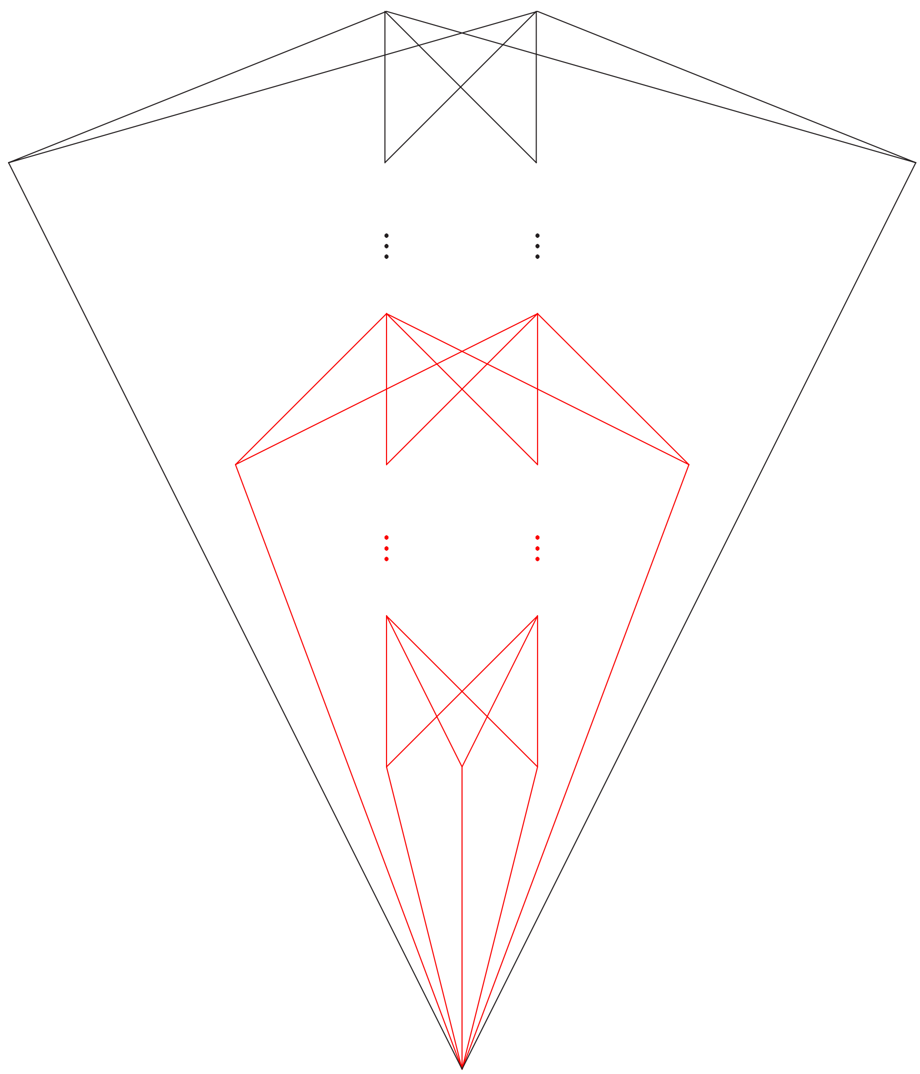
Silvia Joachim

Regulatorketten in Butlergruppen



Mathematisches Institut
Universität Würzburg

Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg
Mathematisches Institut

Regulatorketten in Butlergruppen

Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades

vorgelegt von

Silvia Joachim, geb. Eckert

Eingereicht am:	**3. Juni 2004**
1. Gutachter:	**Prof. Dr. O. Mutzbauer**
2. Gutachter:	**Prof. Dr. H. Heineken**
Tag der mündlichen Prüfung:	**1. September 2004**

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. O. Mutzbauer für seine hilfreiche Unterstützung während meines Studiums und ganz besonders während meiner Promotion. Er nahm sich regelmäßig die Zeit für Diskussionen und brachte meine Arbeit mit wertvollen Anregungen voran.

Außerdem danke ich meinen Eltern und meinem Ehemann, die mich während dieser ganzen Zeit durch alle Höhen und Tiefen begleitet haben.

Mathematik
ein Gedankengebäude voll Tiefe und Schönheit.

Reinhold Baer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die meisten Klassen von torsionsfreien abelschen Gruppen sind entweder sehr eingeschränkt oder es ist nicht ausreichend Theorie über ihre Struktur vorhanden. Eine Klasse von torsionsfreien abelschen Gruppen, die in den letzten Jahren Mittelpunkt wissenschaftlicher Forschung war, ist die Klasse der Butlergruppen. Butlergruppen sind torsionsfreie homomorphe Bilder von vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges. Von ihnen verspricht man sich sowohl geeignete Strukturkenntnisse als auch eine Vielzahl von interessanten Eigenschaften.

Meine Dissertation gliedert sich in achtzehn Kapitel. Im zweiten Kapitel werden Präliminarien angegeben. Eine systematische Darstellung von Butlergruppen als Summe rationaler Untergruppen wird in Kapitel drei behandelt. Eine solche Darstellung wird Summendarstellung genannt und üblicherweise zur Notation von Beispielen derartiger Gruppen verwendet. Diese Summendarstellungen werden mit Darstellungsmatrizen angegeben und Eigenschaften der Darstellung und damit auch der Gruppe in eine Beziehung zu den darstellenden Matrizen gebracht. Hier steht erst einmal die Reinheit der Darstellung als Problem an. Im vierten Kapitel werden grundlegende Sachverhalte genannt.

Es hat sich heraus gestellt, dass ohne systematische Untersuchungen der Reinheit der Darstellungen kein Zugang zu den Butlergruppen mit Regulatorkettenlänge 2 möglich ist. Tatsächlich handelt es sich hierbei um ein teilweise eigenständiges und außerordentlich interessantes Detailproblem. Darstellungsmatrizen, welche die Reinheit der Gruppendarstellung garantieren, werden total verschränkt genannt. Mit deren Hilfe kann der Zusammenhang von darstellender Matrix und Reinheit der Darstellung zum ersten Mal exakter beschrieben werden. Dies ist der Grund, warum in Kapitel fünf reine Darstellungen charakterisiert werden.

Von zentralem Interesse sind die sogenannten regulierenden Untergruppen und deren Schnitt, der Regulator. Aus einer Indexabschätzung nach Krapf [4] beziehungsweise Mader [6] folgt, dass der Regulator einer Butlergruppe selbst wieder eine Butlergruppe ist. Deshalb ist es sinnvoll, die Regulatorbildung auch für den Regulator durchzuführen. Diese Iteration der Regulatorbildung bei Butlergruppen führt zu einer absteigenden Kette von Regulatoren, der sogenannten Regulatorkette einer Butlergruppe. Von großem Interesse sind hier vor allem die Fälle, in denen die Regulatorkette stationär wird. Man spricht dann von der Länge einer Regulatorkette. In [5] wird eine Butlergruppe mit einer Regulatorkette der Länge 2 angegeben. Diese Gruppe hat Rang 9 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 15. In meiner Diplomarbeit gelang es, dieses Beispiel zu vereinfachen, nunmehr Rang 8 und 13 kritische Typen. Aber erst im Rahmen dieser Dissertation glückte die Konstruktion eines Beispiels mit Rang 7 und 10 kritischen Typen.

Ein Ziel der Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Regulatorketten von Butlergruppen ist es, Butlergruppen mit einer bestimmten Regulatorkettenlänge zu konstruieren und Beispiele von Butlergruppen mit längeren Regulatorketten zu finden. Dies gelang mit der Konstruktion einer Regulatorgruppe in Kapitel sechs. Damit ist es möglich, für jede natürliche Zahl eine Butlergruppe mit genau dieser Regulatorkettenlänge anzugeben. Der Beweis hierzu wird in Kapitel sieben bis fünfzehn genannt.

2 Präliminarien

2.1 Torsionsfreie abelsche Gruppen

Die verwendeten Bezeichnungen beziehen sich weitgehend auf L. Fuchs [3] und D. M. Arnold [1]. Gelegentlich werden jedoch aktualisierte Notationen benutzt, die dann an entsprechender Stelle explizit eingeführt werden.
Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe und a ein Element aus A. Dann bezeichnet $t(a) = t_A(a)$ den *Typ* von a in A, und die *Typenmenge* von A ist definiert als $T(A) = \{t_A(a) \mid 0 \neq a \in A\}$. Für jeden Typ t setzt man $A(t) = \{a \in A \mid t_A(a) \geq t\}$, $A^*(t) = \langle a \in A \mid t_A(a) > t \rangle$ und $A^\sharp(t) = A^*(t)_*$, die man die *Typen-Untergruppen* von A bezüglich Typ t nennt. $A(t)$ und $A^\sharp(t)$ sind rein in A, und es gelten die Inklusionen $A^*(t) \subset A^\sharp(t) \subset A(t)$.
Eine spezielle Klasse der torsionsfreien abelschen Gruppen bilden die reinen Untergruppen von vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges. Diese werden *Butlergruppen* genannt.

Satz 2.1 (Butler [2]) Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges sind äquivalent:

(1) A ist eine Butlergruppe.

(2) A ist reine Untergruppe einer vollständig zerlegbaren Gruppe.

(3) A ist homomorphes Bild einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges.

(4) Die Typenmenge $T(A)$ von A ist endlich und für jeden Typ t ist $A^\sharp(t)/A^*(t)$ eine endliche Torsionsgruppe und es existiert eine t-homogene vollständig zerlegbare Gruppe A_t, die die sogenannte *Butler-Gleichung* $A(t) = A^\sharp(t) \oplus A_t$ erfüllt.

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A bezeichnet $T_{kr}(A) = \{t \in T(A) \mid A(t) \neq A^\sharp(t)\}$ die *kritische Typenmenge* von A. Untergruppen A_t von $A(t)$ heißen *Typen-Komplemente* von $A(t)$, wenn sie die Butler-Gleichung $A(t) = A^\sharp(t) \oplus A_t$ lösen. Weiter nennt man Untergruppen der Form $U = \sum_{t \in T_{kr}(A)} A_t$ *regulierende Untergruppen* von A. Dabei beachte man, dass A_t nur bis auf Isomorphie eindeutig ist. Die Menge aller regulierenden Untergruppen von A wird mit $\mathrm{Regg}(A)$ bezeichnet. Ist sogar $A \in \mathrm{Regg}(A)$, so nennt man A *selbstregulierend*. Für eine Butlergruppe A bezeichnet $\mathrm{R}(A) = \bigcap\{B \mid B \in \mathrm{Regg}(A)\}$ den *Regulator* von A. Der Regulator hat endlichen Index, ist also wieder eine Butlergruppe, deshalb lässt sich die Regulatorbildung iterieren. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man weiter $\mathrm{R}^{n+1}(A) = \mathrm{R}(\mathrm{R}^n(A))$ mit $\mathrm{R}^1(A) = \mathrm{R}(A)$ und definiert dadurch eine Folge von iterierten Regulatoren, die sogenannte *Regulatorkette* von A. Gibt es ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{R}^{m+1}(A) = \mathrm{R}^m(A)$, so hat A eine Regulatorkette der Länge m. Gilt bereits $\mathrm{R}(A) = A$, dann nennt man A *regulatorgleich*.

2.2 $\mathbb{Z}$-Kette

Definition 2.2 Seien A_i rationale Gruppen, die $\mathbb{Z}$ enthalten. $\{A_i \mid i\}$ heißt *$\mathbb{Z}$-Kette*, wenn $A_i \cap A_j = \mathbb{Z}$ für $i \neq j$ und $A_i \not\cong \mathbb{Z}$ für alle i gilt.

Bemerkung 2.3 Eigenschaften von $\mathbb{Z}$-Ketten, die aus der Distributivität des Typenverbandes folgen:

(1) Aus $A \cap B = \mathbb{Z}$ und $\alpha + \beta = 0$ für $\alpha \in A$ und $\beta \in B$ folgt, dass α, $\beta \in \mathbb{Z}$ gilt.

(2) Teilketten von $\mathbb{Z}$-Ketten sind wieder $\mathbb{Z}$-Ketten.

(3) $\mathbb{Z}$-Ketten sind Antiketten.

(4) Die Teilsummenbildung bei $\mathbb{Z}$-Ketten erhält die $\mathbb{Z}$-Ketteneigenschaft. Genauer, sei $\{A_i \mid i \in I \cup J\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette, dann gilt $(\sum_{i\in I} A_i) \cap (\sum_{j\in J} A_j) = \mathbb{Z}$.

2.3 Charakteristik

Definition 2.4 (Vgl. Fuchs [3, §26, §85]) Für p prim und A eine torsionsfreie abelsche Gruppe wird $h_p^A(a) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid p^k x = a \text{ ist in } A \text{ lösbar}\}$ die *p-Höhe* von a in $A \backslash \{0\}$ genannt.

Definition 2.5 Eine Folge $\chi = (h_p \mid p \text{ prim})$ mit $h_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ heißt *Charakteristik*. Für Elemente $a \in A$ und A eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist die Folge $\chi^A(a) = (h_p^A(a) \mid p \text{ prim})$ der p-Höhen von a eine Charakteristik. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ ist $\chi^{\mathbb{Z}}(\lambda) = \chi(\lambda)$.

Bemerkung: Ist $\lambda = \prod p^{n_p}$ die Primfaktorzerlegung von λ, dann ist die Charakteristik $\chi(\lambda) = (n_p \mid p \text{ prim})$. Beachte, dass fast alle $n_p = 0$ sind. Die Menge der Charakteristiken wird mit den üblichen Operationen $\cap$ und $\cup$ zum Verband. Dieser Verband ist distributiv. Ebenso ist der Verband der Typen distributiv. Der Verband der Charakteristiken ist induktiv, der Verband der Typen aber nicht.

3 Darstellungen von Butlergruppen

3.1 Allgemeine p-Summendarstellung

Im Folgenden wird jede torsionsfreie abelsche Gruppe G grundsätzlich als Untergruppe ihrer divisiblen Hülle $\mathbb{Q}G$ aufgefasst. Sofern ein Element a und eine rationale Gruppe A in der Form $Aa \subset G$ verwendet werden, so stammen diese aus der divisiblen Hülle von G. Butlergruppen, also Untergruppen eines endlichdimensionalen rationalen Vektorraumes V, lassen sich daher als (endliche nicht direkte) Summen $H = \sum_{i=1}^{k} A_i a_i \subset V = \mathbb{Q}\ H$ rationaler Untergruppen $A_i a_i$, mit $\mathbb{Z} \subset A_i \subset \mathbb{Q}$, darstellen. Der Rang ihrer Darstellung ist die Dimension ihrer divisiblen Hülle. Butlergruppen H des Ranges n sind also Untergruppen eines Vektorraumes $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}a_i$ mit Basis $(a_1, ..., a_n)$.

Situation: Sei H eine Butlergruppe, die sich als Summe von (nicht notwendig reinen) Untergruppen $A_i a_i$ mit Rang 1 darstellen lässt:

$$H = \sum_{i=1}^{n} A_i a_i, \quad \mathbb{Z} \subset A_i \subset \mathbb{Q}.$$

Diese Darstellung wird *Summendarstellung* von H genannt. Sei p eine Primzahl und $n \geq 2$. Seien $\mathbb{Z} \subset A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_k \subset \mathbb{Q}_p$. Dann heißt eine Summendarstellung der Form

$$H \quad = \quad \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i a_i \right) + \sum_{j=1}^{k} B_j b_j \quad \subsetneq \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}a_i, \tag{1}$$

eine *allgemeine p-Summendarstellung*, wobei die Menge $(a_1, ..., a_n)$ maximal linear unabhängig ist. Also $b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} a_i$ ist nichttriviale Linearkombination der Basisvektoren $(a_1, ..., a_n)$ mit den Koeffizienten $\lambda_{ji} \in \mathbb{Q}$. Man nennt die Untergruppen $A_i a_i$ und $B_j b_j$ *darstellende rationale Summanden*.

Die Folge $(A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_k)$ heißt *Gruppenfolge* zur Summendarstellung. Wegen der Festlegung der linearen Unabhängigkeit des ersten Teils der *Summenbasis* $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ nennt man den ersten Teil $(a_1, ..., a_n)$ bzw. $(A_1, ..., A_n)$ der Folge den *unabhängigen Teil der Darstellung* und den Rest $(b_1, ..., b_k)$ bzw. $(B_1, ..., B_k)$ nennt man den *abhängigen Teil der Darstellung*.

Sei H eine Butlergruppe in allgemeiner p-Summendarstellung. Dann erhält man für jedes Element $c \in H$ durch Elimination der b_j eine Darstellung der Form:

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ji} \beta_j \right) a_i \end{aligned} \tag{2}$$

mit $\alpha_i \in A_i$ für $i \in [1, n]$ und $\beta_j \in B_j$ für $j \in [1, k]$. Diese Gleichung heißt *allgemeine Basis-Darstellung des Elements $c \in H$* bzgl. des unabhängigen Teils der Summenbasis $(a_1, \ldots, a_n)$.

3.2 Darstellende Matrix

Situation: Die Matrix $\Lambda = (\lambda_{ji}) \in \mathbb{Q}^{k \times n}$ mit den Koeffizienten λ_{ji} heißt *darstellende Matrix* von H bzgl. der Summenbasis $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k)$. Die Menge aller Primzahlen $P = P(\Lambda)$, die zur Darstellung der Koeffizienten der darstellenden Matrix nötig ist, heißt *zugeordnete Primzahlmenge*. Hierbei handelt es sich also um die Menge aller Primteiler der Zähler und/oder der Nenner der Koeffizienten λ_{ji}.

Gruppen heißen *clipped*, wenn sie keinen direkten Rang-1-Summanden haben. Matrizen ohne Nullspalte heißen *clipped*. Eine Matrix heißt *unzerlegbar*, wenn sie nicht mit Hilfe von Zeilen- und Spaltenpermutationen in eine echte Blockdiagonalmatrix umgeformt werden kann und clipped ist. Andernfalls nennt man die Matrix *zerlegbar*.

Bemerkung 3.1 Clipped Gruppen haben stets clipped darstellende Matrizen. Ist die Butlergruppe unzerlegbar, dann ist auch die darstellende Matrix unzerlegbar. Ist die darstellende Matrix einer Butlergruppe zerlegbar, so hat die Butlergruppe eine echte direkte Zerlegung. Um die Reinheit der Darstellung der Butlergruppe zu überprüfen, kann man direkte Summanden unabhängig voneinander untersuchen. Deshalb genügt es, unzerlegbare darstellende Matrizen zu betrachten, die insbesondere keine Nullspalten haben, also clipped sind.

3.3 p-Summendarstellung

Da Darstellungen der Form (1) überflüssige Summanden enthalten können und die Typen ihrer Koeffizientenbereiche beliebig sind, ist es notwendig, diese Darstellungen erst in eine möglichst straffe Form zu bringen. Nur dann lassen sich sinnvolle Reinheitskriterien für die Darstellung formulieren.

