Kapitel 5

Das Problem von Björling für zweidimensionale, relativnormalisierte Flächen

In diesem Kapitel gehen wir von Blaschke–Immersionen wieder zu Flächen mit allgemeinen Relativnormalen über, beschränken uns aber auch auf die Dimension $n = 2$.

Wir befassen uns hier mit einer Aufgabe[1], die E. G. Björling (Upsala, 1844) behandelte und die darin besteht, zu einem gegebenen Kurvenstreifen, also einer Kurve x_0 mit einem Einheitsvektorfeld N_0 orthogonal zu x_0', alle euklidischen Minimalflächen x zu finden, die x_0 enthalten und für die N_0 mit der euklidischen Normalen von x längs x_0 übereinstimmt. Leichtweiß hat in [Lei1] gezeigt, daß zumindest lokal immer genau eine solche Fläche existiert, die zudem isotherm parametrisiert ist bzgl. h mit x_0 als Parameterlinie. Das gilt - bis auf Ausnahmen - genauso, wenn man keine Minimalfläche, also eine Fläche mit $H_e = 0$, anstrebt, sondern eine Fläche, für die die Mittlere und die Gaußsche Krümmung eine Gleichung $\Phi(H_e, \mathcal{K}_e) = f$ erfüllen, vgl. [Lei1].

Wir werden das in diesem Kapitel auf unsere im 2. Kapitel definierten Relativnormalen übertragen. Als Ergebnis erhalten wir, daß man bei Vorgabe einer Kurve x_0, der Vektorfelder N_0 und ${\eta_0}$[2] längs x_0, der Abbildungen Φ, f und der Art der Relativnormalisierung eine Fläche[3] finden kann, die bezüglich der quadratischen Grundform isotherm parametrisiert ist mit x_0 als Parameterlinie, deren Normale, und zwar die der vorgegebenen Art, längs x_0 gleich N_0, deren Konormale längs x_0 gleich η_0 ist und für deren Mittlere und Gaußsche Krümmung $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ gilt.
Das ist im wesentlichen das gleiche Ergebnis wie in [Lei1], nur daß statt N_e eine andere der erwähnten Relativnormalen benutzt wird.

Dabei gehen wir, nach einem vorbereitenden Abschnitt über den Satz von Cauchy–Kowalewski und eine spezielle isotherme Parametrisierung, analog zu [Lei1] vor: Wir

[1] Vgl. [Nit], S. 136, [Bl1], S. 245–248. Dort wird auch darauf hingewiesen, daß dieses Problem eindeutig zu lösen ist, daß es somit genau eine Minimalfläche mit diesen Bedingungen gibt.

[2] Der Name Vektorfeld soll nicht stören. Wir haben η immer als 1–Form bezeichnet. Im Prinzip ist aber so eine Abbildung von M in das Vektorraumbündel $\cup_{p\in M} T_p^*M$, oder hier $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3$, auch ein Vektorfeld.

[3] Man findet, außer beim euklidischen Fall, je genau zwei Flächen, eine elliptische und eine hyperbolische.

stellen in Abschnitt 5.2 die Integrabilitätsbedingungen (1.1) für die Flächengrößen h, ∇, S mit lokalen Funktionen dar. Daraus folgen Differentialgleichungen für diese lokalen Funktionen (Abschnitt 5.4.1), die in den Abschnitten 5.5, 5.7–5.9 an die Normalisierungen angepaßt werden durch je eine weitere (Differential–) Gleichung, die von der Art der Normale abhängt. x_0, N_0, η_0 liefern in Abschnitt 5.3 die fehlenden Anfangswerte. Diese so vervollständigten Differentialgleichungen sind eindeutig lösbar und liefern die lokalen Funktionen der Flächengrößen h, ∇ und S. Wie man aus diesen Flächengrößen, die man derart gewonnen hat, die Fläche erhält, wird in Abschnitt 5.4.2 gezeigt. In Abschnitt 5.6 stellen wir eine Methode vor, wie man konkret aus den Anfangsdaten x_0, N_0, η_0 eine Affinminimalfläche gewinnt. Schließlich untersuchen wir noch, wie sich eine andere Parametrisierung der Anfangswerte auswirkt (Abschnitt 5.10), wann man η_0 weglassen kann, weil es durch x_0 und N_0 festgelegt ist (Abschnitt 5.11), und wie man vorgeht, damit eine gegebene Kurve x_0 eine bestimmte Flächenkurve wird (Abschnitt 5.12).

5.1 Über die Lösung von partiellen Differentialgleichungen und eine spezielle Parametrisierung

Dieser Abschnitt stellt, als Vorbereitung für das restliche Kapitel, zwei grundlegende Sätze zur Verfügung, auf die häufig Bezug genommen wird: Zum einen den Satz von Cauchy–Kowalewski, zum anderen einen Satz aus [Lei1] über eine bestimmte isotherme Parametrisierung.

5.1.1 Der Satz von Cauchy–Kowalewski

Wir werden häufig mit der Lösbarkeit von partiellen Differentialgleichungen zu tun haben: In einem Großteil dieses Kapitels geht es darum, Systeme von Differentialgleichungen aufzustellen und auf ihre eindeutige Lösbarkeit hin zu untersuchen. Dafür benötigen wir den **Satz von Cauchy–Kowalewski**, siehe [Pet], S. 14–16:

Satz 5.1 *Sei für m unbekannte Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_m$ mit den n Variablen $u^1, \ldots, u^{n-1}$, v das folgende System partieller Differentialgleichungen gegeben:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{s_i}(\phi_i)}{\partial v^{s_i}} = F_i(u^1, \ldots, u^{n-1}, v, \phi_1, \ldots, \phi_m, \ldots, \frac{\partial^k(\phi_j)}{\partial v^{k_0}\partial(u^1)^{k_1}\ldots\partial(u^{n-1})^{k_{n-1}}}, \ldots)\\
&\textit{mit } i,j = 1,\ldots,m; k_0+k_1+\ldots+k_{n-1} = k \le s_i; k_0 < s_i,\\
&\textit{und den Anfangswerten für } v = v_0\\
&\frac{\partial^k(\phi_i)}{\partial v^k} = \phi_i^{(k)}(u^1,\ldots,u^{n-1}),\ \textit{für}\, k = 0,1,\ldots,s_i-1
\end{aligned}$$

Wir nennen

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0}(\phi_i^{(k_0)})}{\partial(u^1)^{k_1}\ldots\partial(u^{n-1})^{k_{n-1}}}\right)_{u^i=u^i_0} =: \phi^0_{i,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}}.$$

Sind die F_i analytisch in einer Umgebung von $(u^1_0, \ldots, u^{n-1}_0, v_0, \ldots, \phi^0_{i,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}}, \ldots)$ und die $\phi_i^{(k)}$ in einer Umgebung von $(u^1_0, \ldots, u^{n-1}_0)$, dann hat dieses System von Differentialgleichungen eine eindeutige analytische Lösung in einer Umgebung von $(u^1_0, \ldots, u^{n-1}_0, v_0)$.

Um es noch einmal zusammenzufassen: Man hat für m Funktionen ϕ_i m Gleichungen dieser Funktionen und ihrer Ableitungen (bis zu je einer bestimmten Ordnung s_i), die man nach den jeweils höchsten Ableitungen nach v auflösen kann: Auf der linken Seite stehen nur die Ableitungen der ϕ_i nach v der höchsten Ordnung s_i, auf der rechten Seite Abbildungen F_i, die von den u^j, v, den ϕ_j und ihren anderen Ableitungen bis zur Ordnung s_j abhängen. Die Anfangswerte der ϕ_i und aller Ableitungen nach v bis zur Ordnung $s_i - 1$ müssen bekannt sein (die Anfangswerte der restlichen partiellen Ableitungen erhält man durch Ableitung der $\phi_i^{(k)}$). Sind die F_i und die Anfangswerte $\phi_i^{(k)}$ analytisch, dann auch die eindeutigen Lösungen ϕ_i.
Wir benutzen den Satz für den Fall $s_j \in \{1, 2\}$, $n = 2$. Ohne Einschränkung sei $(u_0, v_0) = (0, 0)$. In dem Fall vereinfacht sich der Satz zum

Korollar: Sei für $m = m_\phi + m_\psi$ unbekannte Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_{m_\phi}, \psi_1, \ldots, \psi_{m_\psi}$ mit den Variablen u, v das folgende System partieller Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
&\partial_{vv}(\phi_i) = F_i(u, v, \phi_j, \partial_u(\phi_j), \partial_v(\phi_j), \partial_{uu}(\phi_j), \partial_{uv}(\phi_j), \psi_l, \partial_u(\psi_l)) \\
&\partial_v(\psi_k) = \tilde{F}_k(u, v, \phi_j, \partial_u(\phi_j), \partial_v(\phi_j), \partial_{uu}(\phi_j), \partial_{uv}(\phi_j), \psi_l, \partial_u(\psi_l)) \\
&\text{mit } i, j = 1, \ldots, m_\phi;\ k, l = 1, \ldots, m_\psi, \\
&\text{und den Anfangswerten für } v = 0 \\
&\phi_i(u, 0) = \phi_i^{(0)}(u),\ \partial_u(\phi_i)(u, 0) = (\phi_i^{(0)})'(u),\ \partial_v(\phi_i)(u, 0) = \phi_i^{(1)}(u), \\
&\psi_k(u, 0) = \psi_k^{(0)}(u)
\end{aligned}$$

Sind die F_i und die $\tilde{F}_k$ analytisch in einer Umgebung des Punktes

$$(0, 0, \phi_j^{(0)}(0), (\phi_j^{(0)})'(0), \phi_j^{(1)}(0), (\phi_j^{(0)})''(0), (\phi_j^{(1)})'(0), \psi_l^{(0)}(0), (\psi_l^{(0)})'(0))$$

und die Anfangswerte in einer Umgebung von 0, dann hat dieses System von Differentialgleichungen eine eindeutige analytische Lösung in einer Umgebung von $(0, 0)$.

5.1.2 Auf eine Kurve bezogene isotherme Parametrisierung

Eine Fläche kann man i. a. nicht eindeutig isotherm parametrisieren bzgl. der quadratischen Grundform einer Normale. Wir geben hier einen Hilfssatz an, der zeigt, daß es - mit Ausnahmen - eindeutig eine analytische isotherme Parametrisierung gibt, wenn eine vorgegebene Kurve $x_0(s)$ Parameterlinie $x(s, 0)$ werden soll.

Im folgenden werden wir, wenn nichts anderes erwähnt wird, nur **zulässige Parametertransformationen** $(u^1, u^2) \mapsto (\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2))$ betrachten, d. h. solche mit positiver Determinante $Det\left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k}\right)$. Denn eine Parametertransformation mit negativer Determinante kehrt das Vorzeichen von N_e um.

Eine Kurve $x_0 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ soll **regulär** genannt werden, wenn $x_0'(s) \neq 0$ für alle $s \in I$ gilt. Eine Flächenkurve $x_0(s) := x(u^1(s), u^2(s))$ einer Immersion x besitzt die Ableitungen

$$\begin{aligned}
x_0'(s) &= x_i(u^1(s), u^2(s)) \cdot (u^i)'(s), \\
x_0''(s) &= x_i(u^1(s), u^2(s)) \cdot (u^i)''(s) + x_{ij}(u^1(s), u^2(s)) \cdot (u^i)'(s)(u^j)'(s).
\end{aligned}$$

Ist eine Flächenkurve regulär, dann gilt $(u^1)'(s)^2 + (u^2)'(s)^2 \neq 0$.

Lemma 5.2 *Sei x eine in $(0,0)$ analytische*[4]*, reguläre Immersion und h die in $(0,0)$ analytische*[5] *quadratische Grundform bzgl. der Relativnormalen N mit $\varepsilon = sign\, Det\, h$. Weiter sei mit $x_0(s) := x(u^1(s), u^2(s))$ eine reguläre Flächenkurve durch $x(0,0)$ gegeben, zusätzlich sei $u^1(0) = u^2(0) = 0$, $u^1(s)$ und $u^2(s)$ in 0 analytisch und es gelte*

$$h_{ij}(0,0)\,(u^i)'(0)(u^j)'(0) = \eta(x_{ij})(0,0) \cdot (u^i)'(0)(u^j)'(0) = \eta|_{(0,0)}(x_0''(0)) \neq 0^6.$$

Dann gibt es in einer Umgebung von $(0,0)$ genau eine zulässige Parametertransformation $(u^1,u^2) \mapsto (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ mit $(0,0) \mapsto (0,0)$, die folgenden Bedingungen genügt:

- *$\tilde{x}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ ist in $(0,0)$ analytisch,*
- *die umparametrisierte Grundform $\tilde{h}(\tilde{u}^1(u^1,u^2), \tilde{u}^2(u^1,u^2))$ hat die Gestalt $\tilde{h}_{22} = \varepsilon \tilde{h}_{11} \neq 0$, $\tilde{h}_{12} = 0$ und*
- *x_0 ist die Parameterlinie $x_0(s) = \tilde{x}(s,0)$.*

Beweis: Der Beweis wird in [Lei1] für beliebige reguläre 2–Formen geführt, wir brauchen nur den Fall der quadratischen Grundform h bzgl. N.
a) Der Existenzbeweis erfolgt in zwei Schritten: Die gesuchte Parametertransformation wird aus zwei Parametertransformationen $(u^1,u^2) \mapsto (\overline{u}^1, \overline{u}^2)$, $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ zusammengesetzt.
Im ersten Schritt ist festzustellen, daß es immer eine zulässige Parametertransformation $(u^1,u^2) \mapsto (\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ gibt, die im Punkt $(u^1(0), u^2(0)) = (0,0)$ analytisch ist und für die

$$\overline{u}^1(u^1(s), u^2(s)) = s,\ \overline{u}^2(u^1(s), u^2(s)) = 0$$

gilt, für die deshalb die umparametrisierte Fläche $\overline{x}$ die Kurve als Parameterlinie hat, d. h. $\overline{x}(s,0) := x(u^1(s), u^2(s)) = x_0(s)$. Hier weichen wir ein wenig vom Beweis in [Lei1] ab, die Aussage über die Bogenlänge wurde beseite gelassen, die Flächenkurve $\overline{x}(s,0)$ ist mit $x_0(s)$ identisch in der vorgegebenen Parametrisierung von x_0, bei der s nicht notwendig ein Bogenlängenparameter sein muß. Dies hat aber keine Auswirkungen auf den Beweis.
Der zweite Schritt besteht darin, eine Parametrisierung $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ zu finden, für die weiterhin $\tilde{x}(s,0) = \overline{x}(s,0) = x_0(s)$ gilt und deren quadratische Grundform $\tilde{h}$ die Gestalt $\tilde{h}_{22} = \varepsilon \tilde{h}_{11}$, $\tilde{h}_{12} = 0$ hat. Dieser Schritt wird in [Lei1] gezeigt.
b) Für den Eindeutigkeitsbeweis gehe man auch wie in [Lei1] vor, nehme aber statt N_e immer $\eta_e = \langle N_e, .\rangle$. Es gilt $\eta_e = \frac{1}{Det\, g} x_1 \wedge x_2 = \frac{1}{Det\, \tilde{g}} \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2$. #

So eine Parametrisierung, die durch x_0 eindeutig ist, nennen wir eine **auf die Kurve x_0 bezogene** oder **normierte isotherme Parametrisierung**.

In den Abschnitten 5.5, 5.7–5.9 ergibt sich als Lösung von Differentialgleichungen eine isotherm parametrisierte Fläche, die x_0 als Parameterlinie hat. Der Hilfssatz besagt, daß, wenn es eine analytische Lösung des Björlingschen Problems gibt, diese auch so zu parametrisieren ist.

Vereinbarung: Wegen Lemma 5.2 werden wir, wenn nichts anderes festgelegt wird, x_0, N_0, η_0 und alle weiteren Abbildungen als analytisch voraussetzen.

[4] „Analytisch im Punkt $p \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{R}^2$" bedeute jeweils „analytisch in einer Umgebung von p".
[5] Bei unseren zu untersuchenden Relativnormalen ist $h = \frac{1}{q_e} h_e$ analytisch, wenn x analytisch ist.
[6] Bei elliptischen, regulären Flächen gilt das immer.

5.2 Integrabilitätsbedingungen für Flächengrößen bei isothermer Parametrisierung

In den Abschnitten 5.2–5.9 werden wir schrittweise zeigen, daß das Björlingsche Problem für die verschiedenen schon erwähnten Normalisierungen lösbar ist. Wir gehen dabei analog zu [Lei1] vor: In Abschnitt 5.2 schreiben wir die Bedingungen in (1.1) um und erhalten daraus ein System von Differentialgleichungen für die lokalen Koordinatenfunktionen der Flächengrößen h, ∇, S der zu findenden Fläche (in 5.4.1), in Abschnitt 5.3 geben wir die Anfangswerte dafür an. Dieses System ist aber nicht vollständig. Wir ergänzen es jeweils in 5.5, 5.7, 5.8 oder 5.9. und erhalten für jede Art der Normalisierung ein spezifisches System, das als eindeutige Lösungen die Flächengrößen h, ∇, S bzgl. dieser Normalen hat. Diese Flächengrößen wiederum legen die Fläche fest (Abschnitt 5.4.2).

Wir werden nun (1.1) näher betrachten. In Abschnitt 1.2 bzw. 1.6 wurde schon erwähnt, daß die Flächengrößen h, ∇, S, τ nur dann eine Fläche festlegen, wenn sie bestimmte Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

In diesem Abschnitt gehen wir von einer relativnormalisierten Fläche x in isothermer Parametrisierung aus, stellen die Gleichungen aus (1.1) mit den lokalen Koordinatenfunktionen von h, ∇, S dar und untersuchen, was dies für die lokalen Funktionen bedeutet.

Das Ergebnis dieses Abschnitts wird sein: Einige der lokalen Funktionen von h, ∇, S erfüllen gewisse Differentialgleichungen, wie sie in 5.4.1 angegeben sind, die anderen lokalen Funktionen können über (5.11) aus den ersten bestimmt werden.

Sei x eine reguläre, elliptische ($\varepsilon = 1$) bzw. hyperbolische ($\varepsilon = -1$) Fläche. Wir behandeln diese Fälle zusammen. Je nach Vorzeichen von ε ergeben sich andere Differentialgleichungen in 5.4.
x sei bezüglich h isotherm parametrisiert, es gelte also

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \varepsilon E \end{pmatrix}$$

mit $E \neq 0$, wir werden ab hier sogar von $E > 0$ ausgehen, was durch Umparametrisierung oder Verwendung von $-N$ erreicht werden kann. Das bedeutet $E = \sqrt{|Det\, h|} = \omega_h$.
N sei eine Relativnormale mit Stützfunktion q bezüglich der Blaschkeschen Affinnormale N_b, d. h.

$$N = qN_b + x_*(Z).$$

Wir werden nun die Gleichungen von (1.1) für die Koordinatenfunktionen der erwähnten Größen dieser Fläche untersuchen. Dabei betrachten wir nur die nichttrivialen Fälle dieser Vertauschungsregeln. So gilt z. B. für die lokale Form[7] der Gauß–Gleichung

$$\forall 1 \leq i, j, k, l \leq n : R^l_{ijk} = h_{jk} S^l_i - h_{ik} S^l_j.$$

Weil $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ gilt, sind manche der vorkommenden Fälle trivialerweise erfüllt, andere sind Wiederholungen. Wir behandeln die echt verschiedenen Fälle der Gleichungen aus (1.1). Weil $n = 2$ ist, ergibt das für die Gauß–Gleichung die Fälle, in

[7] Siehe Bemerkung zu (1.1).

denen $i = 1$, $j = 2$ gesetzt wird und die anderen Indizes beliebig. Man erhält damit aus der Gauß–Gleichung vier Gleichungen, analog aus der Codazzi–Gleichung für h zwei Gleichungen, aus der Ricci–Gleichung eine und aus der Codazzi–Gleichung für S zwei. Die Gleichungen reduzieren die Anzahl der lokalen Funktionen, indem sie es ermöglichen, bestimmte Funktionen durch andere auszudrücken, oder liefern für diese Funktionen analog zu [Lei1] Differentialgleichungen.

Betrachten wir die Koordinatenfunktionen einzeln: x ist isotherm parametrisiert, daher ist h durch E festgelegt, es gilt

$$h_{11} = E = \varepsilon h_{22}, \quad h_{12} = h_{21} = 0.$$

Wegen $\nabla = K + \hat{\nabla}$ sind die ${\Gamma_{ij}}^k$ durch die K_{ij}^k und die ${\hat{\Gamma}_{ij}}{}^k$ bestimmt, diese wiederum berechnet man durch (4.4) aus E. Die acht Funktionen K_{ij}^k hängen in einer bestimmten Weise zusammen: Da K symmetrisch ist, bedeutet das

$$K_{ij}^k = K_{ji}^k.$$

Dies werden wir nicht mehr ausdrücklich erwähnen. Wegen der Codazzi–Gleichung für h gilt (1.7), also

$$\begin{aligned} h_{1l}K_{21}^l &= EK_{21}^1 + 0 = h_{2l}K_{11}^l = 0 + \varepsilon EK_{11}^2, \\ h_{1l}K_{22}^l &= EK_{22}^1 + 0 = h_{2l}K_{12}^l = 0 + \varepsilon EK_{12}^2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$K_{21}^1 = \varepsilon K_{11}^2, \; K_{22}^1 = \varepsilon K_{12}^2. \tag{5.1}$$

Für das Tschebyschewvektorfeld T ergibt sich aus (2.4)

$$h^{ij}K_{ij}^k = \frac{1}{E}(K_{11}^k + \varepsilon K_{22}^k) = 2T^k.$$

Das bedeutet

$$K_{11}^k + \varepsilon K_{22}^k = 2ET^k. \tag{5.2}$$

Insgesamt lassen sich durch (5.1) und (5.2) die acht K_{ij}^k–Terme durch K_{11}^1, K_{11}^2, T^1, T^2 und E darstellen, und zwar ist

$$\begin{aligned} K_{21}^2 = K_{12}^2 = -K_{11}^1 + 2ET^1, \; K_{22}^1 = -\varepsilon K_{11}^1 + 2\varepsilon ET^1, \\ K_{12}^1 = K_{21}^1 = \varepsilon K_{11}^2, \; K_{22}^2 = -\varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Außerdem gilt wegen (2.10)

$$nT = 2T = \frac{n+2}{2} grad_h(\log|q|) = 2grad_h(\log|q|),$$

in lokalen Koordinaten ergibt sich

$$T^1 = \frac{1}{E}\partial_1(\log|q|), \; T^2 = \frac{\varepsilon}{E}\partial_2(\log|q|). \tag{5.4}$$

Aus der Darstellung

$$ET^1 = \partial_1(\log|q|), \; \varepsilon ET^2 = \partial_2(\log|q|)$$

folgt die Vertauschungsregel

$$\partial_2(ET^1) = \partial_1(\varepsilon ET^2). \tag{5.5}$$

Die Ricci–Gleichung $h_{1l}S_2^l = h_{2l}S_1^l$ ergibt

$$S_2^1 = \varepsilon S_1^2.$$

Auf diese Art hat man durch Codazzi für h und Ricci einige der lokalen Funktionen von h, ∇, S durch bestimmte andere ausgedrückt. Sind diese bekannt, erhält man die restlichen wie beschrieben, vgl. (5.11).
Die anderen Gleichungen aus (1.1) führen zu Differentialgleichungen dieser Funktionen.

Zuerst wenden wir uns der Gauß–Gleichung zu: Wir stellen die lokalen Funktionen R_{ijk}^l zunächst durch die schon angeführten lokalen Funktionen E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, S_1^2, S_2^2, T^1, T^2 dar, danach geben wir die vier lokalen Gleichungen an, die der Gauß–Gleichung entsprechen.
Wenn wir $\nabla = K + \hat{\nabla}$ verwenden, folgt für die R_{ijk}^l:

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^l &= \partial_i({\Gamma_{jk}}^l) + {\Gamma_{im}}^l{\Gamma_{jk}}^m - \partial_j({\Gamma_{ik}}^l) - {\Gamma_{jm}}^l{\Gamma_{ik}}^m \\
&= \partial_i({\hat\Gamma_{jk}}{}^l) + {\hat\Gamma_{im}}{}^l{\hat\Gamma_{jk}}{}^m - \partial_j({\hat\Gamma_{ik}}{}^l) - {\hat\Gamma_{jm}}{}^l{\hat\Gamma_{ik}}{}^m \\
&\quad + K_{im}^l{\hat\Gamma_{jk}}{}^m - K_{jm}^l{\hat\Gamma_{ik}}{}^m \\
&\quad + \partial_i(K_{jk}^l) + {\hat\Gamma_{im}}{}^l K_{jk}^m - \partial_j(K_{ik}^l) - {\hat\Gamma_{jm}}{}^l K_{ik}^m \\
&\quad + K_{im}^l K_{jk}^m - K_{jm}^l K_{ik}^m
\end{aligned}$$

Wegen $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ und $R_{jjk}^l = 0$ müssen wir nur die vier Ausdrücke R_{12k}^l, $k, l = 1, 2$, berechnen. Mit (4.4), (5.3) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
R_{121}^1 &= \partial_1({\hat\Gamma_{21}}{}^1) + {\hat\Gamma_{11}}{}^1{\hat\Gamma_{21}}{}^1 + {\hat\Gamma_{12}}{}^1{\hat\Gamma_{21}}{}^2 - \partial_2({\hat\Gamma_{11}}{}^1) - {\hat\Gamma_{21}}{}^1{\hat\Gamma_{11}}{}^1 - {\hat\Gamma_{22}}{}^1{\hat\Gamma_{11}}{}^2 \\
&\quad + K_{11}^1{\hat\Gamma_{21}}{}^1 + K_{12}^1{\hat\Gamma_{21}}{}^2 - K_{21}^1{\hat\Gamma_{11}}{}^1 - K_{22}^1{\hat\Gamma_{11}}{}^2 \\
&\quad + \partial_1(K_{21}^1) + {\hat\Gamma_{11}}{}^1 K_{21}^1 + {\hat\Gamma_{12}}{}^1 K_{21}^2 - \partial_2(K_{11}^1) - {\hat\Gamma_{21}}{}^1 K_{11}^1 - {\hat\Gamma_{22}}{}^1 K_{11}^2 \\
&\quad + K_{11}^1 K_{21}^1 + K_{12}^1 K_{21}^2 - K_{21}^1 K_{11}^1 - K_{22}^1 K_{11}^2 \\
&= \partial_1\Big(\frac{\partial_2(E)}{2E}\Big) + {\hat\Gamma_{11}}{}^1{\hat\Gamma_{21}}{}^1 + \frac{\partial_2(E)}{2E}\frac{\partial_1(E)}{2E} \\
&\quad - \partial_2\Big(\frac{\partial_1(E)}{2E}\Big) - {\hat\Gamma_{21}}{}^1{\hat\Gamma_{11}}{}^1 - \frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E} \\
&\quad + K_{11}^1\frac{\partial_2(E)}{2E} + K_{12}^1\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{12}^1\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{22}^1\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E} \\
&\quad + \partial_1(\varepsilon K_{11}^2) + \frac{\partial_1(E)}{2E}\varepsilon K_{11}^2 + \frac{\partial_2(E)}{2E}(-K_{11}^1 + 2ET^1) \\
&\quad - \partial_2(K_{11}^1) - \frac{\partial_2(E)}{2E}K_{11}^1 - \frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}K_{11}^2 \\
&\quad + K_{11}^1 K_{12}^1 + \varepsilon K_{11}^2\varepsilon K_{22}^1 - K_{11}^1 K_{12}^1 - K_{11}^2 K_{22}^1 \\
&= \varepsilon\partial_1(K_{11}^2) - \partial_2(K_{11}^1) - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^1 + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^2 + 2\partial_2(E)T^1
\end{aligned}$$

$$R_{122}^1 = \partial_1({\hat\Gamma_{22}}{}^1) + {\hat\Gamma_{11}}{}^1{\hat\Gamma_{22}}{}^1 + {\hat\Gamma_{12}}{}^1{\hat\Gamma_{22}}{}^2 - \partial_2({\hat\Gamma_{12}}{}^1) - {\hat\Gamma_{21}}{}^1{\hat\Gamma_{12}}{}^1 - {\hat\Gamma_{22}}{}^1{\hat\Gamma_{12}}{}^2$$

$$
\begin{aligned}
& +K^1_{11}\hat{\Gamma}_{22}{}^1 + K^1_{12}\hat{\Gamma}_{22}{}^2 - K^1_{21}\hat{\Gamma}_{12}{}^1 - K^1_{22}\hat{\Gamma}_{12}{}^2 \\
& +\partial_1(K^1_{22}) + \hat{\Gamma}_{11}{}^1 K^1_{22} + \hat{\Gamma}_{12}{}^1 K^2_{22} - \partial_2(K^1_{12}) - \hat{\Gamma}_{21}{}^1 K^1_{12} - \hat{\Gamma}_{22}{}^1 K^2_{12} \\
& +K^1_{11}K^1_{22} + K^1_{12}K^2_{22} - K^1_{21}K^1_{12} - K^1_{22}K^2_{12} \\
= \;& \partial_1(\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}) + \frac{\partial_1(E)}{2E}\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E} + \frac{\partial_2(E)}{2E}\frac{\partial_2(E)}{2E} \\
& -\partial_2(\frac{\partial_2(E)}{2E}) - \frac{\partial_2(E)}{2E}\frac{\partial_2(E)}{2E} - \frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}\frac{\partial_1(E)}{2E} \\
& +K^1_{11}\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E} + K^1_{12}\frac{\partial_2(E)}{2E} - K^1_{12}\frac{\partial_2(E)}{2E} \\
& -(-\varepsilon K^1_{11} + 2\varepsilon E T^1)\frac{\partial_1(E)}{2E} + \partial_1(-\varepsilon K^1_{11} + 2\varepsilon E T^1) \\
& +\frac{\partial_1(E)}{2E}(-\varepsilon K^1_{11} + 2\varepsilon E T^1) + \frac{\partial_2(E)}{2E}(-\varepsilon K^2_{11} + 2\varepsilon E T^2) \\
& -\partial_2(\varepsilon K^2_{11}) - \frac{\partial_2(E)}{2E}\varepsilon K^2_{11} - \frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}(-K^1_{11} + 2ET^1) \\
& +K^1_{11}(-\varepsilon K^1_{11} + 2\varepsilon E T^1) + \varepsilon K^2_{11}(-\varepsilon K^2_{11} + 2\varepsilon E T^2) \\
& -\varepsilon K^2_{11}\varepsilon K^2_{11} - (-\varepsilon K^1_{11} + 2\varepsilon E T^1)(-K^1_{11} + 2ET^1) \\
= \;& \frac{-\varepsilon}{2}\partial_1(\frac{\partial_1(E)}{E}) - \frac{1}{2}\partial_2(\frac{\partial_2(E)}{E}) - \varepsilon\partial_1(K^1_{11}) - \varepsilon\partial_2(K^2_{11}) + 2\varepsilon E\partial_1(T^1) \\
& -\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K^1_{11} - \varepsilon\frac{\partial_2(E)}{E}K^2_{11} + 3\varepsilon\partial_1(E)T^1 + \varepsilon\partial_2(E)T^2 \\
& -2\varepsilon(K^1_{11})^2 - 2(K^2_{11})^2 + 6\varepsilon E K^1_{11}T^1 + 2EK^2_{11}T^2 - 4\varepsilon E^2(T^1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{121} = \;& \partial_1(\hat{\Gamma}_{21}{}^2) + \hat{\Gamma}_{11}{}^2\hat{\Gamma}_{21}{}^1 + \hat{\Gamma}_{12}{}^2\hat{\Gamma}_{21}{}^2 - \partial_2(\hat{\Gamma}_{11}{}^2) - \hat{\Gamma}_{21}{}^2\hat{\Gamma}_{11}{}^1 - \hat{\Gamma}_{22}{}^2\hat{\Gamma}_{11}{}^2 \\
& +K^2_{11}\hat{\Gamma}_{21}{}^1 + K^2_{12}\hat{\Gamma}_{21}{}^2 - K^2_{21}\hat{\Gamma}_{11}{}^1 - K^2_{22}\hat{\Gamma}_{11}{}^2 \\
& +\partial_1(K^2_{21}) + \hat{\Gamma}_{11}{}^2 K^1_{21} + \hat{\Gamma}_{12}{}^2 K^2_{21} - \partial_2(K^2_{11}) - \hat{\Gamma}_{21}{}^2 K^1_{11} - \hat{\Gamma}_{22}{}^2 K^2_{11} \\
& +K^2_{11}K^1_{21} + K^2_{12}K^2_{21} - K^2_{21}K^1_{11} - K^2_{22}K^2_{11} \\
= \;& \partial_1(\frac{\partial_1(E)}{2E}) + \frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}\frac{\partial_2(E)}{2E} + \frac{\partial_1(E)}{2E}\frac{\partial_1(E)}{2E} \\
& -\partial_2(\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}) - \frac{\partial_1(E)}{2E}\frac{\partial_1(E)}{2E} - \frac{\partial_2(E)}{2E}\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E} \\
& +K^2_{11}\frac{\partial_2(E)}{2E} + K^2_{12}\frac{\partial_1(E)}{2E} - K^2_{21}\frac{\partial_1(E)}{2E} \\
& -(-\varepsilon K^2_{11} + 2\varepsilon E T^2)\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E} + \partial_1(-K^1_{11} + 2ET^1) \\
& +\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}(\varepsilon K^2_{11}) + \frac{\partial_1(E)}{2E}(-K^1_{11} + 2ET^1) \\
& -\partial_2(K^2_{11}) - \frac{\partial_1(E)}{2E}K^1_{11} - \frac{\partial_2(E)}{2E}K^2_{11} \\
& +\varepsilon K^2_{11}K^2_{11} + (-K^1_{11} + 2ET^1)(-K^1_{11} + 2ET^1) \\
& -(-K^1_{11} + 2ET^1)K^1_{11} - (-\varepsilon K^2_{11} + 2\varepsilon E T^2)K^2_{11} \\
= \;& \frac{1}{2}\partial_1(\frac{\partial_1(E)}{E}) + \frac{\varepsilon}{2}\partial_2(\frac{\partial_2(E)}{E}) - \partial_1(K^1_{11}) - \partial_2(K^2_{11}) + 2E\partial_1(T^1)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 + 3\partial_1(E)T^1 + \partial_2(E)T^2$$
$$+2(K_{11}^1)^2 + 2\varepsilon(K_{11}^2)^2 - 6EK_{11}^1T^1 - 2\varepsilon EK_{11}^2T^2 + 4E^2(T^1)^2$$

