

Wärmetransport in keramischen Faserisolationen bei hohen Temperaturen

*Dissertation zur Erlangung des
naturwissenschaftlichen Doktorgrades
der Julius- Maximilians-Universität Würzburg*

vorgelegt von

Harald Brendel

aus Pegnitz

Würzburg, 2017

Eingereicht am: 06.04.2017
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

1. Gutachter: PD Dr. Raether
 2. Gutachter: Prof. Dr. V. Dyakonov
- der Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr. E. Batke

1. Prüfer: PD Dr. F. Raether
 2. Prüfer: Prof. Dr. V. Dyakonov
 3. Prüfer: Prof. Dr. A. Denner
- im Promotionskolloquium

Tag des Promotionskolloquiums: 24.01.2018

Doktorurkunde ausgehändigt am:

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist eine umfassende numerische und experimentelle Charakterisierung des Wärmetransports in oxidkeramischen Faserisolationen im Hochtemperaturbereich. Zugleich sollen neue Konzepte für eine optimierte technische Auslegung von Faserisolationen erarbeitet werden. Oxidkeramiken zeigen im Infrarotbereich ein semitransparentes Verhalten. Das bedeutet, ein Teil der Strahlung gelangt durch die Probe, ohne gestreut oder absorbiert zu werden. Durch die Ausgestaltung als disperses Medium mit Abmessungen der Fasern im μm Bereich wird jedoch eine starke Wechselwirkung mit infraroter Lichtstrahlung erzeugt. Man befindet sich im optischen Resonanzbereich. Technisch relevante Faserisolationen besitzen eine Rohdichte zwischen 50kg/m^3 und 700kg/m^3 und können als optisch dichtes Medium betrachtet werden. Eine Optimierung hinsichtlich der Dämmwirkung gegen Wärmestrahlung bedeutet eine massenspezifische Maximierung des Lichtstreuvermögens im relevanten Wellenlängenbereich. Hierzu werden in einer numerischen Studie keramische Hohlfaseroisolationen mit konventionellen Fasern verglichen. Diese Abhandlung unter Berücksichtigung anwendungsnaher Aspekte gelangt zu der Schlussfolgerung, dass die Strahlungswärmestromdichte in Hohlfaseroisolationen, im Vergleich zu konventionellen Isolationen, signifikant erniedrigt wird. Hinsichtlich der Gesamtwärmeleitfähigkeit ist eine Reduzierung um den Faktor zwei zu erwarten.

Trotz moderner Rechner ist die Anwendung der vollen Maxwellschen Streutheorie, insbesondere im Rahmen von Optimierungsaufgaben mehrschichtiger Streukörper, ein zeitaufwendiges Unterfangen. Um sinnvolle Parameterkonfigurationen bereichsweise eingrenzen zu können, wird eine Näherungsmethode für die Lichtstreuung an mehrschichtigen Zylindern weiterentwickelt und mit der vollständigen Maxwellschen Streutheorie verglichen. Es zeigt sich, dass das Modell für kleine bis moderate Brechungsindizes sehr gute Vorhersagekraft besitzt und auch zur näherungsweise Berechnung der Streueffizienzen für räumlich isotrop angeordnete Zylinder herangezogen werden kann.

Neben den numerischen Studien wird im experimentellen Teil dieser Arbeit eine kommerzielle Faserisolierung aus Aluminiumoxid hinsichtlich ihrer Wärmetransporteigenschaften charakterisiert. Die optischen Transportparameter Albedo und Extinktion werden mittels etablierter Messmethoden bestimmt. Bei bekannter Faserdurchmesserverteilung können diese Messwerte dann mit den theoretischen Vorhersagen der Maxwellschen Streutheorie verglichen werden.

Um technische Optimierungsmaßnahmen experimentell zu verifizieren, besteht die Notwendigkeit, die Temperaturleitfähigkeit bzw. die Wärmeleitfähigkeit auch bei hohen Temperaturen oberhalb von 1000°C zuverlässig bestimmen zu können. Zu diesem Zweck wird ein Versuchsaufbau realisiert, um in diesem Temperaturbereich erstmals die sogenannte Thermal-Wave-Analyse anzuwenden. Durch Abgleich mit einem gekoppelten Wärmetransportmodell und einem etablierten Messverfahren wird die besondere Eignung der Thermal-Wave-Analyse für berührungsfreie Hochtemperaturmessungen gezeigt.

Abstract

The objective of the present thesis is a comprehensive numerical and experimental characterization of the heat transfer properties in thermal insulation materials made of ceramic fibers at high temperatures. At the same time, new concepts for further improvement of fibrous insulation materials are developed. In general, ceramic oxides appear semitransparent in the infrared range, meaning that a part of the thermal radiation is transmitted through a sample without being scattered or absorbed. However, in a dispersed medium containing fibers with diameters in the micrometer range a strong interaction with infrared radiation occurs. Since typical fibrous insulation materials of technical relevance show raw densities between 50kg/m^3 and 700kg/m^3 they could be considered as optically dense. The optimization of the insulation effect involves the maximization of the mass specific scattering coefficient in the wavelength range of substantial thermal radiation. Therefore, the heat transfer properties of hollow-fiber insulation materials are compared to conventional insulations made of solid fibers by means of a numerical study. This treatise concludes that thermal insulations made of hollow fibers can provide a significant reduction of heat losses in wide ranges of practical interest. In particular, by application of hollow fiber insulations the effective thermal conductivity could be lowered by a factor of two.

However, in connection with optimization problems of stratified scattering objects the application of the full Maxwell-scattering theory is a time consuming task. In order to locate reasonable parameter configurations in layered cylindrical media an enhanced version of the so-called anomalous diffraction approximation is presented. By comparison with the results of the exact Maxwell-scattering formulas it is shown that within the limit of moderate refractive indices the simplified theory delivers good agreement in a broad size parameter range. Even the extinction efficiency of randomly oriented stratified cylinders is reproduced astonishingly well. Apart from numerical investigations the heat transfer properties of a commercial fibrous insulation material are characterized experimentally. Therefore, the optical transport parameters extinction and albedo are determined by established methods. With knowledge of the fiber diameter distribution the experimental results could be compared to the theoretical predictions of light scattering at infinite fibers. The verification of optimization measures, requires also an adequate experimental determination of thermal diffusivity or thermal conductivity, respectively. For this purpose the potential of measuring thermal diffusivity of heterogeneous materials in a temperature range above 1000°C by thermal wave analysis is investigated for the first time. By comparison with a coupled numerical heat transfer model and an established measurement method the feasibility of measuring thermal diffusivity at high temperatures by thermal wave analysis is demonstrated.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
Zusammenfassung	iv
1 Vorwort und Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Wärmetransport in Faserisolationen	5
2.2 Hohlraumstrahlung und das Plancksche Strahlungsgesetz	5
2.3 Strahlungstransport in partizipierenden Medien	6
2.4 Lösung der Strahlungstransportgleichung	7
2.4.1 Diskrete Ordinaten-Methode	7
Drei-Fluss Näherung der Strahlungstransportgleichung	7
Zwei-Fluss Näherung der Strahlungstransportgleichung	8
2.4.2 Diffusionsapproximation in zylindersymmetrischen Medien	8
2.4.3 Strahlungswärmeleitfähigkeit	10
2.4.4 Gekoppelter Gas-Festkörper Wärmetransport	10
2.4.5 Gekoppelter Gesamtwärmetransport	12
2.5 Maxwell-Modell der Lichtstreuung an Fasern	13
2.5.1 Lichtstreuung an einzelnen Fasern	13
Mittlere Wirkungsquerschnitte	20
2.5.2 Phasenfunktion für räumlich isotrop orientierte Fasern	20
2.5.3 Wirkungsquerschnitte der Rückstreuung	21
2.5.4 Abhängige Streuung am Zylinder Ensemble	24
2.5.5 Numerische Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten	26
2.6 Näherungslösung der Zylinderstreuung	26
2.7 Mie-Streuung	28
3 Probenmaterial, experimentelle Methoden und Apparaturen	29
3.1 Das Probenmaterial	29
3.2 Infrarot optische Charakterisierung	29
3.2.1 Raumtemperaturmessung mit der Ulbrichtkugel	29
3.2.2 Messung mit der Black-Body-Boundary Conditions Methode bei hoher Temperatur	30
3.3 Laser-Flash Analyse	32
3.4 REM-Mikroskopie	33
3.5 Thermal-Wave Analyse	33
3.5.1 Theorie des periodisch erwärmten Zylinders	34
3.5.2 Experimenteller Aufbau	36
3.5.3 Probenherstellung	38
3.5.4 Temperaturhomogenität und maximale Anregungsfrequenz	38
3.5.5 Bestimmung von Phase, Amplitude und Temperaturleitfähigkeit	39
3.5.6 Experimenteller Ablauf	40

4	Vorteile von Hohlfasern als Bestandteil einer thermischen Hochtemperaturisolation	43
4.1	Motivation und einführendes Beispiel	43
4.2	Methodik der erweiterten Vergleichsstudie	45
4.3	Diskussion und Ergebnisse	46
4.3.1	Vergleich der Wirkungsquerschnitte der Rückstreuung	46
4.3.2	Vergleich der Strahlungswärmestromdichten	49
4.3.3	Der Einfluss unterschiedlicher mittlerer Faserabstände	53
4.3.4	Vergleich der Gesamtwärmeleitfähigkeiten	56
4.4	Zusammenfassung und Schlussfolgerung	58
5	Näherungsweise Berechnung der Extinktionseffizienz zylindrischer Streukörper	59
5.1	Diskussion der Ergebnisse	60
5.2	Zusammenfassung und Schlussfolgerung	67
6	Experimentelle Ergebnisse	69
6.1	Infrarotoptische Charakterisierung der Faserisolation	69
6.2	Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit	74
6.2.1	Festlegung und Bestimmung der Eingangsparameter für das numerische Modell	74
	Experimentelle Bestimmung des Kopplungsparameters C_{sb}	76
	Bestimmung von Albedo und Extinktion bei hohen Temperaturen	76
	Bestimmung der Probedichte	76
6.2.2	Rechtfertigung des konduktiven Modells für partizipierende Medien	78
6.2.3	Die berechneten und experimentell ermittelten Temperaturleitfähigkeiten	78
6.3	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	82
	Abschließende Betrachtung	83
A	Ergänzungen zu Kapitel 2	85
A.1	Ergänzungen zur Theorie der Zylinderstreuung	85
A.1.1	Anmerkung zu Barabás, 1987	85
A.1.2	Die Komponenten des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten	85
A.1.3	Ableich mit Literaturdaten	87
A.2	Ergänzungen zur Diffusionsapproximation der Strahlungstransportgleichung	92
A.3	Ergänzungen zur Mie-Streuung	93
B	Anlagen zum Kapitel 3	95
B.1	Anmerkungen zu Gleichung (3.14) - Herleitung und Verifikation	95
B.2	Dimensionierung des zylindrischen Probenkörpers	98
B.3	Trennung von transienter und stationärer Temperaturkurve	99
B.4	Abbruchkriterium für die Messung der stationären Temperaturkurven	101

C Anlagen zu den Kapiteln 5 und 6	103
C.1 Anmerkungen zur Publikation von Stevens, 1984	103
C.2 Asymptotischer Grenzwert der Extinktionseffizienz im Falle inhomogener Zylinder (ADA-Modell)	104
C.3 Lösung der nichtlinearen Transportgleichung (6.8)	104
C.4 Materialkenndaten für das numerische Transportmodell	105
Literatur	107
Danksagung	115

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die spektrale Intensität i_p^λ und der spektrale Absorptionskoeffizient $\sigma_{\text{abs}}^\lambda$ von Al_2O_3 für unterschiedliche Temperaturen. Die Daten für den Absorptionskoeffizienten entsprechen den Angaben von Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982.	2
2.1	Illustration zur Bedeutung von Gl. (2.5) zur Beschreibung des Strahlungstransportes in partizipierenden Medien. Der Ausdruck $\mu = \cos \xi$ entspricht dabei dem Richtungskosinus.	6
2.2	Schaltbild der Wärmeleitwiderstände des Grundmodells Λ_{sg}^{-1} (vgl. Gl. 2.22), des Kontakt-Wärmeleitwiderstands Λ_{ct}^{-1} und des Gas-Wärmeleitwiderstands Λ_{ct}^{-1}	11
2.3	Illustration zur Faser-Gas-Einheitszelle. r_1 entspricht dem Außenradius der Faser.	12
2.4	Geometrische Verhältnisse für die Lichtstreuung an einem einzelnen (mehrschichtigen) Zylinder.	13
2.5	Geometrische Veranschaulichung zur Herleitung des Wirkungsquerschnitts der rückwärtsgerichteten Streuung B_r^λ im Falle räumlich isotrop angeordneter Fasern unter diffuser Einstrahlung.	22
2.6	Geometrische Veranschaulichung zur Herleitung des Wirkungsquerschnitts der rückwärtsgerichteten Streuung B_p im Falle parallel angeordneter Fasern unter diffuser Einstrahlung.	23
2.7	Geometrische Veranschaulichung der abhängigen Lichtstreuung an einer Vielzahl von parallelen (mehrschichtigen) Zylindern nach Lee, 1992.	24
2.8	Darstellung der geometrischen Verhältnisse zur Berechnung der Phasenverschiebung $\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)$	27
3.1	Reflexionsmessung (a) und Transmissionsmessung (b) mit der Ulbrichtkugel.	30
3.2	Schema der Black-Body-Boundary-Conditions-Methode zur Bestimmung der spektralen Größen: Gerichteter Emissionsgrad, gerichtet-hemisphärischer Transmissionsgrad und gerichtet-hemisphärischer Reflexionsgrad.	31
3.3	Das Prinzip des Laser-Flash Verfahrens.	33
3.4	Prinzipskizze des periodisch beheizten Zylinders.	34
3.5	Amplitudenverlustfaktor η und Phasenverschiebung ν am Ort $r = 0$ als Funktion des Kontrollparameters c_1^{-2} für verschiedene Werte von c_2	37
3.6	Der experimentelle Aufbau zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit κ einer zylindrischen Probe mittels der TWA-Methode.	37

3.7	Experimentell ermittelte Temperaturkurven der Anregung (dünne Volllinie) und der Probe an Messposition A (dicke Volllinie) bei 1000°C und einer Anregungsfrequenz von $f_{Hz} = 0.05/\text{min}$. Die Sollwertkurve ist als gepunktete Linie eingezeichnet (vgl. Bildausschnitt rechts unten). Der Fit der stationären Probenantwort mit Gl. (3.28) erscheint als eine mit Kreuzen unterlegte gestrichelte Linie.	40
4.1	Vergleich der Streuquerschnitte C_{sca} einer Hohlleiter (Volllinie) und einer konventionellen Faser (gestrichelt) mit identischem Außenradius $r_1 = 3\mu\text{m}$ bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0$). Der Innenradius r_2 der Hohlleiter beträgt $2\mu\text{m}$ und der Brechungsindex des Fasermaterials zeigt einen Wert von 1.3. Die (sichtbare) gepunktete Linie entspricht dem 1.8-fachen Wirkungsquerschnitt der Hohlleiter für konstanten Feststoffvolumenanteil f_V .	44
4.2	Das Verhältnis der Rückstreuoeffizienten B_r^{rel} als Funktion des Durchmesserhältnisses γ_{dia} für verschiedene Größenparameter α für $m = 1.75$ und der Bedingung $f_V = \text{const.}$	46
4.3	Das Verhältnis der Rückstreuoeffizienten B_r^{rel} als Funktion des Größenparameters α für verschiedene relative Biegesteifigkeiten M^{rel} wobei $m = 1.75$ und $f_V = \text{const.}$	48
4.4	Realteil n_r und Imaginärteil k_r des spektralen komplexen Brechungsindex m von Al_2O_3 für verschiedene Temperaturen (Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982).	50
4.5	Das Verhältnis der Strahlungswärmestromdichten $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ von thermischen Isolationen aus Hohlleitern ($\gamma_{\text{dia}} = 0.85$) und konventionellen Fasern als Funktion der Temperatur für unterschiedliche Faseraußendurchmesser r_1 unter der Bedingung $f_V = \text{const.}$	51
4.6	Der Einfluss von Polydispersität und erhöhter Absorption auf das Verhältnis der Strahlungswärmestromdichten $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ von thermischen Isolationen aus Hohlleitern ($\gamma_{\text{dia}} = 0.85$) und konventionellen Fasern als Funktion der Temperatur. Beide Fasergattungen weisen einen mittleren Außendurchmesser r_1 von $2\mu\text{m}$ auf und sind räumlich isotrop orientiert. Die Halbwertsbreite (FWHM) der Verteilung um den Mittelwert von r_1 beträgt $0.18\mu\text{m}$ für polydisperse Fasern.	52
4.7	Die Streuung einer senkrecht einfallenden ebenen Welle an einem Ensemble aus sieben äquidistanten Hohlleitern bzw. konventionellen Fasern. Die Orientierung der Fasern relativ zur Einfallsrichtung wird durch den Azimutwinkel Ω beschrieben.	53
4.8	Bandgemitteltes Extinktionsverhältnis $\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle$ als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_V . Die spektrale Mittelung wird über ein kurzwelliges Band (Index „low“), ein Band mittlerer Wellenlängen (Index „med“) und ein langwelliges Spektralband (Index „high“) durchgeführt. Ferner ist die Gesamtmittelung (Index „total“) von 0.5 bis $5.5\mu\text{m}$ dargestellt.	55
4.9	Gesamtwärmeleitfähigkeit tc_{total} einer Hohlleiterisolation und einer Isolation aus konventionellen Fasern als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_V für unterschiedliche Temperaturen. Beide Fasergattungen weisen einen Außendurchmesser r_1 von $2\mu\text{m}$ auf und das Durchmesserverhältnis γ_{dia} für die Hohlleiter beträgt 0.85.	57

5.1	Die Extinktionseffizienz Q_{ext} eines dreischichtigen Zylinders als Funktion des Größenparameters α für Brechungsindizes nahe 1 unter schrägem Lichteinfall. Der Einfallswinkel beträgt $\phi = 25^\circ$	60
5.2	Die Extinktionseffizienz konzentrischer Zylinder Q_{ext} unterschiedlicher Materialpaarung und Geometrie als Funktion des Größenparameters α für unpolarisiertes Licht. Für den Einfallswinkel gilt dabei $\phi = 0^\circ$	61
5.3	Die Extinktionseffizienz der konzentrischen Zylinder aus Abbildung 5.2 jedoch mit höheren Werten in den Brechungsindizes als Funktion des Größenparameters α . Für den Einfallswinkel gilt weiterhin $\phi = 0^\circ$	62
5.4	Die Extinktionseffizienz des konzentrischen Zylinders aus Abb. 5.3d mit $r_2 = 0.8r_1$ als Funktion des Größenparameters α für nicht verschwindende Absorption $k_r > 0$ bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0$).	63
5.5	Extinktionseffizienz dreilagiger Zylinder mit $r_2 = r_1/2$ und $r_3 = r_1/3$ als Funktion des Größenparameters α bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0^\circ$).	64
5.6	Die Extinktionseffizienzen zweilagiger Zylinder ($r_2/r_1 = 0.20$) unter schrägem Lichteinfall. Für die Brechungsindizes gilt $m_1 = 1.15$ und $m_2 = 1.30$	64
5.7	Die Extinktionseffizienzen für räumlich isotrop angeordnete homogene und mehrschichtige Zylinder.	66
5.8	Die gemittelte Extinktionseffizienz für verschiedene obere Integrationsgrenzen in Gl. (2.93). Die Linien der ADA-Näherung und der MSC-Theorie sind im Falle einer oberen Integrationsgrenze von $\phi_{\text{sup}} = \pi/8$ mit Dreiecken markiert. Für die Integration bis $\phi_{\text{sup}} = \pi/4$ und $\phi_{\text{sup}} = \pi/2$ dient zur Kennzeichnung ein Kreis bzw. ein Quadrat.	66
5.9	Die relative Berechnungszeit $t_{\text{MSC}}^{\text{calc}}/t_{\text{ADA}}^{\text{calc}}$ als Funktion des Größenparameters α für homogene, zweischichtige und dreischichtige Zylinder.	67
6.1	Gemessene Faserdurchmesserverteilung w_{exp} (Balken) und der zugehörige Fit mit einer logarithmischen Normalverteilung w_{logn} (Volllinie).	70
6.2	Bei Raumtemperatur experimentell ermittelter effektiver spezifischer Extinktionskoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ (dicke Volllinie) und die effektive Albedo ω_0^* (dünne Volllinie).	70
6.3	Gemessener (Volllinie) und theoretisch ermittelter effektiver spezifischer Streukoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{sca}}^*$. Die gestrichelte Linie bezieht sich auf reine Zylinderstreuung für die Verteilung aus Abb. 6.1. Für die Berechnung der gepunkteten Linie wurde neben den zylindrischen Streuern ein Anteil an sphärischen Streukörpern angenommen.	72
6.4	REM-Aufnahme der Faserprobe. Deutlich zu erkennen ist die körnige Struktur der polykristallinen Fasern. Neben den zylinderförmigen Fasern findet man zudem Al_2O_3 -Mikropartikel.	72

6.5	Gemessene (Volllinie) und theoretisch (Punkte bzw. Striche) ermittelte effektive Albedo ω_0^* . Die gestrichelte Linie bezieht sich auf reine Zylinderstreuung für die Verteilung aus Abb. 6.1. Für die Berechnung der gepunkteten Linie wurde neben den zylindrischen Streuern ein Anteil an sphärischen Streukörpern angenommen.	74
6.6	Die gemessene effektive spezifische Extinktion $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ (Volllinie) und deren Mittelung über Spektralbänder (gepunktete Linie). Im Bereich kleiner Wellenlängen (bis $2 \mu\text{m}$) erfolgte die Messung bei Raumtemperatur und für größere Wellenlängen (ab $2 \mu\text{m}$) bei 1000°C	77
6.7	Die effektive Albedo $\hat{\omega}$ (Volllinie) und deren Mittelung über Spektralbänder (gepunktete Linie). Im Bereich kleiner Wellenlängen bis ($2 \mu\text{m}$) erfolgte die Bestimmung bei Raumtemperatur und für größere Wellenlängen bei 1000°C	77
6.8	Das numerische berechnete Temperaturprofil (Punkte) und der zugehörige Fit (Volllinie) mit Gl. (3.14). Die Soll-Amplitude der anregenden Temperaturschwingung beträgt $10 K$, bei einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.1/\text{min}$. Die mittlere Temperatur T_m liegt bei 1000°C . Der Bildausschnitt links oben zeigt den Anfangsbereich in Vergrößerung.	78
6.9	Ausschnitt des gemessenen (dicke Volllinie) und des numerisch berechneten Temperaturprofils (gestrichelte Volllinie) bei 1580°C mit einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$ und einer Soll-Amplitude von $10 K$. Die dünne und weiß unterlegte Volllinie zeigt die mit Gl. (3.28) gefittete stationäre Temperaturschwingung des Experiments.	79
6.10	Die berechneten und experimentell ermittelten Temperaturleitfähigkeiten als Funktion der Temperatur.	81
A.1	Vergleich der Phasenfunktion eines einzelnen Zylinders mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ nach Gl. (2.66) für verschiedene Einfallswinkel ϕ mit den Angaben aus Abbildung 4 in Lee, 1990b. Die Berechnungen wurden für eine Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$ und einem reellen Brechungsindex $m_1 = 1.507$ durchgeführt.	87
A.2	Vergleich der Phasenfunktion eines einzelnen Zylinders mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ nach Gl. (2.66) für verschiedene Einfallswinkel ϕ mit den Angaben aus Abbildung 5 in Lee, 1990b. Die Berechnungen wurden für eine Wellenlänge $\lambda = 9.18 \mu\text{m}$ und einem Brechungsindex von $m_1 = 1.05 - i \cdot 1.08$ durchgeführt.	88
A.3	Vergleich der Phasenfunktion räumlich isotrop angeordneter Zylinder mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ mit den Angaben aus Abbildung 12 in Lee, 1990b für die Wellenlängen und Brechungsindizes aus Abb. A.1 bzw. Abb. A.2.	89
A.4	Vergleich der eigens berechneten Rückstreuparameter mit den Resultaten aus Tabelle 1 in Lee, 1988 im Falle parallel angeordneter Fasern und Abbildung 7 aus Lee, 1989 für räumlich isotrope Fasern. Die Einstrahlung erfolgt in beiden Fällen diffus.	89
A.5	Vergleich der berechneten normierten Intensitätsverteilung nach Gl. (2.63) mit Abbildung 5b aus Barabás, 1987 für einen dreischichtigen Zylinder.	90

A.6	Vergleich der eigens berechneten Extinktionseffizienzen, gemäß Gl. (2.92) und Gl. (2.93), mit den Angaben aus Abbildung 6 von Cohen und Alpert, 1979 für räumlich isotrop angeordneter Zylinder. Den Berechnungen liegt ein Brechungsindex von 1.6 zugrunde.	91
A.7	Vergleichsrechnung zur abhängigen Streuung für ein Paar von beschichteten Fasern mit festem Abstand c_f und variierender azimuthaler Orientierung relativ zur einfallenden ebenen Lichtwelle. Eigene Ergebnisse sind als Kreuze abgebildet und die Resultate aus Abbildung 4 in Lee, 1992 erscheinen als Kreise.	91
A.8	Vergleich der berechneten Strahlungswärmestromdichten unter Benutzung von Gl. (2.11), Gl. (2.15) und Gl. (2.17) mit den Resultaten aus (Abbildung 6) und (Abbildung 10) aus Azad und Modest, 1981.	92
B.1	Validierung der Gl. (3.14) bzw. (B.18) sowie der Gleichungen (3.17) bis (3.27) durch Abgleich mit FE-Berechnungen.	99
B.2	FE-Modell für die Berechnung des Temperaturprofils an der Stelle $T(r = 0, z = 0, t)$ für einen endlichen Zylinder der Länge L und einen unendlichen Zylinder $L \mapsto \infty$	100
B.3	FE-Berechnung des Temperaturprofils an der Stelle des Zylinderschwerpunktes ($T(r = 0, z = 0, t)$) für einen unendlich langen Zylinder (Volllinie) und einen Zylinder der Länge L (Strichlinie). Das zugehörige FE-Modell ist in Abb. B.2 gezeigt.	100
B.4	Der transiente Einschwingvorgang der in Abb. 3.7 gezeigten Temperaturkurve mittig auf der Probenachse. Die Volllinie beschreibt die gemessene Probenamplitude und die (extrapolierte) gefittete stationäre Temperaturkurve erscheint als eine mit Kreuzen unterlegte gestrichelte Linie. Aus der Subtraktion ergibt sich der transiente Temperaturanteil (Strich-Punkt-Linie).	101
B.5	Abbildung zum Abbruchkriterium am Beispiel der Temperaturkurven aus Abb. 3.7 bzw. Abb. B.4. Die Temperaturleitfähigkeit wird hier als Funktion der ausgewerteten Schwingungsperioden gezeigt. Die Auswertung erfolgt einmal in Vorwärtsrichtung (Volllinie) und einmal rückwärts gerichtet (Punkte).	102
C.1	Die Extinktionseffizienz Q_{ext} als Funktion des Größenparameters α nach Gl. (2.91). Für $\alpha \rightarrow \infty$ strebt die Extinktionseffizienz gegen zwei.	104
C.2	Der temperaturabhängige spektraler Emissionsgrad von Aluminiumoxid nach Whitson, 1975.	106

Tabellenverzeichnis

4.1	Tabelle zur Berechnung des bandgemittelten Extinktionsverhältnisses $\langle \overline{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle$. Die spektrale Mittelung wird über ein kurzwelliges Band (Index „low“), ein Band mittlerer Wellenlängen (Index „med“) und ein langwelliges Band (Index „high“) durchgeführt.	55
6.1	Die aus dem Temperaturabgriff an den zwei unterschiedlichen Messpositionen A und B gewonnenen Messwerte der Temperaturleitfähigkeiten.	80
6.2	Vergleich der experimentellen und theoretischen Wärmeleitfähigkeiten.	82
C.1	Literaturwerte aus Touloukian und Buyco, 1970, Touloukian u. a., 1971 sowie Kadoya, Matsunaga und Nagashima, 1985 welche für die numerischen Berechnungen in Kap. 6.2 verwendet wurden. . . .	105

Symbolverzeichnis

A_b	=	Anschlussfaktor
A_{ct}	=	Kontaktfläche zwischen zwei Fasern
A_1, A_2, A_3, A_4	=	Fitparameter der Gl. (3.28)
A	=	Querschnittsfläche
A_g	=	Absorptionsgrad
A_{geo}	=	geometrischer Querschnitt
a_r	=	relativer Kontaktradius
a_n	=	Partialwellenkoeffizient (Streutheorie)
B	=	Wirkungsquerschnitt der Rückstreuung
b_n	=	Partialwellenkoeffizient (Streutheorie)
C_{ext}	=	Extinktionsquerschnitt
C_{sca}	=	Streuquerschnitt
C_{abs}	=	Absorptionsquerschnitt
c_f	=	Abstand zwischen den Fasern
c_0	=	Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
c_p	=	spezifische Wärme
c_1	=	$R(\omega/\kappa)^{\frac{1}{2}}$, dimensionslose Größe
c_2	=	$\sqrt{2}Rh_{rel}$, dimensionslose Größe
C_{sb}	=	Kontaktflächenparameter
C_r	=	Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten von Gas- und Festkörper
$\hat{D}_{I,n}, \hat{D}_{II,n}$	=	vgl. Gl. (2.52)
d	=	Außendurchmesser
\hat{E}	=	Vektor der elektrischen Feldstärke
E^{mod}	=	Elastizitätsmodul
f_V	=	ρ_{fs}/ρ_{bulk} , Volumenanteil des Feststoffes
f_{Hz}	=	Frequenz
G_{ks}^{jm}	=	Kopplungsfunktion für abhängige Zylinderstreuung, vgl. Gl. (2.80)
\check{g}	=	Anisotropie-Parameter
g	=	$\check{g}/3$, Anisotropie-Faktor
h_p	=	Planck-Konstante
h	=	Wärmeübergangskoeffizient
h_{rel}	=	h/tc , relativer Wärmeübergangskoeffizient
\hat{H}	=	magnetische Feldstärke
H_n	=	$J_n - iY_n$, Hankel-Funktion der zweiten Art (Ordnung n)
I	=	Intensität
i	=	$\sqrt{-1}$
$i_{sca}(\theta, \phi)$	=	Verteilungsfunktion der gestreuten Intensität
i_p^λ	=	spektrale Intensität eines schwarzen Körpers
I_b	=	integrale Intensität eines schwarzen Körpers

J_n	= Bessel-Funktion der ersten Art (Ordnung n)
I_n^{bsl}	= modifizierte Bessel-Funktion der ersten Art (Ordnung n)
K_{Wien}	= Konstante im Wienschen Verschiebungsgesetz
K_1, K_2	= vgl. Gl. (2.12) und Gl. (2.13)
k_r	= Imaginärteil des Brechungsindex
k_B	= Boltzmann Konstante
k	= $2\pi/\lambda$, Wellenzahl
L	= Anzahl der Schichten eines heterogenen Zylinders
l	= Länge
l_{fp}	= Probenlänge
l_{fib}	= Faserlänge
M	= Biegesteifigkeit
m	= $n_r - ik_r$, komplexer Brechungsindex
N_j	= Anzahl der Fasern der Gattung j pro Volumen
N_{norm}	= vgl. Gl. (6.3)
N_{sub}	= Anzahl der Subintervalle zur Berechnung von $p_r(\xi)$
n_r	= Realteil des Brechungsindex
$\hat{P}_{\text{I},n}, \hat{P}_{\text{II},n}$	= vgl. Gl. (2.52)
$p(\mu', \mu)$	= Phasenfunktion, vgl. Gl. (2.5)
$p_r(\xi)$	= Phasenfunktion für räumlich isotrope Fasern
q_{rad}	= Strahlungswärmestromdichte
Q_{ext}	= Extinktionseffizienz
Q_{sca}	= Streueffizienz
r_i	= Radien eines mehrschichtigen Zylinders (Schichtindex i)
r_1	= Außenradius eines Zylinders
R	= Probenradius
R_{gh}	= gerichtet-hemisphärischer Reflexionsgrad
R_j	= Abstand des j -ten Zylinders vom Aufpunkt P bei abhängiger Streuung
r	= radiale Koordinate
T	= Temperatur
t	= Zeit
\hat{S}	= Poynting-Vektor
S_1	= Struve-Funktion erster Ordnung
s	= $s = z/\mu$, Weglänge (vgl. Abb. 2.1)
T_{ex}	= Amplitude der thermischen Anregung
T_{gh}	= gerichtet-hemisphärischer Transmissionsgrad
T_{m}	= mittlere Temperatur
T_{w}	= Wandtemperatur
T_{ij}	= Amplituden-Streumatrix
tc	= Wärmeleitfähigkeit
\hat{u}	= magnetischer Hertz-Vektor
U_{pol}	= TM Polarisationsgrad
\hat{v}	= elektrischer Hertz-Vektor
V_{pol}	= TE Polarisationsgrad
V	= Volumen
V_r	= Volumenverhältnis von Faserwerkstoff und Gas
w	= Gewichtungsfaktoren, vgl. Gl. (2.10)
w_{logn}	= Wahrscheinlichkeitsdichte der logarithmischen Normalverteilung

\hat{W}_{ij}	=	vgl. Gl. (2.75) bis (2.78)
\hat{X}_n	=	Koeffizientenmatrix, vgl. Gl. (2.52)
Y_n	=	Neumann-Funktion n -ter Ordnung
Z	=	Parameter der Faserorientierung
α	=	$2\pi r_1/\lambda$, Größenparameter
β	=	Anteil der Rückstreuung
γ_{dia}	=	r_2/r_1 , Durchmesser Verhältnis
γ	=	Winkel bei abhängiger Streuung
Γ_A	=	vgl. Gl. (3.22)
Γ_B	=	vgl. Gl. (3.23)
δ_{fg}	=	Höhe einer Faser-Gas Zelle in Einheiten des Faserdurchmessers
δ_{ADA}	=	Phasenverschiebung, vgl. Gl. (2.86)
ϵ	=	Emissionsgrad
ϵ_r	=	Dielektrizitätskonstante
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$	=	vgl. Gl. (3.18-3.21)
η	=	Amplitudenverlust
ϑ	=	Vgl. Abb. 2.8
θ	=	Beobachtungswinkel
Θ_j	=	Phasenverschiebung, vgl. Gl. (2.79)
κ	=	$\kappa = \frac{tc}{\rho c_p}$, Temperaturleitfähigkeit
Λ^{-1}	=	Wärmeleitwiderstand
λ	=	Wellenlänge
$\lambda_{\text{max}}^{\text{P}}$	=	Wellenlänge des Intensitätsmaximums
μ	=	$\mu = \cos \xi$, Kosinus des Streuwinkels
ν	=	Phasenverschiebung, vgl. Gl. (3.17) und Gl. (3.24)
ν^{pn}	=	Poissonzahl
ξ	=	Streuwinkel
o_{fg}	=	Breite einer Faser-Gas Zelle in Einheiten des Faserdurchmessers
ρ	=	Dichte
σ_{SD}	=	Standardabweichung in Gl. (6.1)
σ_{B}	=	Stefan-Boltzmann Konstante
σ_{ext}	=	Extinktionskoeffizient
σ_{sca}	=	Streukoeffizient
σ_{abs}	=	Absorptionskoeffizient
σ_{ec}	=	elektrische Leitfähigkeit
ς	=	komplexe Größe
τ	=	optische Dicke
v_j	=	Eigenvolumenanteil einer bestimmten Faserart j
ϕ_c	=	Öffnungswinkel des Streukegels
ϕ	=	$ \pi/2 - \phi_c $, Einfallswinkel
φ_0	=	mittlerer Faserorientierungswinkel, vgl. Gl. (2.26) und (2.27)
$\check{\chi}_n$	=	vgl. Gl. (3.13)
χ_n	=	$R\check{\chi}_n$, vgl. Gl. (3.14)
χ_{err}^2	=	relative quadratische Abweichung
ψ	=	Winkel zur Beschreibung der diffusen Emission
Ψ_j, Π_j	=	Ricatti-Bessel-Funktionen, vgl. Gl. (A.4)
ω_0	=	$\frac{C_{\text{sca}}}{C_{\text{ext}}}$, Albedo

ω	=	Winkelgeschwindigkeit
Ω	=	azimutaler Orientierungswinkel eines parallelen Faserensembles
hochgestellte Indizes:		
cs	=	Bezug auf die Stirnfläche eines Zylinders
cyl	=	Zylinder bzw. Fasereigenschaft
exp	=	experimentell ermittelte Größe
high,low	=	oberer und unterer Wert
H	=	Eigenschaft einer Hohlleiter
mtl	=	Bezug auf die Mantelfläche eines Zylinders
S	=	Eigenschaft einer konventionellen Faser
rel	=	X^H/X^S , relative Größe
sph	=	Eigenschaft eines sphärischen Partikels
th	=	theoretischer Wert
λ	=	indiziert eine spektrale Eigenschaft
*	=	referenziert eine effektive bzw. skalierte Größe
\sim	=	massenspezifische Effektivgröße
cc	=	konjugiert komplex
tiefgestellte Indizes:		
bulk	=	Werkstoff- bzw. Materialeigenschaft
ct	=	bezieht sich auf Faserkontakte
exp	=	experimentell ermittelter Wert
ext,sca,abs	=	Extinktion, Streuung und Absorption
fp	=	Eigenschaft der Probe
g	=	gerichtet
gh	=	gerichtet-hemisphärisch
inc,int	=	einfallend und intern
m	=	indiziert ein Spektralband
max	=	Maximalwert
w	=	Eigenschaft an der Umwandlung
r,p	=	randomisierte bzw. parallele Faseranordnung
th	=	theoretisch ermittelter Wert
total	=	Gesamtgröße
sg	=	Kopplung Gas-Festkörper
sgb	=	Kopplung Gas-Festkörper und Faserkontakte
λ	=	indiziert eine spektrale Eigenschaft
I	=	transversal magnetische (TM) Mode
II	=	transversal elektrische (TE) Mode

Kapitel 1

Vorwort und Einleitung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des vom Freistaat Bayern finanzierten Projekts EnerTHERM am Zentrum für Hochtemperatur Leichtbau, einer Kostenstelle des Fraunhofer-Instituts für Silicatforschung. Die Intention war, anhand wissenschaftlicher Methoden, Grundlagen für eine Steigerung der Energieeffizienz in Hochtemperaturprozessen zu erarbeiten. Angesichts der politischen Zielsetzung der Bundesregierung, die Treibhausgasemissionen bis 2020 um 40% gegenüber den aus dem Jahr 1990 verursachten Emissionen abzusenken und der Tatsache, dass der Primärenergiebedarf der Bundesrepublik allein über die Substitution konventioneller Energiequellen durch CO₂-neutrale regenerative Quellen nicht gedeckt werden kann, besteht die Notwendigkeit technischer Fortschritte, um den Energiebedarf selbst zu senken (BMW und BMU, 2012). Etwa 30 Prozent des Endenergiebedarfs entfallen in der Bundesrepublik auf den Bereich der Industrie (Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen e. V., 2016). Davon werden nach ISI, 2013 zwei Drittel für Prozesswärme in Wärmebehandlungsverfahren verwendet, wobei der jeweilige Energiebedarf thermischer Verfahren mit Prozesstemperaturen oberhalb und unterhalb von 1000°C ähnlich hoch ausfällt (Frisch u. a., 2010). Ein Anteil von etwa zehn Prozent des bundesweiten Endenergiebedarfs kann demnach den oberhalb von 1000°C in entsprechenden Industrieöfen ablaufenden Hochtemperaturprozessen zugeordnet werden. Verlustwärmeströme über die Ofenwand betragen hier je nach Betriebsart und Ofentyp etwa 10-20% der aufgewendeten Energie (Ernst, 2013, Eisenmann Anlagenbau GmbH Co. & KG, 2015 und Dög, 2004). Zur Verringerung der Wandverluste wird seit den 1950er Jahren Hochtemperaturwolle aus keramischen Fasern als Dämmmaterial in Industrieöfen eingesetzt (Wimmer, 2004). Diese Faserisolationen sind bis zu Temperaturen von 1700°C im Dauerbetrieb einsetzbar, zeigen hervorragende Temperaturwechselbeständigkeit, geringe Wärmekapazitäten und Wärmeleitfähigkeiten und werden auch direkt an der dem Brenngut zugewandten Ofeninnenseite platziert (vgl. Routschka, 2007 und Cheremisinoff und Cheremisinoff, 1995). Bei wärmetechnischen Vorgängen werden nach Schuster, 1955, ab einer Temperatur von etwa 800°C die durch Wärmestrahlung und Festkörperwärmeleitung ausgetauschten Energien quantitativ vergleichbar. Bei höheren Temperaturen dominiert die Wärmestrahlung. Hochtemperatur-Wärmeisolationen müssen also neben einer geringen Festkörperwärmeleitfähigkeit die zusätzliche Eigenschaft besitzen, den Durchgang von Wärmestrahlung effektiv zu unterdrücken. Der Energietransport durch Wärmestrahlung kann über zwei Mechanismen reduziert werden: Durch Strahlungsabsorption und durch Streuprozesse. Allerdings zeigen Oxidkeramiken bei hohen Temperaturen im relevanten Wellenlängenbereich, also in dem Bereich maximaler Leistungsdichte der thermischen Strahlung, nur geringe Absorption (Gryvnak und Burch, 1965, Cabannes und Billard, 1987). Exemplarisch sei dies in Abb. 1.1 am Beispiel von Aluminiumoxid gezeigt, wobei die Werte für den

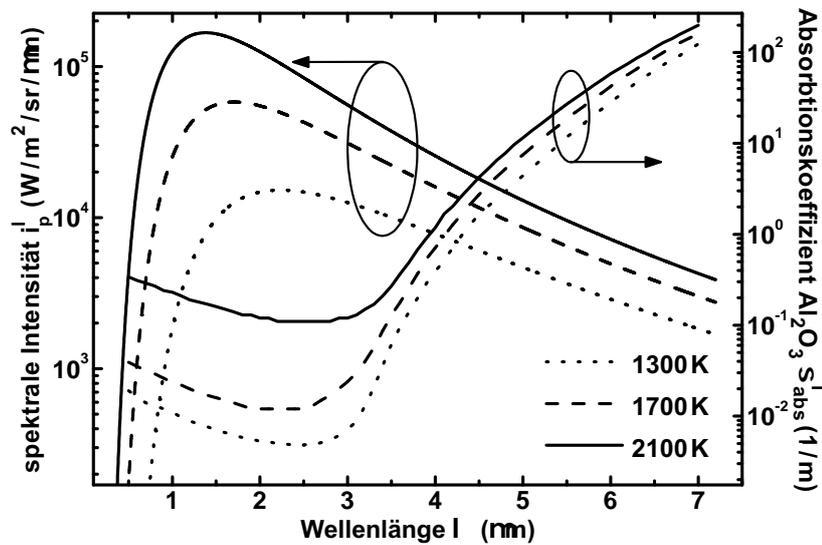


Abbildung 1.1: Die spektrale Intensität i_p^λ und der spektrale Absorptionskoeffizient $\sigma_{\text{abs}}^\lambda$ von Al_2O_3 für unterschiedliche Temperaturen. Die Daten für den Absorptionskoeffizienten entsprechen den Angaben von Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982.

Absorptionskoeffizienten σ_{abs} den Angaben von Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982 entsprechen. Bei einer Temperatur von 2100K entfallen 83% der abgestrahlten Leistung eines schwarzen Körpers auf den Wellenlängenbereich zwischen $0,5 \mu\text{m}$ und $3,5 \mu\text{m}$. In diesem Spektralbereich besitzt Aluminiumoxid ein geringes Absorptionsvermögen. Eine Erhöhung des Absorptionsgrads kann nach Park u. a., 2008 und Caps u. a., 1984 durch Beigabe von Trübungsmitteln erfolgen. Weiterhin beschäftigen sich verschiedene Studien Wang und Tien, 1983, Hass u. a., 1997 und Rätzer-Scheibe, Schulz und Krell, 2006 mit geeigneten Faserbeschichtungen, um den Strahlungstransport zu minimieren. Sieht man von der Beimengung von absorbierenden Partikeln oder der Beschichtung der Fasern ab, so muss der Durchgang von Wärmestrahlung in diesem Spektralbereich zuvorderst durch Streuprozesse behindert werden. Eine Optimierung oxidkeramischer Hochtemperatur-Wärmeisolationen muss demnach das Ziel verfolgen, den Gesamt-Wirkungsquerschnitt der Lichtstreuung im relevanten Lichtwellenlängenbereich zu maximieren. Mit der Zielsetzung, keramische Faserisolationen weiter zu optimieren, wird im Rahmen einer numerischen Vergleichsstudie ein geometrischer Ansatz gewählt, indem konventionelle Fasern durch Hohlfasern substituiert werden. Die Charakteristik der Wechselwirkung von Licht mit einzelnen Fasern wird hierfür mit der Maxwell'schen Streutheorie für unendlich lange Zylinder bzw. unendlich lange Hohlzylinder modelliert.

Trotz leistungsstarker Rechner sind Parameterstudien auf Grundlage der Maxwell'schen Streutheorie zeitlich aufwendig. Dies gilt insbesondere für die Untersuchung mehrfach beschichteter Fasern. Hier steigen die Matrixeinträge des zu lösenden linearen Gleichungssystems quadratisch mit der Anzahl der Schichten einer Faser. In einer weiteren numerischen Studie wird deshalb mit der „Anomalous Diffraction

Approximation" eine, für einfache Zylinder bereits existierende Näherungsmethode für Lichtstreuungseffekte, weiterentwickelt und auf ihre Eignung an mehrlagigen Zylindern untersucht.

Letztendlich muss es aber gelingen, theoretisch erarbeitete Konzepte zur Optimierung von Faserisolationen auch messtechnisch zu verifizieren. Mithilfe infrarot-optischer Charakterisierungsmethoden werden die effektiven Streugrößen Albedo und Extinktion an einer kommerziellen Faserisolation aus Aluminiumoxid bei Raumtemperatur und bei einer Temperatur von 1000 °C experimentell bestimmt. Zusätzlich wird mittels REM-Analyse eine Faserdurchmesserverteilung des Isolationsmaterials erstellt. Aus dieser Verteilung können die effektiven Streugrößen mithilfe der Maxwellschen Streutheorie für den unendlichen Zylinder berechnet und mit den experimentellen Werten abgeglichen werden. Um Aussagen über den Gesamtwärmetransport zu erhalten, soll die Temperaturleitfähigkeit des Isolationsmaterials von 1000 °C bis zur maximalen Anwendungstemperatur von 1600 °C experimentell bestimmt werden. Wie aus der Dissertation von Wulf, 2009 hervorgeht, bedeutet die Messung der Temperaturleitfähigkeit von schwach Wärme leitenden, heterogenen Proben bei diesen hohen Temperaturen bis dato eine messtechnische Herausforderung und die etablierten Messmethoden stoßen dabei an ihre Grenzen. Zur experimentellen Untersuchung poröser keramischer Isolationen werden insbesondere die Guarded-Hot-Plate Methode wie bei Kamiuto u. a., 1982 und Tong und Tien, 1983b oder wie in den Arbeiten von Jackson, Adams und Millar, 1978 und Davis, 1978 das sogenannte Heißdrahtverfahren eingesetzt. Oberhalb einer Temperatur von 1000°C kann jedoch nurmehr das Heißdrahtverfahren angewendet werden. Ein entscheidender Nachteil der Heißdrahtmethode ist der enorme Aufwand, der mit der Probenvorbereitung einhergeht. Entscheidend für die Qualität der Messergebnisse ist nach Blumm, 2013 und Davis, 1978 ein ausreichender thermischer Kontakt zwischen Probe und Heißdraht, welcher auch bei hohen Messtemperaturen erhalten bleiben muss. Dabei ist nach Blumm, 2013 und Jackson, Adams und Millar, 1978 sicherzustellen, dass keine chemischen Reaktionen zwischen Heißdraht und Probe stattfinden. Um Messunsicherheiten aufgrund thermischer Kontaktprobleme zu minimieren, wird im Rahmen dieser Arbeit mit der Temperatur-Wellen-Analyse (TWA), eine weniger weit verbreitete Messmethode auf ihre Eignung hin untersucht. Die TWA ist in der Literatur auch als Methode von Ångström, 1861 bekannt. Ihr grundlegendes Prinzip bildet die Applikation einer periodisch schwingenden Temperaturrandbedingung an einer der Probenbegrenzungen. Wie in den experimentellen Arbeiten von Abeles, Cody und Beers, 1960, Tomokiyo und Okada, 1968, Hashimoto u. a., 1990 und Bhattacharya u. a., 2006 gezeigt, kann durch Detektion von Amplitude und Phasenverschiebung der Temperaturschwingung im Probeninneren die Temperaturleitfähigkeit des Probenmaterials ermittelt werden. In vorangegangenen wissenschaftlichen Publikationen wurde die TWA bis hin zu Temperaturen von 1000°C angewendet, wobei die Temperaturrandbedingung grundsätzlich an einer der Stirnflächen einer lang gezogenen Probe realisiert wurde. Die Detektion der Probenantwort erfolgte dann an der gegenüberliegenden Stirnfläche. Besonders im Hochtemperaturbereich wirkt sich diese Vorgehensweise aufgrund der Verlustwärmeströme über die Probenmantelfläche nachteilig auf die Qualität der Messergebnisse aus. In der Regel werden zu geringe Temperaturleitfähigkeiten gemessen. In dieser Arbeit dagegen wird die oszillierende Temperaturrandbedingung parallel zur Mantelfläche einer lang gezogenen zylindrischen Probe aus Faserisolationmaterial vorgegeben. Die an den Stirnflächen auftretenden Verlustwärmeströme können dann bei hinreichender Probenlänge vernachlässigt werden. Darüber hinaus

werden die Temperaturleitfähigkeiten der Proben in einem erhöhten Temperaturbereich zwischen 1000°C und 1600°C untersucht.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die in dieser Arbeit verwendeten theoretischen Modelle vorgestellt und beschrieben. Das dritte Kapitel erläutert die verwendeten experimentellen Methoden. Im vierten Kapitel folgt dann die Vergleichsstudie zwischen Hohlfasern und konventionellen Fasern als Basis einer keramischen Hochtemperaturisolation. In Kapitel 5 werden die numerischen Resultate der modifizierten Näherungsmethode zur Lichtstreuung vorgestellt und den Ergebnissen des Maxwell-Modells gegenübergestellt. Schließlich werden im sechsten Kapitel die experimentellen Resultate der Hochtemperatur-Charakterisierung gezeigt und mit theoretischen Vorhersagen verglichen. In einer abschließenden Betrachtung werden die relevanten Ergebnisse dieser Dissertation zusammengefasst, ergänzende Arbeiten vorgeschlagen und ein Zukunftsausblick gegeben. Ein ausführlicher Anhang liefert Informationen zur Ableitung der verwendeten Gleichungen sowie die Belege für die technisch korrekte Implementierung der numerischen Modelle.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Wärmetransportmechanismen und die zugehörigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die im Zusammenhang mit dem Wärmetransport in Faserdämmstoffen stehen, aufgeführt und erläutert. Die korrekte Implementierung der theoretischen Zusammenhänge in Computercode wird im Anhang durch Abgleich mit Literaturangaben belegt.

2.1 Wärmetransport in Faserisolationen

Festkörper- und Gaswärmeleitung, Konvektion und Wärmeübertragung durch Strahlung bilden die Wärmetransportmechanismen bei hohen Temperaturen. In Faserdämmungen mit Rohdichten größer $20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ kann für kleine Temperaturgradienten innerhalb der Isolation die Wärmeübertragung durch Konvektion vernachlässigt werden (Stark, 1991, Bhattacharyya, 1980, Raed, 2013). Die verbleibenden drei Wärmetransportkomponenten sind in der Regel durch Wechselwirkungen miteinander gekoppelt und die effektive Gesamtwärmeleitfähigkeit tc_{total} ist folglich eine komplizierte, zusammengesetzte Funktion der den einzelnen Wärmetransportmechanismen zugeordneten Wärmeleitfähigkeiten:

$$tc_{\text{total}} = f(tc_g, tc_s, tc_{\text{rad}}), \quad (2.1)$$

wobei tc_g die Wärmeleitfähigkeit der gasförmigen Komponente bezeichnet, tc_s die Festkörperwärmeleitfähigkeit repräsentiert und der Beitrag der Wärmestrahlung durch tc_{rad} symbolisiert wird. Die durch die Funktion f ausgedrückten Kopplungseffekte bewirken, dass die Gesamtwärmeleitfähigkeit tc_{total} in der Regel größer ausfällt, als die Summe der Beiträge der einzelnen Wärmetransportkomponenten.

