Kapitel 2

Relativnormalisierte Hyperflächen

In diesem Kapitel spezialisieren wir Ergebnisse des 1. Kapitels auf Hyperflächen mit Relativnormalen. Danach stellen wir einige spezielle Relativnormalen vor. Dazu gehört auch die Definition zweier Familien von Relativnormalen: Die Manhartsche und die zentroaffine Familie. Schließlich geben wir noch einige Beispiele an.

Wir werden in der Regel lokale Eigenschaften untersuchen und betrachten deshalb nicht global eine Immersion x, sondern nur die Einschränkung auf den Definitionsbereich $U \subset \mathbb{R}^n$ einer Karte von x. Ab diesem Kapitel sei, wie bei Satz 1.13, U eine offene, einfach zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $u \in U$ habe die Form $u = (u^1, \ldots, u^n)^T$. Wir nehmen U für M, $\mathbb{R}^{n+1}$ für A und fassen x als eine differenzierbare Abbildung $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf. Dabei identifizieren wir jeweils $T_{x(u)}\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbb{R}^{n+1}$. D sei der kanonische Zusammenhang auf $\mathbb{R}^{n+1}$, det die übliche Determinantenform des $\mathbb{R}^{n+1}$ und die ∂_k die kanonischen Basisfelder auf $\mathbb{R}^n$. Da klar ist, welche Basis benutzt wird, schreiben wir bei Determinanten kurz $Det\,G$ für $Det(G_{ij})$. x wollen wir kurz eine **Fläche** nennen. Weiterhin setzen wir allerdings voraus, daß x eine reguläre Immersion ist.

2.1 Eigenschaften von Relativnormalen

Wir werden erst einmal einige Aussagen des 1. Kapitels auf Relativnormalen übertragen und einige Formeln und Eigenschaften zeigen, die wir später brauchen werden. Im weiteren sind alle verwendeten Normalen Relativnormalen.

Wegen Lemma 1.3 sind folgende Gleichungen zu (1.2) bzw. (1.8) äquivalent:

$$-\partial_l(h^{ij}) = h^{jk}\hat{\Gamma}_{lk}{}^{i} + h^{ik}\hat{\Gamma}_{kl}{}^{j} \qquad (2.1)$$

$$-\partial_l(h^{ij}) = h^{jk}\Gamma_{lk}{}^{i} + h^{ik}\overline{\Gamma}_{kl}{}^{j} \qquad (2.2)$$

Diese Gleichungen gelten auch für $\tau \neq 0$.
Aus (1.6) erhalten wir bei Relativnormalen $-2h(K_X Y, Z) = C(X, Y, Z)$. Weil die kubische Form C aber totalsymmetrisch ist, gilt (1.7) oder gleichwertig dazu

$$h^{ik}K^j_{km} = h^{jk}K^i_{km}. \qquad (2.3)$$

Daraus ergibt sich für das Tschebyschewvektorfeld

$$nT^i = h^{il}K^k_{kl} = h^{kl}K^i_{kl}. \qquad (2.4)$$

Das bedeutet für diesen häufig benutzten Ausdruck:

$$h^{ij}(\partial_i\partial_j(f) - {\Gamma_{ij}}^k\partial_k(f)) = \Delta(f) - nT(f).$$

Die bei den Ableitungsgleichungen der Konormale (1.15) auftretenden Größen vereinfachen sich folgendermaßen, vgl. Lemma 1.9:

$$\begin{aligned} \nabla^*_X Y &= \overline{\nabla}_X Y = \hat{\nabla}_X Y - K_X Y \\ \overline{h}(X,Y) &= h(S(X),Y) \\ \bar{K}_X Y &= -K_X Y \end{aligned}$$

Der von η induzierte Zusammenhang ∇^* ist also der zu h konjugierte Zusammenhang, der bei Relativnormalen torsionsfrei ist. Es gilt deshalb:

$$h^{ij}(\partial_i\partial_j(f) - {\overline{\Gamma}_{ij}}^k\partial_k(f)) = \Delta(f) + nT(f)$$

Die Volumenelemente aus Definition 1.1 und 1.8 spielen besonders in Kapitel 3 eine wichtige Rolle. Ihre Ableitungen kann man so errechnen:

$$\begin{aligned} \partial_l(\omega) &= \sum_m det(x_1,\ldots,x_{ml},\ldots,x_n,N) + det(x_1,\ldots,x_n,N_l) \\ &= \sum_m det(x_1,\ldots,{\Gamma_{ml}}^j x_j + h_{ml}N,\ldots,x_n,N) + det(x_1,\ldots,x_n,-S^i_l x_i) \\ &= {\Gamma_{ml}}^m\omega + 0 \\ \partial_l(\omega_h) &= \frac{\partial_l(|Det\,h|)}{2\sqrt{|Det\,h|}} \\ &= \frac{\partial_l(|Det\,h|)}{2|Det\,h|}\sqrt{|Det\,h|} = \partial_l(\log|Det\,h|)\frac{\omega_h}{2} \\ &= h^{ik}\partial_l(h_{ik})\frac{\omega_h}{2} \quad \text{(nach Lemma 1.3)} \\ &= \frac{1}{2}h^{ik}(\partial_k(h_{il}) - \partial_i(h_{lk}) + \partial_l(h_{ik}))\omega_h \overset{(1.4)}{=} {\hat{\Gamma}_{kl}}^k\omega_h \\ \partial_l(\bar{\omega}) &= \overline{det}(\eta_l,\eta_1,\ldots,\eta_n) + \sum_m \overline{det}(\eta,\eta_1,\ldots,\eta_{ml},\ldots,\eta_n) \\ &= 0 + {\overline{\Gamma}_{ml}}^m\overline{det}(\eta,\eta_1,\ldots,\eta_n) \end{aligned}$$

Es gilt daher[1]:

$$\partial_l(\omega) = {\Gamma_{kl}}^k\omega, \quad \partial_l(\omega_h) = {\hat{\Gamma}_{kl}}^k\omega_h, \quad \partial_l(\bar{\omega}) = {\overline{\Gamma}_{kl}}^k\bar{\omega} \tag{2.5}$$

Man erhält daraus für die Tschebyschewform

$$n\hat{T}_i = K^k_{ki} = {\Gamma_{ki}}^k - {\hat{\Gamma}_{ki}}^k = \partial_i(\log|\omega|) - \partial_i(\log|\omega_h|) = \partial_i(\log|\frac{\omega}{\omega_h}|)$$

und für das Tschebyschewvektorfeld

$$nT = grad_h(\log|\frac{\omega}{\omega_h}|). \tag{2.6}$$

[1] Die erste Gleichung gilt nur für Relativnormalen, sonst ist $\partial_i(\log|\omega|) = {\Gamma_{ki}}^k + \tau_i$, siehe dazu auch [BK], Lemma 3.11. Für beliebige Normalen ändern sich dann auch weitere Formeln, z. B. (2.6).

Nun geben wir einen Hilfssatz an, der die Flächengrößen bezüglich verschiedener Relativnormalen vergleicht[2], d. h. einen Spezialfall von Lemma 1.11:

Lemma 2.1 *Sind N und $\tilde{N}$ zwei Relativnormalen mit $\tilde{N} = qN + x_*(Z)$, so muß $Z = -grad_h(q) = -grad_{\tilde{h}}(\log|q|)$ sein. Für die übrigen Größen gilt:*

$$\begin{aligned}
\tilde{h} &= \frac{1}{q}h, \quad \tilde{h}^{**} = qh^{**}, \quad \tilde{h}^* = qh^*, \\
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y)grad_h(\log|q|), \quad \tilde{S}(X) = qS(X) + \nabla_X grad_h(q) \\
\tilde{C}(X,Y,V) &= \frac{1}{q}C(X,Y,V) \\
&\quad -\frac{1}{q}\Big(h(X,V)Y(\log|q|) + h(X,Y)V(\log|q|) + h(Y,V)X(\log|q|)\Big), \\
\tilde{\hat{\nabla}}_X Y &= \hat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\Big(X(\log\ |q|)Y + Y(\log\ |q|)X - grad_h(\log\ |q|)h(X,Y)\Big), \\
\tilde{\Delta}(f) &= q\Delta(f) - \frac{n-2}{2}grad_h(q)(f) \\
\tilde{K}_X Y &= K_X Y + \frac{1}{2}\Big(X(\log\ |q|)Y + Y(\log\ |q|)X + grad_h(\log\ |q|)h(X,Y)\Big) \\
n\tilde{\hat{T}}(Y) &= n\hat{T}(Y) + \frac{n+2}{2}Y(\log|q|) \\
n\tilde{T} &= nqT + \frac{n+2}{2}q\, grad_h(\log|q|) \\
\tilde{\omega} &= q\omega, \quad \tilde{\omega}_{\tilde{h}} = \frac{1}{|q|^{n/2}}\omega_h, \\
\tilde{\overline{\nabla}}_X Y &= -X(\log\ |q|)Y - Y(\log|q|)X + \overline{\nabla}_X Y \\
\tilde{\eta} &= \frac{1}{q}\eta, \quad \tilde{\bar{\omega}} = \frac{1}{q^{n+1}}\bar{\omega} \\
\tilde{\overline{h}}(X,Y) &= \overline{h}(X,Y) - \overline{\nabla}_X Y(\log|q|) + \frac{1}{q}X(Y(q))
\end{aligned}$$

