(s_{t-\tau_l}) \quad (2.5)$$

Für die Stabilitätsanalyse der Synchronisation wird nun Gl. (2.4) um eine kleine Störung  $\delta x_t^i = x_t^i - s_t$  der SM linearisiert. Man erhält

$$\delta x_t^i = \eta_0 f'(s_{t-1}) \delta x_{t-1}^i + \sum_l^M \left[ \eta_l f'(s_{t-\tau_l}) \delta x_{t-\tau_l}^i + \sum_j^N \sigma_l G_{l,ij} f'(s_{t-\tau_l}) \delta x_{t-\tau_l}^j \right] \quad (2.6)$$

Für ein Netzwerk aus  $N$  Einheiten ergeben sich  $N$  gekoppelte lineare Gleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten. Da die Kopplungsmatrizen  $G_l$  alle miteinander kommutieren, können diese diagonalisiert werden<sup>2</sup>. Die Kopplungsmatrizen haben hierbei die Eigenwerte  $\gamma_{l,k}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, \dots, M$ , welche komplex sein können, wenn die Kopplungsmatrizen nicht symmetrisch sind. Die  $N$ -dimensionale Störung  $\delta \mathbf{x}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N)$  kann nun in den Eigenraum der gemeinsamen Eigenvektoren  $\mathbf{w}_k$  der Kopplungsmatrizen projiziert werden. Für jede Störungsmode  $k$  erhält man

<sup>2</sup>zur Synchronisation in nicht diagonalisierbaren Netzwerken siehe [77]

mit dem Ansatz  $\delta \mathbf{x}_t = \xi_{k,t} \mathbf{w}_k$  eine Gleichung für die Amplitude  $\xi_{k,t}$  der Störungsmode zum Eigenwert  $\gamma_{k,l}$  der Kopplungsmatrix  $G_l$ . Diese Gleichung lautet

$$\xi_{k,t} = \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) f'(s_{t-\tau_l}) \xi_{k,t-\tau_l} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l,t-\tau_l} \xi_{k,t-\tau_l} \quad (2.7)$$

wobei per Definition  $\sigma_0 = 0$  und  $\tau_0 = 1$  und  $\beta_{k,l,t-\tau_l} = (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) f'(s_{t-\tau_l})$  sei.

Die Kopplungsmatrizen  $G_l$  sind normiert, so dass  $\sum_j G_{ij} = 1$  ist. Es folgt für solche Matrizen aus dem Perron-Frobenius-Theorem [78], dass der Eigenwert mit dem größten Betrag stets  $\gamma_0 = 1$  ist und zum Eigenvektor  $\mathbf{w}_0 = (1, 1, \dots, 1)$  gehört. Die Störungsmode zu  $k = 0$  liegt also parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit. Alle anderen Störungsmoden  $k > 0$  liegen transversal zur Synchronisationsmannigfaltigkeit.

Man nehme nun an, dass sich die Störungsmode  $\xi_{k,t}$  gemittelt zeitlich wie folgt entwickelt

$$\|\xi_{k,t}\| \sim e^{\lambda_{\max} t} \quad (2.8)$$

Die Störungsmode  $k$  ist somit stabil, falls gilt, dass der Lyapunov-Exponent  $\lambda_{\max} < 0$  und somit  $\|\xi_{k,t}\| \rightarrow 0$ . Man bezeichnet  $\lambda_{\max}$  für  $k > 0$  als Master Stability Funktion (MSF), welche von den in Gl. (2.7) aufgeführten Parametern  $\beta_{k,l,t-\tau_l}$  abhängt<sup>3</sup>.

## 2.3 Das Bernoulli-Netzwerk

Um analytische Ergebnisse zu erzielen, werden in den folgenden Kapiteln Netzwerke aus Bernoulli-Einheiten untersucht. In diesen Netzwerken werden interne Dynamik, Rückkopplungs- und Kopplungsfunktionen der einzelnen Einheiten mit Hilfe der Bernoulli-Abbildung beschrieben. Diese lautet

$$f(x) = (\alpha x) \bmod 1 \quad (2.9)$$

Die Bernoulli-Abbildung zeigt für  $\alpha > 1$  chaotisches Verhalten. Der Verlauf der Abbildung ist in Abb. 2.1 dargestellt.

Der Vorteil der Bernoulli-Abbildung für das Erlangen analytischer Ergebnisse liegt darin, dass die Ableitung als konstant angesehen werden kann, d. h.  $f'(s_t) = \alpha$ . Die Sprungstelle kann für die Berechnung der Steigung vernachlässigt werden [36]. Daraus folgt, dass sich Gl. (2.7) wie folgt vereinfacht

$$\xi_{k,t} = \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha \xi_{k,t-\tau_l} \quad (2.10)$$

Auf diese Weise wird mit dem Ansatz  $\xi_{k,t} = z_k^t \xi_{k,0}$  aus Gl. (2.10) das Polynom

<sup>3</sup>Man beachte hierbei, dass für die oft gewählte diffusive Kopplung [5] der Term  $f'(s_{t-\tau_l})$  nicht von der gewählten Kopplung abhängt, und somit in diesem Fall die MSF als Funktion von  $\tilde{\beta}_{k,l} = (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l})$  dargestellt wird.



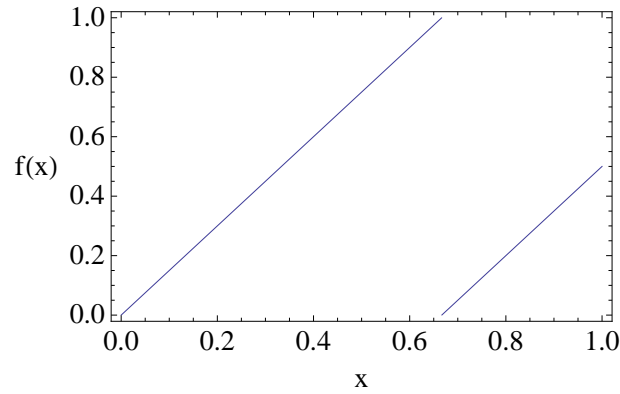


Abbildung 2.1: Bernoulli-Abbildung  $f(x) = (\alpha x) \bmod 1$  für  $\alpha = 1.5$

$$z_k^{\tau_M} = \sum_{l=0}^{M-1} (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha z_k^{\tau_M - \tau_l} = \sum_{l=0}^{M-1} \beta_{k,l} z_k^{\tau_M - \tau_l} \quad (2.11)$$

wobei  $\beta_{k,l} = (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha$ .

Die Stabilität der Störungsmoden  $k$  ist genau dann gewährleistet, wenn alle Lösungen des Polynoms (2.11) zum Eigenwert  $\gamma_k$  und vom Grade  $\tau_M$  innerhalb des Einheitskreises liegen. Diese Lösungen des Polynoms werden mit  $z_{k,r}$  bezeichnet, wobei  $r = 1, \dots, \tau_M$  der Index der Lösungen ist. Entscheidend für eine *stabile Chaossynchronisation* sind folgende Bedingungen: Es sollen Parameter  $\beta_{k,l}$  gefunden werden, so dass

1. die Störungsmoden  $k = 0$ , welche parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit liegen, instabil ist. Das bedeutet, dass zur Störungsmoden  $\gamma_{0,l} = 1$  mit Index  $l = 1, \dots, M$ , es mindestens eine Lösung  $|z_{0,r_m}| > 1$  geben muss. Ist dies erfüllt, ist die Trajektorie des synchronisierten Netzes chaotisch.
2. um eine stabile vollständige und isochrome Synchronisation zu gewährleisten müssen außerdem alle Störungsmoden  $k > 0$ , welche transversal zur Synchronisationsmannigfaltigkeit liegen, stabil sein. Das bedeutet, dass sämtliche Lösungen  $z_{k,r}$  aller anderen Störungsmoden zu  $\gamma_k (k > 0)$  im Einheitskreis liegen müssen, also  $|z_{k,r}| < 1$ . Dies entspricht einer negativen MSF, die für ein Bernoulli-Netzwerk definiert ist als

$$\lambda = \max_{k>0, r} \ln |z_{k,r}| \quad (2.12)$$

Eine Möglichkeit, zu überprüfen, ob alle Lösungen eines Polynoms innerhalb des Einheitskreises liegen, ist die Anwendung des Schur-Cohn-Theorems<sup>4</sup> [79].

<sup>4</sup>siehe Anhang A.2

Liegen die Lösungen  $z_{k,r}$  nicht für alle Störungsmoden  $\gamma_k (k > 0)$  im Einheitskreis, sondern für einige  $k > 0$  außerhalb, so kann es zwar nicht zur vollständigen Synchronisation, aber zur Untergittersynchronisation, bzw. Clustersynchronisation, kommen [36–38], wie in Kap. 7 gezeigt wird.

## 2.4 Lokaler Lyapunov-Exponent

Für einige Aussagen dieser Arbeit ist es notwendig, den Begriff des lokalen Lyapunov-Exponenten einzuführen.

Der lokale Lyapunov-Exponent ist definiert als der Lyapunov-Exponent, welcher sich aus der Stabilitätsgleichung eines Teiles des Netzwerkes berechnen lässt, jedoch mit der Trajektorie des Gesamtnetzwerkes. Man betrachte z. B. ein Netzwerk mit zwei Verzögerungszeiten,  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .  $\tau_1$  gehöre zur Rückkopplung,  $\tau_2$  zu einer Kopplung im Netzwerk. Die Dynamik des Netzwerkes wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$x_t^i = \eta_0 f(x_{t-1}^i) + \eta_1 f(x_{t-\tau_1}^i) + \sigma_2 \sum_j^N G_{ij} f(x_{t-\tau_2}^j) \quad (2.13)$$

Für die Stabilitätsbetrachtung wird entsprechend Gl. (2.6) die folgende Gleichung verwendet

$$\delta x_t^i = \eta_0 f'(s_{t-1}) \delta x_{t-1}^i + \eta_1 f'(s_{t-\tau_1}) \delta x_{t-\tau_1}^i + \sigma_2 \sum_j^N G_{ij} f'(s_{t-\tau_2}) \delta x_{t-\tau_2}^j \quad (2.14)$$

$s_t$  ist die Trajektorie des synchronisierten Netzwerkes. Der lokale Lyapunov-Exponent der ungekoppelten Einheit wird nun aus folgender Gleichung gewonnen

$$\delta x_t^i = \eta_0 f'(s_{t-1}) \delta x_{t-1}^i \quad (2.15)$$

wobei zu beachten ist, dass sowohl die verwendeten Parameter als auch die synchronisierte Trajektorie die des vollständigen Netzes aus Gl. (2.13) sind.

Der lokale Lyapunov-Exponent der ungekoppelten Einheit mit Rückkopplung wird hingegen aus folgender Gleichung berechnet

$$\delta x_t^i = \eta_0 f'(s_{t-1}) \delta x_{t-1}^i + \eta_1 f'(s_{t-\tau_1}) \delta x_{t-\tau_1}^i \quad (2.16)$$

Für das Bernoulli-Netzwerk ist  $f'(s_t) = \alpha$  konstant. Dass die invasive Kopplung die Trajektorie der Synchronisationsmannigfaltigkeit ändert, spielt für die Berechnung der Lyapunov-Exponenten somit keine Rolle. Bei anderen Abbildungen, bzw. bei anderen chaotischen Systemen wie beispielsweise den gekoppelten Lang-Kobayashi-Gleichungen ist dies jedoch nicht der Fall<sup>5</sup>.

So wird der lokale Lyapunov-Exponent der ungekoppelten Einheit eines Bernoulli-Netzwerkes laut Gl. (2.15) aus  $\beta_0 = \eta_0 \alpha$  berechnet, ist also negativ, wenn  $\beta_0 < 1$  und positiv, wenn  $\beta_0 > 1$ .

<sup>5</sup>siehe noch zu veröffentlichende Arbeit von S. Heiligenthal

### 3 Von den Verzögerungszeiten unabhängige stabile und instabile Gebiete

Die Stabilität einer Störungsmode  $k$  wird für ein Bernoulli-Netzwerk vom im Abschnitt 2.3 vorgestellten Polynom (2.11) bestimmt, das wie folgt lautet

$$z_k^{\tau_M} = \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha z_k^{\tau_M - \tau_l} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l} z_k^{\tau_M - \tau_l} \quad (3.1)$$

$\alpha$  bezeichnet die Steigung der Bernoulli-Abbildung,  $\eta_l$  gewichtet die Rückkopplungen und  $\sigma_l$  die Kopplungen. Außerdem beinhaltet Gl. (3.1) den lokalen Term  $l = 0$  mit  $\sigma_0 = 0$  und  $\tau_0 = 1$ . Zählt man die interne Dynamik als Verzögerungszeit mit dem Wert  $\tau_0 = 1$ , so handelt es sich um ein Netzwerk mit  $M + 1$  verschiedenen Verzögerungszeiten  $\tau_l$ . Diese sind o. B. d. A. so angeordnet, dass  $\tau_M > \tau_{M-1} > \dots > \tau_0$ .

Jede Verzögerungszeit hat ihre eigene Kopplungsmatrix  $G_l$ , wobei alle  $G_l$  miteinander kommutieren. Aus den Kopplungsmatrizen  $G_l$  erhält man eine Menge von Eigenwerten  $\gamma_{k,l}$ , wobei  $k$  die Störungsmoden indiziert.

Die Störungsmode  $k = 0$  liegt hierbei parallel zur SM und führt zu  $\gamma_{0,l} = 1$  für alle Terme von Gl. (3.1). Sie bestimmt die Chaotizität der Trajektorie des synchronisierten Netzwerkes. Die Störungsmoden  $k > 0$  hingegen sind relevant für die Stabilität der vollständigen isochronen Synchronisation.

Es lassen sich anhand von Gl. (3.1) Ergebnisse herleiten, die unabhängig von den Verzögerungszeiten sind. In Abschnitt 3.1 wird ein solches Ergebnis dazu verwendet, die Chaotizität der synchronisierten Trajektorie des Gesamtsystems zu gewährleisten. Abschnitt 3.2 liefert Aussagen zur Stabilität von Moden in bestimmten Bereichen des Parameterraums, welche unabhängig von den Verzögerungszeiten sind.

#### 3.1 Chaotische Trajektorie des Gesamtsystems

Die Störungsmode  $k = 0$  ist relevant für eine chaotische Trajektorie des synchronisierten Gesamtsystems. Eine solche wird in dieser Arbeit stets angestrebt. Es wird dementsprechend nach einem Kriterium gesucht, mit welchem Aussagen darüber getroffen werden können, für welche  $\beta_{0,l}$  aus Gl. (3.1) mindestens eine der Lösungen  $z_{0,r}$  außerhalb des Einheitskreises liegt<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Ergebnisse unter Mithilfe von S. Kolossa, F. Lenders und T. Fischbacher.

Zu diesem Zweck kann man Gl. (3.1) als Polynom  $P(z)$  schreiben

$$P(z) = z^{\tau M} - \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha z^{\tau M - \tau l} \quad (3.2)$$

Für alle Störungsmoden  $k$  gilt, dass diese Mode  $k$  instabil ist, falls  $P(z)$  mindestens eine Nullstelle  $|z| > 1$  hat.

Man nehme nun an, dass  $\sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha > 1$  gelte. In diesem Fall ist

$$P(1) = 1 - \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha < 0 \quad (3.3)$$

Für reelle  $z$  gilt weiterhin, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Da  $P(z)$  kontinuierlich ist, folgt daraus, dass  $P(z)$  eine Nullstelle mit  $z_0 > 1$  auf der reellen Achse hat. Daraus folgt, dass die Mode  $k$  *instabil* ist, falls gilt, dass

$$\sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha > 1 \quad (3.5)$$

Bezüglich der Stabilität der Störungsmoden  $k$  lässt sich außerdem noch folgendes zeigen. Nach dem Satz von Gershgorin [80] liegen alle Nullstellen von  $P(z)$  innerhalb eines Kreises mit Radius  $R$ , wobei  $R$  durch folgende Ungleichung beschränkt ist

$$R \leq \max \left\{ 1, \sum_{l=0}^M |(\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha| \right\} \quad (3.6)$$

Daraus folgt, dass die Mode  $k$  *stabil* ist, falls gilt

$$\sum_{l=0}^M |(\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha| < 1 \quad (3.7)$$

Mit Gl. (3.5) und (3.7) lässt sich ermitteln, für welche Rückkopplungs- und Kopplungsparameter das synchronisierte Gesamtsystem eine chaotische Trajektorie aufweist. Relevant hierfür ist die Störungsmoden  $k = 0$  parallel zur SM, wobei gilt, dass  $\gamma_{0,l} = 1$  ist. Daraus folgt, dass eine chaotische Trajektorie für das Gesamtsystem für solche Parameter gegeben ist, die folgende Ungleichung erfüllen

$$\sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l) \alpha > 1 \quad (3.8)$$

Hingegen führen Parameter, die die folgende Ungleichung erfüllen zu einer stabilen Störungsmode  $k = 0$ , und somit nicht zu einer chaotischen Trajektorie

$$\sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l) \alpha < 1 \quad (3.9)$$

Die Grenze zwischen beiden Gebieten liegt dementsprechend bei

$$1 = \sum_{l=0}^M \beta_{0,l} = \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l) \alpha \quad (3.10)$$

Zusammengefasst bedeutet dies, dass das Gesamtsystem eine chaotische Trajektorie aufweist, wenn beispielsweise die Summe der Rückkopplungs- und Kopplungsparameter größer Eins ist und gleichzeitig für die Bernoulli-Abbildung eine Steigung  $\alpha$  gewählt wird, für die die Abbildung chaotisch ist, also  $\alpha > 1$ . Diese Aussage ist unabhängig von den Verzögerungszeiten  $\tau_l$  gültig.

Im Folgenden werden nur Netzwerke betrachtet, welche Gl. (3.8) erfüllen.

## 3.2 Instabilität einer Störungsmode $k$

Während die Bedingung für eine chaotische Trajektorie des Gesamtsystems nicht von den Verzögerungszeiten  $\tau_l$  abhängt, hängt das vollständige Gebiet für stabile vollständige und isochrone Synchronisation von diesen ab. Es lassen sich jedoch Gebiete im Parameterraum finden, für die unabhängig von  $\tau_l$  eine Stabilität der Störungsmode  $k$  nicht möglich ist. Ebenso lassen sich Teilgebiete des Synchronisationsgebietes bestimmen, welche unabhängig von  $\tau_l$  stabil sind.

So wurde in Abschnitt 3.1 gezeigt, dass die Mode  $k$  in jedem Fall instabil ist, falls Gl. (3.5) gilt, welche sich mit  $\beta_{k,l} = (\eta_M + \sigma_M \gamma_{k,M}) \alpha$  wie folgt schreiben lässt

$$\sum_{l=0}^M \beta_{k,l} > 1 \quad (3.11)$$

Eine weitere Aussage ist die Folgende. Gl. (3.1) liefert  $\tau_M$  Lösungen  $z_r$ . Nach dem Theorem von Vieta gilt  $\prod_r |z_r| = |\beta_M|$ . Daraus folgt, dass für  $|\beta_M| > 1$  mindestens eine Lösung außerhalb des Einheitskreises liegt. Also sind alle Störungsmoden  $k$  mit  $|(\eta_M + \sigma_M \gamma_{k,M}) \alpha| > 1$  instabil. Insbesondere bedeutet dies, dass das Netzwerk nicht vollständig und isochron synchronisieren kann, wenn für mindestens eine Störungsmode mit  $k > 0$  gilt, dass

$$|\beta_{k,M}| > 1 \quad (3.12)$$

bzw.

$$|(\eta_M + \sigma_M \gamma_{k,M})| > 1/\alpha \quad (3.13)$$

Laut Gl. (3.7) ist hingegen eine Störungsmoden  $k$  für jene Parameter  $\eta_l$ ,  $\sigma_l$  und  $\alpha$  stabil, falls gilt, dass

$$\sum_{l=0}^M |\beta_{k,l}| < 1 \quad (3.14)$$

Hierbei ist zu beachten, dass Gl. (3.14) nicht das gesamte Gebiet beschreibt, in dem die Störungsmoden  $k$  stabil ist, sondern lediglich ein Teilgebiet. Das vollständige Gebiet hängt von den Verzögerungszeiten im Netzwerk ab.

Aus Gl. (3.14) lässt sich jedoch folgern, dass es für bestimmte Netzwerke immer möglich ist, Parameter  $\eta_l$ ,  $\sigma_l$  und  $\alpha$  zu finden, die stabile vollständige und isochrone Chaossynchronisation unabhängig von den Verzögerungszeiten ermöglichen. Insbesondere gilt dies auch für Netzwerke ohne Rückkopplung.

In Netzwerken ohne Rückkopplung wird Gl. (3.14) zu

$$\sum_{l=0}^M |\sigma_l \gamma_{k,l} \alpha| < 1 \quad (3.15)$$

Um die Chaotizität des Systems zu gewährleisten, muss Gl. (3.8) erfüllt sein, welche für ein System ohne Rückkopplung wie folgt lautet

$$\sum_{l=0}^M \sigma_l \alpha > 1 \quad (3.16)$$

Es lassen sich stets Parameter  $\sigma_l$  und  $\alpha$  finden, so dass Gl. (3.15) und (3.16) erfüllt sind, wenn für das Netzwerk gilt, dass  $|\gamma_{k,l}| < 1$  für  $k > 0$ . Ein Beispiel für ein solches Netzwerk ist ein bidirektional gekoppeltes Dreieck, welches die Eigenwerte  $\gamma_{1,l} = -\frac{1}{2}$  und  $\gamma_{2,l} = -\frac{1}{2}$  aufweist. Für ein bidirektional gekoppeltes Bernoulli-Dreieck können also stets Parameter  $\sigma_l$  und  $\alpha$  gefunden werden, so dass dieses unabhängig von seinen Verzögerungszeiten stabil synchronisiert. Bei einem bidirektional gekoppelten Paar hingegen, welches den Eigenwert  $\gamma_{1,l} = -1$  besitzt, kann diese Aussage nicht getroffen werden. Allgemein lässt sich sagen, dass eine vollständige stabile Synchronisation für ein Bernoulli-Netzwerk mit  $|\gamma_{k,l}| = 1$  für  $k > 0$  von den konkreten Verzögerungszeiten  $\tau_l$  abhängt.

Die in Abschnitt 3.1 und 3.2 hergeleiteten Aussagen, sind in Abb. 3.1 für ein System ohne lokalen Term und mit zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  veranschaulicht. Im hellblauen Viereck in der Mitte ist die Störungsmoden unabhängig von den Verzögerungszeiten stabil, dieses Gebiet entspricht Gl. (3.14). Das weiße Gebiet ist unabhängig von  $\tau_l$  instabil, es folgt aus den Gleichungen (3.11) und (3.12). Für das restliche Gebiet können keine Aussagen unabhängig von  $\tau_l$  getroffen werden. Am Beispiel des bidirektional gekoppelten Dreiecks ohne Rückkopplung ist zudem grafisch dargestellt, dass ein Netzwerk mit  $|\gamma_{k,l}| < 1$  stets stabil synchronisieren kann. Es wurde ein Punkt im Gebiet von Gl. (3.11) gewählt, der das Produkt von  $\sigma_l$  und  $\alpha$  festlegt. Dieser Punkt entspricht der Störungsmoden parallel zur SM,  $k = 0$ . Die

---

Eigenwerte  $\gamma_{1,l} = -\frac{1}{2}$  und  $\gamma_{2,l} = -\frac{1}{2}$  bilden den gewählten Punkt auf das stabile Gebiet von Gl. (3.14) ab. In diesem Gebiet ist stabile vollständige und isochrone Synchronisation stets möglich.

