Dank

Ganz herzlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken für ihre Geduld, ihr Verständnis und ihren Rückhalt während meines Studiums und meiner Promotion.

Auch bedanke ich mich für die Unterstützung durch das Stipendium im Rahmen des Gesetzes zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses.

Mein besonderer Dank geht an meinen Betreuer, Herrn Prof. Pabel, für die interessante Themenstellung, die zahlreichen nützlichen Anregungen und Gespräche, die Zeit, die er investierte, und seine Hilfsbereitschaft, kurz für die engagierte Betreuung.

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Themen aus der affinen Hyperflächentheorie. Man kann jede Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit einem Vektorfeld ausstatten, das in jedem Punkt linear unabhängig von den Vektoren des Tangentialraums ist. Meist nimmt man hierzu die euklidische Normale, die damit sozusagen zur Normalen schlechthin wurde. Aber es werden oft auch andere Vektorfelder verwendet, so etwa die Blaschkesche Affinnormale und die zentroaffine Normale.

Man kann jedoch noch allgemeiner vorgehen: Diese drei besonderen Vektorfelder gehören alle zur Klasse der Relativnormalen, deren Untersuchung von E. Müller (1921)[1] aufgenommen wurde. In diesem Zusammenhang werden auch W. Süss, A. Duschek und A. Norden (1920er bzw. 1930er Jahre) genannt. Den erwähnten Vektorfeldern ist gemeinsam, daß ihre ersten partiellen Ableitungen ganz im Tangentialraum verlaufen.

Die Relativgeometrie behandelt Flächengrößen bezüglich einer Relativnormalen und deren Eigenschaften. Hiermit werden wir uns in der vorliegenden Arbeit vor allem befassen.

Trotzdem werden wir uns im 1. Kapitel nicht darauf beschränken. Wir werden hier Grundbegriffe und Definitionen für beliebige Normalisierungen behandeln.

Zunächst betrachten wir die Flächengrößen, die direkt oder indirekt aus den sogenannten Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten hervorgehen, untersuchen deren Eigenschaften und vergleichen die Flächengrößen verschiedener Normalisierungen miteinander.

Dann befassen wir uns mit der Konormalen, einer 1–Form längs der Fläche, die jeweils den Tangentialraum anulliert und durch die Normale eindeutig festgelegt ist.

Schließlich behandeln wir die Darstellung der Fläche durch ihre Konormale (ausgedrückt mit den sogenannten Formeln von Lelieuvre, die für $n = 2$ schon bei Blaschke (1923) zu finden sind und in [LNW] (1991) auf höhere Dimensionen erweitert wurden), die zu einem Fundamentalsatz über die Rekonstruktion einer Fläche nach Vorgabe der Konormalen und der quadratischen Grundform führt. Die hier auftretenden Integrabilitätsbedingungen werden zudem genauer untersucht.

Im 2. Kapitel kehren wir wieder zur Relativgeometrie zurück. Zunächst spezialisieren wir gewisse Eigenschaften allgemeiner Normalisierungen aus dem 1. Kapitel auf diesen Fall.

Vor allem geht es in diesem Kapitel um die Definition bzw. die genauere Besprechung wichtiger Relativnormalen: Wir werden neben den oben genannten drei speziellen Vektorfeldern auch die von Manhart (1982) untersuchte Einparameterfamilie von Relativnormalen (Manhartsche Familie), die die Blaschkesche Affinnormale, die euklidische Normale und weitere damit geometrisch verknüpfte Normalen enthält, behandeln. Diese Familie ist nicht nur wegen der dazugehörenden bekannten Vektorfelder interessant. Es existiert

[1] Die historischen Angaben dieser Einleitung stammen aus [Nit], [Bl1], [Bl2], [Sch], [dCa], [SSV] oder beziehen sich auf Arbeiten des Literaturverzeichnisses.

nämlich ein enger Zusammenhang zwischen Relativnormalen und Volumina (siehe 3. Kapitel): Jede Relativnormale erzeugt auf eine bestimmte Weise ein Volumen (so induziert die euklidische Normale das übliche euklidische Volumen) und umgekehrt gibt es zu jedem Volumen eine entsprechende Relativnormale. Die Normalen der Manhartschen Familie stehen also auch für eine Familie von Volumina, die das euklidische Volumen, das Affinvolumen, das II– und III–Volumen beinhaltet.
Neu definieren wir in diesem Kapitel analog zur Manhartschen Familie eine weitere Einparameterfamilie von Relativnormalen, die zentroaffine Familie. Sie repräsentiert auch eine Familie von Volumina, nämlich die in [Lei2] angegebene, die neben dem Affinvolumen auch das zentroaffine Volumen umfaßt.
Von diesen beiden Familien wurden bis jetzt nur Spezialfälle genauer behandelt. Im 3. und 5. Kapitel werden wir gewisse Sachverhalte auf die Normalen dieser Familien übertragen.

