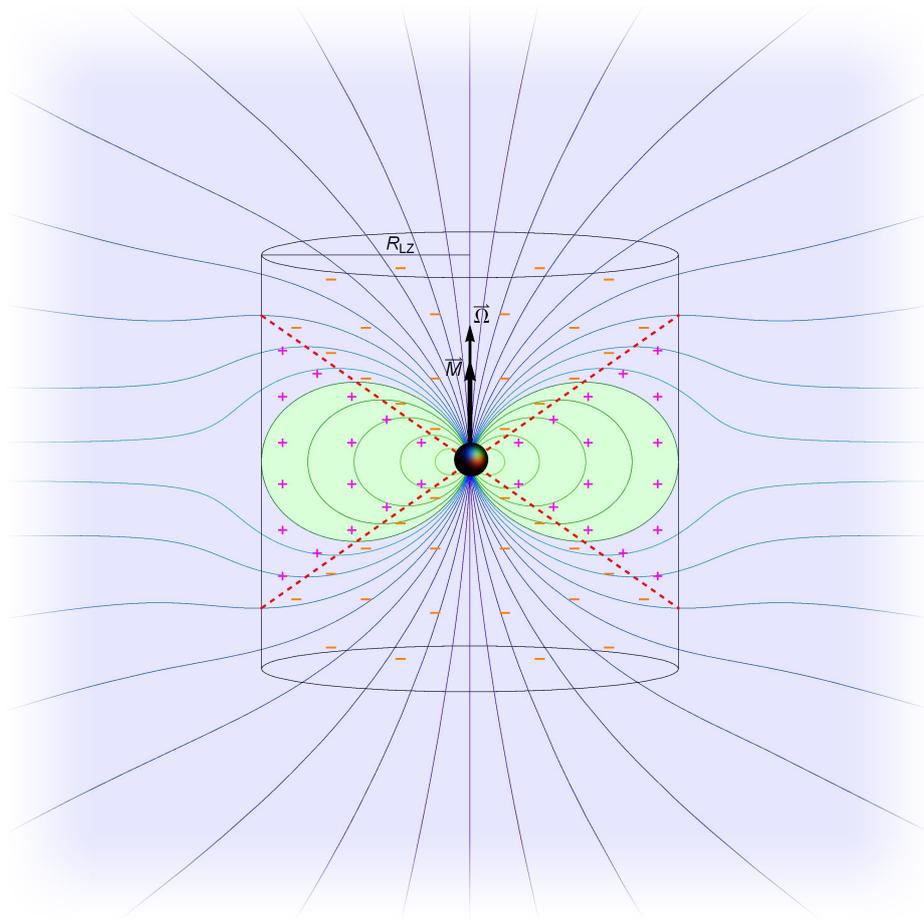


Diplomarbeit

Bestimmung des hochenergetischen Spektrums des Crab-Pulsars anhand eines Outer Gap-Modells



Autor:
Christoph Wendel

Matrikelnummer:
1553704

Betreuer:
Prof. Dr. Karl Mannheim
Dr. Dominik Elsässer

2. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Standardmodell einer Pulsar-Magnetosphäre	10
2.1.1	Der starr rotierende, scharf begrenzte, magnetisierte, perfekte Leiter	10
2.1.2	Dipol-Felder	12
2.1.3	Das Goldreich-Julian-Modell der Pulsar-Magnetosphäre	16
2.1.4	Teilchenbeschleuniger in der Magnetosphäre	21
2.2	Krümmungsstrahlung	25
2.2.1	Energieverlust-Rate	26
2.2.2	Spektrum	27
2.3	Inverse Compton-Strahlung	29
2.3.1	Compton-Streuung	29
2.3.2	Inverse Compton-Streuung	30
2.3.3	Streuquerschnitte	31
2.3.4	Energieverlust-Rate im Thomson-Grenzfall	32
2.3.5	Energieverlust-Rate im Klein-Nishina-Grenzfall	33
2.3.6	Spektrum	34
2.4	Triplet Paar-Erzeugung	37
2.4.1	Energieverlust-Rate durch Monte-Carlo Simulation	38
2.4.2	Energieverlust-Rate durch analytische Näherung	39
3	Qualitative Beschreibung der Modellvorstellung	43
4	Quantitative Auswertung	46
4.1	Kinetik der geladenen Teilchen	47
4.1.1	Aufstellen der Differenzialgleichung	47
4.1.2	Lösen der Differenzialgleichung	48
4.1.3	Physikalische Erklärung der Lösung	50
4.2	Krümmungsstrahlungs-Spektrum	51
4.2.1	Spektrum $\frac{dP}{df}(f, r)$ in Abhängigkeit vom Ort in der Outer Gap	51
4.2.2	Integriertes Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int}}(f, d)$	53
4.2.3	Umrechnung in spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int}}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d)$	55
4.3	Strahlungsspektrum durch inverse Compton-Streuung	57
4.3.1	Analytische Spezifizierung des invers Compton-gestreuten Spektrums	58
4.3.2	Betrachtung der invers Compton-gestreuten Emissivität	61
4.3.3	Integriertes Spektrum	62
4.3.3.1	Vorbetrachtungen	62
4.3.3.2	Durchführung der numerischen Integration	65
4.4	Prüfung des Modells auf Selbstkonsistenz	67
4.4.1	Mögliche Ziel-Photonen-Felder	68
4.4.2	Leuchtkräfte	70

4.4.3	Vergleich von Energieverlust-Raten	70
5	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse, Ausblick	75
5.1	Zusammenfassung	75
5.2	Vergleich mit Beobachtungen	76
5.3	Vergleich zur Arbeit von Lyutikov et al. [2012]	79
5.4	Ausblick	80
6	Anhang	82
	Literaturverzeichnis	95
	Abbildungsverzeichnis	97

Kapitel 1

Einleitung

„Pulsars are the quintessential dogs that don't bark in the night (...)"

Jonathan Arons [Arons, 2007]

„Hunde, die nachts nicht bellen“, nennt Jonathan Arons, Astrophysiker an der University of California und Urgestein der Pulsar-Forschung, im Jahr 2007 Pulsare und vergleicht sie zudem noch mit dem geheimnisvollen fünften Element der antiken wissenschaftlichen Lehre. Das verdeutlicht, wie mysteriös und wenig verstanden, aber auch wie faszinierend und anziehend diese astrophysikalischen Objekte über 40 Jahre nach ihrer Entdeckung auf den Menschen wirken.