Situation: Man bezeichnet die Darstellung einer Butlergruppe H als *nichtredundant*, wenn kein darstellender Summand weggelassen werden kann, ohne dass H verändert wird. Andernfalls bezeichnet man die Darstellung als *redundant*.

Definition 3.2 Die allgemeine p-Summendarstellung (1) einer Butlergruppe H mit zugehöriger darstellender Matrix Λ wird *(spezielle)-p-Summendarstellung* genannt, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Darstellung ist nichtredundant.

(2) Es ist $\mathbb{Q}x \cap \mathbb{Q}y = 0$ für alle $x, y \in \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k\}$ mit $x \neq y$.

(3) Es ist $B_j \lambda_{ji} a_i \not\subset A_i a_i$ für alle $i \in [1, n]$ und $j \in [1, k]$.

(4) Die darstellende Matrix Λ ist unzerlegbar (insbes. clipped).

(5) Es ist $h_p^C(1) = 0$ für alle $C \in \{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_k\}$ und $p \in P(\Lambda)$.

Diese Eigenschaften dienen dazu, offensichtliche Verkürzungsmöglichkeiten der allgemeinen p-Summendarstellung auszuschließen, vgl. Beweis von Lemma 3.3. Insbesondere sprechen wir künftig von p-Summendarstellung, sofern die Darstellung wie oben speziell ist.

Bemerkung: Da die Reinheit einer p-Summendarstellung einfacher zu charakterisieren ist, werden im Folgenden nur Butlergruppen in p-Summendarstellung betrachtet. Deshalb ist Folgendes von Bedeutung:

Lemma 3.3 *Eine unzerlegbare p-reduzierte Butlergruppe hat eine p-Summendarstellung.*

Beweis. Gegeben sei eine Butlergruppe in Darstellung (1) mit Primteilermenge P und darstellender Matrix Λ. Ist die Darstellung redundant, so ist sie verkürzbar und man kann die Darstellung durch Weglassen einzelner überflüssiger Summanden in eine nichtredundante Form bringen.

Angenommen es gibt Vektoren x und y, für die die Bedingung (2) der Definition 3.2 nicht erfüllt ist, dann sind die Vektoren x, y linear abhängig und es gibt eine rationale Zahl ρ mit $x = \rho y$. Die Darstellung lässt sich verkürzen, indem man $Xx + Yy = X\rho y + Yy$ durch $\langle X\rho, Y\rangle\, y$ ersetzt.

Gibt es Indizes i, j, für die die Bedingung (3) der Definition 3.2 nicht erfüllt ist, so kann man in der darstellenden Matrix Λ den Eintrag λ_{ji} gleich Null setzen, ohne die Butlergruppe H zu verändern. Die neue darstellende Matrix Λ' hat eine evtl. veränderte Primteilermenge P'. Iterierte, abwechselnde Anwendung dieser Verkürzungen führen zu einer Darstellung mit einer darstellenden Matrix Λ und Primteilermenge P, so dass (2) und (3) der Definition 3.2 gelten.

Desweiteren ist die zu H gehörige darstellende Matrix Λ unzerlegbar (4), da die Butlergruppe H nach Voraussetzung unzerlegbar ist.

Angenommen für eine feste Primzahl $p \in P$ und ein festes $C \in \{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_k\}$ und zugehörigem $c \in \{a_1, .., a_n, b_1, ..., b_k\}$ sei nun $h_p^C(1) = u \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, laut Voraussetzung p-reduziert. Definiert man $D := p^u C$ und $d := p^{-u} c$ sowie $\mu_{ji} := p^{-u}\lambda_{ji}$, dann gilt $Cc = Dd$. Ersetzt man nun Cc durch den Ausdruck Dd und führt dies sukzessive für alle $Cc \in \{A_1a_1, ..., A_na_n, B_1b_1, ..., B_kb_k\}$ durch, so ist $(d_1, ..., d_n)$ eine neue Basis von V, und man gelangt zu einer Darstellung von $H \subset V$ mit Koeffizientenbereichen D - für diese gilt $h_p^D(1) = 0$ - und neuen Koeffizienten μ_{ji}. Wiederholt man ausgehend von dieser Darstellung in entsprechender Weise diese Schritte auch für alle restlichen Primzahlen aus P, dann gelangt man sukzessive zu einer p-Summendarstellung von H, die alle gewünschten Eigenschaften hat. Durch die Umformungen, durch die im vorangegangenen Beweis die p-Höhen der Einsen auf die gewünschten Werte gebracht wurden, hat sich die Primteilermenge womöglich nochmals verändert. □

Bringt man eine p-reduzierte Butlergruppe H in Darstellung (1), wie im Beweis zu Lemma 3.3 beschrieben, in p-Summendarstellung, so ist diese i.allg. nicht eindeutig. Die p-Summendarstellung ist abhängig von der Reihenfolge der Durchfürung der einzelnen Schritte (1) bis (3) beim Verkürzen der Darstellung.

4 Grundlegende Sachverhalte

Die nachfolgenden Kapitel werden zum Beweis einzelner Rechenschritte benötigt und aus Zwecken der Übersichtlichkeit hier eingefügt.

4.1 Durchschnitte rationaler Untergruppen

Definition 4.1 Eine Untergruppe U einer abelschen Gruppe, also insbesondere einer Butlergruppe H, wird genau dann *rein* genannt, wenn $nH \cap U = nU$ für alle $n \geq 0$ gilt. Sei $H = \sum_{i=1}^{k} A_i x_i$ mit $A_i \subset \mathbb{Q}$ eine Summendarstellung von H. Die $A_i x_i$ heißen *darstellende (rationale) Summanden*. Sind alle in einer Darstellung von H auftretenden darstellenden Summanden rein in H, so heißt diese Darstellung von H *rein*.

Um die Reinheit der Summen-Darstellung einer Butlergruppe zu untersuchen, werden insbesondere Elemente der Form $qs \in H$ mit $q \in \mathbb{Q}$ und $s \in \{x_i, y_j \mid i \in [1,n], j \in [1,r]\}$ untersucht. Anhand eines Koeffizientenvergleichs in (2) ist zu überprüfen, ob $q \in A_i$ bzw. $q \in B_j$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass $H \cap \mathbb{Q}x_i = A_i x_i$ bzw. $H \cap \mathbb{Q}y_j = B_j y_j$ gilt.

Die folgenden Sätze werden für die Reinheitsbeweise in Kapitel 7 benötigt.

Lemma 4.2 *Sei $\{A, \widetilde{A}, D\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette rationaler Gruppen. Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\chi(\lambda) \cap \chi^A(1) = 0$. Seien $\alpha \in A$, $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{A}$, $\delta, \widetilde{\delta} \in D$ und $q \in \mathbb{Q}$. Dann haben die Gleichungen*

$$\begin{aligned} q &= \alpha + \delta, \\ \lambda q &= \widetilde{\alpha} + \widetilde{\delta}, \end{aligned}$$

zur Folge, dass $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis. Elimination von q und Auflösen nach α liefert nach Bemerkung 2.3 (1) und (4), dass $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt. □

Lemma 4.3 *Sei $\{A, D\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette rationaler Gruppen. Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\chi(\lambda) \cap \chi^D(1) = 0$. Seien $\alpha, \widetilde{\alpha} \in A$, $\delta, \widetilde{\delta} \in D$ und $q \in \mathbb{Q}$, $\mu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ und sei $\nu - \mu\lambda \neq 0$. Sei $\chi(\nu - \mu\lambda) \cap \chi^D(1) = 0$. Dann haben die Gleichungen*

$$\begin{aligned} q &= \alpha + \mu\delta, \\ \lambda q &= \widetilde{\alpha} + \nu\widetilde{\delta}, \end{aligned}$$

zur Folge, dass $\delta \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis. Elimination von q ergibt wegen $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} \delta &= (\mu - \lambda^{-1}\nu)^{-1}\left(\lambda^{-1}\widetilde{\alpha} - \alpha\right) \\ &\in D \cap (\mu - \lambda^{-1}\nu)^{-1}\left(\lambda^{-1}A\right) \quad = \quad \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

da $\{A, D\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette ist und $\chi(\lambda) \cap \chi^D(1) = 0$ gilt. □

4.2 Bildung reiner Hüllen

Es gibt mehrere Methoden die reine Hülle von einzelnen Elementen c einer Butlergruppe H zu bestimmen, d.h. genauer den Koeffizienten-Bereich $S \subset \mathbb{Q}$ des Elements c, also $Sc \subset_* H$, zu bestimmen. Zuerst eine Methode, die später intensiv genutzt wird. Sei

$$H = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i a_i\right) + \sum_{j=1}^{k} B_j b_j$$

die Summendarstellung von H der Form (1). Dann haben die Elemente in der reinen Hülle $\langle c\rangle_*^H$ von c in H die Form qc mit $q \in S$. Man bestimmt die Menge S durch Ansatz von qc in allgemeiner Basisdarstellung laut (2). Für die praktische Anwendung verweisen wir auf die späteren Reinheitsbeweise in Kapitel 7.
Eine weitere eher theoretische Möglichkeit ist gegeben durch die folgende Methode, die sich gleichfalls anwenden lässt, vgl. Kapitel 18. Allerdings hat sich bei der späteren Untersuchung der Regulatorgruppe herausgestellt, dass gerade dort ein anderes Verfahren schneller zum Erfolg führt.

Definition 4.4 Sei M eine Teilmenge einer torsionsfreien abelschen Gruppe H. Dann ist die *reine Hülle* $\langle M\rangle_*^H$ von M in H der Durchschnitt aller reinen Untergruppen von H, die M enthalten. Also gilt $\langle M\rangle_*^H = H \cap (\sum_{m\in M} \mathbb{Q}m)$. Sei U eine Untergruppe einer torsionsfreien abelschen Gruppe H. Dann gilt für die reine Hülle $\langle U\rangle_*^H$ von U in H, dass $\langle U\rangle_*^H = H \cap \mathbb{Q}U$.

Die nachfolgenden Sätze wurden dem Manuskript von O. Mutzbauer [8] entnommen.

Definition 4.5 Sei A eine Butlergruppe mit Summendarstellung $A = \sum_{i=1}^{n} A_i a_i$, mit $\mathbb{Z} \subset A_i \subset \mathbb{Q}$. Sei n eine natürliche Zahl. Die Summendarstellung von A heißt *n-Darstellung*, falls $h_p^{A_i}(1) \in \{0,\ \infty\}$ für alle Primzahlen p, die n teilen, und alle i. Für ein $a \in A$ wird

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q},$$

eine (rationale) Darstellung des Elements a mit Träger $I = \{i \in [1,n] \mid \lambda_i \neq 0\}$ genannt. Eine Darstellung wird *kanonisch* genannt, falls alle $\lambda_i \in A_i$ sind. Sie wird *unabhängig* genannt, falls die Menge $\{a_i \mid i \in I\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: Wenn Sa die reine Hülle von a in A ist, wobei $\mathbb{Z} \subset S \subset \mathbb{Q}$, dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} S &= \sum \left\{\bigcap_{i\in I} \lambda_i^{-1} A_i \mid \text{alle kanonischen Darstellungen von } a\right\} \\ &= \sum \left\{\bigcap_{i\in I} \lambda_i^{-1} A_i \mid \text{alle Darstellungen von } a\right\}. \end{aligned}$$

Sei $\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \text{ teilt nicht b}\}$.

Lemma 4.6 *Sei $H = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_p a_i$ eine Summendarstellung eines endlich erzeugten, d.h. freien $\mathbb{Q}_p$-Moduls. Für jedes von Null verschiedene Element a von H gibt es eine unabhängige Darstellung $a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, so dass $\left(\bigcap_{i \in I} \lambda_i^{-1} \mathbb{Q}_p\right) a$ rein in H ist.*

Beweis. Sei eine kanonische Darstellung von a gegeben durch

$$a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i, \tag{3}$$

wobei alle $\lambda_i \in p^h \mathbb{Q}_p$ sind und $h > 0$ maximal ist. Die Darstellung (3) zeigt, dass a teilbar durch p^h in H ist. Es habe a in (3) minimalen Träger I in Bezug auf dieses h. Wenn diese Darstellung schon unabhängig ist, gibt es nichts mehr zu zeigen. Sei $a = \sum_{i \in J} \mu_i a_i$ eine unabhängige Darstellung von a mit Träger J, wobei J ganz in I enthalten ist. Sei l die minimale nicht-negative ganze Zahl, so dass $p^l \mu_i \in \mathbb{Q}_p$ für alle $i \in J$ ist, d.h. $p^l a = \sum_{i \in J} p^l \mu_i a_i$ ist eine kanonische Darstellung von $p^l a$ und es gibt eine Einheit in der Menge $\{p^l, \, p^l \mu_i \mid i \in I\}$.
Es gibt zwei Fälle, nämlich $l > 0$, dann ist eine Einheit unter den $p^l \mu_i$; oder $l = 0$, dann gibt es eine maximale nicht-negative ganze Zahl k, so dass $p^l \mu_i \in p^k \mathbb{Q}_p$ für alle $i \in J$. Wegen der Minimalität von I und da J ganz in I enthalten ist, gilt für den zweiten Fall, dass $k < h$ ist.
Nun wird der erste Fall betrachtet, d.h. $l > 0$, und $i_0 \in J$ mit $p^l \mu_{i_0}$ sei eine Einheit. Da $\lambda_{i_0} = \epsilon p^l \mu_{i_0}$, wobei $\epsilon \in p^h \mathbb{Q}_p$, kann der Summand $\lambda_{i_0} a_{i_0}$ der kanonischen Darstellung (3) annulliert werden, indem das ϵ-fache der unabhängigen Darstellung von $p^l a$ mit Träger J von $\lambda_{i_0} a_{i_0}$ subtrahiert wird. Dies führt zur Darstellung

$$a = (1 - \epsilon p^l)^{-1} \sum_{i_0 \neq i \in J} (\lambda_i - \epsilon p^l \mu_i) a_i,$$

wobei $\lambda_i - \epsilon p^l \mu_i \in p^h \mathbb{Q}_p$, und $1 - \epsilon p^l$ eine Einheit ist. Dies widerspricht der Minimalität von I.
Nun betrachtet man den zweiten Fall, $l = 0$ und $k < h$. Sei $i_0 \in J$ mit $\mu_{i_0} \in p^k \mathbb{Q}_p \backslash p^{k+1} \mathbb{Q}_p$. Da $\lambda_{i_0} = \epsilon \mu_{i_0}$, wobei $\epsilon \in p^{h-k} \mathbb{Q}_p$, d.h. ϵ ist keine Einheit, kann der Summand $\lambda_{i_0} a_{i_0}$ der Darstellung (3) annulliert werden, indem das ϵ-fache der unabhängigen Darstellung von a mit Träger J von $\lambda_{i_0} a_{i_0}$ subtrahiert wird. Dies führt zu der Darstellung

$$a = (1 - \epsilon)^{-1} \sum_{i_0 \neq i \in J} (\lambda_i - \epsilon \mu_i) a_i,$$

wobei $\lambda_i - \epsilon \mu_i \in p^h \mathbb{Q}_p$, und $1 - \epsilon$ eine Einheit ist. Dies widerspricht wiederum der Minimalität von I, und damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Theorem 4.7 *Sei $A = \sum_{i=1}^{n} A_i a_i$ eine Summendarstellung der Butlergruppe. Dann ist Sa die reine Hülle von a in A, wobei gilt:*

$$S \;=\; \sum \left\{ \bigcap_{i \in I} \lambda_i^{-1} A_i \mid \text{alle unabhängigen Darstellungen von } a \right\}.$$

Beweis. Sei R die Summe rechts vom Gleichheitszeichen. Man kann annehmen, dass $\mathbb{Z} \subset A_i \subset \mathbb{Q}$ für alle i gilt. Zweifellos gilt $R \subset S$, nach Definition 4.5. Es genügt zu zeigen: Falls es eine kanonische Darstellung von a gibt, die die Teilbarkeit von a durch eine Potenz von p bestimmt, dann gibt es eine unabhängige Darstellung von a, die die Teilbarkeit von a durch mindestens die gleiche Potenz von p bestimmt. Also kann man sich mit dem p-lokalen Fall beschäftigen, d.h. man tensoriert A mit $\mathbb{Q}_p$ und erhält

$$H = \mathbb{Q}_p A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_p A_i a_i.$$

Da die Divisibilität von Elementen nicht von der speziellen Wahl der Elemente a_i innerhalb $A_i a_i$ abhängt, kann man annehmen, dass man mit einer p-Darstellung von A anfängt, d.h. $\mathbb{Q}_p A_i$ ist entweder $\mathbb{Q}_p$ oder $\mathbb{Q}$. Zweifellos sind die Elemente von A, die in dem p-divisiblen Teil von H enthalten sind, p-divisibel. Für alle anderen Elemente schränkt der divisible Teil von H nicht die p-Divisibilität ein. Also kann man annehmen, dass A p-reduziert ist, d.h. H ist ein freier $\mathbb{Q}_p$-Modul. Wegen Lemma 4.6 ist Ra für alle Primzahlen p-rein in A, und dies liefert schließlich $R = S$, wie gewünscht. □

4.3 Brücken

Satz 4.8 *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe des Ranges 2 mit regulierender Untergruppe $A \oplus B \subset G$. Dann gilt: $G/(A \oplus B)$ ist endlich zyklisch.*

Beweis. Nach dem Isomorphiesatz gilt:

$$G/(A \oplus B) \cong \big(G/A\big)/\big((A \oplus B)/A\big).$$

Da A rein in G ist, folgt, dass G/A eine rationale Gruppe ist, d.h. G/A ist lokal zyklisch. Also ist auch der Faktor $G/(A \oplus B)$ lokal zyklisch. Da $G/(A \oplus B)$ zusätzlich endlich ist, folgt: $G/(A \oplus B)$ ist endlich zyklisch. □

Definition 4.9 Sei $H = \big(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i a_i\big) + \sum_{j=1}^{k} B_j b_j \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q} a_i$ eine reine p-Summendarstellung einer Butlergruppe. Dann heißen A_k und A_l *endlich überbrückt*, wenn

$$\langle a_k, a_l \rangle_*^H \neq A_k a_k \oplus A_l a_l.$$

D.h. insbesondere $\langle a_k, a_l \rangle_*^H / (A_k a_k \oplus A_l a_l)$ ist endlich zyklisch. Somit existiert genau ein Paar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, mit $\langle \lambda a_k + \mu a_l \rangle_*^H \not\subset A_k a_k \oplus A_l a_l$, wobei $A_k \cap A_l \cong \langle \lambda a_1 + \mu a_2 \rangle_*^H$.

4.4 Alternative Darstellungen von Summen

Die folgenden Sätze werden für die Bestimmung der Typenuntergruppen benötigt. Da dies die Grundlage der Arbeit ist, nicht aber das eigentlich zu behandelnde Thema, werden sie u.a. von S. Lehrmann und O. Mutzbauer [5] übernommen.