2.2 Hohlraumstrahlung und das Plancksche Strahlungsgesetz

Die spektrale Intensität i_p^λ eines schwarzen Körpers lässt sich nach dem Planckschen Strahlungsgesetz beschreiben. Für die Abstrahlung in ein optisch dichtes Medium mit dem Brechungsindex $n_r^\lambda > 1$ gilt nach Siegel und Howell, 1992:

$$i_p^\lambda(T) = \frac{(n_r^\lambda)^2}{\lambda^5} \frac{2h_p c_0^2}{\exp\left(\frac{h_p c_0}{\lambda k_B T}\right) - 1}. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet λ die Wellenlänge, c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, h_p das Plancksche Wirkungsquantum und k_B die Boltzmann-Konstante. Das Maximum

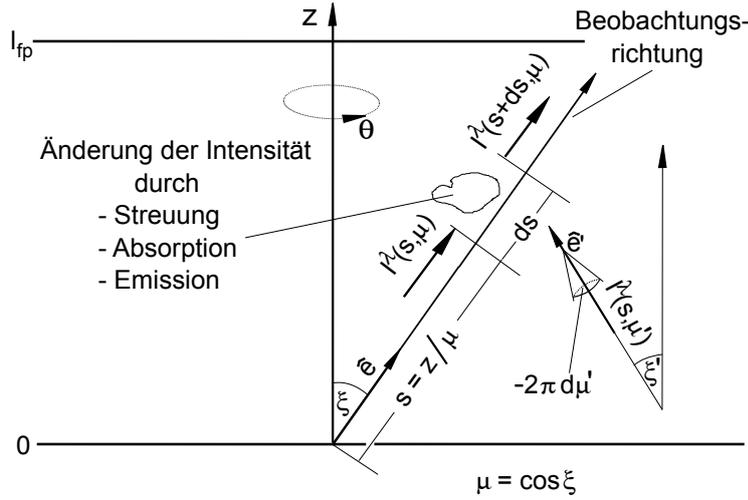


Abbildung 2.1: Illustration zur Bedeutung von Gl. (2.5) zur Beschreibung des Strahlungstransportes in partizipierenden Medien. Der Ausdruck $\mu = \cos \xi$ entspricht dabei dem Richtungskosinus.

der spektralen Intensität wird nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz mit zunehmender Temperatur zu höheren Frequenzen verschoben (vgl. Abb. 1.1):

$$\lambda_{\max} T = \frac{K_{\text{Wien}}}{n_r \lambda_{\max}} \quad \text{mit} \quad K_{\text{Wien}} = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (2.3)$$

Für einen konstanten Brechungsindex führt die Integration von Gl. (2.2) über alle Wellenlängen auf das Stefan-Boltzmann Gesetz für die integrale Intensität eines schwarzen Körpers:

$$I_b = n_r^2 \frac{\sigma_B}{\pi} T^4; \quad (2.4)$$

σ_B bezeichnet die Stefan-Boltzmann Konstante.

2.3 Strahlungstransport in partizipierenden Medien

Der Strahlungstransport in partizipierenden, also streuenden und absorbierenden Medien, wird durch die Strahlungstransportgleichung beschrieben (Chandrasekhar, 1960). In der eindimensionalen Formulierung für planparallele Medien mit azimuthaler Symmetrie (vgl. Abb. 2.1) gilt für die Änderung der spektralen Intensität in Beobachtungsrichtung:

$$\frac{1}{\sigma_{\text{ext}}^\lambda} \frac{d}{ds} I^\lambda(s, \mu) = \underbrace{-I^\lambda(s, \mu)}_{\substack{\text{Abnahme} \\ \text{durch} \\ \text{Extinktion}}} + \underbrace{\frac{\omega_0^\lambda}{2} \int_{-1}^1 d\mu' p^\lambda(\mu', \mu) I^\lambda(s, \mu')}_{\substack{\text{Zunahme durch} \\ \text{Einstreuung in} \\ \text{Beobachtungsrichtung}}} + \underbrace{(1 - \omega_0^\lambda) i_p^\lambda(T(s))}_{\substack{\text{Zunahme} \\ \text{durch} \\ \text{Emission}}}; \quad (2.5)$$

mit dem Richtungskosinus $\mu = \cos \xi$ und $s = z/\mu$ sowie der Definition der spektralen Albedo ω_0^λ :

$$\omega_0^\lambda = \frac{\sigma_{\text{sca}}^\lambda}{\sigma_{\text{ext}}^\lambda}. \quad (2.6)$$

Da für den Extinktionskoeffizienten $\sigma_{\text{ext}}^\lambda$ gilt:

$$\sigma_{\text{ext}}^\lambda = \sigma_{\text{sca}}^\lambda + \sigma_{\text{abs}}^\lambda, \quad (2.7)$$

entspricht der Ausdruck $\sigma_{\text{ext}}^\lambda(1 - \omega_0^\lambda)$ dem Absorptionskoeffizienten $\sigma_{\text{abs}}^\lambda$. Die Phasenfunktion $p^\lambda(\mu', \mu)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass am Ort s aus der Richtung \hat{e}' einfallende Strahlung der Intensität $I^\lambda(s, \mu')$ in Richtung \hat{e} gestreut wird. Aus $I^\lambda(s, \mu)$ kann die Strahlungswärmestromdichte $\hat{q}_{\text{rad}} = q_{\text{rad}}\hat{e}$ abgeleitet werden, es gilt formal (Kaviany, 1991):

$$q_{\text{rad}}(s, t) = \int_0^\infty d\lambda 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \mu I^\lambda(s, \mu, t) \quad (2.8)$$

und für die Divergenz der Strahlungswärmestromdichte folgt nach Kaviany, 1991:

$$\text{div} \hat{q}_{\text{rad}}(s, t) = \int_0^\infty d\lambda \sigma_{\text{abs}}^\lambda \underbrace{[4\pi i_{\text{p}}^\lambda(T(s, t))]}_{\text{Emission}} - \underbrace{2\pi \int_{-1}^1 d\mu I^\lambda(s, \mu, t)}_{\text{Absorption}}. \quad (2.9)$$

Die Divergenz der Strahlungswärmestromdichte verschwindet somit für $\sigma_{\text{abs}}^\lambda = 0$.

2.4 Lösung der Strahlungstransportgleichung

Für die allgemeine Integro-Differentialgleichung Gl. (2.5) sind keine geschlossenen analytischen Lösungen bekannt. Deshalb muss Gl. (2.5) mithilfe spezieller Näherungsverfahren approximativ gelöst werden.

2.4.1 Diskrete Ordinaten-Methode

Bei der sogenannten diskreten Ordinaten-Methode wird das in Gl. (2.5) auftretende Integral in eine endliche Summe umgewandelt, d. h., man betrachtet nur Strahlung die aus verschiedenen diskreten Richtungen auf ein Streuzentrum trifft und in Beobachtungsrichtung gestreut wird. Für isotrope Streuung $p^\lambda(\mu', \mu) = 1$ und den Gewichtungsfaktoren w_d führt das zu:

$$\int_{-1}^1 d\mu' I^\lambda(s, \mu') \rightarrow \sum_d w_d I_d^\lambda(s). \quad (2.10)$$

Drei-Fluss Näherung der Strahlungstransportgleichung

Für die Herleitung und die explizite Darstellung der Drei-Fluss Näherung $d \in [-1, 0, +1]$ sei auf die Abhandlungen von Manara, 2001 und Hahn u. a., 1997 verwiesen. Wichtig für das Verständnis der Zusammenhänge in dieser Arbeit ist lediglich die mathematische Behandlung anisotroper Streuung. Unter der formalen Annahme $p^\lambda(\mu', \mu) = 1$ (isotrope Streuung) kann der Übergang zur anisotropen Streuung mithilfe des Skalierungskonzeptes aus McKellar und Box, 1981 vollzogen

werden. Dabei wird die Phasenfunktion p^λ durch einen Anisotropiefaktor g^λ ersetzt und Effektivwerte (hochgestelltes „*“) für den Extinktionskoeffizienten und die Albedo eingeführt:

$$\sigma_{\text{ext}}^{*\lambda} = \sigma_{\text{ext}}^\lambda (1 - \omega_0^\lambda g^\lambda), \quad \omega_0^{*\lambda} = \omega_0^\lambda \frac{(1 - g^\lambda)}{1 - \omega_0^\lambda g^\lambda} \quad \text{mit} \quad g^\lambda = 0.5 \int_{-1}^1 d\mu' \mu' p^\lambda(\mu'). \quad (2.11)$$

Die Strahlungstransportgleichung ist invariant gegen diese Skalierung. Der Anisotropiefaktor g^λ liegt nach Definition zwischen -1 und 1 . Ein Wert von $g^\lambda = -1$ würde bedeuten, dass die gesamte einfallende Intensität zurück gestreut wird und für einen Wert von $g^\lambda = 0$ liegt isotrope Streuung vor.

Um die Genauigkeit der Drei-Fluss Näherung abschätzen zu können, wurden in Manara, 2001 Vergleichsstudien mit Monte-Carlo Simulationen durchgeführt. Dabei zeigte die Drei-Fluss Näherung Abweichungen zwischen 5 und 10 %.

Zwei-Fluss Näherung der Strahlungstransportgleichung

Betrachtet wird ein partizipierendes Medium der Länge l_{fp} , welches zwischen zwei planparallelen Begrenzungsflächen mit unterschiedlichen, aber jeweils zeitlich konstanten Temperaturen angeordnet ist. Die Temperaturen der Begrenzungsflächen sind T_{low} und T_{high} mit $T_{\text{high}} > T_{\text{low}}$. Um die sich zwischen den Begrenzungsflächen ausbildende Wärmestromdichte berechnen zu können, wird die Transportgleichung (2.5) mithilfe der Zwei-Fluss Näherung gelöst. In der Zwei-Fluss Näherung werden im Integral Gl. (2.5) nur zwei entgegengesetzte Richtungen berücksichtigt. Mit der rückwärts gerichteten Intensität I_{-1}^λ und der vorwärts gerichteten Intensität I_{+1}^λ lautet die Matrixgleichung der Intensitäten:

$$\mu \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} I_{+1}^\lambda \\ I_{-1}^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_1 & K_2 \\ K_2 & -K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{+1}^\lambda \\ I_{-1}^\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_{\text{abs}} i_{\text{p}}^\lambda, \quad (2.12)$$

mit den Matrix-Einträgen

$$K_1 = \sigma_{\text{abs}}^\lambda + \beta^\lambda \sigma_{\text{sca}}^\lambda \quad \text{und} \quad K_2 = \beta^\lambda \sigma_{\text{sca}}^\lambda. \quad (2.13)$$

Wie bei Lee, 1988 bezeichnet β^λ den Anteil des zurückgestreuten Lichts bei diffuser Einstrahlung. Zur weiteren Vereinfachung wird den Grenzflächen bei $z = 0$ und $z = l_{\text{fp}}$ der Emissionsgrad eins (Schwarzkörperstrahlung) zugeordnet. Integriert man die Matrixgleichung (2.12) über den oberen und unteren Halbraum, so findet man für die Strahlungswärmestromdichte q_{rad} den Ausdruck (Lee, 1988):

$$q_{\text{rad}} = \pi \int_{\lambda_{\text{inf}}}^{\lambda_{\text{sup}}} \frac{i_{\text{p}}^\lambda(T_{\text{high}}) - i_{\text{p}}^\lambda(T_{\text{low}})}{1 + l_{\text{fp}} (\sigma_{\text{abs}}^\lambda + 2\beta^\lambda \sigma_{\text{sca}}^\lambda)} d\lambda. \quad (2.14)$$

Ober- und Untergrenze der spektralen Integration werden dabei mit λ_{inf} und λ_{sup} bezeichnet.

2.4.2 Diffusionsapproximation in zylindersymmetrischen Medien

Gegenstand der Betrachtung ist ein lang gezogenes partizipierendes Medium mit Zylindersymmetrie und Radius R . In optisch dichten Medien kann die spektrale Strahlungswärmestromdichte q_{rad}^λ nach Azad, 1985 und Modest und Azad, 1980 durch eine Diffusionsgleichung angenähert werden. Im Sinne der Diffusionsnäherung kann ein Medium dann als optisch dicht betrachtet werden, wenn seine

optische Dicke $\tau = R\sigma_{\text{ext}}$ einen Wert von mindestens eins annimmt. Physikalisch bedeutet dies, dass die mittlere freie Weglänge eines Photons wesentlich kleiner ausfällt als die Abmessung des Mediums R . Eine skalierte Diffusionsnäherung für zylindersymmetrische Geometrien kann aus der unskalierten Gleichung für anisotrope Streuung von Azad und Modest, 1981 abgeleitet werden (Brendel, Seifert und Raether, 2017b):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^{*\lambda^2}} q_{\text{rad}}^\lambda(\tau^{*\lambda}) + \frac{1}{\tau^{*\lambda}} \frac{d}{d\tau^{*\lambda}} q_{\text{rad}}^\lambda(\tau^{*\lambda}) - \left[3 \left(1 - \omega_0^{*\lambda} \right) + \frac{1}{\tau^{*\lambda^2}} \right] q_{\text{rad}}^\lambda(\tau^{*\lambda}) \\ = 4\pi(1 - \omega_0^{*\lambda}) \frac{d}{d\tau^{*\lambda}} i_{\text{p}}^\lambda(T(\tau^{*\lambda})). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für die effektive optische Dicke $\tau^{*\lambda} = r\sigma_{\text{ext}}^{*\lambda}$ und die effektive Albedo $\omega_0^{*\lambda}$ gelten dabei die folgenden Definitionen:

$$\tau^{*\lambda} = \tau^\lambda(1 - \omega_0^\lambda \check{g}^\lambda/3), \quad \omega_0^{*\lambda} = \omega_0^\lambda \frac{(1 - \check{g}^\lambda/3)}{1 - \omega_0^\lambda \check{g}^\lambda/3}. \quad (2.16)$$

Nach Azad und Modest, 1981 bezeichnet \check{g}^λ den sogenannten Anisotropieparameter und nach Kaviany, 1991 entspricht $g = \check{g}^\lambda/3$ dem Anisotropiefaktor aus Gl. (2.11). Somit sind die Skalierungsvorschriften aus Gl. (2.16) für die effektiven optischen Kenngrößen der Diffusionsapproximation identisch zu jenen aus Gl. (2.11) für die Drei-Fluss Näherung.

Zur Lösung von Gl. (2.15) werden noch zwei Randbedingungen benötigt. Aus Symmetriegründen muss die Wärmestromdichte q_{rad} an der Stelle $r = 0$ zu null werden. Die Formulierung der Randbedingung an der Stelle $r = R$ gestaltet sich analog zu Azad und Modest, 1981. Mit den Transformationen aus Gl. (2.11) findet man (Brendel, Seifert und Raether, 2017b):

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1 - \omega_0^{*\lambda}} \frac{1}{\tau^{*\lambda}} \frac{d}{d\tau^{*\lambda}} \left(\tau^{*\lambda} q_{\text{rad}}^\lambda \right) \right]_{\tau_{\text{R}}^{*\lambda}} + 2 \left(\frac{2 - \epsilon_{\text{w}}^\lambda}{\epsilon_{\text{w}}^\lambda} \right) q_{\text{rad}}^\lambda(\tau_{\text{R}}^{*\lambda}) \\ = 4\pi \left[i_{\text{p}}^\lambda(\tau_{\text{R}}^{*\lambda}) - i_{\text{p}}^\lambda(T_{\text{w}}) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit der effektiven totalen optische Dicke $\tau_{\text{R}}^{*\lambda}$ und dem spektralen Emissionsgrad der Zylinderumgebung $\epsilon_{\text{w}}^\lambda$. Die Randbedingung Gl. (2.17) impliziert einen Temperatursprung (jump boundary condition) zwischen Zylinderoberfläche und Umgebung (Alonso, 1976). Ein Beleg für die Gültigkeit und die korrekte numerische Implementierung der Gleichungen (2.15) und (2.17) in Verbindung mit Gl. (2.16) findet sich im Anhang. Um aus dem Ausdruck Gl. (2.15) für die spektrale Wärmestromdichte q_{rad}^λ die Gesamt-Wärmestromdichte zu erhalten, ist die Integration über alle Wellenlängen durchzuführen. Aus numerischen Gründen wird hierfür die kontinuierliche Variable λ durch diskrete spektrale Bänder $m = [\lambda_m, \lambda_{m+1}]$ ersetzt. Damit wird die Planck-Funktion in Gl. (2.15) zu (Siegel und Howell, 1992):

$$i_{\text{p}}^m = (n_{\text{r}}^m)^2 \int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}} d\lambda \frac{2h_{\text{p}}c_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_{\text{p}}c_0}{\lambda k_{\text{B}}T}\right) - 1}. \quad (2.18)$$

Der Brechungsindex n_r^m , wie auch die Albedo und die Extinktion, werden dann konsequenterweise als Planck-gemittelte Größen definiert:

$$X^m = \frac{\int_{\lambda^m}^{\lambda^{m+1}} d\lambda X^\lambda \left[\lambda^5 \left(\exp \left(\frac{h_p c_0}{\lambda k_B T} \right) - 1 \right) \right]^{-1}}{\int_{\lambda^m}^{\lambda^{m+1}} d\lambda \left[\lambda^5 \left(\exp \left(\frac{h_p c_0}{\lambda k_B T} \right) - 1 \right) \right]^{-1}}, \quad (2.19)$$

wobei der Platzhalter X stellvertretend für die Extinktion, die Albedo oder den Brechungsindex steht. Die Festlegung der Wellenlängenintervalle erfolgt temperaturabhängig nach der Regel $i_p^m = i_p^{m+1}$. Für jedes Wellenlängenband m ergeben sich demnach identische Werte für die abgestrahlte Leistung. Numerische Berechnungen mit Gl. (2.15) erfolgen dann mittels eines Finite-Differenz-Schemas (vgl. Anhang C).

2.4.3 Strahlungswärmeleitfähigkeit

Die Strahlungswärmeleitfähigkeit in optisch dichten Medien tc_{rad} wird häufig mit dem sogenannten Rosseland-Diffusionsmodell berechnet. Als Beispiele seien die Arbeiten von Stark, 1991, Reiss und Ziegenbein, 1985, Lee und Cunnington, 2000 und Daryabeigi u. a., 2011 genannt. Nach Siegel und Howell, 1992 entspricht die Rosseland-Diffusionsgleichung auf formale Weise dem Fourier-Gesetz der stationären Wärmeleitung. In Analogie zur Festkörper-Wärmeleitfähigkeit findet man für die Strahlungswärmeleitfähigkeit den Ausdruck (Siegel und Howell, 1992):

$$tc_{\text{rad}} = \frac{16n_r^2 \sigma_B T^3}{3} \int_{\lambda_{\text{inf}}}^{\lambda_{\text{sup}}} \frac{1}{\Gamma^\lambda} \frac{\partial i_p^\lambda(T)}{\partial I_p(T)} d\lambda. \quad (2.20)$$

Γ^λ ist dabei ein effektiver Extinktionskoeffizient. Ferner ist die Rosseland-Gewichtungsfunktion $\frac{\partial i_p^\lambda(T)}{\partial I_p(T)}$ definiert als die partielle Ableitung der von einem schwarzen Strahler abgestrahlten spektralen Intensität, nach der bei gleicher Temperatur abgestrahlten Gesamtintensität (Siegel und Howell, 1992):

$$\frac{\partial i_p^\lambda(T)}{\partial I_p(T)} = \frac{\pi h_p^2 c_0^3}{2 \lambda^6 k_B} \frac{1}{\sigma_B T^5} \frac{\exp \left(\frac{h_p c_0}{k_B \lambda T} \right)}{\left[\exp \left(\frac{h_p c_0}{k_B \lambda T} \right) - 1 \right]^2}. \quad (2.21)$$

2.4.4 Gekoppelter Gas-Festkörper Wärmetransport

Das in dieser Arbeit genutzte Grundmodell zur Bestimmung des gekoppelten Gas-Festkörper Wärmetransports beruht auf der Arbeit von Fricke, 1924 und wurde von Bhattacharyya, 1980 und Stark, 1991 unter folgenden Annahmen für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit in Faserisolationen weiterentwickelt:

- Gas und Fasern bilden ein homogenes Medium, welchem eine Gesamtwärmeleitfähigkeit tc_{sg} zugeordnet werden kann.
- Die Wechselwirkung von Fasern und Gas kann über eine Einheitszelle gemittelt werden.
- Die Fasern sind als lang gezogene Sphäroide beschreibbar.

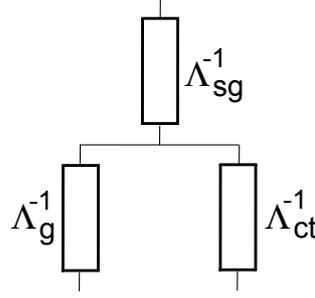


Abbildung 2.2: Schaltbild der Wärmeleitwiderstände des Grundmodells Λ_{sg}^{-1} (vgl. Gl. 2.22), des Kontakt-Wärmeleitwiderstands Λ_{ct}^{-1} und des Gas-Wärmeleitwiderstands Λ_{ct}^{-1} .

Nach Stark, 1991 findet man für tc_{sg} den Ausdruck:

$$tc_{sg} = tc_{bulk} \left(1 + \frac{C_r - 1}{1 + V_r (1 + Z (C_r - 1) / (C_r + 1))} \right), \quad (2.22)$$

und $C_r = tc_g / tc_{bulk}$ bezeichnet das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten des Fasermaterials und des Gases. $V_r \approx \rho_{fp} / (\rho_{bulk} - \rho_{fp})$ ist das Verhältnis aus dem Volumen der Fasern und des Gases. Der Parameter Z repräsentiert den Anteil der Fasern, welche senkrecht zum äußeren makroskopischen Wärmestrom orientiert sind. Für räumlich isotrop orientierte Fasern gilt $Z = 0.66$. Im Grundmodell Gl. (2.22) werden die Fasern als unendlich lang angenommen. Dies bedeutet für einen vorliegenden Temperaturgradienten, dass jede Faser eine Verbindung von der warmen zur kalten Seite herstellt. Dies ist in realistischen Faserisolationen so nicht der Fall, sondern die Verbindung von der warmen zur kalten Seite entsteht über Kontaktstellen zwischen den Fasern mit der Kontaktfläche A_{ct} . Um diese Kontaktwärmeübertragung zu berücksichtigen, schlägt Stark, 1991 eine Modifikation des Modells dahingehend vor, dass dem Wärmeleitwiderstand des Grundmodells Λ_{sg}^{-1} eine Parallelschaltung von Kontakt-Wärmeleitwiderstand Λ_{ct}^{-1} und Gas-Wärmeleitwiderstand Λ_{ct}^{-1} in Reihe geschaltet wird (vgl. Abb. 2.2). Nach Stark, 1991 erhält man durch Einbeziehung der Faserkontakte für die Wärmeleitfähigkeit tc_{sgb} den Ausdruck:

$$tc_{sgb} = (\delta_{fg} + 1) \left(\frac{\delta_{fg}}{tc_{sg}} + \frac{o_{fg} + 1}{o_{fg}} \frac{1}{tc_g + tc_{bulk} C_{sb}} \right)^{-1}, \quad (2.23)$$

mit dem Kopplungsparameter C_{sb}

$$C_{sb} = \frac{4r_1 tc_{bulk} A_b}{o_{fg} \pi a_r}. \quad (2.24)$$

Der Anschlussfaktor A_b betrachtet die verschiedenen Möglichkeiten der Faserorientierung innerhalb einer Faser-Gas-Einheitszelle mit Faserradius r_1 und nimmt

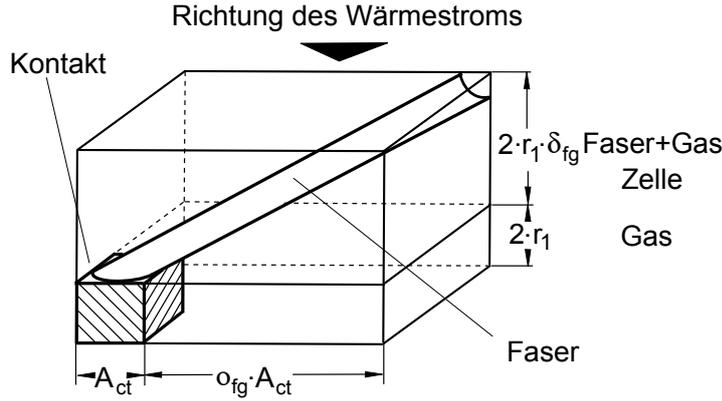


Abbildung 2.3: Illustration zur Faser-Gas-Einheitszelle. r_1 entspricht dem Außenradius der Faser.

nach Stark, 1991 im Mittel den Wert 0.611 an. Weiterhin beschreibt a_r den relativen Kontaktradius (Stark, 1991):

$$a_r = 0.5 \left(\frac{3\pi^2}{(\rho_{\text{bulk}}/\rho_{\text{fp}})^2} \frac{1 - \nu_{\text{bulk}}^{\text{pn}} \nu_{\text{bulk}}^{\text{pn}}}{E_{\text{bulk}}^{\text{mod}}} p_0 \right)^{1/3}. \quad (2.25)$$

Hier bezeichnet p_0 den externen Druck und $E_{\text{bulk}}^{\text{mod}}$ sowie $\nu_{\text{bulk}}^{\text{pn}}$ repräsentieren den Elastizitätsmodul und die Poissonzahl des Fasermaterials. Die entsprechenden Gleichungen aus Stark, 1991 zusammengefasst, ergibt sich für die Höhe der Faser-Gas-Zelle δ_{fg} (vgl. Abb. 2.3):

$$\delta_{\text{fg}} + 1 = \frac{1}{\sin \varphi_0} \left(\frac{\pi \rho_{\text{bulk}} \cos \varphi_0}{2 \rho_{\text{fp}}} \right)^{1/2}, \quad (2.26)$$

und für die Breite o_{fg} der Faser-Gas-Zelle findet man entsprechend (Stark, 1991):

$$o_{\text{fg}} + 1 = \left(\frac{\rho_{\text{bulk}}/\rho_{\text{fp}}}{\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 [1.5\pi (1 - \nu_{\text{bulk}}^{\text{pn}} \nu_{\text{bulk}}^{\text{pn}}) p_0 / E_{\text{bulk}}^{\text{mod}}]^2} \right)^{1/3}. \quad (2.27)$$

Mit φ_0 wird der mittlere Faserorientierungswinkel bezeichnet. Für räumlich isotrope Fasern gilt gemäß den Ausführungen von Stark, 1991: $\cos(\varphi_0) = 0.54$.

2.4.5 Gekoppelter Gesamtwärmetransport

Im transienten Fall wird die zeitabhängige Entwicklung des Temperaturprofils nach der inhomogenen Fourier-Gleichung beschrieben:

$$\rho_{\text{fp}} c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x_i, t) - t c_{\text{sgb}} \Delta_{\text{Lapl}} T(x_i, t) = -\text{div} \hat{q}_{\text{rad}}(x_i, t), \quad (2.28)$$

wobei x_i stellvertretend für die Koordinaten eines geeigneten Koordinatensystems steht. Die Gl. (2.28) muss im allgemeinen iterativ gelöst werden. Anhand von Gl. (2.9) sieht man, dass die Stärke der Kopplung von Strahlungswärmetransport und Gas-Festkörperwärmetransport vom Absorptionskoeffizienten bestimmt

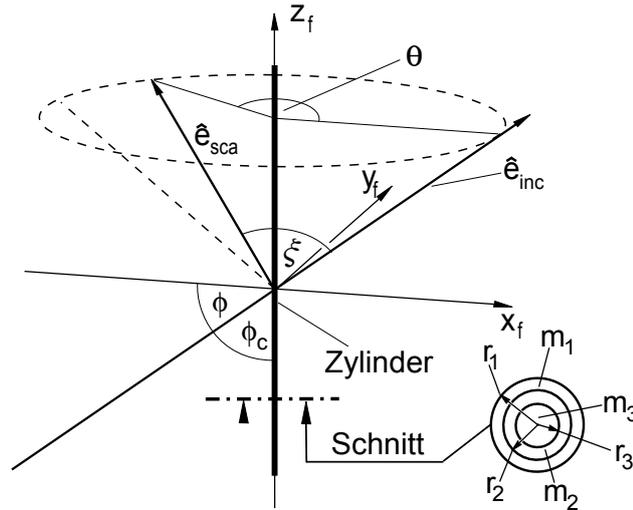


Abbildung 2.4: Geometrische Verhältnisse für die Lichtstreuung an einem einzelnen (mehrschichtigen) Zylinder.

wird. Bei hinreichend kleiner Absorption können die gekoppelte Gas-Festkörper Wärmeleitfähigkeit Gl. (2.23) und die Strahlungswärmeleitfähigkeit durch Addition zur effektiven Gesamtwärmeleitfähigkeit berechnet werden (vgl. Reiss und Ziegenbein, 1985).

2.5 Maxwell-Modell der Lichtstreuung an Fasern

Wie in den vorangegangenen Arbeiten von McKay, 1984, Wang, Kumar und Tien, 1987, Tong und Tien, 1983a, Tong und Tien, 1983b und von Lee und Cunnington, 2000 wird die Streutheorie für einen in der Länge unendlich ausgedehnten geraden Zylinder auf die Einzelfaser eines Faserisulationsmaterials angewendet. Man geht also davon aus, dass die Längen und die Krümmungsradien der Fasern wesentlich größer, sind als der Faseraußenradius r_1 und die Lichtwellenlänge λ .

2.5.1 Lichtstreuung an einzelnen Fasern

Bei der Modellbildung geht man von einem dispersen Medium aus, welches sich aus lang gezogenen, dünnen und zylinderförmigen Strukturen zusammensetzt. Die Annahme unabhängiger Streuung, also die Vernachlässigung elektromagnetischer Wechselwirkungen wie Interferenz und Vielfachstreuung, ist dann gerechtfertigt, wenn die Dichte des Mediums ausreichend niedrig und damit der Abstand zwischen den Streukörpern genügend groß ausfällt. Die Streuvorgänge an individuellen Zylindern können dann als isoliert von ihrer Umgebung betrachtet werden. Damit gilt für die Wirkungsquerschnitte von Streuung und Extinktion das Superpositionsprinzip und die Gesamt-Wirkungsquerschnitte des betrachteten Mediums werden aus der Summe der Wirkungsquerschnitte der einzelnen Streukörper gebildet. Die unabhängige Streuung bedeutet somit eine wesentliche theoretische Vereinfachung bei der Behandlung von Streuphänomenen.

Die Abb. 2.4 veranschaulicht die Streuung am unendlichen, homogenen oder mehrschichtigen Zylinder bei schrägem Lichteinfall. In Form einer ebenen Lichtwelle breitet sich die einfallende Strahlung in Richtung \hat{e}_{inc} aus, wobei der Vektor \hat{e}_{inc}

in der durch die Richtungsvektoren der Koordinatenachsen x_f und z_f aufgespannten Ebene liegt. Der Winkel zwischen der Koordinatenachse x_f und \hat{e}_{inc} sei als Einfallswinkel ϕ definiert. Wie in Abb. 2.4 dargestellt, liegt der Richtungswinkel der gestreuten Lichtwelle auf einem Kegelmantel, dessen Öffnungswinkel durch den zum Einfallswinkel ϕ komplementären Winkel ϕ_c festgelegt ist. Ferner schließen die Richtungswinkel der einfallenden Welle \hat{e}_{inc} und der gestreuten Welle \hat{e}_{sca} den sogenannten Streuwinkel ξ ein. Der Beobachtungswinkel wird mit θ bezeichnet und die Polarisation der einfallenden Lichtwelle sei in einem Fall transversal magnetisch (TM,I) und im anderen Fall transversal elektrisch (TE,II). Das Streu-Problem einer ebenen Welle am unendlichen Zylinder ist bereits durch die Arbeiten von Wait, 1955 bzw. Lind und Greenberg, 1966 analytisch gelöst. Auch für die analoge Problemstellung zweier konzentrischer Zylinder Shah, 1970 bzw. Farone und Quercfeld, 1966 und ebenso für den allgemeinen Fall beliebig vieler konzentrischer Zylinder, Barabás, 1987 existieren die analytischen Lösungen. In dieser Arbeit wird die Lichtstreuung an mehrschichtigen Zylindern mit bis zu drei Lagen untersucht. Wesentliche Teile des in Barabás, 1987 vorgestellten Formalismus mussten deshalb numerisch implementiert werden. Aufgrund mehrerer Druckfehler sind die Darstellungen von Barabás, 1987 (vgl. Anhang A.1.1) aber nicht direkt verwendbar. Deshalb wird die Lösung des Streuproblems aus den Maxwellgleichungen an dieser Stelle umfassender dargestellt, wobei sich die Abhandlung an den Ausführungen von Barabás, 1987, Kerker, 1969 und van de Hulst, 1981 orientiert.

Kann die Zeitabhängigkeit der elektrischen und magnetischen Feldgrößen durch $\exp(i\omega t)$ ausgedrückt werden, so können die Maxwellgleichungen in folgende Form gebracht werden (vgl. Jackson, 1999 bzw. van de Hulst, 1981):

$$\begin{aligned} \text{rot } \hat{H} &= ikm^2 \hat{E} \\ \text{rot } \hat{E} &= -ik\hat{H} \\ \text{div } \hat{H} &= 0 \\ \text{div } (m^2 \hat{E}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ der Wellenzahl entspricht und ein nichtmagnetisches Medium ($\mu_r = 1$) vorausgesetzt wird. Mit m wird der komplexe Brechungsindex bezeichnet. Für diesen gilt:

$$m^2 = \epsilon_r - i \frac{4\pi\sigma_{\text{ec}}}{\omega}. \quad (2.30)$$

In Gl. (2.30) bedeuten ϵ_r die dielektrische Suszeptibilität und σ_{ec} die elektrische Leitfähigkeit des betrachteten Mediums. Um eine Lösung der Gleichungen (2.29) darzustellen, müssen sich die Feldgrößen \hat{E} und \hat{H} nach van de Hulst, 1981 durch die Hertz-Vektoren \hat{u} und \hat{v} ausdrücken lassen:

$$\hat{E} = \frac{i}{mk} \text{rot rot } \hat{u} + \text{rot } \hat{v} \quad (2.31)$$

$$\hat{H} = -m \text{rot } \hat{u} + \frac{i}{k} \text{rot rot } \hat{v}. \quad (2.32)$$

Dabei müssen \hat{u} und \hat{v} auch gleichzeitig die Helmholtzgleichung erfüllen (van de Hulst, 1981):

$$[\Delta_{\text{Lapl}} + m^2 k^2] \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.33)$$

Das Symbol Δ_{Lapl} in Gl. (2.33) repräsentiert den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten. Nach van de Hulst, 1981 lässt sich ferner zeigen, dass für den magnetischen Hertz-Vektor \hat{u} und für den elektrischen Hertz-Vektor \hat{v} nur die zur Zylinderachse parallelen z -Komponenten von null verschieden sind:

$$\hat{u} = (0, 0, u) \text{ und } \hat{v} = (0, 0, v). \quad (2.34)$$

Damit repräsentiert u die TM-polarisierte Komponente und v die TE-polarisierte Komponente der Feldgrößen.

Außerhalb des Zylinders wird das Gesamtfeld durch eine Superposition der einfallenden Welle mit der gestreuten Lichtwelle gebildet (van de Hulst, 1981):

$$\begin{pmatrix} u^{\text{total}} \\ v^{\text{total}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{\text{inc}} \\ v^{\text{inc}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{\text{sca}} \\ v^{\text{sca}} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Die Randbedingungen sind durch die Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes an den Übergängen in ein anderes Medium festgelegt.

Die einfallende ebene Welle kann in Zylinderkoordinaten geschrieben werden als (Barabás, 1987):

$$\begin{pmatrix} u^{\text{inc}} \\ v^{\text{inc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\text{pol}} \\ V_{\text{pol}} \end{pmatrix} \exp[-ik(x \cos \phi + z \sin \phi)], \quad (2.36)$$

wobei $U_{\text{pol}}, V_{\text{pol}}$ den Polarisationsgrad gewichten und $U_{\text{pol}}, V_{\text{pol}} \in [0, 1]$ sowie $|U_{\text{pol}}|^2 + |V_{\text{pol}}|^2 = 1$ gilt. Zum Beispiel ist für $V_{\text{pol}} = 0$ und $U_{\text{pol}} = 1$ die einfallende Welle vollständig TM polarisiert.

Für die Anpassung an die Randbedingungen ist es vorteilhaft, die einfallende Welle nach Bessel-Funktionen, in sogenannte Partialwellen zu entwickeln (Barabás, 1987):

$$\begin{pmatrix} u^{\text{inc}} \\ v^{\text{inc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\text{pol}} \\ V_{\text{pol}} \end{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n,h_{\text{inc}}}(\theta, z) J_n(l_{\text{inc}}r). \quad (2.37)$$

Dabei bezeichnet J_n die Bessel-Funktion erster Art und für $F_{n,h}(\theta, z)$, h_{inc} und l_{inc} gelten die Zusammenhänge:

$$F_{n,h_{\text{inc}}}(\theta, z) = (-i)^n \exp[-i(h_{\text{inc}}z + n\theta)] \quad (2.38)$$

$$h_{\text{inc}} = k \sin \phi \quad (2.39)$$

$$l_{\text{inc}} = (k^2 - h_{\text{inc}}^2)^{1/2}. \quad (2.40)$$

Die Intensität der einfallenden Lichtwelle I_{inc} lässt sich mit den Gleichungen (2.31), (2.32) und (2.36) sowie dem Ausdruck für den zeitgemittelten Poynting-Vektor:

$$\langle \hat{S} \rangle = \frac{c_0}{8\pi} \text{Re}(\hat{E} \times \hat{H}^{\text{cc}}) \quad (2.41)$$

schreiben als (Barabás, 1987):

$$I_{\text{inc}} = \left| \langle \hat{S} \rangle \right| = \frac{c_0}{8\pi} k^2 \cos^2 \phi (U_{\text{pol}}^2 + V_{\text{pol}}^2). \quad (2.42)$$

Zur Bestimmung der Hertz-Potentiale u und v und der daraus resultierenden elektromagnetischen Feldgrößen der gestreuten Lichtwelle werden die Lösungen der

Helmholtzgleichung (2.33) verwendet. Diese sind von der Form (Barabás, 1987):

$$\begin{pmatrix} u_n^{(j)} \\ v_n^{(j)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} b_n^{(j)} \\ a_n^{(j)} \end{pmatrix} J_n(l^{(j)}r) + \begin{pmatrix} B_n^{(j)} \\ A_n^{(j)} \end{pmatrix} Y_n(l^{(j)}r) \right] F_{n,h_{\text{inc}}}(\theta, z). \quad (2.43)$$

Dabei kennzeichnet Y_n die Neumann-Funktion der Ordnung n . Der Index $j \in [0, 1, 2, \dots, L]$ durchläuft die einzelnen Zylinderschichten ($j > 0$) mit den zugehörigen Brechungsindizes m_j , wobei sich der Index $j = 0$ auf den Außenbereich des Zylinders mit dem Brechungsindex m_0 bezieht. Die Kennzahlen n indizieren die Partialwellen und l_j gehorcht dem Ausdruck (Barabás, 1987):

$$l_j = [(m_j k)^2 - h_{\text{inc}}^2]^{1/2}. \quad (2.44)$$

Nach Gl. (2.35) werden die $u^{(j)}$ und $v^{(j)}$, welche die Gesamtfeldgrößen im Zylinderinneren und die der gestreuten Lichtwelle ($j = 0$) definieren, aus der Superposition der einzelnen Partialwellen $u_n^{(j)}$ und $v_n^{(j)}$ gebildet (Barabás, 1987):

$$\begin{pmatrix} u^{(j)} \\ v^{(j)} \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n^{(j)} \\ v_n^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Die Partialwellen $u_n^{(j)}$ und $v_n^{(j)}$ mit $j \in [0, 1, 2, \dots, L]$ werden durch die Beziehungen aus Gl. (2.43) beschrieben. Die Partialwellen außerhalb des Zylinders u_n^0 und v_n^0 (für $j = 0$) definieren zusammen mit den u^{inc} und v^{inc} die Partialwellenkoeffizienten des äußeren Gesamtfelds, welches sich nach Gl. (2.35) aus den Feldern der einfallenden und der gestreuten Welle zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} u_n^{\text{total}} \\ v_n^{\text{total}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n^0 \\ v_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\text{pol}} \\ V_{\text{pol}} \end{pmatrix} F_{n,h_{\text{inc}}}(\theta, z) J_n(l_{\text{inc}}r). \quad (2.46)$$

Die Koeffizienten der Partialwellen $b_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$, $a_n^{(j)}$, $A_n^{(j)}$ müssen derart gewählt werden, dass folgende drei Bedingungen erfüllt sind (Barabás, 1987):

1. $u_n^{(j)}$ und $v_n^{(j)}$ nehmen global endliche Werte an.
2. Im Fernfeld gehen die gestreuten Partialwellen asymptotisch in die Form einer abklingenden Zylinderwelle über. Der von der Radialkoordinate r abhängige Teil der Partialwelle muss demzufolge proportional zum Ausdruck $\exp(-il_0 r) / (l_0 r)^{1/2}$ sein.
3. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Felder \hat{E}_n und der Magnetfelder \hat{H}_n sind an den Übergängen in ein Medium geänderter optischer Dichte stetig.

Für $r \rightarrow 0$ gilt $Y_n \rightarrow \infty$ und Bedingung (1) fordert demzufolge:

$$B_n^{(L)} = A_n^{(L)} = 0. \quad (2.47)$$

Die einzige Linearkombination aus J_n und Y_n , welche Bedingung (2) erfüllt, führt auf die sogenannte Hankel-Funktion zweiter Art:

$$H_n(l_0 r) = J_n(l_0 r) - iY_n(l_0 r), \quad (2.48)$$

und dies führt unmittelbar zu:

$$\begin{aligned} b_n^{(0)} &= -iB_n^{(0)} \\ a_n^{(0)} &= -iA_n^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Drückt man die Gl. (2.31) und (2.32) in Zylinderkoordinaten aus, so findet man nach Kerker, 1969 bezüglich der einzelnen Partialwellen für die Komponenten von \hat{E}_n und \hat{H}_n :

$$\begin{aligned} E_{rn}^{(j)} &= \frac{h}{m^{(j)}k} \frac{\partial}{\partial r} u_n - \frac{in}{r} v_n \\ E_{\theta n}^{(j)} &= -\frac{inh_{\text{inc}}}{m^{(j)}kr} u_n - \frac{\partial}{\partial r} v_n \\ E_{zn}^{(j)} &= -\frac{il_j^2}{m^{(j)}k} u_n \\ H_{rn}^{(j)} &= \frac{inm^{(j)}}{r} u_n + \frac{h_{\text{inc}}}{k} \frac{\partial}{\partial r} v_n \\ H_{\theta n}^{(j)} &= m^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} u_n - \frac{inh_{\text{inc}}}{kr} v_n \\ H_{zn}^{(j)} &= -\frac{il_j^2}{k} v_n. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Bedingung (3) ist dann erfüllt, wenn die Komponenten $E_{\theta n}$, $H_{\theta n}$, E_{zn} und H_{zn} an den Materialübergängen (Index b) stetig sind:

$$\begin{aligned} E_{\theta n}^{(b-1)}(r_b, \theta, z) &= E_{\theta n}^{(b)}(r_b, \theta, z) \\ H_{\theta n}^{(b-1)}(r_b, \theta, z) &= H_{\theta n}^{(b)}(r_b, \theta, z) \\ E_{zn}^{(b-1)}(r_b, \theta, z) &= E_{zn}^{(b)}(r_b, \theta, z) \\ H_{zn}^{(b-1)}(r_b, \theta, z) &= H_{zn}^{(b)}(r_b, \theta, z), \end{aligned} \quad (2.51)$$

wobei $b \in [1, 2, \dots, L]$ und $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Mit den Gleichungen (2.43), (2.46) und (2.50) führen die Stetigkeitsbedingungen aus Gl. (2.51) auf ein lineares Gleichungssystem mit $4L$ Gleichungen für die $4L$ unbekanntenen Koeffizienten einer jeden Partialwelle n (Barabás, 1987):

$$\begin{aligned} \text{Fall I: } \hat{X}_n \cdot \hat{P}_{\text{I},n} &= \hat{D}_{\text{I},n} \\ \text{Fall II: } \hat{X}_n \cdot \hat{P}_{\text{II},n} &= \hat{D}_{\text{II},n}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Fall I bezieht sich auf eine einfallende Lichtwelle mit TM-Polarisation und Fall II entsprechend auf eine TE-polarisierte einfallende Lichtwelle. Die gesuchten Felder der gestreuten Welle sind vollständig durch die Koeffizienten $b_{\text{I},n}^{(0)}$, $a_{\text{I},n}^{(0)}$, $b_{\text{II},n}^{(0)}$ und $a_{\text{II},n}^{(0)}$ bestimmt. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur noch diese Koeffizienten benötigt werden, bleibt die Indizierung durch „(0)“ fortan unterdrückt. Außerdem kann die Reihenfolge der $4L$ Gleichungen derart gewählt werden, dass die Koeffizienten der gestreuten Welle in den Vektoren der unbekanntenen Koeffizienten $\hat{P}_{\text{I},n}$ und $\hat{P}_{\text{II},n}$ die ersten beiden Einträge darstellen (vgl. Gl. (2.51) für aufsteigenden

Index b):

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\text{I},n}^T &= [b_{\text{I},n}, a_{\text{I},n}\dots] \\ \hat{P}_{\text{II},n}^T &= [b_{\text{II},n}, a_{\text{II},n}\dots].\end{aligned}\quad (2.53)$$

Vermöge der Cramerschen Regel lassen sich die Koeffizienten der gestreuten Welle formal ausdrücken durch:

$$\begin{aligned}b_{\text{I},n} &= \frac{\det(\hat{O}_{n,\text{I}})}{\det\hat{X}_n} \\ a_{\text{II},n} &= \frac{\det(\hat{O}_{n,\text{II}})}{\det\hat{X}_n},\end{aligned}\quad (2.54)$$

wobei $\hat{O}_{n,\text{I}}$ durch Substitution der ersten Spalte von \hat{X}_n mit $\hat{D}_{n,\text{I}}$ gebildet wird und analog geht $\hat{O}_{n,\text{II}}$ aus der Substitution der zweiten Spalte von \hat{X}_n durch $\hat{D}_{n,\text{II}}$ hervor. Ergänzend werden im Anhang die Vektoren $\hat{D}_{\text{I},n}$ und $\hat{D}_{\text{II},n}$ sowie die $4L \times 4L$ Matrix \hat{X}_n für $L \in [1, 2, 3]$ explizit aufgeführt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind nur die Größen des Fernfeldes ($r \gg \lambda$) von Interesse. Für $r/\lambda \rightarrow \infty$ geht die Hankel-Funktion aus Gl. (2.48) asymptotisch gegen den Ausdruck (Watson, 1966):

$$H_n(l_0 r) = \left(\frac{2}{\pi l_0 r}\right)^{1/2} \exp\left[-i\left(l_0 r - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right].\quad (2.55)$$

Mit dieser Fernfeldnäherung findet man für die Partialwellenkoeffizienten der gestreuten Lichtwelle außerhalb des Zylinders:

$$\begin{pmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi l_0 r}} \exp\left[-i\left(l_0 r + h_{\text{inc}} z - \frac{\pi}{4}\right)\right] \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},\quad (2.56)$$

mit der sogenannten Amplituden-Streumatrix T_{lm} , deren Komponenten nach Bohren und Huffman, 1983 wie folgt definiert sind :

$$\begin{aligned}T_{11}(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\text{I},n} \exp(-in\theta) = b_{\text{I},0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{\text{I},n} \cos(n\theta) \\ T_{12}(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\text{II},n} \exp(-in\theta) = -2i \sum_{n=1}^{\infty} b_{\text{II},n} \sin(n\theta) \\ T_{21}(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\text{I},n} \exp(-in\theta) = -2i \sum_{n=1}^{\infty} a_{\text{I},n} \sin(n\theta) \\ T_{22}(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\text{II},n} \exp(-in\theta) = a_{\text{II},0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{\text{II},n} \cos(n\theta)\end{aligned}\quad (2.57)$$

Wobei die $a_{\text{I},n}$ und $b_{\text{I},n}$ die jeweiligen Koeffizienten für eine einfallende TM-polarisierte Welle darstellen und die $a_{\text{II},n}$ und $b_{\text{II},n}$ entsprechende Lösungen für eine Welle mit TE-Polarisation bezeichnen.

Im Fernfeld gilt nach van de Hulst, 1981 für die Komponenten des Extinktionsquerschnitts:

$$C_{\text{ext},lm}^{\lambda}(\phi) = \frac{4}{k} \operatorname{Re} \{T_{lm}(\theta = 0, \phi)\}, \quad (2.58)$$

und für den entsprechenden Streuquerschnitt:

$$C_{\text{sca},lm}^{\lambda}(\phi) = \frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} |T_{lm}(\theta, \phi)|^2 d\theta. \quad (2.59)$$

An dieser Stelle wurde die spektrale Eigenschaft der Wirkungsquerschnitte durch das hochgestellte λ hervorgehoben. Außerdem erscheint die funktionale Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte vom Einfallswinkel ϕ explizit.

Für eine einfallende unpolarisierte ebene Welle findet man für den Gesamt-Extinktionsquerschnitt (Kerker, 1969 bzw. van de Hulst, 1981):

$$C_{\text{ext}}^{\lambda}(\phi) = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_{\text{I},n} + a_{\text{II},n}), \quad (2.60)$$

und weiterhin gilt für den Gesamt-Streuquerschnitt $C_{\text{sca}}^{\lambda}(\phi)$:

$$C_{\text{sca}}^{\lambda}(\phi) = \frac{\lambda}{\pi} \left[|b_{\text{I},0}|^2 + |a_{\text{II},0}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|b_{\text{I},n}|^2 + |a_{\text{II},n}|^2 + 2|b_{\text{II},n}|^2) \right]. \quad (2.61)$$

Für die Herleitung der Gesamt-Wirkungsquerschnitte wurde die Beziehung $a_{\text{I},n} = -b_{\text{II},n}$ von Kerker u. a., 1966 genutzt. Für den Absorptionsquerschnitt $C_{\text{abs}}^{\lambda}(\phi)$ muss schließlich gelten:

$$C_{\text{abs}}^{\lambda}(\phi) = C_{\text{ext}}^{\lambda}(\phi) - C_{\text{sca}}^{\lambda}(\phi). \quad (2.62)$$

Wie aus der Herleitung hervorgeht, sind die mit a_n und b_n bezeichneten Koeffizienten der Partialwellen sowohl Funktionen des Einfallswinkels, des Größenparameters $\alpha = 2\pi r_1/\lambda$ als auch der komplexen Brechungsindizes des Zylindermediums. Man beachte, dass im Gegensatz zu Streukörpern mit endlicher Ausdehnung die Wirkungsquerschnitte (Gleichungen (2.60) bis (2.62)) des unendlich langen Zylinders nicht die Dimension einer Fläche, sondern einer Länge aufweisen. Die Wirkungsquerschnitte des unendlichen Zylinders sind daher als Größe pro Längeneinheit aufzufassen (vgl. Bohren und Huffman, 1983).

Im Fernfeld findet man für die von den Winkeln θ und ϕ abhängige Verteilung der gestreuten Intensität den Ausdruck (Kerker, 1969 bzw. van de Hulst, 1981):

$$i_{\text{sca}}^{\lambda}(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi\alpha} \left[|b_{\text{I},0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{\text{I},n} \cos(n\theta)|^2 + |a_{\text{II},0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{\text{II},n} \cos(n\theta)|^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} |b_{\text{II},n} \sin(n\theta)|^2 \right]. \quad (2.63)$$

Die Gleichungen (2.60) bis (2.63) zeigen den zweidimensionalen Charakter der Lichtstreuung am unendlichen Zylinder. Im Gegensatz zur Mie-Streuung, also der Streuung elektromagnetischer Wellen an kugelförmigen Objekten, sind die Wirkungsquerschnitte und die Intensitätsverteilung vom Einfallswinkel ϕ abhängig.

Mittlere Wirkungsquerschnitte

Bei räumlich isotroper Ausrichtung der Fasern erhält man die mittleren Wirkungsquerschnitte von Extinktion und Streuung durch Mittelung über alle Einfallswinkel:

$$\left\{ \overline{C}_{\text{ext}}^\lambda, \overline{C}_{\text{sca}}^\lambda \right\} = \int_0^{\pi/2} \left\{ C_{\text{ext}}^\lambda(\phi), C_{\text{sca}}^\lambda(\phi) \right\} \cos \phi d\phi. \quad (2.64)$$

Die Streu- und Extinktionskoeffizienten σ_{ext} , σ_{sca} sind definiert als das Produkt aus der Anzahl der Fasern pro Volumeneinheit N und dem entsprechenden Wirkungsquerschnitt C_{ext} bzw. C_{sca} . In realen Faserisolationen erwartet man anstelle monodisperser Fasern vielmehr eine Verteilung an Faserdurchmessern. Unter der vereinfachten Annahme einer diskreten Durchmesservertelung entsprechen die jeweiligen Gesamtgrößen des Streu- und Extinktionskoeffizienten dann der Summe, der mit ihrem Eigenvolumenanteil v_g gewichteten Einzelgrößen, des Streu- bzw. des Extinktionskoeffizienten (Lee und Cunnington, 1998).

$$\left\{ \overline{\sigma}_{\text{ext}}^\lambda, \overline{\sigma}_{\text{sca}}^\lambda \right\} = l_{\text{fib}} \sum_g N_g \left\{ \overline{C}_{\text{ext},g}^\lambda, \overline{C}_{\text{sca},g}^\lambda \right\}. \quad (2.65)$$

Dabei wird angenommen, dass alle Fasergattungen eine identische Länge l_{fib} aufweisen. Die Größe $N_g = f_V v_g / (A_g l_{\text{fib}})$ entspricht dann der Anzahl an Fasern pro Volumen einer bestimmten Fasergattung g . Mit A_g wird dabei die Querschnittsfläche der jeweiligen Fasergattung bezeichnet. Im Falle einer Hohlfaser berechnet sich die Querschnittsfläche zu $A_g = \pi(r_1^2 - r_2^2)$.

