Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen

Dmitri Nedrenco[⋆] und Johannes Beck[⋆]

[⋆]Institut für Mathematik, Universität Würzburg

17. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Origami oder Papierfalten (jap. *oru* – falten, *kami* – Papier) begegnet uns in vielen alltäglichen Situationen: Als Briefkouvert, Weihnachtssterne und dergleichen mehr. Auch Mathematik begegnet uns vielfach in der Umwelt: In Form von Zahlen, geometrischen Formen wie Spielwürfel, bogenförmige Gewölbe, Brücken, usw. Selbst, wenn wir sie nicht wahrnehmen, ist Mathematik da – zum Beispiel bei der Ampelsteuerung, GPS und digitalen Verschlüsselungen.

Seltener sehen wir eine Kombination von Mathematik und Papierfalten: etwa diverse DIN-A-Formen, die halbiert wieder eine DIN-A-Form haben, gefaltete Papiereinkaufstüten, ideenreiche Versandpakete. Papierfalten spielt im Mathematikunterricht jedoch üblicherweise nur insofern eine Rolle, als man schöne Formen (Würfel, Sterne) oder Visualisierungen bekannter Sätze (Pythagoras, Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck, Papierstreifenknoten) vorfaltet. Darüber hinaus birgt Papierfalten allerdings ein hohes mathematisches Potenzial, so dass es schade ist, es lediglich als ein Visualisierungswerkzeug zu benutzen. Wir wollen in dieser Arbeit aufzeigen, wie man Papierfalten auf einem hohen mathematischen Niveau betreiben und eine mathematische Theorie mit eigenen Händen erschaffen kann.

Es gibt bereits viele Arbeiten, die Papierfalten mathematisch betrachten. Gezeigt wurde u. a. wie Lösungen von Gleichungen dritten Grades mittels Papierfalten konstruiert werden können, vgl. [Hul12, pp. 78–79] oder wie man besondere geometrische Objekte (wie Polyeder oder Vielecke) faltet, vgl. [Mon09]. Ganze Sammlungen von vollständig ausgearbeiteten Arbeitsblättern für einen Einsatz im Unterricht zu ganz verschiedenen Themenbereichen sind bereits erschienen, vgl. [SHH13], [Hul12].

Eine sehr schöne Theorie des mathematischen Papierfaltens ist aus unserer Sicht die Theorie der Flachfaltbarkeit. Diese Theorie geht der folgenden Frage auf den Grund: Kann ein gegebenes Faltmuster zu einer flachen Figur gefaltet werden (denken Sie etwa an einen gefalteten Kranich und sein Faltmuster)? Es scheint nur wenige deutschsprachige Quellen wie [Hun13] zu geben, die sich mit dieser Theorie beschäftigen. Im deutschsprachigen Raum schrieb unseres Wissens noch niemand darüber, wie man diese Beschäftigung sinnvoll in der (Hoch)schulmathematik einsetzen kann. Jedoch gibt es ein herausragendes englisches Buch [Hul12] zu diesem Thema von Thomas Hull[1]: »Project Origami«, an dem sich auch unsere Arbeit maßgeblich orientiert. Wir wollen die Theorie der Flachfaltbarkeit im deutschsprachigen Raum bekannter machen. In dieser Arbeit stellen wir Einsatzmöglichkeiten für den Schulunterricht dar, diskutieren Probleme bei der Umsetzung und schlagen mögliche Lösungen vor.

2 Eine Unterrichtssequenz

2.1 Vorbereitungen

Es stellt sich zuerst die Frage, ob sich die Beschäftigung mit Papier und der Flachfaltbarkeit überhaupt an Inhalte und Ziele eines schulischen Curriculums anknüpfen lässt.

Einerseits soll diese Beschäftigung kein Ersatz und keine Alternative für den üblichen Schulunterricht werden. Andererseits können Schülerinnen und Schüler bei dieser Beschäftigung Mathematik so betreiben, wie es Mathematikerinnen und Mathematikern zu eigen ist. Damit ist gemeint, dass Schülerinnen und Schüler Vermutungen aufstellen, Beispiele und Gegenbeispiele dafür suchen und schließlich mathematische Beweise führen. Dabei werden vor allem die Leitidee *Raum und Form* sowie die Kompetenzen *kommunizieren* und *argumentieren* angesprochen, vgl. [KMK12] und Abschnitt 4.

[1]Tom Hull ist auch einer der führenden Forscher der Theorie der Flachfaltbarkeit.

Aus unserer sich Sicht eignet sich daher diese Unterrichtssequenz besonders für Projektarbeiten, wissenschaftspropädeutische Seminare oder vergleichbare Konzepte.

Dauer

Um eine offene und schülerzentrierte Arbeitsweise zu ermöglichen, gehen wir von etwa drei Sitzungen à 90 Minuten aus. Alternativ lässt sich diese Aktivität auch in weniger Zeit durchführen. Dazu ist es aber nötig, den Grad der Offenheit zu reduzieren und die Beschäftigung stärker zu strukturieren; aus unserer Sicht hat diese Option den Nachteil, dass man damit Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit nimmt, selbstständig alle Entdeckungen zu machen. Auch wenn wir der Meinung sind, dass die erste, offenere Variante bevorzugt werden sollte, geben wir in Abschnitt 3.2 einige Ideen für eine mögliche Vorstrukturierung des Entdeckens.

Material

Als Material brauchen Sie lediglich eine große Tafel und viel Papier. Gut eignen sich schlichte Notizzettel der Größe 10 cm × 10 cm für die Klasse und größere Papiere für Sie, ca. 20 cm × 20 cm, vorzugsweise zweifarbig, damit die Klasse Ihrem Falten leichter folgen kann.

Klasse

Bei einer Gruppengröße von ca. 8–12 Schülerinnen und Schülern kann noch idealerweise auf jede Meinung, jede Behauptung und jede Faltung eingegangen werden. Bei einer größeren Klasse könnte man sie entweder in Gruppen arbeiten lassen oder als Moderator dafür sorgen, dass möglichst alle gleichermaßen eingebunden werden.

2.2 Hinführung zum Thema

Beginnen Sie damit, dass Sie ein bereits gefaltetes Modell vorstellen, zum Beispiel ein Tetraeder vgl. [Mon09, pp. 65-66] oder einen Würfel, vgl. [Mon09, pp. 87–88], oder einen Kranich, vgl. [Hul12, pp. 210–211]. Falten Sie dieses Objekt auseinander und zeigen Sie der Klasse das Faltmuster, die Menge der Falze. Die klassische Frage des Origami, die man sich in diesem Zusammenhang stellen kann ist: Wie kann man ein bestimmtes Objekt (eben Kraniche oder Tetraeder) falten, das heißt, wie sieht das Faltmuster dazu aus? Wir stellen uns jedoch hier eine umgekehrte Frage: Kann man entscheiden, ob ein vorliegendes Faltmuster gefaltet werden kann, so dass das Ergebnis flach auf dem Tisch liegt? Anschaulich gesprochen: Ist es möglich, dieses Objekt in ein Buch zu legen, ohne dass neue Falze entstehen? Insbesondere möchte man dies entscheiden, *ohne* tatsächlich falten zu müssen. Diese Frage kann daher so formuliert werden: Kann ein Computer allein durch die Angabe des Faltmusters erkennen, ob dieses flachfaltbar ist?

Wir beschreiben nun, wie eine Unterrichtssequenz aus diesen Fragen entstehen kann.

2.3 Erste Schritte

Nehmen Sie ein quadratisches Stück Papier in die Hand, markieren Sie einen Punkt in der Mitte und zeichnen Sie Strecken vom Punkt zum Rand ein. Vergleichen Sie das Bild 1(a).

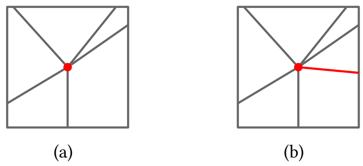


Bild 1: *Ein willkürliches Faltmuster links ist nicht flachfaltbar; erst ein gut platzierter sechster Falz (rechts, rot) erlaubt es, das Faltmuster flachzufalten.*

Ist dieses Faltmuster flachfaltbar? Versuchen wir dieses Faltmuster tatsächlich flachzufalten, so wird es nicht gelingen, ohne weitere Falze hinzuzufügen. Warum ist das so? Fügt man allerdings geschickt Falze ein wie im Bild 1(b), so gibt es eine Möglichkeit, das neue Faltmuster flachzufalten. Probieren Sie es aus!

