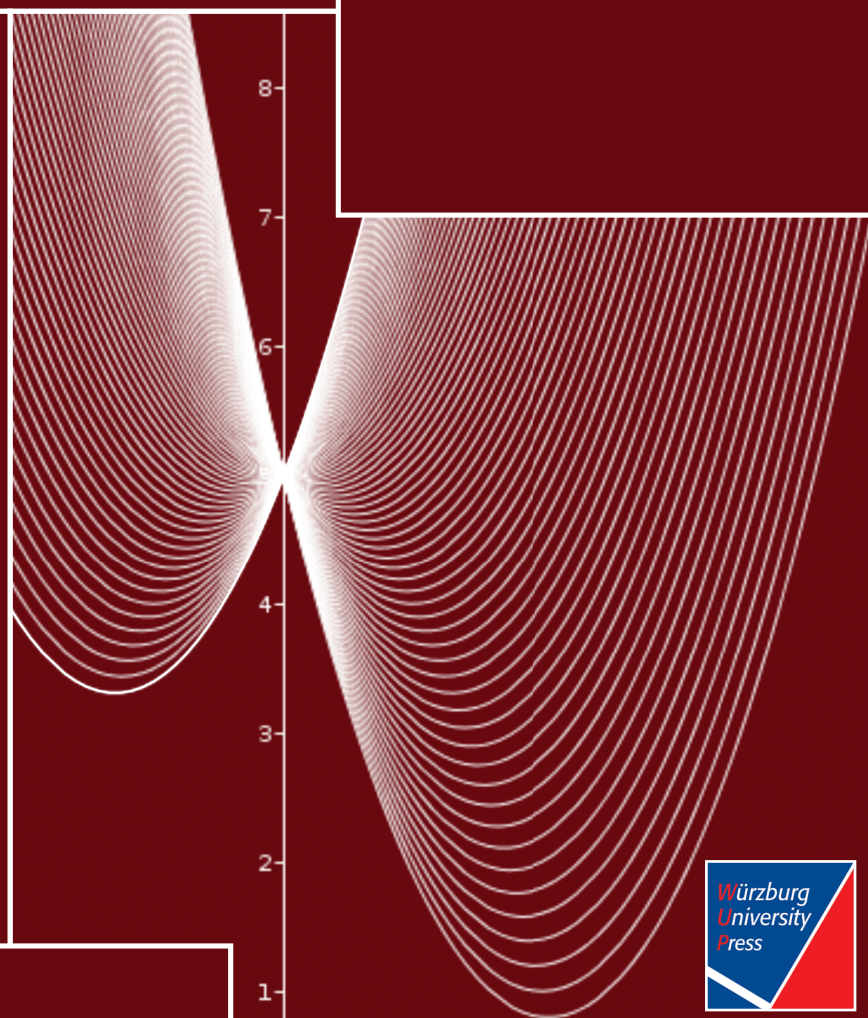


# Argumentieren mit multiplen und dynamischen Repräsentationen

Andreas Bauer



Andreas Bauer

Argumentieren mit multiplen und  
dynamischen Repräsentationen



Andreas Bauer

# Argumentieren mit multiplen und dynamischen Repräsentationen



*Würzburg*  
*University Press*

Dissertation, Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Fakultät für Mathematik und Informatik, 2015  
Gutachter: Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, Prof. Dr. Silke Ladel

## Impressum

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Würzburg University Press  
Universitätsbibliothek Würzburg  
Am Hubland  
D-97074 Würzburg  
[www.wup.uni-wuerzburg.de](http://www.wup.uni-wuerzburg.de)

© 2015 Würzburg University Press  
Print on Demand

ISBN 978-3-95826-022-1 (print)  
ISBN 978-3-95826-023-8 (online)  
URN urn:nbn:de:bvb:20-opus-112114



This document – excluding the cover – is licensed under the  
Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 DE License (CC BY-SA 3.0 DE):  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>



The cover page is licensed under the Creative Commons  
Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 3.0 DE License (CC BY-NC-ND 3.0 DE):  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Vorwort</b>	<b>7</b>
<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>1 Repräsentationen</b>	<b>15</b>
1.1 Was sind Repräsentationen? . . . . .	15
1.1.1 Peirces Semiotik . . . . .	15
1.1.2 Dimensionen zur Beschreibung von Repräsentationen . . . . .	17
1.1.3 Zur Existenz mathematischer Objekte . . . . .	20
1.1.4 Bedeutung von Repräsentationen in der Mathematik . . . . .	21
1.2 Repräsentationen vom Standpunkt der Mathematikdidaktik . . . . .	23
1.2.1 Repräsentationen in der Lernpsychologie . . . . .	23
1.2.2 Repräsentation und Codierung . . . . .	26
1.2.3 Repräsentationensysteme . . . . .	28
1.3 Eine Taxonomie der Repräsentationen . . . . .	31
1.3.1 Cognitive-Load-Theorie und Repräsentationen . . . . .	32
1.3.2 Multiple Repräsentationen . . . . .	34
1.3.3 Dynamische Repräsentationen . . . . .	38
1.3.4 Multiple dynamische Repräsentationen . . . . .	45
<b>2 Argumentation und Argumente</b>	<b>49</b>
2.1 Argumentieren und Beweisen . . . . .	50
2.1.1 Beweisen . . . . .	50

2.1.2	Argumentieren . . . . .	52
2.2	Toulmins Argumentationsmodell . . . . .	54
2.3	Repräsentationen beim Argumentieren . . . . .	58
2.3.1	Repräsentationen beim konstruktiven Argumentieren . . . . .	59
2.3.2	Repräsentationen beim strukturierenden Argumentieren . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Empirische Untersuchung</b>	<b>65</b>
3.1	Zur Untersuchung . . . . .	65
3.1.1	Zur Untersuchungsdurchführung . . . . .	65
3.1.2	Forschungsfragen und Vorgehen zur Auswertung . . . . .	66
3.1.3	Zur Anordnung der Aufgaben . . . . .	68
3.2	Die Aufgaben der Untersuchung . . . . .	70
3.2.1	Aufgabenpaar „Funktionenschar“ . . . . .	71
3.2.2	Aufgabenpaar „Fläche als Parabel“ . . . . .	72
3.2.3	Aufgabenpaar „Gleichungen“ . . . . .	74
3.2.4	Aufgabenpaar „Symmetrie am Graphen“ . . . . .	76
3.3	Ergebnisse der quantitativen Untersuchung . . . . .	78
3.3.1	Allgemeine Ergebnisse . . . . .	79
3.3.2	Aufgabenpaar „Funktionenschar“ . . . . .	80
3.3.3	Aufgabenpaar „Fläche als Parabel“ . . . . .	82
3.3.4	Aufgabenpaar „Gleichungen“ . . . . .	84
3.3.5	Aufgabenpaar „Symmetrie am Graphen“ . . . . .	85
3.4	Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse . . . . .	87
3.5	Qualitative Auswertung der Untersuchung . . . . .	90
3.5.1	Explizität von Schülerargumenten . . . . .	90
3.5.2	Multiple Repräsentationen in Argumenten . . . . .	93
3.5.3	Dynamische Repräsentationen in Argumenten . . . . .	99
3.5.4	Multiple dynamische Repräsentationen in Argumenten . . . . .	105
3.6	Zusammenfassung der qualitativen Ergebnisse . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>111</b>
4.1	Einfluss externer Repräsentationen auf das Argumentieren . . . . .	111
4.1.1	Grad des Einflusses externer Repräsentationen . . . . .	112
4.1.2	Einfluss der Repräsentationsform auf Argumente . . . . .	113
4.2	Konsequenzen . . . . .	115
4.2.1	Potential und Risiken komplexer Repräsentationen . . . . .	115
4.2.2	Schlussregel mit Schlüsselrolle? . . . . .	116
4.3	Ausblick . . . . .	120

---

# Vorwort

---

Eine Arbeit wie diese kann nicht von einer Person alleine vollendet werden, weshalb es mir ein wichtiges Anliegen ist, denen meinen Dank auszusprechen, die mich auf diesem Weg unterstützt und begleitet haben.

Zuerst möchte ich mich sehr herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Hans-Georg Weigand bedanken. Durch die Mitarbeit an dem durch die Europäische Kommission finanzierten Comenius-Projekts „*EdUmatic*s<sup>1</sup>“ wurde der Grundstein für die Arbeit an multiplen Repräsentationen gelegt, welche letztlich zum Thema der Dissertation führte. Während ich bei meiner Arbeit große akademische Freiheit und Selbstständigkeit genießen durfte, war es doch beruhigend zu wissen, dass entstehende Fragen bei ihm zu jedem Zeitpunkt auf ein offenes Ohr treffen würden. Für seine wertvollen Anregungen, seine ausnahmslos konstruktive Kritik und seine – wann immer nötig – Ermunterung, bin ich ihm äußerst dankbar.

Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr. Silke Ladel bedanken, nicht nur dafür, dass sie eingewilligt hat, sich als Gutachterin für diese Arbeit zu engagieren, sondern auch, weil ihre Dissertation (Ladel, 2009) das theoretische Fundament meiner eigenen Arbeit maßgeblich beeinflusst hat.

Darüber hinaus gilt mein Dank Prof. Dr. Thomas Weth und Prof. Dr. Anna Susanne Steinweg für ihre Mitwirkung am jährlichen mathematikdidaktischen Doktorandenkolloquium auf Kloster Bronnbach. Ihre Anmerkungen und kritischen Kommentare waren für mich in jedem Stadium der Arbeit zu deren Weiterentwicklung eine willkommene Hilfe.

Ebenfalls hervorzuheben sind die Lehrer und Schulleiter der Klassen, in denen ich die Erhebung meiner Daten durchführen durfte und die mir hierfür ihre wertvol-

---

<sup>1</sup> [www.edumatics.eu](http://www.edumatics.eu)



len Unterrichtsstunden zur Verfügung gestellt haben. Auch den Schülerinnen und Schülern der betreffenden Klassen gebührt mein Dank.

Darüber hinaus möchte ich mich bei meinen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg für ihre fachliche und menschliche Unterstützung bedanken. Ich werde meine Zeit am Lehrstuhl in bester Erinnerung behalten.

Auch meinen akribischen Korrekturleserinnen und -lesern möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Meiner Freundin Elisabeth möchte ich für ihre Geduld und ihr Verständnis, ihren konstruktiven Rat und den ihr eigenen, durch nichts zu erschütternden Optimismus danken, ohne den diese Arbeit vielleicht nie fertig gestellt worden wäre.

Schließlich danke ich meinen Eltern für deren langjährige Unterstützung, auch und insbesondere während meines Studiums.

---

# Einleitung

---

Die Geschichte der Mathematik ist untrennbar verbunden mit der Geschichte ihrer Repräsentationen. Häufig war es sogar gerade die Art der Darstellung eines mathematischen Problems, die dessen Lösung und die folgende Weiterentwicklung der mathematischen Theorie maßgeblich beeinflusste (vgl. Kaput, 1987b, S. 181). So wäre etwa der Bedeutungsgewinn der Arithmetik gegenüber der Geometrie ohne ein passendes Zahlssystem und dessen praktische Notation ebenso wenig möglich gewesen wie die sukzessive Erweiterung des jeweils bekannten Zahlenraumes. Die komplexen Zahlen wurden, obschon deren Bedeutung bereits früher erkannt wurde, erst durch die anschauliche Erklärung durch C.F. Gauß und die Zahlenebene von einer breiten Mehrheit anerkannt (Volkert, 1986, S. XVIII). R. Descartes leitete durch die algebraische Beschreibung geometrischer Objekte einen Perspektivwechsel in der Mathematik ein, mit dem die Algebra gegenüber der Geometrie an Geltung gewann (Bedürftig & Murawski, 2012, S. 48). Auch für die wachsende Bedeutung des Funktionsbegriffs leistete dessen analytische Beschreibung vor allem durch G. W. Leibniz einen entscheidenden Beitrag (Volkert, 1986, S. 47ff). Schließlich wäre die heute übliche Leibnizsche Notation in der Differentialrechnung ohne deren suggestive Kraft, mit der sich etwa die Gleichung zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int \frac{f(x)}{dx} dx = f(x)$$

scheinbar kaum komplexer als eine einfache Bruchrechnung ausnimmt, möglicherweise hinter der von Newton erfundenen physikalisch-anschaulicheren Formulierung zurückgeblieben. Leibniz selbst sprach dem Arbeiten mit und an Symbolen

größte Bedeutung zu und bemerkte sogar, dass er „alle Entdeckungen auf dem Gebiet der Mathematik einer verbesserten Anwendung der Symbole verdank[e]“ (Courat (1901, S. 84-85), zitiert nach Bedürftig und Murawski (2012, S.55)).

Die Weiterentwicklung der Mathematik war und ist also auch geprägt durch eine adäquate und häufig praktische Notation einerseits (wie bei Leibniz' Differentialrechnung) und der intuitiv verständlichen Veranschaulichung mathematischer Objekte andererseits (wie bei der Gaußschen Zahlenebene). Die Entwicklung des kollektiven mathematischen Wissens bedarf passender Repräsentationen, welche ihrerseits für die individuelle Wissensgenese ein entscheidender Faktor sind. So wie Menschen Repräsentationen formen, so formt die Repräsentation auch das Denken. Repräsentationen sind wichtige mentale Werkzeuge zum Lösen mathematischer Probleme.

Folgerichtig sind auch in der Schule das Vermitteln von Repräsentationen und das Erkennen ihrer Möglichkeiten beim mathematischen Arbeiten von zentraler Bedeutung. In den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz (2003) wurde deshalb der Umgang mit Repräsentationen als eine von sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Fach Mathematik hervorgehoben. Hier heißt es, die Schülerinnen und Schüler<sup>2</sup> sollten

- „verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,
- unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln“ (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, 2003, S. 8)

können. Auf das Erkennen der Vielfältigkeit der Repräsentationsformen und die Beziehung zwischen verschiedenen Darstellungen wird also ein besonderer Schwerpunkt gelegt. Multiple Repräsentationen, also die gleichzeitige Darstellung verschiedener Repräsentationen, bieten sich hierfür in besonderer Weise an.

Wie Repräsentationen besitzt auch das Beweisen eine herausragende Bedeutung für die Mathematik: Sie ist eine „beweisende Disziplin“ (Heintz, 2000). Im Mathematikunterricht muss das Beweisen *erlernt* werden, wobei hinlänglich bekannt ist, dass dies Lernenden große Schwierigkeiten bereitet (vgl. G. Wittmann, 2009, S. 46; Weigand, 2013a). Die Bildungsstandards der KMK enthalten daher auch das Beweisen als ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts, ordnen dieses jedoch in die allgemeine mathematische Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ ein (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, 2003, S. 10). Das Beweisen ist hier im höchsten Anforderungsbereich III zu finden, während in den Anforderungsbereichen I und II der Begriff der weniger formalen „Argumentation“ Verwendung findet (Beschlüsse

---

<sup>2</sup> Im weiteren Verlauf der Arbeit wird auf die gleichzeitige Nennung weiblicher und männlicher Bezeichnungen verzichtet und stattdessen die männliche Form verwendet. Damit sollen die jeweiligen weiblichen Repräsentantinnen nicht ausgeschlossen, sondern es soll die Lesbarkeit verbessert werden. Es handelt sich hierbei um eine Schwäche der Repräsentation „deutsche Sprache“, die vom Leser oder der Leserin durch mentale Transformation in beide Genera übersetzt werden möge (vgl. Abschnitt 1.2.1).

der Kultusministerkonferenz, 2012, S. 15). Diese Abgrenzung des schulischen Argumentierens vom formalen Beweisen hat in der mathematikdidaktischen Diskussion eine lange Tradition (zum Beispiel Blum und Kirsch (1991) oder E. C. Wittmann und Müller (1988)). So wird in der 19. ICMI-Studie der Begriff „Argumentieren“ so verwendet, wie er auch dieser Arbeit zugrunde liegt.

„[...] we regard argumentation as any written or oral discourse conducted according to shared rules, and aiming at a mutually acceptable conclusion about a statement, the content or the truth of which is under debate. It thus includes proof as a special case.“

„[...] wir verstehen Argumentation als jeglichen schriftlichen oder mündlichen Diskurs, welcher nach gemeinsamen Regeln durchgeführt wird und auf einen gegenseitig akzeptablen Schluss bezüglich einer Aussage abzielt, deren Inhalt oder Wahrheit zur Debatte steht. Dies schließt Beweise daher als Spezialfall mit ein.“

Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp und Tanguay (2012, S. 349,  
Übersetzung durch den Autor)

Diese Beschreibung schließt Beweise mit ein, bezeichnet aber auch weniger formale Aussagen als Argumentation. Unabhängig von dieser Abgrenzung spielen Repräsentationen beim Beweisen und Argumentieren eine wichtige Rolle. Sie bilden nicht nur die Grundlage für Entdeckungen, welche wiederum zur Formulierung von Vermutungen und letztlich dem Finden einer Argumentation dienen, sondern sind auch die Basis für die anschließende Kommunikation, in der die argumentativ begründeten Entdeckungen anderen mitgeteilt werden. Die in den vergangenen Jahrzehnten zunehmende Verbreitung und vereinfachte Handhabung von Rechnern hat dabei neue Potentiale zur Darstellung von Mathematik mit sich gebracht. Es können jetzt nicht nur Repräsentationen mit Hilfe des Rechners schneller und genauer erstellt werden, sie können darüber hinaus auch dynamisiert werden und lassen sich (z.T. interaktiv) verändern. Dies gibt insbesondere unter lernpsychologischen Gesichtspunkten neue Möglichkeiten für die Wissensentwicklung und das Verständnis, formulierte doch schon Piaget, dass Denken verinnerlichtes Handeln darstellt (vgl. Piaget & Inhelder, 1991). Reale Handlungen sind für das Lernen und die Begriffsbildung in der Mathematik von zentraler Bedeutung (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 86ff), insbesondere gilt dies für das Arbeiten mit Repräsentationen (vgl. Kaput, 1987b, S. 162). Dabei hat sich durch Untersuchungen bestätigt, dass dynamische Repräsentationen auch dynamisches Denken formen können (Roth, 2005).

Ein derartiges kognitionspsychologisches Potential lässt auch die Verbindung von multiplen und dynamischen Repräsentationen erwarten, bei der Variationen in einer Repräsentation sich unmittelbar auf die anderen auswirken. Es hat sich vielfach gezeigt, dass gerade der Transfer zwischen Darstellungen, also das Übertragen von Informationen aus einer in eine andere Repräsentation, Schüler vor große Schwierigkeiten stellt (vgl. Ainsworth, 1999, S. 132; van der Meij & de Jong, 2006, S. 200). Es besteht die Hoffnung, dass die simultane Veränderung unterschiedlicher Repräsentationen, bei der die jeweils gemeinsam abgebildeten Informationen gleichzeitig

variiert werden, die Verbindung zwischen diesen deutlicher hervorhebt und eine Übersetzung erleichtert (vgl. Kaput, 1989).

Für die Schule bietet der Rechner neue Möglichkeiten und Chancen, bekannte Probleme beim Umgang mit Repräsentationen zumindest teilweise zu lösen. Mit großem finanziellen Aufwand werden gegenwärtig neue Geräte wie Laptops, interaktive Smartboards oder Taschencomputer in der Schule eingeführt. Die Forschungslage bezüglich der Wirksamkeit dieser neuen Repräsentationsformen ist jedoch keineswegs eindeutig (vgl. Acevedo Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). Insbesondere lässt sich die Frage, ob ein derartiger Einsatz von digitalen Technologien im Unterricht nun positiv oder negativ wirkt, in dieser Allgemeinheit nicht beantworten.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Untersuchung versucht daher einen stärker grundlagenorientierten Ansatz. Zum einen wurde mit einer quantitativen Methode der Grad des Ausmaßes der Beeinflussung der Lernenden durch die externe Repräsentationsform der Aufgabenstellung bestimmt, um festzustellen, *ob* sich Lernende durch das Bereitstellen oder Anbieten bestimmter externer Repräsentationen überhaupt bei der Wahl einer Repräsentation zur Problemlösung beeinflussen lassen. Weiter wurde mit qualitativen Methoden erforscht, *wie* Lernende spezifische Eigenschaften und Potentiale von Repräsentationen in bestimmten Problemsituationen einsetzen. Auf diese Weise konnten bestimmte Nutzungsweisen identifiziert werden. Darüber hinaus lassen sich aus den gewonnenen Ergebnissen konkrete Vorschläge ableiten, wie die genannten Repräsentationsformen in der Schule eingesetzt werden sollten, um das Lernen von Argumentieren und Beweisen zu unterstützen.

Sowohl *multiple* als auch *dynamische* Repräsentationen bieten für das Argumentieren besondere Möglichkeiten. *Multiple Repräsentationen* können auf Grund der unterschiedlichen Arten der Darstellung eines mathematischen Objekts mehr Informationen bereitstellen als es eine einzelne Repräsentation vermag. Dadurch wird eine breitere Grundlage für Argumentationen geschaffen. *Dynamische Repräsentationen* wiederum ermöglichen es ihren Benutzern, den Ausgangszustand des betrachteten Objektes in der Repräsentation zu variieren und so eine Vielzahl von Einzelfällen zu generieren, wodurch Zusammenhänge, Abhängigkeiten und Invarianten erschlossen werden können. Diese bilden dann die Basis für Argumentationen. Es besteht daher die Hoffnung, dass sich diese beiden speziellen Repräsentationsformen in besonderer Weise für das Argumentieren eignen.

Im **ersten Kapitel** wird zunächst eine Annäherung an den Begriff der Repräsentation vorgenommen und dessen Relevanz für die Mathematik und die Mathematikdidaktik beleuchtet. In diesem Zusammenhang wird auf die *Cognitive Load Theory* und ihre Bedeutung für das Arbeiten mit und die Verwendung von Repräsentationen eingegangen. Anschließend wird das Konzept der *Repräsentationensysteme* eingeführt, welches die Grundlage für die in dieser Arbeit verwendete Definition *multipler Repräsentationen* bildet, um zum Abschluss des Kapitels zu einer Taxonomie zu gelangen, welche Repräsentationen in vier Klassen einteilt, die dann als eine tragende Säule der empirischen Untersuchung dienen (s. Kapitel 3).

Im **zweiten Kapitel** werden die theoretischen Grundlagen des Argumentierens beschrieben. Nach einer Begriffsbestimmung sowie einer Einordnung gegenüber

dem klassisch-deduktiven Beweisen wird das in zahlreichen mathematikdidaktischen Untersuchungen bewährte Argumentationsmodell von S. E. Toulmin beschrieben (Toulmin, 2003). Mit dessen Hilfe werden die Argumente der untersuchten Schülerdokumente analysiert, es stellt also die Grundlage der qualitativen Auswertung der empirischen Untersuchung dar.

Im **dritten Kapitel** werden die zentralen Forschungsfragen sowie die empirische Untersuchung mit ihrem Aufbau und den Testaufgaben beschrieben. Die Untersuchung versucht im Wesentlichen auf zwei Leitfragen Antworten zu geben:

1. Wie stark beeinflussen die in der Aufgabenstellung verwendeten Repräsentationen schriftliche Schülerargumentationen in Bezug auf die ihnen zu Grunde liegenden Repräsentationsarten?
2. Wie nutzen Schüler multiple und/oder dynamische Repräsentationen in ihren Argumentationen?

Um diese Fragen zu beantworten, wurden die Schülerdokumente einerseits quantitativ untersucht, um den Grad des Einflusses gegebener multipler und/oder dynamischer Repräsentationen zu ergründen. Andererseits wurden sie aber auch qualitativ ausgewertet, um die Art und Weise zu erkennen und zu analysieren, mit der die jeweiligen Repräsentationsarten in Argumenten genutzt wurden.

Das **Kapitel 4** bietet schließlich eine Zusammenfassung der Ergebnisse der empirischen Untersuchung, nimmt eine Einschätzung hinsichtlich deren Konsequenzen für die Schule vor und gibt zuletzt einen Ausblick auf mögliche Anschlussforschungen.



---

# Repräsentationen

---

## 1.1 Was sind Repräsentationen?

Der Begriff der Repräsentation ist nicht eindeutig festzulegen, sondern hängt in seiner Bedeutung vom kulturellen Umfeld und der jeweiligen Bezugsdisziplin ab. Die häufig anzutreffende knappe Formulierung, dass „eine Repräsentation etwas ist, das für etwas anderes steht“ (z.B. Duval, 2006, S. 103; Palmer, 1978, S. 262), greift aber zu kurz, da sie die Bedeutung des „Für-etwas-Stehens“ offen lässt. So hat die Frage, wie wir von einer sinnlichen Wahrnehmung auf das schließen können, was das Wahrgenommene bedeutet, Philosophen von Platon und Aristoteles über Descartes, Leibniz und Kant bis in die heutige Zeit beschäftigt (s. Abschnitt 1.1.3).

CHARLES SANDERS PEIRCE (1839-1914) gilt als Begründer der modernen Semiotik (Sebeok, 1979, S. 20). Zentrale Elemente der Peirceschen Theorien, wie seine Erklärung der Zeichen oder der Abduktion, haben auch auf die Mathematikdidaktik Einfluss genommen (vgl. zu Zeichen Kadunz, 2010; zur Abduktion Pedemonte & Buchbinder, 2011). Deshalb werden die Grundlagen seiner Theorie zu den Zeichen im Folgenden dargestellt. Wegen des großen Umfangs seiner Werke muss sich diese Arbeit auf das beschränken, was für die Mathematikdidaktik und diese Arbeit wichtig ist.

### 1.1.1 Peirces Semiotik

Die Semiotik ist die Theorie von den Zeichen, wobei ein Zeichen ein Wort, ein Bild, eine Geste oder ein Text sein kann. Mathematische Repräsentationen wie die in



Abbildung 1.2 sind Zeichen, aber auch Gegenstände oder Ereignisse können als Zeichen dienen (vgl. Salomon, 1994, S. 29). Peirce beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeichen und Objekt nicht als direkt, sondern durch eine dreistellige Relation:

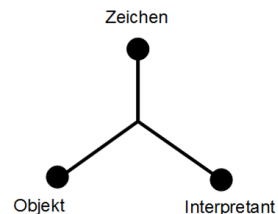
„A sign [...] addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*.“

„Ein Zeichen [...] richtet sich an jemanden, d.h. es erzeugt im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder vielleicht ein weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein *Objekt*.“

Peirce (1960, CP 2.228, S. 135, Hervorhebungen im Original, Übersetzung durch den Autor)

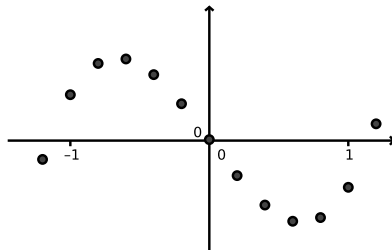
Diese drei Elemente (Zeichen, Objekt, Interpretant) bilden die triadische Zeichenrelation nach Peirce (s. Abbildung 1.1). Die vorangestellte kurze Begriffserläuterung, dass eine Repräsentation „etwas ist, das für etwas steht“, muss nach Peirces Theorie also ergänzt werden, weil eine Repräsentation nicht nur für *etwas* steht, sondern für etwas und *für jemanden*. Also ist ein Zeichen „etwas, das für einen Geist für ein anderes Ding steht“ (Peirce, 2000, S. 188). Die Frage nach der Bedeutung eines Zeichens erschöpft sich also nicht im Benennen eines Objekts. Die Bedeutung eines Zeichens ist vielmehr stets abhängig von dem Bewusstsein, welches das Zeichen aufnimmt und in dem ein Interpretant erzeugt wird. Die Bedeutung eines Zeichens und der Interpretant sind damit äquivalent (Peirce, 1998, CP 8.315, S. 213). Insbesondere bedeutet dies aber auch, dass ein von einem Zeichen erzeugter Interpretant keine absolute Größe ist, sondern er unterscheidet sich je nachdem, welches Bewusstsein das Zeichen aufnimmt. Auch wenn sich der Zustand des aufnehmenden Bewusstseins ändert, zum Beispiel wenn Neues gelernt oder bereits Gelerntes wieder vergessen wurde, wird ein neuer Interpretant erzeugt. Peirce spricht in diesem Zusammenhang von einem „Dynamischen Interpretanten“ („*Dynamical Interpretant*“) (Peirce, 1998, CP 8.315, S. 212f).

So wird Abbildung 1.2a bei vielen mathematisch vorgebildeten Personen einen Interpretanten erzeugen, der etwas mit einem kartesischen Koordinatensystem zu tun hat, mit dem Ausschnitt eines Graphen, vielleicht einer kubischen Funktion. Der Interpretant, der in einem Grundschüler hervorgerufen würde, hätte diese Elemente nicht, sondern beschränkte sich möglicherweise auf eine Perlenkette, eine Schlange oder dergleichen, weil ihm die Konzepte „Funktion“ oder kartesisches Koordinatensystem noch unbekannt sind. Besitzen wir jedoch die notwendigen Vorerfahrungen, so erzeugt das Zeichen einen Interpretanten, bei dem nicht das Zeichen als konkreter Gegenstand im Zentrum steht. Wir sehen gewissermaßen durch das Zeichen



**Abbildung 1.1:** Peirces Zeichentriade

hindurch auf das Objekt, welches es repräsentiert, zum Beispiel den Graphen einer kubischen Funktion. Ein solches „inneres Zeichen“ ist sehr viel umfangreicher als das äußerlich wahrgenommene. So wäre der Graph beim inneren Zeichen möglicherweise kontinuierlich statt diskret, außerdem gegenüber dem sichtbaren Ausschnitt erweitert auf ganz  $\mathbb{R}$ , und komplexere Konzepte wie das Änderungsverhalten spielen eine Rolle.



(a) Graph

$$f(x) = x^2 + 3$$

(b) Funktionsgleichung

**Abbildung 1.2:** Beispiele für Zeichen

Die zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgte Erzeugung eines Interpretanten ist also ein höchst subjektiver Prozess. Dennoch sind wir subjektiv davon überzeugt, dass es eine Art „objektive Realität“ gibt, die wir intuitiv erkennen. Nach Peirce ist die Erkenntnis einer solchen objektiven Realität – und damit auch ihre Beschreibung – zwar unmöglich (Peirce, 1998, CP 8.183, S. 183f), jedoch können wir natürlich trotzdem miteinander über Zeichen kommunizieren. Auch wenn wir nie vollkommen sicher sein können, dass unser Gegenüber das Gleiche mit dem Zeichen verbindet wie wir, ist Kommunikation möglich, so lange wir zumindest mit einer gewissen, hinreichenden Genauigkeit davon ausgehen können, mit den produzierten Zeichen dasselbe Objekt zu bezeichnen. Dass das nicht selbstverständlich und Kommunikation stets fehlerbehaftet ist, wird spätestens beim Aufeinandertreffen von Menschen augenfällig, die in verschiedenen Sprachen sprechen.

Peirces Sichtweise der Semiotik besitzt nicht nur eine große historische Bedeutung, sondern nimmt auch Einfluss auf eine Vielzahl von wissenschaftlichen Disziplinen, insbesondere auch auf die Mathematikdidaktik, in der die Peircesche Zeichentriade zum Beispiel zur Analyse von Schüleräußerungen verwendet wird (z.B. Meyer, 2010, S. 54). In Bezug auf diese Arbeit bildet Peirces Semiotik die Grundlage, auf welcher die weiteren Betrachtungen zu Repräsentationen aufbauen, auch wenn sich diese nicht mehr direkt auf ihn beziehen mögen. Zunächst muss aber der Begriff der Repräsentation noch genauer gefasst werden.

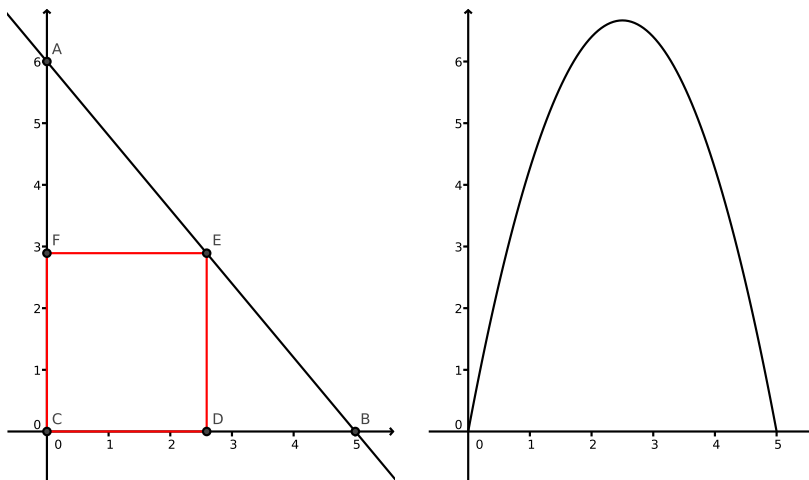
### 1.1.2 Dimensionen zur Beschreibung von Repräsentationen

Peirces Zeichentriade bildet das erkenntnistheoretische Fundament für die Untersuchung von Repräsentationen. Ist das Ziel jedoch eine präzise Betrachtung *externer Repräsentationen*, bietet sie keine Beschreibungsmerkmale, mit denen sich Repräsentationen analysieren ließen. Die von Palmer (1978) – allgemein und nicht nur

für die Mathematikdidaktik – formulierten fünf Dimensionen bieten hier eine Hilfe an (vgl. Ainsworth, 2006). Eine Repräsentation ist demnach vollständig beschrieben durch die Angabe

- (1) der repräsentierten Welt,
- (2) der repräsentierenden Welt,
- (3) der Aspekte der repräsentierten Welt, welche abgebildet werden,
- (4) der Aspekte der repräsentierenden Welt, welche das Abbilden übernehmen, sowie
- (5) welche Verbindungen es zwischen den beiden Welten gibt (Palmer, 1978, S. 262).

Diese fünf Dimensionen sind für die Beschreibung mathematischer Repräsentationen gleichzeitig hilfreich und problematisch. Dies lässt sich an einem Beispiel illustrieren, welches in Abbildung 1.3 zu sehen ist. Es handelt sich hierbei zwar um eine wesentlich komplexere Repräsentation als die einfachen Beispiele, die Palmer (1978, S. 263) zur Verdeutlichung gewählt hat, im Mathematikunterricht ist sie jedoch nicht weiter ungewöhnlich.



**Abbildung 1.3:** Beispiel einer Repräsentation mit repräsentierter Welt (links) und repräsentierender Welt (rechts)

Wenn sich in der linken Hälfte der Abbildung der Punkt  $E$  auf der Strecke  $[AB]$  bewegt, verändert sich entsprechend das Rechteck  $CDEF$ . In der rechten Bildhälfte wird der Zusammenhang zwischen  $x$ -Koordinate des Punktes  $E$  und dem Flächeninhalt des Rechtecks dargestellt. Nun lassen sich die fünf Dimensionen nach Palmer

angeben: Die repräsentierte Welt (1) ist die geometrische Konstruktion links, die repräsentierende Welt (2) ist das Koordinatensystem mit Funktionsgraph rechts, die abgebildeten Aspekte (3) sind die  $x$ -Koordinate des Punktes  $E$  und der Flächeninhalt des Rechtecks  $CDEF$ , der Funktionsgraph in der abbildenden Welt übernimmt das Abbilden (4) und die Verbindung (5) besteht darin, dass zu jeder Stelle zwischen 0 und 5 im Koordinatensystem rechts ein  $x$ -Wert von  $E$  und zu jedem  $y$ -Wert des Funktionsgraphen ein Flächeninhalt des Rechtecks  $CDEF$  gehört.

Diese Beschreibung der Funktionen einzelner Bestandteile von Repräsentationen mag zunächst nur theoretisch interessant erscheinen. Es ist jedoch wichtig, sich besonders im Hinblick auf *multiple Repräsentationen*<sup>3</sup> klar zu machen, dass sich Repräsentationen von mathematischen Objekten nicht nur darin unterscheiden, *wie* sie etwas darstellen (z.B. als Funktionsgleichung oder als -graph), sondern dass sie sich stets auf bestimmte Eigenschaften oder Aspekte der repräsentierten Welt beziehen und genau diese mit ihren spezifischen Möglichkeiten darstellen, während andere Eigenschaften ausgelassen werden.

In Bezug auf mathematische Repräsentationen werfen die fünf Dimensionen von oben jedoch Fragen auf, denn der Funktionsgraph rechts repräsentiert offenbar die geometrische Konstruktion links. Aber er repräsentiert nicht die Zeichnung, so wie wir sie mit unseren Augen wahrnehmen, denn die Zeichnung ist mit ihrer beschränkten Darstellung z.B. der Geraden  $AB$  (die unendlich in beide Richtungen über  $A$  und  $B$  hinaus weiter verläuft) augenfällig ihrerseits nur eine Repräsentation. Vielmehr beziehen sich beide Repräsentationen auf eine gemeinsame, gänzlich abstrakte und damit unseren Sinnen entzogene Konstruktion. In Bezug auf die Mathematik offenbaren die fünf Dimensionen Palmers hier ihre Schwäche, denn eine endgültige Angabe der „repräsentierten Welt“ ist nicht ohne Weiteres möglich.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der Mathematik, dass sich ihre Repräsentationen wiederum auf Repräsentationen beziehen und so weiter, ohne dass diese einmal einen konkreten, nicht abstrakten „Anker“ haben könnten, weil mathematische Objekte ihrerseits abstrakt sind (vgl. Kaput, 1987a, S. 162). Duval (2006) formuliert in diesem Zusammenhang ein „kognitives Paradoxon“ der Mathematik und bezeichnet dieses als einen der Gründe, warum Mathematik von vielen Menschen als so schwierig angesehen wird:

„How can the represented object be distinguished from the semiotic representation used when there is no access to mathematical objects apart from semiotic representations?“

„Wie kann ein repräsentiertes Objekt von der benutzten semiotischen Repräsentation unterschieden werden, wenn es außer semiotischen Repräsentationen keinen Zugang zu mathematischen Objekten gibt?“

Duval (2006, S. 115), Übersetzung durch den Autor

Letztlich führt das Suchen nach der „repräsentierten Welt“ mathematischer Repräsentationen auf eine alte Frage, die Mathematiker und Philosophen gleicherma-

<sup>3</sup> Tatsächlich zeigt Abbildung 1.3 eine solche multiple Repräsentation. Eine genauere Betrachtung dieser Repräsentationenklasse wird aber erst in Abschnitt 1.3.2 vorgenommen.

ßen schon seit Jahrtausenden beschäftigt: Wie und in welcher Form existieren mathematische Objekte?

### 1.1.3 Zur Existenz mathematischer Objekte

Mathematiker sind im Allgemeinen davon überzeugt, dass mathematische Objekte existieren (Heintz, 2000, S. 40). Inwiefern lässt sich aber überhaupt von einer „Existenz“ dieser Objekte sprechen, wenn sie von uns nicht wahrgenommen werden können? Die Antwort auf diese Fragen hat Philosophen und Mathematiker seit fast zweieinhalb Jahrtausenden beschäftigt. Es ist ausgesprochen bemerkenswert, dass sich die jeweiligen Ausgestaltungen zwar über die Zeit verändert haben, die Grundpositionen von PLATON (427-347 v. Chr.) und ARISTOTELES (384-222 v. Chr.) jedoch bis in die heutige Zeit noch Relevanz besitzen (detailliert nachzulesen in Bedürftig & Murawski, 2012). Im Wesentlichen geht es um die Frage: Existieren mathematische Objekte unabhängig von Menschen? Oder sind sie von den Menschen erschaffen? Diese beiden Grundrichtungen werden bezeichnet als *Universalismus* auf der einen und *Physikalismus*, *Intuitionismus* und *Nominalismus* auf der anderen Seite (Heintz, 2000, S. 37f).

Platon teilte alle Dinge, die existieren, in zwei Kategorien ein: immaterielle und materielle Gegenstände. Letztere können wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, erstere nicht. Die höchste Ebene in Platons Ontologie ist die Welt der Ideen. Sie sind „unveränderlich, konstant“ und existieren „unabhängig von Zeit, Raum und [...] vom menschlichen Erkennen“ (Bedürftig & Murawski, 2012, S. 33). Hier sind die mathematischen Objekte einzuordnen. Insbesondere lassen sich mathematische Objekte daher auch nicht „erfinden“ – sie sind alle bereits in der Welt der Ideen vorhanden. Vielmehr erinnert sich der Mathematiker an sie, weil er sie „in einem früheren Leben in der Welt der Ideen geschaut hat“ (Bedürftig & Murawski, 2012, S. 34f). Platons idealistische Position der realen und unabhängig von menschlicher Erkenntnis existierenden mathematischen Objekte ist im Kern auch später bei Mathematikern und Philosophen häufig anzutreffen, an Stelle der Welt der Ideen tritt nun jedoch z.B. Gott, von dem die mathematischen Objekte stammen. Auch heute werden die meisten Mathematiker dem Platonismus zugeordnet (Davis, Hersh, Freudenthal & Zehner, 1985, S. 338).

Für Aristoteles gab es diese für den Platonismus typischen, von der materiellen Welt losgelösten Objekte, nicht. Dies gilt insbesondere für die mathematischen Gegenstände. Er sieht sie als „Formen, die *in den Dingen* sind und im Denken erkannt werden“ (Bedürftig & Murawski, 2012, S. 36). Sie werden bei der Betrachtung der materiellen Welt durch eine Form der Abstraktion individuell erkannt und sind daher nicht unabhängig von menschlicher Existenz. Die Schwerpunkte in Aristoteles' Philosophie liegen also – anders als bei Platon – einerseits in der Realität, andererseits im Menschen als Individuum. Auch diese Sichtweise war unter Mathematikern und Philosophen weit verbreitet und würde heute als Physikalismus bezeichnet. Mit ihm gemein haben der Intuitionismus (welcher mathematische Objekte auf mentale Konstruktionen zurückführt) und der Nominalismus (welcher Mathematik als Ergebnis sprachlicher Konventionen sieht), dass mathematische Objekte nur in Ab-

hängigkeit von Menschen existieren (Heintz, 2000, S. 38). In Bezug zur Mathematik sind hier die Strömungen des *Konstruktivismus* und des *Formalismus* einzuordnen. Während ersterer nur diejenigen mathematischen Objekte als existent anerkennt, die durch eine endliche Konstruktion erzeugt werden können, negiert letzterer die Existenz mathematischer Objekte rundweg und erklärt die Mathematik zu einem inhaltslosen Spiel mit Zahlen und Symbolen (Davis et al., 1985, S. 336).

Weil in dieser Arbeit mit dem Argumentieren ein kommunikativer und damit im Kern sozialer Aspekt verbunden ist, sollte sich dies in der Position zur Existenz mathematischer Objekte widerspiegeln. Wie Kaput beschreibt, existiert neben einer individuell-subjektiven und einer materiellen Welt eine dritte Welt, welche er als „consensual world“ bezeichnet (Kaput, 1991, S. 58). Es handelt sich um eine Welt der „Einvernehmlichkeit“ oder „gegenseitigen Zustimmung“, in der für eine Gruppe das existiert, über was deren Mitglieder übereinstimmen, und von der sie eine gemeinsame Vorstellung haben. Diese Art der Gruppenbezogenheit korrespondiert mit den für das Argumentieren geforderten „Argumentationsbasen“, welche argumentative Grundlagen und Regeln für Argumentationen in einer bestimmten Gruppe beschreiben (nach Fischer und Malle (1985, S. 180), vgl. S. 52 in dieser Arbeit) und bietet sich daher für die Betrachtung von Repräsentationen und deren Nutzung in Argumentationsprozessen an.

Interessanterweise ist es zum Betreiben von Mathematik jedoch überhaupt nicht notwendig, sich für eine der beschriebenen Positionen zu entscheiden oder gar eine gemeinsame Position für alle Mathematiker zu finden. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, ist es gerade die Besonderheit und die Kraft der Mathematik, dass mathematische Repräsentationen auch ohne einen ontologischen Anker genutzt und bearbeitet werden können. Offenbar haben Mathematiker eine persönliche, intuitive Vorstellung von der Existenz mathematischer Objekte, ohne diese jedoch wirklich beschreiben zu können (Heintz, 2000, S. 40f). So kursiert das Bonmot, dass praktizierende Mathematiker an Werktagen Platonisten und an Sonntagen Formalisten sind, weil sie bei ihrer Arbeit zwar das Gefühl haben, eine existente Welt zu erklären und zu erforschen, sich am Sonntag einem Nichtmathematiker gegenüber aber lieber darauf zurückziehen, dass sie eigentlich doch nicht an deren Existenz glauben (zu finden z.B. bei Davis et al., 1985, S. 337).

#### 1.1.4 Bedeutung von Repräsentationen in der Mathematik

Die Bedeutung von Repräsentationen in der Mathematik kann kaum zu hoch eingeschätzt werden. Wie bereits erwähnt, ist und war die Entwicklung der Mathematik stets begleitet von zugehörigen zweckmäßigen Repräsentationen. Dies hat mehrere Gründe.