2.5.2 Phasenfunktion für räumlich isotrop orientierte Fasern

Die Phasenfunktion p^λ liefert die Information über die winkelabhängige Verteilung der gestreuten Intensität und ist allgemein definiert als der durch den Gesamt-Streuquerschnitt normierte differentielle Streuquerschnitt. Den Gleichungen (2.61) und (2.63) zufolge gilt dann für eine einzelne Faser (Lee, 1990b):

$$p^\lambda(\theta, \phi) = \frac{\lambda}{\pi^2} \frac{i_{\text{sca}}^\lambda(\theta, \phi)}{C_{\text{sca}}^\lambda(\phi)}. \quad (2.66)$$

Im allgemeinen Fall einer Vielzahl von Fasern mit beliebiger Anordnung ist nach Lee, 1990b die resultierende Phasenfunktion p^λ eine Funktion des Azimutwinkels θ und des Polarwinkels ξ der gestreuten Lichtwelle und zudem eine Funktion des Einfallswinkels ϕ der eintreffenden Lichtwelle. Eine Ausnahme bildet in diesem Zusammenhang die räumlich isotrope Faseranordnung. Hier ist die Phasenfunktion unabhängig vom Einfallswinkel und besitzt azimutale Symmetrie. Demzufolge ist die Phasenfunktion p_r^λ lediglich eine Funktion des polaren Streuwinkels ξ . Der tiefgestellte Index „r“ dient hier der Kennzeichnung einer räumlich isotropen Faseranordnung. Die Ableitung der Phasenfunktion $p_r^\lambda(\xi)$ geschieht nach der in McKay, 1984 vorgestellten Methode unter Verwendung der Beziehung zwischen dem Streuwinkel ξ , dem Beobachtungswinkel θ und dem Komplementärwinkel ϕ_c :

$$\cos \xi = \cos \theta \sin^2 \phi_c + \cos^2 \phi_c. \quad (2.67)$$

Dabei werden zunächst die Verteilungen der gestreuten Intensität $i_{\text{sca}}^\lambda(\theta, \phi)$ für sämtliche Einfallswinkel zwischen 0 und $\pi/2$ nach Gl. (2.63) berechnet. Dann wird

das Intervall $(0, \pi)$ für den Streuwinkel ξ in N_{sub} äquidistante Subintervalle unterteilt. Für zwei Streuwinkel ξ_1 und ξ_2 , welche jeweils kleiner als der zweifache Komplementärwinkel ϕ_c sind, liefert die Beziehung Gl. (2.67) die zugehörigen Winkel θ_1 und θ_2 . Die gestreute Intensität $i^\lambda(\theta, \phi)$ im Intervall zwischen θ_1 und θ_2 wird dann dem Intervall zwischen ξ_1 und ξ_2 zugeordnet. Diese Schritte werden für sämtliche Subintervalle ausgeführt.

Schließlich muss die abgeleitete Phasenfunktion $p_r^\lambda(\xi)$ noch der folgenden Normierungsbedingung genügen:

$$\int_0^\pi p_r^\lambda(\xi') \sin \xi' d\xi' = 2. \quad (2.68)$$

In Anhang A.1.3 wird gezeigt, dass der für diese Arbeit entwickelte Algorithmus zu identischen Werten wie in der Literatur führt. Man beachte, dass obige Herleitung der Phasenfunktion für räumlich isotrop angeordnete Fasern von der in Wang, Kumar und Tien, 1987 dargestellten Formulierung abweicht. Analog zur Berechnung der Extinktions- und Streuquerschnitte, wird in Wang, Kumar und Tien, 1987 die Phasenfunktion $p_r^\lambda(\xi)$ aus der Mittelung der Streuintensitäten $i_{\text{sca}}^\lambda(\theta, \phi)$ über alle Einfallswinkel gebildet. Dadurch bleibt etwa der Umstand unberücksichtigt, dass ein um mehr als 45 Grad zur Einfallrichtung geneigter Zylinder keine Rückwärtsstreuung zeigt, also im Bereich zwischen 90 und 180 Grad des Streuwinkels ξ keinen Beitrag zur Phasenfunktion liefert.

Aus der Phasenfunktion $p_r^\lambda(\xi)$ kann ein Anisotropiefaktor g^λ abgeleitet werden (Modest, 2013):

$$g^\lambda = 0.5 \int_{-1}^1 p_r^\lambda(\xi) \cos \xi d\cos \xi. \quad (2.69)$$

2.5.3 Wirkungsquerschnitte der Rückstreuung

Mit dem Anisotropiefaktor aus Gl. (2.69) können mittels Gl. (2.11) effektive Wirkungsquerschnitte bzw. effektive Streu- und Extinktionskoeffizienten für unidirektionalen Strahlungseinfall berechnet werden. Im praktischen Einsatz sind Wärmeisolationen aber weitestgehend diffuser Einstrahlung ausgesetzt, wobei die Fasern innerhalb der thermischen Isolation verschieden zur räumlich isotropen Anordnung orientiert sein können. Nach Lee, 1993 empfiehlt es sich, diesen Gesichtspunkt im theoretischen Modell zu berücksichtigen und effektive Wirkungsquerschnitte über den Anteil der rückwärts gestreuten Strahlung bei diffuser Einstrahlung zu definieren. Mit der parallelen und der räumlich isotropen Faserorientierung werden im Rahmen dieser Arbeit nur zwei technologisch relevante Faseranordnungen in thermischen Isolationen betrachtet. In Lee, 1988, Lee, 1989 und Lee, 1990b wurde bereits der allgemeine Fall beliebiger Faserorientierungen untersucht. Lee geht in seiner Darstellung von den Phasenfunktionen individueller Fasern aus, welche eine beliebige Orientierung relativ zur einfallenden Strahlung aufweisen können. Der diesbezügliche Formalismus erscheint dadurch komplex und ist aufgrund einer Vielzahl an benötigten Fallunterscheidungen für eine numerische Implementierung wenig geeignet. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine alternative Herleitung der speziellen Rückstreu-Parameter für die parallele und räumlich isotrope Faserorientierung unternommen, wobei die Darstellung intuitiv aus geometrischen Betrachtungen folgt. Unter der Annahme einer diffus emittierenden ebenen Quelle versteht man unter der Rückstreuung β den Anteil des (gestreuten) Lichts, welcher in den unteren Halbraum (vgl. Abb. 2.5)

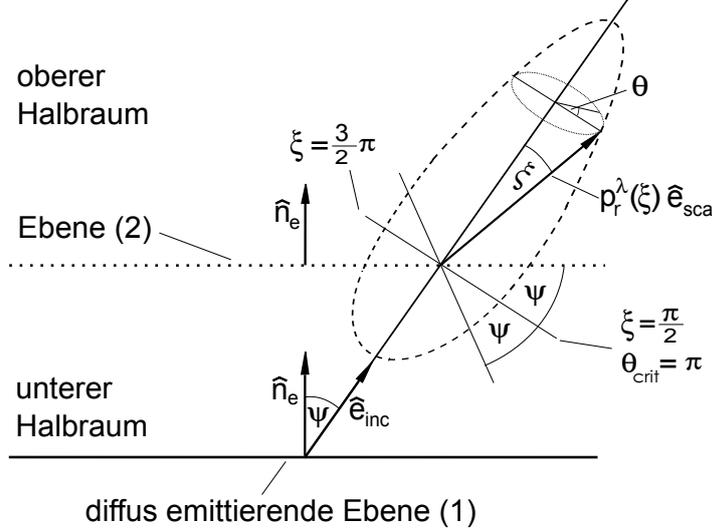


Abbildung 2.5: Geometrische Veranschaulichung zur Herleitung des Wirkungsquerschnitts der rückwärtsgerichteten Streuung B_r^λ im Falle räumlich isotrop angeordneter Fasern unter diffuser Einstrahlung.

zurückgestreut wird. Zunächst wird der Fall räumlich isotrop angeordneter Fasern untersucht. Wie in Abb. 2.5 veranschaulicht, werden der obere und untere Halbraum durch eine parallel zur Einfallsebene gedachte Hilfsebene unterteilt. Der Richtungsvektor \hat{e}_{inc} (Abb. 2.5) symbolisiert die Richtung des eingestrahlichten Lichts und definiert zugleich die Drehachse des Azimutwinkels θ . Den Anteil der Strahlung, der unter einem bestimmten Einfallswinkel in den unteren Halbraum zurückgestreut wird, erhält man demzufolge durch Integration der Phasenfunktion über die Streu- und Azimutwinkel ξ und θ . Wie man Abb. 2.5 entnimmt, sind die Integrationsgrenzen für den Azimutwinkel θ_{crit} Funktionen des Streuwinkels ξ und des Einfallswinkels ψ . Mit einer notwendigen, den Streuwinkel ξ betreffenden Fallunterscheidung, ergibt sich für θ_{crit} (Brendel, Seifert und Raether, 2016):

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta_{\text{crit}}}{2}\right) &= \left(\frac{1}{\tan\psi \tan\xi}\right); & \pi/2 - \psi \leq \xi \leq \pi/2 + \psi \\ \theta_{\text{crit}} &= 2\pi; & \pi/2 + \psi < \xi \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Unter Berücksichtigung sämtlicher Einfallrichtungen findet man schließlich für den Anteil der Rückstreuung β_r den Ausdruck (Brendel, Seifert und Raether, 2016):

$$\beta_r^\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-\psi}^{\pi} \theta_{\text{crit}}(\xi, \psi) p_r^\lambda(\xi) \sin\xi \sin\psi \, d\xi \, d\psi. \quad (2.71)$$

Mit $p_r^\lambda(\xi)$ wird die in Abschnitt 2.5.2 definierte Phasenfunktion für räumlich isotrop angeordnete Fasern bezeichnet. Aus Gl. (2.71) folgt schließlich unmittelbar die Definition des Wirkungsquerschnitts der Rückstreuung B_r^λ :

$$B_r^\lambda = \beta_r^\lambda \bar{C}_{\text{sca}}^\lambda, \quad (2.72)$$

wobei $\bar{C}_{\text{sca}}^\lambda$ durch Gl. (2.64) definiert ist. Man beachte, dass der in dieser Arbeit abgeleitete Ausdruck in Gl. (2.71) von der in Lee, 1989 gezeigten Formulierung abweicht. Während in Lee, 1989 der Integrationskern zur Berechnung von β_r von

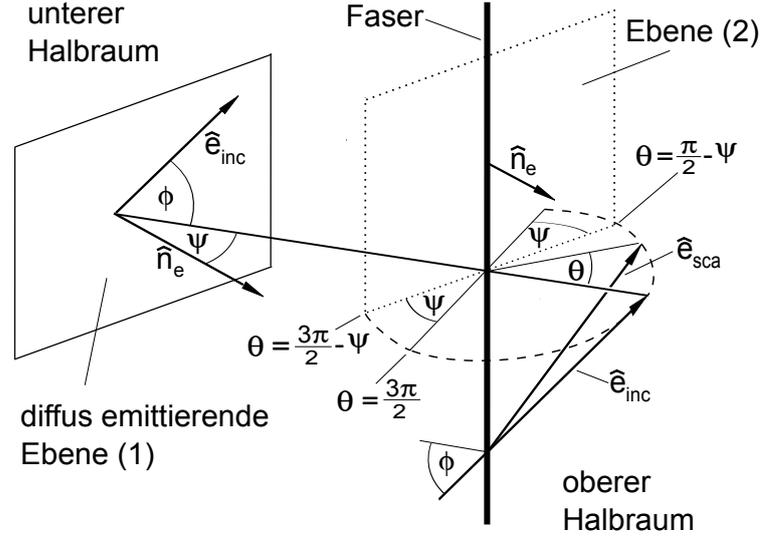


Abbildung 2.6: Geometrische Veranschaulichung zur Herleitung des Wirkungsquerschnitts der rückwärtsgerichteten Streuung B_p im Falle parallel angeordneter Fasern unter diffuser Einstrahlung.

der Streuverteilung $i(\theta, \phi)$ aus Gl. (2.63) gebildet wird, basiert der Ausdruck in Gl. (2.71) auf der direkten Integration der Phasenfunktion $p_r^\lambda(\xi)$. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die Formulierung in Gl. (2.71) eine vom Einfallswinkel ϕ unabhängige Phasenfunktion voraussetzt und daher lediglich eingeschränkte Gültigkeit besitzt. Die Herleitung des Wirkungsquerschnittes der Rückstreuung B_p für eine parallele Faseranordnung (tiefgestellter Index „p“) erfordert eine andere Herangehensweise. Wie in Abb. 2.6 veranschaulicht, müssen zur Herleitung von B_p zwei diffuse Einfallswinkel ϕ und ψ berücksichtigt werden. Die Integration der Streuverteilung $i_{sca}^\lambda(\theta, \phi)$ der Gl. (2.63), über ϕ , ψ und den Azimutwinkel θ im gesamten unteren Halbraum ergibt den Anteil der Rückstreuung β_p^λ . Bei der Integration muss beachtet werden, dass die Integrationsgrenzen des Azimutwinkels θ vom Einfallswinkel ψ abhängig sind (Brendel, Seifert und Raether, 2016):

$$\beta_p^\lambda = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-\psi}^{\frac{3}{2}\pi-\psi} i_{sca}^\lambda(\theta, \phi) \cos \phi \, d\theta \, d\psi \, d\phi}{\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} i_{sca}^\lambda(\theta, \phi) \cos \phi \, d\theta \, d\phi} \quad (2.73)$$

Bei diffuser Einstrahlung berechnen sich die gemittelten Wirkungsquerschnitte der parallelen Faseranordnung identisch zu Gl. (2.64). Somit findet man für den Wirkungsquerschnitt der Rückstreuung B_p^λ den Ausdruck:

$$B_p^\lambda = \beta_p^\lambda \bar{C}_{sca}^\lambda. \quad (2.74)$$

Die an dieser Stelle abgeleiteten Formulierungen Gl. (2.73) und Gl. (2.74) bilden im Vergleich zu den Ausführungen in Lee, 1988 und Lee, 1990b hinsichtlich der Darstellung und der numerischen Implementierung eine Vereinfachung, gelten aber nur in dem dargestellten Spezialfall der diffusen Einstrahlung in eine parallele Faseranordnung.

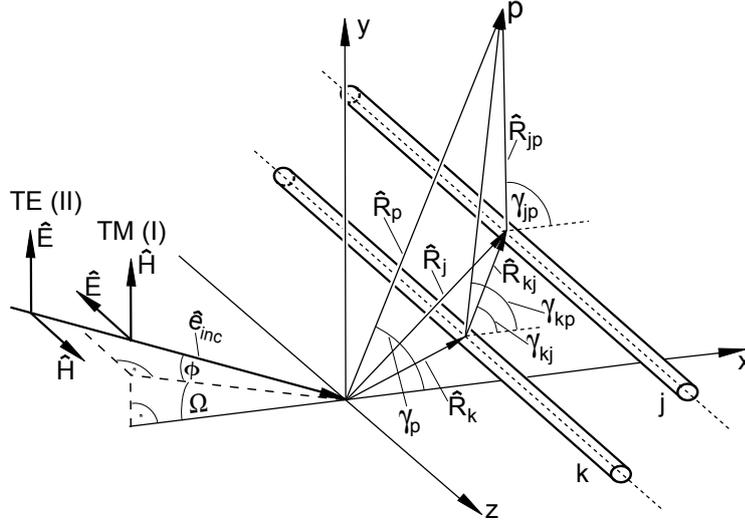


Abbildung 2.7: Geometrische Veranschaulichung der abhängigen Lichtstreuung an einer Vielzahl von parallelen (mehrschichtigen) Zylindern nach Lee, 1992.

2.5.4 Abhängige Streuung am Zylinder Ensemble

Die Annahme voneinander unabhängig streuender Körper lässt sich im Falle sehr dicht gepackter Streukörper nicht aufrechterhalten. Nach Lee, 1990a und Lee, 1992 müssen die Wechselwirkungen zwischen den Streukörpern in Form von Vielfachstreuung und Interferenzerscheinungen berücksichtigt werden. Eine exakte analytische Lösung für den schrägen Lichteinfall ($\phi \geq 0$) existiert nur für ein Ensemble von parallel angeordneten Zylindern. Die diesbezüglichen geometrischen Verhältnismäßigkeiten werden in Abb. 2.7 gezeigt. Die skizzierte Problemstellung wird mithilfe der Randelementmethode gelöst, wobei sich nach Lee, 1992 zeigen lässt, dass die Koeffizienten der Partialwellen der abhängigen Streuung aus den entsprechenden Koeffizienten der Einzel-Streuung konstruiert werden können:

$$\begin{pmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{I,ks}^{\text{dep}} \\ a_{I,ks}^{\text{dep}} \end{pmatrix} = \Theta_j \begin{pmatrix} b_{I,jn}^{\text{ind}} \\ a_{I,jn}^{\text{ind}} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Die Untermatrizen \hat{W}_{11} , \hat{W}_{12} , \hat{W}_{21} und \hat{W}_{22} lauten in ausgeschriebener Form:

$$\hat{W}_{11} = \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} b_{I,jn}^{\text{ind}} \quad (2.76)$$

$$\hat{W}_{22} = \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_{II,jn}^{\text{ind}} \quad (2.77)$$

$$\hat{W}_{12} = -\hat{W}_{21} = -(1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_{I,jn}^{\text{ind}}. \quad (2.78)$$

Man beachte, dass in Lee, 1992 ein Druckfehler in den Indizierungen der Partialwellenkoeffizienten der abhängigen Streuung vorliegt. In den vorhergehenden Ausdrücken Gl. (2.76) bis Gl. (2.78) bedeutet δ das Kroneckersymbol und der hochstehende Index „ind“ kennzeichnet die Koeffizienten der Partialwellen bei unabhängiger Streuung. Weiterhin bezeichnen die Indizes I(TM) und II(TE) die

Polarisation der einfallenden Welle und Θ_j repräsentiert die jeweilige Phasenverschiebung von der einfallenden Welle zu den einzelnen Zylindern (Lee, 1992):

$$\Theta_j = \exp \left[-ik|\hat{R}_j| \cos \phi \cos (\Omega + \gamma_j) \right]. \quad (2.79)$$

Ω bezeichnet dabei den azimuthalen Einfallswinkel der einfallenden ebenen Lichtwelle und \hat{R}_j symbolisiert den Abstand des j -ten Zylinders vom Koordinatenursprung (vgl. Abb. 2.7). Die Kopplungsfunktion G_{ks}^{jn} in Gl. (2.76) bis Gl. (2.78) beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung zweier Zylinder j und k . Die zugehörigen Partialwellen-Koeffizienten der Zylinder j und k sind durch s bzw. n indiziert (Lee, 1992 und Lee, 1990a):

$$G_{ks}^{jn} = (-i)^{(-n+s)} H_{-n+s}(l_0|\hat{R}_{kj}) \exp [i(-n+s)\gamma_{kj}] \quad (2.80)$$

Mit H wird wiederum die Hankel-Funktion zweiter Art bezeichnet. Im Argument der Hankel-Funktion bedeutet $l_0 = k \cos \phi$ mit dem Brechungsindex der Zylinderumgebungen $m_0 = 1$. Weiterhin ist \hat{R}_{kj} der Abstandsvektor und γ_{kj} der Winkel zwischen dem j -ten und dem k -ten Zylinder (vgl. Abb. 2.7). Vertauscht man in den Gleichungen (2.75) bis (2.78) die Indizierungen I und II sowie die Koeffizienten a und b , so erhält man unmittelbar die entsprechende Lösung für eine einfallende TE-polarisierte Welle (Lee, 1992). Für senkrechten Einfall ($\phi = 0$) verschwinden die Nicht-Diagonalelemente \hat{W}_{12} und \hat{W}_{21} der Koeffizientenmatrix in Gl. (2.75). Aus den Partialwellenkoeffizienten der abhängigen Streuung lassen sich die Wirkungsquerschnitte von Extinktion und Streuung im Fernfeld berechnen. Für eine einfallende TM-polarisierte Welle findet man für die Amplituden-Streumatrix den Ausdruck (Lee, 1992):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_{11}^{\text{dep}}(\phi, \gamma, \Omega) \\ T_{12}^{\text{dep}}(\phi, \gamma, \Omega) \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \{ ik \cos \phi R_j [\cos (\gamma_j - \gamma) - \cos (\gamma_j + \Omega)] \} \cdot \\ &\cdot \exp [in(\gamma + \Omega)] \begin{pmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{I,jn}^{\text{ind}} \\ a_{I,jn}^{\text{ind}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Für die Ausdrücke der Extinktionsquerschnitte ergibt sich (Lee, 1992):

$$\begin{pmatrix} C_{\text{ext},11}^{\text{dep}}(\phi, \Omega) \\ C_{\text{ext},12}^{\text{dep}}(\phi, \Omega) \end{pmatrix} = \frac{2\lambda}{\pi} \text{Re} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{I,jn}^{\text{ind}} \\ a_{I,jn}^{\text{ind}} \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

und für die Streuquerschnitte findet man nach Lee, 1992:

$$\{C_{\text{sca},11}^{\text{dep}}(\phi), C_{\text{sca},12}^{\text{dep}}(\phi)\} = \frac{\lambda}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \{ |T_{11}(\gamma)|^2, |T_{12}(\gamma)|^2 \} d\gamma. \quad (2.83)$$

Analog dazu ergeben sich die Ausdrücke für T_{21}^{dep} und T_{22}^{dep} , $C_{\text{ext},21}^{\text{dep}}$, $C_{\text{ext},22}^{\text{dep}}$ beziehungsweise $C_{\text{sca},21}^{\text{dep}}$, $C_{\text{sca},22}^{\text{dep}}$ durch Vertauschen von I und II im Ausdruck für die Partialwellenkoeffizienten der unabhängigen Streuung.

2.5.5 Numerische Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten

Die Berechnung der Bessel-Funktionen erfolgt über die in der Numerik-Software Scilab implementierten Routinen. Als Abbruchkriterium für die Reihenentwicklung in Gl. (2.45) dient das Kriterium von Bohren und Huffman, 1983, welches nach Schäfer, 2011 auch für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte bei abhängiger Streuung verwendet werden kann:

$$n_{\text{crit}} = \left\lceil kr_1 + 4(kr_1)^{\frac{1}{3}} + 2 \right\rceil. \quad (2.84)$$

Das lineare Gleichungssystem für die $4L$ unbekanntenen Koeffizienten einer jeden Partialwelle a_n und b_n wird mit der Methode der LU-Zerlegung gelöst (vgl. z. B. Bärwolff, 2015).

Die Winkelaufösung bei der Berechnung der zurückgestreuten Anteile β_r^λ bzw. β_p^λ beträgt für den Einfallswinkel ϕ stets ein Grad und für den Winkel der Beobachtungsrichtung θ grundsätzlich ein halbes Grad. Höhere Auflösungen führen zu keiner relevanten Änderung in den Ergebnissen.

2.6 Näherungslösung der Zylinderstreuung

In diesem Abschnitt wird die zur näherungsweisen Berechnung der wellenlängenabhängigen Extinktion genutzte Anomalous-Diffraction-Approximation (ADA) vorgestellt. Als Maß für die Strahlungswechselwirkung wird in diesem Zusammenhang die sogenannte Extinktionseffizienz eingeführt:

$$Q_{\text{ext}}^\lambda = \frac{C_{\text{ext}}^\lambda}{A_{\text{geo}}}, \quad (2.85)$$

mit dem geometrischen Querschnitt A_{geo} des Streukörpers. Zur Illustration der geometrischen Verhältnisse dient Abb. 2.8. Eine unter dem Winkel ϕ einfallende ebene Lichtwelle der Intensität I_{inc} mit der Amplitude 1 fällt auf einen mehrschichtigen Zylinder, wobei die Außenradien der einzelnen Zylinderschichten mit r_1 , r_2 und r_3 bezeichnet sind. In der ADA wird nun angenommen, dass der Weg der ebenen Lichtwelle innerhalb und außerhalb des Zylinders geradlinig verläuft. Weiterhin wird die Fresnelsche Reflexion an den Grenzflächen vernachlässigt. Somit erfährt die Lichtwelle beim Durchlaufen des zylindrischen Objekts keine Veränderung der Amplitude, sondern lediglich eine Phasenverschiebung. Diese Idealisierungen entsprechen den Ausführungen von van de Hulst, 1981 für die näherungsweise Behandlung der Lichtstreuung an Zylindern und Kugeln und reduzieren das Streuproblem prinzipiell auf ein reines Interferenzphänomen. Die Phasenverschiebung $\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)$ zwischen der Intensität der einfallenden Lichtwelle I_{inc} und der Intensität innerhalb des Zylinders I_{int} gehorcht dem Ausdruck (van de Hulst, 1981):

$$\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x) = 2k(m_1 - 1)y_1(x), \quad (2.86)$$

wobei die geometrische Weglänge $y_1(x)$ definiert ist durch:

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{r_1^2 - x^2}}{\cos \phi}. \quad (2.87)$$

In Gl. (2.87) wird eine schräg einfallende Lichtwelle durch Division mit $\cos \phi$ berücksichtigt. Wie in Abb. 2.8 dargestellt, wird der Einfallswinkel ϕ dabei durch die

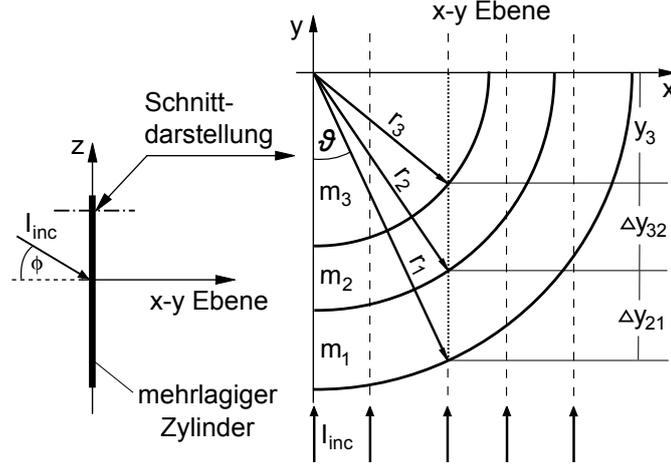


Abbildung 2.8: Darstellung der geometrischen Verhältnisse zur Berechnung der Phasenverschiebung $\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)$.

Oberflächennormale des Zylinders und die Richtung der einfallenden Lichtwelle vorgegeben. Bei der Betrachtung mehrlagiger Zylinder sind zur Berechnung von $\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)$ zusätzlich Fallunterscheidungen notwendig. Für das in Abb. 2.8 gezeigte Beispiel eines aus drei Schichten aufgebauten Zylinders setzt sich, abhängig von der Koordinate x , die geometrische Weglänge aus Abschnitten mit unterschiedlichen optischen Eigenschaften zusammen. Somit gilt für die Phasenverschiebung $\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)$ (Brendel, Seifert und Raether, 2017a):

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } & x \geq 0 \quad \& \quad x \leq r_3 \\ \text{Fall 2: } & x > r_3 \quad \& \quad x \leq r_2 \\ \text{Fall 3: } & x > r_2 \quad \& \quad x \leq r_1 \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \delta_{\text{ADA}}^\lambda(x) &= \frac{2k}{\cos(\phi)} [(m_3 - 1)y_3 + (m_2 - 1)\Delta y_{32} + (m_1 - 1)\Delta y_{21}] \\ \text{Fall 2: } \delta_{\text{ADA}}^\lambda(x) &= \frac{2k}{\cos(\phi)} [(m_2 - 1)y_2 + (m_1 - 1)\Delta y_{21}] \\ \text{Fall 3: } \delta_{\text{ADA}}^\lambda(x) &= \frac{2k}{\cos(\phi)} [(m_1 - 1)y_1], \end{aligned} \quad (2.89)$$

mit den nachfolgenden Definitionen:

$$\begin{aligned} y_3 &= \sqrt{r_3^2 - x^2}; \quad y_2 = \sqrt{r_2^2 - x^2}; \quad y_1 = \sqrt{r_1^2 - x^2}; \\ \Delta y_{32} &= y_2 - y_3; \quad \Delta y_{21} = y_1 - y_2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Nach van de Hulst, 1981 nimmt das Feld der einfallenden Welle im gesamten Raum den Wert 1 an und wird nur innerhalb des Zylinders durch $\exp[-i\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)]$ ersetzt. Zur Intensität $I_{\text{inc}}^\lambda = 1$ der einfallenden Welle wird demnach (innerhalb der Zylinderfläche) die Intensität $\exp[-i\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)] - 1$ addiert. Diese addierte Intensität beschreibt dann nach van de Hulst, 1981 die Intensität der gestreuten Welle. Die spektrale Extinktionseffizienz Q_{ext}^λ selbst, wird durch Integration über die Zylinderschnittfläche berechnet (van de Hulst, 1981):

$$Q_{\text{ext}}^\lambda = \frac{2}{r_1} \text{Re} \int_0^{r_1} \left\{ 1 - \exp[-i\delta_{\text{ADA}}^\lambda(x)] \right\} dx. \quad (2.91)$$

Das Babinetsche Prinzip fordert, dass für große Werte des Größenparameters α die Extinktionseffizienz gegen einen asymptotischen Grenzwert von zwei konvergiert (Born und Wolf, 1970). Man kann analytisch zeigen, dass in Verbindung mit Gl. (2.86) und demnach für einen homogenen Zylinder, diese Bedingung durch Gl. (2.91) erfüllt wird (vgl. Anhang C). Numerische Analysen ergaben zudem, dass auch im Falle schichtweise aufgebauter Zylinder das Babinetsche Prinzip durch Gl. (2.91) erfüllt wird. Ein entsprechendes Beispiel wird im Anhang C.2 gezeigt. Aus Gründen der Vollständigkeit sei noch erwähnt, dass für reale Brechungsindizes, Streueffizienz Q_{sca}^λ und Extinktionseffizienz Q_{ext}^λ identisch sind.

Der aus der Maxwell'schen Streutheorie resultierende Ausdruck für die Extinktionseffizienz wird nach Cohen und Alpert, 1979 aus dem Extinktionsquerschnitt Gl. (2.60) durch Division mit dem geometrischen Querschnitt $A_{\text{geo}} = 2r_1 \cos(\phi)$ berechnet:

$$Q_{\text{ext}}^\lambda(\phi) = \frac{1}{kr_1 \cos \phi} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_{\text{I},n} + a_{\text{II},n}). \quad (2.92)$$

Die Extinktionseffizienz zufällig angeordneter bzw. räumlich isotrop orientierter Fasern wird analog zu den Wirkungsquerschnitten aus Gl. (2.64) durch Mittelung über alle Einfallswinkel $\phi_{\text{sup}} = \pi/2$ bestimmt:

$$\bar{Q}_{\text{ext}}^\lambda = \int_0^{\phi_{\text{sup}}} Q_{\text{ext}}^\lambda(\phi) \cos \phi d\phi. \quad (2.93)$$

Zur Lösung von Gl. (2.91) wird die Scilab-Integrationsroutine verwendet. Scilab verwendet dabei eine 21-Punkt-Gauß-Kronrod-Quadratur (vgl. z. B. Überhuber, 2013).

2.7 Mie-Streuung

Analog zur Streutheorie für den unendlichen Zylinder lassen sich äquivalente Ausdrücke für die spektralen Wirkungsquerschnitte von Streuung und Extinktion für sphärische Streukörper formulieren. Im Fernfeld gilt nach Kerker, 1969:

$$\begin{aligned} C_{\text{ext}}^{\text{sph}} &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) \operatorname{Re} \left(a_j^{\text{sph}} + b_j^{\text{sph}} \right) \\ C_{\text{sca}}^{\text{sph}} &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) \left[\left| a_j^{\text{sph}} \right|^2 + \left| b_j^{\text{sph}} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Die Kennzeichnung als spektrale Größe mit dem hochgestellten Index λ entfällt hier aus Gründen der Übersichtlichkeit. Die Partialwellenkoeffizienten a_j^{sph} und b_j^{sph} lassen sich mithilfe der sogenannten Ricatti-Bessel-Funktionen berechnen (Kerker, 1969). Diese werden im Anhang explizit aufgeführt. Weiterhin existiert nach Hottel und Sarofim, 1967 ein analytischer Ausdruck für den Anisotropiefaktor g^{sph} :

$$\begin{aligned} g^{\text{sph}} &= \frac{\lambda^2}{\pi C_{\text{ext}}^{\text{sph}}} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{j(j+2)}{j+1} \operatorname{Re} \left[a_j^{\text{sph}} \left(a_{j+1}^{\text{sph}} \right)^{cc} + b_j^{\text{sph}} \left(b_{j+1}^{\text{sph}} \right)^{cc} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2j+1}{j(j+1)} \operatorname{Re} \left[a_j^{\text{sph}} \left(b_j^{\text{sph}} \right)^{cc} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Kapitel 3

Probenmaterial, experimentelle Methoden und Apparaturen

Zuerst wird das zu charakterisierende Probenmaterial beschrieben. Im Anschluss werden die Methoden und Apparaturen vorgestellt, die bei der Untersuchung des Probenmaterials Anwendung finden. Außerdem werden das jeweilige Messprinzip und die Vorgehensweise der Probencharakterisierung erläutert.

3.1 Das Probenmaterial

Als Probenmaterial wurde das kommerziell erhältliche Faser-Isolationsprodukt UltraBoard A99 der Firma M. E. SCHUPP Industriekeramik GmbH & Co. KG gewählt *UltraBoard A99 - High Temperature Insulation Board containing 99% Alumina up to 1600°C 2015*. Den Angaben des Herstellers zufolge werden die polykristallinen Fasern aus Al_2O_3 mit einem Reinheitsgrad von 99 % angefertigt. Die Durchmesser der Fasern liegen dabei zwischen $3 - 5\mu\text{m}$. Vor der Probenfertigung wurde das Isolationsmaterial bei der maximalen Anwendungstemperatur von 1600°C getempert. Dadurch soll vermieden werden, dass während der eigentlichen Experimente eine zu starke Schwindung der Proben erfolgt.

3.2 Infrarot optische Charakterisierung

Die infrarot-optische Charakterisierung beinhaltet die Messung der effektiven optischen Transportparameter Albedo und Extinktion aus Gl. (2.11). Für die Messung bei Raumtemperatur und bei hohen Temperaturen werden zwei verschiedene Apparaturen verwendet. Als Proben wurden flache Scheiben mit einem Außendurchmesser von 20.00 ± 0.15 mm und einer Dicke von 1.00 ± 0.15 mm bereitgestellt. Um planparallele Probenstirnflächen zu gewährleisten, wurden die Scheiben auf einer konventionellen Drehbank abgestochen.

3.2.1 Raumtemperaturmessung mit der Ulbrichtkugel

Die Ulbrichtkugel ermöglicht die spektrale Messung des gerichtet-hemisphärischen Reflexions- und Transmissionsgrades (R_{gh} und T_{gh}). Der schematische Aufbau ist in Abb. 3.1 gezeigt. Die Innenfläche der Ulbrichtkugel weist eine hochreflektierende Beschichtung auf, um ein möglichst isotropes Strahlungsfeld im Innern der Kugel zu erzeugen. An der Ober- und Unterseite der Ulbrichtkugel befindet sich jeweils eine Öffnung. Vor einer dieser Öffnungen wird die Probe angeordnet. Im Falle der Reflexionsmessung (Abb. 3.1a) bleibt die Ulbrichtkugel auch gegenüberliegend offen und gerichtete Infrarotstrahlung trifft auf die der Kugelinnenfläche zugewandte Stirnfläche der Probe. Zur Transmissionsmessung (b) hingegen wird auch die der

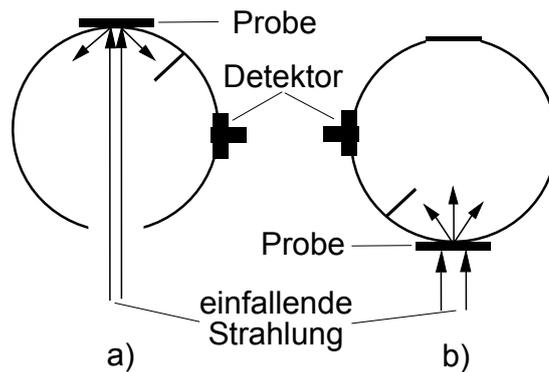


Abbildung 3.1: Reflexionsmessung (a) und Transmissionsmessung (b) mit der Ulbrichtkugel.

Probe gegenüberliegende Öffnung mittels eines Reflexionsstandards verschlossen. Die gerichtete Infrarotstrahlung fällt auf die der Ulbrichtkugel abgewandten Seite der Probe. In beiden Verfahren wird das Strahlungsfeld in der Ulbrichtkugel von einem Spektrometer erfasst. Im kurzwelligen Spektralbereich von $0.4\ \mu\text{m}$ bis $2\ \mu\text{m}$ wird ein Gitterspektrometer (Lambda 950 der Firma Perkin Elmer) und im langwelligen Bereich zwischen $2\ \mu\text{m}$ und $8\ \mu\text{m}$ ein Fourier-Transformations-Spektrometer Vertex 70v mit externer Ulbrichtkugel der Firma Bruker eingesetzt. Zur Kalibrierung der Messanordnung dient ein Reflexionsstandard. Aus den experimentell ermittelten spektralen Reflexions- und Transmissionsgraden (R_{gh} und T_{gh}) werden mittels der Drei-Fluss Näherung der Strahlungstransportgleichung (2.5) der effektive spektrale Extinktionskoeffizient σ_{ext}^* und die effektive Albedo ω_0^* aus Gl. (2.11) bestimmt (Manara, 2001). Der Standardfehler bei der Messung des gerichtet-hemisphärischen spektralen Transmissions- und Reflexionsgrades beträgt gemäß Manara u. a., 2000 etwa 0.01. Nach den Ausführungen von Manara, 2001 ist bei der Fehlerbetrachtung auch die Auswertung der effektiven optischen Transportparameter mittels der Drei-Fluss Näherung zu berücksichtigen (vgl. Kap. 2.4.1). Eine detaillierte Darstellung des Versuchsaufbaus, des Messprinzips und der Auswertemethode findet man in Manara, 2001.

Die experimentellen Untersuchungen an den bereitgestellten Proben sowie die Berechnung der effektiven optischen Transportparameter wurden vom Bayerischen Zentrum für angewandte Energieforschung e. V. in Würzburg durchgeführt.

3.2.2 Messung mit der Black-Body-Boundary Conditions Methode bei hoher Temperatur

Mit der Black-Body-Boundary Conditions Anlage (BBC) können folgende spektrale Größen normal zur Probenoberfläche gemessen werden:

- gerichteter Emissionsgrad
- gerichtet-hemisphärischer Transmissionsgrad
- gerichtet-hemisphärischer Reflexionsgrad

Das grundlegende Messprinzip bildet die Variation der Probenumgebung bzw. deren Randbedingungen. Die Probenumgebung wird dabei aus einem zweiteiligen schwarzen Körper gebildet, welcher die Probe vorder- und rückseitig umgibt.

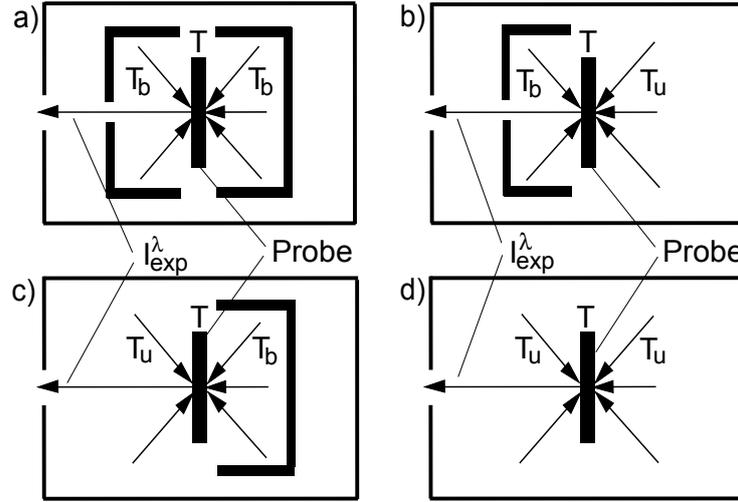


Abbildung 3.2: Schema der Black-Body-Boundary-Conditions-Methode zur Bestimmung der spektralen Größen: Gerichteter Emissionsgrad, gerichtet-hemisphärischer Transmissionsgrad und gerichtet-hemisphärischer Reflexionsgrad.

Die Temperatur des schwarzen Körpers kann nun vor und hinter der Probe auf unterschiedlichen Temperaturen (T_u und T_b mit $T_u < T_b$) festgehalten werden. Vier mögliche Konfigurationen durch Variation der Temperatur sind in Abb. 3.2 dargestellt. Die Probe selbst wird in einem separaten Ofen auf eine Temperatur $T > T_b$ gebracht und anschließend im Strahlengang der BBC-Anlage positioniert. Für den in Abb. 3.2a gezeigten Fall setzt sich die gemessene Intensität wie folgt zusammen (Manara u. a., 2008):

$$I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_b) = \epsilon_g^{\lambda}(T) i_p^{\lambda}(T) + \left[R_{\text{gh}}^{\lambda}(T) + T_{\text{gh}}^{\lambda}(T) \right] i_p^{\lambda}(T_b), \quad (3.1)$$

mit dem gerichteten Emissionsgrad $\epsilon_g^{\lambda}(T)$:

$$\epsilon_g^{\lambda}(T) = \frac{I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_b) - i_p^{\lambda}(T_b)}{i_p^{\lambda}(T) - i_p^{\lambda}(T_b)}. \quad (3.2)$$

Aus der in Abb. 3.2d gezeigten Anordnung erhält man für die gemessene Intensität (Manara u. a., 2008) :

$$I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_u) = \epsilon_g^{\lambda}(T) i_p^{\lambda}(T) + \left[R_{\text{gh}}^{\lambda}(T) + T_{\text{gh}}^{\lambda}(T) \right] i_p^{\lambda}(T_u), \quad (3.3)$$

mit dem gerichteten Emissionsgrad $\epsilon_g^{\lambda}(T)$ (Manara u. a., 2008):

$$\epsilon_g^{\lambda}(T) = \frac{I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_u) - i_p^{\lambda}(T_b)}{i_p^{\lambda}(T) - i_p^{\lambda}(T_u)}. \quad (3.4)$$

Die in Abb. 3.2b und Abb. 3.2c abgebildeten Konfigurationen erlauben schließlich die Messung der spektralen Transmissions- und Reflexionsgrade. Für den in

Abb. 3.2b gezeigten Fall gilt für die gemessene Intensität:

$$I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{b}}, T_{\text{u}}) = \epsilon_{\text{g}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T) + R_{\text{gh}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{b}}) + T_{\text{gh}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{u}}), \quad (3.5)$$

und für Messanordnung Abb. 3.2c folgt analog (Manara u. a., 2008):

$$I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{u}}, T_{\text{b}}) = \epsilon_{\text{g}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T) + R_{\text{gh}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{u}}) + T_{\text{gh}}^{\lambda}(T) i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{b}}). \quad (3.6)$$

Die gesuchten Ausdrücke für den gerichtet-hemisphärischen Reflexions- und Transmissionsgrad findet man nach Manara u. a., 2008 durch Subtraktion von Gl. (3.5) und Gl. (3.1) bzw. Subtraktion von Gl. (3.6) und Gl. (3.3):

$$T_{\text{gh}}^{\lambda} = \frac{I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{b}}) - I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{b}}, T_{\text{u}})}{i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{b}}) - i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{u}})} \quad (3.7)$$

$$R_{\text{gh}}^{\lambda} = \frac{I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{u}}, T_{\text{b}}) - I_{\text{exp}}^{\lambda}(T, T_{\text{u}})}{i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{b}}) - i_{\text{p}}^{\lambda}(T_{\text{u}})}. \quad (3.8)$$

Aus den gemessenen spektralen gerichtet-hemisphärischen Reflexions- und Transmissionsgraden wird mittels einer speziellen Lösung der Strahlungstransportgleichung (Drei-Fluss Näherung) der effektive spektrale Extinktionskoeffizient und die effektive spektrale Albedo berechnet (Manara u. a., 2008). Bei der BBC-Methode beträgt der Standardfehler bei der Messung des gerichtet-hemisphärischen spektralen Transmissions- und Reflexionsgrades nach den Angaben von Manara, 2001 etwa 0.04. Eine detaillierte Darstellung des Versuchsaufbaus, des Messprinzips und der Auswertemethode der BBC-Methode findet man in Manara, 2001 und Manara, 1997. Die experimentellen Untersuchungen an den bereitgestellten Proben bei 1000°C und die Berechnung der effektiven optischen Transportparameter (vgl. Manara, 2001), wurden ebenfalls vom Bayerischen Zentrum für angewandte Energieforschung e. V. in Würzburg durchgeführt.

3.3 Laser-Flash Analyse

Die Laser-Flash Analyse bezeichnet ein transientes Messverfahren zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit. Grundlegende Forschungsarbeiten bezüglich der Entwicklung dieser Messtechnik gehen in die 1960er Jahre zurück Parker u. a., 1961, Cape und Lehman, 1963 und Larson und Koyama, 1968. Der Ablauf des Messverfahrens besteht darin, dass eine Seite einer planparallelen Probe durch einen kurzen Laserpuls erhitzt wird. Um die Temperaturleitfähigkeit auch unter höheren Temperaturen bestimmen zu können, wird die Probe in einem Ofen erwärmt (vgl. Abb. 3.3). Aus der zeitlichen Entwicklung des Temperaturprofils der Gegenseite kann die Temperaturleitfähigkeit der Probe bestimmt werden. Am einfachsten gelingt dies über die Anstiegszeit $t_{1/2}$ - der Zeitspanne von der Anregung bis zum Erreichen des halben Maximalwerts der Temperaturmesskurve:

$$\kappa = 1.38 \frac{l_{\text{fp}}^2}{\pi t_{1/2}}. \quad (3.9)$$

Die Bezeichnung l_{fp} repräsentiert hier die Probendicke. Gewöhnlich werden zur Auswertung aber wesentlich komplexere Methoden genutzt. Diese basieren auf der Greenschen Funktion des Randwertproblems der eindimensionalen zeitabhängigen Fourierrechnung mit formal konvektiver Wärmeübertragung an den Stirnflächen

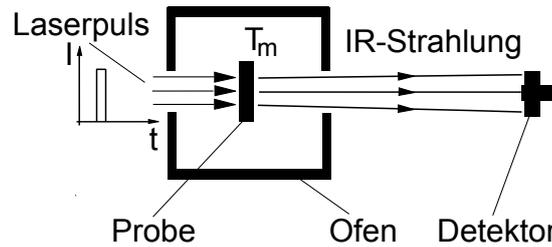


Abbildung 3.3: Das Prinzip des Laser-Flash Verfahrens.

(Carslaw und Jaeger, 1959). Als Apparatur wurde das kommerzielle System LFA 457 der Firma Netzsch benutzt. Das Gerät nutzt für die thermische Anregung einen ND:YAG-Laser mit einer Laserwellenlänge von $1.064 \mu\text{m}$. Die Absorption von Aluminiumoxid bei dieser Wellenlänge ist sehr gering (vgl. Abb.1.1) und die Proben müssen notwendig mit einer Graphitschicht an den Stirnflächen versehen werden. Die zylindrischen LFA-Proben mit einer Dicke zwischen 2.5 und 3.0 mm wurden ebenfalls auf einer konventionellen Drehbank hergestellt.

3.4 REM-Mikroskopie

Für die Ermittlung einer Fasergrößenverteilung der Wärmeisolation wurde ein Rasterelektronenmikroskop (REM) der Firma Zeiss vom Typ Supra 25 verwendet. Eine Beschreibung der prinzipiellen Funktionsweise eines REM findet sich beispielsweise in Schmidt, 2012. Die Faserproben wurden zunächst in einem Achtmörser zerkleinert und anschließend in einem zylindrischen Gefäß für ca. 30 Minuten durch Rotation homogenisiert. Etwa 5 mm^3 Probenmaterial wurden auf einem leitfähigen Kohlenstoffklebestreifen mit einer Fläche von 5 cm^2 verteilt. Die Beschleunigungsspannung betrug 10 kV bei einem Arbeitsabstand von 8 mm - auf eine leitfähige Beschichtung der Probe wurde verzichtet. Für die Bildgebung wurden ausschließlich Sekundärelektronen gerastert, wobei die Auswahl der Bildausschnitte zufällig erfolgte. In jedem Bildausschnitt mussten mindestens drei verschiedene Einzelfasern mit gleicher Tiefenschärfe erkennbar sein. Die Durchmesser wurden geometrisch aus der Normalen von parallelen Faserabschnitten bei einem Vergrößerungsfaktor von 6000 bestimmt.

3.5 Thermal-Wave Analyse

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, bildet eine oszillierende Temperaturrandbedingung die Grundlage der TWA-Methode zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit. Anhand der Veränderung der Temperaturschwingung innerhalb der Probe hinsichtlich Phase und Amplitude kann auf die Temperaturleitfähigkeit geschlossen werden. Im Folgenden werden die theoretischen Zusammenhänge, der realisierte experimentelle Aufbau und der Ablauf der Messungen erläutert.

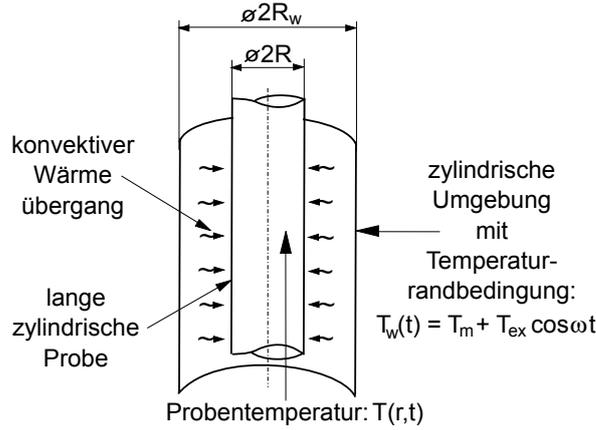


Abbildung 3.4: Prinzipskizze des periodisch beheizten Zylinders.

3.5.1 Theorie des periodisch erwärmten Zylinders

Vorausgesetzt wird ein axial unendlich ausgedehnter Zylinder mit Radius R , welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ auf konstantem Temperaturniveau T_m liegt und für $t > 0$ von einer harmonischen Temperaturschwingung außerhalb des Zylinders konvektiv angeregt wird. Die Anregung soll dabei homogen über den Umfang des Zylinders erfolgen (vgl. Abb. 3.4).

Die zu lösende Grundgleichung dieser Problemstellung ist die homogene Fouriergleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) - tc \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] T(r, t) = 0. \quad (3.10)$$

Für $T_m = 0$ gilt an der Stelle R die Randbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial r} T(r, t)|_{r=R} + h_{\text{rel}} T(R, t) = 0, \quad (3.11)$$

wobei h_{rel} einen relativen Wärmeübergangskoeffizienten bezeichnet. Als Antwortfunktion $T(r, t)$ auf einen Temperatursprung T_{ex} der Umgebung (des Zylinders) zum Zeitpunkt $t = 0$ findet man (Carslaw und Jaeger, 1959):

$$T(r, t) = T_{\text{ex}} \left[1 - 2h_{\text{rel}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\check{\chi}_n^2 \kappa t) \frac{J_0(\check{\chi}_n r)}{R (\check{\chi}_n^2 + h_{\text{rel}}^2) J_0(\check{\chi}_n R)} \right], \quad (3.12)$$

mit den Bezeichnungen r für die Radialkoordinate und κ für die Temperaturleitfähigkeit. Nach Carslaw und Jaeger, 1959 lassen sich die $\check{\chi}_n$ aus den Nullstellen der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\check{\chi} J_1(\check{\chi} R) = h_{\text{rel}} J_0(\check{\chi} R). \quad (3.13)$$

Die J_1 und J_0 repräsentieren dabei Bessel-Funktionen erster Art von der Ordnung null bzw. eins. Für eine kosinusförmige Anregung ist formal das Faltungsintegral aus der Impulsantwort, also der zeitlichen Ableitung von Gl. (3.12) und der anregenden Kosinusfunktion mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu lösen (vgl. Anhang

B). Man findet (Brendel, Seifert und Raether, 2017b):

$$T(r, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{ic_2 T_{\text{ex}} J_0(c_1 \varsigma r / R) \exp(i\omega t)}{\sqrt{2} ic_1 J_1(c_1 \varsigma) + ic_2 J_0(c_1 \varsigma)} \right\} + \sqrt{2} c_2 T_{\text{ex}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\chi_n r / R) \exp(-\chi_n^2 \omega t / c_1^2)}{(\chi_n^4 / c_1^4 + 1) (\chi_n^2 + \frac{1}{2} c_2^2) J_0(\chi_n)}, \quad (3.14)$$

mit den Bezeichnungen $c_1 = R(\omega/\kappa)^{\frac{1}{2}}$: dimensionsloser Parameter; $c_2 = \sqrt{2} R h_{\text{rel}}$: dimensionsloser Parameter; T_{ex} : Amplitude der thermischen Anregung; $\varsigma = \exp(3i\pi/4)$: komplexe Größe. Außerdem gilt $\chi_n = \check{\chi}_n R$. Der linke Term in Gl. (3.14) beschreibt den stationären Zustand der periodischen Schwingung, wogegen das Einschwingverhalten durch den zweiten Term in Gl. (3.14) abgebildet wird. Die Beiträge dieses Terms gehen aufgrund des negativen Exponenten in der Exponentialfunktion mit zunehmender Zeit gegen null.