Beweis: Weil beide Normalen Relativnormalen sind, ist $\tilde{\tau} = \tau = 0$. Aus Lemma 1.11 erhält man

$$\tilde{\tau}(X) = 0 = X(\log\ |q|) + \tau(X) + \frac{1}{q}h(X,Z) = X(\log|q|) + \tilde{h}(X,Z).$$

Daher ist $Z = -grad_h(q) = -grad_{\tilde{h}}(\log|q|)$. Wir setzen, um die obigen Aussagen zu zeigen, in die Gleichungen aus Lemma 1.11 jeweils dieses Z ein. Weil $\nabla^* = \overline{\nabla}$ und $\bar{K} = -K$ gilt, haben wir bei der Aufzählung im Lemma diese Größen weggelassen. #

2.2 Spezielle Relativnormalen

In diesem Abschnitt geben wir die wichtigsten Relativnormalen, und zwar die euklidische Normale, die Blaschkesche Affinnormale und die zentroaffine Normale, an, dazu definieren wir noch zwei Familien von Normalen, von denen jede zwei der genannten Normalen enthält.

[2]Das geschieht auch in [SSV], 5. Kapitel.

2.2.1 Die euklidische Normale

Sei $\langle .,. \rangle$ das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$, das parallel bzgl. D ist.

Definition 2.2 *Die* **euklidische Normale** N_e *ist dasjenige Einheitsvektorfeld, das immer orthogonal auf dem Tangentialraum steht und mit den* x_i *ein Rechtssystem bildet, d. h.*

$$\forall 1 \leq i \leq n : \langle N_e, x_i \rangle = 0, \; \langle N_e, N_e \rangle = 1, \; det(x_1, \ldots, x_n, N_e) > 0.$$

Äquivalent kann das so formuliert werden: Die euklidische Normale N_e ist dasjenige transversale Vektorfeld, für das die Konormale η_e durch

$$\eta_e = \langle N_e, . \rangle$$

beschrieben ist und das $det(x_1, \ldots, x_n, N_e) > 0$ erfüllt.

Die **erste euklidische Grundform** g ist festgelegt durch

$$g(X,Y) := \langle x_*(X), x_*(Y) \rangle$$

oder in Koordinaten

$$g_{ij} := \langle x_i, x_j \rangle.$$

Sie ist positiv definit. Es gilt:

$$det(x_1, \ldots, x_n, N_e) = \sqrt{Det\, g} \tag{2.7}$$

Die euklidische Konormale kann man somit darstellen als

$$\eta_e = \frac{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n}{\sqrt{Det\, g}}.$$

Die quadratische Grundform h_e heißt **zweite euklidische Grundform** II. Sie ist mit g auf diese Weise gekoppelt:

$$II(.,.) = h_e(.,.) = g(S_e(.),.).$$

Das Vorzeichen von $Det\, h_e$ ist also auch das Vorzeichen der euklidischen Gaußschen Krümmung $\mathcal{K}_e$. Darum muß $\mathcal{K}_e \neq 0$ gelten, sonst ist h_e und daher x nicht regulär.
$III(.,.) = II(S_e(.),.)$ ist die **dritte euklidische Grundform**.

2.2.2 Die Blaschkesche Affinnormale

Definition 2.3 *Die* **Blaschkesche Affinnormale** N_b *(oder nur Affinnormale) ist das Vektorfeld, bei dem zugleich*

$$|\omega| = |\omega_h| = |\bar{\omega}|$$

ist[3].

[3] $|\omega_h| = |\bar{\omega}|$ folgt aus $|\omega| = |\omega_h|$ und (1.14).

Wegen (2.6) verschwindet das Tschebyschewvektorfeld bezüglich N_b. Daraus und aus (2.4) folgt

$$h^{ik}K^m_{ik} = 0 = h^{mi}K^k_{ik}. \tag{2.8}$$

Dies ist auch als **Apolaritätsbedingung** bekannt, in invarianter Schreibweise

$$tr K_Y = 0 \text{ für alle Vektorfelder } Y.$$

Jedes transversale Vektorfeld N längs x kann beschrieben werden als Linearkombination der Blaschkeschen Affinnormale N_b mit einem tangentialen Vektorfeld:

$$N = qN_b + x_*(Z)$$

Die Funktion $q = \eta_b(N)$, die Stützfunktion von N bezüglich N_b, werden wir im weiteren noch öfter gebrauchen. Darum geben wir einige Eigenschaften von ihr an: Da N ein transversales Vektorfeld ist, ist $q \neq 0$. Für eine Relativnormale N ist nach Lemma 2.1

$$Z = -grad_h(\log|q|) = -grad_{h_b}(q).$$

Ebenfalls nach Lemma 2.1 und der Definition von N_b gilt für eine Relativnormale N

$$|\omega| = |q^{\frac{n+2}{2}}\omega_h| \tag{2.9}$$

und daher nach (2.6)

$$nT = grad_h(\log|q|)\frac{n+2}{2}. \tag{2.10}$$

N_b und die konstanten Vielfachen von N_b sind genau die Relativnormalen mit $T = 0$. T ist also eine Art „Maß" der Abweichung einer Relativnormale von N_b.
Für die euklidische Normale gilt (siehe Vereinbarung in 2.2.3 wegen des Vorzeichens)

$$\eta_b(N_e) = |\mathcal{K}_e|^{-\frac{1}{n+2}}. \tag{2.11}$$

Daraus folgt:

$$grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|) = -2\frac{n+2}{2}grad_{h_e}(\log|\eta_b(N_e)|) = -2nT_e \tag{2.12}$$

Bemerkung: Sei N ein transversales Vektorfeld mit $N = qN_b + x_*(Z)$. Weil für N_b wegen (2.8) $h_b^{ij}K^l_{bij} = -h_b^{ij}\bar{K}^l_{bij} = 0$ ist, erhalten wir gemäß der Bemerkung nach Lemma 1.11 für Δx

$$\Delta x = x_*(h^{ij}K^l_{ij}\partial_l) + nN = x_*(-nZ - \frac{n-2}{2}grad_h(\log|q|)) + nN$$

und für $\Delta\eta$

$$\Delta\eta = h^{ij}(D_{\bar{K}^l_{ij}\partial_l}\eta - \overline{h}_{ij}\eta) = -\frac{n+2}{2}D_{grad_h(\log|q|)}\eta - h^{ij}\overline{h}_{ij}\eta.$$

Δx ist danach nur dann proportional zu N, wenn $Z = -\frac{n-2}{2n}grad_h(\log|q|)$ ist. Das stimmt mit dem Ergebnis von [Hei] überein, daß sich eine Relativnormale $\tilde{N}$ und die Laplace–Normale N mit der gleichen Stützfunktion bezüglich N_b durch $x_*(\tilde{T})$ unterscheiden[4]. Die Relativnormale mit Stützfunktion q bzgl. N_b ist wegen Lemma 2.1 und $h = \tilde{h}$

$$\tilde{N} = qN_b - x_*(grad_h(\log|q|)).$$

[4] Wie in 1.2 erwähnt, hat in [Hei] die quadratische Grundform und daher auch T ein anderes Vorzeichen.

Es gilt daher

$$N = \tilde{N} + \frac{n+2}{2n} x_*(grad_h(\log|q|)) = \tilde{N} + x_*(\tilde{T}).$$

$\Delta\eta$ ist nur dann Vielfaches von η, wenn q eine Konstante ist. Insbesondere gibt es bis auf konstante Vielfache nur eine Relativnormale, die das erfüllt, nämlich N_b. Es gilt dort

$$\Delta\eta = -h^{ij}\overline{h}_{ij}\eta = -h^{ij}h_{lj}S_i^l\eta = -tr\, S\eta. \tag{2.13}$$

2.2.3 Die Manhartsche Familie

N_e und N_b gehören beide zu einer klassischen Ein–Parameter–Familie von Relativnormalen.

Definition 2.4 *: Eine Relativnormale, die durch*

$$N_\alpha = q_e N_e + x_*(Z_e)$$

mit

$$q_e = |\mathcal{K}_e|^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } \mathcal{K}_e \neq 0,\ Z_e = -grad_{h_e}(q_e)$$

aus der euklidischen Normalen N_e hervorgeht, gehört zur **Manhartschen**[5] **Einparameterfamilie**.