Die beiden ersten Kapitel dienen neben der Analyse allgemeiner Normalen und der genannten Familien auch als Vorbereitung und Grundlage für den folgenden Hauptteil dieser Arbeit:
Es geht hierbei um drei Themen, die mehr oder weniger mit dem Begriff der Minimalfläche (also einer Fläche, bei der ein bestimmtes Volumen extremal, zumindest aber stationär ist, siehe unten) in Zusammenhang stehen und die für Spezialfälle, namentlich den euklidischen, schon ausführlich untersucht wurden. Wir werden sie auf andere Normalisierungen ausdehnen.

So befassen wir uns im 3. Kapitel mit Minimalflächen bezüglich verschiedener Volumina und der Rolle der jeweiligen Mittleren Krümmung.
Bei Minimalflächen denkt man gewöhnlich zuerst an die euklidischen Minimalflächen. Sie sind Lösungen eines Variationsproblems, nämlich die Flächen kleinsten (euklidischen) Volumens, die von einer gegebenen geschlossenen Kurve berandet werden. Das Problem geht auf Lagrange (1760) zurück, der als Graphen dargestellte Flächen untersuchte und als Bedingung eine bestimmte Differentialgleichung erhielt. Etwas später hat Meusnier diese Ergebnisse geometrisch gedeutet und den Zusammenhang mit der heute als (euklidischer) Mittlerer Krümmung H bekannten Flächengröße hergestellt: Wenn eine Fläche das Volumen minimiert, verschwindet H identisch.
Die gebräuchlichste Anwendung ist diese: Euklidische Minimalflächen lassen sich durch Seifenhäute physikalisch realisieren, vgl. [Nit], S. 6, [dCa], S. 151–152. Taucht man eine Drahtschlinge (entspricht einer geschlossenen Kurve) in Seifenlauge, so bildet sich beim Herausziehen eine vom Draht berandete Seifenhaut, die eine euklidische Minimalfläche sehr genau approximiert. Dies führt auch zum Problem von Plateau, der um 1850 viele Experimente mit Seifenhäuten durchführte.
Bei euklidischen Minimalflächen bezieht man sich auf das euklidische Volumen. Man kann aber genauso andere Arten von Volumina auf Extremalität untersuchen. So wurden Minimalflächen bezüglich des Affinvolumens, sogenannte Affinminimalflächen (Blaschke, 1923, aber auch bereits Darboux, 1894/96, und Franck, 1914/20), II–Minimalflächen (Glässner, 1974) und zentroaffine Minimalflächen (Wang, 1994) behandelt.
Wir werden uns mit noch allgemeineren Volumina befassen, und zwar mit den Volumina, die durch die Normalen der beiden im 2. Kapitel genannten Familien induziert werden. Wir berechnen die 1. und 2. Variation dieser Volumina.
Bei der 1. Variation geht es vor allem um folgende Frage: Es ist bekannt, daß für euklidische, aber auch für Affinminimalflächen die jeweilige Mittlere Krümmung verschwin-

det. Ist das auch bei anderen Volumina so? Betrachtet man die Bedingungen für II–Minimalflächen oder zentroaffine Minimalflächen, so scheint dies dort nicht der Fall zu sein. In welcher Verbindung steht also die 1. Variation eines von einer Normalen erzeugten Volumens mit der Mittleren Krümmung dieser Normalen?
Wir werden feststellen, daß bei Normalen der Manhartschen Familie die Mittlere Krümmung auch jeweils die Rolle spielt wie bei euklidischer Normalisierung: Mit ihr verschwindet die 1. Variation des Volumens.
Bei der zentroaffinen Familie ist das aber i. a. nicht der Fall, dort zeigt die Mittlere Krümmung keine Minimalflächen an. Der Ausdruck, der zum Verschwinden der 1. Variation führt, besteht aus der Mittleren Krümmung und einem weiteren Summanden.
Wir bestimmen auch die 2. Variation dieser Volumina. Es entstehen komplizierte Ausdrücke, über deren Definitheit nichts Einheitliches zu sagen ist. Bei den einfachsten Fällen - dem euklidischen, äquiaffinen bzw. zentroaffinen Fall, die von H. A. Schwarz (1890), Calabi (1982), Verstraelen, Vrancken (1989) bzw. Wang (1994) untersucht wurden - treten bereits die verschiedensten Situationen auf: Es gibt Flächen mit stets nichtnegativer bzw. nichtpositiver 2. Variation, aber auch solche, bei denen die 2. Variation verschiedene Vorzeichen hat oder ganz verschwindet (beim III–Volumen).