In den Gleichungen (3.12) und (3.14) kann eine homogene Anfangstemperatur $T_m > 0$ durch einfache Addition derselben berücksichtigt werden. Für $T_m \geq 1000^\circ\text{C}$ wird der Wärmeübergang zwischen Zylinderoberfläche und Umgebung im Wesentlichen durch den Austausch von Wärmestrahlung erfolgen. Sind die Temperaturunterschiede zwischen Zylinderwand und Umgebung sehr klein im Vergleich zur mittleren Zylindertemperatur T_m , so kann der Strahlungsaustausch durch einen Konvektionsterm beschrieben werden und der Wärmeübergangskoeffizient h_{rel} wird zu:

$$h_{\text{rel}} = 4T_m^3 \sigma_B \epsilon^* / tc. \quad (3.15)$$

Der effektive Emissionsgrad ist dabei definiert als:

$$\epsilon^* = (1/\epsilon_{\text{fp}} + \frac{R}{R_w} (1/\epsilon_w - 1))^{-1}, \quad (3.16)$$

wobei ϵ_{fp} und ϵ_w die spektral integrierten Emissionsgrade der Zylindermantelfläche und einer den Zylinder umgebenden virtuellen zylindrischen Wand bezeichnen.

Wenn nur das stationäre Temperaturprofil als Funktion der Radialkoordinate r von Interesse ist, so lässt sich der linke Term in Gl. (3.14) in folgender Form darstellen:

$$T(r, t) = T_{\text{ex}} \eta(r) \cos(\omega t - \nu(r)), \quad (3.17)$$

wobei $\eta(r)$ den sogenannten Amplitudenverlustfaktor und $\nu(r)$ die Phasenverschiebung als Funktion der Radialkoordinate r repräsentieren. Mit den folgenden Abkürzungen:

$$\zeta_1(c_1, c_2) = \frac{c_1}{c_2} [\operatorname{Re}(J_1(c_1 \varsigma)) - \operatorname{Im}(J_1(c_1 \varsigma))] - \operatorname{Im}(J_0(c_1 \varsigma)), \quad (3.18)$$

$$\zeta_2(c_1, c_2) = \frac{c_1}{c_2} [\operatorname{Re}(J_1(c_1 \varsigma)) + \operatorname{Im}(J_1(c_1 \varsigma))] + \operatorname{Re}(J_0(c_1 \varsigma)), \quad (3.19)$$

$$\zeta_3(r, c_1) = \operatorname{Re}(J_0(c_1 \varsigma r / R)), \quad (3.20)$$

$$\zeta_4(r, c_1) = \operatorname{Im}(J_0(c_1 \varsigma r / R)), \quad (3.21)$$

sowie

$$\Gamma_A = \frac{\zeta_3 \zeta_1 + \zeta_4 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_B = \frac{\zeta_1 \zeta_4 - \zeta_3 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad (3.23)$$

lässt sich die Phasenverschiebung am Orte r schreiben als:

$$\tan \nu(r) = \frac{\Gamma_A}{\Gamma_B}, \quad (3.24)$$

und der Ausdruck für den Amplitudenverlustfaktor $\eta(r)$ wird zu:

$$\eta(r)^2 = \Gamma_A^2 + \Gamma_B^2. \quad (3.25)$$

Auf der Zylinderachse $r = 0$, vereinfachen sich die Gl. (3.24) und Gl. (3.25) zu:

$$\tan \nu = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2}; \quad r = 0 \quad (3.26)$$

$$1/\eta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2; \quad r = 0. \quad (3.27)$$

Die Gleichungen (3.24) und (3.25) bzw. die Gleichungen (3.26) und (3.27) drücken aus, dass die in den Zylinder eindringenden thermischen Schwingungen auch innerhalb des Zylinders harmonisch bleiben, sich jedoch zeitlich um die Phasenverschiebung $\nu(r)$ verzögern und in der Amplitude um den Faktor $\eta(r)$ gedämpft werden. Es sei darauf hingewiesen, dass die Gleichungen (3.18) bis (3.27) in Verbindung mit Gl. (3.17) bereits von Gröber, 1928 formuliert wurden. Allerdings sind in Gröber, 1928 die Parameter c_1 und c_2 im Gegensatz zur hier vorliegenden Abhandlung verschieden definiert. Die Bezeichnungen in dieser Arbeit sind der messtechnischen Aufgabe geschuldet, denn c_1^{-2} ist nun proportional zur Messgröße der Temperaturleitfähigkeit, wohingegen in c_2 die Temperaturleitfähigkeit κ nicht mehr erscheint. Phase und Amplitude können also allein durch die zwei Parameter c_1 und c_2 beschrieben werden und lassen sich in einem Liniendiagramm darstellen. Mit c_1^{-2} als Kontrollparameter sind in Abb. 3.5 entsprechende Kurvenscharen für Phase und Amplitude am Ort $r = 0$ gezeigt. Vom experimentellen Standpunkt aus bilden Phasenverschiebung und Amplitude die Messgrößen, aus welchen die zu bestimmende Temperaturleitfähigkeit via die Gleichungen (3.18) bis (3.27) extrahiert wird. Insofern gibt Abb. 3.5 Anleitung zur Auslegung bzw. Parametrisierung des TWA-Experiments. Bezüglich des messtechnischen Auflösungsvermögens muss darauf geachtet werden, dass die Phasenverschiebung ν ausreichend hoch und der Wert des Amplitudenverlustfaktors η genügend klein ausfällt, um sich in dem steil verlaufenden Bereich der Kurvenscharen zu befinden. Beeinflussbar ist dies vorrangig über den Probenradius R und die Frequenz ω der Temperaturschwingung. Vom praktischen Gesichtspunkt aus stehen der optimalen Parametrisierung des Versuchsaufbaus die Begrenzung des Probenvolumens, die maximale Heiz- bzw. Kühlrate und aus regelungstechnischer Sicht die Qualität der Nachbildung der Temperaturschwingungskurve entgegen.

3.5.2 Experimenteller Aufbau

Wie in Abb. 3.6 dargestellt, wird eine zylindrische Probe mittels einer zentrierenden Halterung in einer zylindrischen Muffel angeordnet. Halterung und Probe bestehen aus identischem Faserisulationsmaterial und die keramische Muffel selbst ist aus Aluminiumoxid mit einem Reinheitsgrad von 99.7% gefertigt. Der gesamte Aufbau wird mittig in einem hauseigenen oxidischen Laborofen TOM_air positioniert. Eine Eurothorm-Nanotac PID-Regelungseinheit dient zur Temperaturregelung des Ofens. Die jeweiligen Temperaturen werden mit Thermoelementen

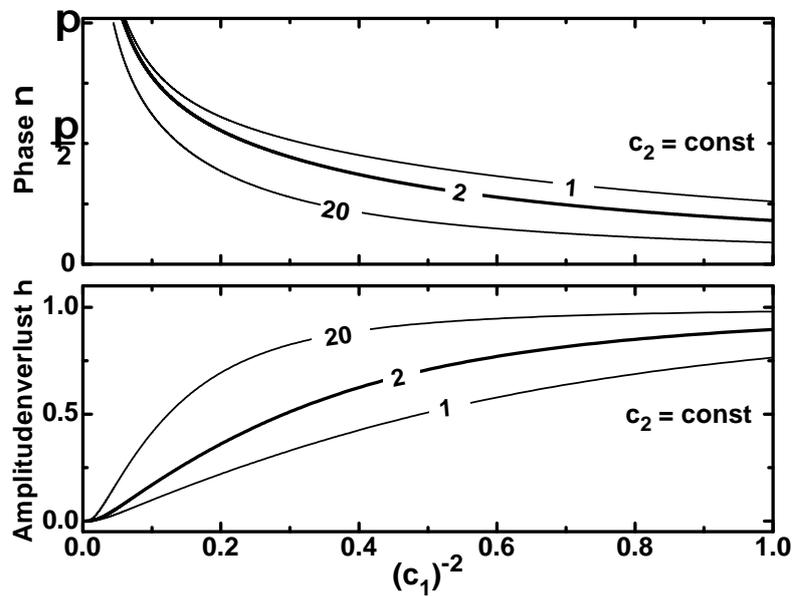


Abbildung 3.5: Amplitudenverlustfaktor η und Phasenverschiebung ν am Ort $r = 0$ als Funktion des Kontrollparameters c_1^{-2} für verschiedene Werte von c_2 .

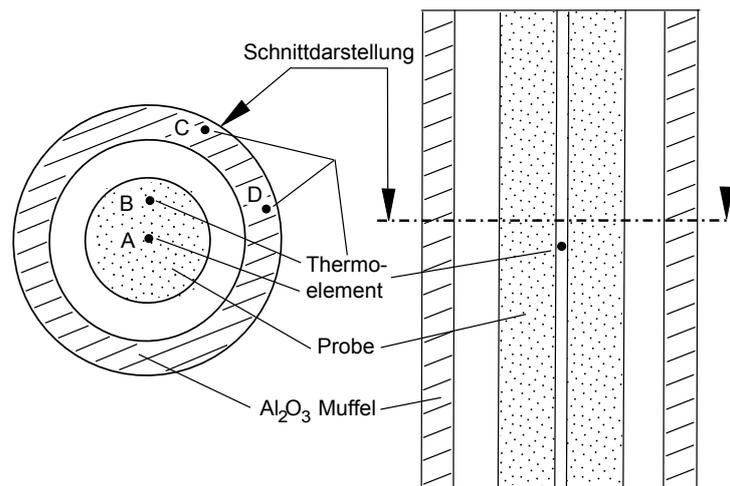


Abbildung 3.6: Der experimentelle Aufbau zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit κ einer zylindrischen Probe mittels der TWA-Methode.

vom Typ B (Pt30Rh/Pt6Rh) mit einem Außendurchmesser von 0.75 mm gemessen. Die Thermoelemente werden hierfür auf Stoß geschweißt. Abbildung 3.6 zeigt dabei die jeweilige Position der Thermoelemente innerhalb der Probe (Position A und B) und innerhalb der Muffelwand (Position C und D). Für die Befestigung der Thermoelemente entlang der Muffelaußenwand wurde ein keramischer Hochtemperaturkleber (Ceramobond 552) verwendet.

Die Messung und Aufzeichnung der Thermospannung erfolgte mit der Eurotherm-Nanotac Reglereinheit und einem zusätzlichen externen Spannungsmessgerät. Um zu garantieren, dass die Aufzeichnungen synchron verlaufen, wurde die Temperatur am Führungs-Thermoelement simultan von der Regelungseinheit und vom externen Spannungsmessgerät erfasst. Die Aufzeichnung erfolgte jeweils mit einer Abtastrate von 1 Hz; Für die Temperaturregelung war es notwendig die Signale mit einer Zeitkonstante von 1.6 s zu glätten. Zur Erzeugung der kosinusförmigen Wandtemperatur wurde ein Skript zur Berechnung der zeitabhängigen Temperatur erstellt und die Sollwerte mit einer Aktualisierungsrate von 2 Hz an die Regelungseinheit übermittelt. Für eine akkurate Nachbildung der Temperaturkurve war es zudem notwendig, die Parametrisierung der Reglereinheit frequenz- und temperaturabhängig zu optimieren. Die Ermittlung geeigneter Proportional-, Integral- und Differentialanteile zur Berechnung der Stellgrößen erfolgte dabei im Vorfeld der eigentlichen Messungen mit einer der Probe ähnlichen thermischen Last innerhalb des Ofens.

3.5.3 Probenherstellung

Die Proben zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit besitzen einen Durchmesser von 26.0 ± 0.2 mm und eine Länge von $95.0 \text{ mm} \pm 0.5$, wobei die zylindrische Probenform auf einer konventionellen Drehbank realisiert wurde, um eine im Rahmen der Messgenauigkeit exakte zylindrische Form zu gewährleisten. Das Radien-Längenverhältnis der Proben von 0.14 kann für die Annahme eines unendlich langen Zylinders als ausreichend betrachtet werden (vgl. Anhang B.2). Für die Positionierung der Thermoelemente werden die Proben mit zwei parallel zur Längsachse verlaufenden Bohrungen mit einem Durchmesser von 1 mm versehen. Wobei eine Bohrung konzentrisch auf der Längsachse und eine Bohrung exzentrisch verläuft, mit einem Achsenabstand von $8.0 \pm 0.5 \text{ mm}$. Die Bohrung auf der Achse wird auf der Drehbank nach Erzeugung der Außengeometrie in gleicher Aufspannung realisiert. Die Herstellung der exzentrisch angeordneten Bohrung erfolgte an einer Säulenbohrmaschine mittels einer speziellen Vorrichtung, um den parallelen Verlauf der beiden Bohrungsachsen sicherzustellen.

3.5.4 Temperaturhomogenität und maximale Anregungsfrequenz

Um die Homogenität des Temperaturprofils entlang der Muffelinnenwand während der periodischen Beheizung bewerten zu können, wurde die Temperatur an sechs unterschiedlichen Positionen abgegriffen. Dabei wurde die Muffel nach einem durchlaufenen Messzyklus gedreht, derart, dass die Position des Thermoelements bei Position C (vgl. Abb. 3.6) die vorherige Position des Thermoelements D einnahm. Vergleicht man die ermittelten Phasenunterschiede bei einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.025/\text{min}$ und einer Temperatur von 1000°C , so findet

man eine maximale Abweichung von 0.15 rad zwischen den einzelnen Thermoelementpositionen, wogegen bei einer Temperatur von 1580°C eine geringere maximale Abweichung von 0.012 rad gefunden wurde. Unabhängig von der Temperatur konnte für die Beziehung Anregungsfrequenz und maximale Phasenabweichung in guter Näherung ein linearer Zusammenhang festgestellt werden. Das bedeutet, eine Verdoppelung der Anregungsfrequenz führt auf einen etwa zweifach erhöhten Wert für die maximale, durch Temperaturinhomogenitäten verursachte Phasendifferenz. Das mit steigender Temperatur zunehmend homogener erscheinende Temperaturprofil der Muffel wird auf Fehlstellen (Risse) und die Spalte in der Ofenauskleidung zurückgeführt. Aufgrund der thermischen Ausdehnung der Isolation schließen sich diese Spalten und Risse mit steigender Temperatur.

Bei vorgegebener Amplitude ($T_{\text{ex}} = 10\text{K}$) ist die maximal zugängliche Anregungsfrequenz aus drei Gründen nach oben begrenzt. Zum einen muss der Ofen bei der jeweiligen Messtemperatur bei Wegnahme der Heizleistung über eine ausreichend hohe Eigenkühlrate verfügen, um dem vorgegebenen Temperaturverlauf folgen zu können. Dieser Aspekt wirkt insbesondere bei Temperaturen unterhalb von 1000°C stark limitierend. Zum anderen muss bei hohen Frequenzen auch ausreichend Heizleistung bereitgestellt werden können, was zuvorderst bei Temperaturen oberhalb von 1400°C einschränkend wirkt. Die bereits erörterte Temperatur-Homogenität bildet ebenso ein Kriterium für die höchste noch sinnvolle Anregungsfrequenz. Letztendlich wurde für den vorliegenden Versuchsaufbau bei 1000°C eine maximale Frequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$ gefunden. Ab einer Temperatur von 1200°C ist das Frequenzlimit dann bei $f_{\text{Hz}} = 0.15/\text{min}$.

3.5.5 Bestimmung von Phase, Amplitude und Temperaturleitfähigkeit

Abbildung 3.7 zeigt die Temperaturantwort an Position A innerhalb der Faserprobe bei einer Anregungsfrequenz von 0.05/min bei 1000°C (dicke Volllinie). Um die Phasenverschiebung ν_{fp} und die Amplitude T_{fp} bzw. den Amplitudenverlustfaktor η zu bestimmen, wird das stationäre Temperaturprofil mit nachfolgender Gleichung gefittet:

$$T(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + A_3 + A_4 t. \quad (3.28)$$

Dabei bezeichnet $\omega = 2\pi f$ die (feste) Winkelgeschwindigkeit. Der Fitparameter A_3 wird der mittleren Temperatur zugeordnet und der Parameter A_4 dient zur Anpassung an eine lineare Drift in der Ofentemperatur während der Zeitdauer einer Messung. Phase und Amplitude werden durch Anpassung an die Fitparameter A_1 und A_2 ermittelt. Dabei gilt $T_{\text{fp}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ und $\tan \nu_{\text{fp}} = A_2/A_1$. Zusätzliche Details zur Trennung von transienter und stationärer Kurve finden sich in Brendel, Seifert und Raether, 2017b sowie in Anhang B.3. Wie anhand des vergrößerten Bildausschnitts auf der rechten Seite der Abb. 3.7 verdeutlicht wird, zeigt auch das Temperaturprofil der Muffel, bedingt durch die regelungstechnische Verzögerung, eine Verschiebung der Phase bezüglich der Temperaturvorgabe bzw. der Temperatursollwerte. Die tatsächliche Phasenverschiebung der Probe relativ zur Muffeltemperatur erhält man demnach durch Subtraktion der Phasenverschiebung der Muffeltemperatur von der Phasenverschiebung der Probe. Deshalb werden auch Phase ν_{ex} und Amplitude T_{ex} des anregenden Temperaturprofils via Gl. (3.28) gefittet. Aus den ermittelten Amplituden kann dann letztendlich der Amplitudenverlustfaktor $\eta = T_{\text{fp}}/T_{\text{ex}}$ bestimmt werden. Es sei an dieser Stelle

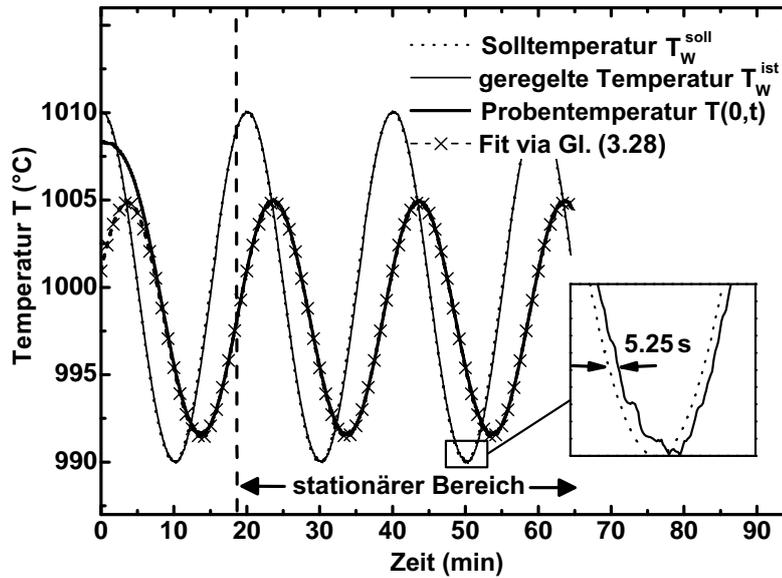


Abbildung 3.7: Experimentell ermittelte Temperaturkurven der Anregung (dünne Volllinie) und der Probe an Messposition A (dicke Volllinie) bei 1000°C und einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$. Die Sollwertkurve ist als gepunktete Linie eingezeichnet (vgl. Bildausschnitt rechts unten). Der Fit der stationären Probenantwort mit Gl. (3.28) erscheint als eine mit Kreuzen unterlegte gestrichelte Linie.

angemerkt, dass die Bestimmung von Phase und Amplitude auch über eine Fast-Fourier-Transformation (FFT) wie in Bhattacharya u. a., 2006 erfolgen kann. Die Ermittlung von Phase und Amplitude mittels FFT oder über Gl. (3.28) führte auf identische Werte. Damit wurde auch sichergestellt, dass bei der Auswertung lediglich der stationäre Anteil der Temperaturschwingung berücksichtigt wurde. Die FFT wurde mittels des programmeigenen Algorithmus der Scilab-Software umgesetzt.

Zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit aus Phasenverschiebung und Amplitudenverlustfaktor müssen zunächst die nichtlinearen Gleichungen (3.18) bis (3.27) nach den unbekannt Parametern c_1 und c_2 aufgelöst werden. Dies erfolgt mittels des in Scilab implementierten Lösungsalgorithmus für nichtlineare Gleichungen. Scilab verwendet hierfür die Powell-Hybrid-Methode (Powell, 1970). Über den Zusammenhang $c_1 = R(\omega/\kappa)^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich dann die gesuchte Temperaturleitfähigkeit κ .

3.5.6 Experimenteller Ablauf

Zu Beginn wird der Aufbau mit einer linearen Heizrate von $5^{\circ}\text{C}/\text{min}$ auf Messtemperatur geheizt. Im Anschluss wird eine Haltezeit von etwa 30 Minuten abgewartet, damit sich im Ofen ein thermisches Gleichgewicht einstellt. Das Kriterium für das thermische Gleichgewicht lieferte ein in der Ofenisolation mittig angeordnetes Thermoelement. Alsdann erfolgen die Messungen für unterschiedliche Anregungsfrequenzen. Die Messtemperaturen betragen 1000°C , 1200°C , 1400°C sowie 1580°C . Für sämtliche Messungen wird eine Soll-Amplitude der Muffel von

10 K vorgegeben. Bei 1000°C betragen die Frequenzen $f_{\text{Hz}} = 0.025/\text{min}$ und $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$. Im Falle der höheren Temperaturen werden die Temperaturprofile für Frequenzen von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$, $f_{\text{Hz}} = 0.1/\text{min}$ und $f_{\text{Hz}} = 0.15/\text{min}$ aufgezeichnet. Die Zeitdauer der Aufzeichnung der Temperaturprofile wird durch ein bestimmtes Abbruchkriterium festgelegt. Das Abbruchkriterium stellt sicher, dass der durch die endliche Messdauer bedingte Fehler in der Temperaturleitfähigkeit höchstens 1.5 % beträgt. In der Praxis war hierfür die Aufnahme von zwei bis drei stationären Schwingungsperioden notwendig. Die Reproduzierbarkeit der Messungen, verbunden mit dem Abbruchkriterium, wurde bei der jeweiligen Anwendungstemperatur durch Wiederholung der Messung nach einer Haltezeit von wiederum 30 Minuten überprüft. Die vorher und nachher ermittelten Temperaturleitfähigkeiten zeigten dabei stets weniger als zwei Prozent Abweichung. Das oben genannte Abbruchkriterium wird in Brendel, Seifert und Raether, 2017b erläutert und ausführlich in Anhang B.4 beschrieben.

Kapitel 4

Vorteile von Hohlfasern als Bestandteil einer thermischen Hochtemperaturisolation

In diesem Kapitel werden die Wärmetransport-Eigenschaften von Hohlfaserisolationen und konventionellen Faserdämmmaterialien unter Beachtung praxisnaher Aspekte in einer numerischen Studie gegenübergestellt und bewertet.

4.1 Motivation und einführendes Beispiel

Die früheren theoretischen und experimentellen Arbeiten von McKay, 1984, Wang, Kumar und Tien, 1987 und Lee, 1993 setzen sich bereits mit der Anwendung von Hohlfasern in thermischen Isolationen auseinander. In der theoretischen Modellbildung von McKay, 1984 bleibt die Aushöhlung der experimentell untersuchten Faser jedoch unbeachtet. Die numerische Studie von Wang, Kumar und Tien, 1987 konzentriert sich auf die Anwendung im Temperaturbereich zwischen -20°C und 150°C . Weiterhin sei im Zusammenhang mit den Ausführungen von Wang, Kumar und Tien, 1987 bemerkt, dass die theoretischen Modelle der Arbeit von Tong und Tien, 1983a entnommen sind. Die theoretischen Vorhersagen aus Tong und Tien, 1983a erbrachten aber selbst bei niedrigen Temperaturen nur qualitative Übereinstimmung mit nachfolgenden experimentellen Studien von Tong und Tien, 1983b. Die Wärmetransportmodelle der hier vorliegenden Abhandlung orientieren sich deshalb an den theoretischen Abhandlungen von Lee (Lee, 1988, Lee, 1989, Lee, 1990b, Lee, 1990a und Lee, 1992). Die Gültigkeit von Lees Modellen wurde durch experimentelle Studien von Cunningham und Lee, 1996 und Lee und Cunningham, 2000 belegt. Darüber hinaus veröffentlichte Lee, 1993 eine numerische Studie welche Wärmeisolationen aus Hohlfasern, beschichteten Fasern und konventionellen Fasern vergleicht. Lee, 1993 kommt dabei zu dem Ergebnis, dass thermische Isolationen aus Hohlfasern weniger geeignet seien als solche aus konventionellen Fasern. In der hier vorliegenden Arbeit wird jedoch gezeigt, dass diese Schlussfolgerung im Allgemeinen nicht haltbar ist. Beispielsweise ist in den Studien von Lee, 1993 die Hohlfasergeometrie angesichts des betrachteten Wellenlängenbereichs ungünstig gewählt. Darüber hinaus vergleicht Lee, 1993 die Wärmetransport-Eigenschaften einzelner Fasern. Diese Vorgehensweise übersieht aber den Umstand, dass grundlegende thermische Eigenschaften eines Dämmstoffes wie Wärmekapazität und Festkörperwärmeleitfähigkeit von seiner Rohdichte ρ_{fp} bzw. seinem Feststoffvolumenanteil bestimmt werden. Speziell in diskontinuierlichen Öfen wird die Energieeffizienz maßgeblich von der Wärmekapazität $\rho_{\text{fp}}c_p$ der Wärmeisolation geprägt. Weiterhin erfordern Wärmebehandlungsprozesse verfahrensbedingt häufig hohe Heiz- oder Kühlraten und das Wärmespeichervermögen der Ofenisolation sollte

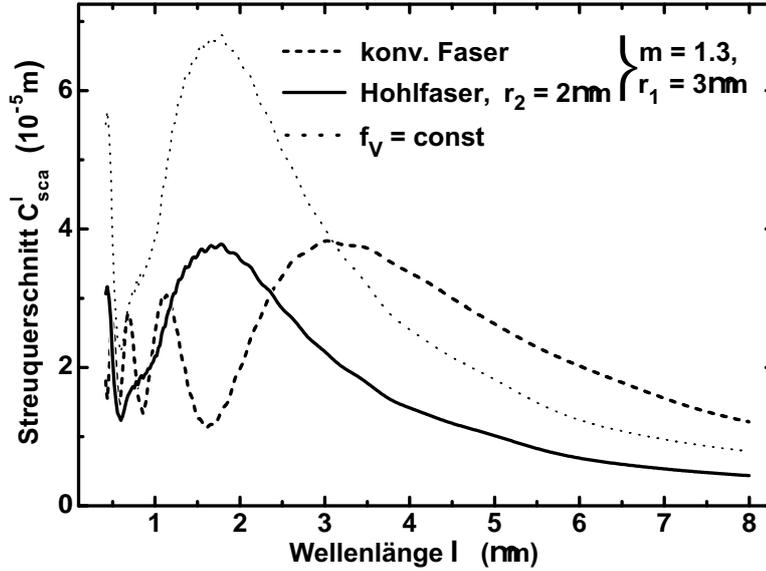


Abbildung 4.1: Vergleich der Streuquerschnitte C_{sca} einer Hohlfaser (Volllinie) und einer konventionellen Faser (gestrichelt) mit identischem Außenradius $r_1 = 3 \mu\text{m}$ bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0$). Der Innenradius r_2 der Hohlfaser beträgt $2 \mu\text{m}$ und der Brechungsindex des Fasermaterials zeigt einen Wert von 1.3. Die (sichtbare) gepunktete Linie entspricht dem 1.8-fachen Wirkungsquerschnitt der Hohlfaser für konstanten Feststoffvolumenanteil f_V .

entsprechend gering sein. Auch in der vom Leichtbau dominierten Branche der Luft- und Raumfahrt ist die Rohdichte ρ_{fp} ein entscheidendes Kriterium für die Eignung eines Wärmedämmstoffes. Eine technologisch relevante Vergleichsstudie sollte demnach auf Basis eines konstanten Feststoffvolumenanteils und nicht auf Basis konstanter Faserzahl durchgeführt werden. Bei gegebener Rohdichte darf in einer Hohlfaser-Isolation eine größere Anzahl an Fasern der Länge l_{fib} enthalten sein, als in einer aus konventionellen Fasern (der Länge l_{fib}) bestehenden Isolation. Dieser Umstand sollte demnach bei der Frage nach der Eignung von Hohlfaser-Wärmedämmstoffen berücksichtigt werden.

Anhand eines einfachen Beispiels soll diese Argumentation verdeutlicht werden. Mithilfe, der in Abschnitt 2.5.1 beschriebenen Streutheorie des unendlichen Zylinders, werden anhand von Gl. (2.61) die Streuquerschnitte C_{sca} einer Hohlfaser mit Außenradius $r_1 = 3 \mu\text{m}$ und Innenradius $r_2 = 2 \mu\text{m}$ und einer konventionellen Faser mit identischem Außenradius als Funktion der Wellenlänge λ berechnet. Das Fasermaterial soll dabei einen Brechungsindex von 1.3 aufweisen. Das Resultat wird in Abb. 4.1 gezeigt. Augenscheinlich verschiebt sich das Maximum des Streuquerschnitts der Hohlfaser (Volllinie) zu höheren Frequenzen und die spektrale Bandbreite des Streuquerschnitts wird schmaler. Geht man nun vom Vergleich einzelner Fasern über zu einem Vergleich bei konstantem Feststoffvolumenanteil, so ist zu berücksichtigen, dass das Volumen der Hohlfaser V^H um den Faktor 1.8 geringer ausfällt, als das Volumen V^S der konventionellen Faser. Der hochgestellte Index S kennzeichnet dabei stets eine Eigenschaft konventioneller Fasern und der Index H kennzeichnet die entsprechende Größe der Hohlfasern.

In Faserisolationen mit jeweils identischem Feststoffvolumenanteil $f_V^H = f_V^S$ an Fasermaterial übersteigt die Anzahl der Hohlfasern die Zahl der konventionellen Fasern folglich um das 1.8-fache. Berücksichtigt man dies in der Gegenüberstellung der beiden Fasergattungen, so muss der Streuquerschnitt der Hohlfaser mit dem Faktor V^S/V^H multipliziert werden (gepunktete Kurve in Abb. 4.1). Aus diesem einfachen Vergleich kann man bereits die ersten Schlussfolgerungen für die praktische Anwendung ableiten. Der Streuquerschnitt verhält sich bei zunehmender Aushöhlung der Faser qualitativ ähnlich, wie die spektrale Intensität i_p^λ eines schwarzen Körpers Gl. (2.2) für zunehmende Temperaturen. Mit zunehmendem Innendurchmesser verschiebt sich der maximale Streuquerschnitt zu größeren Frequenzen, sein maximaler Wert nimmt zu und seine spektrale Bandbreite nimmt ab. Analog dazu verhält sich die Planck-Kurve für zunehmende Temperaturen, wenn sich nach dem Wienschen Gesetz Gl. (2.3) das Maximum der Strahlungsenergiedichte zu größeren Frequenzen verschiebt, sich der Maximalwert der Strahlungsenergiedichte erhöht und die Energiedichte eine engere Verteilung um das Maximum zeigt. Durch Variation des Innendurchmessers kann also eine Anpassung an die Einsatztemperatur erfolgen. Im Falle konventioneller Fasern gelingt diese „Justierung“ nur durch Variation des Außendurchmessers. Dies führt bei erhöhten Temperaturen, d. h. für kleinere Wellenlängen des Planck-Maximums zu sehr dünn ausgeführten Fasern mit einer Vielzahl von praktischen Nachteilen. Für Hohlfasern jedoch können die Maxima von Planck-Kurve und Streuquerschnitt zusätzlich durch Variation des Innendurchmessers aufeinander abgestimmt und dabei größere Außendurchmesser beibehalten werden.

4.2 Methodik der erweiterten Vergleichsstudie

In dem einfachen Beispiel des vorherigen Abschnitts wurden lediglich die Absolutgrößen der Streuquerschnitte gegenübergestellt und darüber hinaus nur der unidirektionale senkrechte Einfall einer Lichtwelle auf eine einzelne Faser berücksichtigt. Für tiefer gehende Untersuchungen sollen nun neben den Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte Gl. (2.60) und Gl. (2.61), die in den Abschnitten 2.5.1 bis 2.5.4 hergeleiteten Zusammenhänge genutzt werden. Vergleichsrechnungen erfolgen dabei grundsätzlich unter der Annahme identischer Außendurchmesser $r_1^H = r_1^S$ sowie einem konstanten Feststoffvolumenanteil $f_V^H = f_V^S$. Wie bereits im Eingangsbeispiel gezeigt, muss berücksichtigt werden, dass die Anzahl der Hohlfasern aufgrund ihrer geringeren Masse bzw. Dichte größer ist als die Zahl an konventionellen Fasern. Deshalb ist es sinnvoll ein Volumenverhältnis für einzelne Hohl- bzw. konventionelle Fasern zu definieren:

$$V^{\text{rel}} = \frac{V^S}{V^H} = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{1}{1 - \gamma_{\text{dia}}^2}, \quad (4.1)$$

mit γ_{dia} als Bezeichnung für das Durchmesser Verhältnis r_2/r_1 . Da das Verhältnis aus der Anzahl der Fasern in einer Hohlfaseroisolation und einer Isolation aus konventionellen Fasern gerade dem Volumenverhältnis V^{rel} aus Gl. (4.1) entspricht, werden die Verhältnisgrößen der Lichtstreuung X^{rel} der beiden unterschiedlichen thermischen Isolationen wie folgt definiert:

$$X^{\text{rel}} = V^{\text{rel}} \frac{X^H}{X^S}. \quad (4.2)$$

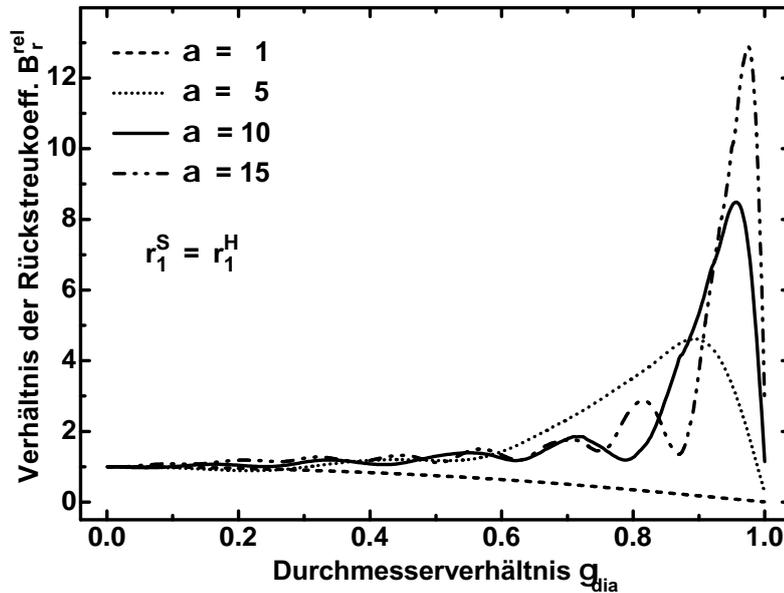


Abbildung 4.2: Das Verhältnis der Rückstreuoeffizienten B_r^{rel} als Funktion des Durchmesserungsverhältnisses γ_{dia} für verschiedene Größenparameter α für $m = 1.75$ und der Bedingung $f_V = \text{const.}$

Dabei steht X entweder stellvertretend für die Wirkungsquerschnitte der Rückstreuung nach Gl. (2.72) bzw. Gl. (2.74), den durch Gl. (2.60) beschriebenen Extinktionsquerschnitt C_{ext}^λ oder den Streuquerschnitt C_{sca}^λ nach Gl. (2.61).

4.3 Diskussion und Ergebnisse

Im ersten Abschnitt erfolgt eine allgemeine Bewertung der reinen Rückstreuungseigenschaften für einen spektral konstanten und realen Brechungsindex. Im Folgeabschnitt bezieht sich die Vergleichsstudie auf den konkreten Fall von Al_2O_3 als Fasermaterial. Die Gegenüberstellung erfolgt hier im Temperaturbereich zwischen 1000°C und 2000°C mit Literaturwerten aus Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982 für die entsprechenden temperaturabhängigen komplexwertigen Brechungsindizes. Die Annahme voneinander unabhängig streuender Fasern wird im darauf folgenden Teilabschnitt aufgehoben und die Untersuchung erweitert sich um den Einfluss abhängiger Streuphänomene an einem Zylinder Ensemble aus parallelen Fasern. Schließlich wird der Gesamtwärmetransport durch Berücksichtigung des zusätzlichen Beitrags der Festkörperwärmeleitfähigkeit für Fasern aus Al_2O_3 behandelt. Dabei werden die Gesamtwärmeleitfähigkeiten beider Isolationsarten als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_V für unterschiedliche Einsatztemperaturen verglichen.

4.3.1 Vergleich der Wirkungsquerschnitte der Rückstreuung

Anders als in Abschnitt 4.1 werden nun die strahlungsdämmenden Eigenschaften von Hohlfasern und konventionellen Fasern auf Basis der Wirkungsquerschnitte

der Rückstreuung bewertet. Es ist naheliegend das durch Gl. (2.72) bzw. Gl. (2.74) und Gl. (4.2) definierte Verhältnis der Rückstreuung B^{rel} als Vergleichsgröße zu wählen. B^{rel} ist unter den genannten Voraussetzungen vollständig durch den Größenparameter α und das Durchmesser Verhältnis γ_{dia} festgelegt. Abbildung 4.2 zeigt den relativen Wirkungsquerschnitt der Rückstreuung B_r^{rel} in Abhängigkeit vom Durchmesser Verhältnis γ_{dia} für jeweils verschiedene Größenparameter α . Der konstante Brechungsindex entspricht mit einem Wert von 1.75 näherungsweise dem von Aluminiumoxid. Die Faserorientierung wird als räumlich isotrop angenommen. Die Kurven für B_r^{rel} können dann wie folgt interpretiert werden: Der Größenparameter α bestimmt das Verhältnis von Außendurchmesser zur Wellenlänge der einfallenden Strahlung (z. B. $\lambda_{\text{max}}^{\text{P}}$); ein steigender Wert für γ_{dia} bedingt eine Zunahme des Innendurchmessers der Hohlzylinder. Durch Gl. (4.2) ist klar, dass für Werte B_r^{rel} größer 1, Hohlfasern das größere Rückstreuvermögen aufweisen und demzufolge als Grundbestandteile einer Wärmeisolation im Vorteil sind. Für niedrige Werte des Größenparameters α , d. h. kleine Durchmesser und/oder große Wellenlängen zeigen Hohlfasern eine geringere Rückstreuung als konventionelle Fasern. Man vergleiche hierzu die gestrichelte Kurve B_r^{rel} für $\alpha = 1$ in Abb. 4.2. Unabhängig von γ_{dia} zeigt der Rückstreuparameter Werte kleiner oder gleich eins. Dagegen zeigen die Kurven für erhöhte Werte von α ein eindeutiges globales Maximum des relativen Wirkungsquerschnittes B_r^{rel} , wobei diese Maxima von B_r^{rel} für steigende α in ihrem Wert wiederum zunehmen. Für eine Optimierung in der Anwendung bedeutet dies, dass bei bekannter Einsatztemperatur mittels des Wienschen Verschiebungsgesetzes Gl. (2.3) die Wellenlänge $\lambda_{\text{max}}^{\text{P}}$ der maximalen Strahlungsenergiedichte berechnet wird. Den Außenradius der Faser wird man folgerichtig so auswählen, dass das Rückstreuvermögen maximiert wird. Wie bereits erwähnt, würde dies im Hochtemperaturbereich bei Verwendung konventioneller Fasern zu sehr kleinen Durchmessern führen. In der technischen Anwendung kann dies jedoch mit erheblichen Nachteilen verbunden sein. Dies betrifft nicht nur Aspekte der Herstellung, sondern auch Kriterien für den Umgang mit gesundheitsgefährdenden Substanzen. Nach Harrison u. a., 2015 und DIN, 1998 sind Faserfragmente mit einem Durchmesser kleiner $3 \mu\text{m}$ lungengängig und werden als potentiell krebserregend betrachtet. Eine konventionelle Faser hinsichtlich ihres Rückstreuvermögens auch bei hohen Temperaturen optimal auszulegen, ist daher im Unterschied zu Hohlfasern problematisch.

Andererseits zeigt Abb. 4.2, dass die Position der Maxima des relativen Rückstreckoeffizienten für große α , bei Werten für γ_{dia} nahe einem Wert von eins liegen und folglich geringe Zylinderwandstärken implizieren. Eine Optimierung der Hohlfasergeometrie bedeutet demnach einen Kompromiss zwischen optimaler thermischer Isolation, ausreichender mechanischer Stabilität und technischer Realisierbarkeit. Recherchen zum letztgenannten Aspekt der Darstellbarkeit ergaben, dass keramische Hohlfasern mit dünnen Wandstärken kommerziell nicht vertrieben werden. Die Patentschrift Rennebeck, 2001 beansprucht jedoch ein Herstellungsverfahren für Hohlfasern mit geringen Wandstärken bis zu $0.01 \mu\text{m}$ und Außendurchmessern zwischen $0.5 \mu\text{m}$ und $35 \mu\text{m}$. Im Speziellen beschreibt Rennebeck, 2001 die Herstellung von Hohlfasern aus Aluminiumoxid mit $6 \mu\text{m}$ Außendurchmesser und $4.2 \mu\text{m}$ Innendurchmesser ($\gamma_{\text{dia}} = 0.7$). Die Frage hinsichtlich der mechanischen Stabilität von dünnen keramischen Hohlzylindern als Funktion des Innendurchmessers bzw. der Wandstärke ist außerordentlich komplex. Typischerweise ist die Streuung der Messwerte für die kritische Druck- oder Zugspannung beim Faserbruch aufgrund der geringen Duktilität keramischer Werkstoffe sehr groß. Die kritischen mechanischen Parameter sind daher statistische

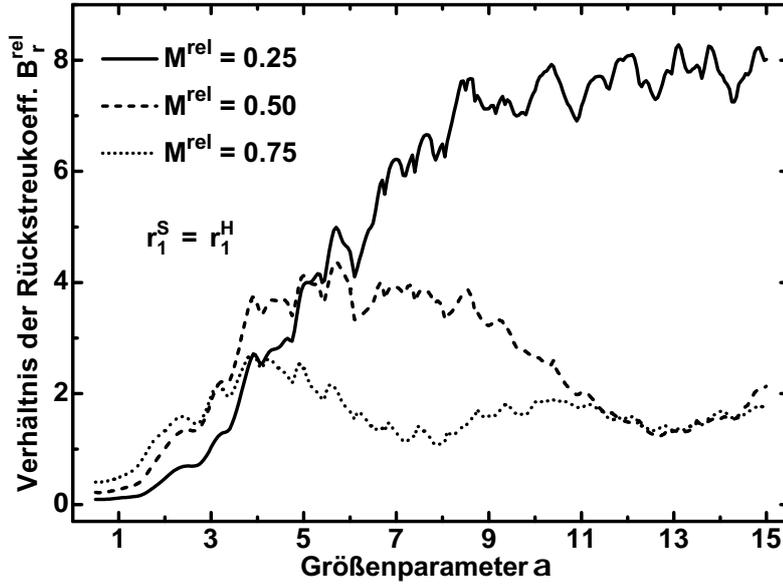


Abbildung 4.3: Das Verhältnis der Rückstreuoeffizienten B_r^{rel} als Funktion des Größenparameters α für verschiedene relative Biegesteifigkeiten M^{rel} wobei $m = 1.75$ und $f_V = \text{const.}$

Größen und unterliegen der sogenannten Weibull-Statistik (Zhu, Blumenthal und Zhou, 1995). Die Statistik macht dabei eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins eines kritischen Defekts in der keramischen Struktur, welcher dann die Nennbelastung definiert. Für eine Hohlfaser wäre demnach, aufgrund ihres niedrigeren Eigenvolumens die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines kritischen Volumendefekts geringer als bei der konventionellen Faser. Andererseits gilt aber auch die Aussage, dass die Oberfläche der Hohlfaser gegenüber der einer konventionellen Faser nahezu bis zum zweifachen Wert erhöht sein kann und damit auch die Wahrscheinlichkeit der Existenz eines kritischen Oberflächendefekts bei der Hohlfaser entsprechend höher ausfällt. Ein einfacher, in dieser Abhandlung präsentabler Zusammenhang zwischen der Existenz von Rissen oder Gefügedefekten und kritischer Bruchspannung konnte nicht recherchiert werden. Um dennoch ein Kriterium für ein vom mechanischen Standpunkt aus betrachtetes, sinnvolles Durchmesser Verhältnis zu finden, wird von einer statistischen Problembehandlung abgesehen und stattdessen die Biegesteifigkeit M als Vergleichsparameter herangezogen. Nach Landau und Lifschitz, 1991 ist die Biegesteifigkeit eines Zylinders (konventionelle Faser) oder eines Rohres (Hohlfaser) proportional zu seinem Trägheitsmoment. Für identische Elastizitätsmoduli und gleiche Längen l_{fib} findet man für das Verhältnis der Biegesteifigkeiten M^{rel} der beiden Fasertypen durch einfache Rechnung den Ausdruck:

$$M^{\text{rel}} = 1 - \gamma_{\text{dia}}^4. \quad (4.3)$$

Die weitere Vorgehensweise in der Vergleichsstudie impliziert die folgenden Schritte: Die Untergrenze für die relative Biegesteifigkeit wird festgelegt; ebenso wird die Anwendungstemperatur und damit $\lambda_{\text{max}}^{\text{P}}$ definiert; damit ist nach Gl. (4.3) auch

der Wert für das Durchmesser Verhältnis eindeutig bestimmt; nun kann der relative Rückstreu Koeffizient als Funktion des Größenparameters $\alpha = 2\pi r_1 / \lambda_{\max}^P$ berechnet und der optimale Außenradius r_1 anhand der Position des Maximalwerts des relativen Rückstreu Koeffizienten ermittelt werden. Ergebnisse sind in Abb. 4.3 für drei unterschiedliche Werte des Parameters M^{rel} aufgeführt. Zur Berechnung wurde wiederum ein konstanter Brechungsindex von 1.75 gewählt sowie eine räumlich isotrope Faserverteilung vorausgesetzt. Zudem sei explizit darauf hingewiesen, dass bei der Bildung von $M^{\text{rel}} = M^{\text{H}}/M^{\text{S}}$ - anders als bei den optischen Kenngrößen Gl. (4.2) - das Massenverhältnis ρ_m unberücksichtigt bleibt. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, dass die Biegesteifigkeit durchaus als Größe des Faserwerkstoffs selbst begriffen werden kann und im Falle untereinander verbundener Fasern die Gesamtbiegesteifigkeit eines Fasernetzwerkes letztendlich wiederum von der Anzahl der Fasern abhängig ist. Setzt man voraus, dass die Zahl der Verbindungsstellen pro Faser konstant ist, so besitzen Hohlfasernetzwerke aufgrund der erhöhten Anzahl an Fasern auch eine höhere Anzahl an Faser-Faser Bindungen und damit höhere mechanische Festigkeits- bzw. Steifigkeitswerte. Die Berücksichtigung von Faser-Faser-Bindungen setzt Kenntnisse über deren Art und Ausprägung voraus. Recherchen zufolge existieren aber keine allgemeingültigen Zusammenhänge oder Modelle, die im Rahmen dieser Abhandlung implementiert werden könnten. Am sinnvollsten erschien demnach die gewählte, auf eine einzelne Faser bezogene Definition von M^{rel} , mit der Konsequenz, dass die Vergleichsstudie Hohlfaserisolationen bei vorliegenden Faser-Faser Bindungen tendenziell benachteiligt. Die numerischen Resultate für das Verhältnis der Rückstreu Koeffizienten für unterschiedliche Werte von M^{rel} sind in Abb. 4.3 dargestellt. Aufgrund der Definition von M^{rel} gilt auch an dieser Stelle, dass für Werte von B_r^{rel} kleiner eins, konventionelle Fasern höhere Werte für die Rückstreuung zeigen. Dies trifft insbesondere für kleine Werte von α zu. Im Falle mittelgroßer α erkennt man allerdings einen deutlichen Anstieg des Rückstreuvermögens für hohl ausgeführte Fasern. Diese Tendenz wird für abnehmende Werte von M^{rel} weiter verstärkt. In der vorliegenden Parameterstudie aus Abb. 4.3 nehmen die relativen Rückstreu Koeffizienten B_r^{rel} für $\alpha > 10$ und $M^{\text{rel}} = 0.25$ ihre größten Werte an. Der Vorteil, welcher sich aus der Verwendung von Hohlfasern ergibt, scheint also vorwiegend durch deren Herstellbarkeit und die benötigte mechanische Stabilität limitiert zu werden. An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass die sogenannte Kriechbeständigkeit ein wichtiges Kriterium beim Einsatz lasttragender keramischer Bauteile über längere Betriebszeiten bei hohen Temperaturen darstellt (Kuntz und Grathwohl, 2004). Die erarbeiteten Zusammenhänge aus Abb. 4.3 gelten aufgrund der elastisch-viskoelastischen Analogie aber auch für den Fall linear-viskoelastischer Materialien unter einachsiger Beanspruchung (Gross und Seelig, 2001 und Ziegler, 1992).

4.3.2 Vergleich der Strahlungswärmestromdichten

In diesem Abschnitt bildet das Zwei-Fluss Modell Gl. (2.14) mit den Rückstreu Parametern β_r^λ für räumlich isotrop orientierte Fasern und β_p^λ für parallel orientierte Fasern in Verbindung mit den entsprechenden Wirkungsquerschnitten $\bar{\sigma}_{\text{sca}}^\lambda$ und $\bar{\sigma}_{\text{abs}}^\lambda$ die Grundlage der numerischen Berechnungen. Die bislang vorgestellten numerischen Ergebnisse entstanden unter der Annahme eines von der Wellenlänge unabhängigen realen Brechungsindex $m = 1.75$. Diese Beschränkung wird in diesem Abschnitt aufgehoben - stattdessen werden die von Temperatur- und Wellenlänge abhängigen optischen Kenngrößen für Al_2O_3 aus Lingart, Petrov und

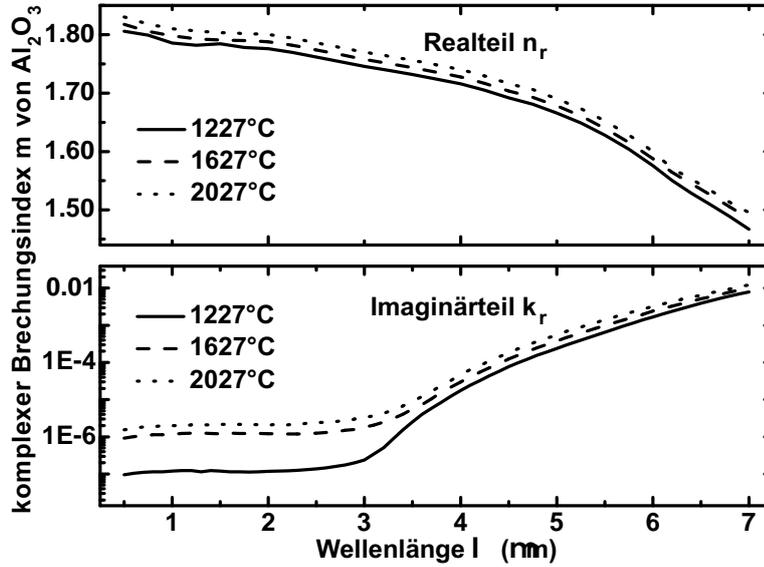


Abbildung 4.4: Realteil n_r und Imaginärteil k_r des spektralen komplexen Brechungsindex m von Al_2O_3 für verschiedene Temperaturen (Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982).