Wie kann man das verstehen? Gibt es allgemeine Aussagen hierzu? Hier kann man Schülerinnen und Schülern vorschlagen, mehrere Beispiele auszuprobieren und Vermutungen aufzustellen, unter welchen Bedingungen ein solches Beispiel flachfaltbar sein wird oder nicht. Ein schönes Eingangsbeispiel ist im Bild 2(a) zu sehen.

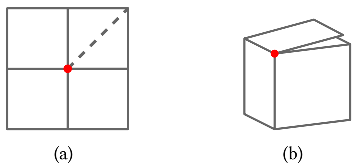


Bild 2: *Versuchen wir das Faltmuster links zu falten, so dass der gestrichelte Falz in die andere Richtung als die vier weiteren Falze schaut, dann erhalten wir eine so genannte Ecke (rechts).*

Ein solcher Anfang ist nicht ganz unproblematisch. Erstens, die Klasse sollte in der Lage sein, mit einem solch offenen Vorgehen zurecht zu kommen, mit selbstständigem Arbeiten oder Arbeiten in Gruppen vertraut sein. Zweitens: Ist das Niveau der Klasse zu niedrig, so kann es passieren, dass nur schwer und wenige Vermutungen aufgestellt werden.

Wird jedoch diese Form der Fragestellung angenommen, so kann das für ein Gefühl der Selbstständigkeit und Eigenverantwortung im mathematischen Unterricht sorgen.

Gelingt dieses zugegebenermaßen sehr offene Vorgehen nicht, so kann man zunächst Faltmuster mit drei–vier Falzen studieren.

Wir geben beispielhaft einige Schüleräußerungen an, die man zu Beginn hören kann:

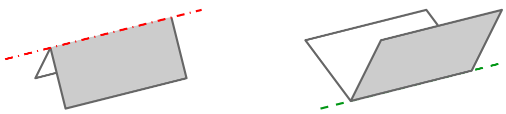
a) *»Mit drei Falzen gehts nicht!«* An dieser Stelle kann man fragen, was diese Aussage genau bedeutet: Gemeint ist wahrscheinlich, dass kein Faltmuster mit genau drei Falzen je flachfaltbar sein kann. Das ist zwar richtig, aber es ist nicht zu empfehlen, direkt nach einem Beweis zu suchen. Sammeln Sie erstmal weitere Vermutungen. Allerdings kann man die Klasse fragen, ob jemand doch ein solches

Faltmuster flachfalten kann. Sollte es jemandem gelingen (das geht nicht!), dann ist folgender Trick von ungeheurer Wirkung: Bitten Sie die Schülerin oder den Schüler das gefaltete Modell Anderen zum Überprüfen zu geben. Es wird sich sehr schnell herausstellen, dass das Faltmuster nicht genau drei Falze besitzt.

b) *»Muss der Punkt genau in der Mitte liegen?«* Sie können sich und Ihre Klasse davon überzeugen, dass die Position des Punktes keine mathematische Relevanz hat; dies ist lediglich eine faltpraktische Festlegung.

c) *»Muss das ein Punkt sein? Kann ich auch mehrere Punkte einzeichnen?«* Diese Frage muss geschickt nach hinten gestellt werden, da sie deutlich komplizierter ist. Erklären Sie der Klasse, dass zuerst »kleinere Brötchen gebacken werden sollten und für den Anfang reicht es, sich auf lediglich einen Punkt zu konzentrieren.

d) *»Spielt das eine Rolle in welche Richtung ich die Falze falte?«* Das spielt eine sehr große Rolle, wie wir im Folgenden sehen werden. An dieser Stelle bietet es sich an, die beiden Begriffe einzuführen: *Berg-* und *Talfalz*.



Links ist ein Bergfalz, rechts ein Talfalz angedeutet.

Wenn man so will, ist diese Unterscheidung eine *Färbung* der Falze des Faltmusters – Berge sind eine Farbe, Täler eine andere. Eine Färbung ist lediglich eine weitere Eigenschaft der Falze des Faltmusters. Zu sagen, ein Faltmuster sei flachfaltbar bedeutet also eine Färbung der Falze zu finden (in Berge und Täler), mit der man tatsächlich (genau dieser Färbung folgend) das Muster zu einem flachen Objekt falten kann. Welche Beobachtungen lassen sich über Berge und Täler in einem Faltmuster machen?

Nachdem nun die anfänglichen Fragen und Missverständnisse geklärt wurden, können sich Schülerinnen und Schüler auf das Ausprobieren konzentrieren. Sie haben genug Papier vor sich liegen und sollen möglichst frei nach Beispielen für flachfaltbare aber auch nicht flachfaltbare Muster suchen. Dabei entstehen (zweifellos!) verschiedene Beobachtungen, die man auch festhalten sollte. Wir empfehlen, eine geäußerte Behauptung eines Schülers an die Tafel samt seinem Namen zu schreiben, etwa: »Tina: Es gibt Beispiele für nicht flachfaltbare Muster mit genau vier Falzen.« Es ist nicht zu erwarten, dass Tina dies genau so gesagt hat. Stattdessen wohl eher: »Ich habe ein Beispiel gefunden mit vier Falzen, wo es nicht flach wird.« Damit die geäußerten Behauptungen tafelgerecht [2] aufgeschrieben werden können, bietet sich es an, die Schüler zu fragen, ob sie ihre Äußerungen prägnanter formulieren könnten (damit fördern Sie ein weiteres Reflektieren des Gesagten). Nur, wenn Tina keine prägnante Formulierung findet, sollte die Lehrperson eine Formulierung vorschlagen; dabei sollte man Tina fragen, ob diese Umformulierung ihre Behauptung richtig wiedergibt.

Es ist durchaus schwierig, Vermutungen zu finden, sie in Worte zu fassen und sich zu trauen, diese der ganzen Klasse zur Diskussion zu stellen. Daher empfehlen wir, unmotivierte oder bis zu diesem Zeitpunkt nicht ins Geschehen einbezogene Schülerinnen und Schüler so einzubinden, dass man sie bittet, ihre Meinung bzw. Einschätzung zu bisher festgehaltenen Vermutungen zu äußern. Keinesfalls sollte man jedoch neue Behauptungen erzwingen.

Erfahrungsgemäß erhält man nach einer Weile folgende Vermutungen in ungefähr dieser Form:

- ⋆ Ali: »4 Falze und flachfaltbar, dann genau ein Falz anderer Farbe.
  Umformuliert von »Bei 4 Falzen gibt es 3 Berge und ein Tal.«
- ⋆ Regina: »Gerade Anzahl an Falzen $\Longrightarrow$ flachfaltbar.«
  Diese Aussage ist nicht richtig und es ist zu erwarten, dass sofort Gegenbeispiele folgen. Nehmen Sie trotzdem diese Aussage auf, kritisieren Sie sie nicht und bitten Sie Regina ein von ihren Mitschülern gefundenes Gegenbeispiel zu untersuchen. Sobald sie dieses als solches einsieht, kann man die Aussage durchstreichen (aber nicht wegwischen).
- ⋆ Peter: »Bei 4 Falzen zwei gegenüberliegende Winkel in der Summe $180°$ $\Longrightarrow$ flachfaltbar«.
- ⋆ Anna: »Wenn alle Winkel gleich groß sind, dann ist das Faltmuster flachfaltbar.«

Nun können wir beobachten, dass die gesammelten Behauptungen drei Richtungen ansprechen, die bisher in keinem Zusammenhang stehen[3]: Anzahl der Falze, Färbung der Falze, Winkel zwischen den Falzen. Diese drei Richtungen sollen nun untersucht werden.

2.4 Anzahlen und Farben

Nachdem wir nun drei Richtungen ausgemacht haben, die wir untersuchen sollten, lassen wir die Klasse entscheiden, welche davon wir uns zunächst vornehmen wollen. Tatsächlich ist es aber leichter, anfangs über Farben der Falze nachzudenken und wir versuchen, die Schülerinnen und Schüler in diese Richtung zu lenken. Richtig ist, dass in einem flachfaltbaren Faltmuster die Falze nicht beliebige Farben haben können, so sind zum Beispiel Faltmuster mit nur vier Bergen oder Faltmuster mit exakt sechs Bergen und zwei Tälern nicht flachfaltbar. Wir sehen es als sehr bereichernd an, die Schülerinnen und Schüler viele Beispiele falten und analysieren zu lassen – sie entdecken wichtige Zusammenhänge und stoßen womöglich auf weitere Beobachtungen. An dieser Stelle wollen wir begreifen, was über einen Zusammenhang zwischen Bergen und Tälern in einem flachfaltbaren Faltmuster ausgesagt werden kann. Wir sehen zwei vielversprechende Richtungen, wie Sie diese Frage in der Klasse angehen können.