Zum einen ist die Akzeptanz einer wissenschaftlichen Theorie, insbesondere also auch einer mathematischen, stark davon abhängig, dass sich Menschen die Gegenstände der Theorie *vorstellen* können, also davon, dass die Begriffe eine sinnliche Entsprechung erhalten. Für die vorliegende Arbeit ist dieser Aspekt der Bedeutung von Repräsentationen für die Mathematik nicht entscheidend, daher wird auf die entsprechende Diskussion bei Volkert (1986, S. 161ff) verwiesen. Zum anderen sind

nahezu alle mathematischen Ergebnisse (im Sinne von Sätzen) repräsentationaler Natur (Kaput, 1987a, S. 23ff): Das Quadrat der Hypotenuse wird im rechtwinkligen Dreieck als Summe der Kathetenquadrate dargestellt, jede Gruppe ist nach dem Satz von Cayley isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe und der Wert eines Wegintegrals einer holomorphen Funktion lässt sich durch die umschlossenen Nullstellen und Pole ausdrücken. Letztlich wird bei diesen mathematischen Aussagen stets ein mathematisches Objekt durch ein anderes dargestellt.

So grundlegend diese Erkenntnis ist, in der Praxis spielt sie eine eher untergeordnete Rolle. Ein Grund hierfür liegt in einer dritten, vielleicht noch wichtigeren Bedeutung von Repräsentationen in der Mathematik: Die Mathematik erhält ihre Kraft gerade erst durch die Benutzung geeigneter Repräsentationen. Benutzung ist hier im Sinne von „Handhabung“ zu verstehen: Zeichen werden nicht nur dazu eingesetzt, für – abstrakte – Objekte zu stehen, sondern um mit diesen zu arbeiten. Abhängig von der Art der Aufgabe sind verschiedene Repräsentationsformen unterschiedlich effizient (s.u.). Eine wichtige Eigenschaft der Arbeit mit mathematischen Repräsentationen ist es, dass die Manipulation dieser Zeichen durch ein geeignetes Regelwerk (zum Beispiel dem Umformen einer Gleichung) möglich wird, auch ohne dabei die repräsentierten Objekte im Geiste in gleicher Weise manipulieren zu müssen:

„The leading role of signs is not to stand for mathematical objects, but to provide the capacity of substituting some signs for others.“

„Die entscheidende Rolle von Zeichen ist es nicht, für mathematische Objekte zu stehen, sondern die Möglichkeit zu bieten, gewisse Zeichen durch andere zu ersetzen.“

Duval (2006, S. 106, Hervorhebungen im Original, Übersetzung durch den Autor)

Solche Manipulationen lassen sich zu einem Rechenkalkül zusammenfassen, welches besonders bei grundlegenden Routineaufgaben unnötige geistige Anstrengungen vermeidet, da diese gewissermaßen automatisch und ohne den konzeptuellen Hintergrund durchgeführt werden können, zum Beispiel wenn mit den bekannten Rechengesetzen der Bruchrechnung ein komplizierter Term zusammengefasst wird, ohne dass dabei ständig die Bedeutung des Zwischenergebnisses im realen Kontext im Kopf behalten werden muss. Um nicht in sinnentleerte und mechanische Zahlenmanipulationen abzugleiten, muss jedoch die Wiederverknüpfung mit den hinter den Zeichen stehenden Bedeutungen möglich sein (vgl. Skemp, 1973, S. 89). Im obigen Beispiel müsste nach der Zusammenfassung des Bruchterms also am Ende die Frage stehen, was das errechnete Ergebnis nun für die bearbeitete Aufgabe bedeutet.

Einige Repräsentationen sind für solche Rechenaufgaben geeigneter und ermöglichen durch ihre Beschaffenheit erst effiziente Rechenverfahren. Beispielsweise ist die Multiplikation  $68 \cdot 10$  mit römischen Ziffern (LXIII · X) erheblich schwieriger. Die Beschaffenheit des Dezimalsystems vereinfacht die Aufgabe gegenüber dem römischen Zahlssystem und trägt so dazu bei, die notwendige kognitive Anstrengung

zu verringern (Scaife & Rogers, 1996, S. 189). Geeignete Repräsentationen können außerdem Informationen schneller und einfacher verfügbar machen, wenn zum Beispiel die Existenz einer Nullstelle einer Funktion an einem Graphen schnell „abgelesen“ werden kann, während bei einer Gleichung zuerst eine Umformung durchgeführt werden muss. Diese beiden Eigenschaften werden bei Scaife und Rogers (1996, S. 188f) als *re-representing* und *computational offloading* bezeichnet und stellen wichtige Aufgaben von Repräsentationen im Betreiben von Mathematik dar. Das Auslagern mentaler Prozesse in eine externe Darstellung mit dem Ziel, kognitive Last von Lernenden zu nehmen, wird zum Teil auch als *Supplantation* bezeichnet (vgl. Vogel, 2006, S. 60).

## 1.2 Repräsentationen vom Standpunkt der Mathematikdidaktik

### 1.2.1 Repräsentationen in der Lernpsychologie

Wir werden im Folgenden zwischen *internen* und *externen* Repräsentationen unterscheiden. Externe mathematische Repräsentationen sind solche, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, also beobachten können, und die zu dem Zweck erstellt wurden, ein mathematisches Objekt darzustellen. In der Semiotik fallen diese unter den Begriff des (äußeren) Zeichens, jedoch sind nicht alle Zeichen externe Repräsentationen nach obiger Definition.

Interne Repräsentationen sind dagegen nur subjektiv vorhanden und können nicht direkt beobachtet werden. In der kognitiven Psychologie werden diese meist als „mentale Repräsentationen“ (Wentura & Frings, 2013) oder „Schemata“ (vgl. Schnotz & Bannert, 1999, S. 222; Salomon, 1994, S. 46; Skemp, 1973, S. 39) bezeichnet. Interne Repräsentationen – im Sinne dieser Arbeit – beziehen sich ebenfalls auf mathematische Objekte, umfassen aber über deren internalisierte externe Repräsentationsformen hinaus auch individuelle Einstellungen, Vorstellungen und Assoziationen mit dem Objekt (vgl. Duval, 2006, S. 104; Weigand, 2013b, S. 301). Auf eine interne Repräsentation zugreifen zu können kann ein Erinnern an eine bekannte externen Repräsentationsform und deren Betrachtung vor dem „geistigen Auge“ einschließen, was in der kognitionspsychologischen Literatur als „visual images“ in Form von „internal depictions“ bei Schnotz und Bannert (2003, S. 148), als „bildhafte Darstellung“ bei Bruner und Juzzi (1971, S. 21), „innere Bilder“ bei Piaget (Piaget & Inhelder, 1991, S. 63) oder „Vorstellungsbilder“ bei Aebli (1981, S. 280) bezeichnet wird.

Neben diesen internen Bildern wird Wissen zudem in Form von Propositionen im Gehirn gespeichert. Diese stellen Relationen zwischen Objekten in Form von „Prädikaten“ her, welche kleine Informationseinheiten strukturieren (Schnotz, 2002a, S. 67), z.B. „SCHNEIDEN (agent: GERADE  $g$ , objekt: KREIS  $k$ )“. Diese Proposition enthält das Wissen, dass die Gerade  $g$  den Kreis  $k$  schneidet. Propositionen werden als „deskriptionale Repräsentationen“ bezeichnet, deren Aufbau mit denen von den bereits erwähnten depiktionalen in einem engen Wechselspiel steht. Dieses wird in

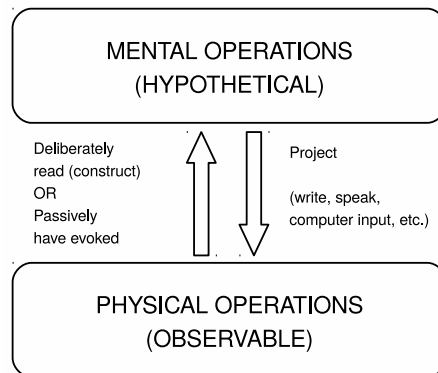


Schnotz und Bannert (1999) als integriertes Modell des Text- und Bildverstehens ausführlich beschrieben.

Interne mathematische Repräsentationen gehen weit über ein innerliches, bildhaftes Betrachten hinaus, umfassen sie doch neben der jeweiligen externen Repräsentationsform das Wissen um die möglichen Operationen an der Repräsentation ebenso wie die Einbettung des repräsentierten Objekts in ein mathematisches Begriffsnetz und dessen Beziehung zu anderen Objekten und deren Repräsentationen (vgl. Schnotz & Bannert, 2003, S. 148). Sie sind, viel mehr als die Vorstellung einer einzelnen Darstellung, eine geistige Struktur, welche die Organisation von neuen Beobachtungen ermöglicht und als Werkzeug für das Lösen von Problemen dient (vgl. Kaput, 1991, S. 55; Marshall, 1995, S. 53f; Skemp, 1973, S. 39). In Peirces Zeichentriade finden sich interne Repräsentationen als Interpretant, nämlich als das vom betrachteten Zeichen „im Bewusstsein [erzeugte] äquivalente oder vielleicht [...] weiter [entwickelte] Zeichen“ (Peirce, 1960, CP 2.228, S. 135). Das innere Zeichen wird nach Peirce also durch die Wahrnehmung eines äußeren hervorgerufen. In der Kognitionspsychologie hat sich aber schon mindestens seit den 1970er Jahren die Überzeugung durchgesetzt, interne Repräsentationen unabhängig von äußeren Zeichen als existent anzunehmen (Aebli, 1981, S. 305f). Hier ist vor allem JÉRÔME BRUNER zu nennen, dessen Beschreibung des Übergangs von externen zu internen Wissensrepräsentationsformen großen Einfluss auf die Kognitionspsychologie hatte (Bruner, 1971). Wie dieses Wissen im Gehirn abgespeichert wird, ist immer noch Gegenstand der Forschung, heute insbesondere der Neurowissenschaften. Man geht jedoch davon aus, dass in einem Teil des Gedächtnisses Wissen in einer semantischen, netzartigen Struktur abgelegt wird (vgl. Marshall, 1995, S. 180; Gruber, 2011, S. 59), welches sich vor allem durch das Wahrnehmen von vielfältigen Vertretern einer anzulegenden Gegenstandskategorie (z.B. „Ungleichung“, „Dezimalbruch“, „Quadratische Funktion“) und durch Interaktion mit diesen ausbildet (Gruber, 2011, S. 56ff; vgl. Weigand, 2012, S. 5). Diese Eigenschaft des Gedächtnisses findet auch in Bezug auf das Lernen von Begriffen ihren Ausdruck in der Mathematikdidaktik (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 234f). Die älteren, streng nach Ober- und Unterkategorien ausgerichteten Gedächtnismodelle gelten heute als überholt (vgl. Schlaghecken, 1998, S. 62; Gruber, 2011, S. 56).

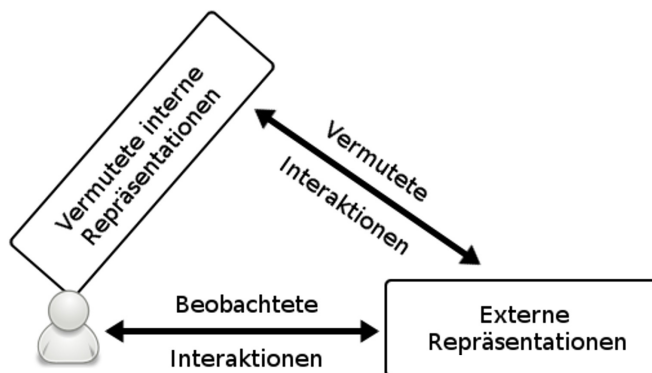
Auch wenn sie klar unterschieden werden müssen, dürfen interne und externe Repräsentationen nicht als vollständig voneinander getrennt angesehen werden. Einerseits haben wahrgenommene externe Repräsentationen eine ganz entscheidende Wirkung auf die Entwicklung interner, wenn sie mit den vorhandenen mentalen Modellen verglichen und in diese eingegliedert werden oder zu einer Umformung existierender Schemata beitragen (vgl. Schnotz & Lowe, 2003, S. 118; Duval, 2000, S. 60). Umgekehrt sind erstellte externe Repräsentationen entscheidend durch die Vorstellungen und das Wissen der Person geprägt, welche sie produziert, da sie mit zunehmender Vertrautheit mit den jeweiligen Repräsentationen als Ausdrucksmittel auch zunehmend in diesen Repräsentationsformen denkt (vgl. Salomon, 1994, S. 114). Diese Art der Wechselwirkung wird in Abbildung 1.4 dargestellt.

Eine Unterscheidung zwischen internen und externen Repräsentationen ist von besonderer Bedeutung, wenn man, wie häufig in der Mathematikdidaktik, eigent-



**Abbildung 1.4:** Wechselwirkung zwischen internen und externen Repräsentationen (nach Kaput, 1991, S. 57)

lich an den internen Repräsentationen von Versuchspersonen interessiert ist, also beispielsweise herausfinden möchte, welches mentale Modell ein Schüler von einer Funktion besitzt, jedoch vor der nicht zu überwindenden Schwierigkeit steht, dass es unmöglich ist, direkten Zugriff auf die internen Repräsentationen des Schülers zu erhalten, und als Forscher darauf angewiesen ist, dass der Schüler kommuniziert, also auf *externe* Repräsentationen zurückgreift (vgl. Duval, 2006, S. 104). Diese Repräsentationen können dabei jedoch nicht als exaktes Abbild dessen angesehen werden, was in der Vorstellung des Schülers existiert, sondern müssen interpretiert werden, um so auf die mentalen Modelle des Schülers rückschließen zu können. Insbesondere lassen sich die Wechselwirkungen zwischen externen und internen Repräsentationen nicht direkt beobachten (vgl. Abbildung 1.5). Diese Schwierigkeit kann als das Grundproblem der Psychologie bezeichnet werden (vgl. Prinz & Müsseler, 2008, S. 4; Skemp, 1973, S. 68; Bruner & Juzzi, 1971, S. 28).



**Abbildung 1.5:** Schema zum grundlegenden Problem der Forschung an internen Repräsentationen, nach Kaput (1991)

Für die später beschriebene Untersuchung (Kapitel 3) hat dies unmittelbare Auswirkungen. Einerseits ergibt sich in der Auswertung der produzierten externen Schülerrepräsentationen die Notwendigkeit einer Interpretation im Sinne einer qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2010). Andererseits stellt sich die Frage, wie interne Repräsentationen überhaupt klassifiziert werden können, wenn sie nicht zu beobachten sind. Je nach Art der Klassifikation sind unterschiedliche externe Repräsentationen hierfür kein ausreichendes Indiz, wie im folgenden Abschnitt erläutert werden soll.

### 1.2.2 Repräsentation und Codierung

Bei der Betrachtung von internen und externen Repräsentationen und ihren Manifestationen in Form von produzierten Schülerdokumenten spielen sowohl Lernpsychologie als auch *design science* eine Rolle. Daher müssen relevante Begriffe aus diesen Disziplinen in dieser Arbeit in Betracht gezogen werden. Schwierigkeiten entstehen, wenn diese nicht einheitlich verwendet werden oder unterschiedliche Schwerpunkte setzen. Dies betrifft insbesondere die Begriffe „Modalität“, „Medium“, „Codierung“ und „Repräsentation“ (vgl. Ladel, 2009, S. 46; Aebli, 1981, S. 299). Für die ersten drei bietet das in Tabelle 1.1 dargestellte Raster von Weidenmann (2002, S. 47) eine hilfreiche Unterscheidung.

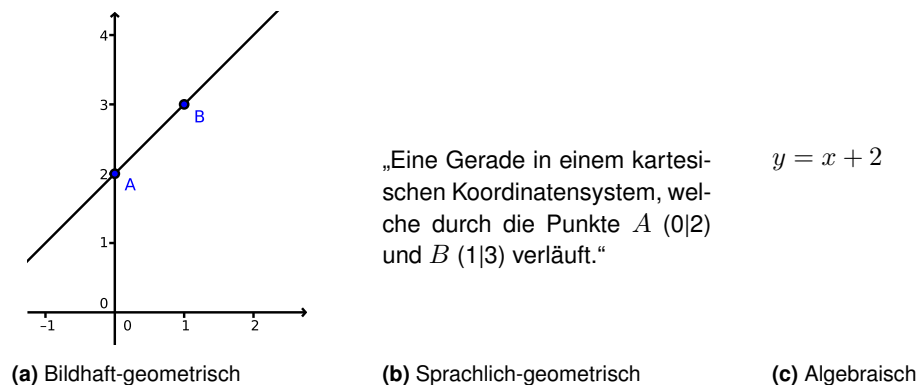
	<b>Mono- ...</b>	<b>Multi- ...</b>
<b>Medium</b>	<u>Monomedial</u> : Buch, Videoanlage, PC mit Bildschirm	<u>Multimedial</u> : PC + CD-ROM-Player, PC + Videorekorder
<b>Codierung</b>	<u>Monocodal</u> : nur Text, nur Bilder, nur Zahlen	<u>Multicodal</u> : Text mit Bildern, Grafik mit Beschriftung
<b>Sinnesmodalität</b>	<u>Monomodal</u> : nur visuell (Text, Bilder), nur auditiv (Rede, Musik)	<u>Multimodal</u> : audio-visuell (Video, CBT-Programme mit Ton)

**Tabelle 1.1:** Raster zur differenzierteren Beschreibung medialer Angebote (Weidenmann, 2002, S. 47)

Demnach ist ein Medium ein Gegenstand oder ein Gerät, mit dessen Hilfe etwas dargestellt wird, zum Beispiel ein Bildschirm oder ein Buch. Die Codierung bezeichnet die Art und Weise, wie die Information dargestellt wird, zum Beispiel als Text oder Bild. Die (Sinnes-)Modalität beschreibt, wie diese Information aufgenommen wird, nämlich visuell oder auditiv. Diese Unterscheidung ist allerdings längst nicht einheitlich. So bezeichnen etwa Psychologen, die sich auf Paivios „*dual coding*“-Theorie (Paivio, 1986) beziehen, eine Darstellung als *multimedial*, wenn diese Text und Bild gemeinsam darstellt (vgl. Mayer, 2005b; Fletcher & Sigmund, 2005; und zahlreiche weitere Autoren in Mayer, 2005a), auch wenn beide z.B. in einem Buch abgebildet sind (nach Weidenmanns Unterscheidung also *multicodal*, aber *monomedial*). Diese *multimedialen* Darstellungen werden dann zum Teil als „*multiple*

representations“ bezeichnet (z.B. Horz & Schnotz, 2010; Fletcher & Sigmund, 2005). Diese Konzentration auf Medien an Stelle von semiotischen Aspekten wurde zum Teil kritisiert, weil sie zu kurz greife (vgl. Schnotz & Lowe, 2003, S. 117; Ainsworth, 2006, S. 183; Kaput, 1987b, S. 165). Eine zweite Unterscheidungsmöglichkeit stellt heraus, dass Repräsentationen dann unterschiedlich sind, wenn sie verschieden codiert sind (Ladel, 2009, S. 47). Multiple Repräsentationen entsprechen damit den multicodalen nach obigem Schema.

In dieser Arbeit soll jedoch eine andere Unterscheidung getroffen werden. Dazu müssen zuerst die Begriffe „Codierung“ und „Repräsentation“ von einander abgegrenzt werden. Betrachten wir als Beispiel eine Gerade in einem kartesischen Koordinatensystem, die durch die Punkte  $A(0|2)$  und  $B(1|3)$  verläuft. In Abbildung 1.6 sind drei Möglichkeiten der Darstellung dieser Geraden zu sehen. Diese drei Darstellungen beziehen sich auf das gleiche mathematische Objekt, sind jedoch unterschiedlich codiert: links in Form eines Bildes, in der Mitte als sprachliche Beschreibung und rechts als Gleichung.



**Abbildung 1.6:** Drei Darstellungen einer Gerade

Für die sich auf Paivio beziehenden Autoren wären die Abbildungen 1.6a und 1.6b zusammen genommen multimedial, also „multiple representations“, da sie Bild und Text kombinieren. Für die Abbildungen 1.6b und 1.6c gilt das jedoch nicht, da sie nur aus Text bestehen. Nimmt man die Codierung als maßgeblich zur Unterscheidung, sind alle drei Abbildungen verschiedene Repräsentationen, also jede Kombination der drei eine multiple Repräsentation. In der vorliegenden Arbeit sollen jedoch die Repräsentationen in 1.6a und 1.6b aus folgenden Gründen als äquivalent angesehen werden. Wie oben erläutert sind für die in Kapitel 3 beschriebene Untersuchung die internen Repräsentationen der Schüler entscheidend, wobei auf deren Äußerungen – in Form von externen Repräsentationen in Schülerdokumenten – zurückgegriffen werden muss, um auf die internen rückschließen zu können. Von den beiden externen Repräsentationen in 1.6a und 1.6b ausgehend lässt es sich jedoch nicht rechtfertigen, auf unterschiedliche interne Repräsentationen zu schließen, da beide einen geometrischen Sachverhalt mit einer durch zwei Punkte verlaufenden Gera-

den darstellen, lediglich die gewählte Art, sich auszudrücken, unterscheidet sich<sup>4</sup>. Bei Abbildung 1.6c verhält sich dies jedoch anders: Hier steht nicht die geometrische Konstruktion im Vordergrund, sondern der funktionale Zusammenhang zwischen  $x$ - und  $y$ -Koordinate. Deshalb zeigt nur Abbildung 1.6c eine neue Repräsentation.

Weder Medium noch Codierung sollen in dieser Arbeit also die Grenzen zwischen Repräsentationen markieren. Wie also lässt sich eine Unterscheidung von Repräsentationen treffen, bei der die Unterscheidung zwischen externen Repräsentationen konsistent ist mit ihren jeweiligen – vermuteten – internen? Hierzu soll der Begriff des *Repräsentationensystems* eingeführt werden, welcher die Unterscheidung nach mathematischen Gesichtspunkten vornimmt und mit den „*semiotic registers*“ eng verwandt ist, welche von Duval (2006, S. 108) unter Bezugnahme auf Descartes (1954) als Begriff eingeführt wurden. Die Nutzung des Begriffs „Registers“ scheint auch im Deutschen historisch wohlbegründet, jedoch lässt sich kritisch einwenden, dass Descartes damit eigentlich nur im Sinn hatte, geometrische und algebraische Größen jeweils in einer eigenen Liste („*registre separé*“) zu notieren, das heißt, ihnen unterschiedliche Bezeichnungen zu geben (Descartes, 1954, S. 8 (S. 300 im Original))<sup>5</sup>. In dieser Arbeit soll der Begriff des „Registers“ nicht genutzt werden, da die namentliche Nähe – aber inhaltliche Ferne – zu den „sensorischen Registern“ (vgl. bspw. Schnotz, 2005, S. 55; Gruber, 2011, S. 23) der Kognitionspsychologie eine unnötige Gefahr für Missverständnisse darstellt. Als inhaltlich ebenfalls verwandte Begriffe sind „*scheme*“ (Salomon, 1994, S. 29-32) oder „*symbol scheme*“ (Kaput, 1987b, S. 162) zu nennen, auf die wegen der namentlichen Ähnlichkeit zu den Schemata der Kognitionspsychologie (vgl. Abschnitt 1.2.1) aber nur an geeigneter Stelle verwiesen wird.

### 1.2.3 Repräsentationensysteme

Ein Repräsentationensystem ist die Menge aller Repräsentationen, welche die gleichen Operationen erlauben, die auf sie angewandt werden können (vgl. Duval, 2006, S. 111; Kaput, 1987b, S. 162).

*Beispiele*<sup>6</sup>:

- Gleichungen. Operationen beinhalten z.B. Äquivalenzumformungen nach den bekannten Rechenregeln sowie Einsetzungen.
- Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem. Operationen beinhalten z.B. das Vergrößern, Verkleinern oder Verschieben des sichtbaren Ausschnittes des Koordinatensystems und Ablesen von Werten.

---

<sup>4</sup> Es ließe sich einwenden, dass es sich bei der internen Repräsentation, welche Abbildung 1.6a zu Grunde liegt, um eine depiktionale handelt, während Abbildung 1.6b auf eine deskriptionale hindeutet (vgl. Abschnitt 1.2.1, S. 23). Dies ist nicht von der Hand zu weisen. Weil die Unterscheidung von (internen wie externen) Repräsentationen in dieser Arbeit jedoch auf einer mathematischen statt auf einer gedächtnispsychologischen Ebene stattfinden soll, spielt dieser Einwand hier keine entscheidende Rolle.

<sup>5</sup> Deshalb übersetzen auch die Autoren der 1925 erstmals erschienen Übersetzung ins Englische, auf die hier verwiesenen wird, die Wendung „*registre separé*“ mit „*seperate list*“ (Descartes, 1954, S. 6).

<sup>6</sup> Diese Beispiele dienen nur zur Illustration und erheben natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

- Wertetabellen. Operationen beinhalten z.B. das Einfügen von Wertepaaren und das Ablesen von Werten.

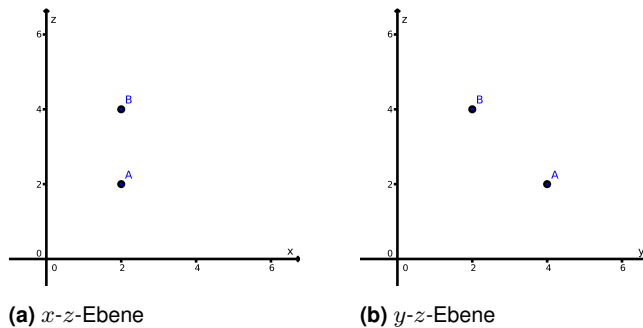
Jede Repräsentation gehört genau einem Repräsentationensystem an und besteht aus einer Syntax, welche allen Repräsentationen eines Systems gemeinsam ist, sowie den abgebildeten Eigenschaften eines Bezugsobjekts (vgl. „*symbol system*“ bei Kaput, 1987b, S. 162):

- Die Syntax gibt an, wann ein Ausdruck innerhalb eines Repräsentationensystems korrekt ist. Die Terme  $2x + 3$  oder  $3y \cdot x$  besitzen beispielsweise eine korrekte Syntax,  $5 + -x$  (zwei Rechenoperationszeichen hintereinander) oder  $x(+3)$  (fehlerhafte Klammersetzung) nicht. Die Syntax darf nicht mit der Codierung verwechselt werden: So sind der Term  $2x + 3$  und die ausgeschriebenen Worte „Zwei X plus Drei“ die gleiche Repräsentation, da sie sich auf das gleiche Objekt beziehen und die gleiche Syntax besitzen. Nur die Codierung unterscheidet sich.
- Die abgebildeten Eigenschaften sind diejenigen Informationen des dargestellten Objekts, welche sich aus der Repräsentation entnehmen lassen, z.B. die  $y$ -Koordinate eines Punktes, die Länge einer Strecke oder die Lage eines Graphen im Koordinatensystem (vgl. Palmer, 1978, S. 262).

Zwei mathematische Repräsentationen sind also genau dann unterschiedlich, wenn sie unterschiedlichen Repräsentationensystemen angehören oder sich auf unterschiedliche Eigenschaften gleicher Objekte beziehungsweise unterschiedliche Objekte beziehen.

*Beispiele:*

- $y = x^2 - 1$  und  $y = 3x + 1$  sind unterschiedliche Repräsentationen, da sie sich auf verschiedene Objekte beziehen.
- In Abbildung 1.7 sind zwei Punkte im  $x$ - $y$ - $z$ -Raum dargestellt. Die beiden Teilabbildungen zeigen die  $x$ - $z$ -Ebene und die  $y$ - $z$ -Ebene, besitzen also einerseits die gleiche Syntax (jeweils zweidimensionale kartesische Koordinatensysteme) und beziehen sich auf das gleiche Objekt. Weil sie aber mit den  $x$ - und  $z$ -Koordinaten bzw.  $y$ - und  $z$ -Koordinaten unterschiedliche Eigenschaften darstellen, handelt es sich um unterschiedliche Repräsentationen.
- $y = x^2 - 1$  und die um 1 in negativer  $y$ -Richtung verschobene Normalparabel in einem kartesischen Koordinatensystem sind unterschiedliche Repräsentationen, da sie verschiedenen Repräsentationensystemen angehören. Die dargestellten Eigenschaften ihres Bezugsobjekts sind jedoch gleich. Die Umwandlung der einen Repräsentation in die andere, also das Wechseln des Repräsentationensystems bei Beibehaltung der dargestellten Eigenschaften, wird von Duval als „*conversion*“ bezeichnet (Duval, 2006, S. 112).



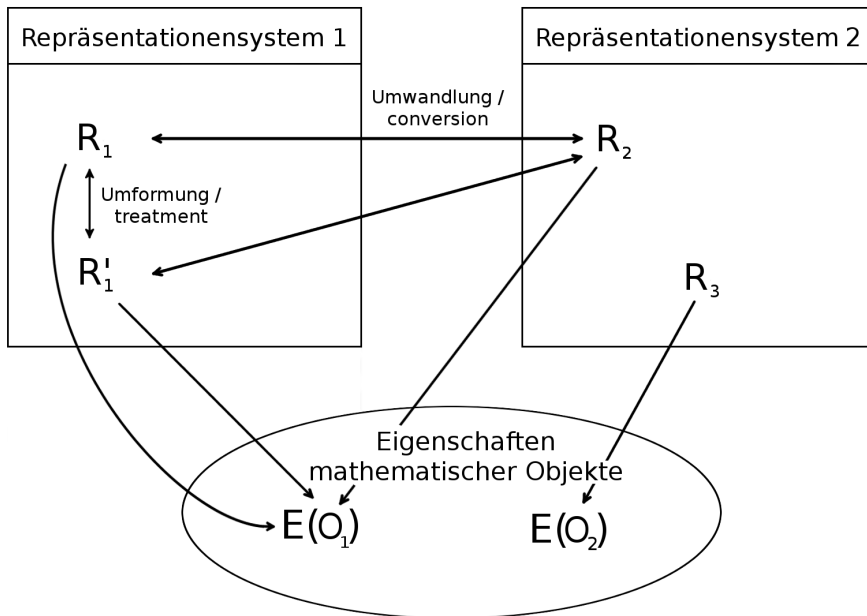
**Abbildung 1.7:** Gleiche Repräsentationensysteme und gleiches Bezugsobjekt, aber unterschiedliche dargestellte Eigenschaften machen (a) und (b) zu unterschiedlichen Repräsentationen.

- $y = x^2 - 1$  und  $y = (x + 1)(x - 1)$  sind die gleichen Repräsentationen, da sie ein Repräsentationensystem teilen und sich auf das gleiche Objekt beziehen. Die eine lässt sich durch Operationen des Repräsentationensystems (Umformung) in die andere überführen, wobei das Bezugsobjekt erhalten bleibt. Duval bezeichnet eine solche Umformung als „*treatment*“ (Duval, 2006, S. 111).

Diese Zusammenhänge zwischen Repräsentationen und Repräsentationensystemen sind in Abbildung 1.8 dargestellt. Die Repräsentationen  $R_1$  und  $R'_1$  (z.B.  $y = x^2 - 1$  und  $y = (x + 1)(x - 1)$ , s.o.) sind dabei gleich, da sie durch Umformung innerhalb eines Repräsentationensystems ineinander überführt werden können. Die Repräsentation  $R_2$  (z.B. der Graph aus den obigen Beispielen) bezieht sich zwar auf die gleichen Eigenschaften des Objekts  $O_1$  wie  $R_1$  und  $R'_1$ , nämlich auf den Zusammenhang von  $x$ - und  $y$ -Werten, gehört aber zu einem anderen Repräsentationensystem.  $R_1$  bzw.  $R'_1$  lassen sich also durch eine Umwandlung in  $R_2$  überführen.  $R_3$  bezieht sich auf ein anderes mathematisches Objekt  $O_2$ , ist von  $R_2$  also verschieden, auch wenn diese dem selben Repräsentationensystem angehören, zum Beispiel der Graph einer linearen Funktion.

Warum wird hier diese Unterscheidung von Repräsentation und Repräsentationensystem getroffen? Die Bedeutung des realen Handelns für das Lernen ist heute allgemein anerkannt und wurde unter anderem von Piaget (vgl. Piaget & Inhelder, 1991) und, darauf aufbauend, von Aebli (1981) immer wieder betont: Wissen ist der „dauernde Niederschlag des Handelns, des Wahrnehmens und der kognitiven Prozesse“ (Aebli, 1981, S. 193). Die Bedeutung realer Handlungen für das Lernen und die Begriffsbildung gilt auch im Bereich der Mathematik (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 86ff), insbesondere für das Arbeiten mit Repräsentationen (vgl. Kaput, 1987b, S. 162). Es ist also sinnvoll, einen engen Bezug zwischen Repräsentationen und Handlungen herzustellen, wenn es um das Lernen von Mathematik geht.

Die Verwendung der gemeinsam anwendbaren Operationen auf Repräsentationen zur Unterscheidung von Repräsentationensystemen hat gegenüber anderen Unterscheidungen wie der Codierung oder dem Medium einen weiteren Vorteil: Wie Studien immer wieder belegen konnten, ist es gerade die Umwandlung bzw. der



**Abbildung 1.8:** Repräsentationensysteme und Repräsentationen

Transfer, die beim Übergang von einem Repräsentationensystem in ein anderes durchgeführt werden muss (s. Abb. 1.8), welche Schülern die größten Schwierigkeiten bereitet (vgl. Ainsworth, 1999, S. 132; van der Meij & de Jong, 2006, S. 200). Eine bloße Recodierung von z.B. „ $x < 0$ “ zu „ $x$  ist kleiner als Null“ oder der Übergang vom Medium Buch zum Bildschirm erscheint in diesem Zusammenhang nicht geeignet, die Probleme zu erklären, die Repräsentationsübergänge für Schüler darstellen (vgl. Duval, 2006, S. 112).

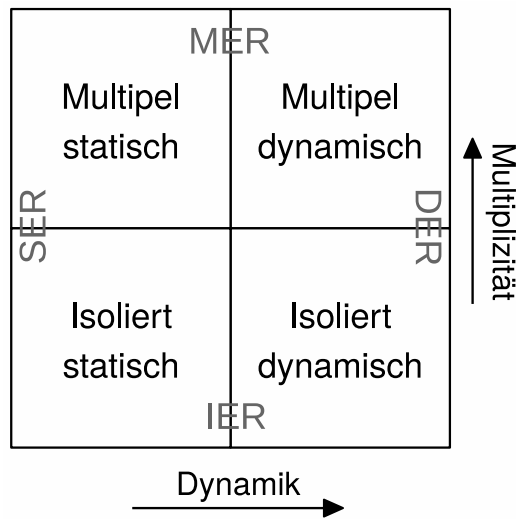
Die Beschreibung des *Repräsentationensystems* über die anwendbaren Operationen und der *Repräsentation* durch dessen Repräsentationensystem und Bezugsobjekt ist also im Hinblick auf die Ziele dieser Arbeit begründet. Darauf baut die in den folgenden Abschnitten beschriebene Taxonomie von Repräsentationen auf.

### 1.3 Eine Taxonomie der Repräsentationen

Eine mögliche Einteilung der Repräsentationen kann entlang der Dimensionen Dynamik und Multiplizität vorgenommen werden. Eine solche Aufteilung ist in Abbildung 1.9 zu sehen. Multiplizität bezeichnet hierbei die gemeinsame Darstellung verschiedener Repräsentationen, Dynamik bedeutet, dass sich eine Repräsentation verändert. Im Detail wird dies in den Abschnitten 1.3.2 und 1.3.3 beschrieben.

Ist eine Repräsentation statisch und wird einzeln dargestellt, wird sie als *isolierte statische Repräsentation* (ISR) bezeichnet. Fügt man weitere Repräsentationen





**Abbildung 1.9:** Eine Taxonomie der externen Repräsentationen nach den Dimensionen Dynamik und Multiplizität

des gleichen mathematischen Objekts hinzu, wird sie zur *multiplen statischen Repräsentation* (MSR). ISR und MSR bilden zusammen die Klasse der *statischen externen Repräsentationen* (SER).

Eine einzelne Repräsentation, die z.B. mit Hilfe eines Rechners dynamisiert wird, wird zur *isolierten dynamischen Repräsentation* (IDR). Zusammen mit den isolierten statischen Repräsentationen bilden sie die Klasse der *isolierten externen Repräsentationen* (IER).

Wird einer multiplen Repräsentation Dynamik hinzugefügt, handelt es sich um eine *multiple dynamische Repräsentation* (MDR, s. Abschnitt 1.3.4). Zusammen mit den multiplen statischen Repräsentationen bilden sie die Klasse der *multiplen externen Repräsentationen* (MER, s. Abschnitt 1.3.2).

Isolierte dynamische und multiple dynamische Repräsentationen bilden zusammen die Klasse der *dynamischen externen Repräsentationen* (DER, s. Abschnitt 1.3.3).

Damit ergibt sich eine vollständige Einteilung der externen Repräsentationen. In den folgenden Abschnitten sollen ihre jeweiligen spezifischen Eigenschaften genauer untersucht werden. Im Abschnitt 3.1.2 wird dann beschrieben, wie die vorgestellten Kategorien in der Untersuchung eingesetzt wurden.

### 1.3.1 Cognitive-Load-Theorie und Repräsentationen

Weil sie in der Bewertung der unten beschriebenen Repräsentationsklassen eine wichtige Rolle spielt, soll zunächst die Theorie des „*Cognitive Load*“ beschrieben werden. Durch sie lassen sich einige der Anforderungen, welche insbesondere multiple und dynamische Repräsentationen an die Lernenden stellen, erklären. De Jong

fasst den zentralen Ausgangspunkt der Cognitive-Load-Theorie wie folgt zusammen:

„Basically, cognitive load theory asserts that learning is hampered when working memory capacity is exceeded in a learning task.“

„Im Wesentlichen geht die Cognitive-Load-Theorie davon aus, dass das Lernen behindert wird, wenn die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses bei einer Lernaufgabe überschritten wird.“

de Jong (2010, S. 106, Übersetzung durch den Autor)

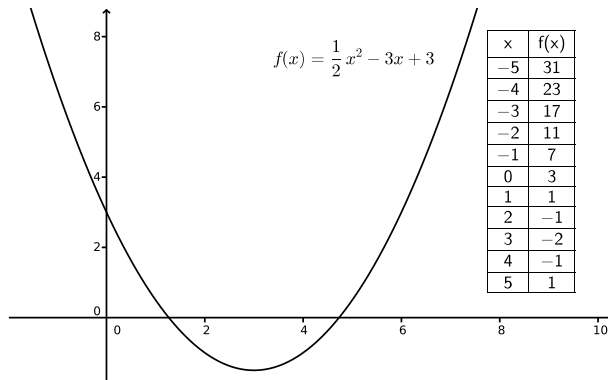
Die ursprüngliche auf Chandler und Sweller (1991) zurückgehende Theorie hat auf die Lernpsychologie, insbesondere im Bereich der Lernmittelgestaltung, großen Einfluss genommen (de Jong, 2010, S. 106), so auch bei der Erforschung des Lernens mit Repräsentationen (vgl. Ainsworth, 2006; Schnotz, 2002b; Renkl, Berthold, Grosse & Schwonke, 2013; Bétrancourt, 2005).

Grundsätzlich werden drei verschiedene Arten von Cognitive Load (nachfolgend meist kognitive Last oder Auslastung genannt) unterschieden (de Jong, 2010, S. 106):

- *Intrinsic load* (intrinsische Last) ist durch die (subjektiv erlebte) Komplexität des zu lernenden Materials bestimmt.
- *Extraneous load* (überflüssige Last) ergibt sich aus der Gestaltung des Lernmaterials und ist hinderlich für den Lernerfolg.
- *Germane load* (relevante oder bedeutungsvolle Last) wird durch die ablaufenden Lernprozesse selbst erzeugt, ist also eine „gute“ Art von Last.

Cognitive Load hat also zwei Seiten: Einerseits beschreibt der „germane load“ eine kognitive Last, welche nicht verhindert oder verringert werden sollte, da sie die Voraussetzung für das Lernen darstellt. Andererseits wird besonders der mittlere Punkt in den nachfolgenden Betrachtungen der Repräsentationsklassen immer wieder eine Rolle spielen, da verschiedene Arten von Repräsentationen eine unterschiedlich hohe Last erzeugen, welche dem Lernerfolg im Wege stehen kann. Jedoch ergeben sich gerade durch diese zusätzlichen, Last erzeugenden Charakteristika von Repräsentationen erst die Möglichkeiten für neue kognitive Prozesse und damit für einen größeren Lernerfolg. Dieser Widerspruch ist eine Kritik, welche an die Cognitive-Load-Theorie gerichtet wird (de Jong, 2010, S. 108). Zudem ist kognitive Last nicht nur höchst subjektiv und hochgradig von den Vorlieben und Vorkenntnissen des Lernenden abhängig, sondern auch nur schwierig messbar (de Jong, 2010, S. 114ff), weshalb die Theorie vor allem zum nachträglichen Erklären oder Spekulieren über einen nicht eingetretenen Lernerfolg genutzt wird (de Jong, 2010, S. 125).

Dennoch bietet sie eine Möglichkeit, die höheren Anforderungen und die daraus möglicherweise entstehenden Schwierigkeiten beim Lernen mit verschiedenen Arten von Repräsentationen zu erklären. In den nachfolgend beschriebenen Repräsentationsklassen, welche sich aus dem oben beschriebenen Schema ergeben, wird daher auch auf die Implikationen der Cognitive-Load-Theorie Bezug genommen.



**Abbildung 1.10:** Eine multiple Repräsentation einer Funktion durch Gleichung, Tabelle und Graph

### 1.3.2 Multiple Repräsentationen

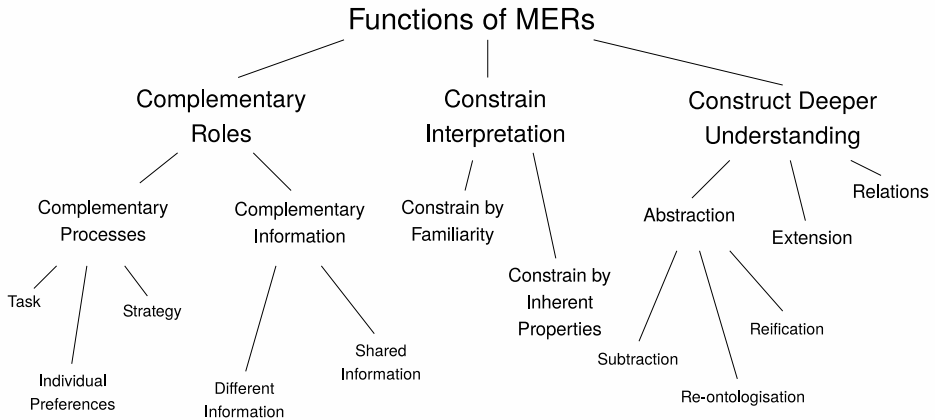
Eine multiple Repräsentation (MER) liegt vor, wenn Repräsentationen gemeinsam dargestellt werden, die zwar das gleiche Bezugsobjekt besitzen, dabei aber entweder aus verschiedenen Repräsentationssystemen stammen oder unterschiedliche Eigenschaften des Objekts darstellen. Jede dieser dargestellten Repräsentationen ist eine Teilrepräsentation der multiplen Repräsentation. Ein typisches Beispiel einer multiplen Repräsentation für eine Funktion ist ihre Darstellung in Form von Gleichung, Tabelle und Graph (z.B. Abbildung 1.10). Bereits hier wird deutlich, dass die einzelnen Teilrepräsentationen zwar nicht jeweils die gleichen Informationen enthalten müssen, aber können. Häufig teilen sich die Teilrepräsentationen bestimmte dargestellte Informationen, sie können jedoch auch in den dargestellten Eigenschaften völlig disjunkt sein, solange sie sich auf das gleiche mathematische Objekt beziehen. Die Details zu diesem Merkmal multipler Repräsentationen werden in der Theorie von Ainsworth (1999) ausführlich dargestellt.

#### Die Rollen multipler Repräsentationen

Ainsworth (1999) unterscheidet drei Rollen (oder Funktionen) multipler Repräsentationen. Diese sind nicht spezifisch für die Mathematik, sondern für alle Inhalte:

1. Sie können ergänzende Rollen (*complementary roles*) einnehmen.
2. Sie können die Interpretationsmöglichkeiten von Repräsentationen einschränken, um so Fehlinterpretationen vorzubeugen (*constrain interpretation*).
3. Sie können zu einem tieferen Verständnis der Repräsentationen führen (*construct deeper understanding*).