Pulsare sind von Beobachterseite kompakte Quellen, die jedoch nicht kontinuierlich strahlen, sondern „kurze Blitze“ (Pulse) in regelmäßigen zeitlichen Abständen abgeben (siehe Abbildung 1.1). Diese Pulse sind in für jede Quelle typischen Frequenzbereichen messbar und erstrecken sich in einzelnen Fällen über das gesamte detektierbare elektromagnetische Spektrum. Die Pulsperiode liegt im Bereich $P \approx 0,001 - 10$ s [Hessels et al., 2006, Young et al., 1999] und ihre zeitliche Änderung dP/dt hat einen positiven Wert und erstreckt sich über rund 10 Größenordnungen, wie man in Abbildung 1.2, in der die Verteilung aller bekannten Pulsare in Abhängigkeit von der Pulsperiode P und deren zeitlicher Änderung dP/dt dargestellt ist, erkennen kann. Offensichtlich sind die Einträge in diesem Diagramm in verschiedene Populationen gruppiert. Dies deutet darauf hin, dass Pulsare keine einheitlichen Objekte sind, sondern in einer großen Vielfalt auftreten. Heute weiß man, dass die Pulsare der verschiedenen Populationen im P - dP/dt -Diagramm sich in ihrer Entstehung, im physikalischen Aufbau und in ihren Eigenschaften zum Teil stark unterscheiden [Carroll & Ostlie, 2007]. Die meisten Pulsare haben Pulsperioden von mehreren 100 ms, die zeitliche Änderung ist typischerweise $dP/dt \approx 10^{-15}$ [Hewish, 1970]. Der zeitliche Abstand der einzelnen Pulse nimmt also zu, jedoch derart langsam, dass Pulsare mit der Genauigkeit moderner Atomuhren

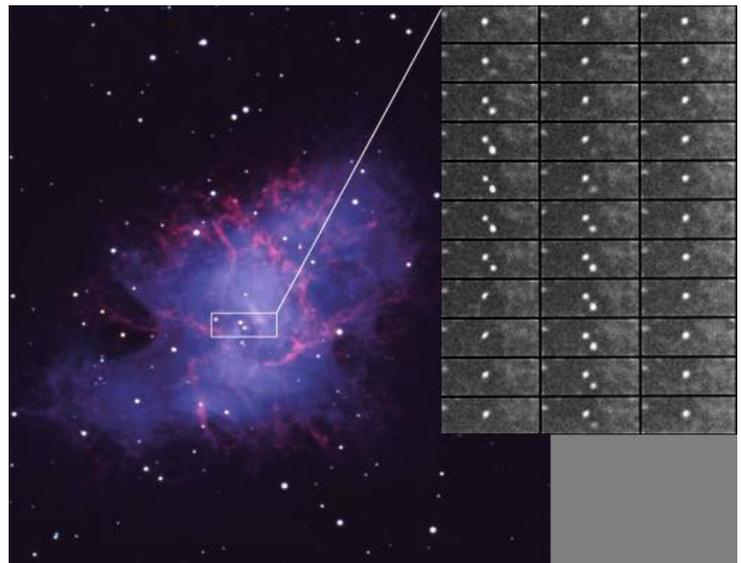


Abb. 1.1: Groß, links: Aufnahme des Crab-Nebels und des darin eingebetteten Pulsars im sichtbaren Wellenlängenbereich mit dem Kitt Peak 4-Meter Mayall Teleskop aus dem Jahr 1973.

Rechts, eingesetzt: 33 Aufnahmen des Crab-Pulsars zusammen mit einem Vordergrundstern aus dem Jahr 1989, aufgenommen mit dem Kitt Peak Photon Counting Array des Mayall Teleskops. Jede dieser 33 Aufnahmen repräsentiert circa 1 ms Belichtungszeit, sodass insgesamt eine volle Pulsperiode $P \approx 33$ ms ähnlich zu stroboskopischen Aufnahmen zeitlich aufgelöst ist. (Die tatsächliche volle Belichtungszeit beträgt $T \approx 2$ h.) Spaltenweise abfolgende Aufnahmen lassen die Pulsation, bestehend aus zwei einzelnen Pulsen, dem main pulse und dem schwächeren interpulse, erkennen. [Sharp/NOAO, 1989]

konkurrieren können.

Die ersten Pulsare wurden 1967 von Jocelyn Bell Burnell und Anthony Hewish im Rahmen einer systematischen Himmelsdurchmusterung im Radiobereich entdeckt [Hewish et al., 1968]. In den darauffolgenden Jahren wurden stetig mehr Pulsare entdeckt, zunächst im Radiobereich, doch bald auch bei optischen Wellenlängen [Cocke et al., 1969] und dank der immer besseren technischen Möglichkeiten der beobachtenden Astronomie auch im Hochenergiebereich, sodass heute rund 2000 Pulsare bekannt sind.

Im Jahr 1968 wurde der Crab-Pulsar, PSR B0531+21, entdeckt und mit dem „south preceding star“ im Crab-Nebel, dem Überrest der Supernova des Jahres 1054, assoziiert [Staelin & Reifenstein III, 1986, Comella et al., 1969]. Bereits 1969 war eine wenn auch lückenhafte spektrale Energie-Verteilung (SED) verfügbar (siehe Abbildung 1.3), die im Großen und Ganzen zu hohen Frequenzen hin abfällt. Jedoch war schnell klar, dass das Spektrum so differenziert ist, dass es sich nicht mit einer einfachen Funktion der Frequenz beschreiben beziehungsweise mit einem einzelnen Mechanismus erklären lässt. Im Radiobereich kann das gepulste Spektrum durch ein Potenzgesetz beschrieben werden, ebenso auch im Röntgenbereich. Im infrarot-optischen Teil wird jedoch ein Buckel beobachtet, der im Rahmen eines einzigen Erklärungsmodells nicht an die beiden anderen Teile angepasst beziehungsweise mit ihnen in Übereinstimmung gebracht werden kann.

Im vergangenen Jahrzehnt wurde durch die Entwicklung der Cherenkov-Astronomie sowie des Weltraumteleskops Fermi-LAT, der Crab-Pulsar bei immer höheren Energien beobachtet. So wurde 2010 von der Fermi-Kollaboration bekannt gegeben, dass der Crab-Pulsar bis zu einer Photonenenergie $E \approx 20 \text{ GeV}$ detektiert wurde [Abdo et al., 2010] (siehe Abbildung 1.4). Bereits 2008 konnte das Cherenkov-Teleskop MAGIC den Crab-Pulsar oberhalb von 25 GeV registrieren [Otte, 2008]. Sein sich bis zur Photonenenergie $E_{\text{abk}} \approx 6 \text{ GeV}$ erstreckendes Spektrum lässt sich in Form eines Potenzgesetzes beschreiben. Oberhalb der Abknick-Energie E_{abk} wird das gemessene Spektrum von einem exponentiellen Abfall dominiert [Abdo et al., 2010].