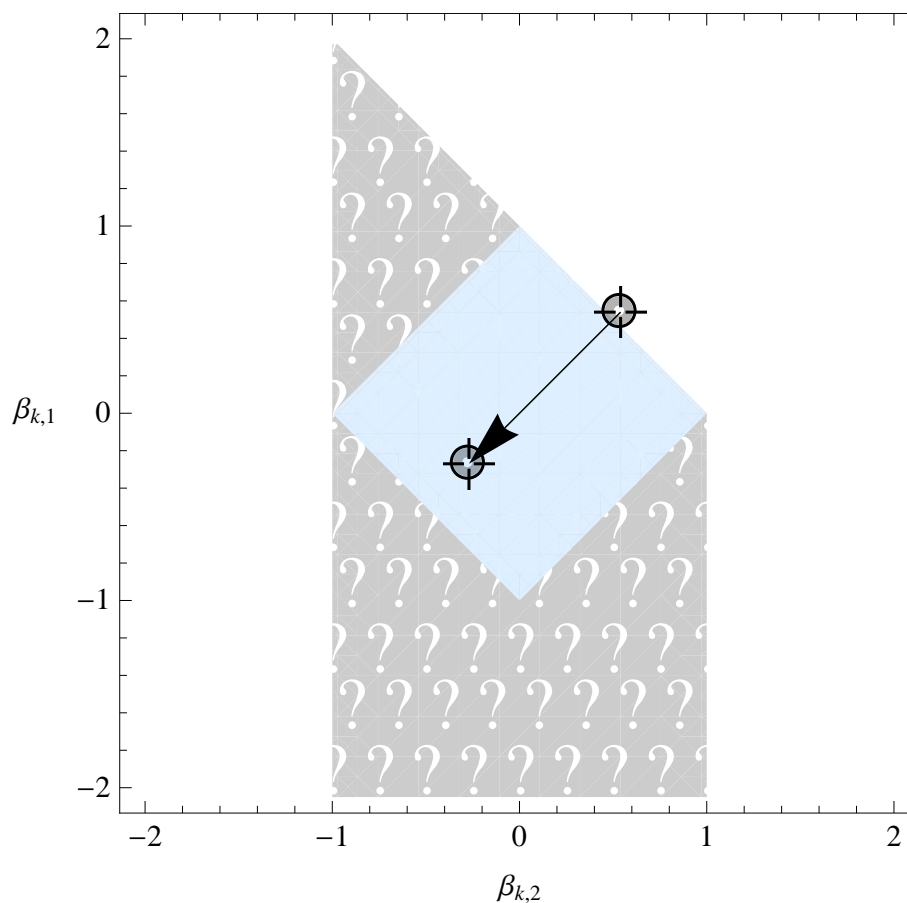


Abbildung 3.1: Grafische Darstellung der in Abschnitt 3.1 und 3.2 hergeleiteten Aussagen für ein System mit zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , ohne lokalen Term,  $\eta_0 = 0$ . Im hellblauen Viereck ist die Störungsmode unabhängig von  $\tau_1$  und  $\tau_2$  stabil, siehe Gl. (3.14). Das weiße Gebiet ist unabhängig von  $\tau_1$  und  $\tau_2$  instabil, Gl. (3.11) und (3.12). Über das restliche Gebiet kann ohne Angabe von  $\tau_1$  und  $\tau_2$  keine Aussage getroffen werden. Ein im chaotischen Gebiet, Gl. (3.11), gewählter Punkt kennzeichnet die Störungsmode  $k = 0$  parallel zur SM und legt das Produkt der Kopplungsparameter mit der Steigung der Abbildung fest. Aussagen über die Stabilität transversal zur SM können getroffen werden, indem die entsprechenden Eigenwerte  $k > 0$  eingesetzt werden, in diesem Fall  $\gamma_{1,l} = -\frac{1}{2}$  und  $\gamma_{2,l} = -\frac{1}{2}$  für ein bidirektional gekoppeltes Dreieck ohne Rückkopplung. Es lassen sich für Netzwerke mit  $|\gamma_{k,l}| < 1$  für  $k > 0$  stets Parameter finden, die eine stabile vollständige und isochrone Synchronisation gewährleisten.



## 4 Große Verzögerungszeiten

Im Allgemeinen ist die Zeitskala des Signals, das in einem Netzwerk von einer Einheit zur nächsten wandert, größer als die der internen Dynamik. In diesem Kapitel wird das Gebiet stabiler Synchronisation im Parameterraum in Abhängigkeit der Größe der längsten Verzögerungszeit untersucht. Abschnitt 4.1 behandelt ein Netzwerk mit einer einzelnen Verzögerungszeit  $\tau$ . In Abschnitt 4.2 werden die in Abschnitt 4.1 hergeleiteten Ergebnisse auf Netzwerke mit mehreren Rückkopplungen verschiedener Verzögerungszeiten  $\tau_l$  und einer sehr großen Verzögerungszeit in der Kopplung übertragen.

### 4.1 Netzwerk mit einer Verzögerungszeit

Man betrachte als erstes ein Netzwerk aus  $N$  Einheiten, wobei jede Einheit eine interne Dynamik besitzt und mit den anderen Einheiten und eventuell auch mit sich selbst durch eine einzelne Verzögerungszeit  $\tau$  gekoppelt ist. Die Dynamik einer einzelnen Einheit eines solchen Netzwerk lautet

$$x_t^i = \eta_0 f(x_{t-1}^i) + \eta_1 f(x_{t-\tau}^i) + \sigma_1 \sum_j^N G_{ij} f(x_{t-\tau}^j) \quad (4.1)$$

Die interne Dynamik ist mit  $\eta_0$  gewichtet, die Rückkopplung mit  $\eta_1$  und die Kopplung mit  $\sigma_1$ , wobei die Struktur des Netzwerks durch die normierte Kopplungsmatrix  $G$  beschrieben wird.

#### 4.1.1 Stabilitätsanalyse für allgemeine Netze und allgemeine $\tau$

Nach Anwendung der Master Stability Funktion erhält man das Polynom

$$z_k^\tau = \beta_0 z_k^{\tau-1} + \beta_{k,1} = \eta_0 \alpha z_k^{\tau-1} + (\eta_1 + \sigma_1 \gamma_{k,1}) \alpha \quad (4.2)$$

Die Lösungen der Gl. (4.2) bestimmen die Stabilität der Störungsmoden  $k$ . Eine chaotische Trajektorie des Gesamtsystems ist gewährleistet, wenn entsprechend Gl. (3.8), folgende Relation gilt

$$(\eta_0 + \eta_1 + \sigma_1) \alpha > 1 \quad (4.3)$$

In diesem Fall ist die Störungsmode parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit instabil, wie in Kap. 3 gezeigt wurde.

Grafisch ist dies durch das Beispiel eines Spektrums der Lyapunov-Exponenten in Abb. 4.1 veranschaulicht. Für jede Störungsmode  $k$  ergeben die  $\tau$  Lösungen  $z_{k,r}$  von

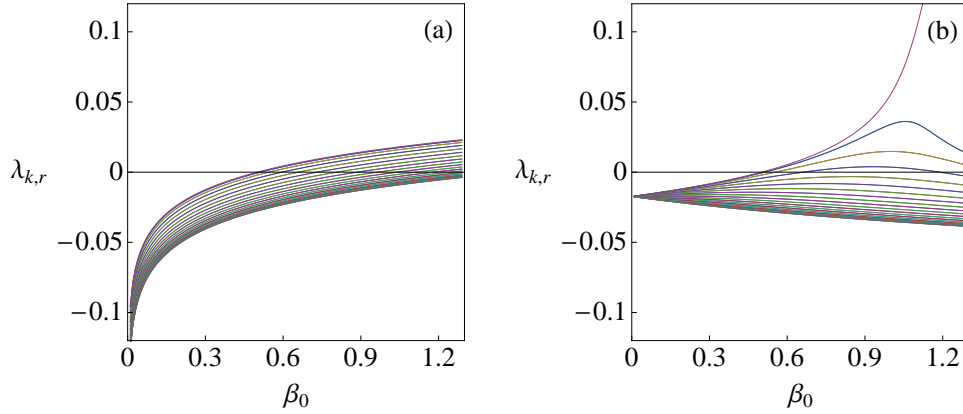


Abbildung 4.1: Spektrum der Lyapunov-Exponenten für ein Netzwerk gemäß Gl. (4.2) mit interner Dynamik und einer Verzögerungszeit  $\tau = 40$ . Es ist (a)  $\beta_1 = 0.5$  und (b)  $\beta_1 = 0.5$ . Für  $\beta_0 + \beta_1 \geq 1$  existiert mindestens ein positiver Lyapunov-Exponent.

Gl. (4.2) das Spektrum der Lyapunov-Exponenten  $\lambda_{k,r} = \ln |z_{k,r}|$  in Abhängigkeit der Kopplungsparameter  $\beta_0$  und  $\beta_{k,1}$ . Für  $\beta_0 + \beta_{k,1} \geq 1$  existiert mindestens ein positiver Lyapunov-Exponent.

Mit Hilfe des Schur-Cohn-Theorems lässt sich das Stabilitätsgebiet im  $(\beta_0, \beta_{k,1})$ -Raum für verschiedene Werte von  $\tau$  numerisch berechnen. Da  $\beta_0 = \eta_0 \alpha$  den lokalen Term kennzeichnet, sind nur die positiven Werte von  $\beta_0$  relevant, während  $\beta_{k,1} = (\eta_1 + \sigma_1 \gamma_{k,1}) \alpha$  im Intervall  $\beta_{k,1} \in [-1, 1]$  betrachtet wird, da außerhalb dieses Intervalls jede Mode instabil ist, wie in Gl. (3.12) gezeigt. Komplexe Werte von  $\beta_{k,1}$  werden in dieser Arbeit nicht explizit untersucht. In Abb. 4.2 ist das Stabilitätsgebiet für  $\tau = 2$ ,  $\tau = 4$  und  $\tau = 20$  abgebildet. Das Gebiet wird mit wachsendem  $\tau$  kleiner. Ist die Verzögerungszeit  $\tau$  sehr viel größer als die Zeitskala der internen Dynamik, so entspricht das Stabilitätsgebiet dem Gebiet des symmetrischen Dreiecks  $|\beta_{k,1}| < 1 - \beta_0$ . Dieses Ergebnis lässt sich analytisch herleiten und wird in Abschnitt 4.1.2 erläutert. Doch auch für endliche Verzögerungszeiten sind analytische Ergebnisse möglich.

Man betrachte das Gebiet der stabilen Chaossynchronisation. An der Grenze dieses Gebietes ist  $|z_{k,r_M}| = 1$ , wobei  $z_{k,r_M}$  die betragsmäßig größte Lösung der Stabilitätsgleichung (4.2) für die Störungsmoden  $k > 0$  ist. Mit dem Ansatz  $z_{k,r} = e^{i\phi_{k,r}}$  lässt sich die Stabilitätsgleichung (4.2) in ihren Real- und Imaginärteil aufspalten

$$\cos(\phi_{k,r}\tau) = \beta_0 \cos[\phi_{k,r}(\tau - 1)] + \beta_{k,1} \quad (4.4)$$

$$\sin(\phi_{k,r}\tau) = \beta_0 \sin[\phi_{k,r}(\tau - 1)] \quad (4.5)$$

Die Lösungen der Gleichungen (4.4) und (4.5) liefern die Werte an der Grenze des Stabilitätsgebietes  $\beta_{k,1}(\phi_{k,r})$  und  $\beta_0(\phi_{k,r})$ . Der maximale Wert von  $\beta_0(\phi_{k,r})$ , also

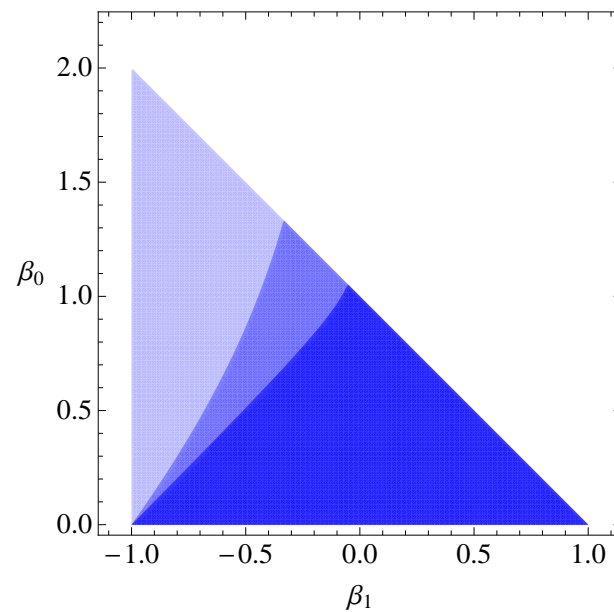


Abbildung 4.2: Synchronisationsgebiet für ein System mit Stabilitätsgleichung  $z^\tau = \beta_0 z^{\tau-1} + \beta_1$  und  $\tau = 2$  (hellblau),  $\tau = 4$  (blau),  $\tau = 20$  (dunkelblau). Das Stabilitätsgebietes für  $\tau = 20$  ist Teilmenge der Stabilitätsgebiete für  $\tau = 2$  und  $\tau = 4$ , das Stabilitätsgebietes für  $\tau = 4$  wiederum ist eine Teilmenge des Gebietes für  $\tau = 2$ . Mit wachsendem  $\tau$  wird das Stabilitätsgebiet kleiner.

die Spitze des Phasendiagramms in Abb. 4.2 lässt sich für  $\phi_{k,r} \rightarrow 0$  ermitteln. Aus Gl. (4.4) und Gl. (4.5) wird so

$$1 = \beta_0 + \beta_1 \quad (4.6)$$

$$\tau = \beta_0(\tau - 1) \quad (4.7)$$

Die erste Gleichung, Gl. (4.6) entspricht Gl. (3.10). Aus Gl. (4.7) folgt

$$\max \beta_0 = \frac{\tau}{\tau - 1} \quad (4.8)$$

Daraus folgt, dass für  $\tau \rightarrow \infty$  die Grenze zum Stabilitätsgebiet bei  $\beta_0 = 1$  liegt. Dies bedeutet, dass die ungekoppelte Einheit nicht chaotisch sein darf, wenn sie im Netz synchronisiert werden soll. Weitere Ergebnisse für  $\tau \rightarrow \infty$  werden in Abschnitt 4.1.2 hergeleitet.

Bei endlicher Verzögerungszeit ist jedoch auch die Synchronisation chaotischer Einheiten ( $\beta_0 > 1$ ) möglich, wenn folgende Formel gilt<sup>1</sup>

$$\beta_0 < \frac{\tau}{\tau - 1} \quad (4.9)$$

Der Koeffizient  $\beta_0$  ist mit dem lokalen Lyapunov-Exponenten  $\lambda_0$  verknüpft, es ist  $\lambda_0 \propto \ln \beta_0$ . Es ist außerdem  $\ln \frac{\tau}{\tau - 1} \approx \frac{1}{\tau}$ . Daraus folgt, dass die Verzögerungszeit  $\tau$  für eine stabile Chaossynchronisation nicht größer sein darf als die Lyapunovzeit  $\tau_{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0}$  des lokalen Exponenten.

In Abb. 4.2 ist Gl. (4.9) beispielsweise für drei endliche Werte der Verzögerungszeit veranschaulicht. Es ist  $\beta_0 < 2$  für  $\tau = 2$ ,  $\beta_0 < \frac{4}{3}$  für  $\tau = 4$  und  $\beta_0 < \frac{20}{19}$  für  $\tau = 20$ .

---

<sup>1</sup>siehe auch [81, Kap. 5.1]

### 4.1.2 Allgemeine Netzwerke mit $\tau \rightarrow \infty$

Ausschlaggebend für die Stabilität der Störungsmoden  $k$  ist  $|z_{k,r}|$ . Gl. (4.2) lässt sich umformen zu

$$|z_k|^\tau = \left| \frac{\beta_{k,1} z_k}{z_k - \beta_0} \right| \quad (4.10)$$

Für  $\tau \rightarrow \infty$  ist der Lyapunov-Exponent entweder von der Größenordnung Eins oder von der Größenordnung  $1/\tau$  [32, 33].

Man betrachte zuerst einen Lyapunov-Exponenten der Größenordnung Eins. Falls die Störungsmoden  $k$  instabil sind, existiert mindestens eine Lösung  $|z_{k,r}| > 1$ . Für diese Lösung gilt, dass  $|z_{k,r}|^\tau$  divergiert, da  $\tau \rightarrow \infty$ . In diesem Fall folgt aus (4.10), dass  $z_{k,r} = \beta_0$  und somit  $\beta_0 > 1$ . Die Instabilität einer Moden  $k$  geht also mit  $\beta_0 > 1$  einher.  $\beta_0 > 1$  bedeutet im untersuchten Bernoulli-Netzwerk, dass die ungekoppelte Einheit chaotisch ist. Man kann dies auch als positiven lokalen Lyapunov-Exponenten bezeichnen, wie in Abschnitt 2.4 erläutert wurde [48].

Es kann also keine Chaossynchronisation im Sinne von Synchronisation chaotischer Einheiten erfolgen, wenn die Verzögerungszeit sehr viel größer als die interne Zeitskala ist und gleichzeitig der lokale Lyapunov-Exponent positiv ist [82].

Man betrachte nun einen Lyapunov-Exponenten der Größenordnung  $1/\tau$ . Mit dem Ansatz  $z_r = e^{\lambda_r} e^{i\phi_r}$ , wobei  $\lambda_r = \Lambda_r/\tau$ , wird Gl. (4.10) zu

$$e^{\Lambda_r} = \frac{|\beta_1| e^{\Lambda_r/\tau}}{|e^{\Lambda_r/\tau} e^{i\phi_r} - \beta_0|} \quad (4.11)$$

Für  $\tau \rightarrow \infty$  erhält man

$$e^{2\Lambda_r} = \frac{|\beta_1|^2}{\beta_0^2 - 2\beta_0 \cos \phi_r + 1} \quad (4.12)$$

Die Werte der Phasen  $\phi_r$  sind für  $\tau \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf dem Kreis  $[0, 2\pi]$  verteilt [83, 84]. Der maximale Exponent  $\Lambda_r$  in Gl. (4.12) ist somit bei  $\phi_r = 0$  zu finden. Daraus folgt als Bedingung für das Stabilitätsgebiet

$$|\beta_1| < 1 - \beta_0 \quad (4.13)$$

Das bedeutet, dass das Netzwerk für große Verzögerungszeiten genau dann synchronisiert, wenn für alle Störungsmoden mit  $k > 0$  gilt, dass

$$|(\eta_1 + \sigma_1 \gamma_k) \alpha| < 1 - \eta_0 \alpha \quad (4.14)$$

Dies ist vor allem für Netzwerke ohne Rückkopplung von Bedeutung, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird.

### 4.1.3 Netzwerk ohne Rückkopplung und mit $\tau \rightarrow \infty$

Man betrachte ein Netzwerk ohne Rückkopplung, also mit  $\eta_1 = 0$ . Die Dynamik eines solchen Netzwerkes mit einer Zeitverzögerung  $\tau$  wird beschrieben durch

$$x_t^i = \eta_0 f(x_{t-1}^i) + \sigma_1 \sum_j^N G_{ij} f(x_{t-\tau}^j) \quad (4.15)$$

Der von seinem Absolutwert zweitgrößte Eigenwert der Kopplungsmatrix  $G$  ist  $\gamma_1$ . Ein Netzwerk mit großer Verzögerungszeit  $\tau$  synchronisiert genau dann, wenn Gl. (4.14) erfüllt ist, welche für ein Netzwerk ohne Rückkopplung wie folgt lautet

$$|\sigma_1 \gamma_1 \alpha| < 1 - \eta_0 \alpha \quad (4.16)$$

wobei  $\gamma_1$  der Eigenwert mit dem zweitgrößten Betrag ist,  $1 \geq |\gamma_1| \geq |\gamma_2| \dots |\gamma_{N-1}|$ . Aus Gl. (4.16) geht hervor, dass weder das Vorzeichen noch eine eventuelle komplexe Phase von  $\gamma_1$  einen Einfluss auf das Stabilitätsgebiet hat<sup>2</sup>. Dies gilt nur für große Verzögerungszeiten, für kleine  $\tau$  ist dies nicht der Fall. Für kleine  $\tau$  hängt das Stabilitätsgebiet von der komplexen Phase von  $\gamma_1$  ab.

Für das System ohne Rückkopplung (4.15) lässt sich zudem folgendes Ergebnis ableiten. Die Störungsmode  $k = 0$  ist laut Gl. (3.9) instabil für alle Parameter, die folgende Gleichung erfüllen

$$\sigma_1 \alpha > 1 - \eta_0 \alpha \quad (4.17)$$

Die Störungsmoden  $k$  indes sind für  $\tau \rightarrow \infty$  stabil, wenn folgende Gleichung gilt

$$\eta_0 \alpha + |\sigma_1 \gamma_{k,1} \alpha| < 1 \quad (4.18)$$

Aus einem Vergleich von Gl. (4.17) und (4.18) lässt sich schließen, dass für Netzwerke mit  $|\gamma_{k,1}| = 1$  für  $\tau \rightarrow \infty$  keine vollständige Chaossynchronisation möglich ist<sup>3</sup>. Solche Netzwerke sind beispielsweise bipartite Netzwerke, die stets  $\gamma_1 = -1$  aufweisen, wie z. B. ein bidirektional gekoppeltes Paar.

Das Netzwerk kann jedoch Untergittersynchronisation, bzw. Clustersynchronisation aufweisen, wie in [37, 38] beschrieben.

Für Netzwerke mit  $|\gamma_{k,1}| < 1$  für  $k > 0$  ist vollständige Chaossynchronisation jedoch möglich, wie schon in Kapitel 3 gezeigt. Ein Beispiel hierfür ist ein Dreieck mit bidirektionalen Kopplungen, für das  $\gamma_{1,1} = -\frac{1}{2}$  gilt.

Ein weiteres Ergebnis für Netzwerke ohne Rückkopplung wie in Gl. (4.15) beschrieben, mit einer Verzögerungszeit  $\tau \rightarrow \infty$  lässt sich aus Gl. (4.12) ableiten. Der lokale Anteil des Netzwerkes sei stabil, es gelte also  $\beta_0 < 1$ . Der größte transversale Lyapunov-Exponent ist

<sup>2</sup>Für ein kontinuierliches System wurde diese Unabhängigkeit in [85] bewiesen.

<sup>3</sup>Ein verwandtes Ergebnis wurde in [86] für die Chaossteuerung gefunden.

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|\sigma_1 \alpha \gamma_{1,1}|}{1 - \beta_0} \quad (4.19)$$

Der Lyapunov-Exponent parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit wird aus der Störungsmoden  $k = 0$  berechnet. Er wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$\lambda_{\parallel} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|\sigma_1 \alpha|}{1 - \beta_0} \quad (4.20)$$

Ein Vergleich von Gl. (4.19) und (4.20) ergibt, dass

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel} + \frac{1}{\tau} \ln |\gamma_{1,1}| \quad (4.21)$$

Die Störungsmoden transversal zur Synchronisationsmannigfaltigkeit sind also stabil, falls gilt, dass

$$|\gamma_{1,1}| < e^{-\tau \lambda_{\parallel}} \quad (4.22)$$

Diese Gleichung verbindet für jedes Netzwerk mit einer stochastischen Kopplungsmatrix  $G$  die Lücke der Eigenwerte  $1 - |\gamma_{1,1}|$  mit der Synchronisierbarkeit des Netzwerkes. Für  $|\gamma_1| < 1$  ist stabile und vollständige Chaossynchronisation möglich, solange das Chaos innerhalb des Synchronisationsgebiets schwach genug ist, also wenn  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$ . Gl. (4.22) gilt vermutlich nicht nur für Bernoulli-Netzwerke, sondern auch für andere chaotische Netzwerke, deren Struktur der Struktur eines Bernoulli-Netzwerks ähnelt. Tatsächlich wurde Gl. (4.22) bereits für Netzwerke mit periodischer Dynamik hergeleitet [87]. In [48] werden zudem numerische Ergebnisse von Lasergleichungen, also zeitverzögerten Differentialgleichungen, vorgestellt, die die Gültigkeit von Gl. (4.22) in solchen Systemen bestätigen.

## 4.2 Netzwerk mit mehreren Verzögerungszeiten

Es soll nun ein Netzwerk mit mehreren Verzögerungszeiten betrachtet werden, dessen Dynamik durch Gl. (2.4) beschrieben wird, die wie folgt lautet

$$x_t^i = \eta_0 f(x_{t-1}^i) + \sum_l^M [\eta_l f(x_{t-\tau_l}^i) + \sigma_l \sum_j^N G_{l,ij} f(x_{t-\tau_l}^j)] \quad (4.23)$$

Eine der Verzögerungszeiten,  $\tau_M$ , sei sehr viel größer als alle anderen Verzögerungszeiten  $\tau_l$  mit  $l \neq M$ . Die Stabilität der Störungsmoden  $k$  wird durch Gl. (2.11) bestimmt, die wie folgt lautet

$$z_k^{\tau_M} = \sum_{l=0}^M (\eta_l + \sigma_l \gamma_{k,l}) \alpha z_k^{\tau_M - \tau_l} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l} z_k^{\tau_M - \tau_l} \quad (4.24)$$

Gl. (4.24) lässt sich umschreiben zu

$$z_k = \sum_{l=0}^{M-1} \beta_{k,l} z_k^{1-\tau_l} + \beta_{k,M} z_k^{1-\tau_M} \quad (4.25)$$

Falls eine Lösung mit  $|z_{k,r}| > 1$  existiert, so wird diese Lösung für  $\tau_M \rightarrow \infty$  vom ersten Term der Gl. (4.25) bestimmt. Daraus folgt, dass eine Störungsmoden  $k$ , die bereits ohne die lange Verzögerungszeit  $\tau_M$  instabil ist, durch das Hinzufügen des letzten Terms in Gl. (4.25) nicht stabilisiert werden kann.

Falls jedoch die Lösung mit dem größten Betrag  $z_{k,r}$  für  $\tau_M \rightarrow \infty$  nahe am Einheitskreis liegt, so ist der Einfluss des letzten Terms von Gl. (4.25) nicht mehr zu vernachlässigen.