$$\begin{aligned}
R_{122}^2 &= \partial_1(\hat{\Gamma}_{22}{}^2) + \hat{\Gamma}_{11}{}^2\hat{\Gamma}_{22}{}^1 + \hat{\Gamma}_{12}{}^2\hat{\Gamma}_{22}{}^2 - \partial_2(\hat{\Gamma}_{12}{}^2) - \hat{\Gamma}_{21}{}^2\hat{\Gamma}_{12}{}^1 - \hat{\Gamma}_{22}{}^2\hat{\Gamma}_{12}{}^2 \\
&\quad + K_{11}^2\hat{\Gamma}_{22}{}^1 + K_{12}^2\hat{\Gamma}_{22}{}^2 - K_{21}^2\hat{\Gamma}_{12}{}^1 - K_{22}^2\hat{\Gamma}_{12}{}^2 \\
&\quad + \partial_1(K_{22}^2) + \hat{\Gamma}_{11}{}^2K_{22}^1 + \hat{\Gamma}_{12}{}^2K_{22}^2 - \partial_2(K_{12}^2) - \hat{\Gamma}_{21}{}^2K_{12}^1 - \hat{\Gamma}_{22}{}^2K_{12}^2 \\
&\quad + K_{11}^2K_{22}^1 + K_{12}^2K_{22}^2 - K_{21}^2K_{12}^1 - K_{22}^2K_{12}^2 \\
&= \partial_1(\frac{\partial_2(E)}{2E}) + \frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E} + \hat{\Gamma}_{12}{}^2\hat{\Gamma}_{22}{}^2 \\
&\quad -\partial_2(\frac{\partial_1(E)}{2E}) - \frac{\partial_1(E)}{2E}\frac{\partial_2(E)}{2E} - \hat{\Gamma}_{22}{}^2\hat{\Gamma}_{12}{}^2 \\
&\quad + K_{11}^2\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E} + K_{12}^2\frac{\partial_2(E)}{2E} \\
&\quad - K_{12}^2\frac{\partial_2(E)}{2E} - (-\varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2)\frac{\partial_1(E)}{2E} \\
&\quad + \partial_1(-\varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2) + \frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}(-\varepsilon K_{11}^1 + 2\varepsilon ET^1) \\
&\quad + \frac{\partial_1(E)}{2E}(-\varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2) \\
&\quad - \partial_2(-K_{11}^1 + 2ET^1) - \frac{\partial_1(E)}{2E}\varepsilon K_{11}^2 - \frac{\partial_2(E)}{2E}(-K_{11}^1 + 2ET^1) \\
&\quad + K_{11}^2K_{22}^1 + K_{12}^2K_{22}^2 - \varepsilon K_{22}^1\varepsilon K_{11}^2 - K_{22}^2K_{12}^2 \\
&= -\varepsilon\partial_1(K_{11}^2) + 2\varepsilon\partial_1(ET^2) + \partial_2(K_{11}^1) - 2\partial_2(ET^1) \\
&\quad - \varepsilon K_{11}^2\frac{\partial_1(E)}{E} + K_{11}^1\frac{\partial_2(E)}{E} - 2T^1\partial_2(E) \\
&\overset{(5.5)}{=} -\varepsilon\partial_1(K_{11}^2) + \partial_2(K_{11}^1) + \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^1 - \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^2 - 2\partial_2(E)T^1
\end{aligned}$$

Aus der Gauß–Gleichung

$$R_{ijk}^l = h_{jk}S_i^l - h_{ik}S_j^l$$

kann man dies folgern:

$$\varepsilon\partial_1(K_{11}^2) - \partial_2(K_{11}^1) - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^1 + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^2 + 2\partial_2(E)T^1 = -ES_2^1 \tag{G1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{-\varepsilon}{2}\partial_1(\partial_1(\log|E|)) - \frac{1}{2}\partial_2(\partial_2(\log|E|)) - \varepsilon\partial_1(K_{11}^1) - \varepsilon\partial_2(K_{11}^2) \\
&-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 - \varepsilon\frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 + 3\varepsilon\partial_1(E)T^1 + \varepsilon\partial_2(E)T^2 - 2\varepsilon(K_{11}^1)^2 - 2(K_{11}^2)^2 \\
&+6\varepsilon EK_{11}^1T^1 + 2EK_{11}^2T^2 + 2\varepsilon E\partial_1(T^1) - 4\varepsilon E^2(T^1)^2 = \varepsilon ES_1^1
\end{aligned}\right\} \tag{G2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\partial_1(\partial_1(\log|E|))+\frac{\varepsilon}{2}\partial_2(\partial_2(\log|E|))-\partial_1(K_{11}^1)-\partial_2(K_{11}^2)\\ -\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1-\frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2+3\partial_1(E)T^1+\partial_2(E)T^2+2(K_{11}^1)^2+2\varepsilon(K_{11}^2)^2\\ -6EK_{11}^1T^1-2\varepsilon EK_{11}^2T^2+2E\partial_1(T^1)+4E^2(T^1)^2=-ES_2^2\end{array}\right\}\quad\text{(G3)}$$

$$-\varepsilon\partial_1(K_{11}^2)+\partial_2(K_{11}^1)+\frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^1-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^2-2\partial_2(E)T^1=\varepsilon ES_1^2 \qquad \text{(G4)}$$

Diese vier Gleichungen entsprechen der Gauß–Gleichung für $n=2$ in lokalen Funktionen, wenn x isotherm parametrisiert ist. Zu sehen ist nebenbei, daß hier die Ricci–Gleichung aus der Gauß–Gleichung, genauer aus (G1) und (G4), folgt.

Die lokale Form der Codazzi–Gleichung für S kann man so darstellen

$$0=\partial_i(S_j^k)+\hat{\Gamma}_{im}{}^kS_j^m-\partial_j(S_i^k)-\hat{\Gamma}_{jm}{}^kS_i^m+K_{im}^kS_j^m-K_{jm}^kS_i^m.$$

Setzen wir $i=1$, $j=2$ ein, erhalten wir also insgesamt zwei lokale Darstellungen der Codazzi–Gleichung für S.
Im Fall $k=1$, also

$$\begin{array}{rcl}0&=&\partial_1(S_2^1)+\hat{\Gamma}_{11}{}^1S_2^1+\hat{\Gamma}_{12}{}^1S_2^2-\partial_2(S_1^1)-\hat{\Gamma}_{21}{}^1S_1^1-\hat{\Gamma}_{22}{}^1S_1^2\\ &&+K_{11}^1S_2^1+K_{12}^1S_2^2-K_{21}^1S_1^1-K_{22}^1S_1^2\\ &=&\varepsilon\partial_1(S_1^2)+\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{2E}S_1^2+\frac{\partial_2(E)}{2E}S_2^2-\partial_2(S_1^1)-\frac{\partial_2(E)}{2E}S_1^1-\frac{-\varepsilon\partial_1(E)}{2E}S_1^2\\ &&+\varepsilon K_{11}^1S_1^2+\varepsilon K_{11}^2S_2^2-\varepsilon K_{11}^2S_1^1-(-\varepsilon K_{11}^1+2\varepsilon ET^1)S_1^2,\end{array}$$

erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\partial_1(S_1^2)-\partial_2(S_1^1)+(\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}+2\varepsilon K_{11}^1-2\varepsilon ET^1)S_1^2\\ +(\frac{\partial_2(E)}{2E}+\varepsilon K_{11}^2)(S_2^2-S_1^1)=0.\end{array}\right\}\quad\text{(C1)}$$

Für $k=2$ folgt aus

$$\begin{array}{rcl}0&=&\partial_1(S_2^2)+\hat{\Gamma}_{11}{}^2S_2^1+\hat{\Gamma}_{12}{}^2S_2^2-\partial_2(S_1^2)-\hat{\Gamma}_{21}{}^2S_1^1-\hat{\Gamma}_{22}{}^2S_1^2\\ &&+K_{11}^2S_2^1+K_{12}^2S_2^2-K_{21}^2S_1^1-K_{22}^2S_1^2\\ &=&\partial_1(S_2^2)+\varepsilon\frac{-\varepsilon\partial_2(E)}{2E}S_1^2+\frac{\partial_1(E)}{2E}S_2^2-\partial_2(S_1^2)-\frac{\partial_1(E)}{2E}S_1^1-\frac{\partial_2(E)}{2E}S_1^2\\ &&+\varepsilon K_{11}^2S_1^2+(-K_{11}^1+2ET^1)S_2^2-(-K_{11}^1+2ET^1)S_1^1-(-\varepsilon K_{11}^2+2\varepsilon ET^2)S_1^2\end{array}$$

die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\partial_1(S_2^2)-\partial_2(S_1^2)+(-\frac{\partial_2(E)}{E}+2\varepsilon K_{11}^2-2\varepsilon ET^2)S_1^2\\ +(\frac{\partial_1(E)}{2E}-K_{11}^1+2ET^1)(S_2^2-S_1^1)=0.\end{array}\right\}\quad\text{(C2)}$$

(C1), (C2) entsprechen der Codazzi–Gleichung für S in lokalen Koordinaten für $n=2$, wenn x isotherm parametrisiert ist.

5.3 Anfangswerte von Flächengrößen

Wir wollen in diesem Abschnitt versuchen, von möglichst vielen Flächengrößen die Werte längs $(s,0)$ durch x_0, N_0 und η_0 auszudrücken, um dies für die Anfangswerte der Differentialgleichungen in 5.4 zu verwenden.

Sei x eine Fläche in isothermen Parametern bzgl. h mit der Parameterlinie $x_0(s) := x(s,0)$, N_0 bzw. η_0 bezeichne die Normale N bzw. die Konormale η längs x_0. N sei eine Relativnormale mit $N = qN_b + x_*(Z)$.

Notation: Die Ableitung nach der ersten Variable u bei Flächengrößen längs $(s,0)$ entspricht der Ableitung nach s bei x_0, N_0, η_0. Diese Ableitung ∂_s werden wir hier mit $'$ bezeichnen, d. h. für $f_0(s) := f(s,0)$ ist $\partial_1(f)(s,0) = f_0'(s)$. Also gilt z. B. $x_1(s,0) = x_0'(s)$, $N_1(s,0) = N_0'(s)$, $\eta_1(s,0) = \eta_0'(s)$, $x_{11}(s,0) = x_0''(s)$.

Weil wir mit x_0, N_0, η_0 nun x, N, η und ihre Ableitungen beliebiger Ordnung nach u längs $(u,0)$ ausdrücken können, werden wir möglichst viele Flächengrößen durch diese Abbildungen darstellen.

Wir bekommen bei isothermen Parametern schnell diese Größen aus den Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten bzw. (1.15):

$$\begin{aligned}
\eta(x_{11}) &= -\eta_1(x_1) = h_{11} = E\\
\eta_1(N_1) &= -\eta_1(S_1^1 x_1 + S_1^2 x_2) = ES_1^1 + 0\cdot S_1^2\\
\eta_1(x_{11}) &= \eta_1({\Gamma_{11}}^1 x_1 + {\Gamma_{11}}^2 x_2 + h_{11}N) = -E{\Gamma_{11}}^1 + 0 + 0\\
\eta_{11}(x_1) &= ({\overline{\Gamma}_{11}}^1\eta_1 + {\overline{\Gamma}_{11}}^2\eta_2 - \overline{h}_{11}\eta)(x_1) = -E{\overline{\Gamma}_{11}}^1 + 0 + 0
\end{aligned}$$

Damit können wir $S_1^1(s,0)$ und $K_{11}^1(s,0)$ ausdrücken. Für die anderen Größen benutzen wir Lemma 2.1. Es gilt danach

$$\frac{\omega}{\omega_h} = q|q|\frac{\omega_b}{\omega_{h_b}} = \delta q^2,\ \ \frac{\omega}{\bar{\omega}} = q^4\frac{\omega_b}{\bar{\omega}_b} = \varepsilon q^4,$$

wobei $\delta := sign\, q$ sei. Denn nach der Vereinbarung in Abschnitt 2.2.3 ist $N_b = N_{\frac{1}{n+2}}$ in der Manhartschen Familie. Es gilt somit

$$\omega_b = det(x_1,\ldots,x_n,N_b) = |\mathcal{K}_e|^{\frac{1}{n+2}} det(x_1,\ldots,x_n,N_e) = |\mathcal{K}_e|^{\frac{1}{n+2}} Det\, g > 0.$$

Weil $\omega_{h_b} = \sqrt{|Det\, h_b|} > 0$ ist, ist auch $\frac{\omega_b}{\omega_{h_b}} > 0$ und daher gleich 1. Aus (1.14) schließt man

$$\frac{\omega_b}{\bar{\omega}_b} = sign\, Det\, h_b = sign\, Det\,(q\, h) = sign\,(q^2\, Det\, h) = sign\, Det\, h = \varepsilon.$$

Es folgt also (wir gehen davon aus, daß $\omega_h = E > 0$ ist):

$$det(x_1,x_2,N) = \delta q^2 E = \varepsilon q^4 \overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_2) \tag{5.6}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
det(x_1,N_1,N) &= -S_1^2 det(x_1,x_2,N) = -S_1^2\,\delta q^2 E\\
det(x_1,x_{11},N) &= {\Gamma_{11}}^2 det(x_1,x_2,N) = {\Gamma_{11}}^2\,\delta q^2 E\\
\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_{11}) &= {\overline{\Gamma}_{11}}^2\,\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_2) = {\overline{\Gamma}_{11}}^2\,\varepsilon\delta\frac{1}{q^2}E
\end{aligned}$$

Man kann also E, S_1^1, ${\Gamma_{11}}^1$, ${\overline{\Gamma}_{11}}^1$ durch x, N, η und ihre Ableitungen nach u darstellen, bei S_1^2, ${\Gamma_{11}}^2$, ${\overline{\Gamma}_{11}}^2$ benötigt man noch q. So können wir nun auch die anderen Größen ausdrücken. Verwenden wir $\nabla = K + \hat{\nabla}$, $\overline{\nabla} = -K + \hat{\nabla}$, erhalten wir für die Anfangswerte:

$$
\begin{aligned}
E(s,0) &= -\eta_1(x_1)(s,0) = -\eta_0'(x_0')(s),\\
S_1^1(s,0) &= -\frac{\eta_1(N_1)(s,0)}{\eta_1(x_1)(s,0)} = -\frac{\eta_0'(N_0')(s)}{\eta_0'(x_0')(s)},\\
S_1^2(s,0) &= -\frac{det(x_1,N_1,N)(s,0)}{det(x_1,x_2,N)(s,0)} = \frac{det(x_0',N_0',N_0)(s)}{\delta q^2(s,0)\eta_0'(x_0')(s)},\\
K_{11}^1(s,0) &= \frac{1}{2}({\Gamma_{11}}^1 - {\overline{\Gamma}_{11}}^1)(s,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1(x_{11})}{\eta_1(x_1)} - \frac{\eta_{11}(x_1)}{\eta_1(x_1)}\right)(s,0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_0'(x_0'')}{\eta_0'(x_0')} - \frac{\eta_0''(x_0')}{\eta_0'(x_0')}\right)(s),\\
K_{11}^2(s,0) &= \frac{1}{2}({\Gamma_{11}}^2 - {\overline{\Gamma}_{11}}^2)(s,0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{det(x_{11},x_1,N)}{\delta q^2\eta_1(x_1)} + \frac{\delta q^2\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_{11})}{\varepsilon\eta_1(x_1)}\right)(s,0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{det(x_0'',x_0',N_0)(s)}{\delta q^2(s,0)\eta_0'(x_0')(s)} + \frac{\delta q^2(s,0)\overline{det}(\eta_0,\eta_0',\eta_0'')(s)}{\varepsilon\eta_0'(x_0')(s)}\right),\\
\partial_2(E)(s,0) &\overset{(4.4)}{=} -\varepsilon 2E(s,0){\hat{\Gamma}_{11}}^2(s,0) = -2\varepsilon E(s,0)({\Gamma_{11}}^2 - K_{11}^2)(s,0)\\
&= 2\varepsilon\eta_1(x_1)(s,0)\frac{1}{2}\left(\frac{det(x_{11},x_1,N)}{\delta q^2\eta_1(x_1)} - \frac{\delta q^2\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_{11})}{\varepsilon\eta_1(x_1)}\right)(s,0)\\
&= \varepsilon\frac{1}{\delta q^2(s,0)}det(x_{11},x_1,N)(s,0) - \delta q^2(s,0)\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_{11})(s,0)\\
&= \varepsilon\frac{1}{\delta q^2(s,0)}det(x_0'',x_0',N_0)(s) - \delta q^2(s,0)\overline{det}(\eta_0,\eta_0',\eta_0'')(s).
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Für E, K_{11}^1 und S_1^1 ergibt sich im Vergleich zum äquiaffinen Fall, d. h. für $q \equiv 1$, keine Änderung, sie besitzen in jeder Relativnormalisierung diese Form. Das gilt auch für andere Flächengrößen, wie ${\Gamma_{11}}^1$, ${\overline{\Gamma}_{11}}^1$, und für $x_1(s,0)$, $\eta_1(s,0)$.

Die Anfangswerte von q und T^2 hängen von der Art der Relativnormalen ab, sie werden in den zugehörigen Abschnitten angegeben. $T^1(s,0)$ ergibt sich nach (5.4) aus der Ableitung von $q(s,0)$ nach s.

Die Anfangswerte von x_2 und η_2 erhalten wir aus (4.3) bzw. Lemma 1.16 zusammen mit (5.6). Es folgt daher:

$$
\begin{aligned}
x_1(s,0) &= x_0'(s)\\
x_2(s,0) &= \delta q^2(s,0)\eta_0' \wedge \eta_0(s)\\
\eta_1(s,0) &= \eta_0'(s)\\
\eta_2(s,0) &= \frac{\delta\varepsilon}{q^2(s,0)}x_0'(s) \wedge N_0(s)
\end{aligned}
$$

Seien die Kurve[8] $x_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und die Vektorfelder $N_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $\eta_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_3$ längs x_0 gegeben. Wollen wir eine Fläche x finden, die $x_0(s)$ als Parameterlinie $x(s,0)$ enthält und deren Relativnormale N und Konormale η längs x_0 gleich N_0 und η_0 sind, so muß notwendig gelten:

1.) x_0' und N_0 sind linear unabhängig bzw. $x_0' \wedge N_0$ verschwindet nicht. Denn andernfalls wäre $\det(x_1, x_2, N)(s,0) = 0$.

2.) $\eta_0(x_0')(s) = 0,\ \eta_0(N_0)(s) = 1$, sonst wäre η nicht Konormale oder $\eta_0(s)$ nicht $\eta(s,0)$.

3.) η_0 und η_0' sind linear unabhängig, was gleichbedeutend zu $\eta_0 \wedge \eta_0' \neq 0$ ist. Sonst wäre $\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)(s,0) = 0$.

4.) $\eta_0'(N_0) = -\eta_0(N_0') = 0$, sonst wäre N keine Relativnormale oder $N_0(s) \neq N(s,0)$.

Ist x bezüglich h isotherm parametrisiert wie in Abschnitt 5.2, so muß weiter gelten:

5.) $\eta_0(x_0'')(s) = -\eta_0'(x_0')(s) = E(s,0) > 0$. Wenigstens muß hier $\eta_0(x_0'') \neq 0$ gefordert werden. Gilt < 0, nehmen wir $-N_0$ und $-\eta_0$ statt N_0, η_0. (5.7)–(5.9) bleiben von den Änderungen unberührt. Es reicht auch, nur $\eta_0(x_0'')(0) \neq 0$ zu verlangen, denn wegen der Stetigkeit verschwindet $\eta_0(x_0'')$ auch in einer Umgebung von $s = 0$ nicht. Lemma 5.2 braucht ebenfalls diese Bedingung.

6.) $x_0', N_0, \eta_0 \wedge \eta_0'$ sollen linear unabhängig sein, genauso $\eta_0, \eta_0', x_0' \wedge N_0$. Denn nach obigen Angaben ist $x_2(s,0)$ ein Vielfaches von $\eta_0' \wedge \eta_0(s)$, $\eta_2(s,0)$ ein Vielfaches von $x_0' \wedge N_0(s)$. x_1, x_2, N sind jedoch, wie η, η_1, η_2, bei regulären Flächen linear unabhängig.

7.) Weiter soll

$$\eta_2(x_2)(s,0) = \varepsilon(x_0' \wedge N_0)(\eta_0' \wedge \eta_0)(s) \stackrel{!}{=} \varepsilon\eta_0'(x_0')(s) = \varepsilon\eta_1(x_1)(s,0)$$

sein.

Insgesamt müssen x_0, N_0 und η_0 also folgende Bedingungen erfüllen:

$$\eta_0(x_0')(s) = 0 \tag{5.7}$$
$$\eta_0(N_0)(s) = 1 \tag{5.8}$$
$$\eta_0'(N_0)(s) = 0 \tag{5.9}$$
$$\eta_0'(x_0')(s) \neq 0 \tag{5.10}$$

(5.7)–(5.10) entsprechen 2.), 4.), 5.).
Aus (5.10) folgt $x_0'(s) \neq 0$ und $\eta_0'(s) \neq 0$, aus (5.8) $\eta_0(s) \neq 0$, $N_0(s) \neq 0$, aus (5.7) und (5.8) die lineare Unabhängigkeit von x_0' und N_0, d. h. 1.), aus (5.7) und (5.10) die von η_0, η_0', also 3.). Nach (1.16) ist

$$\varepsilon(x_0' \wedge N_0)(\eta_0' \wedge \eta_0) = \varepsilon det(x_0', N_0, \eta_0' \wedge \eta_0) = \varepsilon\overline{det}(x_0' \wedge N_0, \eta_0', \eta_0).$$

[8] Wir benötigen nicht ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich von x_0, sondern nur ein gewisses Intervall um 0.

Es gilt weiter

$$\eta_2(x_2)(s,0) = \varepsilon(x_0' \wedge N_0)(\eta_0' \wedge \eta_0)(s)$$

$$\varepsilon(x_0' \wedge N_0)(\eta_0' \wedge \eta_0) \overset{(1.17)}{=} \varepsilon Det \begin{pmatrix} \eta_0'(x_0') & \eta_0'(N_0) \\ \eta_0(x_0') & \eta_0(N_0) \end{pmatrix} = \varepsilon \eta_0'(x_0') \neq 0$$

Das heißt: Aus (5.7)–(5.10) folgen die Bedingungen 6.) und 7.).

Bemerkung: In den Abschnitten 5.5, 5.8, 5.9 werden wir feststellen, daß x_0, N_0, η_0 bei sonstigen festen Vorgaben (gemeint ist Φ, f und die Art der Normalen) je eine elliptische und eine hyperbolische, isotherm parametrisierte Fläche induzieren, die x_0 als Parameterlinie haben und für die die Normale und die Konormale längs $(s,0)$ mit N_0 und η_0 übereinstimmen. Auch die anderen Flächengrößen sind längs $(s,0)$ mit den hier berechneten Anfangswerten identisch.
Es gibt allerdings Unterschiede zwischen den Flächengrößen der beiden induzierten Flächen: $K_{11}^2(s,0)$ und $\partial_2(E)(s,0)$ sind bei der elliptischen Fläche anders als bei der hyperbolischen. K_{11}^1, E, S_1^1, S_1^2, ${\Gamma_{11}}^1$, ${\Gamma_{11}}^2$, ${\overline{\Gamma}_{11}}^1$, x_1, x_2, η_1 dagegen stimmen längs $(s,0)$ überein, η_2, ${\overline{\Gamma}_{11}}^2$ unterscheiden sich hier nur durch das Vorzeichen.

5.4 Die eigentliche Differentialgleichung bei beliebigen Relativnormalen

Hier wollen wir allgemein beschreiben, wie wir aus x_0, N_0, η_0 eine Fläche x gewinnen, die x_0 als Parameterlinie $x(s,0)$ enthält, bei der N_0 eine ganz bestimmte Relativnormale N längs x_0 und η_0 die zugehörige Konormale längs x_0 ist.

So gehen wir vor: Die Integrabilitätsbedingungen aus Abschnitt 5.2 liefern ein Differentialgleichungssystem, das mit den Anfangsbedingungen aus 5.3 mehrere lokale Koordinatenfunktionen festlegt (Abschnitt 5.4.1). Diese werden in Abschnitt 5.4.2 in ein weiteres System von Differentialgleichungen eingesetzt, das als Lösung die Fläche und die Normale hat.

In Abschnitt 5.2 und 5.3 sind wir zuerst von einer gegebenen Fläche in isothermen Parametern bezüglich h ausgegangen und haben untersucht, welche Eigenschaften die Koordinatenfunktionen der Flächengrößen h, ∇, S einer derartigen Fläche notwendig haben. Nun geben wir umgekehrt Funktionen mit diesen notwendigen Bedingungen und Anfangswerten vor und versuchen, aus ihnen eine Fläche zu rekonstruieren, die diese Funktionen als jeweilige Flächengrößen hat.

Wir gehen in diesem Abschnitt (wie auch in Abschnitt 3.6) noch nicht von einer bestimmten Normalisierung aus. N sei eine Relativnormale mit der Stützfunktion $\eta_b(N) = q$ bezüglich N_b. Wir geben die entsprechenden Formeln und Differentialgleichungen für diesen allgemeinen Fall an. Wir werden sehen, daß das erhaltene System von Differentialgleichungen (in 5.4.1) noch nicht vollständig ist. Darum müssen wir es in den Abschnitten 5.5, 5.7–5.9 geeignet ergänzen.

Gegeben seien die in $s = 0$ analytische, reguläre Kurve x_0 und die Vektorfelder N_0, η_0 längs x_0, die noch den Bedingungen (5.7)–(5.10) genügen und auch analytisch sind.

Sei ε festgesetzt, also $\varepsilon = 1$, wenn wir Flächengrößen einer elliptischen Fläche betrachten, $\varepsilon = -1$ für hyperbolische Flächen. Im folgenden besprechen wir die beiden Fälle gleichzeitig. Wir werden immer wieder Differentialgleichungen und andere Formeln angeben, die ε in gewisser Weise als ,,Variable" enthalten. Auch wenn so eine Differentialgleichung wie eine einzige Differentialgleichung behandelt wird, sollte stets beachtet werden, daß sich eine andere Gleichung ergibt, je nachdem, was man für ε einsetzt.

Um sicherzustellen, daß man auf der am Ende erhaltenen Fläche überhaupt auf x_0 bezogene isotherme Parameter einführen konnte aufgrund von Lemma 5.2, müssen wir x_0 als analytisch (in $s = 0$) voraussetzen und dafür sorgen, daß x im Punkt $(0,0)$ analytisch ist. Das wird aber nach Satz 5.1 automatisch erfüllt, wenn wir auch N_0, η_0 analytisch (in $s = 0$) wählen. Das sei im folgenden immer vorausgesetzt.

5.4.1 Das Differentialgleichungssystem für die Flächengrößen

Die Größen h, ∇ und S legen eine relativnormalisierte Fläche, bis auf affine Transformationen, nur unter der Bedingung eindeutig fest, daß sie die Integrabilitätsbedingungen (1.1) erfüllen. Wir haben allerdings nicht die Flächengrößen als Vorgabe, sondern nur die Kurve x_0 und die beiden Vektorfelder längs x_0. Die Integrabilitätsbedingungen aus 5.2 liefern mit den Anfangswerten aus 5.3 allerdings ein System von Differentialgleichungen, das als Lösungen die Koordinatenfunktionen dieser Größen hat.

Nun kommen wir zuerst zur Bestimmung der Größen h, ∇ und S, konkret E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, S_1^2, S_2^2, T^1, T^2 und q. Aus diesen neun Funktionen lassen sich alle anderen Koordinatenfunktionen bestimmen, wie wir in 5.2 gezeigt haben.