2012 berichtete die MAGIC-Kollaboration, die gepulste Strahlung des Crab bis zu einer Photonenenergie von $E \approx 400 \text{ GeV}$ gemessen zu haben [Aleksić et al., 2012]. Damit ist oberhalb des exponentiell abfallenden Teils der durch Fermi-LAT gemessenen Komponente noch eine weitere, in Abbildung 1.4 dargestellte, offenbart worden, die in ihrem Ursprung verschieden von ersterer sein dürfte. Diese zusätzliche, sehr hochenergetische (VHE, ab einigen 10 GeV)

Komponente konnte bereits 2011 durch Messungen der VERITAS-Kollaboration erkannt werden. Andere Observatorien hingegen konnten nur obere Grenzen der spektralen Flussdichte angeben und damit eine VHE-Komponente immerhin nicht ausschließen [Aliu et al., 2011]. Es ist bisher nicht bekannt, wie weit sich diese VHE-Komponente nach oben erstreckt und welchen genauen Verlauf das Spektrum annimmt. Außerdem ist noch offen, durch welche physikalischen Mechanismen beziehungsweise durch welche Parameter/Eigenschaften (Magnetfeldstärke, Rotations-Periode, Masse,...) eines Pulsars die höchsten Photonenenergien verursacht und beschränkt sind. Insofern gilt der poetische Vergleich J. Arons' von Pulsaren

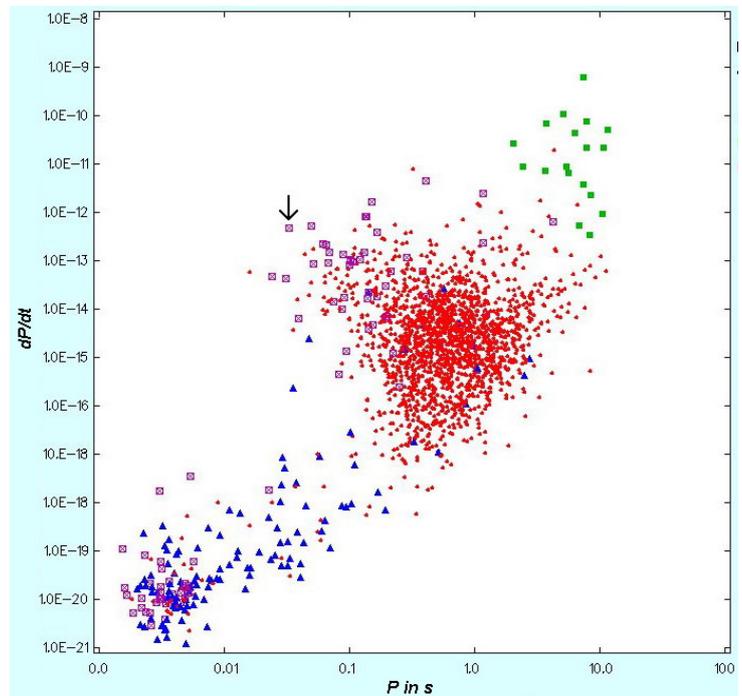


Abb. 1.2: P - dP/dt -Diagramm aller bekannten Pulsare des ATNF Pulsar Catalogue [2012]. Aufgetragen ist in logarithmischer Darstellung die Pulsperiode P gegen deren zeitliche Änderung dP/dt . Jeder Pulsar ist als eigenes Symbol eingetragen. Die Pulsare wurden in folgende Klassen eingeteilt: Pulsare in Doppeltsternsystemen (blau), Anomalous X-ray pulsars / Soft Gamma Repeaters (grün), Hochenergie-Pulsare (lila) und restliche Pulsare (rot). Der Crab-Pulsar wurde mit einem Pfeil markiert. Aus ATNF Pulsar Catalogue [2012]

mit rätselhaften Objekten, obwohl bereits 2007 ausgesprochen, auch und gerade für die von MAGIC gemessene VHE-Komponente des Crab-Pulsars.

Parallel zu den Fortschritten in der Beobachtung begann unmittelbar nach der Entdeckung im Jahr 1967 eine Debatte über die physikalische Natur der pulsierenden Objekte, die nun kurz beleuchtet werden soll. Da die Verteilung der Pulsare am Himmel zu betragsmäßig kleiner galaktischer Breite hin stark zunimmt, war schnell klar, dass es sich um Objekte in der galaktischen Scheibe handeln muss. Extragalaktische Phänomene hätten eine isotrope Verteilung. Nachdem zunächst zahlreiche zum Teil bizarre Theorien zur Erklärung der Beobachtungen erdacht wurden [Hewish, 1970], so zum Beispiel die Hypothese, die Pulse würden durch radiale Schwingungen von kompakten Objekten wie weißen Zwergen oder Neutronensternen verursacht, oder die Modellannahme eines massiven Objekts, das von einem oder gar mehreren kleineren Satelliten umlaufen wird [Pacini & Salpeter, 1968], die jedoch beide später aus dynamischen Gründen ausgeschlossen werden mussten [Ostriker & Gunn, 1969], kristallisierte sich schon bald heraus, dass man das Phänomen der gepulsten Strahlung am ehesten durch schnell rotierende, stark magnetisierte Neutronensterne erklären kann [Gold, 1968].

Neutronensterne wurden von Walter Baade und Fritz Zwicky zu Beginn der 1930er Jahre als Produkte von Supernovae postuliert [Baade & Zwicky, 1934], nachdem Lew Landau kurz zuvor bereits die Existenz von extrem massiven Atomkernen vorschlug [Landau, 1932]. Jedoch wurden Neutronensterne bis 1967 nicht zweifelsfrei nachgewiesen.

Neutronensterne sind heiße (Oberflächentemperatur $T \approx 10^6$ K [Tennant et al., 2001]), extrem dichte und zu einem großen Anteil aus Neutronen bestehende Überreste von mittelschweren Sternen. Sind diese am Ende ihres „Brennens“ angekommen, das heißt in der Phase, in der im Sterninneren keine Kernfusion mehr stattfinden kann, kann dort nicht mehr genügend Energie freigesetzt werden, um durch den nach außen gerichteten Gas- und Strahlungsdruckgradient den nach innen gerichteten Druckgradient durch Gravitation auszugleichen, sodass sich der Stern nicht mehr im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Der aus Eisen und Nickel bestehende Kern des Sterns fällt unter den eigenen Gravitationskräften in sich zusammen, während die äußere Hülle aufgeheizt und abgeworfen wird und für äußere Beobachter zunächst als Kernkollaps-Supernova

und später als Supernovaüberrest sichtbar ist. Ab einer Dichte der Kernmaterie von etwa $\rho \approx 10^9$ g cm⁻³ [Carroll & Ostlie, 2007] findet der Prozess des Elektroneneinfangs $\frac{1}{2}p + e^- \rightarrow \frac{1}{2}n + \nu_e$ (inverser β -Zerfall) statt, der die im Sterninneren befindlichen Atomkerne nach und nach neutronisiert. Die dabei freiwerdenden Neutrinos entweichen langsam in die umgebenden Schichten des einstigen Sterns, während die neutronenreichen Atomkerne und freien Neutronen weiterhin unter dem Einfluss der gegenseitigen Gravitationskräfte zusammen gepresst werden. Übersteigt die Dichte des Protonen-Neutronensterns einen Grenzwert von rund $\rho \approx 10^{12}$ g cm⁻³ [Carroll & Ostlie, 2007], so entarten die Neutronen, das heißt jedes Neutron muss gemäß dem Pauli-Prinzip einen anderen Quantenzustand annehmen. Da die entarteten Neutronen auf ein gewisses Volumen begrenzt sind, haben die möglichen Energiezustände gemäß der Heisenbergschen Unschärfe-Relation von Null verschiedene Abstände. Bei einer Erhöhung des Volumens verkleinern sich die Abstände der Energieniveaus und umgekehrt. Also muss bei Volumenverkleinerung den Elektronen Energie zugeführt werden, was in einem Druck, dem Entartungsdruck, resultiert. Dieser kann den Gravitationsdruck kompensieren, sodass ein stabiles Objekt, der Neutronenstern, entsteht. In diesem Endstadium besteht der kompakte Sternüberrest neben relativistischen, entarteten Elektronen und supraleitenden, freien Protonen im Wesentlichen aus superfluiden, freien Neutronen [Carroll & Ostlie, 2007]. Obgleich für eine Zustandsgleichung, die das Verhalten der Neutronensternmaterie und ins-