Ainsworth (1999) differenziert diese Rollen multipler Repräsentationen weiter aus und nennt Voraussetzungen für die Verwendung der jeweiligen Rolle ebenso wie



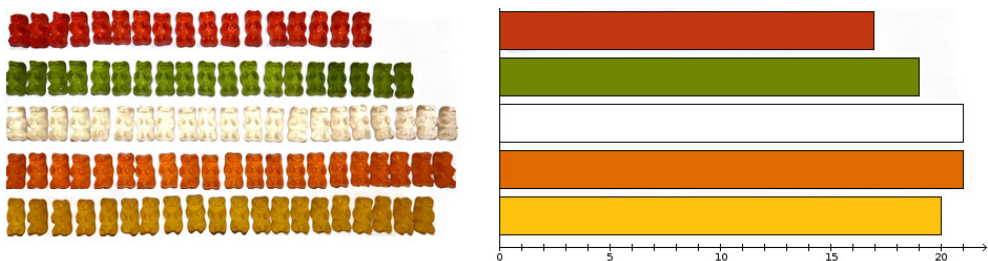
**Abbildung 1.11:** Die Rollen multipler Repräsentationen (nach Ainsworth, 1999)

feinere Unterscheidungen innerhalb der Rollen. Das gesamte Schema ist in Abbildung 1.11 dargestellt. Diese Rollen sind nicht exklusiv zu verstehen, d.h. eine multiple Repräsentation kann gleichzeitig sich ergänzende Prozesse ermöglichen und dabei zu einem vertieften Verständnis der Repräsentationen führen.

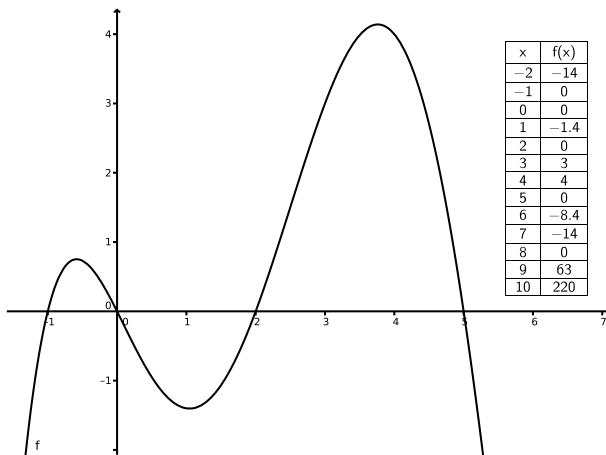
Multiple Repräsentationen führen zu einem tieferen Verständnis, wenn bereits bekannte oder einfachere Repräsentationen dazu genutzt werden, unbekannte oder komplexere Repräsentationen zu erklären. Zum Beispiel ermöglicht in Abbildung 1.12 die linke Abbildung der aufgereihten Gummibärchen die Erschließung des Balkendiagramms auf der rechten Seite, auch wenn diese Repräsentation zuvor noch nicht bekannt war.

Ein Beispiel für das Einschränken von Interpretationsmöglichkeiten wurde in Abbildung 1.7 auf Seite 30 gezeigt. Hier lässt sich auf Grund der linken Teilabbildung die Lage der Punkte nicht ablesen, die Abbildung ist also mehrdeutig. Der rechte Teil schränkt diese Mehrdeutigkeit ein und lässt nur noch eine Interpretation zu.

Für das Argumentieren und damit für diese Arbeit sind nur die ergänzenden Rollen multipler Repräsentationen relevant. Zwar können beim Argumentieren mit multiplen Repräsentationen auch die beiden anderen Rollen auftreten, insbesondere



**Abbildung 1.12:** Abstraktion zum Erzeugen eines tieferen Verständnisses



**Abbildung 1.13:** Ergänzende Rollen multipler Repräsentationen bei der Nullstellensuche einer Funktion

beim Einarbeiten in die Fragestellung und dem Finden einer Vermutung. In dieser Arbeit stehen jedoch die fertigen Argumentationen der Schüler und ihre Verwendung von multiplen Repräsentationen im Mittelpunkt. Deshalb sollen im Folgenden nur die ergänzenden Rollen genauer beschrieben werden.

### Ergänzende Rollen

Die ergänzende Rolle multipler Repräsentationen besitzt zwei Aspekte: sich ergänzende Prozesse oder Vorgehensweisen (*complementary processes*) und sich ergänzende Informationen (*complementary information*).

Erstere werden von Lernenden genutzt, wenn unterschiedliche Aufgaben dies bedingen (*task*), wenn der Einsatz verschiedener Strategien einen Leistungsgewinn verspricht (*strategy*) oder wenn es subjektive Vorlieben für die eine oder andere Vorgehensweise gibt (*individual preferences*). Als ein mathematisches Beispiel für sich ergänzende Prozesse eignet sich die Bestimmung von Nullstellen bei Funktionen: Während die Existenz einer Nullstelle am Graphen meist leicht zu erkennen ist, ist deren Abszisse oft erst in einer Wertetabelle oder nach geeigneter Umformung der Gleichung zu erkennen. Dies entspricht einem Einsatz verschiedener Strategien. Tatsächlich sind bei der Wahl der Repräsentation jedoch häufig die Vorlieben bzw. Vorkenntnisse der Schüler entscheidend (vgl. Acevedo Nistal et al., 2009, S. 630ff): So könnten sie sich zum Beispiel lieber auf die Umformung der Gleichung konzentrieren, als den Graphen zu untersuchen, weil dies in der Schule intensiv geübt wurde.

Darstellungen können sich zudem durch ihren jeweiligen Informationsgehalt ergänzen. Dazu können sich die dargestellten Informationen unterscheiden (*different information*), z.B. wenn eine Nullstelle einer Funktion im betrachteten Graphenausschnitt nicht zu sehen ist, diese jedoch in die Wertetabelle eingetragen ist (vgl. Abbildung 1.13, wo die Nullstelle bei  $x = 0$  am Graphen nicht ablesbar ist).

Die Informationen können sich jedoch auch ergänzen, indem sie in mehreren

Teilrepräsentationen abgebildet werden (*shared information*). Für gewöhnlich sind diese dann aber unterschiedlich dargestellt, zum Beispiel wenn in Abbildung 1.13 Nullstellen sowohl am Graphen als auch in der Wertetabelle ablesbar sind. Wie bereits erwähnt bedingen diese unterschiedlichen Darstellungsweisen eventuell auch unterschiedliche Vorgehensweisen beim Problemlösen, so dass häufig auch ergänzende Prozesse vorliegen. Die beiden ergänzenden Rollen multipler Repräsentationen schließen sich also nicht nur nicht aus, sondern bedingen sich mitunter sogar gegenseitig.

Beim Argumentieren – und somit in der durchgeführten Untersuchung – spielen besonders diese Funktionen multipler Repräsentationen eine große Rolle, weil zusätzliche oder anders zugängliche Informationen auch neue Möglichkeiten mit sich bringen, in Argumenten Anwendung zu finden. Der genaue Zusammenhang zwischen Argumenten und Repräsentationen wird im Abschnitt 2.3.2 im Detail betrachtet.

#### **Schwierigkeiten multipler Repräsentationen**

Wie im vorherigen Abschnitt dargestellt, bieten multiple Repräsentationen ein vielfältiges Potential, beim Lernen von Nutzen zu sein. Tatsächlich wurden in einer Reihe von Studien, insbesondere zum Lernen von naturwissenschaftlichen Inhalten, Vorteile von multiplen gegenüber isolierten Repräsentationen festgestellt (van der Meij & de Jong, 2006; Kozma, Russell, Jones, Marx & Davis, 1996; Ainsworth, Bibby & Wood, 1998; Mayer & Sims, 1994). Andererseits wurden ebenfalls Studien veröffentlicht, in denen ein Vorteil von multiplen Repräsentationen nicht nachgewiesen werden konnte oder sogar negative Effekte zu beobachten waren (Chandler & Sweller, 1991; Ainsworth et al., 1998; van Someren, 1998). Häufig wird hierfür eine kognitive Überlastung (*cognitive overload*, s.o. zur Cognitive-Load-Theorie) als mögliche Ursache genannt. Aus diesem Grund steht in der Forschung zu multiplen Repräsentationen mittlerweile nicht mehr die Frage im Vordergrund, *ob* MER beim Lernen hilfreich sind, sondern *wie* sie das sein können (vgl. Ainsworth, 2006, S. 183; Schnotz & Bannert, 2003, S. 118; Horz & Schnotz, 2010, S. 249). Insbesondere wird dabei die Frage gestellt, wie die Lernenden bei den zu bewältigenden Anforderungen beim Lernen mit multiplen Repräsentationen unterstützt werden können (vgl. Ainsworth et al., 1998, S. 123; van der Meij & de Jong, 2006, S. 200):

1. Bei jeder Teilrepräsentation zu verstehen, *wie* Informationen dargestellt werden.
2. Bei jeder Teilrepräsentation zu verstehen, *welche* Informationen dargestellt werden.
3. Die dargestellten Repräsentationen auf einer oberflächlichen Ebene in Verbindung setzen zu können.
4. Informationen von einer Repräsentation in eine andere übertragen zu können.

Gerade die beiden letzten Anforderungen, welche speziell beim Lernen mit multiplen Repräsentationen zu bewältigen sind, bereiten Schülern die größten Probleme. Die Lösungsansätze hierzu sind unterschiedlich. Viele beinhalten technische Komponenten, wie das Hinzufügen einer dynamischen Verbindung zwischen den Repräsentationen (vgl. Ainsworth, 2006; Kaput, 1991), obwohl auch deren Wirksamkeit nicht als nachgewiesen gelten kann und gegen deren Einsatz mit Hilfe der Cognitive-Load-Theorie gute Argumente gefunden werden können.

Ein weiterer Ansatz ist das Vermitteln von metakognitiven Fähigkeiten, mit welchen Schwonke, Berthold und Renkl (2009) und Renkl et al. (2013) deutliche Leistungssteigerungen beim Arbeiten mit multiplen Repräsentationen nachweisen konnten. Diese Fähigkeiten müssen jedoch explizit gelehrt werden:

„The substantial instructional effects on learning outcomes [...] suggest that representation-related knowledge is not automatically acquired with domain knowledge, but that it has to be acquired explicitly. [...] Based on our results, we would argue [...], that explicit teaching is crucial.“

„Die erheblichen Effekte auf den Lernerfolg [...] legen nahe, dass repräsentationsbezogenes Wissen nicht automatisch mit dem Fachwissen, sondern gesondert erworben werden muss. [...] Auf Grundlage unserer Ergebnisse würden wir behaupten [...], dass ein explizites Lehren entscheidend ist.“

Schwonke et al. (2009, S. 1241, Übersetzung durch den Autor)

Um klare Aussagen über die Wirksamkeit von multiplen Repräsentationen (oder die Bedingungen für deren Wirksamkeit) machen zu können, sind sicherlich noch weitere Forschungen nötig. Diese Arbeit versucht, im innermathematischen Bereich das Potential multipler Repräsentationen auszuloten.

### 1.3.3 Dynamische Repräsentationen

Eine dynamische Repräsentation (DER) liegt vor, wenn sich eine gezeigte Repräsentation während der Betrachtung verändert oder verändern lässt. Dabei können sich das Repräsentationssystem oder auch die Eigenschaften eines dargestellten mathematischen Objekts ändern. Wird das Repräsentationssystem gewechselt oder kommen neue Repräsentationensysteme hinzu, so handelt es sich um eine multiple dynamische Repräsentation. Verändern sich bestimmte Eigenschaften eines mathematischen Objekts, so soll dies als *Variation* bezeichnet werden. Dynamische Repräsentationen können sowohl interaktiv (meist realisiert in Form von Software) als auch selbstlaufend realisiert sein, die Veränderung stetig (bzw. quasi-stetig<sup>7</sup>) oder in diskreten Schritten stattfinden.

---

<sup>7</sup> Der Rechner als diskrete Maschine beherrscht keine echte Stetigkeit, lässt Variation aber in „sehr kleinen“ Schritten zu, so dass für praktische Belange von einer stetigen Veränderung gesprochen werden kann.

Nach dieser Begriffserklärung ist eine dynamische mathematische Repräsentation ein Spezialfall der „Animation“ (z.B. Bétrancourt, 2005; Schnotz, 2002a; Ainsworth & VanLabeke, 2004), welche in der Psychologie definiert ist als „Abfolge von Einzelbildern, so dass jedes Einzelbild als Abwandlung des vorherigen erscheint, und bei dem die Abfolge der Einzelbilder entweder durch den Ersteller oder den Benutzer bestimmt wird“ (Bétrancourt & Tversky, 2000; zitiert nach Bétrancourt, 2005).

Der Ruf nach einer Dynamisierung der Mathematik, insbesondere der Geometrie, ist nicht neu. Während für die antiken Mathematiker wie Euklid die Geometrie und ihre Objekte statisch waren (Bedürftig & Murawski, 2012, S. 40), formulierte Treutlein bereits 1911:

„Als einer der Hauptunterschiede altgriechischer und neuzeitlicher Geometrie gilt das, dass in jener die Figuren sämtlich als starr und fest gegeben angenommen werden, in dieser als beweglich und gewissermaßen fließend, **in stetem Übergang von einer Gestaltung zu anderen** begriffen. Sollen unsere Schüler in die heutige Form der Wissenschaft und gar gelegentlich in deren Anwendung eingeführt werden, so müssen auch sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Stücke zu achten, diese zu erraten, bald auch die dabei herrschende Gesetzmäßigkeit erfassen und beweisen zu können.“

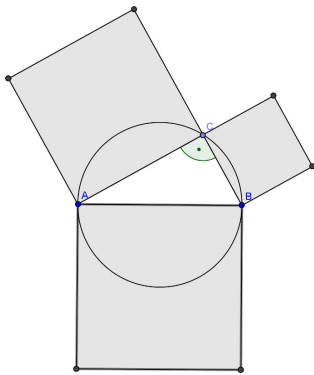
Treutlein (1985, S. 202, Hervorhebung im Original)

Zur damaligen Zeit wurden solche dynamischen Konstruktionen zum Beispiel durch Gelenkvierecke realisiert, im Laufe der Zeit haben neu aufkommende Medien Möglichkeiten geschaffen, alle Arten von mathematischen Objekten dynamisch darzustellen. Während dies früher vor allem durch Mathematikfilme erreicht wurde (vgl. Kautschitsch & Metzler, 1982), bieten heute Computerprogramme in verschiedensten Varianten die Möglichkeit einer interaktiven Dynamisierung. Typische Beispiele für dynamische Repräsentationen in der Schule sind in Form von dynamischer Geometriesoftware (DGS) zu finden, bei der zum Beispiel Streckenlängen oder die Lage von Punkten variiert werden, oder wenn Parametervariationen einer Funktion betrachtet werden, bei denen die Auswirkungen einer Veränderung der Parameter auf den Funktionsgraphen beobachtet wird (vgl. Abbildung 1.14). Hierbei handelt es sich um stetige Variationen. Aber auch das Variieren von Zelleninhalten in einem Tabellenkalkulationsprogramm und dessen Auswirkung auf andere, abhängige Zellen ist eine Form der dynamischen Repräsentation, nur dass hier die Variation in diskreten Schritten verläuft.

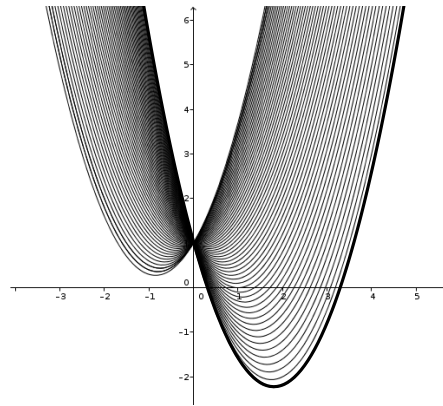
#### **Mögliche Vorteile dynamischer Repräsentationen**

Ähnlich wie multiple bieten dynamische Repräsentationen dadurch Vorteile, dass durch die Dynamik mehr Informationen dargestellt werden als in einem vergleich-





(a) Dynamische Geometrie



(b) Parametervariation bei Funktionen

**Abbildung 1.14:** Typische Anwendungen dynamischer Repräsentationen in der Schule

baren statischen Bild. Zur Nutzung dieser zusätzlichen Informationen unterscheidet Schnotz (2002b, S. 8) zwei Funktionen:

- Die aktivierende Funktion (*enabling function*): Die zusätzlichen Informationen der dynamischen Repräsentation ermöglichen zusätzliche kognitive Prozesse. Zum Beispiel ruft die in Abbildung 1.14b dargestellte Variation des Parameters die Vermutung hervor, dass sich der Scheitel der abgebildeten Parabel bei der Variation auf einer bestimmten Kurve bewegen könnte. Dies zu erkennen ist ein zusätzlich ermöglichter kognitiver Prozess, der seinerseits wieder neue Prozesse zur Begründung des Gesehenen hervorrufen kann. Weil durch die zusätzlichen kognitiven Prozesse aber auch die kognitive Auslastung erhöht wird, ist diese Funktion dynamischer Repräsentationen vor allem für leistungsstärkere Lernende vorteilhaft (Schnotz, 2002b, S. 5).
- Die vereinfachende Funktion (*facilitating function*): Durch die zusätzlichen Informationen, welche durch die dynamische Repräsentation dargeboten werden, laufen kognitive Prozesse erleichtert ab. Zum Beispiel muss die Variation des Punktes C (und damit auch der von C abhängigen Quadrate über den Katheten) in Abbildung 1.14a nicht mehr im Kopf vorgestellt werden, sondern kann direkt an der Repräsentation abgelesen werden. Dies korrespondiert mit den allgemeinen Funktionen des *re-representing* und *computational offloading*, welche allen Repräsentationen gemein ist (vgl. Abschnitt 1.1.4 auf S. 23). Weil hierdurch die kognitive Last verringert wird, ist diese Funktion dynamischer Repräsentationen einerseits vor allem für leistungsschwächere Lernende hilfreich, und andererseits, wenn es sich um eine sehr komplexe Repräsentation handelt (Schnotz, 2002b, S. 6).

In Bezug auf die vereinfachende Funktion fügt Schnotz jedoch hinzu, dass das Wegfallen von kognitiven Prozessen durchaus auch negative Seiten hat (Schnotz, 2002b, S. 9): Wenn ein aktives Durchdenken der abgebildeten Repräsentation nicht

notwendig ist, laufen die relevanten kognitiven Prozesse auch nicht ab, was zu einem flacheren mentalen Modell und einer „Illusion des Verstehens“ (Bétrancourt, 2005, S. 293) führen kann. Schnotz bezeichnet dies als hemmende Funktion (*inhibiting function*) von dynamischen Repräsentationen. Wäre zum Beispiel in der Abbildung 1.14b der Scheitelpunkt der Parabeln farblich hervorgehoben und zeichnete mit Hilfe des Spurmodus<sup>8</sup> bei der Variation seine Ortskurve, so ließe sich die Parabelform der Kurve direkt ablesen. Zusätzliche kognitive Prozesse, die zu einem tieferen Verständnis führen könnten, müssten dabei nicht ablaufen. Wie in der Untersuchung deutlich wurde, führt dies insbesondere beim Argumentieren dazu, dass eine weiterführende Begründung der Behauptung für überflüssig gehalten wurde: „Man sieht es halt.“ war eine häufig genannte Begründung, die auf keine tieferen kognitiven Prozesse schließen lässt.

Speziell beim Argumentieren bzw. Beweisen spielen dynamische Repräsentationen eine besondere Rolle. Bender (1989) unterscheidet sieben mögliche Funktionen von „stetigen Bewegungen bzw. Verformungen bei elementargeometrischen Beweisen“, von denen im Folgenden lediglich die für diese Arbeit relevanten herausgegriffen werden sollen:

- „Sie liefern den Beweis selbst [...].
- Sie vertiefen den Glauben an den Beweis, indem sie ihn plausibel bzw. plausibler machen [...].
- Sie unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung, indem sie viele Fälle zeigen, Sonderfälle in allgemeine Fälle einbetten (und sie so hervorheben) und überhaupt Übergänge zwischen Fällen demonstrieren. [...]
- Sie erzeugen Vermutungen, Sätze, Beweisideen [...].
- Sie stehen für Handlungen und machen die geometrischen Operationen dadurch zugänglicher, plausibler.
- Sie regen eine allgemeine Sichtweise geometrischer Figuren als beweglich bzw. veränderlich an, die grundsätzlich geometrischen und außergeometrischen Denkweisen förderlich ist.“

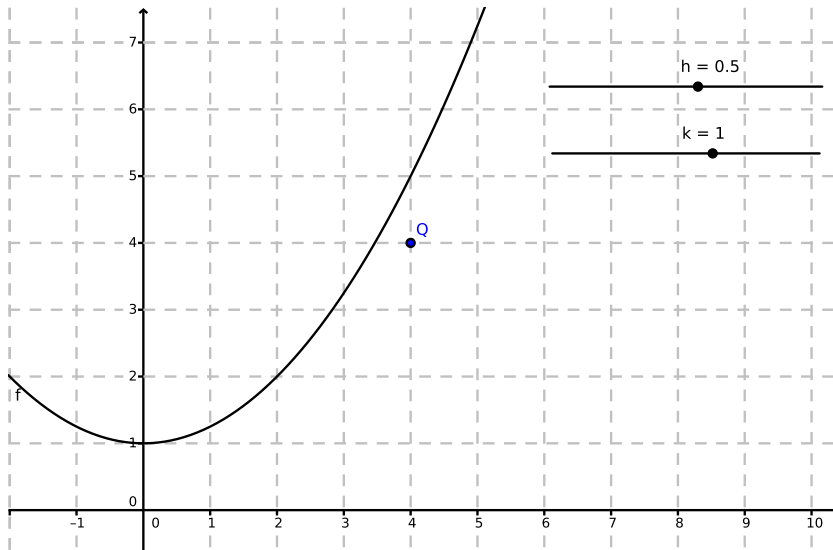
Bender (1989, S. 129)

Zur Illustration sei eine Aufgabe aus dem Aufgabenpaar „Funktionenschar“ der Untersuchung genannt (s. Abbildung 1.15, die gesamte Aufgabe befindet sich auf Seite 71). Hier war in der ersten Teilaufgabe gefragt, ob es Werte von  $h$  und  $k$  gibt, so dass der Punkt  $Q$  auf der gezeigten Parabel liegt. Der erste von Bender genannte Punkt wurde oben bei der Beschreibung der hemmenden Funktion von dynamischen Repräsentationen bereits erwähnt: Die meisten Schüler lösten die Teilaufgabe

---

<sup>8</sup> Ist diese Funktion des Programms GeoGebra für einen Punkt aktiviert, werden die bereits durchlaufenen Orte des Punktes weiter in der Konstruktion angezeigt. Dadurch können sich nicht nur Ortskurven zeichnen lassen, sondern man kann gewissermaßen auch beobachten, wie die Ortskurve entsteht.

schnell durch Ausprobieren von Werten mit Hilfe der Schieberegler im gezeigten GeoGebra-Applet. In der zweiten Aufgabe sollten sie jedoch angeben, ob dies für weitere Parameterwerte gilt, und wenn ja, für wie viele. Wie Schüler in den anschließenden Reflexionsaufgaben angaben, probierten sie zunächst einige willkürliche Werte aus und erkannten, dass es zu jedem ausprobierten  $h$  ein  $k$  gibt (und umgekehrt), so dass  $Q$  auf der Parabel liegt. Daraus schlossen sie, dass es unendlich viele Parameterwerte gibt, für welche die Aussage gilt, und begründeten dies (teilweise).



**Abbildung 1.15:** Abbildung der dynamischen Repräsentation aus dem Aufgabenpaar „Funktionenschar“ der Untersuchung

Wie von Bender beschrieben nutzten sie die dynamische Repräsentation also zuerst, um eine Idee zu erlangen und sich anschließend von deren Allgemeingültigkeit zu überzeugen (zur heuristischen Funktion von DGS vgl. auch Hanna, 2000). Hierin lassen sich sowohl die aktivierende (Finden der Idee, welche ohne die dynamische Repräsentation verborgen geblieben wäre), wie auch die vereinfachende Funktion (Plausibilität der Allgemeingültigkeit, welche zu begründen ohne Dynamik ungleich schwerer gewesen wäre) wiederfinden, wie sie von Schnotz (2002b) beschrieben wurden. Allgemeingültigkeit mit statischen Repräsentationen überhaupt nur darzustellen, ist nicht einfach. So berichtet Kaput (1987b, S. 191f) über die Schwierigkeiten von Schülern, in einer statischen Repräsentation, welche Variablen wie eine mit der Länge  $x$  versehenen Strecke enthält, diese als variabel zu erkennen. Stattdessen gehen sie davon aus, dass sie  $x$  explizit werden berechnen können, dass  $x$  also nur ein Platzhalter für *einen* bestimmten Wert darstellt. Dynamische Repräsentationen können dem vorbeugen, indem sie unter Beibehaltung der weiteren Eigenschaften und Abhängigkeiten in der Konstruktion  $x$  variabel darstellen.

Der letzte von Bender genannte Punkt lässt sich über die Geometrie hinaus erweitern: Dynamische externe Repräsentation führen, wenn sie internalisiert werden, zu dynamischen internen Repräsentationen (vgl. Mayer & Anderson, 1992, S. 446; Aebli, 1985, S. 5). Gerade hierin liegt der besondere Wert dynamischer Repräsentationen begründet, denn wie Roth (2005) ausführlich beschreibt, ist es genau diese Art von „beweglichem Denken“ (vgl. Roth, 2005, S. 74), welches erst mit Hilfe des Computers erlernt und geübt, dann aber auch ohne dessen Unterstützung mental zur Verfügung stehen kann (Roth, 2005, S. 120). Der Begriff des beweglichen Denkens ist eng mit dem auf Piaget zurückgehenden „operativen Prinzip“ verwandt (vgl. Aebli, 1985), welches in der Mathematikdidaktik beim Lernen von Mathematik weit über die Geometrie und das Beweisen hinaus eine anerkannte Rolle spielt (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 91ff; Weigand & Weth, 2002, S. 84ff).

#### **Schwierigkeiten beim Einsatz dynamischer Repräsentationen**

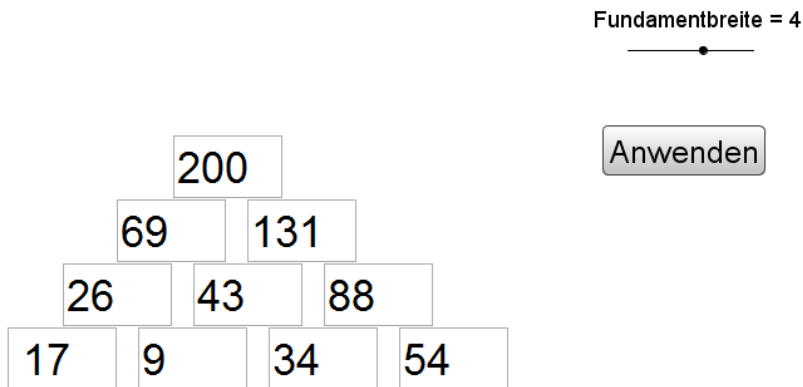
Wie weiter oben bereits angedeutet, bieten dynamische Repräsentationen jedoch nicht nur Vorteile beim Lernen. Um die aktivierende Funktion der Repräsentation nutzen zu können, ist es notwendig, alle Informationen, deren Zahl mit Hilfe der Dynamik größer ist als bei einer vergleichbaren statischen Repräsentation, aufzunehmen und, sollen die Informationen zur Erkenntnis genutzt werden, im Arbeitsgedächtnis zu behalten. Besonders wenn Informationen nur zeitweise sichtbar sind, aber später zum Arbeiten mit der Repräsentation benötigt werden, erhöht sich so die kognitive Last. Sind die Repräsentationen nicht interaktiv und bieten keine Einflussmöglichkeit des Lernenden auf die Lerngeschwindigkeit und -reihenfolge, erhöhen sich die kognitiven Anforderungen weiter (vgl. Ainsworth & VanLabeke, 2004, S. 242; Bétrancourt, 2005, S. 293).

Dies soll in Abbildung 1.16 veranschaulicht werden. Sie zeigt das Bildschirmfoto eines GeoGebra-Applets, in dem eine Zahlenmauer interaktiv umgesetzt wurde. In einer solchen werden jeweils zwei Werte aus unteren „Steinen“ addiert, um so den Wert des darüber liegenden Steins zu berechnen. Eine Frage lautete hier:

„Addiere 1 zu einem der Werte aus der untersten Reihe hinzu. Wie wirkt sich dies auf den Wert des obersten Steins aus? Ist das bei jedem Stein gleich? Begründe deine Beobachtungen.“

Wird eine Zahl aus der untersten Reihe variiert und der Knopf „Anwenden“ gedrückt, so aktualisieren sich automatisch die betroffenen Zahlen mit dem korrekten Ergebnis, insbesondere also auch die oberste Zahl. Um das neue Ergebnis nun aber mit dem alten vergleichen zu können, muss dieses im Arbeitsgedächtnis präsent gehalten werden, was umso schwieriger wird, je häufiger das Experiment für verschiedene Steine aus der untersten Reihe durchgeführt wird. Dadurch erhöht sich die kognitive Auslastung und die Gefahr steigt, dass Ergebnisse vergessen werden und die Aufgabe nicht mehr gelöst wird.

Zudem ist Variation alleine für den Lernerfolg noch nicht förderlich. Gerade Schülern bereitet es großen Spaß, dynamische mathematische Objekte einfach nur zu verziehen, zu verschieben oder anderweitig zu bewegen. Dabei steht weniger



**Abbildung 1.16:** Interaktive Zahlenmauer als dynamische Repräsentation

die Betrachtung mathematischer Eigenschaften im Vordergrund, als viel mehr die Freude an den schnell wechselnden Formen und Darstellungen. Obwohl diese erste Begegnung mit der dynamischen Repräsentation sich bereits dazu eignet, zu erkennen, welche variierbaren Eigenschaften sich auf welche abhängigen Eigenschaften des Objektes auswirken, wird sie erst durch eine *planvolle* Variation effizient genutzt, also wenn die Frage „Was passiert, wenn ich ...“ zum Leitmotiv wird (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 163; Weigand & Bichler, 2010). Ähnlich wie dies beim expliziten Lernen metakognitiver Fähigkeiten zum effektiven Einsatz multipler Repräsentationen gefordert wird, plädiert Roth (2005) dafür, auch die Verwendung dynamischer Repräsentationen im Unterricht zu thematisieren:

„Insgesamt muss darauf hingearbeitet werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich beim Arbeiten mit dem Computer intensiv mit den beobachtbaren Veränderungen und Invarianten auseinander setzen und auch beginnen ihr Vorgehen (Welche Veränderungen sollten als nächstes mit welchem Ziel untersucht werden?) zu planen.“

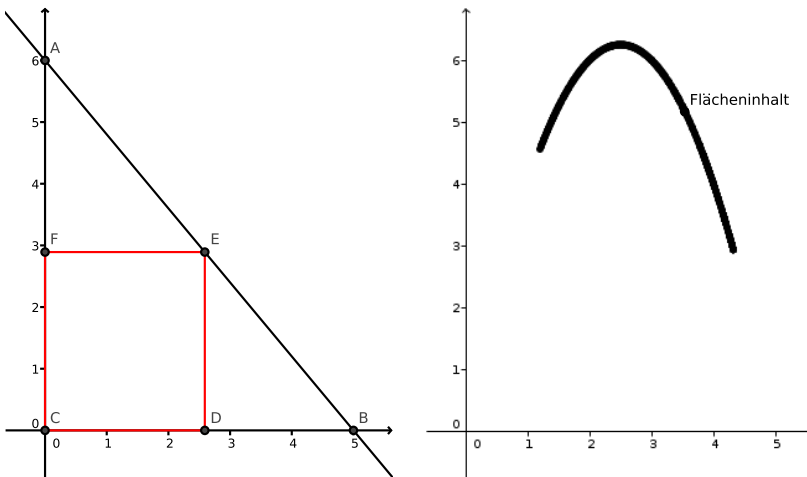
Roth (2005, S. 123)

Gerade beim Argumentieren sind solche planvollen Variationen entscheidend, wenn bereits getroffene Vermutungen für weitere Fälle überprüft werden sollen, um so die Allgemeingültigkeit einer Aussage abzusichern, oder zumindest plausibler machen. Ob diese Art von Plausibilität von Argumenten an Stelle des tatsächlichen, allgemein gültigen Beweises für den Schulunterricht ausreicht, ist zu diskutieren (vgl. Abschnitt 2.1). Für Bender (1989) ist dies nicht der Fall. Er betont, „dass [...] der eigentliche Beweis verbal anhand statisch gesehener Zusammenhänge geführt wird“ (Bender, 1989, S. 129). Dies ist im Hinblick auf die durchgeführte Untersuchung von besonderer Bedeutung, da diese Überzeugung möglicherweise auch bei Schülern vorhanden sein könnte und so die Verwendung von Formulierungen, die auf dynamische interne Repräsentationen schließen lassen, hemmen könnte.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass dynamische Vorstellungen nicht immer dem Verstehen mathematischer Inhalte förderlich sind. Wie Marx (2006) beschreibt, können diese bei der Betrachtung von Bruchzahl- bzw. Dezimalbruchdarstellung der gleichen Zahl im Wege stehen, wenn die Dezimalbruchdarstellung periodisch ist. Während  $\frac{1}{3}$  eindeutig als statisch erkannt wird, sehen Schüler in  $0,\bar{3}$  eine dynamische Komponente hinein (Marx, 2006, S. 92). Weil sich dies offensichtlich ausschließt, erklären sie sich den Widerspruch, indem sie die „beiden“ Zahlen, die zu der jeweiligen Repräsentation gehören, als verschieden ansehen (Marx, 2006, S. 108). So lässt sich auch ihre Schwierigkeit mit dem vermeintlichen Paradoxon erklären, dass einerseits  $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ , andererseits aber  $0,\bar{3} \cdot 3 = 0,\bar{9}$  gilt, was für Schüler wiederum  $\neq 1$  ist. Bemerkenswert ist hierbei, dass es sich bei  $0,\bar{3}$  bzw.  $0,\bar{9}$  zwar um eine statische externe Repräsentation handelt, diese aber offenbar eine dynamische interne Repräsentation hervorruft. Im Falle von  $0,\bar{3}$  liegt dies möglicherweise an der „Entstehung“ der Zahl durch den „unendlichen Divisionsprozess“ von 1 und 3, dem Annähern an  $0,\bar{3}$  am Zahlenstrahl oder dem (vergeblichen) Versuch, die Zahl aufzuschreiben: „In den Augen der Schüler überträgt sich die Dynamik in den beschriebenen Prozessen unmittelbar auf die Zahl selber“ (Marx, 2006, S. 92).

### 1.3.4 Multiple dynamische Repräsentationen

Nun soll noch auf die Klasse der multiplen dynamischen Repräsentationen eingegangen werden. Eine solche MDR liegt vor, wenn eine Repräsentation sowohl eine multiple als auch eine dynamische Repräsentation nach obigen Definitionen ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.17 zu sehen.



**Abbildung 1.17:** Beispiel für eine multiple dynamische Repräsentation. Der Punkt E lässt sich auf [AB] variieren und zeichnet so die Kurve des Flächeninhalts des Rechtecks CDEF auf der rechten Seite.

Diese Repräsentation ist zweigeteilt: Auf der linken Seite wird eine geometrische Konstruktion gezeigt, in der rechten wird in einem kartesischen Koordinatensystem eine Kurve mit Hilfe der Spur eines Punktes gezeichnet. Es handelt sich dabei also um eine dynamische Repräsentation nach der Definition aus dem vorigen Abschnitt. Zudem handelt es sich um eine multiple Repräsentation, da sich die beiden Teilrepräsentationen links und rechts zwar auf das gleiche Objekt beziehen (nämlich auf das Rechteck CDEF), aber unterschiedlichen Repräsentationensystemen angehören.

Charakteristisch für multiple dynamische Repräsentationen ist die Abhängigkeit der Variation der jeweiligen Teilrepräsentationen voneinander, das heißt die Variation eines mathematischen Objekts, auf das sich Elemente beider Teilrepräsentationen beziehen, wirkt sich stets von einer Teilrepräsentation auf alle anderen aus, so wie in obigem Beispiel die Variation des Punktes E die Bewegung des Punktes auf der rechten Seite bedingt, welcher den Flächeninhalt von CDEF beschreibt. Für diese dynamische Verbindung finden sich in der Literatur die Bezeichnungen „*hot-link*“ (Kaput, 1992, S. 530) oder „*dyna-linking*“ (Ainsworth, 1999, S. 133), die hier als MDR bezeichnete Klasse wird von Ladel unter Hinweis auf Harrop (1999, S. 4) „*MELR*“ (*multiple equivalent linked representations*) genannt (Ladel, 2009, S. 86).

### Mögliche Vorteile von MDR

Multiple dynamische Repräsentationen verbinden die Eigenschaften von multiplen und dynamischen Repräsentationen. Was in den beiden vorherigen Abschnitten in Bezug auf die Vorteile von multiplen oder dynamischen Repräsentationen gesagt wurde, lässt sich auf MDR übertragen, insbesondere was die Rollen der Multiplizität nach Ainsworth (1999) und die der Dynamik nach Schnotz (2002b) betrifft.

Multiple dynamische Repräsentationen sind jedoch mehr als die „Summe ihrer Teile“. Wie oben bereits beschrieben, bietet der Wechsel zwischen Repräsentationen die Möglichkeit, neue Informationen zu erhalten oder auf diese mit Hilfe von anderen kognitiven Prozessen leichter Zugriff zu erlangen. Dazu müssen Lernende jedoch überhaupt erst in der Lage sein, zwischen Repräsentationen zu wechseln oder eine Verbindung zwischen diesen zu sehen. Der entscheidende Vorteil der dynamischen Verbindung bei den MDR ist die automatische Übersetzung zwischen den Repräsentationen, welche nicht durch den Schüler im Kopf vorgenommen werden muss, sondern vom Programm automatisch durchgeführt wird. Dies könnte die kognitive Last bei den Lernenden verringern, wodurch sie die Kapazitäten gewinnen könnten, um die Vorteile der Multiplizität der Repräsentation ausnutzen zu können (vgl. Ainsworth, 1999, S. 133). In Bezug auf die Übersetzung kann man auch hier von einer vereinfachenden Funktion der Dynamik sprechen.

Auch die aktivierende Funktion findet sich speziell bei der Verbindung von Repräsentationen wieder. So könnte es vorkommen, dass Lernende eine Teilrepräsentation variieren, ohne sich der Verbindung zu einer zweiten Teilrepräsentation bewusst zu sein. Durch die gleichzeitige, analoge Variation der zweiten Teilrepräsentation, bedingt durch die Variation der ersten, wird ihre Aufmerksamkeit überhaupt erst auf die zweite gelenkt, die verbindenden Eigenschaften (im Sinne der Anforderungen bei MER, s. S. 37) sind unmittelbar sichtbar, da sie sich gleichzeitig verändern. Dies

ermöglicht zusätzliche kognitive Prozesse im Sinne der Rollen multipler Repräsentationen.

Besonderes Potential erhalten multiple dynamische Repräsentation durch den Umstand, dass dynamische Repräsentationen Lernende mit der Fähigkeit versehen, an mathematischen Objekten *Handlungen* (gemäß ihres Repräsentationensystems) vorzunehmen. Durch die den multiplen dynamischen Repräsentationen eigene dynamische Verbindung wirken sich diese Handlungen unmittelbar auf alle weiteren Teilrepräsentationen der MDR aus, es werden also nicht nur die analogen Entsprechungen der abgebildeten Eigenschaften von einer Teilrepräsentation zur anderen übertragen, sondern auch die Auswirkungen der Handlungen; in gewisser Hinsicht wird also auch die Handlung in die zweite Repräsentation übersetzt (vgl. Kaput, 1991, S. 64). Möglicherweise wird beim Schüler dadurch nicht nur die Verbindung zwischen den jeweiligen Teilrepräsentationen gestärkt, sondern auch deren Verbindung zum dargestellten mathematischen Objekt, weil deutlicher wird, dass die Variation nicht (nur) die Repräsentation verändert, sondern das Objekt, das hinter den Repräsentationen steht (vgl. Duval, 2006, S. 115). Die Gleichsetzung eines mathematischen Objektes mit dessen Repräsentationen könnte so vielleicht abgeschwächt werden.

#### **Schwierigkeiten beim Einsatz von MDR**

Wie oben dargestellt, kombinieren multiple dynamische Repräsentationen die Vorteile von multiplen und dynamischen Repräsentationen und halten darüber hinaus in der vereinfachten Verbindung der Teilrepräsentationen weiteres Potential für Lernende bereit. Leider gilt dies jedoch auch für die bereits beschriebenen Nachteile der jeweiligen Repräsentationen. Sowohl multiple als auch dynamische Repräsentationen können die kognitive Last für Lernende erhöhen: erstere durch mehr Repräsentationen, die gleichzeitig in Betracht gezogen werden müssen, zweitere durch die Notwendigkeit, nicht mehr sichtbare Informationen weiter präsent zu halten. Die Kombination dieser beiden Schwierigkeiten kann dazu führen, die kognitive Last für Lernende noch weiter zu erhöhen, ungeachtet des oben genannten Ansatzes, sie durch die dynamische Verbindung der Teilrepräsentationen verringern zu können. Ebenso wie die multiplen statischen Repräsentationen bleiben die multiplen dynamischen daher ein Gegenstand weiterer Forschung, insbesondere wegen des Problems der kognitiven Last für Lernende (vgl. de Jong, 2010, S. 126; Ainsworth, 2006, S. 195f; Horz & Schnotz, 2010, S. 249).

Damit ist die in Abbildung 1.9 auf Seite 32 zusammengefasste Taxonomie der Repräsentationen mit ihren beiden Dimensionen Dynamik und Multiplizität vollständig beschrieben. Dies geschah in Vorbereitung auf die später beschriebene Untersuchung, in der einerseits die von Schülern angebotenen Repräsentationen mit Hilfe eines Antwortschemas (Abschnitt 3.1.2) daraufhin analysiert werden, auf welche Art von interner Repräsentation ihre Argumentationsangebote schließen lassen, andererseits auf welche Art die von ihnen produzierten externen Repräsentationen in ihren Argumenten verwendet werden. Dies führt uns zum zweiten großen Teil dieser Arbeit: der Argumentation und den Argumenten.





---

# Argumentation und Argumente

---

Das Beweisen ist möglicherweise die Tätigkeit, die für Mathematiker ihr Fachgebiet am stärksten charakterisiert: Die Mathematik ist eine „beweisende Disziplin“ (Heintz, 2000). Eng verwandt mit dem Beweis ist die Argumentation, deren Bedeutung für das Lernen der Mathematik in der Schule durch die Auswahl des mathematischen Argumentierens als eine der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die Kultusministerkonferenz (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, 2003) hervorgehoben wurde. Eine einheitliche Begriffsbestimmung, was unter einer Argumentation zu verstehen ist, hat sich in der Mathematikdidaktik bisher jedoch nicht durchgesetzt (vgl. Pedemonte, 2007, S. 26; Fetzer, 2011, S. 28).

In dieser Arbeit soll die in der 19. ICMI-Studie getroffene Bestimmung des Begriffes *Argumentation* verwendet werden:

„[...] we regard argumentation as any written or oral discourse conducted according to shared rules, and aiming at a mutually acceptable conclusion about a statement, the content or the truth of which is under debate. It thus includes proof as a special case.“

„[...] wir verstehen Argumentation als jeglichen schriftlichen oder mündlichen Diskurs, welcher nach gemeinsamen Regeln durchgeführt wird und auf einen gegenseitig akzeptablen Schluss bezüglich einer Aussage abzielt, deren Inhalt oder Wahrheit zur Debatte steht. Dies schließt Beweise daher als Spezialfall mit ein.“

Durand-Guerrier et al. (2012, S. 349, Übersetzung durch den Autor)

Eine solche Argumentation ist aus einzelnen Bausteinen, den *Argumenten* zusammengesetzt (vgl. Douek, 2009, S. 143). Die genaue Struktur von Argumenten wird in Abschnitt 2.2 beschrieben.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst ein Licht auf die Bedeutung des Beweisens in der Mathematik und für den Mathematikunterricht geworfen und aufgezeigt, in welchem Verhältnis der Begriff des Argumentierens in Bezug zum klassisch-deduktiven Beweis steht. Anschließend wird mit dem Argumentationsmodell nach Toulmin ein in der Mathematikdidaktik anerkanntes Werkzeug der Argumentationsanalyse beschrieben, um zuletzt die Rolle von Repräsentationen für das Argumentieren zu beleuchten.