Betrachten wir (G2) und (G3), so bemerken wir, daß jeweils die gleichen Summanden vorkommen, aber nicht immer mit dem gleichen Vorzeichen. Aus ,,$-$(G2) $+\varepsilon$ (G3)" erhalten wir

$$\begin{gathered}
\varepsilon\partial_1\left(\partial_1(\log|E|)\right) + \partial_2\left(\partial_2(\log|E|)\right) + 4\varepsilon(K_{11}^1)^2 + 4(K_{11}^2)^2 \\
-12\varepsilon E K_{11}^1 T^1 - 4E K_{11}^2 T^2 + 8\varepsilon E^2 (T^1)^2 = -\varepsilon E(S_1^1 + S_2^2).
\end{gathered}$$

Lösen wir das nach $\partial_2\partial_2(E)$ auf, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\partial_2(\partial_2(E)) \quad = \quad & -\varepsilon\partial_1(\partial_1(E)) + \varepsilon\frac{\partial_1(E)^2}{E} + \frac{\partial_2(E)^2}{E} \\
& -4\varepsilon E(K_{11}^1)^2 - 4E(K_{11}^2)^2 - \varepsilon E^2(S_1^1 + S_2^2) \\
& +12\varepsilon E^2 K_{11}^1 T^1 + 4E^2 K_{11}^2 T^2 - 8\varepsilon E^3 (T^1)^2.
\end{aligned}$$

Analog folgt aus ,,$-\varepsilon$ (G2) $-$ (G3)", d. h.

$$\begin{gathered}
2\partial_1(K_{11}^1) + 2\partial_2(K_{11}^2) + 2\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 + 2\frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 \\
-4E\partial_1(T^1) - 6\partial_1(E)T^1 - 2\partial_2(E)T^2 = -E(S_1^1 - S_2^2),
\end{gathered}$$

eine Differentialgleichung für $\partial_2(K_{11}^2)$:

$$\begin{aligned}
\partial_2(K_{11}^2) \quad = \quad & -\partial_1(K_{11}^1) - \frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 - \frac{1}{2}E(S_1^1 - S_2^2) \\
& +3\partial_1(E)T^1 + \partial_2(E)T^2 + 2E\partial_1(T^1).
\end{aligned}$$

Lösen wir noch (G1) bzw. (G4) nach $\partial_2(K^1_{11})$, (C1) nach $\partial_2(S^1_1)$ und (C2) nach $\partial_2(S^2_1)$ auf, ergibt sich mit obigem, (5.4) und (5.5) für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = -1$ je ein System von sieben Differentialgleichungen für die Funktionen E, K^1_{11}, K^2_{11}, S^1_1, S^2_1, T^1 und q:

Differentialgleichungssystem DGL I

$$\begin{aligned}
\partial_2(\partial_2(E)) &= -\varepsilon\partial_1(\partial_1(E)) + \varepsilon\frac{\partial_1(E)^2}{E} + \frac{\partial_2(E)^2}{E} \\
&\quad -4\varepsilon E(K^1_{11})^2 - 4E(K^2_{11})^2 - \varepsilon E^2(S^1_1 + S^2_2) \\
&\quad +12\varepsilon E^2 K^1_{11} T^1 + 4E^2 K^2_{11} T^2 - 8\varepsilon E^3 (T^1)^2 \\
\partial_2(K^1_{11}) &= \varepsilon\partial_1(K^2_{11}) - \frac{\partial_2(E)}{E}K^1_{11} + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K^2_{11} \\
&\quad +\varepsilon E S^2_1 + 2\partial_2(E)T^1 \\
\partial_2(K^2_{11}) &= -\partial_1(K^1_{11}) - \frac{\partial_1(E)}{E}K^1_{11} - \frac{\partial_2(E)}{E}K^2_{11} - \frac{1}{2}E(S^1_1 - S^2_2) \\
&\quad +3\partial_1(E)T^1 + \partial_2(E)T^2 + 2E\partial_1(T^1) \\
\partial_2(S^1_1) &= \varepsilon\partial_1(S^2_1) + \Big(\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E} + 2\varepsilon K^1_{11} - 2\varepsilon E T^1\Big)S^2_1 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K^2_{11}\Big)(S^2_2 - S^1_1) \\
\partial_2(S^2_1) &= \partial_1(S^2_2) + \Big(-\frac{\partial_2(E)}{E} + 2\varepsilon K^2_{11} - 2\varepsilon E T^2\Big)S^2_1 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K^1_{11} + 2ET^1\Big)(S^2_2 - S^1_1) \\
\partial_2(T^1) &= \varepsilon\partial_1(T^2) - \frac{\partial_2(E)}{E}T^1 + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}T^2 \\
\partial_2(q) &= \varepsilon E q T^2
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind nach dem vorigen Abschnitt:

$$\begin{aligned}
E(s,0) &= -\eta_0'(x_0')(s) \\
\partial_2(E)(s,0) &= \varepsilon\frac{\delta}{q^2(s,0)}det(x_0'', x_0', N_0)(s) - \delta q^2(s,0)\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')(s) \\
K^1_{11}(s,0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_0'(x_0'')}{\eta_0'(x_0')} - \frac{\eta_0''(x_0')}{\eta_0'(x_0')}\right)(s) \\
K^2_{11}(s,0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{det(x_0'', x_0', N_0)}{\delta q^2(s,0)\eta_0'(x_0')} + \frac{\delta q^2(s,0)\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')}{\varepsilon\eta_0'(x_0')}\right)(s) \\
S^1_1(s,0) &= -\frac{\eta_0'(N_0')}{\eta_0'(x_0')}(s) \\
S^2_1(s,0) &= \frac{det(x_0', N_0', N_0)(s)}{\delta q^2(s,0)\eta_0'(x_0')(s)} \\
T^1(s,0) &= -\frac{\partial_1(q)(s,0)}{q(s,0)\eta_0'(x_0')(s)}
\end{aligned}$$

Dieses System ist nicht vollständig im Sinne des Satzes von Cauchy–Kowalewski. Für die neun Funktionen hat man nur sieben Gleichungen. Es fehlen, sieht man von den Anfangswerten ab, Differentialgleichungen oder sonstige Festlegungen für die Funktionen S^2_2 und

T^2. Das Problem läßt sich nicht beseitigen, indem man die T^k mittels (5.4) durch einen Ausdruck mit $\partial_k(\log|q|)$ ersetzt. Man bekommt in diesem Fall diese Differentialgleichungen:

Differentialgleichungssystem DGL I′

$$
\begin{aligned}
\partial_2(\partial_2(E)) &= -\varepsilon\partial_1(\partial_1(E)) + \varepsilon\frac{\partial_1(E)^2}{E} + \frac{\partial_2(E)^2}{E} \\
&\quad -4\varepsilon E(K_{11}^1)^2 - 4E(K_{11}^2)^2 - \varepsilon E^2(S_1^1 + S_2^2) \\
&\quad +12\varepsilon E K_{11}^1\partial_1(\log|q|) + 4\varepsilon E K_{11}^2\partial_2(\log|q|) - 8\varepsilon E(\partial_1(\log|q|))^2 \\
\partial_2(K_{11}^1) &= \varepsilon\partial_1(K_{11}^2) - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^1 + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^2 \\
&\quad +\varepsilon E S_1^2 + 2\frac{\partial_2(E)}{E}\partial_1(\log|q|) \\
\partial_2(K_{11}^2) &= -\partial_1(K_{11}^1) - \frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 - \frac{1}{2}E(S_1^1 - S_2^2) \\
&\quad +\frac{\partial_1(E)}{E}\partial_1(\log|q|) + \varepsilon\frac{\partial_2(E)}{E}\partial_2(\log|q|) + 2\partial_1\partial_1(\log|q|) \\
\partial_2(S_1^1) &= \varepsilon\partial_1(S_1^2) + \Big(\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E} + 2\varepsilon K_{11}^1 - 2\varepsilon\partial_1(\log|q|)\Big)S_1^2 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2\Big)(S_2^2 - S_1^1) \\
\partial_2(S_1^2) &= \partial_1(S_2^2) + \Big(-\frac{\partial_2(E)}{E} + 2\varepsilon K_{11}^2 - 2\partial_2(\log|q|)\Big)S_1^2 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2\partial_1(\log|q|)\Big)(S_2^2 - S_1^1)
\end{aligned}
$$

Es kommen nun zwei Funktionen weniger vor, dafür gibt es auch zwei Gleichungen weniger. In diesem System fehlen Gleichungen für S_2^2 und q.

Im folgenden werden wir sehen: T^2 bzw. q hängt von der Art der Relativnormalen ab, S_2^2 ist dann noch frei wählbar und wird festgelegt durch eine Funktion der Mittleren und Gaußschen Krümmung, wie auch in [Lei1].

q ist die Stützfunktion der Normalen N bezüglich N_b. Sie kann bei Angabe der Fläche x und der Normalen N jederzeit bestimmt werden, aber gerade diese Abbildungen x, N werden erst durch das Differentialgleichungssystem von 5.4.2 berechnet. Man kann q in der Regel nicht explizit als Funktion vorher angeben, sondern es ergibt sich als Lösung dieses Systems. Ist festgelegt, von welcher Art die Normale N ist, ergibt sich eine Gleichung für q oder auch T^2.
Im Falle der Blaschkeschen Affinnormale bedeutet das $q \equiv 1$, siehe Abschnitt 5.5.
Bei der euklidischen Normalen ist q eine Funktion der anderen Größen. Bei anderen Normalen der Manhartschen oder der zentroaffinen Familie erfüllt T^2 bzw. q eine bestimmte Differentialgleichung.
Kennt man diese Funktion oder Differentialgleichung, die von der Art der Normalen abhängt, kann man das System anpassen. Dies ist die Aufgabe der Abschnitte 5.5, 5.7–5.9.

Ist dann damit eine Gleichung für q oder T^2 gefunden, so kann man S_2^2 noch vorgeben. Je

nachdem erhält man eine andere Fläche. Um S_2^2 schließlich festzusetzen, geben wir eine Bedingung an $\mathcal{K}$ und H an, die die Fläche erfüllen muß:
Sei f eine in $(0,0)$ analytische Funktion. Die Krümmungsfunktionen $\mathcal{K} = S_1^1 S_2^2 - \varepsilon (S_1^2)^2$ und $2H = S_1^1 + S_2^2$ seien durch die analytische Funktion

$$\Phi(H, \mathcal{K}) = \Phi((S_1^1 + S_2^2)/2, S_1^1 S_2^2 - \varepsilon (S_1^2)^2) = \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2) = f(u,v)$$

festgelegt, wobei $\tilde{\Phi}$ in einer Umgebung von $(S_1^1(0,0), S_1^2(0,0))$ eindeutig nach S_2^2 auflösbar ist, so daß man S_2^2 darstellen kann als analytische Funktion $S_2^2(S_1^1, S_1^2, f)$ von S_1^1, S_1^2, f. Ersetzt man S_2^2 im System DGL I bzw. DGL I$'$ durch diese Funktion, ist es eindeutig lösbar.

Bemerkung: Leichtweiß schlägt für Φ die rationale Funktion

$$\Phi(H, \mathcal{K}) = \frac{l_1 2H + l_2 \mathcal{K} + l_3}{m_1 2H + m_2 \mathcal{K} + m_3}$$

vor mit $l_i, m_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. S_2^2 ergibt sich als

$$S_2^2 = \frac{1}{(l_2 - m_2 f) S_1^1 + (l_1 - m_1 f)} (\varepsilon (l_2 - m_2 f)(S_1^2)^2 - (l_1 - m_1 f) S_1^1 - (l_3 - m_3 f)).$$

Wenn der Nenner $\neq 0$ ist in einer Umgebung von $(u,v) = (0,0)$, so ist S_2^2 eine analytische Funktion von S_1^1, S_1^2, f. Das ist erfüllt, falls

$$-(l_2 - m_2 f(0,0)) \eta_0'(N_0')(0) + (l_1 - m_1 f(0,0)) \eta_0'(x_0')(0) \neq 0$$

ist. Wegen der Stetigkeit von f, η_0', N_0', x_0' gilt es dann auch in einer Umgebung von 0.
Für $l_2 = m_2 = m_1 = 0$, $l_1 \neq 0$ ist dies wegen (5.10) immer erfüllt, egal wie f vorgegeben wird.
Bei Vorgabe von $\mathcal{K} = \hat{f}$, also $l_1 = m_1 = m_2 = 0$, $l_2 \neq 0$ zumindest dann, wenn $\eta_0'(N_0')(0) \neq 0$ ist.
Nach Satz 5.3 wird darauf noch einmal eingegangen.

Man kann Φ aber auch noch allgemeiner vorgeben. Es kann sogar zusätzlich von anderen Invarianten abhängen, etwa von der Pickschen Invariante

$$4n(n-1)\, J := h^{il} h^{jm} h^{ks} C_{ijk} C_{lms} = 4 K_{jk}^l K_{ls}^j h^{ks} = \frac{4}{E} (K_{j1}^l K_{l1}^j + \varepsilon K_{j2}^l K_{l2}^j)$$

oder von q wie[9] in 5.9. Wichtig ist nur, daß $\Phi = f$ nach S_2^2 auflösbar ist (deshalb ist die Bedingung $\Phi(J) = f$ nutzlos) und daß S_2^2 eine analytische Funktion von den übrigen Funktionen E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1 ,S_1^2, T^1, T^2, q ist, nicht von deren Ableitungen (außer $\partial_1(E)$, $\partial_2(E)$), um die Voraussetzungen von Satz 5.1 an das System zu erfüllen, denn in DGL I kommt auch einmal $\partial_1(S_2^2)$ vor.
Wir beschränken uns aber im weiteren auf den Fall $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ und werden in der Regel die obige rationale Funktion genauer besprechen.

[9]Für $N = N_e$ ist hier Vorsicht geboten, da q hier eine Potenz von $\mathcal{K}$ ist.

Wie in Kapitel 3 herausgefunden, hat besonders der Fall $\Phi(H,\mathcal{K}) = H$ eine geometrische Bedeutung: Bei den Normalen der Manhartschen Familie zeigt $H = 0$ eine Minimalfläche an.

Hat man T^2 (bzw. q) und S_2^2 festgelegt, liefert das System von Differentialgleichungen eindeutig als Lösungen die Funktionen E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, S_1^2, q, T^1 und T^2. Mit Hilfe dieser Funktionen läßt sich ein zweites System von Differentialgleichungen aufstellen, das die Fläche und die Normale als Lösungen hat. Bis zu diesem Schritt muß man die Differentialgleichungen und Anfangswerte an die Normalisierung anpassen, was in 5.5, 5.7–5.9 geschieht. Diese Abschnitte sind also Ergänzungen zu 5.4.1. Die Systeme DGL I bzw. DGL I′ werden daher in 5.8, 5.9 nicht mehr wiederholt, sondern nur die fehlende Gleichung mit den restlichen Anfangswerten bestimmt.

Nachdem man die genannten Lösungsfunktionen gefunden hat, geht man für alle Normalisierungen gleich vor.
Man setzt zunächst

$$\begin{aligned}
&h_{11} = E,\ h_{22} = \varepsilon E,\ h_{12} = h_{21} = 0,\\
&K_{21}^2 = K_{12}^2 = -K_{11}^1 + 2ET^1,\ K_{22}^1 = -\varepsilon K_{11}^1 + 2\varepsilon ET^1,\\
&K_{21}^1 = K_{12}^1 = \varepsilon K_{11}^2,\ K_{22}^2 = -\varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2,\\
&\hat{\Gamma}_{ij}{}^k \text{ wie in (4.4)},\\
&\Gamma_{ij}{}^k = K_{ij}^k + \hat{\Gamma}_{ij}{}^k,\\
&S_2^1 = \varepsilon S_1^2,\ S_2^2 \text{ so, daß } \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2) = f.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Für die durch diese lokalen Funktionen definierten Größen h, ∇, S bedeutet das: h ist in isothermen Parametern gegeben, die Codazzi–Gleichung für h, die Ricci–Gleichung und (2.4) sind nach (5.11) und Abschnitt 5.2 erfüllt. Weil obige Funktionen das Differentialgleichungssystem DGL I oder DGL I′ lösen, gelten auch die Gauß– und die Codazzi–Gleichung für S. T^2 bzw. q erfüllt eine für die Art der Normalen spezifische Gleichung und einige Anfangswerte sind durch $det(x_1, x_2, N) = \delta q^2 E$ normiert. Somit genügen h, ∇ und S den Bedingungen (1.1). Gibt es eine Fläche x mit x_0 als Parameterlinie, die die gewünschte Normalisierung hat und $\Phi(H,\mathcal{K}) = f$ erfüllt, sind ihre Größen die gefundenen.

5.4.2 Gewinnung der Fläche aus den Flächengrößen

Hier zeigen wir, wie man mit den in 5.4.1 bestimmten Koordinatenfunktionen von h, ∇, S die Fläche x rekonstruieren kann.
Wir können auf zwei Wegen die Fläche x und die Normale N gewinnen: Einmal direkt mit den Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten oder, indem wir zuerst die Konormale als Lösung der Differentialgleichung (1.15) erhalten und dann mit Satz 1.13 x und N.

Die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten (deshalb GW) liefern das folgende Differentialgleichungssystem für x_1, x_2, N

Differentialgleichungssystem DGL GW

$$\partial_2(x_1) = x_{12} \quad = \quad \Gamma_{12}{}^1 x_1 + \Gamma_{12}{}^2 x_2 + h_{12} N$$

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)x_1 + (\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)x_2 \\
\partial_2(x_2) = x_{22} &= {\Gamma_{22}}^1 x_1 + {\Gamma_{22}}^2 x_2 + h_{22}N \\
&= (-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^1 + 2\varepsilon ET^1)x_1 + (\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2)x_2 + \varepsilon EN \\
\partial_2(N) = N_2 &= -\varepsilon S_1^2 x_1 - S_2^2 x_2
\end{aligned}
$$

mit den Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
x_1(s,0) &= x_0'(s) \\
x_2(s,0) &= \delta q^2(s,0)\eta_0' \wedge \eta_0(s) \\
N(s,0) &= N_0(s)
\end{aligned}
$$

x_1, x_2 und N werden nach dem Satz von Cauchy–Kowalewski eindeutig bestimmt. Durch Integration von x_1, x_2 erhält man x mit $x(0,0) = x_0(0)$.
Nach (5.11) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
{\Gamma_{22}}^1 = {\hat\Gamma_{22}}{}^1 + K_{22}^1 = -\varepsilon{\hat\Gamma_{11}}{}^1 - \varepsilon K_{11}^1 + 2\varepsilon ET^1 = -\varepsilon{\Gamma_{11}}^1 + 2\varepsilon ET^1, \\
{\Gamma_{22}}^2 = {\hat\Gamma_{22}}{}^2 + K_{22}^2 = -\varepsilon{\hat\Gamma_{11}}{}^2 - \varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2 = -\varepsilon{\Gamma_{11}}^2 + 2\varepsilon ET^2.
\end{aligned}
$$

Darum können wir das Differentialgleichungssystem DGL GW auch so umschreiben:

$$
\begin{aligned}
x_{22} &= -\varepsilon x_{11} + 2\varepsilon ET^1 x_1 + 2\varepsilon ET^2 x_2 + 2\varepsilon EN \\
N_2 &= -\varepsilon S_1^2 x_1 - S_2^2 x_2
\end{aligned}
$$

bzw. wegen (5.4)

$$
\begin{aligned}
x_{22} &= -\varepsilon x_{11} + 2\varepsilon\partial_1(\log|q|)x_1 + 2\partial_2(\log|q|)x_2 + 2\varepsilon EN \\
N_2 &= -\varepsilon S_1^2 x_1 - S_2^2 x_2.
\end{aligned}
$$

Mit den Anfangsbedingungen von oben und $x(s,0) = x_0(s)$ ergeben sich nach Satz 5.1 x und N.

Die andere Möglichkeit ist Satz 1.13 bzw. dessen Korollar. Aus (1.22) und (1.23) bzw. Lemma 1.9 folgt mit $\tau = 0$, $\nabla = K + \hat\nabla$ nun $\overline{\nabla} = -K + \hat\nabla$, $\overline{h}(X,Y) = h(S(X),Y)$. Da h, ∇, S den Bedingungen (1.1) genügen, sind wegen Lemma 1.15 die Voraussetzungen von Satz 1.13 erfüllt. Die aus der Ableitungsgleichung (1.15) für die Konormale (daher KON) stammende

Differentialgleichung DGL KON

$$
\begin{aligned}
\eta_{22} &= {\overline\Gamma_{22}}{}^1\eta_1 + {\overline\Gamma_{22}}{}^2\eta_2 - \overline{h}_{22}\eta \\
&= (-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^1 - 2\varepsilon ET^1)\eta_1 + (\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2 - 2\varepsilon ET^2)\eta_2 - S_2^2\varepsilon E\eta
\end{aligned}
$$

mit den Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\eta(s,0) &= \eta_0(s) \\
\eta_2(s,0) &= \frac{\varepsilon\delta}{q^2(s,0)}x_0' \wedge N_0(s)
\end{aligned}
$$

ist wegen des Satzes von Cauchy–Kowalewski eindeutig lösbar. Nach Satz 1.13 induziert das so gefundene η zusammen mit h eine Fläche mit η als Konormale und h als quadratischer Grundform. Die Fläche x erhält man mit (5.6) und (4.3) durch Integration von

$$x_1 = \varepsilon\delta q^2 \eta \wedge \eta_2,\ x_2 = \delta q^2 \eta_1 \wedge \eta.$$

Da aus (5.11)

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{22}{}^{1} &= \hat{\Gamma}_{22}{}^{1} - K_{22}^{1} = -\varepsilon\hat{\Gamma}_{11}{}^{1} + \varepsilon K_{11}^{1} - 2\varepsilon ET^{1} = -\varepsilon\overline{\Gamma}_{11}{}^{1} - 2\varepsilon ET^{1},\\ \overline{\Gamma}_{22}{}^{2} &= \hat{\Gamma}_{22}{}^{2} - K_{22}^{2} = -\varepsilon\hat{\Gamma}_{11}{}^{2} + \varepsilon K_{11}^{2} - 2\varepsilon ET^{2} = -\varepsilon\overline{\Gamma}_{11}{}^{2} - 2\varepsilon ET^{2}\end{aligned}$$

folgt, können wir die Gleichung dann so vereinfachen

$$\eta_{22} = -\varepsilon\eta_{11} - 2\varepsilon ET^{1}\eta_1 - 2\varepsilon ET^{2}\eta_2 - 2\varepsilon EH\eta$$

bzw. nach (5.4)

$$\eta_{22} = -\varepsilon\eta_{11} - 2\varepsilon\partial_1(\log|q|)\eta_1 - 2\partial_2(\log|q|)\eta_2 - 2\varepsilon EH\eta.$$

Man kann hier auch die Hilfssätze vom letzten Kapitel anwenden, wenn man sie auf beliebige Relativnormalen verallgemeinert. Der Unterschied zu den Differentialgleichungen dort ist: Hier sind zusätzlich Anfangswerte gegeben, wir müssen im Prinzip zuerst die Flächengrößen nach 5.4.1 berechnen, erst dann können wir die richtige Differentialgleichung stellen.

Bemerkungen: 1.) Die Differentialgleichungen DGL GW und DGL KON mit Satz 1.13 in 5.4.2 sind Alternativen, es muß nur ein System gelöst werden. Sie besitzen beide die gleichen, in Abschnitt 5.4.1 berechneten Koordinatenfunktionen als Grundlage und haben deshalb die gleiche Fläche x mit der Normalen N als Lösung. Die Konormale von x nach DGL GW hat die in DGL KON vorkommenden Größen $\overline{\nabla}$, $\overline{h}$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muß die nach DGL KON berechnete Konormale die von x sein.

2.) Auch wenn wir somit jeweils nur ein System von Differentialgleichungen angegeben haben in 5.4.1 (DGL I bzw I′) und 5.4.2 (DGL GW bzw. KON) mit ε als „Variable", erhält man für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = -1$ je ein anderes System. Es ist zu beachten, daß man beim Lösen der Systeme in den zwei Unterabschnitten dasselbe ε verwendet. Hat man die Flächengrößen aus dem System DGL I für $\varepsilon = -1$ berechnet, so erfüllen sie die Integrabilitätsbedingungen für Flächengrößen einer hyperbolischen Fläche und nicht notwendig die einer elliptischen. Benutzt man diese Flächengrößen in 5.4.2, muß man (bei DGL GW z. B.) auch $\varepsilon = -1$ nehmen. Man erhält für jedes Tripel x_0, N_0, η_0, wenn keine Ausnahmen vorliegen (z. B. Abschnitt 5.7), also zwei Flächen, eine elliptische und eine hyperbolische.

5.5 Lösung bei Blaschkescher Affinnormalisierung

Wir werden in diesem Abschnitt das beschriebene Verfahren darauf anwenden, daß N die Blaschkesche Affinnormale ist. Das Ergebnis wird sein, daß es bis auf Ausnahmen für x_0, N_0, η_0 je genau eine elliptische und eine hyperbolische Fläche x in isothermen Parametern gibt, die x_0 als Parameterlinie enthält, deren Blaschkesche Affinnormale N bzw. Konormale η längs $(s, 0)$ mit N_0 bzw. η_0 übereinstimmt und für die $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ ist.

Wir spezialisieren dazu das Differentialgleichungssystem DGL I bzw. I$'$ von Abschnitt 5.4.1 auf den Fall der Blaschkeschen Affinnormale, das bedeutet, wir setzen

$$q = 1,\ T^1 = T^2 = 0.$$

$N = N_b$ ist nämlich die Normale unter den in Kapitel 2 definierten Relativnormalen, von der wir explizit $q = \eta_b(N)$ vor der Lösung des Systems angeben können, und zwar $q \equiv 1$. Nach (5.4) ist $T^1 = T^2 = 0$.
Ob wir das in DGL I oder DGL I$'$ einsetzen, spielt keine Rolle, denn es liefert das gleiche Differentialgleichungssystem.

Gegeben seien die in $s = 0$ analytische, reguläre Kurve x_0 und die ebenfalls in $s = 0$ analytischen Vektorfelder N_0, η_0 längs x_0. Die Bedingungen (5.7)–(5.10) seien erfüllt. Dann bekommen wir für $\varepsilon = 1$ bzw. -1 je ein nach dem Satz von Cauchy–Kowalewski eindeutig lösbares System partieller Differentialgleichungen für die Funktionen E, K^1_{11}, K^2_{11}, S^1_1 und S^2_1. S^2_2 ist eine analytische Funktion von S^1_1, S^2_1, f, die sich aus $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ ergibt.
Wir lösen das

Differentialgleichungssystem DGL BL

$$\begin{aligned}
\partial_2(\partial_2(E)) &= -\varepsilon\partial_1(\partial_1(E)) + \varepsilon\frac{\partial_1(E)^2}{E} + \frac{\partial_2(E)^2}{E} \\
&\quad -4\varepsilon E(K^1_{11})^2 - 4E(K^2_{11})^2 - \varepsilon E^2(S^1_1 + S^2_2) \\
\partial_2(K^1_{11}) &= \varepsilon\partial_1(K^2_{11}) - \frac{\partial_2(E)}{E}K^1_{11} + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K^2_{11} + \varepsilon E S^2_1 \\
\partial_2(K^2_{11}) &= -\partial_1(K^1_{11}) - \frac{\partial_1(E)}{E}K^1_{11} - \frac{\partial_2(E)}{E}K^2_{11} - \frac{1}{2}E(S^1_1 - S^2_2) \\
\partial_2(S^1_1) &= \varepsilon\partial_1(S^2_1) + \Big(\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E} + 2\varepsilon K^1_{11}\Big)S^2_1 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K^2_{11}\Big)(S^2_2 - S^1_1) \\
\partial_2(S^2_1) &= \partial_1(S^2_2) + \Big(-\frac{\partial_2(E)}{E} + 2\varepsilon K^2_{11}\Big)S^2_1 \\
&\quad +\Big(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K^1_{11}\Big)(S^2_2 - S^1_1)
\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned}
E(s,0) &= -\eta_0'(x_0')(s) \\
\partial_2(E)(s,0) &= \varepsilon\, det(x_0'', x_0', N_0)(s) - \overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')(s) \\
K^1_{11}(s,0) &= \frac{\eta_0'(x_0'') - \eta_0''(x_0')}{2\eta_0'(x_0')}(s) \\
K^2_{11}(s,0) &= \frac{det(x_0'', x_0', N_0) + \varepsilon\,\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')}{2\eta_0'(x_0')}(s) \\
S^1_1(s,0) &= -\frac{\eta_0'(N_0')}{\eta_0'(x_0')}(s) \\
S^2_1(s,0) &= \frac{det(x_0', N_0', N_0)}{\eta_0'(x_0')}(s).
\end{aligned}$$

Dies liefert eindeutig die fünf Funktionen E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1 und S_1^2 in einer Umgebung von $(0,0)$.

Bemerkung: Wir haben ein System von Differentialgleichungen erhalten, indem wir die Funktionen $T^1 = T^2 = 0$, $q = 1$, die im Fall $N = N_b$ bekannt sind, in DGL I oder I′ eingesetzt haben. Wir erhalten aber diesselben Lösungen, wenn wir DGL I oder I′ durch geeignete Differentialgleichungen ergänzen. Die Teilsysteme, die q, T^1, T^2 betreffen, haben auch die eindeutige Lösung $T^2 = T^1 = 0$, $q = 1$, das übrige System ist von der Gestalt von DGL BL. Die Teilsysteme

$$\begin{gathered}\partial_2(q) = 0, \qquad q(s,0) = 1\\ \text{oder}\\ \partial_2\partial_2(q) = 0, \qquad \partial_2(q)(s,0) = 0,\ q(s,0) = 1\end{gathered}$$

von dem ergänzten System DGL I′ haben genau eine Lösung nach Satz 5.1, und zwar $q = 1$. Und auch DGL I ergänzt durch

$$\begin{aligned}&\partial_2(T^2) = 0\\ &T^2(s,0) = T^1(s,0) = 0,\ q(s,0) = 1\end{aligned}$$

hat wegen der Eindeutigkeit nach Satz 5.1 die Lösungen $T^2 = T^1 = 0$, $q = 1$ und die von DGL BL.

Die anderen lokalen Funktionen erhalten wir aus (5.11), das hier einfacher aussieht:

$$\begin{aligned}&h_{11} = E,\ h_{22} = \varepsilon E,\ h_{12} = h_{21} = 0,\\ &K_{21}^2 = K_{12}^2 = -K_{11}^1,\ K_{22}^1 = -\varepsilon K_{11}^1,\\ &K_{21}^1 = K_{12}^1 = \varepsilon K_{11}^2,\ K_{22}^2 = -\varepsilon K_{11}^2,\\ &\hat{\Gamma}_{ij}{}^k \text{ wie in (4.4)},\\ &\Gamma_{ij}{}^k = K_{ij}^k + \hat{\Gamma}_{ij}{}^k,\\ &S_2^1 = \varepsilon S_1^2,\ S_2^2 \text{ so, daß } \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2) = f.\end{aligned}$$

Jetzt, wo wir die Flächengrößen bestimmt haben, gehen wir wie in 5.4.2 vor. Ausnahmsweise werden wir das, anders als in den nächsten Abschnitten, kurz wiederholen und die Differentialgleichungen noch einmal angeben, weil sie sich im Fall $N = N_b$ vereinfachen.

Das Differentialgleichungssystem DGL GW sieht hier so aus, nachdem man $T^2 = T^1 = 0$, $q = 1$ eingesetzt hat:

$$\begin{aligned}x_{12} &= (\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)x_1 + (\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1)x_2\\ x_{22} &= (-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^1)x_1 + (\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^2)x_2 + \varepsilon E N\\ N_2 &= -\varepsilon S_1^2 x_1 - S_2^2 x_2\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}x_1(s,0) &= x_0'(s)\\ x_2(s,0) &= \eta_0' \wedge \eta_0(s)\\ N(s,0) &= N_0(s).\end{aligned}$$

Nach (5.11) kann man DGL GW auch so darstellen:

$$\begin{aligned} x_{22} &= -\varepsilon x_{11} + 2\varepsilon E N \\ N_2 &= -\varepsilon S_1^2 x_1 - S_2^2 x_2 \end{aligned}$$

Es bestimmt eindeutig x und N.

Wir können auch den Satz 1.13 verwenden: Die Differentialgleichung DGL KON

$$\eta_{22} \;=\; (-\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^1)\eta_1 + (\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)\eta_2 - S_2^2\varepsilon E\eta$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \eta(s,0) &= \eta_0(s) \\ \eta_2(s,0) &= \varepsilon x_0' \wedge N_0(s) \end{aligned}$$

kann man wie in Abschnitt 5.4.2 auch so ausdrücken (siehe (4.6))

$$\eta_{22} = -\varepsilon\eta_{11} - 2\varepsilon E H\eta$$

und danach Lemma 4.3 benutzen.