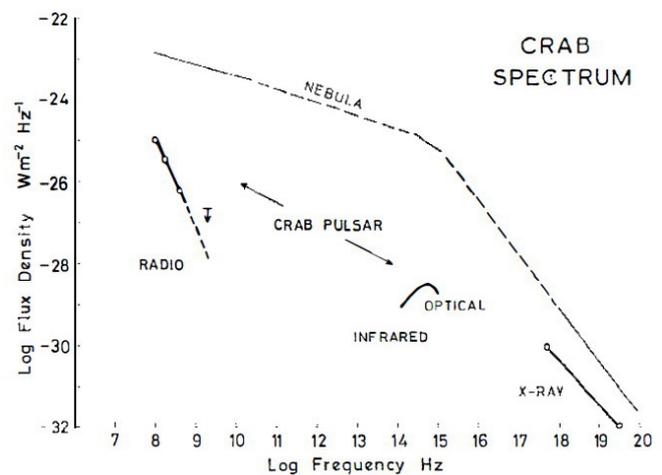


Abb. 1.3: Spektrum des Crab-Pulsars sowie des Crab-Nebels aus dem Jahr 1969. Aufgetragen ist jeweils logarithmisch die spektrale Flussdichte in $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ gegen Frequenz in Hz. Aus Hewish [1970]

besondere deren Abhängigkeit zwischen Dichte unter Druck beschreibt, bisher nur mögliche Kandidaten bekannt sind, stimmen diese darin überein, dass Neutronensterne bei typischen Massen $M \approx 1,0 - 2,0 M_{\odot}$ typische Radien von $R \approx 15$ km haben, womit die mittlere Dichte größenordnungsmäßig $\rho \approx 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ [Carroll & Ostlie, 2007] beträgt und somit vergleichbar mit der von Atomkernmaterie ist.

Zu diesen extremen Eigenschaften von Neutronensternen kommt noch eine vergleichsweise hohe Rotationsfrequenz hinzu, die während der Supernova durch den Pirouetteneffekt entsteht: Sterne rotieren während ihrer Existenz mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi P^{-1}$ um die eigene Achse und somit kann ihnen ein Drehimpuls $L \sim MR^2\Omega$ zugeordnet werden. Dieser muss für das Gesamtobjekt aus Protoneutronenstern plus ionisierter Gashülle erhalten bleiben. Da sich der Radius des Sterns beim Kollabieren um mindestens fünf Größenordnungen verkleinert, kann die Winkelgeschwindigkeit des Neutronensterns bis zu zehn Größenordnungen erhöht werden, auch wenn ein substantieller Teil der Masse als umgebende Gashülle entweicht.

Zudem zeichnen sich junge Neutronensterne durch außergewöhnlich starke Oberflächenmagnetfelder aus, die aufgrund der Erhaltung des magnetischen Flusses entstehen: Die Vorläufersterne von Neutronensternen haben ein Magnetfeld, das an der Oberfläche des Sterns magnetische Flussdichten von größenordnungsmäßig $B \approx 10 - 100$ G [Ostriker & Gunn, 1969] annimmt. Nun hat Sternmaterie, die ja im Plasmazustand vorliegt, eine sehr hohe elektrische Leitfähigkeit und auch die Materie eines Neutronensterns ist durch das in ein Superfluid aus Neutronen eingebettete Elektronengas und die supraleitenden Protonen sehr gut leitend. Deshalb ist und bleibt das Magnetfeld während des Kollabierens in der Oberfläche eingefroren, das heißt der magnetische Fluss $\sim B \cdot R^2$, der die Oberfläche durchsetzt, bleibt erhalten [Baumjohann & Treumann, 1997]. Wiederum verringert sich der Radius um rund fünf Größenordnungen, wodurch die magnetische Flussdichte um etwa zehn Größenordnungen auf typische Werte von $B \approx 10^{12}$ G anwächst.

Das Magnetfeld des Vorläufersterns hat näherungsweise die Form eines Dipols und dessen Symmetrie-Achse ist oft parallel zu der Rotations-Achse des Sterns ausgerichtet, das heißt für den Winkel α zwischen der Rotations-Achse und der Dipol-Achse gilt häufig $\alpha \gtrsim 0^\circ$. Das Magnetfeld des Neutronensterns wird ebenfalls als dipolförmig angenommen. Da eine Supernova jedoch nicht exakt kugelsymmetrisch abläuft, kann sich die Dipol-Achse in Bezug auf die Rotations-Achse verschieben oder verdrehen. Es wird angenommen, dass bei Neutronensternen statistisch gesehen alle Winkel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ gleich häufig auftreten [Pacini, 1968].

Nun erzeugt jedes sich zeitlich ändernde Magnetfeld durch Induktion ein elektrisches Feld. Im Fall von dipolförmigen Magnetfeldern, die um eine Achse rotieren, welche nicht parallel zu ihrer Dipol-Achse ausgerichtet ist, das heißt für den Fall $\alpha \neq 0^\circ$, wird deshalb ein elektrisches Feld induziert. Dessen zum Magnetfeld rechtwinklig gerichteter Anteil ruft einen Fluss (Poynting-Fluss) elektromagnetischer Strahlung mit der Frequenz $f = P^{-1}$ hervor [Pacini, 1968, Ostriker & Gunn, 1969]. Diese Energie muss letztlich aus dem Reservoir der Rotationsenergie des Neutronensterns gespeist werden. Deswegen ist eine