Gl. (4.24) lässt sich wie folgt schreiben

$$z_k^{\tau_M} = \frac{\beta_M}{1 - \sum_{l=0}^{M-1} \beta_{k,l} z_k^{-\tau_l}} \quad (4.26)$$

Für  $\tau_M \rightarrow \infty$  verwende man den Ansatz  $z_{k,r} = e^{\Lambda_{k,r}/\tau_M} e^{i\phi_{k,r}}$  [32, 33]. Aus Gl. (4.26) wird so

$$e^{\Lambda_{k,r}} = \frac{|\beta_{k,M}|}{|1 - \sum_{l=0}^{M-1} \beta_{k,l} e^{-i\phi_{k,r}\tau_l}|} \quad (4.27)$$

Es ist hierbei nicht möglich, die Phase  $\phi_{k,r}$  einfach zu bestimmen, die für den maximalen Wert des Lyapunov-Exponenten der Störungsmoden  $k$  verantwortlich ist. Im Allgemeinen können die  $\beta_{k,l}$  negative und/oder komplexe Werte annehmen, was zu Interferenzen der verschiedenen Phasen  $\phi_{k,r}\tau_l$  in Gl. (4.27) führt. Die Identifizierung des relevanten  $\phi_{k,r}$  für den größten Lyapunov-Exponenten lässt sich somit nicht wie in Abschnitt 4.1.2 herleiten. Numerische Berechnungen lassen jedoch vermuten, dass zumindest für Netzwerke mit nur einer Kopplung der maximalen Verzögerungszeit  $\tau_M$  und weiteren kleinen Verzögerungszeiten  $\tau_l$ ,  $l \neq M$ , für reine Rückkopplungen keine stabile Chaossynchronisation möglich ist.

Ein Beispiel ist ein Netzwerk mit zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1 = 3$  und  $\tau_2 = 300$ . Das Stabilitätsdiagramm für diese Werte ist in Abb. 4.3 zu sehen. Aus diesem ist zu entnehmen, dass beispielsweise ein Paar gekoppelter Einheiten mit chaotischer Trajektorie stabil synchronisiert, falls  $\tau_1$  zur Kopplung gehört und  $\tau_2$  zu einer Rückkopplung oder ebenfalls zu einer Kopplung. Eine stabile Synchronisation ist jedoch nicht möglich, falls  $\tau_1$  zu einer Rückkopplung gehört.



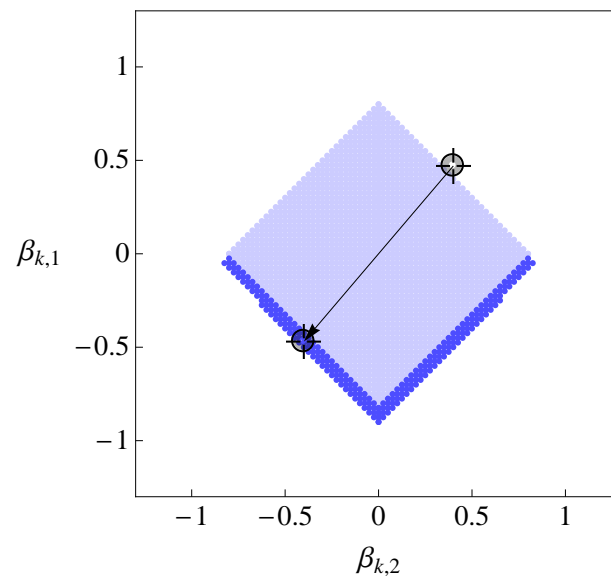


Abbildung 4.3: Stabilitätsgebiet für ein Netzwerk mit den zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1 = 3$ ,  $\tau_2 = 300$  und einer internen Dynamik mit  $\beta_0 = 0.2$ . Das hellblaue Gebiet kennzeichnet das unabhängig von  $\tau_1$  stabile Gebiet  $1 < \beta_0 + |\beta_1| + |\beta_2|$ . Das schwarze Kreuz verdeutlicht ein bipartites Netzwerk gekoppelter Einheiten mit chaotischer Trajektorie, welches synchronisiert, wenn  $\tau_1$  zu einer Kopplung gehört und  $\tau_2$  zu einer Rückkopplung oder Kopplung. Falls  $\tau_1$  zu einer Rückkopplung gehört, ist dies nicht möglich.



## 5 Symmetrien im Phasenraum

In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, dass für Bernoulli-Netzwerke mit den Eigenwerten  $|\gamma_{k,l}| < 1$  für  $k > 0$  stets Parameter  $\eta_l$ ,  $\sigma_l$  und  $\alpha$  gefunden werden können, mit denen unabhängig von den Verzögerungszeiten  $\tau_l$  vollständige Chaossynchronisation möglich ist. Anders ist es bei Bernoulli-Netzwerken mit  $|\gamma_{k,l}| = 1$  für  $k > 0$ . In diesem Fall müssen die Verzögerungszeiten  $\tau_l$  in die Überlegungen mit einbezogen werden.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass in bipartiten Bernoulli-Netzwerken vollständige Chaossynchronisation für bestimmte Kombinationen von Kopplungen und Rückkopplungen ausgeschlossen ist, und zwar in Abhängigkeit der Verzögerungszeiten  $\tau_l$ . Ein bipartites Netzwerk mit der Kopplungsmatrix  $G_l$  zeichnet sich durch  $\gamma_{k,l} = -1$  aus. Die Ergebnisse werden erst in Abschnitt 5.1 anhand eines Netzwerkes mit zwei Verzögerungszeiten hergeleitet und dann in Abschnitt 5.2 auf Netzwerke mit beliebig vielen Verzögerungszeiten verallgemeinert.

### 5.1 Netzwerk mit zwei Zeitverzögerungen

Man betrachte ein Bernoulli-Netzwerk mit zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , wobei o. B. d. A. gilt, dass  $\tau_2 > \tau_1$ . Zu jeder Verzögerungszeit gehört eine eigene diagonalisierbare Kopplungsmatrix  $G_1$ , bzw.  $G_2$ ; beide Matrizen kommutieren. Die Stabilität der Störungsmoden  $k$  der Synchronisationsmannigfaltigkeit wird durch folgendes Polynom bestimmt

$$z^{\tau_2} = \beta_{k,0}z^{\tau_2-1} + \beta_{k,1}z^{\tau_2-\tau_1} + \beta_{k,2} \quad (5.1)$$

Es soll nun eine Verzögerungszeit entweder zu einer Rückkopplung oder zu einer Kopplung gehören, nicht jedoch zu beiden. Das bedeutet, dass nicht gleichzeitig  $\eta_i \neq 0$  und  $\sigma_i \neq 0$  sein darf. Da sich die Eigenwerte  $\gamma_{k,l}$  unterscheiden, je nachdem ob sie zu einer Kopplung oder einer Rückkopplung ( $\gamma_{k,l} = 1$ ) gehören, gibt es in diesem Fall für ein System mit der Stabilitätsgleichung (5.1) folgende drei Möglichkeiten

$$z^{\tau_2} = \eta_0\alpha z^{\tau_2-1} + \eta_1\alpha z^{\tau_2-\tau_1} + \sigma_2\alpha\gamma_{k,2} \quad (5.2)$$

$$z^{\tau_2} = \eta_0\alpha z^{\tau_2-1} + \sigma_1\alpha\gamma_{k,1}z^{\tau_2-\tau_1} + \eta_2\alpha \quad (5.3)$$

$$z^{\tau_2} = \eta_0\alpha z^{\tau_2-1} + \sigma_2\alpha\gamma_{k,1}z^{\tau_2-\tau_1} + \sigma_2\alpha\gamma_{k,2} \quad (5.4)$$

Entweder  $\tau_1$  gehört zu einer Rückkopplung und  $\tau_2$  zu einer Kopplung, siehe Gl. (5.2),  $\tau_1$  gehört zu einer Kopplung und  $\tau_2$  zu einer Rückkopplung, siehe Gl. (5.3), oder beide

Verzögerungszeiten gehören jeweils zu einer Kopplung, siehe Gl. (5.4). In Unterabschnitt 5.1.1 werden Ergebnisse ohne den lokalen Term hergeleitet. Netzwerke mit lokalem Term sowie mit  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \infty$  werden in Unterabschnitt 5.1.2 untersucht.

### 5.1.1 Symmetrien in Netzwerken ohne lokalen Term

Man betrachte als konkretes bipartites Netzwerk ein gekoppeltes Paar und vernachlässige nun den lokalen Term des Netzwerkes, es ist also  $\eta_0 = 0$ .

Ohne lokalen Term vereinfacht sich (5.1) zu

$$z^{\tau_2} = \beta_{k,1} z^{\tau_2 - \tau_1} + \beta_{k,2} \quad (5.5)$$

Es sei nun  $\mu$  der größte gemeinsame Teiler von  $\tau_2$  und  $\tau_1$ . In diesem Fall erhält man mit  $w = z^\mu$  die Gleichung

$$w^p = \beta_{k,1} w^{p-q} + \beta_{k,2} \quad (5.6)$$

wobei  $\tau_2 = \mu p$  und  $\tau_1 = \mu q$  gilt.  $(p, q)$  seien hierbei teilerfremd. Es liegen nun genau dann alle Nullstellen  $z_{k,r}$  für  $k > 0$  innerhalb des Einheitskreises, wenn auch alle Nullstellen  $w_{k,r}$  für  $k > 0$  innerhalb des Einheitskreises liegen. Daraus folgt, dass nur die teilerfremden Werte  $p$  und  $q$  für die Stabilität des Systems relevant sind.

In Abb. 5.1 sind Stabilitätsgebiete der Gl. (5.5) für verschiedene Werte von  $p$  und  $q$  zu sehen. Diese wurden mit Hilfe des Schur-Cohn-Theorems<sup>1</sup> berechnet [79]. Das chaotische Verhalten der Trajektorie des Systems wird durch Erfüllung von Gl. (3.8) gewährleistet, also

$$(\eta_1 + \sigma_1)\alpha + (\eta_2 + \sigma_2)\alpha > 1$$

Diese Bedingung ist für den in Region (I) eingezeichneten Punkt  $(\beta_{0,1}, \beta_{0,2})$  der Abb. 5.1(a) erfüllt. Dort ist  $\tau_2/\tau_1 = 2$ . Um die Stabilität der Synchronisationsmoden  $k > 0$  eines gekoppelten Paares zu prüfen, wird nun  $\gamma_{1,l} = -1$  in Gl. (5.6) eingesetzt. Hierbei ist die Wahl von  $\eta_l, \sigma_l$  und  $\alpha$  durch die Wahl des Punkts in Region (I) der Abb. 5.1(a) eingeschränkt. Das Einsetzen von  $\gamma_{1,l} = -1$  entspricht einer Vorzeichenänderung mindestens einer Koordinate des Punktes  $(\beta_{0,1}, \beta_{0,2})$ , je nachdem, welche der Gl. (5.2)-(5.4) das System beschreibt. Eine Rückkopplung führt zu  $\beta_{1,i} = \eta_i \alpha$ , während eine Kopplung  $\beta_{1,i} = -\sigma_i \alpha$  ergibt.

Gl. (5.2) entspricht einem System mit einer Rückkopplung und der dazugehörigen Verzögerungszeit  $\tau_1$  und einer Kopplung mit  $\tau_2$ . Relevant ist also der Punkt  $(\beta_{1,1}^{(IV)}, \beta_{1,2}^{(IV)}) = (\beta_{0,1}, -\beta_{0,2})$  in Region (IV) in Abb. 5.1(a). Dieser Punkt liegt innerhalb der stabilen Region.

Wenn beide Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  zu Kopplungsmatrizen  $G_1$  und  $G_2$  gehören, entspricht dies Gl. (5.4). Man erhält Punkt  $(\beta_{1,1}^{(III)}, \beta_{1,2}^{(III)}) = (-\beta_{0,1}, -\beta_{0,2})$  in Region (III). Auch dieser Punkt liegt in einem stabilen Gebiet. Für beide Fälle ist also vollständige isochrone Synchronisation möglich.

Ist allerdings  $\tau_2$  die Verzögerungszeit der Rückkopplung und  $\tau_1$  die der Kopplung, entspricht dies Gl. (5.3). Man erhält Punkt  $(\beta_{1,1}^{(II)}, \beta_{1,2}^{(II)}) = (-\beta_{0,1}, \beta_{0,2})$  im instabilen

<sup>1</sup> siehe Anhang A.2

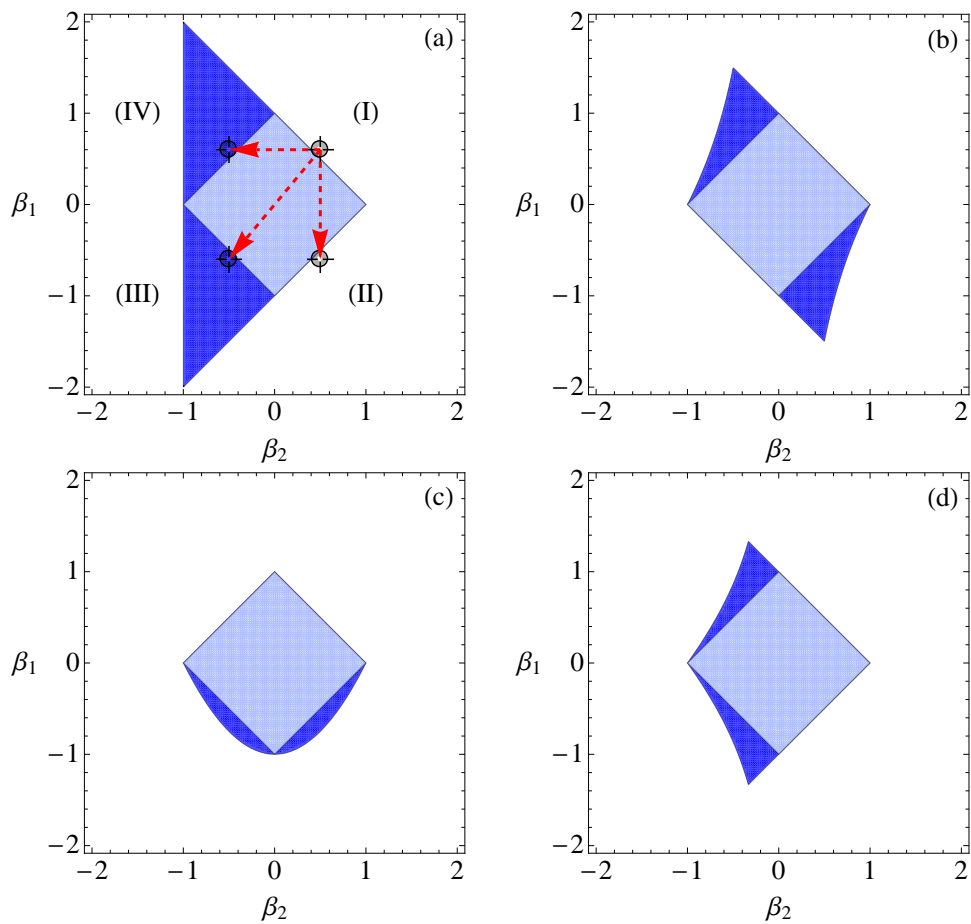


Abbildung 5.1: Synchronisationsgebiet für ein System mit der Stabilitätsgleichung  $z^{\tau_2} = \beta_1 z^{\tau_2 - \tau_1} + \beta_2$  und  $\tau_2/\tau_1 = p/q$ , wobei  $p, q$  teilerfremd sind und für ihr Verhältnis gilt, dass (a)  $\frac{p}{q} = 2$ , (b)  $\frac{p}{q} = 3$ , (c)  $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$ , (d)  $\frac{p}{q} = 4$ . Der Index  $k$  der Störungsmoden wird in dieser Abbildung nicht gezeigt. Störungsmoden  $k = 0$ , welche parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit liegen, befinden sich im Gebiet (I).

Gebiet der Region (II). In diesem Fall ist es nicht möglich, für beliebige Parameter  $\alpha$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  vollständige Chaossynchronisation zu erzielen.

Es ist evident, dass die verschiedenen Symmetrien, die in Abb. 5.1 zu sehen sind, verhindern, dass einige bestimmte Netzwerke stabil synchronisieren. Die gefundenen Symmetrien sind jeweils abhängig von den Werten  $p$  und  $q$  und können wie folgt hergeleitet werden.

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass für bestimmte Werte von  $\beta_{k,l}$  unabhängig von den Verzögerungszeiten die Störungsmode  $k$  stets instabil ist. Diese Werte ergeben sich aus Gl. (3.11) und (3.12) und sind als weißes Gebiet in Abb. 5.2(a) dargestellt. Die Parameter dieses Gebietes seien  $\beta_{k,l}^{(C)}$ . Die folgende Gleichung führt also zu instabilen Lösungen

$$w^p = \beta_{k,1}^{(C)} w^{p-q} + \beta_{k,2}^{(C)} \quad (5.7)$$

Man verwende nun den Ansatz  $w = -v$ . Die Bedingung für Stabilität wird hierdurch nicht verändert, allerdings wird aus Gl. (5.7) folgendes Polynom

$$v^p = \beta_{k,1}^{(C)} (-1)^q v^{p-q} + \beta_{k,2}^{(C)} (-1)^p \quad (5.8)$$

Es gibt nun drei Möglichkeiten für die Geradheit, bzw. Ungeradheit der teilerfremden Werte  $p$  und  $q$ .

$q$  sei gerade und  $p$  ungerade. Gl. (5.8) wird zu

$$v^p = \beta_{k,1}^{(C)} v^{p-q} - \beta_{k,2}^{(C)} \quad (5.9)$$

Es handelt sich also um eine Spiegelung des Punktes  $(\beta_{k,1}^{(C)}, \beta_{k,2}^{(C)})$  an der  $\beta_{k,1}$ -Achse. Da sich die Stabilitätsbedingung durch den Ansatz  $w = -v$  nicht geändert hat, folgt daraus, dass auch alle Punkte  $(\beta_{k,1}^{(C)}, -\beta_{k,2}^{(C)})$  instabil sind. Abb. 5.2(a) wird durch dieses Ergebnis zu Abb. 5.2(b). Dies bedeutet jedoch nichts anderes, als dass ein bipartites Netzwerk mit einer Rückkopplung und  $\tau_1$ , sowie einer Kopplung und  $\tau_2$ , nicht stabil und vollständig synchronisieren kann, wenn  $q$  gerade und  $p$  ungerade ist. Ein Beispiel für das vollständige Synchronisationsgebiet für konkrete  $p$  und  $q$  ist in Abb. 5.1(c) zu sehen.

Falls  $q$  ungerade ist und  $p$  gerade, so wird Gl. (5.8) zu

$$v^p = -\beta_{k,1}^{(C)} v^{p-q} + \beta_{k,2}^{(C)} \quad (5.10)$$

Dies entspricht einer Spiegelung an der  $\beta_{k,1}$ -Achse. Abb. 5.2(a) wird durch dieses Ergebnis zu Abb. 5.2(c). In diesem Fall kann ein bipartites Netzwerk mit einer Kopplung mit Verzögerungszeit  $\tau_1$  und einer Rückkopplung mit Verzögerungszeit  $\tau_2$  nicht stabil und vollständig synchronisieren. Vollständige Synchronisationsgebiete für diesen Fall und konkrete Werte von  $p$  und  $q$  sind in Abb. 5.1(a) und Abb. 5.1(d) dargestellt.

Falls  $p$  und  $q$  beide ungerade sind, so weist das Phasendiagramm eine Punktsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs auf. Gl. (5.8) wird zu

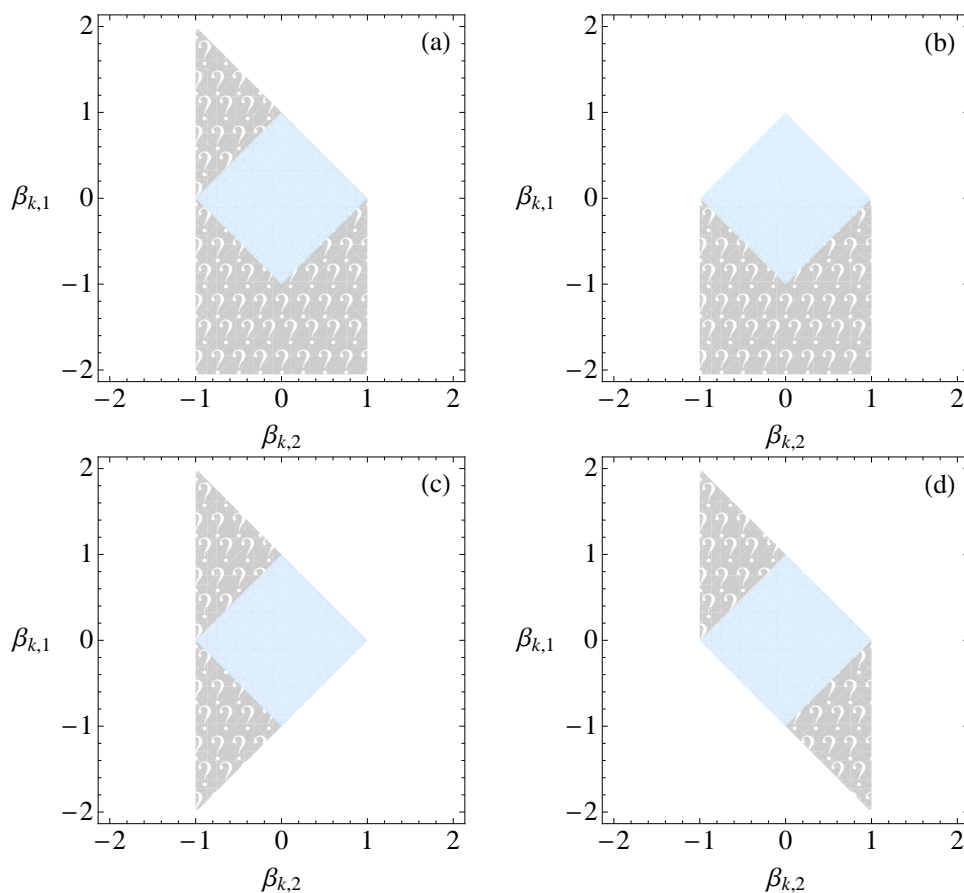


Abbildung 5.2: Dargestellt sind im  $(\beta_{k,1}, \beta_{k,2})$ -Raum von den genauen Werten der Verzögerungszeiten unabhängige instabile (weiß) und stabile (hellblau) Gebiete. Im restlichen Gebiet können keine Aussagen über die genaue Form des Stabilitätsgebietes unabhängig vom exakten Wert  $\tau_l$  getroffen werden.

Es gilt  $\tau_2/\tau_1 = p/q$ , wobei  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. Eine Einschränkung von  $p$  und  $q$  bezüglich ihrer Geradheit oder Ungeradheit ermöglicht Aussagen über Instabilität weiterer Teilgebiete. (a) Keine Einschränkung der  $p$  und  $q$  Werte, (b)  $p$  ungerade,  $q$  gerade, (c)  $p$  gerade,  $q$  ungerade, (d)  $p$  und  $q$  ungerade.

$$v^p = -\beta_{k,1}^{(C)} v^{p-q} - \beta_{k,2}^{(C)} \quad (5.11)$$

Abb. 5.2(a) wird durch dieses Ergebnis zu Abb. 5.2(d). Ein bipartites System kann also nicht synchronisieren, falls beide Verzögerungszeiten zu Kopplungen gehören. Für  $p/q = 3$  ist das Synchronisationsgebiet in Abb. 5.1(b) zu sehen.

Abhängig von  $p$  und  $q$  lassen sich somit weitere Teilgebiete im  $\beta_{k,1}, \beta_{k,2}$ -Raum finden, die instabil sind, wie in Abb. 5.1 dargestellt. Vollständige Synchronisation ist somit für bipartite Netzwerke bestimmter Kopplungs-, Rückkopplungskombinationen ausgeschlossen, jeweils abhängig von der Geradheit, bzw. Ungeradheit von  $p$  und  $q$ .

Ist die vollständige Synchronisation aus Symmetriegründen nicht ausgeschlossen, kann das exakte Synchronisationsgebiet in Abhängigkeit der genauen Werte von  $\tau_1$  und  $\tau_2$  berechnet werden. Beispiele hierfür sind in Abb. 5.1 zu sehen. Es zeigt sich, dass die Synchronisationsgebiete für wachsendes  $p$  und  $q$  kleiner werden. In der Tat ist vollständige und isochrone Synchronisation unmöglich, falls  $\tau_1$  und  $\tau_2$  sehr groß sind und gleichzeitig die Differenz der beiden untereinander klein bleibt. Dieses Ergebnis wird in Kap. 6 hergeleitet.

### 5.1.2 Symmetrien in Netzwerken mit lokalem Term und $\tau_l \rightarrow \infty$

Bisher wurde der lokale Term  $\eta_0 \alpha z^{\tau_2-1}$  aus Gl. (5.1) vernachlässigt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die in Unterabschnitt 5.1.1 gefundenen Symmetrien auch in einem Netzwerk mit  $\eta_0 \neq 0$  zu finden sind, wenn  $\tau_l \rightarrow \infty$ .