Eigenschaften der Manhartschen Familie:

1.) **Die Ebene $\mathcal{E}_u^M$ und die Gerade $\mathcal{G}_u^M$**: N_α kann man als

$$N_\alpha = |\mathcal{K}_e|^\alpha (N_e - \alpha x_*(grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)))$$

darstellen. Für einen festen Punkt $u \in U$ liegen daher die Elemente dieser Familie alle in einer Ebene, und zwar in der von $N_e|_u$ und $x_*(grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)|_u)$ aufgespannten, bzw. in der Ebene, die von $N_e|_u$ und $N_b|_u$ erzeugt wird. Wir nennen diese Ebene $\mathcal{E}_u^M$. Genauer gesagt ist der affine Unterraum $x(u) + \mathcal{E}_u^M$ höchstens 2–dimensional. Verschwindet der Gradient von $\log|\mathcal{K}_e|$ in dem Punkt u, haben die Normalen $N_\alpha|_u$ alle die gleiche Richtung, $\mathcal{E}_u^M$ ist dann eine Gerade, nämlich die in Richtung von $N_e|_u$.

Eine andere Art, sich diese Ebene vorzustellen ist die Zeichnung in [Hei]: Dort wird für einen festen Punkt die Ebene $x(u) + \mathcal{E}_u^M$ mit einer Hyperebene parallel zum Tangentialraum geschnitten[6]. Man bekommt als Schnittmenge meist eine Gerade, diese wollen wir $\mathcal{G}_u^M$ nennen. Tritt der Fall der Degeneration ein, so ist $\mathcal{G}_u^M$ nur ein Punkt.

---

[5] Manhart hat in [Man1] festgestellt, daß die euklidische, die Blaschkesche Affinnormale und weitere mit der euklidischen Normalen geometrisch verknüpfte Normalen in einer Ebene liegen. Siehe auch die nächste Bemerkung.

Diese Definition oder eine ähnliche kommt auch in [Man3], Abschnitt 3, [Hei], Paragraph 6, und [SSV], S. 115, vor.

[6] Eigentlich werden alle Geraden durch $x(u)$ in Richtung $N_\alpha|_u$ mit der Hyperebene geschnitten. Aber die Vereinigung dieser Geraden ist bis auf eine Gerade, und zwar die in Richtung $x_*(grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)|_u)$, gleich $x(u)+\mathcal{E}_u^M$. Der Schnitt ist derselbe, allerdings muß man in diesem Fall eine Hyperebene nehmen, die echt parallel zum Tangentialraum ist, da der Schnitt dieser einzelnen Geraden mit dem Tangentialraum nur aus dem Punkt $x(u)$ besteht.

Weil $N_e|_u$ ein transversaler Vektor ist, hat die Schnittmenge von $x(u)+\mathcal{E}_u^M$ mit der Hyperebene genau eine Dimension (als affiner Unterraum) weniger als $x(u)+\mathcal{E}_u^M$.

Ist $\mathcal{K}_e$ konstant auf ganz U, sind die Normalen N_α konstante Vielfache von N_e (Beispiele: 2.4.3, 2.4.5). Der besagte Degenerationsfall tritt dann nicht nur in einem Punkt, sondern auf ganz U ein.

2.) **Die Kurve** k_u^M: Sei $u \in U$ fest. Wir definieren die Kurve

$$k_u^M(\alpha) := x(u) + N_\alpha|_u.$$

k_u^M ist eine ebene Kurve, da sie ganz in der Ebene $x(u) + \mathcal{E}_u^M$ enthalten ist.
Für $grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)|_u = 0$ verläuft k_u^M ganz auf der Geraden durch $x(u)$ in Richtung $N_e|_u$[7] oder besteht nur aus dem Punkt $x(u) + N_e|_u$, wenn $|\mathcal{K}_e|_u| = 1$ ist.

Sei nun $grad_{h_e}(log|\mathcal{K}_e|)|_u \neq 0$. Dann besteht k_u^M entweder aus der Geraden $x(u) + N_e|_u + \mathbb{R} \cdot x_*(grad_{h_e}(log|\mathcal{K}_e|)|_u)$, also aus einer zum Tangentialraum parallelen Geraden, wenn $|\mathcal{K}_e|_u| = 1$ ist, oder der Verlauf entspricht[8] dem des Graphen der Funktion $f(y) = Ly\log y, y \in \mathbb{R}^+$, L konstant, in einem anderen Maßstab ($y = |\mathcal{K}_e|_u|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

3.) Zur Manhartschen Familie gehören für

- $\alpha = \frac{1}{n+2}$ die Blaschkesche Affinnormale N_b
- $\alpha = 0$ die euklidische Normale N_e
- $\alpha = \frac{1}{2}$ die Normale der zweiten (euklidischen) Grundform N_{II} mit der Eigenschaft

  $$|Det\,II| = det^2(x_1, \ldots, x_n, N_{II}),$$

  d. h. das von N_{II} erzeugte Volumen ist das von der euklidischen quadratischen Grundform erzeugte Volumen, siehe Abschnitt 3.1.
- $\alpha = 1$ die Normale der dritten (euklidischen) Grundform N_{III} mit

  $$|Det\,III| = det^2(x_1, \ldots, x_n, N_{III}).$$

  Weil $\sqrt{|Det\,III|} = \sqrt{|\mathcal{K}_e|}\sqrt{|Det\,h_e|} = \frac{\sqrt{|Det\,h_e|}}{\sqrt{Det\,g}}\sqrt{|Det\,h_e|} = \frac{|Det\,h_e|}{det(x_1,\ldots,x_n,N_e)}$ ist, gilt wegen (1.14): $\sqrt{|Det\,III|} = |\overline{det}(\eta_e, \eta_{e1}, \ldots, \eta_{en})|$. Das von N_{III} induzierte Volumen ist daher das von der euklidischen Konormalen induzierte Volumen.

4.) Die Definition von N_b, N_{II} und N_{III} ist nur bis aufs Vorzeichen eindeutig. Das hat aber nach dem Korollar zu Lemma 1.11 fast keine Auswirkungen.

Vereinbarung: Wir wollen als N_b, N_{II} und N_{III} jeweils diejenige Normale der beiden möglichen nehmen, die in der Manhartschen Familie ist, z. B. $N_b = N_{\frac{1}{n+2}}$. Durch Angabe der Basisfelder ∂_i ist N_e festgelegt und damit auch N_b, N_{II} und N_{III}.

5.) Weil $N_e = q_b N_b + x_*(Z_b)$ und $N = N_\alpha = qN_b + x_*(Z) = q_e N_e + x_*(Z_e)$ ist mit $q_b = |\mathcal{K}_e|^{\frac{-1}{n+2}}$ (siehe (2.11)) und $q_e = |\mathcal{K}_e|^\alpha$, gilt

$$\eta_b(N) = q = q_e q_b = |\mathcal{K}_e|^{\alpha + \frac{-1}{n+2}} = |\mathcal{K}_e|^\gamma,\ \gamma := \frac{(n+2)\alpha - 1}{n+2}. \tag{2.14}$$

[7] Sie verläuft genau gesagt auf $\{x(u) + a \cdot N_e|_u \mid a \in \mathbb{R}, a > 0\}$.

[8] Wir erhalten ein kartesisches Koordinatensystem, wenn wir $x(u)$ als Ursprung und die Geraden in Richtung $N_e|_u$ und $x_*(grad_{h_e}(log|\mathcal{K}_e|)|_u)$ als Koordinatenachsen nehmen. In der Tat sind die Richtungsvektoren orthogonal.

Ist $\gamma \neq 0$, folgt aus $\log|q_e| = \alpha \log|\mathcal{K}_e|$ und $\gamma \log|\mathcal{K}_e| = \log|q|$ die Gleichung $\log|q_e| = \frac{\alpha}{\gamma}\log|q|$ und damit wegen (2.10):

$$grad_h(\log|q_e|) = \frac{\alpha 2}{\gamma(n+2)} nT \tag{2.15}$$

6.) Ist $\mathcal{K}_e \equiv konst.$, so verschwindet - für $\alpha \neq 0$ wegen (2.15), für $\alpha = 0$ wegen (2.12) - auch für Normalen $N_\alpha \neq N_b$ das Tschebyschewvektorfeld. Die Umkehrung gilt auch: K_e ist konstant, wenn für ein N_α außer N_b das Tschebyschewvektorfeld verschwindet.

2.2.4 Die zentroaffine Normale

Definition 2.5 *: Ist der Ursprung $o \notin x[U]$, so nennen wir das Vektorfeld $N_c : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, u \mapsto o - x(u)$ die* **zentroaffine Normale***.*

Bemerkung: Man kann die Definition auch auf beliebige Punkte $p \in \mathbb{R}^{n+1}, p \notin x[U]$, verallgemeinern: $N_{cp}|_u := p - x(u)$. Wir wollen ab jetzt jedoch nur die zentroaffine Normale bezüglich des Fußpunkts o für x behandeln.