Im 4. Kapitel beschäftigen wir uns nicht mit beliebigen Relativnormalen, sondern mit der Blaschkeschen Affinnormalen.
Wir übertragen aber auch gewisse Eigenschaften, die bis jetzt nur für die euklidische Normalisierung behandelt wurden, auf diesen Fall, und zwar bestimmte Deformationen von Minimalflächen.
Eine euklidische Minimalfläche läßt sich durch die Weierstraßsche Darstellung (Enneper, 1864, Weierstraß, 1866, siehe [Pab2]) ausdrücken, d. h. man kann sie beschreiben durch eine holomorphe Kurve mit gewissen Eigenschaften.
Ändert man diese Kurve in einer bestimmten Weise (durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl c oder normiert mit $e^{i\varphi}$), erhält man andere euklidische Minimalflächen, nämlich die sogenannten Assoziierten, darunter speziell die Adjungierte ($c = i$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Diese Flächen wurden bereits von Bonnet (1853) behandelt.
Ähnlich kann man auch bei Affinminimalflächen vorgehen: Und zwar kann man die Konormale einer Affinmimalfläche ebenfalls mit ,,harmonischen" Abbildungen ausdrücken. Diese affine Weierstraßsche Darstellung geht schon auf Darboux zurück, siehe [Buy].
Modifiziert man diese Abbildungen geeignet (wie oben), ergeben sich andere Affinminimalflächen. Es gibt dadurch Analoga zu den Adjungierten. Diese wurden schon von Chern, Terng (1980), Antonowicz (1987) und Buyske (1992) unter dem Begriff Affine Bäcklund–Transformationen untersucht.
In dieser Arbeit werden wir die Vorgehensweise ausdehnen und die den Assoziierten entsprechenden Flächen einführen. Danach werden wir diese affinen Assoziierten noch in eine bestimmte Richtung verallgemeinern und einige Eigenschaften besprechen.

Schließlich betrachten wir im 5. Kapitel das Björlingsche Problem. Es wurde benannt nach einer Aufgabe, die E. G. Björling (1844) stellte. Dabei geht es zunächst darum, zu einem euklidischen Kurvenstreifen, also einer (offenen) Kurve mit einem Einheitsvektorfeld längs dieser Kurve orthogonal zur Tangente, eine euklidische Minimalfläche zu finden, die die Kurve im Innern enthält und deren euklidische Normale längs der Kurve mit dem gegebenen Vektorfeld übereinstimmt. Schon in [Bl1] ist dieses Problem gelöst. Es ist nicht zu verwechseln mit dem Plateauschen Problem, bei dem zu einer geschlossenen Kurve

eine entsprechende Fläche gesucht wird, bei der die gegebene Kurve Randkurve ist, und das dem oben erwähnten Seifenhautproblem entspricht.
Statt einer Minimalfäche kann man auch eine Fläche mit einer anderen Bedingung an die Gaußsche und Mittlere Krümmung verlangen. Leichtweiß (1952/53) hat dies untersucht und festgestellt, daß dies in der Regel immer möglich ist, darüber hinaus noch so, daß die Fläche isotherm parametrisiert ist und die Kurve Parameterlinie wird. Er hat diesen Existenzbeweis geführt, indem er ein aus den Integrabilitätsbedingungen (von Gauß und Mainardi–Codazzi) stammendes System von Differentialgleichungen für die Flächengrößen angab und löste.
Blaschke (1923) hat das Björlingsche Problem auf hyperbolische Affinminimalflächen übertragen. Dieses Vorgehen, mit dem man konkret aus den Vorgaben die Fläche konstruieren kann, werden wir in Abschnitt 5.6 (auch für elliptische Flächen) behandeln.
Man kann das Problem aber noch weiter verallgemeinern: In Anlehnung an das Vorgehen von Leichtweiß werden wir zeigen, daß das Björlingsche Problem auch auf andere Normalisierungen, zumindest auf die im 2. Kapitel definierten, übertragen werden kann. Wir werden die (allgemeineren) Integrabilitätsbedingungen dazu verwenden, um ein eindeutig lösbares Differentialgleichungssystem zu erhalten, je nach Art der Normalen ein anderes. Das Ergebnis wird schließlich sein: Es gibt bis auf Ausnahmen bei Vorgabe einer Kurve mit zwei Vektorfeldern, der Art der Normalen, einer Funktion der Mittleren und der Gaußschen Krümmung je genau eine elliptische und eine hyperbolische Fläche in isothermen Parametern mit der Kurve als Parameterlinie, für die die Normale längs der Kurve mit dem einen, die Konormale mit dem anderen Vektorfeld übereinstimmt und deren Mittlere und Gaußsche Krümmung eine vorgegebene Bedingung erfüllen.