Die Stabilität der Störungsmoden  $k$  wird durch die Lösungen  $z_{k,r}$  des folgenden Polynoms bestimmt, wobei  $\beta_{k,0} = \eta_0 \alpha$

$$z^{\tau_2} = \eta_0 \alpha z^{\tau_2-1} + \beta_{k,1} z^{\tau_2-\tau_1} + \beta_{k,2} \quad (5.12)$$

Die Störungsmoden  $k$  sind für die Parameter  $\beta_{k,l}$  stabil, für die gilt, dass alle  $|z_{k,r}| < 1$  sind. Instabilität der Störungsmoden  $k$  liegt für jene  $\beta_{k,l}$  vor, wenn für mindestens eine Lösung  $z_{k,r}$  gilt, dass  $|z_{k,r}| > 1$  ist. Für die Grenze des Synchronisationsgebietes im  $\beta_{k,l}$ -Raum gilt  $|z_{k,r}| = 1$ . Mit dem Ansatz  $z_r = e^{i\phi}$  erhält man für die Grenze

$$1 = \eta_0 \alpha e^{-i\phi} + \beta_{k,1} e^{-i\phi\tau_2q/p} + \beta_{k,2} e^{-i\phi\tau_2} \quad (5.13)$$

Im Limes  $\tau_2 \rightarrow \infty$  sind die Phasen  $\phi$  der Lösungen von Gl. (5.13) gleichmäßig in  $[0, 2\pi]$  verteilt [83, 84]. Es existiert also eine Nullstelle bei  $\phi = n\pi \frac{p}{\tau_2} = n\pi \frac{q}{\tau_1}$  mit der ganzzahligen Zahl  $n$ . Für den Grenzwert  $\tau_2 \rightarrow \infty$  erhält man mit dieser Nullstelle

$$1 = \eta_0 \alpha + \beta_{k,1} e^{-in\pi q} + \beta_{k,2} e^{-in\pi p} \quad (5.14)$$

Für die Störungsmoden  $k = 0$  lässt sich die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität berechnen. Sie liegt, siehe auch Gl. (3.10), bei

$$1 = \eta_0 \alpha + \beta_{0,1}^{(G)} + \beta_{0,2}^{(G)} \quad (5.15)$$



wobei der Index (G) die Grenze kennzeichnet. Für ein bipartites Netzwerk ist der relevante Eigenwert der Kopplungsmatrix zu einer Störung transversal zur Synchronisationsmannigfaltigkeit bei  $\gamma_{1,l} = -1$ . Wie in Unterabschnitt 5.1.1 gezeigt, entspricht die Untersuchung dieser Störungsmoden einer Spiegelung eines Punktes  $(\beta_{0,1}, \beta_{0,2})$  mit gleichen  $\alpha, \eta_l$  und  $\sigma_l$ , im Phasenraum. Je nach Geradheit oder Ungeradheit der Verzögerungszeiten ergeben sich als mögliche Stabilitätsgleichungen aus Gl. (5.14)

$$1 = \eta_0 \alpha \pm \beta_{0,1} e^{-in\pi q} \pm \beta_{0,2} e^{-in\pi p} \quad (5.16)$$

wobei  $(+, +)$  mit  $n = 0$  Gl. (5.15) entspricht. Ein System mit zwei Kopplungen und den dazugehörigen Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  hingegen entspricht der Stabilitätsgleichung

$$1 = \eta_0 \alpha - \beta_{0,1} e^{-in\pi q} - \beta_{0,2} e^{-in\pi p} \quad (5.17)$$

Sind sowohl  $p$  als auch  $q$  ungerade, wähle man  $e^{-in\pi} = -1$  und kann somit Gl. (5.17) umschreiben zu

$$1 = \eta_0 \alpha + \beta_{0,1} + \beta_{0,2} \quad (5.18)$$

Aus einem Vergleich von Gl. (5.15) und Gl. (5.18) folgt, dass  $|z_{1,r}| = 1$  für die selben Parameter  $\alpha, \eta_l$  und  $\sigma_l$  erreicht wird, wie für  $k = 0$ . Man kann daraus folgern, dass vollständige Synchronisation für ungerade  $p$  und  $q$  nicht in einem System mit zwei Kopplungen erreicht werden kann. Analog hierzu erfolgen die Überlegungen für  $p$  gerade,  $q$  ungerade und für  $p$  ungerade,  $q$  gerade. Abb. 5.3 bestätigt, dass die Symmetrie des Phasendiagramms für große Verzögerungszeiten die gleiche ist wie die eines Systems mit  $\eta_0 = 0$  und beliebigen Verzögerungszeiten. Damit hängt für große Verzögerungszeiten die Symmetrie des Synchronisationsgebietes nicht vom lokalen Term ab, wohl aber die exakte Form des stabilen Gebietes.

## 5.2 Netzwerk mit mehreren Zeitverzögerungen

Wie bei einem System mit nur zwei Verzögerungszeiten, verhindern auch für Systeme mit mehreren Verzögerungszeiten Symmetrien im Phasendiagramm die vollständige Synchronisation eines bipartiten Netzwerkes. Diese hängt wieder von der Geradheit und Ungeradheit der Verzögerungszeiten ab, sowie von der Konfiguration der Kopplungen und der Rückkopplungen. Dies gilt für alle Verzögerungszeiten und einem Netzwerk ohne lokalem Term, sowie für Netzwerke mit  $\eta_0 \neq 0$  falls die Verzögerungszeiten groß sind. In diesem Abschnitt wird ein System ohne lokalen Term untersucht. Die Ergebnisse lassen sich analog zu Unterabschnitt 5.1.2 auf Netzwerke mit lokalem Term erweitern.

Man betrachte ein Netzwerk mit  $M$  verschiedenen Verzögerungszeiten  $\tau_l$  wobei  $\tau_M > \tau_{M-1} > \dots > \tau_0$ . Die Stabilitätsgleichung der Störungsmode  $k$  lautet

$$z^{\tau_M} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l} z^{\tau_M - \tau_l} \quad (5.19)$$

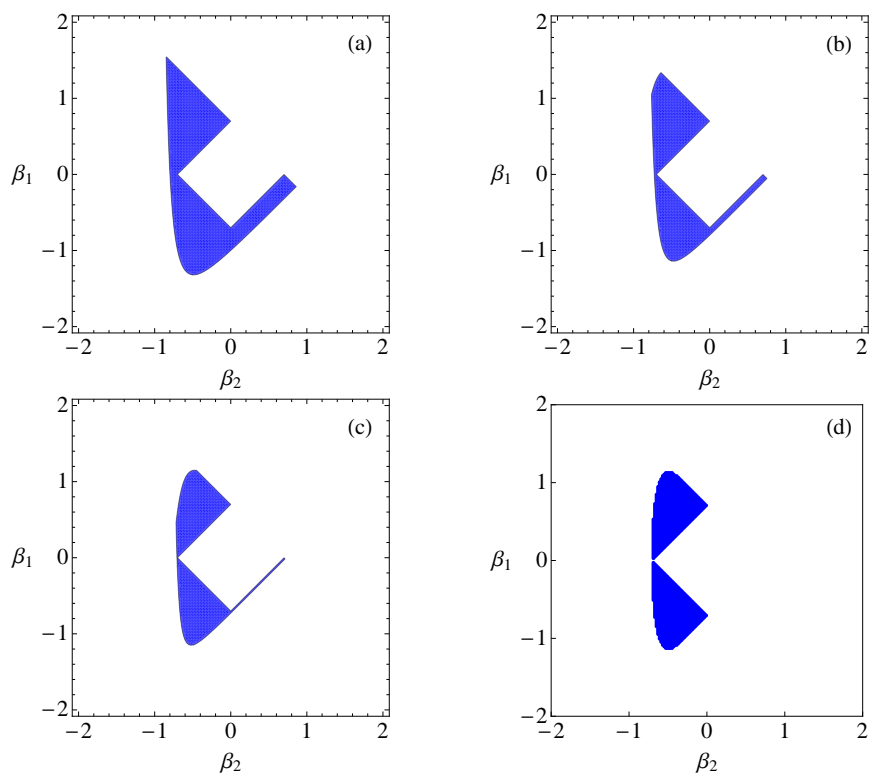


Abbildung 5.3: Synchronisationsgebiet für ein System mit der Stabilitätsgleichung  $z^{\tau_2} = \beta_0 z^{\tau_2-1} + \beta_1 z^{\tau_2-\tau_1} + \beta_2$  und  $\tau_2/\tau_1 = 2$  mit  $\beta_0 = 0.3$ . Es ist (a)  $\tau_2 = 4$ , (b)  $\tau_2 = 8$ , (c)  $\tau_2 = 16$ , (d)  $\tau_2 = 100$ . Die Symmetrie, die für  $\tau_2/\tau_1 = 2$  und  $\beta_0 = 0$  gilt, lässt sich auch für  $\beta_0 > 0$  und große Werte von  $\tau_i$  finden.

Der größte gemeinsame Teiler der Verzögerungszeiten sei  $\tau$ , so dass  $p_l = \tau_l/\tau$  teilerfremde Werte sind. Man substituiere nun  $w = z^\tau$  in Gl. (5.19) und erhält somit

$$w^{p_M} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l} w^{p_M - p_l} \quad (5.20)$$

Da die Stabilitätsgebiete der Gleichungen (5.19) und (5.20) dieselben sind, betrachte man zur Auffindung der Symmetrien Gl. (5.20). Die Störungsmode  $k$  ist instabil, wenn Gl. (3.11) und (3.12) erfüllt sind. Man bezeichne die Parameter, die im instabilen Gebiet liegen, als  $\beta_{k,l}^{(C)}$ , die dazugehörige Gleichung sei

$$w^{p_M} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l}^{(C)} w^{p_M - p_l} \quad (5.21)$$

Mit dem Ansatz  $w = -v$  wird die Bedingung für Stabilität nicht verändert. Gl. (5.7) wird zu

$$w^{p_M} = \sum_{l=0}^M \beta_{k,l}^{(C)} (-1)^{p_l} w^{p_M - p_l}$$

Die Geradheit oder Ungeradheit von  $p_l$  bestimmt nun das Vorzeichen des Terms  $l$ . Auf diese Weise wird das instabile Gebiet (5.21) auf weitere Gebiete im Phasenraum abgebildet. Für bipartite Netzwerke deren Verzögerungszeiten  $\tau_l$  entweder zu einer Kopplung oder zu einer Rückkopplung gehören, heißt dies, dass vollständige Synchronisation nicht möglich ist, falls  $p_l$  für eine Kopplung ungerade ist und  $p_l$  gerade für eine Rückkopplung. Es wurde somit gezeigt, dass die Symmetrien der Stabilitätsgleichung (5.19) Synchronisation für bestimmte Verhältnisse der Verzögerungszeiten verhindern.

In Kap. 7 wird ein selbstkonsistentes Argument vorgestellt, welches auf der Vermutung basiert, dass für eine vollständige Synchronisation Informationen der Trajektorie jeder Einheit miteinander mischen müssen. Die auf Symmetrieüberlegungen basierenden Ergebnisse dieses Kapitels unterstützen dieses Mischungsargument, welches auch in [88] angewendet wurde.

In [41, 89] wird ebenfalls ein bipartites Netzwerk, nämlich ein gekoppeltes Paar, mit mehreren Verzögerungszeiten und bidirektionalen Kopplungen, sowie Rückkopplungen untersucht. Ein solches Paar ist in Abb. 5.4 zu sehen. In [41, 89] wird gezeigt, dass die Bedingung, dass für isochrone Chaossynchronisation die Verzögerungszeiten exakt aufeinander abzustimmen sind<sup>2</sup>, umgangen werden kann. Hierfür müssen mehrere verschiedene Verzögerungszeiten beispielsweise durch hinzugefügte Rückkopplungen in das Netzwerk eingebaut werden<sup>3</sup>.

Vollständige Chaossynchronisation ist dann möglich, wenn die Verzögerungszeiten

---

<sup>2</sup>siehe Kap. 6

<sup>3</sup>siehe auch [40, 90]

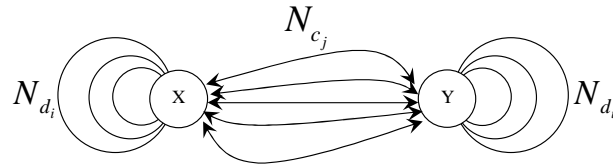


Abbildung 5.4: Entnommen aus [41, Abb. 11 von M. Zigzag]. Schema eines Paares, welches über mehrere Kopplungen miteinander verbunden ist, sowie mehrere Rückkopplungen aufweist. Das Netzwerk besitzt mehrere Verzögerungszeiten  $\tau_l$ , hier als  $N_{c_j}$  und  $N_{d_i}$  bezeichnet.

folgende Bedingung erfüllen<sup>4</sup>

$$\sum_{i=1}^{M_s} l_i N_{d_i} + \sum_{j=1}^{M_m} m_j N_{c_j} = 0 \quad (5.22)$$

wobei  $M_s$  die Anzahl der Rückkopplungen mit den Verzögerungszeiten  $N_{d_i}$  ist,  $M_m$  die Anzahl der Kopplungen mit den Verzögerungszeiten  $N_{c_j}$  und  $l_i$  und  $m_j$  ganzzahlige Zahlen. Hierbei sind die möglichen Werte  $l_i$  und  $m_j$  in der Größe ihres Betrages beschränkt, was aus den Ergebnissen aus Kap. 4 folgt [41, 89]. Des Weiteren können nicht alle Werte von  $l_i$  und  $m_j$  angenommen werden, was mit den in diesem Kapitel hergeleiteten Ergebnissen übereinstimmt. Grafisch veranschaulicht wird dies in Abb. 5.5. Ein bidirektional gekoppeltes Paar mit der Kopplungszeit  $N_c$  und der Rückkopplungszeit  $N_d$  wurde numerisch in Abhängigkeit der Verzögerungszeiten untersucht. Kopplungsparameter und Bernoulli-Steigung waren hierbei konstant. Zu sehen sind die Punkte stabiler Chaossynchronisation, die Gl. 5.22 entsprechen, wobei einige der aus dieser Gleichung resultierenden Linien nicht existieren. Die vorhandenen Linien ergeben sich aus den möglichen Werten  $l_i$  und  $m_j$ , die sowohl vom in dieser Arbeit hergeleiteten Symmetrieverhalten, als auch von den Systemparametern  $\beta_{k,l}$  abhängen.

<sup>4</sup>von M. Zigzag, siehe [41, Gl. (29)]

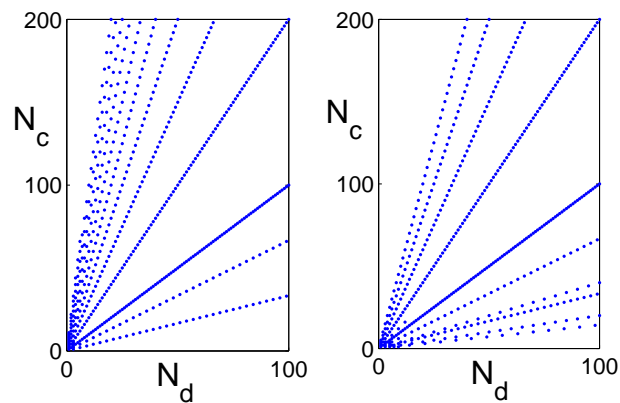


Abbildung 5.5: Entnommen aus [41, Fig. 2 von M. Zigzag]. Untersucht wurde ein bidirektional gekoppeltes Paar mit Rückkopplung. Numerisch wurden die Punkte stabiler Chaossynchronisation in Abhängigkeit der Verzögerungszeit der Kopplung  $N_c$  (bzw.  $\tau_2$  in der hier verwendeten Schreibweise) und der Verzögerungszeit der Rückkopplung  $N_d$  (bzw.  $\tau_1$  in der hier verwendeten Schreibweise) bestimmt. Links:  $\beta_0 = 0.022$ ,  $\beta_1 = 0.8624$ ,  $\beta_2 = 0.2156$ , rechts:  $\beta_0 = 0.022$ ,  $\beta_1 = 0.6468$ ,  $\beta_2 = 0.4312$ . Die Linien entsprechen Gl. (5.22), die “fehlenden” Linien stimmen mit den in Kap. 5 gefundenen Symmetrien überein.



## 6 Kleine Abweichungen der Verzögerungszeiten voneinander

Es soll nun ein bipartites Netzwerk betrachtet werden, in dem die vorhandenen Verzögerungszeiten sehr groß und leicht gegeneinander verstimmt sind. Es lässt sich zeigen, dass die Synchronisierbarkeit sehr empfindlich auf kleine Verstimmungen reagiert, wenn die Verzögerungszeiten groß sind.

Man betrachte ein Netzwerk ohne den lokalen Term, also  $\eta_0 = 0$ , sowie zwei Verzögerungszeiten, wobei  $\tau_1 = \tau$ ,  $\tau_2 = \tau + \Delta$ . Hierbei gelte, dass  $\tau \rightarrow \infty$ , während  $\Delta$  endlich ist. Man nehme nun an, dass  $\tau_1$  die Verzögerungszeit der Rückkopplung ist, während  $\tau_2$  die Kopplung eines bipartiten Bernoulli-Netzwerkes darstellt, beispielsweise zweier gekoppelter Bernoulli-Einheiten. Die Stabilität der Störungsmode  $k$  wird durch das folgende Polynom bestimmt

$$z^\tau = \eta_1 \alpha z^{-\Delta} + \gamma_{k,2} \sigma_2 \alpha \quad (6.1)$$

Eine chaotische Trajektorie ist gemäß Gl. (3.8) für alle Parameter gewährleistet, für die gilt, dass

$$\eta_1 \alpha + \sigma_2 \alpha > 1 \quad (6.2)$$

Für ein bipartites Netzwerk wird die Stabilität der Synchronisation durch die Störungsmode  $k = 1$  und somit  $\gamma_{1,2} = -1$  bestimmt. Daraus folgt das Polynom

$$z^\tau = \eta_1 \alpha z^{-\Delta} - \sigma_2 \alpha \quad (6.3)$$

Für die Stabilität ist die betragsmäßig größte Lösung  $z = e^{i\phi} e^{\Lambda/\tau}$  ausschlaggebend [32, 33]. Mit diesem Ansatz folgt aus Gl. (6.3):

$$\begin{aligned} e^{2\Lambda} &= |\eta_1 \alpha e^{-i\phi\Delta} - \sigma_2 \alpha|^2 \\ &= (\eta_1 \alpha \cos \phi\Delta - \sigma_2 \alpha)^2 + \eta_1^2 \alpha^2 \sin^2 \phi\Delta \\ &= \eta_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \alpha^2 - 2\eta_1 \sigma_2 \alpha^2 \cos \phi\Delta \end{aligned} \quad (6.4)$$

Für große Verzögerungszeiten  $\tau \rightarrow \infty$  ist die Phase  $\phi$  der Nullstellen gleichmäßig in  $[0, 2\pi]$  verteilt [83, 84], woraus folgt, dass sich immer eine Nullstelle finden lässt, für die gilt, dass  $\cos(\phi\Delta) \approx -1$ . Gl. (6.4) wird somit zu

$$e^{2\Lambda} = (\eta_1 \alpha + \sigma_2 \alpha)^2 \quad (6.5)$$

Ein Vergleich von Gl. (6.2) und Gl. (6.5) ergibt, dass die Instabilität der Störungsmode  $k = 0$  stets zu Instabilität der Störungsmode  $k = 1$  führt. Analog lässt sich auch

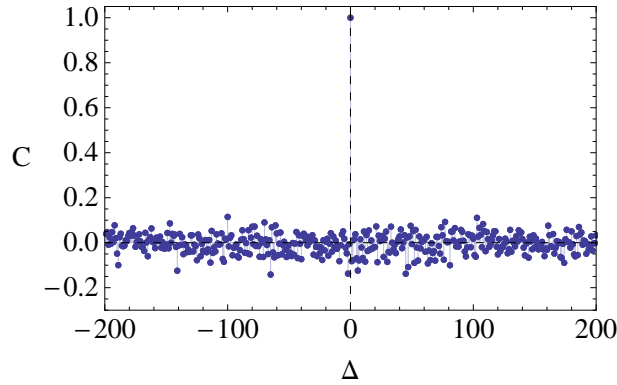


Abbildung 6.1: Kreuzkorrelation  $C(\Delta)$  für ein bidirektional gekoppeltes Bernoulli-Paar mit einer Verzögerungszeit  $\tau_1$  für die Rückkopplung und einer Verzögerungszeit  $\tau_2 = 10000$  für die Kopplung. Es ist  $\Delta = \tau_2 - \tau_1$ . Bereits für kleine Werte von  $\Delta$  geht die Kreuzkorrelation gegen Null.

ein bipartites Netzwerk ohne Rückkopplung mit zwei bidirektionalen Kopplungen untersuchen.

Damit wurde gezeigt, dass selbst bei einer Verstimmung von nur einem einzigen Zeitschritt zwischen Rückkopplung und Kopplung  $\tau_2 = \tau_1 \pm 1$ , es nicht mehr möglich ist, beispielsweise ein Paar von Bernoulli-Einheiten stabil zu synchronisieren, falls  $\tau_2 \rightarrow \infty$  [48]. Dieses Ergebnis wird in Abb. 6.1 veranschaulicht, in welchem die Kreuzkorrelation zweier gekoppelter Einheiten augenblicklich gegen Null geht, wenn die Verzögerungszeiten nicht mehr genau aufeinander abgestimmt sind.

Diese Einschränkung lässt sich durch Einfügen mehrerer Verzögerungszeiten, beispielsweise durch verschiedene Rückkopplungen, umgehen, wie in [41, 89] gezeigt wurde.



## 7 Mischungsargument

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Ergebnisse beschrieben, welche mit Hilfe der Master Stability Funktion für Bernoulli-Netzwerke hergeleitet wurden. Dabei spielen die Eigenwerte des betrachteten Netzwerkes eine zentrale Rolle. Während für Netzwerke mit  $|\gamma_{k,l}| < 1$  für  $k > 0$  stets Parameter gefunden werden können, mit denen vollständige Chaossynchronisation möglich ist, siehe Kap. 3, ist dies bei Netzwerken mit mindestens einem  $|\gamma_{k,l}| = 1$  für  $k > 0$  nicht notwendigerweise der Fall. So ist, wie in Kap. 4-6 gezeigt, für bestimmte Netzwerke in Abhängigkeit der Verzögerungszeiten vollständige Chaossynchronisation nicht möglich.

Es ist demnach von Interesse, zu wissen, ob im zu untersuchenden Netzwerk  $|\gamma_{k,l}| < 1$  für  $k > 0$  gilt, oder nicht. Da die Berechnung des Eigenwertspektrums für große Netzwerke nichttrivial ist, wird in diesem Kapitel ein selbstkonsistentes Argument, das *Mischungsargument*<sup>1</sup>, vorgestellt. Das Mischungsargument besagt, dass nur Einheiten miteinander isochron synchronisieren können, welche Zugang zu einer isochronen Mischung aller relevanten Informationen haben. Mit Hilfe dieses Argumentes ist es möglich, eine Aussage über die Möglichkeit einer vollständigen Synchronisation, aber auch Untergitter- oder Clustersynchronisation, zu treffen, ohne das Eigenwertspektrum des Netzwerkes explizit zu berechnen. Es werden zuerst stark zusammenhängende gerichtete Netzwerke ohne lokalen Term betrachtet, welche nur eine Verzögerungszeit  $\tau$  aufweisen, siehe Abschnitt 7.1. In Abschnitt 7.2 werden gerichtete Graphen betrachtet, welche nicht stark zusammenhängend sind. Optimale Kopplungsparameter für gerichtete Ringe mit einer Abkürzung werden in Abschnitt 7.3 untersucht, ein Zusammenhang zwischen dem Mischungsargument und den Markov-Ketten wird in Abschnitt 7.4 erläutert. Abschnitt 7.5 schließlich behandelt das Mischungsargument in Netzwerken mit verschiedenen Verzögerungszeiten.

### 7.1 Mischungsargument in stark zusammenhängenden Netzwerken

Man betrachte ein stark zusammenhängendes Netzwerk aus  $N$  Einheiten ohne lokalen Term und mit nur einer Verzögerungszeit  $\tau = 1$ . Die Verbindungen des Netzwerkes sind gerichtet. In einem stark zusammenhängenden Netzwerk gibt es stets einen Weg von jeder Einheit zu jeder anderen Einheit.

Das Netzwerk habe mindestens eine Einheit, bei der zwei oder mehr Kanten einlaufen. Man bezeichnet diese Einheiten als *Mischungspunkte*. Sei  $j = 1$  ein Mischungs-

---

<sup>1</sup>Die Idee des Mischungsargumentes wurde erstmals von I. Kanter während eines Ideenaustausches Anfang 2010 erwähnt. Weitere Ergebnisse hierzu sind in [88] zu finden.