Eine bedeutsame Eigenschaft von N_c ist, daß der Shape–Operator die Identität ist.

Zur Schreibweise: Die Größen bezüglich N_e, N_c und N_b indizieren wir wie die Normalen, z. B. : h_e ist die quadratische Grundform von N_e. Nicht indizierte Größen beziehen sich auf die gerade behandelte Normale.

Wir wollen Funktionen definieren, die die Beziehung der drei Normalen N_b, N_e und N_c untereinander beschreiben: Die Funktion

$$\sigma_a := \eta_b(N_c)$$

bezeichnet die **affine Stützfunktion** („affine support function") und

$$\sigma_e := \langle N_e, N_c \rangle$$

die **euklidische Stützfunktion**. Sie sind Spezialfälle von Definition 1.10: σ_e ist die Stützfunktion von N_c bezüglich N_e, σ_a die Stützfunktion von N_c bezüglich N_b.
Noch allgemeiner lassen sich die Funktionen σ_{ap} und σ_{ep} festlegen, indem in der Definition N_c durch N_{cp} ersetzt wird.

Weil nach (2.9) $|\eta_b(N_c)|^{\frac{n+2}{2}} = \left|\frac{\omega}{\omega_h}\right|$ ist, gilt für σ_a:

$$|\eta_b(N_c)| = \left|\frac{Det\, h_c}{det(x_1,\ldots,x_n,N_c)^2}\right|^{-\frac{1}{n+2}} = \left|\frac{Det(det(x_1,\ldots,x_n,x_{ij}))}{det(x_1,\ldots,x_n,N_c)^{n+2}}\right|^{-\frac{1}{n+2}}$$

Wir wollen annehmen, daß $\eta_b(N_c)$ positiv ist. Andernfalls vertauschen wir zwei Basisfelder. Weil N_e durch die Basisfelder eindeutig fixiert ist (siehe 2.2.1) und N_b durch N_e als Mitglied der Manhartschen Familie festgelegt ist (siehe die Vereinbarung von 2.2.3), wird dadurch $-N_e$ aus N_e und $-N_b$ aus N_b.

Bemerkung: Auch wenn $\eta_b(N_c) < 0$ ist, hat das in diesem und im nächsten Kapitel fast keine Auswirkungen. Bei manchen Formeln, wie (2.18), ändert sich das Vorzeichen. Vergleiche auch Abschnitt 5.9.

Die Basis der Potenz oben wollen wir mit $\tilde{\mathcal{K}}_c$ bezeichnen, d. h.

$$\tilde{\mathcal{K}}_c := \frac{Det(det(x_1,\ldots,x_n,x_{ij}))}{det(x_1,\ldots,x_n,N_c)^{n+2}} = \frac{Det\, h_c}{det(x_1,\ldots,x_n,N_c)^2}.$$

Wir können $\tilde{\mathcal{K}}_c$ auch mit euklidischen Funktionen ausdrücken: Weil

$$det(x_1,\ldots,x_n,N_c) = \sigma_e det(x_1,\ldots,x_n,N_e)$$

ist, gilt nach (2.7):

$$\tilde{\mathcal{K}}_c = \frac{Det(det(x_1,\ldots,x_n,x_{ij}))}{\sigma_e^{n+2} det(x_1,\ldots,x_n,N_e)^{n+2}} = \frac{Det\, h_e}{\sigma_e^{n+2} Det\, g} =^{9} \frac{\mathcal{K}_e}{\sigma_e^{n+2}}$$

$\tilde{\mathcal{K}}_c$ ist ungleich 0, sonst wäre $\mathcal{K}_e = 0$ und x nicht regulär.

Bemerkung: Im allgemeinen hat $\tilde{\mathcal{K}}_c$ nichts mit der zentroaffinen Gaußschen Krümmung $\mathcal{K}_c$ zu tun. Diese ist immer konstant 1. Wenn man jedoch in $\frac{Det\, h_c}{det(x_1,\ldots,x_n,N_c)^2}$ jeweils N_c durch N_e, h_c durch h_e ersetzt, hat man K_e.

Es gilt:

$$|\eta_b(N_c)| = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{-\frac{1}{n+2}} \tag{2.16}$$

Außerdem folgt mit (2.10) gleich:

$$grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = -2\frac{n+2}{2} grad_{h_c}(\log|\eta_b(N_c)|) = -2nT_c \tag{2.17}$$

Bemerkung: Die Formeln (2.11) und (2.16) für die Stützfunktionen bzgl. N_b ähneln sich, es kommt bei beiden Gleichungen der Exponent $-\frac{1}{n+2}$ vor. Diese Analogien treten je bei (2.12) und (2.17) und auch bei (2.15) und (2.19) auf. Man ersetzt immer $\tilde{\mathcal{K}}_c$ durch $\mathcal{K}_e$ und zentroaffine Größen durch euklidische.

2.2.5 Die zentroaffine Familie

Wir können eine Einparameterfamilie definieren, die neben der Blaschkeschen Affinnormalen auch die zentroaffine Normale enthält. Wir tun dies analog zur Manhartschen Familie:

Definition 2.6 *: Eine Relativnormale, die durch*

$$N_c^\alpha = q_c N_c + x_*(Z_c)$$

mit

$$q_c = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha,\ \alpha \in \mathrm{IR}\ und\ \tilde{\mathcal{K}}_c \neq 0,\ \ Z_c = -grad_{h_c}(q_c)$$

aus der zentroaffinen Normalen N_c hervorgeht, gehört zur **zentroaffinen Einparameterfamilie**.

[9] Vgl. mit (4.15) aus [Hei] und [NoS], S. 62–63.

Eigenschaften der zentroaffinen Familie:

1.) Die Definition 2.6 ist der Definition 2.4 ähnlich. Auch hier hat N_b den Index $\alpha = \frac{1}{n+2}$. Wir können analog zur Manhartschen Familie vorgehen, wenn wir nur $\mathcal{K}_e$ durch $\tilde{\mathcal{K}}_c$ und die euklidischen durch die zentroaffinen Größen ersetzen.

2.) **Die Ebene $\mathcal{E}_u^c$ und die Gerade $\mathcal{G}_u^c$**: Es gilt

$$N_c^\alpha = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha (N_c - \alpha x_*(grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|))).$$

Für einen festen Punkt $u \in U$ liegen die Elemente dieser Familie alle in einer Ebene, und zwar in der von $N_c|_u$ und $x_*(grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)|_u)$ aufgespannten, das ist auch die von $N_c|_u$ und $N_b|_u$ erzeugte Ebene. Diese wollen wir $\mathcal{E}_u^c$ nennen. Verschwindet der Gradient von $\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|$ in dem Punkt u, haben die Normalen alle die gleiche Richtung, $\mathcal{E}_u^c$ degeneriert zu einer Geraden, nämlich der in Richtung $N_c|_u$.
Den Schnitt der Ebene $x(u) + \mathcal{E}_u^c$ mit einer Hyperebene parallel zum Tangentialraum nennen wir $\mathcal{G}_u^c$. Im Degenerationsfall ist $\mathcal{G}_u^c$ ein Punkt, sonst eine Gerade.
I. a. erhält man mit $\mathcal{E}_u^M$ und $\mathcal{E}_u^c$ zwei Ebenen, die sich (zumindest) in der Geraden $\mathbb{R} \cdot N_b|_u$ schneiden. Es kann aber sein, daß wenigstens eine der Ebenen degeneriert, siehe 2.4.3–2.4.5. Für die Schnittgebilde mit der Hyperebene bedeutet das: In der Regel erhält man für $\mathcal{G}_u^M$ und $\mathcal{G}_u^c$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, und zwar im Schnittpunkt von $x(u) + \mathbb{R} \cdot N_b|_u$ mit der Hyperebene. Mindestens eine Gerade kann auch zu einem Punkt degenerieren.
Ist $\tilde{\mathcal{K}}_c$ konstant, sind die Normalen N_c^α konstante Vielfache von N_c.

3.) **Die Kurve k_u^c**: Sei $u \in U$ fest. Wir definieren die ebene Kurve

$$k_u^c(\alpha) := x(u) + N_c^\alpha|_u.$$

Sie ist ganz in der Ebene $x(u) + \mathcal{E}_u^c$ enthalten. Man erhält einen Kurvenverlauf analog zu dem von k_u^M. Für $grad_{h_c}(log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)|_u = 0$ verläuft k_u^c ganz auf der Geraden durch $x(u)$ in Richtung $N_c|_u$, das ist die Verbindungsgerade von o mit $x(u)$, oder besteht nur aus dem Punkt $x(u) + N_c|_u = o$, wenn $|\tilde{\mathcal{K}}_c|_u| = 1$ ist.
Wenn $grad_{h_c}(log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)|_u \neq 0$ ist, ist k_u^c entweder die Gerade

$$x(u) + N_c|_u + \mathbb{R} \cdot x_*(grad_{h_c}(log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)|_u) = o + \mathbb{R} \cdot x_*(grad_{h_c}(log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)|_u),$$

also eine Gerade parallel zum Tangentialraum, wenn $|\tilde{\mathcal{K}}_c|_u| = 1$ ist, oder der Verlauf entspricht dem des Graphen der Funktion $\bar{f}(y) = ay + cy \log y$, das ist der Graph von $f(y) = Ly \log y$, auf den eine affine Transformation[10] angewendet wurde.