## 2.1 Argumentieren und Beweisen

### 2.1.1 Beweisen

Im Handbuch der Mathematikdidaktik bezeichnen Jahnke und Ufer einen mathematischen Beweis als „die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln“ (Jahnke & Ufer, 2015). Diese Begriffsbestimmung bezieht sich auf die „klassischen“ Beweise, wie sie in der Mathematik als Fachwissenschaft vorherrschen und den „Kern ihrer Identität“ bilden (Heintz, 2000, S. 210). Beweisen wird die Eigenschaft zugeschrieben, als *das* ultimative Mittel zur mathematischen Wissensgenerierung und -sicherung die Mathematik in den Sonderstatus zu erheben, als einzige Wissenschaft absolut sichere Wahrheiten gewinnen zu können (Heintz, 2000, S. 18). Der Prozess des Beweisens dient dabei dazu, die eventuell bestehende Unsicherheit einer Vermutung ebenso wie Elemente der Anschauung zu eliminieren, um anschließend einen allgemein gültigen, formalen mathematischen Satz zu erhalten (Jahnke & Ufer, 2015; Pickert, 1957, S. 49).

So prägend Beweise in der Außenwirkung für die Fachwissenschaft Mathematik sind, besitzen im alltäglichen Arbeiten eines Mathematikers andere, weit weniger strenge Formen des Arbeitens ebenfalls große Bedeutung, insbesondere beim Finden einer Vermutung und (Selbst-)Versicherung ihrer Plausibilität (Heintz, 2000, S. 144ff). Darüber hinaus wird die Akzeptanz einer Behauptung weniger mit Hilfe eines strengen Beweises gesichert, als vielmehr durch einen sozialen Prozess unter Mathematikern (Hanna, 1983, S. 70; Heintz, 2000, S. 177ff). Ein formaler Beweis stellt in diesem Prozess ein Mittel zu Kommunikation dar und besitzt als solches zwar großen Einfluss und Bedeutung, ist aber nicht allein entscheidend, ob ein Satz als wahr und bewiesen akzeptiert wird oder nicht. Bei den Funktionen des Beweisens stellt die Verifikation daher auch nur eine von fünf Aufgaben dar, die einem Beweis zukommen (vgl. G. Wittmann, 2009, S. 37; Hanna, 2000, S. 8; Meyer & Prediger, 2009, S. 3):

1. *Verifizieren*, dass eine Behauptung wahr ist.
2. *Erklären*, warum eine Behauptung wahr ist.

3. *Kommunizieren*, um mathematisches Wissen mit anderen zu teilen.
4. *Entdecken* neuer Erkenntnisse.
5. *Herstellen von Zusammenhängen* und Einordnung einer Aussage in die mathematische Theorie.

Offenbar spielen soziale Aspekte des Beweisens eine große Rolle: sie sind neben dem Kommunizieren auch in den Funktionen des Erklärens (wenn es ein Erklären „für Andere“ ist) und des Systematisierens (wenn sich eine Aussage in das Gefüge der mathematischen Erkenntnisse einer Gruppe von Mathematikern eingliedert) zu erkennen. Unter diesen sozialen Gesichtspunkten ist es verständlich, dass ein Beweis, auch wenn er den Beweiskriterien der wissenschaftlichen Gemeinschaft genügt und damit als korrekt akzeptiert wird, nicht von jedem und für alle Zeiten als solcher angesehen werden muss. Zum Beispiel wären Sätze, die Ausnahmen ihrer Gültigkeit zulassen, heute inakzeptabel, im 18. und 19. Jahrhundert wurden diese jedoch formuliert und akzeptiert (Jahnke, 2008, S. 366; vgl. Heintz, 2000, S. 222).

Auch ist der Grad der Explizität eines Beweises, also wie weit jede Argumentation auf die Axiome zurückgeführt wird, stark abhängig von seinem Adressaten (E. C. Wittmann & Müller, 1988, S. 240), was vom Standpunkt der Kommunikation gesehen nur ökonomisch ist: Bestimmte Teile der Argumentation müssen ohne Beweis als wahr akzeptiert werden, auch wenn nicht explizit auf die entsprechenden Axiome oder zuvor bewiesenen Sätze verwiesen wird, um den Beweis nicht in absurde Längen zu ziehen, ihn letztlich unverständlich und damit zur Kommunikation unbrauchbar zu machen (Hanna, 1983, S. 86).

Was bedeutet dies für das Beweisen im Mathematikunterricht? An Schüler können und sollen nicht die gleichen formalen Anforderungen gestellt werden wie an praktizierende Mathematiker, gleichzeitig soll der Mathematikunterricht jedoch „authentisch“ sein, das heißt (auch) ein Bild vermitteln, was Mathematik als Wissenschaft wirklich ist (Vollrath & Roth, 2012, S. 25). Dabei „besteht ein weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen“ (Jahnke & Ufer, 2015).

Gerade wenn man die kommunikativen Aspekte des Beweisens bedenkt, muss der Grad der Formalisierung eines solchen Begründens von Aussagen jedoch notwendigerweise an den Leistungsstand der Schüler angepasst werden (vgl. Steinweg, 2001, S. 56). Gleiches gilt für die Explizität, also die Menge der als wahr anzusehenden Aussagen, auf der eine Argumentation fußen kann, welche im Unterschied zu Axiomen aber weder minimal sein noch sich auf nicht zu beweisende Aussagen beschränken muss. Fischer und Malle (1985) sprechen in diesem Zusammenhang von einer „Argumentationsbasis“, welche sich von Gruppe zu Gruppe unterscheidet:

„Eine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden, soll zusammen mit den Schlussweisen, die als zulässig anerkannt werden, als Argumentationsbasis bezeichnet werden. Eine Begründung auf Grund ei-

ner vorgegebenen Argumentationsbasis soll als ein Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis bezeichnet werden.“

Fischer und Malle (1985, S. 180, Unterstreichung im Original)

Eine viel diskutierte Frage ist dabei, welche Rolle der Anschauung zukommt (vgl. Weigand, 2013a, S. 31). Ob Darstellungen selbst bereits Beweiskraft besitzen oder sich nur zur Heuristik und damit zum Hinleiten auf einen formalen Beweis eignen, ist umstritten (einen Überblick geben Hanna & Sidoli, 2007). Eine Art Zwischenform bilden die „inhaltlich-anschaulichen“ (E. C. Wittmann & Müller, 1988) oder „präformalen“ (Blum & Kirsch, 1991) Beweise, welche zwar ebenfalls aus einer Kette von logischen Schlüssen bestehen, diese müssen jedoch nicht unbedingt formal aufgeschrieben werden und lassen insbesondere bei den Voraussetzungen auch intuitive, offensichtliche („*intuitively evident*, [...] *psychologically obvious*“, Blum & Kirsch, 1991, S. 187) Elemente zu, welche sich häufig der Anschauung bedienen (ein Beispiel aus dem Analysisunterricht ist in Blum & Kirsch, 1989, ab S. 203 zu finden).

### 2.1.2 Argumentieren

Um sich einer Klärung des Verhältnisses von Beweis und Argumentieren anzunähern, lohnt es sich, den Prozess des Beweisens näher zu betrachten und ihn in Phasen zu gliedern, die unterschiedliche Aktivitäten des Beweisenden beinhalten. In der Literatur zum Beweisen im Mathematikunterricht wird für gewöhnlich dezidiert zwischen der *Beweisfindung* als Prozess und dem *Beweis* als Endprodukt unterschieden (vgl. G. Wittmann, 2009; Reiss & Hammer, 2013, S. 39f; Pedemonte, 2007, S. 53; Hanna, 2000). In Anlehnung an Douek (2009) gliedern Durand-Guerrier et al. (2012, S. 355) diese zwei Phasen weiter in drei „Arbeitsmodi“ beim Beweisen:

- Heuristische Exploration,
- Argumentative Ordnung der Aussagen,
- Formulieren des deduktiven Beweises.

Betrachtet man die Adressaten der Argumentation in diesen drei Arbeitsmodi, so fällt auf, dass die ersten beiden Modi noch nicht unter kommunikativen Gesichtspunkten anzusehen sind, da sie nicht im Hinblick auf andere stattfinden. Der Beweisende macht die Entdeckungen und führt die absichernden Argumentationen zunächst nur für sich selbst, um anschließend, im dritten Modus, einen für andere les- und nachvollziehbaren mathematisch-argumentativen Text produzieren zu können.

In diesem Prozess der Beweisfindung unterscheidet Pedemonte (2007, S. 28) zwei unterschiedliche Arten der Argumentation: einerseits kann Argumentation zu neuen Vermutungen führen (bezeichnet als *constructive argumentation*, konstruktive Argumentation). In diesem Fall findet die Argumentation also zeitlich *vor* dem Formulieren einer Aussage statt. Andererseits wird Argumentation auch dazu genutzt, eine vorhandene Vermutung abzusichern und plausibel zu machen (bezeichnet als

*structuring argumentation*, strukturierende Argumentation), in Vorbereitung auf die Ordnung der Aussagen und der Formulierung des Beweises (zum zweiten Aspekt vgl. Meyer, 2007, S. 28f).

Geht man vom klassischen Beweis als angestrebtes Endprodukt aus, hat das Argumentieren damit eine Art vorbereitende Rolle inne, indem es Vermutungen erzeugt oder deren Plausibilität unterstützt, an deren Ende aber ein mathematischer Beweis steht (diese Ansicht vertreten z.B. Hanna (2000) oder Pedemonte (2007)). Legt man jedoch die oben formulierte Beschreibung des Argumentierens von Durand-Guerrier et al. (2012) zu Grunde, ist diese Unterordnung keineswegs zwingend. So betonen andere Autoren die Notwendigkeit einer Unterscheidung zwischen strengen, mathematischen Beweisen und dem weniger formalen Begründen und Argumentieren, wie es im Mathematikunterricht stattfindet (z.B. G. Wittmann (2009), E. C. Wittmann und Müller (1988) oder Meyer und Prediger (2009)). Sie verstehen eine Argumentation nicht als Teil des Beweisprozesses, sondern als Alternative zum Endprodukt Beweis. Jahnke und Ufer (2015) bemerken hierzu:

„Letztlich handelt es sich hierbei um ein Problem der Bewertung, für das nicht zwingend ein Konsens benötigt wird. Dahinter steht aber auch ein logisches Problem. Viele Forscher bezeichnen mit dem Begriff ‚Argumentieren‘ eine Tätigkeit, die ausdrücklich nicht ‚mathematisches Beweisen‘ ist. Dann liegen die Begriffe ‚Argumentieren‘ und ‚Beweisen‘ logisch auf derselben Ebene. Andere Autoren, die meist die Kontinuität zwischen außermathematischem und mathematischem Argumentieren im Auge haben, sehen ‚mathematisches Beweisen‘ eher als einen Spezialfall des allgemeineren Begriffs ‚Argumentieren‘. Dann liegt der Begriff ‚Argumentieren‘ auf einer logisch höheren Hierarchie-Ebene als der Begriff ‚mathematisches Beweisen‘.“

Jahnke und Ufer (2015)

Im Jahr 2003 formulierte die Kultusministerkonferenz die „Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss“ für das Fach Mathematik und bestimmte „Mathematisch Argumentieren“ zu einer von sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, 2003, S. 7) und gab damit eine offizielle Leitlinie zur Rolle des Argumentierens (zumindest in Deutschland) vor. Die 2012 beschlossenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife“ führen dies auch für die Oberstufe des Gymnasiums fort:

„Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumen-

tierens hinweisen, sind beispielsweise ‚Begründen Sie!‘, ‚Widerlegen Sie!‘, ‚Gibt es?‘ oder ‚Gilt das immer?‘.“

Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2012, S. 15)

Das Beweisen ist hier – ebenso wie bei der für diese Arbeit maßgeblichen Begriffsbestimmung von Durand-Guerrier et al. (2012) – also „nur noch“ ein Spezialfall des Argumentierens.

Die formalen Anforderungen an ein Argument werden, in Übereinstimmung mit der Begriffsbestimmung zur Argumentation oben, in dieser Arbeit bewusst niedrig angesetzt. Bei der Analyse der Schülerargumentationen erfordert dies in fast jedem Fall eine Interpretation der vorgebrachten Argumente, die nur selten der formalen Struktur und Sprache genügen, welche für die Fachsprache der Mathematik typisch ist. Hierfür steht jedoch mit dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Argumentationsmodell Toulmins ein probates Werkzeug bereit. Im Gegensatz zum formalen Beweisen lässt das Argumentieren und Begründen, so wie es hier verstanden werden soll, auch nicht-formale Argumente zu, die sich auf Zeichnungen oder andere non-verbale Ausdrucksweisen stützen (vgl. G. Wittmann, 2009, S. 35; Fetzer, 2011, S. 42ff). Dabei können in ihrer Allgemeinheit und Überzeugungskraft äußerst unterschiedliche Arten von Argumenten beobachtet werden, die sich häufig der Anschauung bedienen (Meyer & Prediger, 2009, S. 2).

Zum Teil wird es, insbesondere im Hinblick auf das Beweisen, als problematisch angesehen, wenn beim Argumentieren die Gültigkeit einer Aussage lediglich durch eine empirische Überprüfung von Einzelfällen oder einer Argumentation an einem „generischen Beispiel“ (Meyer & Prediger, 2009, S. 2) verifiziert wird. In der hier verwendeten weiteren Bedeutung des Begriffs „Argumentieren“ nach Durand-Guerrier et al. (2012) sind jedoch auch solche, in ihrer Aussagekraft eingeschränkten Argumente ein normaler Bestandteil einer Argumentation, so wie es auch non-verbale oder unvollständige Argumente sein können. Eine Bewertung der Argumente soll explizit nicht erfolgen. Die Komponente des „Verifizierens“ einer Aussage tritt damit hinter die kommunikativen, erklärenden Aspekte zurück, was im Allgemeinen eher der Unterrichtsrealität entspricht (vgl. Fetzer, 2011, S. 45; Krummheuer, 2003, S. 254; Almeida, 2001, S. 59).

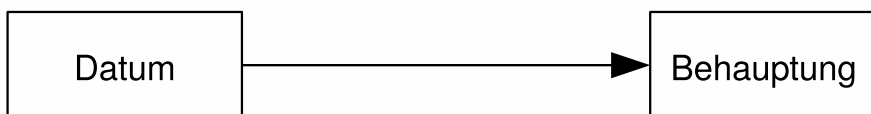
## 2.2 Toulmins Argumentationsmodell

Das von Stephen Edelston Toulmin 1958 erstmals veröffentlichte Argumentationsmodell (Toulmin, 2003) hat sich in der Mathematikdidaktik in zahlreichen Studien als praktikables Werkzeug zur Analyse von Argumenten bewährt (vgl. Meyer, 2007; Schwarzkopf, 2000; Krummheuer, 2003; Bezold, 2009; Fetzer, 2011, und zahlreiche weitere). Für die Mathematikdidaktik ist die als „Toulmin-Schema“ (auch bezeichnet als „Toulmin-Layout“ oder „Toulmin-Modell“) bekannte Beschreibung der Struktur von Argumenten besonders interessant. Demnach besitzen Argumente eine weitgehend einheitliche Struktur und setzen sich aus verschiedenen Elementen zu-

sammen, welchen im Argument jeweils unterschiedliche Funktionen oder Rollen zukommen. In der nachträglichen Analyse beobachteter Argumentationsprozesse werden die Aussagen der Argumentierenden diesen Rollen zugeordnet, die im Prozess der Argumentation vorgebrachten Argumente werden also gemäß Toulmins Argumentationsmodell rekonstruiert. Die Analyse von Argumentationen mittels Toulmin-Schema wird daher als „funktionale Argumentationsanalyse“ bezeichnet (Kopperschmidt, 1989, S. 123). Die Zuordnung von Schüleraussagen zu Rollen im Sinne des Argumentationsmodells nach Toulmin ist dabei stets eine interpretative Tätigkeit und somit nicht eindeutig bestimmt, was durch die häufig nur gering ausgeprägten Erklärungen der Schülerinnen und Schüler erschwert wird (vgl. Jahnke & Ufer, 2015; Fetzer, 2011, S. 40).

An dieser Stelle ist es wichtig zu betonen, dass Toulmins Modell keinesfalls als normativ zu verstehen ist, das heißt, es war nicht Toulmins Ziel, zu beschreiben, welche Form Argumente oder gar logische Schlüsse besitzen müssen: er wollte lediglich beschreiben, dass nicht jedes aussagekräftige Argument formal deduktiv aufgeschrieben werden könne. Von den Anwendungen seines Modells in anderen Disziplinen erfuhr er erst viel später, wie er im Vorwort zur aktualisierten Auflage schreibt (Toulmin, 2003, S. vii).

Der Ausgangspunkt eines Argumentes ist nach Toulmin die Behauptung (B, engl. „claim“). Sie beinhaltet eine Aussage, von der der Argumentierende sein Gegenüber überzeugen möchte<sup>9</sup>. Eine Behauptung alleine vorzubringen, wird in einem rationalen Diskurs jedoch kein Gegenüber von dessen Richtigkeit überzeugen. Um die Behauptung zu unterstützen, könnte der Argumentierende nun diejenige Information anführen, auf deren Grundlage er die Behauptung aufgestellt hat. Sie wird als „Datum“ (D) bezeichnet (engl. „data“ Toulmin, 2003, S. 90). Diese beiden grundlegenden Elemente können bereits einfache Argumente beschreiben: „Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + 1$  hat keine Nullstellen (B), denn ihr Graph verläuft oberhalb der  $x$ -Achse (D).“ Ein solches Argument ist in Abbildung 2.1 dargestellt.



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung eines einfachen Arguments, bestehend aus Behauptung und Datum

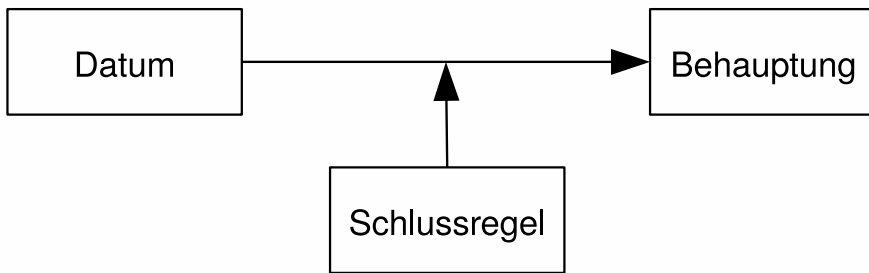
Damit ein Argument überzeugen kann, ist es notwendig, dass der Adressat das Datum für korrekt und somit auch die Behauptung für plausibel befindet. Wird das Datum seinerseits in Frage gestellt, kann es erforderlich werden, das Datum – nun selbst eine Behauptung – durch ein weiteres Datum zu unterstützen: Es entsteht

<sup>9</sup> In der mathematikdidaktischen Literatur wird diese zum Teil auch als „Konklusion“ bezeichnet (z.B. Meyer (2007) oder Fetzer (2011)). Um nicht der Täuschung zu erliegen, dass es bei einem Argument um einen logischen, deduktiven Schluss handelt, wurde in dieser Arbeit die Übersetzung „Behauptung“ gewählt.



ein mehrgliedriges Argument (Krummheuer, 2003, S. 248): „Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + 1$  hat keine Nullstellen (B), denn ihr Graph verläuft oberhalb der  $x$ -Achse (D1), weil der Scheitel bei  $(0|1)$  liegt und die Parabel nach oben geöffnet ist (D2).“

Es könnte jedoch auch der Fall eintreten, dass zwar nicht das Datum selbst angezweifelt wird, der Behauptung aber dennoch keinen Glauben geschenkt wird, weil die Verbindung zwischen dem Datum und der Behauptung nicht nachvollzogen werden kann. Nicht die Behauptung bedarf in diesem Fall also einer Unterstützung in Form eines weiteren Datums, sondern der Schritt vom Datum zur Behauptung muss gerechtfertigt werden (Toulmin, 2003, S. 91). Diese verbindenden Elemente werden als „Schlussregel“ (SR) bezeichnet (engl. „*warrant*“, im Deutschen auch „Garant“ (z.B. Bezold, 2009) oder einfach „Regel“ (z.B. Meyer, 2007)). Im Beispiel: „Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + 1$  hat keine Nullstellen (B), denn ihr Graph verläuft oberhalb der  $x$ -Achse (D) und Schnittstellen des Graphen mit der  $x$ -Achse entsprechen Nullstellen der zugehörigen Funktion (SR).“

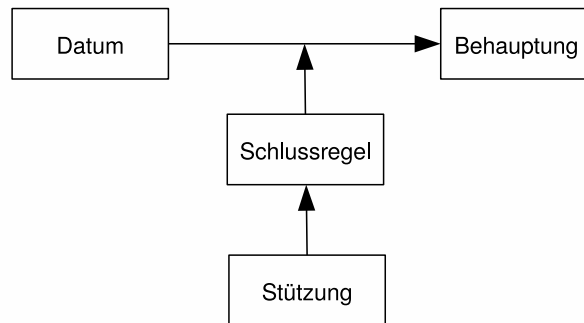


**Abbildung 2.2:** Schematische Darstellung eines Arguments, bestehend aus Behauptung, Datum und Schlussregel

Auch die Schlussregel in Toulmins Modell darf nicht vor dem Hintergrund der Logik wie ein deduktiver oder induktiver Schluss betrachtet werden. Ihre Aufgabe ist es nicht, die Richtigkeit einer Aussage zu garantieren, sondern den Übergang vom Datum zur Behauptung zu rechtfertigen und so die Behauptung plausibler zu machen.

Schließlich kann nicht nur die Behauptung oder die Verbindung von Datum und Behauptung angezweifelt werden. Es besteht auch die Möglichkeit, die generelle Gültigkeit der Schlussregel selbst zu bezweifeln, wodurch die Verbindung von Datum und Behauptung und damit das gesamte Argument angezweifelt wird. Es kann daher nötig sein, die Gültigkeit der Schlussregel abzusichern, und zwar nicht nur für diesen speziellen Fall, sondern für alle möglichen Fälle. Diese Art der Absicherung wird als „Stützung“ (engl. „*backing*“) bezeichnet. Im Beispiel könnte eine Stützung die folgende Form haben: „An einer Schnittstelle eines Funktionsgraphen mit der  $x$ -Achse gilt  $f(x) = 0$ , also hat  $f$  an dieser Stelle eine Nullstelle.“

Damit sind alle für die Analyse von mathematischen Argumentationen benötigten Elemente vorhanden (s. Abbildung 2.3 und das Beispiel in Abbildung 2.4). Nicht



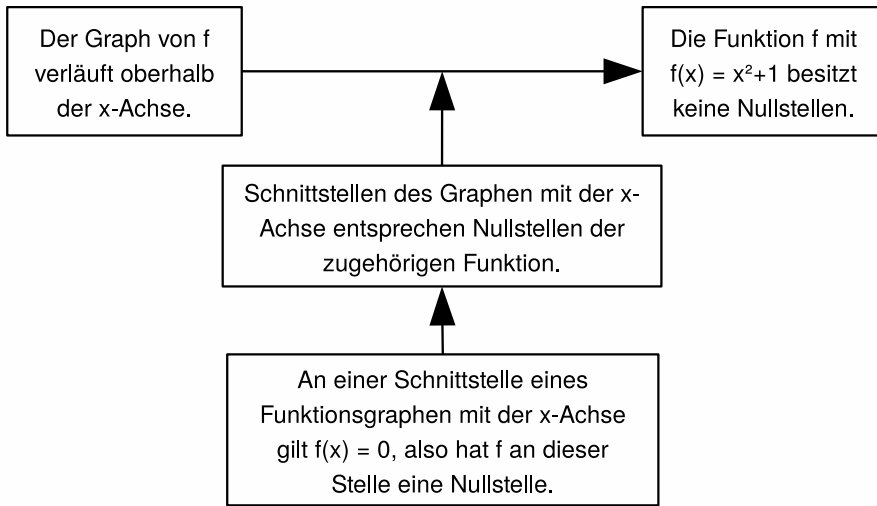
**Abbildung 2.3:** Grundstruktur von Argumenten nach Toulmin (2003, S. 93)

alle Elemente aus Toulmins Schema müssen jedoch notwendigerweise in jedem Argument enthalten sein. Völlig selbstverständliche Aussagen, die keiner weiteren Begründung bedürfen, könnten auch ohne Schlussregel oder Stützung vorgebracht und vom Gegenüber akzeptiert werden. Auch können Teile implizit bleiben oder durch einen (auch nonverbalen) Verweis, beispielsweise auf Anschauungsmaterial, ersetzt werden. Dies trifft insbesondere auf Schülerargumente zu, wie auch in der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchung deutlich wurde (vgl. Fetzer, 2011, S. 37-41; Krummheuer, 2003, S. 254; Jahnke & Ufer, 2015).

Toulmin beschrieb noch zwei weitere mögliche Elemente einer Argumentation: einen Ausdruck der Sicherheit über eine Aussage (engl. „*qualifier*“) sowie eine Beschreibung von Ausnahmen, in der die Behauptung doch nicht gelte (engl. „*rebuttal*“) (Toulmin, 2003, S. 93). Diese werden in den oben genannten mathematikdidaktischen Studien jedoch nicht in Betracht gezogen und sollen auch hier außer acht gelassen werden, da sie in der Untersuchung nicht vorkommen und in der Analyse somit keine Rolle spielen (eine kompakte Beschreibung des kompletten Schemas und ein kritischer Kommentar zu dessen Reduktion findet sich in Jahnke, 2008, S. 370).

Anders als die Elemente des Schemas selbst, welche kontextunabhängig für alle Arten von Argumenten anwendbar sind, ist die Antwort auf die Frage, welche Art von Äußerung als Schlussregel oder Stützung akzeptiert wird, was entscheidend davon abhängt, wem gegenüber das Argument vorgebracht wird. Während in obigem Beispiel auch Schüler die Korrektheit des Arguments anerkennen würden, könnten mathematisch weniger Vorgebildete eine zusätzliche oder andersartige Rechtfertigung verlangen. In diesem Fall müsste die als Stützung hervorgebrachte Aussage in einem neuen Argument als Behauptung ihrerseits gerechtfertigt werden – ein *mehrschichtiges Argument* (Meyer, 2007, S. 90) entsteht. Die Bewertung von Argumenten auf Richtigkeit ist also in hohem Maße abhängig von der jeweiligen Gruppe, in der argumentiert wird (vgl. das Zitat zu Argumentationsbasen von Fischer und Malle auf S. 52).

Es ist bei der Interpretation einer Argumentanalyse nach obigem Schema hilfreich, sich die Reihenfolge der vorgebrachten Äußerungen bzw. Elemente des Schemas zu verdeutlichen, um nicht – auch bedingt durch die suggestive depiktionale



**Abbildung 2.4:** Beispielhafte Analyse eines mathematischen Argumentes

Darstellung des Schemas wie in Abbildung 2.4 – das Schema als Beschreibung eines deduktiven Schlusses zu interpretieren, bei dem aus dem Datum notwendigerweise die Behauptung folgt (vgl. Toulmin, 2003, S. 93)<sup>10</sup>. In natürliche Sprache (rück-)übersetzt könnte das Argument auf die Frage, ob  $f$  mit  $f(x) = x^2 + 1$  Nullstellen besitzt, wie folgt aussehen: „Die Funktion  $f$  hat keine Nullstellen (B), denn ihr Graph verläuft oberhalb der  $x$ -Achse (D) und Schnittstellen des Graphen mit der  $x$ -Achse entsprechen Nullstellen der zugehörigen Funktion (SR), denn an einer Schnittstelle eines Funktionsgraphen mit der  $x$ -Achse hat die Funktion den Wert 0 (S).“ Hier wird also erst die Behauptung formuliert, dann das Datum, welches anzeigt, wie man auf die Behauptung kommt, dann die Schlussregel, welche den Schluss rechtfertigen soll und zuletzt deren Stützung. Das Toulmin-Schema wird zur Rückübersetzung also nicht notwendigerweise von „links nach rechts“ gelesen.

## 2.3 Repräsentationen beim Argumentieren

Bedenkt man die herausragende Rolle, die Repräsentationen beim Arbeiten in der Mathematik spielen, so überrascht es nicht, dass sich dies auch beim Argumentieren widerspiegelt. Weil Repräsentationen hierbei verschiedene Aufgaben übernehmen können, lohnt es sich, zunächst Argumentationen nach zwei Phasen zu unterscheiden, welche Pedemonte (2007, S. 28) als *konstruktives* (engl. „constructive“) und *strukturierendes* (engl. „structurant“) Argumentieren bezeichnet. Diese unterscheiden sich nicht nur im Zeitpunkt, zu dem die Argumentation stattfindet, sondern auch in der Funktion, welche Repräsentationen zukommt.

<sup>10</sup> Deduktive Schlüsse können damit zwar auch beschrieben werden, stellen aber einen Spezialfall eines Arguments dar.

### 2.3.1 Repräsentationen beim konstruktiven Argumentieren

Konstruktives Argumentieren ist dadurch gekennzeichnet, dass es zur Konstruktion einer Vermutung beiträgt und daher *vor* deren Formulierung stattfindet (Pedemonte, 2007, S. 28). Es werden auf dem Weg zu einer Vermutung verschiedene Blickwinkel des Problems betrachtet, Beobachtungen gemacht und Schlüsse gezogen. Diese Phase wird zum Teil auch als „Exploration“ bezeichnet und von einer zum Beweis hinführenden Argumentationsphase mehr oder weniger deutlich abgetrennt (vgl. z.B. Reiss & Hammer, 2013). Allerdings werden auch hier bereits Argumente für die Validierung von Entdeckungen formuliert. Es findet also eine Argumentation statt, auch wenn diese nicht notwendigerweise bereits geäußert wird. Im Zusammenhang mit Entdeckungen ist die Schlussform der *Abduktion* von großer Bedeutung. Peirce beschreibt die Abduktion mit folgendem Dreischritt:

„The surprising fact,  $C$ , ist observed,  
 But if  $A$  were true,  $C$  would be a matter of course,  
 Hence, there is reason to suspect that  $A$  is true.“  
 „Eine überraschende Tatsache,  $C$ , wird beobachtet,  
 Aber wenn  $A$  wahr wäre, wäre  $C$  eine Selbstverständlichkeit,  
 Also gibt es Grund zu vermuten, dass  $A$  wahr ist.“

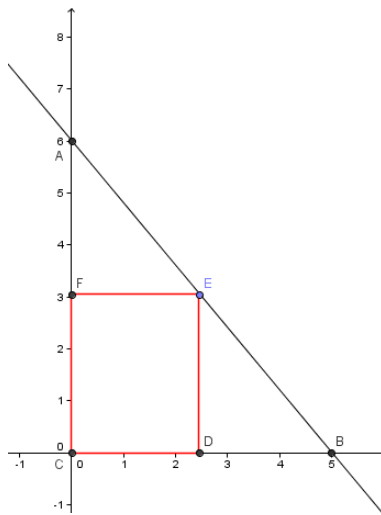
Peirce (1960, CP 5.189, S. 117, Übersetzung durch den Autor)

Diese Formulierung lässt sich an einem Beispiel verdeutlichen:

- In dem Applet, welches in Abbildung 2.5 abgebildet ist, hat das Rechteck  $CDEF$  den Flächeninhalt 0, wenn  $E$  auf  $A$  oder  $B$  liegt. Irgendwo dazwischen hat es offenbar einen maximalen Flächeninhalt.
- Wenn die Änderung des Flächeninhalts mit einer quadratischen Funktion beschrieben würde, wäre dies unmittelbar einsichtig.
- Also gibt es Grund zu vermuten, dass der Flächeninhalt mit einer quadratischen Funktion beschrieben werden kann.

Damit ist eine Vermutung formuliert. Der Schluss auf die quadratische Funktion ist in diesem Fall natürlich alles andere als zwingend und muss weiter abgesichert werden. Dieser Schritt wird als strukturierende Argumentation bezeichnet und weiter unten beschrieben.

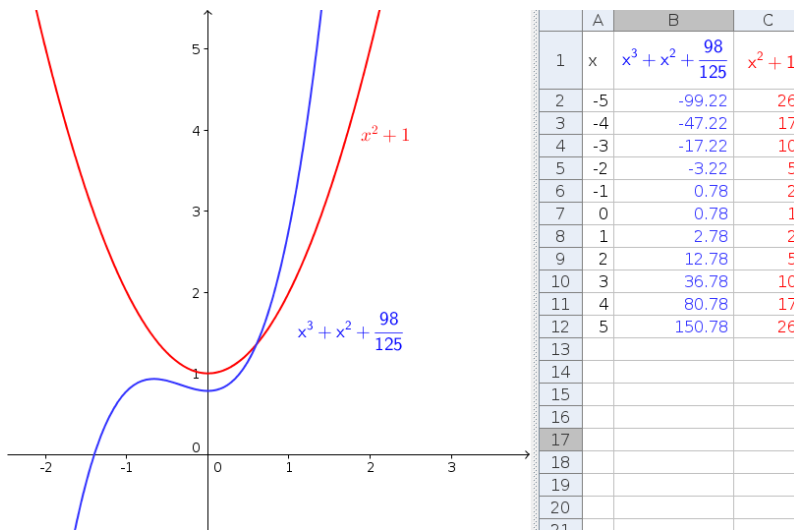
In Bezug auf das Argumentieren spielt die Abduktion damit eine entscheidende Rolle, nämlich bei der *Formulierung einer Behauptung* (vgl. Pedemonte, 2007, S. 29), im Gegensatz zu den „klassischen“ Schlussweisen der Deduktion und der Induktion, welche dazu da sind, eine Behauptung zu begründen (ausführlich betrachtet in Meyer, 2007, S. 31ff). Dabei beeinflussen Repräsentationen von Anfang an die Abduktion: Um in der Mathematik eine überraschende Tatsache überhaupt beobachten zu können, muss diese in Form einer externen Repräsentation abgebildet sein. Um anschließend aus dieser Beobachtung eine Hypothese generieren



**Abbildung 2.5:** GeoGebra-Applet zur Aufgabe A2 (s. S. 72). In dem Applet ließ sich der Punkt  $E$  auf der Strecke  $[AB]$  bewegen, wodurch sich das einbeschriebene Rechteck variieren ließ.

zu können, ist die *Art* der Darstellung von Bedeutung. Sie hat nicht nur insofern entscheidenden Einfluss auf die Argumentation, als dass ihr notwendige Informationen entnommen werden können, sondern auch, dass in bestimmten Repräsentationen einige Dinge „offensichtlich“ sind, die in anderen eine argumentative Stützung bräuchten. Pedemonte (2007, S. 28) bezeichnet diese „offensichtlichen“ Tatsachen als „facts“, Fakten, welche durch Beobachtung gewonnen und anschließend in Argumentationen verwendet werden können, ohne selbst argumentativ belegt zu werden. In eine ähnliche Richtung geht Brown (2008, S. 33), der Bildern die Fähigkeit zuschreibt, den „Vorrat an intuitiven Wahrheiten“ (engl. „pool of intuitive truths“) zu vergrößern. Beobachtungen liefern also das Fundament für Argumentationen, und Beobachtungen sind in der Mathematik stets Informationen, die Repräsentationen entnommen werden (vgl. Toulmin, 2003, S. 95). Multiple Repräsentationen besitzen hierfür einen besonderen Wert, da sie mehr Informationen bereitstellen als isolierte Repräsentationen oder diese auf verschiedene Arten entnommen werden können, was wiederum zu neuen Beobachtungen und neuen Vermutungen führen kann.

Dynamische Repräsentationen bieten beim Entdecken und konstruktiven Argumentieren sogar noch größere Vorteile. Nach Bruner stellt die Entdeckung einen „Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen“ dar (Bruner, 1981, S. 16). In der Mathematik entspricht diesem Neuordnen oder Transformieren das Operieren auf Repräsentationen und insbesondere die Variation mit Hilfe dynamischer Repräsentationen. Diese können durch Umformung nicht nur neue „Fakten“ zur Verwendung in Argumentationen bereitstellen, sondern verbinden, indem sie zahlreiche Beispiele darstellen und so Invarianten und Unterschiede der Beispiele deutlich machen, den Einzelfall mit der zugrundeliegenden Struktur. Mittels abduktiven Schlusses lassen sich so Vermutungen formulieren und diese anschließend, ebenfalls



**Abbildung 2.6:** Um die Existenz einer Lösung der Gleichung  $x^3 + x^2 + \frac{98}{125} = x^2 + 1$  zu begründen, genügt ein Verweis auf den Schnittpunkt der beiden Graphen.

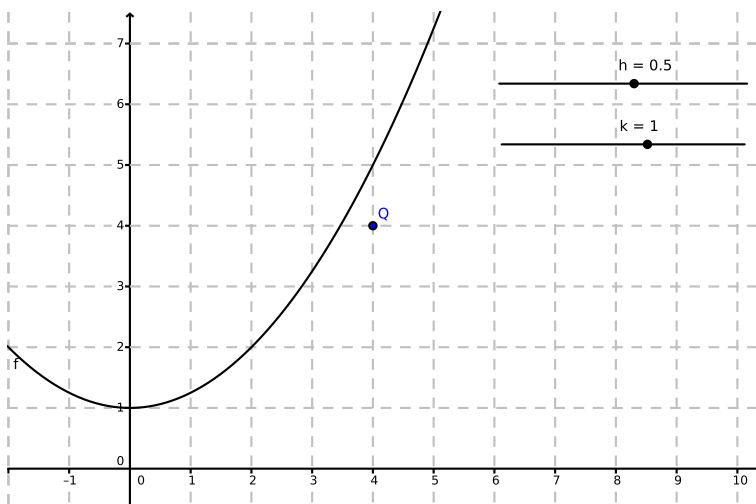
mit Hilfe der dynamischen Repräsentation, an weiteren Beispielen überprüfen (vgl. Hanna, 2000, S. 13).

### 2.3.2 Repräsentationen beim strukturierenden Argumentieren

Im Unterschied zur konstruktiven Argumentation ist die Funktion der strukturierenden Argumentation nicht, neue Vermutungen zu finden, sondern diese nachträglich zu begründen (vgl. Pedemonte, 2007, S. 28). Während der Argumentierende seine Vermutungen und Schlüsse zuvor nur für sich selbst vornimmt, tritt nun der kommunikative Aspekt des Begründens und Beweisens in den Vordergrund (vgl. de Villiers, 1990, S. 18). Ziel dieser Art der Argumentation ist es, die Vermutungen und deren Belege für ein wie auch immer geartetes Publikum nachzuvollziehen und überzeugend darzustellen.

Auch in diesem Schritt spielen Repräsentationen eine wichtige Rolle. Zwar sind in dieser Phase der Argumentation für den Argumentierenden keine neuen Beobachtungen mehr notwendig, jedoch bieten Repräsentationen die Möglichkeit, auf die ihnen dargestellten Informationen in der Argumentation Bezug zu nehmen und so die „Fakten“, also die direkt aus der Repräsentation zu entnehmenden und daher „offensichtlichen“ Informationen, die keiner Begründung bedürfen, als inhaltliche Elemente der Argumentation zu verwenden. So muss für die Begründung der Existenz einer Lösung der Gleichung  $x^3 + x^2 + \frac{98}{125} = x^2 + 1$  diese nicht umgeformt werden, wenn zeitgleich Abbildung 2.6 zur Verfügung steht. Ein Verweis auf die zugehörigen Graphen und deren Schnittpunkt sind in diesem Fall ausreichend. Für einen Argumentierenden, der seine Ideen darlegen will, bieten sich geeignete Repräsentationen daher als nützliches Werkzeug dar, um diese Gedanken zu transportieren.

Welche Repräsentationen wie und in welchem Maße in der Argumentation eingesetzt werden dürfen, hängt jedoch von den jeweiligen Adressaten der Argumentation ab. Neben den offensichtlichen Voraussetzungen, dass sie die Repräsentation kennen und ihr die relevanten Informationen entnehmen können, sind Normen für die Explizität und Formalität einer Begründung entscheidend. Während Begründungen mittels generischen Beispiels<sup>11</sup> oder allgemeinen Bildern<sup>12</sup> in der Schule akzeptiert und verbreitet sind (vgl. Meyer & Prediger, 2009, S. 3), müssen Begründungen auf Universitätsniveau wesentlich formaler formuliert werden, was sich auch auf die Verwendung von Repräsentationen bezieht. So gibt es in Bezug auf die Rolle, welche depiktionale Repräsentationen in Beweisen spielen dürfen, durchaus unterschiedliche Meinungen (vgl. Hanna & Sidoli, 2007, S. 73).



**Abbildung 2.7:** Eine dynamische Repräsentation, deren Dynamik auch in der strukturierenden Argumentation genutzt werden kann

Multiple oder dynamische Repräsentationen unterscheiden sich in Bezug auf ihre Rolle beim strukturierenden Argumentieren nicht wesentlich von anderen Repräsentationen, jedoch verfügen sie über einen größeren Informationsgehalt, welcher in der Argumentation verwendet werden kann. Durch die sich ergänzenden Informationen und Prozesse, welche multiple Repräsentationen ermöglichen, bieten sie einen differenzierteren Blick auf ein mathematisches Objekt, und halten somit – bei allen bereits diskutierten Schwierigkeiten und Voraussetzungen – ein besonders reiches Repertoire an „Fakten“ zur Argumentation bereit. Auch dynamische Repräsentationen enthalten mehr Informationen als statische. Wie oben beschrieben entfalten sie ihre Wirkung besonders beim Entdecken und Formulieren von Vermutungen. In

<sup>11</sup> Also Beispielen, deren Eigenschaften in Bezug auf die Begründung sich nicht von anderen unterscheiden, weshalb die Argumentation analog auch für andere Beispiele möglich wäre.

<sup>12</sup> Bilder, die Variablen enthalten und deren Informationsgehalt so über das tatsächlich Dargestellte hinaus geht.

Bezug auf die strukturierende Argumentation bieten sie dann Vorteile, wenn die Behauptung durch die Beschreibung des Entdeckungsprozesses gestützt wird, wie beispielsweise in der Aufgabe zu Abbildung 2.7.

Das hier gestellte Problem war die Frage, für welche Parameter  $h$  und  $k$  der Punkt  $Q$  auf der Parabel liegt. Mit Hilfe der Schieberegler ließen sich  $h$  und  $k$  variieren, wodurch die Öffnung der Parabel variiert bzw. die Parabel in  $y$ -Richtung verschoben werden konnte. Durch Ausprobieren lässt sich nun erkennen, dass es zu jedem  $h$  ein  $k$  gibt, so dass  $Q$  auf der Parabel liegt. Nun lässt sich weiter argumentieren, dass, da  $h$  und  $k$  beliebig  $\in \mathbb{R}$  gegeben sind, eine unendliche Anzahl von Lösungen existieren muss. Die Dynamik der gegebenen Repräsentation wird hier also in der strukturierenden Argumentation genutzt, indem der Entdeckungsprozess beschrieben wird. Auf diese Weise können dynamische Repräsentationen also auch nach der Formulierung der Behauptung dazu beitragen, diese argumentativ zu stärken.

In der nachfolgend beschriebenen Untersuchung wurden die Endprodukte des Argumentierens in Form von Schülerdokumenten untersucht und nicht das Finden und Formulieren von Vermutungen. Sie wird sich also auf das strukturierende Argumentieren beschränken und will dabei die Fragen beantworten, *ob* Schüler beim Argumentieren das Potential von multiplen und/oder dynamischen Repräsentationen nutzen und *wie* sich diese auf die einzelnen Argumente auswirken.





---

# Empirische Untersuchung

---

## 3.1 Zur Untersuchung

In diesem Kapitel soll, nach der theoretischen Betrachtung und Vorbereitung im vorherigen Kapitel, die durchgeführte Untersuchung beschrieben und deren Ergebnisse diskutiert werden. Die vorgestellte Untersuchung soll insbesondere Antworten auf zwei Fragen geben:

1. Wie stark beeinflussen die in der Aufgabenstellung verwendeten Repräsentationen schriftliche Schülerargumentationen in Bezug auf die ihnen zu Grunde liegenden Repräsentationsarten?
2. Wie nutzen Schüler multiple und/oder dynamische Repräsentationen in ihren Argumentationen?

Zunächst wird dazu die Durchführung der Untersuchung beschrieben, um anschließend auf die Vorgehensweise zu deren Auswertung einzugehen. Dabei wird auch diskutiert, wie Schwierigkeiten umgangen oder abgemildert werden können, die sich im Zusammenhang mit dem gewählten Untersuchungsdesign ergeben. Anschließend werden die Ergebnisse der Untersuchung vorgestellt und interpretiert.

### 3.1.1 Zur Untersuchungsdurchführung

Die Untersuchung wurde im Jahr 2011 in vier Klassen der 11. Jahrgangsstufe des Gymnasiums in der Nähe von Würzburg durchgeführt. Insgesamt nahmen 89 Schü-

lerinnen und Schüler an der Untersuchung teil. Die Auswahl der Klassen erfolgte nach keinem speziellen Verfahren, sondern richtete sich nach der Verfügbarkeit. Den Probanden wurde zur Bearbeitung der Aufgaben 45 Minuten Zeit gegeben. Um für die vier Aufgabenpaare (s. Abschnitt 3.1.3) genug Zeit zu haben, wurden für die Untersuchung zwei Gruppen mit 44 bzw. 45 Probanden gebildet, die unterschiedliche Aufgaben zur Bearbeitung erhielten. Diese werden im Folgenden mit Bogen A und Bogen B bezeichnet.