Lemma 4.10 [5] Sei A eine rationale Gruppe mit $1 \in A \subset \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Dann gilt $A = \langle pA, 1\rangle$.

Beweis. Sowieso ist $\langle pA, 1\rangle \subset A$. Sei nun $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ein beliebiges Element aus A mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(p, \alpha_2) = 1$. Nach Bézout gibt es dann $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit $l_1 p + l_2\alpha_2 = 1$, so dass $\alpha = (l_1 p + l_2\alpha_2)\alpha = l_1 p\alpha + l_2\alpha_1 \in \langle pA, 1\rangle$ ist. Also gilt auch $A \subset \langle pA, 1\rangle$. $\square$

Korollar 4.11 [5] Für eine Primzahl p und eine rationale Gruppe $A \subset \mathbb{Q}_p$ gilt $\langle A, 1\rangle = \langle pA, 1\rangle$.

Das folgende Lemma wird für den Beweis von Lemma 4.13 und für die Bestimmung von regulierenden Untergruppen einer Butlergruppe verwendet.

Lemma 4.12 [5] Sei A eine rationale Gruppe, und sei $G = A(a + b) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S und $Ab \subset S$. Dann ist $G = Aa + S$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus

$$\begin{aligned} G &= A(a+b) + S \quad\subset\quad Aa + \underbrace{Ab}_{\subset S} + S \quad=\quad Aa + S \\ &= A(a+b-b) + S \quad\subset\quad A(a+b) + \underbrace{Ab}_{\subset S} + S \quad=\quad A(a+b) + S \\ &= G. \quad \square \end{aligned}$$

Das nächste Lemma wird bei der Bestimmung von Typen-Komplementen einer Butlergruppe benutzt und ist dort ein Kriterium für die Vollständigkeit bei der Konstruktion von regulierenden Untergruppen.

Lemma 4.13 [6] Für $\beta \in \mathbb{Q}$ und rationale Gruppen A und B ist $Aa \oplus Bb = A(a+\beta b) \oplus Bb$ genau dann, wenn $A\beta \subset B$ ist.

Beweis. $Aa \oplus Bb = A(a+\beta b) \oplus Bb$ impliziert $A\beta b = A(a+\beta b - a) \subset A(a+\beta b) + Aa \subset Aa \oplus Bb$. Also ist $A\beta b \subset Bb$ und damit $A\beta \subset B$. Die Umkehrung gilt nach Lemma 4.12. $\square$

Für die Bestimmung der regulierenden Untergruppen werden die folgenden Sätze benötigt.

Lemma 4.14 [5] Sei A eine rationale Gruppe, und sei $\beta \in \mathbb{Q}$. Sei $G = A(a + \beta b) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S und sei p eine Primzahl mit $\beta \in \mathbb{Q}_p$ und $A\beta pb \subset S$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass gilt $G = A(a + kb) + S$.

Beweis. Wegen $\beta \in \mathbb{Q}_p$ gibt es $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$, $\beta_2 \neq 0$ mit $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ und $\mathrm{ggT}(p, \beta_2) = 1$. Nach Bézout lassen sich $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ wieder so wählen, dass die Gleichung $l_1 p + l_2\beta_2 = 1$ erfüllt ist. Setzt man nun $k = l_2\beta_1 \in \mathbb{Z}$, so erhält man $\beta = (l_1 p + l_2\beta_2)\beta = l_1 p\beta + l_2\beta_1 = l_1 p\beta + k$. Damit folgt nun

$$
\begin{array}{rcl}
G & = & A(a+\beta b)+S \\
 & = & A(a+l_1 p\beta b+kb)+S \quad \subset \quad A(a+kb)+\underbrace{A\beta pb}_{\subset S}+S \\
 & = & A(a+kb)+S \\
 & = & A(a+\beta b-l_1 p\beta b)+S \quad \subset \quad A(a+\beta b)+\underbrace{A\beta pb}_{\subset S}+S \\
 & = & A(a+\beta b)+S \quad = \quad G
\end{array}
$$

mit Gleichheit, und die Behauptung ist gezeigt. □

Lemma 4.15 [5] Sei A eine rationale Gruppe mit $A \subset \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Sei $G = A(a+b)+S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S, $Apb \subset S$ und $a+b \in S$. Dann ist $G = Apa+S$.

Beweis. Sowieso gilt $Ap(a+b) \subset Apa+Apb \subset Apa+S$. Mit Korollar 4.11 folgt damit

$$
\begin{array}{rcl}
G & = & A(a+b)+S \quad = \quad \langle A(a+b), \underbrace{a+b}_{\in S}\rangle + S \\
 & = & \langle A,1\rangle(a+b)+S \overset{\text{Korollar 4.11}}{=} \langle Ap,1\rangle(a+b)+S \\
 & = & \langle \underbrace{Ap(a+b)}_{\subset Apa+S}, \underbrace{a+b}_{\in S}\rangle + S \quad \subset \quad Apa+S \\
 & = & A[p(a+b)-pb]+S \quad \subset \quad A(a+b)+\underbrace{Apb}_{\subset S}+S \\
 & = & A(a+b)+S \quad = \quad G.
\end{array}
$$

Also gilt die behauptete Gleichheit. □

4.5 Durchschnitt fast gleicher Untergruppen

Lemma 4.16 *Sei $Aa+S=G$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit $A \subset \mathbb{Q}$. Sei $pAb \subseteq S$ für $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $pa \in A(a+b)+S$.*

Beweis. Offensichtlich gilt $pa \in pAa = pA(a+b-b) \subset pA(a+b)+pAb \subset pA(a+b)+S \subset A(a+b)+S$. □

Lemma 4.17 und Lemma 4.18 vereinfachen die Berechnung des Regulators einer Butlergruppe, wenn dabei der Schnitt aller regulierenden Untergruppen zu bilden ist.

Lemma 4.17 [5] Sei A eine rationale Gruppe mit $1 \in A$. Sei $G = \bigcap\{A(a+kb)+S \mid k \in \mathbb{Z}\}$ der Schnitt von torsionsfreien abelschen Gruppen mit Untergruppe S. Für eine Primzahl p gelte $Apb \subset S$, und es gebe ein $l \in \mathbb{Z}$ prim zu p mit $b \notin A(a+lb)+S$. Dann ist $G = Apa+S$.

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} Apa + S &= A[p(a+kb) - pkb] + S \\ &\subset Ap(a+kb) + \underbrace{Apb}_{\subset S} + S \\ &\subset A(a+kb) + S. \end{aligned}$$

Also ist $Apa + S \subset \bigcap \{A(a+kb) + S \mid k \in \mathbb{Z}\} = G$. Andererseits gilt mit $k = 0$ sowieso $G \subset Aa + S$ und damit $Apa + S \subset G \subset Aa + S$. Nimmt man nun an, dass $G = Aa + S$ ist, so folgt $Aa + S \subset A(a+kb) + S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daraus erhält man für $k = l$ aber $lb = (a + lb) - a \in A(a + lb) + Aa \subset A(a + lb) + S$. Nach Bézout gilt wegen $\mathrm{ggT}(l, p) = 1$ und $pb \in S$ auch $b \in A(a + lb) + S$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $G \subsetneq Aa + S$ und damit $G = Apa + S$. $\square$

Lemma 4.18 *Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit linear unabhängigen Elementen $a, b \in V$. Sei $S \subset V$ eine Untergruppe und $V = \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b \oplus \mathbb{Q}S$. Seien $g, h \in \mathbb{Q}S$ mit $o(g + S) = n$ und $o(h + S) = m$, wobei $\mathbb{Q}g \cap S = Fg$ und $\mathbb{Q}h \cap S = Lh$. Seien $A, B \subset \mathbb{Q}$ rationale Gruppen. Dann gilt:*

$$(A(a+g) \oplus mBb \oplus S) \cap (nAa \oplus B(b+h) \oplus S) \;=\; (nA \cap F)a \oplus (mB \cap L)b \oplus S$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (nA \cap F)a + S &= (nA \cap F)[(a+g) - g] + S \\ &\subset (nA \cap F)(a+g) + \underbrace{(nA \cap F)g}_{\subset S} + S \\ &= \underbrace{(nA \cap F)}_{\subset A}(a+g) + S \\ &\subset A(a+g) + S. \end{aligned}$$

Daraus folgt $(nA \cap F)a + (mB \cap L)b + S \subset A(a+g) + mBb + S$. Analog folgt aus Symmetriegründen $(nA \cap F)a + (mB \cap L)b + S \subset nAa + B(b+h) + S$. Also ist $(A(a+g) \oplus mBb \oplus S) \cap (nAa \oplus B(b+h) \oplus S) \supset (nA \cap F)a \oplus (mB \cap L)b \oplus S$. Andererseits gilt für Elemente aus der Schnittgruppe, also α, $\acute{\alpha} \in A$, β, $\acute{\beta} \in B$ und s, $\acute{s} \in S$, dass

$$\alpha(a+g) + m\beta b + s = n\acute{\alpha}a + \acute{\beta}(b+h) + \acute{s}.$$

Durch Umsortieren nach Basiselementen erhält man

$$(\alpha - n\acute{\alpha})a + (m\beta - \acute{\beta})b = s - \acute{s} + \acute{\beta}h - \alpha g \quad \in \quad \mathbb{Q}S \cap (\mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b) = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \alpha = n\acute{\alpha} &\in nA && (4) \\ \acute{\beta} = m\beta &\in mB && (5) \\ \acute{\beta}h + \alpha g = \acute{s} - s \in S &\overset{(4)}{\Rightarrow} \alpha = n\acute{\alpha} \in nA \cap F && (6) \\ &\overset{(6)}{\Rightarrow} \alpha g \in (nA \cap F)g \subset Fg \subset S && (7) \\ &\overset{(5)}{\Rightarrow} \acute{\beta} = m\beta \in mB \cap L && (8) \end{aligned}$$

Also folgt mit (6), (7) und (8)

$$\alpha(a+g)+m\beta b+s=\alpha a+\alpha g+m\beta b+s \quad \in \quad (nA\cap F)a\oplus(mB\cap L)b\oplus S.$$

Somit ist $(A(a+g)\oplus mBb\oplus S)\cap(nAa\oplus B(b+h)\oplus S)\subset(nA\cap F)a\oplus(mB\cap L)b\oplus S$ und insgesamt folgt die Gleichheit. $\square$

5 Reinheitskriterien für Summen-Darstellungen

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass man anhand von einigen Kriterien erkennen kann, ob es sich um eine reine Darstellung einer Butlergruppe handelt.

5.1 Kriterien für eine reine Darstellung einer Butlergruppe

Definition 5.1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A = (A_1, ..., A_n)$ eine Folge rationaler Gruppen, die $\mathbb{Z}$ enthalten. Sei $d = (d_1, ..., d_n)$ ein n-Tupel ganzer Zahlen d_i. Eine zweielementige Teilmenge (l, m) von $\{1, ..., n\}$ heißt *Pivotindexpaar* von d bzgl. A, wenn $d_l \neq 0$, $d_m \neq 0$ und $A_l \cap A_m = \mathbb{Z}$. Sei p eine Primzahl. Das Paar (d, d') mit zwei n-Tupel d, d' ganzer Zahlen heißt *p-verschränkt* bzgl. des Pivotindexpaares (l, m) der Zeile d, wenn die (2×2)-Untermatrix $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} d_l & d_m \\ d'_l & d'_m \end{pmatrix}$ der $(2 \times n)$-Matrix $\begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ die Form

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u & \neq 0 \\ * & * \end{pmatrix} \text{oder} = \begin{pmatrix} \neq 0 & u \\ * & * \end{pmatrix}$$

hat mit $p \nmid u$ und $\det \mathbf{U} \neq 0$. Dabei steht ein Eintrag $*$ für ein beliebiges Element. Die j-te Zeile $(d)_j$ einer ganzzahligen $(k \times n)$-Matrix heißt *p-verschränkt eingebettet* bzgl. des Pivotindexpaares (l, m), wenn die j-te Zeile p-verschränkt ist mit jeder anderen Zeile bzgl. des Pivotindexpaares (l, m). Eine Matrix, deren Zeilen alle p-verschränkt eingebettet sind, heißt *total-verschränkt*.

Definition 5.2 Eine Butlergruppe mit p-Summendarstellung heißt *Stern-Gruppe*, wenn die Gruppenfolgen $(A_i, B_1, ..., B_k)$ für alle $i \in [1, n]$ $\mathbb{Z}$-Ketten sind. Man schreibt $*$-Gruppe. Eine $*$-Gruppe heißt *Diamant-Gruppe*, man schreibt $\diamondsuit$-Gruppe, wenn die zugehörige darstellende Matrix in jeder Zeile mindestens zwei Einträge $\neq 0$ besitzt und für alle $j \in [1, k]$ zwei verschiedene l_j existieren mit $l_{j_1}, l_{j_2} \in [1, n]$, so dass $d_{jl_1} \neq 0$ und $d_{jl_2} \neq 0$ und $A_{l_1} \cap A_{l_2} = \mathbb{Z}$ gilt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die darstellende Matrix total-verschränkt ist. Deshalb gilt für $\diamondsuit$-Gruppen, dass die Gruppenfolge $(A_l, A_m, B_1, ..., B_k)$ für jedes Pivotindexpaar (l, m) eine $\mathbb{Z}$-Kette ist.

Die Eigenschaft der Total-Verschränktheit lässt sich bei schwach besetzten darstellenden Matrizen am leichtesten nach einer Doppelordnung der darstellenden Matrix überprüfen, da die zu betrachtenden Untermatrizen entlang der Diagonalen der doppelgeordneten darstellenden Matrix liegen. Multipliziert man eine darstellende Matrix von links bzw. rechts mit Permutationsmatrizen, so entspricht dies einer Umindizierung der Elemente des abhängigen bzw. des unabhängigen Teils der Darstellung einer Butlergruppe. Bei der Spaltenpermutation muss man auch die Typen permutieren. Somit darf man also darstellende Matrizen doppelordnen. Ferner ist es möglich, auf darstellende Matrizen das Gauß-Verfahren anzuwenden um Abhängigkeiten sichtbar zu machen, jedoch darf man nicht das über Körpern bekannte Gauß-Verfahren verwenden, sondern nur ein modifiziertes.

Satz 5.3 *Für eine Primzahl p und $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ seien $\mathbb{Z} \subset A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_k \subset \mathbb{Q}_p$. Sei $H \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}a_i$ eine $\diamondsuit$-Gruppe mit p-Summendarstellung der Form wie in* (1) *und zugehöriger darstellender Matrix Λ bzgl. der Summenbasis $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k)$ mit Einträgen $\lambda_{ji} \in \{0, \pm 1, \pm p\}$. Die Darstellung von H ist rein, wenn Λ total-verschränkt ist.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.1 ist die darstellende Matrix Λ o.B.d.A. clipped. Für jedes Element $qc \in H$, mit $c \in \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k\}$ und $q \in \mathbb{Q}$, erhält man eine allgemeine Basis-Darstellung der Form:

$$qc \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ji} \beta_j \right) a_i$$

mit $\alpha_i \in A_i$ für $i \in [1, n]$ und $\beta_j \in B_j$ für $j \in [1, k]$. Für den Beweis sind die Fälle $c \in \{a_1, ..., a_n\}$ und $c \in \{b_1, ..., b_k\}$ getrennt zu betrachten, d.h. man unterscheidet, ob c ein Element des unabhängigen oder des abhängigen Teils der Summenbasis $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k)$ ist.

(1) Es wird gezeigt, dass $A_s a_s$, für jede Spalte $s \in [1, n]$, eine reine Untergruppe von H ist:

Betrachtet man die s-Spalte von Λ, genauer gesagt deren Einträge $\lambda_{js} \in \{0, \pm 1, \pm p\}$, so findet man zu jedem Eintrag $\lambda_{hs} \neq 0$, also $\lambda_{hs} \in \{\pm 1, \pm p\}$, in der zugehörigen h-Zeile von Λ einen weiteren Eintrag $\lambda_{ht} \neq 0$, also $\lambda_{ht} \in \{\pm 1, \pm p\}$, da die darstellende Matrix Λ in jeder Zeile mindestens zwei Einträge $\lambda_{ji} \neq 0$, also $\lambda_{ji} \in \{\pm 1, \pm p\}$, besitzt. Letzteres folgt, da H in p-Summendarstellung vorliegt. Nun betrachtet man die zum Eintrag λ_{ht} gehörige t-Spalte von Λ. Ein Vergleich der Koeffizienten am Element a_t, wobei $t \neq s$, liefert:

$$0 \;=\; \alpha_t + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{jt} \beta_j$$

und mit Bemerkung 2.3 (1) folgt, dass $\beta_h \in \mathbb{Z}$, für jedes $\lambda_{ht} \neq 0$ und $h \in [1, k]$. Bemerkung 2.3 (1) kann angewendet werden, da $B_h \subset \mathbb{Q}_p$ und da eine Zerlegung der Summe $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jt} \beta_j$ möglich ist und da die Gruppenfolge $(A_t, B_1, ..., B_k)$ für $t \in [1, n]$ eine $\mathbb{Z}$-Kette ist. Letzteres gilt, da H nach Voraussetzung eine $\diamondsuit$-Gruppe ist und Teilmengen von $\mathbb{Z}$-Ketten wieder $\mathbb{Z}$-Ketten sind.

Da eine Zerlegung der Summe $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{js} \beta_j$ möglich ist und da wie eben gezeigt $\beta_h \in \mathbb{Z}$, für jedes $\lambda_{ht} \neq 0$ und $h \in [1, k]$, liefert ein Koeffizientenvergleich am Element a_s für jedes $\lambda_{js} \in \{\pm 1, \pm p\}$, dass

$$q = \alpha_s + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{js} \beta_j \quad \in \quad A_s + \mathbb{Z} = A_s$$

gilt. Also erhält man insgesamt $H \cap \mathbb{Q}a_s = A_s a_s$, für jedes $s \in [1, n]$, und damit sind $A_1 a_1, ..., A_n a_n$ reine Untergruppen von H.