Man sieht, daß bei $\Phi(H,\mathcal{K}) = H = f$ das System DGL I bzw. DGL BL für die Flächengrößen gar nicht mehr gelöst werden muß, sondern nur noch

$$\eta_{22} = -\varepsilon\eta_{11} - 2f\overline{det}(\eta,\eta_1,\eta_2)\eta,$$

für $f = 0$ lediglich die Differentialgleichung

$$\eta_{22} = -\varepsilon\eta_{11}.$$

Satz 5.3 *Gegeben seien die in $s = 0$ analytische, reguläre Kurve x_0, die Vektorfelder N_0, η_0 längs x_0, die den Bedingungen (5.7)–(5.10) genügen und in 0 analytisch sind, die in $(0,0)$ analytische Funktion f und die analytische Funktion $\Phi(H,\mathcal{K}) = \Phi((S_1^1 + S_2^2)/2, S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2) = \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2)$, für die $\Phi(H,\mathcal{K}) = f$ eindeutig nach S_2^2 auflösbar ist.*
Dann existiert zumindest lokal in einer Umgebung des Punktes $(u,v) = (0,0)$ je genau eine elliptische und eine hyperbolische Blaschke–Immersion x in isothermen Parametern, die x_0 als Parameterlinie enthält, d. h. $x_0(s) = x(s,0)$, deren Blaschkesche Affinnormale N und Konormale η längs x_0 mit N_0 bzw. η_0 übereinstimmen, $N_0(s) = N(s,0)$, $\eta_0(s) = \eta(s,0)$, und für deren Affine Gaußsche Krümmung $\mathcal{K}$ und Affine Mittlere Krümmung H die Beziehung $\Phi(H,\mathcal{K}) = f$ gilt.

Beweis: Die aufgeführten Differentialgleichungen sind eindeutig zu lösen. Umgekehrt gibt es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Normalisierung, die $T^1 = T^2 = 0$ erfüllt. Weil $q(s,0)$ mit 1 normiert ist, muß $N = N_b$ sein. #

Korollar: 1.) Für eine in $(0,0)$ analytische Funktion f existiert je eine elliptische und eine hyperbolische Blaschke–Immersion mit $H = f$, die x_0 als Parameterlinie enthält und deren Blaschkesche Affinnormale und Konormale längs x_0 mit N_0 bzw. η_0 übereinstimmen.

2.) Wenn $\eta_0'(N_0')(0) \neq 0$ gilt, existiert für eine in $(0,0)$ analytische Funktion f je eine elliptische und eine hyperbolische Blaschke–Immersion mit $\mathcal{K} = f$, die x_0 als Parameterlinie enthält und deren Blaschkesche Affinnormale und Konormale längs x_0 mit N_0 bzw. η_0 übereinstimmen.

Beweis: 1.) Man setze im Satz 5.3 $\Phi(H,\mathcal{K}) = H$. Die Gleichung $H = \frac{1}{2}(S_1^1 + S_2^2) = f$ läßt sich immer nach S_2^2 auflösen, und zwar gilt $S_2^2 = -S_1^1 + 2f$.
2.) Hier setzt man im Satz 5.3 $\Phi(H,\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Die Gleichung $\mathcal{K} = S_1^1 S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2 = f$ läßt sich nur dann eindeutig auflösen, wenn $S_1^1(0,0) \neq 0$ ist, also $\eta_0'(N_0')(0) \neq 0$. Dann ist

$$S_2^2 = \frac{\varepsilon(S_1^2)^2 + f}{S_1^1}.$$

Siehe auch die Bemerkung in Abschnitt 5.4.1. #

5.6 Die Blaschkesche Methode zur Gewinnung einer Affinminimalfläche aus einem Kurvenstreifen

In den vorigen Abschnitten haben wir uns darauf konzentriert, festzustellen, ob Lösungen von gewissen Differentialgleichungen existieren, d. h. ob es zu x_0, N_0, η_0 eine Fläche mit Flächenkurve x_0 und bestimmten Eigenschaften gibt. Wir haben also nur Existenzfragen untersucht.
Jetzt werden wir eine Methode vorstellen, die es erlaubt, eine Affinminimalfläche konkret aus den gegebenen x_0, N_0, η_0 zu rekonstruieren.

Diese Methode wurde schon in [Bl2], S. 183–187, für hyperbolische Flächen mit Asymptotenparametern angegeben, auch in [Sch], S. 187–189, wird sie erwähnt. In [Bö] wird die Methode auch auf den elliptischen Fall erweitert, allerdings mit komplexen Asymptotenparametern.

Wir wenden Ergebnisse aus dem 4. Kapitel und Abschnitt 5.5 an.

Gegeben seien also die analytische, reguläre Kurve x_0 und die analytischen Vektorfelder N_0 und η_0 längs x_0 mit (5.7)–(5.10).
Weil wir Affinminimalflächen behandeln, ist $\Phi(H,\mathcal{K}) = H$ und $f = 0$. Die Voraussetzungen von Satz 5.3 sind erfüllt, es brauchen keine weiteren Bedingungen gefordert zu werden.
Der Satz sagt aus, daß es je genau eine elliptische und eine hyperbolische Affinminimalfläche gibt, die x_0 als Flächenkurve und N_0 bzw. η_0 als Blaschkesche Affinnormale bzw. Konormale längs x_0 hat.
Wie vor Satz 5.3 erwähnt, müssen wir in diesem Fall ($H = 0$) nur die Differentialgleichung

$$\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$$

mit den Anfangswerten

$$\eta(s,0) = \eta_0(s)$$
$$\eta_2(s,0) = \varepsilon x_0' \wedge N_0(s)$$

lösen. Wir brauchen nicht die Größen mit den Differentialgleichungen in 5.4.1 zu berechnen. Die Integrabilitätsbedingungen (1.18) bzw. (1.1)[10] sind ja, wie in Lemma 4.2 bewiesen wurde, automatisch erfüllt.

Bemerkung: Ähnlich geht es auch bei Blaschke–Immersionen mit $H = f$ statt $H = 0$. Ersetzt man E in DGL KON durch $\varepsilon\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)$ erhält man

$$\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = -2\varepsilon f \overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)\eta$$

mit den Anfangswerten wie oben. Man muß nur diese Differentialgleichung lösen und nicht mehr DGL BL, da auch in dem Fall (1.18) erfüllt und Lemma 4.3 anzuwenden ist.

Nun kommen wir zum eigentlichen Verfahren: Wir lösen $\eta_{11} + \varepsilon\eta_{22} = 0$ nicht direkt. Wir wissen aus Abschnitt 4.2, daß η auf eine bestimmte Art darstellbar ist, und zwar durch eine holomorphe Kurve Φ oder durch eine Translationsfläche $U + V$. Auch die Adjungierte[11] $\overline{\eta}$, die ebenfalls diese Differentialgleichung löst mit anderen Anfangswerten, geht aus Φ oder der Translationsfläche $U - V$ hervor.
Um die Differentialgleichung zu lösen, um somit ein η mit den vorgegebenen Anfangswerten zu erhalten, müssen wir nur die geeignete holomorphe Kurve bzw. Translationsfläche finden. Wir werden dazu η und $\overline{\eta}$ längs $(s, 0)$ vergleichen und mit Hilfe dieser Anfangswerte U, V und Φ berechnen.
Ist η dann gefunden, kann man Satz 4.4 anwenden: x ist dann die Stammfunktion

$$x = \int (\varepsilon\eta \wedge \eta_2 du - \eta \wedge \eta_1 dv),$$

für die $x(0,0) = x_0(0)$ ist. Die Blaschkesche Affinnormale ist

$$N = \frac{\eta_1 \wedge \eta_2}{\overline{det}(\eta, \eta_1, \eta_2)}.$$

Wir behandeln nun den elliptischen und hyperbolischen Fall separat.

5.6.1 Konstruktion einer hyperbolischen Affinminimalfläche

Sei $\varepsilon = -1$:
Wenden wir die Parametertransformation

$$\overline{u} = u - v, \;\; \overline{v} = u + v$$
$$u = \frac{1}{2}(\overline{u} + \overline{v}), \;\; v = \frac{1}{2}(-\overline{u} + \overline{v})$$

[10] Der Zusammenhang zwischen diesen Bedingungen wird in Lemma 1.14 und 1.15 behandelt.
[11] Es existiert natürlich nicht nur eine Adjungierte, das wird jedoch für das Verfahren keine Rolle spielen.

an, so gilt für die Konormale η einer Affinminimalfläche x und ihre Adjungierte $\overline{\eta}$

$$\eta(u,v) =: \tilde{\eta}(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)) = U(\overline{u}(u,v)) + V(\overline{v}(u,v)),$$
$$\overline{\eta}(u,v) =: \bar{\tilde{\eta}}(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)) = U(\overline{u}(u,v)) - V(\overline{v}(u,v)) + \zeta$$

mit Abbildungen U, V von nur einer Variablen.
Für die Anfangswerte von η und $\overline{\eta}$ heißt das:

$$\eta_0(s) = \eta(s,0) = \tilde{\eta}(s,s) = U(s) + V(s)$$
$$\overline{\eta}(s,0) = \bar{\tilde{\eta}}(s,s) = U(s) - V(s) + \zeta$$

Weil nun

$$\Big(\overline{\eta}(s,0)\Big)' = \overline{\eta}_1(s,0) = -\eta_2(s,0) = x_1 \wedge N(s,0) = x_0' \wedge N_0(s)$$

ist, ergibt sich[12]

$$\int^s x_0' \wedge N_0(\tau)d\tau = \overline{\eta}(s,0) = U(s) - V(s) + \zeta.$$

$\tilde{\eta}$ ist durch U, V festgelegt. Wir müssen darum erst U, V berechnen und können dann $\tilde{\eta}$ angeben. $U(s)$ und $V(s)$ erhält man durch die Anfangswerte von η und $\overline{\eta}$ bis auf eine Konstante, indem man obige Gleichungen nach U, V auflöst und das gerade berechnete $\overline{\eta}(s,0)$ benutzt:

$$\begin{aligned} U(s) + \frac{\zeta}{2} &= \frac{1}{2}(\eta(s,0) + \overline{\eta}(s,0)) = \frac{1}{2}\Big(\eta_0(s) + \int^s x_0' \wedge N_0(t)dt\Big) \\ V(s) - \frac{\zeta}{2} &= \frac{1}{2}(\eta(s,0) - \overline{\eta}(s,0)) = \frac{1}{2}\Big(\eta_0(s) - \int^s x_0' \wedge N_0(t)dt\Big) \end{aligned}$$

Nun setzt man

$$\tilde{\eta}(\overline{u},\overline{v}) = U(\overline{u}) + V(\overline{v}) = U(\overline{u}) + \frac{\zeta}{2} + V(\overline{v}) - \frac{\zeta}{2}$$

und parametrisiert um

$$\eta(u,v) = \tilde{\eta}(u-v, u+v) = U(u-v) + V(u+v).$$

5.6.2 Konstruktion einer elliptischen Affinminimalfläche

Sei $\varepsilon = 1$:
Durch die Parametertransformation

$$\xi = u + iv, \;\; \bar{\xi} = u - iv$$
$$u = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) = Re\,\xi, \;\; v = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}) = Im\,\xi$$

erhält man

$$\begin{aligned} &\eta(u(\xi,\bar{\xi}), v(\xi,\bar{\xi})) =: \tilde{\eta}(\xi,\bar{\xi}) = Im\Phi(\xi) = \frac{1}{2i}(\Phi(\xi) - \overline{\Phi}(\bar{\xi})) \\ &=: Z(\xi) + \bar{Z}(\bar{\xi}) = 2Re\,Z(\xi), \\ &\overline{\eta}(u(\xi,\bar{\xi}), v(\xi,\bar{\xi})) =: \bar{\tilde{\eta}}(\xi,\bar{\xi}) = Re\Phi(\xi) = \frac{1}{2}(\Phi(\xi) + \overline{\Phi}(\bar{\xi})) \\ &=: i(Z(\xi) - \bar{Z}(\bar{\xi})) = -2Im\,Z(\xi). \end{aligned}$$

[12] Durch die Darstellung als Integral wird noch deutlicher, daß $\overline{\eta}(s,0)$ nicht eindeutig ist. ζ richtet sich nach der Integrationskonstanten, fällt aber dann bei der Summenbildung $U + V = \tilde{U} + \tilde{V}$ weg.

$Z(\xi) := \frac{1}{2i}\Phi(\xi)$ ist dabei eine holomorphe Abbildung, da $Z_{\bar{\xi}} = 0$ gilt. $\bar{Z}(\bar{\xi})$ ist die zu $Z(\xi)$ konjugiert komplexe Abbildung, also $\overline{Z(\xi)}$, sie ist antiholomorph, d. h. $\bar{Z}_{\xi} = 0$.

Für die Anfangswerte von η, $\overline{\eta}$ gilt:

$$\eta_0(s) = \eta(s,0) = \tilde{\eta}(s,s) = \frac{1}{2i}(\Phi(s) - \overline{\Phi}(s)) = Z(s) + \bar{Z}(s)$$
$$\overline{\eta}(s,0) = \tilde{\overline{\eta}}(s,s) = \frac{1}{2}(\Phi(s) + \overline{\Phi}(s)) = i(Z(s) - \bar{Z}(s))$$

Analog zum hyperbolischen Fall erhalten wir für $\overline{\eta}(s,0)$

$$\int^s x_0' \wedge N_0(t)dt = \overline{\eta}(s,0).$$

Bemerkung: Es gibt einige Analogien zwischen den beiden Fällen. Aber im Gegensatz zu $\varepsilon = -1$, wo wir die zwei Abbildungen U und V berechnen müssen, die nichts miteinander zu tun haben, ist hier die zweite Abbildung $\bar{Z}$ als konjugiert komplexe Abbildung von Z durch die erste Abbildung festgelegt. Es genügt daher, nur $Z(s)$ zu berechnen.

Wir müssen erst[13] Z durch

$$Z(s) = \frac{1}{2}(\eta(s,0) - i\,\overline{\eta}(s,0)) = \frac{1}{2}\Big(\eta_0(s) - i\int^s x_0' \wedge N_0(t)dt\Big)$$

auf einem Teil der reellen Achse bestimmen und dann $Z(s)$ zu einer holomorphen Funktion $Z(\xi)$ fortsetzen, was eindeutig möglich ist, weil η_0, x_0 und N_0 analytisch sind.
Genauso können wir $\bar{Z}(s)$

$$\bar{Z}(s) = \frac{1}{2}(\eta(s,0)) + i\,\overline{\eta}(s,0)) = \frac{1}{2}\Big(\eta_0(s) + i\int^s x_0' \wedge N_0(t)dt\Big)$$

ausrechnen und dies zu einer antiholomorphen Abbildung $\bar{Z}(\bar{\xi})$ fortsetzen.
$Z(\xi)$ ist dann $\overline{(\bar{Z}(\bar{\xi}))}$.
Danach setzen wir

$$\tilde{\eta}(\xi,\bar{\xi}) = Z(\xi) + \bar{Z}(\bar{\xi}) = 2Re\, Z(\xi)^{14}$$

und parametrisieren um

$$\eta(u,v) = \tilde{\eta}(u+iv, u-iv) = 2Re Z(u+iv).$$

So erhalten wir für dieselben Vorgaben x_0, N_0, η_0 zwei Abbildungen η^+, η^-, die jeweils eine der obigen Differentialgleichungen erfüllen, also

$$\eta^+_{11} + \eta^+_{22} = 0, \;\; \eta^-_{11} - \eta^-_{22} = 0,$$

und die richtigen Anfangswerte haben. Durch Satz 4.4 ergibt sich aus η^+ eine elliptische, aus η^- eine hyperbolische Affinminimalfläche.

[13] Wir können auch Φ bestimmen, werden aber hier mit Z rechnen, weil der Realteil oft ein bißchen einfacher zu handhaben ist.
[14] Wir nehmen den Realteil. Die Integrationskonstante, die bei $Z(s)$ auftritt, spielt also keine Rolle.

5.6.3 Beispiele

Wir bestimmen von Affinminimalflächen, die wir fast alle schon als Beispiele behandelt haben, die Konormalen nach dem Verfahren aus 5.6.1 und 5.6.2. Wir wählen zu diesem Zweck eine passende Flächenkurve als x_0 und die Normale und Konormale längs $(s,0)$ als N_0 und η_0. Wir erhalten dann aus diesen x_0, N_0, η_0 die Flächen, von denen wir die Kurve x_0 gewonnen hatten, wieder zurück.

1.) Wir nehmen als erstes vom elliptischen bzw. hyperbolischen Paraboloid aus 4.6.1 die u–Parameterlinie als x_0, sowie $N(s,0)$ als $N_0(s)$, $\eta(s,0)$ als $\eta_0(s)$:

$$\begin{aligned} x_0(s) &= \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix},\ x_0'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix},\ N_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \eta_0(s) &= (-s,0,1),\ x_0' \wedge N_0(s) = (0,-1,0) \end{aligned}$$

Wir erhalten für U, V, Z[15]:

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{2}(-s,-s,1),\ V(s) = \frac{1}{2}(-s,s,1), \\ Z(s) &= \frac{1}{2}(-s,is,1) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \eta^-(u,v) &= (-u,v,1) \\ \eta^+(u,v) &= (-u,-v,1) \end{aligned}$$

η^- ist die Konormale des hyperbolischen Paraboloids, η^+ die des elliptischen, siehe 4.6.1.

2.) Wählt man als x_0 die u–Linie der Enneperschen Minimalfläche in der Parametrisierung von 4.6.2, sowie die Normale und Konormale als $N_0(s)$, $\eta_0(s)$, so sind die Anfangsdaten:

$$\begin{aligned} x_0(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s^3 - s \\ \frac{1}{3}s^3 - s \\ s^2 \end{pmatrix},\ x_0'(s) = \begin{pmatrix} s^2-1 \\ s^2-1 \\ 2s \end{pmatrix},\ N_0(s) = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} s \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \eta_0(s) &= (s,s,1-s^2),\ x_0' \wedge N_0(s) = (-1,1,0) \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{2}(0,2s,1-s^2),\ V(s) = \frac{1}{2}(2s,0,1-s^2), \\ Z(s) &= \frac{1}{2}(s+is,s-is,1-s^2) \end{aligned}$$

und als Konormalen

$$\begin{aligned} \eta^-(u,v) &= (u+v,u-v,1-u^2-v^2), \\ \eta^+(u,v) &= (u-v,u+v,1-u^2+v^2). \end{aligned}$$

[15] Die Integrationskonstanten lassen wir weg.

η^-, η^+ sind genau die Konormalen aus 4.6.2 und 4.6.3. Es ergeben sich also die dort angegebenen Flächen.

3.) Die Wendelfläche aus 2.4.1 ist in Asymptotenparametern gegeben. Deshalb parametrisieren wir x erst um[16] zu

$$\tilde{x}(u,v) = x(u-v, u+v)$$

und nehmen die u–Linie von $\tilde{x}$. Außerdem setzen wir $b = 1$.
Als Anfangswerte haben wir somit:

$$x_0(s) = \begin{pmatrix} s\cos s \\ s\sin s \\ s \end{pmatrix},\ x_0'(s) = \begin{pmatrix} \cos s - s\sin s \\ \sin s + s\cos s \\ 1 \end{pmatrix},\ N_0(s) = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\eta_0(s) = (-\sin s, \cos s, -s),\ x_0' \wedge N_0(s) = (-\cos s, -\sin s, 1)$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} U(s) &= (-\sin s, \cos s, 0),\ V(s) = (0, 0, -s), \\ Z(s) &= \frac{1}{2}(-\sin s + i\sin s, \cos s - i\cos s, -s - is) \end{aligned}$$

Da die komplexe Kosinus– und Sinusfunktion so ausgedrückt werden können

$$\begin{aligned} \cos(u+iv) &= \cos u\cosh v - i\sin u\sinh v, \\ \sin(u+iv) &= \sin u\cosh v + i\cos u\sinh v, \end{aligned}$$

kommen wir zu diesen Konormalen:

$$\begin{aligned} \eta^-(u,v) &= (-\sin(u-v), \cos(u-v), -u-v) \\ \eta^+(u,v) &= (-\sin u\cosh v - \cos u\sinh v, \cos u\cosh v - \sin u\sinh v, -u+v) \end{aligned}$$

η^- ist die Konormale $\tilde{\eta}(u,v) = \eta(u-v, u+v)$ der umparametrisierten Wendelfläche x in 2.4.1. Wir erhalten

$$x^-(u,v) = \tilde{x}(u,v) = x(u-v, u+v).$$

Die elliptische Affinminimalfläche x^+ können wir aus η^+ errechnen. Es gilt:

$$x^+(u,v) = \begin{pmatrix} (u-v)(\sin u\sinh v + \cos u\cosh v) + 2\cos u\sinh v \\ (u-v)(-\cos u\sinh v + \sin u\cosh v) + 2\sin u\sinh v \\ u - \frac{1}{2}\sinh(2v) \end{pmatrix},$$
$$N^+(u,v) = \frac{1}{\cosh v + (u-v)\sinh v}\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ \sinh v \end{pmatrix}$$

[16] Es ist egal, welche Parametertransformation, die Asymptotenparameter in isotherme Parameter überführt, man nimmt. Nur erhält man mit dieser für $U(u) + V(v)$ die ursprüngliche Konormale $\eta(u,v)$ in der Parametrisierung aus 2.4.1.

5.7 Lösung bei euklidischer Normalisierung

Hier wenden wir das Verfahren von Abschnitt 5.4 auf die euklidische Normale $N = N_e$ an.
Gerade dieser euklidische Fall wurde in [Lei1][17] behandelt. Wir werden aber anders vorgehen und schließlich im wesentlichen zum gleichen Ergebnis kommen. In [Lei1] wird von den schon auf euklidische Verhältnisse abgestimmten Gleichungen von Gauß und Mainardi–Codazzi ausgegangen und damit ein System von Differentialgleichungen für die Koordinatenfunktionen von g und h_e gebildet. Wir dagegen gehen wie in 5.4.1 vor und stellen - ausgehend von (1.1) - ein System von Differentialgleichungen für die lokalen Funktionen von $h = h_e$, ∇, S auf. Wir ergänzen das noch unvollständige System DGL I′ durch Festlegung von q als Funktion von S^1_1, S^2_1, S^2_2.

Die Stützfunktion q von N_e bzgl. N_b hat nach (2.11) die Eigenschaft

$$\eta_b(N) = q = |\mathcal{K}|^{-\frac{1}{4}} = |S^1_1 S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2|^{-\frac{1}{4}}.$$

Es gilt also

$$\partial_k(\log|q|) = -\frac{1}{4}\frac{\partial_k(\mathcal{K})}{\mathcal{K}} = -\frac{1}{4}\frac{\partial_k(S^1_1)S^2_2 + S^1_1\partial_k(S^2_2) - 2\varepsilon\partial_k(S^2_1)S^2_1}{S^1_1 S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2}.$$

Ist $S^2_2 = S^2_2(S^1_1, S^2_1, f)$ durch $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ festgesetzt, so ist

$$\partial_k(S^2_2) = \partial_{S^1_1}(S^2_2)\partial_k(S^1_1) + \partial_{S^2_1}(S^2_2)\partial_k(S^2_1) + \partial_f(S^2_2)\partial_k(f).$$

Wir setzen

$$\partial_k(\log|q|) = -\frac{1}{4}\frac{\partial_k(S^1_1)(S^2_2 + S^1_1\partial_{S^1_1}(S^2_2)) + \partial_k(S^2_1)(-2\varepsilon S^2_1 + S^1_1\partial_{S^2_1}(S^2_2)) + S^1_1\partial_f(S^2_2)\partial_k(f)}{S^1_1 S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2}.$$

in das System DGL I′ bzw. mittels (5.4) T^k in das System DGL I ein. Um zu große Ausdrücke zu vermeiden, schreiben wir hier nur die Terme aus, die für die weitere Untersuchung des Systems bedeutsam sind, nämlich $\partial_2(\log|\mathcal{K}|)$ in der 1., 3. und 5. Gleichung und zum Teil $\partial_1\partial_1(\log|\mathcal{K}|)$ in der 3. Gleichung.

Differentialgleichungssystem DGL EUK

$$\begin{aligned}
\partial_2(\partial_2(E)) &= -\varepsilon\partial_1(\partial_1(E)) + \varepsilon\frac{\partial_1(E)^2}{E} + \frac{\partial_2(E)^2}{E} \\
&\quad -4\varepsilon E(K^1_{11})^2 - 4E(K^2_{11})^2 - \varepsilon E^2(S^1_1 + S^2_2) - 3\varepsilon E K^1_{11}\frac{\partial_1(\mathcal{K})}{\mathcal{K}} \\
&\quad -\varepsilon E K^2_{11}\frac{\partial_2(S^1_1)(S^2_2 + S^1_1\partial_{S^1_1}(S^2_2)) + \partial_2(S^2_1)(-2\varepsilon S^2_1 + S^1_1\partial_{S^2_1}(S^2_2))}{S^1_1 S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2} \\
&\quad -\varepsilon E\frac{K^2_{11}\partial_2(f)}{S^1_1 S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2}S^1_1\partial_f(S^2_2) - \frac{1}{2}\varepsilon E\left(\frac{\partial_1(\mathcal{K})}{\mathcal{K}}\right)^2 \\
\partial_2(K^1_{11}) &= \varepsilon\partial_1(K^2_{11}) - \frac{\partial_2(E)}{E}K^1_{11} + \varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E}K^2_{11} + \varepsilon E S^2_1
\end{aligned}$$

[17] Wir beziehen uns in diesem Abschnitt fast immer auf [Lei1], S. 256–260.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\partial_2(E)}{2E}\frac{\partial_1(\mathcal{K})}{\mathcal{K}} \\
\partial_2(K_{11}^2) &= -\partial_1(K_{11}^1) - \frac{\partial_1(E)}{E}K_{11}^1 - \frac{\partial_2(E)}{E}K_{11}^2 - \frac{1}{2}E(S_1^1 - S_2^2) - \frac{\partial_1(E)}{4E}\frac{\partial_1(\mathcal{K})}{\mathcal{K}} \\
& -\varepsilon\frac{\partial_2(E)}{4E}\frac{\partial_2(S_1^1)(S_2^2 + S_1^1\partial_{S_1^1}(S_2^2)) + \partial_2(S_1^2)(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2))}{S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2} \\
& -\frac{\varepsilon\partial_2(E)\partial_2(f)}{4E(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)}S_1^1\partial_f(S_2^2) \\
& -\frac{\partial_1\partial_1(S_1^1)(S_2^2 + S_1^1\partial_{S_1^1}(S_2^2)) + \partial_1\partial_1(S_1^2)(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2))}{2(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)} \\
& -\frac{\partial_1(S_1^1)\partial_1\Big(S_2^2 + S_1^1\partial_{S_1^1}(S_2^2)\Big) + \partial_1(S_1^2)\partial_1\Big(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2)\Big)}{2(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)} \\
& -\frac{\partial_1\Big(\partial_1(f)S_1^1\partial_f(S_2^2)\Big)}{2(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)} + \frac{\partial_1(\mathcal{K})^2}{2\mathcal{K}^2} \\
\partial_2(S_1^1) &= \varepsilon\partial_1(S_1^2) + \Big(\varepsilon\frac{\partial_1(E)}{E} + 2\varepsilon K_{11}^1\Big)S_1^2 + \Big(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2\Big)(S_2^2 - S_1^1) \\
& +\varepsilon\frac{\partial_1(\mathcal{K})}{2\mathcal{K}}S_1^2 \\
\partial_2(S_1^2) &= \partial_1(S_2^2) + \Big(-\frac{\partial_2(E)}{E} + 2\varepsilon K_{11}^2\Big)S_1^2 + \Big(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1\Big)(S_2^2 - S_1^1) \\
& +\frac{\partial_2(S_1^1)(S_2^2 + S_1^1\partial_{S_1^1}(S_2^2)) + \partial_2(S_1^2)(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2))}{2(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)}S_1^2 \\
& +\frac{S_1^2\partial_2(f)}{2(S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2)}S_1^1\partial_f(S_2^2) - \frac{\partial_1(\mathcal{K})}{2\mathcal{K}}(S_2^2 - S_1^1)
\end{aligned}
$$

Dieses System erfüllt noch nicht die Voraussetzungen von Satz 5.1. Die Ableitung nach v der höchsten Ordnung steht für E, K_{11}^1, K_{11}^2 auf der linken Seite, bei S_1^1, S_1^2 ist das aber nicht der Fall. Ersetzen wir $\partial_2(S_1^1)$ in der 1., 3. und 5. Gleichung durch die rechte Seite der 4. Gleichung, so steht auch die Ableitung $\partial_2(S_1^1)$ nur auf der linken Seite. Das so veränderte System bezeichnen wir mit **DGL EUK$'$**. Die 5. Gleichung von DGL EUK$'$ hat die Form

$$
\begin{aligned}
\partial_2(S_1^2) &= \frac{S_1^2}{2\mathcal{K}}\Big(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2)\Big)\partial_2(S_1^2) \\
& +\chi\Big(E, \partial_1(E), \partial_2(E), K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, S_1^2, S_2^2, \partial_1(S_1^1), \partial_1(S_1^2), \partial_{S_1^1}(S_2^2), \partial_{S_1^2}(S_2^2)\Big)
\end{aligned}
$$

mit einer analytischen Funktion[18] χ. Dies können wir nach $\partial_2(S_1^2)$ auflösen, wenn

$$
1 - \frac{S_1^2}{2\mathcal{K}}(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2)) \neq 0
$$

gilt oder gleichwertig[19]

$$
2\mathcal{K} - S_1^2(-2\varepsilon S_1^2 + S_1^1\partial_{S_1^2}(S_2^2)) = S_1^1(2S_2^2 - \partial_{S_1^2}(S_2^2)S_1^1) \neq 0.
$$

[18] χ ist außerdem noch von $\partial_f(S_2^2), f, \partial_1(f), \partial_2(f)$ abhängig.
[19] Wir setzen später $\mathcal{K} \neq 0$ voraus.

Setzen wir jetzt für $\partial_2(S_1^2)$ bei der 1. und 3. Gleichung die rechte Seite der aufgelösten 5. Gleichung ein, erhalten wir ein nochmal geändertes System, das wir **DGL EUK″** nennen. DGL EUK″ ist beinahe ein System für Cauchy–Kowalewski. In der 3. Gleichung kommen noch zweite Ableitungen ($\partial_1\partial_1(S_1^1)$ und $\partial_1\partial_1(S_1^2)$) vor. Diese können wir aber durch die Definition zweier neuer Funktionen

$$\tilde{S}_1^1 := \partial_1(S_1^1),\ \ \tilde{S}_1^2 := \partial_1(S_1^2),$$

die die Differentialgleichungen

$$\partial_2(\tilde{S}_1^1) := \partial_1(\partial_2(S_1^1)),\ \ \partial_2(\tilde{S}_1^2) := \partial_1(\partial_2(S_1^2))$$

erfüllen, beseitigen (ähnlich [Lei1]). Die Anfangswerte sind

$$\tilde{S}_1^1(s,0) = (S_1^1(s,0))',\ \ \tilde{S}_1^2(s,0) = (S_1^2(s,0))'.$$

Durch dieses erweiterte System **DGL EUK‴** werden sieben Funktionen E, K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, S_1^2, $\tilde{S}_1^1$, $\tilde{S}_1^2$ berechnet, dabei ist $\tilde{S}_1^1 = \partial_1(S_1^1)$, $\tilde{S}_1^2 = \partial_1(S_1^2)$, vgl. [Lei1].

Im Gegensatz zum äquiaffinen Fall erhält man nicht je eine elliptische und eine hyperbolische Fläche, sondern nur eine. Im euklidischen Fall besteht mit $g(S(X),Y) = h(X,Y)$ ein spezieller Zusammenhang zwischen S, h, und g. $\varepsilon = sign\, Det\, h$ ist gleichzeitig $sign\, \mathcal{K}$, hängt daher von Φ bzw. S_2^2 ab und kann schon durch die Anfangswerte bestimmt werden.