In allen vier Klassen fand die Untersuchung im schuleigenen Rechnerraum statt. Hier hatte jeder Proband einen eigenen Rechner zur Verfügung, mit Ausnahme einer Klasse, in der sich zwei Schülerpaare jeweils einen Rechner teilen mussten, die Aufgaben jedoch alleine anfertigten. Während der gesamten Dauer des Versuchs war neben dem Autor auch die jeweilige Mathematiklehrkraft anwesend, die jedoch nur technische, aber keine inhaltliche Unterstützung gab.

Die Aufgaben wurden über das Internet abgerufen und am Bildschirm angezeigt. Bei Aufgaben, die eine dynamische Repräsentation enthielten, wurde eine in die Webseite mit der Aufgabenstellung eingebettete GeoGebra-Anwendung gestartet, welche den Probanden erlaubte, Schieberegler oder einzelne Punkte zu variieren. Die Angebote solcher Variationen waren bewusst sehr einfach gehalten, um keine zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Programmbenutzung zu erzeugen und auch Schülern ohne Vorwissen die Möglichkeit zur Nutzung der dynamischen Repräsentationen zu ermöglichen. Der Freiheit der Variation war daher ein enger Rahmen gesetzt, insbesondere waren eigene Konstruktionen nicht möglich. Die Aufgaben konnten über eine Navigationsleiste am oberen Webseitenrand ohne vorgegebene Reihenfolge aufgerufen werden. Jedem Probanden wurde beim Aufrufen der Webseite eine eindeutige, zufällig generierte Teilnehmernummer zugewiesen, welche auf den Bearbeitungsbögen vermerkt werden sollte, um Bögen bei der Auswertung eindeutig einem Probanden zuordnen zu können. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte mit Stift und Papier. Hauptgrund für diese Vorgehensweise war es, keine Programmfertigkeiten voraussetzen zu müssen, wie es bei einer Bearbeitung z.B. in einer eigenen GeoGebra-Datei nötig gewesen wäre. Andererseits wurde von einer elektronischen Erfassung der Antworten abgesehen, um den Probanden alle Arten der Lösungsdarstellung zu ermöglichen, also insbesondere auch die Erstellung von Gleichungen (und deren Umformung), Skizzen und Wertetabellen.

### 3.1.2 Forschungsfragen und Vorgehen zur Auswertung

Um die beiden eingangs dieses Kapitels gestellten Fragen zu beantworten, wurden die Schülerdokumente nach den Regeln einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) ausgewertet. Für die Klärung der ersten Frage wurden den einzelnen Aufgabebearbeitungen Kategorien zugewiesen. Diese richteten sich nach der Art der *internen* Repräsentation, welche Grundlage für die jeweiligen schriftlichen argumentativen Aussagen der Schüler waren. Weil diese nicht direkt zugänglich sind, war zur Auswertung der Bearbeitungen also eine Interpretation notwendig, welche von den produzierten externen Repräsentationen auf die dahinter liegenden internen schloss.

Diese Vorgehensweise liegt darin begründet, dass die Probanden natürlich keine dynamischen Repräsentationen im Sinne der Definition in Abschnitt 1.3.3 produzieren können, da ihnen nur die statischen Werkzeuge Papier und Stift zur Verfügung standen. Außerdem werden Repräsentationen bei der Bearbeitung von mathematischen Fragen nicht explizit *genannt*, sondern zur Beantwortung *genutzt*. Bei der Auswertung mussten also verschiedene Repräsentationensysteme durch den Auswerter identifiziert werden, um beispielsweise die Verwendung multipler Repräsentationen zu erkennen. Die hierfür benötigte Interpretation war durch die vorliegende Theorie zur Unterscheidung von Repräsentationen aus Abschnitt 1.2.3 zwar grundsätzlich eindeutig, wurde in der Praxis aber durch sehr knappe Ausdrucksweisen oder fehlerhafte Verwendung von Repräsentationen durch die Probanden erschwert (eine eingehendere Diskussion dieser Schwierigkeiten findet sich in Abschnitt 3.5.1).

Die Kategorisierung der Argumentationen wurde analog zur Taxonomie von Repräsentationen aus Abschnitt 1.3 vorgenommen und mit deren Repräsentationen in Beziehung gesetzt. Es ergibt sich ein zweidimensionales Antwortschema, das in Abbildung 3.1 zu sehen ist:

	Isoliert statisch	Isoliert dynamisch	Multipl statisch	Multipl dynamisch	Merkmale der Argumente
ISR					
IDR					
MSR					
MDR					

Gegebene Repräsentation

**Abbildung 3.1:** Antwortschema zur Klassifikation der Schülerargumentationen

Auf der horizontalen Achse finden sich dabei die Arten der Repräsentationen, auf welche die Schüleraussagen schließen ließen, auf der vertikalen Achse die Repräsentationsart, welche in der Aufgabenstellung dargeboten wurde. Jede in der Untersuchung in einer Aufgabe vorgebrachte Argumentation lässt sich hier eindeutig einer Zelle zuordnen.

Hierfür ist es notwendig, in einem Auswertungsleitfaden eindeutig zu bestimmen, welche Kategorien gezählt und woran diese erkannt werden können (vgl. May-

ring, 2010, S. 105). In Tabelle 3.1 ist ein solcher Leitfaden ausformuliert, welcher deutlich machen soll, wann die Argumentationen in den Schülerdokumenten als isolierte, statische, dynamische oder multiple Repräsentation eingetragen wurden. Die Ankerbeispiele sind typische, aus den Schülerdokumenten entnommene Formulierungen, welche die Einteilung illustrieren sollen. Weitere Beispiele sind in der qualitativen Auswertung der Untersuchung ab Seite 90 zu finden.

Der Kürze und der besseren Lesbarkeit halber soll für die weitere Betrachtung der Untersuchung eine verkürzte Schreibweise eingeführt werden: Argumentationen, die auf eine isolierte/multiple bzw. statische/dynamische interne Repräsentation schließen lassen, sollen entsprechend als isolierte/multiple bzw. statische/dynamische Argumentationen bezeichnet werden. Zum Beispiel wird also eine Argumentation, die auf eine multiple dynamische Repräsentation schließen lässt und als solche in die Auswertung aufgenommen wurde, als „multiple dynamische Argumentation“ bezeichnet.

Bevor die beiden Leitfragen der Untersuchung beantwortet werden können, bedürfen sie der Operationalisierung. Die erste Leitfrage wird dazu in die beiden folgenden Forschungsfragen aufgeteilt. Diese sollen mit Hilfe quantitativer Methoden beantwortet werden.

**Forschungsfrage 1:** Sind die hinter schriftlichen Schülerargumentationen stehenden Arten von Repräsentationen unabhängig von den in der Aufgabenstellung präsentierten?

**Forschungsfrage 2:** Ist die Zahl der „Wechsler“, welche in ihrer Bearbeitung beim Übergang zwischen zwei Aufgaben eines Paares die verwendete Repräsentationsform wechseln, signifikant?

Auch die zweite Leitfrage wird in zwei Forschungsfragen umformuliert. Bei diesen geht es um die Art und Weise, *wie* multiple und/oder dynamische Repräsentationen beim Argumentieren genutzt werden.

**Forschungsfrage 3:** In welchen Elementen des Argumentationsmodells nach Toulmin werden die spezifischen Möglichkeiten von multiplen und/oder dynamischen Repräsentationen genutzt?

**Forschungsfrage 4:** Zu welchem Zweck werden multiple und/oder dynamische Repräsentationen in den Argumenten genutzt?

### 3.1.3 Zur Anordnung der Aufgaben

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, werden bei der Auswertung die den Schülerargumentationen zu Grunde liegenden Repräsentationen mit den in der Aufgabenstellung dargebotenen in Beziehung gesetzt. Eine Auswertung auf diese Weise wirft jedoch Probleme auf:

- Könnte statt der dargebotenen Repräsentation nicht vielmehr eine individuelle Präferenz des Probanden dafür sorgen, dass eine bestimmte Repräsentationsart gewählt wird?
- Könnte es nicht die Art der Aufgabe bzw. die Aufgabenstellung sein, die durch ihre mathematische Struktur eine bestimmte Repräsentationsart bedingt?

Kürzel	Kategorie	Merkmale	Ankerbeispiel	Quelle
M, S	Argument, welches auf eine multiple statische interne Repräsentation schließen lässt.	In der Argumentation wird einerseits mehr als ein Repräsentationensystem genutzt; andererseits sind keine Schlüsselwörter für das Schließen auf eine dynamische Repräsentation vorhanden.	„ja der Graph ist symmetrisch, punktsymmetrisch zum Ursprung ich habe das erstens am Graphen selber gesehen und mich dann an den Punkten der Wertetabelle orientiert und das dann bestätigt“	Teilnehmer 202008, Aufgabe A2
I, D	Argument, welches auf eine isolierte dynamische interne Repräsentation schließen lässt.	In der Argumentation werden Schlüsselwörter genannt, die auf eine dynamische interne Repräsentation schließen lassen, zum Beispiel: verschieben, verändern, variieren, vergrößern, anpassen, drehen, spiegeln, einstellen. Die Argumentation bleibt in einem Repräsentationensystem.	„Es gibt mehrere Werte, weil egal um wie viel man die Parabel nach unten oder oben verschiebt, man kann die Öffnung anpassen.“	Teilnehmer 176362, Aufgabe A3
M, D	Argument, welches auf eine multiple dynamische interne Repräsentation schließen lässt.	In der Argumentation werden sowohl Schlüsselwörter genannt, die auf eine dynamische interne Repräsentation schließen lassen, als auch verschiedene Repräsentationensysteme genutzt.	„Man kann die Öffnung und die Lage der Parabel beliebig verändern, so dass diese durch den gewünschten Punkt verläuft. Wenn man den Punkt in die Parabelformel einsetzt, erkennt man dies.“	Teilnehmer 641094, Aufgabe A3
I, S	Argument, welches auf eine isolierte statische interne Repräsentation schließen lässt.	In der Argumentation sind die Schlüsselwörter für eine dynamische, interne Repräsentation nicht zu finden und es wird nur ein Repräsentationensystem genutzt.	„Es gibt zwei Lösungen, weil in der Gleichung $x^2$ vorkommt.“	Teilnehmer 240898, Aufgabe B1

Tabelle 3.1: Leitfaden und Ankerbeispiele zur Auswertung

<b>Bogen A</b>			
Funktionenschar	A1 (ISR)	+ Dynamik →	A3 (IDR)
Flächeninhalt als Parabel	A2 (IDR)	+ Multiplizität →	A4 (MDR)
<b>Bogen B</b>			
Gleichungen	B1 (ISR)	+ Multiplizität →	B3 (MSR)
Symmetrie am Graphen	B2 (MSR)	+ Dynamik →	B4 (MDR)

**Tabelle 3.2:** Darstellung der analogen Aufgaben als Aufgabenpaare

Diesen Problemen wurde begegnet, indem die Aufgaben der Untersuchung jeweils paarweise einander als analoge Aufgaben zugeordnet waren, wie in Tabelle 3.2 zu sehen.

Während beispielsweise beim Übergang der „Funktionenschar“-Aufgaben von A1 zu A3 (die vollständige Aufgabe findet sich unten im Abschnitt 3.2) die Struktur der Aufgabe gleich blieb, änderte sich die in der Aufgabenstellung angebotene Repräsentation von einer isolierten statischen zu einer isolierten dynamischen Repräsentation. So kann betrachtet werden, ob die hinzugekommene Dynamik den Probanden dahingehend beeinflusst hat, dass er nun in seiner Argumentation ebenfalls dynamische Repräsentationen einfließen ließ oder nicht.

Die Verwendung von analogen Aufgaben kann die oben genannten Schwierigkeiten abmildern, jedoch nicht vollkommen beseitigen. Analoge Aufgaben sind zwar strukturgleich, aber eben nicht *gleich*, was auch bei sorgfältiger Formulierung der Aufgaben zur Folge haben kann, dass die leicht unterschiedlichen Aufgaben zu einer Beeinflussung des Ergebnisses führen können (für eine ausführliche Diskussion von analogen Aufgaben siehe Ruppert, 2014). Vollständig gleiche Aufgaben wären in diesem Sinne zwar wünschenswert, aber insofern natürlich nicht zielführend, als dass die Probanden keinen Grund gesehen hätten, die gleiche Aufgabe zweimal zu bearbeiten oder die gewählte Strategie in der zweiten Bearbeitung anzupassen. Außerdem könnte durch die Anordnung der Aufgaben ein Lerneffekt eintreten, so dass die Probanden die in der ersten Aufgabe eines Paares verwendeten Argumente (und die verwendeten Repräsentationen) auch in der zweiten benutzen, was das Ergebnis ebenfalls beeinflussen würde. Inwiefern diese Schwierigkeiten in der Untersuchung eine Rolle spielten und Einfluss auf das Ergebnis nahmen, wird in Abschnitt 3.4 diskutiert.

## 3.2 Die Aufgaben der Untersuchung

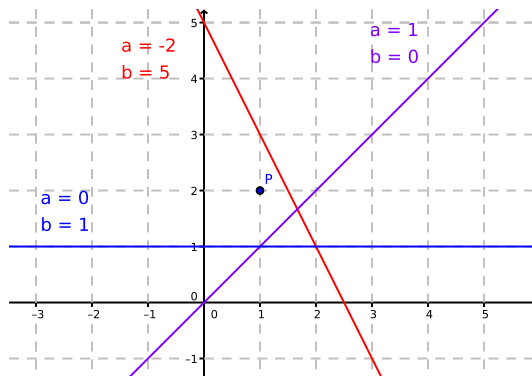
In diesem Abschnitt sollen die in der Untersuchung eingesetzten Aufgaben vorgestellt werden.

### 3.2.1 Aufgabenpaar „Funktionenschar“

In dieser Aufgabe waren die Graphen einer Geradenschar mit zwei Parametern gegeben. Im ersten Aufgabenteil wurde gefragt, ob Parameter existieren, so dass ein Repräsentant der Schar durch einen bestimmten Punkt verläuft. Im zweiten Aufgabenteil wurde die Frage erweitert und gefragt, ob es weitere Parameter gibt, für die dies der Fall ist.

#### Aufgabe A1: Isolierte statische Repräsentation

In der Abbildung rechts<sup>13</sup> ist eine Schar von Geraden zu sehen. Dabei legt der Parameter  $a$  die Steigung der Geraden fest. Der Parameter  $b$  gibt den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse an.  $a$  und  $b$  sind beliebige reelle Zahlen.



**Abbildung 3.2:** Abbildung zur Aufgabe A1. Da es sich um eine isolierte statische Repräsentation handeln sollte, wurde sie nur als Bild dargeboten, d.h. sie war nicht interaktiv variierbar.

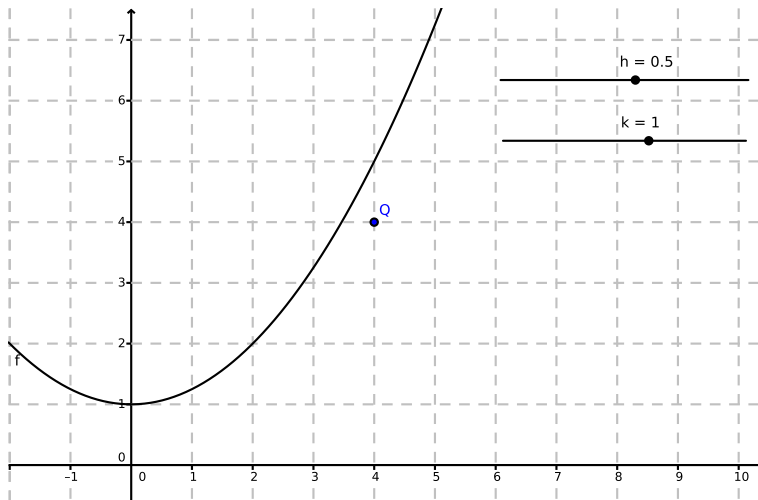
- Gibt es  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass  $P(1|2)$  auf einer Geraden liegt?
- Begründe deine Vermutung aus Teilaufgabe a). Wie hast du dies erkannt?
- Gibt es neben denen aus Aufgabenteil a) noch weitere Werte für  $a$  und  $b$ , so dass  $P(1|2)$  auf der Geraden liegt? Wenn ja, wie viele, wenn nein, warum nicht?
- Begründe deine Vermutung aus Teilaufgabe c). Wie hast du dies erkannt?

#### Aufgabe A3: Isolierte dynamische Repräsentation

In der Abbildung unten ist eine Parabel zu sehen. Der Parameter  $h$  variiert die Öffnung der Parabel. Der Parameter  $k$  verschiebt die Parabel nach oben oder unten.  $h$  und  $k$  können beliebige reelle Zahlen sein, nicht nur die, die mit dem Schieberegler einstellbar sind.

<sup>13</sup> Die Anordnung von Text und Abbildung hat sich gegenüber der Darstellung auf der Webseite geändert. In den Aufgabenstellungen wird stets der ursprüngliche Text von der Webseite verwendet.





**Abbildung 3.3:** GeoGebra-Applet zur Aufgabe A3. Mit Hilfe der Schieberegler ließen sich  $h$  und  $k$  variieren, wodurch die Öffnung der Parabel variiert bzw. die Parabel in  $y$ -Richtung verschoben werden konnte.

- Gibt es  $h, k \in \mathbb{R}$ , so dass  $Q(4|4)$  auf der Parabel liegt?
- Begründe deine Vermutung aus Teilaufgabe a). Wie hast du dies erkannt?
- Gibt es neben denen aus Aufgabenteil a) noch weitere Werte für  $h$  und  $k$ , so dass  $Q$  auf der Parabel liegt? Wenn ja, wie viele, wenn nein, warum nicht?
- Begründe deine Vermutung aus Teilaufgabe c). Beschreibe, wie du darauf gekommen bist.

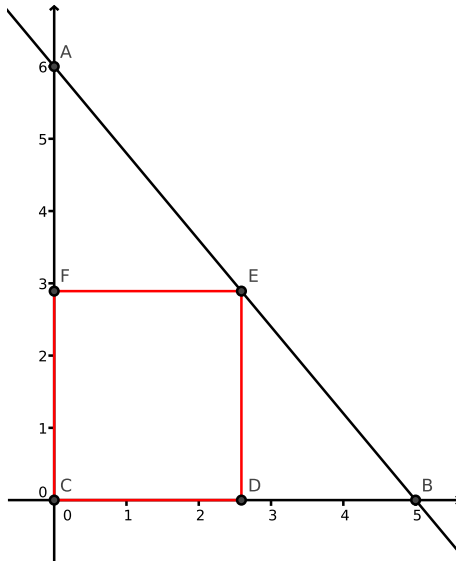
### 3.2.2 Aufgabenpaar „Fläche als Parabel“

In dieser Aufgabe wurde ein geometrisches Objekt (ein Rechteck bzw. ein Dreieck) in einen Graphen und die Koordinatenachsen einbeschrieben. Hierzu sollten Fragen beantwortet werden, die auf der Stetigkeit der Flächeninhaltsfunktion beruhen: an den Extrempunkten „links und rechts“ ist der Flächeninhalt des geometrischen Objekts Null, irgendwo in der Mitte ist er maximal. Dazwischen werden alle Werte angenommen, und zwar genau zweimal.

#### Aufgabe A2: Isolierte dynamische Repräsentation

In der Abbildung siehst du die Gerade  $g$ , welche die  $y$ -Achse im Punkt  $A(0|6)$  und die  $x$ -Achse im Punkt  $B(5|0)$  schneidet. Zwischen  $A$  und  $B$  bewegt sich der Punkt  $E$  auf der Geraden  $g$ . Wir betrachten das Rechteck  $CDEF$ . Verschiebe in der Zeichnung  $E$  entlang der Geraden und beantworte die folgenden Fragen:

- Wie viele Rechtecke  $CDEF$  gibt es in Abhängigkeit von  $E$ , die den Flächeninhalt 4 haben?



**Abbildung 3.4:** GeoGebra-Applet zur Aufgabe A2. In dem Applet ließ sich der Punkt  $E$  auf der Strecke  $[AB]$  bewegen, wodurch sich das einbeschriebene Rechteck variieren ließ.

- Begründe deine Aussage aus Teilaufgabe a). Wie hast du das erkannt?
- Gibt es ein oder mehrere Rechtecke  $CDEF$ , welche den Flächeninhalt  $\sqrt{5}$  haben?
- Begründe deine Aussage aus Teilaufgabe c). Wie bist du hier vorgegangen?
- Gibt es eine Zahl  $A$  zwischen 1 und 7, zu welcher es **kein** Rechteck  $CDEF$  mit Flächeninhalt  $A$  gibt?
- Wie hast du das erkannt?

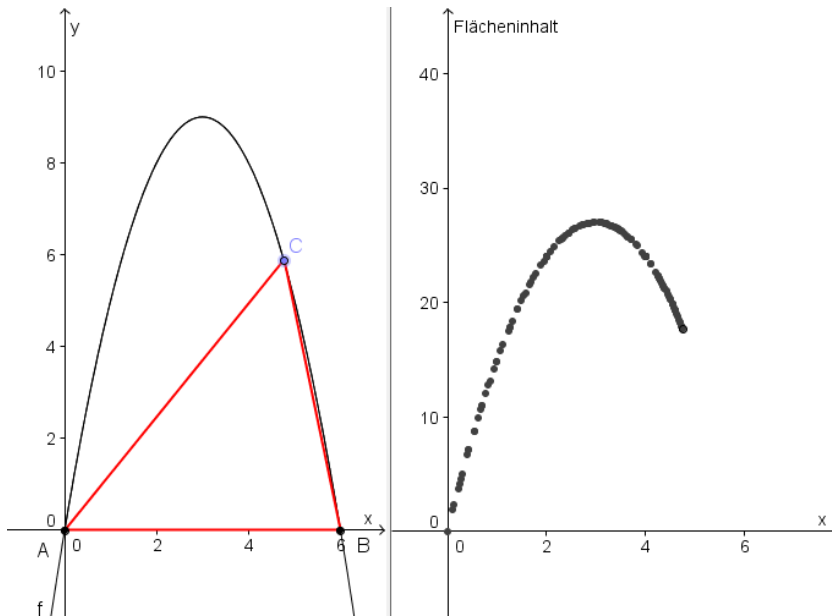
#### Aufgabe A4: Multiple dynamische Repräsentation

Wir betrachten die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^2 + 6x$ .

Der Punkt  $C$  liegt irgendwo auf dem Teil des Graphen von  $f$ , der oberhalb der x-Achse verläuft.  $C$  hat also die Koordinaten  $(x_C | f(x_C))$ . Mit  $A(0|0)$  und  $B(6|0)$  bildet  $C$  ein Dreieck. Dies ist in der linken Hälfte des Applets unten rot zu sehen. Der Punkt in der rechten Hälfte des Applets beschreibt den Flächeninhalt von  $\triangle ABC$ <sup>14</sup>. Wenn du die Lage des Punktes  $C$  variiert, kannst du auf der rechten Seite des Applets die Veränderung des Flächeninhalts beobachten.

Verschiebe  $C$  auf der Parabel und beantworte die folgenden Fragen:

<sup>14</sup>In der Abbildung unten wurde  $C$  bereits bewegt, um so mit dem im Applet aktivierten Spurmodus die Kurve erkennen zu können.



**Abbildung 3.5:** GeoGebra-Applet zu Aufgabe A4. In der linken Hälfte ließ sich der Punkt  $C$  auf der Parabel variieren, wodurch auf der rechten Seite der Punkt, welcher den Flächeninhalt des Dreiecks beschreibt, mit Hilfe des Spurmodus eine Parabel beschreibt.

- Wie viele Dreiecke  $ABC$  gibt es in Abhängigkeit von  $C$ , die den Flächeninhalt 10 haben?
- Begründe deine Aussage aus Teilaufgabe a). Wie hast du das erkannt?
- Gibt es ein oder mehrere Dreiecke  $ABC$ , welche den Flächeninhalt  $\sqrt{47}$  haben?
- Begründe deine Aussage aus Teilaufgabe c). Wie bist du hier vorgegangen?
- Gibt es eine Zahl  $A$  zwischen 1 und 25, zu welcher es **kein** Dreieck  $ABC$  mit Flächeninhalt  $A$  gibt?
- Wie hast du das erkannt?

### 3.2.3 Aufgabenpaar „Gleichungen“

Zu einer gegebenen Gleichung soll zunächst die Anzahl der Lösungen angegeben werden, dann die Lösung selbst. Anschließend wird ein Summand (B1) bzw. ein Faktor (B3) ersetzt, und es wird erneut nach der Zahl der Lösungen gefragt. Während insbesondere der letzte Teil auch durch erneutes Lösen der Gleichung möglich

ist, führt das Interpretieren von linker und rechter Seite als Funktionen, deren Graphenschnittpunkte Lösungen der Gleichung darstellen, ohne Rechenaufwand zum Ziel.

### Aufgabe B1: Isolierte statische Repräsentation

Gegeben ist die Gleichung

$$-\frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{19}{2} = 2x + 5.$$

- Wie viele Lösungen hat die Gleichung?
- Woran hast du das erkannt?
- Gib die Lösungen der Gleichung an.
- Beschreibe, wie du in c) vorgegangen bist.
- Wie viele Lösungen hat die Gleichung, wenn man  $\frac{19}{2}$  durch 24 ersetzt, also:

$$-\frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x + 24 = 2x + 5$$

- Erkläre, wie du in e) auf die Anzahl der Lösungen gekommen bist.

### Aufgabe B3: Multiple statische Repräsentation

Gegeben ist die Gleichung

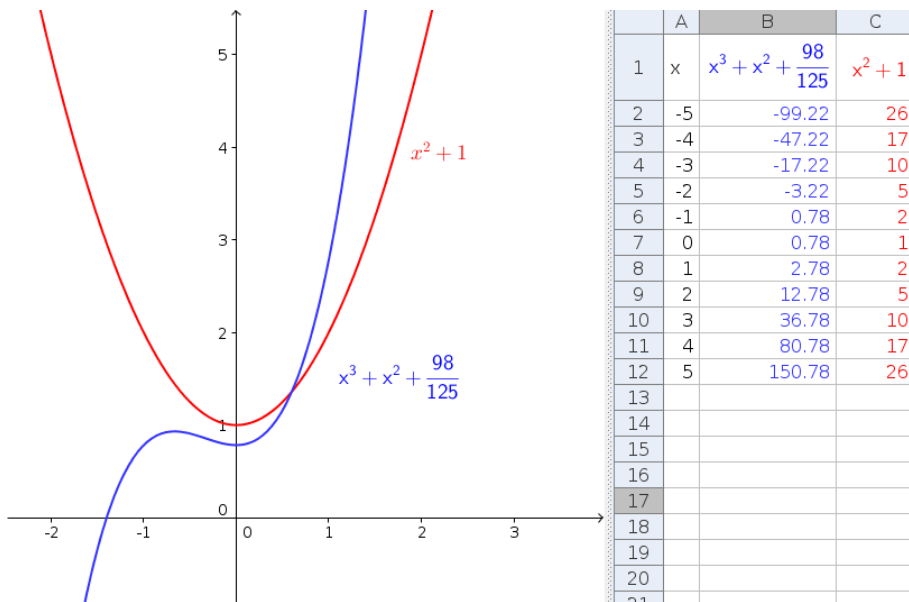
$$x^3 + x^2 + \frac{98}{125} = x^2 + 1$$

Unterhalb siehst du die zugehörigen Graphen und eine Wertetabelle. Die linke Seite der Gleichung ist blau dargestellt, die rechte Seite rot.

- Wie viele Lösungen hat die Gleichung?
- Woran hast du das erkannt?
- Gib die Lösungen der Gleichung an.
- Beschreibe, wie du in c) vorgegangen bist.
- Wie viele Lösungen hat die Gleichung, wenn die rechte Seite durch  $\frac{1}{3}x^2 + 1$  ersetzt wird, also

$$x^3 + x^2 + \frac{98}{125} = \frac{1}{3}x^2 + 1$$

- Erkläre, wie du in e) auf die Anzahl der Lösungen gekommen bist.



**Abbildung 3.6:** Abbildung zu Aufgabe B3. Da es sich um eine multiple statische Repräsentation handeln sollte, wurde sie nur als Bild dargeboten, d.h. sie war nicht interaktiv variierbar.

### 3.2.4 Aufgabenpaar „Symmetrie am Graphen“

In diesem Aufgabenpaar werden Funktionsgraphen bzw. -graphenscharen betrachtet, die durch Parameter im Koordinatensystem verschoben werden können. Die Frage zielt auf die Symmetrie der Graphen, welche für spezielle Parameterwerte leicht erkennbar ist. Da die Graphen nur verschoben bzw. gestreckt (B4) sind, bleibt die Symmetrie erhalten, wenngleich sie auch zu einem anderen Symmetriezentrum bzw. einer anderen Achse vorliegt.

#### Aufgabe B2: Multiple statische Repräsentation

In der Abbildung 1 (anklicken zum Vergrößern) siehst du einen Ausschnitt des Graphen  $G$  der Funktion  $p(x), p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und dessen Wertetabelle. In den weiteren Abbildungen betrachten wir Graphen der Funktionen  $p(x + h) + k$  für verschiedene Werte von  $h$  und  $k$ .  $h$  und  $k$  können jeden beliebigen Wert annehmen, nicht nur die hier abgebildeten. Klicke die kleinen Abbildungen unten an, um eine vergrößerte Darstellung zu erhalten.

- Betrachte zuerst die Abbildung 3. Handelt es sich dabei um einen symmetrischen Graphen? Wie hast du das erkannt?
- Betrachte nun auch die anderen Graphen. Sind sie symmetrisch? Unabhängig von  $h$  und  $k$ ?

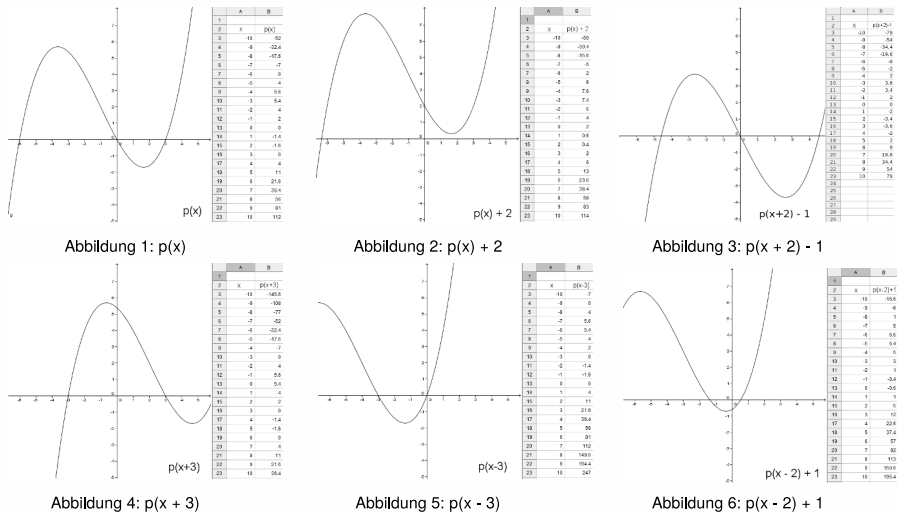


Abbildung 3.7: Polynomgraphen mit Wertetabellen aus Aufgabe B2, welche zur Vergrößerung angeklickt werden konnten.

- c) Begründe dein Aussage aus Teilaufgabe b).
- d) Beschreibe, wie du in c) vorgegangen bist.
- e) Gibt es Werte von  $h$  und  $k$ , so dass der zugehörige Graph nur zwei, einen oder keinen Punkt mit der  $x$ -Achse gemeinsam hat?
- f) Wieso gibt es diese Werte aus Teilaufgabe c), bzw. wieso nicht?

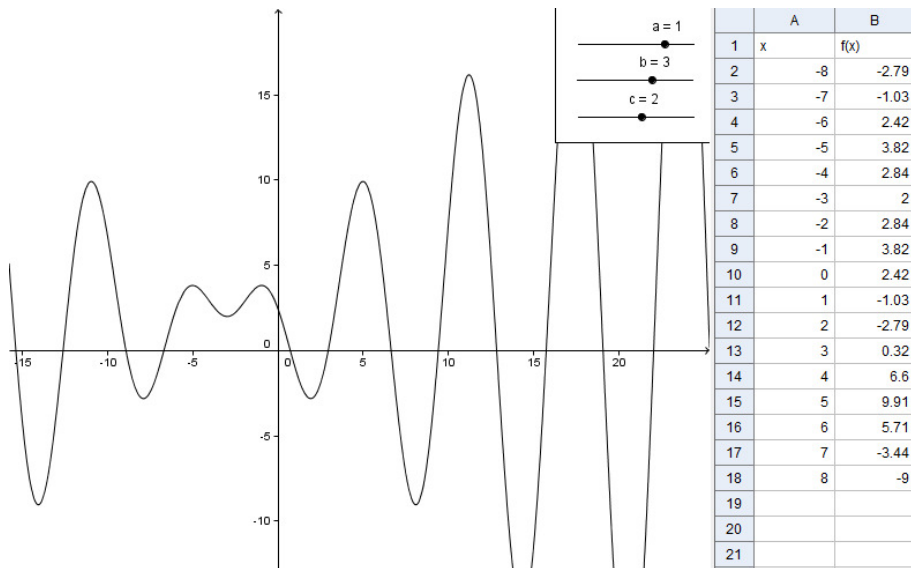
**Aufgabe B4: Multiple dynamische Repräsentation**

Im Applet unten siehst du einen Ausschnitt des Graphen  $G$  der Funktion  $f, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = a \cdot (x + b) \cdot \sin(x + b) + c.$$

Du kannst den Graphen mit Hilfe der Schieberegler vertikal oder horizontal verschieben sowie strecken oder stauchen, d.h. die Regler variieren die Parameter  $a, b$  und  $c$  aus der Funktionsgleichung.

- a) Handelt es sich um achsen- oder punktsymmetrische Graphen? Unabhängig von  $a, b$  und  $c$ ?
- b) Beschreibe, wie du erkannt hast, ob die Graphen symmetrisch sind oder nicht.
- c) Gibt es Werte für  $a, b$  und  $c$ , so dass  $f$  genau einen bzw. gar keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse hat?
- d) Wieso gibt es diese Werte aus Teilaufgabe c), bzw. wieso nicht?



**Abbildung 3.8:** GeoGebra-Applet zu Aufgabe B4. Mit Hilfe der Schieberegler  $a$ ,  $b$  und  $c$  ließ sich die Amplitude des Graphen variieren sowie ihn in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung verschieben. Die Wertetabelle rechts aktualisierte sich ebenfalls entsprechend.

### 3.3 Ergebnisse der quantitativen Untersuchung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchung vorgestellt. Dazu soll zunächst versucht werden, die Forschungsfragen 1 und 2 aus Abschnitt 3.1.2 mit quantitativen Methoden zu beantworten. Diese werden je Aufgabenpaar betrachtet, eine Interpretation der Ergebnisse wird im Abschnitt 3.4 vorgenommen. Anschließend folgt eine qualitative Analyse der Schülerdokumente, um die Forschungsfragen 3 und 4 zu beantworten. Für die Analyse der Ergebnisse der einzelnen Aufgabenpaare werden pro Paar jeweils zwei Nullhypothesen betrachtet:

1. Die in der zweiten Aufgabe eines Aufgabenpaares beobachteten Häufigkeiten von Argumentationsarten unterscheiden sich nicht von denen der ersten Aufgabe.
2. Die Verteilung der Häufigkeiten des Wechselns der Argumentationsarten durch die Probanden bei einem Repräsentationsartenübergang zwischen den beiden Aufgaben eines Paares analoger Aufgaben ist nicht signifikant.

Die erste Hypothese wird dabei mit Hilfe eines eindimensionalen  $\chi^2$ -Test durchgeführt (Bortz & Schuster, 2010, S. 142). Dabei werden die erwarteten Häufigkeiten der Argumentationsarten in der zweiten Aufgabe des Aufgabenpaares durch die beobachteten Häufigkeiten in der ersten Aufgabe berechnet, indem der jeweilige Anteil der Argumentationsart der ersten Aufgabe mit der Gesamtzahl der Argumentationen in der zweiten Aufgabe multipliziert wird.

Die zweite Hypothese würde für gewöhnlich mit Hilfe eines McNemar- $\chi^2$ -Tests („test for significance of change“, Bortz & Schuster, 2010, S. 147) durchgeführt. Da die erwarteten Häufigkeiten zum Teil jedoch kleiner als 5 sind, wurde dem McNemar-Test ein Binomialtest vorgezogen, welcher auch bei kleineren erwarteten Häufigkeiten anwendbar ist (gemäß Bortz & Schuster, 2010, S. 147).

Pro Aufgabenpaar und pro Hypothese wird unten eine Tabelle angegeben, welche die jeweiligen Häufigkeiten darstellen. Jede Tabelle ist wiederum zweigeteilt: zum einen wird der Zusammenhang von Argumentations- und Repräsentationsart „entlang“ des Repräsentationswechsels betrachtet, zum anderen „quer“ zu diesem. „Entlang“ bedeutet dabei, dass sich die betrachteten Argumentationsarten in dem gleichen Merkmal (isoliert/multipel bzw. statisch/dynamisch) unterscheiden wie die Repräsentationsarten, betrachtet wird also zum Beispiel der Einfluss einer multiplen Repräsentation auf die Multiplizität der Argumentation. „Quer“ bedeutet, dass die betrachteten Merkmale jeweils verschieden sind, wenn beispielsweise der Einfluss einer dynamischen Repräsentation auf die Multiplizität der Argumentation betrachtet wird.

### 3.3.1 Allgemeine Ergebnisse

Bevor in den folgenden Abschnitten auf die Einzelergebnisse der Aufgabenpaare eingegangen wird, sollen zunächst die gesamten Daten betrachtet werden. Wie im Antwortschema auf S. 67 oben bereits beschrieben, wurde dafür jede Bearbeitungen pro Aufgabe einer Kategorie zugeordnet. Dies war auf Grund der Vollständigkeit der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Taxonomie stets eindeutig möglich.

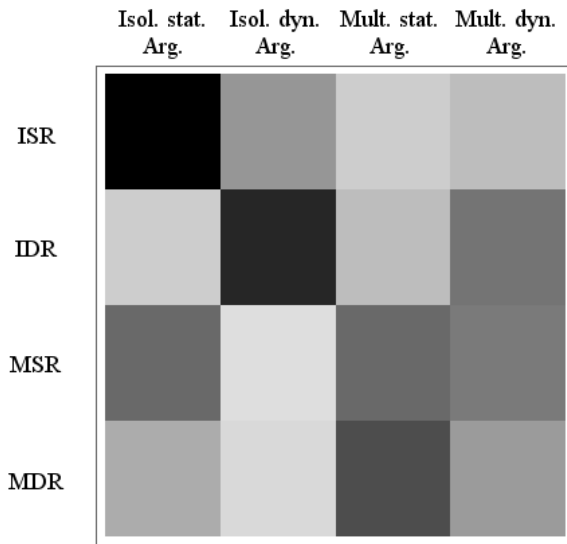
	Isol. stat. Arg.	Isol. dyn. Arg.	Mult. stat. Arg.	Mult. dyn. Arg.
ISR	46	19	9	12
IDR	9	39	12	25
MSR	27	6	27	24
MDR	15	7	32	18

**Tabelle 3.3:** Bögen A und B, alle Aufgaben: Häufigkeiten der Argumentationsarten in Bezug zu gegebener Repräsentation

Die beobachteten Häufigkeiten des Auftretens der jeweiligen Argumentationsart in Bezug zu der in der betreffenden Aufgabe vorgegebenen Repräsentationsart ist in Tabelle 3.3 dargestellt. Ohne weitere Vorüberlegung könnte man bei der Verteilung der Häufigkeiten zwei Vermutungen äußern:

- Die Probanden verwenden stets diejenige Repräsentationsart, die ihnen angeboten wird. Dann lägen die beobachteten Werte alle auf der Hauptdiagonalen der Tabelle.





**Abbildung 3.9:** Grafische Darstellung der Tabelle 3.3: Häufigkeiten der Argumentationsarten in Bezug zu gegebener Repräsentation. Dunklere Zellen entsprechen höheren Werten in der entsprechenden Tabellenzelle.

- Die Probanden verwenden alle Repräsentationsarten gleich wahrscheinlich. In diesem Fall verteilten sich die beobachteten Häufigkeiten gleichmäßig auf alle Zellen der Tabelle.

Letztere Vermutung lässt sich mit Tabelle 3.3 leicht entkräften. Wie in der Tabelle zu erkennen ist, konzentrieren sich besonders bei den isolierten Repräsentationen im linken oberen Viertel die Werte auf der Hauptdiagonalen und verteilen sich schwächer auf die übrigen Felder. Bei den multiplen Repräsentationen im rechten unteren Viertel ist dieses Bild nicht zu erkennen, hier verteilen sich die Häufigkeiten auf alle vier Felder. Die Daten der Tabelle 3.3 sind zusätzlich in Abbildung 3.9 grafisch dargestellt. Hier sind die Zellen des Antwortschemas dunkler eingefärbt, wenn die entsprechende Zelle der Tabelle einen hohen Wert (d.h. viele Antworten in dieser Kategorie) enthält und werden heller, wenn die Zelle schwächer besetzt ist.

### 3.3.2 Aufgabenpaar „Funktionenschar“

Das Aufgabenpaar „Funktionenschar“ besteht aus der Aufgabe A1, in welcher eine isolierte statische Repräsentation dargeboten wurde (s. S. 71), und der Aufgabe A3, welche eine isolierte dynamische Repräsentation enthielt (s. S. 71). Von besonderem Interesse bei der Auswertung war hier also die Auswirkung der hinzugekommenen Dynamik.

Dazu wurden zunächst in Tabelle 3.4 beidseitige, eindimensionale  $\chi^2$ -Tests durchgeführt, welche prüfen sollten, ob sich die Häufigkeitsverteilung in Aufgabe A3 von

	Stat. Arg.	Dyn. Arg.	$\chi^2$	Isol. Arg.	Mult. Arg.	$\chi^2$
<b>A1 (ISR)</b>	13	30		25	18	
Anteil	0.30	0.70		0.58	0.42	
<b>A3 (IDR)</b>	3	39	4.48*	33	9	3.50
Erw. Hfgk.	12.70	29.30		24.42	17.58	

\* $p < .05$ .

**Tabelle 3.4:** Bogen A, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige, eindimensionale  $\chi^2$ -Tests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten

der in Aufgabe A1 unterscheidet. Die Tabelle ist in zwei Teile aufgeteilt: links wurden die Häufigkeiten von statischen bzw. dynamischen Argumentationen in den Aufgaben A1 und A3 gezählt, also „entlang“ des Repräsentationswechsels von isolierter statischer zu isolierter dynamischer Repräsentation. Rechts sind die Häufigkeiten von isolierten bzw. multiplen Argumentationen zu sehen, also „quer“ zum Repräsentationswechsel von A1 zu A3. Die Zeile „Anteil“ beschreibt den Anteil der beobachteten Häufigkeiten in Aufgabe A1, es sind beispielsweise 13 statische Argumentationen, also ca. 30% der insgesamt 43 Beobachtungen. Die Zeile „erwartete Häufigkeiten“ errechnet sich als Produkt aus Gesamtzahl der Argumentationen in A3 und dem Anteil der jeweiligen Argumentationsart in Aufgabe A1, hier also zum Beispiel  $0.30 \cdot 42 = 12.70$  für die statischen Argumentationen<sup>15</sup>. Es ergibt sich, dass nur der linke  $\chi^2$ -Wert signifikant auf 5%-Niveau ist, die Hypothese, dass sich die in A3 verwendeten Repräsentationen in Bezug auf ihre Multiplizität bzw. ihre Dynamik nicht unterscheiden, lässt sich für die Betrachtung „entlang“ des Repräsentationswechsels also verwerfen, nicht jedoch im Fall „quer“ zum Wechsel.

		A3 (IDR)				A3 (IDR)	
		Stat. Arg.	Dyn. Arg.			Isol. Arg.	Mult. Arg.
<b>A1 (ISR)</b>	Stat. Arg.	1	10	<b>A1 (ISR)</b>	Isol. Arg.	20	4
	Dyn. Arg.	2	28		Mult. Arg.	12	15
$p < .05$				$p > .05$			

**Tabelle 3.5:** Bogen A, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind

<sup>15</sup> Dargestellt sind jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundete Werte, gerechnet wurde jedoch mit höherer Genauigkeit. Dadurch können scheinbar „falsche“ Rechnungen wie im Beispiel entstehen.

	Isol. Arg.	Mult. Arg.	$\chi^2$	Stat. Arg.	Dyn. Arg.	$\chi^2$
<b>A2 (IDR)</b>	15	28		17	26	
Anteil	0.35	0.65		0.40	0.60	
<b>A4 (MDR)</b>	4	27	2.99	22	9	6.12**
Erw. Hfgk.	10.81	20.18		12.26	18.74	

\*\* $p < .01$ .