4.) Zu dieser Familie gehören für

- $\alpha = 0$ die zentroaffine Normale N_c,
- $\alpha = \frac{1}{n+2}$ die Blaschkesche Affinnormale N_b, siehe (2.16).

[10]Die Koordinatenachsen sind im Gegensatz zu 2.2.3 nicht unbedingt orthogonal.

N_b hat den Index wie in der Manhartschen Familie. Dies ist so, wenn wir $\eta_b(N_c)$ als positiv voraussetzen. Sonst rechnen wir hier mit der negativen Blaschkeschen Affinnormale, wenn wir $N_c^{\frac{1}{n+2}}$ nehmen. Im Abschnitt 2.2.3 haben wir N_b als $N_{\frac{1}{n+2}}$ definiert. Ist $\eta_b(N_c)$ positiv, gilt somit $N_b = N_c^{\frac{1}{n+2}} = N_{\frac{1}{n+2}}$.

5.) Weil $N_c = q_b N_b + x_*(Z_b)$ und $N = N_c^\alpha = qN_b + x_*(Z) = q_c N_c + x_*(Z_c)$ ist mit $q_b = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{\frac{-1}{n+2}}$ und $q_c = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha$, gilt

$$\eta_b(N) = q = q_c q_b = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{\alpha + \frac{-1}{n+2}} = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\gamma,\ \gamma := \frac{(n+2)\alpha - 1}{n+2}. \tag{2.18}$$

Analog zur Bemerkung der Manhartschen Familie ergibt sich: Ist $\gamma \neq 0$, folgt aus $\log|q_c| = \alpha \log|\tilde{\mathcal{K}}_c|$ und $\gamma \log|\tilde{\mathcal{K}}_c| = \log|q|$ die Gleichung $\log|q_c| = \frac{\alpha}{\gamma}\log|q|$ und damit wegen (2.10):

$$grad_h(\log|q_c|) = \frac{\alpha 2}{\gamma(n+2)} nT \tag{2.19}$$

6.) Als Vorgriff auf Abschnitt 3.1 sei noch dies erwähnt: Die Beschäftigung mit dieser Familie geht auf eine Bemerkung von K. Leichtweiß auf dem Kolloquium über Differentialgeometrie zurück. Er gab eine Familie von Volumina an, die in unseren Bezeichnungen so aussieht, wenn $\omega_e = det(x_1, \ldots, x_n, N_e)$ und $\omega_c = det(x_1, \ldots, x_n, N_c)$ bezeichne:

$$A_p = \int \left(\frac{\mathcal{K}_e}{\sigma_e^{\frac{(p-1)(n+1)}{p}}} \right)^{\frac{p}{n+1+p}} \omega_e du,$$

siehe auch [Lei2], S. 160. Diese Familie enthält für $p = 1$ das Affinvolumen und für $p = n+1$ das zentroaffine Volumen. Wir können diesen Term mit $\omega_e \sigma_e = \omega_c$ so ausdrücken:

$$A_p = \int \left(\frac{\mathcal{K}_e}{\sigma_e^{n+2}} \right)^{\frac{p}{n+1+p}} \omega_c du$$

Das ist genau die Familie der von N_c^α erzeugten Volumina, nur das von der zentroaffinen Konormalen oder von N_c^1 erzeugte Volumen fehlt, denn $\frac{p}{n+1+p}$ ist $\neq 1$.

7.) Ist $\tilde{\mathcal{K}}_c \equiv konst.$ auf U, so verschwindet - für $\alpha \neq 0$ wegen (2.19), für $\alpha = 0$ wegen (2.17) - auch für Normalen $N_c^\alpha \neq N_b$ das Tschebyschewvektorfeld. Ist umgekehrt für eine Normale der zentroaffinen Familie außer N_b das Tschebyschewvektorfeld $T = 0$, so ist $\tilde{\mathcal{K}}_c$ konstant. Beispiele dafür folgen in den Abschnitten 2.4.4 und 2.4.5.

2.3 Die Normalen N_h und N_η

Wir werden nun keine einzelne Normale wie N_e definieren, sondern N_{II} und N_{III} auf beliebige Relativnormalen verallgemeinern.

Es gibt zu jeder Relativnormalen $N = qN_b + x_*(Z)$ bis auf das Vorzeichen genau eine Relativnormale $N_h = \tilde{q}N + x_*(\tilde{Z}) = q_h N_b + x_*(Z_h)$ mit $|det(x_1, \ldots, x_n, N_h)| = |\omega_h|$, siehe

[Man1]. Es gilt nach (2.9):

$$\begin{aligned}
& |det(x_1,\ldots,x_n,N_h)| = |\tilde{q}det(x_1,\ldots,x_n,N)| = |\omega_h| \\
\Rightarrow\quad & |\tilde{q}| = |\frac{\omega_h}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}| = |q|^{-\frac{n+2}{2}} \\
\Rightarrow\quad & |q_h| = |\tilde{q}q| = |q|^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Analog gibt es eine Relativnormale $N_\eta = \bar{q}N + x_*(\bar{Z}) = q_\eta N_b + x_*(Z_\eta)$, deren Volumenelement $|det(x_1,\ldots,x_n,N_\eta)|$ gleich $|\bar{\omega}|$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& |\bar{q}| = |\frac{\bar{\omega}}{det(x_1,\ldots,x_n,N)}| = |q|^{-(n+2)} \\
\Rightarrow\quad & |q_\eta| = |\bar{q}q| = |q|^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

N_h ist eine Verallgemeinerung von N_{II}, N_η von N_{III}. Es gilt:

$$(N_e)_h = N_{II},\ (N_e)_\eta = N_{III}$$

Ist $N = N_\alpha$ aus der Manhartschen Familie[11], so auch N_h und N_η: Mit (2.14) ist $|q_h|$, der Betrag der Stützfunktion von N_h bezüglich N_b, eine Potenz von $|\mathcal{K}_e|$,

$$|q_h| = |q|^{-\frac{n}{2}} = |\mathcal{K}_e|^{-\gamma\frac{n}{2}}.$$

Damit ist N_h aus der Manhartschen Familie, denn wir können N_h darstellen als $N_h = q_{he}N_e + x_*(Z_{he})$, wobei q_{he} auch eine Potenz von $|\mathcal{K}_e|$ ist. Der Exponent a von $q_{he} = |\mathcal{K}_e|^a$ ist der Index von N_h in der Manhartschen Familie, $N_h = N_a$. Man errechnet a als $-\gamma\frac{n}{2} + \frac{1}{n+2} = \frac{-n\alpha+1}{2}$ und erhält

$$N_h = N_a \,\mathrm{mit}\, a = \frac{-n\alpha+1}{2}.$$

Analog kann man bei N_η vorgehen.

$$\begin{aligned}
|q_\eta| \quad &= \quad |q|^{-(n+1)} = |\mathcal{K}_e|^{-\gamma(n+1)} \\
& \quad\ -\gamma(n+1) + \frac{1}{n+2} = -(n+1)\alpha + 1 \\
& \Rightarrow\ N_\eta = N_{\hat{a}} \,\mathrm{mit}\, \hat{a} = -(n+1)\alpha + 1
\end{aligned}$$

Man kann das auch umgekehrt betrachten, indem man die Gleichung von a nach α auflöst: N_α mit $\alpha = \frac{-2a+1}{n}$ ist die Normale, für die $(N_\alpha)_h = N_a$ ist. Genauso kann man bei N_η vorgehen.
Wenn man nun $\alpha = 0$ (d. h. $N = N_e$) und $\alpha = \frac{1}{n+2}$ ($N = N_b$) einsetzt, bekommt man:

$$\begin{aligned}
(N_e)_h &= N_{II} = N_{\frac{1}{2}} \\
(N_e)_\eta &= N_{III} = N_1 \\
(N_b)_h &= (N_b)_\eta = N_b
\end{aligned}$$

[11] Wir lassen im weiteren das Vorzeichen beiseite. Als N_h oder N_η nehmen wir diejenige der jeweils zwei Relativnormalen, die in der Manhartschen Familie liegt.