Tikhonova, 1982 verwendet. Aus den angegebenen Absorptionskoeffizienten σ_{abs} wird vermöge des Zusammenhangs $k_r = \sigma_{\text{abs}} \lambda / (4\pi)$ der Imaginärteil des komplexen Brechungsindex k_r abgeleitet. An dieser Stelle soll darauf verwiesen werden, dass die Angaben aus der russischsprachigen Publikation von Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982 auch in dem englischsprachigen Fachbuch von Dobrovinskaya, Lytvynov und Pishchik, 2009 zur Verfügung gestellt werden. Ein Auszug der Daten ist in Abb. 4.4 dargestellt. Aufgrund der Tatsache, dass die spektrale Bandbreite nach oben auf $7\mu\text{m}$ beschränkt ist, werden nur Temperaturen ab 800°C berücksichtigt. Dadurch können in den folgenden Berechnungen mindestens 85% der durch das Stefan-Boltzmann Gesetz Gl. (2.4) gegebenen Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers im Transportmodell Gl. (2.14) berücksichtigt werden. Für das Durchmesser Verhältnis γ_{dia} der Hohlfaser wird ein Wert von 0.85 festgelegt, woraus sich eine ungefähre Halbierung der Biegesteifigkeit im Vergleich zur konventionellen Faser ergibt. Es sei an dieser Stelle an Rennebeck, 2001 und den bereits technisch realisierten Wert von $\gamma_{\text{dia}} = 0.7$ erinnert. Ein γ_{dia} -Wert von 0.85 beruht somit durchaus auf einer realitätsnahen Annahme. Als Vergleichsgröße wird an dieser Stelle die relative Strahlungswärmestromdichte eingeführt:

$$q_{\text{rad}}^{\text{rel}} = q_{\text{rad}}^{\text{H}} / q_{\text{rad}}^{\text{S}}, \quad (4.4)$$

wobei die temperaturabhängigen Strahlungswärmestromdichten $q_{\text{rad}}^{\text{H}}$ und $q_{\text{rad}}^{\text{S}}$ der beiden Fasertypen nach Gl. (2.14) berechnet werden. Die spektralen Integrationsgrenzen in Gl. (2.14) werden dabei nach folgendem Schema bestimmt: Die untere Integrationsgrenze λ_{inf} bei einer bestimmten Temperatur wird als diejenige Wellenlänge definiert, bei der die integrierte spektrale Intensität eines schwarzen Körpers Gl. (2.2) 1% seiner Gesamtstrahlung Gl. (2.4) ergibt; die obere Integrationsgrenze λ_{sup} bei dieser Temperatur entspricht derjenigen Wellenlänge, bei der

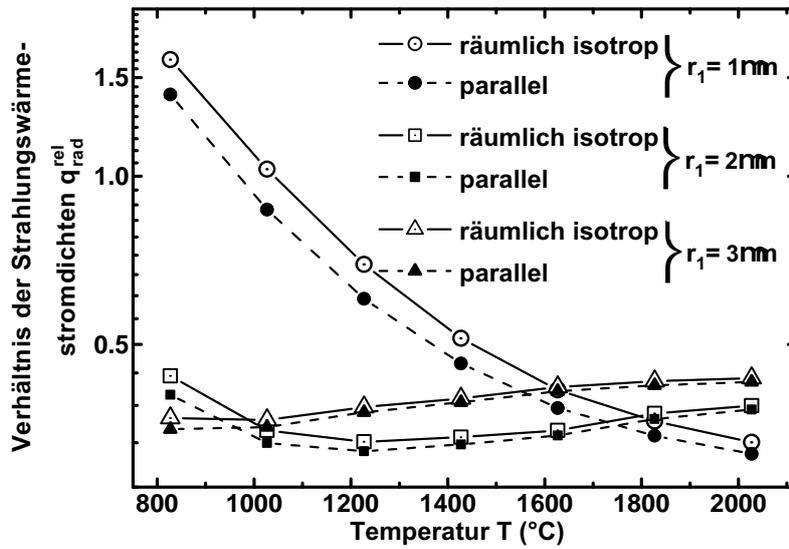


Abbildung 4.5: Das Verhältnis der Strahlungswärmestromdichten $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ von thermischen Isolationen aus Hohlfasern ($\gamma_{\text{dia}} = 0.85$) und konventionellen Fasern als Funktion der Temperatur für unterschiedliche Faseraußendurchmesser r_1 unter der Bedingung $f_V = \text{const.}$

die integrierte spektrale Intensität eines schwarzen Körpers 85 % seiner Gesamtstrahlung beträgt; die Integrationsgrenzen sind demnach selbst eine Funktion der Temperatur, derart, dass stets ein identischer prozentualer Anteil der Gesamtstrahlung berücksichtigt wird. Für die spektrale Integration in Gl. (2.14) wird das Wellenlängenintervall zwischen λ_{inf} und λ_{sup} in 50 äquidistante Abschnitte unterteilt (Brendel, Seifert und Raether, 2016). Das Resultat für die relativen Wärmestromdichten als Funktion der Temperatur für verschiedene Außenradien r_1 wird in Abb. 4.5 gezeigt. Die Außenradien nehmen jeweils Werte von $1\mu\text{m}$, $2\mu\text{m}$ und $3\mu\text{m}$ an. Für Fasern mit $1\mu\text{m}$ nimmt die relative Wärmestromdichte monoton mit steigender Temperatur ab. Im Temperaturbereich zwischen 800°C und 1000°C zeigt die relative Wärmestromdichte Werte größer eins, mit der Folge, dass konventionelle Fasern den Durchgang von Wärmestrahlung an dieser Stelle stärker behindern. Für Temperaturen oberhalb von 1000°C kehrt sich der Sachverhalt um und bei einer Temperatur von 2000°C zeigen Hohlfasern-Isolationen einen etwa dreifach verringerten Wert für die Wärmestromdichte. Für die beiden Außenradien $2\mu\text{m}$ und $3\mu\text{m}$ führen die Hohlfasern-Isolationen unabhängig von der betrachteten Temperatur stets auf geringere Wärmestromdichten. Auffällig im Zusammenhang mit einem Außenradius von $2\mu\text{m}$ ist die Ausbildung eines Minimums in der relativen Wärmestromdichte $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ bei 1200°C . Dagegen zeigen die Berechnungen für den Außenradius von $3\mu\text{m}$ kaum temperaturabhängige Variationen von $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ - die Wärmestromdichte in der Hohlfasern-Isolierung zeigt im gesamten Temperaturbereich zwischen 800°C und 2000°C einen etwa zweieinhalbfach geringeren Wert im Vergleich zur konventionellen Faser. Die außerdem aus der Betrachtung von Abb. 4.5 erwachsende Erkenntnis, dass parallel angeordnete Fasern im Vergleich zur räumlich isotropen Faserorientierung eine geringere Strahlungswärmestromdichte zulassen, ist nicht neu, sondern wird bereits in der

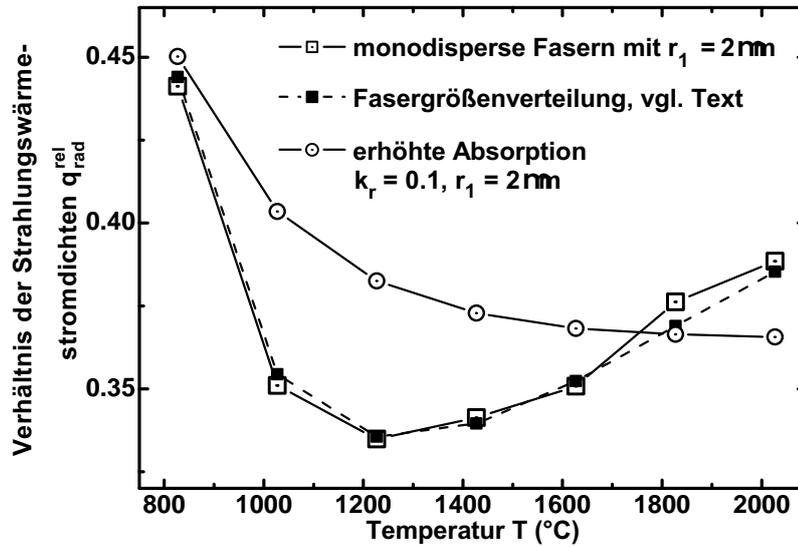


Abbildung 4.6: Der Einfluss von Polydispersität und erhöhter Absorption auf das Verhältnis der Strahlungswärmestromdichten $q_{\text{rad}}^{\text{rel}}$ von thermischen Isolationen aus Hohlfasern ($\gamma_{\text{dia}} = 0.85$) und konventionellen Fasern als Funktion der Temperatur. Beide Fasergattungen weisen einen mittleren Außendurchmesser r_1 von $2 \mu\text{m}$ auf und sind räumlich isotrop orientiert. Die Halbwertsbreite (FWHM) der Verteilung um den Mittelwert von r_1 beträgt $0.18 \mu\text{m}$ für polydisperse Fasern.

theoretischen Studie von Lee, 1988 postuliert. Der Umstand dagegen, dass ein Wechsel von der räumlich isotropen zur parallelen Anordnung die Isolationswirkung der Hohlfasern stärker begünstigt als die der konventionellen Fasern, geht über den bisherigen Wissensstand hinaus. Allerdings ist letztgenannter Effekt eher von geringer Ausprägung. Bisher wurden nur monodisperse Faserisolationen diskutiert. In der Realität zeigen faserhaltige Dämmstoffe jedoch eine Verteilung an Faserdurchmessern. Darüber hinaus bewirken darstellungs- bzw. prozessbedingte Materialverunreinigungen in der Regel einen Anstieg der Absorption in bestimmten Wellenlängenbereichen (Lee und Cunningham, 2000). Die Wirkung beider Phänomene, Polydispersität der Fasern und verstärkte Absorption sollen deshalb im nächsten Abschnitt erörtert werden.

Für die Abbildung einer polydispersen Faserisolation wird eine Gauß-Verteilung der Faserdurchmesser angenommen. Der mittlere Faserdurchmesser soll dabei einen Wert von $2 \mu\text{m}$ annehmen und die Halbwertsbreite (FWHM) der Verteilung um diesen Mittelwert beträgt $0.18 \mu\text{m}$. Für die Untersuchung der Auswirkung erhöhter Absorption wird anstelle der in Abb. 4.4 dargestellten Werte ein über alle Wellenlängen konstant gehaltener Imaginärteil des Brechungsindex von $k_r = 0.1$ gesetzt. Ferner wird das bisherige Durchmesser Verhältnis γ_{dia} von 0.85 ebenso beibehalten, wie die Annahme eines für Hohlfasern und konventionelle Fasern identischen und konstanten Feststoffvolumenanteils. Die Untersuchungen bleiben dabei auf räumlich isotrop verteilte Fasern beschränkt.

Die unter diesen Voraussetzungen berechneten relativen Wärmestromdichten werden in Abb. 4.6 gezeigt. Offensichtlich führt die Verteilung an Faserdurchmessern

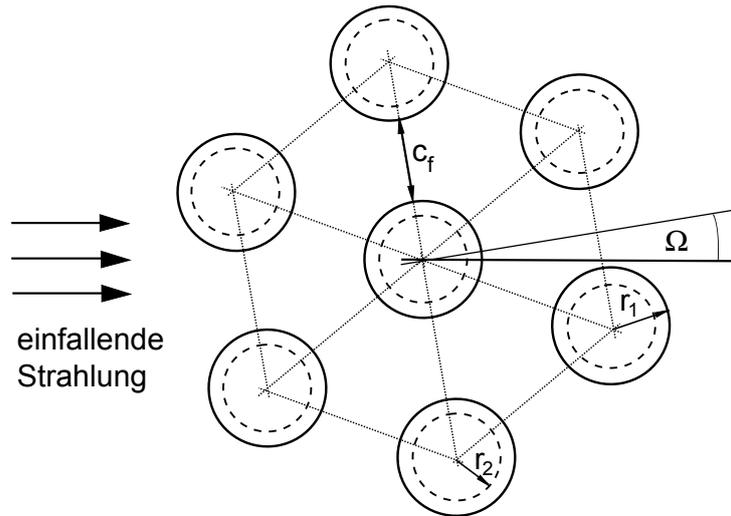


Abbildung 4.7: Die Streuung einer senkrecht einfallenden ebenen Welle an einem Ensemble aus sieben äquidistanten Hohlfasern bzw. konventionellen Fasern. Die Orientierung der Fasern relativ zur Einfallrichtung wird durch den Azimutwinkel Ω beschrieben.

um den Mittelwert $2\mu\text{m}$ zu nahezu identischen Resultaten wie im Falle der monodispersen Fasern mit $2\mu\text{m}$ Außendurchmesser. Im Unterschied dazu mindert eine erhöhte Absorption die vorteilhafte Isolationswirkung der Hohlfasern. Dennoch darf konstatiert werden, dass die Strahlungswärmestromdichte in Hohlfasernisolationen nach wie vor deutlich unter derjenigen in konventionellen Faserisolationen liegt.

4.3.3 Der Einfluss unterschiedlicher mittlerer Faserabstände

Mit steigendem Feststoffvolumenanteil nehmen die Abstände zwischen den Fasern ab (Abb. 4.7). Bei konstantem Feststoffvolumenanteil werden die Abstände in einem Hohlfasergebilde im Mittel geringer ausfallen, als in einem aus konventionellen Fasern zusammengesetzten Medium. Um dieses Phänomen in der Vergleichsstudie zu berücksichtigen, muss die Wechselwirkung mit benachbarten Fasern bei der Berechnung der Streugrößen einbezogen werden. Hierfür wird mittels der theoretischen Grundlagen aus Abschnitt 2.5.4 für abhängige Streuung am parallelen Zylinder Ensemble ein Näherungsansatz gewählt, der sich auf die Einbeziehung der unmittelbaren Nachbarn einer Faser beschränkt (Brendel, Seifert und Raether, 2016). Der geometrische Sachverhalt wird in Abb. 4.7 vorgestellt. Die Anordnung zeigt sieben äquidistante Zylinder im Abstand c_f , welche an den Eckpunkten und in der Mitte eines Sechsecks angeordnet sind. Durch Variation von c_f wird eine Verdichtung oder Verdünnung der Faserkonzentration bewirkt. Die Konfiguration besitzt mit der azimuthalen Ausrichtung des Zylinder Ensemble relativ zur einfallenden Lichtwelle einen zusätzlichen Freiheitsgrad Ω und zeigt Rotationssymmetrie sechster Ordnung; die Wirkungsquerschnitte von Streuung und Extinktion sind also abhängig vom azimuthalen Einfallswinkel Ω . Um diesen Umstand aufzuheben und dem Zylinder Ensemble für gegebenes c_f einen eindeutigen Wirkungsquerschnitt zuordnen zu können, erfolgt eine Mittelwertbildung der Wirkungsquerschnitte für die Einfallswinkel Ω zwischen 0 und 30 Grad. Dabei

wird lediglich der senkrechte Einfall ($\phi = 0^\circ$) berücksichtigt. Die Division dieser Mittelwerte durch die Zylinderanzahl ergibt schließlich die entsprechenden Größen pro Zylinder $\overline{C}_{\text{ext}}^{\text{dep}}$ und $\overline{C}_{\text{sca}}^{\text{dep}}$, wobei der Überstrich zur Hervorhebung der Mittelwertbildung dient. Diese mittleren Wirkungsquerschnitte pro Zylinder werden dann als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_V berechnet, indem der Abstand c_f variiert wird. Anschließend werden die Wirkungsquerschnitte der Streuung und der Extinktion für unabhängige Streuung mit jenen der abhängigen Streuung (pro Zylinder) ins Verhältnis gesetzt. Die gewonnenen Relationen dienen dann zur Skalierung der im Vorfeld unter der Annahme unabhängiger Streuung berechneten Streu- und Extinktionskoeffizienten für die räumlich isotrope bzw. parallele Faseranordnung (Brendel, Seifert und Raether, 2016):

$$\overline{\sigma}_{\text{ext}}(c_f) = \frac{\overline{C}_{\text{ext}}^{\text{dep}}(\phi = 0)}{\overline{C}_{\text{ext}}^{\text{ind}}(\phi = 0)} \overline{\sigma}_{\text{ext}}^{\text{ind}}. \quad (4.5)$$

Der Ausdruck für $\overline{\sigma}_{\text{sca}}(c_f)$ ist äquivalent definiert. Der Index „ind“ deutet auf eine Größe, welche unter der Annahme unabhängiger Streuung berechnet wurde.

Den Ausgangspunkt für die spezielle Parametrisierung bildet ein dispersionsfreier und nicht absorbierender Faserwerkstoff mit $m = 1.75$. Für die Außendurchmesser soll weiterhin gelten $r_1 = 2\mu\text{m}$ und der Innendurchmesser der Hohlfasern wird erneut durch $\gamma_{\text{dia}} = 0.85$ festgelegt. Der betrachtete Wellenlängenbereich wird auf das Intervall zwischen $0.5\mu\text{m}$ und $5.3\mu\text{m}$ beschränkt und die berücksichtigten Feststoffvolumenanteile f_V liegen zwischen null (unabhängige Streuung) und 0.15. Für den Zusammenhang zwischen f_V und c_f findet man den Ausdruck:

$$f_V = \frac{3\pi(r_1^2 - r_2^2)}{A_{\text{hex}}} = \frac{2\pi r_1^2(1 - \gamma_{\text{dia}}^2)}{\sqrt{3} (c_f + 2r_1)^2}. \quad (4.6)$$

Um die Interpretation der Resultate zu erleichtern, wird aufgrund der ausgeprägten spektralen Modulation der abhängigen Wirkungsquerschnitte zusätzlich eine spektrale Mittelung vorgenommen. Diese erfolgt sowohl für den Gesamtwellenlängenbereich zwischen $0.5\mu\text{m}$ und $5.3\mu\text{m}$, als auch über drei spektrale Bänder: Einem kurzwelligen Spektralband, einem Band der mittleren Wellenlängen und einem langwelligen Spektralband. Die exakten Zahlenwerte für die Integrationsgrenzen λ_{inf} und λ_{sup} der Sub-Intervalle sind in Tab. 4.1 zusammengefasst. Durch Bildung des relativen Extinktionsquerschnitts anhand von Gl. (4.2) erhält man dann die Vergleichsgröße $\langle \overline{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle$, wobei der hochgestellte Index „dep“ für abhängige Streuung formal unterdrückt wird. Der obere Querstrich indiziert die Mittelung über den azimuthalen Orientierungswinkel Ω und die Klammerbildung kennzeichnet die spektrale Mittelwertbildung. Abbildung 4.8 zeigt die nach der beschriebenen Vorgehensweise berechneten abhängigen Extinktionsquerschnitte. Die entsprechenden Kurven beginnen beim virtuellen Grenzfall der Einzelstreuung für hoch verdünnte Medien d. h. $c_f \rightarrow \infty$ bzw. $f_V \rightarrow 0$ und enden bei Feststoffvolumenanteilen von $f_V = 0.15$. Bei der Betrachtung der bandgemittelten Werte zeigt sich, dass die zugehörigen relativen Extinktionsquerschnitte eine untereinander konträre Abhängigkeit vom Feststoffvolumenanteil zeigen. Der über das kurzwellige Band gemittelte relative Extinktionsquerschnitt $\langle \overline{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{low}}$ fällt, der über das langwellige Band gemittelte Wirkungsquerschnitt $\langle \overline{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{high}}$ wächst mit zunehmendem Feststoffvolumenanteil. Im mittleren Wellenlängenband bleibt der relative Wirkungsquerschnitt dagegen nahezu unbeeinflusst von f_V . Auch für den gemittelten relativen Gesamt-Wirkungsquerschnitt $\langle \overline{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{total}}$ erkennt man einen

Symbol	$\lambda_{\text{inf}} (\mu\text{m})$	$\lambda_{\text{sup}} (\mu\text{m})$	$\Delta\lambda (\mu\text{m})$
$\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{low}}$	0.5	2.1	0.08
$\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{med}}$	2.1	3.7	0.08
$\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle_{\text{high}}$	3.7	5.3	0.08

Tabelle 4.1: Tabelle zur Berechnung des bandgemittelten Extinktionsverhältnisses $\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle$. Die spektrale Mittelung wird über ein kurzwelliges Band (Index „low“), ein Band mittlerer Wellenlängen (Index „med“) und ein langwelliges Band (Index „high“) durchgeführt.

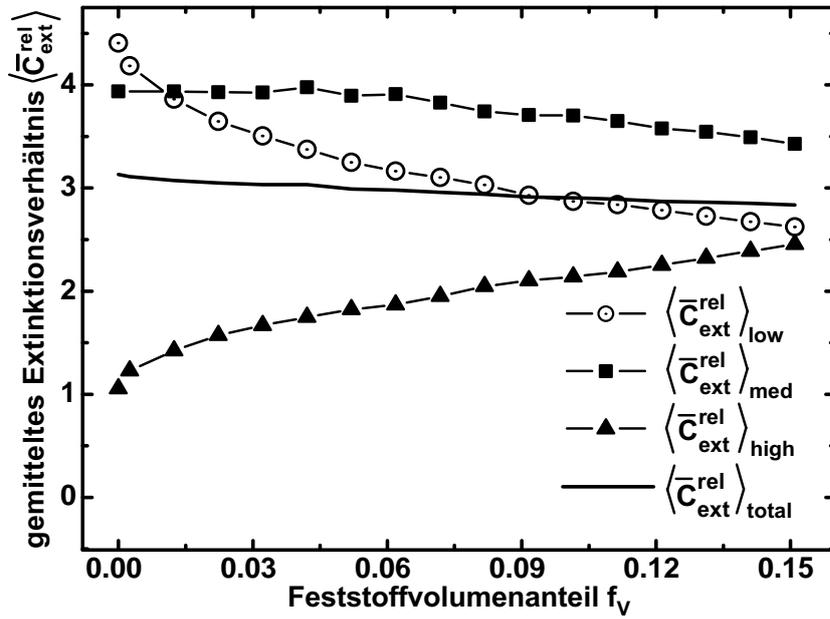


Abbildung 4.8: Bandgemitteltes Extinktionsverhältnis $\langle \bar{C}_{\text{ext}}^{\text{rel}} \rangle$ als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_v . Die spektrale Mittelung wird über ein kurzwelliges Band (Index „low“), ein Band mittlerer Wellenlängen (Index „med“) und ein langwelliges Spektralband (Index „high“) durchgeführt. Ferner ist die Gesamtmittelung (Index „total“) von 0.5 bis 5.5 μm dargestellt.

näherungsweise konstanten, vom Feststoffvolumenanteil also nahezu unabhängigen Verlauf. Mit einem Wert von etwa drei deutet dieser an, dass auch unter Einbeziehung abhängiger Streueffekte, Hohlfasern ihre überlegene Dämmwirkung bewahren. Der qualitativ unterschiedliche Verlauf der einzelnen bandgemittelten relativen Wirkungsquerschnitte als Funktion des Feststoffvolumenanteils weist allerdings darauf hin, dass die diagnostizierte überlegene Dämmwirkung der Hohlfasern von der Anwendungstemperatur abhängen muss. Von der Richtigkeit dieser Feststellung kann man sich überzeugen, wenn man nochmals die Strahlungsenergiedichte bei 2100°K aus Abb. 1.1 rekapituliert. Nahezu die gesamte Strahlungsenergie wird im Wellenlängenbereich des kurzwelligen und des mittleren Intervalls abgegeben. Demzufolge muss der mit der Strahlungsenergiedichte bei dieser Temperatur gewichtete relative Wirkungsquerschnitt mit zunehmendem Feststoffvolumenanteil f_V abnehmen. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass mit steigender Anwendungstemperatur und steigendem Feststoffvolumenanteil der durch den Einsatz von Hohlfasern entstehende Vorteil in der Dämmwirkung abnimmt.

4.3.4 Vergleich der Gesamtwärmeleitfähigkeiten

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Diskussion um einen weiteren praxisrelevanten Aspekt erweitert, indem der Beitrag der konduktiven Wärmeleitfähigkeit zum Gesamtwärmetransport berücksichtigt wird. Dabei wird ein Isolationskörper aus monodispersen, räumlich isotrop orientierten Fasern mit einem Außenradius von $r_1 = 2\mu\text{m}$ betrachtet, wobei im Falle der Hohlfaserisolierung der Innendurchmesser erneut durch $\gamma_{\text{dia}} = 0.85$ festgelegt wird.

Das methodische Vorgehen gliedert sich gemäß Brendel, Seifert und Raether, 2016 in die folgenden Schritte: Zunächst werden die Extinktionsquerschnitte für unabhängige und abhängige Streuung mithilfe der optischen Kenndaten aus Abb. 4.4 berechnet; anschließend wird der Rückstreukoeffizient B_r für räumlich isotrop angeordnete Fasern anhand der Gleichungen (2.65), (2.71) und (2.72) bestimmt; im nächsten Schritt wird die Summe aus dem Rückstreukoeffizienten und dem Absorptionskoeffizienten unter Verwendung der Gl. (4.5) skaliert, um eine Näherungslösung für dichtere Faseranordnungen zu erhalten. Diese skalierte Größe dient zur Berechnung des Beitrages der Wärmestrahlung zur gesamten Wärmeleitfähigkeit mithilfe des Rosseland-Modells Gl. (2.20), wobei bei der Bestimmung des effektiven Extinktionskoeffizienten Γ^λ der Anteil der Rückstreuung berücksichtigt wird:

$$\Gamma^\lambda = \bar{\sigma}_{\text{abs}}^\lambda + \beta_r^\lambda \bar{\sigma}_{\text{sca}}^\lambda. \quad (4.7)$$

Für die spektrale Integration in Gl. (2.20) wird das Wellenlängenintervall zwischen λ_{inf} und λ_{sup} wiederum in 50 äquidistante Abschnitte unterteilt. Die Bestimmung der oberen und unteren spektralen Integrationsgrenze λ_{inf} und λ_{sup} erfolgt dabei analog zu den Berechnungen der Strahlungswärmestromdichten in Abschnitt 4.3.2. Als Modell für die Festkörperwärmeleitung als Funktion des Feststoffvolumenanteils wird das Modell aus Gl. (2.22) verwendet. Zur Vereinfachung wird angenommen, die Faserisolierung sei evakuiert und demzufolge $C_r = 0$. Damit wird Gl. (2.22) zu:

$$tc_s = tc_{\text{bulk}} \frac{V_r (1 - Z)}{1 + V_r (1 - Z)}, \quad (4.8)$$

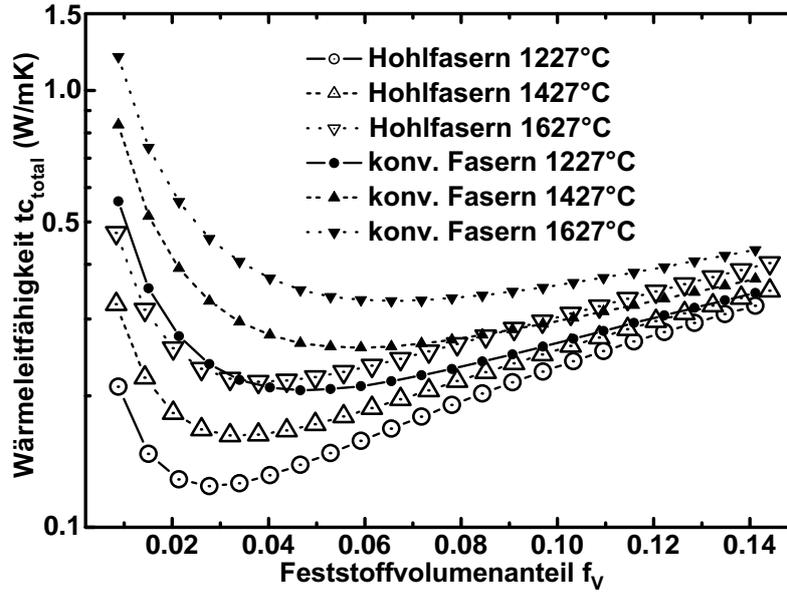


Abbildung 4.9: Gesamtwärmeleitfähigkeit $t_{c_{\text{total}}}$ einer Hohlfaserisolation und einer Isolation aus konventionellen Fasern als Funktion des Feststoffvolumenanteils f_V für unterschiedliche Temperaturen. Beide Fasergattungen weisen einen Außendurchmesser r_1 von $2\ \mu\text{m}$ auf und das Durchmesserverhältnis γ_{dia} für die Hohlfaser beträgt 0.85.

wobei für V_r in diesem Fall gilt:

$$V_r = \frac{f_V}{1 - f_V}. \quad (4.9)$$

Der Orientierungsparameter Z wird, einer räumlich isotropen Faserorientierung entsprechend, auf den Wert 0.66 gesetzt. Die notwendigen temperaturabhängigen Werte für die Wärmeleitfähigkeit von Al_2O_3 entsprechen den Angaben aus Kingery, 1955. Die Gesamtwärmeleitfähigkeit wird wie in Brendel, Seifert und Raether, 2016 durch einfache Addition der konduktiven Wärmeleitfähigkeit t_{c_s} und der Strahlungswärmeleitfähigkeit $t_{c_{\text{rad}}}$ ermittelt:

$$t_{c_{\text{total}}} = t_{c_{\text{rad}}} + t_{c_s}. \quad (4.10)$$

Diese Vereinfachung durch Vernachlässigung der Kopplungseffekte zwischen Strahlungswärmetransport und konduktivem Wärmetransport wird zum einen motivationsbezogen gerechtfertigt, da diese Studie gegenüberstellend ausgelegt ist und nicht das Ziel verfolgt, exakte quantitative Werte zu ermitteln. Zum anderen wurde in den Abschnitten 2.3 und 2.4.4 gezeigt, dass der Einfluss der Kopplungseffekte vom Absorptionsvermögen des betrachteten Mediums bestimmt wird. Den Angaben aus Abb. 1.1 zufolge, zeigt der zugrunde liegende Faserwerkstoff Aluminiumoxid aber lediglich geringe Absorption im betrachteten Wellenlängenbereich. Der zu erwartende qualitative Verlauf der Gesamtwärmeleitfähigkeit kann bereits anhand der Form der Gleichungen (2.20) und (4.8) vorhergesagt werden. Aufgrund der Tatsache, dass mit steigendem Feststoffvolumenanteil f_V die Anzahl der

Streukörper innerhalb des betrachteten Volumens zunimmt, impliziert Gl. (2.20) einen stetig abnehmenden Beitrag der Strahlungswärmeleitfähigkeit mit steigendem Feststoffvolumenanteil. Andererseits erkennt man anhand von Gl. (4.8) unmittelbar, dass der konduktive Beitrag zur Gesamtwärmeleitfähigkeit mit zunehmendem Feststoffvolumenanteil ansteigen muss. Demzufolge nimmt die Gesamtwärmeleitfähigkeit bei einem bestimmten Feststoffvolumenanteil einen Minimalwert an, wie durch die numerischen Resultate in Abb. 4.9 bestätigt wird. Obschon unterschiedlich ausgeprägt, zeigt jede Kurve in Abb. 4.9 den erwarteten Verlauf und die Minima stellen sich bezogen auf das betrachtete Intervall des Faservolumenanteils bei mittleren Werten für f_V ein. Die exakten Positionen der minimalen Gesamtwärmeleitfähigkeit sind dann letztendlich von der jeweiligen Einsatztemperatur abhängig. Bei identischen Einsatztemperaturen zeigen Hohlfasern für alle betrachteten Werte f_V grundsätzlich die geringere Gesamtwärmeleitfähigkeit. Dieser Effekt erfährt mit steigendem Faservolumenanteil eine geringere Ausprägung, da der Beitrag der konduktiven Wärmeleitung die Gesamtwärmeleitfähigkeit zunehmend dominiert. Im Bereich der Minima der Gesamtwärmeleitfähigkeit gilt jedoch die Aussage, dass eine Hohlfaserisolation, verglichen mit einer Wärmeisolation aus konventionellen Fasern, beträchtlich geringere (minimale) Gesamtwärmeleitfähigkeiten zeigt und dies bereits bei deutlich niedrigeren Feststoffvolumenanteilen f_V .

4.4 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In dieser numerischen Studie wurden die Hochtemperatur-Wärmetransporteigenschaften von Isolationskörpern bestehend aus Hohlfasern und konventionellen Fasern vergleichend gegenübergestellt. Grundlage der Abhandlung bildet die aus den Maxwellgleichungen entwickelte analytische Streutheorie am unendlichen Zylinder. Für identischen Außendurchmesser mit der Bedingung $r_1 \geq 1\mu\text{m}$ lassen Hohlfaserisolierungen, bei Einsatztemperaturen oberhalb von 1000°C , eine signifikant geringere Strahlungswärmestromdichte zu. Über eine methodisch neuartige Näherungsmethode können zudem abhängige Streueffekte, welche in dichter gepackten Streukörpern auftreten, in der Vergleichsstudie berücksichtigt werden, mit dem Ergebnis, dass Hohlfasern auch im Falle hoher Feststoffvolumenanteile ihre vorteilhaften Eigenschaften bewahren. Berücksichtigt man neben der Wärmestrahlung den konduktiven Wärmetransport, so zeigen Hohlfaserisolierungen die Minima in der Gesamtwärmeleitfähigkeit bereits bei Feststoffvolumenanteilen f_V von etwa 0.03. Die Werte dieser Minima unterbieten diejenigen konventioneller Faserisolierungen in etwa um einen Faktor von zwei. Bei erhöhtem Faseranteil schwindet der Vorteil der Hohlfasern, da die Gesamtwärmeleitfähigkeit von der konduktiven Wärmeleitung zunehmend dominiert wird.

Kapitel 5

Näherungsweise Berechnung der Extinktionseffizienz zylindrischer Streukörper

Im vorangegangenen Kapitel über den Vergleich der Streueigenschaften von Hohlfasern und konventionellen Fasern wurden zur Abbildung des Strahlungstransports die exakten analytischen Lösungen der Maxwellgleichungen für das Streuproblem einer ebenen Lichtwelle an einem unendlichen Zylinder verwendet. Im Falle der Hohlfasern wurden im Prinzip die Lösungen für einen zweischichtigen Zylinder herangezogen. Die Berechnungen sind trotz moderner Rechner (Intel Core i7-6700k) zeitaufwendig, speziell, wenn Parameterstudien an mehrschichtigen Zylindern durchgeführt werden. Wird zudem die Orientierung der Fasern relativ zur einfallenden Lichtwelle berücksichtigt, sind für die Abbildung räumlich isotrop angeordneter Zylinder die Lösungen für Einfallswinkel von 0 bis $\pi/2$ in hoher Auflösung zu berechnen. Dieses Kapitel setzt sich deshalb mit der Eignung der in Abschnitt 2.6 vorgestellten „Anomalous Diffraction Approximation“ (ADA) zur Lösung von Streuproblemen auseinander. Konkret wird die von van de Hulst, 1981 erstmals für kugel- und zylinderförmige Streuobjekte formulierte Theorie verallgemeinert und auf mehrschichtige Zylinder angewendet. Nach van de Hulst, 1981 ist die ADA-Methode nur unter der Voraussetzung $m - 1 \ll 1$ gültig. Dies bedeutet, dass nur geringe Unterschiede in den Brechungsindizes zwischen dem Streukörper und seiner Umgebung, welcher in dieser Diskussion durchgehend der Wert eins zugewiesen wird, zugelassen sind. Sharma, 1992 konnte jedoch formal zeigen, dass auch für mittlere Werte von m noch brauchbare Näherungslösungen gelingen. Historisch wurde die ADA bereits von Stevens, 1984 und Cross und Latimer, 1970 auf homogene Zylinder bei schrägem Lichteinfall angewendet. Darüber hinaus untersuchte Stevens, 1984 den Fall räumlich isotrop angeordneter homogener Zylinder. Die Ausführungen zeigen aber Unstimmigkeiten bei der Untersuchung schräg einfallender Lichtstrahlung (vgl. Anhang C). Die Anwendung der ADA auf Hohlzylinder war bereits Bestandteil einer wissenschaftlichen Abhandlung von Evans, Chen und Churchill, 1964. Wobei Evans, Chen und Churchill, 1964 die für den homogenen Zylinder formulierten Ausführungen von van de Hulst, 1981 direkt auf Hohlzylinder anwendeten - jedoch mit unbefriedigendem Ergebnis. In Brendel, Seifert und Raether, 2016 konnte gezeigt werden, dass eine aus geometrischen Betrachtungen unmittelbar folgende Modifikation der ADA auch die Beschreibung von Hohlzylindern zulässt. In Brendel, Seifert und Raether, 2017a wurde das Konzept aus Brendel, Seifert und Raether, 2017b nochmals erweitert. Über die bisherigen Arbeiten von van de Hulst, 1981, Cross und Latimer, 1970 und Stevens, 1984 hinaus, werden Streuprobleme an aus bis zu drei Schichten aufgebauten Zylindern behandelt, wobei auch der schräge Lichteinfall

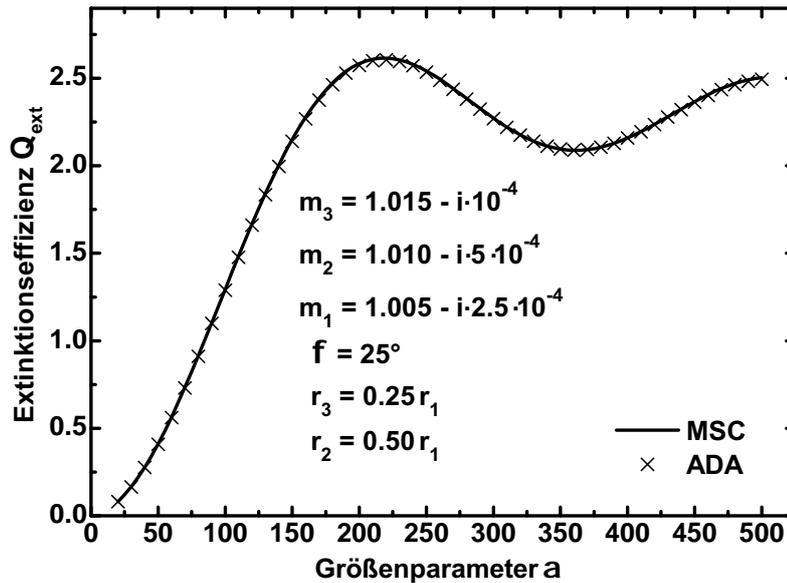


Abbildung 5.1: Die Extinktionseffizienz Q_{ext} eines dreischichtigen Zylinders als Funktion des Größenparameters a für Brechungsindizes nahe 1 unter schrägem Lichteinfall. Der Einfallswinkel beträgt $\phi = 25^\circ$.

Berücksichtigung erfährt. Schließlich wird in Brendel, Seifert und Raether, 2017a die ADA an räumlich isotrop angeordneten, mehrschichtigen Zylindern erprobt.

5.1 Diskussion der Ergebnisse

Wie in Brendel, Seifert und Raether, 2017a, werden in diesem Abschnitt die Resultate der ADA unter Anwendung von Gl. (2.91) mit den Lösungen aus Gl. (2.60) - der Maxwellischen-Streutheorie (MSC) - verglichen. Im Fall homogener kugelförmiger oder zylindrischer Streukörper (senkrechter Einfall mit $\phi = 0$) mit Brechungsindizes nahe eins führt die Näherungslösung der ADA zu identischen Ergebnissen wie die MSC-Theorie (van de Hulst, 1981, Sharma, 1992). Wie aus dem Berechnungsbeispiel in Abb. 5.1 hervorgeht, trifft dies offensichtlich auch für den allgemeineren Fall eines dreischichtigen Zylinders mit komplexen Brechungsindizes unter schrägem Lichteinfall zu. Die Abweichungen zwischen Näherung und exakter Berechnung in diesem Fallbeispiel ist von der Ordnung 10^{-3} .

Im weiteren Verlauf soll die Eignung der ADA für eine Zuweisung realitätsnaher mittelgroßer Brechungsindizes untersucht werden. Soweit nicht explizit anders angegeben, wird dabei von einem verschwindenden Imaginärteil des Brechungsindex $k_r = 0$ ausgegangen. Zur besseren Orientierung werden die Näherungswerte der ADA fortan grundsätzlich als gestrichelte Linie dargestellt und die Ergebnisse der MSC erscheinen stets als durchgezogene Linie. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich sämtliche Vergleiche auf die Streuung von unpolarisiertem Licht beziehen. Eröffnet wird die Diskussion mit den in Abb. 5.2 gezeigten Fallbeispielen konzentrischer Zylinder, deren Geometrie und Materialkombinationen variiert werden. Für den Einfallswinkel gilt dabei $\phi = 0$. Bildabschnitt a) zeigt

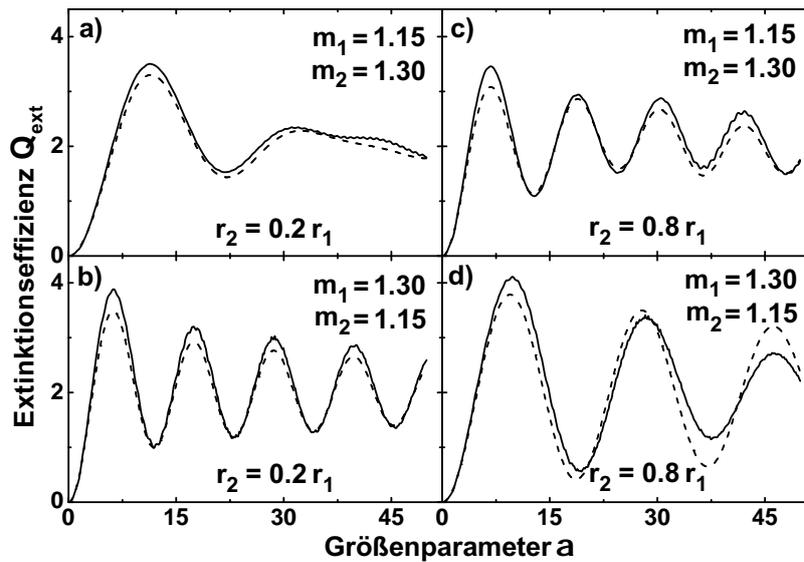


Abbildung 5.2: Die Extinktionseffizienz konzentrischer Zylinder Q_{ext} unterschiedlicher Materialpaarung und Geometrie als Funktion des Größenparameters α für unpolarisiertes Licht. Für den Einfallswinkel gilt dabei $\phi = 0^\circ$.

die Extinktionseffizienz als Funktion des Größenparameters α für einen konzentrischen Zylinder mit dünnem Kern und dickem Mantel, wobei dem Kern der größere Brechungsindex zugewiesen wird. Bis hin zu Werten des Größenparameters von $\alpha = 50$ zeigen Näherung (ADA) und exakte Rechnung (MSC) maximale Abweichungen von weniger als 10 %. In Abb. 5.2b) wurden die Brechungsindizes von Mantel und Kern vertauscht. Auch hier weichen Näherung und exakte Rechnung nur geringfügig ab. Der maximale Unterschied beträgt 12 %. Die Abbildungen 5.2c) und 5.2d) zeigen die analogen Vergleichsrechnungen für einen dicken Zylinderkern. In Abb. 5.2c) weist die Beschichtung den geringeren Brechungsindex auf; in Abb. 5.2d) dagegen besteht die Beschichtung aus dem optisch dichteren Material. Ähnlich wie in den vorher gezeigten Beispielen werden die exakten Kurven der MSC durch die ADA zufriedenstellend angenähert. Im Falle der stärker brechenden Beschichtung in Abb. 5.2d) zeigt sich ab Werten für den Größenparameter von etwa 30 eine leicht erhöhte Abweichung von maximal etwa 15 %. Zusammenfassend kann man jedoch folgern, dass in den erörterten Fällen Näherung (ADA) und exakte Berechnung (MSC) in quantitativer und qualitativer Hinsicht gute Übereinstimmung zeigen. Insbesondere die spektralen Positionen der Maxima und Minima der Extinktionseffizienzen werden durch die ADA sehr gut reproduziert. Im nächsten Schritt erfolgt der Vergleich für weiter erhöhte Werte der reellen Brechungsindizes, indem Werte von 1.5 und 1.25 in ihrer Zuweisung variiert werden. Die geometrische Dimensionierung von Mantel und Kern erfolgt dabei analog zu den in Abb. 5.2 vorgestellten Beispielen. Wiederum zeigt das Fallbeispiel mit dem optisch dünneren Material im dicken Zylinderkern die größten Unterschiede zwischen Näherung und exakter Rechnung. Bei genauer Betrachtung der exakten Berechnungsergebnisse in Abb. 5.3 erkennt man entlang der langsamer variierenden Grobstruktur der Extinktionseffizienz bereits die Ausbildung einer schneller oszillierenden, feinen Struktur. Die Maxima dieser Struktur werden in der Fachliteratur auch als „morphology dependent resonances“ oder kurz

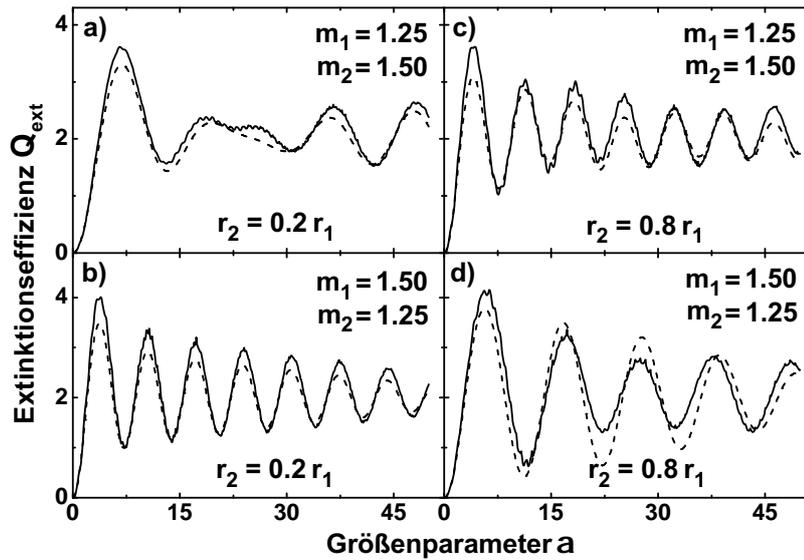


Abbildung 5.3: Die Extinktionseffizienz der konzentrischen Zylinder aus Abbildung 5.2 jedoch mit höheren Werten in den Brechungsindizes als Funktion des Größenparameters a . Für den Einfallswinkel gilt weiterhin $\phi = 0^\circ$.

als MDRs terminiert (Hill und Benner, 1988). Diese MDRs sind in Abb. 5.2 noch nicht zu erkennen. Im Falle der kleineren Brechungsindizes wird also die Extinktionseffizienz allein von einer langsam oszillierenden groben Struktur dominiert. Deren breite Maxima ergeben sich aus der Interferenz der direkt transmittierten Strahlung und der beim Durchgang durch das optisch dichtere Medium phasenverschobenen Strahlung. Dieser Sachverhalt bildet nach Gl. (2.91) offensichtlich auch die Grundlage der ADA. Die Ausbildung der MDRs in Abb. 5.3 kann mittels der ADA nicht beschrieben werden, da diese nach Bohren und Huffman, 1983 aus den Polstellen der Partialwellenkoeffizienten in Gl. (2.60) entstehen. Nach Hill und Benner, 1988 können die MDRs einzelnen Partialwellenkoeffizienten zugewiesen werden, wohingegen die langsam oszillierende Grobstruktur als Kollektiveffekt einer Vielzahl von Partialwellen verstanden werden muss.

Die bisherige Beschränkung der Diskussion auf nicht absorbierende Materialien $k_r = 0$ wird in diesem Abschnitt aufgehoben. Endliche Werte für k_r bewirken nach Abb. 5.4 offensichtlich eine Minderung der Maximalwerte der Extinktionseffizienz - die oszillierenden Kurven wirken gedämpft. Besonders deutlich wird dies beim Vergleich von Abb. 5.4b mit Abb. 5.3d. Beide Fälle unterscheiden sich dadurch, dass in Abb. 5.4b der Brechungsindex $m_r = 1.50$ durch einen Imaginärteil $k_r = 0.10$ ergänzt wurde. Bezogen auf die Absolutwerte zeigen im Falle absorbierender Medien Näherung und exakte Berechnung bessere Übereinstimmung. Diese Beobachtung betrifft vor allem den Bereich mittelgroßer Größenparameter zwischen 15 und 35. Mit der schrittweisen Erhöhung des Größenparameters geht allerdings die Kohärenz der Vergleichsspektren aus ADA und MSC zunehmend verloren. Dies wird bereits am Beispiel der Kurven aus Abb. 5.4a deutlich. Nach dem Durchlaufen des zweiten Minimums erscheint die Näherungskurve zur exakten Kurve phasenverschoben. Verstärkt kommt der Kohärenzverlust dann in Abb. 5.4c zum Ausdruck - selbst die Position des ersten Maximums kann durch die

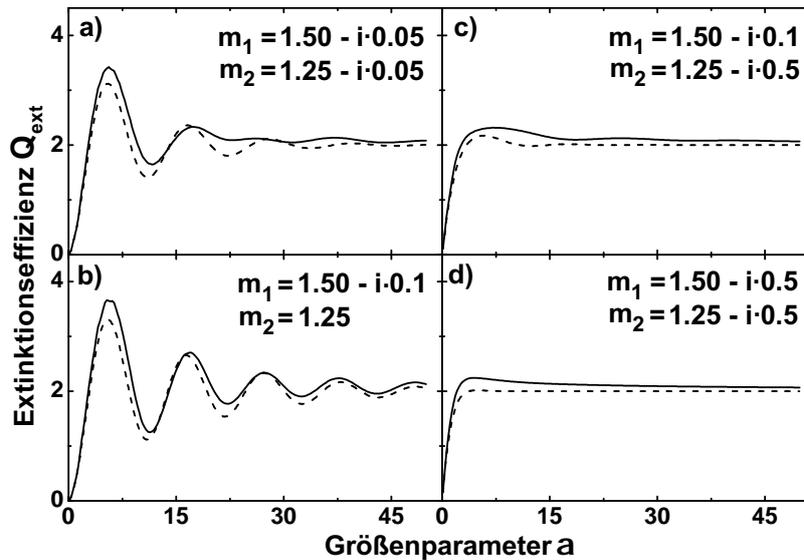


Abbildung 5.4: Die Extinktionseffizienz des konzentrischen Zylinders aus Abb. 5.3d mit $r_2 = 0.8r_1$ als Funktion des Größenparameters α für nicht verschwindende Absorption $k_r > 0$ bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0$).

ADA nicht mehr reproduziert werden. Auffällig ist zudem, dass für sehr stark absorbierende Medien (Abb. 5.4d) die Lösung der ADA schneller gegen den asymptotischen Grenzwert von 2 konvergiert als das korrespondierende MSC-Spektrum.

Nachdem bisher Problemstellungen doppelt geschichteter konzentrischer Zylinder behandelt wurden, erfolgt eine Ausweitung der Diskussion auf dreilagige Zylinder. Ausgehend von den Radienverhältnissen $r_2 = r_1/2$ und $r_3 = r_1/3$ erfolgt die schichtweise Zuordnung der nun wieder rein reellen Brechungsindizes, zum Ersten von außen nach innen ansteigend (Abb. 5.5a) und zum Zweiten von außen nach innen absteigend (Abb. 5.5b). Darüber hinaus sind in Abb. 5.5c) und Abb. 5.5d) zwei Fälle mit jeweils gasförmiger Zwischenschicht $m_2 = 1.00$ gezeigt. Offensichtlich werden in diesen vier Fallstudien erneut gute Näherungskurven generiert. Die maximalen Abweichungen zur exakten Berechnung belaufen sich auf etwa 10%. In den vorherigen Beispielen war stets zu beobachten, dass die Höhe der Maxima der Grobstruktur mit steigendem Größenparameter monoton abfällt. Für die Parametrisierungen der Abbildungen 5.5b) und 5.5c) ist dies nun nicht mehr zutreffend.

Anders als bei van de Hulst, 1981, wo nur der senkrechte Einfall einer ebenen Lichtwelle auf einen homogenen Zylinder betrachtet wird, diskutieren Cross und Latimer, 1970 und Stevens, 1984 auch den schrägen Lichteinfall ($\phi > 0^\circ$). Es ist daher naheliegend, Problemstellungen mit $\phi > 0^\circ$ auch an mehrlagigen Zylindern zu analysieren. Gegenstand der Untersuchung bildet ein zweischichtiger Zylinder mit dünnem Kern ($r_2/r_1 = 0.20$), wobei der Kern aus dem optisch dichteren Material besteht. Für die Zahlenwerte Brechungsindizes gilt dabei $m_1 = 1.15$ und $m_2 = 1.30$. Ausgehend vom Fall $\phi = 0^\circ$, wird der Einfallswinkel sukzessive erhöht und die Näherung mit der exakten Berechnung verglichen. Betrachtet man den in Abb. 5.6a) gezeigten Fall für $\phi = 0^\circ$ mit der Darstellung aus Bildabschnitt b) für

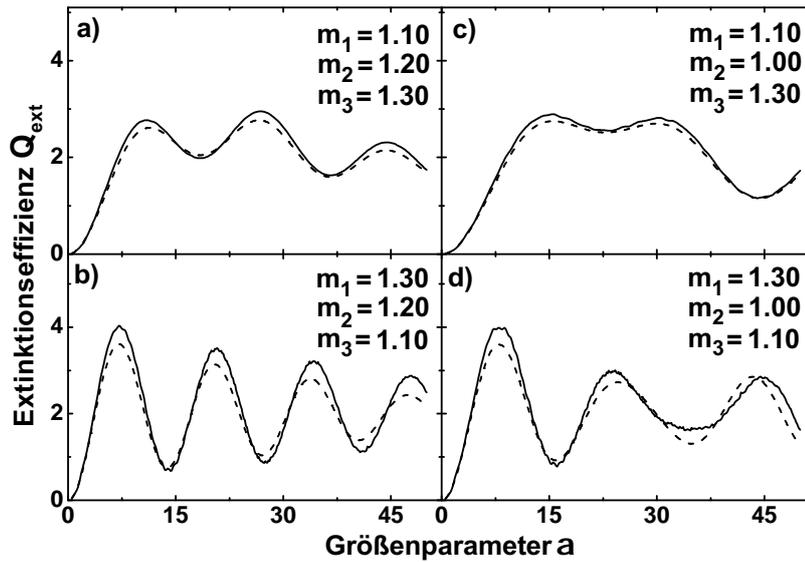


Abbildung 5.5: Extinktionseffizienz dreilagiger Zylinder mit $r_2 = r_1/2$ und $r_3 = r_1/3$ als Funktion des Größenparameters α bei senkrechtem Lichteinfall ($\phi = 0^\circ$).

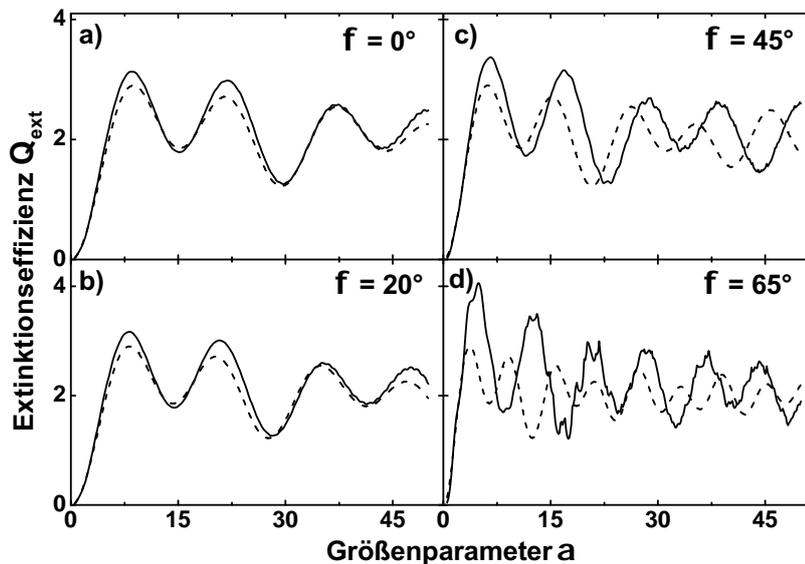


Abbildung 5.6: Die Extinktionseffizienzen zweilagiger Zylinder ($r_2/r_1 = 0.20$) unter schrägem Lichteinfall. Für die Brechungsindizes gilt $m_1 = 1.15$ und $m_2 = 1.30$.