(2) Es wird gezeigt, dass $B_w b_w$, für jede Zeile $w \in [1,k]$, eine reine Untergruppe von H ist:

(a) Hierzu vergleicht man die Koeffizienten an jeweils zwei verschiedenen Elementen a_i mit $i \in [1,n]$. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen a_l und a_m liefert:

$$\begin{aligned} \lambda_{wl} q &= \alpha_l + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{jl}\beta_j \\ \lambda_{wm} q &= \alpha_m + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{jm}\beta_j \end{aligned}$$

Nach evtl. Umordnung der a_i mit $i \in [1,n]$ sei o.B.d.A. $\lambda_{wl} \in \{\pm 1\}$ und $\lambda_{wm} \in \{\pm 1, \pm p\}$, da die darstellende Matrix Λ in jeder Zeile mindestens zwei derartige Einträge besitzt. Letzteres folgt, da H in p-Summendarstellung vorliegt. Da (l,m) ein Pivotindexpaar der w-ten Zeile ist und H insbesondere eine $*$-Gruppe ist, ist $\{A_l, A_m, B_1, ..., B_k\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette. Da außerdem eine Zerlegung der Summen $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jl}\beta_j$ und $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jm}\beta_j$ möglich ist, ist Lemma 4.2 anwendbar und es folgt, dass $\alpha_l \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Da die darstellende Matrix Λ nach Voraussetzung total-verschränkt ist, ist die w-te Zeile p-verschränkt eingebettet bzgl. des Pivotindexpaares (l,m). Nach evtl. Umordnung der a_i mit $i \in [1,n]$ gilt, dass o.B.d.A. $\lambda_{wl} \in \{\pm 1\}$ und $\lambda_{wm} \in \{\pm 1, \pm p\}$ ist und dass $\lambda_{vm} - \lambda_{wm}\lambda_{vl} \neq 0$ ist. Mit Lemma 4.3 folgt, falls $\lambda_{vl} \neq 0$, dass $\beta_v \in \mathbb{Z}$ gilt. Lemma 4.3 ist anwendbar, da eine Zerlegung der Summen $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jl}\beta_j$ und $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jm}\beta_j$ möglich ist und da $\{A_l, A_m, B_1, ..., B_k\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette ist. Letzteres folgt wieder, da H insbesondere eine $*$-Gruppe ist und (l,m) ein Pivotindexpaar. Da $v \in [1,k]$ beliebig ist, ist $\beta_v \in \mathbb{Z}$ für jedes $v \in [1,k]$, falls $\lambda_{vl} \neq 0$, und somit gilt für $j \neq w$, dass $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{jl}\beta_j \in \mathbb{Z}$ ist.

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} q &= \lambda_{wl}^{-1}\alpha_l + \beta_w + \lambda_{wl}^{-1}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq w}}^{k} \lambda_{jl}\beta_j\right) \\ &\in \mathbb{Z} + B_w + \mathbb{Z} = B_w, \end{aligned}$$

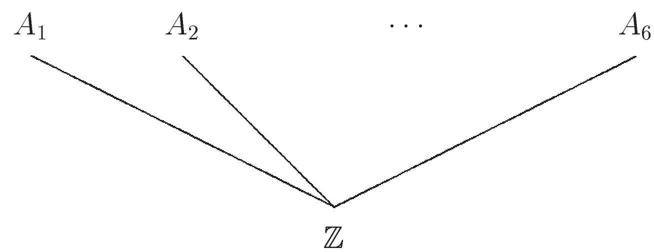
so dass man $H \cap \mathbb{Q}b_w = B_w b_w$ erhält. Folglich ist $B_w b_w$, für jede Zeile $w \in [1,k]$, eine reine Untergruppe von H. $\square$

5.2 Anwendung der Reinheitskriterien

Einer Butlergruppe der Form $H = \sum_{i=1}^{k} A_i a_i$, mit $A_i \subset \mathbb{Q}$, kann immer eine Matrix als darstellende Matrix zugeordnet werden. Diese Matrix muss nicht vollen Rang und keine bestimmte Form haben; trotzdem können eine Darstellung und sogar eine reine Darstellung vorliegen. Die Eigenschaft der Total-Verschränktheit der darstellenden Matrix lässt keine Rückschlüsse auf den Rang der darstellenden Matrix oder deren Form zu.

Nun wird gezeigt, dass es eine Butlergruppe gibt, deren Darstellung rein ist, obwohl ihre darstellende Matrix nicht total verschränkt ist.

Situation: Sei p eine Primzahl und seien $\mathbb{Z} \subset A_i \subset \mathbb{Q}_p$ für $1 \leq i \leq 6$. Die relativen Inklusionen dieser rationalen Gruppen seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben.



Sei die Butlergruppe G definiert als

$$\begin{aligned} G &= A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4a_4 + A_5(a_1 + a_2 + pa_3 + a_4) + A_6(pa_3 + a_4) \\ &\subsetneq \mathbb{Q}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}a_4. \end{aligned}$$

Für jedes Element $qg \in G$ mit $q \in \mathbb{Q}$ erhält man durch Umsortieren nach Basiselementen eine Darstellung der Form

$$qg = (\alpha_1 + \alpha_5)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_5)a_2 + (\alpha_3 + p\alpha_5 + p\alpha_6)a_3 + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)a_4$$

mit $\alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_6 \in A_6$. Dem Element qg wird ein lineares Gleichungssystem mit Konstantenspalte (k, l, m, n) zugeordnet

$$\begin{aligned} k &= \alpha_1 + \alpha_5 \\ l &= \alpha_2 + \alpha_5 \\ m &= \alpha_3 + p\alpha_5 + p\alpha_6 \\ n &= \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6. \end{aligned}$$

Immer dann, wenn aus Bedingungen für die Konstantenspalte gefolgert wird, wird Bemerkung 2.3 (1) und (4) verwendet. Wir sind nur interessiert an Lösungen in $\{A_1, ..., A_6\}$, gemäß der Inklusionen des obigen Hassediagramms.

Die Reinheit der Darstellung der Butlergruppe G ist zu beweisen und somit ist die Reinheit aller in der Darstellung von G auftretenden darstellenden Summanden zu zeigen.

Lemma 5.4 *Der unabhängige Teil der Darstellung von G ist rein.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass A_1a_1 eine reine Untergruppe von G ist. Für die Konstantenspalte gilt $l = 0$ und somit folgt $\alpha_5 \in \mathbb{Z}$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am

Element a_1, dass $q = \alpha_1 + \alpha_5 \in A_1 + \mathbb{Z} = A_1$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}a_1 = A_1 a_1$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $A_2 a_2$ eine reine Untergruppe von G ist. Für die Konstantenspalte gilt $k = 0$ und somit folgt $\alpha_5 \in \mathbb{Z}$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am Element a_2, dass $q = \alpha_2 + \alpha_5 \in A_2 + \mathbb{Z} = A_2$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}a_2 = A_2 a_2$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $A_3 a_3$ eine reine Untergruppe von G ist. Für die Konstantenspalte gilt $n = 0$ und somit folgt $\alpha_5 + \alpha_6 \in \mathbb{Z}$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am Element a_3, dass $q = \alpha_3 + p\alpha_5 + p\alpha_6 \in A_3 + \mathbb{Z} = A_3$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}a_3 = A_3 a_3$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $A_4 a_4$ eine reine Untergruppe von G ist. Für die Konstantenspalte gilt $m = 0$ und somit folgt $\alpha_5 + \alpha_6 \in \mathbb{Z}$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am Element a_4, dass $q = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \in A_4 + \mathbb{Z} = A_4$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}a_4 = A_4 a_4$ erhält. □

Lemma 5.5 *Der abhängige Teil der Darstellung von G ist rein.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass $A_5(a_1 + a_2 + pa_3 + a_4)$ eine reine Untergruppe von G ist. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen a_1 und a_2 liefert, dass $q = \alpha_1 + \alpha_5$ und $q = \alpha_2 + \alpha_5$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$. Somit gilt für den Koeffizientenvergleich am Element a_1, dass $q = \alpha_1 + \alpha_5 \in \mathbb{Z} + A_5 = A_5$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}(a_1 + a_2 + pa_3 + a_4) = A_5(a_1 + a_2 + pa_3 + a_4)$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $A_6(pa_3 + a_4)$ eine reine Untergruppe von G ist. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen a_3 und a_4 liefert, dass $q = p^{-1}\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6$ und $q = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\alpha_4 \in \mathbb{Z}$. Für die Konstantenspalte gilt $l = 0$ und somit folgt $\alpha_5 \in \mathbb{Z}$. Somit gilt für den Koeffizientenvergleich am Element a_4, dass $q = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + A_6 = A_6$, so dass man insgesamt $G \cap \mathbb{Q}(pa_3 + a_4) = A_6(pa_3 + a_4)$ erhält. □

Proposition 5.6 *Es gibt eine Butlergruppe, deren Darstellung rein ist, obwohl ihre darstellende Matrix nicht total verschränkt ist.*

Beweis. Die darstellende Matrix Λ von G hat bzgl. der Summenbasis $(a_1, ..., a_6)$ die Form:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & 1 \\ 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}$$

Die darstellende Matrix ist nicht total verschränkt. Ferner ist nach obigen Lemmas die Darstellung von G rein. □

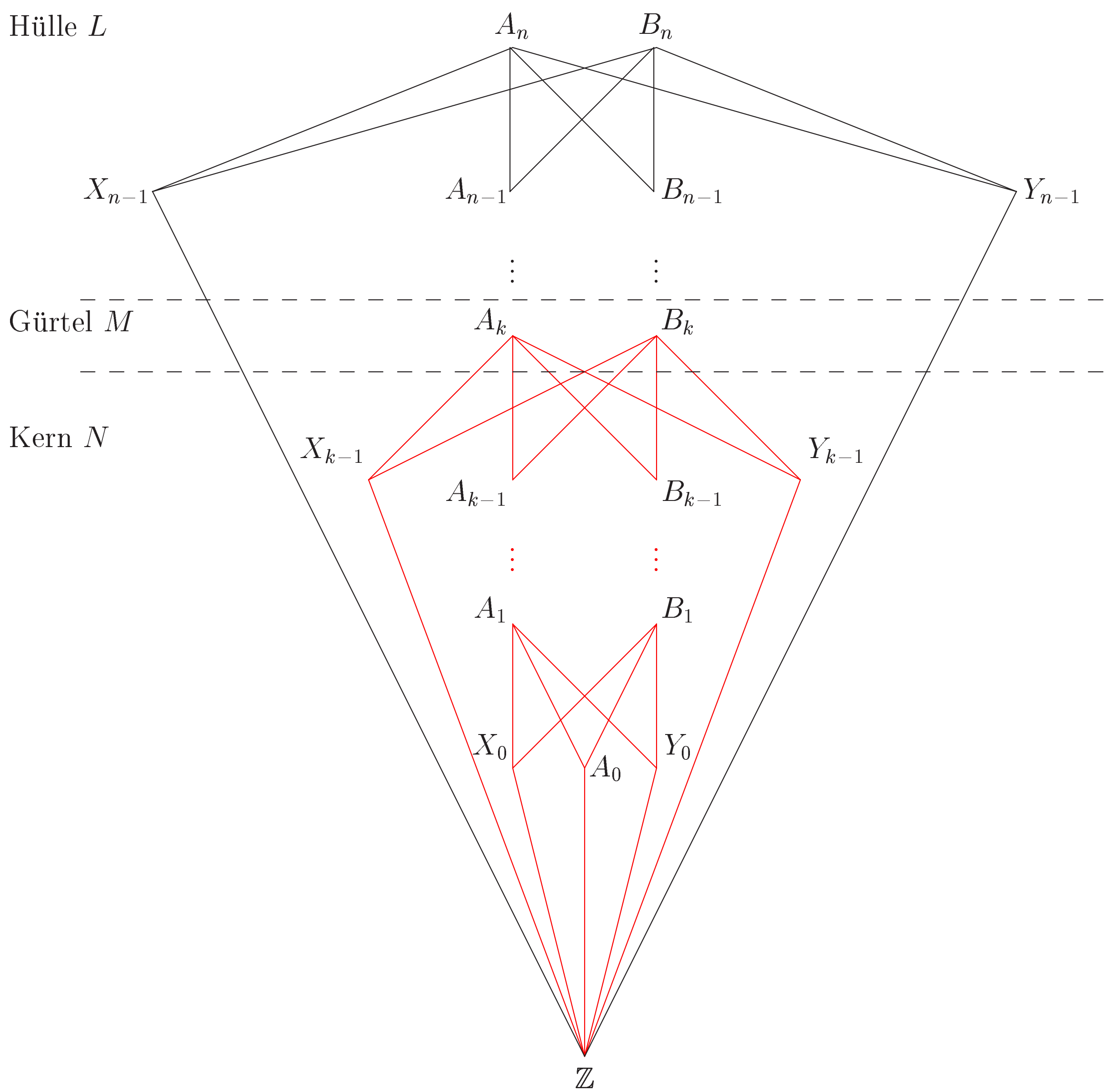
Dieses komplexe Themengebiet vollständig zu behandeln, wird noch Aufgabe weiterer Forschungsarbeit sein. Mehr zu diesem Thema ist u.a. in der Arbeit von S. Rieder [9] zu finden. Die Eigenschaft der totalen Verschränktheit einer darstellenden Matrix wird in der weiteren Arbeit nicht mehr verwendet.

6 Die Regulatorgruppe

Es wird ein Beispiel einer Butlergruppe angegeben, von dem schrittweise nachgewiesen wird, dass es Rang $3n+1$ mit einer kritischen Typenmenge der Mächtigkeit $4n+1$ hat und eine Regulatorkette der genauen Länge n, mit $n \geq 0$, besitzt.

6.1 Definition

Definition 6.1 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei p eine Primzahl. Seien $\mathbb{Z} \subset A_i,\ B_i,\ X_i,\ Y_i \subset \mathbb{Q}_p$, jeweils für die entsprechende Indexmenge. Die relativen Inklusionen dieser rationalen Gruppen seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben.



Dann heißt $\mathcal{S}_p = \{A_i, B_i, X_i, Y_i\}$ mit rationalen Gruppen, gemäß der Inklusionen dieses Hassediagramms, *p-Regulatorsystem für k und n* und wird kurz Regulatorsystem genannt.

Definition 6.2 Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ und sei p prim. Sei $\{A_i, B_i, X_i, Y_i\}$ ein Regulatorsystem für k und n. Dann heißt die Butlergruppe H^k, definiert als

$$\begin{aligned} H^k &= H(\mathcal{S}_p, k, n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} p^{i-k} A_i a_i + \sum_{i=1}^{k} p^{i-k} B_i b_i + \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k+1}^{n} B_i b_i + \sum_{i=k}^{n-1} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) \qquad (9) \\ &\subsetneq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Q} a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathbb{Q} b_i \oplus \mathbb{Q} c_i) \end{aligned}$$

eine *p-Regulatorgruppe für k und n*, zum obigen *Regulatorsystem*. H^k wird kurz Regulatorgruppe genannt. Eine Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, k, n)$ wird mit H^k bezeichnet, da $\mathcal{S}_p$ und n fest sind. $L = \langle a_i, b_l, x_l, y_l \mid 0 \leq i \leq k-1, 1 \leq l \leq k-1 \rangle_*^{H^k}$ heißt *Kern* von H^k und $M = \langle a_k, b_k \rangle_*^{H^k}$ *Gürtel* von H^k, sowie $N = \langle a_i, b_i, x_l, y_l \mid k+1 \leq i \leq n, k \leq l \leq n-1 \rangle_*^{H^k}$ *Hülle* von H^k.

6.2 Situation

Bemerkung: In dieser Arbeit wird gezeigt, dass $H^n = H(\mathcal{S}_p, n, n)$ eine Butlergruppe ist mit einer Regulatorkette der Länge n und iterierten Regulatoren $\mathrm{R}^{n-k}(H^k) = H(\mathcal{S}_p, k, n)$, mit den hilfreichen Notationen $\mathrm{R}^0(H^n) = H^n$ und $\mathrm{R}^1(H^{n-1}) = \mathrm{R}(H^{n-1})$.

Situation: Sei H^k eine Regulatorgruppe. Dann erhält man für jedes Element $h \in H^k$ durch Umsortieren nach Basiselementen eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i=0}^{k} p^{i-k-1} (p\alpha_i + \xi_{i-1} + p\xi_i) a_i + \sum_{i=1}^{k} p^{i-k-1} (p\beta_i + \upsilon_{i-1}) b_i + \sum_{i=1}^{k} p^{i-k-1} (\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1}) c_i \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n} (\alpha_i + \xi_{i-1} + \xi_i) a_i + \sum_{i=k+1}^{n} (\beta_i + \upsilon_{i-1}) b_i + \sum_{i=k+1}^{n} (\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1}) c_i \qquad (10) \end{aligned}$$

mit der hilfreichen Notation $\xi_{-1} = \xi_n = 0$, mit $\alpha_i \in A_i$, $\beta_i \in B_i$, $\xi_i \in X_i$, $\upsilon_i \in Y_i$, jeweils für die entsprechende Indexmenge. Diese Gleichung heißt *allgemeine Basis-Darstellung des Elements* $h \in H$ bzgl. des unabhängigen Teils der Summenbasis $(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n)$. Dem Kern mit Gürtel einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, k, n)$ wird ebenfalls ein lineares Gleichungssystem zugeordnet

$$\begin{aligned} r_i &= p^{i-k-1}(p\alpha_i + \xi_{i-1} + p\xi_i) && \text{mit} \quad i \in [0, k], \\ s_i &= p^{i-k-1}(p\beta_i + \upsilon_{i-1}) && \text{mit} \quad i \in [1, k], \\ t_i &= p^{i-k-1}(\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1}) && \text{mit} \quad i \in [1, k], \end{aligned}$$

mit der hilfreichen Notation $\xi_{-1} = 0$. Der Hülle einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, k, n)$ wird ein lineares Gleichungssystem zugeordnet

$$\begin{array}{rcll} r_i & = & \alpha_i + \xi_{i-1} + \xi_i & \text{mit} \quad i \in [k+1, n], \\ s_i & = & \beta_i + \upsilon_{i-1} & \text{mit} \quad i \in [k+1, n], \\ t_i & = & \xi_{i-1} - \upsilon_{i-1} & \text{mit} \quad i \in [k+1, n], \end{array}$$

mit der hilfreichen Notation $\xi_n = 0$, mit $\alpha_i \in A_i$, $\beta_i \in B_i$, $\xi_i \in X_i$, $\upsilon_i \in Y_i$. Dieses System mit *Konstantenspalte* (r_i, s_i, t_i) heißt *Koeffizientensystem für* $\mathcal{S}_p$ *und* k *sowie* n. Stillschweigend sind für $\mathcal{S}_p$ und k sowie n die Voraussetzungen wie für Regulatorgruppen angenommen. Wir sind nur interessiert an Lösungen im Regulatorsystem $\mathcal{S}_p$, d.h. $\alpha_i \in A_i$, $\beta_i \in B_i$, $\xi_i \in X_i$, $\upsilon_i \in Y_i$.

Bemerkung: Die darstellende Matrix $\Lambda = (\lambda_{ji})$ von H hat bzgl. der Summenbasis $(a_0, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$, $c_1, ..., c_n)$ die Form

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|cccc|ccc|ccc} & a_0 & \cdots & \cdots & a_n & b_1 & \cdots & b_n & c_1 & \cdots & c_n \\ \hline X_0 & \ast & \ast & & 0 & & & & \ast & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & 0 & & & \ddots & \\ X_{n-1} & 0 & & \ast & \ast & & & & & & \ast \\ \hline Y_0 & & & & & \ast & & & -\ast & & \\ \vdots & & & 0 & & & \ddots & & & \ddots & \\ Y_{n-1} & & & & & & & \ast & & & -\ast \end{array}\right)$$

und ist vom Format $(2n, 3n+1)$. Dabei steht ein Eintrag $\ast$ für ein beliebiges Element echt größer Null und ein Eintrag -$\ast$ für ein beliebiges Element echt kleiner Null. Dies ist eine grobe Darstellung der Kopplungen von Parametern.