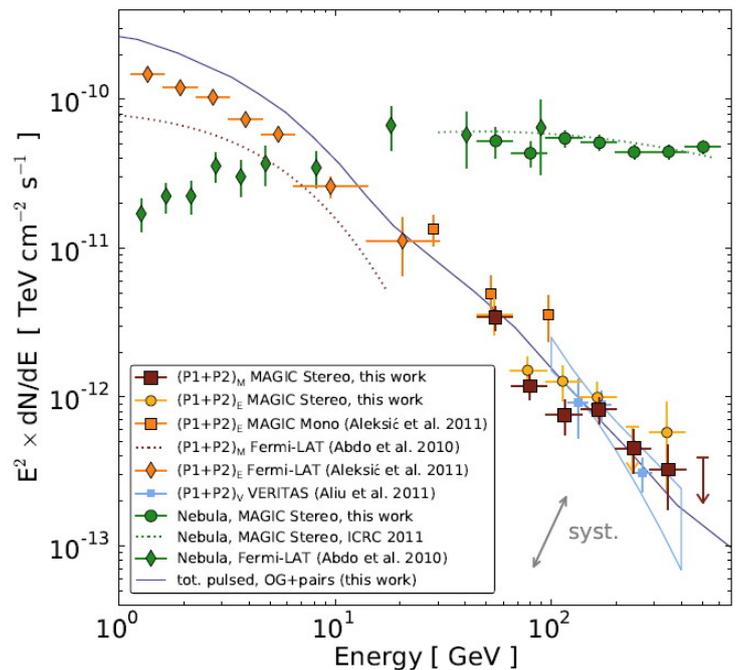


Abb. 1.4: Spektrum des Crab-Pulsars (rot, orange, blau) sowie des Crab-Nebels (grün) im VHE-Regime. Aufgetragen ist jeweils logarithmisch die mit dem Quadrat der Energie multiplizierte spektrale Teilchen-Flussdichte in $\text{TeV s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ gegen Energie in GeV. Gezeigt ist die Summe aus beiden Pulskomponenten P1 (main pulse) und P2 (interpulse). Die Indizes M, E beziehungsweise V bezeichnen verschiedene Phasenintervalle, die zur Kalibrierung verwendet wurden, nämlich durch MAGIC, durch EGRET beziehungsweise durch VERITAS gewonnene. Aus Aleksić et al. [2012]

Abnahme der Rotationsfrequenz (Zunahme der Pulsperiode) verständlich. Außerdem können im induzierten elektrischen Feld geladene Teilchen beschleunigt und nach außen transportiert werden, wodurch das Leuchten der Supernovaüberreste erklärt werden kann.

Damit ist das eigentliche Phänomen der Pulsare, nämlich die pulsierende elektromagnetische Strahlung, jedoch noch nicht erklärt. Dies ist bis heute nicht vollständig gelungen. Teile der spektralen Energieverteilung sowie der Pulsformen und -abstände können erklärt werden, jedoch immer unter Einbeziehung verschiedener Strahlungsmechanismen. Darüber hinaus ist nicht geklärt, in welchen Regionen der Umgebung eines Pulsars die einzelnen Komponenten des Spektrums erzeugt werden.

Zahlreiche Komponenten des Spektrums des Crab-Pulsars sind in ihrem Ursprung also noch nicht verstanden. So bedürfen auch die oben erwähnten Entdeckungen durch Fermi-LAT sowie MAGIC und VERITAS der VHE-Komponenten im Spektrum des Crab-Pulsars theoretischer Erklärung. Sie sind deshalb geeignet, Modellvorstellungen zur Erzeugung der gepulsten VHE-Strahlung und zur Struktur der Pulsar-Magnetosphäre zu bewerten, also auszuschließen oder zu bestätigen beziehungsweise zu spezifizieren. Indem man versucht, durch sinnvolle Annahmen ein Modell aufzustellen und mit diesem die Beobachtungen zu erklären, kann man die bisherigen Vorstellungen beziehungsweise das bereits verfügbare Wissen neu beurteilen, abändern oder ausbauen. Ein solches theoretisches Modell soll im Rahmen dieser Arbeit aufgestellt werden. Daraufhin wird durch Computer-Simulationen getestet, ob und wie gut die Resultate und Schlussfolgerungen des Modells, im vorliegenden Fall die sich ergebenden Spektren, mit den Beobachtungen übereinstimmen. Somit soll ein Beitrag zum besseren Verständnis der Pulsar-Magnetosphäre und der darin ablaufenden Prozesse erbracht werden. Besonders die Erklärung und Beschreibung der hochenergetischen und der durch MAGIC beobachteten VHE-Komponente soll in dieser Arbeit im Fokus stehen. Wie kann das gemessene VHE-Spektrum erklärt werden? Wie lassen sich die Fermi-Daten theoretisch beschreiben? Wo liegen die höchsten erreichbaren Photonenenergien? Wodurch werden diese beeinflusst? Wie entstehen die Photonen maximaler Energie? Welchen Prozessen unterliegt die Kinetik der Teilchen in der Umgebung von Pulsaren?

In Kapitel 2 werden theoretische Grundlagen erläutert. Zunächst wird in 2.1 die allgemein akzeptierte Vorstellung der physikalischen Struktur der Umgebung von Pulsaren, der Pulsar-Magnetosphäre betrachtet. Daraufhin werden in 2.2 bis 2.4 relevante Wechselwirkungs-Prozesse geladener Teilchen mit Photonen beziehungsweise mit Magnetfeldern erklärt sowie sich ergebende Spektren und Energieverlust-Raten der geladenen Teilchen betrachtet. In Kapitel 3 wird aufbauend auf die Beschreibung der Pulsar-Magnetosphäre aus 2.1 das in dieser Arbeit verwendete Modell sowie alle benötigten Annahmen qualitativ erläutert. Daran anschließend wird es in Kapitel 4 quantitativ ausgewertet. Zunächst wird in 4.1 eine kinetische Gleichung der geladenen Teilchen aufgestellt und numerisch gelöst. Das Krümmungsstrahlungsspektrum dieser Teilchen wird in 4.2 berechnet und das daraus folgende inverse Compton-Strahlungsspektrum daraufhin in 4.3. Ob das verwendete Modell in sich schlüssig, also selbstkonsistent ist, wird in Kapitel 4.4 untersucht. Abschließend werden in Kapitel 5 die Ergebnisse physikalisch analysiert und mit Beobachtungen verglichen. Außerdem wird das Vorstellungsmodell kritisch bewertet und es werden Stärken, Schwächen sowie Verbesserungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Seit der Entdeckung der Pulsare im Jahre 1967 wurden viele Aspekte der Pulsar-Magnetosphäre, also der nahen Umgebung (Atmosphäre) von Pulsaren, und ihrer physikalischen Struktur untersucht. Mit der klassischen Arbeit von Goldreich & Julian [1969] wurde erstmals offenbar, dass die Umgebung von rotierenden, magnetisierten Neutronensternen von einem nicht neutralen Plasma erfüllt ist. Dieses sorgt dafür, dass das elektrische Feld, welches durch das rotierende Magnetfeld induziert wird, keine Komponente entlang der Magnetfeldlinien besitzt. Die Magnetosphäre wird durch den Licht-Zylinder begrenzt, eine gedachte zylinderförmige Fläche, die in dem Abstand vom Neutronenstern liegt, in dem die Rotationsgeschwindigkeit eines starr mitrotierenden Teilchens gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Magnetfeldlinien, die vollständig innerhalb des Licht-Zylinders liegen, sind unmittelbar geschlossen, ähnlich denen eines magnetischen Dipols. Feldlinien, die den Neutronenstern an den Polen verlassen, durchstoßen den Licht-Zylinder und sind erst fernab der Magnetosphäre geschlossen. Sie ermöglichen geladenen Teilchen, vom Neutronenstern nach außen zu strömen oder umgekehrt. Dadurch ist ein magnetosphärischer Stromkreis möglich, der dafür sorgt, dass bestimmte Regionen der Magnetosphäre evakuiert werden. In diesen von Cheng et al. [1986a] vorhergesagten und heute durch Simulationen nachgewiesenen [Hirotani & Shibata, 1999] „Outer Gaps“ existiert ein starkes elektrisches Feld entlang der Magnetfeldlinien, sodass diese Regionen auf geladene Teilchen wie riesige Teilchenbeschleuniger wirken. Ladungsträger erreichen hier extrem relativistische Geschwindigkeiten. Bei der Bewegung entlang der gekrümmten Magnetfeldlinien sind diese Teilchen Gegenstand zahlreicher Wechselwirkungs- und Strahlungsprozesse. Hochenergetische Photonen werden als Krümmungsstrahlung tangential zu den Feldlinien abgestrahlt und bilden so Populationen energiereicher Röntgen- und γ -Strahlung. Zusammen mit anderen Photonen-Feldern, die beispielsweise durch thermische Strahlung von der Neutronenstern-Oberfläche oder durch Synchrotronstrahlung von im Magnetfeld gyrierenden Teilchen dargestellt werden, existiert also ein breites Strahlungsspektrum in der Outer Gap, mit dem die geladenen Teilchen wechselwirken können. Inverse Compton-Streuung eines Photons an einem geladenen Teilchen führt zu einem Energieübertrag vom Teilchen auf das Photon und kann somit zu einer weiteren Photonen-Population führen. Energiereiche Kollisionen von Photonen mit geladenen Teilchen oder von zwei Photonen können außerdem ein Paar aus Elektron und Positron erzeugen und so die Anzahl vorhandener Ladungsträger erhöhen.