**Tabelle 3.6:** Bogen A, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige, eindimensionale  $\chi^2$ -Tests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten

Im Weiteren soll überprüft werden, ob die Häufigkeit des Wechsels der Argumentationsart *eines Probanden* innerhalb eines analogen Aufgabenpaares signifikant ist. Wie zuvor bei Tabelle 3.4 ist in der Tabelle 3.5 links die Betrachtung „entlang“ des Repräsentationswechsels dargestellt. Wie in der linken Hälfte der Tabelle zu sehen, haben 28 Probanden, die in Aufgabe A1 eine dynamische Argumentation genutzt haben, auch in Aufgabe A3 dynamisch argumentiert. Ein Proband argumentierte immer statisch, zwei wechselten von einer dynamischen Argumentation in A1 zu einer statischen in A3. Entscheidend sind die zehn Wechsler, die in ihren Argumentationen von statischer zu dynamischer Art wechselten. Es ergibt sich ein  $p$ -Wert von .04, die Hypothese, dass die Häufigkeit des Wechsels der Argumentationsart beim Übergang von A1 (ISR) zu A3 (IDR) nicht signifikant ist, kann also auf 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

Auf der rechten Seite bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel zeigt sich, dass zwölf Probanden, die in Aufgabe A1 noch eine multiple Argumentation vorbrachten, in A3 auf eine isolierte Repräsentation wechselten. Umgekehrt wechselten vier von einem isolierten zu einem statischen Argument. Es ergibt sich ein  $p$ -Wert von .08, wie zuvor in Tabelle 3.4 kann also die Hypothese, dass die Häufigkeit des Wechsels der Argumentationsart beim Übergang von A1 (ISR) zu A3 (IDR) nicht signifikant ist, im Fall „quer“ zum Repräsentationswechsel nicht verworfen werden.

### 3.3.3 Aufgabenpaar „Fläche als Parabel“

Das Aufgabenpaar „Fläche als Parabel“ besteht aus der Aufgabe A2, welche als isolierte dynamische Repräsentation angeboten wurde (s. S. 72), sowie der Aufgabe A4, welche als multiple dynamische Repräsentation vorlag (s. S. 73). Besonderes Interesse lag also auf der hinzugekommenen Multiplizität in der Repräsentation.

Dazu wurden zunächst in Tabelle 3.6 beidseitige, eindimensionale  $\chi^2$ -Tests durchgeführt, welche prüfen sollten, ob sich die Häufigkeitsverteilung in Aufgabe A4 von der in Aufgabe A2 unterscheidet. Die Tabelle ist in zwei Teile aufgeteilt: links wurden die Häufigkeiten von isolierten bzw. multiplen Argumentationen in den Aufgaben A2 und A4 gezählt, also „entlang“ des Repräsentationswechsels von isolierter dynamischer zu multipler dynamischer Repräsentation. Rechts sind die Häufigkei-

ten von statischen bzw. dynamischen Argumentationen zu sehen, also „quer“ zum Repräsentationswechsel von A2 zu A4.

Betrachtet man zuerst die Häufigkeiten „entlang“ des Repräsentationswechsels auf der linken Seite, so zeigt sich, dass die Hypothese nicht auf 5%-Signifikanzniveau verworfen werden kann. Der Anteil der multiplen Argumentationen blieb mit 28 bzw. 27 beobachteten beinahe unverändert, auch der relative Rückgang der isolierten Argumentationen führte zu keinem signifikanten Ergebnis.

Die Hypothese, dass sich die Argumentationsarten in Aufgabe A2 und Aufgabe A4 nicht unterscheiden, kann bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel jedoch verworfen werden, wie auf der rechten Seite der Tabelle 3.6 zu sehen, ist dies sogar auf 1%-Signifikanzniveau der Fall. Dieser Wert ergibt sich aus der Tatsache, dass in Aufgabe A4 signifikant *weniger* Probanden dynamische Argumentationen hervorgebracht haben als in Aufgabe A2, nämlich nur noch neun statt zuvor 26, auch wenn sowohl in Aufgabe A2 als auch in Aufgabe A4 die dargebotenen Repräsentationen dynamischer Art waren.

		A4 (MDR)				A4 (MDR)	
		Isol. Arg.	Mult. Arg.			Stat. Arg.	Dyn. Arg.
<b>A2 (IDR)</b>	Isol. Arg.	2	12	<b>A2 (IDR)</b>	Stat. Arg.	12	1
	Mult. Arg.	2	14		Dyn. Arg.	10	8
$p < .05$				$p < .05$			

**Tabelle 3.7:** Bogen A, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind

Nun soll überprüft werden, ob die Häufigkeit des Wechselns der Argumentationsart *eines Probanden* innerhalb eines analogen Aufgabenpaares signifikant ist. Dazu wird die Tabelle 3.7 betrachtet. Wie in der linken Hälfte zu sehen, haben zwölf Probanden, die in Aufgabe A2 eine isolierte Repräsentation genutzt haben, auf eine multiple Repräsentation in Aufgabe A4 gewechselt. Nur zwei Probanden wechselten von multipel zu isoliert. Hieraus ergibt sich ein  $p$ -Wert von knapp über .01, die Hypothese, dass die Häufigkeit des Wechselns der Argumentationsart beim Übergang von A2 (IDR) zu A4 (MDR) nicht signifikant ist, kann also verworfen werden. Auf der rechten Seite bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel zeigt sich, dass zehn Probanden, die in Aufgabe A2 noch eine dynamische Argumentation vorbrachten, in A4 auf eine statische Repräsentation zurückgriffen. Umgekehrt wechselte nur einer von einer statischen zu einer dynamischen Argumentation. Auch aus diesen Zahlen ergibt sich ein  $p$ -Wert von knapp über .01, weshalb die Hypothese auch in diesem Fall verworfen werden kann.

### 3.3.4 Aufgabenpaar „Gleichungen“

Das Aufgabenpaar „Gleichungen“ besteht aus der Aufgabe B1, in welcher eine isolierte statische Repräsentation dargeboten wurde (s. S. 75), und der Aufgabe B3, welche eine isolierte dynamische Repräsentation enthielt (s. S. 75). Von besonderem Interesse bei der Auswertung war hier also die Auswirkung der hinzugekommenen Multiplizität.

	Isol. Arg.	Mult. Arg.	$p$	Stat. Arg.	Dyn. Arg.	$p$
<b>B1 (ISR)</b>	40	3		42	1	
Anteil	0.93	0.07		0.97	0.02	
<b>B3 (MSR)</b>	26	16	< .001	37	5	< .01
Erw. Hfgk.	39.07	2.93		41.02	0.98	

**Tabelle 3.8:** Bogen B, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten

Erneut ist die Tabelle in zwei Teile aufgeteilt: links wurden die Häufigkeiten von isolierten bzw. multiplen Argumentationen in den Aufgaben B1 und B3 gezählt, also „entlang“ des Repräsentationswechsels von isolierter statischer zu multipler statischer Repräsentation. Rechts sind die Häufigkeiten von statischen bzw. dynamischen Argumentationen zu sehen, also „quer“ zum Repräsentationswechsel von B1 zu B3.

Leider lässt sich in beiden Fällen der in der Auswertung der anderen Aufgabenpaaren genutzte einseitige  $\chi^2$ -Test nicht anwenden, da jeweils erwartete Häufigkeiten von weniger als 5 auftreten. Nach Bortz und Schuster (2010, S. 143) kann stattdessen ein Multinomialtest herangezogen werden, der wegen der zwei Merkmalskategorien zu einem Binomialtest wird. Betrachtet man zuerst die Häufigkeiten „entlang“ des Repräsentationswechsels auf der linken Seite und berechnet mit Hilfe des Binomialtests die zugehörige Wahrscheinlichkeit, so zeigt sich, dass die Hypothese von der Unabhängigkeit von dargebotener Repräsentation und beobachteter Argumentationsart auf 1%-Signifikanzniveau verworfen werden kann. Gegenüber der isolierten Repräsentation in Aufgabe B1 mit nur drei multiplen Argumentationen wurden in Aufgabe B3 16 multiple Argumentationen beobachtet. Bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel auf der rechten Seite zeigt sich, dass bei Aufgabe B3 etwas häufiger dynamische Argumentationen zu beobachten waren als bei Aufgabe B1, weshalb sich hier ein  $p$ -Wert von  $< .01$  ergibt. Wegen der extrem asymmetrischen Verteilung ist dieser Wert jedoch mit Vorsicht zu genießen: Wären nur zwei dynamische Argumentationen weniger beobachtet worden, wäre mit  $p > .07$  bereits keine Signifikanz mehr vorhanden. Bei der Betrachtung entlang des Repräsentationswechsels würden hierzu schon neun geänderte Werte benötigt.

Nun soll überprüft werden, ob die Häufigkeit des Wechsels der Argumentationsart *eines Probanden* innerhalb eines analogen Aufgabenpaares signifikant ist. Dazu wurden auch bei diesem Aufgabenpaar – siehe Tabelle 3.9 – Binomialtests ange-

		B3 (MSR)				B3 (MSR)	
		Isol. Arg.	Mult. Arg.			Stat. Arg.	Dyn. Arg.
B1 (ISR)	Isol. Arg.	26	13	B1 (ISR)	Stat. Arg.	36	5
	Mult. Arg.	0	3		Dyn. Arg.	1	0
$p < .001$				$p > .10$			

**Tabelle 3.9:** Bogen B, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind

wandt, um die Signifikanz der Häufigkeit des Wechsels der Probanden beim Übergang von Aufgabe B1 zu Aufgabe B3 zu überprüfen. Auf der linken Seite findet sich die Überprüfung „entlang“ des Repräsentationswechsels von isolierter zu multipler Repräsentation. Wie dort zu sehen ist, haben dreizehn Probanden, die in Aufgabe B1 eine isolierte Argumentation vorgebracht haben, in Aufgabe B3 eine multiple gezeigt. Umgekehrt wechselte keiner von einer multiplen zu einer isolierten Repräsentation, wodurch sich ein  $p$ -Wert von  $< .001$  ergibt. Auf der rechten Seite, welche die Häufigkeit des Wechsels „quer“ zum Repräsentationswechsel zeigt, sind fünf Probanden, die von einer statischen zu einer dynamischen Argumentation wechselten, sowie ein Proband, der in die umgekehrte Richtung wechselte. Dies ergibt einen  $p$ -Wert von  $.22$ . Die Hypothese, dass die Häufigkeit des Wechsels der Probanden beim Übergang von Aufgabe B1 zu Aufgabe B3 nicht signifikant ist, kann also für die linke Seite der Tabelle verworfen werden, für die rechte Seite jedoch nicht.

### 3.3.5 Aufgabenpaar „Symmetrie am Graphen“

Das Aufgabenpaar „Symmetrie am Graphen“ besteht aus der Aufgabe B2, in welcher eine multiple statische Repräsentation dargeboten wurde (s. S. 76), und der Aufgabe B4, welche eine multiple dynamische Repräsentation enthielt (s. S. 77). Von besonderem Interesse bei der Auswertung war hier also die Auswirkung der hinzugekommenen Multiplizität.

Erneut betrachten wir die Häufigkeiten der aufgetretenen Argumentationsarten mit Hilfe einer zweigeteilten Tabelle. In der linken Hälfte wurden die Häufigkeiten statischer bzw. dynamischer Argumentationen in den Aufgaben B2 und B4 eingetragen, also „entlang“ des Repräsentationswechsels von multipler statischer zu multipler dynamischer Repräsentation. Auf der rechten Seite wurden die Häufigkeiten isolierter bzw. multipler Argumentationen gezählt, also „quer“ zum Repräsentationswechsel. Zur Überprüfung der Hypothesen wurde ein beidseitiger  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit benutzt.

	Stat. Arg.	Dyn. Arg.	$\chi^2$	Isol. Arg.	Mult. Arg.	$\chi^2$
<b>B2 (MSR)</b>	17	25		7	35	
Anteil	0.41	0.59		0.17	0.83	
<b>B4 (MDR)</b>	24	16	3.05	16	24	4.35*
Erw. Hfgk.	16.19	23.81		6.67	33.33	

\* $p < .05$ .

**Tabelle 3.10:** Bogen B, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige, eindimensionale  $\chi^2$ -Test auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten

Betrachtet man zuerst die Häufigkeiten „entlang“ des Repräsentationswechsels auf der linken Seite, so lässt sich erkennen, dass die Hypothese von der Unabhängigkeit von dargebotener Repräsentation und beobachteter Argumentationsart nicht verworfen werden kann. Auf der rechten Seite der Tabelle zeigt sich jedoch, dass bei der statischen Repräsentation in Aufgabe B2 35 multiple und sieben isolierte Argumentationen gezählt wurden, während bei der dynamischen Repräsentation in B4 16 isolierte und 24 multiple Argumentationen beobachtet wurden, weshalb die Hypothese von der Unabhängigkeit von dargebotener Repräsentation und beobachteter Argumentationsart auf 5%-Signifikanzniveau verworfen werden kann. Der Übergang von MSR zu MDR in der Aufgabenstellung wirkte sich also so aus, dass die Probanden nun signifikant *weniger* multiple Argumentationen hervorbrachten. Diese überraschende Beobachtung wird in Abschnitt 3.4 noch eingehender diskutiert werden.

		B4 (MDR)				B4 (MDR)	
		Stat. Arg.	Dyn. Arg.			Isol. Arg.	Mult. Arg.
<b>B2 (MSR)</b>	Stat. Arg.	10	5	<b>B2 (MSR)</b>	Isol. Arg.	3	4
	Dyn. Arg.	13	11		Mult. Arg.	13	19
$p > .05$				$p < .05$			

**Tabelle 3.11:** Bogen B, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (quer) zum Repräsentationswechsels signifikant sind

Nun soll überprüft werden, ob die Häufigkeit des Wechsels der Argumentationsart *eines Probanden* innerhalb eines analogen Aufgabenpaares signifikant ist. Wie bei den vorhergehenden Aufgabenpaaren wurden auf die in Tabelle 3.11 eingetragenen Häufigkeiten Binomialtests angewandt, um die Signifikanz der Häufigkeit des Wechs-

sels der Probanden beim Übergang von Aufgabe B2 zu Aufgabe B4 zu überprüfen. In der linken Hälfte der Tabelle sind die Häufigkeiten des Wechsels „entlang“ des Repräsentationswechsels von statisch zu dynamisch eingetragen. Wie dort zu erkennen ist, wechselten dreizehn Probanden, die in Aufgabe B2 noch eine dynamische Argumentation anbrachten, in Aufgabe B4 in eine statische Argumentation. Umgekehrt wechselten nur fünf von einer statischen zu einer dynamischen Argumentation. Es ergibt sich ein  $p$ -Wert von knapp  $.10$ . Auf der rechten Seite sind die Wechsler „quer“ zum Repräsentationswechsel eingetragen. Wie hier abzulesen ist, wechselten dreizehn Probanden von einer multiplen Argumentation in Aufgabe B2 zu einer isolierten in B4. Vier Probanden wechselten umgekehrt von einer isolierten zu einer multiplen Argumentation. Daraus ergibt sich ein  $p$ -Wert von  $.049$ .

Somit wird die Hypothese, dass die Häufigkeit des Wechsels der Probanden beim Übergang von Aufgabe B2 zu Aufgabe B4 nicht signifikant ist, für den Fall „entlang“ des Repräsentationswechsels auf 5%-Signifikanzniveau beibehalten, im Fall „quer“ zum Wechsel kann diese verworfen werden.

## 3.4 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Die durchgeführte quantitative Untersuchung hatte das Ziel, auf der Ebene der Argumentation, also auf einer dem Argument übergeordneten Struktur, nach dem Einfluss dargebotener externer Repräsentationsarten auf Schülerargumentationen zu fragen. Als Gradmesser hierfür wurde zum einen die globale Verteilung der jeweiligen Repräsentationsarten in allen Schülerbearbeitungen untersucht, genauer wurde hier die Verteilung in der ersten Aufgabe eines Aufgabenpaares mit der in der zweiten verglichen. Zum anderen wurde betrachtet, wie sich einzelne Schüler durch den Wechsel der dargebotenen Repräsentation beeinflussen lassen, das Hauptaugenmerk lag hier also auf der individuellen Ebene. Die Ergebnisse sind überblicksartig in Tabelle 3.12 dargestellt, die vollständige Betrachtung findet sich im vorangegangenen Abschnitt.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass externe Repräsentationen in der Tat einen Einfluss auf die Repräsentationsformen haben, die in Schülerbearbeitungen genutzt werden. Auf globaler Ebene konnte für das Aufgabenpaar 1 „Funktionenschar“ eine signifikante Abweichung dahingehend gemessen werden, dass entsprechend dem Repräsentationswechsel von ISR zu IDR häufiger dynamischer argumentiert wurde. Beim Aufgabenpaar 3 „Gleichungen“ ließ sich sogar eine hoch signifikante Verteilung entlang des Wechsels von ISR zu MSR feststellen. Möglicherweise liegt der Grund für diesen besonders starken Effekt in dem beim Thema „Gleichungen“ besonders stark ausgeprägten Vor- und Metawissen in diesem in der Schule besonders ausführlich behandelten mathematischen Bereich (vgl. Renkl et al., 2013).

Auf der individuellen Ebene ließen sich diese Effekte noch stärker feststellen. Die Anzahl der Schüler, die im Aufgabenpaar 1 „Funktionenschar“ von einer statischen zu einer dynamischen Argumentation wechselten, war ebenso signifikant wie die



Zahl derer, die im Aufgabenpaar 2 „Fläche als Parabel“ von einer isolierten zu einer multiplen Argumentation übergangen, jeweils entlang des Repräsentationswechsels innerhalb des Aufgabenpaares. Die Zahl der Wechsler, die im Aufgabenpaar 3 „Gleichungen“ entlang des Repräsentationswechsels der Aufgabenstellung von einer isolierten zu einer multiplen Argumentation wechselten, war sogar höchst signifikant.

	Verteilung		Wechsler	
	S → D	I → M	S → D	I → M
„Funktionenschar“ A1 (ISR) → A3 (IDR)	*		*	
„Fläche als Parabel“ A2 (IDR) → A4 (MDR)	** <sup>-</sup>		* <sup>-</sup>	*
„Gleichungen“ B1 (ISR) → B3 (MSR)	**	***		***
„Symmetrie am Graphen“ B2 (MSR) → B4 (MDR)		* <sup>-</sup>		* <sup>-</sup>

\* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

**Tabelle 3.12:** Knappe Übersicht der Ergebnisse der quantitativen Untersuchung. Signifikanz entlang des Repräsentationswechsels ist fett gedruckt, ein hoch gestelltes „-“ bedeutet dass signifikant *weniger* dynamisch bzw. multipel argumentiert wurde.

Zieht man nur diese Zahlen in Betracht, scheint der Zusammenhang zwischen gegebener und verwendeter Repräsentationsart sehr einfach zu beschreiben: was in der Aufgabenstellung angeboten wird, wird auch in der Argumentation verwendet. Wie die weiteren Daten zeigen, lässt sich der Einfluss jedoch keineswegs so einfach beschreiben, sondern es sind „Nebenwirkungen“ festzustellen.

Beispielsweise war im Aufgabenpaar A2/A4 „Fläche als Parabel“ die Verteilung in der Aufgabe A2 in Bezug auf Multiplizität, also entlang des Repräsentationswechsels in der Aufgabenstellung von IDR zu MDR, nicht signifikant unterschiedlich zu der in Aufgabe A4, es wurde jedoch in Aufgabe A4 hoch signifikant *weniger dynamisch* argumentiert als in Aufgabe A1. Obwohl sich also in Bezug auf die Dynamik der angebotenen externen Repräsentation nichts geändert hat, wurde deutlich seltener dynamisch argumentiert, der Effekt tritt also „quer“ zum Repräsentationswechsel der Aufgabenstellung auf. Dies schlägt sich auch auf der individuellen Ebene nieder, hier wurde zwar signifikant mehr multipel, aber weniger dynamisch argumentiert.

Noch deutlicher ist dies beim Aufgabenpaar B2/B4 „Symmetrie am Graphen“ zu beobachten. Hier bieten sowohl Verteilung als auch Wechsler „entlang“ des Repräsentationswechsels keine signifikanten Ergebnisse, es wurde also wegen des Übergangs von MSR zu MDR nicht häufiger dynamisch argumentiert. Bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel zeigen jedoch sowohl Verteilung als auch die Zahl der Wechsler, dass in Aufgabe B4 *weniger multipel* argumentiert wurde als in Aufgabe B2.

Dargebotene externe Repräsentationen beeinflussen also Schülerargumentationen. Zum Teil tun sie dies entsprechend der dargebotenen Repräsentationsart und in beabsichtigter Weise, also dass *mehr* dynamisch beziehungsweise multipel argumentiert wird, wie an den signifikanten Werten *entlang* des Repräsentationswechsels bei den Aufgabenpaaren A1/A3, A2/A4 und B1/B3 erkennbar ist. Andererseits beeinflussen sie auch in nicht beabsichtigter Weise, indem *weniger* dynamisch beziehungsweise multipel argumentiert wird, was jedoch nur *quer* zum Repräsentationswechsel in der Aufgabenstellung auftrat und sich in den signifikanten Werten bei den Aufgabenpaaren A2/A4 und B2/B4 niederschlug.

Es ist auffällig, dass diese Nebenwirkungen nur bei denjenigen Aufgaben auftraten, bei denen multiple dynamische Repräsentationen vorkamen. Es ist also möglich, dass der Grund für die unvorhergesehenen Effekte bei den MDR zu finden sind. Es existieren nur zwei Möglichkeiten, weshalb Schüler im Aufgabenpaar A2/A4 weniger dynamisch und in B2/B4 weniger multipel argumentiert haben: entweder sie *konnten*, oder sie *wollten* es nicht.

Die erste Hypothese, dass die Schüler das Potential multipler dynamischer Repräsentationen nicht vollständig ausschöpfen *konnten*, klingt plausibel, wenn man sie mit Blick auf die Cognitive Load Theory (CLT) betrachtet. Wie weiter oben bereits beschrieben, können sowohl multiple als auch dynamische Repräsentationen den Cognitive Load bei der Bearbeitung einer Aufgabe erhöhen. Werden diese beiden Repräsentationsarten kombiniert, addiert sich die kognitive Belastung (vgl. de Jong, 2010, S. 112). Dies kann entweder zur Folge haben, dass die Aufgabe gar nicht mehr bearbeitet werden kann, weil die Fülle an verfügbaren Informationen die Schüler völlig überfordert und so eine kognitive Überlastung (*cognitive overload*) verursacht, oder dass die Schüler aus ökonomischen Gründen Teile der dargebotenen Information schlicht ignorieren, um eine Überlastung zu vermeiden, und sich daher bei ihrer Aufgabenbearbeitung nur auf eine bestimmte Repräsentationsart stützen. Die Vermutung, dass Cognitive Load für die beobachteten Nebenwirkungen von multiplen dynamischen Repräsentationen verantwortlich ist, erscheint damit plausibel, bestätigen lässt sich diese Hypothese mit den vorliegenden Daten jedoch nicht. Hierfür wäre eine qualitative Untersuchung eine mögliche Erhebungsform, zum Beispiel in Form von Schülerbeobachtungen bei der Bearbeitung oder nachträglichen Interviews. Diese waren jedoch nicht Teil der vorliegenden Arbeit.

Eine zweite Möglichkeit, warum die oben beschriebenen Nebenwirkungen bei den Aufgabenpaaren mit MDR auftraten, besteht darin, dass die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung es schlicht nicht für notwendig befunden haben, sämtliche dargebotenen Informationen ihrerseits in den eigenen Argumentationen zu verwenden. Möglicherweise konnten sie die MDR also durchaus verwenden, aber *wollten* es nicht. Hierfür kommen individuelle Gründe wie Schreibfaulheit oder Zeitnot in Frage, interessanter sind jedoch diejenigen, die in den Informationsgehalten der Repräsentationen selbst zu finden sind. Im Aufgabenpaar A2/A4 wurde bei einem Übergang von einer isolierten dynamischen zu einer multiplen dynamischen Repräsentation häufiger multipel argumentiert (diese Art der Beeinflussung entspricht den Beobachtungen in A1/A3 und B1/B3), dafür wurde jedoch auf die Nennung dynamischer Argumente verzichtet. Der Grund hierfür könnte in der Tatsache liegen, dass

die Informationen, welche in Aufgabe A2 mit Hilfe der Dynamik aus der Repräsentation entnommen wurden, nun auch in der Multiplizität der Darstellung enthalten sind. Diese wurde häufiger eingesetzt, weshalb die Nutzung der Dynamik zurückging. Auf Grund der hier vorliegenden quantitativen Daten lässt sich diese Hypothese weder belegen noch verwerfen. Auch aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt eine qualitative Untersuchung der Schülerbearbeitungen vorgenommen.

### 3.5 Qualitative Auswertung der Untersuchung

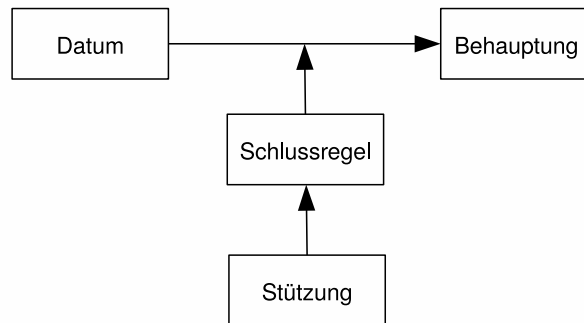
Im vorherigen Abschnitt wurden die Auswirkungen multipler und dynamischer Repräsentationen auf Schülerargumentationen betrachtet. Im Folgenden soll der Blick auf deren untergeordnete Strukturen gelenkt werden, nämlich auf die *Argumente*, aus denen sich Argumentationen zusammensetzen. Dabei wird nun nicht mehr die Frage im Mittelpunkt stehen, *ob* sich solche in den Aufgabenstellungen gegebenen externen Repräsentationen in den Bearbeitungen der Schüler niederschlagen, sondern *wie* dies der Fall ist.

Wie in den Kapiteln 1 und 2 beschrieben, besitzen sowohl multiple als auch dynamische Repräsentationen spezifische Informationsgehalte und bestimmte Rollen, nach denen diese genutzt werden können. Mit Hilfe des Toulminschen Argumentationsmodells aus Abschnitt 2.2 kann die Art und Weise beschrieben werden, an welcher Stelle im Argument diese repräsentations-spezifischen Eigenschaften eingesetzt werden, um so eine Beschreibung der Nutzung von multiplen und dynamischen Repräsentationen in Bezug auf die Formulierung von Argumenten zu erhalten. Im Folgenden wird zunächst das Problem der Explizität von Schülerargumenten betrachtet, um anschließend die aufgetretenen Fälle zu untersuchen, wie multiple und/oder dynamische Repräsentationen in Argumenten eingesetzt wurden.

#### 3.5.1 Explizität von Schülerargumenten

Die kompakte, griffige Form des Toulminschemas mit seinen vier Grundbestandteilen Behauptung, Datum, Schlussregel und Stützung (s. Abbildung 3.10) könnte zu dem Eindruck verleiten, dass alle oder zumindest die meisten Argumente eine solche abgeschlossene Form besitzen. Das trifft allerdings insbesondere für Schülerargumente nicht zu (vgl. Jahnke & Ufer, 2015; Fetzer, 2011, S. 40). Auch in der Auswertung dieser Untersuchung wurde deutlich, dass Schüler sehr häufig Bestandteile weglassen, sogar so weit, dass es kaum noch möglich ist, überhaupt ein Argument zu identifizieren.

Sicherlich spielen hierbei die in der Klasse vorherrschenden Normen, wie weit ein Argument expliziert werden muss, eine große Rolle. Was ohnehin „klar“ ist (oder zumindest als klar angesehen wird), muss auch nicht weiter erklärt werden – dass das Urteil darüber ein sehr subjektives oder zumindest gruppenbezogenes ist, lassen die Schüler dabei häufig außer Acht. Es ist häufig unökonomisch, lange Erklärungen anzuführen, die niemand benötigt, da in einer Schulklasse eine gemeinsame Argumentationsbasis besteht. Problematisch wird es aber, wenn sich die Normen



**Abbildung 3.10:** Vollständiges Argument nach Toulmin (2003, S. 93)

der Gruppe ändern, wenn zum Beispiel die Mathematiklehrkraft wechselt und nun andere Standards an die Explizität von Argumenten gestellt werden. Dies gilt insbesondere beim Übertritt an die Universität, wo im Mathematikstudium zur Schule verschiedene Sprach- und Argumentationsweisen anfangs große Hürden darstellen (vgl. Selden, 2012).

In Bezug auf das Argumentationsmodell Toulmins lässt sich für diese Untersuchung festhalten, dass in keinem der von den Probanden angeführten Argumente eine Stützung vorkam. Dieser Befund mag auf den ersten Blick überraschen. Da eine Stützung aber nur dann angeführt wird, wenn die Gültigkeit einer Schlussregel generell angezweifelt wird (vgl. Toulmin, 2003, S. 95), setzt deren Nennung ein Infragestellen des Gegebenen beziehungsweise Erkannten in einer Tiefe voraus, wie man es von Schülern noch nicht erwarten kann. Das generelle Fehlen einer Stützung in den Schülerbearbeitungen ist also einfach zu erklären.

*Die Gleichung hat 2 Lösungen  
Das seh am  $x^2$  also am  $x$  mit dem höchsten  
Grad.*

**Abbildung 3.11:** Beispiel für ein Schülerargument, in dem Datum und Behauptung vorhanden sind

Die meisten beobachteten Argumente hatten die Form „Behauptung, weil Datum“, das heißt, es wurde, nachdem es in der Aufgabenstellung auch explizit gefordert war, für die Behauptung eine Begründung angegeben. In Abbildung 3.11 ist ein solches Argument zu sehen. In der betreffenden Aufgabe war nach der Anzahl der Lösungen der Gleichung  $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{19}{2} = 2x + 5$  gefragt. Die Antwort des Schülers lautet hier „Die Gleichung hat 2 Lösungen“ und es wird weiter erläutert: „Das seh [ich] am  $x^2$  also am  $x$  mit dem höchsten Grad.“ Zur Behauptung, die Gleichung

habe zwei Lösungen, wird als Begründung also der Grund angegeben, an dem der Schüler zu erkennen glaubt, warum dies so ist, nämlich dass  $x^2$  in der Gleichung vorkommt. Dies entspricht dem Datum des Arguments. Die beiden Elemente des Arguments sind dabei allenfalls durch ihre „räumliche Nähe“ verbunden, eine argumentative Verknüpfung fehlt, wahrscheinlich weil es für den betreffenden Schüler „klar“ ist, warum ein  $x^2$  in der Gleichung zwei Lösungen bedingt<sup>16</sup>.

Die Gleichung hat eine Lösung.  
~~Es~~  
Ich habe es an den den 2 Graphen  
untendrunter abgelesen. Der Schnittpunkt  
der Lösung Es Graphen ist die Lösung

**Abbildung 3.12:** Beispiel für ein Schülerargument, in dem eine Schlussregel angegeben wurde

Zum Vergleich ist in Abbildung 3.12 ein Argument abgebildet, bei dem die Schlussregel angegeben wurde. Es handelt sich hierbei um die Aufgabe B3, in welcher, ähnlich zum Beispiel oben, die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $x^3 + x^2 + \frac{98}{125} = x^2 + 1$  gesucht war. Zusätzlich war unterhalb der Gleichung ein Koordinatensystem gezeigt, welches die beiden Seiten der Gleichung als Graphen darstellte (s. S. 75). Die Behauptung lautet also: „Die Gleichung hat eine Lösung.“, als Datum wird „Ich habe es an den 2 Graphen untendrunter abgelesen.“ angegeben. Zu diesem Punkt wäre analog zum Beispiel oben noch unklar, inwiefern Graphen und Lösungen in einem Zusammenhang stehen. Die nachfolgende Schlussregel gibt darüber Auskunft: „Der Schnittpunkt der Graphen ist die Lösung.“ Solche Argumente mit Behauptung, Datum und Schlussregel waren die ausführlichste Form von Argumenten, die in der Untersuchung vorgefunden wurden, sie waren jedoch nur selten zu beobachten.

Häufiger wurde neben der Schlussregel auch das Datum weggelassen. Diese Äußerungen können zwar ebenfalls mit dem Toulmin-Schema eingeordnet werden, weil jedoch der begründende Aspekt schlicht fehlt, handelt es sich eher im weiteren Sinne um Argumente. Abbildung 3.13 zeigt ein solches Argument. Es handelt sich wieder um die Aufgabe B1, in der die Gleichung zu  $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x + 24 = 2x + 5$  abgewandelt wurde, der konstante Summand auf der linken Seite wurde also von  $\frac{19}{2}$  auf 24 geändert. Das Schülerargument beinhaltet lediglich die Behauptung, es gebe „[i]mmer noch die gleiche Anzahl an Lösungen“, ohne dass der Schüler angibt, warum dies so ist.

---

<sup>16</sup> Die Qualität des Arguments in Bezug auf die mathematische Korrektheit soll in dieser Untersuchung außer Acht gelassen werden.

Immer noch die gleiche Anzahl an Lösungen

**Abbildung 3.13:** Beispiel für ein Schülerargument, in dem ausschließlich eine Behauptung getroffen wird

### 3.5.2 Multiple Repräsentationen in Argumenten

Multiple Repräsentationen können in verschiedener Weise genutzt werden. Ainsworth (1999) beschreibt drei wesentliche Rollen: *ergänzende Rollen*, die *Einschränkung der Interpretationsmöglichkeiten* und das *Schaffen eines tieferen Verständnisses* (s. S. 34). Besonders die beiden Letztgenannten sind klar lern- bzw. arbeitsprozessbezogen und werden deshalb im Rahmen dieser Untersuchung, welche ausschließlich Schülerdokumente als *Produkte* betrachtet, nicht in Betracht gezogen. Die ergänzenden Rollen dagegen richten das Hauptaugenmerk auf die Unterschiede der Repräsentationen in Bezug auf ihren Informationsgehalt und deren Ablese- und Verarbeitungsmöglichkeiten. Sie können auch in nachträglich ausgewerteten Schülerdokumenten festgestellt werden.

Bei der Analyse der Schülerargumente steht nun die Frage im Vordergrund, wie multiple Repräsentationen eingesetzt wurden, um Argumente zu formulieren. Hierbei wird das Toulmin-Schema eine entscheidende Rolle spielen, da einzelne argumentative Äußerungen nicht nur bestimmte Rollen in einem Argument besitzen, sondern auch stets in Bezug auf ein bestimmtes Repräsentationensystem getätigt werden. Indem aufgezeigt wird, zwischen welchen Elementen eines Arguments ein Repräsentationswechsel stattfindet, kann beschrieben werden, in welcher Weise multiple Repräsentationen beim Argumentieren von Nutzen sein können.

Die ergänzenden Rollen gliedern sich gemäß Ainsworth (1999) weiter in *ergänzende Prozesse (complementary processes)* und *ergänzende Informationen (complementary information)*. Erstere bezeichnen die Eigenschaft multipler Repräsentationen, Informationen auf verschiedene Art und Weise ablesen und anschließend verarbeiten zu können, was bei geeignet gewählten Repräsentationen einen Leistungs- oder Effizienzgewinn verspricht (Ainsworth, 1999, S. 135). Diese Art der Nutzung von multiplen Repräsentationen kam in der Untersuchung häufig vor.

In Abbildung 3.14 ist ein solcher Fall zu sehen. Während die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung aus Aufgabe B3 mit Hilfe des Graphen begründet wird, wird die Lösung selbst durch Umformen der Gleichung erhalten. Es wurden hier also spezifische Eigenschaften der jeweiligen Repräsentationensysteme ausgenutzt: An Graphen können Schnittpunkte (und damit Lösungen der Gleichung) schnell abgelesen werden, das heißt, sie sind effizient im Feststellen der Existenz von Lösungen. Ist dagegen der exakte Wert der Lösung gefragt, sind Graphen meist zu ungenau; hier kann ein Wechsel auf das Repräsentationensystem der Gleichung vorgenommen werden, indem mit Hilfe bekannter Lösungsalgorithmen eine exakte Lösung erhalten werden kann.

a) Eine Lösung

b) Es wird der Schnittpunkt oder die Schnittpunkte ausgerechnet, und  
 was daneben gibt es nur einen, was man bei der Gruppe sieht

$$\begin{aligned}
 c) \quad x^3 + x^2 + \frac{98}{125} &= x^2 + 1 \\
 x^3 + \frac{98}{125} &= 1 \\
 x^3 &= \frac{27}{125} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{27}{125}} \\
 x &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

**Abbildung 3.14:** Beispiel für *complementary processes* in der Aufgabe B3. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wird am Graphen abgelesen, die Lösung selbst aber durch Umformen der Gleichung errechnet.

Die zweite Unterrolle innerhalb der ergänzenden Rollen wird als die der *ergänzenden Informationen* (*complementary information*) bezeichnet. Sie gliedert sich weiter auf in *gemeinsame Informationen* (*shared information*) und *unterschiedliche Informationen* (*different information*). Die Nutzung ergänzender Informationen ist eng verknüpft mit den ergänzenden Prozessen. So lässt sich einerseits die Information über die Existenz einer Lösung wie im Beispiel nicht nur aus dem Graphen ablesen, sondern könnte auch direkt durch das Umformen der Gleichung gewonnen werden. Andererseits stellt auch ein Graph die Lage des Schnittpunktes und damit die Lösung der Gleichung dar. Die beiden Repräsentationen bieten also in Bezug auf die Lösung von Gleichungssystemen tatsächlich den gleichen Informationsgehalt, dieser wird jedoch unter Umständen, wie oben beschrieben und in Abbildung 3.14 illustriert, unterschiedlich entnommen.

### Repräsentationswechsel bei zwei Daten

In Bezug auf das Argumentieren bieten solche gemeinsamen Informationen die Möglichkeit, neue „Fakten“ abzulesen und in Argumenten zu verwenden (vgl. Abschnitt 2.3). Mit Hilfe dieser Fakten lassen sich Argumente plausibler und überzeugender darstellen, indem sie ein weiteres Datum liefern, welches die Behauptung stützt (vgl. Toulmin, 2003, S. 95). Abbildung 3.15 zeigt hierfür ein Beispiel aus der Untersuchung, bei der in Aufgabe B2 die Symmetrie eines Graphen begründet werden sollte (s. S. 76).

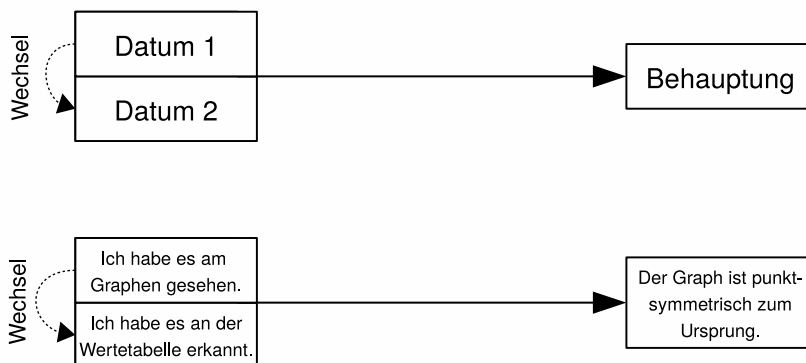
Wird dieses Argument gemäß dem Toulmin-Schema rekonstruiert, so ist „ja der Graph ist symmetrisch, punktsymmetrisch zum Ursprung“ die Behauptung, „ich habe das erstens am Graphen selber gesehen“ das erste Datum und „und mich dann an

e) ja der Graph ist symmetrisch, punktsymmetrisch  
 ich habe das erstens am ~~Graph~~ <sup>zum Ursprung</sup> Graphen selber  
 gesehen und mich dann an den Punkten der  
 Wertetabelle orientiert und das dann bestätigt

**Abbildung 3.15:** Beispiel für ein zweites Datum, welches die Behauptung zusätzlich unterstützt. Hier werden gemeinsame Informationen der multiplen Repräsentation genutzt.

den Punkten der Wertetabelle orientiert und das dann bestätigt“ das zweite Datum. Das zweite Datum dient also der zusätzlichen Stärkung der Behauptung, der Repräsentationswechsel ermöglicht dabei das Ablesen (und anschließende Verwenden) der zusätzlichen Information.

Dieses Argument ist schematisch in Abbildung 3.16 dargestellt. Der Wechsel zwischen den Repräsentationensystemen und damit der Punkt, an dem multiple Repräsentationen genutzt wurden (in diesem Fall in der Rolle der ergänzenden Informationen und ergänzenden Prozesse), findet also zwischen den Daten statt. Diese Argumentstruktur bildet den ersten Fall, welcher in der Untersuchung beobachtet wurde, in dem das spezifische Potential multipler Repräsentationen zur Anwendung kam.



**Abbildung 3.16:** Schematische Darstellung und Beispiel für einen Repräsentationswechsel zwischen zwei Daten

### Repräsentationswechsel zwischen Datum und Behauptung

Die weitaus meisten beobachteten Schülerargumente waren von der einfachen Form „Datum → Behauptung“. Dies schlägt sich auch in Bezug auf die Nutzung multipler Repräsentationen nieder. So war der am häufigsten beobachtete Fall eines Wechsels

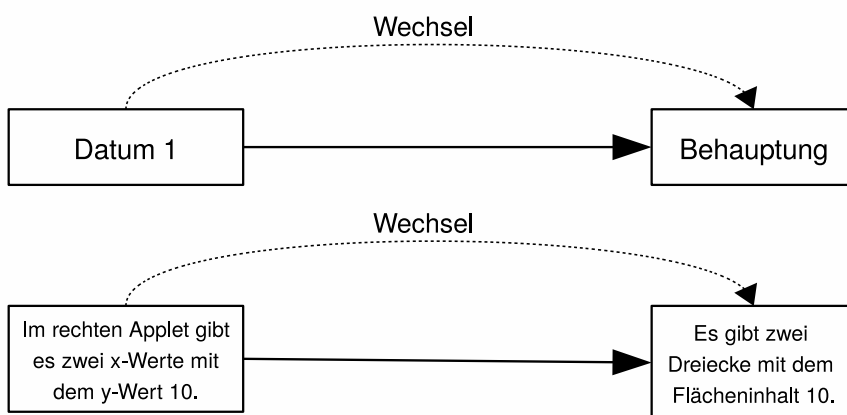


zwischen Repräsentationensystemen der zwischen einem Datum und der zugehörigen Behauptung. Abbildung 3.17 zeigt hierfür ein Beispiel. Es handelt sich um ein Argument, welches bei der Bearbeitung der Aufgabe A4 vorgebracht wurde. Hier sollte mit Hilfe eines Graphen, welcher den Flächeninhalt eines Dreiecks in Abhängigkeit zur Lage eines seiner Eckpunkte darstellt, argumentiert werden, wie viele Dreiecke den Flächeninhalt 10 haben (s. S. 73).

es gibt 2 Dreiecke ABC mit Flächeninhalt 10.  
Im rechten Applet gibt es zwei x-Werte mit dem y-Wert 10.

**Abbildung 3.17:** Beispiel für ein Argument, in dem der Repräsentationswechsel zwischen Datum und Behauptung stattfindet

Die Behauptung lautet hier also „es gibt 2 Dreiecke ABC mit Flächeninhalt 10“, welche durch das Datum „Im rechten Applet gibt es zwei  $x$ -Werte mit dem  $y$ -Wert 10.“ gestützt wird. Weil keine Schlussregel angegeben wurde, ist der Zusammenhang zwar nicht vollkommen eindeutig, in Bezug auf die Verwendung multipler Repräsentationen wird jedoch deutlich, dass die Behauptung in einem geometrischen Repräsentationensystem getroffen wurde, während das Datum im Repräsentationensystem eines Funktionsgraphen verortet ist. Auch hier werden also die Funktionen der ergänzenden Prozesse und ergänzenden Informationen angewandt, um das Argument zu formulieren. Anders als im ersten Fall dient der Wechsel jedoch nicht der zusätzlichen *Stärkung* der Behauptung, sondern *ermöglicht* überhaupt erst deren Begründung mit einem Datum. Abbildung 3.18 zeigt das zugehörige Toulmin-Schema.



**Abbildung 3.18:** Schematische Darstellung und Beispiel für einen Repräsentationswechsel zwischen Datum und Behauptung

### Repräsentationswechsel über die Schlussregel

Der dritte beobachtete Fall ist ähnlich wie der zuvor beschriebene, da auch hier ein Repräsentationswechsel zwischen dem Datum und der Behauptung stattfindet. Der entscheidende Unterschied liegt jedoch darin, dass nun, anders als oben, eine Schlussregel angegeben wurde.