Die Sätze für ein Koeffizientensystem benötigt man zum Beweis der Reinheit der Darstellung einer Regulatorgruppe H^k. Immer dann, wenn aus Bedingungen für die Konstantenspalte gefolgert wird, wird Bemerkung 2.3 (1) und (4) verwendet.

Lemma 6.3 *Sei ein Koeffizientensystem für* $\mathcal{S}_p$, k, n *gegeben. Wenn für die Konstantenspalte gilt* $t_1 = ... = t_n = 0$, *dann folgt* $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbb{Z}$ *und* $\upsilon_0, ..., \upsilon_{n-1} \in \mathbb{Z}$ *für Lösungen im Regulatorsystem.*

Beweis. Aus $t_1 = ... = t_n = 0$ folgt $\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1} = 0$ für jedes $i \in [1, n]$ und somit gilt $\xi_i \in \mathbb{Z}$ und $\upsilon_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in [0, n-1]$. $\square$

Lemma 6.4 *Sei ein Koeffizientensystem für* $\mathcal{S}_p$, k, n *gegeben. Wenn für die Konstantenspalte gilt* $s_i = t_i = 0$ *für* $i \in [1, k]$, *dann folgt* $\xi_{i-1} \in p\mathbb{Z}$ *für Lösungen im Regulatorsystem.*

Beweis. Aus $s_i = 0$ mit $i \in [1, k]$ folgt $p\beta_i - \upsilon_{i-1} = 0$ und somit gilt $\upsilon_{i-1} \in p\mathbb{Z}$. Aus $t_i = 0$ mit $i \in [1, k]$ folgt $\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1} = 0$ und somit gilt insgesamt $\xi_{i-1} \in p\mathbb{Z}$. $\square$

Lemma 6.5 *Sei ein Koeffizientensystem für $\mathcal{S}_p$, k, n gegeben. Wenn für die Konstantenspalte gilt $r_i = t_i = 0$ für $i \in [1, k]$, dann folgt $\upsilon_{i-1} \in p\mathbb{Z}$ für Lösungen im Regulatorsystem.*

Beweis. Aus $r_i = 0$ folgt $p\alpha_i + \xi_{i-1} + p\xi_i = 0$ und somit gilt $\xi_{i-1} \in p\mathbb{Z}$. Aus $t_i = 0$ mit $i \in [1, k]$ folgt $\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1} = 0$ und somit gilt insgesamt $\upsilon_{i-1} \in p\mathbb{Z}$. $\square$

7 Reine Darstellung von H^k

Die Reinheit einer Darstellung ist notwendig für die Bildung von Typen-Komplementen, mit denen regulierende Untergruppen und der Regulator bestimmt werden können. Die Reinheit der Darstellung der Regulatorgruppe H^k ist zu beweisen und somit ist die Reinheit aller in der Darstellung von H^k auftretenden darstellenden Summanden zu zeigen.

Proposition 7.1 *Der unabhängige Teil der Darstellung des Kerns mit Gürtel einer Regulatorgruppe H^k ist rein.*

Beweis.
Es wird gezeigt, dass $A_i p^{i-k} a_i$ für $i \in [0,k]$ reine Untergruppen von H^k sind. Für die Konstantenspalte gilt u.a. $s_1 = ... = s_k = 0$ und $t_1 = ... = t_k = 0$. Nach Lemma 6.4 ist $\xi_{i-1} \in p\mathbb{Z}$ für $i \in [0,k]$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am Element $p^{i-k}a_i$, dass $q = \alpha_i + p^{-1}\xi_{i-1} + \xi_i \in A_i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = A_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}a_i = A_i p^{i-k} a_i$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $B_i p^{i-k} b_i$ für $i \in [1,k]$ reine Untergruppen von H^k sind. Für die Konstantenspalte gilt u.a. $r_1 = ... = r_k = 0$ und $t_1 = ... = t_k = 0$. Nach Lemma 6.5 ist $\upsilon_{i-1} \in p\mathbb{Z}$ für $i \in [1,k]$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich am Element $p^{i-k}b_i$, dass $q = \beta_i + p^{-1}\upsilon_{i-1} \in B_i + \mathbb{Z} = B_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}b_i = B_i p^{i-k} b_i$ erhält. □

Proposition 7.2 *Der abhängige Teil der Darstellung des Kerns mit Gürtel einer Regulatorgruppe H^k ist rein.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass $X_i p^{i-k}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1})$ für $i \in [0, k-1]$ reine Untergruppen von H^k sind. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen $p^{i-k}a_{i+1}$ und $p^{i-k}c_{i+1}$ liefert für $i \in [0, k-1]$, dass $q = p\alpha_{i+1} + \xi_i + p\xi_{i+1}$ und $q = \xi_i - \upsilon_i$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\upsilon_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in [0, k-1]$. Also gilt für den Koeffizientenvergleich am Element $p^{i-k}c_i$, dass $q = \xi_i + \upsilon_i \in X_i + \mathbb{Z} = X_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) = X_i p^{i-k}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1})$ für $i \in [0, k-1]$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $Y_i p^{i-k}(b_{i+1} - c_{i+1})$ für $i \in [0, k-1]$ reine Untergruppen von H^k sind. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen $p^{i-k}b_{i+1}$ und $p^{i-k}c_{i+1}$ liefert für $i \in [0, k-1]$, dass $q = p\beta_{i+1} + \upsilon_i$ und $-q = \xi_i - \upsilon_i$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\xi_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in [0, k-1]$. Also gilt für den Koeffizientenverleich am Element $p^{i-k}c_{i+1}$, dass $q = \xi_i - \upsilon_i \in \mathbb{Z} + Y_i = Y_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}(b_{i+1} - c_{i+1}) = Y_i p^{i-k}(b_{i+1} - c_{i+1})$ für $i \in [0, k-1]$ erhält. □

Proposition 7.3 *Der unabhängige Teil der Darstellung der Hülle einer Regulatorgruppe H^k ist rein.*

Beweis. Für die Konstantenspalte gilt u.a. $t_1 = ... = t_n = 0$. Nach Lemma 6.3 sind $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbb{Z}$ und $\upsilon_0, ..., \upsilon_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Es wird gezeigt, dass $A_i a_i$ für $i \in [k+1, n]$ reine Untergruppen von H^k sind. Durch Koeffizientenvergleich am Element a_i folgt, dass $q = \alpha_i + \xi_{i-1} + \xi_i \in A_i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = A_i$, so dass man insgesamt $H \cap \mathbb{Q}a_i = A_i a_i$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $B_i b_i$ für $i \in [k+1, n]$ reine Untergruppen von H^k sind. Durch Koeffizientenvergleich am Element b_i folgt, dass $q = \beta_i + \upsilon_{i-1} \in B_i + \mathbb{Z} = B_i$, so dass man insgesamt $H \cap \mathbb{Q} b_i = B_i b_i$ erhält. $\square$

Proposition 7.4 *Der abhängige Teil der Darstellung der Hülle einer Regulatorgruppe H^k ist rein.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass $X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1})$ für $i \in [k, n-1]$ reine Untergruppen von H^k sind. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen a_{i+1} und c_{i+1} liefert für $i \in [k, n-1]$, dass $q = \alpha_{i+1} + \xi_i + \xi_{i+1}$ und $q = \xi_i - \upsilon_i$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\upsilon_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in [k, n-1]$. Also gilt für den Koeffizientenvergleich am Element c_{i+1}, dass $q = \xi_i + \upsilon_i \in X_i + \mathbb{Z} = X_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) = X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1})$ für $i \in [k, n-1]$ erhält.

Es wird gezeigt, dass $Y_i(b_{i+1} - c_{i+1})$ für $i \in [k, n-1]$ reine Untergruppen von H^k sind. Ein Vergleich der Koeffizienten an den Elementen b_{i+1} und c_{i+1} liefert für $i \in [k, n-1]$, dass $q = \beta_{i+1} + \upsilon_i$ und $-q = \xi_i - \upsilon_i$. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, dass $\xi_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in [k, n-1]$. Also gilt für den Koeffizientenverleich am Element c_{i+1}, dass $q = \xi_i - \upsilon_i \in \mathbb{Z} + Y_i = Y_i$, so dass man insgesamt $H^k \cap \mathbb{Q}(b_{i+1} - c_{i+1}) = Y_i(b_{i+1} - c_{i+1})$ für $i \in [k, n-1]$ erhält. $\square$

Aus den Propositionen 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4, folgt sofort die Reinheit der Darstellung von H^k.

Satz 7.5 *Die Darstellung einer Regulatorgruppe H^k ist rein.*

8 Fast vollständig zerlegbare Untergruppen von H^k

Bezeichnung 8.1

$$\begin{aligned}
F &= \bigoplus_{i=0}^{k} p^{i-k} A_i a_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^{n} A_i a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} p^{i-k} B_i b_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^{n} B_i b_i \\
M &= \bigoplus_{i=0}^{k} p^{i-k} A_i a_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^{n} A_i a_i \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} p^{i-k} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \oplus \bigoplus_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\
N &= \bigoplus_{i=1}^{k} p^{i-k} B_i b_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^{n} B_i b_i \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} p^{i-k} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}) \oplus \bigoplus_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1})
\end{aligned}$$

Lemma 8.2 *$\langle a_i, b_i \mid i\rangle_*^{H^k}$ ist fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Sei F wie in Bezeichnung 8.1 gegeben. F ist vollständig zerlegbar, und da F_*/F von endlichem Exponenten ist, ist F_* fast vollständig zerlegbar. □

Lemma 8.3 *$\langle a_i, (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \mid i\rangle_*^{H^k}$ ist fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Sei M wie in Bezeichnung 8.1 gegeben. M ist vollständig zerlegbar, und da M_*/M von endlichem Exponenten ist, ist M_* fast vollständig zerlegbar. □

Lemma 8.4 *$\langle b_i, (b_{i+1} - c_{i+1}) \mid i\rangle_*^{H^k}$ ist fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Sei N wie in Bezeichnung 8.1 gegeben. N ist vollständig zerlegbar, und da N_*/N von endlichem Exponenten ist, ist N_* fast vollständig zerlegbar. □

9 Kritische Typenmenge von H^k

Die Typenmenge einer Butlergruppe, die in Summendarstellung $\sum A_i$ gegeben sind, sind nach dem Theorem 4.7 über die reine Hülle eines beliebigen Elements, aber auch schon nach Butler und Koehler [1, Theorem 1.7] enthalten in der Abschlussmenge der Typenmenge $\{t(A_i) \mid i\}$ bzgl. Schnitt und Vereinigung.

Bemerkung 9.1 Der Typ $t(\mathbb{Z}) = 0$ ist nicht kritisch, weil $H^{k^\sharp}(0) = H^k = H^k(0)$.

Lemma 9.2 *Die Typen t_{A_i} mit $i \in [0, n]$ und t_{B_i} mit $i \in [1, n]$ sind kritisch in einer Regulatorgruppe H^k.*

Beweis. Nach Lemma 8.2 ist $\langle F\rangle_*^{H^k}$ fast vollständig zerlegbar und folglich sind alle Typen t_{A_i} mit $i \in [0, n]$ und t_{B_i} mit $i \in [1, n]$ kritisch in einer Regulatorgruppe H^k. $\square$

Lemma 9.3 *Die Typen t_{X_i}, t_{Y_i} mit $i \in [0, n-1]$ sind kritisch in einer Regulatorgruppe H^k.*

Beweis. Nach Lemma 8.3 ist $\langle M\rangle_*^{H^k}$ fast vollständig zerlegbar und nach Lemma 8.4 ist $\langle N\rangle_*^{H^k}$ fast vollständig zerlegbar. Somit sind die Typen t_{X_i}, t_{Y_i} mit $i \in [0, n-1]$ kritisch in einer Regulatorgruppe H^k. $\square$

Nun soll gezeigt werden, dass es keinen weiteren kritischen Typ gibt, also keinen versteckten kritischen Typ. Genauer, die Typen, die durch Vereinigung und Schnitt durch Einbettung in den Verband aller Typen hinzukommen, sind nicht kritisch.

Lemma 9.4 *Die Schnitt- und Vereinigungstypen in der Typenmenge einer Regulatorgruppe H^k sind nicht kritisch in H^k.*

Beweis. Wegen $H^k(t_{A_i}) \cap F_* = F_*(t_{A_i})$ und $H^k(t_{B_i}) \cap F_* = F_*(t_{B_i})$ sind die Schnitt- und Vereinigungstypen der Typen t_{A_i} mit $i \in [0, n]$ und t_{B_i} mit $i \in [1, n]$ nicht kritisch in H^k. Analog folgt wegen $H^k(t_{A_i}) \cap M_* = M_*(t_{A_i})$ und $H^k(t_{X_i}) \cap M_* = M_*(t_{X_i})$, dass die Schnitt- und Vereinigungstypen der Typen t_{A_i} mit $i \in [0, n]$ und t_{X_i} mit $i \in [0, n-1]$ nicht kritisch in H^k sind. Ebenso folgt wegen $H^k(t_{B_i}) \cap N_* = N_*(t_{B_i})$ und $H^k(t_{Y_i}) \cap N_* = N_*(t_{Y_i})$, dass die Schnitt- und Vereinigungstypen der Typen t_{B_i} mit $i \in [1, n]$ und t_{Y_i} mit $i \in [0, n-1]$ nicht kritisch in H^k sind. $\square$

Insbesondere ist der einzige echte Vereinigungstyp $t(A_n) \cup t(B_n)$ nicht realisiert, während alle Schnitttypen zwar realisiert sind aber nicht kritisch.

Lemma 9.5 *Die beiden Typen von A_n und B_n einer Regulatorgruppe H^k sind die einzigen maximalen und sind insbesondere kritisch.*

Beweis. Nach Lemma 9.4 sind die Vereinigungstypen in der Typenmenge einer Regulatorgruppe H^k nicht kritisch in H^k und folglich sind die beiden Typen von A_n und B_n maximal. $\square$

Aus den Lemmas 9.2, 9.3, 9.4 und 9.5 folgt sofort die Mächtigkeit der kritischen Typenmenge einer Regulatorgruppe.

Proposition 9.6 *Eine Regulatorgruppe hat eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit $4n+1$ bestehend aus den Typen der $4n+1$ paarweise nicht isomorphen rationalen Gruppen A_i, B_i, X_i, Y_i, bzw. der zugehörigen Typen t_{A_i}, t_{B_i}, t_{X_i}, t_{Y_i}, jeweils für die entsprechenden Indexmengen.*

10 Brückenbetrachtungen von H^k

Die Brückenbetrachtungen sind notwendig für die Bestimmung der Typenuntergruppen. Eine Regulatorgruppe besitzt genau k Brücken und zwar sind die Paare (A_k, B_k), (A_{k-1}, B_{k-1}),..., (A_1, B_1) jeweils genau einmal überbrückt.

Lemma 10.1 *Sei $i \in [1, k]$ beliebig aber fest. In einer Regulatorgruppe H^k sind die Paare (A_i, B_i) genau einmal überbrückt.*

Beweis. Aus $p^{i-k-1}a_{i-1} \in H^k$ und $p^{i-k-1}(a_{i-1}+a_i+b_i) = p^{i-k-1}(a_{i-1}+a_i+c_i)+p^{i-k-1}(b_i-c_i) \in H^k$ folgt $p^{i-k-1}(a_i+b_i) \in H^k$ und somit sind $p^{i-k}A_i$ und $p^{i-k}B_i$ überbrückt. Mit Satz 4.8 folgt dann, dass $p^{i-k}A_i$ und $p^{i-k}B_i$ genau einmal überbrückt sind. $\square$

Lemma 10.2 *Sei $i \in [k+1, n]$ beliebig aber fest. In einer Regulatorgruppe H^k sind die Paare (A_i, B_i) nicht überbrückt.*

Beweis. Nach Proposition 8.2 ist $\langle F \rangle_*^{H^k}$ fast vollständig zerlegbar und folglich sind die Paare (A_i, B_i) für $i \in [k+1, n]$ nicht überbrückt. $\square$

11 Typenuntergruppen von H^k

Zur späteren Darstellung der regulierenden Untergruppen werden die Typenuntergruppen der Hülle mit Gürtel und des Kerns von H^k gebraucht. Zuerst wenden wir uns dem ersten Fall zu.

Proposition 11.1 *Sei $k+1 \leq i \leq n$. Für eine Regulatorgruppe H^k gilt $H^{k^\sharp}\big(t(A_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(B_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(X_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(Y_{i-1})\big) = \sum_{l=i}^{n}(A_l a_l + B_l b_l)$.*

Beweis. In Lemma 10.2 wurde gezeigt, dass A_i und B_i für $i \in [k+1,\, n]$ nicht überbrückt sind. Deshalb gilt für die Typen $t_{A_{i-1}}$, $t_{B_{i-1}}$, $t_{X_{i-1}}$ und $t_{Y_{i-1}}$, dass $H^{k^\sharp}\big(t(A_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(B_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(X_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(Y_{i-1})\big) = \Big\langle A_i a_i, B_i b_i, H^{k^\sharp}\big(t(A_i)\big)\Big\rangle_* = \sum_{l=i}^{n}(A_l a_l + B_l b_l)$.
□

Weiter bestimmen wir die Typenuntergruppen des Kerns von H^k.