Für all dies wird in diesem Kapitel der theoretische Hintergrund aufgezeigt. Zunächst wird in Kapitel 2.1.1 der letztlich unrealistische, aber dafür einfache Fall eines rotierenden, magnetisierten Körpers im Vakuum betrachtet. Nachdem dann in Kapitel 2.1.2 für den weiteren Verlauf wichtige Beziehungen eines Dipol-Feldes erarbeitet werden, wird in Kapitel 2.1.3 im Wesentlichen anhand der Arbeit von Goldreich & Julian [1969] die annähernd realitätsnahe Struktur einer typischen Pulsar-Magnetosphäre untersucht. Daraufhin wird in Kapitel 2.1.4 gemäß der Arbeiten von Cheng et al. [1986a], Hirotani [2005] und Hirotani & Shibata [1999] die Entstehung und Struktur der Outer Gap beschrieben. Einige der in dieser Beschleuniger-Region stattfindenden Prozesse werden anschließend besprochen. Aufbauend auf der Analogie zwischen Synchrotronstrahlung und Krümmungsstrahlung wird in Kapitel 2.2.1 die Energieverlust-Rate, die geladene Teilchen durch Emission von Krümmungsstrahlung erleiden, beschrieben und in Kapitel 2.2.2 das dadurch abgestrahlte Spektrum angegeben. Daraufhin wird nach Rückführung der inversen Compton-Streuung in Kapitel 2.3.2 auf die Compton-Streuung in 2.3.1 und nach kurzer Untersuchung

der relevanten Streuquerschnitte in 2.3.3 die Energieverlust-Rate der streuenden Teilchen im Thomson-Grenzfall in Kapitel 2.3.4 und im Klein-Nishina-Grenzfall in 2.3.5 betrachtet. Daraufhin wird in 2.3.6 ein relativ allgemeiner Ausdruck für das Spektrum invers Compton-gestreuter Photonen erarbeitet. Anschließend wird eine Einführung in den Prozess der Triplet Paar-Erzeugung gegeben. Wegen der langen und komplizierten Beschreibung des differentiellen Streuquerschnitts kann die Energieverlust-Rate von an diesem Prozess teilnehmenden Ladungsträgern nur sehr näherungsweise bestimmt werden. In Kapitel 2.4.1 wird erklärt, wie sie durch numerische Methoden bestimmt werden kann. Abschließend wird in 2.4.2 noch eine analytische Näherung zur Bestimmung der Triplet Paar-Erzeugungs-Energieverlust-Rate erklärt.

2.1 Standardmodell einer Pulsar-Magnetosphäre

Pulsare sind meist keine isolierten Objekte, sondern oft in Supernovaüberreste oder auch in Pulsarwind-Nebel eingebettet. Erstere sind schlicht die leuchtenden Materiereste der äußeren Schichten des Vorläufersterns, die während der Supernova abgeworfen wurden und seither weiterhin ins interstellare Medium (ISM) expandieren. Pulsarwind-Nebel sind Populationen sich relativistisch bewegender, geladener Teilchen, die durch verschiedenartige Wechselwirkungen im Magnetfeld des Pulsars elektromagnetische Strahlung erzeugen und sich meist noch innerhalb des Supernovaüberrestes befinden. Sie sind im Gegensatz zu Supernovaüberresten jedoch nur indirekt Produkte der Supernova. Dafür sind sie enger mit dem Pulsar, der in ihrem Inneren sitzt, verwoben. Tatsächlich werden die geladenen Teilchen durch den schnell rotierenden, stark magnetisierten Neutronenstern generiert. Der Pulsarwind-Nebel ist also ein Erzeugnis des Pulsars und wird deshalb stark von diesem beeinflusst. Wie der Name bereits vermuten lässt werden Pulsarwind-Nebel hauptsächlich vom Wind relativistischer, geladener Teilchen und weniger vom Magnetfeld dominiert. Näher am Pulsar, wo die Magnetfeldstärke größer ist, beherrscht das Magnetfeld maßgeblich die Umgebung. Die ausströmenden Teilchen sind hier zwar nicht vernachlässigbar, jedoch nicht der dominierende Faktor. Deswegen wird dieser Bereich als Pulsar-Magnetosphäre bezeichnet. Deren physikalische Struktur und die in ihr stattfindenden Prozesse versteht man am besten, wenn man zunächst einen idealisierten, einfacheren Fall betrachtet.