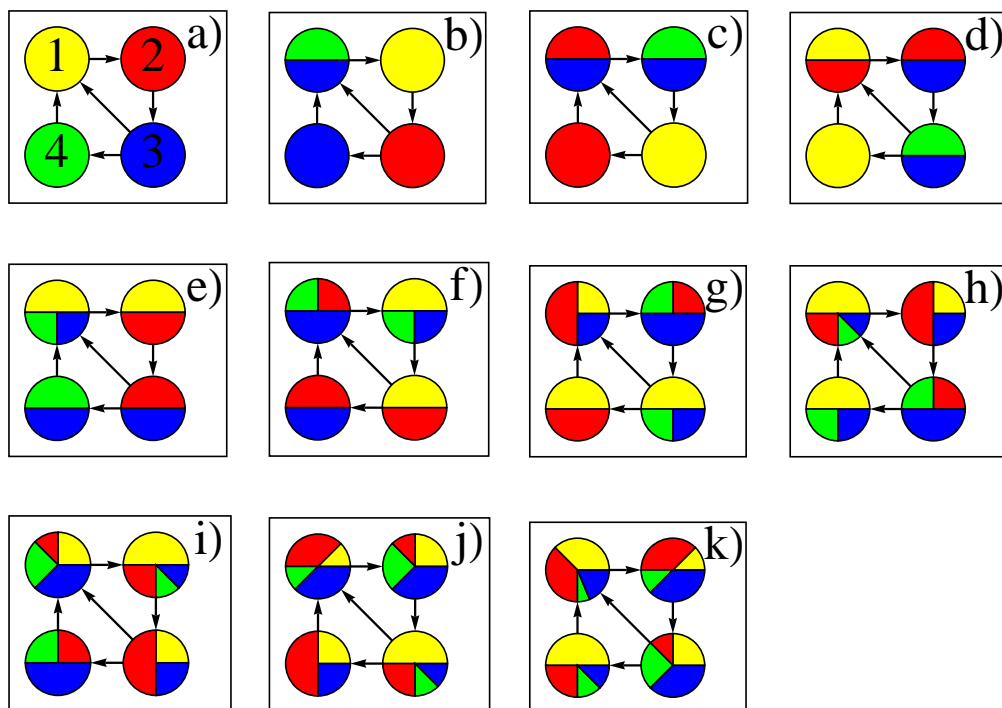


Abbildung 7.1: Mischungsprozess bei einem stark zusammenhängenden Netzwerk. Einziger Mischungspunkt ist Einheit 1, von der zwei Zyklen der Länge 3 und 4 ausgehen. In a), dem Zeitpunkt  $t = 0$ , sind alle Einheiten mit den Farben  $C_1 - C_4$  eingefärbt. Da die vorhandenen Zyklen teilerfremd sind, ist eine vollständige Mischung möglich, sie findet zum Zeitpunkt  $t = 7$  in h) statt. Nach drei weiteren Schritten haben die durchmischten Farben alle Einheiten des Netzwerkes erreicht, siehe k).

punkt. Man färbe nun alle Einheiten zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit den Farben  $C_j$  ein. Von  $j = 1$  gibt es  $m$  verschiedene Zyklen der Länge  $L_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, m$ . Für  $m = 0$  ist keine Synchronisation möglich.

In jedem Zeitschritt werden die Informationen, oder Farben  $C_j$  gemäß der Netzwerkstruktur im Netz weitergereicht.  $C_1$  befindet sich demnach, nach dem Durchlauf eventuell mehrerer Zyklen, immer wieder bei  $j = 1$ .  $C_1$  ist also zu den Zeiten  $t_{C_1} = \sum_{i=1}^m k_i L_i$  bei Einheit 1, wobei  $k_i \in \mathbb{N}^0$ . Man betrachte nun eine beliebige Einheit  $j$  mit dem Abstand  $x_j$  zur Einheit 1. Die Farbe  $C_j$  kommt zur Einheit 1 zu den Zeiten  $t_{C_j} = x_j + \sum_{i=1}^m r_i L_i$  wobei  $r_i \in \mathbb{N}^0$ . Die Farben  $C_j$  und  $C_1$  treffen sich genau dann bei Einheit 1, wenn

$$\sum_{i=1}^m k_i L_i - \sum_{i=1}^m r_i L_i = x_j \quad (7.1)$$

Ist dies für  $x_j = 1$  erfüllbar, also für die Nachbareinheit von Einheit 1, so ist eine Mischung auch für alle anderen Einheiten, also alle anderen  $x_j$  möglich. Gl. (7.1) ist genau dann für  $x_j = 1$  erfüllbar, wenn alle Zyklenlängen  $L_i$  teilerfremd sind [88]. Ein Zusammenhang der Eigenwerte und der vorhandenen Zyklen eines Netzwerkes ist aus der Theorie der nichtnegativen Matrizen bekannt [78]. Der zweitgrößte Eigenwert ist demnach von seinem Betrag her kleiner Eins, wenn im Netzwerk teilerfremde Zyklen, wie hier beschrieben, vorhanden sind.

Falls die Zyklen  $L_i$  den gemeinsamen Teiler  $y$  haben, so ist

$$\sum_{i=1}^m k_i \tilde{L}_i - \sum_{i=1}^m r_i \tilde{L}_i = x_j / y \quad (7.2)$$

was für  $x_j = 1$  nicht erfüllbar ist, da alle Terme auf der linken Seite von Gl. 7.2 ganzzahlig sind. In diesem Fall ist jedoch Untergitter- oder Clustersynchronisation möglich, wenn man  $x_j = yu$  setzt, wobei  $u \in \mathbb{N}^0$ . In diesem Falle können alle Einheiten, für die  $x_j = yu$  gilt, miteinander mischen. Da in jedem Zeitschritt alle  $C_j$  gemäß der Struktur des Netzwerkes um eine Einheit weitergereicht werden, erhält man  $y$  als Anzahl der Untergitter.

Ein Beispiel für Untergittersynchronisation ist in Abb. 7.2 dargestellt. Der unidirektionale Ring aus sechs Einheiten und einer Abkürzung<sup>2</sup> hat einen Mischungspunkt und zwei Zyklen mit  $y = 3$  als gemeinsamen Teiler. Das Netzwerk weist somit Untergittersynchronisation auf, wobei  $y = 3$  der Anzahl der Untergitter entspricht.

Nach der Durchmischung der Farben, sei es in der vollständigen oder in der Untergittersynchronisation, müssen die durchmischten Farben alle Einheiten des Netzwerkes erreichen. Ab diesem Zeitpunkt ist ein Einsetzen der Synchronisation möglich.

Man beachte, dass auch in Netzwerken, in denen eine vollständige Durchmischung stattfindet, für bestimmte Parameter Untergittersynchronisation möglich ist. Die Abhängigkeit verschiedener Untergittersynchronisationen von den Kopplungs- und Abbildungsparametern wurde in [36–38] untersucht. Das Mischungsargument kann

<sup>2</sup>siehe auch [91]

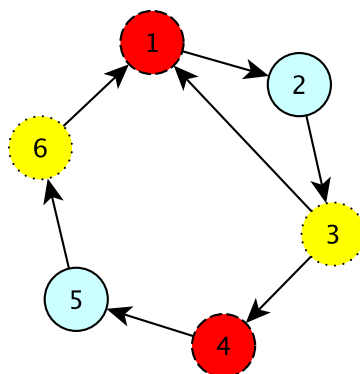


Abbildung 7.2: Netzwerk mit einem Mischungspunkt, Einheit 1, und zwei Zyklen mit gemeinsamen Teiler  $y = 3$ . Es synchronisieren jeweils die Einheiten 1 und 4, 2 und 5, sowie 3 und 6 isochron miteinander.

somit eine Aussage über die möglichst vollständige Synchronisation treffen.

Ein Beispiel für vollständige Synchronisation ist in Abb. 7.1 zu sehen. Es handelt sich hier um einen unidirektionalen Ring mit einer zusätzlichen Verbindung von Einheit 3 zu Einheit 1<sup>3</sup>. Einheit 1 ist in diesem Netzwerk der einzige Mischungspunkt. Von ihm gehen  $m = 2$  Zyklen aus mit der Länge  $L_1 = 3$  und  $L_2 = 4$ . In Abb. 7.1a) ist die Einfärbung der Einheiten zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu sehen.  $C_1$  ist hierbei gelb. Im nächsten Zeitschritt,  $t = 1$ , abgebildet in Abb. 7.1b) hat Einheit 1 eine Mischung der Ursprungsinformationen von Einheit 3 und 4 erhalten. Alle Farben wurden gemäß der Netzwerkstruktur weitergereicht. Jeweils zu den Zeitpunkten  $t_{C_1} = 3k_1 + 4k_2$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^0$ , erreicht  $C_1$  wieder den Mischungspunkt. Dies ist in den Abbildungen 7.1d), e), g), h), i), j), k) zu sehen, die den Zeitpunkten  $t = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10$  entsprechen. Die Einheiten mit  $x_j = 1$  sind in diesem Netzwerk Einheit 3 und 4.  $C_3$  und  $C_4$  können mit  $C_1$  mischen, da Gl. 7.1 für sie erfüllt ist. Zum Zeitpunkt  $t = 4$  treffen sie gemeinsam im Mischungspunkt zusammen, siehe Abb. 7.1e). Zum Zeitpunkt  $t = 7$ , Abb. 7.1h), sind alle Farben  $C_1$  bis  $C_4$  in Einheit 1 gemischt. Nach drei weiteren Zeitschritten,  $t = 10$ , Abb. 7.1k) haben die durchmischten Farben  $C_1$  bis  $C_4$  alle Einheiten des Netzwerkes erreicht.

## 7.2 Mischungsargument in zusammenhängenden Netzwerken

In Abschnitt 7.1 wurden stark zusammenhängende Netzwerke untersucht. In diesem Abschnitt sollen Netzwerke analysiert werden, welche nicht stark zusammenhängen,

<sup>3</sup>Eine numerische Untersuchung dieses Netzwerkes, sowie anderer gerichteter Netzwerke, findet sich in [91].

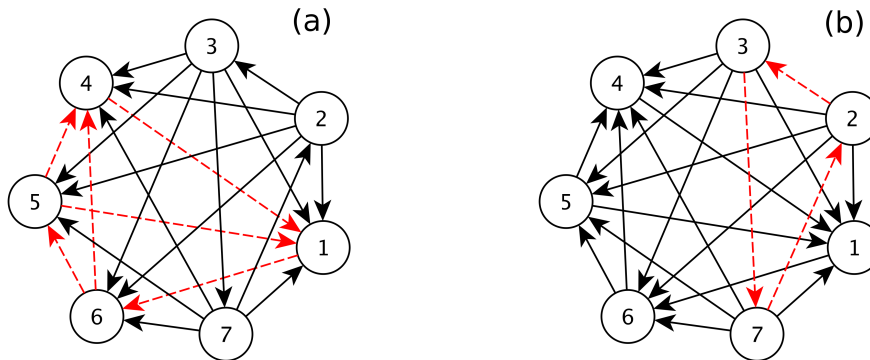


Abbildung 7.3: Vollständig verbundene, jedoch nicht stark zusammenhängende Netzwerke, entnommen aus [91, Abb. 17]. (a) Die Einheiten 1,4,5 und 6 bilden ein Unternetzwerk deren Informationen nicht zu allen Einheiten gelangen können, es ist  $|\gamma_{1,l}| = 1$ . (b) Transponiertes Netzwerk, hier bilden die Einheiten 2,3 und 7 ein Unternetzwerk, deren Informationen nicht alle anderen Einheiten erreichen können. Es ist  $|\gamma_{1,l}| < 1$ .

jedoch vollständig verbunden sind. Das bedeutet, dass es im Netzwerk Paare von Einheiten  $i$  und  $j$  gibt, mit einem Weg von  $i$  nach  $j$ , jedoch nicht von  $j$  nach  $i$ . Numerische Berechnungen des zweitgrößten Eigenwertes in [91] haben gezeigt, dass solche Netzwerke sowohl  $|\gamma_1| = 1$  als auch  $|\gamma_1| < 1$  aufweisen können. Ein Beispiel aus [91, Abb. 17] ist in Abb. 7.3 zu sehen. Abb. 7.3(b) ist hierbei das transponierte Netzwerk von Abb. 7.3(a), d. h. die Richtung aller Verbindungen wurde umgedreht. Beide Netzwerke besitzen ein Unternetzwerk, dessen Informationen nicht an alle Einheiten im Netzwerk gelangen können. So gibt es in Abb. 7.3(a) keinen Pfad von Einheit 1 nach Einheit 2, in Abb. 7.3(a) hingegen gibt es keinen Pfad von Einheit 2 nach Einheit 1. Trotz dieser Gemeinsamkeiten unterscheiden sich die beiden Netzwerke in ihrem Synchronisationsverhalten. Während Abb. 7.3(a) einen zweitgrößten Eigenwert  $|\gamma_{1,l}| = 1$  aufweist, ist bei Abb. 7.3(b)  $|\gamma_{1,l}| < 1$ . Somit ist eine vollständige Synchronisation unabhängig von den Verzögerungszeiten für Abb. 7.3(b) stets möglich. Für Abb. 7.3(a) hingegen muss erst die Stabilitätsgleichung in Abhängigkeit der Verzögerungszeiten gelöst werden, bevor eine Aussage über die vollständige Synchronisation getroffen werden kann.

Dieser Unterschied lässt sich mit dem Mischungsargument interpretieren. Dieses besagt, dass Einheiten miteinander isochron synchronisieren können, wenn sie Zugang zu einer isochronen Mischung aller relevanten Informationen haben. Von Bedeutung ist hierbei, dass nicht alle Informationen, bzw. nicht alle Trajektorien aller Einheiten für die Synchronisation relevant sind. Bei zusammenhängenden, jedoch nicht

stark zusammenhängenden Netzwerken lassen sich die Einheiten im Allgemeinen in zwei Gruppen einteilen. Zum einen gibt es Einheiten, von denen aus jede andere Einheit im Netzwerk erreicht werden kann. In Abb. 7.3(a) sind dies die Einheiten 2,3 und 7, in Abb. 7.3(b) sind dies die Einheiten 1,4,5 und 6. Diese Einheiten sind per Definition miteinander stark zusammenhängend verbunden, sie werden als *Masternetzwerk* bezeichnet.

Des Weiteren gibt es Einheiten, von denen aus nicht zu jeder anderen Einheit ein Pfad gefunden werden kann. Diese sind nicht notwendigerweise miteinander verbunden. Sie werden als *Unternetzwerk(e)* bezeichnet. In den hier gezeigten Beispielen handelt es sich stets um stark zusammenhängende Unternetzwerke, dies ist jedoch keine notwendige Bedingung. Notwendig für  $|\gamma_{1,l}| < 1$  ist nun lediglich eine vollständige Durchmischung des Masternetzwerkes. Die Informationen gelangen in alle Unternetzwerke und “überschreiben” wegen der Normierung der Kopplungsmatrizen die dort vorhandenen Informationen.

Dieser Vorgang wird in Abb. 7.4 mit dem bereits in Abschnitt 7.1 verwendeten Farbenmodell dargestellt. In diesem Beispiel bilden die Einheiten 1-4 das Masternetzwerk. Es handelt sich um das gleiche Netzwerk, das bereits in Abb. 7.1 untersucht wurde; eine vollständige Mischung findet statt. Zusätzlich bilden die Einheiten 5 und 6 ein Unternetzwerk, von dem aus kein Pfad ins Masternetzwerk führt. Wie in Abb. 7.4 zu sehen ist, mischt das Masternetzwerk und überschreibt die Informationen des Unternetzwerkes. Daraus lässt sich folgern, dass für eine vollständige Synchronisation nur die Mischung im Masternetzwerk relevant ist.

Dies erklärt somit  $|\gamma_{1,l}| = 1$  von Abb. 7.3(a), bzw.  $|\gamma_{1,l}| < 1$  von Abb. 7.3(b). Eine geeignetere Darstellung der Netzwerke aus Abb. 7.3 findet sich in Abb. 7.5. Hier sind Masternetzwerk und Unternetzwerk getrennt dargestellt. Das Masternetzwerk in 7.5(a), bestehend aus den Einheiten 2, 3 und 7, hat keinen Mischungspunkt, somit ist  $|\gamma_{1,l}| = 1$ . Hingegen enthält das Masternetzwerk in 7.5(b), bestehend aus den Einheiten 1, 4, 5 und 6, zwei Mischungspunkte sowie Zyklen der Länge 3 und 4, somit ist  $|\gamma_{1,l}| < 1$ .

### 7.3 Mischungsargument und optimale Kopplungsparameter

Je kleiner der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert  $\gamma_{1,l}$  des Netzwerkes ist, desto chaotischer darf für eine stabile Chaossynchronisation die Abbildung sein, die verwendet wird. Dies folgt aus der Master Stability Funktion, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben. Es ist demnach von Interesse, Kopplungsparameter zu finden, welche  $|\gamma_{1,l}|$  minimieren<sup>4</sup>. Dem Mischungsargument folgend kann man als entscheidende Faktoren die Längen der Zyklen sowie deren Verhältnisse identifizieren. In Netzwerken, welche zwei Zyklen  $L_1$  und  $L_2$  aufweisen, die sich in einem Mischungspunkt treffen, sei  $\sigma$  der Kopplungsparameter des kleineren Zyklus  $L_1$  und  $1 - \sigma$  der des größeren

<sup>4</sup>Eine Optimierung eines gerichteten Netzes, wenn sowohl Kopplungsparameter, als auch Topologie des Netzes bei gleichbleibender Größe des Netzes variabel sind, wurde in [94, 95] hergeleitet.

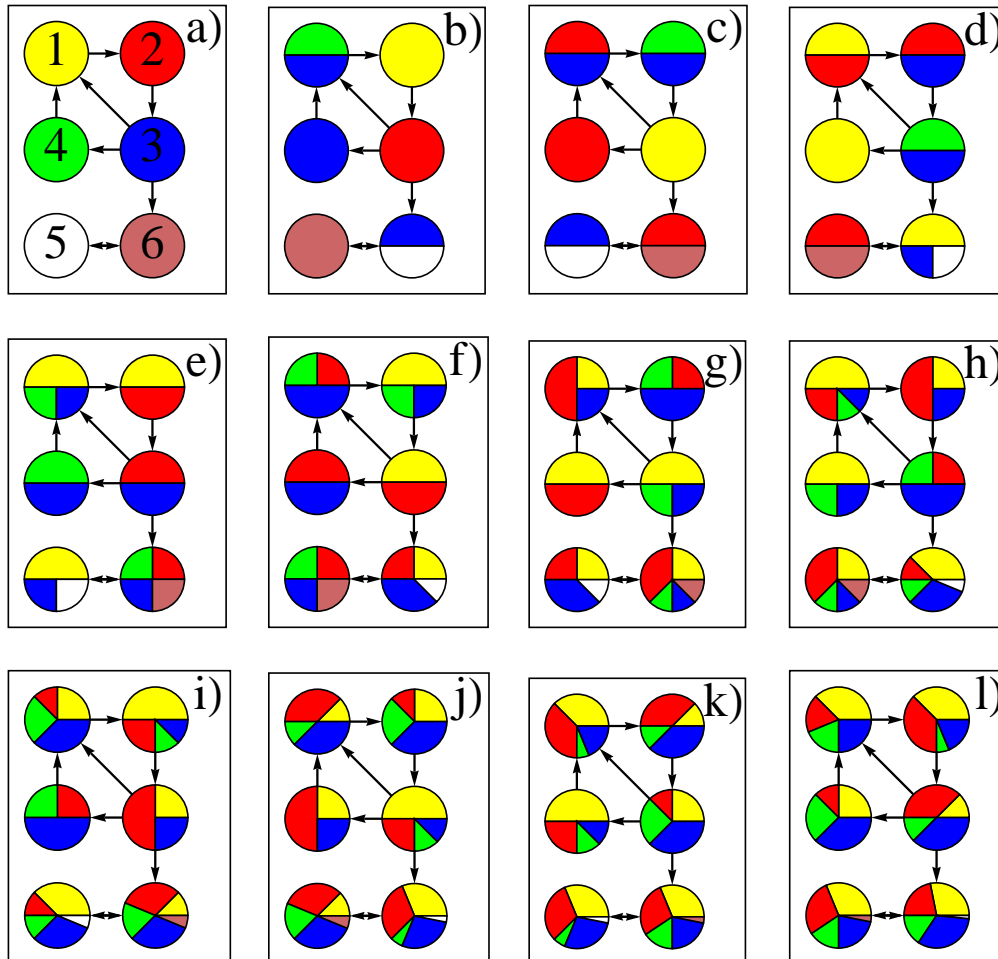


Abbildung 7.4: Mischungsprozess in einem nicht stark zusammenhängenden Netzwerk. Die Einheiten 5 und 6 bilden ein Unternetzwerk, dessen Informationen nicht zum Masternetzwerk gelangen können, welches aus den Einheiten 1-4 besteht. Das Masternetzwerk mischt vollständig. Durch Verdrängung der Information des Unternetzwerkes (lila und weiß) kann es zur vollständigen Synchronisation kommen.

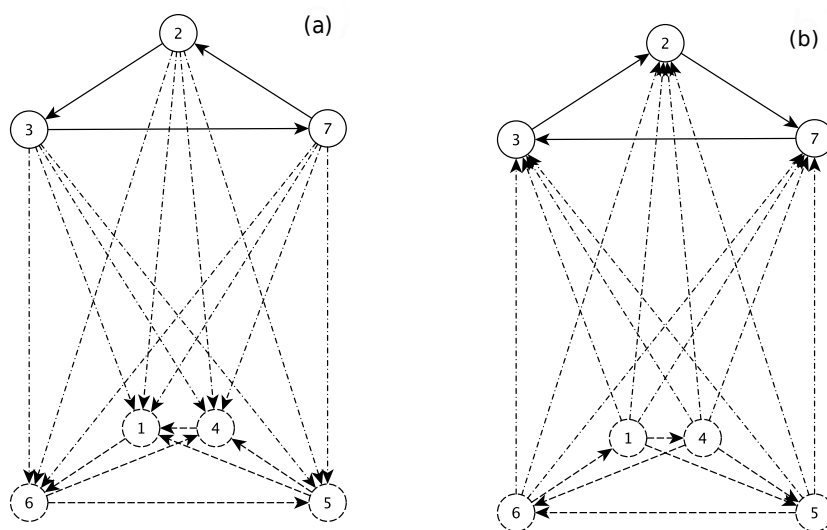


Abbildung 7.5: (a) Alternative Darstellung des Netzwerkes 7.3(a). Die Einheiten 2, 3 und 7 bilden das Masternetzwerk, welches das Unternetzwerk antreibt. Da das Masternetzwerk keinen Mischungspunkt aufweist, ist  $|\gamma_{1,l}| = 1$ . (b) Alternative Darstellung des Netzwerkes 7.3(b). Die Einheiten 1, 4, 5 und 6 bilden das Masternetzwerk welches das Unternetzwerk antreibt. Das Masternetzwerk hat zwei Mischungspunkte, die Einheiten 5 und 6, sowie teilerfremde Zyklen. Es ist somit  $|\gamma_{1,l}| < 1$ .



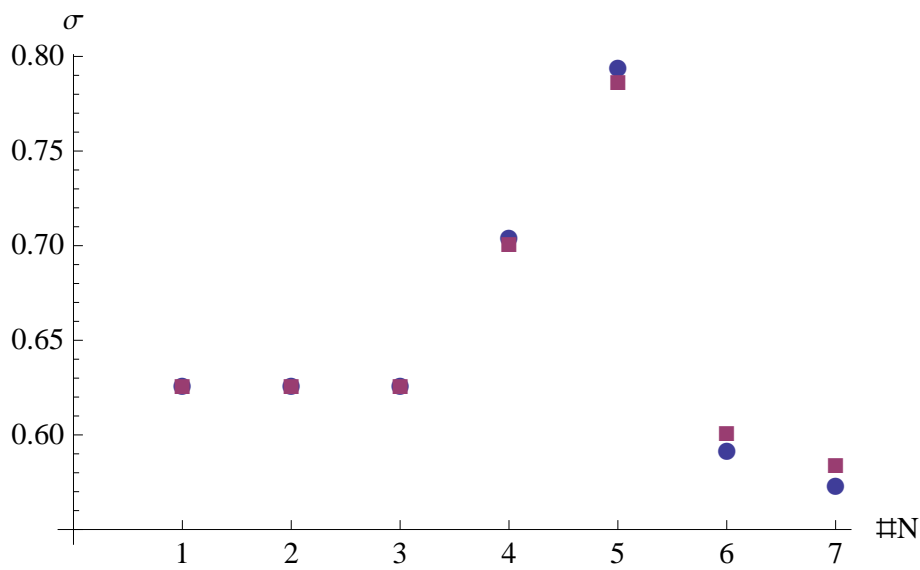


Abbildung 7.6: Optimale Kopplungsparameter für verschiedene Netzwerke. Blaue Punkte aus numerischen Berechnungen von F. Geißler aus [92, 93]. Violette Vierecke aus Gl. (7.3). Die untersuchten Netzwerke 1-7 sind in Abb. 7.7 aufgelistet, die verwendeten Werte in Tab. 7.1.

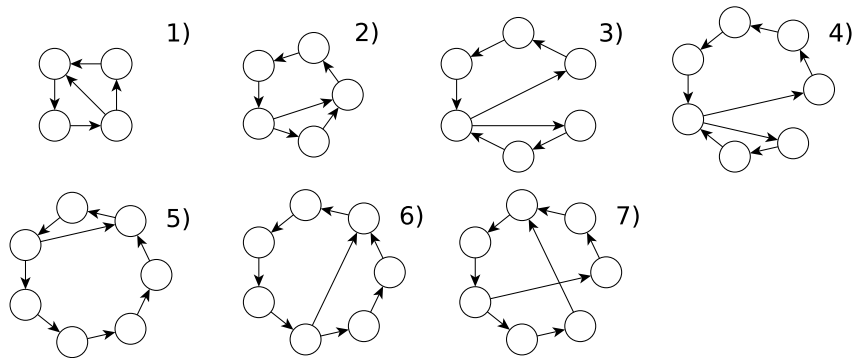


Abbildung 7.7: Aufstellung der in Abb. 7.6 verwendeten Netzwerke aus [92, Abb. 1, 5, 9] und [93, Abb. 1, 2, 3, 4]. Die dazugehörigen numerischen Werte für den optimalen Kopplungsparameter  $\sigma_{opt}$  aus [92, 93] sowie die mit Gl. (7.3) berechneten Werte finden sich in Tab. 7.1.

| #N | $\sigma_{opt,numerisch}$ | $\sigma_{opt,Gl.7.3}$ |
|----|--------------------------|-----------------------|
| 1  | 0.625                    | 0.625                 |
| 2  | 0.625                    | 0.625                 |
| 3  | 0.625                    | 0.625                 |
| 4  | 0.703358                 | 0.7                   |
| 5  | 0.793152                 | 0.785714              |
| 6  | 0.590578                 | 0.6                   |
| 7  | 0.571894                 | 0.583333              |

Tabelle 7.1: Tabelle der numerischen Werte für  $\sigma_{opt}$  aus [92, 93], sowie der entsprechenden Werte aus Gl. (7.3) für die in Abb. 7.7 dargestellten Netzwerke.