Für die Vorgaben gelten schärfere Bedingungen: x_0, N_0 und η_0 müssen nicht nur (5.7)–(5.10), sondern auch

$$\eta_0(.) = \langle N_0, .\rangle$$

und damit

$$\langle N_0, N_0\rangle = 1,\ \ \langle N_0, x_0'\rangle = 0,\ \ \langle N_0, N_0'\rangle = 0,\ \ \langle N_0', x_0'\rangle < 0$$

erfüllen. N_0 muß also, wie eine euklidische Normale, ein Einheitsvektorfeld orthogonal zur Tangente x_0' sein. Für die Anfangswerte von q gilt nach Abschnitt 5.3

$$\varepsilon q^{-4}(s,0) = S_1^1 S_2^2(s,0) - \varepsilon(S_1^2)^2(s,0) = -\frac{\eta_0'(N_0')(s)}{\eta_0'(x_0')(s)} S_2^2(s,0) - \varepsilon\frac{det^2(x_0', N_0', N_0)}{q^4(s,0)(\eta_0'(x_0')(s))^2}$$

und daher

$$\varepsilon\left(1 + \frac{det^2(x_0', N_0', N_0)}{(\eta_0'(x_0')(s))^2}\right) = -q^4(s,0)\frac{\eta_0'(N_0')(s)}{\eta_0'(x_0')(s)} S_2^2(s,0).$$

Das Vorzeichen von $\eta_0'(N_0')(s) S_2^2(s,0)$ soll deshalb ε sein. Aber S_2^2 kann auch q in einer Form enthalten. Nehmen wir etwa die Funktion Φ von Leichtweiß, d. h.

$$S_2^2(S_1^1, S_1^2, f) = \frac{\varepsilon(l_2 - m_2 f)(S_1^2)^2 - (l_1 - m_1 f)S_1^1 - (l_3 - m_3 f)}{(l_2 - m_2 f)S_1^1 + (l_1 - m_1 f)}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varepsilon q^{-4} &= \mathcal{K} = S_1^1 S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2 \\
&= S_1^1 \frac{\varepsilon(l_2 - m_2 f)(S_1^2)^2 - (l_1 - m_1 f)S_1^1 - (l_3 - m_3 f)}{(l_2 - m_2 f)S_1^1 + (l_1 - m_1 f)} \\
&\quad -\varepsilon\frac{(S_1^2)^2((l_2 - m_2 f)S_1^1 + (l_1 - m_1 f))}{(l_2 - m_2 f)S_1^1 + (l_1 - m_1 f)} \\
&= \frac{-(l_1 - m_1 f)(S_1^1)^2 - (l_3 - m_3 f)S_1^1 - (l_1 - m_1 f)\varepsilon(S_1^2)^2}{(l_2 - m_2 f)S_1^1 + (l_1 - m_1 f)}.
\end{aligned}$$

Kürzen wir $(l_i - m_i f(0,0))$ mit λ_i ab, gilt für die Anfangswerte

$$\varepsilon q^{-4}(0,0) \quad = \quad \frac{\eta_0'(N_0')(-\lambda_1\eta_0'(N_0') + \lambda_3\eta_0'(x_0')) - \varepsilon\lambda_1 q^{-4} det^2(x_0', N_0', N_0)}{-\lambda_2\eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') + \lambda_1\eta_0'(x_0')^2}(0).$$

Das können wir nach q^4 auflösen, es ist dann

$$q^4(0,0) = \varepsilon\frac{-\lambda_2\eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') + \lambda_1\eta_0'(x_0')^2 + \lambda_1 det^2(x_0', N_0', N_0)}{\eta_0'(N_0')(-\lambda_1\eta_0'(N_0') + \lambda_3\eta_0'(x_0'))}(0). \tag{5.12}$$

Der Nenner muß $\neq 0$ sein. Auch der Zähler soll nicht verschwinden und das Vorzeichen des Ausdrucks auf der rechten Seite soll 1 sein. Letzteres schränkt, wie oben erwähnt, die Möglichkeiten von ε ein: Der Quotient hat ein bestimmtes Vorzeichen, für ε kommt damit nur entweder 1 oder -1 in Frage. Das einzig erlaubte ε hängt von Φ ab. Nimmt man $\Phi(H, \mathcal{K}) = H$, $f = 0$, so ergibt sich nur eine hyperbolische Fläche, der Quotient in (5.12) ist negativ.

Ausnahmekriterien:
Diese Methode läßt sich bei bestimmten Vorgaben nicht anwenden. Folgende Bedingungen müssen, neben (5.7)–(5.9)[20], von x_0 und N_0 erfüllt werden:

1.) $E \neq 0$.

2.) $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ ist eindeutig nach S_2^2 auflösbar.

3.) $\mathcal{K} \neq 0$ und $q \neq 0$. Für $\mathcal{K} = 0$ gibt es keine reguläre Blaschke–Immersion, bei $q = 0$ ist $N_e = qN_b + x_*(Z)$ tangential.

4.) $S_1^1(2S_2^2 - \partial_{S_1^2}(S_2^2)S_1^2) \neq 0$. Sonst kann man die 5. Gleichung in DGL EUK$'$ nicht nach $\partial_2(S_1^2)$ auflösen.

Die Forderungen 1.), 2.) und $q \neq 0$ müssen auch bei anderen Normalen beachtet werden. Es reicht, die Bedingungen an der Stelle $(0,0)$ zu fordern. Wegen der Stetigkeit der Anfangswertfunktionen verschwinden die entsprechenden Funktionen auch in einer Umgebung von $s = 0$ nicht. Für die rationale Funktion Φ, die Leichtweiß vorgeschlagen hat, heißt dies:

1.) $\eta_0'(x_0')(0) \neq 0$, dies entspricht (5.10).

2.) $\lambda_2\eta_0'(N_0')(0) - \lambda_1\eta_0'(x_0')(0) \neq 0$, vgl. Bemerkung von 5.4.1.

3.) Weil $\mathcal{K} = \varepsilon q^{-4}$ ist, bedeutet $\mathcal{K}(0,0) \neq 0$ und $q(0,0) \neq 0$, daß Nenner und Zähler des Quotienten in (5.12) ungleich 0 sein müssen, es muß somit gelten:

$$\eta_0'(N_0')(0) \neq 0 \text{ und } \lambda_1\eta_0'(N_0')(0) - \lambda_3\eta_0'(x_0')(0) \neq 0$$
$$\lambda_2\eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0')(0) - \lambda_1\Big(\eta_0'(x_0')^2(0) + det^2(x_0', N_0', N_0)(0)\Big) \neq 0$$

[20] Für einen besseren Vergleich mit [Lei1] steht (5.10) bei den anderen Ausnahmebedingungen.

4.) Aus $S^1_1(0,0) \neq 0$ folgert man $\eta_0'(N_0')(0) \neq 0$. Weil $\partial_{S_1^2}(S_2^2) = \frac{2\varepsilon\lambda_2 S_1^2}{\lambda_2 S_1^1+\lambda_1}$ ist, erhält man

$$2S_2^2(0,0) - \frac{\varepsilon 2\lambda_2 S_1^2}{\lambda_2 S_1^1 + \lambda_1} S_1^2(0,0) = \frac{2\varepsilon\lambda_2 (S_1^2)^2 - 2\lambda_1 S_1^1 - 2\lambda_3 - 2\varepsilon\lambda_2 S_1^2 S_1^2}{\lambda_2 S_1^1 + \lambda_1}(0,0) \neq 0,$$

das bedeutet $\lambda_1 S_1^1(0,0) + \lambda_3 \neq 0$ oder $\lambda_1\eta_0'(N_0')(0) - \lambda_3\eta_0'(x_0')(0) \neq 0$.

Weil jedoch $\eta_0 = \langle N_0, .\rangle$ gilt, erhalten wir aus 1.) (d. h. $\langle N_0', x_0'\rangle \neq 0$) automatisch $x_0' \neq 0$ und $N_0' \neq 0$ und damit $\langle x_0', x_0'\rangle \neq 0$ und $\langle N_0', N_0'\rangle \neq 0$. x_0' gilt auch, weil x_0 als reguläre Kurve vorausgesetzt war. Einige der Bedingungen in 1.)–4.) kommen mehrfach vor oder folgen aus anderen.
Wir erhalten zusammenfassend vier Ungleichungen:

a) $\langle N_0', x_0'\rangle(0) \neq 0$ (aus 1.)).

b) $\lambda_1\Big(det^2(x_0', N_0', N_0) + \langle N_0', x_0'\rangle^2\Big)(0) - \lambda_2\langle N_0', x_0'\rangle(0)\langle N_0', N_0'\rangle(0) \neq 0$ (wegen 3.))

c) $\lambda_3\langle N_0', x_0'\rangle(0) - \lambda_1\langle N_0', N_0'\rangle(0) \neq 0$ (aus 3.) bzw. 4.))

d) $\lambda_2\langle N_0', N_0'\rangle(0) - \lambda_1\langle N_0', x_0'\rangle(0) \neq 0$ (wegen 2.))

Leichtweiß hat in [Lei1], S. 256–260, folgende Ausnahmekriterien angegeben: Sei

$$b(s) := \frac{\langle N_0', x_0'\rangle}{\langle x_0', x_0'\rangle}(s),\ a(s) := -\frac{det(x_0', N_0', N_0)}{\langle x_0', x_0'\rangle}(s).$$

Dann soll gelten[21]

$$\begin{aligned}
a')&\quad b(0) \neq 0 \Leftrightarrow \langle N_0', x_0'\rangle(0) \neq 0,\\
b')&\quad \lambda_1 - \lambda_2 b(0) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1\langle x_0', x_0'\rangle(0) - \lambda_2\langle N_0', x_0'\rangle(0) \neq 0,\\
c')&\quad \lambda_1\Big(a^2(0) + b^2(0)\Big) - \lambda_3 b(0) \neq 0\\
&\quad \Leftrightarrow \lambda_1\Big(det^2(x_0', N_0', N_0)(0) + \langle N_0', x_0'\rangle^2(0)\Big) - \lambda_3\langle N_0', x_0'\rangle\langle x_0', x_0'\rangle(0) \neq 0\\
d')&\quad \lambda_3 - \lambda_1 b(0) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_3\langle x_0', x_0'\rangle - \lambda_1\langle N_0', x_0'\rangle \neq 0
\end{aligned}$$

Da für Flächengrößen bezüglich der euklidischen Normalen einer (bezüglich h) isotherm parametrisierten Fläche

$$\begin{aligned}
S_1^2(s,0) &= \frac{det(x_0', N_0', N_0)(s)}{q^2(s,0)\eta_0'(x_0')(s)},\\
g_{12} &= \langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, q^2\eta_1 \wedge \eta\rangle,\\
\langle x_0', \eta_0' \wedge \eta_0\rangle &= \overline{det}(\langle x_0', .\rangle, \langle N_0', .\rangle, \langle N_0, .\rangle) = det(x_0', N_0', N_0)
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir aus

$$S_1^l g_{l1} = S_1^1 g_{11} + S_1^2 g_{21} = h_{11}$$

[21] Wir geben die Ungleichungen einmal mit a, b nach [Lei1] und danach die äquivalenten Ungleichungen mit x_0 und N_0 an.

diese Gleichung für $\langle x_0', x_0' \rangle$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\langle N_0', N_0' \rangle}{\langle N_0', x_0' \rangle}\langle x_0', x_0' \rangle + \frac{det^2(x_0', N_0', N_0)}{\langle N_0', x_0' \rangle} &= -\langle N_0', x_0' \rangle \\
\Rightarrow \quad \langle x_0', x_0' \rangle = \frac{\langle N_0', x_0' \rangle^2 + det^2(x_0', N_0', N_0)}{\langle N_0', N_0' \rangle}
\end{aligned}
$$

Das ist nur möglich, wenn a') erfüllt und deswegen $\langle N_0', N_0' \rangle \neq 0$ ist. Man kann mit dieser Formel für $\langle x_0', x_0' \rangle$ die letztgenannten Kriterien a')–d') umschreiben zu

α) $\langle N_0', x_0' \rangle(0) \neq 0$,

β) $\lambda_1\Big(\langle N_0', x_0' \rangle^2(0) + det^2(x_0', N_0', N_0)(0)\Big) - \lambda_2 \langle N_0', x_0' \rangle(0)\langle N_0', N_0' \rangle(0) \neq 0$,

γ) $\dfrac{det(x_0', N_0', N_0)^2 + \langle N_0', x_0' \rangle^2}{\langle N_0', N_0' \rangle}(0)\Big(\lambda_1 \langle N_0', N_0' \rangle(0) - \lambda_3 \langle N_0', x_0' \rangle(0)\Big) \neq 0$,

das bedeutet, da der erste Faktor wegen α) ungleich 0 ist,

$\lambda_1 \langle N_0', N_0' \rangle(0) - \lambda_3 \langle N_0', x_0' \rangle(0) \neq 0$,

δ) $\lambda_3\Big(\langle N_0', x_0' \rangle^2(0) + det^2(x_0', N_0', N_0)(0)\Big) - \lambda_1 \langle N_0', x_0' \rangle(0)\langle N_0', N_0' \rangle(0) \neq 0$.

Die Aussagen a) und α), b) und β), c) und γ) sind je äquivalent. b) und β) folgen beide aus $q \neq 0$ (oder $1/\mathcal{K} \neq 0$), und c), γ) aus $\mathcal{K} \neq 0$.
d) und δ) sind allerdings unterschiedliche Bedingungen. Das bedeutet nicht unbedingt, daß es keine Fläche durch x_0 mit den verlangten Eigenschaften gibt, wenn d) oder δ) nicht erfüllt ist. Es heißt nur, daß das jeweilige Verfahren in 5.7 bzw. [Lei1] nicht angewandt werden kann. Die unterschiedlichen Ungleichungen folgen aus der unterschiedlichen Verwendung von Flächengrößen für die Differentialgleichungen. Hier haben wir ein System von Differentialgleichungen für u. a. h_{11}, S_1^1, S_1^2 und lösen $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ nach S_2^2 auf. Dies ist nicht möglich, wenn d) nicht erfüllt ist. In [Lei1] wird ein System für h_{11}, g_{11}, g_{12} angegeben und $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ nach g_{22} aufgelöst, was nur machbar ist, wenn δ) gilt.

Bemerkung: Wir erhalten wirklich, nachdem wir die aus DGL EUK$'''$ gewonnenen Funktionen in DGL GW eingesetzt haben, eine Fläche x mit der euklidischen Normalen N.
Wir haben zwar nicht ausgeschlossen, daß es andere Normalisierungen gibt, für die $q = \eta_b(N)$ ebenfalls $|\mathcal{K}|^{-\frac{1}{4}}$ ist oder für die N längs x_0 ein Einheitsvektorfeld ist.
Sicher ist nur: Eine Fläche x mit euklidischer Normale N genügt notwendig den Integrabilitätsbedingungen (1.1), also auch DGL EUK$'''$, für die Stützfunktion gilt $q = |\mathcal{K}|^{-\frac{1}{4}}$ und die Anfangswerte sind so, wie in diesem Abschnitt beschrieben. Da die Differentialgleichungen DGL EUK$'''$ und DGL GW eindeutige Lösungen haben, ist die so erhaltene Normale die euklidische.
So kann man auch in 5.8 und 5.9 argumentieren. Es kann zwar sein, daß bei einer anderen Normalen (5.13) oder (5.16) oder eine Eigenschaft der Anfangswerte erfüllt ist. Wegen der Eindeutigkeit der Differentialgleichungen ist die Lösung N jedoch N_α bzw. N_c^α.

5.8 Lösung bei Normalen der Manhartschen Familie

Hier wenden wir das Verfahren auf Normalen der Manhartschen Familie an und beweisen eine zu Satz 5.3 analoge Aussage für eine solche Normale.

Wir geben eine Differentialgleichung für T^2 an, um das System DGL I aus 5.4.1 zu vervollständigen. Dazu verwenden wir die Eigenschaft, daß die Stützfunktion $q = \eta_b(N_\alpha)$ bzgl. N_b eine bestimmte Potenz von $\mathcal{K}_e$ ist. $\mathcal{K}_e$ kann man andererseits auch nach Lemma 2.1 mit q und Flächengrößen bzgl. N ausdrücken. Aus diesen zwei Darstellungen von $\mathcal{K}_e$ erhält man die Differentialgleichung.
Die Anfangswerte von q und T^2 ergeben sich aus der Darstellung von N durch N_e, das wir längs $(s, 0)$ aus η_0 errechnen.

Wir legen eine in $(0, 0)$ analytische, bzgl. h isotherm parametrisierte Fläche x zugrunde mit der Normalen $N = N_\alpha$, wobei $\alpha \neq \frac{1}{4}$ fest sei. Im folgenden geben wir an, was für die Flächengrößen bzgl. N, insbesondere für q, T^1, T^2, notwendig gilt neben den in 5.2–5.4 erwähnten Eigenschaften.

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} N_e &= q_b N_b + x_*(Z_b) = \tilde{q} N + x_*(\tilde{Z}) \\ N &= q_e N_e + x_*(Z_e) = q N_b + x_*(Z) \end{aligned}$$

Es gilt für diese Größen nach (2.14) und Definition 2.4

$$q = |\mathcal{K}_e|^\gamma = |\mathcal{K}_e|^{(4\alpha-1)/4}, \;\; \tilde{q} = q_e^{-1} = |\mathcal{K}_e|^{-\alpha} = q^{-\hat{\gamma}}, \; \hat{\gamma} := \frac{4\alpha}{4\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Wir müssen deshalb $\alpha = \frac{1}{4}$ ausschließen, denn dort ist $q = 1$ und $\tilde{q} = 1$ gilt nur für $|\mathcal{K}_e| = 1$, also i. a. nicht. Diesen Fall $N = N_b$ haben wir aber schon im Abschnitt 5.5 behandelt.

Wir können $|\mathcal{K}_e|$ auf zwei Arten darstellen: $|\mathcal{K}_e|$ ist einerseits der Betrag der euklidischen Gaußschen Krümmung

$$|\mathcal{K}_e| = {}^{22}\varepsilon(S^1_{e1} S^2_{e2} - \varepsilon (S^2_{e1})^2),$$

wobei

$$sign\, \mathcal{K}_e = sign\, Det\, h_e = sign\, (q_e^2\, Det\, h) = sign\, Det\, h = \varepsilon$$

ist. S_e und daher auch $\mathcal{K}_e$ können wir mit Hilfe von Lemma 2.1 durch die Größen bezüglich N und durch $\tilde{q}$ ausdrücken. Andererseits ist wegen (2.14)

$$|\mathcal{K}_e| = \tilde{q}^{-\frac{1}{\alpha}} = q^{\frac{4}{4\alpha-1}}.$$

Man erhält damit eine Gleichung, bei der auf den beiden Seiten je eine andere Darstellung von $|\mathcal{K}_e|$ steht, die beide $\tilde{q}$ und damit q in einer Form enthalten. Aber auch die T^k und ihre Ableitungen kommen vor. Diese Gleichung kann man dann nach $\partial_2(T^2)$ auflösen.

Nach Lemma 2.1 ergibt sich

$$S_e(X) = \tilde{q} S(X) - \nabla_X \tilde{Z}.$$

[22] Wir betrachten nur Flächen in isothermen Parametern bzgl. h. Da h_e ein Vielfaches von h ist, sind diese auch isotherme Parameter für h_e. Es gilt somit auch für die Größen bzgl. N_e z. B. $S^1_{e2} = \varepsilon S^2_{e1}$.

Hierbei ist wegen (2.10)

$$\begin{aligned}
\tilde{Z} &= -grad_h(\tilde{q}) = -\tilde{q}\, grad_h(\log|\tilde{q}|) = \hat{\gamma}\tilde{q}\, grad_h(\log|q|) = \hat{\gamma}\tilde{q}T,\\
\partial_j(\log|q|) &= \hat{T}_j = h_{jl}T^l.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also in lokalen Koordinaten

$$S^i_{ej} = \tilde{q}S^i_j - \hat{\gamma}\tilde{q}\,\partial_j(T^i) - \hat{\gamma}\tilde{q}\,\Gamma_{jl}{}^i T^l + \hat{\gamma}^2\tilde{q}\,h_{jl}T^iT^l.$$

Dies führt insgesamt zu der Gleichung

$$\begin{aligned}
&\varepsilon q^{4/(4\alpha-1)} = \mathcal{K}_e = S^1_{e1}S^2_{e2} - \varepsilon(S^2_{e1})^2\\
&= \tilde{q}^2\Big(S^1_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{11}{}^1 + K^1_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{12}{}^1 + K^1_{12})T^2 + \hat{\gamma}^2ET^1T^1\Big)\\
&\cdot\Big(S^2_2 - \hat{\gamma}\partial_2(T^2) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{21}{}^2 + K^2_{21})T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{22}{}^2 + K^2_{22})T^2 + \hat{\gamma}^2\varepsilon ET^2T^2\Big)\\
&-\varepsilon\tilde{q}^2\Big(S^2_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{11}{}^2 + K^2_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{12}{}^2 + K^2_{12})T^2 + \hat{\gamma}^2ET^1T^2\Big)^2.
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht also $q^{4/(4\alpha-1)}$ und dies ist für kein α gleich 1[23].
Wenn wir durch $\tilde{q}^2 = q^{-2\hat{\gamma}}$ teilen und (5.11) anwenden, folgt:

$$\begin{aligned}
&q^{\frac{4}{4\alpha-1}+2\hat{\gamma}} = q^{\frac{4+8\alpha}{4\alpha-1}}\\
&= \varepsilon\Big(S^1_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K^1_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K^2_{11})T^2 + \hat{\gamma}^2E(T^1)^2\Big)\\
&\cdot\Big(S^2_2 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K^1_{11} + 2ET^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K^2_{11} + 2\varepsilon ET^2)T^2 + \hat{\gamma}^2\varepsilon E(T^2)^2\Big)\\
&-\varepsilon\Big(S^1_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K^1_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K^2_{11})T^2 + \hat{\gamma}^2E(T^1)^2\Big)\hat{\gamma}\partial_2(T^2)\\
&-\Big(S^2_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(-\varepsilon\frac{\partial_2(E)}{2E} + K^2_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K^1_{11} + 2ET^1)T^2 + \hat{\gamma}^2ET^1T^2\Big)^2
\end{aligned}$$

Ist $\alpha = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma} = 0$, dann erhalten wir die Gleichung für q des vorigen Abschnitts:

$$\frac{\varepsilon}{q^4} = S^1_1S^2_2 - \varepsilon(S^2_1)^2$$

Für $\alpha \notin \{0, \frac{1}{4}\}$ kann man nach $\partial_2(T^2)$ auflösen, allerdings nur, wenn der (wesentliche) Faktor davor, d. h.

$$\begin{aligned}
&\chi^1_1(E, \partial_1(E), \partial_2(E), K^1_{11}, K^2_{11}, S^1_1, T^1, T^2, \partial_1(T^1)) := q_eS^1_{e1}\\
= \quad &(S^1_1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K^1_{11})T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K^2_{11})T^2 + \hat{\gamma}^2E(T^1)^2),
\end{aligned}$$

zumindest an den Anfangswerten nicht 0 wird. Die so erhaltene Gleichung für $\partial_2(T^2)$ lautet dann

$$\partial_2(T^2) = -\frac{\varepsilon q^{\frac{4+8\alpha}{4\alpha-1}} + \varepsilon\chi^2_1}{\chi^1_1\hat{\gamma}} + \frac{1}{\hat{\gamma}}\chi^2_2 = -\frac{4\alpha-1}{4\alpha}(\varepsilon\frac{q^{\frac{4+8\alpha}{4\alpha-1}} + \chi^2_1}{\chi^1_1} - \chi^2_2). \tag{5.13}$$

[23] Es ist möglich, daß $q = 1$ sich als Lösung ergibt, aber in der Gleichung ist der Exponent dieser Potenz immer ungleich 0.

Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} & \chi_1^2 := (q_e S_{e1}^2)^2 \\ = & (S_1^2 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(-\varepsilon\frac{\partial_2(E)}{2E} + K_{11}^2)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^2 + \hat{\gamma}^2 ET^1T^2)^2, \\ & \chi_2^2 := q_e S_{e2}^2 + \hat{\gamma}\partial_2(T^2) \\ = & S_2^2 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2)T^2 + \hat{\gamma}^2\varepsilon E(T^2)^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.13) vervollständigt das System DGL I aus 5.4.1. Wir nennen das durch (5.13) ergänzte System **DGL I MANH**.

Nun brauchen wir noch die Anfangswerte von q, T^1 und T^2.
Wir berechnen die Werte, indem wir zuerst N_e längs $(s,0)$ bestimmen und q_e bzw. $\partial_2(q_e)$ mit Hilfe von x_0, N_0, η_0 und $N_e(s,0)$ ausdrücken. Da $q = q_e^{(4\alpha-1)/4\alpha}$ ist, ist der Rest kein Problem, wir müssen jedoch $\alpha = 0$ ausschließen. In diesem Fall wäre $q_e \equiv 1$ und $q = |\mathcal{K}_e|^{-1/4} \equiv 1$ gilt i. a. nicht.

Man kann N durch N_e darstellen. Wegen (2.15), (4.3) und (5.6)[24] gilt:

$$\begin{aligned} N &= q_e N_e + x_*(Z_e) = q_e N_e - x_*(grad_h(\log|q_e|)) \\ &= q_e N_e - \frac{\alpha}{\gamma}T^1 x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}T^2 x_2 = q_e N_e - \frac{\alpha}{\gamma}T^1 x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}T^2 q^2 \eta_1 \wedge \eta \end{aligned}$$

Da die euklidische Konormale $\eta_e = \langle N_e, . \rangle$ ist, folgt für die Konormale η

$$\eta = \langle \frac{1}{q_e} N_e, . \rangle.$$

Das Vektorfeld[25]

$$\tilde{N}_e := \frac{1}{q_e} N_e$$

ist also dasjenige mit

$$\langle \tilde{N}_e, x_1 \rangle = 0,\ \langle \tilde{N}_e, \eta_1 \wedge \eta \rangle = 0,\ \langle \tilde{N}_e, N \rangle = 1.$$

Analog Definition 1.2 ist dies, wenn man $\langle .,. \rangle$ mit $\tilde{g}(.,.)$ bezeichnet, gerade $\tilde{N}_e = \tilde{g}^*(\eta)$.
Nun läßt sich auch N_e berechnen. Es ist nämlich das zu $\tilde{N}_e$ gehörende Einheitsvektorfeld, man muß $\tilde{N}_e$ durch seinen (euklidischen) Betrag teilen:

$$N_e = \frac{1}{||\tilde{N}_e||}\tilde{N}_e = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{N}_e, \tilde{N}_e \rangle}}\tilde{N}_e = \frac{1}{\sqrt{\eta(\tilde{N}_e)}}\tilde{N}_e$$

Dadurch erfüllt dieses so definierte N_e wirklich die Bedingungen

$$\langle N_e, x_1 \rangle = 0,\ \langle N_e, \eta_1 \wedge \eta \rangle = 0,\ \langle N_e, N_e \rangle = \sqrt{\langle \tilde{N}_e, \tilde{N}_e \rangle}^{-2} \langle \tilde{N}_e, \tilde{N}_e \rangle = 1.$$

[24] Weil $q = |\mathcal{K}_e|^\gamma > 0$ gilt, ist $\delta = 1$.
[25] $\tilde{N}_e$ ist i. a. keine Relativnormale. Das ist nur dann der Fall, wenn q_e konstant ist.

Daneben ist N_e eine Relativnormale, denn

$$\eta(N_{ek}) = \langle \tilde{N}_e, N_{ek} \rangle = (\eta(\tilde{N}_e))^{\frac{1}{2}} \langle N_e, N_{ek} \rangle = \frac{1}{2} (\eta(\tilde{N}_e))^{\frac{1}{2}} \partial_k(\langle N_e, N_e \rangle) = 0.$$

Aus $\eta(\tilde{N}_e) = \langle \tilde{N}_e, \tilde{N}_e \rangle$ schließt man, daß $\eta(\tilde{N}_e)$ immer ≥ 0 ist und die Gleichheit nur gilt, wenn $\tilde{N}_e = 0$, d. h. wenn $\langle \tilde{N}_e, . \rangle = \eta = 0$ ist. Dies ist ausgeschlossen, da η an den Anfangswerten nicht verschwindet wegen (5.8). Es folgt außerdem:

$$\eta(N_e) = \eta\Big(\frac{1}{\sqrt{\eta(\tilde{N}_e)}} \tilde{N}_e \Big) = \sqrt{\eta(\tilde{N}_e)} > 0$$

So konstruiert man also die euklidische Normale aus η.

Weil $\eta(N_{ek}) = 0$ und

$$\tilde{N}_{ek} = (\eta(\tilde{N}_e))^{\frac{1}{2}} N_{ek} + \partial_k \Big((\eta(\tilde{N}_e))^{\frac{1}{2}} \Big) N_e$$

ist, gilt:

$$\eta_k = \langle \tilde{N}_{ek}, . \rangle, \ \partial_k(\eta(N_e)) = \eta_k(N_e), \ \eta_k(N_{ej}) = (\eta(\tilde{N}_e))^{\frac{1}{2}} \langle N_{ek}, N_{ej} \rangle \tag{5.14}$$

Wegen der Darstellung

$$N_e = \frac{1}{q_e} N + \frac{\alpha}{\gamma q_e} T^1 x_1 + \frac{\alpha}{\gamma q_e} T^2 q^2 \eta_1 \wedge \eta$$

erhält man

$$q_e^{-1} = \eta(N_e)$$

oder

$$q_e = \frac{1}{\eta(N_e)} = \eta(N_e)^{-1}.$$

Man bestimmt q durch

$$q = q_e^{(4\alpha-1)/4\alpha} = \eta(N_e)^{-(4\alpha-1)/4\alpha}.$$

Nach (5.4) erhalten wir T^1 aus der Ableitung von q nach u.