$\alpha = \frac{1}{n+2}$ ist der einzige Fall, bei dem $\alpha = \frac{-n\alpha+1}{2}$ und $\alpha = -(n+1)\alpha + 1$ ist. Eine Besonderheit von $n = 2$ ist: Hier gilt immer $((N)_h)_h = N$.
Bei der zentroaffinen Familie ersetzen wir (2.11), Definition 2.4, $\mathcal{K}_e$, (2.14) durch (2.16), Definition 2.6, $\tilde{\mathcal{K}}_c$, (2.18). Dann läßt sich analog zeigen: Mit $N = N_c^\alpha$ sind auch N_h und N_η aus der zentroaffinen Familie und es ergibt sich:

$$N_h = N_c^a \,\mathrm{mit}\, a = \frac{-n\alpha + 1}{2}$$
$$N_\eta = N_c^{\hat{a}} \,\mathrm{mit}\, \hat{a} = -(n+1)\alpha + 1$$

2.4 Beispiele: Konkrete Flächen und ihre Normalen

Wir werden nun für einige Flächen die Normalen der Manhartschen und der zentroaffinen Familie angeben. Zunächst sind es zweidimensionale Hyperflächen. Die Variablen u^1, u^2 wollen wir u, v nennen.
Die Fläche x selbst wird jeweils in einer geeigneten Parametrisierung durch ihren Ortsvektor bzgl. des Nullpunkts in $\mathbb{R}^{n+1}$ angegeben. x und Vektorfelder sind als Spaltenvektoren dargestellt, deren Komponentenfunktionen differenzierbare Funktionen sind.
Der Begriff „degenerieren" meint nicht eine Singularität oder Ähnliches, sondern er bezieht sich auf die in 2.2.3 bzw. 2.2.5 definierten Ebenen $\mathcal{E}^M$ bzw. $\mathcal{E}^c$ - sie „degenerieren" in solchen Punkten zu Geraden - und die Geraden $\mathcal{G}^M$ bzw. $\mathcal{G}^c$, die zu Punkten „degenerieren" können. Wir betrachten nur Punkte, in denen x definiert und regulär ist und N_e und N_c transversal sind.

2.4.1 Wendelfläche

Die Wendelfläche in der Darstellung

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ bu \end{pmatrix}, \; b \neq 0,$$

hat die Ableitungen

$$x_1(u,v) = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ b \end{pmatrix}, \; x_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$Det\, g = v^2 + b^2, \; x_1 \wedge x_2(u,v) = \begin{pmatrix} -b\sin u \\ b\cos u \\ -v \end{pmatrix}^T$$

folgt für die euklidische Normale

$$N_e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b\sin u \\ b\cos u \\ -v \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt für die Ableitungen x_{ij}

$$det(x_1, x_2, x_{11}) = det(x_1, x_2, x_{22}) = 0,\ det(x_1, x_2, x_{12}) = b.$$

Darum erhält man:

$$h_{e11} = h_{e22} = 0,\ h_{e12} = \frac{b}{\sqrt{v^2 + b^2}}$$

Für die euklidische Gaußsche Krümmung ergibt sich:

$$\mathcal{K}_e = \frac{-b^2}{(v^2 + b^2)^2}$$
$$\partial_1(\log|\mathcal{K}_e|) = 0,\ \partial_2(\log|\mathcal{K}_e|) = -4\frac{v}{v^2 + b^2}$$

Nun können wir die Normalen N_α ausrechnen:

$$N_\alpha = \left|\frac{b^2}{(v^2 + b^2)^2}\right|^\alpha \frac{1}{\sqrt{v^2 + b^2}} \begin{pmatrix} (-b - 4\alpha\frac{v^2}{b})\sin u \\ (b + 4\alpha\frac{v^2}{b})\cos u \\ (-1 + 4\alpha)v \end{pmatrix}$$

Das von N_α induzierte Volumenelement $det(x_1, x_2, N_\alpha) =: \omega_\alpha$ ist dabei

$$\omega_\alpha = \left|\frac{b^2}{(v^2 + b^2)^2}\right|^\alpha \sqrt{v^2 + b^2}.$$

Die Normalen der Manhartschen Familie spannen in jedem Punkt (u, v) mit $v \neq 0$ eine Ebene auf, in den Punkten $(u, 0)$ allerdings haben die Normalen N_α die gleiche Richtung wie N_e, nur die Länge ist für $|b| \neq 1$ unterschiedlich.

Für die zentroaffine Normale

$$N_c(u, v) = \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ -bu \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$det(x_1, x_2, N_c) = buv,$$
$$h_{c11} = h_{c22} = 0,\ h_{c12} = \frac{1}{uv},$$
$$\tilde{\mathcal{K}}_c = \frac{-1}{b^2u^4v^4},$$
$$\partial_1(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = -\frac{4}{u},\ \partial_2(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = -\frac{4}{v}.$$

Die Normalen der zentroaffinen Familie sind demnach

$$N_c^\alpha = \left|b^2u^4v^4\right|^{-\alpha} \begin{pmatrix} (-1 + 4\alpha)v\cos u - 4\alpha uv\sin u \\ (-1 + 4\alpha)v\sin u + 4\alpha uv\cos u \\ (-1 + 4\alpha)bu \end{pmatrix}$$

mit Volumenelementen

$$det(x_1, x_2, N_c^\alpha) = \left|b^2 u^4 v^4\right|^{-\alpha} buv.$$

Ist $uv = 0$, so ist N_c linear abhängig von x_1, x_2, also kein transversales Vektorfeld. In diesem Fall ist die zentroaffine Familie nicht definiert. Für $uv \neq 0$ degeneriert die zentroaffine Familie nicht.

Bemerkung: Es sei für das folgende Kapitel noch erwähnt, daß die Wendelfläche eine euklidische Minimalfläche ist, daß somit $H_e = 0$ gilt. h_e und h_c sind beide in sogenannten Asymptotenparametern $(h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{pmatrix}$ angegeben. Das bedeutet für die Christoffelsymbole des jeweiligen Levi–Cività–Zusammenhangs:

$$\hat{\Gamma}_{11}{}^1 = \frac{\partial_1(F)}{F},\ \hat{\Gamma}_{22}{}^2 = \frac{\partial_2(F)}{F},\ \text{sonst } \hat{\Gamma}_{ij}{}^k = 0.$$

Insbesondere gilt $h^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}{}^k = 0$. Das heißt jeweils für die Funktionen $\Delta(\log|\mathcal{K}|) = h^{ij}\partial_i\partial_j(\log|\mathcal{K}|)$ und $grad_h(\log|\mathcal{K}|)(\log|\mathcal{K}|) = h^{ij}\partial_i(\log|\mathcal{K}|)\partial_j(\log|\mathcal{K}|)$

$$\begin{aligned}
\Delta_e(\log|\mathcal{K}_e|) &= 2h_e^{12}\partial_1\partial_2(\log|\mathcal{K}_e|) = 0, \\
\Delta_c(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= 2h_c^{12}\partial_1\partial_2(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = 0, \\
grad_{h_e}(\log|\mathcal{K}_e|)(\log|\mathcal{K}_e|) &= 2h_e^{12}\partial_1(\log|\mathcal{K}_e|)\partial_2(\log|\mathcal{K}_e|) = 0, \\
grad_{h_c}(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= 2h_c^{12}\partial_1(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)\partial_2(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = 32.
\end{aligned}$$

2.4.2 Rotationsflächen

Da die folgenden drei Beispiele Rotationsflächen sind, wollen wir hier einige Flächengrößen für diese Klasse ausrechnen: Eine Rotationsfläche der Parametrisierung

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix},\ r(u) \neq 0,$$

hat die Ableitungen

$$x_1(u,v) = \begin{pmatrix} r'(u)\cos v \\ r'(u)\sin v \\ z'(u) \end{pmatrix},\ x_2(u,v) = \begin{pmatrix} -r(u)\sin v \\ r(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$Det\, g = r^2(u)(r'^2 + z'^2)(u),\ x_1 \wedge x_2(u,v) = \begin{pmatrix} -r(u)z'(u)\cos v \\ -r(u)z'(u)\sin v \\ r(u)r'(u) \end{pmatrix}^T$$

ergibt sich die euklidische Normale[12]

$$N_e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{r'^2(u) + z'^2(u)}} \begin{pmatrix} -z'(u)\cos v \\ -z'(u)\sin v \\ r'(u) \end{pmatrix}.$$

[12] Wir nehmen $r(u) > 0$ an.