Proposition 11.2 *Sei $i \leq k$. Für eine Regulatorgruppe H^k gilt $H^{k^\sharp}\big(t(A_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(B_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(X_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(Y_{i-1})\big) = \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}A_l a_l + p^{l-k}B_l b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}(A_l \cap B_l)(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(A_l a_l + B_l b_l)$, wobei B_0 nicht existiert.*

Beweis. Für $i \in [1,\, k]$ sind A_i und B_i nach Lemma 10.1 genau einmal überbrückt. Deshalb gilt für die Typen $t_{A_{i-1}}$, $t_{B_{i-1}}$, $t_{X_{i-1}}$ und $t_{Y_{i-1}}$:

$$
\begin{aligned}
&H^{k^\sharp}\big(t(A_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(B_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(X_{i-1})\big) = H^{k^\sharp}\big(t(Y_{i-1})\big) \\
&= \quad \langle p^{i-k}A_i a_i, p^{i-k}B_i b_i, H^{k^\sharp}\big(t(A_i)\big)\rangle_* \\
&= \quad p^{i-k}A_i a_i + p^{i-k}B_i b_i + \langle a_i + b_i\rangle_* + \sum_{l=i+1}^{k}\big(p^{l-k}A_l a_l + p^{l-k}B_l b_l\big) \\
&\qquad + \sum_{l=i+1}^{k} p^{l-k-1}(A_l \cap B_l)(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(A_l a_l + B_l b_l) \\
&= \quad p^{i-k}\langle (A_i \cap B_i)(a_i+b_i), p^{-1}(a_i+b_i)\rangle + \sum_{l=i}^{k}\big(p^{l-k}A_l a_l + p^{l-k}B_l b_l\big) \\
&\qquad + \sum_{l=i+1}^{k} p^{l-k-1}(A_l \cap B_l)(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(A_l a_l + B_l b_l) \\
&\overset{\text{Lemma 4.10}}{=} p^{i-k-1}(A_i \cap B_i)(a_i+b_i) + \sum_{l=i}^{k}\big(p^{l-k}A_l a_l + p^{l-k}B_l b_l\big) + \sum_{l=i+1}^{k} p^{l-k-1}(A_l \cap B_l)(a_l+b_l) \\
&\qquad + \sum_{l=k+1}^{n}(A_l a_l + B_l b_l) \\
&= \quad \sum_{l=i}^{k}\big(p^{l-k}A_l a_l + p^{l-k}B_l b_l\big) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}(A_l \cap B_l)(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(A_l a_l + B_l b_l)\,,
\end{aligned}
$$

wobei B_0 wegfällt. □

Proposition 11.3 *$H^{k^\sharp}\big(t(A_i)\big)$ mit $i \in [0, n-1]$ und $H^{k^\sharp}\big(t(B_i)\big)$ mit $i \in [1, n-1]$ sind fast vollständig zerlegbare Gruppen.*

12 Typen-Komplemente von H^k

Die Kenntnis der kritischen Typenmenge und Typuntergruppen ist notwendig zur Bestimmung der verschiedenen Typen-Komplemente H^k_t für den kritischen Typ t. Zunächst bestimmen wir die Typen-Komplemente der Hülle mit Gürtel von H^k.

Die Typen $t(A_n)$, $t(B_n)$ sind nach Lemma 9.5 maximal. Also sind die Typen-Komplemente der maximalen kritischen Typen einer Regulatorgruppe H^k genau

$$H^k_{t(A_n)} = A_n a_n \text{ und } H^k_{t(B_n)} = B_n b_n.$$

Die Typen-Komplemente der nicht-maximalen kritischen Typen der Hülle mit Gürtel haben nach Lemma 4.13, wobei sich die verwendeten Parameter noch einschränken lassen, genau die folgenden Formen. Für $i \in [k+1,\, n]$ gilt:

$$H^k_{t(A_{i-1})} = A_{i-1}\Big[a_{i-1} + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + \beta_l^{A_{i-1}} b_l)\Big],$$

wobei $\alpha_l^{A_{i-1}}$, $\beta_l^{A_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $A_{i-1}\alpha_l^{A_{i-1}} \subset A_l$ und $A_{i-1}\beta_l^{A_{i-1}} \subset B_l$ für jedes $l \in [i,\, n]$.

$$H^k_{t(B_{i-1})} = B_{i-1}\Big[b_{i-1} + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{B_{i-1}} a_l + \beta_l^{B_{i-1}} b_l)\Big],$$

wobei $\alpha_l^{B_{i-1}}$, $\beta_l^{B_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $B_{i-1}\alpha_l^{B_{i-1}} \subset A_l$ und $B_{i-1}\beta_l^{B_{i-1}} \subset B_l$ für jedes $l \in [i,\, n]$.

$$H^k_{t(X_{i-1})} = X_{i-1}\Big[a_{i-1} + a_i + c_i + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{X_{i-1}} a_l + \beta_l^{X_{i-1}} b_l)\Big],$$

wobei $\alpha_l^{X_{i-1}}$, $\beta_l^{X_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $X_{i-1}\alpha_l^{X_{i-1}} \subset A_l$ und $X_{i-1}\beta_l^{X_{i-1}} \subset B_l$ für jedes $l \in [i,\, n]$.

$$H^k_{t(Y_{i-1})} = Y_{i-1}\Big[b_i - c_i + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{Y_{i-1}} a_l + \beta_l^{Y_{i-1}} b_l)\Big],$$

wobei $\alpha_l^{Y_{i-1}}$, $\beta_l^{Y_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $Y_{i-1}\alpha_l^{Y_{i-1}} \subset A_l$ und $Y_{i-1}\beta_l^{Y_{i-1}} \subset B_l$ für jedes $l \in [i,\, n]$.

Weiter bestimmen wir die Typen-Komplemente des Kerns von H^k. Die Typen-Komplemente der nicht-maximalen kritischen Typen des Kerns haben nach Lemma 4.13, wobei sich die verwendeten Parameter noch einschränken lassen, genau die folgenden Formen. Für $i \in [1,\, k]$ gilt:

$$\begin{aligned} H^k_{t(A_{i-1})} = A_{i-1}\Big[&p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}} b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} j_l^{A_{i-1}}(a_l + b_l) \\ &+ \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + \beta_l^{A_{i-1}} b_l)\Big], \end{aligned}$$

wobei $\alpha_l^{A_{i-1}}, \beta_l^{A_{i-1}}, j_l^{A_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $A_{i-1}\alpha_l^{A_{i-1}} \subset A_l$ und $A_{i-1}\beta_l^{A_{i-1}} \subset B_l$ und $A_{i-1}j_l^{A_{i-1}} \subset A_l \cap B_l$ für jedes $l \in [i,\ n]$. Für $i \in [2,\ k]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
H^k_{t(B_{i-1})} &= B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{B_{i-1}}(a_l+b_l) \\
&\quad + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + \beta_l^{B_{i-1}}b_l)\Big],
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha_l^{B_{i-1}}, \beta_l^{B_{i-1}}, j_l^{B_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $B_{i-1}\alpha_l^{B_{i-1}} \subset B_l$ und $B_{i-1}\beta_l^{B_{i-1}} \subset B_l$ und $B_{i-1}j_l^{B_{i-1}} \subset A_l \cap B_l$ für jedes $l \in [i,\ n]$. Für $i \in [1,\ k]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
H^k_{t(X_{i-1})} &= X_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(a_{i-1} + a_i + c_i) + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{X_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{X_{i-1}}b_l) \\
&\quad + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{X_{i-1}}(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{X_{i-1}}a_l + \beta_l^{X_{i-1}}b_l)\Big],
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha_l^{X_{i-1}},\ \beta_l^{X_{i-1}},\ j_l^{X_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $X_{i-1}\alpha_l^{X_{i-1}} \subset X_l$ und $X_{i-1}\beta_l^{X_{i-1}} \subset B_l$ und $X_{i-1}j_l^{X_{i-1}} \subset A_l \cap B_l$ für jedes $l \in [i,\ n]$. Für $i \in [1,\ k]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
H^k_{t(Y_{i-1})} &= Y_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(b_i - c_i) + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{Y_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{Y_{i-1}}b_l) \\
&\quad + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{Y_{i-1}}(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{Y_{i-1}}a_l + \beta_l^{Y_{i-1}}b_l)\Big],
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha_l^{Y_{i-1}},\ \beta_l^{Y_{i-1}},\ j_l^{Y_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ mit $Y_{i-1}\alpha_l^{Y_{i-1}} \subset A_l$ und $Y_{i-1}\beta_l^{Y_{i-1}} \subset B_l$ und $Y_{i-1}j_l^{Y_{i-1}} \subset A_l \cap B_l$ für jedes $l \in [i,\ n]$.

13 Regulierende Untergruppen von H^k

Eine regulierende Untergruppe von H^k ist die Summe von Komplementen zu Typen aus dem Kern von H^k und einer regulierenden Untergruppe der Hülle mit Gürtel von H^k. Die oben ermittelten Typen-Komplemente werden nun aufsummiert, um die regulierenden Untergruppen zu erhalten. Die allgemeine Darstellung aller regulierenden Untergruppen von H^k ist

$$\sum_{i=0}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=1}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(X_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(Y_i)},$$

wobei für die Parameter

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_l^{A_{i-1}},\ \beta_l^{A_{i-1}},\ j_l^{A_{i-1}} & \in & \mathbb{Q},\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
\alpha_l^{B_{i-1}},\ \beta_l^{B_{i-1}},\ j_l^{B_{i-1}} & \in & \mathbb{Q},\ \text{mit } i \in [2,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
\alpha_l^{X_{i-1}},\ \beta_l^{X_{i-1}},\ j_l^{X_{i-1}} & \in & \mathbb{Q},\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
\alpha_l^{Y_{i-1}},\ \beta_l^{Y_{i-1}},\ j_l^{Y_{i-1}} & \in & \mathbb{Q},\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],
\end{array}$$

die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen

$$\begin{array}{rclrcl}
A_{i-1}\alpha_l^{A_{i-1}} & \subset & A_l, & A_{i-1}\beta_l^{A_{i-1}} & \subset & B_l,\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
B_{i-1}\alpha_l^{B_{i-1}} & \subset & A_l, & B_{i-1}\beta_l^{B_{i-1}} & \subset & B_l,\ \text{mit } i \in [2,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
X_{i-1}\alpha_l^{X_{i-1}} & \subset & A_l, & X_{i-1}\beta_l^{X_{i-1}} & \subset & B_l,\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n],\\
Y_{i-1}\alpha_l^{Y_{i-1}} & \subset & A_l, & Y_{i-1}\beta_l^{Y_{i-1}} & \subset & B_l,\ \text{mit } i \in [1,\ n] \text{ und } l \in [i,\ n].
\end{array} \tag{11}$$

Zunächst bestimmen wir die regulierenden Gruppen der Hülle mit Gürtel von H^k.

Proposition 13.1 *Die allgemeine Darstellung der regulierenden Untergruppen der Hülle mit Gürtel einer Regulatorgruppe H^k ist*

$$\widetilde{U^k} \;=\; \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i + \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}),$$

wobei B_0 nicht existiert.

Beweis. Die Typen-Komplemente der beiden maximalen Typen von H^k werden zunächst zusammengefasst:

$$H^k_{t(A_n)} + H^k_{t(B_n)} \;=\; A_n a_n + B_n b_n. \tag{12}$$

Bevor man alle Typen-Komplemente addiert, ist es sinnvoll, zunächst nur Teilsummen zu bilden und diese jeweils mit Hilfe von Lemma 4.12 schrittweise zu vereinfachen. Diese Vorgehensweise wird nun erläutert. Berachtet man für $i = n$ den Summanden der Summe $\sum_{i=k+1}^{n} A_{i-1}\Big[a_{i-1} + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + \beta_l^{A_{i-1}} b_l)\Big]$, so erhält man $A_{n-1}\Big[a_{n-1} + \alpha_n^{A_{n-1}} a_n + \beta_n^{A_{n-1}} b_n\Big]$. Weiter gilt nach (11), dass $A_{n-1}\alpha_n^{A_{n-1}} a_n \subset A_n a_n$ und $A_{n-1}\beta_n^{A_{n-1}} b_n \subset B_n b_n$. Insgesamt folgt mit Lemma 4.12, dass

$A_{n-1}\Big[a_{n-1} + \alpha_n^{A_{n-1}} a_n + \beta_n^{A_{n-1}} b_n\Big] + A_n a_n + B_n b_n = A_{n-1}a_{n-1} + A_n a_n + B_n b_n.$
Analog folgt, dass
$B_{n-1}\Big[b_{n-1} + \alpha_n^{B_{n-1}} a_n + \beta_n^{B_{n-1}} b_n\Big] + A_n a_n + B_n b_n = B_{n-1}b_{n-1} + A_n a_n + B_n b_n.$
So verfährt man weiter von $i = n-1$ bis $i = k+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} &= \sum_{i=k+1}^{n} H^k_{t(A_{i-1})} + H^k_{t(A_n)} + \sum_{i=k+1}^{n} H^k_{t(B_{i-1})} + H^k_{t(B_n)} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n} A_{i-1}\Big[a_{i-1} + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + \beta_l^{A_{i-1}} b_l)\Big] + A_n a_n \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n} B_{i-1}\Big[b_{i-1} + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{B_{i-1}} a_l + \beta_l^{B_{i-1}} b_l)\Big] + B_n b_n \\
&\overset{(11)}{=} \sum_{i=k+1}^{n-1} A_{i-1}\Big[a_{i-1} + \sum_{l=i}^{n-1}(\alpha_l^{A_{i-1}} a_l + \beta_l^{A_{i-1}} b_l)\Big] + A_{n-1}a_{n-1} + A_n a_n \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n-1} B_{i-1}\Big[b_{i-1} + \sum_{l=i}^{n-1}(\alpha_l^{B_{i-1}} a_l + \beta_l^{B_{i-1}} b_l)\Big] + B_{n-1}b_{n-1} + B_n b_n \\
&\overset{(11)}{=} \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i.
\end{aligned}
$$

Weiter folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=k}^{n-1} H^k_{t(X_i)} &= \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=k+1}^{n} H^k_{t(X_{i-1})} \\
= \quad \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i &+ \sum_{i=k+1}^{n} X_{i-1}\Big[a_{i-1} + a_i + c_i + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{X_{i-1}} a_l + \beta_l^{X_{i-1}} b_l)\Big] \\
\overset{(11)}{=} \quad \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i &+ \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1})
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=k}^{n-1} H^k_{t(Y_i)} &= \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=k+1}^{n} H^k_{t(Y_{i-1})} \\
= \quad \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i &+ \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i-1}\Big[b_i - c_i + \sum_{l=i}^{n}(\alpha_l^{Y_{i-1}} a_l + \beta_l^{Y_{i-1}} b_l)\Big] \\
\overset{(11)}{=} \quad \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i &+ \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Somit ist die allgemeine Darstellung der regulierenden Untergruppen der Hülle mit Gürtel einer Regulatorgruppe H^k

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=k}^{n-1} H^k_{t(X_i)} + \sum_{i=k}^{n-1} H^k_{t(Y_i)} \\
&= \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i + \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}) \\
&= \widetilde{U^k}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Weiter bestimmen wir nun die allgemeine Darstellung aller regulierenden Untergruppen einer Regulatorgruppe H^k.

Proposition 13.2 *Die allgemeine Darstellung aller regulierenden Untergruppen einer Regulatorgruppe H^k mit $k = 0, ..., n$ ist*

$$\begin{aligned}
U^k &= U^k(s_l^{A_i},\ s_l^{B_i},\ s_l^{X_i},\ s_l^{Y_i}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} A_i \Big[p^{i-k} a_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{A_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} B_i \Big[p^{i-k} b_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{B_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} X_i \Big[p^{i-k}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{X_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} Y_i \Big[p^{i-k}(b_{i+1} - c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{Y_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist H^0 regulatorgleich.

Beweis. Bevor man alle Typen-Komplemente addiert, ist es sinnvoll, zunächst nur Teilsummen zu bilden und diese jeweils mit Hilfe von Lemma 4.12 schrittweise zu vereinfachen.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} H^k_{t(A_{i-1})} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} \\
&= \quad \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{i-1}}(a_l+b_l) \\
&\quad\quad + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + \beta_l^{A_{i-1}}b_l)\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_ia_i + \sum_{i=k}^{n} B_ib_i \\
&\overset{(11)}{=} \quad \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad\quad + \sum_{i=k}^{n} A_ia_i + \sum_{i=k}^{n} B_ib_i
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{k} H^k_{t(B_{i-1})} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} \\
&= \quad \sum_{i=2}^{k} B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{B_{i-1}}(a_l+b_l) \\
&\quad\quad + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + \beta_l^{B_{i-1}}b_l)\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_ia_i + \sum_{i=k}^{n} B_ib_i \\
&\overset{(11)}{=} \quad \sum_{i=2}^{k} B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{B_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad\quad + \sum_{i=k}^{n} A_ia_i + \sum_{i=k}^{n} B_ib_i.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} H^k_{t(A_{i-1})} + \sum_{i=2}^{k} H^k_{t(B_{i-1})} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} \\
&= \quad \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad\quad + \sum_{i=2}^{k} B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{B_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad\quad + \sum_{i=k}^{n} A_ia_i + \sum_{i=k}^{n} B_ib_i.
\end{aligned}$$

Man kann mit Lemma 4.12 die Summendarstellung intern ändern, ohne die Gruppe zu verändern und man bezeichnet dann solche Summanden als überflüssig. Nun wird gezeigt, dass die mittleren Summanden $\sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l)$ und $\sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l)$ der Koeffizientengruppen von A_{i-1} und B_{i-1} überflüssig sind. Man betrachtet den ersten Term und schreibt die Summanden für $i = k$ und $i = k-1$ extra.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{i-1}}(a_l + b_l)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{i-1}}(a_l + b_l)\Big] \\
&\quad + A_{k-2}\Big[p^{-2}a_{k-2} + p^{-1}\alpha_{k-1}^{A_{k-2}}a_{k-1} + p^{-1}\beta_{k-1}^{A_{k-2}}b_{k-1} + \sum_{l=k-1}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{k-2}}(a_l + b_l)\Big] \\
&\quad + A_{k-1}\Big[p^{-1}a_{k-1} + p^{-1}j_k^{A_{k-1}}(a_k + b_k)\Big].
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.12 für

$$\begin{aligned}
A &= A_{k-2} \\
a &= p^{-2}a_{k-2} + p^{-1}\beta_{k-1}^{A_{k-2}}b_{k-1} + \sum_{l=k-1}^{k} p^{l-k-1}j_l^{A_{k-2}}(a_l + b_l) \\
b &= p^{-1}\alpha_{k-1}^{A_{k-2}}a_{k-1} \\
S &= A_{k-1}\Big[p^{-1}a_{k-1} + p^{-1}j_k^{A_{k-1}}(a_k + b_k)\Big]
\end{aligned}$$

folgt, dass der Summand b im Term bei der Koeffizientengruppe von A_{k-2} überflüssig ist, wenn der Koeffizient $j_k^{A_{k-1}}$ der Brücke $a_k + b_k$ entsprechend geändert wird. So verfährt man weiter für $i = k-2$ bis $i = 1$ und erhält, dass der Summand $\sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}\alpha_l^{A_{i-1}}a_l$ überflüssig ist. Betrachtet man die Koeffizientengruppe von B_{i-1}, so kann man analog folgern, dass der Summand $\sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}\beta_l^{A_{i-1}}b_l$ in der Koeffizientengruppe von A_{i-1} überflüssig ist. Weiter kann man entsprechend für die Koeffizientengruppe von B_{i-1} folgern, dass der Summand $\sum_{l=i}^{k-1}(p^{l-k}\alpha_l^{B_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{B_{i-1}}b_l)$ überflüssig ist. Zum Erhalt aller regulierenden Untergruppen genügt es ausschließlich, die Brücken zur Modifikation zu verwenden. Die anderen Elemente, d.h. die oberen a_i und b_i bedingen keine zusätzlichen regulierenden Untergruppen. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} H_{t(A_{i-1})}^k + \sum_{i=2}^{k} H_{t(B_{i-1})}^k + \sum_{i=k}^{n} H_{t(A_i)}^k + \sum_{i=k}^{n} H_{t(B_i)}^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}s_l^{A_{i-1}}(a_l + b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1}s_l^{B_{i-1}}(a_l + b_l)\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i.
\end{aligned}$$