Nun berechnen wir T^2. Die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\gamma} \frac{q^2}{q_e} T^2 = \frac{det(x_1, N_e, N)}{det(x_1, \eta_1 \wedge \eta, N)} = \frac{det(x_1, N_e, N)}{E}$$

kann man wie folgt nach T^2 auflösen:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{\gamma}{\alpha E} \frac{q_e}{q^2} det(x_1, N_e, N) = q_e^{\frac{-2\alpha+1}{2\alpha}} \frac{\gamma}{\alpha E} det(x_1, N_e, N) \\ &= \eta(N_e)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}} \frac{\gamma}{\alpha E} det(x_1, N_e, N) \end{aligned}$$

Sind also x_0, N_0, η_0 vorgegeben, ist $\tilde{N}_{e0}(s) := \tilde{N}_e(s, 0)$ festgelegt durch

$$\langle \tilde{N}_{e0}, x_0' \rangle = 0, \ \langle \tilde{N}_{e0}, \eta_0' \wedge \eta_0 \rangle = 0, \ \langle \tilde{N}_{e0}, N_0 \rangle = 1.$$

Damit berechnet man $N_{e0}(s) := N_e(s,0)$:

$$N_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0(\tilde{N}_{e0})}}\tilde{N}_{e0}$$

Aus (5.14) folgt

$$\eta_0' = \langle \tilde{N}'_{e0}, .\rangle,\ (\eta_0(N_{e0}))' = \eta_0'(N_{e0}),\ \eta_0'(N'_{e0}) = (\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{\frac{1}{2}}\langle N'_{e0}, N'_{e0}\rangle \tag{5.15}$$

und wir haben diese Anfangswerte:

$$\begin{aligned}
q(s,0) &=: & q_0(s) &= \eta_0(N_{e0})^{-(4\alpha-1)/4\alpha}(s),\\
T^1(s,0) &\stackrel{(5.4)}{=} & &\frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{(\eta_0(N_{e0}))'}{\eta_0(N_{e0})\eta_0'(x_0')}(s) = \frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})\eta_0'(x_0')}(s),\\
T^2(s,0) &= & &-\frac{4\alpha-1}{4\alpha}\eta_0(N_{e0})^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}(s)\frac{det(x_0', N_{e0}, N_0)}{\eta_0'(x_0')}(s)\\
&= & &-\frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{1}{q_0^2}\frac{det(x_0', N_{e0}, N_0)}{\eta_0(N_{e0})\eta_0'(x_0')}(s)
\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir noch Ausnahmebedingungen: Wegen (5.8) ist η_0 und damit $\tilde{N}_{e0}$ ungleich 0. Deshalb ist $\eta_0(\tilde{N}_{e0}) \neq 0$ (vielmehr > 0) und auch

$$\eta_0(N_{e0}) = \eta_0(\tilde{N}_{e0})(\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{-\frac{1}{2}} = (\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Es ist daher $q_0 \neq 0$ und stets definiert. Außer (5.7)–(5.10) und der Bedingung, daß $\Phi = f$ nach S_2^2 auflösbar ist, muß noch der Ausdruck χ_1^1 zumindest längs $(s,0)$ ungleich 0 sein. Das bedeutet, wenn man $T^k(s,0)$ mit $T_0^k(s)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\eta_0'(N_0')}{\eta_0'(x_0')} - \hat{\gamma}(T_0^1)' - \frac{\hat{\gamma}}{2\eta_0'(x_0')}(\eta_0''(x_0') + \eta_0'(x_0'') + \eta_0'(x_0'') - \eta_0''(x_0'))T_0^1\\
&+\frac{\hat{\gamma}}{2\eta_0'(x_0')}(\varepsilon\frac{det(x_0'', x_0', N_0)}{q_0^2} - q_0^2\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0''))T_0^2\\
&+\frac{\hat{\gamma}}{2\eta_0'(x_0')}(-\varepsilon\frac{det(x_0'', x_0', N_0)}{q_0^2} - q_0^2\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0''))T_0^2\\
&+\hat{\gamma}^2(-\eta_0'(x_0'))(T_0^1)^2\\
= \quad &\frac{1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(- \eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') - (\frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})})'\eta_0'(x_0') + \frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})}\eta_0''(x_0')\\
&+\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')det(x_0', N_{e0}, N_0)\frac{1}{\eta_0(N_{e0})} - (\frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})})^2\eta_0'(x_0')\Big)\\
\stackrel{(5.15)}{=} \quad &\frac{-1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(\eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') + \frac{\eta_0''(N_{e0})\eta_0(N_{e0}) + \eta_0'(N'_{e0})\eta_0(N_{e0}) - (\eta_0'(N_{e0}))^2}{\eta_0(N_{e0})^2}\eta_0'(x_0')\\
&-\frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})}\eta_0''(x_0') - \frac{\eta_0'(x_0')\eta_0''(N_{e0}) - \eta_0''(x_0')\eta_0'(N_{e0}) - \eta_0''(N_0)\eta_0'(x_0')\eta_0(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})}\\
&+(\frac{\eta_0'(N_{e0})}{\eta_0(N_{e0})})^2\eta_0'(x_0')\Big)\\
= \quad &\frac{-1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(\eta_0'(x_0')(\eta_0'(N_0') + \eta_0''(N_0)) + \frac{\eta_0'(N'_{e0})}{\eta_0(N_{e0})}\eta_0'(x_0')\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{\eta_0'(x_0')}\frac{\eta_0'(N_{e0}')}{\eta_0(N_{e0})}, \text{ da } (\eta_0'(N_0))' = \eta_0''(N_0) + \eta_0'(N_0') = 0 \text{ ist}$$

$$\overset{(5.15)}{=} \frac{-1}{\eta_0'(x_0')}\frac{\langle N_{e0}', N_{e0}'\rangle}{\eta_0(N_{e0})}(\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{\frac{1}{2}}$$

Wir haben folgendes verwendet: Nach Definition von $\overline{det}$ ist

$$\begin{aligned}
&\overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'')\, det(x_0', N_{e0}, N_0) \\
= \;& Det\begin{pmatrix} \eta_0(x_0') & \eta_0(N_{e0}) & \eta_0(N_0) \\ \eta_0'(x_0') & \eta_0'(N_{e0}) & \eta_0'(N_0) \\ \eta_0''(x_0') & \eta_0''(N_{e0}) & \eta_0''(N_0) \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} 0 & \eta_0(N_{e0}) & 1 \\ \eta_0'(x_0') & \eta_0'(N_{e0}) & 0 \\ \eta_0''(x_0') & \eta_0''(N_{e0}) & \eta_0''(N_0) \end{pmatrix} \\
= \;& \eta_0'(x_0')\eta_0''(N_{e0}) - \eta_0''(x_0')\eta_0'(N_{e0}) - \eta_0''(N_0)\eta_0'(x_0')\eta_0(N_{e0}).
\end{aligned}$$

Es ist demnach darauf zu achten, daß N_{e0}' immer ungleich 0 ist. Das ist nach Definition von N_{e0} gleichwertig zu

$$(\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{-\frac{1}{2}}\tilde{N}_{e0}' + ((\eta_0(\tilde{N}_{e0}))^{-\frac{1}{2}})'\tilde{N}_{e0} \neq 0.$$

Da aber $\eta_0 = \langle \tilde{N}_{e0}, .\rangle$ ist und η_0 und η_0' linear unabhängig sind wegen (5.7)–(5.10), ist das immer gewährleistet.
$\chi_1^1 \neq 0$ führt daher zu keiner weiteren Bedingung.

Satz 5.4 *Gegeben seien die in $s = 0$ analytische, reguläre Kurve x_0, die Vektorfelder N_0, η_0 längs x_0, die den Bedingungen (5.7)–(5.10) genügen und in 0 analytisch sind, die in $(0,0)$ analytische Funktion f und die analytische Funktion $\Phi(H, \mathcal{K}) = \Phi((S_1^1 + S_2^2)/2, S_1^1 S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2) = \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2)$, für die $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ eindeutig nach S_2^2 auflösbar ist.*
Dann existiert zumindest lokal in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ für festes $\alpha \notin \{0, \frac{1}{4}\}$ je genau eine elliptische und eine hyperbolische Fläche x in isothermen Parametern, die x_0 als Parameterlinie enthält, d. h. $x_0(s) = x(s,0)$, deren Normale $N = N_\alpha$ und Konormale η längs x_0 mit N_0 bzw. η_0 übereinstimmen, $N_0(s) = N(s,0)$, $\eta_0(s) = \eta(s,0)$, und für deren Gaußsche Krümmung $\mathcal{K}$ und Mittlere Krümmung H die Beziehung $\Phi(H, \mathcal{K}) = f$ gilt.

Beweis: Wir sind bis jetzt von einer in $(0,0)$ analytischen, isotherm parametrisierten Fläche x mit der Normalen $N = N_\alpha$ ausgegangen. Die Flächengrößen bzgl. N erfüllen notwendig (1.1), also DGL I, und (5.13). Die Anfangswerte von q, T^1, T^2 sind so, wie sie in diesem Abschnitt bestimmt wurden, die anderen Anfangswerte entsprechen denen von DGL I.
Eine Fläche x mit der Normalen N_α und die dazugehörenden Flächengrößen erfüllen also das durch die Ergebnisse dieses Abschnitts ergänzte System DGL I MANH und DGL GW. Diese Systeme sind jedoch nach Satz 5.1 eindeutig lösbar. Wenn es also eine solche Fläche mit dieser Normalisierung gibt, ist sie mit der Lösung von DGL I MANH[26] und DGL GW identisch. Es ist aber sicher, daß so eine Fläche existiert, denn die Lösung von

[26] Die Abbildungen x und N selbst sind natürlich nicht die Lösungen von DGL I MANH, sondern von DGL GW. Das zweite System benutzt allerdings die Flächengrößen, die sich als Lösungen von DGL I MANH ergaben und die der Normalisierung entsprechende Eigenschaften besitzen.

DGL I MANH ist analytisch in $(0,0)$ und regulär. $\mathcal{K}_e$ ist somit $\neq 0$ und analytisch in $(0,0)$, daher ist die Normale N_α definiert und hat die erwünschten Eigenschaften. #

Bemerkungen: 1.) Man kann die Anfangswerte auch mit $\tilde{N}_{e0}$ statt mit N_{e0} darstellen. Die letzte Rechnung ($\chi_1^1 \neq 0$) ist dann ein wenig verändert, führt aber zum gleichen Ergebnis. Man benutzt

$$(\eta_0(\tilde{N}_{e0}))' = (\langle \tilde{N}_{e0}, \tilde{N}_{e0} \rangle)' = 2\langle \tilde{N}_{e0}', \tilde{N}_{e0} \rangle = 2\eta_0'(\tilde{N}_{e0}).$$

2.) Im Gegensatz zum euklidischen Fall in Abschnitt 5.7, aber dafür analog zum äquiaffinen Fall in Abschnitt 5.5 und, wie wir gleich sehen werden, zur zentroaffinen Familie in Abschnitt 5.9 werden keine besonderen Anforderungen an N_0 gestellt. In 5.7 mußte N_0 ein Einheitsvektorfeld orthogonal zu x_0' sein und damit neben (5.7)–(5.10) weitere Bedingungen erfüllen. In 5.5, 5.8, 5.9 kann man N_0 fast beliebig wählen. Allerdings ist η_0 durch $\eta_0 = \langle N_0, . \rangle$ im euklidischen Fall eindeutig durch N_0 fixiert, in den anderen behandelten Fällen nicht. Wir werden das letztgenannte Problem in Abschnitt 5.11 behandeln.

3.) Eine weitere Gemeinsamkeit der Abschnitte 5.5, 5.8 und auch 5.9 ist die Tatsache, daß man bei Vorgabe von Φ, f, x_0, N_0, η_0 und der Art der Normale zwei Flächen, genauer je eine elliptische und eine hyperbolische Fläche, erhält. In Abschnitt 5.7 haben wir dagegen schon darauf hingewiesen, daß im euklidischen Fall Φ das Vorzeichen von h bereits festlegt, daß somit nur eine entweder elliptische oder hyperbolische Fläche existiert, die den Bedingungen genügt.

4.) Auch Glässner behandelt das Björlingsche Problem in [Gl], S. 199–202, für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\Phi(H, \mathcal{K}) = H$. Er gibt als N_0 allerdings nicht $N_{\frac{1}{2}}$, sondern N_e auf $(s,0)$ vor. Auch geht er nicht wie in Abschnitt 5.8, sondern analog zu [Lei1], S. 249–254, vor, er gibt Differentialgleichungen für die euklidischen Größen g und h_e an, nicht für Größen bzgl. $N_{\frac{1}{2}}$, und erhält eine bzgl. g, nicht bzgl. h, isotherm parametrisierte Fläche. Das Ergebnis ist nicht eindeutig, nur nach Vorgabe der Anfangswerte von h_{e22}, $\partial_2(h_{e22})$. Dagegen ergibt sich in diesem Abschnitt ein eindeutiges Ergebnis, allerdings können wir $N_0(s) = N_{\frac{1}{2}}(s,0)$ (fast) frei wählen.

5.9 Lösung bei Normalen der zentroaffinen Familie

Analog zum vorherigen Abschnitt wenden wir das Verfahren auf Normalen der zentroaffinen Familie an und erhalten einen zu Satz 5.3 analogen Satz.
Wir geben ebenfalls eine Differentialgleichung für T^2 an, um das System DGL I zu ergänzen. Dazu gehen wir fast genauso vor wie in 5.8: Wir stellen $\mathcal{K}_c = 1$ mit q und Flächengrößen bzgl. N dar. Daraus folgt die Differentialgleichung.
Die Anfangswerte von q, T^1 und T^2 ergeben sich aus der Darstellung von N durch N_c.

Wir gehen von einer in $(0,0)$ analytischen, bzgl. h isotherm parametrisierten Fläche x aus mit $N = \pm N_c^\alpha$ (zum Vorzeichen siehe unten), wobei $\alpha \neq \frac{1}{4}$ fest sei. Wir geben Eigenschaften der Flächengrößen bzgl. N an, die sich für diese Situation notwendig ergeben.

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} N_c &= q_b N_b + x_*(Z_b) = \tilde{q} N + x_*(\tilde{Z}) \\ N &= q_c N_c + x_*(Z_c) = q N_b + x_*(Z) \end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, daß $sign\, h_{11} = sign\, E = sign\, det(x_1, x_2, N) > 0$ ist. Gilt $N = N_c^\alpha$, ist $q_c = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha > 0$ (Definition 2.6) und $\sigma_a = q_b$ und $q = q_b\, q_c$ haben dasselbe Vorzeichen, für $N = -N_c^\alpha$ dagegen ist $q_c < 0$ und q, q_b haben verschiedene Vorzeichen.
Sei $\varepsilon_c := sign\, q_b$.
Weil nach der Vereinbarung aus 2.2.3 $sign\, det(x_1, x_2, N_b) = sign\, det(x_1, x_2, N_e) > 0$ und damit $q > 0$ ist, kann für $\varepsilon_c = 1$ nicht $N = -N_c^\alpha$ und für $\varepsilon_c = -1$ nicht $N = N_c^\alpha$ gelten.
Es sei also $N = \varepsilon_c\, N_c^\alpha$.
Für die Größen q, q_c gilt nach (2.18) und Definition 2.6

$$q = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^\gamma = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{(4\alpha-1)/4}, \;\; \tilde{q} = q_c^{-1} = \varepsilon_c\, |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{-\alpha} = \varepsilon_c\, q^{-\hat{\gamma}}.$$

$\hat{\gamma}$ steht auch in diesem Abschnitt für $\frac{4\alpha}{4\alpha-1}$. Wir müssen auch hier $\alpha = \frac{1}{4}$ ausschließen, denn $\tilde{q} = 1$ gilt i. a. nicht.

Wir können jetzt analog zu Abschnitt 5.8 weitermachen. Dort war aber $\mathcal{K}_e$ eine Potenz von q und wir konnten $\varepsilon q^{4/(4\alpha-1)} = \mathcal{K}_e = S_{e1}^1 S_{e2}^2 - \varepsilon (S_{e1}^2)^2$ setzen. Diese zwei Arten, $\mathcal{K}_e$ auszudrücken, führten zu einer Differentialgleichung. Hier hat aber $\mathcal{K}_c$ nichts mit q zu tun. Wir können $\mathcal{K}_c$ mit Lemma 2.1 zwar - wie in 5.8 - mit q und Flächengrößen bzgl. N darstellen, aber $\mathcal{K}_c$ ist - im Gegensatz zu $\mathcal{K}_e$ - keine nichttriviale Potenz von q. Allerdings ist bekannt, daß $\mathcal{K}_c$ für jede Fläche konstant 1 ist[27]. Diese Tatsache kann man benutzen, wir setzen nicht $\varepsilon q^{4/(4\alpha-1)} = S_{e1}^1 S_{e2}^2 - \varepsilon (S_{e1}^2)^2$ an, sondern

$$1 = \mathcal{K}_c = S_{c1}^1 S_{c2}^2 - \varepsilon (S_{c1}^2)^2.$$

Da wegen Lemma 2.1 für den Shape–Operator

$$S_c(X) = X = \tilde{q} S(X) - \nabla_X \tilde{Z}$$

gilt mit $\tilde{Z} = \hat{\gamma}\tilde{q}T$, $\partial_j(\log|q|) = \hat{T}_j = h_{jl}T^l$, erhalten wir in lokalen Koordinaten

$$S_{cj}^i = \delta_j^i = \tilde{q} S_j^i - \hat{\gamma}\tilde{q}\, \partial_j(T^i) - \hat{\gamma}\tilde{q}\, \Gamma_{jl}{}^i T^l + \hat{\gamma}^2 \tilde{q}\, h_{jl} T^i T^l.$$

Insgesamt ergibt sich diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathcal{K}_c = S_{c1}^1 S_{c2}^2 - \varepsilon (S_{c1}^2)^2 \\
&= \tilde{q}^2 \Big(S_1^1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{11}{}^1 + K_{11}^1)T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{12}{}^1 + K_{12}^1)T^2 + \hat{\gamma}^2 E T^1 T^1 \Big) \\
&\cdot \Big(S_2^2 - \hat{\gamma}\partial_2(T^2) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{21}{}^2 + K_{21}^2)T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{22}{}^2 + K_{22}^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 \varepsilon E T^2 T^2 \Big) \\
&- \varepsilon \tilde{q}^2 \Big(S_1^2 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{11}{}^2 + K_{11}^2)T^1 - \hat{\gamma}(\hat{\Gamma}_{12}{}^2 + K_{12}^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 E T^1 T^2 \Big)^2
\end{aligned}$$

Man erhält also fast dieselbe Gleichung wie in Abschnitt 5.8, nur steht auf der linken Seite 1 statt $\varepsilon q^{4/(4\alpha-1)}$. Damit gilt, wenn wir durch $\tilde{q}^2 = q^{-2\hat{\gamma}}$ teilen und (5.11) anwenden:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon q^{2\hat{\gamma}} = \varepsilon q^{\frac{8\alpha}{4\alpha-1}} \\
&= \varepsilon \Big(S_1^1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K_{11}^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 E (T^1)^2 \Big) \\
&\cdot \Big(S_2^2 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon E T^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 \varepsilon E (T^2)^2 \Big) \\
&- \varepsilon \Big(S_1^1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K_{11}^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 E (T^1)^2 \Big) \hat{\gamma}\partial_2(T^2) \\
&- \Big(S_1^2 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(-\varepsilon\frac{\partial_2(E)}{2E} + K_{11}^2)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^2 + \hat{\gamma}^2 E T^1 T^2 \Big)^2
\end{aligned}$$

[27] $\mathcal{K}_c$ ist somit doch eine Potenz von q, nämlich die triviale q^0. In 5.8 hatte man den Exponenten $\frac{4}{4\alpha-1}$.

Wir wollen den Fall $\alpha = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma} = 0$, der bei der Berechnung der Anfangswerte ausgeschlossen wird, beiseite lassen. Dann kann man diese Gleichung nach $\partial_2(T^2)$ auflösen, wenn der Faktor davor, d. h.

$$\begin{aligned} & \chi_1^1(E, \partial_1(E), \partial_2(E), K_{11}^1, K_{11}^2, S_1^1, T^1, T^2, \partial_1(T^1)) := q_c S_{c1}^1 \\ = \; & (S_1^1 - \hat{\gamma}\partial_1(T^1) - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} + K_{11}^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} + \varepsilon K_{11}^2)T^2 + \hat{\gamma}^2 E(T^1)^2), \end{aligned}$$

zumindest für die Anfangswerte nicht verschwindet. Das ist jedoch immer so. χ_1^1 ist längs $(s, 0)$, wie wir am Schluß des Abschnitts zeigen werden, gerade $\frac{1}{\eta_0(N_{c0})}$.
Die Gleichung für $\partial_2(T^2)$ lautet dann

$$\partial_2(T^2) = -\frac{q^{\frac{8\alpha}{4\alpha-1}} + \varepsilon\chi_1^2}{\chi_1^1\hat{\gamma}} + \frac{1}{\hat{\gamma}}\chi_2^2 = -\frac{4\alpha-1}{4\alpha}(\frac{q^{\frac{8\alpha}{4\alpha-1}} + \varepsilon\chi_1^2}{\chi_1^1} - \chi_2^2). \tag{5.16}$$

Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} & \chi_1^2 := (q_c S_{c1}^2)^2 \\ = \; & (S_1^2 - \hat{\gamma}\partial_1(T^2) - \hat{\gamma}(-\varepsilon\frac{\partial_2(E)}{2E} + K_{11}^2)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^2 + \hat{\gamma}^2 ET^1T^2)^2, \\ & \chi_2^2 := q_c S_{c2}^2 + \hat{\gamma}\partial_2(T^2) \\ = \; & S_2^2 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_1(E)}{2E} - K_{11}^1 + 2ET^1)T^1 - \hat{\gamma}(\frac{\partial_2(E)}{2E} - \varepsilon K_{11}^2 + 2\varepsilon ET^2)T^2 + \hat{\gamma}^2\varepsilon E(T^2)^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.16) vervollständigt das System DGL I aus Abschnitt 5.4.1. Das ergänzte System bezeichnen wir mit **DGL I ZENT**.

Nun brauchen wir noch Anfangswerte von q, T^1 und T^2.
Da $q = |q_c|^{(4\alpha-1)/4\alpha}$ ist, müssen wir $\alpha = 0$ ausschließen. In diesem Fall wäre $|q_c| \equiv 1$ und $q = |\tilde{\mathcal{K}}_c|^{-1/4} \equiv 1$ gilt i. a. nicht.

Stellen wir N mit N_c dar, d. h. nach (2.19), (4.3), (5.6)

$$\begin{aligned} N &= q_c N_c + x_*(Z_c) = q_c N_c - x_*(grad_h(\log|q_c|)) \\ &= q_c N_c - \frac{\alpha}{\gamma}T^1 x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}T^2 x_2 = q_c N_c - \frac{\alpha}{\gamma}T^1 x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}T^2 q^2 \eta_1 \wedge \eta, \end{aligned}$$

ergeben sich die gesuchten Werte. Es gilt

$$\partial_k(\eta(N_c)) = \eta_k(N_c) + \eta(N_{ck}) = \eta_k(N_c) - \eta(x_k) = \eta_k(N_c). \tag{5.17}$$

Die Stützfunktion q_c bezüglich N_c erhalten wir als

$$q_c = \frac{det(x_1, \eta_1 \wedge \eta, N)}{det(x_1, \eta_1 \wedge \eta, N_c)} = \frac{\eta(N)}{\eta(N_c)} = \frac{1}{\eta(N_c)}.$$

Da $N = \pm N_c^\alpha$ ist, die zentroaffine Familie also existiert, muß $\eta(N_c) \neq 0$ sein, N_c kann nicht tangential sein.
q_c ist also definiert und $\neq 0$, es ist aber nicht unbedingt positiv, das Vorzeichen ist gerade ε_c. Demnach ist $\varepsilon_c q_c > 0$.

Damit ist q bestimmt durch

$$q = (\varepsilon_c\, q_c)^{\frac{4\alpha-1}{4\alpha}} = (\varepsilon_c\, \eta(N_c))^{-\frac{4\alpha-1}{4\alpha}}\,.$$

T^1 ist durch (5.4) gegeben.
Nun bestimmen wir T^2: Aus

$$-\frac{\alpha}{\gamma}q^2T^2 = \frac{det(x_1, N, N_c)}{det(x_1, \eta_1\wedge\eta, N_c)} = \frac{det(x_1, N, N_c)}{Eq_c^{-1}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} T^2 &= -\frac{\gamma}{\alpha E}\frac{q_c}{q^2}det(x_1, N, N_c) = -\varepsilon_c(\varepsilon_c\, q_c)^{\frac{-2\alpha+1}{2\alpha}}\frac{\gamma}{\alpha E}det(x_1, N, N_c) \\ &= -\varepsilon_c(\varepsilon_c\, \eta(N_c))^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}\frac{\gamma}{\alpha E}det(x_1, N, N_c). \end{aligned}$$

Seien also x_0, N_0, η_0 gegeben mit (5.7)–(5.10), wobei für (5.10) wie sonst auch $\eta_0(x_0'') > 0$ gelten soll.
Wir bezeichnen $N_c(s,0) = N_{c0}(s) = o - x_0(s)$.
Um zu gewährleisten, daß N_{c0} nicht tangential ist, muß

$$\eta_0(N_{c0}) = \eta_0(o - x_0) \neq 0 \tag{5.18}$$

sein. ε_c ist bereits durch diese Anfangswerte fixiert, es ist nämlich $sign\, \eta_0(N_{c0})$[28].

Aus (5.17) folgt

$$(\eta_0(N_{c0}))' = \eta_0'(N_{c0}). \tag{5.19}$$

Zusammen haben wir die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} q(s,0) &=: q_0(s) = (\varepsilon_c\eta_0(N_{c0}))^{-(4\alpha-1)/4\alpha}(s) \\ T^1(s,0) &= \frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{1}{\eta_0'(x_0')(s)}\frac{(\eta_0(N_{c0}))'}{\eta_0(N_{c0})}(s) \overset{(5.19)}{=} \frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})\eta_0'(x_0')}(s) \\ T^2(s,0) &= \varepsilon_c\frac{4\alpha-1}{4\alpha}(\varepsilon_c\eta_0(N_{c0}))^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}(s)\frac{det(x_0', N_0, N_{c0})}{\eta_0'(x_0')}(s) \\ &= \frac{4\alpha-1}{4\alpha}\frac{1}{q_0^2(s)}\frac{det(x_0', N_0, N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})\eta_0'(x_0')}(s) \end{aligned}$$

Außerdem muß neben (5.7)–(5.10) und der Bedingung, daß $\Phi = f$ nach S_2^2 auflösbar ist, noch der Ausdruck χ_1^1 zumindest auf $(s,0)$ ungleich 0 sein. Das bedeutet, wenn wir

[28] Genau gesagt können zwei Fälle auftreten: $\eta_0(x_0'')$, $\eta_0(N_{c0})$ haben das gleiche Vorzeichen oder verschiedene Vorzeichen. Im ersten Fall können wir (gegebenenfalls mit $-N_0$, $-\eta_0$ statt N_0, η_0) $\eta_0(x_0'')$ und $\eta_0(N_{c0})$ gleichzeitig positiv normieren. Wir können dann auf ε_c verzichten.

Im zweiten Fall aber ist es nicht möglich (weder durch $-N_0$, $-\eta_0$ für N_0, η_0 noch durch $-x_0$ für x_0), an den unterschiedlichen Vorzeichen etwas zu ändern. Wir sorgen dann, wie gesagt, dafür, daß $\eta_0(x_0'')$ positiv ist. $\eta_0(N_{c0})$ ist damit negativ und $\varepsilon_c = -1$. Wir könnten stattdessen auch $\eta_0(N_{c0})$ positiv normieren, in dem Fall könnten wir im ganzen Abschnitt ohne ε_c arbeiten (q_c wäre dann > 0). Allerdings haben wir einige Formeln - wie (5.8) und somit verschiedene Anfangswerte aus 5.3 - an $E(s,0) = h_{11}(s,0) = \eta_0(x_0'') > 0$ ausgerichtet. Wir müßten bei manchen Anfangswerten die Vorzeichen ändern.

$T^k(s,0)$ wieder $T_0^k(s)$ nennen:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta_0'(N_0')}{\eta_0'(x_0')} - \hat\gamma(T_0^1)' - \frac{\hat\gamma}{2\eta_0'(x_0')}(\eta_0''(x_0') + \eta_0'(x_0'') + \eta_0'(x_0'') - \eta_0''(x_0'))T_0^1 \\
& + \frac{\hat\gamma}{2\eta_0'(x_0')}(\varepsilon \frac{det(x_0'', x_0', N_0)}{q_0^2} - q_0^2 \overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0''))T_0^2 \\
& + \frac{\hat\gamma}{2\eta_0'(x_0')}(-\varepsilon \frac{det(x_0'', x_0', N_0)}{q_0^2} - q_0^2 \overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0''))T_0^2 \\
& + \hat\gamma^2(-\eta_0'(x_0'))(T_0^1)^2 \\
= \; & \frac{1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(- \eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') - (\frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})})'\eta_0'(x_0') + \frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})}\eta_0''(x_0') \\
& - \overline{det}(\eta_0, \eta_0', \eta_0'') det(x_0', N_0, N_{c0}) \frac{1}{\eta_0(N_{c0})} - (\frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})})^2 \eta_0'(x_0')\Big) \\
\overset{(5.19)}{=} \; & \frac{-1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(\eta_0'(N_0')\eta_0'(x_0') + \frac{\eta_0''(N_{c0})\eta_0(N_{c0}) + \eta_0'(N_{c0}')\eta_0(N_{c0}) - (\eta_0'(N_{c0}))^2}{\eta_0(N_{c0})^2}\eta_0'(x_0') \\
& - \frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})}\eta_0''(x_0') - \frac{\eta_0'(x_0')\eta_0''(N_{c0}) - \eta_0''(x_0')\eta_0'(N_{c0}) - \eta_0''(N_0)\eta_0'(x_0')\eta_0(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})} \\
& + (\frac{\eta_0'(N_{c0})}{\eta_0(N_{c0})})^2 \eta_0'(x_0')\Big) \\
= \; & \frac{-1}{\eta_0'(x_0')^2}\Big(\eta_0'(x_0')(\eta_0'(N_0') + \eta_0''(N_0)) + \frac{\eta_0'(N_{c0}')}{\eta_0(N_{c0})}\eta_0'(x_0')\Big) \\
= \; & \frac{1}{\eta_0'(x_0')}\frac{\eta_0'(x_0')}{\eta_0(N_{c0})} = \frac{1}{\eta_0(N_{c0})} \neq 0.
\end{aligned}$$

Das ist aber stets erfüllt. Auch in diesem Abschnitt ergibt sich zu den bisherigen Bedingungen durch $\chi_1^1 \neq 0$ keine neue.

Bemerkungen: 1.) $\alpha = \frac{1}{4}$ mußten wir bei der Herleitung der Differentialgleichung (5.16) ausschließen, $\alpha = 0$ bei der Bestimmung der Anfangswerte.

2.) Bisher haben wir Φ immer als Abbildung $\Phi(H, \mathcal{K})$ von H und $\mathcal{K}$ vorgegeben. Bei Normalen der Manhartschen Familie beinhaltete das den wichtigen Fall $H = 0$, also N_α–Minimalflächen.
In 3.8 haben wir jedoch herausgefunden, daß die Mittlere Krümmung H bei den Normalen der zentroaffinen Familie (bis auf N_b) nicht die Bedeutung hat wie bei den Normalen der Manhartschen Familie. Diese Rolle übernimmt $\hat H$.
Deshalb sollte man Φ verallgemeinern zu einer Abbildung $\Phi(H, \mathcal{K}, q)$, die noch von der Stützfunktion q bzgl. N_b abhängt. Wichtig ist nur, daß diese Abbildung nach S_2^2 auflösbar ist und daß das System DGL I ZENT noch die in Satz 5.1 verlangte Form hat, nachdem man für S_2^2 die entsprechende Funktion eingesetzt hat.
Damit ist es möglich, Flächen zu finden, die (für $\varepsilon_c = 1$)

$$\Phi(H, \mathcal{K}, q) = \hat H = (\alpha - 1)H + 2\gamma|\tilde{\mathcal{K}}_c|^\alpha = (\alpha-1)H + \frac{4\alpha - 1}{2} q^{\frac{4\alpha}{4\alpha-1}} = f$$

erfüllen. Die Sonderfälle $\alpha = \frac{1}{4}, 0$ kommen (siehe 1.)) nicht vor. Für $\alpha = 1$ kann man $\hat H = f$ nicht nach S_2^2 auflösen. Im Fall $f = 0$ beeinträchtigt dies aber nicht, da es auch keine N_c^1–Minimalflächen gibt, siehe Abschnitt 3.8.2.

Satz 5.5 *Gegeben seien die in* $s = 0$ *analytische, reguläre Kurve* x_0*, die Vektorfelder* N_0*,* η_0 *längs* x_0*, die den Bedingungen (5.7)–(5.10) und (5.18) genügen und in* 0 *analytisch sind, die in* $(0,0)$ *analytische Funktion* f *und die analytische Funktion* $\Phi(H,\mathcal{K},q) = \Phi((S_1^1+S_2^2)/2, S_1^1S_2^2 - \varepsilon(S_1^2)^2, q) = \tilde{\Phi}(S_1^1, S_1^2, S_2^2, q)$*, für die* $\Phi(H,\mathcal{K},q) = f$ *eindeutig nach* S_2^2 *auflösbar ist. Sei* $\varepsilon_c = sign\, \eta_0(o - x_0)$*.*
Dann existiert zumindest lokal in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ *für festes* $\alpha \notin \{0, \frac{1}{4}\}$ *je genau eine elliptische und eine hyperbolische Fläche* x *in isothermen Parametern, die* x_0 *als Parameterlinie enthält, d. h.* $x_0(s) = x(s,0)$*, deren Normale* $N = \varepsilon_c N_c^\alpha$ *und Konormale* η *längs* x_0 *mit* N_0 *bzw.* η_0 *übereinstimmen,* $N_0(s) = N(s,0)$*,* $\eta_0(s) = \eta(s,0)$*, und für deren Gaußsche Krümmung* $\mathcal{K}$ *und Mittlere Krümmung* H *die Beziehung* $\Phi(H,\mathcal{K},q) = f$ *gilt.*

Beweis: Dieser Beweis geht analog zum Beweis von Satz 5.4.
Die Flächengrößen bzgl. dieser Normalisierung erfüllen die Differentialgleichungen aus 5.4 und (5.16), d. h. DGL I ZENT. Die Anfangswerte ergeben sich, wie in 5.3 und 5.9 geschildert. Die Systeme DGL I ZENT und DGL GW sind eindeutig lösbar. Die Lösungen von DGL GW genügen den Forderungen des Satzes. #

5.10 Der Einfluß der Kurvenparametrisierung auf die Lösung

Bei der Vorgehensweise der Abschnitte 5.5, 5.7–5.9 spielte die Parametrisierung der Kurve x_0 keine Rolle. x_0, N_0, η_0 und andere Vorgaben (wie Φ, f, ε) induzierten eindeutig eine Fläche x mit einer bestimmten Normalen N. Wir untersuchen nun, ob die umparametrisierten Anfangsdaten $\overline{x}_0$, $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$ mit denselben anderen Vorgaben die gleiche Fläche x in anderer Parametrisierung induzieren.