Zyklus  $L_2$ .

Es lässt sich folgende Formel aufstellen

$$\sigma_{opt} = 1 - \frac{L_1}{2L_2} \quad (7.3)$$

Gl. 7.3 gibt in guter Näherung den optimalen Kopplungsparameter  $\sigma_{opt}$  wieder, dessen  $|\gamma_{1,l}|$  minimal ist. Ein Vergleich zwischen Ergebnissen aus Gl. 7.3 und numerischen Ergebnissen ist in Abb. 7.6 sowie in Tab. 7.1 dargestellt. Die verwendeten Netzwerke sind in Abb. 7.7 dargestellt.

Der zweitgrößte Eigenwert lässt sich als betragsmäßig größter Wert aus folgender Gleichung berechnen

$$x^{L_2} - \sigma_{opt}x^{L_2-L_1} + \sigma_{opt} - 1 = 0 \quad (7.4)$$

welche aus dem Eigenwertproblem des Netzwerkes hervorgeht. Daraus folgt, dass für  $L_2 \rightarrow \infty$  bei endlichem  $L_1$  für den optimalen Kopplungsparameter  $\sigma_{opt} \rightarrow 1$  gilt, was einem Zerfall des Netzwerkes in zwei Subnetzwerke entspricht, was eine Synchronisation verhindert. Es zeigt sich zudem, dass es für die Synchronisation nicht von Bedeutung ist, ob sich die Zyklen über dieselben Einheiten erstrecken, oder nicht<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Selbiges wurde auch in [96] hergeleitet.

## 7.4 Mischungsargument und Potenzen der Kopplungsmatrix

Der Mischungsvorgang kann auch anhand des Potenzierens der Kopplungsmatrix  $G$  nachvollzogen werden. Der Mischungszustand eines Netzwerkes zum Zeitpunkt  $t$  wird hierbei an der Matrix  $G^t$  abgelesen. Die Kopplungsmatrix des Netzwerkes in Abb. 7.4 lautet

$$G_{(7.4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Die Spalten der Matrix  $G^t$  entsprechen den Farben  $C_j$  im Netzwerk, die Zeilen den Einheiten  $j$ . In jeder Reihe sind somit die Anteile der Farben  $C_j$  an der Einheit ablesbar. Den Spalten kann man entnehmen, auf welche Einheiten sich eine Farbe bereits verteilt hat. Man betrachte Zeitschritt  $t = 7$ , Abb. 7.4h). In Einheit 1 befinden sich zu diesem Zeitschritt die Farben  $C_1$ - $C_4$ , ihre Anteile lassen sich in Zeile 1 ablesen. Die Farben des Untersystems,  $C_5$  und  $C_6$  können per Definition nicht ins Mastersystem gelangen, weswegen die Spalten 5 und 6 in den Zeilen 1-4 stets Null sind.

$$G_{(7.4)}^7 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.375 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0.125 \\ 0.375 & 0.125 & 0.125 & 0.3125 & 0.0625 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Da die Zeilen der Kopplungsmatrix normiert sind, gehen für  $t \rightarrow \infty$  sämtliche Einträge in den Spalten des Untersystems gegen Null. In den Spalten  $C_{j_M}$ , wobei  $j_M$  die Einheiten des Mastersystems bezeichnet, ist hingegen für  $t \rightarrow \infty$  jeder Eintrag ungleich Null. Dies entspricht einer Verbreitung der durchmischten Informationen im Gesamtsystem und lässt auf  $|\gamma_{1,l}| < 1$  schließen. Im Wesentlichen handelt es sich bei einer solchen Kopplungsmatrix um eine ergodische Markov-Kette [97].

In gleicher Art lassen sich Netzwerke mit einer möglichen Untergittersynchronisation als reguläre Markov-Ketten darstellen. So lautet die Kopplungsmatrix des Netzwerkes in Abb. 7.2

$$G_{(7.2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

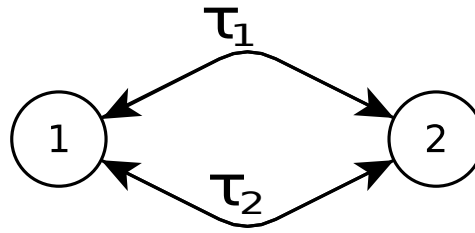


Abbildung 7.8: Zwei Einheiten mit zwei bidirektionalen Kopplungen und den Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .

Für  $t \rightarrow \infty$  lauten die potenzierten Matrizen

$$G_{(7.2)}^{t_3} \in \left\{ \left( \begin{array}{cccccc} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

wobei  $t_3 \in \{3n, 3n + 1, 3n + 2\}$  mit ganzzahligem  $n \rightarrow \infty$ . In jeder Einheit mischen stets nur zwei der sechs Farben, es handelt sich somit um Untergittersynchronisation mit drei Untergittern. Ein solches Netzwerk entspricht einer regulären Markov-Kette [97].

## 7.5 Mischungsargument in Netzwerken mit mehreren Verzögerungszeiten

In den Abschnitten 7.1 und 7.2 wurden Netzwerke ohne lokalen Term und mit nur einer Verzögerungszeit  $\tau = 1$  betrachtet. Man beachte hierbei, dass der Wert der Verzögerungszeit nicht notwendigerweise Eins sein muss, um dem Mischungsargument zu genügen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang lediglich, dass in den Abschnitten 7.1-7.2 Netzwerke mit nur *einer* Verzögerungszeit untersucht wurden. Ist  $\tau > 1$ , so gelten die dort gemachten Überlegungen jeweils für Zeitschritte  $t_\tau$ , welche Vielfache der Verzögerungszeit  $\tau$  sind.

In diesem Abschnitt werden Netzwerke mit mehreren Verzögerungszeiten betrachtet. Es wird gezeigt, dass durch das Einfügen sogenannter *virtueller Einheiten* auch in Netzwerken mit mehreren  $\tau_l$  das Mischungsargument verwendet werden kann. Virtuelle Einheiten zeichnen sich dadurch aus, dass sie Informationen nicht verarbeiten, sondern lediglich an ihre Nachbareinheiten weiterreichen.

Es soll nun ein Netzwerk betrachtet werden, welches die Verzögerungszeiten  $\tau_1 = \tau$  und  $\tau_2 = 2\tau$  aufweist. Man betrachte ein Netzwerk aus  $N = 2$  Einheiten, welche über

zwei bidirektionale Kopplungen mit  $\tau_1$  und  $\tau_2$  verbunden sind. In Abb. 7.8 ist ein solches Netzwerk dargestellt. Die Dynamik eines solchen Netzwerks wird beschrieben durch

$$x_t^i = \sigma_1 \sum_j^N G_{1,ij} f(x_{t-\tau}^j) + \sigma_2 \sum_j^N G_{2,ij} f(x_{t-2\tau}^j) \quad (7.8)$$

wobei  $G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Stabilitätsgleichung für die Störungsmoden  $k$  lautet

$$z_k^{2\tau} = \sigma_1 \alpha \gamma_{k,1} z_k^\tau + \sigma_2 \alpha \gamma_{k,2} = \beta_{k,1} z_k^\tau + \beta_{k,2} \quad (7.9)$$

Stabile Chaossynchronisation ist somit für folgende Parameter gewährleistet

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} (\beta_{k,1} - \sqrt{\beta_{k,1}^2 + 4\beta_{k,2}}) \right| &< 1 \\ \left| \frac{1}{2} (\beta_{k,1} + \sqrt{\beta_{k,1}^2 + 4\beta_{k,2}}) \right| &< 1 \end{aligned} \quad (7.10)$$

und Instabilität findet sich für  $|\beta_{k,1}| + |\beta_{k,2}| > 1$ . Das Gebiet ist in Abb. 7.9 zu sehen, wobei für das in Abb. 7.8 gezeigte Netzwerk das Gebiet  $\beta_{k,1}, \beta_{k,2} < 0$  relevant ist.

Man betrachte nun den Informationsfluss in Abb. 7.8. Über eine Verbindung wird ein Signal gesendet, das nach der Zeit  $\tau$  die jeweils andere Einheit erreicht. Das zur gleichen Zeit losgeschickte Signal über die andere Verbindung erreicht den Nachbarn nach  $2\tau$ . Das Netzwerk wird nun leicht modifiziert, indem virtuelle Einheiten eingefügt werden, welche das Signal auf seinem Weg nicht verändert, sondern lediglich weiterreicht. Zwischen den Einheiten gibt es nun nur noch die Verzögerungszeit  $\tau$ . Das entsprechende Schema ist in Abb. 7.10 zu sehen. Die Stabilitätsgleichung der Störungsmoden  $k$  wird ebenfalls angepasst. Sie lautet nun

$$z_k^\tau = \theta_k \quad (7.11)$$

wobei  $\theta_k$  die Eigenwerte der folgenden Matrix sind

$$G_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{k,1} & 0 & \beta_{k,2} \\ \beta_{k,1} & 0 & \beta_{k,2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Die Eigenwerte lauten

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2} (-\beta_{k,1} - \sqrt{\beta_{k,1}^2 - 4\beta_{k,2}}) \\ \theta_1 &= \frac{1}{2} (-\beta_{k,1} + \sqrt{\beta_{k,1}^2 - 4\beta_{k,2}}) \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} (\beta_{k,1} - \sqrt{\beta_{k,1}^2 + 4\beta_{k,2}}) \\ \theta_3 &= \frac{1}{2} (\beta_{k,1} + \sqrt{\beta_{k,1}^2 + 4\beta_{k,2}}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

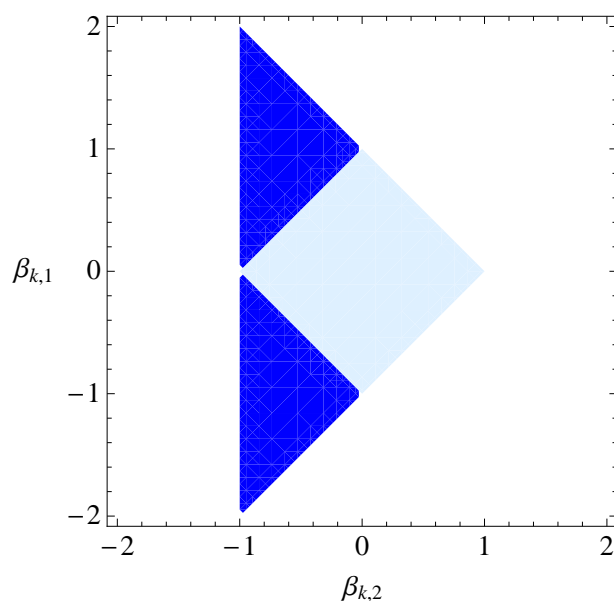


Abbildung 7.9: Stabilitätsgebiet für Netzwerke mit den Verzögerungszeiten  $\tau_1 = \tau$  und  $\tau_2 = 2\tau$ . Eine chaotische Trajektorie ist außerhalb des hellblauen Gebietes gewährleistet. Für ein Paar mit zwei bidirektionalen Kopplungen, dargestellt in Abb. 7.8 ist das Gebiet  $\beta_{k,1}, \beta_{k,2} < 0$  relevant.

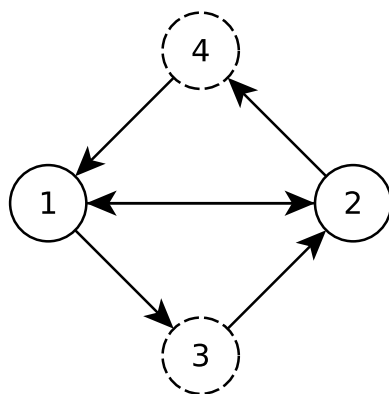


Abbildung 7.10: Zwei Einheiten mit einer bidirektionalen Kopplung und zwei virtuellen Einheiten 3 und 4, welche eine zweite bidirektionale Kopplung mit doppelt so langer Verzögerungszeit nachahmen.

Relevant sind hierbei die Eigenwerte zu den Eigenvektoren, die die virtuelle Einheiten in die gleiche Richtung stören, hier  $\theta_2$  und  $\theta_3$ . Somit stimmt das Stabilitätsgebiet mit Gl. (7.10) und Abb. 7.9 überein.

Das Mischungsargument lässt sich somit auch auf Netzwerke mit mehreren Verzögerungszeiten anwenden und durch das Einfügen virtueller Einheiten veranschaulichen. Wichtig für eine stabile Synchronisation ist das Mischen von Informationen in den relevanten Einheiten und die Verbreitung dieser gemischten Informationen im Netzwerk. Dies ist auch über mehrere Verzögerungszeiten möglich. Weitere Beispiele hierzu finden sich in [88].





## 8 Exemplarische Darstellung der Ergebnisse in anderen chaotischen Systemen

In den Kapiteln 3 bis 6 wurden Ergebnisse für Bernoulli-Netzwerke hergeleitet. Das Mischungsargument aus Kap. 7 liefert jedoch Hinweise, warum es möglich ist, die in Bernoulli-Netzwerken gefundenen Ergebnisse auch auf einige andere chaotische Netzwerke zu verallgemeinern.

Stabile Chaossynchronisation hängt zum einen von der verwendeten Dynamik, bzw. Abbildung der einzelnen Einheiten und der Dynamik, bzw. Abbildung ab, die die gekoppelten Einheiten charakterisieren [62]. In Kap. 3 bis 6 handelt es sich hier um die Bernoulli-Abbildung. Je chaotischer diese ist, desto schwieriger ist eine stabile Synchronisation. Im Falle der Bernoulli-Netzwerke ist die Steigung  $\alpha$  in  $\beta_{k,l}$  der maßgebliche Parameter. Des Weiteren ist die Topologie des Netzwerkes von Bedeutung, insbesondere der zweitgrößte Eigenwert des Netzes [5].

Anschaulich lassen sich die genannten Faktoren mit dem Informations-, oder Signalfluss im Netz erläutern. So ist es zum einen wesentlich, in welcher Art und Weise die Signale, bzw. Informationen im Netz miteinander in den Mischungseinheiten vermischt werden, wie in Kap. 7 gezeigt. Zum anderen entspricht die Chaotizität der einzelnen Abbildungen der Stärke der Veränderung des Signals in jeder einzelnen der besuchten Einheiten. Je chaotischer die einzelnen Abbildungen sind, d. h. je stärker die Einheiten das Signal verändern, nach desto weniger besuchten Einheiten muss die Mischung erfolgen, soll noch eine Synchronisation erreicht werden.

Dieses Prinzip gilt nicht nur für Bernoulli-Netzwerke, sondern lässt sich auch in anderen chaotischen Netzwerken beobachten. Aus diesem Grund lassen sich etliche der für Bernoulli-Netzwerke hergeleiteten Ergebnisse auf andere Systeme übertragen. Insbesondere gilt dies für Netzwerke gekoppelter chaotischer Halbleiterlaser, welche durch die Lang-Kobayashi-Gleichungen modelliert werden [11–13, 76]. Doch auch mit iterativen Abbildungen mit nichtkonstanten Steigungen, wie der Zeltabbildung, lassen sich einige der Ergebnisse wiederfinden [48]. Es zeigt sich jedoch, dass in einem Netzwerk logistischer Abbildungen die Ergebnisse eines Bernoulli-Netzwerkes nur sehr eingeschränkt anzuwenden sind. Durch die invasive Kopplung verschiebt sich hier die Verteilung der Ableitung auf eine Weise, die die Chaotizität des Netzwerkes unterdrücken kann [45, 98, 99].

Einige Vergleiche der hier hergeleiteten Ergebnisse mit verschiedenen Systemen wie der Rössler Abbildung [100], der logistischen Abbildung, sowie den Lang-Kobayashi-Gleichungen werden exemplarisch in diesem Kapitel vorgestellt. Für einen ausführ-

lichen Vergleich insbesondere der Lang-Kobayashi-Gleichungen, sowie der Zeltabbildung mit der Bernoulli-Abbildung wird auf die Arbeit von S. Heiligenthal u. a. in [48] verwiesen.

In Abschnitt 8.1 wird die Größe des Synchronisationsgebietes in Abhängigkeit der Verzögerungszeit  $\tau$  untersucht. Abschnitt 8.2 behandelt die logistische Abbildung im Zusammenhang mit den in [41, 89] gefundenen Linien im  $(\tau_1, \tau_2)$ -Phasendiagramm, Abschnitt 8.3 die Lang-Kobayashi-Gleichungen sowie experimentelle Ergebnisse für gekoppelte Halbleiterlaser.

## 8.1 Rössler-Netzwerk ohne Rückkopplung mit großer Verzögerungszeit

Das Rössler System [100] ist ein System aus drei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die folgendermaßen lauten

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) &= b + [x(t) - c]z(t)\end{aligned}\tag{8.1}$$

Man betrachte nun ein Netzwerk, für dessen Kopplungsmatrix  $\sum_j G_{ij} = 0$  gilt, also mit einem diffusiven Kopplungsschema. Die Einheiten im Netzwerk seien zeitverzögert über die Kopplungsfunktion  $H = \begin{pmatrix} x(t - \tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  verbunden. Die Eigenmoden  $k$  sind somit über folgende Differentialgleichungen definiert, wobei in dieser Notation auf den Index  $k$  verzichtet wurde

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1(t) &= -\xi_2(t) - \xi_3(t) + \beta\xi_1(t - \tau) \\ \dot{\xi}_2(t) &= \xi_1(t) + a\xi_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) &= z(t)\xi_1(t) + [x(t) - c]\xi_3(t)\end{aligned}\tag{8.2}$$

Hierbei ist  $\beta = \sigma\gamma_k$ , wobei  $\sigma$  der Kopplungsparameter ist und  $\gamma_k$  ein Eigenwert der Kopplungsmatrix  $G$ . Da hier  $\sum_j G_{ij} = 0$  ist der Eigenwert der Störungsmode parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit  $\gamma_0 = 0$ . Die Trajektorie entspricht der des ungekoppelten Systems und ist für die gewählten Parameter ( $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 7$ ) chaotisch.

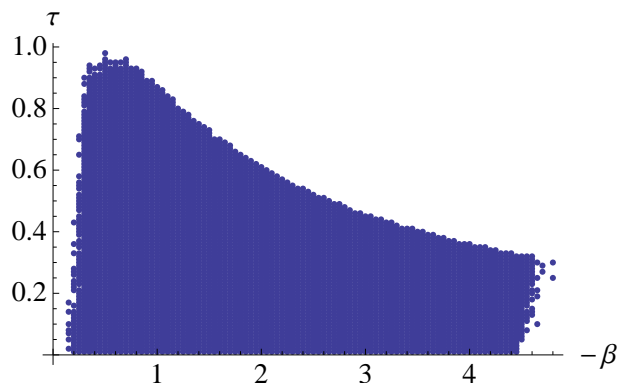


Figure 8.1: Synchronisationsgebiet für ein diffusiv gekoppeltes Rössler-Netzwerk in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  und von  $\beta$ . Es ist  $\beta = \sigma\gamma_k$ , wobei  $\sigma$  der Kopplungsparameter ist und  $\gamma_k$  ein Eigenwert der Kopplungsmatrix  $G$ . Für große Werte von  $\tau$  ist keine stabile Chaossynchronisation möglich, vgl. [82].

Man berechne nun numerisch mit  $\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix}$  den Lyapunov-Exponenten  $\lambda$ , der wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2t} \ln \frac{\int_t^{t+\tau} |\vec{\xi}(t)|^2 dt}{\int_0^\tau |\vec{\xi}(t)|^2 dt} \\ &= \frac{1}{2t} \ln \frac{\sum_t^{t+\tau} \left[ \left( \dot{\xi}_1(t)\Delta t \right)^2 + \left( \dot{\xi}_2(t)\Delta t \right)^2 + \left( \dot{\xi}_3(t)\Delta t \right)^2 \right]}{\sum_0^\tau \left[ \left( \dot{\xi}_1(t)\Delta t \right)^2 + \left( \dot{\xi}_2(t)\Delta t \right)^2 + \left( \dot{\xi}_3(t)\Delta t \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (8.3)$$

$\lambda$  wird nun in Abhängigkeit von  $\tau$  und  $\beta$  untersucht<sup>1</sup>. Chaossynchronisation ist möglich für das in Abb. 8.1 dargestellte Gebiet, für das  $\lambda$  negative Werte annimmt. Für sehr große Werte von  $\tau$  nimmt das Synchronisationsgebiet ab bis es schließlich ganz verschwindet [82]. Dies entspricht dem in Kap. 4 hergeleiteten Ergebnis.

## 8.2 Logistische Abbildung mit zwei Verzögerungszeiten

In Abschnitt 5.2 wurde der Zusammenhang zwischen den in [41, 89] gefundenen Linien im  $(\tau_1, \tau_2)$ -Diagramm und den Symmetrien der Stabilitätsgleichung erläutert.

<sup>1</sup>Es wurde hierbei  $\Delta t = 10^{-3}$  gewählt. Für  $\Delta t = 10^{-4}$  und  $\Delta t = 10^{-5}$  ändert sich das Ergebnis nicht.

In diesem Abschnitt soll die Korrelation gekoppelter logistischer Abbildungen in Abhängigkeit der beiden Verzögerungszeiten untersucht werden<sup>2</sup>.

Die logistische Abbildung [101, 102] ist definiert als

$$f(x) = r x (1 - x) \quad (8.4)$$

wobei hier  $r = 4$  gewählt wurde, ein Parameter, für den die logistische Abbildung chaotisch ist. Man betrachte nun zwei Einheiten, die über zwei bidirektionale Kopplungen mit  $\tau_1$  und  $\tau_2$  verbunden sind, wie in Abb. 7.8 gezeigt. Man beachte, dass es sich hier um eine invasive und nicht mehr um eine diffusive Kopplung wie in Abschnitt 8.1 handelt. Die dynamischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x_t^{(1)} &= \eta_0 f(x_{t-1}^{(1)}) + \sigma_1 f(x_{t-\tau_1}^{(2)}) + \sigma_2 f(x_{t-\tau_2}^{(2)}) \\ x_t^{(2)} &= \eta_0 f(x_{t-1}^{(2)}) + \sigma_1 f(x_{t-\tau_1}^{(1)}) + \sigma_2 f(x_{t-\tau_2}^{(1)}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

In Simulationen wird die Kreuzkorrelation dieses bidirektional gekoppelten Paares ohne Rückkopplung für mehrere Kopplungsparameter in Abhängigkeit der Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  untersucht. Die verwendete Kreuzkorrelation  $C$  berechnet sich aus folgender Formel

$$C = \frac{\sum_t \left[ \left( x_t^{(1)} - \bar{x}^{(1)} \right) \cdot \left( x_t^{(2)} - \bar{x}^{(2)} \right) \right]}{\sqrt{\sum_t \left( x_t^{(1)} - \bar{x}^{(1)} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_t \left( x_t^{(2)} - \bar{x}^{(2)} \right)^2}} \quad (8.6)$$

wobei  $\bar{x}^{(i)}$  Mittelwerte sind. Die Startwerte der beiden Einheiten sind fast identisch ( $x_{t_0}^{(1)} = 0.99999 x_{t_0}^{(2)}$ ). In Abb. 8.2 sind für die Werte  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$  (Abb. 8.2(a)) sowie für die Werte  $\eta_0 = 0.02$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.49$  (Abb. 8.2(b)) die  $\tau_1, \tau_2$  Werte eingetragen, für die die Einheiten des gekoppelten Paares eine Kreuzkorrelation von  $C > 0.99$  aufweisen. Für ein doppelt bidirektional gekoppeltes Paar sei das Verhältnis der Verzögerungszeiten  $\tau_2/\tau_1 = p/q$ , wobei  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. Stabile Chaossynchronisation im Bernoulli-Netzwerk ist ausgeschlossen, wenn  $p$  und  $q$  beide ungerade sind. Man betrachte nun die Linien in Abb. 8.2(a). Sie folgen z. B. den Gleichungen  $\tau_{1,2} = 3\tau_{2,1} + 1$ ,  $\tau_{1,2} = 2\tau_{2,1}$ ,  $\tau_{1,2} = \tau_{2,1} + 1$ .  $p$  und  $q$  sind somit nicht beide ungerade. Anders hingegen in Abb. 8.2(b). Hier existieren für die Verzögerungszeiten die Gleichungen  $\tau_{1,2} = 7\tau_{2,1}$ , sowie  $3\tau_{1,2} = 5\tau_{2,1}$ . Dies ist möglich, da im logistischen Netzwerk durch die invasive Kopplung die Trajektorie zu einer nicht chaotischen Trajektorie geändert wird. Dies geschieht durch eine Veränderung der Verteilung der Werte der Ableitung, welche über die Stabilitätsfunktion eine Minderung des Lyapunov-Exponenten nach sich zieht.