2.1.1 Der starr rotierende, scharf begrenzte, magnetisierte, perfekte Leiter

So wurde von Deutsch [1955] ein absolut kugelförmiger Himmelskörper betrachtet, der starr, also nicht differentiell, um eine Rotations-Achse $\vec{\Omega}$ rotiert. Die Geschwindigkeit an einem Punkt \vec{r} ist also in Betrag und Richtung durch die korotierende Geschwindigkeit $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ gegeben. Zudem sei die elektrische Leitfähigkeit im Inneren unendlich groß, und außerhalb des Himmelskörpers, der durch eine dünne Randschicht begrenzt ist, gleich Null. Wegen der perfekten Leitfähigkeit erleiden elektrische Ströme, die im Inneren fließen und ein Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} induzieren, keine Ohmschen Verluste. Die magnetische Diffusionszeit ist unendlich, das Magnetfeld bleibt somit zeitlich erhalten [Baumjohann & Treumann, 1997]. Außerdem gilt dann an jedem Ort \vec{r} im Inneren des Körpers das hydromagnetische Theorem

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}, \quad (2.1)$$

welches das durch das rotierende Magnetfeld induzierte elektrische Feld beschreibt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Im Inneren des perfekt leitenden Körpers steht also das induzierte elektrische Feld immer genau senkrecht auf dem Magnetfeld und wegen $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ verschwindet die Komponente des elektrischen Feldes entlang des Magnetfelds. Man vergegenwärtige sich, dass eigentlich $(\vec{E} \cdot \vec{B})/|\vec{B}|$ die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung des Magnetfelds beschreibt. Dennoch wird diese, wenn auch nicht ganz korrekt, hier und im Folgenden meist mit $\vec{E} \cdot \vec{B}$ bezeichnet.

Mit dieser Beziehung 2.1 kann man nun zeigen [Deutsch, 1955], dass jedes physikalisch mögliche Magnetfeld als ein in den Himmelskörper eingefrorenes Magnetfeld existieren kann: Physikalisch mögliche Magnetfelder sind in diesem Zusammenhang solche, die $\text{div}(\vec{B}) = 0$ erfüllen, also quellenfrei sind. Magnetfelder, die in den rotierenden Körper eingefroren sind, nehmen gleichförmig, also mit gleicher

Winkelgeschwindigkeit an der Rotation des Körpers teil, sie korotieren. Dies bedeutet in einem auf den Himmelskörper zentrierten und auf dessen Rotations-Achse ausgerichteten Kugelkoordinaten-System, dass das Magnetfeld in einem Raumpunkt einzig von dessen radialem Abstand r , Polar-Winkel Θ und Azimutal-Winkel λ abhängt, welcher gegen den Längengrad eines im Körper fixierten Punkts gemessen wird. Dies lässt sich in Form der Gleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

zum Ausdruck bringen [Cowling, 1953].

Wegen Gleichung 2.1 ist die 3. Maxwell-Gleichung, das Faradaysche Induktionsgesetz, erfüllt. Somit sind in den Körper eingefrorene, korotierende Magnetfelder möglich. Insbesondere sind auch achsensymmetrische Magnetfelder oder eine Superposition aus mehreren solchen zulässig, jedoch müssen deren Symmetrie-Achsen nicht zwangsläufig mit der Rotations-Achse des Himmelskörpers übereinstimmen. In einem auf den Himmelskörper zentrierten und auf dessen Magnetfeld-Achse ausgerichteten Kugelkoordinaten-System (r, ϑ, φ) ist ein Magnetfeld genau dann achsensymmetrisch, wenn es keine Abhängigkeit vom magnetischen Azimutal-Winkel φ hat.

Ist ein im Körper eingefrorenes Magnetfeld \vec{B} im Inneren des Himmelskörpers gegeben, so können die Felder im Vakuum außerhalb des Körpers mithilfe der Maxwell-Gleichungen und mit den Randwertbedingungen aus der Elektrodynamik, die besagen, dass an der Grenzschicht zwischen zwei Medien die Normalkomponente (hier die Radialkomponente) des Magnetfelds sowie die Tangentialkomponente des elektrischen Felds stetig sein müssen, berechnet werden. Bemerkenswert ist, dass genau wegen diesen Randwertbedingungen im Fall eines achsensymmetrischen inneren Magnetfelds $\vec{B}(r, \vartheta)$ nur der ϑ -abhängige Teil der radialen Komponente B_r des inneren Magnetfelds die Form des äußeren Magnetfelds bestimmt [Deutsch, 1955]. Für den speziellen Fall eines inneren Magnetfelds $B_r \sim \cos(\vartheta)$, das sich später als dipolförmiges Magnetfeld herausstellt, wurden die elektromagnetischen Feldkomponenten vollständig von Deutsch [1955] berechnet. Die sich ergebenden Ausdrücke lassen sich in übersichtlicher Weise nur in zwei Näherungen darstellen:

- Im Fall $r \ll c/\Omega$ ist das äußere Feld von gleicher geometrischer Struktur wie das innere. Es korotiert mit dem Körper und scheint starr in diesem verankert zu sein. Die Komponenten der Flussdichte des Magnetfelds betragen in einem auf den Himmelskörper mit Radius R zentrierten und auf dessen Rotations-Achse Ω ausgerichteten Kugelkoordinaten-System (r, Θ, λ) :

$$B_r = B_0 \frac{R^3}{r^3} (\cos(\alpha) \cos(\Theta) + \sin(\alpha) \sin(\Theta) \cos(\lambda)) \quad (2.3a)$$

$$B_\Theta = \frac{B_0 R^3}{2 r^3} (\cos(\alpha) \sin(\Theta) - \sin(\alpha) \cos(\Theta) \cos(\lambda)) \quad (2.3b)$$

$$B_\lambda = \frac{B_0 R^3}{2 r^3} \sin(\alpha) \sin(\lambda) \quad (2.3c)$$

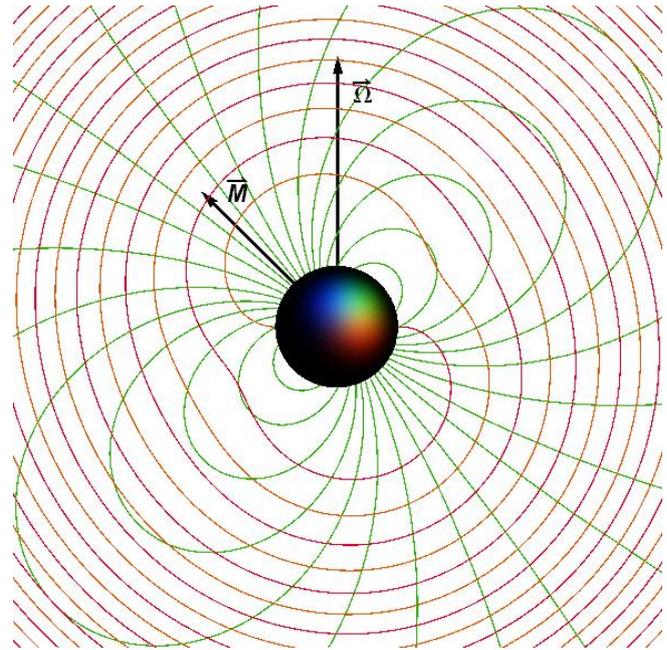


Abb. 2.1: Darstellung der Feldlinien des Magnetfelds (grün) sowie der des elektrischen Feldes (rot, orange) in der Näherung $r \ll c/\Omega$ für den im Text beschriebenen Fall eines in einem perfekten Leiter eingefrorenen magnetischen Feldes in der Ebene $\lambda = 0, \pi$ und für $\alpha = \pi/4$ [Deutsch, 1955]. $\vec{\Omega}$ gibt den Vektor der Winkelgeschwindigkeit (Rotations-Achse) an und \vec{M} ist ein Vektor in Richtung der Symmetrie-Achse des Magnetfelds.