[2] Eine Äußerung ist *tafelgerecht*, wenn sie eine eindeutige Aussage ist, die in eine Zeile der Tafelebene passt. Ist eine Äußerung nicht tafelgerecht, dann wollen wir sie so abändern, dass sie tafelgerecht wird, und möglichst nah an der Originaläußerung bleibt.

[3] An dieser Stelle bietet es sich an, bisher wenig aktive Schülerinnen und Schüler ins Gespräch einzubinden.

Sind Sie gewillt und ist die Klasse in der Lage, offen zu arbeiten, so können Sie fragen, welche Beobachtungen über die Anzahlen von Bergen und Tälern gemacht werden können.

Entscheiden Sie sich dagegen für ein stärker moderiertes Vorgehen, so schlagen wir vor, eine Tabelle anzufertigen, in der Anzahlen von Bergen und Tälern in flachgefalteten Mustern der Klasse festgehalten werden. Eine solche Tabelle könnte wie folgt aussehen:

n	B	T
4	3	1
4	1	3
6	4	2
8	5	3
14	8	6.

Dabei sei n die Summe von Bergen, B, und Tälern, T. Bei diesem Vorgehen erscheint es leichter, die richtige Behauptung aufzustellen, dass die Anzahlen verschiedener Farben sich um 2 unterscheiden. Hier ist interessant zu bemerken, dass mit steigendem n die Tatsache $|B - T| = 2$ immer weniger intuitiv wird: Warum soll es denn nicht möglich sein, bei 34 Falzen genau 20 Berge und 14 Täler zu haben? Diese Beobachtung könnte eine interessante Diskussion ergeben und vielleicht zum ersten Mal bei dieser Beschäftigung aufzeigen, dass die Theorie hinter der Flachfaltbarkeit reichhaltiger sein kann, als man womöglich angenommen hat.

An dieser Stelle empfehlen wir, der Klasse nochmal klar zu machen, dass einige Beispiele keinen Beweis ersetzen. Vielmehr können Sie fragen, wer glaubt, dass diese erstaunliche Formel $|B - T| = 2$ im Allgemein richtig ist. Wenn sich die Mehrheit für die Richtigkeit ausspricht, kann man der Klasse vorschlagen, nach einem Beweis zu suchen. In der Tat stammt der hier angeführte Beweis von einem Schüler [Hul12, p. 223]. Es gilt abzuschätzen, wie schwer sich die Klasse mit dem Beweis tun wird. Wir skizzieren, wie eine Beweisführung ablaufen könnte.

Zuerst muss man betonen, dass, um die Verhätnisse im gefalteten Zustand besser erkennen zu können, es sich empfiehlt, die Lage der einzelnen Schichten des Papiers anzusehen, vgl. Bild 3. Es empfiehlt sich ferner, eine Umgebung der Spitze abzuschneiden, um eine bessere Sicht zu bekommen. Was kann man am Querschnitt beobachten? Skizzieren Sie den Querschnitt und machen Sie deutlich, dass die Eckpunkte des entstehenden Vielecks Enden der Falze sind.

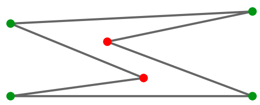


Bild 3: *Querschnitt eines flachfaltbaren (in einem beinahe gefalteten Zustand) Faltmusters. Grüne Punkte repräsentieren Täler, rote Punkte repräsentieren Berge. Im gefalteten Zustand ist das Vieleck entartet.*

- ⋆ Lehrerin: Welche Figur ergibt sich als Querschnitt?
- ⋆ Werner: Das ist ein Vieleck.
- ⋆ Lehrerin: Richtig. Was kann man über dieses Vieleck sagen?
- ⋆ Peter: Zu Bergen gehören große Winkel, zu Tälern gehören kleine Winkel.
  Das kann man durch Auf- und Zusammenfalten deutlich demonstrieren. Dreht man das Papier jedoch um, so sind große Winkel bei Tälern und kleine bei Bergen.
- ⋆ Sonja: Naja, genau genommen, wenn das Blatt flach gefaltet ist, dann entsprechen Bergen Winkel von 360° und Tälern 0°.

Es ist eine gute Idee, sich die Winkelsumme des Vielecks aus zwei verschiedenen Perspektiven anzuschauen. Einerseits wurde gerade implizit gesagt, dass sie $360°\cdot B + 0°\cdot T$ beträgt. Andererseits versuchen wir jetzt, das Wissen über Winkelsummen im Vieleck zu aktivieren. Damit holen wir eventuell Schülerinnen und Schüler zurück ins Boot, die sich in dem Thema noch nicht zurechtfinden; hier können sie ihr Wissen aus der Schule anwenden.

»Was weiß man über die Innenwinkelsumme eines n-Ecks?« Man kann vielleicht erwarten, dass die Antwort $(n - 2) \cdot 180°$ bekannt ist. Wenn nicht, dann ist das eine gute Möglichkeit, den Beweis anhand einer passenden Triangulierung wie im Bild 4(b) zu besprechen. Die einzige Voraussetzung, die bereits klar sein muss, ist, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt. Einigt man sich darauf, dass $n = B + T$ gilt, so folgt leicht (siehe dazu auch Kapitel 5) $B - T = -2$.

(a) (b)

Bild 4: *Ein Polygon und eine mögliche Triangulierung.*

An dieser Stelle bieten sich folgende zwei Fortsetzungen an. Erstens, »lassen sich irgendwelche der Aussagen, die wir an der Tafel stehen haben, bereits mit dem eben bewiesenen Satz folgern?« Ja. Nämlich, dass eine ungerade Anzahl der Falze im Faltmuster unweigerlich dazu führt, dass es nicht flachgefaltet werden kann!

> Sonja: Naja, wenn die Differenz zweier Zahlen gerade ist, dann auch die Summe. Damit folgt dann, dass ein flachfaltbares Muster auf jeden Fall aus einer *geraden* Anzahl an Falzen besteht.

Das ist sehr schön und die Frage, ob drei Falze zu etwas Flachem führen können, ist hiermit negativ beantwortet.

Zweitens, kann man fragen, ob die umgekehrte Richtung gilt: *Folgt aus der Formel $|B - T| = 2$ bereits, dass das Faltmuster flachgefaltet werden kann?* Das ist nicht richtig und es ist zu erwarten, dass schnell Gegenbeispiele gefunden werden. Es reicht sogar, ein Muster mit drei Bergen und einem Tal anzuschauen, wie in Bild 5. Hier sind drei Berge und ein Tal so eingezeichnet, dass man zuerst die Diagonale falten kann und einsieht, dass die beiden anderen Falze nicht zusammen passen.

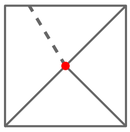


Bild 5: *Platzieren wir den vierten (gestrichtelten) Falz ungünstig, dann kann man schnell sehen, dass das Faltmuster nicht flach wird.*

Woran liegt das? Was fehlt noch, um eine hinreichende Bedingung zu finden? An dem Beispiel von eben sehen wir, dass die Winkel zwischen den Falzen eine entscheidene Rolle spielen, denn läge der Talfalz auf der Diagonale von links oben nach rechts unten, so ließe sich das Muster ohne Mühe flachfalten.

Hier kann man (sollte eine Pause oder eine Hausaufgabe eingelegt werden) eine kleine Aufgabe stellen: Ist der 4. Falz eindeutig, wenn drei bereits vorgegeben sind und das Muster flach werden soll? Oder gibt es weitere Möglichkeiten? Wenn ja, wie viele? Die Antwort ist recht simpel, aber vielleicht hilft sie Schülerinnen und Schüler im nächsten Schritt.

- ⋆ Ist ein Winkel größer als 180°, so muss dieser auf eine eindeutige Weise geteilt werden.
- ⋆ Ist kein Winkel größer als 180°, so kann jeder Winkel auf genau eine Art geteilt werden. Das ergibt drei Möglichkeiten.