Die in Abb. 8.2(a) und (b) gefundenen Linien werden auf ihre Chaotizität überprüft. Hierzu wurde ein zweites doppelt bidirektional gekoppeltes Paar für die in Abb. 8.2(a) und (b) gefundenen Punkte mit fast identischen Startbedingungen simuliert und die Kreuzkorrelation  $C_{II}$  zwischen den beiden Paaren berechnet. Handelt

<sup>2</sup>In Zusammenarbeit mit M. Zigzag.

es sich um chaotische Systeme, so ist die Kreuzkorrelation  $C_{II}$  zwischen beiden Paaren niedrig. Für ein doppelt bidirektional gekoppeltes Bernoulli-Paar ist eine Verteilung der Kreuzkorrelation  $C_{II}$  in Abb. 8.3 dargestellt. Hierzu wurde  $C_{II}$  für alle  $(\tau_1, \tau_2)$ -Werte ermittelt, für die die Kreuzkorrelation der beiden Partner innerhalb eines Paares  $C > 0.99$  ergaben.

Es zeigt sich für das logistische Paar in Abb. 8.2(c) und (d), dass bis auf zwei Linien alle gefundenen Synchronisationsparameter zu einer nicht chaotischen Trajektorie führen. Es handelt sich somit nicht um stabile Chaossynchronisation im in dieser Arbeit untersuchten Sinn, da das Chaos des Gesamtsystems durch die Synchronisation unterdrückt wird. Dieses Ergebnis ist eng verwandt mit den Ergebnissen aus der Chaossteuerung, in der die Dynamik eines Netzes durch einen zeitverzögerten Term auf eine periodische Bahn gezwungen wird [42, 43]. Eine Untersuchung des in diesem Abschnitt gefundenen Phänomens findet sich für Netzwerke ohne Verzögerungszeit z. B. in [45, 98, 99], ebenso wie das Auftreten von Chaos durch invasive Kopplung in einem Netzwerk aus nicht chaotischen Einheiten.

Dass Chaos durch invasive Kopplung im logistischen Netz unterdrückt werden kann, ist wesentlich für eine Übertragung der in den Kapiteln 3-6 hergeleiteten Ergebnisse. Die invasive Kopplung führt bei logistischen Netzwerken zum Auftreten einer anderen Dynamik; es handelt sich nicht mehr um stabile Chaossynchronisation. Eine mögliche Erklärung dieses Phänomens ist das Vorhandensein unendlich vieler periodischer Fenster innerhalb des chaotischen Bereichs bei der logistischen Abbildung [49, S. 231].

Es ist somit nicht möglich, beliebige Ergebnisse eines Bernoulli-Netzwerkes auf ein logistisches Netzwerk zu übertragen. Dennoch gibt es Ähnlichkeiten, wie beispielsweise bei der Synchronisation eines Paares mit einer Rückkopplung und einer Kopplung, die sich durch die gemeinsame Verzögerungszeit  $\tau$  auszeichnen [103].

## 8.3 Lang-Kobayashi-Gleichungen mit zwei Verzögerungszeiten

### 8.3.1 Die Jacobi-Matrizen der Lang-Kobayashi-Gleichungen

Wie in Abschnitt 8.2 gezeigt ist es nicht möglich, die für ein Bernoulli-Netzwerk hergeleiteten Ergebnisse auf ein beliebiges chaotisches Netzwerk zu übertragen. So kann es vor allem in logistischen Netzwerken zu einer Unterdrückung des Chaos kommen. Es sollen nun Netzwerke gekoppelter chaotischer Halbleiterlaser untersucht werden, welche durch die Lang-Kobayashi-Gleichungen modelliert werden [11–13, 104, 105].

Die semiklassischen Lasergleichungen eines Halbleiterlasers lauten [106]

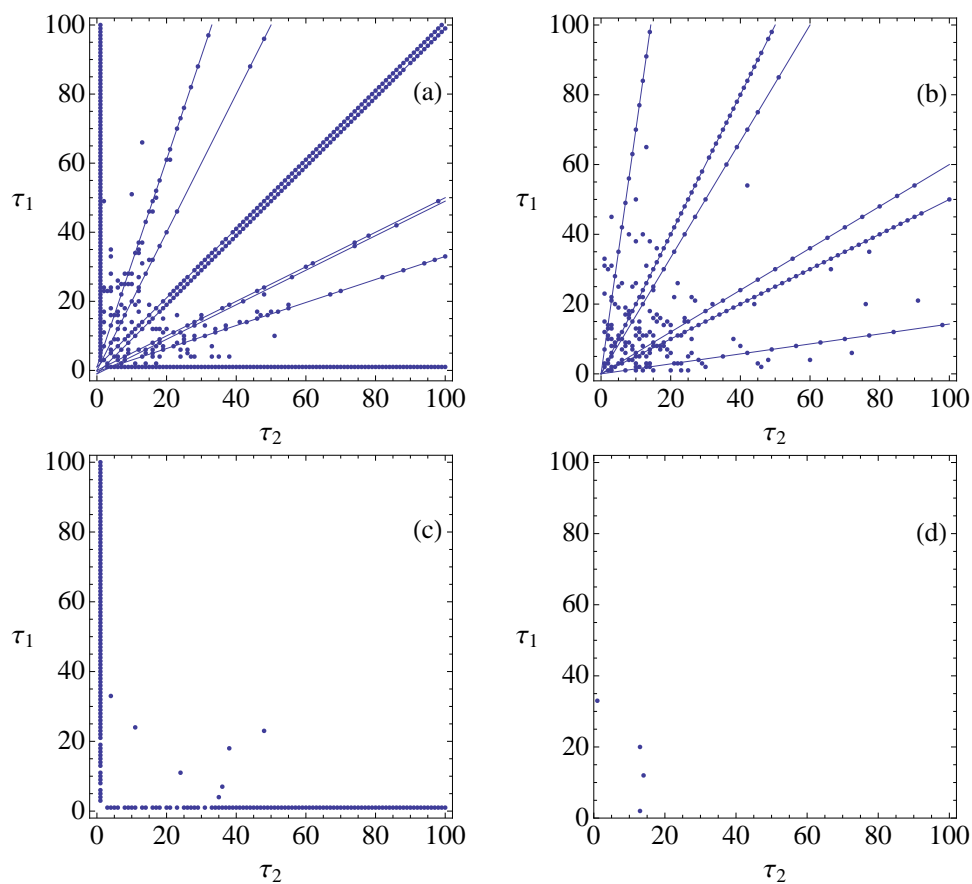


Figure 8.2: Bidirektional gekoppeltes Paar mit zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1, \tau_2$  in den Kopplungen. Aufgetragen sind Punkte im  $\tau_1, \tau_2$ -Raum mit einer Kreuzkorrelation von  $C > 0.99$ . Die verwendeten Parameter sind  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$  für (a) und  $\eta_0 = 0.02$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.49$  für (b). Es finden sich in (b) Werte für Verhältnisse  $\tau_1/\tau_2$ , die für ein chaotisch synchronisiertes Bernoulli-System ausgeschlossen sind, wie in Kap. 5 gezeigt. Im logistischen Netzwerk sind sie möglich, da durch die invasive Kopplung die Trajektorie zu einer nichtchaotischen Trajektorie abgeändert wird. Dies lässt sich durch die Simulation eines zweiten bidirektionalen Paares mit fast identischen Startbedingungen zeigen. In (c) und (d) sind die Verzögerungszeiten eingezeichnet, für die die Kreuzkorrelation zwischen beiden Paaren  $C_{II} < 0.9$  beträgt.

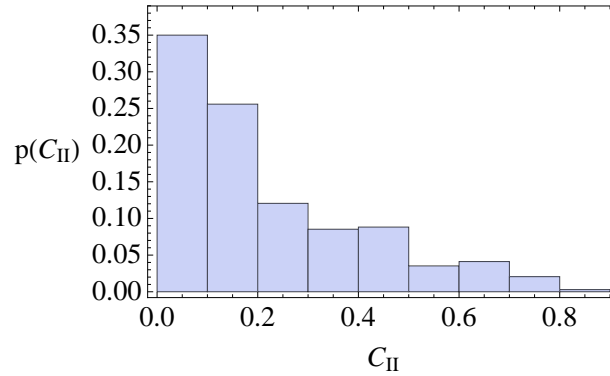


Figure 8.3: Verteilung der Kreuzkorrelation  $C_{II}$  zwischen zwei doppelt bidirektional gekoppelten Bernoulli-Paaren, welche nicht miteinander verbunden sind. Es wurde  $C_{II}$  für diejenigen Verzögerungszeiten  $\tau_1, \tau_2$  berechnet, für welche die Einheiten innerhalb der Paare eine Kreuzkorrelation von  $C > 0.99$  aufweisen. Es ist  $\eta_0 = 0.02$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.49$ .

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left[ \frac{i\alpha}{2}G(N) + \frac{1}{2}\left(G(N) - \frac{1}{\tau_p}\right) \right] E(t) \quad (8.7)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = J - \gamma N(t) - G(N)|E(t)|^2 \quad (8.8)$$

wobei Gl (8.7) das komplexe Feld  $E(t)$  beschreibt, welches mit Hilfe der Maxwell-Gleichung ohne Quantisierung des Feldes, hergeleitet wird [106, S. 12]. Gl. (8.8) ist die Materiegleichung, welche quantenmechanisch hergeleitet wird und die Anzahl der invertierten Ladungsträger  $N(t)$  angibt [106].  $\alpha$  bezeichnet den Linienverbreiterungsfaktor,  $G(N)$  die Gewinnfunktion,  $\frac{1}{\tau_p}$  die optische Verlustrate.  $J$  ist der Pumpstrom und  $\gamma$  die Verlustrate der Ladungsträger.

Lenkt man einen Teil des Laserstrahls wieder zurück in den Resonator, wird der Laser chaotisch [11]. Für eine Beschreibung der Dynamik des Lasers genügt es, den Einfluss der Rückkopplung auf  $E(t)$  zu berücksichtigen, Gl. (8.8) bleibt unverändert. Die Dynamik des komplexen Feldes  $E(t)$  lautet nun

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left[ \frac{i\alpha}{2}G(N) + \frac{1}{2}\left(G(N) - \frac{1}{\tau_p}\right) \right] E(t) + \kappa E(t - \tau)e^{-i\omega_0\tau} \quad (8.9)$$

wobei  $\omega_0$  die Frequenz des Lasers ist,  $\kappa$  die Rückkopplungsstärke und  $\tau$  die Verzögerungszeit, die das Laserlicht benötigt, um zurück in den Resonator gekoppelt zu werden.

Für eine Simulation der Lasergleichungen spaltet man üblicherweise das komplexe Feld mit dem Ansatz  $E(t) = E_0(t)e^{i\phi(t)}$  in seine Amplitude  $E_0(t)$  und seine Phase  $\phi(t)$  auf. Die Dynamiken von Amplitude und Phase lassen sich mit folgenden Gleichungen beschreiben:

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = \frac{1}{2} \left( G(N) - \frac{1}{\tau_p} \right) E_0(t) + \kappa E_0(t - \tau) \cos[\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t - \tau)] \quad (8.10)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{1}{2}G(N)\alpha - \kappa \frac{E_0(t - \tau)}{E_0(t)} \sin[\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t - \tau)] \quad (8.11)$$

Ein anderer Ansatz, der zum gleichen Ergebnis führt, ist die Aufteilung des komplexen Feldes in seinen Real- und Imaginärteil.

Der Ansatz lautet  $E(t) = \text{Re}[E(t)] + i\text{Im}[E(t)] = R(t) + iI(t)$ . Mit diesem Ansatz und  $e^{-i\omega_0\tau} = \cos(\omega_0\tau) - i\sin(\omega_0\tau)$  erhält man aus Gl. (8.9) als Realteil des komplexen Feldes  $E(t)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R(t) = & -\frac{\alpha}{2}G(N)I(t) + \frac{1}{2} \left[ G(N) - \frac{1}{\tau_p} \right] R(t) \\ & + \kappa R(t - \tau) \cos(\omega_0\tau) + \kappa I(t - \tau) \sin(\omega_0\tau) \end{aligned} \quad (8.12)$$

und für den Imaginärteil

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) = & \frac{\alpha}{2}G(N)R(t) + \frac{1}{2} \left[ G(N) - \frac{1}{\tau_p} \right] I(t) \\ & - \kappa R(t - \tau) \sin(\omega_0\tau) + \kappa I(t - \tau) \cos(\omega_0\tau) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Für die Berechnung der Master Stability Funktion ist die Berechnung der Jacobi-Matrizen der lokalen Funktion und der Kopplungsfunktionen notwendig [5, 35]. Verwendet man Gl. (8.12) und Gl. (8.13), zeigt sich, dass die Jacobi-Matrizen der Kopplungen konstant für feste Werte von  $\omega_0$  und für eine konstante Verzögerungszeit  $\tau$  sind. Dies gilt für Rückkopplungen und externe Kopplungen, lediglich die Jacobi-Matrix des lokalen Terms ist nichtkonstant. Die Verteilung der Werte der Jacobi-Matrix des lokalen Terms wurde von S. Heiligenthal untersucht [107].

Dass die Jacobi-Matrizen der Rückkopplung und der Kopplung konstant sind, lässt vermuten, dass die Ergebnisse aus Bernoulli-Netzwerken auch auf Lang-Kobayashi-Netzwerke anwendbar sind. Die nichtkonstante Jacobi-Matrix des lokalen Terms entspricht der Verteilung der Steigung des lokalen Terms in einem Netzwerk iterativer Abbildungen. Ein solches Modell wurde in [108] untersucht. So zeigt sich in [108, S. 79], dass beispielsweise die in Kap. 5 gefundenen Symmetrien durch gaußverteilte Störungen der  $\beta_{k,l}$  nicht zerstört werden. Dies ist ein Hinweis auf die Möglichkeit der Übertragung der in Bernoulli-Netzwerken erzielten Ergebnisse auf Netzwerke chaotischer Halbleiterlaser.



### 8.3.2 Bernoulli, Lang-Kobayashi und experimentelle Ergebnisse in einem System mit zwei Verzögerungszeiten

Man betrachte nun erneut ein Paar ohne Rückkopplungen, welches über zwei bidirektionale Kopplungen mit den Verzögerungszeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  verbunden ist, wie in Abb. 7.8 gezeigt.

Laut den Ergebnissen aus Kap. 5 und 7 ist Synchronisation für ein solches Bernoulli-Netzwerk nicht möglich, wenn beide teilerfremde Variablen  $p$  und  $q$  aus  $\tau_2/\tau_1 = p/q$  ungerade sind. Simulationen der Lang-Kobayashi-Gleichungen eines solchen Systems zeigen, dass für solche Werte nur geringe Korrelationen zwischen den beiden Einheiten gefunden werden können, eine Synchronisation also nicht möglich ist. Somit bestätigen die Simulationen der Lasergleichungen die Ergebnisse der Bernoulli-Netzwerke. Auch experimentelle Untersuchungen wurden zu diesem Modell durchgeführt [65], die Ergebnisse aller drei Untersuchungen sind in Abb. 8.4 dargestellt. Für die Lang-Kobayashi-Gleichungen wurde eine Zeitverzögerung auf  $\tau_1 = 10$  ns fixiert,  $\tau_2$  wurde variiert. Die Kopplungsparameter zwischen den beiden Lasern betragen  $\sigma_1 = \sigma_2 = 50 \text{ ns}^{-1}$  und entsprachen wie alle anderen Parameter denen des Experiments. Die Ergebnisse des Bernoulli-Paares wurden ebenfalls aus einer Simulation gewonnen. Da es keine kanonische Umrechnung zwischen den Parametern eines Bernoulli-Netzwerks und eines Lang-Kobayashi-Netzwerks gibt, wurden die Kopplungsparameter derart gewählt, dass eine optimale Übereinstimmung zwischen beiden Systemen erzielt wurde. Dies resultierte in den Bernoulli-Parametern  $\eta_0\alpha = 0.45$  und  $\sigma_1\alpha = \sigma_2\alpha = 0.3$ . Wie in Abb. 8.4 gezeigt, stimmen alle drei Systeme im Rahmen der Standardabweichung in ihren Ergebnissen überein.

Ein umfangreicher Vergleich der mit Hilfe der Master Stability Funktion für Bernoulli-Netzwerke gefundenen Ergebnisse mit Ergebnissen der Lang-Kobayashi-Gleichungen ist in [48] zu finden.

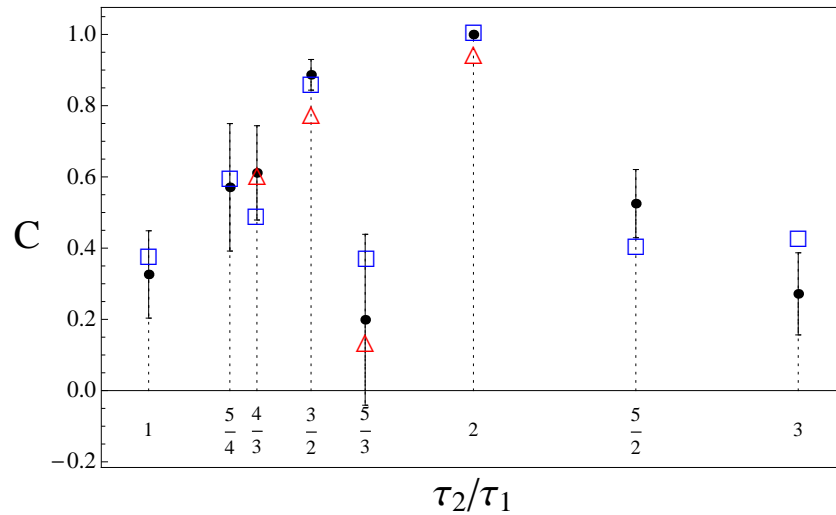


Figure 8.4: Entnommen aus [65, Abb. 3]. Für verschiedene Verhältnisse der Verzögerungszeiten  $\tau_2/\tau_1$  wird die Kreuzkorrelation eines doppelt bidirektional gekoppelten Paares dargestellt. Abgebildet sind Ergebnisse aus Simulationen eines Bernoulli-Paares (Quadrate), eines Lang-Kobayashi-Paares (Punkte) und experimentelle Ergebnisse zweier gekoppelter Halbleiterlaser (Dreiecke). Die experimentellen Ergebnisse stammen aus der Arbeitsgruppe von M. Rosenbluh. Die Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung aus fünf Simulationen des Lang-Kobayashi-Paares.

# 9 Zusammenfassung und Ausblick

## 9.1 Zusammenfassung

Für ein Bernoulli-Netzwerk mit zeitverzögerten invasiven Kopplungen wurden mit Hilfe der Master Stability Funktion [5, 35] analytische Ergebnisse hergeleitet. Die Stabilitätsgleichung in einem solchen Netzwerk reduziert sich zu einem Polynom vom Grade der größten Verzögerungszeit, welches beispielsweise mit dem Schur-Cohn-Theorem [79] untersucht werden kann.

Es wurden Abschnitte im Parameterraum gefunden, welche unabhängig von den Verzögerungszeiten stets instabil oder stets stabil sind. Hierbei wurde der Satz von Gershgorin [80] verwendet, sowie die Bedingung, dass die Störungsmode parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit stets instabil sein muss um eine chaotische Trajektorie zu erhalten.

Für ein System mit einer Verzögerungszeit wurde gezeigt, dass stabile Chaossynchronisation nicht möglich ist, wenn die Verzögerungszeit sehr viel größer ist als die lokale Zeitskala, bzw. die lokale Lyapunovzeit [82]. Für ein System ohne Rückkopplung zeigt sich insbesondere in Gl. (4.22),  $|\gamma_{1,1}| < e^{-\tau\lambda_{\parallel}}$ , der Zusammenhang zwischen Topologie, Verzögerungszeit und Synchronisierbarkeit. Dieser findet sich auch in anderen chaotischen Systemen [48].

Für ein System mit mehreren Verzögerungszeiten lassen sich anhand von Symmetrieüberlegungen bestimmte Bereiche im Parameterraum als Bereich für eine stabile Chaossynchronisation ausschließen. Dies hängt zum einen davon ab, ob das Netz bipartit ist, des Weiteren, wie die Verzögerungszeiten der Kopplungen und Rückkopplungen in ihrem Verhältnis zueinander stehen. So kann beispielsweise ein doppelt bidirektional gekoppeltes Paar keine Chaossynchronisation aufweisen, wenn sich die beiden Verzögerungszeiten als Verhältnis teilerfremder ungerader ganzer Zahlen schreiben lassen [65]. Dieses Ergebnis gilt für beliebige Verzögerungszeiten, sofern kein lokaler Term vorhanden ist. Ist ein lokaler Term vorhanden, müssen die Verzögerungszeiten groß gegenüber der Dynamik des lokalen Terms sein, ansonsten wird die Symmetrie im Parameterraum zerstört.

Des Weiteren wurde für ein bipartites Netzwerk gezeigt, dass eine Konfiguration mit zwei großen Verzögerungszeiten, welche leicht voneinander abweichen, nicht zu stabiler Chaossynchronisation führen kann [48].

Die mit der Master Stability Funktion gefundenen Ergebnisse der Bernoulli-Netzwerke lassen sich mit dem selbstkonsistenten Mischungsargument interpretieren. Dieses geht davon aus, dass für eine stabile Chaossynchronisation die Signale aller Mastereinheiten eines Zeitschrittes in sogenannten Mischungseinheiten mischen und sich im Laufe der Zeit im Netzwerk verteilen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn alle

Zyklen eines Netzwerkes teilerfremd sind [78, 88] und lässt sich auch auf Netzwerke mit mehreren Verzögerungszeiten anwenden. Mischen nur einzelne Mastereinheiten, kann es zu Untergitter-, bzw. Clustersynchronisation kommen.

Schließlich wurde versucht, die für Bernoulli-Netzwerke hergeleiteten Ergebnisse auf andere chaotische Netzwerke zu übertragen. Hier zeigte sich, dass sich beispielsweise logistische Netzwerke nur bedingt dafür eignen. Der Grund dafür ist, dass durch die invasive Kopplung das Chaos in einem logistischen Netzwerk leicht unterdrückt werden kann [98, 99]. Hervorzuheben ist jedoch die hervorragende Übereinstimmung der Ergebnisse von Bernoulli-Netzwerken und Netzwerken gekoppelter Halbleiterlaser - sei es in der Simulation oder im Experiment. Ein ausführlicher Vergleich von analytischen Ergebnissen aus Bernoulli-Netzwerken und Simulationsergebnissen der Lang-Kobayashi-Gleichungen wird in [48] vorgestellt. Hinweise für das gute Übereinstimmen wurden in der Konstanz der Jacobi-Matrizen der Kopplungs- und Rückkopplungsterme der linearisierten Gleichungen gefunden.

## 9.2 Ausblick

Da der Zusammenhang der teilerfremden Zyklen mit der Größe des zweitgrößten Eigenwertes der Kopplungsmatrix in der Theorie nichtnegativer Matrizen bekannt ist [78], stellt sich die Frage, ob weitere Ergebnisse, die sich mit Hilfe des Mischungsargumentes herleiten lassen, sich ebenfalls auf Erkenntnisse aus der Mathematik stützen können. Es wäre interessant, auch Probleme wie die der optimalen Kopplungsparameter aus der Theorie nichtnegativer Matrizen abzuleiten und so das Mischungsargument auf ein solides Fundament zu stellen. Die Arbeiten in [94] sind hierbei ein Anfang.

Des Weiteren lohnt sich eine nähere Untersuchung des Zusammenhangs der Ergebnisse aus Bernoulli-Netzwerken und Lang-Kobayashi-Netzwerken. Da letztere das Verhalten von gekoppelten Halbleiterlasern modellieren, deren Experimente mit einigem Aufwand verbunden sind, ist eine Übereinstimmung einer einfachen iterativen Abbildung mit den gekoppelten Differentialgleichungen von großem Interesse. Bevor verschiedene Konfigurationen mit den Lasergleichungen modelliert werden, kann das Bernoulli-Modell verwendet werden. Auf diese Weise lassen sich auch analytische Ergebnisse erzielen. Eine detailliertere Untersuchung des Zusammenhanges der Lang-Kobayashi-Gleichungen mit der Bernoulli-Abbildung ist daher wünschenswert. Auch andere Modelle, welche gekoppelte Differentialgleichungen beinhalten, aus denen konstante Jacobi-Matrizen hervorgehen, sollten in diesem Zusammenhang untersucht werden.

# A Anhang

## A.1 Master Stability Funktion anhand eines Beispiels

Die Master Stability Funktion (MSF) liefert ein notwendiges Kriterium für die Stabilität von Synchronisation. Die Herleitung der MSF in einem Netzwerk ohne zeitverzögerte Kopplungen soll hier anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht werden.