Außer $r(u) \neq 0$ muß noch $r'^2(u) + z'^2(u) \neq 0$ sein.
Für die Ableitungen x_{ij} gilt:

$$det(x_1, x_2, x_{11}) = r(u)(r'z'' - r''z')(u),\ det(x_1, x_2, x_{12}) = 0,\ det(x_1, x_2, x_{22}) = r^2 z'(u)$$

Damit erhält man:

$$h_{e11} = \frac{r'z'' - r''z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}(u),\ h_{e12} = 0,\ h_{e22} = \frac{rz'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}(u)$$

Die euklidische Gaußsche Krümmung ist demnach:

$$\mathcal{K}_e = \frac{(r'z'' - r''z')z'}{(r'^2 + z'^2)^2 r}(u)$$

Da $\mathcal{K}_e$ nur von u abhängt, also stets $\partial_2(\log|\mathcal{K}_e|) = 0$ ist, erhält man die N_α als

$$N_\alpha = |\mathcal{K}_e|^\alpha \Big(N_e - \alpha h_e^{11} \partial_1(\log|\mathcal{K}_e|)x_1 \Big).$$

Für die zentroaffine Normale

$$N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -r(u)\cos v \\ -r(u)\sin v \\ -z(u) \end{pmatrix}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} &det(x_1, x_2, N_c) = r(u)(rz' - r'z)(u) \\ &h_{c11} = \frac{r'z'' - r''z'}{rz' - r'z}(u),\ h_{c12} = 0,\ h_{c22} = \frac{rz'}{rz' - r'z}(u) \\ &\tilde{\mathcal{K}}_c = \frac{(r'z'' - r''z')z'}{(rz' - r'z)^4 r}(u) \end{aligned}$$

Auch bei $\tilde{\mathcal{K}}_c$ ist $\partial_2(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = 0$, d. h.

$$N_c^\alpha = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha \Big(N_c - \alpha h_c^{11} \partial_1(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|)x_1 \Big).$$

Nun kommen wir aber zu drei Beispielen, die sich im Hinblick auf die beiden Familien von Normalen als Sonderfälle herausstellen.

2.4.3 Pseudosphäre

Eine Hälfte der Pseudosphäre kann man darstellen als eine Rotationsfläche mit

$$r(u) = \sin u,\ z(u) = \cos u + \log|1 - \cos u| - \log|\sin u| = \cos u + \log|\tan\frac{u}{2}|$$

mit $0 < u < \frac{\pi}{2}$. Es ergibt sich:

$$N_e(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
& h_{e11} = \frac{-\cos u}{\sin u},\ h_{e12} = 0,\ h_{e22} = \cos u \sin u \\
& \mathcal{K}_e = -1 \\
\Rightarrow\ & N_\alpha = N_e = N_b,\ \omega_\alpha = \cos u \\
& N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos u - \log|\tan\frac{u}{2}| \end{pmatrix} \\
& det(x_1, x_2, N_c) = -\cos u \sin u \log|\tan\frac{u}{2}| \\
& \tilde{\mathcal{K}}_c = -\frac{1}{\sin^4 u \log^4|\tan\frac{u}{2}|} \\
& \partial_1(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = -4\frac{\cos u}{\sin u} - 4\frac{1}{\sin u \log|\tan\frac{u}{2}|} \\
& N_c^\alpha = \left|\sin u \log|\tan\frac{u}{2}|\right|^{-4\alpha} \begin{pmatrix} (-1+4\alpha+4\alpha\cos u \log|\tan\frac{u}{2}|)\sin u \cos v \\ (-1+4\alpha+4\alpha\cos u \log|\tan\frac{u}{2}|)\sin u \sin v \\ (-1+4\alpha)\cos u + (-1+4\alpha\cos^2 u)\log|\tan\frac{u}{2}| \end{pmatrix} \\
& det(x_1, x_2, N_c^\alpha) = \left|\sin u \log|\tan\frac{u}{2}|\right|^{-4\alpha+1} \cos u
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Die Manhartsche Familie degeneriert also in jedem Punkt zu einer Normalen, d. h. $\mathcal{E}^M$ ist in jedem Punkt (u,v) eine Gerade und $\mathcal{G}^M$ ein Punkt. Die zentroaffine Familie degeneriert nur in den Punkten (u,v) mit $\cos u \log|\tan\frac{u}{2}| = -1$. Sonst aber gilt: $\mathcal{E}^c$ ist eine Ebene mit $\mathcal{E}^M \subsetneq \mathcal{E}^c$, $\mathcal{G}^c$ eine Gerade mit $\mathcal{G}^M \subsetneq \mathcal{G}^c$.

2.4.4 Rotationshyperboloid

Ein Rotationshyperboloid ist gegeben als Rotationsfläche mit

$$r(u) = \cosh u,\ z(u) = \sinh u.$$

Man erhält

$$
\begin{aligned}
& N_e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix} \\
& h_{e11} = \frac{-1}{\sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u}},\ h_{e12} = 0,\ h_{e22} = \frac{\cosh^2 u}{\sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u}} \\
& \mathcal{K}_e = \frac{-1}{(\sinh^2 u + \cosh^2 u)^2} \\
& \partial_1(\log|\mathcal{K}_e|) = -8\frac{\sinh u \cosh u}{\cosh^2 u + \sinh^2 u},\ \partial_2(\log|\mathcal{K}_e|) = 0 \\
& N_\alpha = \left|\cosh^2 u + \sinh^2 u\right|^{-2\alpha-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v(1+8\alpha\sinh^2 u) \\ -\cosh u \sin v(1+8\alpha\sinh^2 u) \\ \sinh u(1-8\alpha\cosh^2 u) \end{pmatrix} \\
& \omega_\alpha = \left|\cosh^2 u + \sinh^2 u\right|^{-2\alpha+\frac{1}{2}} \cosh u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ -\sinh u \end{pmatrix} \\
& det(x_1, x_2, N_c) = \cosh u \\
& \tilde{\mathcal{K}}_c = -1 \\
\Rightarrow \quad & N_c^\alpha = N_c = N_b, \ det(x_1, x_2, N_c^\alpha) = \cosh u
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Hier erhält man den umgekehrten Fall zu 2.4.3: Die Manhartsche Familie degeneriert nur für $u = 0$ zu einer Normalen, die zentroaffine Familie in jedem Punkt, d. h. $\mathcal{E}^c$ ist überall eine Gerade, $\mathcal{G}^c$ ein Punkt. Für $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{G}^M$ gilt das nur für $u = 0$, sonst dagegen ist $\mathcal{E}^c \subsetneqq \mathcal{E}^M$, $\mathcal{G}^c \subsetneqq \mathcal{G}^M$.

2.4.5 Sphäre

Die Einheitssphäre kann man angeben als Rotationsfläche mit

$$
r(u) = \cos u, \ z(u) = \sin u, \text{ für } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}.
$$

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& N_e(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \\
& h_{e11} = 1, \ h_{e12} = 0, \ h_{e22} = \cos^2 u \\
& \mathcal{K}_e = 1 \\
\Rightarrow \quad & N_\alpha = N_e, \ \omega_\alpha = \cos u \\
& N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \\
& det(x_1, x_2, N_c) = \cos u \\
& h_{e11} = 1, \ h_{e12} = 0, \ h_{e22} = \cos^2 u \\
& \tilde{\mathcal{K}}_c = 1 \\
\Rightarrow \quad & N_c^\alpha = N_c, \ det(x_1, x_2, N_c^\alpha) = \cos u
\end{aligned}
$$

Ergebnis: In jedem Punkt gilt $N_\alpha = N_b = N_e = N_c = N_c^\alpha$, also die beiden Familien degenerieren in jedem Punkt. $\mathcal{E}^M = \mathcal{E}^c$ ist in jedem Punkt (u, v) eine Gerade, $\mathcal{G}^M = \mathcal{G}^c$ ein Punkt.

2.4.6 n–dimensionales Paraboloid

Nach diesen zweidimensionalen Beispielen geben wir nun eine Fläche in beliebiger Dimension an. Wenn $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ sind, ist ein Paraboloid durch

$$
x(u) = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u^i)^2 \end{pmatrix}
$$

gegeben mit Ableitungen

$$x_i(u) = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \vdots \\ \delta_i^n \\ \varepsilon_i u^i \end{pmatrix}, \; x_{ii}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}, \; x_{ik}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; i \neq k.$$

Aus

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \ldots \wedge x_n &= \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 u^1 \\ \vdots \\ -\varepsilon_n u^n \\ 1 \end{pmatrix}^T, \\ Det\, g = ||x_1 \wedge \ldots \wedge x_n||^2 &= 1 + \sum_i (u^i)^2, \\ det(x_1, \ldots, x_n, x_{ii}) = \varepsilon_i,\; & det(x_1, \ldots, x_n, x_{ik}) = 0,\; i \neq k, \end{aligned}$$

folgt für die euklidische Normale

$$\begin{aligned} N_e(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_i (u^i)^2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 u^1 \\ \vdots \\ -\varepsilon_n u^n \\ 1 \end{pmatrix}, \\ h_{eii} &= \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{1 + \sum_i (u^i)^2}},\; h_{eik} = 0,\; i \neq k, \\ \mathcal{K}_e &= \frac{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{\sqrt{1 + \sum_i (u^i)^2}^{n+2}}, \\ \partial_k(\log|\mathcal{K}_e|) &= -(n+2) \frac{u^k}{1 + \sum_i (u^i)^2}. \end{aligned}$$