Wir geben für diesen Abschnitt die Art der Normalen N, die Abbildungen Φ, f und $\varepsilon \in \{1,-1\}$ fest vor. Die Aussage der vorigen Abschnitte war, daß es dann[29] für eine bestimmte Kurve x_0 mit Vektorfeldern N_0, η_0 längs x_0 eine elliptische (für $\varepsilon = 1$) bzw. eine hyperbolische (für $\varepsilon = -1$) Fläche in isothermer Parametrisierung gibt, die x_0 als Parameterlinie $x(s,0)$ enthält und deren Normale N bzw. Konormale η längs $(s,0)$ gleich N_0 bzw. η_0 ist. N ist eine Relativnormale der vorgegebenen Art und es gilt $\Phi(H,\mathcal{K}) = f$.

Sei nun
$$\overline{x}_0(t(s)) = x_0(s),\ \overline{N}_0(t(s)) = N_0(s),\ \overline{\eta}_0(t(s)) = \eta_0(s)$$
eine andere (gemeinsame) Parametrisierung von x_0, N_0, η_0 mit $t'(s) \neq 0$, $t(0) = 0$. Auf (5.7)–(5.10), (5.18) und die anderen Ausnahmekriterien für Anfangswerte in 5.7 hat die Umparametrisierung keinen Einfluß. Gelten die Bedingungen für x_0, N_0, η_0, so auch für $\overline{x}_0$, $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$. Auch bleibt das Vorzeichen von $\overline{\eta}_0'(\overline{x}_0')$ negativ.
Es gibt somit genau eine elliptische bzw. hyperbolische Immersion $\overline{x}(\overline{u},\overline{v})$ in isothermer Parametrisierung mit $\overline{x}(t,0) = \overline{x}_0(t)$, $\overline{N}(t,0) = \overline{N}_0(t)$, $\overline{\eta}(t,0) = \overline{\eta}_0(t)$. $\overline{N}$ ist auch eine Relativnormale der vorgegebenen Art und es gilt $\Phi(\bar{H},\bar{\mathcal{K}}) = f$.

[29] Eine Ausnahme bildet die euklidische Normalisierung, vgl. Abschnitt 5.7. Hier ist nur ein Wert von ε möglich.

Die Frage ist nun, ob $\overline{x}$ die gleiche Fläche x darstellt nur in anderer Parametrisierung, d. h. ob Funktionen $\tilde{u}, \tilde{v}$ existieren mit $\overline{x}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v)) = x(u,v)$.

Bemerkung: Wie in den anderen Abschnitten nehmen wir an, daß x_0, N_0, η_0 und auch t in $s = 0$ analytisch sind.

Wir untersuchen zuerst, welches Aussehen eine Abbildung $(u,v) \mapsto (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$ notwendig hat, die $x(u,v)$ mit $(h_{ij}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \varepsilon E \end{pmatrix}$, $E > 0$, in $\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v})$ mit $(\tilde{h}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{E} & 0 \\ 0 & \varepsilon \tilde{E} \end{pmatrix}$, $\tilde{E} > 0$, überführt. Es gilt hierbei

$$\begin{array}{ll} 1.) & E = \tilde{E}\tilde{u}_u^2 + \varepsilon \tilde{E}\tilde{v}_u^2 \\ 2.) & 0 = \tilde{E}\tilde{u}_u\tilde{u}_v + \varepsilon \tilde{E}\tilde{v}_u\tilde{v}_v \\ 3.) & \varepsilon E = \tilde{E}\tilde{u}_v^2 + \varepsilon \tilde{E}\tilde{v}_v^2 \\ 4.) & \tilde{u}_u\tilde{v}_v - \tilde{u}_v\tilde{v}_u = Det \begin{pmatrix} \tilde{u}_u & \tilde{u}_v \\ \tilde{v}_u & \tilde{v}_v \end{pmatrix} \neq 0 \end{array}$$

Sei ohne Einschränkung $\tilde{u}_u \neq 0$[30]. Dann ist wegen 2.)

$$\tilde{u}_v + \varepsilon \frac{\tilde{v}_u \tilde{v}_v}{\tilde{u}_u} = 0.$$

Setzen wir $\tilde{u}_v$ in 3.) ein, ergibt sich

$$\varepsilon E = \tilde{E}\frac{\tilde{v}_u^2\tilde{v}_v^2}{\tilde{u}_u^2} + \varepsilon \tilde{E}\tilde{v}_v^2 = \tilde{E}(\frac{\tilde{v}_u^2 + \varepsilon \tilde{u}_u^2}{\tilde{u}_u^2})\tilde{v}_v^2 \stackrel{1.)}{=} \varepsilon E \frac{\tilde{v}_v^2}{\tilde{u}_u^2}.$$

Darum ist $\tilde{v}_v^2 = \tilde{u}_u^2$ bzw. $\tilde{u}_u = \pm \tilde{v}_v$. Es folgt aus 1.) und 3.)

$$\varepsilon \tilde{E}\tilde{v}_u^2 = E - \tilde{E}\tilde{u}_u^2 = E - \tilde{E}\tilde{v}_v^2 = \varepsilon \tilde{E}\tilde{u}_v^2$$

und daher ist

$$\tilde{u}_v^2 = \tilde{v}_u^2.$$

Für $\tilde{u}_u^2 = \tilde{v}_v^2$, $\tilde{v}_u^2 = \tilde{u}_v^2$ gibt es vier Möglichkeiten für die Vorzeichen:

$$\begin{array}{rl} \alpha) & \tilde{u}_v = \varepsilon \tilde{v}_u,\ \ \tilde{v}_v = \tilde{u}_u \\ \beta) & \tilde{u}_v = -\varepsilon \tilde{v}_u,\ \ \tilde{v}_v = -\tilde{u}_u \\ \gamma) & \tilde{u}_v = -\varepsilon \tilde{v}_u,\ \ \tilde{v}_v = \tilde{u}_u \\ \delta) & \tilde{u}_v = \varepsilon \tilde{v}_u,\ \ \tilde{v}_v = -\tilde{u}_u \end{array}$$

Bei α) und β) folgt aus 2.) $\tilde{v}_u = 0 = \tilde{u}_v$, die Funktionen $\tilde{u}(u,v) = \tilde{u}(u)$, $\tilde{v}(u,v) = \tilde{v}(v)$ hängen daher nur von einer Variablen ab. Wegen $\tilde{u}_u(u) = \tilde{u}'(u) = \pm \tilde{v}_v(v) = \pm \tilde{v}'(v)$ sind $\tilde{u}'$, $\tilde{v}'$ konstant. Es folgt also

$$\tilde{u}(u) = cu + d_1,\ \tilde{v}(v) = \pm cv + d_2,$$

[30] Wenn $\tilde{u}_u = 0$ ist, muß nach 1.) $\tilde{v}_u \neq 0$ sein. In dem Fall kann man analog mit $\tilde{v}_u$ weitermachen.

wobei $c \neq 0$, d_1, d_2 Konstanten sind. α) und β) können keine anderen Lösungen als diese affinen Funktionen haben. Mit den folgenden Anfangsbedingungen sind nur die linearen Funktionen

$$\tilde{u}(u) = cu, \ \tilde{v}(v) = \pm cv$$

möglich. Man sieht sofort, daß die Determinante in 4.) für α) c^2, für β) $-c^2$ ist.
Für γ) ist die Determinante nach 1.) immer > 0, für δ) immer < 0.

So sehen also alle Parametertransformationen aus, die eine isotherm parametrisierte Fläche x in eine isotherm parametrisierte Fläche $\tilde{x}$ überführen.

$x_0(s)$ sei die Parameterlinie $x(s,0)$ von x. Verlangt man von der Parametertransformation noch, daß $\tilde{x}(t(s),0) = \overline{x}_0(t(s)) = x_0(s)$ ist für die oben angegebene Funktion $t(s)$, ergeben sich diese Anfangswerte für $\tilde{u}$, $\tilde{v}$:

$$\tilde{u}(s,0) = t(s), \ \tilde{v}(s,0) = 0$$

Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden:

- Ist $t(s) = cs$, $c \neq 0$ konstant, haben alle Differentialgleichungssysteme α)–δ) mit den gerade angeführten Anfangswerten nach Satz 5.1 je eine Lösung, nämlich eine lineare wie α) bzw. β):

$$\begin{aligned} \alpha), \gamma): \quad & \tilde{u}(u,v) = cu, \tilde{v}(u,v) = cv, \\ \beta), \delta): \quad & \tilde{u}(u,v) = cu, \tilde{v}(u,v) = -cv \end{aligned}$$

  Also α) und γ) haben die gleiche Lösung, ebenso β) und δ).

- Hat $t(s)$ eine andere Form, fallen die Möglichkeiten α), β) weg, γ) hat eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ nach Satz 5.1 und die Lösung von δ) ergibt sich als $\tilde{u}(u,-v)$, $\tilde{v}(u,-v)$ aus der Lösung von γ). Dies ist übrigens beim 1. Fall ebenso.

Es existieren also immer zwei Lösungen, die sich aber nur durch ein Vorzeichen im Argument unterscheiden. Das bedeutet, daß es zwei Parametertransformationen gibt, die x in $\tilde{x}$ transformieren und für die x_0 und $\overline{x}_0$ Parameterlinien in der beschriebenen Art sind. Im weiteren betrachten wir nur die Lösung von γ), die Lösung mit positiver Determinante.

Die Anfangswerte der Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \tilde{u}_u(s,0) = t'(s), \ \tilde{v}_u(s,0) = 0, \\ \tilde{u}_v(s,0) = 0, \ \tilde{v}_v(s,0) = t'(s). \end{aligned}$$

Für die Umkehrabbildung $(\tilde{u},\tilde{v}) \mapsto (u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v}))$ gilt:

$$\begin{aligned} u_{\tilde{u}}(t(s),0) = \frac{1}{t'(s)} \quad &, \quad u_{\tilde{v}}(t(s),0) = 0 \\ v_{\tilde{u}}(t(s),0) = 0 \quad &, \quad v_{\tilde{v}}(t(s),0) = \frac{1}{t'(s)} \end{aligned}$$

Wir werden jetzt beweisen, daß die durch $\overline{x}_0$, $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$ induzierte Fläche $\overline{x}$ lediglich eine Umparametrisierung $\tilde{x}$ der durch x_0, N_0, η_0 induzierten Fläche x ist. Wir nehmen die aus

γ) erhaltene Parametertransformation $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ und zeigen, daß $\tilde{x}(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v)) = x(u,v)$ gerade die von $\overline{x}_0$, $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$ induzierte Fläche $\overline{x}$ ist.
Und zwar erfüllen beide Abbildungen diesselben Differentialgleichungen aus 5.4.1 und 5.4.2 mit denselben Vervollständigungen aus 5.5, 5.7, 5.8 bzw. 5.9.
Es genügt also zu zeigen, daß die Abbildungen $\tilde{x}$, $\overline{x}$ für $u = s$, $v = 0$ dieselben Anfangswerte haben. Wegen der Eindeutigkeit der Differentialgleichungen müssen die Abbildungen identisch sein.

Wir werden zunächst für $\tilde{x}(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v))$ die Anfangswerte der Größen bestimmen, die in den ergänzten Differentialgleichungen von 5.4.1 (genauer DGL Bl, DGL EUK, DGL I MANH oder DGL I ZENT) und 5.4.2 auftauchen. Dabei nennen wir zum Teil $u^1 := u$, $u^2 := v$, $\tilde{u}^1 := \tilde{u}$, $\tilde{u}^2 := \tilde{v}$. Wir werden meist benutzen, daß für die lokalen Koordinatenfunktionen eines (s,m)–Tensorfeldes B nach Umparametrisierung

$$\tilde{B}^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_s} = B^{l_1\dots l_m}_{k_1\dots k_s}\frac{\partial u^{k_1}}{\partial \tilde{u}^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{k_s}}{\partial \tilde{u}^{j_s}}\frac{\partial \tilde{u}^{i_1}}{\partial u^{l_1}}\cdots\frac{\partial \tilde{u}^{i_m}}{\partial u^{l_m}}$$

gilt. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(t(s),0) &= \frac{E(s,0)}{\tilde{u}_u^2(s,0)+\varepsilon\tilde{v}_u^2(s,0)} = \frac{E(s,0)}{t'^2(s)}\\
\tilde{E}_{\tilde{v}}(t(s),0) &= \partial_u\Big(\frac{E}{\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2}\Big)(s,0)u_{\tilde{v}}(t(s),0) + \partial_v\Big(\frac{E}{\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2}\Big)(s,0)v_{\tilde{v}}(t(s),0)\\
&= 0 + \partial_v\Big(\frac{E}{\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2}\Big)(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
&= \frac{\partial_v(E)(\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2) - E\partial_v(\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2)}{(\tilde{u}_u^2+\varepsilon\tilde{v}_u^2)^2}(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
&= \frac{\partial_v(E)(s,0)t'^2(s) - E(s,0)\cdot 0}{t'^4(s)}\frac{1}{t'(s)} = \frac{\partial_v(E)(s,0)}{t'^3(s)}\\
\tilde{K}^1_{11}(t(s),0) &= K^k_{ij}(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial u^j}{\partial\tilde{u}}(t(s),0)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u^k}(s,0) = K^1_{11}(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
\tilde{K}^2_{11}(t(s),0) &= K^k_{ij}(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial u^j}{\partial\tilde{u}}(t(s),0)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u^k}(s,0) = K^2_{11}(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
\tilde{S}^1_1(t(s),0) &= S^l_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{u}}(t(s),0)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u^l}(s,0) = S^1_1(s,0)\\
\tilde{S}^2_1(t(s),0) &= S^l_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{u}}(t(s),0)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u^l}(s,0) = S^2_1(s,0)\\
\tilde{T}^1(t(s),0) &= T^i(s,0)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u^i}(s,0) = T^1(s,0)t'(s)\\
\tilde{T}^2(t(s),0) &= T^i(s,0)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u^i}(s,0) = T^2(s,0)t'(s)\\
\tilde{x}_1(t(s),0) &= x_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{u}}(t(s),0) = x_1(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
\tilde{x}_2(t(s),0) &= x_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial\tilde{v}}(t(s),0) = x_2(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
\tilde{N}(t(s),0) &= N(s,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(t(s),0) &= \eta(s,0)\\
\tilde{\eta}_1(t(s),0) &= \eta_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}}(t(s),0) = \eta_1(s,0)\frac{1}{t'(s)}\\
\tilde{\eta}_2(t(s),0) &= \eta_i(s,0)\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{v}}(t(s),0) = \eta_2(s,0)\frac{1}{t'(s)}
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt:

$$\partial_v(\tilde{u}_u)(s,0) = \partial_u(\tilde{u}_v)(s,0) = (\tilde{u}_v(s,0))' = 0$$
$$\partial_v(\tilde{v}_u^2)(s,0) = 2\tilde{v}_u(s,0)\partial_v(\tilde{v}_u)(s,0) = 0$$

Für q verwenden wir nach Lemma 2.1 die Formel $|q|^2 = \left|\frac{\omega}{\omega_h}\right|$:

$$\begin{aligned}
|\tilde{q}(t(s),0)| &= \left|\frac{\tilde{\omega}(t(s),0)}{\tilde{E}(t(s),0)}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{det(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{N})(t(s),0)}{\tilde{E}(t(s),0)}\right|^{\frac{1}{2}}\\
&= \left|\frac{det(x_1,x_2,N)}{E}(s,0)\right|^{\frac{1}{2}} = |q(s,0)|
\end{aligned}$$

Da E und $\tilde{E} > 0$ sind, hängt das Vorzeichen von q von ω ab:

$$\begin{aligned}
sign\,\tilde{q}(t(s),0) &= sign\,det(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{N})(t(s),0)\\
&= sign\,det(x_1,x_2,N)(s,0)\frac{1}{t'(s)^2}\\
&= sign\,det(x_1,x_2,N)(s,0) = sign\,q(s,0)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\tilde{q}(t(s),0) = q(s,0).$$

Benutzt man die durch δ) erhaltene Parametertransformation, steht bei $\tilde{v}_v$, $v_{\tilde{v}}$ und somit auch bei manchen Flächengrößen, wie $\partial_v(E), K_{11}^2, S_1^2$, das andere Vorzeichen.

Gegeben seien nun die umparametrisierte Kurve $\overline{x}_0(t)$ und die Vektorfelder $\overline{N}_0(t)$, $\overline{\eta}_0(t)$. Verwenden[31] wir

$$\overline{x}_0'(t(s)) = \frac{1}{t'(s)}x_0'(s),\ \overline{x}_0''(t(s)) = \frac{1}{t'^2(s)}x_0''(s) - \frac{t''(s)}{t'^3(s)}x_0'(s),$$

für $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$ analog, so erhalten wir zunächst nach den Abschnitten 5.5, 5.7, 5.8 bzw. 5.9 jeweils für q, T^1, T^2:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(t(s),0) &= q(s,0)\\
\bar{T}^1(t(s),0) &= T^1(s,0)t'(s)\\
\bar{T}^2(t(s),0) &= T^2(s,0)t'(s)
\end{aligned}$$

[31] Für die Ableitung nach t wird kein neues Symbol eingeführt, es wird auch da $'$ verwendet.

Gehen wir wie in 5.3 bei der Berechnung der anderen Anfangswerte[32] vor, ergibt das:

$$
\begin{aligned}
\bar{E}(t(s),0) &= -\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s)) = \frac{E(s,0)}{t'^2(s)} \\
\partial_{\overline{v}}(\bar{E})(t(s),0) &= \varepsilon\delta\frac{1}{\overline{q}^2(t(s),0)}det(\overline{x}''_0,\overline{x}'_0,\overline{N}_0)(t(s)) - \delta\overline{q}^2(t(s),0)\overline{det}(\overline{\eta}_0,\overline{\eta}'_0,\overline{\eta}''_0)(t(s)) \\
&= \frac{\partial_2(E)(s,0)}{t'^3(s)} \\
\bar{K}^1_{11}(t(s),0) &= \frac{\overline{\eta}'_0(\overline{x}''_0)(t(s)) - \overline{\eta}''_0(\overline{x}'_0)(t(s))}{2\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s))} = \frac{K^1_{11}(s,0)}{t'(s)} \\
\bar{K}^2_{11}(t(s),0) &= \frac{\delta det(\overline{x}''_0,\overline{x}'_0,\overline{N}_0)(t(s))}{2\overline{q}^2(t(s),0)\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s))} + \frac{\varepsilon\delta\overline{q}^2(t(s),0)\overline{det}(\overline{\eta}_0,\overline{\eta}'_0,\overline{\eta}''_0)(t(s))}{2\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s))} \\
&= \frac{K^2_{11}(s,0)}{t'(s)} \\
\bar{S}^1_1(t(s),0) &= -\frac{\overline{\eta}'_0(\overline{N}'_0)(t(s))}{\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s))} = S^1_1(s,0) \\
\bar{S}^2_1(t(s),0) &= \frac{\delta det(\overline{x}'_0,\overline{N}'_0,\overline{N}_0)(t(s))}{\overline{q}^2(t(s),0)\overline{\eta}'_0(\overline{x}'_0)(t(s))} = S^2_1(s,0) \\
\overline{x}_1(t(s),0) &= \overline{x}'_0(t(s)) = x'_0(s)\frac{1}{t'(s)} = x_1(s,0)\frac{1}{t'(s)} \\
\overline{x}_2(t(s),0) &= \delta\overline{q}^2(t(s),0)\overline{\eta}'_0\wedge\overline{\eta}_0(t(s)) = \delta q^2(s,0)\eta'_0\wedge\eta_0(s,0)\frac{1}{t'(s)} = x_2(s,0)\frac{1}{t'(s)} \\
\overline{N}(t(s),0) &= \overline{N}_0(t(s)) = N_0(s) = N(s,0) \\
\overline{\eta}(t(s),0) &= \overline{\eta}_0(t(s)) = \eta_0(s) = \eta(s,0) \\
\overline{\eta}_1(t(s),0) &= \overline{\eta}'_0(t(s)) = \eta'_0(s)\frac{1}{t'(s)} = \eta_1(s,0)\frac{1}{t'(s)} \\
\overline{\eta}_2(t(s),0) &= \frac{\delta\varepsilon}{\overline{q}^2(t(s),0)}\overline{x}'_0\wedge\overline{N}_0(t(s)) = \frac{\delta\varepsilon}{q^2(s,0)}x'_0\wedge N_0(s)\frac{1}{t'(s)} = \eta_2(s,0)\frac{1}{t'(s)}
\end{aligned}
$$

Die durch die Parametertransformation aus x entstandene Fläche $\tilde{x}(\tilde{u},\tilde{v})$ und die von $\overline{x}_0$, $\overline{N}_0$, $\overline{\eta}_0$ induzierte Fläche $\overline{x}$ erfüllen dieselben Differentialgleichungen und haben dieselben Anfangswerte, sind also wegen Satz 5.1 identisch. Das heißt, daß $\overline{x}_0,\overline{N}_0,\overline{\eta}_0$ „dieselbe Fläche" x induzieren wie x_0, N_0, η_0, nur in anderer Parametrisierung.

5.11 Festlegung der Konormalen längs einer Kurve durch die Kurve und die Normale

Wir setzten bis jetzt immer eine Kurve x_0 und zwei - bis auf Ausnahmen - beliebig gewählte Vektorfelder N_0, η_0 längs x_0 voraus, die (5.7)–(5.10) erfüllen mußten. In [Lei1] und [Gl] ist nur von einem euklidischen Kurvenstreifen $\{x_0, N_0\}$ die Rede. N_0 soll bei der zu findenden Fläche die euklidische Normale längs x_0 werden und muß daher Bedingungen wie $\langle N_0, N_0\rangle = 1$, $\langle N_0, x'_0\rangle = 0$, $\langle N_0, x''_0\rangle \neq 0$ erfüllen. Die Angabe einer Konormale erübrigt sich dort, da sie durch $\eta_0 = \langle N_0, .\rangle$ gegeben ist.

[32] δ ist bei diesen Normalisierungen immer 1.

Wir behandeln nun die Frage, inwieweit η_0 nach Vorgabe von x_0 und N_0 auch im allgemeinen Fall schon durch die vier Bedingungen (5.7)–(5.10) fixiert ist. Wir lassen den Fall der euklidischen Normalen, bei der dies so ist, hier beiseite.

Sei x_0 eine reguläre, (in $s = 0$) analytische Kurve, N_0 ein (in $s = 0$) analytisches Vektorfeld längs der Kurve und $x_0'(s), N_0(s)$ stets linear unabhängig. Dies müssen wir mindestens voraussetzen, sonst finden wir kein η_0 mit (5.7)–(5.10). Es gibt nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:
Sind $x_0'(s), N_0(s), N_0'(s)$ linear unabhängig, was äquivalent zu

$$det(x_0', N_0, N_0')(s) \neq 0$$

ist, so ergibt sich η_0 eindeutig aus den drei Gleichungen

$$\eta_0(x_0') = 0,\ \eta_0(N_0) = 1,\ \eta_0(N_0') = 0,$$

und zwar ist

$$\eta_0 = \frac{x_0' \wedge N_0'}{det(x_0', N_0', N_0)}. \tag{5.20}$$

Dieses η_0 erfüllt (5.7)–(5.9), allerdings nicht notwendig (5.10). $\eta_0(x_0'') \neq 0$ ist nach Darstellung (5.20) gleichwertig zu

$$det(x_0', N_0', x_0'')(s) \neq 0.$$

Gilt das auch, legen x_0, N_0 eindeutig η_0 fest. Es reicht, die Erfüllung der beiden Ungleichungen nur für $s = 0$ zu fordern, dann gilt es wegen der Stetigkeit der beteiligten Abbildungen auch für s in einer Umgebung von 0.
Sind allerdings x_0', N_0', x_0'' in $s = 0$ linear abhängig, so kann das eindeutig gefundene η_0 nicht (5.10) erfüllen und die Sätze 5.3–5.5 sind nicht anzuwenden.
Kurz kann man zusammenfassen:

$$det(x_0', N_0, N_0')(0) \neq 0 \text{ und } det(x_0', N_0', x_0'')(0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \eta_0 \text{ eindeutig}$$
$$det(x_0', N_0, N_0')(0) \neq 0 \text{ und } det(x_0', N_0', x_0'')(0) = 0 \ \Rightarrow\ \text{kein } \eta_0$$

2. Fall:
$x_0'(0), N_0(0), N_0'(0)$ sind linear abhängig, d. h. $det(x_0', N_0, N_0')(0) = 0$.
Ist das die einzige Nullstelle von $det(x_0', N_0, N_0')(s)$ in einer Umgebung von $s = 0$, sind x_0', N_0, N_0' in der Umgebung linear unabhängig. Man wende den 1. Fall an und setze das gefundene Vektorfeld stetig in 0 fort[33]. Wenn dann nicht $\eta_0(x_0'') = 0$ ist, hat man auch ein passendes Vektorfeld gefunden.

Ab jetzt sollen x_0', N_0 und N_0' in einer Umgebung von $s = 0$ linear abhängig sein.
N_0' läßt sich dann schreiben als

$$N_0' = \alpha x_0' + \beta N_0$$

[33] Daß 0 Häufungspunkt von Nullstellen der analytischen Funktion $det(x_0', N_0, N_0')$ ist, kommt nur vor, wenn die Funktion konstant 0 ist.

mit den beiden analytischen Funktionen α, β. Ist $\beta \neq 0$, so gilt für jedes η_0, das den Bedingungen (5.7), (5.8) gehorcht, notwendig $\eta_0(N_0') = \beta \neq 0$. Es ist dann unmöglich, ein η_0 zu finden, daß auch (5.9) erfüllt.

$$N_0' = \alpha x_0' + \beta N_0 \text{ und } \beta \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{kein } \eta_0.$$

Also wenn x_0', N_0, N_0' schon linear abhängig sind, dann nur so, daß $N_0' = \alpha x_0'$ ist. Dies gelte im weiteren.
η_0 ist durch (5.7), (5.8) ((5.9) gilt ohnehin) nicht eindeutig bestimmt. Wir wollen noch die Gleichung (5.10) untersuchen. Ist

$$x_0'' = b x_0'$$

für eine Funktion b, gilt für jedes Vektorfeld η_0, das (5.7) erfüllt, notwendig $\eta_0(x_0'') = 0$, die Bedingung (5.10) läßt sich nicht erfüllen.

$$N_0' = \alpha x_0' \text{ und } x_0'' = b x_0' \;\Rightarrow\; \text{kein } \eta_0.$$

$x_0'' = b x_0'$ muß deshalb ausgeschlossen werden in einer Umgebung[34] von $s = 0$. x_0'', x_0', N_0 sind dann entweder linear unabhängig oder x_0'' kann ausgedrückt werden als

$$x_0'' = b x_0' + c N_0$$

mit Funktionen b, c, wobei $c \neq 0$ ist[35]. In diesem Fall ist (5.10) immer erfüllt, für alle η_0 mit (5.7), (5.8). Es gilt nämlich $\eta_0(x_0'') = c$.

$$N_0' = \alpha x_0' \text{ und } x_0'' = b x_0' + c N_0,\; c \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{jedes } \eta_0 \text{ mit (5.7), (5.8) möglich.}$$

Sind $x_0'(s), N_0(s), x_0''(s)$ linear unabhängig, so existiert genau ein η_0 mit (5.7), (5.8) und $\eta_0(x_0'') = 0$, nämlich

$$\eta_0^{nr} = \frac{x_0' \wedge x_0''}{det(x_0', x_0'', N_0)}. \tag{5.21}$$

Dieses eine[36] ist auszuschließen, die anderen Vektorfelder η_0, die (5.7), (5.8) erfüllen, sind möglich.

$$N_0' = \alpha x_0' \text{ und } det(x_0', N_0, x_0'') \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{fast jedes } \eta_0 \text{ mit (5.7), (5.8) möglich.}$$

Bemerkung: Wir haben nur die Bedingungen (5.7)–(5.10) berücksichtigt. Manchmal gibt es weitere, etwa (5.18) oder eine durch die Auswahl von Φ herrührende, z. B. muß für $\Phi(H, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$ gewährleistet sein, daß $\eta_0'(N_0') = -\eta_0(N_0'') \neq 0$ ist. Solche Bedingungen können zu weiteren Einschränkungen an η_0 führen.

Zusammenfassung: Der 1. Fall, also $det(x_0', N_0, N_0') \neq 0$, ist eindeutig. Es existiert nach Vorgabe von x_0, N_0 entweder kein oder genau ein η_0 mit (5.7)–(5.10).

[34] Wegen der Stetigkeit von $x_0' \wedge x_0''(s)$ sind $x_0'(s)$, $x_0''(s)$ auch in einer Umgebung von $s = 0$ linear unabhängig, wenn $x_0' \wedge x_0''(0)$ nicht der Nullvektor ist.

[35] Wir behandeln nur die Fälle $det(x_0', N_0, x_0'')(0) \neq 0$ und $det(x_0', N_0, x_0'')(s) = 0$ in einer Umgebung von $s = 0$.

[36] nr steht für nichtregulär.

Im 2. Fall hingegen, wenn also $N_0' = \alpha x_0'$ in einer Umgebung von $s = 0$ gilt und x_0'', x_0' linear unabhängig sind, gibt es eine Schar von Vektorfeldern η_0, die (5.7)–(5.10) erfüllen, man muß allenfalls das in (5.21) definierte η_0^{nr} ausschließen.

Nun wollen wir den 2. Fall näher untersuchen:
Sei also $N_0' = \alpha x_0'$, außerdem x_0', x_0'' linear unabhängig[37] und sei η_0 ein Vektorfeld längs x_0, das (5.7)–(5.10) erfüllt. Dann erfüllt auch

$$\tilde{\eta}_0(s) := \eta_0(s) + \hat{f}(s) x_0' \wedge N_0(s), \tag{5.22}$$

wobei $\hat{f}$ eine in $s = 0$ analytische Funktion sei[38] , die drei Gleichungen (5.7)–(5-9), (5.10) nur für

$$\eta_0(x_0'') + \hat{f} det(x_0', N_0, x_0'') \neq 0.$$

Ist $det(x_0', N_0, x_0'') \neq 0$ und setzt man

$$\hat{f} = -\frac{\eta_0(x_0'')}{det(x_0', N_0, x_0'')},$$

ist $\tilde{\eta}_0 = \eta_0^{nr}$. Umgekehrt hat man mit η_0^{nr} automatisch ein Vektorfeld, das (5.7)–(5.9) erfüllt und mit dem man, ähnlich wie in (5.22), die anderen $\tilde{\eta}_0$ darstellen kann durch

$$\tilde{\eta}_0 = \eta_0^{nr} + \hat{g} x_0' \wedge N_0.$$

$\hat{g}(s)$ darf allerdings nicht 0 werden, denn $\tilde{\eta}_0(x_0'')$ ist in dem Fall gleich 0.

Wenn also (5.7)–(5.10) erfüllt sind, Φ, f und die Art der Normalen vorgegeben sind und keine weiteren Bedingungen an die Anfangswerte verletzt sind (vgl. die letzte Bemerkung), induzieren x_0, N_0, $\tilde{\eta}_0$ genauso wie x_0, N_0, η_0 je eine elliptische und eine hyperbolische Fläche.