Man betrachte einen ungekoppelten Oszillator der Dimension  $m = 2$ , dessen Dynamik durch folgende Gleichung beschrieben wird

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(\mathbf{x}) = F(x, y) \quad (\text{A.1})$$

Es seien nun in einem Netzwerk  $N = 3$  solcher Oszillatoren miteinander gekoppelt. Allgemein lässt sich die Kopplungsmatrix eines solchen Netzwerkes schreiben als  $N \times N$ -Matrix

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Im allgemeinsten Fall erfolgt die Kopplung der Oszillatoren über ihre  $x$ - und über ihre  $y$ -Komponente mit der Kopplungsfunktion

$$H = H(\mathbf{x}) = H(x, y) \quad (\text{A.3})$$

Die gesamte Dynamik eines einzelnen Oszillators im Netzwerk lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j G_{ij} H(\mathbf{x}_j) \quad (\text{A.4})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} = F(x_i, y_i) + \sigma \sum_j G_{ij} H(x_j, y_j) \quad (\text{A.5})$$

Die Dynamik des gesamten Netzwerkes lässt sich wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1, y_1) \\ F(x_2, y_2) \\ F(x_3, y_3) \end{pmatrix} + \\ &+ \sigma \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(x_1, y_1) \\ H(x_2, y_2) \\ H(x_3, y_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

oder vereinfacht

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{1}_N \otimes F(\mathbf{x}) + \sigma G \otimes H(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

Die Master Stability Funktion geht nun von kleinen Störungen der Synchronisationsmannigfaltigkeit (SM) aus. Als SM bezeichnet man hierbei  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$ . Entwickelt man kleine Störungen  $\delta \mathbf{x}_i$  von der SM mit  $\mathbf{x}_i = \mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_i$ , erhält man in erster Näherung

$$F(\mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_i) = F(\mathbf{s}) + DF(\mathbf{s})\delta \mathbf{x}_i \quad (\text{A.8})$$

Man verwende  $DF(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$  und  $DH(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$  und erhält

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{y}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{y}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \\ \delta \dot{y}_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \\ &+ \sigma \begin{pmatrix} G_{11} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{12} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{13} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \\ G_{21} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{22} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{23} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \\ G_{31} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{32} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & G_{33} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

bzw. zusammengefasst

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = 1_N \otimes DF(\mathbf{s})\delta\mathbf{x} + \sigma G \otimes DH(\mathbf{s})\delta\mathbf{x} = [1_N \otimes DF(\mathbf{s}) + \sigma G \otimes DH(\mathbf{s})]\delta\mathbf{x} \quad (\text{A.10})$$

Diese Gleichung wird nun so transformiert, dass man  $N$  unabhängige Gleichungen erhält, die die Dynamik einer möglichen Störung in den Eigenmoden der Kopplungsmatrix  $G$  darstellen.

Hierzu diagonalisiert man  $G$ , findet also ein  $S$ , so dass  $S^{-1}GS = G_D$ . Man nenne nun  $S^{-1} \otimes 1_m \delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}$ . Umgekehrt ist

$$S \otimes 1_m \boldsymbol{\xi} = \delta\mathbf{x} \quad (\text{A.11})$$

Ausformuliert bedeutet dies

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_1 \\ \delta\mathbf{x}_2 \\ \delta\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = S \otimes 1_m \boldsymbol{\xi} = \\ &= \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & S_{12} & 0 & S_{13} & 0 \\ 0 & S_{11} & 0 & S_{12} & 0 & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{22} & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{21} & 0 & S_{22} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & 0 & S_{32} & 0 & S_{33} & 0 \\ 0 & S_{31} & 0 & S_{32} & 0 & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = S^{-1} \otimes 1_m \delta\mathbf{x} = \\ &= \begin{pmatrix} S_{11}^{(-1)} & 0 & S_{12}^{(-1)} & 0 & S_{13}^{(-1)} & 0 \\ 0 & S_{11}^{(-1)} & 0 & S_{12}^{(-1)} & 0 & S_{13}^{(-1)} \\ S_{21}^{(-1)} & 0 & S_{22}^{(-1)} & 0 & S_{23}^{(-1)} & 0 \\ 0 & S_{21}^{(-1)} & 0 & S_{22}^{(-1)} & 0 & S_{23}^{(-1)} \\ S_{31}^{(-1)} & 0 & S_{32}^{(-1)} & 0 & S_{33}^{(-1)} & 0 \\ 0 & S_{31}^{(-1)} & 0 & S_{32}^{(-1)} & 0 & S_{33}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Die Kopplungsmatrix  $G$  hat die  $N = 3$  Eigenwerte  $\gamma_k$ , und die  $N$  Eigenvektoren  $\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} e_{1,k} \\ e_{2,k} \\ e_{3,k} \end{pmatrix}$ , bestehend aus  $N = 3$  Komponenten. Die Transformationsmatrix  $S$

ist nun

$$S = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

und die Inverse der Transformationsmatrix lässt sich aus  $SS^{-1} = 1_N$  berechnen. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & e_{12} & 0 & e_{13} & 0 \\ 0 & e_{11} & 0 & e_{12} & 0 & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{22} & 0 & e_{23} & 0 \\ 0 & e_{21} & 0 & e_{22} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & 0 & e_{32} & 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 & e_{32} & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}\xi_{1,1} + e_{12}\xi_{1,2} + e_{13}\xi_{1,3} \\ e_{11}\xi_{2,1} + e_{12}\xi_{2,2} + e_{13}\xi_{2,3} \\ e_{21}\xi_{1,1} + e_{22}\xi_{1,2} + e_{23}\xi_{1,3} \\ e_{21}\xi_{2,1} + e_{22}\xi_{2,2} + e_{23}\xi_{2,3} \\ e_{31}\xi_{1,1} + e_{32}\xi_{1,2} + e_{33}\xi_{1,3} \\ e_{31}\xi_{2,1} + e_{32}\xi_{2,2} + e_{33}\xi_{2,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

bzw. zusammengefasst

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \delta \mathbf{x}_2 \\ \delta \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \otimes 1_m \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\xi}_1 \\ \delta \boldsymbol{\xi}_2 \\ \delta \boldsymbol{\xi}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Die Transformation lässt die  $m \times m$  Blöcke innerhalb der Gleichung unbehelligt, ebenso die Matrizen, die bereits in Diagonalf orm sind. In einem Netzwerk mit mehreren Kopplungsmatrizen, beispielsweise im Falle mehrere Zeitverzögerungen, lässt sich eine solche Transformation nur dann finden, wenn alle Kopplungsmatrizen kommutieren.

Das Einsetzen der Transformation liefert

$$\begin{aligned} S^{-1} \otimes 1_m \delta \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\boldsymbol{\xi}} = S^{-1} \otimes 1_m [1_N \otimes DF(\mathbf{s}) + \sigma G \otimes DH(\mathbf{s})] S \otimes 1_m \boldsymbol{\xi} \\ &= [1_N \otimes DF(\mathbf{s}) + \sigma G_D \otimes DH(\mathbf{s})] \boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$



Man erhält somit ein Gleichungssystem aus  $N$  ungekoppelten Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\ + \sigma \begin{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Zusammengefasst geschrieben

$$\dot{\xi}_k = [DF(\mathbf{s}) + \sigma\gamma_k DH(\mathbf{s})]\xi_k \quad (\text{A.19})$$

## A.2 Schur-Cohn-Theorem

Für die Stabilitätsuntersuchung eines beliebigen Bernoulli-Netzwerkes wird ein Polynom vom Grade der größten Verzögerungszeit im Netzwerk betrachtet. Es ist hierbei von Bedeutung, ob die Nullstellen dieses Polynoms innerhalb oder außerhalb des Einheitskreises liegen. Eine Möglichkeit, die Region im Parameterraum zu finden, für die alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen, ist das Schur-Cohn-Theorem [79].

In [79] wird die Determinante eines Polynoms  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  definiert als

$$\delta_{\nu+1} = \begin{vmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_\nu \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\nu} & a_{n-\nu+1} & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ \overline{a_0} & 0 & \dots & 0 & \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \dots & \overline{a_{n-\nu}} \\ \overline{a_1} & \overline{a_0} & \dots & 0 & 0 & \overline{a_n} & \dots & \overline{a_{n-\nu+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_\nu} & \overline{a_{\nu-1}} & \dots & \overline{a_0} & 0 & 0 & \dots & \overline{a_n} \end{vmatrix}$$

wobei  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ . Gemäß dem Schur-Cohn-Theorem befinden sich genau dann alle Nullstellen im Einheitskreis,  $|x| < 1$ , wenn alle Determinanten größer als Null sind.



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Personen danken, die mich bei der Anfertigung meiner Dissertation unterstützt haben.

Insbesondere danke ich Prof. Wolfgang Kinzel für seine hervorragende Betreuung; er hat stets die richtige Balance von Unterstützung und Anregungen einerseits und dem Gewähren der für die Forschung notwendigen Freiheit andererseits gefunden und war mir ein Doktorvater im besten Sinne des Wortes.

Bei Sven Heiligenthal möchte ich mich für seine wertvolle Hilfe insbesondere bei den Simulationen, für die regen Diskussionen sowie die ausgezeichnete Zusammenarbeit und das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanken.

Prof. Ido Kanter danke ich für seine Gastfreundschaft und seine interessanten Anregungen und neuen Ideen zur Chaossynchronisation. Meital Zigzag danke ich für die sehr gute Zusammenarbeit, ebenso Michael Rosenbluh und seiner Arbeitsgruppe.

Prof. Georg Reents möchte ich für seine Hilfe bei mathematischen Fragen danken. Allen Mitarbeitern der TP III, insbesondere meinen Bürokollegen Steffen Zeeb und Peter Janotta danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre; Steffen Zeeb auch für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Prof. Eckehard Schöll und seiner Arbeitsgruppe, sowie Florian Geißler, Martin Paulig, Stephan Ehrenfeld, Thomas Jüngling und allen weiteren Kollegen danke ich für die interessanten Diskussionen und den regen Austausch von Ideen.

Der DFG sowie der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für die finanzielle und ideelle Unterstützung meiner Promotion.

Meinem Ehemann und meiner Mutter danke ich für ihre Unterstützung und Liebe.





# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Anja Englert, geboren am 17.12.1982 in Würzburg, an Eides statt, dass ich die Dissertation eigenständig, d.h. insbesondere selbstständig und ohne Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters angefertigt habe und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Diese Dissertation hat nicht in gleicher oder anderer Form bereits in einem anderen Prüfungsfach vorgelegen.



# Literaturverzeichnis

- [1] H. G. Schuster and W. Just. *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, Weinheim, 2005.
- [2] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(2):130, 1963.
- [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):821–824, 1990.
- [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [5] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, 469:93, 2008.
- [6] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 366:1, 2002.
- [7] Chai Wah Wu. *Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems*. World Scientific, Singapore, 2007.
- [8] A. Uchida, F. Rogister, J. García-Ojalvo, and R. Roy. Synchronization and communication with chaotic laser systems. *Prog. Optics*, 48:203, 2005.
- [9] H. U. Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 61:5115, 2000.
- [10] M. Chen and J. Kurths. Synchronization of time-delayed systems. *Phys. Rev. E*, 76(3):036212, 2007.
- [11] R. Lang and K. Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. quantum. elect.*, 16:347, 1980.
- [12] J. Ohtsubo. *Semiconductor lasers - stability, instability and chaos*. Springer, Heidelberg, 2006.
- [13] V. Ahlers, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Hyperchaotic dynamics and synchronization of external-cavity semiconductor lasers. *Phys. Rev. E*, 58:7208, 1998.
- [14] G. D. VanWiggeren and R. Roy. Communication with chaotic lasers. *Science*, 279:1198, 1998.



- 
- [15] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, J. Mulet, and C. R. Mirasso. Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 86(5):795, 2001.
- [16] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, 437:343, 2005.
- [17] S. Tang, H.F. Chen, S.K. Hwang, and J.M. Liu. Message encoding and decoding through chaos modulation in chaotic optical communications. *IEEE t. circuits. syst.*, 49(2):163, 2002.
- [18] S. Tang and J. M. Liu. Message encoding-decoding at 2.5 Gbits/s through synchronization of chaotic pulsing semiconductor lasers. *Opt. Lett.*, 26:1843, 2001.
- [19] P. Colet and R. Roy. Digital communication with synchronized chaotic lasers. *Opt. Lett.*, 19:2056, 1994.
- [20] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71(1):65, 1993.
- [21] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. on Circ. a. Syst.*, 40(10):626, 1993.
- [22] J. B. Geddes, K. M. Short, and K. Black. Extraction of signals from chaotic laser data. *Phys. Rev. Lett.*, 83(25):5389, 1999.
- [23] S. Boccaletti, A. Farini, and F. T. Arecchi. Adaptive synchronization of chaos for secure communication. *Phys. Rev. E*, 55(5):4979, 1997.
- [24] I. Kanter, E. Kopelowitz, and W. Kinzel. Public Channel Cryptography: Chaos Synchronization and Hilbert's Tenth Problem. *Phys. Rev. Lett.*, 101(8):084102, 2008.
- [25] W. Kinzel, A. Englert, and I. Kanter. On chaos synchronization and secure communication. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 368:379–389, 2010.
- [26] W. Kinzel and I. Kanter. Secure communication with chaos synchronization. In E. Schöll and H.G. Schuster, editors, *Handbook of Chaos Control*. Wiley-VCH, Weinheim, second edition, 2008.
- [27] C. Li, X. Liao, and K. Wong. Chaotic lag synchronization of coupled time-delayed systems and its applications in secure communication. *Physica D*, 194: 187, 2004.

- 
- [28] M. Dhamala, V. K. Jirsa, and M. Ding. Enhancement of neural synchrony by time delay. *Phys. Rev. Lett.*, 92(7):074104, 2004.
- [29] M. Dhamala, V. K. Jirsa, and M. Ding. Transitions to Synchrony in Coupled Bursting Neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 92(2):028101, 2004.
- [30] E. Schöll, G. Hiller, P. Hövel, and M. A. Dahlem. Time-delayed feedback in neurosystems. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 367:1079, 2009.
- [31] T. Pereira, M. S. Baptista, and J. Kurths. Detecting phase synchronization by localized maps: Application to neural networks. *Europhys. Lett.*, 77:40006, 2007.
- [32] S. Lepri, G. Giacomelli, A. Politi, and F. T. Arecchi. High-dimensional chaos in delayed dynamical systems. *Physica D*, 70:235, 1994.
- [33] J. D. Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D*, 4:366, 1982.
- [34] K. Kaneko. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices. *Physica D*, 23:436, 1986.
- [35] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2109, 1998.
- [36] J. Kestler. *Synchronisation chaotischer Bernoulli-Einheiten in einfachen Netzwerken mit zeitverzögerter Kopplung*. Diplomarbeit, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2007.
- [37] J. Kestler, W. Kinzel, and I. Kanter. Sublattice synchronization of chaotic networks with delayed couplings. *Phys. Rev. E*, 76:035202, 2007.
- [38] J. Kestler, E. Kopelowitz, I. Kanter, and W. Kinzel. Patterns of chaos synchronization. *Phys. Rev. E*, 77(4):046209, 2008.
- [39] J. Sun, E. M. Bollt, and T. Nishikawa. Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems. *Europhys. Lett.*, 85:60011, 2009.
- [40] C. Masoller and A. Marti. Random Delays and the Synchronization of Chaotic Maps. *Phys. Rev. Lett.*, 94(13):134102, 2005.
- [41] M. Zigzag, M. Butkowski, A. Englert, W. Kinzel, and I. Kanter. Zero-lag synchronization and multiple time delays in two coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 81:036215, 2010.
- [42] K. Pyragas. Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations. *Phys. Rev. E*, 58(3):3067, 1998.
- [43] E. Schöll and H. G. Schuster, editors. *Handbook of Chaos Control*. Wiley-VCH, Weinheim, 2008.

- [44] P. Hövel, M. A. Dahlem, and E. Schöll. Control of synchronization in coupled neural systems by time-delayed feedback. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 20:813, 2010.
- [45] F. M. Atay, J. Jost, and A. Wende. Delays, Connection Topology, and Synchronization of Coupled Chaotic Maps. *Phys. Rev. Lett.*, 92(14):144101, 2004.
- [46] W. L. Lu, F. M. Atay, and J. Jost. Chaos synchronization in networks of coupled maps with time-varying topologies. *Eur. Phys. J. B*, 63:399, 2008.
- [47] T. Erneux. *Applied Delay Differential Equations*. Springer, New York, 2009.
- [48] A. Englert, S. Heiligenthal, W. Kinzel, and I. Kanter. Synchronization of chaotic networks with time-delayed couplings: An analytic study. *Phys. Rev. E*, 83:046222, 2011.
- [49] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, and R. Friedrich. *Die Erforschung des Chaos*. Springer, New York, 2010.
- [50] Y. Aviad, I. Reidler, W. Kinzel, I. Kanter, and M. Rosenbluh. Phase synchronization in mutually coupled chaotic diode lasers. *Phys. Rev. E*, 78(2):025204, 2008.
- [51] Sarika Jalan and R. E. Amritkar. Self-organized and driven phase synchronization in coupled maps. *Phys. Rev. Lett.*, 90(1):014101, 2003.
- [52] D. V. Senthilkumar and M. Lakshmanan. Transition from anticipatory to lag synchronization via complete synchronization in time-delay systems. *Phys. Rev. E*, 71:016211, 2005.
- [53] S. Sivaprakasam, J. Paul, P. S. Spencer, P. Rees, and K. A. Shore. Nullified time-of-flight lead-lag in synchronization of chaotic external-cavity laser diodes. *Opt. Lett.*, 28:1397, 2003.
- [54] R. Vicente, L. L. Gollo, C. R. Mirasso, I. Fischer, and G. Pipa. Dynamical relaying can yield zero time lag neuronal synchrony despite long conduction delays. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 105:17157, 2008.
- [55] G. Kozyreff, A. G. Vladimirov, and Paul Mandel. Global coupling with time delay in an array of semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18):3809, 2000.
- [56] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 44:2374, 1991.
- [57] F. Sorrentino and E. Ott. Adaptive synchronization of dynamics on evolving complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 100(11):114101, 2008.
- [58] B. Ravoori, A. B. Cohen, A. V. Setty, F. Sorrentino, T. E. Murphy, E. Ott, and R. Roy. Adaptive synchronization of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 80(5):056205, 2009.

- [59] A. Stefański. *Determining thresholds of complete synchronization, and application*. World Scientific, Singapore, 2009.
- [60] J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt. Spatial patterns of desynchronization bursts in networks. *Phys. Rev. E*, 69(6):066215, 2004.
- [61] A. Banerjee and J. Jost. Graph spectra as a systematic tool in computational biology. *Discrete Appl. Math.*, 157(10):2425, 2009.
- [62] G. Chen and Z. Duan. Network synchronizability analysis: A graph-theoretic approach. *Chaos*, 18(3):037102, 2008.
- [63] F. M. Atay and T. Bıyıkođlu. Graph operations and synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E*, 72(1):016217, 2005.
- [64] F. M. Atay, T. Bıyıkođlu, and J. Jost. Network synchronization: Spectral versus statistical properties. *Physica D*, 224:35, 2006.
- [65] A. Englert, W. Kinzel, Y. Aviad, M. Butkovski, I. Reidler, M. Zigzag, I. Kanter, and M. Rosenbluh. Zero lag synchronization of chaotic systems with time delayed couplings. *Phys. Rev. Lett.*, 104:114102, 2010.
- [66] N. Gross, W. Kinzel, I. Kanter, M. Rosenbluh, and L. Khaykovich. Synchronization of mutually versus unidirectionally coupled chaotic semiconductor lasers. *Optics Comm.*, 267:464, 2006.
- [67] N. Gross, E. Klein, M. Rosenbluh, W. Kinzel, L. Khaykovich, and I. Kanter. A framework for public-channel cryptography using chaotic lasers. *arXiv:cond-mat/0507554*, July 2005.
- [68] I. Kanter, N. Gross, E. Klein, E. Kopelowitz, P. Yoskovits, L. Khaykovich, W. Kinzel, and M. Rosenbluh. Synchronization of mutually coupled chaotic lasers in the presence of a shutter. *Phys. Rev. Lett.*, 98(15):154101, 2007.
- [69] E. Klein, N. Gross, M. Rosenbluh, W. Kinzel, L. Khaykovich, and I. Kanter. Stable isochronal synchronization of mutually coupled chaotic lasers. *Phys. Rev. E*, 73(6):066214, 2006.
- [70] M. Rosenbluh, Y. Aviad, E. Cohen, L. Khaykovich, W. Kinzel, E. Kopelowitz, P. Yoskovits, and I. Kanter. Spiking optical patterns and synchronization. *Phys. Rev. E*, 76(4):046207, 2007.
- [71] P. M. Alsing, A. Gavrielides, V. Kovanis, R. Roy, and K. S. Thornburg Jr. Encoding and decoding messages with chaotic lasers. *Phys. Rev. E*, 56(6):6302, 1997.
- [72] I. Fischer, Y. Liu, and P. Davis. Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication. *Phys. Rev. A*, 62:011801, 2000.

- [73] I. Fischer, R. Vicente, J. M. Buldu, M. Peil, C. R. Mirasso, M. C. Torrent, and J. García-Ojalvo. Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying. *Phys. Rev. Lett.*, 97(12):123902, 2006.
- [74] V. Flunkert, O. D’Huys, J. Danckaert, I. Fischer, and E. Schöll. Bubbling in delay-coupled lasers. *Phys. Rev. E*, 79(6):065201, 2009.
- [75] R. Roy and K. S. Thornburg, Jr. Experimental synchronization of chaotic lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2009, 1994.
- [76] Y. Takiguchi, H. Fujino, and J. Ohtsubo. Experimental synchronization of chaotic oscillations in externally injected semiconductor lasers in a low-frequency fluctuation regime. *Opt. Lett.*, 24:1570, 1999.
- [77] T. Nishikawa and A. E. Motter. Synchronization is optimal in nondiagonalizable networks. *Phys. Rev. E*, 73(6):065106, 2006.
- [78] A. Berman and R. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, New York, 1979.
- [79] I. Schur. Über potenzreihen die im innern der einheitskreises beschränkt sind. *J. Math.*, 148:205, 1916.
- [80] S. Gershgorin. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *Bulletin de l’académie des Sciences de l’URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, 6:749, 1931.
- [81] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, New York, 2005.
- [82] W. Kinzel, A. Englert, G. Reents, M. Zigzag, and I. Kanter. Synchronization of networks of chaotic units with time-delayed couplings. *Phys. Rev. E*, 79(5):056207, 2009.
- [83] P. Erdős and P. Turán. On the distribution of roots of polynomials. *Ann. Math.*, 51:105, 1950.
- [84] A. Granville. The distribution of roots of a polynomial. In A. Granville and Z. Rudnick, editors, *Equidistribution in Number Theory, An Introduction*. Springer Netherlands, 2007.
- [85] V. Flunkert, S. Yanchuk, T. Dahms, and E. Schöll. Synchronizing distant nodes: a universal classification of networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105(25):254101, 2010.
- [86] W. Just, E. Reibold, H. Benner, K. Kacperski, P. Fronczak, and J. Hołyst. Limits of time-delayed feedback control. *Phys. Lett. A*, 254:158, 1999.
- [87] S. Yanchuk and P. Perlikowski. Delay and periodicity. *Phys. Rev. E*, 79:046221, 2009.

- 
- [88] I. Kanter, M. Zigzag, A. Englert, F. Geissler, and W. Kinzel. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. *Europhys. Lett.*, 93:60003, 2011.
- [89] M. Zigzag, M. Butkowski, A. Englert, W. Kinzel, and I. Kanter. Zero-lag synchronization of chaotic units with time-delayed couplings. *Europhys. Lett.*, 85:60005, 2009.
- [90] E. M. Shahverdiev and K. A. Shore. Chaos synchronization regimes in multiple-time-delay semiconductor lasers. *Phys. Rev. E*, 77(5):057201, 2008.
- [91] F. Geißler. *Numerische Untersuchung der Spektrallücke in kleinen, gerichteten Bernoulli-Netzwerken*. Bachelorarbeit, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2010.
- [92] F. Geißler. *Optimierte Kopplungen*. unveröffentlicht, 2010.
- [93] F. Geißler. *Ergänzung optimierte Kopplungen*. unveröffentlicht, 2010.
- [94] M. Paulig and F. Geißler. *Optimum for directed graphs*. unveröffentlicht, 2010.
- [95] M. Paulig and F. Geißler. *Zyklen und optimale Kopplungsstärken*. unveröffentlicht, 2010.
- [96] F. Geißler. *System zweier Ringe*. unveröffentlicht, 2010.
- [97] J. Kemeny and J. Snell. *Finite Markov Chains*. D. van Nostrand Company, Inc., New York, 1965.
- [98] F. Bauer, F. M. Atay, and J. Jost. Synchronization in discrete-time networks with general pairwise coupling. *Nonlinearity*, (22):2333, 2009.
- [99] F. Bauer, F. M. Atay, and J. Jost. Synchronized chaos in networks of simple units. *Euro Phys. Lett.*, (89):20002, 2010.
- [100] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397, 1976.
- [101] B. Gompertz. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 115:513, 1825.
- [102] P. F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. Phys.*, 10:113–121, 1838.
- [103] A. Englert. *Fehlerfreie Nachrichtenübertragung durch Chaos Synchronisation*. Diplomarbeit, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2008.
- [104] H. G. Winful and L. Rahman. Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 65(13):1575, 1990.

- [105] K. S. Thornburg, Jr., M. Möller, R. Roy, T. W. Carr, R.-D. Li, and T. Erneux. Chaos and coherence in coupled lasers. *Phys. Rev. E*, 55:3865, 1997.
- [106] I. Wedekind. *Synchronisation chaotisch fluktuierender Halbleiterlaser*. Doktorarbeit, Georg-August-Universität zu Göttingen, 2005.
- [107] S. Heiligenthal. *Chaos synchronization vs. Chaotic synchronization*. unveröffentlicht, 2010.
- [108] S. Ehrenfeld. *Einfluss von Zufallsgrößen auf die Synchronisation chaotischer Einheiten*. Diplomarbeit, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2009.