Abbildung 3.19 zeigt ein Beispiel für ein solches Argument. Es bezieht sich auf die Aufgabe B3, in der die Anzahl der Lösungen einer Gleichung angegeben werden sollte, was zum Beispiel durch Umformen der Gleichung oder Ablesen an dem darunter abgebildeten Graphen erreicht werden konnte (s. S. 75).

In der Rekonstruktion mittels des Toulmin-Modells ergibt sich „eine [Lösung]“ als Behauptung, „an den beiden Graphen!“ entspricht dem Datum<sup>17</sup>. Es folgt eine erklärende Äußerung, wie Behauptung und Datum zusammenhängen: „Die Lösung ist nämlich der Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) der beiden Graphen und dort ist nur einer zu sehen bzw. gibt es halt nur einen“. Es handelt sich hierbei also um eine Schlussregel.

a) eine  
 b) an den beiden Graphen! Es Die Lösung ist nämlich der Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) der beiden Graphen und dort ist nur einer zu sehen bzw. gibt es halt nur einen.

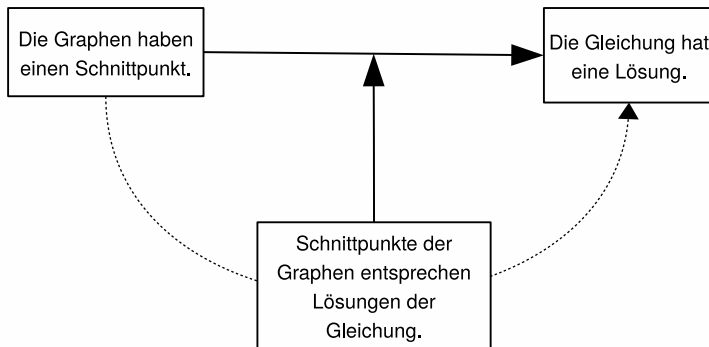
**Abbildung 3.19:** Beispiel für ein Argument, in dem der Repräsentationswechsel über die Schlussregel stattfindet

Es lohnt sich, diesen Fall näher zu betrachten. Abbildung 3.20 zeigt das etwas stärker explizierte Argument in der schematischen Darstellung. Wie für Schlussregeln charakteristisch, besitzt die hier vorliegende eine verbindende Funktion, nämlich zwischen dem Datum und der Behauptung, welche sich mit einer Gleichung beziehungsweise einem Graphen auf verschiedene Repräsentationssysteme beziehen. Die Schlussregel verbindet nun aber nicht nur Datum und Behauptung durch das Aufdecken ihrer Verbindung zu einer argumentativen Einheit, sondern zeigt darüber hinaus auch die Verbindung der beiden Repräsentationssysteme auf: ein Schnittpunkt der Graphen entspricht einer Lösung der Gleichung<sup>18</sup>.

Die gemeinsam dargestellten Informationen werden also nicht nur für die Argumentation genutzt, um wie oben mit neuen „Fakten“ die Behauptung überzeugender zu gestalten, sondern es wird darüber hinaus mittels Schlussregel offengelegt, wie diese Informationen gemeinsam dargestellt werden. Der Wechsel zwischen den Repräsentationssystemen erfolgt gleichsam *in* der Schlussregel, im Beispiel mit dem einfachen „ist“ in dem Satz „Die Lösung **ist** nämlich der Schnittpunkt“. In Abbildung 3.20 übernimmt das Wort „entsprechen“ dieselbe Funktion.

<sup>17</sup> Diese für ein Datum etwas ungewöhnliche Formulierung ergibt sich aus der Frage „Woran hast du das erkannt?“, die Funktion der Äußerung ist aber die eines Datums.

<sup>18</sup> Genauer: die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes.



**Abbildung 3.20:** Schema eines Beispiels für ein Argument, in dem der Repräsentationswechsel über die Schlussregel stattfindet

In Abbildung 3.21 ist ein weiteres Beispiel für einen Wechsel des Repräsentationensystems über die Schlussregel hinweg zu sehen. Die Bearbeitung bezieht sich auf Aufgabe A4 (s. S. 77). In Teilaufgabe a) und b) wird noch keine Schlussregel angegeben. Auf die Behauptung „Genau 2 Dreiecke“ folgt unverbunden das Datum mit „Die Parabel, die den Flächeninhalt angibt hat genau 2 mal den  $y$ -Wert 10“. Im Unterschied hierzu wird im nächsten Argument die Schlussregel genannt. Die Behauptung „auch genau 2 Stück“ (gemeint sind wie oben zwei Dreiecke, diesmal mit Flächeninhalt  $\sqrt{47}$ ) wird durch das Datum „Parabel hat 2 mal den  $y$ -Wert  $\sqrt{47}$ “ untermauert. Wie im ersten Beispiel folgt eine Erklärung, wie Datum und Behauptung zusammenhängen: „ $\rightarrow 2$  verschiedene Werte  $\rightarrow 2$  verschiedene  $C$ “.

Aufgabe 4:

$$f(x) = -x^2 + 6x ; C(x_c | f(x_c))$$

a) Genau 2 Dreiecke

b) Die Parabel, die den Flächeninhalt angibt hat genau 2 mal den  $y$ -Wert 10.

c) auch genau 2 Stück

d) Parabel hat 2 mal den  $y$ -Wert  $\sqrt{47}$   $\rightarrow$  2 verschiedene  $x$ -Werte  $\rightarrow$  2 verschiedene  $C$ .

**Abbildung 3.21:** Zweites Beispiel für ein Argument, in dem der Repräsentationswechsel über die Schlussregel stattfindet. In den Teilaufgaben a) und b) wird das Argument noch ohne Schlussregel hervorgebracht, in Teilaufgabe d) wird diese dann angegeben.

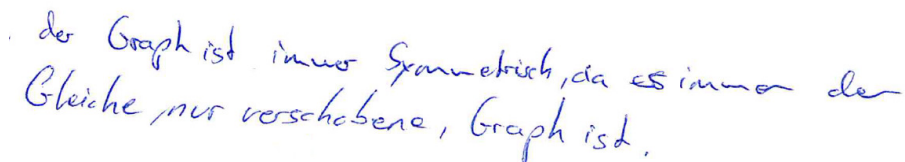
Auch hier verbindet die Schlussregel nicht nur Datum und Behauptung, sondern auch die beiden Repräsentationssysteme, da „2 verschiedene Werte“ sich auf die rechte Hälfte der Abbildung mit dem Funktionsgraphen bezieht, während „2 verschiedene C“ das links abgebildete Dreieck mit den verschiedenen Positionen von C meint. Es ist durchaus bemerkenswert, dass eine solche Verbindung der Theorien der Argumente und der multiplen Repräsentationen existiert und diese von Schülern aktiv genutzt wird. Weil diese auch für den Unterricht Bedeutung hat, soll in Kapitel 4 noch einmal näher darauf eingegangen werden.

### 3.5.3 Dynamische Repräsentationen in Argumenten

Analog zur oben durchgeführten Analyse kann auch für dynamische Repräsentationen untersucht werden, in welchen Elementen eines Arguments diese verwendet wurden. Bei der Auswertung der Untersuchung fiel auf, dass in keiner Schülerbearbeitung in einer Behauptung auf eine dynamische Repräsentation verwiesen wurde. Die Gründe hierfür lassen sich aus den Schülerdokumenten zwar nicht zweifelsfrei feststellen, es liegt jedoch die Vermutung nahe, dass sie in der Aufgabenstellung zu finden sind. Diese wurde nämlich stets „statisch“ formuliert, zum Beispiel „Wie viele Lösungen hat die Gleichung ...?“, „Sind die Graphen symmetrisch?“ und so weiter (s. Abschnitt 3.2). Auf eine solche statische Frage wird auch statisch geantwortet, also „Die Gleichung hat zwei Lösungen.“ oder „Die Graphen sind symmetrisch.“, eine Formulierung, die auf eine dynamische Repräsentation schließen lässt, ist hier nicht zu erwarten. Das Fehlen von dynamischen Argumentteilen in der Behauptung lässt sich damit also erklären.

#### Dynamische Repräsentationen im Datum

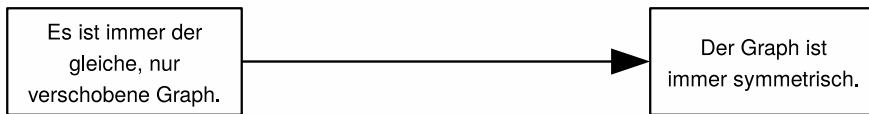
Einer der großen Vorteile von dynamischen Repräsentationen ist ihre Eigenschaft, zusätzliche Informationen bereitzustellen, die für das Argumentieren in Form von neuen „Fakten“ genutzt werden können, analog zu den sich ergänzenden Informationen bei den multiplen Repräsentationen. Entsprechend war das am häufigsten anzutreffende Element, bei dem dynamische Repräsentationen genutzt wurden, das Datum. In Abbildung 3.22 ist ein Beispiel für ein solches Argument zu sehen. Es bezieht sich auf die Aufgabe A2 der Untersuchung, bei der die Symmetrie von Graphen begründet werden sollte, welche ein jeweils um bestimmte Werte verschobenes Polynom dritten Grades darstellten (s. S. 72).



der Graph ist immer symmetrisch, da es immer den Gleiche, nur verschobene, Graph ist.

**Abbildung 3.22:** Beispiel für ein Argument, bei dem im Datum auf eine dynamische Repräsentation verwiesen wird

Die Behauptung ist hier „der Graph ist immer Symmetrisch“, das Datum findet sich in der Äußerung „da es immer der Gleiche, nur verschobene, Graph ist“. In die statischen Abbildungen wurde hier also die Bewegung der Verschiebung hineingesehen, was wiederum zu dem Argument führte, dass es sich um die gleichen Graphen handeln muss. Weil auf diese Dynamik der internen Repräsentation im Argument verwiesen wurde, handelt es sich um ein dynamisches Argument nach obiger Definition. Die Dynamik wurde dabei genutzt, um die Behauptung zu stärken, also im Datum des Arguments. In Abbildung 3.23 ist das zugehörige Toulmin-Schema zu sehen.



**Abbildung 3.23:** Toulmin-Schema des obigen Beispiels für ein Argument, in dem im Datum auf eine dynamische Repräsentation verwiesen wird

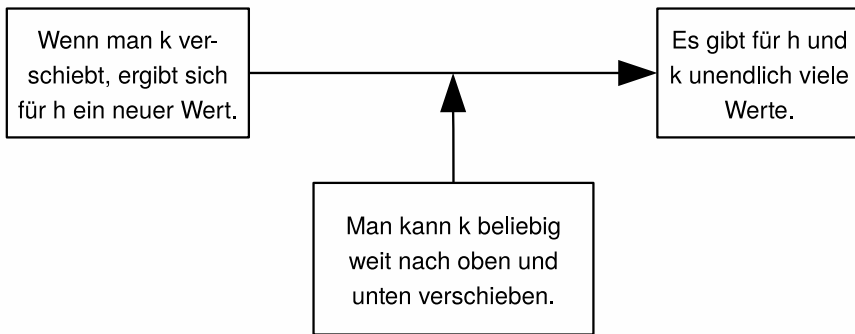
### Dynamische Repräsentationen in der Schlussregel

Auch in der Schlussregel wurden dynamische Repräsentationen genutzt. Das Beispiel in Abbildung 3.24 zeigt einen solchen Fall. Es stammt aus einer Bearbeitung der Aufgabe A3 aus dem Aufgabenpaar „Funktionenschar“, bei dem begründet werden sollte, ob es Werte für die Parameter  $h$  und  $k$  gibt, so dass der Graph einer Parabel durch einen Punkt  $Q$  verläuft. Wie in einem Applet experimentell herausgefunden werden konnte, verschoben die Parameter die Parabel in  $y$ -Richtung beziehungsweise veränderten ihre Öffnung.

Es gibt für  $h$  und  $k$  unendlich viele Werte  
Wenn man  $k$  verschiebt ergibt sich für  $h$  ein  
neuer Wert. ~~und~~ Man kann  $k$  beliebig weit nach  
oben und unten verschieben.

**Abbildung 3.24:** Beispiel für ein Argument, in dem in der Schlussregel auf eine dynamische Repräsentation verwiesen wird

In der Rekonstruktion des Arguments gemäß dem Toulmin-Schema ist „Es gibt für  $h$  und  $k$  unendlich viele Werte“ die Behauptung. Diese wird unterstützt durch das Datum „Wenn man  $k$  verschiebt, ergibt sich für  $h$  ein neuer Wert“. Weil nun noch nicht klar ist, inwiefern dies die *unendlich* vielen Werte der Behauptung bedingt, wird eine Schlussregel hinzugefügt: „Man kann  $k$  beliebig weit nach oben und unten verschieben“, das heißt für „beliebige“  $k$  (und daraus resultierend unendlich viele, auch wenn dies nicht explizit gesagt wird) findet sich ein  $h$ , so dass die Parabel durch  $Q$  geht. Abbildung 3.25 zeigt das Argument schematisch.



**Abbildung 3.25:** Schema des obigen Beispiels für ein Argument, in dem in der Schlussregel auf eine dynamische Repräsentation verwiesen wird

Die Schlussregel verbindet auch hier Datum und Behauptung. In dem vorliegenden Beispiel verbindet sie zudem das dynamische Element (Datum) mit dem statischen Element (Behauptung), indem es von den dynamisch erzeugten „sehr vielen“ Einzelfällen mit dem Wort „beliebig“ auf die nun statischen „unendlich vielen“ Fälle überleitet. Bender (1989) beschreibt das Potential dynamischer Repräsentationen, „die Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer Behauptung“ zu unterstützen (Bender, 1989, S. 129). Dem kann man in Bezug auf Argumente hinzufügen, dass es die Verwendung von dynamischen Repräsentationen in einer Schlussregel ermöglicht, diese Einsicht auch in einem Argument artikulieren zu können.

### Dynamische Repräsentationen und Allgemeingültigkeit

Unabhängig von der Struktur der Argumente stellt sich die Frage, welche der für dynamische Repräsentationen spezifischen Informationen und Eigenschaften genutzt wurden, um Argumente zu formulieren. Die von Bender (1989, S. 129) beschriebenen Funktionen dynamischer Repräsentationen (s. S. 41) geben einen Hinweis auf deren Potential, nicht alle traten jedoch in dieser Untersuchung auf. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da ein durch dynamische Repräsentationen hervorgerufener vertiefter Glaube an den Beweis oder seine Plausibilität nicht in Begründungen geäußert würde.

Auffallend häufig wurden jedoch dynamische Repräsentationen genutzt, um im Aufgabenpaar „Funktionenschar“ die unendliche Anzahl von Lösungen zu begründen, sei es nun wie im Beispiel oben mit Hilfe einer expliziten Schlussregel oder, wie zumeist, wenn die Schlussregel implizit bleibt. Das Erkennen der Allgemeingültigkeit einer Aussage und der Existenz unendlich vieler Lösungen sind insofern vergleichbar, als dass bei beiden mit Hilfe eines induktiven Schlusses von einer begrenzten Anzahl von Fällen auf eine unendliche Zahl von Fällen geschlossen wird. Dynamische externe Repräsentationen stellen diese Einzelfälle schnell und in großer Zahl bereit und unterstützen dadurch bei der Argumentation in Bezug auf unendlich

viele Fälle. Die in Aufgabe A3 („Funktionenschar“, s. S. 71) vorliegende DER stellte die Möglichkeit bereit, mit Hilfe von Schieberegler die Parameter  $h$  und  $k$  zu variieren, um so die Lage der Parabel anzupassen. Die Schüler konnten so erkennen, dass für mehrere  $h$  und  $k$  der Punkt  $Q$  auf der Parabel liegt. Abbildung 3.26 zeigt ein Beispiel für ein solches Argument, in welchem die DER offenbar zum Überprüfen von Einzelfällen genutzt wurde, um anschließend auf die unendliche Anzahl der Lösungen zu schließen.

- 
- a) unendlich viele, da es ja unendlich viele Möglichkeiten für die Werte  $h$  &  $k$  gibt, damit sie  $Q$  schneiden
- a) indem ich einfach mal ein Paar Werte eingegeben hab für  $h$  &  $k$  und ich dadurch mehrere Parabeln bekommen hab die  $Q$  schneiden

**Abbildung 3.26:** Beispiel für ein Argument, das die dynamische Repräsentation zum Schließen auf die unendliche Zahl der Lösungen nutzt

Dynamische externe Repräsentationen können jedoch nicht nur mit Hilfe ihres Informationsgehaltes das Argumentieren in Bezug auf Allgemeingültigkeit bzw. unendlich viele Lösungen unterstützen, sondern können darüber hinaus „Übergänge zwischen Fällen demonstrieren“ (Bender, 1989, S. 129). Mit interaktiven DER wie der in Aufgabe A3 können diese Übergänge jedoch nicht nur demonstriert, sondern aktiv von den Benutzern der Repräsentation nachvollzogen werden. Aus der DER lässt sich also nicht nur ablesen, dass es unendlich viele Lösungen gibt, sondern sogar, wie sich diese Lösungen erzeugen lassen: die Grundlage für eine konstruktive Argumentation ist damit gelegt. Abbildung 3.26 zeigt ein typisches Beispiel für eine solche Argumentation, welche eine Beschreibung enthält, wie sich die Lösungen konstruieren lassen, wodurch sich dann auf ihre unendliche Anzahl schließen lässt: „Für jede Verschiebung von  $k \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine passende Einstellung von  $h$ , so dass die Parabel  $Q$  schneidet. Da  $k$  eine unendlich große oder kleine Zahl sein kann, sind die Möglichkeiten unbegrenzt.“

### Hemmende Wirkung dynamischer externer Repräsentationen

An dieser Stelle lohnt es sich, auf eine weitere Eigenschaft dynamischer externer Repräsentationen nach Bender (1989) einzugehen. Demnach können diese den Beweis für die Behauptung selbst liefern, wenn die gegebene Repräsentation mit Hilfe interaktiver Variationsmöglichkeiten entsprechend umgeformt wird. Dies gilt insbesondere für Existenzbeweise (vgl. Bender, 1989, S. 129). Auch in den Aufgaben

- c) es gibt unendlich viele
- d) Für jede Verschiebung um  $k \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine passende Einstellung  $h$  von  $h$  so dass die Parabel  $Q$  schneidet. Da  $k$  eine unendlich große oder kleine Zahl sein kann sind die Möglichkeiten unbegrenzt

**Abbildung 3.27:** Beispiel für ein Argument, das die dynamische Repräsentation zum Konstruieren der Lösung nutzt

dieser Untersuchung war dies durchaus möglich, zumindest für die grundlegenden Fragen der jeweiligen Aufgabe. So konnten beispielsweise in Aufgabe A3 die Parameter  $h$  und  $k$  im Applet so variiert werden, dass der Punkt  $Q$  auf der Parabel lag, was sofort die Antwort auf die Frage der Teilaufgabe a) lieferte. In Abbildung 3.28 ist ein Beispiel hierfür zu sehen.

Diese Art des direkten Ablesens einer Lösung birgt jedoch auch Gefahren: Wenn die Lösung direkt aus der externen Repräsentation ablesbar erscheint, wird eine tiefgehende Auseinandersetzung mit der Aufgabe erschwert oder verhindert. Dies ist immer dann ein Problem, wenn der Informationsgehalt der Repräsentation über das hinausgeht, was direkt aus ihr ablesbar ist. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 3.29 zu sehen.

Diese Bearbeitung bezieht sich wieder auf die Aufgabe A3, in der in den Teilaufgaben a) und b) gefragt war, ob es Werte für die Parameter  $h$  und  $k$  gibt, so dass der Punkt  $Q(4|4)$  auf einer in einem Applet gegebenen Parabel liegt (s. S. 71). In den Teilaufgaben c) und d) sollte dann angegeben und begründet werden, ob es noch weitere Werte gibt, für die dies gilt. Während die Lösung der ersten Teilaufgaben vom Schüler direkt aus dem Applet abgelesen wurde, indem die Parameter mittels Schieberegler und Beobachtung der Parabel auf passende Werte gesetzt wurden, misslang dies offenbar in den beiden folgenden Teilaufgaben. Die Schieberegler konnten in Schritten von 0,01 Einheiten bewegt werden, was dazu führen kann, dass bei der Variation der Öffnung der betrachtete Parabelast über den Punkt  $Q$  „hinwingspringt“.

b) indem man  $k$  so reguliert, dass die Parabel auf  $Q$  liegt  $\rightarrow$  durch ausprobieren am Graphen

**Abbildung 3.28:** Beispiel für ein Argument, in dem die dynamische Repräsentation direkt die Begründung der Behauptung liefert



- a) Ja, gibt es
- b) ~~Ja~~ Durch testen in der Abbildung  
zum Beispiel :  $n = 0,25$   
 $k = 0,05$  (ca.)
- c) ~~Ja, gibt es.~~ Nein, gibt es nicht.
- d) Durch testen und ausprobieren in der Abbildung.

**Abbildung 3.29:** Beispiel für ein Argument, in dem technische Beschränkungen der dynamischen Repräsentation ein weitergehendes Argumentieren verhindern

Obwohl in der Aufgabenstellung die Parameter  $h, k$  als reelle Zahlen angegeben waren, wurden nur diejenigen Werte für eine Lösung in Betracht gezogen, die durch das Applet einstellbar waren. Die (technischen) Beschränkungen der dynamischen externen Repräsentation verhinderten hier also die weitergehende Argumentation, dass es unendlich viele Wertepaare für  $h$  und  $k$  gibt, so dass  $Q$  auf der Parabel liegt.

In Abbildung 3.30 ist ein zweites Beispiel für diese in Bezug auf die Argumentation hemmende Wirkung von dynamischen externen Repräsentationen zu sehen. Die Bearbeitung bezieht sich auf die Teilaufgabe d) der Aufgabe B4 (s. S. 77), in der mit Hilfe eines interaktiven Applets die Frage beantwortet werden sollte, ob für bestimmte Parameterwerte  $a, b, c \in \mathbb{R}$  der Graph der Funktion  $f(x) = a \cdot (x + b) \cdot \sin(x + b) + c$  nur zwei, einen oder keinen Punkt mit der  $x$ -Achse gemeinsam hat. Nur für  $a = 0$  und  $c \neq 0$  hat der Graph keinen Punkt mit der  $x$ -Achse gemein, in allen anderen Fällen sind es unendlich viele, da die Amplitude des Graphen wegen des Faktors  $(x + b)$  mit betragsmäßig steigendem  $x$  immer größer wird.

Im vorliegenden Argument wird jedoch behauptet, man könne solche  $a, b, c$  finden, nämlich „Wenn man den Graph weit genug nach oben schiebt ( $c$ ) und das Verhältnis zu  $a$  stimmt“. Offenbar wurde auch hier mit den Schiebereglern der dynamischen externen Repräsentation so lange experimentiert, bis „passende“ Werte für  $a$  und  $c$  gefunden wurden, das heißt, bis im Applet der Graph die  $x$ -Achse nur zweimal, einmal oder gar nicht schneidet. Dabei wurde jedoch außer acht gelassen, dass die vorliegende Repräsentation natürlich nur einen kleinen Teil des Graphen darstellt, der in positive wie negative  $x$ -Richtung unendlich weiter geht. Dass dynamische externe Repräsentationen einen (vermeintlichen) Beweis oder eine Beweisidee plausibler und überzeugender darstellen (vgl. Bender, 1989, S. 129), erweist sich hier also als nachteilig, weil unter Umständen nicht mehr über die dynamische Repräsentation hinausgedacht wird.

Die Gefahr, dass dynamische externe Repräsentationen die tiefere Beschäftigung mit einer Aufgabe verhindern (vgl. Schnotz, 2002b, S. 9), hat sich also auch in dieser Untersuchung gezeigt. Die „Illusion des Verstehens“ (Bétrancourt, 2005, S. 293), welches sich auf das Ablesen aus der Repräsentation beschränkt, hat in diesen Fällen das Lösen der Aufgaben verhindert.

a) Dort wo man den Graphen weit genug nach oben schließt (c) um das Verhältnis zu a stimmt!

**Abbildung 3.30:** Zweites Beispiel für ein Argument, in dem die dynamische Repräsentation ein weitergehendes Argumentieren verhindert

### 3.5.4 Multiple dynamische Repräsentationen in Argumenten

Prinzipiell bieten multiple dynamische Repräsentationen in Argumentationen eine Kombination der Potentiale von einerseits multiplen Repräsentationen, also die Kombination und den Wechsel zwischen Repräsentationssystemen zum Erhalt neuer Informationen (etwa um diese besser ablesen und verarbeiten zu können). Andererseits ermöglichen dynamische Repräsentationen das Erzeugen neuer Informationen durch Variation der gegebenen Repräsentation.

In der Untersuchung konnte jedoch nur sehr selten die Verwendung einer multiplen dynamischen Repräsentation innerhalb eines Argumentes beobachtet werden. Dies hat nachvollziehbare Gründe, die sich aus den Eigenschaften der MDR selbst ergeben. Zum einen stellen, wie in Abschnitt 1.3 ausführlich dargestellt, Repräsentationen stets Anforderungen an ihre Benutzer. Im Falle von multiplen dynamischen Repräsentationen sind diese besonders hoch, da sie nicht nur die Potentiale, sondern auch die Erfordernisse von multiplen und dynamischen Repräsentationen in sich vereinen und dadurch eine besonders hohe kognitive Last erzeugen (vgl. Abschnitt 1.3.1).

Außerdem gibt es für das seltene Auftreten von multiplen dynamischen Repräsentationen innerhalb einzelner Argumente auch einen eher praktischen Grund: Um eine MDR in nur einem Argument nutzen zu können, bedarf es einerseits (im Sinne der Explizität) einer ausführlichen, andererseits (im Sinne der Anzahl der Sätze oder Satzelemente) einer sehr kompakten Formulierung des Arguments. Ein derartiger Schreibstil ist eher bei Experten zu finden, die das mathematische Problem so verstehen, dass sie die Lösung in komprimierter Form zu Papier bringen können. Von Schülern, die von den Problemen stärker gefordert werden und wegen der herrschenden Zeitbeschränkung zudem auf eine elegante Formulierung ihrer Argumente verzichten, ist eine solche Ausdrucksweise nicht durchgängig zu erwarten.

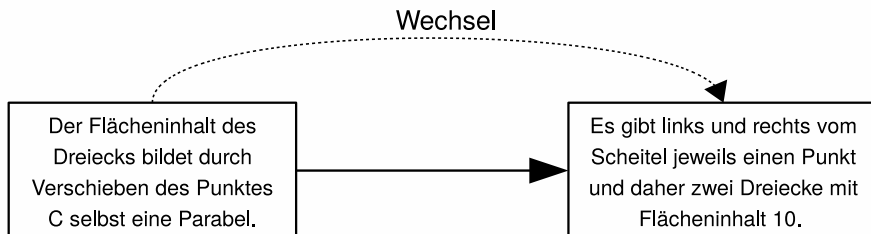
Wenn in der Untersuchung eine multiple dynamische Repräsentation genutzt wurde, dann stets in der Art, dass einerseits zwischen dem Datum und der Behauptung ein Repräsentationswechsel stattfand und zusätzlich im Datum die Dynamik genutzt wurde, um neue „Fakten“ als Basis des Arguments zu erhalten. Abbildung 3.31 zeigt ein Beispiel für ein solches Argument.

Die Bearbeitung bezieht sich auf die Aufgabe A4 („Fläche als Parabel“, s. S. 73). In dieser soll angegeben und begründet werden, wie viele Dreiecke  $ABC$  es gibt, die den Flächeninhalt 10 besitzen. Der Punkt  $C$  ist dabei beweglich auf einer Parabel, welche die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse in  $A$  und  $B$  hat (s. Abb. 3.5). Neben

- a) 2 ~~Werte~~ Dreiecke
- b) Da der Flächeninhalt des Dreiecks durch Verschieben des Punktes C selbst eine Parabelform bildet. Das Maximum des Flächeninhalts liegt bei ~~etwa~~  $x = 3$  und  $y$  etwa 27. Daher gibt es links und rechts vom Scheitel der Parabel jeweils einen Punkt. 7+7=2

**Abbildung 3.31:** Beispiel für die Verwendung einer multiplen dynamischen Repräsentation in einem Argument

dieser Konstruktion ist in der gegebenen Repräsentation ein Punkt gegeben, welcher in einem Koordinatensystem mittels Spurmodus den Graphen zeichnet, der den Flächeninhalt des Dreiecks beschreibt. Auf die Frage, wie viele solcher gesuchter Dreiecke es gibt, lautet hier die Antwort „2 Dreiecke“, und die Begründung lautet: „Da der Flächeninhalt des Dreiecks durch Verschieben des Punktes C selbst eine Parabelform bildet. Das Maximum des Flächeninhalts liegt bei  $x = 3$  und  $y$  etwa 27. Daher gibt es links und rechts vom Scheitel der Parabel jeweils einen Punkt“.



**Abbildung 3.32:** Schema des obigen Beispiels für die Verwendung einer multiplen dynamischen Repräsentation in einem Argument

Wie auch im Schema in Abbildung 3.32 dargestellt ist, findet zwischen dem Datum, welches sich auf den Funktionsgraphen bezieht, der auf der rechten Seite der Repräsentation den Flächeninhalt des Dreiecks beschreibt, und der Behauptung, welche sich auf die geometrische Konstruktion auf der linken Seite bezieht, ein Wechsel zwischen zwei Repräsentationssystemen statt. Außerdem wird im Datum die Möglichkeit dynamischer Repräsentationen genutzt, durch Variation zusätzliche Informationen darzustellen, in diesem Fall nämlich die Parabelform des Graphen durch Verschieben des Punktes C.

### Hemmen sich Multiplizität und Dynamik gegenseitig?

Wie oben beschrieben ergaben sich in der quantitativen Untersuchung bei der Auswertung der Aufgaben, welche multiple dynamische externe Repräsentationen enthielten, zum Teil unerwartete Ergebnisse (s. S. 88). So wurden beim Aufgabenpaar A2/A4 („Fläche als Parabel“) in der Aufgabe A4 bei einem Repräsentationswechsel in der Aufgabenstellung von IDR zu MDR signifikant weniger *dynamische* Argumente vorgebracht. Ähnlich verhielt es sich beim Aufgabenpaar B2/B4 („Symmetrie am Graphen“) bei einem Repräsentationswechsel von MSR zu MDR bezüglich der Multiplizität. So wurde in Aufgabe B4 signifikant weniger multipel argumentiert als bei Aufgabe B2. Aus den vorliegenden Daten und der Versuchsanordnung lassen sich diese Nebenwirkungen „quer“ zum Repräsentationswechsel der gegebenen Repräsentation zwar nicht erklären, jedoch lassen sich Vermutungen formulieren. In dem nachfolgenden Erklärungsversuch wurde dafür das Hauptaugenmerk wieder auf die spezifischen Informationsgehalte der auftretenden Repräsentationen gerichtet.

In Aufgabe A2 (s. S. 72) ist nur eine geometrische Konstruktion gegeben, aus der geschlossen werden sollte, dass es zwei Rechtecke mit Flächeninhalt 4 gibt. Eine Lösung der Aufgabe besteht darin, zu erkennen, dass der Flächeninhalt des Rechtecks in den Extrempositionen, also wenn  $E$  auf  $A$  oder  $B$  liegt, den Flächeninhalt 0 hat, während es irgendwo dazwischen einen Flächeninhalt  $> 4$  besitzt (abzulesen an den Koordinaten von  $E$ ). Nun lässt sich mit Hilfe der Stetigkeit (und des Zwischenwertsatzes) und der Symmetrie des funktionalen Zusammenhangs argumentieren, dass zwei Positionen von  $E$  existieren, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks 4 ist. Wie aus dieser beispielhaften Argumentation zu erkennen ist, führen die Argumente letztlich auf einen funktionalen Zusammenhang hin, dessen Graph durch das Verschieben des Punktes  $E$  zumindest qualitativ in Bezug auf die Extrempunkte und seiner Symmetrie mental konstruiert werden kann. Um die Argumentation nun aufzuschreiben, muss dieser konstruierende Teil, in der die Dynamik der Repräsentation, also das Verschieben des Punktes  $E$ , eine entscheidende Rolle spielt, in die Niederschrift, also die strukturierende Argumentation, einfließen.

In Aufgabe A4 (s. S. 73) wurde eine multiple dynamische Repräsentation gegeben. Anders als in A2 wird im rechten Teil der gegebenen externen Repräsentation der Graph, welcher den Flächeninhalt des betrachteten Dreiecks beschreibt, bei Variation des freien Eckpunktes  $C$  mit Hilfe des Spurmodus sichtbar gemacht. Um die Aufgabe zu lösen, ist im Wesentlichen die gleiche Argumentation möglich wie oben: der Flächeninhalt des Dreiecks wird 0, wenn  $C$  auf  $A$  oder  $B$  liegt, und dazwischen gibt es ein Dreieck mit Flächeninhalt  $> 10$ . Wie oben kann der Graph des funktionalen Zusammenhangs durch die Variation von  $C$  mental konstruiert werden, was durch die Erzeugung desselben auf der rechten Seite unterstützt wird. Im Unterschied zur Aufgabe A2 kann, wenn der Graph erst einmal gezeichnet ist, nun aber auch derjenige Schüler, der sich diesen zuvor nicht vorstellen konnte, in seinen Argumentationen auf ihn zugreifen und damit die entscheidenden Argumente Stetigkeit und Symmetrie ablesen. Weil diese aber sofort aus dem Graphen entnommen werden können, wird in der schriftlichen Argumentation nur noch auf ihn als fertige Repräsentation Bezug genommen – das Aufschreiben seiner Erzeugung aus

der dynamischen Repräsentation heraus ist nicht mehr notwendig, weil sie bei bestehendem Graphen keine zusätzliche Information zur Argumentation hinzufügt. Informationally gesehen ist der Graph damit eine Art „gefrorene Dynamik“, weil er auf einen Schlag alle Wertepaare zeigt, welche sich bei Variation des  $x$ -Wertes (oder hier des Punktes  $C$ ) ergeben.

In der quantitativen Untersuchung wurde eine solche Argumentation als statisch codiert, weil die definierten Schlüsselwörter für eine dynamische Argumentation nicht vorliegen. Trotzdem wurde die Dynamik genutzt; nämlich zum Zeichnen des Graphen auf der rechten Seite mit Hilfe des Spurmodus. In der *konstruierenden* Argumentation spielt die Dynamik also eine Rolle, nicht jedoch in der *strukturierenden* (vgl. Abschnitt 2.3). Dies ist schon daran sichtbar, dass sich viele statische Argumentationen auf einen Graphen beziehen, dieser aber gar nicht sichtbar wäre, wenn die Dynamik vorher nicht zu dessen Zeichnung genutzt worden wäre. Weil die quantitative Untersuchung jedoch Argumentationen als fertige Produkte untersuchen wollte, wird diese Art der Nutzung nicht erfasst und führt so zu dem scheinbar erstaunlichen Zusammenhang, dass eine in der gegebenen externen Repräsentation hinzukommende Multiplizität zu einer geringeren Nutzung von Dynamik führt.

Neben diesem repräsentationalen Grund könnte auch die oben bereits angedeutete Schwierigkeit eine Rolle gespielt haben, multiple und dynamische Repräsentationen überhaupt gemeinsam in einem Argument zu nutzen, insbesondere wenn die Argumentation knapp und wegen Zeitdrucks schnell aufgeschrieben werden soll. Auch Letzterer könnte insofern eine Rolle gespielt haben, als Aufgaben, in denen multiple dynamische externe Repräsentationen gegeben waren, am Ende des Tests standen. Möglicherweise ist den Schülern bei der Bearbeitung zusätzlich zu den obigen Überlegungen noch die Bearbeitungszeit nicht ausgereicht.

Es gibt also durchaus Erklärungsmöglichkeiten für die überraschenden Ergebnisse bei der Betrachtung „quer“ zum Repräsentationswechsel der Aufgabenstellung bei den Aufgabenpaaren A2/A4 und B2/B4. Welche davon nun der tatsächliche Grund für diese Beobachtungen sind, kann diese Untersuchung jedoch nicht klären. Notwendig wären weitere Untersuchungen, etwa in Form von Schülerbeobachtungen oder -interviews, welche den Lösungs- und Argumentationsprozess untersuchen.

### 3.6 Zusammenfassung der qualitativen Ergebnisse

Im qualitativen Auswertungsteil wurden die von Schülern schriftlich in Form von Schülerdokumenten vorgebrachten Argumente im Hinblick auf die Verwendung von Dynamik und/oder Multiplizität analysiert. Dabei spielte das Argumentationsmodell von Toulmin eine entscheidende Rolle. Mit dessen Hilfe konnten sowohl für dynamische als auch für multiple Repräsentationen spezifische Verwendungsweisen identifiziert und diese in verschiedene Fälle kategorisiert werden.

#### Multiple Repräsentationen

Bei multiplen Repräsentationen ist entscheidend, zwischen welchen Elementen des Toulminschen Argumentationsmodells der Wechsel zwischen den Repräsentationen-

systemen stattfindet und zu welchem Zweck dieser im Argument vorgenommen wird. Drei verschiedene Fälle traten in der empirischen Untersuchung auf:

1. Wechsel zwischen zwei Daten: Zur zusätzlichen *Stärkung* der Behauptung wird ein zweites Datum angeführt. Dieses bezieht sich auf ein anderes Repräsentationssystem als das erste Datum und die Behauptung.
2. Wechsel vom Datum zur Behauptung: Der Wechsel findet zwischen Datum und Behauptung statt und *ermöglicht* damit erst die Begründung der Behauptung.
3. Wechsel über die Schlussregel: Der Wechsel findet zwischen Datum und Behauptung statt und wird dabei durch die Schlussregel verbunden. Damit verbindet sie nicht nur Datum und Behauptung, sondern auch deren unterschiedliche Repräsentationensysteme, indem sie deren Verbindung aufzeigt.

Die ersten beiden Fälle entsprechen der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Funktion von Repräsentationen, „Fakten“ für die Argumentation zu liefern, also „offensichtliche Tatsachen“, die keiner weiteren Begründung bedürfen, weil sie direkt aus der Repräsentation ablesbar sind. Multiple Repräsentationen sind dazu in besonderer Weise in der Lage, da mit ihrer Hilfe eine Behauptung begründet oder zusätzlich gestärkt werden kann. Im dritten beschriebenen Fall werden multiple Repräsentationen zwar wie in Fall 2 dazu verwendet, eine Behauptung zu begründen, jedoch wird zusätzlich eine Schlussregel angegeben.

Diese stellt eine argumentative Verbindung zwischen Datum und Behauptung her, indem sie darlegt, inwiefern es plausibel ist, das angegebene Datum als eine Begründung der Behauptung zu akzeptieren. Zusätzlich jedoch verbindet sie auch die beiden Repräsentationensysteme des Datums und der Behauptung, indem sie deren Verbindung, also welche Informationen in beiden Repräsentationensystemen gemeinsam dargestellt werden, beschreibt.

#### **Dynamische Repräsentationen**

Dynamische Repräsentationen wurden in den Schülerbearbeitungen in erster Linie dazu eingesetzt, durch Variation neue „Fakten“ zu erhalten, die anschließend in den Argumenten verwendet werden konnten. Sie wurden daher zumeist im Datum des Arguments verwendet, spielten aber auch beim Finden einer Vermutung und dem Formulieren des Arguments eine große Rolle.

Seltener wurden sie in der Schlussregel eingesetzt. Hier wurde die Dynamik zum Teil dahingehend genutzt, dass sie einen argumentativen Übergang von den „vielen Fällen“, welche in der dynamischen Repräsentation beobachtet wurden, zu den in der Behauptung auftretenden unendlich vielen Lösungen schuf. Besonders das Visualisieren der Übergänge zwischen Fällen ermöglichte einigen Probanden eine konstruktive Argumentation, welche zunächst den Übergang zwischen speziellen Fällen beschrieb, um anschließend mittels eines induktiven Schlusses zu argumentieren, dass dies auch für unendlich viele Fälle gelten müsse.

Wie sich in der Untersuchung gezeigt hat, bergen dynamische Repräsentationen jedoch auch Gefahren. Zumeist wird es als Vorteil angesehen, dass Beobachtungen,

die in dynamischen externen Repräsentationen gemacht werden, besonders überzeugend wirken (vgl. Bender, 1989, S. 129). Wie alle externen Repräsentationen unterliegen aber auch DER gewissen Einschränkungen, welche bei der Argumentation berücksichtigt werden müssen oder sonst zu Schwierigkeiten und Fehlern führen können. Ein solcher Fehler kann technische Gründe haben: wenn zum Beispiel die Parameter eines Funktionsgraphen mit Hilfe eines Schiebereglers nur in Schritten von 0,01 variiert werden können, obwohl die Parameter beliebige reelle Zahlen sein könnten. Der Graph „springt“ dann unter Umständen genau über die Werte hinweg, die eine Lösung darstellen, was beim Schüler fälschlicherweise zu dem Eindruck führen könnte, dass es keine Lösung gibt. Eine weitere mögliche Fehlerquelle liegt in der beschränkten Abbildungsmöglichkeit von externen Repräsentationen, zum Beispiel kann ein Funktionsgraph nur in einem bestimmten Ausschnitt abgebildet werden. In beiden Fällen wirkt eine dynamische externe Repräsentation überzeugender als eine statische und verhindert so das Weiterdenken über die Darstellung hinaus und damit auch eine weitergehende Argumentation.

### **Multiple dynamische Repräsentationen**

Generell bieten multiple dynamische Repräsentationen die gleichen Möglichkeiten, welche auch multiple bzw. dynamische Repräsentationen auszeichnen. Sie können also einerseits durch zusätzliche Repräsentationen, andererseits durch Variation zusätzliche „Fakten“ anbieten und als Grundlage für Argumentationen dienen. Jedoch sind MDR schwierig zu nutzen, da sie auch die Anforderungen von multiplen und dynamischen Repräsentationen in sich vereinen, was zu einer hohen kognitiven Auslastung des Anwenders führen kann, welche die Bearbeitung einer Aufgabe erschwert bzw. erschweren kann. Multiple dynamische Repräsentationen innerhalb eines Arguments sind in der Untersuchung daher selten aufgetreten. Wenn sie genutzt wurden, dann fand der Repräsentationswechsel vom Datum zur Behauptung statt, wobei gleichzeitig im Datum mit Hilfe der Dynamik die gegebene Repräsentation so variiert wurde, dass sie eine Begründung für die Behauptung bot.

In der quantitativen Auswertung der Untersuchung in Abschnitt 3.3 hatte sich die überraschende Beobachtung angedeutet, dass sich die Verwendung von Multiplizität oder Dynamik in Argumenten möglicherweise gegenseitig hemmen könnten. Diese Frage konnte in der qualitativen Auswertung zwar nicht abschließend geklärt werden, jedoch konnte aus den Dokumenten die Vermutung gezogen werden, dass es sich lediglich um eine Folge der Betrachtung von Argumentation als Endprodukt im Gegensatz zum Argumentationsprozess handelt, da beispielsweise Dynamik besonders beim Formulieren von Vermutungen und Finden von Argumenten eingesetzt wird, aber anschließend nicht notwendigerweise schriftlich in der Argumentation festgehalten wird. Zusätzliche Untersuchungen wie Schülerbeobachtungen oder -interviews könnten diese Frage wahrscheinlich besser klären.

---

# Zusammenfassung und Ausblick

---

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Untersuchung wurde mit dem Ziel durchgeführt, herauszufinden, *ob* multiple und/oder dynamische externe Repräsentationen sich auf die Argumentationen von Schülern in schriftlichen Bearbeitungen von Aufgaben im Themenbereich „Funktionen“ auswirken und wenn ja, *wie* sie diese beeinflussen. Im nachfolgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchung zusammengefasst und eingeordnet. In dem darauf folgenden Abschnitt wird ein Ausblick gegeben, der mögliche Anwendungen einiger Resultate in Bezug auf verschiedene Gebiete zur Anschlussforschung vorstellt.

## 4.1 Einfluss externer Repräsentationen auf das Argumentieren

Die empirische Untersuchung wurde sowohl mit quantitativen als auch mit qualitativen Methoden ausgewertet. Dadurch lässt sich einerseits der Grad des Einflusses externer Repräsentationen auf die von Schülern in Argumentationen verwendeten beschreiben, andererseits die Art und Weise analysieren, wie sie externe Repräsentationen in ihren Argumenten nutzen.