2.5 Winkel und ihre Charakterisierung

Bevor man die Rolle der Winkel für die Flachfaltbarkeit charakterisiert, bietet es sich an, kurz über die gesammelten Vermutung zu reflektieren: Geklärte Vermutungen werden abgehakt oder durchgestrichen (je nach dem, ob sie stimmen oder nicht stimmen) und die entsprechenden Schülerinnen und Schüler für ihren Beitrag zur Klärung gelobt.[4]

Der Einstieg in die Untersuchung der Rolle der Winkel für die Flachfaltbarkeit könnte folgendermaßen verlaufen:

- ⋆ Lehrerin: Peter, kannst du deine Behauptung klären?
- ⋆ Peter: Naja, wie man in Ihrem Beispiel mit vier Falzen sieht, kann es nur dann flachfaltbar sein, wenn gegenüberliegende Winkel 180° in der Summe ergeben.

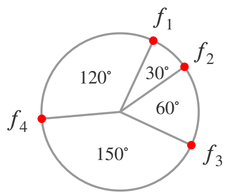
Richtig ist sogar eine wesentlich allgemeinere Aussage, nämlich dass die alternierende Winkelsumme eines flachfaltbaren Faltmusters Null ergibt. Wir sehen hier zwei gute Möglichkeiten, um fortzufahren:

Induktiv: Den Fall mit vier Falzen und der Winkelbedingung, wie von Peter vorgeschlagen, genau zu studieren; dann den Fall mit sechs Falzen anzuschauen und dort nach einer passenden Winkelbedingung zu suchen und dann eventuell den allgemeinen Fall zu untersuchen.

Deduktiv: Eine andere Möglichkeit wäre, die von Peter vorgeschlagene Winkelbedingung zu verallgemeinern (sofern es geht) und erst dann den allgemeinen Beweis zu führen.

Wir gehen nach der ersten Variante vor, weil sie aus unserer Sicht greifbarer ist, betonen aber, dass sich alle wesentlichen Argumentationsschritte auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Wir haben vier Falze $f_1, \dots, f_4$ und daher[5] vier aufeinander folgende Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.



Wie kann man die Behauptung »Wenn dieses Muster flachfaltbar ist, dann gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$« beweisen? Wenn wir uns eine kleine Ameise vorstellen, die sich im Kreis um den Schnittpunkt der vier Falze bewegt, dann ist es sofort klar, dass sie am selben Punkt ankommt, wenn sie einmal im Kreis gelaufen ist. Wenn diese Ameise ganz klein ist, dann können wir das Papier flachfalten, ohne dass sie davon Kenntnis nimmt – und läuft immer weiter im Kreis. Angenommen, wir beobachten die Bewegung der Ameise ab dem Moment, wenn sie auf dem Falz f_1 ist.

Wenn wir nun, wie in der Argumentation zu $|B-T| = 2$, den Querschnitt des Papiers anschauen, dann merken wir, dass ihre

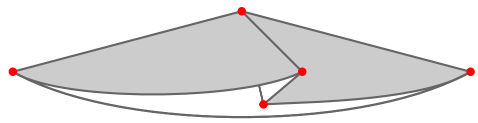


Bild 6: *Querschnitt eines beinahe flachgefalteten Faltmusters.*

Auslenkung von f_1 zu f_2, f_3, f_4 auf ihrem Laufkreis folgendermaßen beschreibbar ist:

Position	Auslenkung
f_1	0
f_2	α_1
f_3	$\alpha_1 - \alpha_2$
f_4	$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$
$f_1 = f_5$	$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$

daher folgern wir $0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$. Gleichzeitig gilt in unserem Faltmuster die Gleichung $360° = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, woraus sich durch Addition der beiden Gleichungen sofort das Behauptete, $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$, ergibt. Dies gibt Peter recht.

Bei Betrachtung der Argumentation fällt auf, dass $n = 4$ kein entscheidender Einflussfaktor ist. Die Formeln lassen sich für jede beliebige gerade Anzahl der Falze in einem flachfaltbaren Faltmuster aufstellen. Würden wir also n Falze haben (n gerade),

[4] Wenn sich eine Vermutung als falsch herausstellt, dann sollten wir die betreffende Person vorsichtig fragen, ob sie die Argumentation einsieht und es daher akzeptiert, dass ihre Vermutung durchgestrichen wird. Falsche Vermutungen sollten lediglich durchgestrichen, aber nicht weggewischt werden.

[5] Ein Faltmuster ist durch die Lage der Falze oder die Größe der aufeinander folgenden Winkel festgelegt.

dann würde die obige Überlegung auf die Formel führen[6]:

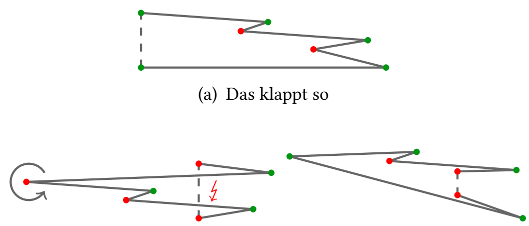
$$0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n.$$

Nun würden wir gern die Frage stellen, ob jetzt genau gesagt werden kann, wann ein Faltmuster flachfaltbar ist und wann nicht. Aufmerksame Schülerinnen und Schüler kommen vielleicht auf die Idee, dass die alternierende Winkelsumme aus dem vorigen Absatz eigentlich verrät, wie man vorgehen könnte.

Genauer wollen wir fragen: Angenommen, wir haben ein Faltmuster mit gerader Anzahl an Falzen (weil das Faltmuster mit ungerader Anzahl an Falzen keine Chance hat, flachfaltbar zu werden, wie wir bereits wissen), können wir unter Berücksichtigung der Formel $|B - T| = 2$ diese Falze so einfärben, dass man das Faltmuster flachfalten kann?

Wir erklären, wie die Färbung für den Fall $B + T = 6$ zu wählen ist. Das dabei verwendete Verfahren lässt sich in natürlicher Weise auf $B + T = n$ für gerade n übertragen (eine alternative Argumentation ist in Kapitel 5 angegeben).

Lassen Sie Schülerinnen und Schüler ein Faltmuster mit sechs Falzen erstellen, so dass die alternierende Winkelsumme gleich $0°$ ist.[7] Dann schneiden Sie das Faltmuster an einem der sechs Falze, sagen wir f_1, bis zum Schnittpunkt der Falze ein und falten Sie nun die anderen Falze alternierend als Berge und Täler.



(a) Das klappt so

(b) Das klappt so nicht

(c) Aber so klappt es

Bild 7: *Die drei Grafiken entstehen als Querschnitte eines Faltmusters definiert durch die Winkel* $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = 70°$, $\alpha_4 = 15°$, $\alpha_5 = 70°$, $\alpha_6 = 135°$. *In Bild 7(a) wurde das Faltmuster zwischen* α_6 *und* α_1 *aufgeschnitten, im Bild 7(b) dagegen zwischen* α_1 *und* α_2. *Erst, wenn ein Falz wie in Bild 7(c) umgefärbt wird, ergibt sich eine passende Färbung.*

Zwei Varianten können eintreten. Erstens, Sie bekommen eine Situation wie in Bild 7(a), dann kleben Sie f_1 wieder zusammen und erhalten ein flachgefaltetes Faltmuster. Sie müssen eventuell erklären, warum man nun das gleiche Faltmuster mit der gefundenen Färbung auch ohne Aufschneiden flachfalten kann. Zweitens, es könnte die unangenehme Situation wie in Bild 7(b) eintreten, dass die beiden Schnittkanten durch einige Papierschichten getrennt sind und Sie können sie nicht ohne Weiteres zusammenkleben. In dem Fall war unsere Färbung nicht gut gewählt. Aber wir können die Situation retten, indem wir einen einzigen Falz umfärben, zum Beispiel einen, der möglichst weit links liegt, 7(c).

[6] Sollte Peter oder Sie die Behauptung so formulieren: »Flachfaltbar mit vier Falzen ⇒ gegenüberliegende Winkel summerieren sich zu 180°«, dann muss nun bei mehreren Falzen geklärt werden, dass die allgemeine Situation von alternierenden Winkeln spricht: Was ist »der gegenüberliegende Winkel« eines Winkels in einem Faltmuster mit 6 Winkeln?