Analog folgert man für die anderen Summen und erhält

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} H^k_{t(X_{i-1})} + \sum_{i=1}^{k} H^k_{t(Y_{i-1})} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=k}^{n} H^k_{t(B_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} X_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(a_{i-1}+a_i+c_i) + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{X_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{X_{i-1}}b_l) \\
&\qquad + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} j_l^{X_{i-1}}(a_l+b_l) + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{X_{i-1}}a_l + \beta_l^{X_{i-1}}b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} Y_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(b_i-c_i) + \sum_{l=i}^{k}(p^{l-k}\alpha_l^{Y_{i-1}}a_l + p^{l-k}\beta_l^{Y_{i-1}}b_l) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} j_l^{Y_{i-1}}(a_l+b_l) \\
&\qquad + \sum_{l=k+1}^{n}(\alpha_l^{Y_{i-1}}a_l + \beta_l^{Y_{i-1}}b_l)\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} X_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(a_{i-1}+a_i+c_i) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{X_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} Y_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(b_i-c_i) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{Y_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i.
\end{aligned}$$

Somit gilt für die allgemeine Darstellung aller regulierenden Untergruppen

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=1}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(X_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(Y_i)} \\
&\overset{(13)}{=} \sum_{i=1}^{k} H^k_{t(A_{i-1})} + \sum_{i=2}^{k} H^k_{t(B_{i-1})} + \sum_{i=1}^{k} H^k_{t(X_{i-1})} + \sum_{i=1}^{k} H^k_{t(Y_{i-1})} + \widetilde{U^k} \\
&= \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}\Big[p^{i-k-1}a_{i-1} + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{A_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} B_{i-1}\Big[p^{i-k-1}b_{i-1} + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{B_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} X_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(a_{i-1}+a_i+c_i) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{X_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} Y_{i-1}\Big[p^{i-k-1}(b_i-c_i) + \sum_{l=i}^{k} p^{l-k-1} s_l^{Y_{i-1}}(a_l+b_l)\Big] + \widetilde{U^k}.
\end{aligned}$$

Durch eine Indexverschiebung und mit Proposition 13.2 erhält man für die allgemeine Darstellung aller regulierenden Untergruppen

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} H^k_{t(A_i)} + \sum_{i=1}^{n} H^k_{t(B_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(X_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} H^k_{t(Y_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} A_i \Big[p^{i-k} a_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{A_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} B_i \Big[p^{i-k} b_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{B_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} X_i \Big[p^{i-k}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{X_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} Y_i \Big[p^{i-k}(b_{i+1} - c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k} s_l^{Y_i}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}) \\
&\quad = U^k(s_l^{A_i},\ s_l^{B_i},\ s_l^{X_i},\ s_i^{Y_i}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposition 13.3 *Die Menge aller regulierenden Untergruppen einer Regulatorgruppe* H^k *ist* $\{U^k \mid s_l^{A_i}, s_l^{B_i}, s_l^{X_i}, s_l^{Y_i} \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Sei $U^k = U^k(s_l^{A_i},\ s_l^{B_i},\ s_l^{X_i},\ s_l^{Y_i})$. Für die entsprechende Indexmenge gilt: Genau dann ist U^k eine regulierende Untergruppe von H^k, wenn die Bedingungen $A_i s_l^{A_i}$, $B_i s_l^{B_i}$, $X_i s_l^{X_i}$, $Y_i s_l^{Y_i} \subset A_k \cap B_k \subset \mathbb{Q}_p$ für $s_l^{A_i}$, $s_l^{B_i}$, $s_l^{X_i}$, $s_l^{Y_i} \in \mathbb{Q}$ erfüllt sind. Da die 1 in jeder der rationalen Gruppen A_i, B_i, X_i, Y_i enthalten ist, folgt dann insbesondere $s_l^{A_i}$, $s_l^{B_i}$, $s_l^{X_i}$, $s_l^{Y_i} \in \mathbb{Q}_p$. Nach Lemma 4.14 lassen sich die Variablen $s_l^{A_i}$, $s_l^{B_i}$, $s_l^{X_i}$, $s_l^{Y_i}$ dann weiter auf $\mathbb{Z}$ beschränken, trotzdem sind alle regulierenden Untergruppen erfasst. Man erhält für $s_l^{A_i}$, $s_l^{B_i}$, $s_l^{X_i}$, $s^{Y_i} \in \mathbb{Z}$ auch ausschließlich regulierende Untergruppen von H^k, da in diesem Fall die Voraussetzungen $A_i s_l^{A_i}$, $B_i s_l^{B_i}$, $X_i s_l^{X_i}$, $Y_i s_l^{Y_i} \subset A_k \cap B_k$ gelten. Folglich beschreibt auch $\{U^k \mid s_l^{A_i}, s_l^{B_i}, s_l^{X_i}, s_l^{Y_i} \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller regulierenden Untergruppen von H^k. $\square$

Bemerkung: Krapf [7, Theorem 1.1] und Mader [7, Theorem 1.2] konnten zeigen, dass Butlergruppen nur endlich viele verschiedene regulierende Untergruppen besitzen. Somit lassen sich die Variablen $s_l^{A_i}$, $s_l^{B_i}$, $s_l^{X_i}$, $s_l^{Y_i}$ auf eine endliche Wertemenge einschränken, wobei alle regulierenden Untergruppen erfasst sind.

14 Der Regulator $\mathrm{R}(H^k)$ von H^k

Um den Regulator zu erhalten genügt es ganz spezielle regulierende Untergruppen zu schneiden.

Bezeichnung: Sei $V = U^k(\underbrace{s_l^{A_i},\, s_l^{B_i}}_{=0\ f\ddot{u}r\ i>f},\, s_l^{X_i},\, s_l^{Y_i})$ mit $s_l^{A_i},\, s_l^{B_i} = 0$ für $i > f$. Die allgemeine Darstellung der regulierenden Untergruppen wird zerlegt $V = A_f\Big[p^{f-k}a_f + \sum_{l=f}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_f}(a_{l+1} + b_{l+1})\Big] + S_A$ mit

$$\begin{aligned} S_A \;=\; & \sum_{i=0;\, i<f}^{k-1} A_i\Big[p^{i-k}a_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_i}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + \sum_{i=0;\, i>f}^{k-1} A_i\Big[p^{i-k}a_i\Big] + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i \\ & + \sum_{i=1;\, i\leq f}^{k-1} B_i\Big[p^{i-k}b_i + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}s_l^{B_i}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + \sum_{i=1;\, i>f}^{k-1} B_i\Big[p^{i-k}b_i\Big] + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} X_i\Big[p^{i-k}(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}s_l^{X_i}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} Y_i\Big[p^{i-k}(b_{i+1} - c_{i+1}) + \sum_{l=i}^{k-1} p^{l-k}s_l^{Y_i}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1}). \end{aligned}$$

Lemma 14.1 *Sei $s_l^{A_{f+1}} = \ldots = s_l^{A_{k-1}} = 0$ und $s_l^{B_{f+1}} = \ldots = s_l^{B_{k-1}} = 0$ mit $f \in [0, k-1]$ und $l \in [f, k-1]$. Für alle $s_l^{A_f} \in \mathbb{Z}$ gilt $p^{f-k+1}a_f \in A_f\Big[p^{f-k}a_f + \sum_{l=f}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_f}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + S_A$.*

Beweis. Mit Lemma 4.16 für $a = p^{f-k}a_f$ und $b = \sum_{l=f}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_f}(a_{l+1} + b_{l+1})$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Nun wird exemplarisch der Schnitt T_A aller regulierenden Untergruppen über alle $s_f^{A_f} \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Für eine spezielle Wahl der s erhält man

$$\begin{aligned} \Big\{A_f\Big[p^{f-k}a_f\Big] + S\Big\} \cap \Big\{A_f\Big[p^{f-k}a_f + p^{f-k}(a_{f+1}+b_{f+1})\Big] + S\Big\} &\overset{\text{Lemma 4.17}}{=} pA_f\Big[p^{f-k}a_f\Big] + S \\ &= p^{f-k+1}A_f a_f + S. \end{aligned}$$

Nach Lemma 14.1 gilt $p^{f-k+1}a_f \in A_f\Big[p^{f-k}a_f + \sum_{l=f}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_f}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + S_A$ und somit folgt

$$T_A = \bigcap_{s_f^{A_f} \in \mathbb{Z}} \Big\{A_f\Big[p^{f-k}a_f + \sum_{l=f}^{k-1} p^{l-k}s_l^{A_f}(a_{l+1}+b_{l+1})\Big] + S_A\Big\} = p^{f-k+1}A_f a_f + S_A. \qquad \square$$

Ergebnis 14.2 *Sei T_A der Schnitt aller regulierenden Untergruppen über alle $s_f^{A_f} \in \mathbb{Z}$, dann gilt $T_A = p^{f-k+1}A_f a_f + S_A$. Analog gilt $T_B = p^{f-k+1}B_f b_f + S_B$ und $T_X = p^{f-k+1}X_f(a_f + a_{f+1} + c_{f+1}) + S_X$ sowie $T_Y = p^{f-k+1}Y_f(b_{f+1} - c_{f+1}) + S_Y$.*

Bemerkung: Die obigen Schnitte werden nun mit Hilfe von Lemma 4.18 miteinander geschnitten. Lemma 4.18 gilt für den Schnitt von zwei regulierenden Untergruppen. Den Schnitt mehrerer regulierender Untergruppen erhält man durch sukzessives Schneiden zweier regulierender Untergruppen, wie z.B.:

$$\begin{aligned} T_{D_1} \cap T_{D_2} \cap T_{D_3} &= (T_{D_1} \cap T_{D_2}) \cap (T_{D_2} \cap T_{D_3}) \\ T_{D_1} \cap T_{D_2} \cap T_{D_3} \cap T_{D_4} &= (T_{D_1} \cap T_{D_2} \cap T_{D_3}) \cap (T_{D_2} \cap T_{D_3} \cap T_{D_4}) \end{aligned}$$

Satz 14.3 *Der Regulator von H^k ist gleich H^{k-1} für alle $0 \leq k \leq n$ mit $n, k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Indem man die Schnitte von regulierenden Untergruppen von H^k aus dem Ergebnis 14.2 paarweise schneidet, erhält man für $D \in \{A,\ B,\ X,\ Y\}$, dass

$$\begin{aligned} T &= \bigcap_D T_D \\ &\overset{\text{Lemma 4.18}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k+1} A_i a_i + \sum_{i=1}^{k-1} p^{i-k+1} B_i b_i + \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k+1} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k+1} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) + \sum_{i=k}^{n} A_i a_i + \sum_{i=k}^{n} B_i b_i + \sum_{i=k}^{n-1} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) \\ &\quad + \sum_{i=k}^{n-1} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) \\ &= H^{k-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

15 Eine Regulatorkette der Länge n

Mit der Konstruktion einer Regulatorgruppe ist es möglich, für jede natürliche Zahl eine Butlergruppe mit genau dieser Regulatorkettenlänge anzugeben.

Lemma 15.1 *Für eine Regulatorgruppe H^k gilt $p^{-k}a_0 \in H^k \setminus H^{k-1}$ und insbesondere gilt $H^{k-1} \subsetneq H^k$.*

Beweis. Nimmt man an, dass es eine Darstellung von $p^{-k}a_0$ in H^{k-1} gibt, so erhält man, durch Umsortieren nach Basiselementen, eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} p^{-k}a_0 \;=\; & \sum_{i=0}^{k-1} p^{i-k}(p\alpha_i + \xi_{i-1} + p\xi_i)a_i + \sum_{i=1}^{k-1} p^{i-k}(p\beta_i + \upsilon_{i-1})b_i + \sum_{i=1}^{k-1} p^{i-k}(\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1})c_i \\ & + \sum_{i=k}^{n}(\alpha_i + \xi_{i-1} + \xi_i)a_i + \sum_{i=k}^{n}(\beta_i + \upsilon_{i-1})b_i + \sum_{i=k}^{n}(\xi_{i-1} - \upsilon_{i-1})c_i \end{aligned}$$

mit der hilfreichen Notation $\xi_{-1} = \xi_n = 0$, mit $\alpha_i \in A_i$, $\beta_i \in B_i$, $\xi_i \in X_i$, $\upsilon_i \in Y_i$, jeweils für die entsprechende Indexmenge. Ein Vergleich der Koeffizienten am Element c_1 liefert mit Bemerkung 2.3 (1) und (4), dass $0 = \xi_0 - \upsilon_0$ und somit $\xi_0 \in \mathbb{Z}$. Also gilt für den Koeffizientenvergleich am Element a_0, dass $1 = p\alpha_0 + p\xi_0 \in pA_0 + p\mathbb{Z} = pA_0$, so dass man einen Widerspruch zu $A_0 \subsetneqq \mathbb{Q}_p$ erhält. Es gilt also $p^{-k}a_0 \in H^k \setminus H^{k-1}$ und $H^{k-1} \subsetneq H^k$. $\square$

Mit Proposition 13.2 gelangt man schließlich zu einer Regulatorkette $H^0 \subsetneq \ldots \subsetneq H^n$ der genauen Länge n.

Satz 15.2 *Für eine Regulatorgruppe gilt $\mathrm{R}(H^0) = H^0$. Insbesondere hat $H^n = H(\mathcal{S}_p, n, n)$ die genaue Regulatorkettenlänge n, mit $n \in \mathbb{N}_0$.*

Hauptsatz 15.3 *Es gibt eine Butlergruppe H des Ranges $3n+1$ mit einer kritischen Typenmenge der Mächtigkeit $4n+1$, die eine Regulatorkette der genauen Länge n, mit $n \geq 0$, besitzt. Genauer,*

$$H = \sum_{i=0}^{n} p^{i-n}A_i a_i + \sum_{i=1}^{n} p^{i-n}B_i b_i + \sum_{i=0}^{n-1} p^{i-n}X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} p^{i-n}Y_i(b_{i+1} - c_{i+1})$$

mit einem p-Regulatorsystem als kritische Typenmenge, wie in Definition 6.1.

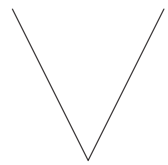
Beweis. Sei $n \geq 0$. Nach Definition 6.2 gilt für eine Regulatorgruppe

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathbb{Z}b_i \oplus \mathbb{Z}c_i) \subset H^k \subsetneq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Q}a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathbb{Q}b_i \oplus \mathbb{Q}c_i)$$

und somit hat diese Rang $3n+1$. Eine Regulatorgruppe H^k hat nach Proposition 9.6 eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit $4n+1$. Eine Regulatorgruppe $H = H^n$ besitzt nach Satz 15.2 eine Regulatorkette der genauen Länge n, wie gewünscht. $\square$

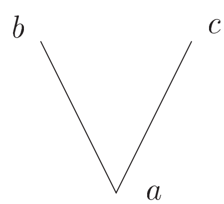
16 Minimalitätsbetrachtung

Definition 16.1 Ein Hassediagramm der folgenden Form wird als *V-Konstellation* bezeichnet.



Lemma 16.2 *Sei H eine Butlergruppe. Ist eine V-Konstellation im Hassediagramm der kritischen Typenmenge von H, so ist der Rang von H mindestens drei.*

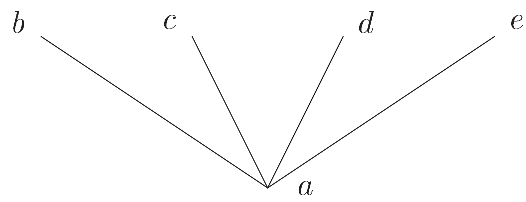
Beweis. Seien $a, b, c \in H$ mit den zugehörigen kritischen Typen $t(a)$, $t(b)$, $t(c) \in H$. Die relativen Inklusionen dieser seien durch die folgende V-Konstellation beschrieben.



Angenommen, dass a, b, c linear abhängig sind, dann gilt $c = \lambda a + \mu b$ und somit auch $\lambda, \mu \neq 0$. Aber a hat kritischen Typ $t(a)$, d.h. $H = Aa \oplus H^\sharp(t(a))$ mit $Bb \oplus Cc \subset H^\sharp(t(a))$. Also sind b und c linear unabhängig, wegen unvergleichbarer Typen, und offensichtlich ist a linear unabhängig von der Menge $\{b, c\}$. Somit folgt: Ist ein V in der kritischen Typenmenge, so hat diese einen Rang ≥ 3. $\square$

Lemma 16.3 *Sei H eine Butlergruppe. Ist eine V-Konstellation im Hassediagramm der kritischen Typenmenge von H, so ist Rang 4 minimal für Ketten von regulierenden Untergruppen.*

Beweis. Butlergruppen des Ranges 3 mit einem V in der kritischen Typenmenge sind fast vollständig zerlegbar. Alle regulierenden Untergruppen sind von der Form $A(a + i\omega) \oplus R$ mit $\omega \in R$, d.h. es existieren keine regulierenden Untergruppen, die ineinander liegen. Seien $a, b, c, d, e \in H$ mit den zugehörigen kritischen Typen $t(a)$, $t(b)$, $t(c)$, $t(d)$, $t(e) \in H$. Die relativen Inklusionen dieser seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben. Sei $t(a)$ der Fußpunkt der V-Konstellation. Also $H = Aa \oplus H^\sharp(t(a))$ mit zum Beispiel $Bb + Cc + Dd + E(b+c) \subset H^\sharp(t(a))$. Butlergruppen des Ranges 4 und kritischer Typenmenge der Mächtigkeit 5, mit einem V in der kritischen Typenmenge, sind nicht fast vollständig zerlegbar.



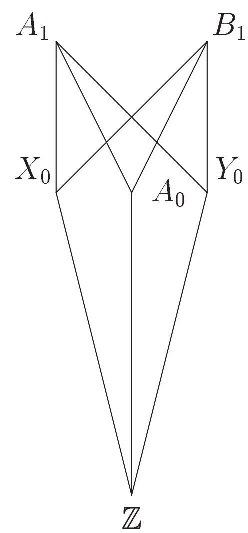
Insgesamt folgt also, dass Rang 4 minimal ist für Ketten von regulierenden Untergruppen mit der gegebenen kritischen Typenmenge. □

Zusammenfassung: Um eine Butlergruppe mit echten regulierenden Untergruppen, die ineinander liegen, zu erhalten, sind gewisse Bedingungen zu erfüllen. Butlergruppen vom Rang 3, die im Hassediagramm eine V-Konstellation aufweisen, d.h. die eine kritische Typenmenge haben, die ein V enthält, sind fast vollständig zerlegbare Gruppen. Ebenso gilt dies für Butlergruppen des Ranges 4, deren kritische Typenmenge die Mächtigkeit 4 oder kleiner besitzt. Fast vollständig zerlegbare Gruppen besitzen aber nicht die Eigenschaft, echte regulierende Untergruppen zu haben, die ineinander liegen. Erst ab Rang 4 und einer Mächtigkeit der kritischen Typenmenge von 5 wird dies erreicht.