#### 4.1.1 Grad des Einflusses externer Repräsentationen

Der quantitative Auswertungsteil dieser Arbeit sollte feststellen, ob in der Aufgabenstellung gegebene Repräsentationen Einfluss auf die Repräsentationsarten besitzen, die von Schülern in ihren schriftlichen Argumentationen verwendet werden. Hierzu wurden Paare von analogen Aufgaben gestellt, die sich inhaltlich nur oberflächlich unterschieden, jedoch in unterschiedlichen Repräsentationsformen dargestellt waren, zum Beispiel mit einer isolierten statischen Repräsentation in der ersten Aufgabe des Paares und einer isolierten dynamischen in der zweiten. Die Probanden sollten diese beiden Aufgaben nun nacheinander lösen. Anschließend wurden zwei Aspekte betrachtet:

1. Gibt es in Bezug auf die Verteilung der verwendeten Repräsentationsformen einen Unterschied zwischen den beiden Aufgaben eines Paares? Wurde zum Beispiel in der ersten Aufgabe eines Paares, welche mit einer isolierten statischen Repräsentation dargestellt wurde, weniger Argumentationen mit multiplen Repräsentationen als in der zweiten, die mit einer multiplen statischen Repräsentation dargestellt wurde?
2. Ist die Zahl der Schüler, welche beim Argumentieren die Repräsentationsform zwischen den Aufgaben wechselte, signifikant? Wie viele Probanden ließen sich also zum Beispiel durch die Angabe dahingehend beeinflussen, in der zweiten Aufgabe auf eine multiple Repräsentation Bezug zu nehmen, weil diese auch in der Aufgabenstellung verwendet wurde?

Insgesamt sind die beiden obigen Fragen mit „Ja“ zu beantworten: Sowohl die Unterschiede in Bezug auf die globale Verteilung als auch der Einfluss auf individueller Ebene sind signifikant. Besonders deutlich zeigte sich dies bei den „Wechslern“, deren Zahl bei drei von vier Aufgabenpaaren signifikant war. Dies sind diejenigen Probanden, die bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe eines Aufgabenpaares eine andere Repräsentationsform benutzten als in der zweiten Aufgabe. Bei der global betrachteten Verteilung (welche sich im Gegensatz zu den „Wechslern“ nicht auf einen bestimmten Probanden bezieht, sondern auf alle Aufgabenbearbeitungen) ließ sich bei der Hälfte der Aufgabenpaare Signifikanz nachweisen. Besonders stark ausgeprägt stellte sich der Einfluss der externen Repräsentationsform bei dem Aufgabenpaar „Gleichungen“ dar, bei der sowohl die Verteilung als auch die Zahl der Wechsler entlang des Repräsentationswechsels in der Angabe höchst signifikant war. Eine mögliche Erklärung ist in dem Umfang des Vorwissens zu finden, welches bei den in der Schule intensiv behandelten Gleichungen möglicherweise größer ist als bei den anderen Aufgaben.

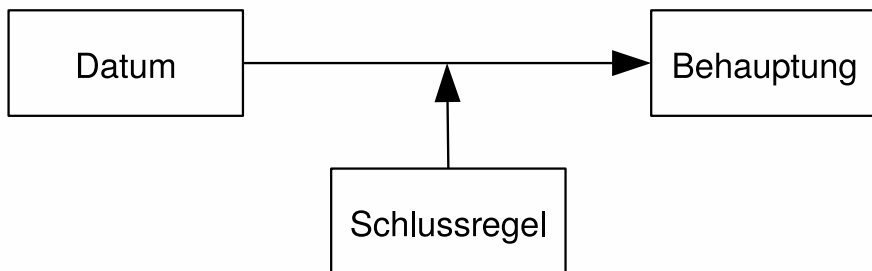
Zunächst könnte man hier den simplen Zusammenhang vermuten, dass sich die Schüler meist einfach an diejenige Repräsentationsform halten und in ihren Argumentationen verwenden, die bereits in der Problemstellung gegeben war. Doch so einfach sind die Zusammenhänge nicht. Dies zeigt sich einerseits in den zum Teil nicht signifikanten Ergebnissen, insbesondere bei der Betrachtung der Verteilung der in Argumentationen genutzten Repräsentationsarten in Bezug zu den in der Aufgabenstellung gegebenen. Andererseits wurden zudem auch Nebenwirkungen „quer“

zum Wechsel der Repräsentationsart beobachtet. So wurde beispielsweise in einem der Aufgabenpaare, welches einen Wechsel der Repräsentationsart von einer multiplen statischen zu einer multiplen dynamischen Repräsentation beinhaltete, in der zweiten Aufgabe signifikant weniger *multipl* argumentiert, obwohl beide Aufgaben multiple Repräsentationen enthielten und sich nur in Bezug auf die *Dynamik* unterschieden.

Über die Gründe können nur Vermutungen angestellt werden, es fällt jedoch auf, dass derlei Nebenwirkungen vor allem im Zusammenhang mit multiplen dynamischen Repräsentationen auftraten. Eine Erklärung könnte hierfür sein, dass die Menge an Informationen, die in einer multiplen dynamischen Repräsentation angeboten wird, so groß ist, dass der Schüler diese entweder nicht nutzen *kann*, weil er überfordert ist, oder dies nicht gar nicht *will*, weil bereits die Nutzung von Multiplizität *oder* Dynamik ausreichend ist, um die Problemlösung darzustellen.

#### 4.1.2 Einfluss der Repräsentationsform auf Argumente

Der qualitative Auswertungsteil sollte, nach der quantitativen Auswertung, einen genaueren Blick auf die Bausteine einer Argumentation richten, auf deren *Argumente*. Mit Hilfe des Argumentationsmodells von Toulmin wurde hierzu untersucht, wo die spezifischen Potentiale multipler und/oder dynamischer Repräsentationen genutzt wurden und zu welchem Zweck dies geschah. In Abbildung 4.1 ist der relevante Teil des Modells schematisch dargestellt. Rechts steht die *Behauptung*, also die Aussage, die einer Begründung bedarf. Diese wird auf Grund des *Datums* getroffen, welches angibt, wieso die Behauptung gilt. Die *Schlussregel* verbindet diese beiden Elemente. Sie gibt an, inwiefern es plausibel ist, von dem angeführten Datum auf die Behauptung zu schließen.



**Abbildung 4.1:** Schematische Darstellung eines Arguments, bestehend aus Behauptung, Datum und Schlussregel

#### Multiple Repräsentationen

Multiple Repräsentationen bieten durch zusätzlich dargestellte Informationen ein größeres Repertoire an „Fakten“, also Beobachtungen, die als Datum zur Begründung von Behauptungen dienen. Darüber hinaus lassen sich diese Informationen, je

nach vorliegender Repräsentation, nicht nur unterschiedlich ablesen – was je nach Aufgabe einen Effizienzgewinn mit sich bringen kann – sondern auch, gemäß den jeweiligen mathematischen Regeln, umformen und neu anordnen. So lässt sich beispielsweise die Existenz einer Lösung für eine Gleichung leicht ablesen, wenn die Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung als Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem dargestellt sind. Hier entsprechen die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte den Lösungen. Sollen die Werte der Lösung jedoch exakt bestimmt werden, ist der Graph zu ungenau und eine Gleichungsumformung effizienter. Dieses Potential wurde von den Schülern häufig genutzt. Multiple Repräsentationen wurden dabei einerseits als *zweites Datum* zur zusätzlichen Stärkung des Arguments genutzt, indem die Beobachtungen aus einer Repräsentation durch damit übereinstimmende in einer anderen Repräsentation argumentativ unterstützt wurden. Andererseits befähigten die zusätzlich verfügbaren Informationen häufig auch überhaupt erst zur Formulierung eines Arguments, wenn Schüler die notwendigen Beobachtungen zur Begründung einer Behauptung nur mit Hilfe einer zweiten Repräsentation fanden.

Besonders hervorzuheben ist die Art und Weise, wie die *Schlussregel* im Zusammenhang mit multiplen Repräsentationen eingesetzt wurde. In Toulmins Argumentationsmodell kommt der Schlussregel die Aufgabe zu, zu begründen, inwiefern es plausibel ist, vom Datum auf die Behauptung zu schließen. Einige Schüler nutzten sie jedoch bei multiplen Repräsentationen noch in anderer Weise. Sie stellten mit Hilfe der Schlussregel nicht nur eine argumentative Verbindung zwischen Behauptung und Datum her, sondern verbanden auch die in Behauptung und Datum verwendeten unterschiedlichen Repräsentationen, indem sie die Verbindung der beiden Repräsentationen offenlegten. Zum Beispiel wurde von einem Schüler die Existenz der Lösung einer Gleichung durch den Hinweis auf einen Schnittpunkt der beiden zugehörigen Graphen begründet. Zusätzlich wurde angegeben, dass der Schnittpunkt der Graphen der Lösung der Gleichung entspricht. Auf diese Weise wurde durch die Schlussregel nicht nur das Argument gestärkt, sondern auch dargelegt, *welche* für die Problemlösung relevanten Informationen in beiden Repräsentationen *wie* dargestellt sind. Wegen dieser offenkundig vorhandenen Möglichkeit, durch das Angeben der Schlussregel also nicht nur das Argumentieren, sondern auch die Verwendung von multiplen Repräsentationen zu fördern, soll dies weiter unten noch genauer betrachtet werden.

### **Dynamische Repräsentationen**

Dynamische Repräsentationen wurden vor allem für das Generieren neuer „Fakten“ genutzt, das heißt, durch Variation der gegebenen Repräsentation wurden neue Informationen erzeugt, die wiederum als Grundlage für Argumente dienen konnten. Die Nutzung dynamischer Repräsentationen durch Schüler und deren Verwendung in schriftlichen Argumentationen entspricht also den aus der Literatur entnommenen Vermutungen. Hervorzuheben ist jedoch die Verwendung dynamischer Repräsentationen in der Schlussregel, wo diese in einigen Fällen dazu genutzt wurden, von der Beobachtung „vieler Einzelfälle“ durch einen induktiven Schluss auf die Gültigkeit der Behauptung in unendlich vielen Fällen zu schließen. Wie bei den

multiplen Repräsentationen, bei denen die Schlussregel nicht nur Datum und Behauptung, sondern unterschiedliche Repräsentationen verbinden kann, vermag das Angeben einer Schlussregel in einem Argument also als Brücke dienen, um von einer notwendigerweise endlichen Zahl an Beobachtungen auf eine für unendlich viele Fälle geltende Behauptung zu schließen. Der Schlussregel kam also auch hier eine besondere Bedeutung zu.

Darüber hinaus konnte auch eine in der Literatur geäußerte Gefahr beobachtet werden, welche mit der Nutzung dynamischer Repräsentationen einhergeht. Dynamische Repräsentationen besitzen eine besonders große suggestive Kraft. Zum Teil lassen sich Behauptungen allein durch das Variieren der Ausgangsdarstellung belegen. Dies gilt insbesondere bei Existenzbeweisen. Wenn die gegebene externe Repräsentation – per se eine unvollkommene Abbildung des dargestellten Objekts – aber entweder aus technischen Gründen (zum Beispiel durch die Schrittweite eines Schiebereglers) oder durch den gewählten Ausschnitt der Darstellung ein direktes Ablesen der Lösung verhindert, kann dies dazu führen, dass Schüler fälschlicherweise die Überzeugung gewinnen, dass es tatsächlich keine Lösung gäbe. Auch in den untersuchten Schülerdokumenten traten solche Fälle auf, bei denen ein weitergehendes Argumentieren durch die Überzeugungskraft der dynamischen Darstellung verhindert wurde.

### **Multiple dynamische Repräsentationen**

Multiple dynamische Repräsentationen kombinieren die Potentiale von multiplen und dynamischen Repräsentationen, jedoch müssen zu deren Nutzung auch die Anforderungen, die beide Repräsentationsformen an den Nutzer stellen, beachtet werden, was zu einer besonders hohen kognitiven Auslastung führen kann. Die Verwendung von multiplen dynamischen Repräsentationen stellt für Schüler also eine im Vergleich zu anderen Repräsentationsformen besonders große Schwierigkeit dar. Darüber hinaus stellen multiple und dynamische Repräsentationen zum Teil die gleichen Informationen bereit, was die gleichzeitige Nutzung innerhalb eines Argumentes unter Umständen redundant werden lässt. Aus diesen Gründen wurden nur wenige Argumente mit multiplen dynamischen Repräsentationen in den Schülerdokumenten gefunden. Wo diese auftraten, entsprach die Nutzungsweise der Kombination aus dynamischen und multiplen Repräsentationen: Die Dynamik der Repräsentation wurde in Form von Variationen zum Erzeugen neuer „Fakten“ genutzt, die nach einem Repräsentationswechsel als Begründung für eine Behauptung eingesetzt werden konnten.

## **4.2 Konsequenzen**

### **4.2.1 Potential und Risiken komplexer Repräsentationen**

Welche Folgerungen lassen sich aus den oben beschriebenen Feststellungen ziehen, insbesondere in Bezug auf den Einsatz von multiplen und/oder dynamischen Re-

präsentationen in der Schule? Zunächst ist festzuhalten, dass Schüler das Potential derartiger Repräsentationen durchaus zu nutzen verstanden und die aus ihnen gezogenen Informationen gewinnbringend in ihren Argumentationen verwendet haben. Ein Einsatz derartiger Darstellungen in der Schule, insbesondere im Zusammenhang mit Technologien wie Taschencomputern, Tablets oder anderen Rechnern, bietet sich natürlich unmittelbar an.

Es muss in diesem Zusammenhang jedoch betont werden, dass die Verwendung von Repräsentationen, insbesondere von multiplen und/oder dynamischen, stets eine Herausforderung darstellt, die umso größer wird, je komplexer die Darstellung und je größer die Menge der angebotenen Informationen ist. Die Kraft solcher Repräsentationsformen bedingt gleichzeitig auch ihre Schwierigkeit. Dies zeigt insbesondere, was mittlerweile hinlänglich bekannt ist, dass alleine das Verwenden digitaler Technologien Schüler die Inhalte noch lange nicht besser verstehen lässt. Beim Einsatz von multiplen und/oder dynamischen Repräsentationen müssen die Möglichkeiten der jeweiligen Repräsentationsform und die daraus entstehenden Anforderungen genau bedacht werden. Dies impliziert auch die Notwendigkeit einer Anpassung der verwendeten Darstellungen an die jeweilige Zielgruppe, und zwar einerseits in Bezug auf das vorhandene Vorwissen sowie andererseits im Hinblick auf deren kognitive Leistungsfähigkeit.

Die Wahl der adäquaten Repräsentationsform im Zusammenhang mit der Problemstellung ist also eine zentrale Aufgabe. Um die Möglichkeiten der jeweiligen Repräsentation adäquat oder gar optimal nutzen zu können, kann deren Verwendung nicht nur gewissermaßen „nebenbei“ im Rahmen der normalen mathematischen Lehrinhalte in der Schule mitgelernt werden, sondern es muss explizit das Arbeiten mit dynamischen und multiplen Repräsentationen mit Hilfe adäquater Problemstellungen, insbesondere in Verbindung mit neuen Technologien, zu thematisiert werden. Darüber hinaus lässt sich dies mit der Förderung der Argumentationskompetenz verbinden, wobei der Schlussregel eine besondere Bedeutung zukommt.

### **4.2.2 Schlussregel mit Schlüsselrolle?**

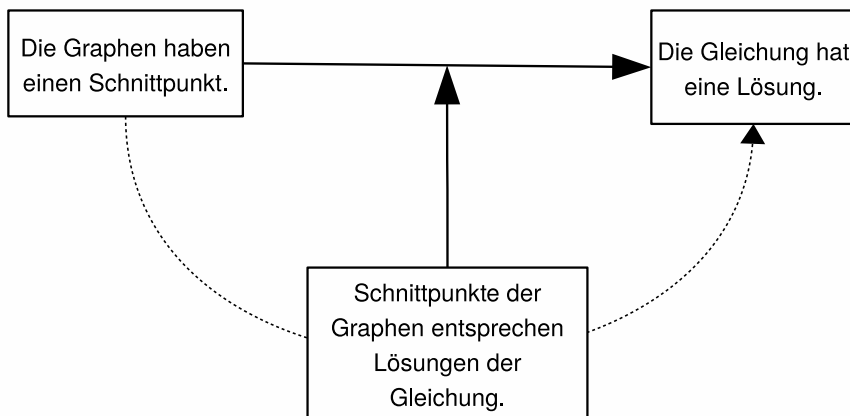
Von den vier Elementen aus Toulmins Argumentationsmodell – Behauptung, Datum, Schlussregel und Stützung – nimmt die Schlussregel eine besondere Stellung ein. Dies gilt insbesondere für die Mathematik. Wie im Folgenden dargestellt wird, kann das Schaffen eines Bewusstseins für die Bedeutung der Schlussregel, auch und besonders in der Schule, nicht nur für das Lehren und Lernen des Argumentierens, sondern auch in Bezug auf das Arbeiten mit multiplen Repräsentationen förderlich sein.

#### **Verbindung multipler Repräsentationen**

Die Schlussregel besitzt in Toulmins Argumentationsmodell die Funktion, Datum und Behauptung argumentativ zu verbinden. Anders als das Datum – welches eine Stärkung der Behauptung darstellt, indem die Grundlage angegeben wird, aufgrund derer die Behauptung getroffen wird – gibt die Schlussregel an, inwiefern der

Schluss vom Datum zur Behauptung überhaupt möglich ist (Toulmin, 2003, S. 91).

Wie die qualitative Auswertung der Untersuchung zeigt, besitzt die Schlussregel jedoch noch eine weitere Fähigkeit. Sie verbindet nicht nur Datum und Behauptung, sondern kann auch die Verbindung zwischen multiplen Repräsentationen verdeutlichen, wenn Datum und Behauptung auf verschiedene Repräsentationensysteme Bezug nehmen. Abbildung 4.2 zeigt das Toulmin-Schema für einen solchen Fall, wie er in der Untersuchung aufgetreten ist. Hier wird in der Schlussregel auf beide Repräsentationensysteme Bezug genommen, nämlich auf die Graphen und ihren Schnittpunkt im Datum sowie die Gleichung und deren Lösung in der Behauptung. Die Verbindung wird hergestellt, indem offengelegt wird, welche relevanten Informationen in beiden Repräsentationensystemen auf welche Weise dargestellt werden: So entspricht beispielsweise der Schnittpunkt der Graphen (genauer dessen  $x$ -Koordinate) der Lösung der Gleichung (und umgekehrt).



**Abbildung 4.2:** Schema eines Beispiels für ein Argument, in dem der Repräsentationswechsel über die Schlussregel stattfindet

Diese Beobachtung ist interessant, weil die Verbindung und der Wechsel zwischen Repräsentationensystemen Anforderungen an die Schüler stellt, die weit über das Verständnis beider Systeme hinaus gehen. Es wurde daher gefordert, ihre Verbindung explizit in der Schule zu lehren und zu lernen (s. Schwonke et al., 2009, S. 1241). Eine Maßnahme in dieser Hinsicht könnte es sein, beim Argumentieren mit multiplen Repräsentationen darauf zu achten, stets eine Schlussregel in der oben beschriebenen Form anzugeben. Das obige Beispiel ist nämlich durchaus typisch für die Schule, in der Eigenschaften eines Objekts (insbesondere beim Thema Funktionen) in stetem Wechsel zwischen graphischen und symbolischen Repräsentationsformen betrachtet werden. Dabei werden Beobachtungen aus der einen Repräsentation zur Begründung von Aussagen über die andere verwendet. Das Angeben von Schlussregeln in derartigen Argumentationen könnte ein Baustein eines solchen expliziten Lernens der Verbindung von Repräsentationen sein.

### Lösungsdokumentation mit CAS

Eine Neuerung im Mathematikunterricht der vergangenen Jahre war das Einbeziehen von Computeralgebrasystemen, auch in Abiturprüfungen. Diese können von Termumformungen über das Lösen von Gleichungen bis zur Integration oder Grenzwertberechnung auf Knopfdruck alle kalkülhaften Aspekte der Algebra bereitstellen. Darüber hinaus lassen sich mit den meisten CAS, wie etwa GeoGebra oder dem TI-Nspire, auch Funktionsgraphen zeichnen oder Tabellenkalkulation betreiben. In Bezug auf die Dokumentation der Lösungen stellen CAS jedoch neue Anforderungen an Lehrkräfte und Lernende. Beispielsweise besteht beim Gleichungslösen mit Papier und Stift der größte Teil einer Schülerbearbeitung aus dem Darstellen der Äquivalenzumformungen, die letztendlich zum Finden der Lösung führten. Wenn die kalkülhaften Berechnungen nun aber weitgehend oder gar vollständig an ein CAS ausgelagert werden, dann ergibt sich die Frage wie dann eine Lösungsdokumentation aussehen muss? Einen Vorschlag, welche Elemente eine solche Dokumentation enthalten sollte, machen Ball und Stacey (2003). Eine Weiterentwicklung zu einem auf Lösungsstruktur und -inhalt basierenden Dokumentationsraster wird derzeit von Beck erarbeitet (vgl. Beck, 2014).

Auch auf dieses Problem lässt sich das Toulminsche Argumentationsmodell anwenden. Betrachten wir als Beispiel die folgende Aufgabe:

Sei  $f(x) = x^3 + 2x$ . Besitzt der Graph der Funktion in einem Punkt eine Tangente, die parallel zu  $y = x$  ist?

Eine typische Schülerbearbeitung<sup>19</sup> mit CAS könnte wie folgt lauten:

Gegeben  $f(x) = x^3 + 2x$ .  
 $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$   
 $f'(x) = 1 \xrightarrow{\text{CAS}} x = \text{false}$   
Es gibt also keine Tangente.

Aus der gegebenen Funktionsgleichung wird also die Ableitung der Funktion gebildet, diese anschließend gleich 1 gesetzt und die Gleichung mit Hilfe des CAS gelöst. Dieses gibt „ $x = \text{false}$ “ zurück, woraus geschlossen wird, dass es keine solche Tangente gibt. Das Ergebnis wird in einem abschließenden Antwortsatz mitgeteilt. Analysiert man diese Bearbeitung mit Hilfe des Toulminschen Argumentationsmodells, so stellt der Antwortsatz die Behauptung dar, die vorherige Rechnung das Datum. Es handelt sich hierbei also um die auch in dieser Untersuchung häufig angetroffene Argumentform „Datum  $\rightarrow$  Behauptung“. Dabei ist es für den Adressaten – zum Beispiel für die korrigierende Lehrkraft – keineswegs einsichtig, inwiefern das Datum mit der Behauptung zusammenhängt, sofern er nicht schon weiß, auf was die Aufgabenbearbeitung hinausläuft.

Leicht umformuliert könnte die Bearbeitung wie folgt lauten:

---

<sup>19</sup> Basierend auf Erfahrungen aus der Auswertung des bayerischen Mathematikabiturs von 2014, in dem CAS als Hilfsmittel zugelassen war.

Gegeben  $f(x) = x^3 + 2x$ .

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

$f$  hat eine parallele Tangente zur Geraden mit  $y = x$ , wenn ihre Steigung mit der von  $y = x$  übereinstimmt, also:

$$f'(x) = 1 \xrightarrow{\text{CAS}} x = \text{false}$$

Es gibt also keine Tangente.

Hier wurde also in der Mitte der Bearbeitung ein Satz eingefügt. Wie im ersten Beispiel entspricht der Antwortsatz im Argument der Behauptung und die Rechnung dem zugrunde liegenden Datum. Der eingeschobene Satz jedoch entspricht der Schlussregel, da er darlegt, inwiefern vom Datum auf die Behauptung geschlossen werden kann, in diesem Fall also, *wieso* die vorgenommene Rechnung zu dem angegebenen Antwortsatz berechtigt. Auch hier ermöglicht das Angeben einer Schlussregel also ein einfacheres Nachvollziehen der Argumentation.

Damit lässt sich der Vorschlag formulieren, dass zu jedem Antwortsatz ein weiterer Satz gehören sollte, welcher angibt, inwiefern die vorhergehende Rechnung zu dem Antwortsatz passt. Natürlich wäre dies auch schon für Aufgaben wünschenswert, die ohne CAS bearbeitet werden. Weil eine genauere Begründung der einzelnen Schritte und damit eine besser nachvollziehbare Argumentationsführung jedoch Zeit und zusätzlichen Arbeitsaufwand erfordert, wird von einer solchen häufig abgesehen. Es könnte sich als lohnend erweisen, die durch die Entlastung vom Kalkül frei werdenden Kapazitäten im Sinne einer Förderung der Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit auf die oben beschriebene Weise neu zu investieren.

### Heranführen an Universitätsmathematik

In der Schule wird das Argumentieren und Beweisen als ein Zurückführen von Aussagen auf Gründe charakterisiert (Jahnke & Ufer, 2015). Wie nicht nur in der vorliegenden Untersuchung zu sehen ist, wird diesem Anspruch seitens der Schüler, wenn überhaupt, zumeist durch die Angabe eines Datums nachgekommen. Häufig geschieht dies auch in einer anderen Form als der natürlichen Sprache, zum Beispiel durch Angeben einer Rechnung wie in Abbildung 4.3:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+b) \cdot \sin(x+b) + c \\ f(-x) &= a \cdot (-x+b) \cdot \sin(-x+b) + c \\ &\Rightarrow \text{keine Symmetrie} \end{aligned}$$

**Abbildung 4.3:** Beispiel für eine Behauptung, die durch eine Rechnung gestützt wird. Eine Schlussregel wird nicht gegeben.

Je nach vereinbarter Argumentationskultur kann diese knappe Begründung ausreichen. Weil die argumentativen Sprünge zwischen Behauptung und Datum jedoch recht weit sein können und man, wie im obigen Beispiel, zum Teil schon vorher



wissen muss, auf was der Argumentierende hinaus will, besitzt diese Art der Argumentation jedoch noch Verbesserungspotential. Das Angeben einer Schlussregel kann eine solche Brücke zwischen Datum und Behauptung sein, welche die Argumentation transparenter und damit leichter nachvollziehbar gestaltet. Das Beispiel aus Abbildung 4.3 könnte mit einer eingefügten Schlussregel beispielsweise lauten:

Es gilt

$$f(x) = a \cdot (x + b) \cdot \sin(x + b) + c$$
$$f(-x) = a \cdot (-x + b) \cdot \sin(-x + b) + c.$$

Weil die Voraussetzung für Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse wegen  $f(x) \neq f(-x)$  nicht erfüllt ist, liegt keine Symmetrie vor<sup>20</sup>.

Vor dem Hintergrund der oft konstatierten Schwierigkeiten, welche der Wechsel von der Schul- zur Universitätsmathematik für die Studienanfänger mit sich bringt, ist zu bemerken, dass die Aufnahme der Schlussregel in die Argumentationskultur der Schulen auch deshalb einen Vorteil bringt, da das Angeben einer Schlussregel in der universitären Argumentationskultur sehr häufig erfolgt. Im folgenden Beispiel eines Beweises des Nullstellensatzes von Bolzano für stetige Funktionen aus einem Lehrbuch der Analysis wurden nach dem jeweiligen Element die Kürzel für Behauptung (B), Datum (D) und Schlussregel (SR) eingefügt. Weil es sich um ein mehrschrittiges Argument handelt, wurden die Kürzel zudem mit Nummern versehen, wobei (DX) zu (BX) und (SRX) gehört (mit  $X \in \{1, 2, 3\}$ ):

„[...] Die Menge  $A := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$  ist nichtleer und beschränkt (D1), so dass sie ein (endliches) Supremum  $\xi$  besitzt;  $\xi$  liegt offenbar in  $[a, b]$  (B1/D2). Nach A 22.8 (SR2) gibt es eine Folge  $(x_n)$  in  $A$ , die  $\rightarrow \xi$  strebt (B2/D3). Wegen der Stetigkeit von  $f$  (SR3) muss dann  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$  konvergieren (B3) [...]“

Heuser (1998, S. 223)

Für zwei von drei Aussagen wurde hier also eine Schlussregel angegeben, um Datum und Behauptung zu verbinden. Ein Element des Heranführens von Schülern an die universitäre Mathematik könnte daher das konsequente Einbeziehen von Schlussregeln in mathematischen Argumentationen an Schulen sein.

### 4.3 Ausblick

Zum Abschluss dieser Arbeit sollen einige Fragen gestellt werden, die sich für Anschlussarbeiten anbieten. Die vorliegende Arbeit konnte Themenbereiche herausarbeiten, an die sich weitere Studien anschließen könnten. Im Hinblick auf den Einsatz

<sup>20</sup>Natürlich ist das inhaltlich nicht richtig, schließlich ist der Graph von  $f$  achsensymmetrisch zur Parallelen zur  $y$ -Achse mit der Gleichung  $x = -b$ . Es sollte aber die Aussage des ursprünglichen Arguments erhalten bleiben.

von multiplen und/oder dynamischen Repräsentationen betrifft dies insbesondere die Frage nach den Folgen des erhöhten Cognitive Loads dieser Repräsentationsformen:

- Sind multiple *dynamische* Repräsentationen wegen des erhöhten Cognitive Loads für das mathematische Problemlösen weniger effizient als multiple *statische* Repräsentationen?
- Wie müssen multiple und/oder dynamische Repräsentationen konzipiert und in den Unterricht eingebunden werden, damit sie trotz des erhöhten Cognitive Loads von Schülern genutzt werden und lernförderlich wirken?

Auch in Bezug auf das Argumentieren ergeben sich Anknüpfungspunkte für weitere Forschung. Es wurde durch die Analyse von Schülerdokumenten erkannt, dass das Explizieren von Argumenten – insbesondere das Verbinden und Begründen von Argumentationsschritten mit Hilfe einer Schlussregel – in mehreren Bereichen positive Auswirkungen haben kann, die sich sehr gut für das Entwickeln einer allgemeinen Argumentationskompetenz eignen. Die Frage, wie ein solcher Mathematikunterricht konzipiert sein müsste, der sich dieses Potential der Schlussregel erschließt, ist jedoch noch offen. Insbesondere stellen sich die folgenden Fragen:

- Wie kann im Mathematikunterricht mit Hilfe des konsequenten Angebens einer Schlussregel im Rahmen des Arbeitens mit multiplen Repräsentationen sowohl die Qualität des Argumentierens als auch das Verständnis der Beziehungen von Repräsentationen gefördert werden?
- Wie sollten schriftliche Dokumentationen von Lösungswegen bei Verwendung eines Computeralgebrasystems durch das Angeben einer Schlussregel dargestellt werden? Wie müsste ein Mathematikunterricht gestaltet sein, in dem Schüler diese Arbeitsweise erlernen?
- Kann die Verwendung der Schlussregel bei Argumentationen in der Schule auf die spezifischen Argumentationsweisen der Universitätsmathematik im Hinblick auf das Begründen und Beweisen (besser) vorbereiten?

Es bleibt weiteren Forschungsarbeiten überlassen, auf diese offenen Fragen Antworten zu finden.



---

# Tabellenverzeichnis

---

1.1	Raster zur differenzierteren Beschreibung medialer Angebote (Weidenmann, 2002, S. 47) . . . . .	26
3.1	Leitfaden und Ankerbeispiele zur Auswertung . . . . .	69
3.2	Darstellung der analogen Aufgaben als Aufgabenpaare . . . . .	70
3.3	Bögen A und B, alle Aufgaben: Häufigkeiten der Argumentationsarten in Bezug zu gegebener Repräsentation . . . . .	79
3.4	Bogen A, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige, eindimensionale $\chi^2$ -Tests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten .	81
3.5	Bogen A, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind . . . . .	81
3.6	Bogen A, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige, eindimensionale $\chi^2$ -Tests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten .	82
3.7	Bogen A, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind . . . . .	83
3.8	Bogen B, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten . . . . .	84
3.9	Bogen B, Aufgaben 1 und 3: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (rechts) zum Repräsentationswechsels signifikant sind . . . . .	85
3.10	Bogen B, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige, eindimensionale $\chi^2$ -Test auf Unterschiede erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten .	86

3.11	Bogen B, Aufgaben 2 und 4: Beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ (links) des bzw. „quer“ (quer) zum Repräsentationswechsels signifikant sind . . . . .	86
3.12	Knappe Übersicht der Ergebnisse der quantitativen Untersuchung. Signifikanz entlang des Repräsentationswechsels ist fett gedruckt, ein hoch gestelltes „-“ bedeutet dass signifikant <i>weniger</i> dynamisch bzw. multipel argumentiert wurde.	88

---

# Literaturverzeichnis

---

- Acevedo Nistal, A., Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM*, 41(5), 627–636. doi:10.1007/s11858-009-0189-1
- Aebli, H. (1981). *Denken, das Ordnen des Tuns* (1. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. *Mathematik Lehren*, (11), 4–6.
- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33, 131–152.
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183–198.
- Ainsworth, S., Bibby, P. A. & Wood, D. J. (1998). Analysing the Costs and Benefits of Multi-Representational Learning Environments. In: M. Someren (Hrsg.), *Learning With Multiple Representations* (S. 120–134). Pergamon.
- Ainsworth, S. & VanLabeke, N. (2004). Multiple forms of dynamic representation. *Learning and Instruction*, 14(3), 241–255. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.002
- Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53–60.
- Ball, L. & Stacey, K. (2003). What Should Students Record When Solving Problems with CAS? Reasons, Information, the Plan, and Some Answers. In: J. T. Fey (Hrsg.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (S. 289–303). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Beck, J. (2014). Lösungsdokumentationen beim Einsatz neuer Technologien im Umfeld des Arbeitens mit Funktionen. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 145–148). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.
- Bedürftig, T. & Murawski, R. (2012). *Philosophie der Mathematik* (2. Aufl.). Berlin [u.a.]: de Gruyter.
- Bender, P. (1989). Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen* (S. 95–145).
- Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.
- Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.
- Bétrancourt, M. (2005). The Animation and Interactivity Principles in Multimedia Learning. In: R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 287–296). Cambridge: Cambridge University Press.
- Bétrancourt, M. & Tversky, B. (2000). Effect of Computer Animation On User's Performance: A Review. *Le Travail Humain*, 63(4), 311–329.
- Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Schriftenreihe Didaktik in Forschung und Praxis. Hamburg: Kovač.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1989). Warum haben nichttriviale Lösungen von  $f' = f$  keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "inhaltlich-anschaulichen" Beweisen. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen* (S. 199–209).
- Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal Proving: Examples and Reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183–203.
- Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7., vollst. überarb. und erw. Aufl.). Berlin [u.a.]: Springer.
- Brown, J. R. (2008). *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures* (2nd ed). Routledge contemporary introductions to philosophy. New York: Routledge.
- Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In: J. S. Bruner & G. Jusi (Hrsg.), *Studien zur Kognitiven Entwicklung* (S. 21–54). Stuttgart: E. Klett Verlag.
- Bruner, J. S. (1981). Der Akt der Entdeckung. In: H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (S. 15–29). Weinheim: Beltz.
- Bruner, J. S. & Jusi, G. (Hrsg.). (1971). *Studien zur Kognitiven Entwicklung: Eine kooperative Untersuchung am "Center for cognitive studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: E. Klett Verlag.
- Chandler, P. & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. *Cognition and Instruction*, 8(4), 293–332.
- Couturat, L. (1901). *La logique de Leibniz*. Paris: Alcan.
- Davis, P. J., Hersh, R., Freudenthal, H. & Zehner, J. (1985). *Erfahrung mathematic*. Basel: Birkhäuser.

- Descartes, R. (1954). *The geometry of René Descartes: [with a facsimile of the first edition]*. New York: Dover Publications.
- Douek, N. (2009). Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. In: G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 1, S. 142–153). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In: G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 15, S. 349–367). New ICMI Study Series. Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-007-2129-6\_15
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: T. Nakahara & M. Koyama (Hrsg.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Bd. 1, S. 55–69). Hiroshima, Japan.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z
- Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschul Kinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32, 27–51.
- Fischer, R. & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln ; aus einem Projekt des Interuniversitären Forschungsinstituts für Fernstudien österreichischer Universitäten*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Mannheim [u.a.]: Bibliograph. Inst.
- Fletcher, J. & Sigmund, T. (2005). The Multimedia Principle. In: R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 117–133). Cambridge: Cambridge University Press.
- Gruber, T. (2011). *Gedächtnis* (1. Aufl.). Lehrbuch. Wiesbaden: VS, Verlag für Sozialwissenschaften.
- Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Curriculum series. Toronto, Ont: OISE Press und Ontario Institute for Studies in Education.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM*, 39(1-2), 73–78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0
- Harrop, A. (1999). ENCAL: a prototype computer-based learning environment for teaching calculator representations. In: *Psychology of Programming (PPIG) 1999 11th Annual Workshop*.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Ästhetik und Naturwissenschaften Bildende Wissenschaften - Zivilisierung der Kulturen. Wien [u.a.]: Springer.
- Heuser, H. (1998). *Lehrbuch der Analysis* (12., durchges. Aufl). Mathematische Leitfäden. Stuttgart: Teubner.



- Horz, H. & Schnotz, W. (2010). Cognitive Load in Learning with Multiple Representations. In: J. L. Plass, R. Moreno & R. Brünken (Hrsg.), *Cognitive load theory* (S. 229–252). Cambridge, New York: Cambridge University Press.
- Jahnke, H. N. (2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *ZDM*, 40(3), 363–371. doi:10.1007/s11858-008-0097-9
- Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (im Druck). Berlin: Springer.
- Jong, T. de. (2010). Cognitive load theory, educational research, and instructional design: some food for thought. *Instructional Science*, 38(2), 105–134. doi:10.1007/s11251-009-9110-0
- Kadunz, G. (2010). Mathematikdidaktische Orientierungen. In: G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen* (S. 9–22). Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Kaput, J. J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. In: C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 19–26). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1987b). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. In: C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 159–196). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In: S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Bd. 4, S. 167–194). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates und National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In: E. Glasersfeld (Hrsg.), *Radical constructivism in mathematics education* (Bd. 7, S. 53–74). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In: D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 515–556). New York: Macmillan.
- Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrsg.). (1982). *Mathematische Anschauung und Mathematikfilm*, Stuttgart: Teubner.
- Kopperschmidt, J. (1989). *Methodik der Argumentationsanalyse*. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog.
- Kozma, R. B., Russell, J., Jones, T., Marx, N. & Davis, J. (1996). The use of multiple, linked representations to facilitate science understanding. In: S. Vosniadou (Hrsg.), *International perspectives on the design of technology-supported learning environments* (S. 41–60). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.
- Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 35(6), 247–256.
- Ladel, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz: Zur Bedeutung für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht*. Hamburg: Kovač.
- Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press.

- Marx, A. (2006). *Schülervorstellungen zu "unendlichen Prozessen"*. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre. Hildesheim: Franzbecker.
- Mayer, R. E. (2005a). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In: R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 31–48). Cambridge: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (Hrsg.). (2005b). *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. & Anderson, R. B. (1992). The Instructive Animation: Helping Students Build Connections between Words and Pictures in Multimedia Learning. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 444–452.
- Mayer, R. E. & Sims, V. (1994). For whom is a picture worth 1000 words - Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, 86(3), 389–401.
- Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken. *Qualitative Inhaltsanalyse*.
- Meij, J. van der & Jong, T. de. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and Instruction*, 16(3), 199–212. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.007
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.
- Meyer, M. (2010). Wörter und ihr Gebrauch - Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In: G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen* (S. 49–80). Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum?: Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(30), 1–7.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford psychology series. New York: Oxford University Press und Clarendon Press.
- Palmer, S. E. (1978). Fundamental Aspects of Cognitive Representation. In: E. Rosch & B. B. Lloyd (Hrsg.), *Cognition and categorization* (S. 262–303). Lawrence Erlbaum.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x
- Pedemonte, B. & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM*. doi:10.1007/s11858-011-0311-z
- Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (2. Aufl.). Cambridge (Mass.): Belknap Press of Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1998). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Bristol: Thoemmes Press.
- Peirce, C. S. (2000). *Semiotische Schriften* (1.). Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1991). *Die Psychologie des Kindes* (Ungekürzte Ausg., 4. Aufl.). Dtv. München: Klett-Cotta im Dt. Taschenbuch-Verl.

- Pickert, G. (1957). Die Bedeutung der Anschauung für den mathematischen Beweis. *Der Mathematikunterricht*, 3(4), 49–62.
- Prinz, W. & Müsseler, J. (2008). Psychologie als Wissenschaft. In: J. Müsseler (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie* (S. 1–11). Berlin [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.
- Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Mathematik Kompakt. Basel: Springer Basel und Imprint: Birkhäuser.
- Renkl, A., Berthold, K., Grosse, C. & Schwonke, R. (2013). Making Better Use of Multiple Representations: How Fostering Metacognition Can Help. In: R. Azevedo & Alevin, Vincent A. W. M. M (Hrsg.), *International handbook of metacognition and learning technologies* (Bd. 26, S. 397–408). Springer international handbooks of education. New York, NY: Springer.
- Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Ruppert, M. (2014). Analogiebildungsprozesse in beispielbasierten Lernumgebungen. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1035–1038). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.
- Salomon, G. (1994). *Interaction of media, cognition, and learning*. Hillsdale: L. Erlbaum Associates.
- Scaife, M. & Rogers, Y. (1996). External cognition: how do graphical representations work? *International Journal of Human-Computer Studies*, 45, 185–213.
- Schlaghecken, F. (1998). *Begriffsrepräsentationen im Gedächtnis: Interne Struktur von Basis- und Oberbegriffen*. DUV. Kognitionswissenschaft. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl.
- Schnotz, W. (2002a). Enabling, facilitating, and inhibiting effects in learning from animated pictures. In: *International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning*. Tübingen.
- Schnotz, W. (2002b). Wissenserwerb mit Texten, Bildern und Diagrammen. In: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet* (S. 65–81). Weinheim: Beltz PVU.
- Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In: R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 49–70). Cambridge: Cambridge University Press.
- Schnotz, W. & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie*, 46(3), 217–236.
- Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 141–156. doi:10.1016/S0959-4752(02)00017-8
- Schnotz, W. & Lowe, R. (2003). External and internal representations in multimedia learning. *Learning and Instruction*, 13(2), 117–123. doi:10.1016/S0959-4752(02)00015-4
- Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

- Schwonke, R., Berthold, K. & Renkl, A. (2009). How multiple external representations are used and how they can be made more useful. *Applied Cognitive Psychology*, 23(9), 1227–1243. doi:10.1002/acp.1526
- Sebeok, T. A. (1979). *Theorie und Geschichte der Semiotik*. Rowohlts deutsche Enzyklopädie. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In: G. Hanna & M. Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 15, S. 391–420). New ICMI Study Series. Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-007-2129-6\_17
- Skemp, R. R. (1973). *The psychology of learning mathematics* (2. Aufl.). Harmondsworth: Penguin Books Ltd.
- Someren, M. van (Hrsg.). (1998). *Learning With Multiple Representations*. Pergamon.
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Pädagogik und Zeitgeschehen. Münster [u.a.]: Lit.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Aktualisierte Auflage). Cambridge: Cambridge University Press.
- Treutlein, P. (1985). *Der geometrische Anschauungsunterricht*. Klassiker der Mathematikdidaktik. Paderborn: Schöningh.
- Villiers, M. de. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24(1), 17–24.
- Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedialer Supplantation: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Volkert, K. T. (1986). *Die Krise der Anschauung: Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Aufl.). Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weidenmann, B. (2002). Multicodierung und Multimodalität im Lernprozess. In: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet* (S. 45–62). Weinheim: Beltz PVU.
- Weigand, H.-G. (2012). Begriffe lehren - Begriffe lernen. *Mathematik Lehren*, (172), 2–9.
- Weigand, H.-G. (2013a). Beweisen im (zukünftigen) Geometrieunterricht: Zum Potential der Lehrkustdidaktik. *Der Mathematikunterricht*, 59(6), 30–31.
- Weigand, H.-G. (2013b). Flashing back and looking ahead: Didactical implications for the use of digital technologies in the next decade. In: E. Faggiano & A. Montone (Hrsg.), *Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching ICTMT11* (S. 298–303).
- Weigand, H.-G. & Bichler, E. (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions. *ZDM*, 42(7), 697–713. doi:10.1007/s11858-010-0274-5

- Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.
- Wentura, D. & Frings, C. (2013). *Kognitive Psychologie*. SpringerLink : Bücher. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden und Imprint: Springer VS.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 237–257). Berlin: Cornelsen.
- Wittmann, G. (2009). Beweisen und Argumentieren. In: H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 35–53). Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Kaum eine mathematische Tätigkeit bestimmt das Wesen der Mathematik so sehr wie das Argumentieren. Dies gilt gleichermaßen für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe. Wer argumentiert, benötigt jedoch Informationen, um Aussagen formulieren zu können. Diese werden in der Mathematik durch Repräsentationen mathematischer Objekte bereitgestellt. Durch den Einzug des Rechners in den Mathematikunterricht wurden hierzu neue Möglichkeiten geschaffen: Multiple und dynamische Repräsentationen, die über Darstellungsgrenzen hinweg verschiedene Blickwinkel auf das gleiche Objekt verknüpfen, können heute mühelos erzeugt und interaktiv variiert werden. Mit Hilfe bestehender Theorien zu Repräsentationen und dem Argumentieren beantwortet die Arbeit die Frage, welchen Einfluss diese neuartigen Repräsentationen auf die Argumentationen von Schülerinnen und Schülern besitzen und leistet so einen Beitrag zur Diskussion über den Einsatz von digitalen Technologien im Mathematikunterricht.