[7] Wenn Sie die Situation stärker kontrollieren wollen, können Sie Winkel genau vorgeben, etwa $\alpha_1 = 40°, \alpha_2 = 30°, \alpha_3 = 70°, \alpha_4 = 15°, \alpha_5 = 70°, \alpha_6 = 135°$.

Analysieren wir die Konstruktion, dann merken wir schnell, dass sie ohne Weiteres auf Faltmuster mit beliebiger (jedoch gerader) Anzahl an Falzen übertragbar ist.

Somit haben wir einen Höhepunkt der Theorie erreicht, da wir nun definitiv einem uns vorliegenden Faltmuster ansehen können, ob es flachfaltbar ist oder nicht, und zwar ohne es tatsächlich zu falten!

Hauptsatz Ein durch die aufeinander folgenden Winkeln α_1 bis α_n gegebenes Faltmuster ist genau dann flachfaltbar, wenn n gerade ist und $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n = 0$ gilt.

2.6 Globale Flachfaltbarkeit

- ⋆ Anna: Aber wie ist es mit mehreren Punkten? Geht das, wenn ich aufs Papier nicht nur einen, sondern mehrere Punkte draufmale und von ihnen Strecken ziehe?
- ⋆ Lehrerin: Zeichnet euch doch mal einige solche Faltmuster aufs Papier! Könnt ihr dann etwas über die Flachfaltbarkeit des ganzen Faltmusters aussagen?
- ⋆ Ali: Hm, jede der Punkte an sich muss schon flachfaltbar sein.
- ⋆ Lehrerin: Sehr schön! Reicht das schon dafür, dass das ganze Muster flachfaltbar wird?
  Das reicht nicht und ein Beispiel zu finden ist nicht ganz einfach. Wenn die Klasse stark genug ist, kann man sie eine Weile suchen lassen, aber vermutlich wird man ein Beispiel liefern müssen. Außerdem wir bei mehreren Punkten vieles komplizierter: Zum Beispiel kann man nicht ohne Weiteres die Formel $|B - T| = 2$ übertragen. Allerdings lässt sich diese Formel etwas umständlich verallgemeinern, s. [Hul94, Proposition 4.1].

Ein sehr schönes und einfaches Beispiel (von Thomas Hull) ist im folgenden Bild zu sehen:

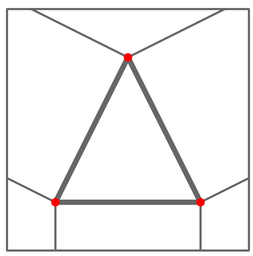


Bild 8: *In diesem Faltmuster sind alle Winkel, die wie 90°-Winkel aussehen, tatsächlich auch 90°-Winkel. Dieses Faltmuster ist lokal, aber nicht global flachfaltbar, siehe Satz 1.*

In diesem Beispiel ist keine Färbung der Falze vorgegeben; vielmehr ist das Spannende bei diesem Beispiel, nachzuweisen, dass *jede* Färbung der Falze unter der Annahme der Flachfaltbarkeit zu einem Widerspruch führt. Wie begründet man das? Es ist durchaus zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler selbst auf die richtige Idee kommen. Diese Idee kann man zu einem Satz zusammenfassen und wir erlauben uns, in diesem Abschnitt einen Satz mit Beweis anzuführen.

Satz 1 (Über eingeschlossene Winkel). Seien $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ drei aufeinander folgende Winkel um einen Punkt eines Faltmusters. Ferner gelte $\alpha_{i-1} > \alpha_i < \alpha_{i+1}$. Gibt es eine Färbung des Faltmusters, so dass es flach wird, dann sind die beiden den Winkel α_i begrenzenden Schenkel verschieden gefärbt.

Beweis: Wären die jeweiligen Falze gleich gefärbt, so würde sich das Papier unweigerlich selbst im Weg stehen, bevor man es flachfalten könnte, wie im Bild 9. □

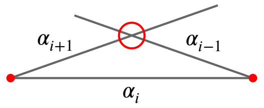


Bild 9: *Wir betrachten wieder einen Querschnitt von vorn: Die zwei Punkte sollen die erwähnten Schenkel von α_i andeuten, die Strecken repräsentieren die Kreissektoren bestimmt durch die drei Winkel. Der rote Kreis deutet die Selbstüberschneidung des Papiers an.*

Nun wollen wir die Unterrichtssequenz langsam zu einem Ende bringen. Es fehlt noch ein positiver Abschluss, ein erstaunliches, notwendiges Kriterium für globale Flachfaltbarkeit. Wir betrachten zuerst ein weiteres spannendes Beispiel, welches für unsere Zwecke vielversprechend und gleichzeitig interessant (wenn auch etwas anspruchsvoll) zu falten ist.

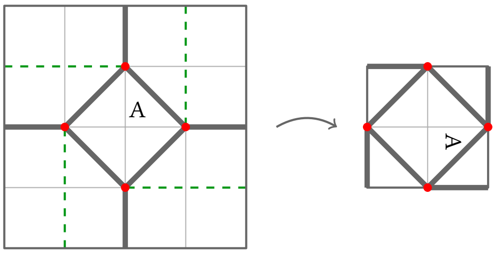
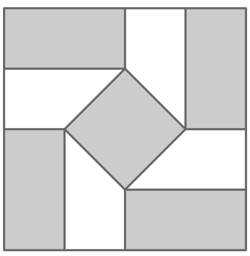


Bild 10: *Der sogenannte Square-Twist*[8]*: Links das Faltmuster und rechts das flachgefaltete Modell. Gestrichelte grüne Falze sind Täler, durchgezogene dicke graue Falze Berge. Der Buchstabe A deutet an, was die Faltung bewirkt.*

Hier kann man auf die Idee kommen, die fünf der neun von den Falzen des Square-Twists begrenzte Gebiete, welche im gefalteten Zustand nach oben weisen, mit einer Farbe, und die restlichen vier Gebiete, die nach unten weisen, mit einer zweiten Farbe einzufärben (dies nennen wir 2-färben). Faltet man



die Figur wieder auf, dann bemerkt man, dass diese Gebiete 2-gefärbt wurden. Nun kann man auf die Idee kommen, dass es ein gutes Kriterium für globale Flachfaltbarkeit ist. Allerdings zeigt man sofort mit Bild 8, dass dieses Kriterium zumindest nicht hinreichend ist. Jedoch zeigen wir im Kapitel 5 Satz 9, dass dieses Kriterium tatsächlich notwendig ist!

Es wäre schön, die Unterrichtssequenz mit einer interessanten Faltung abzuschließen. Das erledigen wir mit der sog. Miura-Ori, benannt nach ihrem Erfinder Koryo Miura, einem der führenden Origamiwissenschaftler weltweit. Diese Faltung demonstriert eindringlich, wie man einen Stadtplan so falten kann, dass es möglich ist, ihn mit einer einzigen Bewegung auf- und zusammenzufalten.

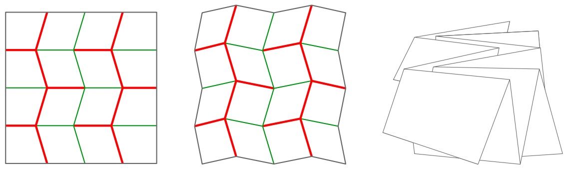


Bild 11: *Eine Variante der Miura-Karte (Miura-Ori). Verschiedene Farben repräsentieren verschiedene Ausrichtungen der Falze: Berge oder Täler. Links das Faltmuster, in der Mitte etwas angefaltet, rechts die fast flachgefaltete (und vergrößerte) Karte.*

3 Hinweise und Bemerkungen

In diesem Abschnitt wollen wir noch einige Bemerkungen zur Durchführung, die bisher unerwähnt geblieben sind, ausführen sowie alternative Methoden aufzeigen.

3.1 Hinweise zur Durchführung

- ⋆ Sie sollten sich nur als einen Moderator ansehen und versuchen, die Behauptungen möglichst unverändert aufzuschreiben. Um geäußerte Formulierungen straffer zu gestalten, lohnt sich der Trick, nachzufragen, wie diejenige Person das Gesagte meint, weil man es aus diversen Gründen (z. B. akustisch) nicht verstanden hat. Damit erwirkt man eventuell ein weiteres Nachdenken und eine tafelgeeignetere Formulierung.