Die Normalen der Manhartschen Familie erhält man als

$$N_\alpha = \left| 1 + \sum_i (u^i)^2 \right|^{-\frac{\alpha(n+2)+1}{2}} \begin{pmatrix} (-1 + \alpha(n+2))\varepsilon_1 u^1 \\ \vdots \\ (-1 + \alpha(n+2))\varepsilon_n u^n \\ 1 + \alpha(n+2) \sum_i (u^i)^2 \end{pmatrix}$$

mit Volumenelementen

$$\omega_\alpha = \left| 1 + \sum_i (u^i)^2 \right|^{\frac{-\alpha(n+2)+1}{2}}.$$

N_b ist daher ein konstantes Vektorfeld, und zwar ist

$$N_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die zentroaffine Normale

$$N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -u^1 \\ \vdots \\ -u^n \\ -\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} det(x_1,\ldots,x_n,N_c) &= \frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2, \\ h_{cii} &= 2\frac{\varepsilon_i}{\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2},\ h_{cik} = 0,\ i \neq k, \\ \tilde{\mathcal{K}}_c &= 2^{n+2}\frac{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{(\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2)^{n+2}}, \\ \partial_k(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) &= -2(n+2)\frac{\varepsilon_k u^k}{\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2}. \end{aligned}$$

Damit kann man die Normalen der zentroaffinen Familie berechnen:

$$\begin{aligned} N_c^\alpha &= \left|\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2\right|^{-\alpha(n+2)} \begin{pmatrix} u^1(-1+\alpha(n+2)) \\ \vdots \\ u^n(-1+\alpha(n+2)) \\ \sum_i \varepsilon_i (u^i)^2(-\frac{1}{2}+\alpha(n+2)) \end{pmatrix} \\ |det(x_1,\ldots,x_n,N_c^\alpha)| &= \left|\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2\right|^{-\alpha(n+2)+1} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Manhartsche Familie ist überall definiert und degeneriert nur im Nullpunkt. Die zentroaffine Normale ist in Punkten mit $\sum_i \varepsilon_i (u^i)^2 = 0$, und so auf alle Fälle im Nullpunkt, nicht transversal, in den anderen Punkten aber ist die zentroaffine Familie definiert und degeneriert nicht.

2.4.7 Translationsflächen

Als Verallgemeinerung des Abschnitts 2.4.6 untersuchen wir eine Klasse von n–dimensionalen Flächen. Seien $f_1,\ldots,f_n$ n Funktionen einer Veränderlichen. Dann ist eine Translationsfläche durch

$$x(u) = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ \sum_{j=1}^n f_j(u^j) \end{pmatrix}$$

gegeben. Ein Paraboloid ist ein Beispiel für eine Translationsfläche, $f_i(u^i)$ ist hier $\frac{1}{2}\varepsilon_i(u^i)^2$. Wir übertragen nun die Ergebnisse aus 2.4.6 auf Translationsflächen: Die Ableitungen sind

$$x_i(u) = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \vdots \\ \delta_i^n \\ f_i'(u^i) \end{pmatrix},\ x_{ii}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_i''(u^i) \end{pmatrix},\ x_{ik}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ i \neq k.$$

Aus

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \begin{pmatrix} -f_1'(u^1) \\ \vdots \\ -f_n'(u^n) \\ 1 \end{pmatrix}^T ,$$

$$Det\, g = ||x_1 \wedge \ldots \wedge x_n||^2 = 1 + \sum_j (f_j'(u^j))^2,$$

$$det(x_1, \ldots, x_n, x_{ii}) = f_i''(u^i),\; det(x_1, \ldots, x_n, x_{ik}) = 0,\; i \neq k,$$

folgt, daß für die Regularität der Fläche für jedes i $f_i''(u^i) \neq 0$ sein muß. Die euklidische Normale ergibt sich als

$$N_e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_i f_i'(u^i)^2}} \begin{pmatrix} -f_1'(u^1) \\ \vdots \\ -f_n'(u^n) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$h_{eii} = \frac{f_i''(u^i)}{\sqrt{1 + \sum_j (f_j'(u^j))^2}},\; h_{eik} = 0,\; i \neq k,$$

$$\mathcal{K}_e = \frac{f_1''(u^1) \ldots f_n''(u^n)}{\sqrt{1 + \sum_j (f_j'(u^j))^2}^{\,n+2}},$$

$$\partial_k(\log|\mathcal{K}_e|) = \frac{f_k'''(u^k)}{f_k''(u^k)} - (n+2)\frac{f_k'(u^k) f_k''(u^k)}{1 + \sum_j (f_j'(u^j))^2}.$$

Die Normalen der Manhartschen Familie erhält man als

$$\begin{aligned} N_\alpha \;=\; & \left|1 + \sum_j (f_j'(u^j))^2\right|^{-\frac{\alpha(n+2)+1}{2}} |f_1''(u^1) \ldots f_n''(u^n)|^\alpha \\ & \cdot \begin{pmatrix} (-1 + \alpha(n+2)) f_1'(u^1) - \alpha \frac{f_1'''(u^1)}{f_1''(u^1)^2}(1 + \sum_j f_j'(u^j)^2) \\ \vdots \\ (-1 + \alpha(n+2)) f_n'(u^n) - \alpha \frac{f_n'''(u^n)}{f_n''(u^n)^2}(1 + \sum_j f_j'(u^j)^2) \\ 1 + \alpha(n+2) \sum_j f_j'(u^j)^2 - \alpha \sum_j \frac{f_j'''(u^j) f_j'(u^j)}{(f_j''(u^j))^2}(1 + \sum_j f_j'(u^j)^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit Volumenelementen

$$\omega_\alpha = \left|1 + \sum_j f_j'(u^j)^2\right|^{\frac{-\alpha(n+2)+1}{2}} |f_1''(u^1) \ldots f_n''(u^n)|^\alpha.$$

N_b ergibt sich als

$$N_b = |f_1''(u^1)\dots f_n''(u^n)|^{\frac{1}{n+2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{n+2}\frac{f_1'''(u^1)}{f_1''(u^1)^2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{n+2}\frac{f_n'''(u^n)}{f_n''(u^n)^2} \\ 1-\frac{1}{n+2}\sum_j \frac{f_j'''(u^j)f_j'(u^j)}{(f_j''(u^j))^2} \end{pmatrix}.$$

Nun kann man S^i_{bi} ausrechnen und erhält für $trS_b = 0$ die Bedingung von [Pab1] oder [YWQD].

Für die zentroaffine Normale

$$N_c(u,v) = \begin{pmatrix} -u^1 \\ \vdots \\ -u^n \\ -\sum_j f_j(u^j) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}
&det(x_1,\dots,x_n,N_c) = \sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)),\\
&h_{cii} = \frac{f_i''(u^i)}{\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j))},\ h_{cik} = 0,\ i \neq k,\\
&\tilde{\mathcal{K}}_c = \frac{f_1''(u^1)\dots f_n''(u^n)}{(\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)))^{n+2}},\\
&\partial_k(\log|\tilde{\mathcal{K}}_c|) = \frac{f_k'''(u^k)}{f_k''(u^k)} - (n+2)\frac{u^k f_k''(u^k)}{\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j))}.
\end{aligned}$$

Die zentroaffine Familie ist also nur dann definiert, wenn $\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)) \neq 0$ ist. Ist dies erfüllt, kann man die Normalen der zentroaffinen Familie berechnen:

$$N_c^\alpha = |f_1''(u^1)\dots f_n''(u^n)|^\alpha \left|\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j))\right|^{-\alpha(n+2)}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} u^1(-1+\alpha(n+2)) - \alpha\frac{f_1'''(u^1)}{f_1''(u^1)^2}(\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)) \\ \vdots \\ u^n(-1+\alpha(n+2)) - \alpha\frac{f_n'''(u^n)}{f_n''(u^n)^2}\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)) \\ -\sum_j f_j(u^j) + \alpha(n+2)\sum_j u^j f_j'(u^j) - \alpha\sum_j \frac{f_j'''(u^j)f_j'(u^j)}{f_j''(u^j)^2}(\sum_j (u^j f_j'(u^j) - f_j(u^j)) \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Volumenelemente sind:

$$|det(x_1,\dots,x_n,N_c^\alpha)| = |f_1''(u^1)\dots f_n''(u^n)|^\alpha \left|\sum_i (u^i f_i'(u^i) - f_i(u^i)\right|^{-\alpha(n+2)+1}$$

Wenn man $\alpha = \frac{1}{n+2}$ setzt und $det(x_1,\dots,x_n,N_c) > 0$ ist, erhält man N_b.