$\phi = 20^\circ$, so erkennt man eine Verschiebung der Extinktionseffizienz hin zu größeren Wellenlängen bzw. kleineren Werten des Größenparameters im Falle schräger Inzidenz. Dieser Effekt kann durch den Übergang von einer kreisförmigen (für $\phi = 0^\circ$) zu einer elliptischen Zylinderschnittgeometrie (wenn $\phi > 0^\circ$) erklärt werden. Die entlang der großen Halbachse zentral verlaufende Intensität erfährt eine erhöhte Phasenverschiebung. Bei genauer Betrachtung von Abb. 5.6b) gewinnt man den Eindruck, dass die beobachtete Verschiebung der Extinktionseffizienz durch die ADA-Methode leicht überbetont wird. Deutlicher wird die überhöhte Verschiebung dann für einen Einfallswinkel von 45° wie in Bildabschnitt c) gezeigt wird. Für $\alpha > 12$ liefern Näherung und exakte Berechnung bereits inkohärente Lösungen. Schließlich führt eine weitere Erhöhung des Einfallswinkels (Abb. 5.6d) zur vollständigen Ungültigkeit der ADA-Methode. Weitere, an dieser Stelle nicht mehr gezeigte Berechnungen, legen den Schluss nahe, dass die ADA für mittlere Brechungsindizes bis hin zu Einfallswinkeln von etwa 15° bis 20° Grad brauchbare Näherungen liefert. Für größere Einfallswinkel muss die Annahme geradlinig verlaufender Lichtstrahlen weiter abseits von der Mittellinie des Zylinderquerschnitts verworfen werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in Cross und Latimer, 1970 die Implementierung eines Korrekturterms in Gl. (2.91) vorgeschlagen wird, um die Qualität der Näherung bei größeren Einfallswinkeln zu verbessern.

Im Zusammenhang mit dem hier diskutierten schrägen Lichteinfall sei betont, dass die für den zweilagigen Zylinder gefundenen Ergebnisse vollständig konsistent mit den Ausführungen von Cross und Latimer, 1970 für homogene Zylinder sind. Für die Ergebnisse in Stevens, 1984 trifft dieser Sachverhalt allerdings nicht zu. Während die für schrägen Einfall berechneten Extinktionseffizienzen in Cross und Latimer, 1970 und in der hier vorliegenden Abhandlung in Übereinstimmung mit dem Babinetschen Prinzip im Grenzfall $\alpha \rightarrow \infty$ gegen den Wert 2 konvergieren, berechnet Stevens, 1984 einen wesentlich kleineren asymptotischen Grenzwert. Dieser Sachverhalt führt zum Widerspruch zwischen den theoretischen Grundlagen und den gezeigten Ergebnissen in Stevens, 1984 im Falle schräger Inzidenz. In Anhang C.1 wird darauf im Detail eingegangen.

Schließlich soll die Anwendbarkeit der ADA-Methode auch für räumlich isotrop angeordnete zylindrische Streukörper untersucht werden. Grundlage der Berechnung bildet dabei Gl. (2.93), nach welcher die vom Einfallswinkel abhängigen Ergebnisse der ADA Gl. (2.91) und der exakten Rechnung Gl. (2.92) aufintegriert werden. Die Winkelauflösung für den Einfallswinkel ϕ beträgt dabei 1 Grad. Höhere Auflösungen führen zu keiner signifikanten Verbesserung der Genauigkeit. Eine Fallstudie für räumlich isotrop orientierte homogene Zylinder wurde bereits in Stevens, 1984 durchgeführt. Aufgrund der inkonsistenten Abhandlung des schrägen Lichteinfalls in Stevens, 1984 wird für dessen gezeigte Studie eine erneute Berechnung durchgeführt. Die resultierenden Ergebnisse für den Fall eines analog zu Stevens, 1984 parametrisierten homogenen Zylinders und darüber hinaus für zweifach und dreifach geschichtete Zylinder werden in Abb. 5.7 vorgestellt. Wenn auch die Abweichungen zwischen ADA und MSC im Vergleich zu Stevens, 1984 höher ausfallen, so zeigen die Ergebnisse hinsichtlich der Absolutwerte und des spektralen Verlaufs gute Kompatibilität. Offenkundig kann die Gültigkeit dieser Feststellung auch auf die zwei- und dreifach geschichteten Zylinder übertragen werden. Eine intuitive Begründung für die erneute Phasenkohärenz zwischen ADA und MSC-Theorie im Falle räumlich isotrop angeordneter Zylinder kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Allerdings sieht man in Abb. 5.8 für das Beispiel aus Abb. 5.7c, dass die spektrale Position der Extinktionsmaxima unabhängig von der

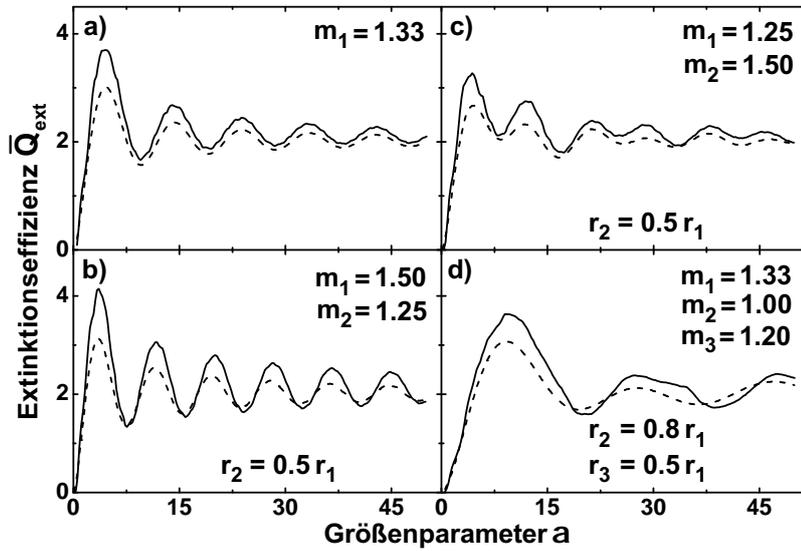


Abbildung 5.7: Die Extinktionseffizienzen für räumlich isotrop angeordnete homogene und mehrschichtige Zylinder.

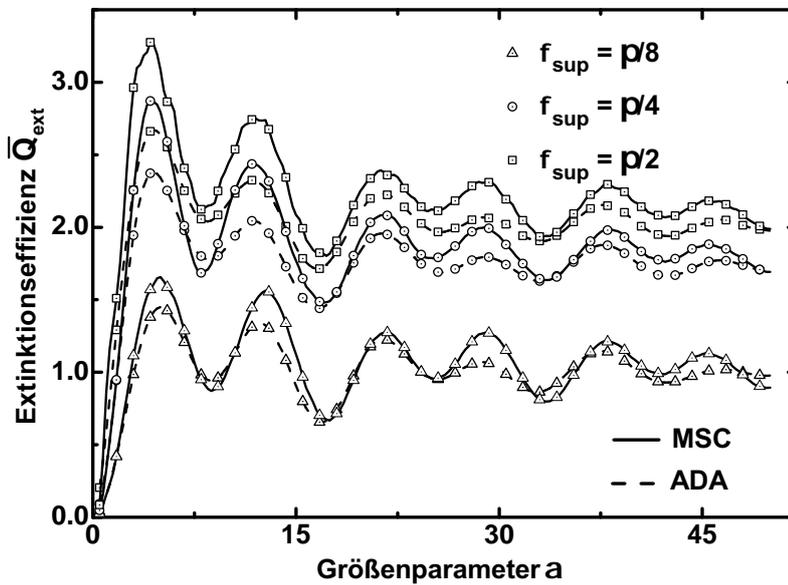


Abbildung 5.8: Die gemittelte Extinktionseffizienz für verschiedene obere Integrationsgrenzen in Gl. (2.93). Die Linien der ADA-Näherung und der MSC-Theorie sind im Falle einer oberen Integrationsgrenze von $\phi_{\text{sup}} = \pi/8$ mit Dreiecken markiert. Für die Integration bis $\phi_{\text{sup}} = \pi/4$ und $\phi_{\text{sup}} = \pi/2$ dient zur Kennzeichnung ein Kreis bzw. ein Quadrat.

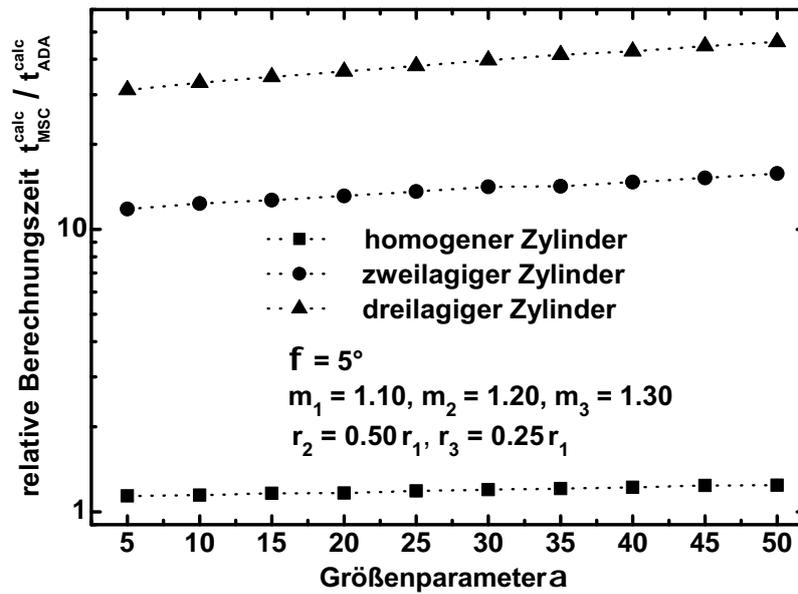


Abbildung 5.9: Die relative Berechnungszeit $t_{MSC}^{calc}/t_{ADA}^{calc}$ als Funktion des Größenparameters α für homogene, zweischichtige und dreischichtige Zylinder.

oberen Integrationsgrenze in Gl. (2.93) stabil bleibt. Die Mittelwertbildung erfolgt dabei über $\phi_{sup} = \pi/8$, $\phi_{sup} = \pi/4$ und $\phi_{sup} = \pi/2$.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels erfolgt ein Vergleich der Berechnungszeiten von näherungsweise und exakter Berechnung. In Abb. 5.9 werden die relativen Berechnungszeiten $t_{MSC}^{calc}/t_{ADA}^{calc}$ als Funktion des Größenparameters α für einen homogenen, einen zwei- und einen dreilagigen Zylinder gezeigt. Für den homogenen Zylinder zeigen die Berechnungszeiten beider Theorien keine signifikanten Unterschiede. Vergleicht man den zeitlichen Aufwand im Falle des zweischichtigen Zylinders, so werden abhängig vom Größenparameter um den Faktor 12 bis 15 geringere Berechnungszeiten bei der Anwendung der ADA benötigt. Noch deutlicher fällt die Zeitersparnis für Berechnungen am dreilagigen Zylinder aus. Hier übersteigt die benötigte Zeit für MSC-Anwendungen die Berechnungsdauer der Näherung um einen Faktor zwischen 30 und 50.

5.2 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Sicherlich ersetzt die ADA in vielen Fällen keine exakten Berechnungen. Insbesondere, wenn die winkelaufgelöste Streuverteilung, also der differentielle Wirkungsquerschnitt, Teil der Problemstellung ist. Auch sinkt die Qualität der Näherung mit steigendem Brechungsindex oder im Falle mehrlagiger Zylinder mit großen Unterschieden in den Brechungsindizes der einzelnen Schichten. Für moderate Absolutwerte bzw. Unterschiede der Brechungsindizes jedoch reproduziert die ADA die Extinktionseffizienz auf angemessene Weise. Wenn man sich weiterhin klarmacht, dass Berechnungen nach der ADA für die in dieser Arbeit implementierten Algorithmen bis um den Faktor 50 kürzere Berechnungszeiten erfordern als exakte Rechnungen, so ermöglicht die ADA auch das Abtasten sehr großer und

mehrdimensionaler Parameterräume, die bei der Optimierung von schichtweise aufgebauten Streukörpern zwangsläufig auftreten. So zeigen die hier vorgestellten Beispiele, dass abgesehen vom schrägen Einfall unter großen Einfallswinkeln, die spektrale Position der Extinktionsmaxima sehr gut reproduziert wird. Exakte Berechnungen mit der MSC lassen sich dann gezielt auf Parameterbereiche von besonderem Interesse beschränken. Ein weiterer Aspekt betrifft die Implementierung der Maxwellschen Streutheorie in Computercode. Aufgrund der hohen Komplexität der MSC (vgl. Kap. 2.5) ist dieses Unterfangen potentiell fehlerbehaftet. Zudem sind die linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten im Falle geschichteter Zylinder a priori schlecht konditioniert und erfordern anspruchsvolle Lösungsalgorithmen. Die Realisierung eines Berechnungsprogramms für die ADA ist dagegen weitaus weniger anspruchsvoll, und wie Abb. 5.1 darüber hinaus verdeutlicht, führt die Anwendung von MSC und ADA zu nahezu identischen Ergebnissen, wenn die Brechungsindizes sehr klein gewählt werden. Gerade deshalb eignet sich die ADA hervorragend für die Verifikation der in Verbindung mit der MSC geforderten komplexeren Berechnungsalgorithmen.

Kapitel 6

Experimentelle Ergebnisse

Dieses Kapitel widmet sich der experimentellen Charakterisierung des in Kap. 3.1 beschriebenen kommerziell verfügbaren Faserisolationsmaterials aus Aluminiumoxid. Wo möglich, werden die experimentellen Resultate mit Vorhersagen der theoretischen Modelle verglichen. Zunächst wurde eine Durchmesserverteilung mittels REM-Bildauswertung erstellt. Bei bekannter Durchmesserverteilung können unter der Annahme räumlich isotrop angeordneter Fasern die Wirkungsquerschnitte und daraus die spezifischen effektiven Streu- und Extinktionskoeffizienten $\tilde{\sigma}_{\text{ext,sca}}^* = \sigma_{\text{ext,sca}}^*/\rho_{\text{fp}}$ des Probenmaterials berechnet werden. Mittels der in Abschnitt 3.2 vorgestellten infrarot-optischen Charakterisierung bei Raumtemperatur mit der Ulbrichtkugel erhält man zum Vergleich experimentelle Werte für die spezifischen effektiven Streu- und Extinktionskoeffizienten.

Parallel zur experimentellen Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit durch die in Kap. 3.5 beschriebenen TWA-Methode wird ein gekoppeltes numerisches Modell vorgestellt, anhand dessen die Phasenverschiebung und der Amplitudenverlust im Probeninnern theoretisch vorhergesagt werden können.

6.1 Infrarotoptische Charakterisierung der Faserisolation

Die Verteilung der Faserdurchmesser Abb. 6.1 wurde mittels zahlreicher REM-Aufnahmen und der Vermessung von insgesamt 193 Fasern erstellt. Aufgrund der rechtsschiefen Verteilung liegt es nahe, die Verteilung durch eine logarithmische Normalverteilung zu approximieren, deren Wahrscheinlichkeitsdichte $w_{\log n}$ gegeben ist durch:

$$w_{\log n}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{SD}}d} \exp\left(-\frac{[\ln(d) - \ln(d_{\text{m}})]^2}{2\sigma_{\text{SD}}^2}\right). \quad (6.1)$$

Die logarithmische Normalverteilung ist normiert, d. h. die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_{\log n}(d)$ über alle Durchmesser d ergibt den Wert eins. Für die Fitkurve in Abb. 6.1 ergeben sich als Anpassungsparameter ein Erwartungswert von $d_{\text{m}} = 3.85 \mu\text{m}$ und eine Standardabweichung von $\sigma_{\text{SD}} = 0.29 \mu\text{m}$. Nach Herstellerangaben Paraknewitz, 2016 liegen die Faserdurchmesser d in einem Bereich zwischen $3 \mu\text{m}$ und $5 \mu\text{m}$. Diese Angabe deckt sich sehr gut mit der messtechnisch ermittelten bzw. der approximierten Verteilung aus Abb. 6.1. Der effektive spezifische Extinktionskoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^* = \sigma_{\text{ext}}^*/\rho_{\text{fp}}$ und die effektive Albedo ω_0^* wurden bei Raumtemperatur mit dem in Abschnitt 3.2.1 geschilderten Verfahren der integrierenden Kugel mit anschließender Auswertung der Reflexions- und Transmissionsdaten über die Dreifluss-Näherung der Strahlungstransportgleichung (2.5) im Wellenlängenbereich von $0.4 \mu\text{m}$ bis $8 \mu\text{m}$ bestimmt. Bis zu einer

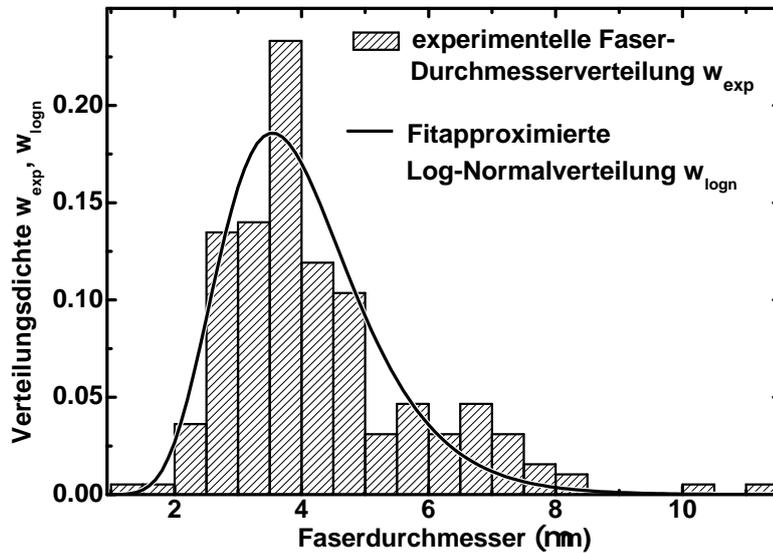


Abbildung 6.1: Gemessene Faserdurchmesserverteilung w_{exp} (Balken) und der zugehörige Fit mit einer logarithmischen Normalverteilung w_{logn} (Volllinie).

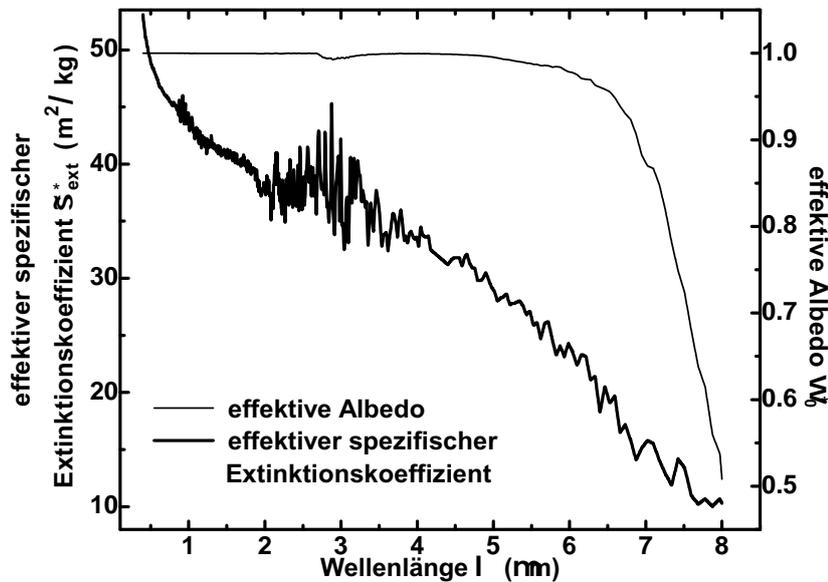


Abbildung 6.2: Bei Raumtemperatur experimentell ermittelter effektiver spezifischer Extinktionskoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ (dicke Volllinie) und die effektive Albedo ω_0^* (dünne Volllinie).

Wellenlänge von $4\ \mu\text{m}$ zeigen die Messresultate aus Abb. 6.2 einen Wert für die Albedo von nahezu eins. Aufgrund des ansteigenden Absorptionskoeffizienten von Aluminiumoxid (vgl. Abb. 1.1) nimmt die Albedo dann zu größeren Wellenlängen hin ab und erreicht einen Wert von etwa 0.5 bei einer Wellenlänge von $8\ \mu\text{m}$. Der gemessene Extinktionskoeffizient nimmt mit zunehmender Wellenlänge stetig ab. Bei bekannter Größenverteilung der Faserdurchmesser und unter der Annahme einer räumlich-isotropen Faseranordnung können, gemäß der in Abschnitt 2.5.1 vorgestellten Theorie der Streuung am unendlichen Zylinder, auch theoretische Werte für den effektiven spezifischen Streukoeffizienten berechnet werden. Dabei wird näherungsweise angenommen, dass alle Fasern, unabhängig von ihrem Durchmesser, eine identische Länge l_{fib} aufweisen. Der betrachtete Wellenlängenbereich beschränkt sich dabei auf das Intervall von $0.5 - 7\ \mu\text{m}$, also den Bereich der verfügbaren Literaturdaten aus Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982. Mittels Gl. (2.64) werden zuerst die spektralen Wirkungsquerschnitte einzelner Fasern mit Durchmesser d_l berechnet. Geht man von Fasern mit identischer Länge l_{fib} aus, so ergibt sich bei der betrachteten j -ten Wellenlänge für den spezifischen Streukoeffizienten der Ausdruck:

$$\tilde{\sigma}_{\text{sca},j} = N_{\text{norm}} l_{\text{fib}} \sum_l w_{\text{exp}}(d_l) \overline{C}_{\text{sca},j}(d_l), \quad (6.2)$$

mit der Normierungskonstanten

$$N_{\text{norm}} = \left(\rho_{\text{bulk}} \sum_l \frac{\pi}{4} l_{\text{fib}} d_l^2 w_{\text{exp}}(d_l) \right)^{-1}, \quad (6.3)$$

wobei $\rho_{\text{bulk}} = 3950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ der Dichte von Aluminiumoxid entspricht (Auerkari, 1996). Der Index l durchläuft alle ermittelten Durchmesser der Fasern d_l aus Abb. 6.1. Unter Verwendung der Gleichungen (2.69) und (2.11) kann aus dem spezifischen Streukoeffizienten (Gl. 6.2) der effektive spezifische Streukoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ berechnet werden. Beim Vergleich des experimentell ermittelten effektiven spezifischen Streukoeffizienten $\tilde{\sigma}_{\text{sca}}^* = \omega_0^* \tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ (Volllinie) mit den theoretisch errechneten Werten (gestrichelte Kurve) in Abb. 6.3 wird deutlich, dass die berechneten Werte im langwelligen Spektralbereich oberhalb und bei kleineren Wellenlängen deutlich unterhalb der experimentellen Kurve liegen. Die Abweichung für große Wellenlängen lässt sich noch mit dem nicht exakt bekannten Absorptionskoeffizienten des Fasermaterials und/oder Messfehlern bei der infrarot-optischen Charakterisierung bzw. bei der Ermittlung der Faserdurchmesserverteilung erklären. Wohingegen im kurzwelligen Bereich die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment in qualitativer und quantitativer Hinsicht zu groß ausfallen. Experimentell wächst der Streukoeffizient zu höheren Frequenzen stetig an, während theoretisch ein monotoner Abfall für Wellenlängen kleiner $4\ \mu\text{m}$ vorhergesagt wird. Im Bereich der Wellenlängen um $0.5\ \mu\text{m}$ sind die theoretischen Streukoeffizienten um mehr als den Faktor zwei geringer, als die korrespondierenden experimentellen Werte. Durch die Abhandlungen in Kap. 5 wurde anschaulich klar, dass die spektrale Position der Streuresonanzen im Wesentlichen durch die optischen Weglängen des Streukörpers und die daraus resultierenden Phasenverschiebungen der gestreuten Lichtwelle relativ zur einfallenden Lichtwelle bestimmt werden. Bei gegebenem Brechungsindex führen kleinere Abmessungen des Streukörpers demnach zu verstärkter Streuung im kurzwelligeren Spektralbereich. Beim Blick auf die exemplarische REM-Aufnahme in Abb. 6.4 fällt auf, dass durchaus Partikelstrukturen mit

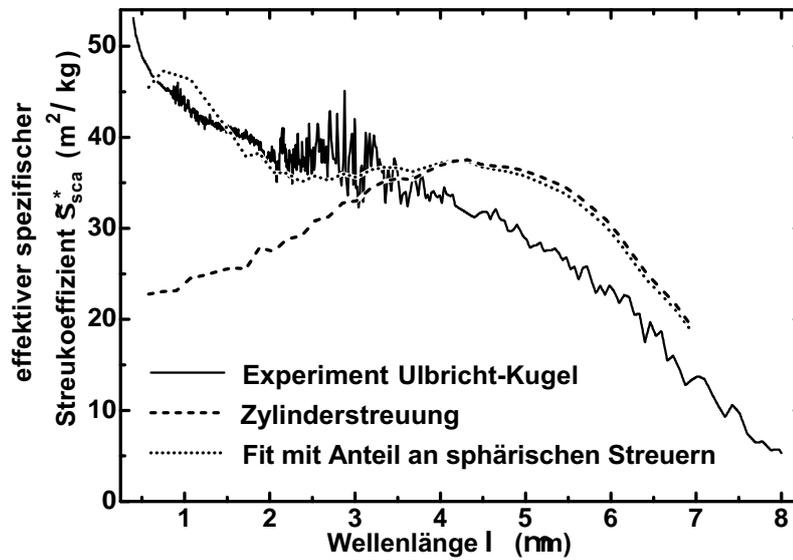


Abbildung 6.3: Gemessener (Volllinie) und theoretisch ermittelter effektiver spezifischer Streukoeffizient $\tilde{\sigma}_{\text{sca}}^*$. Die gestrichelte Linie bezieht sich auf reine Zylinderstreuung für die Verteilung aus Abb. 6.1. Für die Berechnung der gepunkteten Linie wurde neben den zylindrischen Streuern ein Anteil an sphärischen Streukörpern angenommen.

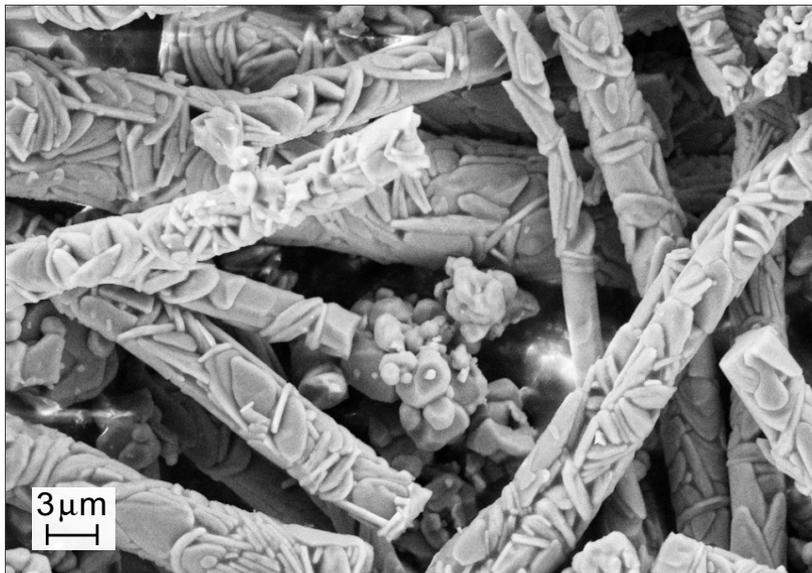


Abbildung 6.4: REM-Aufnahme der Faserprobe. Deutlich zu erkennen ist die körnige Struktur der polykristallinen Fasern. Neben den zylinderförmigen Fasern findet man zudem Al_2O_3 -Mikropartikel.

sehr kleinen Abmessungen in der Faserisolation vorzufinden sind. Auch die polykristallinen Fasern selbst zeigen keine glatte Oberfläche, sondern erscheinen aus Körnern zusammengesetzt. Um abschätzen zu können in welchem geometrischen Größenbereich und in welcher Anteiligen Menge feinere Partikel bzw. Strukturen vorhanden sein müssen, um die experimentelle Kurve des effektiven Streukoeffizienten besser nachbilden zu können, wird angenommen, dass sich neben den zylindrischen Streuern ein Anteil sphärischer Streukörper aus Aluminiumoxid befindet. Die Durchmesserverteilung der sphärischen Streuer soll dabei einer logarithmischen Normalverteilung wie in Gl. (6.1) mit dem Erwartungswert d_m^{sph} und der Standardabweichung $\sigma_{\text{SD}}^{\text{sph}}$ gehorchen. Zur Unterscheidung werden die Eigenschaften der sphärischen Streukörper mit dem hochgestellten Index „sph“ versehen. Die Streuquerschnitte werden dabei nach der Mie-Theorie (Gleichung (2.94) bis (2.95)) für sphärische Streuer berechnet Analog wird $\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{\text{sph}}$ aus einer Durchmesserverteilung $w_{\text{logn}}^{\text{sph}}$ sphärischer Streuer berechnet:

$$\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{\text{sph}} = N_{\text{norm}}^{\text{sph}} \sum_k w_{\text{logn}}^{\text{sph}}(d_k^{\text{sph}}) C_{\text{sca},j}^{\text{sph}}(d_k^{\text{sph}}), \quad (6.4)$$

mit der entsprechenden Normierungskonstanten

$$N_{\text{norm}}^{\text{sph}} = \left(\rho_{\text{bulk}} \sum_k \frac{\pi}{6} d_k^{\text{sph}3} w_{\text{logn}}^{\text{sph}}(d_k^{\text{sph}}) \right)^{-1}. \quad (6.5)$$

Der Index k durchläuft die betrachteten Kugeldurchmesser d^{sph_k} . Die drei Anpassungsparameter sind dann f^{sph} , d_m^{sph} und $\sigma_{\text{SD}}^{\text{sph}}$. Die korrespondierenden effektiven spezifischen Streukoeffizienten $\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{sph}}$ werden über die Zusammenhänge aus Gl. (2.11) abgeleitet.

Das zu lösende Anpassungsproblem zur Minimierung der relativen quadratischen Abweichung χ_{err}^2 zwischen den experimentellen und den theoretischen Werten, wird für die betrachteten Wellenlängen j wie folgt formuliert:

$$\chi_{\text{err}}^2 = \sum_j \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{exp}} - \tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{th}}}{\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{exp}}} \right)^2, \quad (6.6)$$

mit dem zusammengesetzten theoretischen spezifischen Effektivwert:

$$\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{th}} = f^{\text{sph}} \tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{sph}} + (1 - f^{\text{sph}}) \tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^*, \quad (6.7)$$

wobei f^{sph} den Massenanteil der sphärischen Streuer bezeichnet und formal Werte zwischen null und eins annehmen kann. Die Berechnung von $\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^*$ der Verteilung der Faserdurchmesser w_{exp} erfolgt erneut nach Gl. (6.2) und Gl. (6.3).

Der Fit erfolgt mittels eines least-squares-Verfahrens. Für die Parametrisierung mit der geringsten Abweichung χ_{err}^2 findet man $d_m^{\text{sph}} = 0.588 \mu\text{m}$ und $\sigma_{\text{SD}}^{\text{sph}} = 0.358 \mu\text{m}$ sowie einen Massenanteil der sphärischen Streuer von 0.034. Die zugehörigen Werte für den gemischten theoretischen Streukoeffizienten $\tilde{\sigma}_{\text{sca},j}^{*\text{th}}$ finden sich als gepunktete Linie in Abb. 6.3 wieder. Man erkennt, dass durch den geringen Anteil kleiner sphärischer Streuer die theoretischen Streukoeffizienten im kurzwelligen Spektralbereich eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Werten zeigen. Auf den langwelligen Bereich dagegen hat die Beimengung der sphärischen Streukörper nahezu keinen Einfluss.

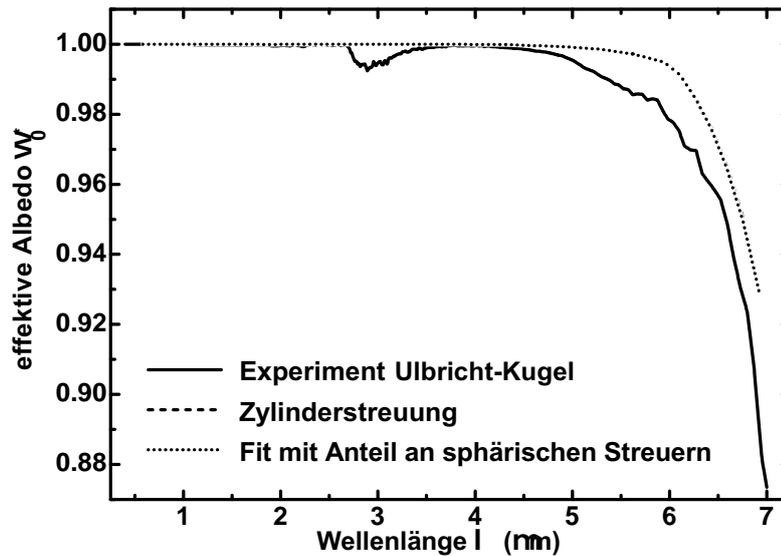


Abbildung 6.5: Gemessene (Volllinie) und theoretisch (Punkte bzw. Striche) ermittelte effektive Albedo ω_0^* . Die gestrichelte Linie bezieht sich auf reine Zylinderstreuung für die Verteilung aus Abb. 6.1. Für die Berechnung der gepunkteten Linie wurde neben den zylindrischen Streuern ein Anteil an sphärischen Streukörpern angenommen.

Schließlich sollen noch die experimentellen und theoretischen Resultate für die effektive Albedo gegenübergestellt werden (Abb. 6.5). Bis zu einer Wellenlänge von $4\mu\text{m}$ verlaufen die theoretischen und experimentellen Kurven gleich. Zu größeren Wellenlängen hin werden dagegen deutliche Abweichungen erkennbar. Die theoretischen Werte mit und ohne Zugabe von sphärischen Streuern unterscheiden sich dagegen nicht. Der Einbruch der experimentell ermittelten Albedo im Bereich von $2.5 - 3.6\mu\text{m}$ ist auf die Luftfeuchtigkeit der Umgebung und die Adsorption von Wasser zurückzuführen (Fenn u. a., 1985 bzw. Marcussen, 1970).

6.2 Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit

In diesem Abschnitt werden die numerischen und experimentellen Resultate zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit der Faserproben erörtert.

6.2.1 Festlegung und Bestimmung der Eingangsparameter für das numerische Modell

Um die thermische Anregung der zylindrischen Probe durch Wärmestrahlung berechnen zu können, ist es notwendig, Strahlungstransport und Festkörperwärmetransport innerhalb der Probe zu koppeln. Die zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils in der Probe wird dann durch eine inhomogene Diffusionsgleichung in

Zylinderkoordinaten beschrieben (vgl. Gl. (2.28)):

$$\rho_{\text{fp}} c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) - t c_{\text{sgb}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] T(r, t) = -\text{div} q_{\text{rad}}(r, t) \quad (6.8)$$

wobei die Divergenz der Strahlungswärmestromdichte

$$\text{div} q_{\text{rad}}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r q_{\text{rad}}(r, t)) \quad (6.9)$$

als Quellterm auf der rechten Seite erscheint. Die Strahlungswärmestromdichte wird dabei durch die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte Diffusionsapproximation der Strahlungstransportgleichung (2.15) ermittelt. Beide Gleichungen, (6.8) und (2.15), werden jeweils mit einem Finite-Differenz-Schema gelöst. Nach jedem Zeitschritt erfolgt eine Aktualisierung der Randbedingung aus Gl. (2.17) bei $r = R$, indem der kosinusförmig schwingenden Umgebungstemperatur die korrespondierende Strahlungsenergie zugeordnet wird.

$$\frac{2\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} < 1 \quad (6.10)$$

Die Zeitschritte werden äquidistant gewählt, derart, dass das Neumannsche Stabilitätskriterium aus Gl. (6.10) in jedem Fall erfüllt wird. Zur Lösung der Nichtlinearität in der inhomogenen Diffusionsgleichung in Gl. (6.8) wird der iterative Ansatz aus Hahn u. a., 1997 bzw. Siegel und Howell, 1992 gewählt (vgl. Anhang C). Das Temperaturprofil zum Zeitpunkt t wird dann als konvergiert betrachtet, wenn der maximale Temperaturunterschied zwischen dem vorhergehenden und dem aktuellen Zeitschritt für alle Koordinaten r kleiner 10^{-6}K ausfällt.

Für die Berechnungen müssen aber zunächst noch eine Reihe von Materialkenngrößen bereitgestellt werden. Der temperaturabhängige spektrale Emissionsgrad ϵ_w^λ zur Applikation der Randbedingung Gl. (2.17) entspricht den Literaturwerten von Whitson, 1975. Die verwendeten Werte sind in Anhang C gegeben. Effektive Albedo und Extinktion werden experimentell mit der BBC Methode ermittelt. Bei der Betrachtung poröser Medien, wie im Fall einer Faserisolation, wird in der Planck-Funktion i_p^λ der reelle Brechungsindex n_r eines porösen Materials durch einen Effektivwert n_r^* ersetzt. Nach Caren, 1969 und Daryabeigi u. a., 2011 hängt n^* stark von der Porosität oder - im Falle einer Faserisolation - vom Feststoffvolumenanteil ab. In dieser Arbeit wird für die Berechnung von n_r^* die Beziehung zwischen dem Brechungsindex von Aluminiumoxid n_r^* und dem Feststoffvolumenanteil f_V durch das Modell von Caren, 1969 hergestellt. Die Temperaturabhängigkeit der Brechungsindizes ergibt sich dabei durch die Verwendung der entsprechenden Kenndaten aus Abb. 4.4.

In der Diffusionsgleichung (6.8) müssen zudem Wärmekapazität, Wärmeleitfähigkeit und Dichte festgelegt werden. Für die Wärmekapazität von Aluminiumoxid finden die Werte aus Touloukian und Buyco, 1970 Verwendung und die Rohdichte der zylindrischen Probenkörper ρ_{fp} wird aus deren gemessener Geometrie und deren gemessener Masse bestimmt. Die gekoppelte Gas-Festkörper Wärmeleitfähigkeit $t c_{\text{sgb}}$ wird durch Gl. (2.23) aus Abschnitt 2.4.4 beschrieben, wobei der Kopplungsparameter C_{sb} experimentell ermittelt wird. Wie in Kap. 4 wird die temperaturabhängige Festkörperwärmeleitfähigkeit von Aluminiumoxid durch die Literaturwerte aus Kingery, 1955 vorgegeben. Ferner entsprechen die thermischen Gaseigenschaften von trockener Umgebungsluft den Angaben von Kadoya, Matsunaga und Nagashima, 1985. Sämtliche verwendeten thermischen

Kenndaten von Aluminiumoxid und Umgebungsluft sind in Tab. C.1 in Anhang C zusammengefasst.

Experimentelle Bestimmung des Kopplungsparameters C_{sb}

In Gl. (2.23) ist für die hier verwendete Faserisolation der Größenparameter o_{fg} von der Ordnung 10^{-4} und demzufolge gilt in guter Näherung $\frac{o_{fg}+1}{o_{fg}} \approx 1$. Der Größenparameter δ_{fg} ist durch den Orientierungsparameter, die Dichte des Faserwerkstoffes und die Rohdichte der Faserisolation eindeutig bestimmt. Somit kann durch Messung der Wärmeleitfähigkeit tc_{sgb} der Kopplungsparameter C_{sb} aus Gl. (2.23) berechnet werden. Um verfälschende Effekte durch Luftfeuchtigkeit (Adsorption von Wasser) auszuschließen, wird die Wärmeleitfähigkeit tc_{sgb} bei einer Temperatur von 200°C mit dem Laser-Flash-Verfahren (Netzsch LFA 457) ermittelt. Der Einfluss der Wärmestrahlung kann bei dieser Proben temperatur als vernachlässigbar betrachtet werden. Aus der experimentellen Temperaturleitfähigkeit wird mittels der gemessenen Rohdichte des Fasermaterials und dem Literaturwert für die Wärmekapazität von Aluminiumoxid aus Touloukian und Buyco, 1970 die Wärmeleitfähigkeit der Proben bestimmt. Für die Festlegung der noch verbleibenden Materialparameter des Faserwerkstoffes werden ebenfalls Literaturangaben genutzt. Der Wert der Wärmeleitfähigkeit von Aluminiumoxid bei 200°C entspricht den Angaben von Kingery, 1955. Der Elastizitätsmodul und die Dichte von Aluminiumoxid werden aus Auerkari, 1996 übernommen. Vermöge der verwendeten Literaturdaten und der experimentell bestimmten Temperaturleitfähigkeit kann Gl. (2.23) nach dem Kopplungsparameter C_{sb} aufgelöst werden. Als Ergebnis findet man schließlich den Wert $C_{sb} = 0.00391$ mit einer Standardabweichung von 0.00030. Sämtliche thermischen Literaturdaten, welche zur Bestimmung des Kopplungsparameters herangezogen wurden, sind im Anhang in Tabelle C.1 zusammengefasst.

Bestimmung von Albedo und Extinktion bei hohen Temperaturen

Die effektiven Transportgrößen Albedo und Extinktion wurden bei einer Temperatur von 1000°C mit der BBC-Methode (vgl. Abschnitt 3.2.2) im Intervall von $2\mu\text{m}$ bis $8\mu\text{m}$ bestimmt. In Abb. 6.6 und Abb. 6.7 werden die Ergebnisse gezeigt. Dabei wurde die Extinktion $\tilde{\sigma}_{\text{ext}\lambda}^* = \sigma_{\text{ext}\lambda}^*/\rho_{\text{fp}}$ wiederum als effektive spezifische Größe dargestellt. Aus technischen Gründen kann mit der BBC-Methode unterhalb von $2\mu\text{m}$ nicht gemessen werden, die eingezeichneten Messwerte zwischen $0.5\mu\text{m}$ und $2\mu\text{m}$ entsprechen denen der Raumtemperaturmessung. Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 erwähnt, erfolgt die spektrale Integration der Strahlungswärmestromdichte aus Gl. (2.15) über eine Summierung von bandgemittelten Werten. Die über Gl. (2.19) gemittelte effektive Albedo und Extinktion erscheinen in Abb. 6.7 als Balken. Da mit der BBC-Methode Messungen oberhalb der Temperatur von 1000°C nicht möglich sind, werden die experimentellen Größen aus Abb. 6.6 und Abb. 6.7 auch für die Berechnungen bei höheren Temperaturen verwendet.

Bestimmung der Probendichte

Die Gesamtprobendichte der zylindrischen Proben wurde geometrisch ermittelt und beträgt 616 kg/m^3 mit einer Standardabweichung von 43 kg/m^3 . Um Dichteschwankungen innerhalb einer Probe zu analysieren, wurden von einem Zylinder

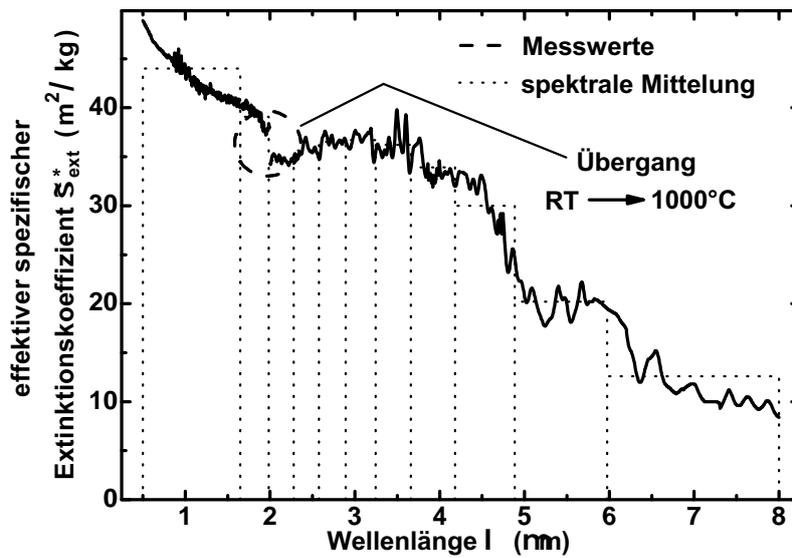


Abbildung 6.6: Die gemessene effektive spezifische Extinktion $\tilde{\sigma}_{\text{ext}}^*$ (Volllinie) und deren Mittelung über Spektralbänder (gepunktete Linie). Im Bereich kleiner Wellenlängen (bis $2 \mu\text{m}$) erfolgte die Messung bei Raumtemperatur und für größere Wellenlängen (ab $2 \mu\text{m}$) bei 1000°C .

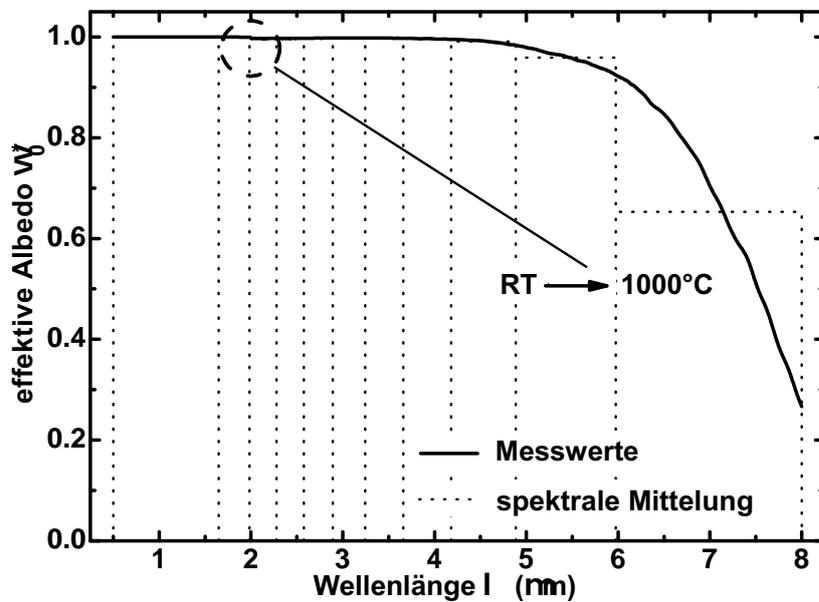


Abbildung 6.7: Die effektive Albedo $\hat{\omega}$ (Volllinie) und deren Mittelung über Spektralbänder (gepunktete Linie). Im Bereich kleiner Wellenlängen bis ($2 \mu\text{m}$) erfolgte die Bestimmung bei Raumtemperatur und für größere Wellenlängen bei 1000°C .

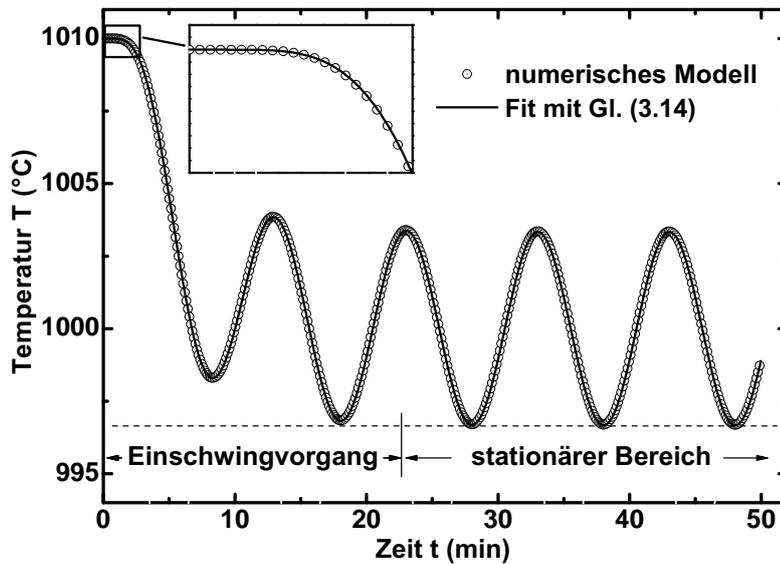


Abbildung 6.8: Das numerisch berechnete Temperaturprofil (Punkte) und der zugehörige Fit (Volllinie) mit Gl. (3.14). Die Soll-Amplitude der anregenden Temperaturschwingung beträgt 10 K, bei einer Anregungsfrequenz von $f_{Hz} = 0.1/\text{min}$. Die mittlere Temperatur T_m liegt bei 1000°C . Der Bildausschnitt links oben zeigt den Anfangsbereich in Vergrößerung.

schmale Scheiben mit einer Dicke von (1-3 mm) abgestochen und deren mittlere Dichte zu 636 kg/m^3 mit einer Standardabweichung von 77 kg/m^3 bestimmt.

6.2.2 Rechtfertigung des konduktiven Modells für partizipierende Medien

Mit den gesammelten Eingangsgrößen lässt sich die Kurve der Temperaturschwingung numerisch berechnen. Die Approximation der numerischen berechneten Kurve des gekoppelten Gesamtwärmetransportes erfolgt über einen least-squares Fitalgorithmus wobei in der Summe in Gl. (3.14) 65 Terme berücksichtigt werden. Die $\check{\chi}_n = \chi_n/R$ aus Gl. (3.13) zur Berechnung der Summanden in Gl. (3.14) werden über den in der Scilab Software implementierten Lösungsalgorithmus für nicht-lineare Gleichungen berechnet. Aus dem in Abb. 6.8 gezeigten Ergebnis erkennt man unmittelbar, dass der gekoppelte Gesamtwärmetransport in der betrachteten Substanz durch ein konduktives Wärmeübertragungsverhalten nach Gl. (3.14) beschrieben werden kann. Selbst im Anfangsbereich des Einschwingvorganges gelingt die Anpassung ohne erkennbare Abweichung zur numerischen Kurve. Durch dieses Resultat wird auch die verwendete Auswertetechnik aus Abschnitt 3.5.5 mittels der analytischen Gleichungen (3.17) bis (3.27) gerechtfertigt.

6.2.3 Die berechneten und experimentell ermittelten Temperaturleitfähigkeiten

Abbildung 6.9 zeigt repräsentativ einen Ausschnitt des experimentellen und des numerisch berechneten Temperaturprofils bei einer mittleren Temperatur von

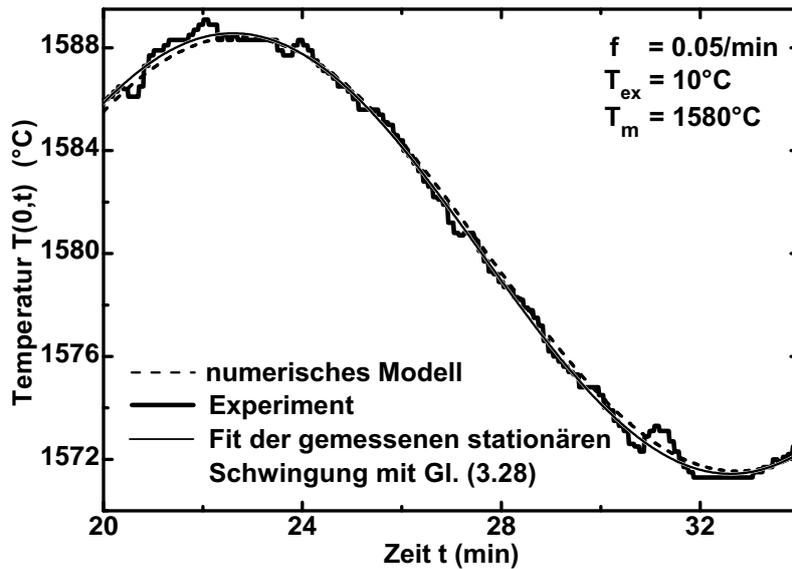


Abbildung 6.9: Ausschnitt des gemessenen (dicke Volllinie) und des numerisch berechneten Temperaturprofils (gestrichelte Volllinie) bei 1580°C mit einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$ und einer Soll-Amplitude von 10 K . Die dünne und weiß unterlegte Volllinie zeigt die mit Gl. (3.28) gefittete stationäre Temperaturschwingung des Experiments.

1580°C und einer Anregungsfrequenz von $f_{\text{Hz}} = 0.05/\text{min}$. Die Messwerte sind als dicke Volllinie und der numerisch über Gl. (6.8) berechnete Temperaturverlauf als gestrichelte Linie gezeichnet. Die dünne Volllinie zeigt die mit Gl. (3.28) gefittete stationäre Temperaturschwingung des Experiments. Zwar liegen die experimentelle und die theoretische Kurve relativ dicht beieinander, sind aber nicht identisch. Wendet man den Algorithmus zur Ermittlung von Phasenverschiebung und Amplitudenverlustfaktor auch auf die numerische Kurve an, so findet man für die Phasenverschiebung einen Wert $\nu^{\text{th}} = 0.86\text{ rad}$ und für den korrespondierenden Amplitudenverlustfaktor $\eta^{\text{th}} = 0.82$. Demgegenüber zeigt das Experiment die Werte $\nu^{\text{exp}} = 0.82\text{ rad}$ und $\eta^{\text{exp}} = 0.83$ für Phasenverschiebung und Amplitudenverlustfaktor. Über die simultane Lösung der nichtlinearen Gleichungen (3.26) und (3.27) ergibt sich eine theoretische Temperaturleitfähigkeit $\kappa^{\text{th}} = 0.35 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, wohingegen experimentell mit $\kappa^{\text{exp}} = 0.39 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ein um etwa 10% höherer Wert ermittelt wird.