- ⋆ Wenn Sie eine Vermutung oder Beobachtung an die Tafel schreiben wollen, dann sollten Sie die Namen der Schülerinnen und Schüler vor die Vermutung schreiben, z. B. »Regina: Mit drei Falzen gehts nicht!« Wir glauben, dass dadurch die Überlegungen der Schülerinnen und Schüler wertgeschätzt und sie persönlich in die Arbeit eingebunden werden. Außerdem ist damit klargestellt, dass Vermutungen den Schülerinnen und Schülern gehören und nicht vom Lehrer kommen. Wir haben mit dieser Methode nur positive Erfahrungen gemacht.

- ⋆ Folgende Hinweise können wir geben, um Schülerinnen und Schüler zur Arbeit zu motivieren, wenn die Unterrichtssequenz nicht flüssig läuft oder Schülerinnen und Schüler größere Probleme haben:
  - ⋄ Geben Sie konkrete Arbeitsanweisungen, vgl. Abschnitt 3.2, besprechen Sie ein konkretes vorbereitetes Faltmuster.
  - ⋄ Zeigen Sie viele Beispiele mit verschiedenen Faltmustern, wenn die Klasse selbst keine guten Beispiele findet.

[8] Der Square-Twist eröffnet ein weites Feld mathematisch interessanter Objekte: Tessellationen oder Mosaiken, siehe [Gje08].

- Fragen Sie Schülerinnen und Schüler nach ihrer Meinungen: »Was meinst du: Stimmt diese Behauptungen an der Tafel?«, »In welche Richtung, denkst du, sollen wir uns bewegen?«
- Erzwingen Sie jedoch *niemals* Vermutungen (»Sonja, du hast noch nichts gesagt: Stellt doch mal auch eine Vermutung auf!«), das wirkt demotivierend.

★ Nehmen Sie *niemals* das Modell Ihrer Schülerinnen bzw. Schüler aus deren Hand, um die Faltung zu Ende zu bringen oder gar neu zu falten, vgl. [GJ09]! Falten und erklären Sie immer anhand Ihres eigenen Modells. Wir glauben, dass eines der wesentlichen Vorteile des Papierfaltens die Erschaffung eigener Strukturen, eigener Mathematik ist; nehmen Sie das Modell in Ihre Hände und beseitigen die Probleme auf eine eventuell unverständliche Weise (sonst gäbe es diese Probleme vielleicht nicht), so geht, aus unserer Sicht, dieses Gefühl eigener Kreation verloren.

★ Sie können sich überlegen, wie Sie Schülerinnen und Schülern Beispiele vorfalten. Aus unserer Erfahrung eignet sich die bewährte Methode des Faltens in der Tafelebene, das heißt Sie legen ein großes Blatt Papier auf die Tafel und falten so, als ob Sie am Tisch arbeiten würden. Alternativ können Sie spiegelverkehrt in der Luft falten, jedoch erfordert das ein sehr sicheres Beherrschen der Faltung. Sie können auch an eine Dokumentenkamera denken, um im Sitzen falten und bei Bedarf die Modelle vergrößern oder aufnehmen zu können, jedoch hat sich diese Methode in unserer Erfahrung nicht bewährt – Schülerinnen und Schüler sind gezwungen, einer Projektion an der Wand zu folgen und Ihnen zuzuhören, was eventuell zur Verwirrung führen kann.

3.2 Alternativen

Hier stellen wir einige Abweichungen von unserem Vorgehen vor, die Sie aus unserer Sicht gut einsetzen können, wenn Sie etwa wenig Zeit haben, die Klasse nicht stark ist oder Sie sich in diesem Thema noch etwas unsicher fühlen.

★ Es ist denkbar, die Unterrichtssequenz so einzuleiten: Sie beginnen mit zwei gefalteten Modellen, das eine ist flachgefaltet (z. B. ein Kranich) und das andere ist ein dreidimensionales Objekt, welches sich nicht flachfalten lässt. Sie können dann diese Modelle auffalten und mit Schülerinnen und Schülern die beiden Faltmuster betrachten und fragen, ob es denn möglich ist, einem Faltmuster direkt anzusehen, ob das Modell ein flaches wird oder nicht. Ein Vorteil dieses Anfangs ist, dass Sie mit einer sehr anschaulichen intuitiven Frage beginnen. Eine Gefahr ist, dass Schülerinnen und Schüler sich möglicherweise in der Komplexität des Faltmusters verlieren. Schülerinnen und Schüler sollten aus unserer Sicht zuerst Flachfaltbarkeit lokal (um einen Punkt herum) klären.

★ Der Ablauf kann von sehr offenem bis zu stark strukturiertem Arbeiten variieren:

- Im strukturierten Ablauf empfiehlt sich eine Tabelle, in der gefundene Erkenntnisse gesammelt werden, etwa so:

Anzahl der Falze	2	3	4	6	…
Flachfaltbar?					
Gegenbeispiel?					
Farben der Falze					
Winkel					

Eventuell führt dieses tabellarische Vorgehen schneller und strukturierter zu Behauptungen; ein solches Vorgehen ist sinnvoll bei knapper Zeit oder bei Unsicherheiten auf der Seite der Lehrkraft.

- Sie könnten auch Vermutungen auf Karten statt an die Tafel schreiben. Die Karten werden dann an die Tafel geklebt oder gepinnt. Das ermöglicht leichteres Ordnen und Sortieren der Aussagen; verworfene Vermutungen können leichter entfernt werden; leichteres Zusammenfassen und Wiederaufgreifen in den Folgestunden der Aussagen ist möglich.
- Bei einem offenen Vorgehen, wenn die Klasse möglichst eigenständig arbeitet, empfehlen wir eine gewöhnliche Kreidetafel oder alternativ ein Smartboard.

★ Sie können sich überlegen, wie Sie mit der Menge der geäußerten Aussagen umgehen. Sie können:

- erst alle Vermutungen aufstellen lassen und sammeln, dann beweisen (lassen).
- oder erst ein paar Vermutungen sammeln, ausgewählte sofort beweisen, dann wieder Vermutungen sammeln usw.

Wir wissen nicht, welche der beiden Option »die bessere« ist, nach unserer Erfahrung ergibt sich oft ein Mix aus den beiden.

★ Es ist durchaus denkbar, die ganze Unterrichtssequenz mit der Miura-Ori anzufangen. Das bringt viele Vorteile: Es ist eine faszinierende Faltung, die durchaus einen Realitätsbezug aufweist – als eine Stadtplankarte oder als ein faltbares (der Fläche nach reduziertes) Solarpaneel, vgl. [Hul12, p. 307] –, mit einem flachfaltbaren Faltmuster, bei dem in jedem Punkt vier Falze zusammentreffen (oder *inzidieren* in der Fachsprache). Andererseits kann man diese schöne Faltung auch für den Schluss aufheben. Jedenfalls sorgt diese tolle Konstruktion für Heiterkeit und Freude in der Klasse und ist zudem ein guter Abschluss der Theorie!

★ Im Block »globale Flachfaltbarkeit« können Sie an mehreren Stellen die Sequenz beenden, je nach Klasse, Zeit und Interesse. Unsere Empfehlung ist, mindestens das Beispiel aus dem Bild 8 zu besprechen (besser in Gruppenarbeit klären lassen) und dann zu erklären, dass globale Flachfaltbarkeit wesentlich komplizierter ist als lokale. Alternativ können Sie sowohl nach dem Square-Twist, Bild 10, als auch nach Miura-Ori aufhören; das sind aus unserer Sicht allesamt gute Schlusspunkte. Sollten Sie jedoch besonders viel Zeit oder eine starke Gruppe haben, können Sie noch weiter gehen und Beispiele aufzeigen, wie in Bild 12, die nahelegen, worin die Komplexität der globalen Flachfaltbarkeit liegt. Spätestens an dieser Stelle sind Sie da angekommen, wo die Forschung derzeit auch steht.