Wir werden nun die Werte einiger Flächengrößen der von x_0, N_0, $\tilde{\eta}_0$ induzierten Flächen längs $(s, 0)$ in Abhängigkeit der Größen der von x_0, N_0, η_0 induzierten Flächen darstellen. Wir beschränken uns hierzu auf den im Abschnitt 5.5 behandelten Fall der Blaschkeschen Affinnormale.

Nach Satz 5.3 legen[39] x_0, N_0, η_0 je eine elliptische Blaschke–Immersion x^+ und eine hyperbolische x^- fest.
In der Bemerkung am Ende von Abschnitt 5.3 haben wir erwähnt, daß einige Größen von x^+ und x^-, etwa S_1^1, S_1^2, längs $(s, 0)$ übereinstimmen, η_2 unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen:

$$\eta_2^+(s, 0) = -\eta_2^-(s, 0) = x_0' \wedge N_0(s)$$

Sei jetzt x eine dieser beiden Flächen mit Konormale η. ε sei 1 bei x^+, -1 bei x^-.
Die lineare Abhängigkeit von $x_0'(s), N_0(s), N_0'(s)$ ist äquivalent zu

$$det(x_0', N_0, N_0')(s) = 0 \Leftrightarrow S_1^2(s, 0) = 0 \Leftrightarrow \overline{h}_{12}(s, 0) = 0$$

[37]Die anderen Unterfälle von $det(x_0', N_0, N_0') = 0$, für die kein η_0 existiert, lassen wir gleich weg.

[38]Diese Funktion soll nicht mit der Funktion f, die im Zusammenhang mit Φ verwendet wird, verwechselt werden.

[39]Wir setzen voraus, daß Φ, f gegeben sind. Dabei lassen wir die restlichen Bedingungen an die Anfangswerte außer acht.

$$\Leftrightarrow N_1(s,0) = N_0'(s) = -S_1^1(s,0)x_1(s,0) = -S_1^1(s,0)x_0'(s).$$

x_0 ist damit auch Krümmungslinie von x.

Ein Vektorfeld $\tilde{\eta}_0$, das auch (5.7)–(5.10) erfüllt, kann man dann darstellen als

$$\tilde{\eta}_0(s) = \eta(s,0) + \hat{f}(s)\varepsilon\eta_2(s,0) = \eta^+(s,0) + \hat{f}(s)\eta_2^+(s,0) = \eta^-(s,0) - \hat{f}(s)\eta_2^-(s,0).$$

Das ist zwar genau die Darstellung von (5.22), nur mit $\varepsilon\eta_2$ statt $x_0' \wedge N_0$. Aber um die Größen der von $x_0, N_0, \tilde{\eta}_0$ induzierten Fläche $\tilde{x}$ durch die Größen der von x_0, N_0, η_0 erzeugten Flächen auszudrücken, ist diese Darstellung besser geeignet.
$x_0, N_0, \tilde{\eta}_0$ induzieren eine elliptische ($\tilde{\varepsilon} = 1$) bzw. eine hyperbolische ($\tilde{\varepsilon} = -1$) Blaschke–Immersion $\tilde{x}$, deren Größen längs $(s,0)$ diese Form haben:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(s,0) &= x_0'(s) = x_1^+(s,0) = x_1^-(s,0)\\
\tilde{N}(s,0) &= N_0(s) = N^+(s,0) = N^-(s,0)\\
\tilde{\eta}(s,0) &= \tilde{\eta}_0(s) = \eta^+(s,0) + \hat{f}(s)\eta_2^+(s,0) = \eta^-(s,0) - \hat{f}(s)\eta_2^-(s,0)\\
\tilde{\eta}_1(s,0) &= \tilde{\eta}_0'(s) = (\tilde{\eta}(s,0))'\\
&= \eta_1^+(s,0) + \hat{f}'(s)\eta_2^+(s,0) + \hat{f}(s)\eta_{21}^+(s,0)\\
&= (1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))\eta_1^+(s,0) + (\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 2}(s,0))\eta_2^+(s,0)\\
&= \eta_1^-(s,0) - \hat{f}'(s)\eta_2^-(s,0) - \hat{f}(s)\eta_{21}^-(s,0)\\
&= (1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))\eta_1^-(s,0) - (\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 2}(s,0))\eta_2^-(s,0)\\
\tilde{\eta}_2(s,0) &= \tilde{\varepsilon}\tilde{x}_1 \wedge \tilde{N}(s,0) = \tilde{\varepsilon}\eta_2^+(s,0) = -\tilde{\varepsilon}\eta_2^-(s,0)\\
\tilde{x}_2(s,0) &= \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}(s,0)\\
&= (1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))\eta_1^+ \wedge \eta^+(s,0)\\
&\quad +(1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))\hat{f}(s)\eta_1^+ \wedge \eta_2^+(s,0)\\
&\quad +(\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 2}(s,0))\eta_2^+ \wedge \eta^+(s,0)\\
&= (1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))x_2^+(s,0)\\
&\quad +(1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))\hat{f}(s)N^+(s,0)E^+(s,0)\\
&\quad -(\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 2}(s,0))x_1^+(s,0)\\
&= (1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))\eta_1^- \wedge \eta^-(s,0)\\
&\quad -(1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))\hat{f}(s)\eta_1^- \wedge \eta_2^-(s,0)\\
&\quad -(\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 2}(s,0))\eta_2^- \wedge \eta^-(s,0)\\
&= (1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))x_2^-(s,0)\\
&\quad +(1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))\hat{f}(s)N^-(s,0)E^-(s,0)\\
&\quad -(\hat{f}'(s) + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 2}(s,0))x_1^-(s,0)\\
det(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{N})(s,0) &= \tilde{\varepsilon}\overline{det}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)(s,0) = \tilde{E}(s,0)\\
&= -\tilde{\eta}_0'(x_0')(s)\\
&= (1 + \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{+\ 1}(s,0))E^+(s,0)\\
&= (1 - \hat{f}(s)\overline{\Gamma}_{21}^{-\ 1}(s,0))E^-(s,0)\\
\tilde{x}_{11}(s,0) &= x_0''(s) = x_{11}^+(s,0) = x_{11}^-(s,0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{21}(s,0) &= \partial_1(\tilde{x}_2(s,0)) = (\tilde{x}_2(s,0))' \\
\tilde{\eta}_{21}(s,0) &= (\tilde{\eta}_2(s,0))' = \tilde{\varepsilon}\eta^+_{21}(s,0) = -\tilde{\varepsilon}\eta^-_{21}(s,0) \\
\tilde{\eta}_{11}(s,0) &= (\tilde{\eta}_1(s,0))' \\
\tilde{S}^1_1(s,0) &= -\frac{\tilde{\eta}_1(\tilde{N}_1)}{\tilde{\eta}_1(\tilde{x}_1)}(s,0) \\
&= -\frac{(1+\hat{f}(s)\overline{\Gamma}^{+\ 1}_{21}(s,0))\eta^+_1(N^+_1)(s,0)+0}{(1+\hat{f}(s)\overline{\Gamma}^{+\ 1}_{21}(s,0))\eta^+_1(x^+_1)(s,0)+0} = S^{+1}_1(s,0) = S^{-1}_1(s,0) \\
\tilde{S}^2_1(s,0) &= -\frac{det(\tilde{x}_1,\tilde{N}_1,\tilde{N})(s,0)}{det(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{N})(s,0)} = 0 = S^{+2}_1(s,0) = S^{-2}_1(s,0)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der von x_0, N_0, η_0 bzw. x_0, N_0, $\tilde{\eta}_0$ erzeugten Flächen x bzw. $\tilde{x}$ sind:

1.) Sie sind isotherm parametrisiert, besitzen alle die Kurve x_0 als Parameterlinie, die Normale längs x_0 ist mit N_0 identisch und für die Mittlere und Gaußsche Krümmung gilt $\Phi(H,\mathcal{K}) = \Phi(\tilde{H},\tilde{\mathcal{K}}) = f$. Das folgt aus Satz 5.3.

2.) Es gilt $\tilde{x}_1(s,0) = x_1(s,0) = x_0'(s)$. $\tilde{x}_2(s,0)$ liegt genau dann in der von $x_1(s,0)$, $x_2(s,0)$ aufgespannten Ebene, wenn $\hat{f} = 0$[40] ist, die Tangentialebene ändert sich also bei einem Übergang von η_0 zu $\tilde{\eta}_0$.

3.) Dagegen bleiben $\tilde{\eta}_1(s,0)$, $\tilde{\eta}_2(s,0)$ immer in der von $\eta_1(s,0)$, $\eta_2(s,0)$ aufgespannten Ebene.

4.) Weil $\tilde{S}^2_1(s,0) = S^2_1(s,0) = 0$ gilt, ist die Matrix von S und von $\tilde{S}$ diagonal. x_0 ist daher für x und $\tilde{x}$ Krümmungslinie, vgl. 5.12.

Bemerkung: Nach der Formulierung in [Bl1] gibt man neben der Kurve nicht ein Vektorfeld, sondern zu jedem Kurvenpunkt den Tangentialraum vor. Das Björlingsche Problem besteht darin, eine Minimalfläche durch die Kurve zu finden, die auch noch im Tangentialraum jeweils mit dem vorgegebenen Tangentialraum übereinstimmt.
Bei der euklidischen Normalisierung ist es egal, ob man den Tangentialraum längs der Kurve oder die euklidische Normale angibt. Diese legt ja eindeutig den Tangentialraum fest.
So gesehen ist die Vorgabe von x_0, N_0, η_0 bei anderer Normalisierung das Analogon zur Vorgabe von x_0 und einem Einheitsvektorfeld orthogonal zu x_0'. η_0 übernimmt die Aufgabe, den Tangentialraum festzulegen.
Gibt man nur x_0 und N_0 an, so scheint man auf den ersten Blick genauso vorzugehen wie beim euklidischen Björlingschen Problem. Dies trifft aber nur im 1. Fall zu, da hier η_0 und damit der Tangentialraum auf der Kurve fixiert ist. Im 2. Fall bergen x_0, N_0 allein zu wenig Information, daher kommt es auch, wie in 2.) bemerkt, zu verschiedenen Tangentialräumen, abhängig davon, welches $\tilde{\eta}_0$ aus (5.22) man nimmt.

Beispiele: Für die Beispiele sei $N = N_b$ und $\Phi(H,\mathcal{K}) = H$. Wir werden mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 5.6 die Konormalen der von x_0, N_0, $\tilde{\eta}_0$ induzierten Affinminimalflächen berechnen. Die verwendeten Vektorfelder $\tilde{\eta}_0$ sind aber auch für den Fall $H = f \neq 0$ geeignet, nicht unbedingt aber für $\Phi(H,\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.

[40] Das gilt zwar auch, wenn $1+\hat{f}(s)\overline{\Gamma}^{+\ 1}_{21}(s,0) = 0$ bzw. $1-\hat{f}(s)\overline{\Gamma}^{-\ 1}_{21}(s,0) = 0$ ist, aber dann ist $\tilde{x}$ nicht regulär.

1.) Nehmen wir die Vorgaben aus dem Beispiel 3.) (Wendelfläche) von Abschnitt 5.6.3, so gilt:

$$det(x_0', N_0, N_0') = 1 \text{ und } det(x_0', N_0', x_0'') = -2.$$

Hier haben wir ein Beispiel für den 1. Fall. Das Vektorfeld η_0 ist eindeutig durch x_0, N_0 festgelegt.

2.) Wir untersuchen die u–Linie eines Paraboloids und die Normale längs dieser Kurve, wie im 1. Beispiel von 5.6.3:

$$x_0(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix}, \; x_0'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \; x_0''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; N_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$x_0' \wedge N_0(s) = (0, -1, 0)$$

Da hier aber

$$det(x_0', N_0, N_0') = 0, \; det(x_0', N_0, x_0'') = 0 \text{ und } x_0'' \neq bx_0'$$

ist, kann man statt $\eta_0(s) = (-s, 0, 1)$ auch

$$\tilde{\eta}_0(s) = \eta_0(s) + \hat{f}(s) x_0' \wedge N_0(s) = (-s, -\hat{f}(s), 1)$$

nehmen. Wir erhalten für U, V, Z:

$$U(s) = \frac{1}{2}(-s, -s - \hat{f}(s), 1), \; V(s) = \frac{1}{2}(-s, s - \hat{f}(s), 1),$$
$$Z(s) = \frac{1}{2}(-s, is - \hat{f}(s), 1)$$

Damit ergibt sich:

$$\eta^-(u,v) = (-u, v - \frac{1}{2}(\hat{f}(u-v) + \hat{f}(u+v)), 1)$$
$$\eta^+(u,v) = (-u, -v - Re\,\hat{f}(u+iv), 1)$$

$\hat{f}$ bezeichne auch die holomorphe Fortsetzung von $\hat{f}(s)$.
Die Affinminimalflächen und Normalen haben die Form:

$$x^-(u,v) = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{2}(\hat{f}(u-v) - \hat{f}(u+v)) \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) + \frac{1}{2}u(\hat{f}(u-v) - \hat{f}(u+v)) - \frac{1}{2}(F(u-v) - F(u+v)) \end{pmatrix},$$
$$x^+(u,v) = \begin{pmatrix} u - Im\,\hat{f}(u+iv) \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2+v^2) - uIm\,\hat{f}(u+iv) + Im\,F(u+iv) \end{pmatrix},$$
$$N^-(u,v) = N^+(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei F eine Stammfunktion von $\hat{f}$ sei, im elliptischen Fall die komplexe Stammfunktion von $\hat{f}$ mit $ImF(u) = 0$, für $u \in \mathbb{R}$.

3.) Seien nun ähnlich wie in 2.)

$$x_0(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix}, \; x_0'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \; x_0''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; N_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_0' \wedge N_0(s) = (-s, 0, 1)$$

gegeben. Obwohl bei N_0 nur Komponenten vertauscht wurden, haben diese Vorgaben andere Eigenschaften: Es gilt

$$det(x_0', N_0, N_0') = 0, \; det(x_0', N_0, x_0'') = 1.$$

Das Vektorfeld

$$\eta_0^{nr}(s) = (0, 1, 0)$$

darf nicht verwendet werden. Erlaubte Vektorfelder sind

$$\tilde{\eta}_0(s) = \eta_0^{nr}(s) + \hat{f}(s) x_0' \wedge N_0(s) = (-s\hat{f}(s), 1, \hat{f}(s)),$$

wenn $\hat{f}(s)$ nicht 0 ist.
Wir erhalten für U, V, Z:

$$U(s) = \frac{1}{2}(-s\hat{f}(s) - \frac{1}{2}s^2, 1, \hat{f}(s) + s), \; V(s) = \frac{1}{2}(-s\hat{f}(s) + \frac{1}{2}s^2, 1, \hat{f}(s) - s),$$
$$Z(s) = \frac{1}{2}(-s\hat{f}(s) + \frac{1}{2}is^2, 1, \hat{f}(s) - is)$$

Damit ergibt sich:

$$\eta^-(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\hat{f}(u-v)(u-v) + \hat{f}(u+v)(u+v)) + uv \\ 1 \\ \frac{1}{2}(\hat{f}(u-v) + \hat{f}(u+v)) - v \end{pmatrix}^T,$$
$$\eta^+(u,v) = (-Re\,\hat{f}(u+iv)u + Im\,\hat{f}(u+iv)v - uv, 1, Re\,\hat{f}(u+iv) + v)$$

$\hat{f}$ stehe auch für die holomorphe Fortsetzung von $\hat{f}(s)$.
Bezeichnen wir $\hat{f}(u-v)$ mit $\hat{f}_-$, $\hat{f}(u+v)$ mit $\hat{f}_+$, $Re\,\hat{f}(u+iv)$ mit $Re\,\hat{f}$ und $Im\,\hat{f}(u+iv)$ mit $Im\,\hat{f}$, so haben die Affinminimalflächen und Normalen die Form:

$$x^-(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\hat{f}_- - \hat{f}_+) + u \\ \frac{1}{2}\hat{f}_-\hat{f}_+ v - \frac{1}{2}(\hat{f}_- + \hat{f}_+)v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}(\mathcal{F}(u+v) - \mathcal{F}(u-v)) \\ \frac{1}{2}((u-v)\hat{f}_- - (u+v)\hat{f}_+) + \frac{1}{2}(u^2+v^2) \end{pmatrix},$$

$$x^+(u,v) = \begin{pmatrix} -Im\,\hat{f} + u \\ Re\,\hat{f}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}(Re\,\hat{f})^2 v + \frac{1}{2}(Im\,\hat{f})^2 v + Im\,\mathcal{F}(u+iv) \\ -Im\,\hat{f}u - Re\,\hat{f}v + \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix},$$

$$N^-(u,v) = N^+(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{F}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{2}\hat{f}^2$ sei, im elliptischen Fall die komplexe Stammfunktion von $\frac{1}{2}\hat{f}^2$ mit $Im\mathcal{F}(u) = 0$, für $u \in \mathbb{R}$.

In Beispiel 1.) ist $\eta_0(N_0'') \neq 0$. η_0 kann somit auch verwendet werden für $\Phi(H,\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Im Gegensatz dazu gilt bei 2.) und bei 3.) je $\tilde{\eta}_0(N_0'') = 0$. Für diese Vorgaben x_0, N_0, $\tilde{\eta}_0$ kann also Satz 5.3 mit $\Phi = \mathcal{K}$ nicht benutzt werden.

5.12 Spezielle Flächenkurven

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie man zu einer gegebenen Kurve x_0 das Vektorfeld N_0 wählen sollte, damit x_0 eine Flächenkurve mit speziellen Eigenschaften für eine Fläche x wird, die von x_0 und diesem N_0 induziert wird.

Wir gehen also noch weiter als im letzten Abschnitt. Dort haben wir zu x_0 und N_0 ein geeignetes η_0 gesucht. Hier geben wir nur noch x_0 vor, bestimmen damit ein Vektorfeld N_0 und anschließend auch noch η_0 wie in 5.11.

Sei x_0 eine reguläre, in $s = 0$ analytische Kurve, für die x_0' und x_0'' linear unabhängig sind. Wäre dies nicht so, könnten (5.7) und (5.10) nicht beide erfüllt werden.

Wir wollen eine Fläche erhalten, die eine der in den Abschnitten 5.5, 5.8 oder 5.9 besprochenen Normalisierungen hat, isotherm bzgl. der quadratischen Grundform parametrisiert ist und x_0 als Parameterlinie enthält. Da wir Satz 5.3, 5.4 oder 5.5 anwenden wollen, untersuchen wir nur Kurven, die eine solche Eigenschaft als Parameterlinie überhaupt besitzen können. Z. B. fallen Asymptotenlinien, also Kurven mit $\eta(x_0'') = 0$, weg. Auch bestimmte Krümmungslinien sind nicht möglich.

Wir gehen zunächst immer von einer isotherm parametrisierten Fläche x mit der Normalen $N = N_b$ bzw. $N = N_\alpha$ oder $N = \pm N_c^\alpha$, $\alpha \neq 0$, aus und bestimmen notwendige Bedingungen an die Parameterlinie $x_0(s) = x(s, 0)$, die Krümmungslinie (Abschnitt 5.12.1) oder Null–Linie (Abschnitt 5.12.2) ist, und an weitere Größen. Mit Hilfe dieser Bedingungen konstruieren wir dann umgekehrt zu einer vorgegebenen Kurve x_0 ein geeignetes Vektorfeld N_0.

Φ, f, ε aus Satz 5.3, 5.4, 5.5 seien fest.

5.12.1 Krümmungslinien

$x(u(s), v(s))$ ist **Krümmungslinie** einer Fläche x mit Shape–Operator S, wenn

$$S((u'(s), v'(s))^T) = \lambda(s)(u'(s), v'(s))^T$$

längs der Kurve gilt. Der Vektor $(u'(s), v'(s))^T$ ist dann ein Eigenvektor, $\lambda(s)$ ein Eigenwert von $S|_{(u(s),v(s))}$, d. h. eine Hauptkrümmung.

Wir werden nur Krümmungslinien betrachten, die auch Parameterlinien sind[41], und solche Flächen, für die die Matrix von S längs $(s, 0)$ diagonalisierbar ist und die Eigenwerte reell[42].

Sei $x_0(s) = x(s, 0)$ Parameterlinie, d. h. $u(s) = s$, $v(s) = 0$, $(u'(s), v'(s)) = (1, 0)$, und Krümmungslinie. Um die Bedingung

$$S((1, 0)^T) = (S_1^1, S_2^1)^T = \lambda(s)(1, 0)^T$$

[41] Längs einer Parameterlinie einer isotherm parametrisierten Fläche kann (S_i^j) wegen der Ricci–Gleichung nicht die Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ haben.

[42] Im elliptischen Fall ist das immer so.

zu erfüllen, muß die Matrix der S_i^k an den Punkten $(s,0)$ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda(s) & 0 \\ 0 & \mu(s) \end{pmatrix}$$

haben, da wegen der Ricci–Gleichung $S_1^2 = \varepsilon S_2^1$ gilt und $S_2^1(s,0) = 0$ ist. Es ergibt sich

$$N_1(s,0) = -\lambda(s)x_1(s,0) = -S_1^1(s,0)x_1(s,0).$$

Sei $N_0(s) := N(s,0)$. $S_1^2(s,0)$ ist also gleich 0. Nach Abschnitt 5.3 ist $S_1^2(s,0)$ ein Vielfaches von $det(x_0', N_0', N_0)(s)$. N_0' ist damit notwendig eine Linearkombination von x_0', N_0, genauer gesagt ist es ein Vielfaches von x_0', weil N eine Relativnormale ist.

Gehen wir umgekehrt vor, haben wir also eine Kurve x_0 vorgegeben und suchen ein Vektorfeld N_0, so daß x_0 eine Krümmungslinie der entstehenden Fläche wird, muß N_0' ein Vielfaches von x_0' sein. Wir können daher durch Vorgabe einer Funktion $\kappa(s)$ ein Vektorfeld N_0 konstruieren, indem wir

$$N_0'(s) := -\kappa(s)x_0'(s)$$

setzen. $\kappa(s)$ ergibt bei der später zu konstruierenden Fläche $S_1^1(s,0)$ und ist eine Hauptkrümmung. $N_0(s)$ ist zunächst nicht eindeutig festgelegt, erst nach Angabe von $N_0(0)$. Es ist darauf zu achten, daß x_0' und N_0 in einer Umgebung von $s=0$ linear unabhängig sind. Diese Eigenschaften sind nicht abhängig von der Parametrisierung von x_0. Ist $\tilde{x}_0(t(s)) = x_0(s)$, so erhält man durch $\tilde{N}_0'(t(s)) := -\kappa(s)\tilde{x}_0'(t(s))$ und $\tilde{N}_0(t(0)) = N_0(0)$ ein Vektorfeld mit $\tilde{N}_0(t(s)) = N_0(s)$.

Nun muß man noch η_0 angeben. Es tritt aber hier genau der Fall ein, daß η_0 durch x_0, N_0 nicht eindeutig bestimmt ist, siehe Abschnitt 5.11, und zwar ist $\eta_0(N_0') = -\kappa\eta_0(x_0') = 0$ für alle η_0 mit (5.7). Man muß x_0'' betrachten und erhält zwei Fälle:

- **1. Fall:** $N_0(s)$, $x_0'(s)$, $x_0''(s)$ sind linear unabhängig.

  Dann ist η_0 festgelegt durch

  $$\eta_0(x_0')(s) = 0,\ \eta_0(N_0)(s) = 1,\ \eta_0(x_0'')(s) = e(s)$$

  mit $e(s) \neq 0$, das angegeben werden muß. Aus x_0 und den so festgelegten N_0, η_0 kann man dann nach Satz 5.3, 5.4 bzw. 5.5 eine elliptische bzw. hyperbolische Fläche in isothermen Parametern gewinnen, die x_0 als Krümmungslinie enthält und die die gewünschte Normalisierung hat. $e(s)$ ist bei dieser Fläche $E(s,0)$. Die Fläche ist daher eindeutig festgelegt durch $x_0(s)$, $N_0(0)$, $\kappa(s)$, $E(s,0)$.

  Beispiel: Sei $x_0(s) = (s, 0, \frac{1}{2}s^2)^T$, $\kappa(s) = 0$, $N_0(0) = (0,1,0)^T$. $N_0(s)$ ist dann $(0,1,0)$. Verwendet man $e(s) = \hat{f}(s) \neq 0$, ergibt sich das 3. Beispiel aus 5.11.

- **2. Fall:** $x_0'' = ax_0' + bN_0$, $b \neq 0$, gilt in einer Umgebung von 0.

  Für alle η_0 mit (5.7), (5.8) gilt $\eta_0(x_0'') = b$. Es gibt hier eine Schar von Vektorfeldern η_0, die als Konormale längs der Kurve geeignet sind, und deshalb eine Schar von Flächen mit x_0 als Krümmungslinie, für die $E(s,0) = b(s)$ gilt.

  Beispiel: Sei $x_0(s) = (s, 0, \frac{1}{2}s^2)^T$, $\kappa(s) = 0$, $N_0(0) = (0,0,1)^T$. $N_0(s)$ ist dann $(0,0,1)$, $b(s) = 1$. Hier ergibt sich das 2. Beispiel aus 5.11.

Wir haben, wie in 5.11, nur (5.7)–(5.10) für η_0 und $S_1^2(s,0)=0$ zur Berechnung von N_0 einbezogen. Weitere Bedingungen an die Anfangswerte können die Wahl von N_0 oder η_0 einschränken. Gilt z. B. $\kappa(s)=0$, kann es keine Fläche mit $\mathcal{K}(s,0)\neq 0$ geben.

Im Grunde können wir auch so rechnen, wenn N die euklidische Normale von x werden soll. Hier muß N_0 jedoch noch anderen Bedingungen genügen: N_0 muß den Betrag 1 haben, orthogonal zu x_0' sein und die restlichen in 5.7 verlangten Kriterien erfüllen. $\kappa=0$ etwa kann nicht gelten, sonst wäre x nicht regulär.

5.12.2 Null–Linien bezüglich $\overline{h}$

Wir werden nun zu Flächenkurven $x(u(s),v(s))$ kommen, die

$$\overline{h}_{11}(u(s),v(s))u'^2(s)+2\overline{h}_{12}(u(s),v(s))u'(s)v'(s)+\overline{h}_{22}(u(s),v(s))v'^2(s)=0$$

erfüllen. Ist x eine isotherm parametrisierte Fläche und $x_0(s)=x(s,0)$ Parameterlinie mit obiger Eigenschaft, so gilt $\overline{h}_{11}(s,0)=0$ und damit $S_1^1(s,0)=0$.

Wir konstruieren also N_0, η_0 so, daß bei der induzierten Fläche $S_1^1(s,0)=-\frac{\eta_0'(N_0')}{\eta_0'(x_0')}(s)=0$ gilt.
Wir werden zuerst versuchen, zu x_0 ein geeignetes Vektorfeld η_0 zu finden und dann N_0, das der Bedingung $\eta_0'(N_0')=0$ genügt, daraus abzuleiten.
Nach Voraussetzung sind $x_0'(s)$, $x_0''(s)$ linear unabhängig. Dann ist nach Vorgabe einer analytischen Funktion $e(s)\neq 0$ durch

$$\eta_0(x_0')(s)=0,\ \eta_0(x_0'')(s)=e(s)$$

eine Schar von Vektorfeldern η_0 definiert, die als Konormalenfelder möglich sind. Ein solches η_0 hat notwendig die Eigenschaft, daß η_0 und η_0' linear unabhängig sind.
Es können für η_0 nur diese Fälle auftreten:

- **1. Fall:** $\eta_0(s)$, $\eta_0'(s)$, $\eta_0''(s)$ sind linear unabhängig.

  N_0 ist dann eindeutig durch

  $$N_0 := \frac{\eta_0'\wedge\eta_0''}{\overline{det}(\eta_0,\eta_0',\eta_0'')}$$

  bestimmt. Es gilt wirklich (5.8), (5.9) und $\eta_0'(N_0')(s)=-\eta_0''(N_0)(s)=\overline{h}_{11}(s,0)=0$.

- **2. Fall**: $\eta_0''=a\eta_0+b\eta_0'$ gilt in einer Umgebung von 0[43].

  Hier muß $a=0$ sein, sonst würde für jedes N_0, das (5.8), (5.9) erfüllt, auch $\eta_0''(N_0)(s)=-\overline{h}_{11}(s,0)=a(s)\neq 0$ gelten.

  Ist daher $\eta_0''(s)=b(s)\eta_0'(s)$, so gilt für jedes Vektorfeld N_0, das der Bedingung (5.9) genügt, auch $\eta_0''(N_0)=-\overline{h}_{11}=0$. N_0 ist hier nicht eindeutig.

[43] Wenn $\overline{det}(\eta_0,\eta_0',\eta_0'')$ nur für $s=0$ verschwindet, wenden wir in der Umgebung von 0 den 1. Fall an und setzen N_0 fort.

Man kann auch umgekehrt vorgehen und zuerst N_0 dann η_0 bestimmen. Es ergeben sich diese Fälle:

- **1. Fall**: $S_1^2(s,0) \neq 0$.

  Ist x eine isotherm parametrisierte Blaschke–Immersion mit $S_1^2(s,0) \neq 0$, $S_1^1(s,0) = 0$, dann sind x_1, N_1, x_{11} und x_1, N_1, N jeweils linear unabhängig und x_1, N_1, N_{11} linear abhängig längs $(s,0)$. Und zwar gilt nach den Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten:

$$
\begin{aligned}
&det(x_1, N_1, N) = -S_1^2\, det(x_1, x_2, N)\\
&det(x_1, N_1, x_{11}) = det(x_1, -S_1^1 x_1 - S_1^2 x_2, EN) = -S_1^2 E\, det(x_1, x_2, N)\\
&det(x_1, N_1, N_{11})\\
&= det(x_1, -S_1^2 x_2, -\partial_1(S_1^1)x_1 - \partial_1(S_1^2)x_2 - S_1^1 x_{11} - S_1^2 x_{21})\\
&= det(x_1, -S_1^2 x_2, -S_1^1 h_{11} N - S_1^2 h_{21} N) = S_1^1 S_1^2 E\, det(x_1, x_2, N).
\end{aligned}
$$

  Ist jetzt eine Kurve x_0 gegeben, wähle man ein N_0, für das sowohl x_0', x_0'', N_0' als auch x_0', N_0', N_0 linear unabhängig sind, aber N_0'' eine Linearkombination von x_0', N_0' ist. Es ergibt sich

$$
E(s,0) = \frac{det(x_0', N_0', x_0'')}{det(x_0', N_0', N_0)}(s)
$$

  und[44] daraus

$$
S_1^2(s,0) = -\frac{det(x_0', N_0', N_0)(s)}{E(s,0)} = -\frac{(det(x_0', N_0', N_0)(s))^2}{det(x_0', N_0', x_0'')(s)}.
$$

  Ist also $S_1^2(s,0)$ vorgegeben, kann man nicht ein beliebiges N_0 mit den obigen Bedingungen für lineare Abhängigkeit nehmen, sondern muß auch noch die eben erwähnte Gleichung beachten.

  η_0 ist dann eindeutig fixiert durch (die linear unabhängigen) x_0', N_0':

$$
\eta_0 = \frac{x_0' \wedge N_0'}{det(x_0', N_0', N_0)}.
$$

- **2. Fall**: $S_1^2(s,0) = 0$.

  Man setze $\kappa(s) = 0$ und verwende Abschnitt 5.12.1.

Bei den anderen Normalisierungen geht man bis auf die Festlegung von S_1^2 genauso vor. Bei euklidischer Normalisierung kann aber $S_1^1(s,0)$ oder $\overline{h}_{11}(s,0)$ nicht 0 werden, siehe die Ausnahmekriterien in 5.7.

[44] Bis dahin kann man bei allgemeinen Relativnormalen analog arbeiten. Bei diesem Quotienten aber würde $\delta q^2 E$ im Nenner stehen.