Die Temperaturkurven aus Abb. 6.9 und die daraus abgeleiteten Temperaturleitfähigkeiten anhand der Gleichungen (3.26) und (3.27) gelten für die Messung auf der Symmetrieachse der Probe - also Position A in Abb. 3.6. Über den Temperaturabgriff an der exzentrischen Messposition B und die Lösung der allgemeinen Gleichungen (3.24) und (3.25) können weitere Werte für die Temperaturleitfähigkeit gewonnen werden. Sämtliche an zentrischer und exzentrischer Position bestimmten Temperaturleitfähigkeiten sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst, wobei als Fehler die Standardabweichung des Mittelwerts angegeben wird. Die Werte in Tabelle 6.1 deuten an, dass die über Position B ermittelten Temperaturleitfähigkeiten κ_{B} grundsätzlich um etwa 10% bis 15% geringer ausfallen, als die

T in °C	κ_B	κ_A
	$10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	$10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$
1000	0.27 ± 0.03	0.31 ± 0.05
1200	0.32 ± 0.04	0.35 ± 0.02
1400	0.34 ± 0.04	0.39 ± 0.02
1580	0.38 ± 0.04	0.43 ± 0.05

Tabelle 6.1: Die aus dem Temperaturabgriff an den zwei unterschiedlichen Messpositionen A und B gewonnenen Messwerte der Temperaturleitfähigkeiten.

Temperaturleitfähigkeiten κ_A , welche aus der an konzentrischer Position ermittelten Temperaturkurve abgeleitet werden. Die Abweichungen liegen zwar noch innerhalb der allgemeinen Messunsicherheit, allerdings ist eine höhere Genauigkeit der Messmethode anzustreben. Hinweise, wie dieses Ziel erreicht werden kann, entnimmt man Abb. 3.5, in welcher Phase und Amplitude als Funktion des Kontrollparameters c_1^{-2} für feste Werte des Parameters c_2 abgebildet werden. In der derzeitigen Messkonfiguration liefert die Auswertung für alle Temperaturen und Frequenzen Werte zwischen 3 und 5 für den Parameter c_2 und die Werte des Kontrollparameters c_1^{-2} liegen näherungsweise zwischen 0.15 und 0.45. Innerhalb dieses Wertebereichs aber verlaufen die Kurven für Phase und Amplitude aus Abb. 3.5 relativ flach. Demzufolge führen bereits kleine Fehler bei der Bestimmung von Phase und Amplitude zu verhältnismäßig großen Fehlern für die abgeleitete Temperaturleitfähigkeit. Erstrebenswert wäre deshalb eine Erhöhung des Probendurchmessers und/oder eine Steigerung der Anregungsfrequenz, um Phase und Amplitudenverlust in Wertebereiche zu verschieben, welche mit den steiler verlaufenden Abschnitten der Kurven in Abb. 3.5 korrespondieren. Im Rahmen der hier vorliegenden Studie waren derartige Modifikationen aufgrund technischer Einschränkungen nicht realisierbar.

Sämtliche berechneten und experimentell ermittelten Werte für die Temperaturleitfähigkeit der Faserisolation sind in Abb. 6.10 gegenübergestellt. Die dargestellten experimentellen Werte entsprechen den Mittelwerten der Temperaturleitfähigkeiten aus Tabelle 6.1. Offensichtlich liegen die theoretisch vorhergesagten Temperaturleitfähigkeiten grundsätzlich unterhalb der experimentell ermittelten Werte. Weiterhin erkennt man, dass für Temperaturen oberhalb von 1000°C die numerisch ermittelten Temperaturleitfähigkeiten außerhalb des Fehlerbereichs der experimentellen Werte liegt. Als mögliche Ursachen für die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment kommen mehrere Aspekte in Betracht. Die Bestimmung des Kopplungsparameters C_{sb} erfolgt experimentell bei 200°C. Zudem wird C_{sb} als Eingangsparameter im numerischen Modell vereinfacht als temperaturunabhängige Größe aufgefasst. Im Prinzip wird demnach der konduktive Beitrag zur Temperaturleitfähigkeit im numerischen Transportmodell bei 200°C kalibriert und angenommen, dass sich bei der Extrapolation auf höhere Temperaturen die temperaturabhängigen Stoffeigenschaften von Aluminiumoxid und Luft identisch zu den Literaturwerten aus Touloukian und Buyco, 1970, Kingery, 1955 und Kadoya, Matsunaga und Nagashima, 1985 verhalten. Weiterhin erfolgten die numerischen Rechnungen für die gemessene Probendichte einer Gesamtprobe. Deshalb bilden die ausgeprägten Dichtefluktuationen (vgl. Abschnitt 3.5.3) einen zusätzlichen Unsicherheitsfaktor. Ein weiterer Aspekt betrifft die infrarot-optischen Transportparameter. Die bei Raumtemperatur und 1000°C gemessenen Effektivwerte

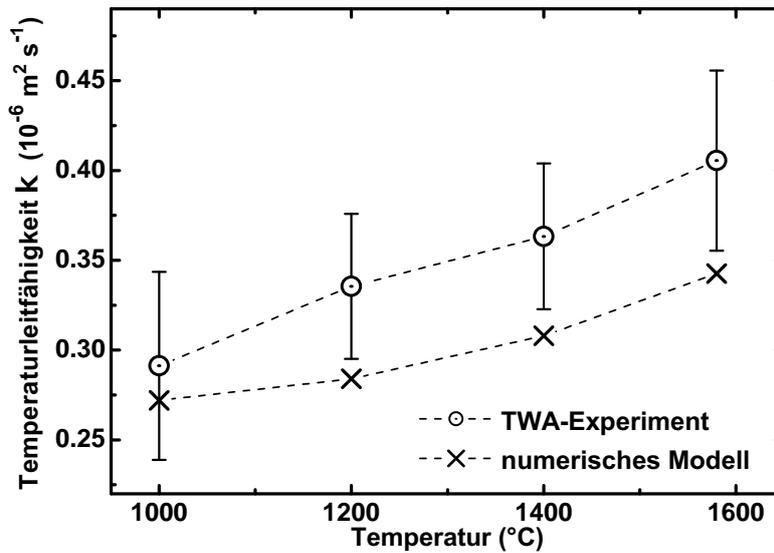


Abbildung 6.10: Die berechneten und experimentell ermittelten Temperaturleitfähigkeiten als Funktion der Temperatur.

der Albedo und der Extinktion wurden ebenso für die theoretischen Berechnungen bei darüber liegenden Temperaturen verwendet. Dieses Vorgehen impliziert die Annahme eines temperaturunabhängigen Absorptionskoeffizienten. Durch die Arbeiten von Lingart, Petrov und Tikhonova, 1982, Gryvnač und Burch, 1965, Cabannes und Billard, 1987 sowie Whitson, 1975 ist aber bekannt, dass der Absorptionskoeffizient von Aluminiumoxid mit steigender Temperatur deutlich zunimmt. Ein höherer Absorptionskoeffizient bewirkt aber nach den Ausführungen in Abschnitt 2.3 bzw. Abschnitt 2.4.5 einen erhöhten Strahlungsbeitrag zur Gesamtwärmeleitfähigkeit bzw. Gesamttemperaturleitfähigkeit. Insbesondere der Umstand, dass die numerischen Werte der Temperaturleitfähigkeit ab einer Temperatur von 1200°C unterhalb des Fehlerbereichs der Messwerte liegen, lässt sich mit letztgenanntem Argument gut erklären.

Abschließend sollen die mit der TWA-Methode erzielten Messergebnisse mit den Angaben des Herstellers verglichen werden. Letztere wurden unter Verwendung der Heißdrahtmethode für Temperaturen von 1000°C und 1200°C ermittelt. Mit der Heißdrahtmethode werden grundsätzlich Wärmeleitfähigkeiten gemessen, deshalb werden aus den Temperaturleitfähigkeiten der TWA-Experimente und des numerischen Modells mithilfe der gemessenen Probendichten und den Literaturangaben für die spezifische Wärmekapazität von Aluminiumoxid (Tabelle C.1) die entsprechenden Wärmeleitfähigkeiten berechnet. Die Resultate werden in Tabelle 6.2 vorgestellt und man erkennt, dass die mit der Heißdrahtmethode ermittelten Wärmeleitfähigkeiten mit den Ergebnissen der TWA-Methode konsistent sind.

T in °C	Wärmeleitfähigkeit tc in W/(mK)		
	Hersteller	TWA	Theorie
1000	0.24	0.22	0.21
1200	0.26	0.26	0.23

Tabelle 6.2: Vergleich der experimentellen und theoretischen Wärmeleitfähigkeiten.

6.3 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

In Abschnitt 6.1 wurde deutlich, dass die experimentell ermittelten effektiven Streugrößen, durch die auf Basis der gemessenen Durchmesservertelung theoretisch berechneten Größen, nur unzureichend nachgebildet werden können. Besonders im kurzwelligen Infrarotbereich zeigen sich große Abweichungen. REM-Aufnahmen offenbaren jedoch, dass sich neben den Fasern auch andere geometrische Strukturen, z. B. Agglomerate aus Mikropartikeln, mit kleineren Abmessungen befinden. Lässt man nur kleine Anteile an sphärischen Mie-Streuern im theoretischen Modell zu, dann kann der experimentell gefundene Anstieg der effektiven Extinktion zu hohen Frequenzen zufriedenstellend modelliert werden. Die Abweichungen im langwelligen Infrarotbereich lassen sich zuvorderst mit dem nicht exakt bekannten Absorptionsverhalten des Fasermaterials begründen.

In einer experimentellen Studie wurde die Eignung der TWA-Methode für die Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Faserisolationen bei hohen Temperaturen bis 1580°C demonstriert. Parallel zu den experimentellen Untersuchungen wurde ein gekoppeltes Wärmetransportmodell für zylindrische Proben entwickelt, welches eine quantitative Vorhersage der Temperaturleitfähigkeit erlaubt. Für die numerischen Rechnungen wurden dabei experimentell ermittelte optische Transportparameter bereitgestellt. Der Vergleich zwischen den experimentell bestimmten und den numerisch ermittelten Werten für die temperaturabhängige Temperaturleitfähigkeit liefert eine zufriedenstellende Übereinstimmung. Weiterhin findet man gute Übereinstimmung zwischen den Herstellerangaben und den durchgeführten TWA-Experimenten in Bezug auf die vom Hersteller spezifizierte Wärmeleitfähigkeit bei Temperaturen von 1000°C und 1200°C .

Zusammengefasst lässt sich schlussfolgern, dass mit der TWA-Technik potentiell eine vielversprechende, hinreichend genaue Messmethode existiert, um die derzeit etablierten Messtechniken wie die Guarded-hot-plate- oder die Heißdraht-Methoden insbesondere bei Hochtemperaturmessungen zu ergänzen.

Abschließende Betrachtung

Abschließend folgen noch einige Anmerkungen zur weiteren Vervollständigung der im Rahmen dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse. Die vielversprechenden Resultate der numerischen Studie über die Eignung von Hohlfasern als Basis einer thermischen Hochtemperaturisolation erfordern notwendig eine experimentelle Verifikation. Die Bereitstellung geeigneter Hohlfasern könnte beispielsweise über die in Rennebeck, 2001 genannten Herstellungsverfahren realisiert werden. Als experimentelle Methoden zur Charakterisierung der Streueigenschaften im Infrarotbereich eignen sich beispielsweise Transmissions- und/oder Reflexionsmessungen wie bei Lee und Cunnington, 2000 oder die Methoden zur infrarot-optischen Charakterisierung aus Manara, 2001 (vgl. Abschnitt 3.2). Letztendlich sollte dann auch die Gesamtwärmeleitfähigkeit bzw. die Temperaturleitfähigkeit bei hohen Temperaturen gemessen werden, um auftretende Einflüsse von Gasatmosphäre und Faserkontakten zu berücksichtigen. Aufgrund der zufriedenstellenden Ergebnisse in Abschnitt 6.2.3 erscheint für diese Messaufgabe die in Kap. 3.5 erörterte TWA-Technik prinzipiell als geeignet. Vor der weiteren Anwendung der Methode ist aber die Durchführung geeigneter Optimierungsmaßnahmen empfehlenswert. Insbesondere wäre ein der Methode entsprechend angepasster Ofen notwendig. Dieser sollte die Vermessung größerer Probenvolumina bei höheren Anregungsfrequenzen erlauben. Wünschenswert wäre zudem eine Steigerung der Temperaturhomogenität entlang der Ofeninnenwand. Technisch könnte dieser optimierte Ofen beispielsweise als vertikaler Rohrofen ausgeführt sein. Die Beheizung erfolgt dabei über Heizelemente, welche entlang der Innenwand symmetrisch und in dichter Folge angeordnet sind. Die Innenwand sollte dabei aus einem Material mit hoher Wärmeleitfähigkeit wie zum Beispiel Aluminiumoxid bestehen. Weiterhin muss die thermische Isolation des Rohrofens bezüglich seiner äußeren Umgebung derart bemessen sein, dass die Ofeninnentemperatur der oszillierenden Solltemperatur noch folgen kann. Anzustreben wäre dies insbesondere für Temperaturen unterhalb von 1000°C, also der Temperaturuntergrenze des derzeitigen Aufbaus.

Anhang A

Ergänzungen zu Kapitel 2

Dieser Teil des Anhangs liefert Ergänzungen zu den Ausführungen in Kapitel 2. Den Schwerpunkt bildet dabei ein Abgleich der implementierten numerischen Algorithmen mit verfügbaren Literaturdaten. Um Verwechslungen vorzubeugen, werden bei dem Verweis auf Abbildungen, Gleichungen, Tabellen etc. in Referenzen, die entsprechenden Begriffe Abbildungen, Gleichungen usw. ausgeschrieben. Dies gilt übergreifend für den gesamten Anhang.

A.1 Ergänzungen zur Theorie der Zylinderstreuung

A.1.1 Anmerkung zu Barabás, 1987

In Abbildung 2 von Barabás, 1987 wird das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten explizit angegeben. Der Eintrag in Zeile 9 und Spalte 4 ist jedoch fehlerhaft. Anstelle von ρ_3 muss durch ρ_2 dividiert werden. Auch im ersten Spaltenvektor der Inhomogenität (Vorfaktor α) befindet sich im vorletzten Eintrag ein Druckfehler. Hier muss das negative Vorzeichen verschwinden. Neben Abbildung 2 liefert Barabás, 1987 einen Algorithmus zur Aufstellung des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten für unterschiedliche Anzahl der Zylinderschichten L . Leider kann auch dieser Algorithmus aufgrund zweier Druckfehler nicht direkt übernommen werden. In den Gleichungen (33) und (34) von Barabás, 1987 sind die Vorfaktoren der Zylinderfunktionen vertauscht. Der Vorfaktor von Gleichung (33) gehört zu Gleichung (34) und umgekehrt. Dies hat zur Folge, dass auch in Gleichung (39) von Barabás, 1987 der Nenner im ersten Faktor inkorrekt dargestellt wird. Anstelle von μ_p^2 muss durch $n_p \mu_p$ dividiert werden. Weder das in Barabás, 1987 explizit angegebene lineare Gleichungssystem noch der Algorithmus zur Aufstellung desselben können also direkt übernommen werden.

A.1.2 Die Komponenten des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten

Die Komponenten des in Abschnitt 2.5 dargestellten Gleichungssystems (2.52) zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten werden im Folgenden explizit aufgeführt. Die ersten vier Einträge in den Vektoren $\hat{D}_{n,I}$ und $\hat{D}_{n,II}$ lauten:

$$\hat{D}_{n,I}^T = \left[-\frac{inh}{m_0 k r_1} J_n(l_0 r_1), m_0 l_0 J_n'(l_0 r_1), \frac{l_0^2}{m_0} J_n(l_0 r_1), 0 \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{D}_{n,II}^T = \left[-l_0 J_n'(l_0 r_1), -\frac{inh}{k r_1} J_n(l_0 r_1), 0, l_0^2 J_n(l_0 r_1) \right] \quad (\text{A.2})$$

wobei das hochgestellte T die transponierten Vektoren bezeichnet. Die Vektoren $\hat{D}_{n,I}$ und $\hat{D}_{n,II}$ können aus den $\hat{D}_{1n,I}$ und $\hat{D}_{1n,II}$ durch die Ergänzung von $4(L-1)$ Nullen erzeugt werden.

In der vorliegenden Arbeit setzt sich die $4L \times 4L$ Matrix \hat{X}_n aus den Teilmatrizen \hat{X}_n^{ij} zusammen:

$$\hat{X}_n = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \hat{X}_n^{ij} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $i, j \in [1 \dots L]$ und L als Anzahl der Schichten des Zylinders. Beispielsweise ist im Falle eines homogenen Zylinders ($L = 1$) die Matrix \hat{X}_n identisch zu \hat{X}_n^{11} . Die einzelnen Komponenten \hat{X}_n^{ij} lauten ausgeschrieben wie folgt:

$$\hat{X}_n^{11} = \begin{pmatrix} \frac{inh_{inc}}{m_0 kr_1} H_n(l_0 r_1) & l_0 H'_n(l_0 r_1) & -\frac{inh_{inc}}{m_1 kr_1} J_n(l_1 r_1) & -l_1 J'_n(l_1 r_1) \\ -m_0 l_0 H'_n(l_0 r_1) & \frac{inh_{inc}}{kr_1} H_n(l_0 r_1) & m_1 l_1 J'_n(l_1 r_1) & -\frac{inh_{inc}}{kr_1} J_n(l_1 r_1) \\ -\frac{l_0^2}{m_0} H_n(l_0 r_1) & 0 & \frac{l_1^2}{m_1} J_n(l_1 r_1) & 0 \\ 0 & -l_0^2 H_n(l_0 r_1) & 0 & l_1^2 J_n(l_1 r_1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_n^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{inh_{inc}}{m_1 kr_1} Y_n(l_1 r_1) & -l_1 Y'_n(l_1 r_1) \\ 0 & 0 & m_1 l_1 Y'_n(l_1 r_1) & -\frac{inh_{inc}}{kr_1} Y_n(l_1 r_1) \\ 0 & 0 & \frac{l_1^2}{m_1} Y_n(l_1 r_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1^2 Y_n(l_1 r_1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_n^{13} = \mathbf{0}$$

$$\hat{X}_n^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{inh_{inc}}{m_1 kr_2} J_n(l_1 r_2) & l_1 J'_n(l_1 r_2) \\ 0 & 0 & -m_1 l_1 J'_n(l_1 r_2) & \frac{inh_{inc}}{kr_2} J_n(l_1 r_2) \\ 0 & 0 & -\frac{l_1^2}{m_1} J_n(l_1 r_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_1^2 J_n(l_1 r_2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_n^{22} = \begin{pmatrix} -\frac{inh_{inc}}{m_2 kr_2} J_n(l_2 r_2) & -l_2 J'_n(l_2 r_2) & \frac{inh_{inc}}{m_1 kr_2} Y_n(l_1 r_2) & l_1 Y'_n(l_1 r_2) \\ m_2 l_2 J'_n(l_2 r_2) & -\frac{inh_{inc}}{kr_2} J_n(l_2 r_2) & -m_1 l_1 Y'_n(l_1 r_2) & \frac{inh_{inc}}{kr_2} Y_n(l_1 r_2) \\ \frac{l_2^2}{m_2} J_n(l_2 r_2) & 0 & -\frac{l_1^2}{m_1} Y_n(l_1 r_2) & 0 \\ 0 & l_2^2 J_n(l_2 r_2) & 0 & -l_1^2 Y_n(l_1 r_2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_n^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{inh_{inc}}{m_2 kr_2} Y_n(l_2 r_2) & -l_2 Y'_n(l_2 r_2) \\ 0 & 0 & m_2 l_2 Y'_n(l_2 r_2) & -\frac{inh_{inc}}{kr_2} Y_n(l_2 r_2) \\ 0 & 0 & \frac{l_2^2}{m_2} Y_n(l_2 r_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_2^2 Y_n(l_2 r_2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_n^{31} = \mathbf{0}$$

$$\hat{X}_n^{32} = \begin{pmatrix} \frac{inh_{inc}}{m_2 kr_3} J_n(l_2 r_3) & l_2 J'_n(l_2 r_3) & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 J'_n(l_2 r_3) & \frac{inh_{inc}}{kr_3} J_n(l_2 r_3) & 0 & 0 \\ -\frac{l_2^2}{m_2} J_n(l_2 r_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2^2 J_n(l_2 r_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

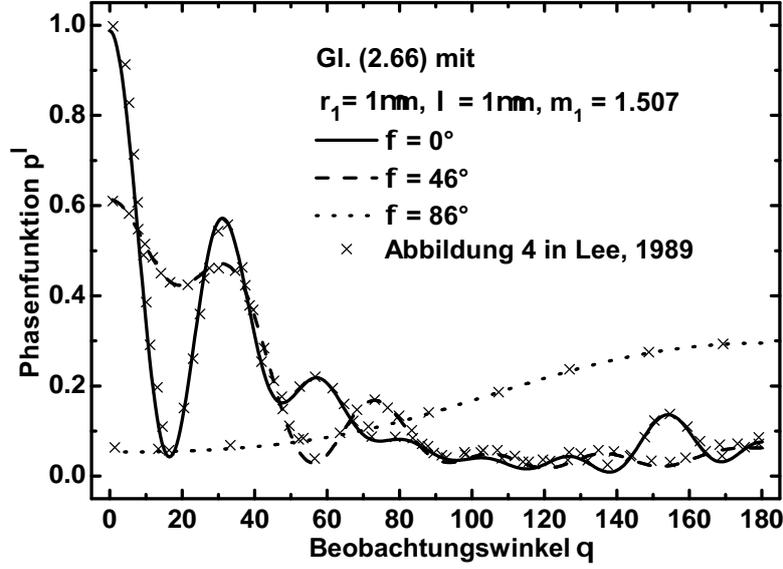


Abbildung A.1: Vergleich der Phasenfunktion eines einzelnen Zylinders mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ nach Gl. (2.66) für verschiedene Einfallswinkel ϕ mit den Angaben aus Abbildung 4 in Lee, 1990b. Die Berechnungen wurden für eine Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$ und einem reellen Brechungsindex $m_1 = 1.507$ durchgeführt.

$$\hat{X}_n^{33} = \begin{pmatrix} -\frac{inh_{inc}}{m_3kr_3} J_n(l_3r_3) & -l_3 J_n'(l_3r_3) & \frac{inh_{inc}}{m_2kr_3} Y_n(l_2r_3) & l_2 Y_n'(l_2r_3) \\ m_3 l_3 J_n'(l_3r_3) & -\frac{inh_{inc}}{kr_3} J_n(l_3r_3) & -m_2 l_2 Y_n'(l_2r_3) & \frac{inh_{inc}}{kr_3} Y_n(l_2r_3) \\ \frac{l_3^2}{m_3} J_n(l_3r_3) & 0 & -\frac{l_2^2}{m_2} Y_n(l_2r_3) & 0 \\ 0 & l_3^2 J_n(l_3r_3) & 0 & -l_2^2 Y_n(l_2r_3) \end{pmatrix}$$

A.1.3 Abgleich mit Literaturdaten

Die für diese Arbeit entwickelten numerischen Berechnungsalgorithmen für die Streuung am unendlichen Zylinder (vgl. Abschnitt 2.5) wurden mit recherchierten Literaturdaten abgeglichen. Zur Verifikation des Algorithmus zur Berechnung der in Abschnitt 2.5 über Gl. (2.66) definierten Phasenfunktion eines einzelnen Zylinders dienen die Ergebnisse aus Lee, 1990b. Den Berechnungen zugrunde liegt ein Zylinder mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$, wobei verschiedene Einfallswinkel ϕ berücksichtigt werden. Lee, 1988 unterscheidet in seinen Ausführungen zwei Fälle: Ein nicht absorbierendes Medium mit $m_1 = 1.507$ bei der Wellenlänge $\lambda = 1 \mu\text{m}$ und ein stark absorbierendes Medium mit $m_1 = 1.05 - i \cdot 1.08$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 9.18 \mu\text{m}$. Abbildung A.1 zeigt die Resultate der Abgleichsrechnung für $\lambda = 1 \mu\text{m}$. Die entsprechenden Werte für die Wellenlänge $\lambda = 9.18 \mu\text{m}$ sind in Abb. A.2 dargestellt.

Im weiteren Verlauf wird der analog zu McKay, 1984 gestaltete Algorithmus (Kap. 2.5.2) zur Berechnung der Phasenfunktion räumlich isotrop orientierter Zylinder mit Literaturdaten aus Lee, 1990b abgeglichen. Die graphische Darstellung erfolgt in Abb. A.3.

Für die Bewertung der Streueigenschaften konventioneller und hohl ausgeführter

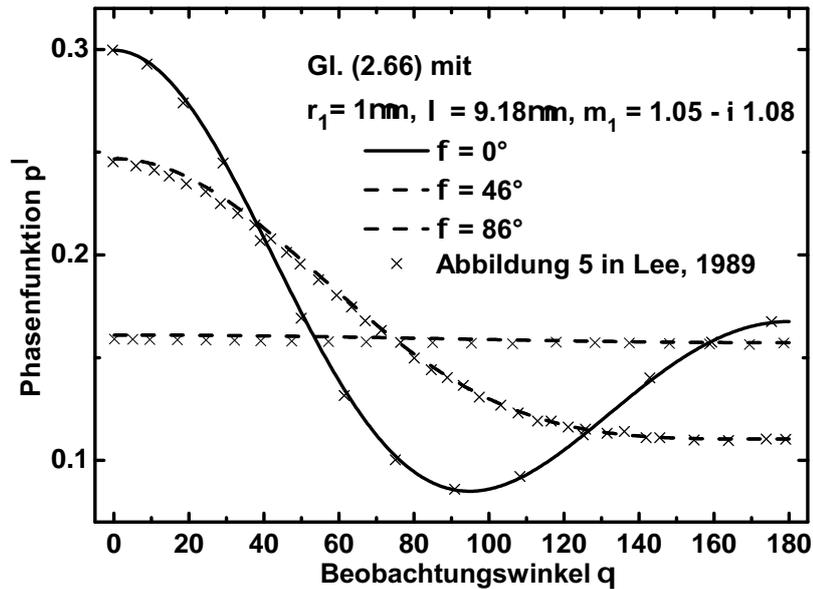


Abbildung A.2: Vergleich der Phasenfunktion eines einzelnen Zylinders mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ nach Gl. (2.66) für verschiedene Einfallswinkel ϕ mit den Angaben aus Abbildung 5 in Lee, 1990b. Die Berechnungen wurden für eine Wellenlänge $\lambda = 9.18 \mu\text{m}$ und einem Brechungsindex von $m_1 = 1.05 - i \cdot 1.08$ durchgeführt.

Fasern wird der Wirkungsquerschnitt der Rückstreuung bei diffuser Einstrahlung herangezogen. Die Herleitung erfolgte in Abschnitt 2.5.3 für parallel und räumlich isotrop angeordnete konventionelle Fasern. Diesbezügliche numerische Resultate findet man in der Literatur bei Lee, 1988 für parallel angeordnete Fasern und in Lee, 1989 für räumlich isotrop orientierte Fasern. Wie bereits in Abschnitt 2.5.3 erläutert, unterscheidet sich das Berechnungsschema Lees in formaler Hinsicht von dem eigens entwickelten Algorithmus mit den Integralen Gl. (2.71) und Gl. (2.74). Die Gegenüberstellung beider Verfahren erfolgt in Abb. A.4. Kreise repräsentieren dabei die Ergebnisse aus Lee, 1988 (parallele Fasern) und die Resultate aus der Anwendung von Gl. (2.64) und Gl. (2.73) sowie Gl. (2.74) werden als Kreuze (x) gezeigt. Als Dreiecke markiert, findet man die Ergebnisse aus Lee, 1989 für die räumlich isotrope Anordnung. Die korrespondierenden Ergebnisse unter Verwendung von Gl. (2.64) mit Gl. (2.71) und Gl. (2.72) sowie der Fallunterscheidung Gl. (2.70) sind als Kreuze (+) gekennzeichnet. Beide Berechnungsverfahren führen demnach auf übereinstimmende Ergebnisse. Wie in Lee, 1988 und Lee, 1989 wurde für die durchgeführten Rechnungen ein komplexer Brechungsindex von $m_1 = 4 - i \cdot 4.0$ verwendet.

Auch für mehrschichtige Zylinder wurden Abgleiche mit Literaturdaten unternommen. Für einen konzentrischen Zylinder mit den Brechungsindizes der äußeren Schicht von $1.41 - i \cdot 0.1$ und des Kerns von $1.6 - i \cdot 0.05$ zeigt Shah, 1970 für verschiedene Werte des Größenparameters und des Einfallswinkels numerisch berechnete Werte der Extinktionseffizienz Gl. (2.85). Verschieden zu den Ausführungen von Cohen und Alpert, 1979 und der vorliegenden Arbeit, in welchen der

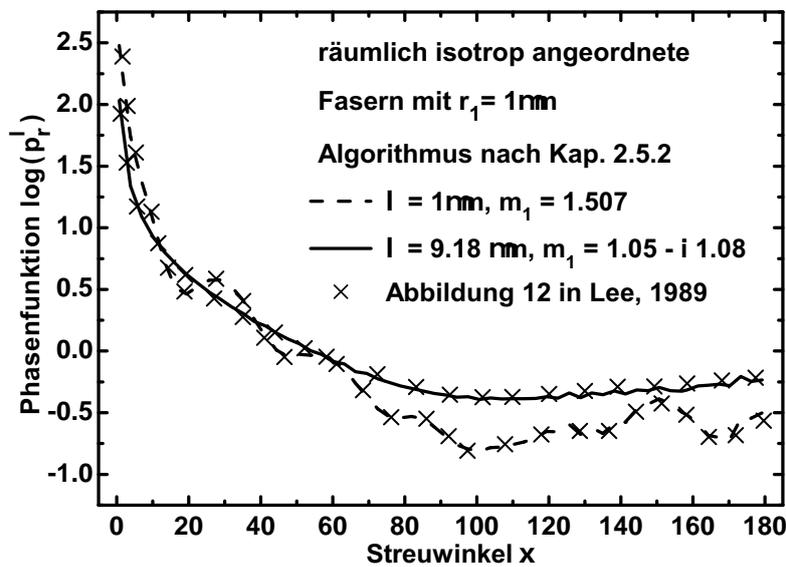


Abbildung A.3: Vergleich der Phasenfunktion räumlich isotrop angeordneter Zylinder mit Radius $r_1 = 1 \mu\text{m}$ mit den Angaben aus Abbildung 12 in Lee, 1990b für die Wellenlängen und Brechungsindizes aus Abb. A.1 bzw. Abb. A.2.

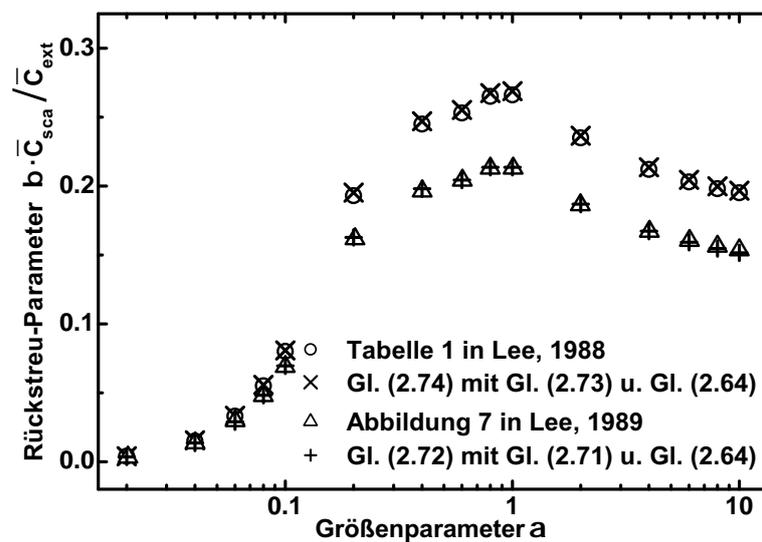


Abbildung A.4: Vergleich der eigens berechneten Rückstreuparameter mit den Resultaten aus Tabelle 1 in Lee, 1988 im Falle parallel angeordneter Fasern und Abbildung 7 aus Lee, 1989 für räumlich isotrope Fasern. Die Einstrahlung erfolgt in beiden Fällen diffus.

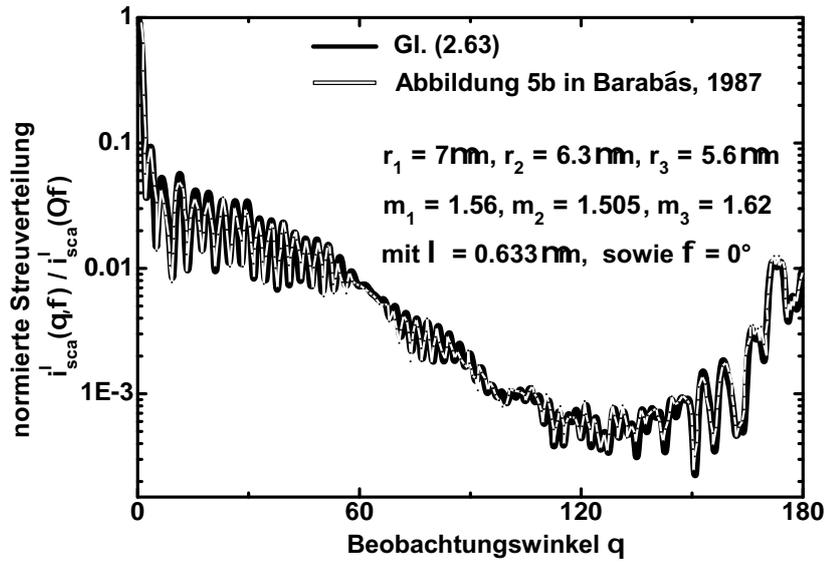


Abbildung A.5: Vergleich der berechneten normierten Intensitätsverteilung nach Gl. (2.63) mit Abbildung 5b aus Barabás, 1987 für einen dreischichtigen Zylinder.

geometrische Querschnitt durch $2r_1 \cos(\phi)$ definiert wird, bleibt in Shah, 1970 die Abhängigkeit des geometrischen Querschnitts vom Kosinus des Einfallswinkels unberücksichtigt. Abgesehen davon führt der für diese Arbeit implementierte numerische Berechnungsalgorithmus aber auf identische Werte für die Extinktionseffizienzen wie in Tabelle II von Shah, 1970.

Für einen aus drei Schichten zusammengesetzten Zylinder präsentiert Barabás, 1987 numerische Werte für die Intensitätsverteilung Gl. (2.63). In der Darstellung von Barabás, 1987 wird dabei die Verteilung auf einen Anfangswert von 1 bei $\theta = 0$ normiert. Den Abgleich zeigt Abb. A.5 für die Brechungsindizes $m_3 = 1.62$, $m_2 = 1.505$, $m_1 = 1.56$ und die Radien $r_3 = 5.6 \mu\text{m}$, $r_2 = 6.3 \mu\text{m}$, $r_1 = 7 \mu\text{m}$ bei senkrechtem Lichteinfall ($\lambda = 0.633 \mu\text{m}$). Die Resultate aus Barabás, 1987 sind als dünne und weiße Volllinie und die eigens berechneten Werte als dicke schwarze Volllinie dargestellt.

Die Publikation von Cohen und Alpert, 1979 liefert für den Fall räumlich isotrop angeordneter Zylinder mit einem Brechungsindex von 1.6 numerische Werte für die Extinktionseffizienz als Funktion des Größenparameters. Die eigens berechneten Werte werden in Abb. A.6 als Volllinie den Ergebnissen von Cohen und Alpert, 1979 (Kreise) gegenübergestellt. Auch die Algorithmen zur abhängigen Streuung aus Kap. 2.5.4 wurden mit Literaturangaben abgeglichen. Vergleichswerte liefert Lee, 1992 für zwei mit Silizium beschichtete Quarzfasern im Abstand c_f bei senkrechtem Lichteinfall. Die Extinktionsquerschnitte wurden dabei für verschiedene azimutale Orientierungen Ω des Faserpaares relativ zur einfallenden Lichtwelle berechnet (vgl. Abb. A.7).

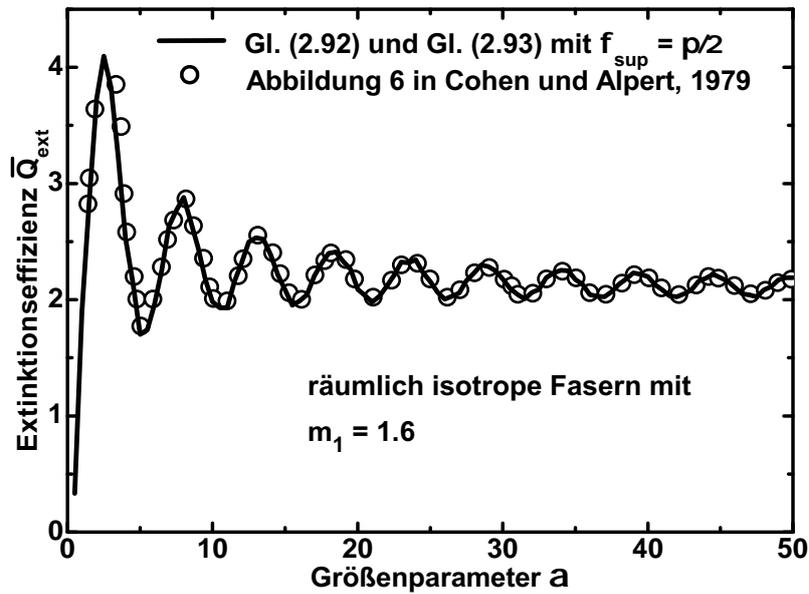


Abbildung A.6: Vergleich der eigens berechneten Extinktionseffizienzen, gemäß Gl. (2.92) und Gl. (2.93), mit den Angaben aus Abbildung 6 von Cohen und Alpert, 1979 für räumlich isotrop angeordneter Zylinder. Den Berechnungen liegt ein Brechungsindex von 1.6 zugrunde.

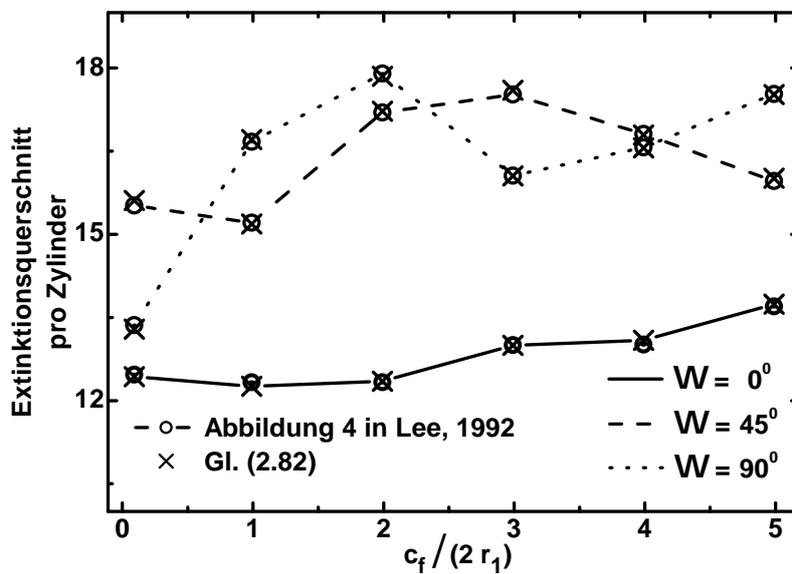


Abbildung A.7: Vergleichsrechnung zur abhängigen Streuung für ein Paar von beschichteten Fasern mit festem Abstand c_f und variierender azimuthaler Orientierung relativ zur einfallenden ebenen Lichtwelle. Eigene Ergebnisse sind als Kreuze abgebildet und die Resultate aus Abbildung 4 in Lee, 1992 erscheinen als Kreise.

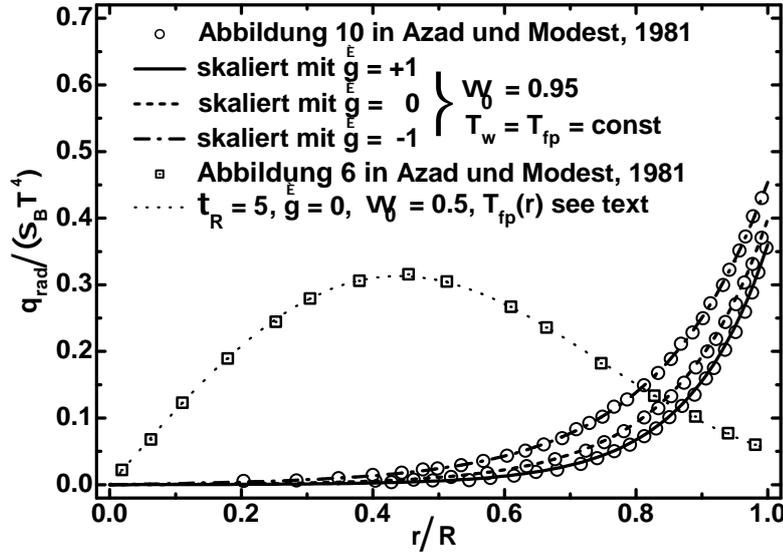


Abbildung A.8: Vergleich der berechneten Strahlungswärmestromdichten unter Benutzung von Gl. (2.11), Gl. (2.15) und Gl. (2.17) mit den Resultaten aus (Abbildung 6) und (Abbildung 10) aus Azad und Modest, 1981.

A.2 Ergänzungen zur Diffusionsapproximation der Strahlungstransportgleichung

In Abschnitt 2.4.2 wurde mit der Diffusionsapproximation eine Methode zur näherungsweise Lösung der Strahlungstransportgleichung vorgestellt. In dem abgehandelten Spezialfall für ein zylindersymmetrisches Medium gibt Gl. (2.15) die entsprechende Differentialgleichung für Effektivwerte der Albedo und der Extinktion an. Die Skalierungsregeln zur Berechnung der Effektivwerte sind über die Gln. (2.11) gegeben. Diese sind wegen $g = \check{g}/3$ identisch zu den Skalierungsregeln der Gln. (2.16). In der Arbeit von Azad und Modest, 1981 werden mit der unskalierten Form von Gl. (2.15) numerisch berechnete Kurven aufgeführt. Azad und Modest, 1981 setzt hierfür die folgende Parametrisierung an: $\check{g} = (-1, 0, 1)$, $\omega_0 = 0.95$, $\tau_R = 1/(1 - \omega_0)$, $\epsilon_w = 1$ und $T_{fp}(r) = T_w = \text{const}$. Wenn man die skalierte Albedo und die skalierte optische Dicke über Gl. (2.16) für die gegebenen Anisotropiefaktoren \check{g} bestimmt und mittels Gl. (2.15) und Gl. (2.17) die Strahlungswärmestromdichte für die gegebene Parametrisierung berechnet, so müssen die erhaltenen Resultate den Ergebnissen aus Abbildung 10 in Azad und Modest, 1981 entsprechen. Dass dies erfüllt ist, zeigen die Ergebnisse aus Abb. A.8.

Ein weiterer Abgleich erfolgt mittels Gegenüberstellung der Resultate aus Abbildung 6 (Kurve C) in Azad und Modest, 1981. Die vorgegeben Parameter sind nun $\check{g} = 0$, $\omega_0 = 0.5$, $\tau_R = 5$, $\epsilon_w = 1$ und $T_{fp}(r) = T_w + (T_{fp}(0) - T_w) [1 - (r/R)^2]$ mit dem Temperaturverhältnis $T_{fp}(0)/T_w = 5$. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Abb. A.8 enthalten. Im Rahmen, der aus der Digitalisierung der Graphen entstehenden Ungenauigkeiten sind, die Ergebnisse aus Azad und Modest, 1981 identisch zu den eigens berechneten Werten und belegen die Gültigkeit von Gl. (2.15) und Gl. (2.17) in Verbindung mit den Gleichungen (2.11) bzw. den Gleichungen (2.16).

A.3 Ergänzungen zur Mie-Streuung

Die Partialwellenkoeffizienten a_j^{sph} und b_j^{sph} der Mie-Streuung an sphärischen Streukörpern (Radius r_1 , Brechungsindex m_1) lassen sich mithilfe der sogenannten Ricatti-Bessel-Funktionen berechnen (van de Hulst, 1981):

$$\begin{aligned} a_j^{\text{sph}} &= \frac{\Psi_j'(m_1\alpha)\Psi_j(\alpha) - m_1\Psi_j'(\alpha)\Psi_j(m_1\alpha)}{\Psi_j'(m_1\alpha)\Pi_j(\alpha) - m_1\Pi_j'(\alpha)\Psi_j(m_1\alpha)} \\ b_j^{\text{sph}} &= \frac{m_1\Psi_j'(m_1\alpha)\Psi_j(\alpha) - \Psi_j'(\alpha)\Psi_j(m_1\alpha)}{m_1\Psi_j'(m_1\alpha)\Pi_j(\alpha) - \Pi_j'(\alpha)\Psi_j(m_1\alpha)}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit dem Größenparameter $\alpha = 2\pi r_1/\lambda$. Für den Brechungsindex der Umgebung soll gelten: $m_0 = 1$. Die Ricatti-Bessel-Funktionen Ψ_j und Π_j aus Gl. (A.3) lassen sich nach van de Hulst, 1981 durch die sphärischen Bessel-Funktionen und die sphärischen Hankel-Funktionen (2. Art) ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Psi_j(z) &= \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}^{\text{sph}}(z) \\ \Pi_j(z) &= \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H_{j+\frac{1}{2}}^{\text{sph}}(z); \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

mit z wird dabei eine komplexe Größe bezeichnet.

Anhang B

Anlagen zum Kapitel 3

Dieser Teil des Anhangs liefert zusätzliche Informationen im Zusammenhang mit den TWA-Experimenten. Zuerst wird die Herleitung der Gl. (3.14) aus Kap. 3.5 gezeigt und deren Gültigkeit belegt. Im folgenden Teil wird auf die Dimensionierung des zylindrischen Probenkörpers eingegangen. Schließlich werden Zusatzaspekte in Bezug auf die Durchführung und Auswertung der Experimente dargestellt.

B.1 Anmerkungen zu Gleichung (3.14) - Herleitung und Verifikation

Die Gleichung (3.10) wird, zusammen mit der Randbedingung (3.11), durch folgenden Ansatz gelöst (Carslaw und Jaeger, 1959):

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\check{\chi}_n r) \exp(-\check{\chi}_n^2 \kappa t) \quad (\text{B.1})$$

Wobei die $\check{\chi}_n$ aus den Nullstellen der Gl. (3.13) berechnet werden. Für die Antwort auf einen Temperatursprung von T_{ex} zur Zeit $t = 0$ findet man nach Carslaw und Jaeger, 1959 den Ausdruck (3.12). Die zeitliche Ableitung der Sprungfunktion Gl. (3.12) ergibt die Impulsfunktion oder Responsefunktion G_{resp} :

$$G_{\text{resp}}(r, t) = 2T_{\text{ex}}\kappa h_{\text{rel}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\check{\chi}_n^2 \kappa t) \frac{\check{\chi}_n^2 J_0(\check{\chi}_n r)}{R(\check{\chi}_n^2 + h_{\text{rel}}^2) J_0(\check{\chi}_n R)} \quad (\text{B.2})$$

Es wird angenommen, dass Probe und Umgebung zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur null aufweisen. Um die Probenantwort $T(r, t)$ auf eine kosinusförmige Anregung zu erhalten, ist im Rahmen der linearen Antworttheorie das folgende Faltungsintegral zu lösen:

$$T(r, t) = T_{\text{ex}} \int_0^t (\cos \omega t - 1) G_{\text{resp}}(r, t - t') dt' \quad (\text{B.3})$$

Das Faltungsintegral Gl. (B.3) kann analytisch integriert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Faltungsintegral durch seine Laplace-Transformierte

zu ersetzen. Anstelle des Integrals steht dann ein Produkt:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p_{\text{lp}})/T_{\text{ex}} = & \left(\underbrace{\frac{p_{\text{lp}}}{p_{\text{lp}}^2 + \omega^2}}_{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Transf.} \\ \cos \omega t}} - \underbrace{\frac{1}{p_{\text{lp}}}}_{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Transf.} \\ \text{Einheitssprung}}} \right) \cdot \underbrace{\frac{h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} r)}{\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} I_1^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R) + h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R)}}_{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Transf.} \\ \text{Impulsfunktion}}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

mit dem Laplace-Parameter p_{lp} (Dimension $1/s$) und der Laplace-Transformierten der Stufenfunktion $1/p_{\text{lp}}$ und der Kosinusfunktion $p_{\text{lp}}/(p_{\text{lp}}^2 + \omega^2)$. Der Ausdruck rechts stellt die Laplace-Transformierte der Impulsfunktion Gl. (B.2) dar (vgl. Carslaw und Jaeger, 1959). Dabei bezeichnen die I_0^{Bsl} und I_1^{Bsl} modifizierte Bessel-Funktionen der ersten Art von der Ordnung null bzw. eins. Die Rücktransformation in den Zeitbereich für $t > 0$ geschieht über die Lösung des nach T. J. A. Bromwich- und K. W. Wagner benannten Integrals (Pöschl, 1956):

$$F(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c - i\infty}^{\gamma_c + i\infty} \exp(-p_{\text{lp}} t) \bar{F}(r, p_{\text{lp}}) dp_{\text{lp}}, \quad (\text{B.5})$$

wobei γ_c dabei so groß gewählt wird, dass alle Singularitäten von $\bar{F}(r, p_{\text{lp}})$ links der Kontur ($\gamma_c - i\infty, \gamma_c + i\infty$) liegen. Zunächst erfolgt die Rücktransformation des Ausdrucks:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c - i\infty}^{\gamma_c + i\infty} \exp(p_{\text{lp}} t) \frac{p_{\text{lp}} h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} r)}{(p_{\text{lp}}^2 + \omega^2) \left[\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} I_1^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R) + h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}}(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R) \right]} dp_{\text{lp}}, \quad (\text{B.6})$$

also die Multiplikation des zweiten Terms in der linken Klammer von Gl. (B.4) mit der Laplace Transformierten der Impulsfunktion. Der Integrand von Gl. (B.6) besitzt zwei Polstellen 1. Ordnung bei $p_{\text{lp}} = \pm i\omega$ und unendlich viele Pole 1. Ordnung für den Fall, dass im Nenner der Ausdruck in den eckigen Klammern für $p_{\text{lp}} = -\kappa \check{\chi}_n^2$ zu Null wird (vgl. Carslaw und Jaeger, 1959).

Nach Doetsch, 1950, Pöschl, 1956 und Carslaw und Jaeger, 1959 kann Gl. (B.6) für $t > 0$ nach folgender Regel ausgewertet werden:

$$F(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c - i\infty}^{\gamma_c + i\infty} L(z) \exp(z t) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res } L(z_n) \exp(z_n t) \quad (\text{B.7})$$

mit den Polstellen z_n und wobei für die Residuen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res } L(z_n) \exp(z_n t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(z_n t) g(z_n)}{h'(z_n)}, \quad (\text{B.8})$$

mit den Definitionen $L(z) = g(z)/h(z)$ und $h'(z_n) = \frac{dh}{dz}|_{z_n}$. Zusammen mit der n-ten Polstelle $p_{\text{lp}} = -\kappa \check{\chi}_n^2$ bedeutet das für den Nenner des n-ten Summanden

in Gl. (B.8):

$$\begin{aligned} & \left(p_{\text{lp}}^2 + \omega^2 \right) \frac{d}{dp_{\text{lp}}} \left[\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} I_1^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R \right) + h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{p_{\text{lp}}}{\kappa}} R \right) \right]_{p_{\text{lp}} = -\kappa \check{\chi}_n^2} = \\ & R J_0(\check{\chi} R) (\check{\chi}_n^4 \kappa^2 + \omega^2) (h_{\text{rel}}^2 + \check{\chi}_n^2) (2\check{\chi}_n^2 \kappa)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

und somit ergibt die Rücktransformation des Ausdrucks (B.6) insgesamt:

$$- 2h_{\text{rel}} R T_{\text{ex}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\kappa \check{\chi}_n^2 t) \frac{\check{\chi}_n^4 \kappa^2 J_0(\check{\chi} r)}{J_0(\check{\chi} R) (\check{\chi}_n^4 \kappa^2 + \omega^2) (R^2 h_{\text{rel}}^2 + R^2 \check{\chi}_n^2)} \quad (\text{B.10})$$

Dabei wurde zur Berechnung die Gl. (3.13) sowie die Beziehung $I_0^{\text{Bsl}}(ix) = J_0(x)$ aus Watson, 1966 verwendet. Für $p_{\text{lp}} = \pm i\omega$ findet man auf analoge Weise den Ausdruck:

$$\text{Re} \left\{ \frac{h_{\text{rel}} T_{\text{ex}} I_0^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} r \right) \exp(i\omega t)}{\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} I_1^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} R \right) + h_{\text{rel}} R I_0^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} R \right)} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Das Ergebnis ist identisch zu dem in Carslaw und Jaeger, 1959 gefundenen Resultat für den Fall einer sinusförmigen und um die Phase ν_{ex} verschobenen Anregung, wenn man in Carslaw und Jaeger, 1959 $\nu_{\text{ex}} = \pi/2$ setzt.