4 Ziele der Flachfalterei in der Schule

Im Folgenden beschreiben wir die Ziele, die bei der Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit verfolgt werden können. Das

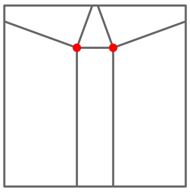


Bild 12: *Dieses Beispiel aus [Hul12, p. 236] zeigt ein Faltmuster mit zwei Punkten, welches lokal, aber nicht global flachfaltbar ist. Der Nachweis der Nichtflachfaltbarkeit ist nicht ganz einfach.*

Hauptziel und die größte Stärke sind, dass Schülerinnen und Schüler den Entstehungsprozess einer mathematischen Theorie selbst erleben und mitgestalten können. Sie arbeiten dabei auf eine ähnliche Weise wie Mathematikerinnen und Mathematiker. Entsprechend den Bildungsstandards umfasst dies die prozessbezogenen Kompetenzen: argumentieren, Probleme lösen, kommunizieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen und modellieren, vgl. [KMK12].

Bei der Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit können aus unserer Sicht vor allem drei Kompetenzen besonders angesprochen werden. Erstens *mathematisches Kommunizieren*, vor allem beim Diskutieren von Beispielen und Vermutungen. Dabei muss das eigene Vorgehen beschrieben werden, damit es Andere nachvollziehen können, vgl. [BDH12, p. 48–50]. Zweitens wird *mathematisches Argumentieren* gefördert. Wie wir gezeigt haben, entwickeln Schülerinnen und Schüler ihre eigene Theorie und sollen auch die darin enthaltenen Argumentationsschritte und Beweise möglichst eigenständig entwickeln. Drittens bietet die Beschäftigung mit den Fragen nach der Flachfaltbarkeit von Faltmustern viele Anlässe, um auf Probleme zu stoßen, diese selbst zu bearbeiten und schließlich mit mathematischen Mitteln zu lösen. Schülerinnen und Schüler wenden folglich verschiedene Heurismen an, etwa das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme (z. B. Fallunterscheidungen entsprechend der Anzahl der Falze) oder das Umstrukturieren der Situation (etwa Betrachtung der abgeschnittenen Spitze), vgl. [Pol10, p. 157].

Neben diesen kompetenzbezogenen Zielen ist unsere Hoffnung, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik als eine für sie spannende und lehrreiche Beschäftigung empfinden werden.

5 Mathematischer Blick auf Flachfaltbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Theorie der Flachfaltbarkeit etwas stärker mathematisch orientiert vorstellen.

Definition 2. Sei $\{P_1, \dots, P_n\}$ eine Partition des Einheitsquadrats $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ in n Vielecke, $n \in \mathbb{N}$. Als *Knoten* bezeichnen wir diejenigen Punkte in $(0,1)^2$, die entweder Ecken von P_i oder endlich viele weitere Punkte auf den Seiten von P_i sind. Ein *Faltmuster* $F = (V, E)$ der Partition $P_1, \dots, P_n$ bestehe aus der Menge der Knoten V und der Menge E aller (Teil-)Kanten in $(0,1)^2$ der Vielecke P_i, die bis auf Knoten disjunkt sind. Jedes Element von E nennen wir *Falz*.

Diese Definition formalisiert das Einzeichnen der Punkte und Strecken auf das Papier. Man kann etwas mühsam Begriffe *Faltung*, *Flachfaltbarkeit*, *Papier* präzise formulieren, doch das wird für diese Arbeit etwas zu technisch. Wir verweisen dafür zum Beispiel auf [Pom09].

Definition 3. Als ein *1-fach-Faltmuster* bezeichnen wir ein Faltmuster mit einem einzigen Knoten ($|V| = 1$). Diesen Knoten bezeichnen wir mit *Mittelpunkt*.

Definition 4. Für ein Faltmuster E mit der Falzmenge E nennen wir eine Funktion $c : E \to \{b, t\}$ *Färbung* des Faltmusters.

Diese Definition formalisiert die Vorstellung, dass einige Falze Berge, b, und einige Täler, t, sind.

Satz 5 (Maekawa 1986, Justin 1984). In einem flachfaltbaren 1-fach-Faltmuster mit B Bergen und T Tälern gilt die Gleichung

$$|B - T| = 2.$$

Beweis (Jan Siwanowicz 1993, [Hul12]): Falten wir das Muster flach und schneiden eine kleine Umgebung der Spitze ab, so ist der Querschnitt ein ausgeartetes Polygon mit inneren Winkeln von 0° und 360°, siehe Bild 3. Dabei haben alle Falze gleicher Farbe denselben Winkelgrad. Die Anzahl der Falze $n := B + T$ ist die Anzahl der Ecken im Polygon. In einem n-Eck ist jedoch die Summe der Innenwinkeln gleich $(n-2) \cdot 180°$. Betrachten wir nun Täler als Falze, die zu den 0°-Winkeln gehören, Berge als Falze, die zu den 360°-Winkeln gehören, so folgt auf einmal:

$$(B+T-2)\cdot 180° = (n-2)\cdot 180° = 0°\cdot T + 360°\cdot B \Longrightarrow B - T = -2.$$

Schauen wir auf das Faltmuster von der anderen Seite, so folgt $B - T = +2$ und insgesamt also die Behauptung. □

Beim Beweis des obigen Satzes ist Vorsicht geboten. Für gewöhnlich würden Studierende so argumentieren: Ein Faltmuster mit genau 2 Falzen ist genau dann flachfaltbar, wenn beide Falze gleiche Farbe haben (und kollinear sind), das heißt, es gilt $|B - T| = 2$; dann argumentieren sie, dass wenn nun weitere Falze produziert werden, verändert sich diese Gleichheit nicht. Das ist kein Beweis, da keineswegs klar ist, warum alle flachfaltbaren Muster so entstehen sollten (und offensichtlich tun sie es auch nicht – es gibt flachfaltbare Faltmuster, in denen z. B. keine zwei Falze kollinear sind).

Aus dem obigen Satz lässt sich sofort eine erstaunliche Konsequenz ableiten.

Korollar 6. Ist die Anzahl der Falze in einem 1-fach-Faltmuster ungerade, so lässt sich das Faltmuster nicht flachfalten.

Beweis: Die Anzahl der Falze lässt sich als Summe der Berg- und Talfalzen auffassen, also $B + T$. Mit dem Satz von Maekawa-Justin folgt dann $B + T = B + B \pm 2 = 2(B \pm 1)$. □

Der folgende Satz charakterisiert die Flachfaltbarkeit eines 1-fach-Faltmusters.

Satz 7 (Kawasaki 1989, Justin 1984). Sei n die Anzahl der Falze in einem 1-fach-Faltmuster und sei n gerade. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ aufeinander folgende positive Winkeln zwischen den Falzen. Dann und nur dann ist das 1-fach-Faltmuster flachfaltbar, wenn gilt

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n = 0.$$

Beweis: Wir gehen anfangs genau so vor wie im Beweis des Satzes von Maekawa-Justin und betrachten einen Querschnitt einer Umgebung des Mittelpunktes M. Nun stellen wir uns vor, dass wir diesen Querschnitt wie einen Weg (in der Literatur stellt man sich eine kleine Ameise vor) von einem Punkt P aus einmal ablaufen.

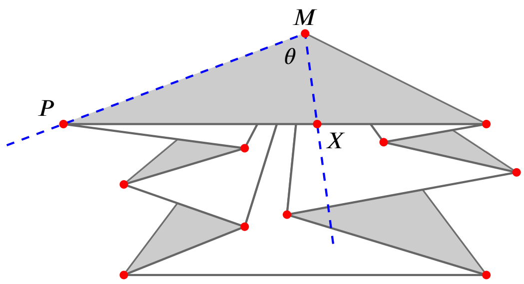


Bild 13: *Im Bild ist ein Querschnitt um die Spitze M zu sehen, graue Flächen deuten eine Seite des Papiers, weiße die andere. Läuft X auf dem Rand des Querschnitts, so beschreibt $\theta = \measuredangle PMX$ die Auslenkung des Punktes X von P bezüglich M im Bogenmaß.*

Betrachten wir die Auslenkung θ von P zu einem Punkt X auf dem Querschnitt, dann stellen wir folgendes fest: Wenn X den Querschnitt einmal abläuft, dann variiert θ wie im Bild: $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 + \ldots - \alpha_n$. Andererseits, da X nach diesem Ablaufen wieder in P landet, ist die Auslenkung $\theta = 0$.