17 Konkrete Anwendungen

17.1 Eine Regulatorkette der Länge 1

Situation 17.1 *Für eine Primzahl p seien $\mathbb{Z} \subset A_0,\ A_1,\ B_1,\ X_0,\ Y_0 \subset \mathbb{Q}_p$. Die relativen Inklusionen dieser rationalen Gruppen seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben.*



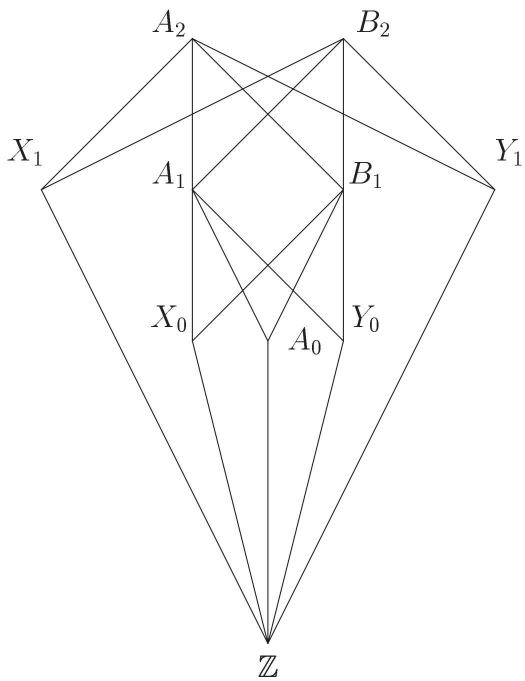
Sei die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ definiert als

$$
\begin{aligned}
& H(\mathcal{S}_p, 1, 1) \\
= \quad & \sum_{i=0}^{1} p^{i-1} A_i a_i + \sum_{i=1}^{1} p^{i-1} B_i b_i + \sum_{i=0}^{0} p^{i-1} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=0}^{0} p^{i-1} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) \\
= \quad & p^{-1} A_0 a_0 + A_1 a_1 + B_1 b_1 + p^{-1} X_0 (a_0 + a_1 + c_1) + p^{-1} Y_0 (b_1 - c_1) \\
\subsetneq \quad & \mathbb{Q} a_0 \oplus \mathbb{Q} a_1 \oplus \mathbb{Q} b_1 \oplus \mathbb{Q} c_1 .
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Aus dem Hauptsatz 15.3 folgt direkt, dass die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ eine Regulatorkette der Länge 1 besitzt. $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ ist eine echte Butlergruppe und nicht fast vollständig zerlegbar. Weiter ist sie gleich einer regulierenden Untergruppe und besitzt übereinander liegende regulierende Untergruppen. Ferner hat diese Rang 4 und ist somit nach Lemma 16.3 minimal. $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ besitzt eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 5.

17.2 Eine Regulatorkette der Länge 2

Situation: Für eine Primzahl p seien $\mathbb{Z} \subset A_i, B_i, X_i, Y_i \subset \mathbb{Q}_p$, jeweils für die entsprechenden Indexmengen. Die relativen Inklusionen dieser rationalen Gruppen seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben.



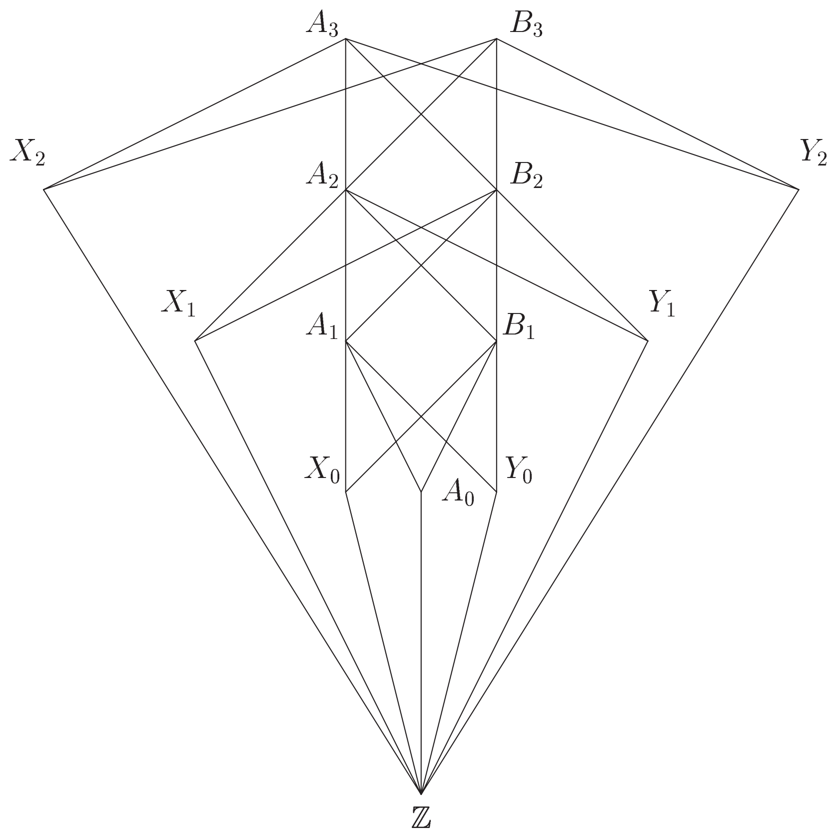
Sei die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 2, 2)$ definiert als

$$\begin{aligned} & H(\mathcal{S}_p, 2, 2) \\ = \; & \sum_{i=0}^{2} p^{i-2} A_i a_i + \sum_{i=1}^{2} p^{i-2} B_i b_i + \sum_{i=0}^{1} p^{i-2} X_i (a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=0}^{1} p^{i-2} Y_i (b_{i+1} - c_{i+1}) \\ = \; & p^{-2} A_0 a_0 + p^{-1} A_1 a_1 + A_2 a_2 + p^{-1} B_1 b_1 + B_2 b_2 + p^{-2} X_0 (a_0 + a_1 + c_1) \\ & + p^{-1} X_1 (a_1 + a_2 + c_2) + p^{-2} Y_0 (b_1 - c_1) + p^{-1} Y_1 (b_2 - c_2) \\ \subsetneq \; & \sum_{i=0}^{2} \mathbb{Q} a_i \oplus \sum_{i=1}^{2} \left(\mathbb{Q} b_i \oplus \mathbb{Q} c_i \right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Aus dem Hauptsatz 15.3 folgt direkt, dass die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 2)$ eine Regulatorkette der Länge 2 besitzt. Weiter hat diese Rang 7 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 9. Dies ist ein Beispiel dafür, dass im Vergleich zur Arbeit von S. Lehrmann und O. Mutzbauer [5] eine Butlergruppe mit Kettenlänge 2 aber geringerem Rang und geringerer Mächtigkeit der kritischen Typenmenge existiert. Die Butlergruppe aus der Arbeit von S. Lehrmann und O. Mutzbauer [5] hat Rang 9 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 15.

17.3 Eine Regulatorkette der Länge 3

Situation: Für eine Primzahl p seien $\mathbb{Z} \subset A_i, B_i, X_i, Y_i \subset \mathbb{Q}_p$, jeweils für die entsprechenden Indexmengen. Die relativen Inklusionen dieser rationalen Gruppen seien durch das folgende Hassediagramm beschrieben.



Sei die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 3, 3)$ definiert als

$$\begin{aligned}
&H(\mathcal{S}_p, 3, 3)\\
=\ & \sum_{i=0}^{3} p^{i-3} A_i a_i + \sum_{i=1}^{3} p^{i-3} B_i b_i + \sum_{i=0}^{2} p^{i-3} X_i(a_i + a_{i+1} + c_{i+1}) + \sum_{i=0}^{2} p^{i-3} Y_i(b_{i+1} - c_{i+1})\\
=\ & p^{-3}A_0a_0 + p^{-2}A_1a_1 + p^{-1}A_2a_2 + A_3a_3 + p^{-2}B_1b_1 + p^{-1}B_2b_2 + B_3b_3\\
& +p^{-3}X_0(a_0 + a_1 + c_1) + p^{-2}X_1(a_1 + a_2 + c_2) + p^{-1}X_2(a_2 + a_3 + c_3) + p^{-3}Y_0(b_1 - c_1)\\
& +p^{-2}Y_1(b_2 - c_2) + p^{-1}Y_2(b_3 - c_3)\\
\subsetneq\ & \sum_{i=0}^{3} \mathbb{Q}a_i \oplus \sum_{i=1}^{3} (\mathbb{Q}b_i \oplus \mathbb{Q}c_i)\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Aus dem Hauptsatz 15.3 folgt direkt, dass die Butlergruppe $H(\mathcal{S}_p, 3, 3)$ eine Regulatorkette der Länge 3 besitzt. Weiter hat diese Rang 10 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 13. Dies ist das erste Beispiel einer Butlergruppe mit Regulatorkettenlänge 3.

18 Beispiel für die Bildung reiner Hüllen

Im Satz 7.5 wurde gezeigt, dass die Darstellung einer Regulatorgruppe $H^k = H(\mathcal{S}_p, k, n)$ rein ist. Daraus folgt insbesondere, dass die Darstellung einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ rein ist. Als Anwendungsmöglichkeit des Theorems 4.7 wird in Proposition 18.7 ein eleganterer Reinheitsbeweis für die Darstellung einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$, vgl. Situation 17.1, angegeben. Die Reinheit der Darstellung der Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ ist zu beweisen und somit ist die Reinheit aller in der Darstellung von $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ auftretenden darstellenden rationalen Summanden zu zeigen. Dies wird nun mit Hilfe des Theorems 4.7 gezeigt. Die folgende Bemerkung erleichtert die Anwendung des Theorems 4.7.

Bemerkung: Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine $\mathbb{Z}$-Kette rationaler Gruppen $A_i \subset \mathbb{Q}_p$. Sei $n_i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt, dass $\bigcap_{i \in I} p^{n_i} A_i = p^m \mathbb{Z}$ mit $m = \max\{n_i \mid i \in I\}$ und dass $\sum_{i \in I} p^{n_i} \mathbb{Z} = p^s \mathbb{Z}$ mit $s = \min\{n_i \mid i \in I\}$.

Zunächst ist es nötig, den Koeffizientenbereich des Elementes c_1 zu bestimmen.

Lemma 18.1 *Der Koeffizientenbereich von c_1 in einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ ist $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Der Koeffizientenbereich von c_1 wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von c_1 bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} c_1 &= (a_0 + a_1 + c_1) - a_0 - a_1 \\ &= -(b_1 - c_1) + b_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle Sc_1 von c_1:

$$\begin{aligned} S &= (p^{-1}X_0 \cap p^{-1}A_0 \cap A_1) + (p^{-1}Y_1 \cap B_1) \\ &= \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{Z}$ der Koeffizientenbereich von c_1. □

Lemma 18.2 *Der darstellende rationale Summand $A_1 a_1$ ist rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$.*

Beweis. Dies wird mit Hilfe des Lemmas 18.1 bewiesen. Der Koeffizientenbereich von a_1 wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von a_1 bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ &= (a_0 + a_1 + c_1) - a_0 - c_1 \\ &= (a_0 + a_1 + c_1) - a_0 + (b_1 - c_1) - b_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle Sa_1 von a_1:

$$\begin{aligned} S &= A_1 + (p^{-1}X_0 \cap p^{-1}A_0 \cap \mathbb{Z}) + (p^{-1}X_0 \cap p^{-1}A_0 \cap p^{-1}Y_0 \cap B_1) \\ &= A_1 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= A_1. \end{aligned}$$

Also ist der darstellende rationale Summand $A_1 a_1$ rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$. $\square$

Lemma 18.3 *Der darstellende rationale Summand $p^{-1}A_0 a_0$ ist rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$.*

Beweis. Dies wird mit Hilfe des Lemmas 18.1 bewiesen. Der Koeffizientenbereich von a_0 wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von a_0 bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ &= (a_0 + a_1 + c_1) - a_1 - c_1 \\ &= (a_0 + a_1 + c_1) - a_1 + (b_1 - c_1) - b_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle Sa_0 von a_0:

$$\begin{aligned} S &= p^{-1}A_0 + (p^{-1}X_0 \cap A_1 \cap \mathbb{Z}) + (p^{-1}X_0 \cap A_1 \cap p^{-1}Y_0 \cap B_1) \\ &= p^{-1}A_0 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= p^{-1}A_0. \end{aligned}$$

Also ist der darstellende rationale Summand $p^{-1}A_0 a_0$ rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$. $\square$

Lemma 18.4 *Der darstellende rationale Summand $B_1 b_1$ ist rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$.*

Beweis. Dies wird mit Hilfe des Lemmas 18.1 bewiesen. Der Koeffizientenbereich von b_1 wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von b_1 bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 \\ &= (b_1 - c_1) + c_1 \\ &= (b_1 - c_1) + (a_0 + a_1 + c_1) - a_0 - a_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle Sb_1 von b_1:

$$\begin{aligned} S &= B_1 + (p^{-1}Y_0 \cap \mathbb{Z}) + (p^{-1}Y_0 \cap p^{-1}X_0 \cap p^{-1}A_0 \cap A_1) \\ &= B_1 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= B_1. \end{aligned}$$

Also ist der darstellende rationale Summand $B_1 b_1$ rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$. $\square$

Lemma 18.5 *Der darstellende rationale Summand $p^{-1}X_0(a_0+a_1+c_1)$ ist rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$.*

Beweis. Dies wird mit Hilfe des Lemmas 18.1 bewiesen. Der Koeffizientenbereich von $a_0 + a_1 + c_1$ wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von $a_0 + a_1 + c_1$ bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + c_1 &= (a_0 + a_1 + c_1) \\ &= a_0 + a_1 + c_1 \\ &= a_0 + a_1 - (b_1 - c_1) + b_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle $S(a_0 + a_1 + c_1)$ von $a_0 + a_1 + c_1$:

$$\begin{aligned} S &= p^{-1}X_0 + (p^{-1}A_0 \cap A_1 \cap \mathbb{Z}) + (p^{-1}A_0 \cap A_1 \cap p^{-1}Y_0 \cap B_1) \\ &= p^{-1}X_0 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= p^{-1}X_0. \end{aligned}$$

Also ist der darstellende rationale Summand $p^{-1}X_0(a_0 + a_1 + c_1)$ rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$. □

Lemma 18.6 *Der darstellende Summand $p^{-1}Y_0(b_1 - c_1)$ ist rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$.*

Beweis. Dies wird mit Hilfe des Lemmas 18.1 bewiesen. Der Koeffizientenbereich von $b_1 - c_1$ wird mit Hilfe von allen linear unabhängigen Darstellungen von $b_1 - c_1$ bestimmt. Diese lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} b_1 - c_1 &= (b_1 - c_1) \\ &= b_1 - c_1 \\ &= b_1 - (a_0 + a_1 + c_1) + a_0 + a_1. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die reine Hülle $S(b_1 - c_1)$ von $b_1 - c_1$:

$$\begin{aligned} S &= p^{-1}Y_0 + (B_1 \cap \mathbb{Z}) + (B_1 \cap p^{-1}X_0 \cap p^{-1}A_0 \cap A_1) \\ &= p^{-1}Y_0 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \\ &= p^{-1}Y_0. \end{aligned}$$

Also ist $p^{-1}Y_0(b_1 - c_1)$ rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$. □

Proposition 18.7 *Die Darstellung einer Regulatorgruppe $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ ist rein.*

Beweis. Aus den Lemmas 18.3, 18.4, 18.5 und 18.6 folgt, dass alle darstellenden rationalen Summanden rein in $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ sind. Damit ist die Reinheit der Darstellung von $H(\mathcal{S}_p, 1, 1)$ gezeigt. □

19 Ausblicke

Diese Ergebnisse beziehen sich nur auf Regulatorgruppen. Über Butlerguppen im Allgemeinen ist diesbezüglich noch keine Aussage möglich. Die Regulatorgruppe bestärkt aber die Vermutung, dass Butlergruppen immer endliche Regulatorkettenlänge haben.

Gibt es eine Regulatorgruppe mit unendlicher Regulatorkettenlänge? Dazu betrachtet man die Relation zwischen der Regulatorkettenlänge und dem Rang einer Regulatorgruppe. Eine Regulatorgruppe, die eine Regulatorkette der Länge n, mit $n \in \mathbb{N}_0$, besitzt, hat Rang $3n+1$. Der Rang kann somit nicht kleiner als die Regulatorkettenlänge sein. Daraus folgt, dass Regulatorgruppen grundsätzlich endliche Regulatorketten besitzen.

Es existiert eine (nicht jede beliebige) regulierende Untergruppe, die es erlaubt, den Regulator von H^k durch Multiplikation des Kerns von H^k mit p zu gewinnen. Bei Reglatorbildung verschwindet genau die oberste Brücke, d.h. der Gürtel von H^k ist nach der Reglatorbildung nicht mehr überbrückt.

Literatur

[1] D. M. Arnold, *Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups*, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics **874** (1981), 1 – 31.

[2] M. C. R. Butler, *A class of torsion-free abelian groups of finite rank*, Proc. London Math. Soc., **15** (1965), 680 – 698.

[3] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups* I+II, Academic Press (1970, 1973).

[4] K.-J. Krapf, O. Mutzbauer, *Classification of almost completely decomposable groups*, in Abelian Groups and Modules, C. I. S. M. **287**, Springer Verlag (1984), 151-161.

[5] S. Lehrmann, O. Mutzbauer, *Eine Butlergruppe mit Regulatorkette der Länge* 2, Publ. Math. Debrecen **50** (1997), 37-55.

[6] A. Mader, O. Mutzbauer, K. M. Rangaswamy, *A generalization of Butler groups*, Abelian Groups: Proc. 1994 Oberwolfach Conf., Contemporary Mathematics **171** (1994), 257 – 275.

[7] O. Mutzbauer, *Regulating subgroups of Butler groups*, Abelian Groups: Proc. 1991 Curaçao Conf., Lect. Notes Pure Appl. Math. **146**, Marcel Dekker (1993), 209 – 217.

[8] O. Mutzbauer, *Lemmas for Butler groups*, Manuskript, Würzburg 2002.

[9] S. Rieder, *Reine Darstellungen von Butlergruppen*, Diplomarbeit, Würzburg 2002.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit in allen Teilen selbstständig gefertigt und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Zeichnungen habe ich selbst gefertigt.

Bad Königshofen, den 3. Juni 2004

Silvia Joachim