Nun ist noch der erste Ausdruck in der Klammer von Gl. (B.4) mit der Impulsfunktion zu multiplizieren und die entsprechende Rücktransformation auszuführen. Nach Carslaw und Jaeger, 1959 führt dies gerade auf die mit -1 multiplizierte Sprungantwort:

$$- T_{\text{ex}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\kappa \check{\chi}_n^2 t) \frac{2h_{\text{rel}} J_0(\check{\chi} r)}{R (h_{\text{rel}}^2 + \check{\chi}_n^2)} \right) \quad (\text{B.12})$$

Die Summe der Ausdrücke (B.10) bis (B.12) ergibt dann das gesuchte Resultat für die Proben temperatur $T(r, t)$:

$$\begin{aligned} T(r, t) = & \text{Re} \left\{ \frac{h_{\text{rel}} T_{\text{ex}} I_0^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} r \right) \exp(i\omega t)}{\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} I_1^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} R \right) + h_{\text{rel}} I_0^{\text{Bsl}} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} R \right)} \right\} \\ & + 2T_{\text{ex}} h_{\text{rel}} R \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\kappa \check{\chi}_n^2 t) \frac{\omega^2 J_0(\check{\chi} r)}{J_0(\check{\chi} R) (\check{\chi}_n^4 \kappa^2 + \omega^2) (R^2 h_{\text{rel}}^2 + R^2 \check{\chi}_n^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Dabei wurde die Konstante $-T_{\text{ex}}$ in Gl. (B.12) bei der Summierung nicht berücksichtigt. Mithilfe der Identitäten $I_0^{\text{Bsl}}(\sqrt{ix}) = J_0(\sqrt{x} \exp[3i\pi/4])$ und $I_1^{\text{Bsl}}(\sqrt{ix}) = -iJ_1(\sqrt{x} \exp[3i\pi/4])$ sowie den Definitionen für c_1 und c_2 und mit $\chi_n = R\check{\chi}_n$ findet man durch elementare Umformungen von Gl. (B.13) den Ausdruck aus Gl. (3.14) in Kap. 3.5.

Die analytische Integration von Gl. (B.3) führt auf einen zeitunabhängigen Anteil:

$$T_{\text{const}} = - \sum_{n=1}^{\infty} f(r) (\check{\chi}_n^4 \kappa^2 + \omega^2) \quad (\text{B.14})$$

einen zeitlich periodischen Anteil:

$$T_{\text{period}}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(r) \left[\check{\chi}_n^4 \kappa^2 \cos(\omega t) + \check{\chi}_n^2 \kappa \omega \sin(\omega t) \right] \quad (\text{B.15})$$

und einen zeitlich exponentiell abklingenden Term, welcher das Einschwingverhalten beschreibt:

$$T_{\text{trans}}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(r) \omega^2 \exp(-\check{\chi}_n^2 \kappa t), \quad (\text{B.16})$$

wobei

$$f(r) = \frac{2h_{\text{rel}} T_{\text{ex}} J_0(\check{\chi}_n r)}{R J_0(\check{\chi}_n R) (\check{\chi}_n^4 \kappa^2 + \omega^2) (\check{\chi}_n^2 + h_{\text{rel}}^2)}. \quad (\text{B.17})$$

Und somit folgt für den Temperaturverlauf insgesamt:

$$T(r, t) = T_{\text{period}}(r, t) + T_{\text{trans}}(r, t). \quad (\text{B.18})$$

Man kann analytisch zeigen, dass Gl. (B.14) für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen den Wert $-T_{\text{ex}}$ konvergiert (vgl. Asmar, 2016). Deshalb bleibt der konstante Term T_{const} in Gl. (B.18) wiederum unberücksichtigt. Wie man sieht, ist der Ausdruck (B.16) identisch zum rechten Term in Gl. (B.13). Numerische Berechnungen ergeben zudem, dass der Ausdruck (B.15) für sehr große n gegen den Ausdruck (B.11) konvergiert. Die Gültigkeit der gefundenen Ergebnisse kann durch Einsetzen in Gl. (3.10) und Gl. (3.11) überprüft werden.

Zusätzlich wird die Gültigkeit von Gl. (3.14) bzw. Gl. (B.18) (für $n = 65$) und Gl. (3.17) in Verbindung mit Gl. (3.26) und Gl. (3.27) durch einen Abgleich mit den Resultaten eines Finite-Elemente (FE) Modells sichergestellt. Die Erzeugung des FE-Modells erfolgte mit der kommerziellen Ansys 15 Software. Grundlagen der FE-Methode und Anleitung für den speziellen Umgang mit Ansys finden sich beispielsweise in Groth und Müller, 2009 bzw. Müller und Groth, 2007 oder Madenci und Guven, 2006. Das FE-Modell besteht aus einer eindimensionalen und radialsymmetrischen Geometrie mit einer periodischen Neumannschen-Randbedingung zur Abbildung des konvektiven Wärmeübergangs nach Gl. (3.15). Die Eingangsparameter für das FE-Modell und die analytischen Gleichungen für den periodisch beheizten Zylinder sind: $T_{\text{m}} = 1190^\circ\text{C}$, $T_{\text{ex}} = 10^\circ\text{C}$, $\epsilon^* = 0.12$, $f_{\text{Hz}} = 0.15/\text{min}$, $\rho = 593 \text{ kg/m}^3$, $\kappa = 0.52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ und $R = 0.013 \text{ m}$. Die Ergebnisse und eine Kurzbeschreibung des FE-Modells finden sich in Abb. (B.1). Man findet Übereinstimmung zwischen den analytischen Ergebnissen durch Anwendung von Gl. (3.14) (Volllinie) und den mit Ansys berechneten Werten (Kreuze). Nach etwa einer Schwingungsperiode fallen auch die Resultate der stationären analytischen Rechnungen Gl. (3.17) mit den transienten Kurven zusammen.

B.2 Dimensionierung des zylindrischen Probenkörpers

Mit einem zweiten FE-Modell wird gezeigt, dass für die Dimensionierung des zylindrischen Probenkörpers ein Durchmesser- zu Längenverhältnis von 0.14 ausreicht, um den Probenkörper als von unendlicher Länge betrachten zu können. Das FE-Modell ist nun geometrisch zweidimensional und enthält eine zusätzliche konvektive Randbedingung mit dem relativen Wärmeübergangskoeffizienten

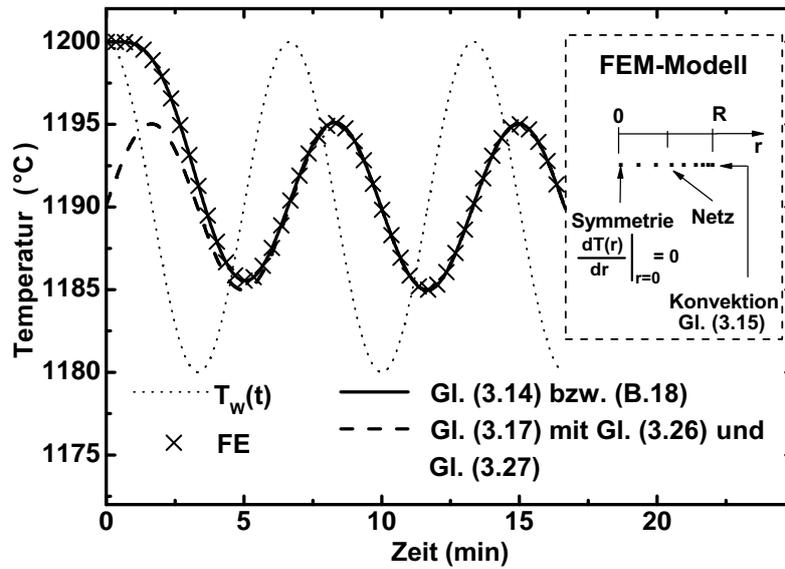


Abbildung B.1: Validierung der Gl. (3.14) bzw. (B.18) sowie der Gleichungen (3.17) bis (3.27) durch Abgleich mit FE-Berechnungen.

$h_{\text{rel}}^{\text{cs}}$ an den Stirnflächen (vgl. Abb. B.2). Für diese wird im Falle des endlichen Zylinders (Länge L) der Emissionsgrad aus Gl. (3.15) auf $\epsilon^* = 0.15$ gesetzt. Der unendlich lange Zylinder wird dagegen durch $h_{\text{rel}}^{\text{cs}} = 0$ abgebildet. In beiden Fällen gilt für den relativen Wärmeübergangskoeffizienten $h_{\text{rel}}^{\text{mt}}$ an der Zylinderaußenwand $\epsilon^* = 0.12$. Die Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten erfolgt gemäß Gl. (3.15). Alle weiteren Parameter sind identisch zum vorhergehenden eindimensionalen Modell. Die FE-Ergebnisse für die jeweiligen transienten Temperaturprofile sind in Abb. B.3) gezeigt. Die beiden Kurven verlaufen nahezu identisch. Die Auswertung der (scheinbaren) Temperaturleitfähigkeiten führt auf eine vernachlässigbare Erhöhung im Falle des endlichen Zylinders. Die Anwendbarkeit der Gleichungen (3.17) bis (3.27) zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit ist den FE-Ergebnissen zufolge gegeben.

B.3 Trennung von transienter und stationärer Temperaturkurve

Die Trennung von transienter und stationär schwingender Temperatur erfolgt durch einen Vergleich der Temperaturleitfähigkeiten, die aus der Auswertung einzelner (aufeinanderfolgender) Schwingungsperioden resultieren. Das Schwingungsverhalten wird dann als stationär betrachtet, wenn sich die ermittelten Temperaturleitfähigkeiten um weniger als 1.5% unterscheiden. Die Auswertung erfolgt erst 0.25 Schwingungsperioden danach. In Abb. B.4 ist der transiente Bereich aus Abb. 3.7 gezeigt. Die Volllinie beschreibt die gemessene Probenamplitude und die (extrapolierte) gefittete stationäre Temperaturkurve erscheint wie in Abb. 3.7 als eine mit Kreuzen unterlegte gestrichelte Linie. Für den Fit wurden die Temperaturdaten zwischen Periode (P) 0.95 und Periode 3.2 ausgewertet. Aus der

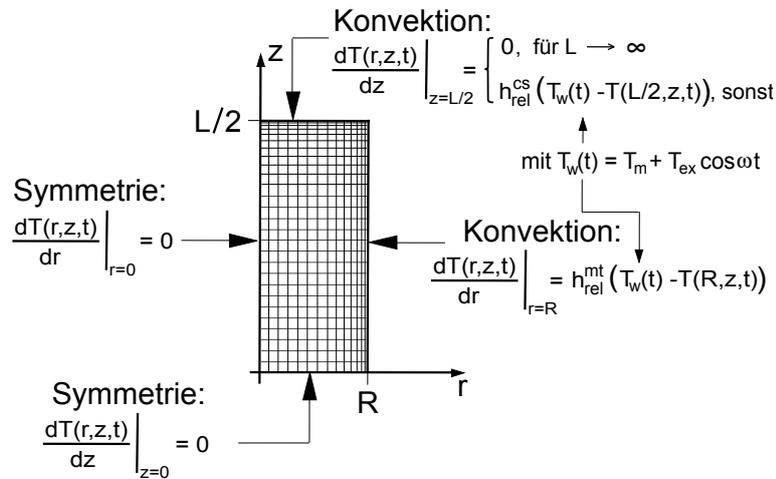


Abbildung B.2: FE-Modell für die Berechnung des Temperaturprofils an der Stelle $T(r = 0, z = 0, t)$ für einen endlichen Zylinder der Länge L und einen unendlichen Zylinder $L \mapsto \infty$.

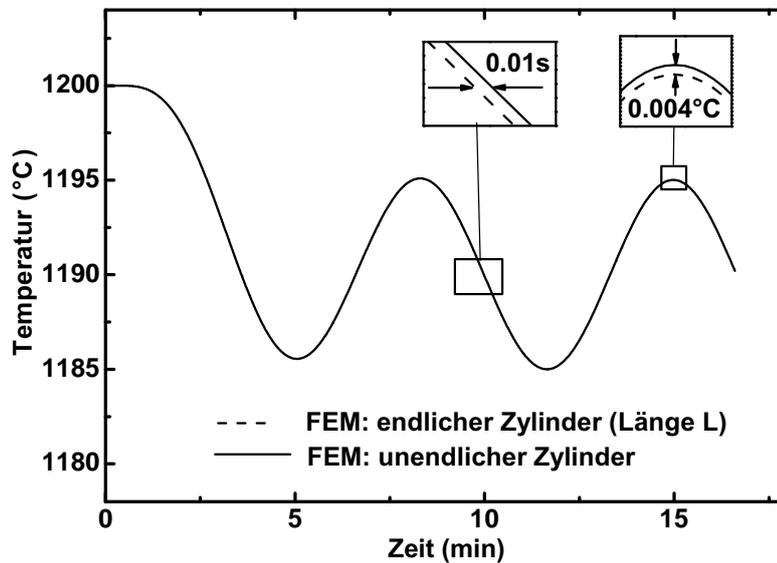


Abbildung B.3: FE-Berechnung des Temperaturprofils an der Stelle des Zylinderschwerpunktes ($T(r = 0, z = 0, t)$) für einen unendlich langen Zylinder (Volllinie) und einen Zylinder der Länge L (Strichlinie). Das zugehörige FE-Modell ist in Abb. B.2 gezeigt.

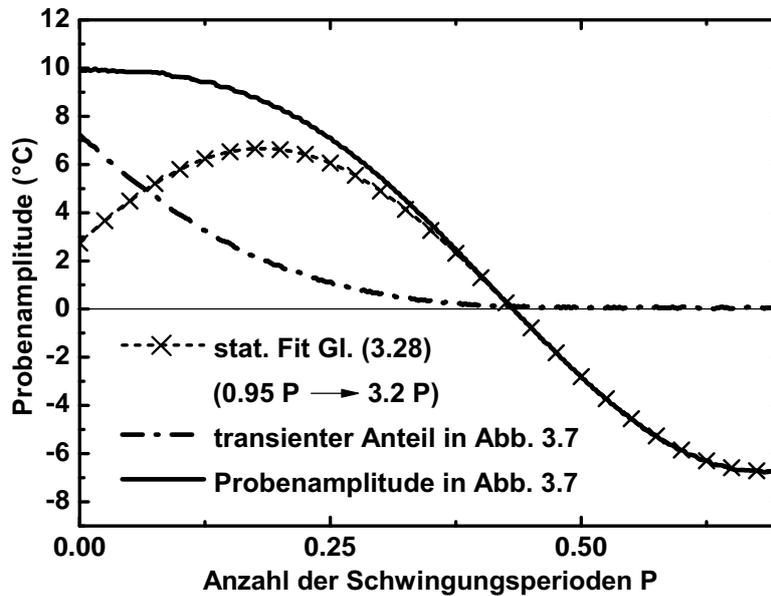


Abbildung B.4: Der transiente Einschwingvorgang der in Abb. 3.7 gezeigten Temperaturkurve mittig auf der Probenachse. Die Volllinie beschreibt die gemessene Probenamplitude und die (extrapolierte) gefittete stationäre Temperaturkurve erscheint als eine mit Kreuzen unterlegte gestrichelte Linie. Aus der Subtraktion ergibt sich der transiente Temperaturanteil (Strich-Punkt-Linie).

Subtraktion der gemessenen Temperatur (Volllinie) mit der stationären Temperatur ergibt sich der transiente Temperaturanteil (Strich-Punkt-Linie) während des Einschwingvorganges. Man erkennt unmittelbar, dass dieser transiente Anteil nach etwa einer halben Periode nahezu abgeklungen ist.

B.4 Abbruchkriterium für die Messung der stationären Temperaturkurven

Um die Temperaturleitfähigkeiten mit hinreichender Genauigkeit ermitteln zu können, ist es notwendig, dass die Messungen über einen genügend langen Zeitraum erfolgen. Ein sinnvolles Kriterium für den Abbruch einer Messung liefert die im folgenden erläuterte Methode. Dabei wird die Temperaturleitfähigkeit als Funktion der Messdauer bzw. als Funktion der Menge an ausgewerteten Datensätzen ermittelt. Die Auswertung erfolgt die kumulativ in zwei Richtungen: vom Beginn des detektierten Bereichs nach größeren Zeiten und beginnend vom zuletzt erfassten Datensatz in Richtung abnehmender Zeit. Die Menge der ausgewerteten Datensätze zur Ermittlung der Temperaturleitfähigkeit wird dabei sukzessive erhöht. Dann werden die Relativwerte gebildet, indem die Temperaturleitfähigkeiten als Funktion der Datenmenge durch die zuletzt ermittelte Temperaturleitfähigkeit dividiert werden. Die nachfolgende Analyse bezieht sich dann auf das Intervall der jeweils zweiten Datenhälfte der ermittelten relativen Temperaturleitfähigkeit. Der Wert für die Temperaturleitfähigkeit gilt dann als konvergiert, wenn die relativen Temperaturleitfähigkeiten in diesen Intervallen um weniger als $\pm 0.75\%$ variieren.

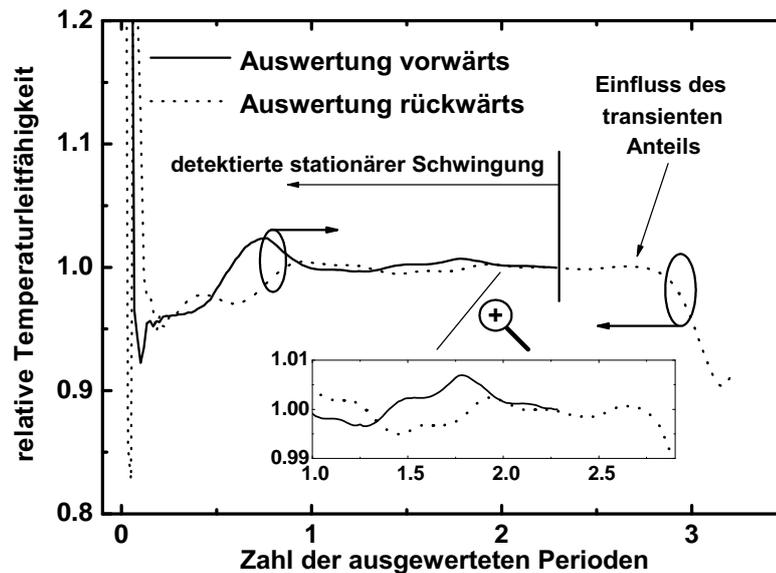


Abbildung B.5: Abbildung zum Abbruchkriterium am Beispiel der Temperaturkurven aus Abb. 3.7 bzw. Abb. B.4. Die Temperaturleitfähigkeit wird hier als Funktion der ausgewerteten Schwingungsperioden gezeigt. Die Auswertung erfolgt einmal in Vorwärtsrichtung (Volllinie) und einmal rückwärts gerichtet (Punkte).

Zusätzlich muss die Abweichung zwischen Mittelwert und Startwert in beiden Intervallen kleiner als $\pm 0.5\%$ ausfallen. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann können die Messungen abgebrochen werden. Die Mindest-Messdauer beträgt aber grundsätzlich zwei Perioden. Abbildung B.5 demonstriert die geschilderte Methodik für die Messung aus Abb. 3.7. Die Auswertung erfolgte dabei von Periode 0.95 bis Periode 3.2 und umgekehrt. Zur Konsistenzprüfung mit der Detektionsmethode für den stationären Schwingungsanteil wurde, bei der rückwärts gerichteten Auswertung, der transiente Bereich der Temperaturschwingung mit einbezogen. Der Beginn des transienten Bereichs ist dadurch gekennzeichnet, dass der Wert der ermittelten Temperaturleitfähigkeiten rapide abnimmt. Demnach wird der Bereich der stationären Temperaturschwingung korrekt erfasst.

Anhang C

Anlagen zu den Kapiteln 5 und 6

Dieser Teil des Anhangs liefert Anmerkungen zur Publikation von Stevens, 1984 im Zusammenhang mit den Ausführungen zur ADA-Näherung in Kapitel 5. Im Anschluss wird der Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Transportgleichung (6.8) in Kapitel 6 vorgestellt und schließlich erfolgt eine Auflistung weiterer Materialkennwerte, welche in Kapitel 6 verwendet wurden.

C.1 Anmerkungen zur Publikation von Stevens, 1984

Bei der Diskussion des schrägen Lichteinfalls in Kapitel 5 wurde auf Inkonsistenzen in den Ausführungen von Stevens, 1984 hingewiesen. Dies soll nun näher erläutert und begründet werden. Für die Berechnung der Extinktionseffizienzen aus der MSC-Theorie bleibt in Stevens, 1984, analog zu den Ausführungen in Lind und Greenberg, 1966, die Division durch den Kosinus des Einfallswinkels in Gl. (2.92) unberücksichtigt. Für Einfallswinkel ϕ größer Null konnte Cohen und Alpert, 1979 jedoch zeigen, dass dadurch das Babinetsche Prinzip ($Q_{\text{ext}} \rightarrow 2$ für $\alpha \rightarrow \infty$) verletzt wird. Wie in Cohen und Alpert, 1979 anschaulich dargestellt, führt ein Fehlen des Terms $\cos \phi$ im Nenner von Gl. (2.92) zu asymptotischen Grenzwerten kleiner als zwei für $\alpha \rightarrow \infty$. Dieses Verhalten zeigen konsequenterweise auch die Resultate der MSC-Theorie in Stevens, 1984. Allerdings führen die ADA Resultate ebenso asymptotischen Grenzwerte kleiner als zwei, was im Widerspruch zu den theoretischen Voraussetzungen in Stevens, 1984 steht.

In Analogie zu van de Hulst, 1981 und den Publikationen von Cross und Latimer, 1970 und Evans, Chen und Churchill, 1964 beschreibt auch Stevens, 1984 den Integralausdruck Gl. (2.91) für homogene Zylinder mit reellen Brechungsindizes m_1 durch die sogenannte Struve-Funktion erster Ordnung S_1 (Struve, 1882, van de Hulst, 1981):

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext}}^\lambda(\Phi) &= 2 \int_0^{\pi/2} \{1 - \cos(\Phi \cos \vartheta)\} \cos \vartheta \, d\vartheta \\ &= 2\Phi \int_0^{\pi/2} \sin(\Phi \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \\ &= \pi S_1(\Phi) \end{aligned} \tag{C.1}$$

mit $\Phi = 2\alpha(m_1 - 1)/\cos(\phi)$ und der Winkel ϑ ist in Abb. 2.8 abgebildet. Wie aber aus Abramowitz, 1964 bekannt, konvergiert $\pi S_1(\Phi)$ gegen zwei, wenn $\Phi \rightarrow \infty$ und dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen in Abbildung 4 von Stevens, 1984. Durch diese Tatsache können auch die Abweichungen zwischen den Ergebnissen für räumlich isotrope homogene Zylinder mit $m_1 = 1.33$ in Abb. 5.7a und Abbildung 6 von Stevens, 1984 begründet werden.

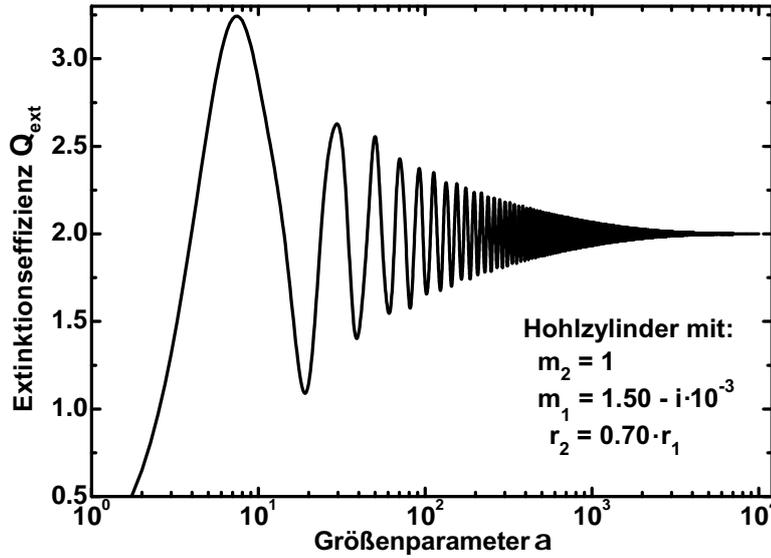


Abbildung C.1: Die Extinktionseffizienz Q_{ext} als Funktion des Größenparameters α nach Gl. (2.91). Für $\alpha \rightarrow \infty$ strebt die Extinktionseffizienz gegen zwei.

C.2 Asymptotischer Grenzwert der Extinktionseffizienz im Falle inhomogener Zylinder (ADA-Modell)

Anders als für homogene Zylinder konnte für mehrschichtige Zylinder, aufgrund der auftretenden Fallunterschiedungen bei der Bestimmung der Phasenverschiebung δ_{ADA} , kein analytischer Ausdruck für die Lösung des Integrals aus Gl. (2.91) gefunden werden. Dennoch liegt es nahe, dass auch für inhomogene Zylinder ein asymptotischer Grenzwert von 2 für $\alpha \rightarrow \infty$ für die Extinktionseffizienz gilt, wie das in Abb. C.1 gezeigte Fallbeispiel eines Hohlzylinders mit $m_1 = 1.5 - i \cdot 10^{-3}$ zeigt. Eine anschauliche Erklärung liefert die Tatsache, dass mit steigendem Größenparameter die Phasenverschiebung δ_{ADA} innerhalb der Integrationsgrenzen zunehmend stärker variiert und die Beiträge der Exponentialfunktion in Gl. (2.91) sich demzufolge gegenseitig in zunehmendem Maße aufheben.

C.3 Lösung der nichtlinearen Transportgleichung (6.8)

Zunächst wird der Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Transportgleichung (6.8) in Verbindung mit Gl. (2.15) vorgestellt. Der Ablauf orientiert sich dabei an den Ausführungen von Hahn u. a., 1997. Innerhalb eines Spektralbandes $m = [\lambda_m, \lambda_{m+1}]$ wird die korrespondierende Fraktion der spektralen Intensität $i_p^m(T)$ in Gl. (2.15) und Gl. (2.17) wie folgt ausgedrückt:

$$i_p^m(T) = \frac{\sigma_B}{\pi} (F_{0-\lambda_{m+1}}(T) - F_{0-\lambda_m}(T)) T^4 \quad (\text{C.2})$$

T in °C	Al ₂ O ₃		Air
	c_p	tc_{bulk}	tc_g
	J/(kg K)	W/(m K)	W/(m K)
200	1022	22.38	0.038
1000	1261	6.04	0.082
1200	1295	5.70	0.092
1400	1317	5.72	0.101
1580	1341	6.13	0.110

Tabelle C.1: Literaturwerte aus Touloukian und Buyco, 1970, Touloukian u. a., 1971 sowie Kadoya, Matsunaga und Nagashima, 1985 welche für die numerischen Berechnungen in Kap. 6.2 verwendet wurden.

wobei die $F_{0-\lambda}(T)$ nach Siegel und Howell, 1992 durch eine Reihenentwicklung approximiert werden können. Vermöge der Näherung für kleine Temperaturunterschiede innerhalb des betrachteten Mediums $T^4 \approx 4T\tilde{T}^3 - 3\tilde{T}^4$ findet man mit der abkürzenden Schreibweise $T_i^j := T(r_i, t_j)$:

$$i_p^m(T_i^{j+1}) \approx i_p^m(T_i^{j+1}, \tilde{T}_i) = \frac{\sigma_B}{\pi} \left(F_{0-\lambda_{m+1}}(\tilde{T}_i) - F_{0-\lambda_m}(\tilde{T}_i) \right) \left(4T_i^{j+1}\tilde{T}_i^3 - 3\tilde{T}_i^4 \right) \quad (\text{C.3})$$

Für die Berechnung der Temperatur zum nachfolgenden Zeitpunkt T_i^{j+1} wird $\tilde{T}_i = T_i^j$ als Ausgangswert angenommen; im ersten Iterationsschritt wird die Temperatur \tilde{T}_i' über Gl. (6.8) bestimmt und \tilde{T}_i durch \tilde{T}_i' substituiert. Die Iterationen werden solange wiederholt, bis das Konvergenzkriterium $\max|\tilde{T}_i' - \tilde{T}_i| < 10^{-6}K$ für die vorhergehenden und nachfolgenden Temperaturen erfüllt ist. Schließlich wird T_i^{j+1} auf \tilde{T}_i' gesetzt.

C.4 Materialkennndaten für das numerische Transportmodell

Es folgen die Materialdaten, welche im gekoppelten numerischen Transportmodell Gl. (6.8) und Gl. (2.15) verwendet wurden. Tabelle C.1 zeigt die temperaturabhängigen Eigenschaften von Aluminiumoxid und trockener Umgebungsluft. In Abb. C.2 wird weiterhin der spektrale Emissionsgrad von Aluminiumoxid für verschiedene Temperaturen gezeigt.

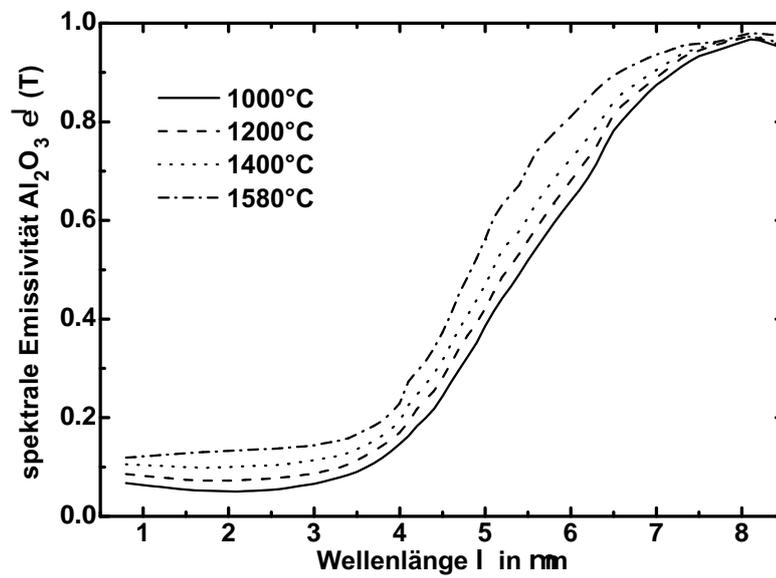


Abbildung C.2: Der temperaturabhängige spektraler Emissionsgrad von Aluminiumoxid nach Whitson, 1975.

Literatur

- Abeles, B., G. D. Cody und D. S. Beers (1960). „Apparatus for the Measurement of the Thermal Diffusivity of Solids at High Temperatures“. In: *Journal of Applied Physics* 31.9, S. 1585–1592.
- Abramowitz, M. (1964). „Struve Functions and Related Functions“. In: *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Hrsg. von M. Abramowitz und I. A. Stegun. ninth printing. New York: Dover Publications, Inc. Kap. 12.
- Alonso, C. T. (1976). *Temperature jump boundary conditions in radiation diffusion*. Techn. Ber. Livermore, California 94550: University of California, Lawrence Livermore Laboratory.
- Ångström, A. J. (1861). „Neue Methode, das Wärmeleitvermögen der Körper zu bestimmen“. In: *Annalen der Physik und der Chemie* 114.12, S. 513–530.
- Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen e. V. (2016). *Energieflussbild 2015 für die Bundesrepublik Deutschland*. Techn. Ber. Berlin.
- Asmar, N. H. (2016). *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. 3rd. ed. Dover Publications. Kap. Kap. 4, S. 250–254.
- Auerkari, P. (1996). *Mechanical and physical properties of engineering alumina ceramics*. Finland: Technical Research Center of Finland.
- Azad, F. H. (1985). „Differential Approximation to Radiative Transfer in Semi-transparent Media“. In: *Journal of Heat Transfer* 107, S. 478–484.
- Azad, F. H. und M. F. Modest (1981). „Evaluation of the Radiative Heat Flux in Absorbing, Emitting and Linear-Anisotropically Scattering Cylindrical Media“. In: *Journal of Heat Transfer* 103, S. 350–356.
- Barabás, M. (1987). „Scattering of a plane wave by a radially stratified tilted cylinder“. In: *Journal of the Optical Society of America A* 4.12, S. 2240–2248.
- Bärwolff, G. (2015). *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Bhattacharya, P. u. a. (2006). „Characterization of the temperature oscillation technique to measure the thermal conductivity of fluids“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49, S. 2950–2956.
- Bhattacharyya, R. K. (1980). „Heat-transfer model for fibrous insulations“. In: *ASTM STP 718*. Hrsg. von D. L. McElroy und R. P. Tye. American Society for Testing und Materials, S. 272–286.
- Blumm, J. (2013). „Thermal conductivity of engineering materials“. In: *Handbook of Measurement in Science and Engineering*. Hrsg. von Myer Kutz. Bd. 2. John Wiley & Sons, Inc. Kap. 35.
- BMWi und BMU (2012). *Erster Monitoring-Bericht „Energie der Zukunft“*. Techn. Ber. Berlin: Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie (BMWi) und Bundesministerium für Umwelt Naturschutz und Reaktorsicherheit (BMU).
- Bohren, C. F. und D. R. Huffman (1983). *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. New York: Wiley-Interscience. Kap. 8.4 und Anhang C.
- Born, M. und E. Wolf (1970). *Principles of Optics*. 4th. ed. Oxford: Pergamon Press.

- Brendel, H., G. Seifert und F. Raether (2016). „Heat Transfer Properties of Hollow-Fiber Insulation Materials at High-Temperatures“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. DOI: [10.2514/1.T4937](https://doi.org/10.2514/1.T4937). URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.T4937>.
- Brendel, H., G. Seifert und F. Raether (2017a). „Approximative derivation of the extinction efficiency for a two and threefold stratified cylinder“. In: *Optics Communications* 391, S. 141–147.
- Brendel, H., G. Seifert und F. Raether (2017b). „Determination of thermal diffusivity of fibrous insulating materials at high temperatures by thermal wave analysis“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108, S. 2514–2522.
- Cabannes, F. und D. Billard (1987). „Measurement of Infrared Absorption of Some Oxides in Connection with the Radiative Transfer in Porous and Fibrous Materials“. In: *International Journal of Thermophysics* 8.1, S. 97–118.
- Cape, J. A. und G. W. Lehman (1963). „Temperature and Finite Pulse-Time Effects in the Flash-Method for Measuring Thermal Diffusivity“. In: *Journal of Applied Physics* 34.7, S. 1909–1913.
- Caps, R. u. a. (1984). „Spectral transmission and reflection properties of high temperature insulation materials“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 27.10, S. 1865–1872.
- Caren, R. P. (1969). „Radiation Heat Transfer from a Metal to a Finely Divided Particulate Medium“. In: *Journal of Heat Transfer* 91.1, S. 154–156.
- Carslaw, H. S. und J. C. Jaeger (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Oxford University Press. Kap. 7 und Kap. 12.
- Chandrasekhar, S. (1960). *Radiation Transfer*. Dover.
- Cheremisinoff, P. N. und N. P. Cheremisinoff (1995). *Process Engineering Data Book*. Lancaster, Pennsylvania: Technomic Publishing Company, Inc. Kap. 24.
- Cohen, A. und P. Alpert (1979). „Extinction efficiency of obliquely and randomly oriented infinite cylinders“. In: *Journal of Applied Physics* 50.12, S. 8262–8264.
- Cross, D. A. und P. Latimer (1970). „General Solutions for the Extinction and Absorption Efficiencies of Arbitrarily Oriented Cylinders by Anomalous Diffraction Methods“. In: *Journal of the Optical Society of America* 60.7, S. 904–907.
- Cunnington, G. R. und S. C. Lee (1996). „Radiative Properties of Fibrous Insulations: Theory Versus Experiment“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 10.3, S. 460–466.
- Daryabeigi, K. u. a. (2011). „Combined Heat Transfer in High-Porosity High-Temperature Fibrous Insulations: Theory and Experimental Validation“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 25.4, S. 536–546.
- Davis, W. R. (1978). „Determination of the Thermal Conductivity of Refractory Insulating Materials by the Hot-Wire Method“. In: *Thermal Transmission Measurements of Insulation*. Hrsg. von R. P. Tye. ASTM STP 660. Philadelphia: American Society for Testing und Materials, S. 186–199.
- DIN, Kommission Reinhaltung der Luft (KRdL) im VDI und (1998). *VDI/DIN - Handbuch, Reinhaltung der Luft, Band 5*. Berlin: VDI.
- Dobrovinskaya, E. R., L. A. Lytvynov und V. Pishchik (2009). *Sapphire: Material, Manufacturing, Applications*. New York: Springer.
- Doetsch, G. (1950). *Handbuch der Laplace-Transformation Band 1: Theorie der Laplace-Transformation*. Basel: Springer Basel AG.
- Dög, A. (2004). „Minimierung der strukturbedingten Wärmeverluste von Industrieöfen“. Diss. TU Bergakademie Freiberg.

- Eisenmann Anlagenbau GmbH Co. & KG (2015). *Energy Balance for Kilns, Furnaces and Thermal Systems*. https://www.eisenmann.com/dam/jcr:76a67d1f-1b58-416f-9954-4dd2926d03f9/PHT_Datenblatt_Energiebilanz_en.pdf.
- Ernst, E. (2013). „Energy balance of a belt sinter furnace“. In: *Powder Metallurgy* 56.2, S. 96–101.
- Evans, L. B., J. C. Chen und S. W. Churchill (1964). „Scattering of Electromagnetic Radiation by Infinitely Long, Hollow, and Coated Cylinders“. In: *Journal of the Optical Society of America* 54.8, S. 1004–1007.
- Farone, W. A. und C. W. Querfeld (1966). „Electromagnetic Scattering from Radially Inhomogeneous Infinite Cylinders at Oblique Incidence“. In: *Journal of the Optical Society of America* 56.4, S. 476–480.
- Fenn, R. W. u. a. (1985). „Optical and Infrared Properties of the Atmosphere“. In: *Handbook of geophysics and the space environment*. Hrsg. von A. Jursa. Springfield: National Technical Information Service (NTIS). Kap. 18.
- Fricke, H. (1924). „A Mathematical Treatment of the Electric Conductivity and Capacity of Disperse Systems“. In: *Physical Review* 24.5, S. 575–587.
- Frisch, S. u. a. (2010). *Prozesswärme im Markanreizprogramm*. Techn. Ber. Heidelberg, Stuttgart: ifeu-Institut für Energie und Umweltforschung, Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt, Institut für technische Thermodynamik.
- Gröber, H. (1928). „Temperaturverlauf und Wärmeströmungen in periodisch erwärmten Körpern“. In: *Wärmedurchgang bei einfachen Körpern und Maschinen*. Hrsg. von Verein deutscher Ingenieure. Bd. 300. Berlin: VDI-Verlag GmbH. Kap. 1.
- Gross, D. und T. Seelig (2001). *Bruchmechanik: mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 5. Aufl. Berlin-Heidelberg: Springer, S. 20–21.
- Groth, C. und G. Müller (2009). *FEM für Praktiker Band 3: Temperaturfelder*. 5. Aufl. Renningen: Expert-Verlag GmbH.
- Gryvnak, D. A. und D. E. Burch (1965). „Optical and Infrared Properties of Al₂O₃ at Elevated Temperatures“. In: *Journal of the Optical Society of America* 55.6, S. 625–629.
- Hahn, O. u. a. (1997). „Transient coupled conductive/radiative heat transfer in absorbing scattering media: application to laser-flash measurements on ceramic materials“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40.3, S. 689–698.
- Harrison, P. u. a. (2015). „Regulatory risk assessment approaches for synthetic mineral fibers“. In: *Regulatory Toxicology and Pharmacology* 73, S. 425–441.
- Hashimoto, T. u. a. (1990). „Thermal diffusivity measurement of polymer films by the temperature wave method using joule-heating“. In: *Thermochimica Acta* 163, S. 317–324.
- Hass, D. D. u. a. (1997). *Reflective Coating on Fibrous Insulation for Reduced Heat Transfer*. NASA Contractor Report 201733. Hampton, Virginia: National Aeronautics und Space Administration Langley Research Center.
- Hill, S. C. und R. E. Benner (1988). „Morphology-Dependent Resonances“. In: *Optical Effects Associated with Small Particles*. Hrsg. von P. W. Barber und R. K. Chang. Advanced Effects Associated with Small Particles. World Scientific Publishing, S. 4–53.
- Hottel, H. C. und A. F. Sarofim (1967). *Radiative Transfer*. New York: McGraw-Hill.

- ISI, Fraunhofer (2013). *Erstellung von Anwendungsbilanzen für das Jahr 2012 für das verarbeitende Gewerbe mit Aktualisierungen für die Jahre 2009-2011*. Techn. Ber. Karlsruhe.
- Jackson, A. J., J. Adams und R. C. Millar (1978). „Thermal conductivity Measurements on High Temperature Fibrous Insulations by the Hot-wire Method“. In: *Thermal Transmission Measurements of Insulation*. Hrsg. von R. P. Tye. ASTM STP 660. Philadelphia: American Society for Testing und Materials, S. 154–171.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. 3rd. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Kadoya, K., N. Matsunaga und A. Nagashima (1985). „Viscosity and Thermal Conductivity of Dry Air in the Gaseous Phase“. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 14.4, S. 947–970.
- Kamiuto, K. u. a. (1982). „Experimental Study of Simultaneous Conductive and Radiative Heat Transfer in Ceramic Fiber Insulation“. In: *Journal of Nuclear Science and Technology* 19.6, S. 460–468.
- Kaviany, M. (1991). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. New York: Springer. Kap. 5.
- Kerker, M. (1969). *The Scattering of Light*. New York: Academic Press. Kap. 3 und Kap. 6.
- Kerker, M. u. a. (1966). „Electromagnetic Scattering from an Infinite Circular Cylinder at Oblique Incidence. I. Radiance Functions for $m = 1.46^*$ “. In: *Journal of the Optical Society of America* 56.4, S. 487–491.
- Kingery, W. D. (1955). „Thermal Conductivity: XII, Temperature Dependence of Conductivity for Single-Phase Ceramics“. In: *Journal of The American Ceramic Society* 38.7, S. 251–255.
- Kuntz, M. und G. Grathwohl (2004). „Kap. 2.2.5 Kriechen“. In: *Technische Keramik: Grundlagen, Werkstoffe, Verfahrenstechnik*. Hrsg. von W. Kollenberg. Essen: Vulkan-Verlag, S. 63–68.
- Landau, L. D. und E. M. Lifschitz (1991). *Lehrbuch der theoretischen Physik VII. Elastizitätstheorie*. 7. Aufl. Berlin: Akademie Verlag.
- Larson, K. B. und K. Koyama (1968). „Measurement by the Flash Method of Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity in Two-Layer Composite Samples“. In: *Journal of Applied Physics* 39.9, S. 4408–4416.
- Lee, S. C. (1988). „Radiation Heat Transfer Model For Fibers Oriented Parallel to Diffuse Boundaries“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 2.4, S. 303–308.
- Lee, S. C. (1989). „Effect of fiber orientation on thermal radiation in fibrous media“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32.2, S. 311–319.
- Lee, S. C. (1990a). „Dependent scattering of an obliquely incident plane wave by a collection of parallel cylinders“. In: *Journal of Applied Physics* 68.10, S. 4952–4957.
- Lee, S. C. (1990b). „Scattering phase function for fibrous media“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33.10, S. 2183–2190.
- Lee, S. C. (1992). „Scattering By Closely-Spaced Radially-Stratified Parallel cylinders“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 48.2, S. 119–130.
- Lee, S. C. (1993). „Enhanced Thermal Performance of Fibrous Insulation Containing Nonhomogeneous Fibers“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 50.2, S. 199–209.

- Lee, S. C. und G. R. Cunnington (1998). „Heat Transfer in Fibrous Insulations: Comparison of Theory and Experiment“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 12.3, S. 297–303.
- Lee, S. C. und G. R. Cunnington (2000). „Conduction and Radiation Heat Transfer in High-Porosity Fiber Thermal Insulation“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 14.2, S. 121–136.
- Lind, A. C. und J. M. Greenberg (1966). „Electromagnetic Scattering by Obliquely Oriented Cylinders“. In: *Journal of Applied Physics* 37.8, S. 3195–3203.
- Lingart, Yu. K., V. A. Petrov und N. A. Tikhonova (1982). „Optical Properties of Leucosapphire at High Temperatures - 1. Translucent Region.“ In: *High Temperature* 20.5, S. 706–713.
- Madenci, E. und I. Guven (2006). *The Finite Element Method And Applications In Engineering Using Ansys*. New York: Springer.
- Manara, J. (1997). *Aufbau einer Apparatur zur IR-optischen Charakterisierung von Proben bei hohen Temperaturen unter Vakuum*. Diplomarbeit. Physikalisches Institut der Universität Würzburg.
- Manara, J. (2001). „Infrarot-optischer Strahlungstransport zur Analyse der Struktur und der Wärmeleitfähigkeit von Keramiken für Hochtemperaturanwendungen“. Diss. Universität Würzburg.
- Manara, J. u. a. (2000). „Emittance of Y_2O_3 stabilised ZrO_2 thermal barrier coatings prepared by electron-beam physical-vapor deposition“. In: *High Temperatures - High Pressures* 32, S. 361–368.
- Manara, J. u. a. (2008). „Determining the transmittance and emittance of transparent and semitransparent materials at elevated temperatures“. In: *5th European Thermal-Sciences Conference* The Netherlands, S. 395–402.
- Marcussen, L. (1970). „The kinetics of water adsorption on porous alumina“. In: *Chemical Engineering Science* 25, S. 1487–1499.
- McKay, N. L. (1984). „Radiative Heat Transfer in Fibre Insulations“. Open Access Dissertations and Theses. Diss. Hamilton Ontario: McMaster University. URL: <https://macsphere.mcmaster.ca/bitstream/11375/5941/1/fulltext.pdf>.
- McKellar, B. H. J. und M. A. Box (1981). „The Scaling Group of the Radiative Transfer Equation“. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 38, S. 1063–1068.
- Modest, M. F. (2013). *Radiative Heat Transfer*. 3rd. ed. New York: Academic Press. Kap. 12.
- Modest, M. F. und F. H. Azad (1980). „The Differential Approximation for radiative transfer in an emitting, absorbing and anisotropically scattering medium“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 23, S. 117–120.
- Müller, G. und C. Groth (2007). *FEM für Praktiker Band 1: Grundlagen*. 8. Aufl. Renningen: Expert-Verlag GmbH.
- Paraknewitz, T. (2016). *persönliche Auskunft*. M. E. SCHUPP Industriekeramik GmbH & Co. KG.
- Park, S. u. a. (2008). „Effect of composition on thermal conductivity of silica insulation media“. In: *Journal of Nanoscience and Nanotechnology* 8.10, S. 5052–5056.
- Parker, W. J. u. a. (1961). „Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity“. In: *Journal of Applied Physics* 32.9, S. 1679–1684.
- Pöschl, K. (1956). *Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik*. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer.

- Powell, M. J. D. (1970). „A Hybrid Method for Nonlinear Equations“. In: *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Hrsg. von P. Rabinowitz. London: Gordon und Breach, Science Publishers Ltd. Kap. 6.
- Raed, Khaled (2013). „Investigation of Knudsen and Gas-Atmosphere Effects on Effective Conductivity of Porous Media“. Diss. Technische Universität Bergakademie Freiberg.
- Rätzer-Scheibe, H.-J., U. Schulz und T. Krell (2006). „The effect of coating thickness on the thermal conductivity of PYSZ thermal barrier coatings“. In: *Surface and Coatings Technology* 200, S. 5636–5644.
- Reiss, H. und B. Ziegenbein (1985). „An experimental method to determine temperature-dependent extinction coefficients and solid thermal conductivities of glass fibre insulations in calorimetric measurements“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 28.2, S. 459–466.
- Rennebeck, K. (2001). *Method for producing ceramic fibers, the fibers thus produced and their use*. EP Patent 1,015,400 5. December 2001.
- Routschka, G. (2007). *Feuerfeste Werkstoffe*. 4. Aufl. Essen: Vulkan-Verlag GmbH. Kap. 7.
- Schäfer, J. P. (2011). „Implementierung und Anwendung analytischer und numerischer Verfahren zur Lösung der Maxwellgleichungen für die Untersuchung der Lichausbreitung in biologischem Gewebe“. Diss. Universität Ulm.
- Schmidt, P. F. (2012). *Praxis der Rasterelektronenmikroskopie und Mikrobereichsanalyse*. 2. Aufl. Renningen-Malmsheim: Expert-Verlag GmbH.
- Schuster, F. (1955). „I. Über die Heißkarburierung von Brenngasen mit Ölen und Teeren. II. Die Strahlungsvorgänge in brennstoffbeheizten Öfen bei verschiedenen Verbrennungsatmosphären“. In: *Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen*. Hrsg. von L. Brandt. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, S. 17–25.
- Shah, G. A. (1970). „Scattering of Plane Electromagnetic Waves by Infinite Concentric Circular Cylinders at Oblique Incidence“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 148, S. 93–102.
- Sharma, S. K. (1992). „On the Validity of the Anomalous Diffraction Approximation“. In: *Journal of Modern Optics* 39.11, S. 2355–2361.
- Siegel, R. und J. R. Howell (1992). *Thermal Radiation Heat Transfer*. 3rd. ed. Washington, DC: Hemisphere Publishing Co. Kap. 2 und Kap. 15.
- Stark, C. (1991). „Wärmetransport in Faserisolationen: Kopplung zwischen Festkörper- und Gaswärmeleitung“. Diss. Universität Würzburg.
- Stevens, G. L. (1984). „Scattering of plane waves by soft obstacles: anomalous diffraction theory for circular cylinders“. In: *Applied Optics* 23.6, S. 954–959.
- Struve, H. (1882). „Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernröhren“. In: *Annalen der Physik und der Chemie* 17.13, S. 1008–1016.
- Tomokiyo, Akihisa und Toshihiro Okada (1968). „Determination of Thermal Diffusivity by the Temperature Wave Method“. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 7.2, S. 128–134.
- Tong, T. W. und C. L. Tien (1983a). „Radiative Heat Transfer in Fibrous Insulations - Part I: Analytical Study“. In: *Journal of Heat Transfer* 105, S. 70–75.
- Tong, T. W. und C. L. Tien (1983b). „Radiative Heat Transfer in Fibrous Insulations - Part II: Experimental Study“. In: *Journal of Heat Transfer* 105, S. 76–81.

- Touloukian, Y. S. und E. H. Buyco (1970). *Thermophysical Properties of Matter Vol. 5: Specific Heat : Nonmetallic Solids*. TPRC data series. New York: IFI/Plenum.
- Touloukian, Y.S. u. a. (1971). *Thermophysical Properties of Matter Vol. 2: Thermal Conductivity: Nonmetallic Solids*. TPRC data series. New York: IFI / Plenum.
- Überhuber, C. (2013). *Computer-Numerik 2*. Computer Numerik. Berlin Heidelberg: Springer. Kap. 12.
- UltraBoard A99 - High Temperature Insulation Board containing 99% Alumina up to 1600°C (2015). Data-Sheet. Aachen-Germany: M. E. Schupp Industriekeramik GmbH & Co. KG.
- van de Hulst, H. C. (1981). *Light Scattering by small particles*. New York: Dover Publications, Inc. Kap. 11 und Kap. 15.
- Wait, J. R. (1955). „Scattering of a Plane Wave from a Circular Dielectric Cylinder at Oblique Incidence“. In: *Canadian Journal of Physics* 33, S. 189–195.
- Wang, K. Y., S. Kumar und C. L. Tien (1987). „Radiative Transfer in Thermal Insulations of Hollow and Coated Fibers“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 1.4, S. 289–295.
- Wang, K. Y. und C. L. Tien (1983). „Radiative Heat Transfer through Opacified Fibers and Powders“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 30.3, S. 213–223.
- Watson, G. E. (1966). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd. ed. Cambridge University Press. Kap. 7.20, S. 196–198.
- Whitson, M. E. Jr. (1975). *Handbook of the Infrared Optical Properties of Al₂O₃, Carbon, MgO, and ZrO₂*. Techn. Ber. SAMSO-TR-75-131, Vol.1 (The Aerospace Corp., El Segundo, Calif.)
- Wimmer, H. (2004). „Hochtemperaturwolle - Vernachlässigte Innovation im Feuerfestbau“. In: *GASWÄRME international*.
- Wulf, R. (2009). „Wärmeleitfähigkeit von hitzebeständigen und feuerfesten Dämmstoffen - Untersuchungen zu Ursachen für unterschiedliche Messergebnisse bei Verwendung verschiedener Messverfahren“. Diss. TU Bergakademie Freiberg.
- Zhu, Y. T., W. R. Blumenthal und B. L. Zhou (1995). „Characterizing Size Dependence of Ceramic-Fiber Strength Using Modified Weibull Distribution“. In: *Micromechanics of Advanced Materials*. Hrsg. von S. N . G. Chu u. a. Warrendale, PA: TMS, S. 493–497.
- Ziegler, F. (1992). *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. 2. Aufl. Wien: Springer, S. 297–300.

Danksagung

Zu guter Letzt möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen vom HTL meinen Dank für die gute Zusammenarbeit und das freundliche Miteinander aussprechen. Mein besonderer und ausdrücklicher Dank gebührt dabei den folgenden Personen:

- Herrn Dr. Friedrich Raether für die herausfordernde Themenwahl, den zugestandenen Freiraum, die jederzeit konstruktiven Diskussionen und die in jeder Hinsicht sinnvollen Ratschläge und Hilfestellungen.
- meinem Vorgesetzten Herrn Dr. Seifert für die vertrauliche und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre, den dargebotenen Rückhalt und die äußerst hilfreiche Beratung beim Verfassen der Publikationen.
- Frau Maria-Carla Arduini und Herrn Dr. Jochen Manara vom ZAE Bayern für die Durchführung der Experimente zur infrarotoptischen Charakterisierung.
- Herrn Pablo Ramoz für die Durchführung der REM-Messungen bezüglich der Faserdurchmesser.
- den ehemaligen Kolleginnen und Kollegen Peter Hofbauer, Jens Baber, Paul Git, Florian Bäuerlein, Veronika Schmitt, Tanja Schröder, Holger Zorzytzki, Rüdiger Schulte, Alexander Konschak, Philipp Döppmann und Marcel Göthe für Ihren Humor, die erlebte Kurzweile und die vielen, ausgesprochen hilfreichen fachlichen Diskussionen.
- Frau Simone Klose für das Korrekturlesen der schriftlichen Arbeit.