Die andere Richtung beweist man algorithmisch, das heißt, in dem man eine Färbung angibt, mit der man das Faltmuster flachfalten kann. Den Algorithmus haben wir auf Seite 6 und im Bild 7 dargelegt. Die Behauptung folgt. □

Korollar 8. Genau dann ist ein 1-fach-Faltmuster flachfaltbar mit den Voraussetzungen und Winkeln wie im Satz 7, wenn gilt

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n = 180°.$$

Beweis: Die Gleichung $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 360°$ und die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_2 \pm \ldots - \alpha_n = 0$ aus Satz 7 liefern sofort die Behauptung. □

Mit diesen Sätzen haben wir nun vollständig die Flachfaltbarkeit eines 1-fach-Faltmusters beschrieben. Natürlich kann man hier noch weitere Fragen stellen, wie etwa: Hat ein flachfaltbares Faltmuster eine einzige Färbung oder gibt es mehrere? Wenn es mehrere gibt, liefern sie alle dasselbe Modell? Kann man die Anzahl der Färbungen bestimmen? (siehe [Hul02, Theorem 4.1]). Oder kann man den Prozess des Faltens mathematisch beschreiben? Können wir etwa jederzeit eine mathematische Momentaufnahme des Prozesses des Faltens erstellen, vgl. [BH02]?

Die Theorie der globalen Flachfaltbarkeit ist deutlich komplizierter als die der 1-fach-Flachfaltbarkeit und bis heute gibt es keinen einfachen Algorithmus, der einem Faltmuster schnell[9] ansieht, ob es flachfaltbar sein wird. Wir wollen nicht zu sehr ins Detail gehen, machen lediglich einige Bemerkungen.

Offensichtlich lässt sich unschwer erkennen, dass die Flachfaltbarkeit eines Faltmusters nur dann möglich ist, wenn jeder einzelne Knoten des Musters an sich (also lokal) flachfaltbar ist. Die Umkehrung ist leider falsch wie beispielsweise Bild 8 zeigt.

Was kann man dann überhaupt im Allgemeinen über globale Flachfaltbarkeit sagen? Wie Bild 10 und die Überlegungen in Abschnitt 2.6 nahelegen, lassen sich die Flächen[10] eines global flachfaltbaren Faltmusters mit zwei Farben färben. Wir wollen hier einen graphentheoretischen Beweis dieser bemerkenswerten Eigenschaft skizzieren.

Satz 9. Gegeben sei ein global flachfaltbares Faltmuster (V, E) zur Partition $P_1, \ldots, P_n$, vgl. Definition 2. Dann kann man die Vielecke P_i so in zwei Farben färben[11], dass benachbarte Vielecke verschiedene Farben haben.

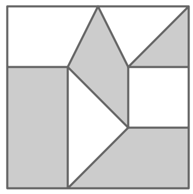


Bild 14: *Ein Beispiel für ein flächen-2-färbbares Faltmuster (global nicht flachfaltbar).*

Beweisskizze: Für den Beweis definieren wir einen Graphen $G = (V \cup X, E \cup Y)$, wobei X aus den Ecken von P_i besteht, die auf dem Rand des Einheitsquadrats liegen, und Y sei die Menge der Kanten von P_i ohne E. Das heißt G ist im Wesentlichen das Faltmuster (V, E) mit zusätzlichen Ecken und Kanten.

Wegen der Flachfaltbarkeit in jedem Knoten des Faltmusters (V, E) besagt der Satz von Maekawa-Justin, dass in G höchstens Knoten aus X ungerade Valenzen haben. Verbinden wir diese Knoten mit einem Knoten x außerhalb des Einheitsquadrats[12], so besitzt $G \cup \{x\}$ nur gerade Valenzen und ist somit eulersch. Das wiederum zeigt, dass der duale Graph von $G \cup \{x\}$ bipartit ist und wir können somit seine Knoten in zwei Farben färben, so dass keine Knoten gleicher Farbe benachbart sind. Da diese Knoten den Flächen in $G \cup \{x\}$ entsprechen, haben wir die Flächen von $G \cup \{x\}$ 2-gefärbt. Aber damit sind auch die Flächen von G 2-gefärbt und wir sind fertig. □

Bemerkung 10. Das besonders Bemerkenswerte an Satz 9 ist, dass man im Allgemeinen nicht weniger als vier Farben braucht, um »Landkarten«, die aus einem planaren Graphen entstehen, einzufärben, siehe Bild 15.
Die globale Flachfaltbarkeit stellt wohl eine wesentliche Einschränkung an das Faltmuster und seine »Länder«.

Mit Satz 9 können wir also vielen lokal flachfaltbaren Faltmustern ohne große Mühe ansehen, dass sie nicht global flachfaltbar sind – es reicht eben nachzuweisen, dass sich »die Länder« in dem Faltmuster nicht mit zwei Farben einfärben lassen. ♯

[9] Technischer ausgedrückt: Entscheiden der Flachfaltbarkeit allgemeiner Faltmuster ist NP-schwer, vgl. [BH96].

[10] Das sind die Vielecke P_i aus Definition 2, wenn man so will.

[11] Also etwa eine Funktion $f : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \mathbb{Z}_2$ angeben.

[12] Wir können die neuen Kanten so wählen – sie müssen nicht geradlinig sein – dass auch $G \cup \{x\}$ ein ebener Graph bleibt.

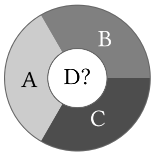


Bild 15: *Das Standardbeispiel eines ebenen Graphen, der flächen-4-färbbar, aber nicht flächen-3-färbbar ist.*

In dieser Arbeit gehen wir nicht tiefer in die Problematik und Mathematik der globalen Flachfaltbarkeit. Grund dafür sind hauptsächlich technische wie zeitliche Bedenken – die Aussagen werden komplizierter (insbesondere für das Schulniveau) und wir glauben nicht, dass es in der Schule möglich sein wird, so viel zu besprechen. Ein Blick in die Materie lohnt sich jedoch auf jeden Fall und wir empfehlen, Originalarbeiten wie [Hul94], [Hul02], [Hul12], [Pom09], [BH96] oder [Huz90] zur Hand zu nehmen.

6 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit haben wir versucht, die Theorie der Flachfaltbarkeit didaktisch aufzuarbeiten und für den Schulunterricht nutzbar zu machen.

Bisher haben wir diese Beschäftigung hauptsächlich an der Universität Würzburg im Rahmen mehrerer Seminare sowie Schülerprojekttage und einiger Workshops durchgeführt.

Natürlich gilt es, diese Unterrichtssequenz in der Schulpraxis einzusetzen, zu evaluieren, auf Wirksamkeit zu überprüfen und sie dann hoffentlich als eine wertvolle Ergänzung des Unterrichts zu etablieren.

Literatur

[BH02] S.-M. Belcastro & T. Hull. A mathematical model for non-flat origami. In: *Origami 3: Third International Meeting of Origami Mathematics, Science, and Education*, S. 39–51, 2002.

[BH96] M. Bern & B. Hayes. The complexity of flat origami. In: *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, S. 175–183, 1996.

[BDH12] W. Blum et al. (Hrsg.) *Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Cornelsen Scriptor, 2012.

[Ger08] R. Geretschläger. *Geometric Origami.* Arbelos, 2008.

[Gje08] E. Gjerde. *Origami Tessellations: Awe-inspiring Geometric Designs.* CRC Press, 2008.

[GJ09] M. Golan & P. Jackson. Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. In: *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, S. 459–469, 2009.

[Hul94] T. Hull. On the mathematics of flat origamis. In: *Congressus numerantium*, S. 215–224, 1994.

[Hul02] T. Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. In: *Origami 3: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, S. 29–38, 2002.

[Hul12] T. Hull. *Project origami: activities for exploring mathematics.* CRC Press, 2012.

[Hun13] N. Hungerbühler. Origami – von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Heft 45, S. 1–14, 2013.

[Huz90] H. Huzita. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology.* Padova, 1990.

[KMK12] Kultusministerkonferenz. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Quelle: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf, 2012.

[Mon09] J. Montroll. *Origami polyhedra design.* CRC Press, 2009.

[Pol10] G. Polya. *Schule des Denkens – vom Lösen mathematischer Probleme.* Franke, 2010.

[Pom09] F. Poma. *On The Flat-Foldability Of A Crease Pattern.* Quelle: www.phc.pisa.it/~poma/Ffcp.pdf (17.05.2016), 2009.

[SHH13] R. Schmitt-Hartmann & W. Herget. *Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12.* Klett, 2013.