Hier ist α der Deklination genannte Winkel zwischen Rotations-Achse und Magnetfeld-Achse, B_0 die magnetische Flussdichte an den von der Magnetfeld-Achse durchstoßenen Punkten auf der Oberfläche des Himmelskörpers und λ wieder der gegen den von der Magnetfeld-Achse durchstoßenen Längengrad gemessene Azimutal-Winkel. Für den Fall $\alpha = 0$ nimmt das Magnetfeld die bekannte Konfiguration $B_r \sim r^{-3} \cos(\Theta)$, $B_\Theta \sim r^{-3} \sin(\Theta)$ eines Dipol-Feldes an. Es kann außerdem durch Koordinatentransformation in das System (r, ϑ, φ) gezeigt werden [Deutsch, 1955], dass für jeden Wert α die Abhängigkeit $B_r \sim r^{-3} \cos(\vartheta)$, $B_\vartheta \sim r^{-3} \sin(\vartheta)$ und damit ein dipolförmiges Magnetfeld vorliegt. Es bestätigt sich also, dass die Deklination nur die Verdrehung der magnetischen gegen die Rotations-Achse bestimmt. Die Komponenten der elektrischen Feldstärke anzugeben wäre nicht instruktiv. Deswegen ist in Abbildung 2.1 lieber dessen Geometrie in einem beispielhaften Fall gezeigt.

- Im Fall $r \gg c/\Omega$ ist der Dipol-Charakter des Magnetfelds nicht mehr ausgeprägt. Vielmehr spielen Retardationseffekte, also Effekte der Lichtlaufzeit eine Rolle. Die Abhängigkeit jeder der sechs elektrischen Feldstärke- und magnetischen Flussdichtekomponenten von den räumlichen Koordinaten, der Zeit t und der Deklination α ist von der Form $(\sin(\alpha), r^{-1}, \Theta, \Omega \cdot (r/c - t) + \Phi)$. Hier ist Φ eine azimutale Koordinate, die gegen einen im Beobachter-System festen Punkt gemessen wird. Es liegt also eine nach außen propagierende elektromagnetische Welle vor. Deren magnetische Flussdichte steht stets senkrecht auf der elektrischen Feldstärke, welche nur tangential gerichtet ist, das heißt nur in einer Kugeloberfläche um das Zentrum des Koordinatensystems liegt. Die mit dieser Welle verbundene Strahlung lässt sich über den Poynting-Vektor beschreiben und ist direkt proportional zu $\sim \Omega^4 B_0^2 \sin^2(\alpha)$. Für alle Fälle außer $\alpha = 0$ verliert der rotierende Himmelskörper also Energie und Drehimpuls, was zu allmählicher Verlangsamung der Rotation führt.

Der bis hier beschriebene idealisierte Himmelskörper ist kein schlechtes Modell für einen rotierenden, magnetisierten Neutronenstern im Vakuum. Denn ein solcher ist ebenfalls annähernd kugelförmig und das Neutronengitter ist scharf begrenzt, das heißt ohne ausgedehnten Übergang in eine Atmosphäre. Typische Neutronensterne haben zwar eine im Vergleich mit anderen stellaren oder kompakten Objekten hohe Rotationsfrequenz, doch dies ändert prinzipiell nichts an der Zulässigkeit des Modells. Auch die Annahme eines dipolförmigen inneren Magnetfelds wird, begründet durch die Entstehung aus einem Stern, üblicherweise auf Neutronensterne angewandt. Außerdem haben Neutronensterne ebenfalls eine sehr hohe elektrische Leitfähigkeit, die durch die in das Neutronengitter eingebetteten supraleitenden Elektronen und Protonen verursacht wird. Befände sich ein Neutronenstern im Vakuum, so verschwände außerhalb die Leitfähigkeit und das Modell von Deutsch [1955] wäre ebenfalls erfüllt. Jedoch ist genau diese Annahme eines den Neutronenstern umgebenden Vakuums nicht erfüllt, wie Goldreich & Julian [1969] gezeigt haben.

2.1.2 Dipol-Felder

Doch bevor die Umgebung eines rotierenden, stark magnetisierten Neutronensterns näher betrachtet wird, sollen hier kurz die wichtigsten Eigenschaften eines Dipol-Feldes aufgezeigt werden, denn in Pulsar-Modellen wird das Magnetfeld des Neutronensterns meist als dipolförmig angenommen. Ein Dipol-Feld ist in einem Kugelkoordinaten-System (r, Θ, λ) ein Vektor-Feld der Geometrie 2.3. Dabei ist α der Deklination genannte Winkel zwischen der Dipol-Achse und der ausgezeichneten Geraden, gegen die der Polar-Winkel Θ gemessen wird. Der Winkel λ ist wieder ein Azimutal-Winkel, der gegen die Ebene gemessen wird, in der die Dipol-Achse und die ausgezeichnete Gerade liegen. Die Größe $M = B_0 R^3/2$ ist der Betrag des Dipolmoments, der der Kugel vom Radius R mit Flussdichte B_0 am magnetischen Pol zugeordnet werden kann. Die Stärke und Ausrichtung eines dipolförmigen Magnetfelds an allen Raumpunkten wird also vollständig durch den Betrag B_0 der Flussdichte am magnetischen Pol in einem bestimmten radialen Abstand R sowie durch die Deklination α festgelegt. In einem Kugelkoordinatensystem (r, ϑ, φ) , dessen Polar-Winkel ϑ gegen die Dipol-Achse gemessen wird, nimmt das Dipol-Feld, wie bereits oben



erwähnt, die einfache Form

$$B_r = \frac{2M}{r^3} \cos(\vartheta) \quad (2.4a)$$

$$B_\vartheta = \frac{M}{r^3} \sin(\vartheta) \quad (2.4b)$$

$$B_\varphi = 0 \quad (2.4c)$$

an [Deutsch, 1955].

Aus der Form 2.4 kann durch Betragsbildung die Stärke der magnetischen Flussdichte zu

$$B(r, \vartheta) = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\vartheta)} \quad (2.5)$$

bestimmt werden. Am magnetischen Pol $\vartheta = 0$ nimmt B dann wie erwartet den Wert $B(R, 0) = B_0$ an. Der Betrag der magnetischen Flussdichte beträgt am magnetischen Äquator $\vartheta = \pi/2$ hingegen nur $B(R, \pi/2) = B_0/2$.

Oft ist es nützlich, ein Vektor-Feld durch Feldlinien darzustellen. Feldlinien sind Linien, zu denen das an jedem Teilpunkt der Linie ausgewertete Vektor-Feld \vec{B} an diesem Teilpunkt tangential ist. Mathematisch bedeutet dies, dass jedes infinitesimale Linienelement $d\vec{s}(\vec{r})$ der Feldlinie parallel zum Vektor-Feld $\vec{B}(\vec{r})$ an diesem Punkt \vec{r} steht. Es muss also gelten

$$d\vec{s}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.6)$$

Zur weiteren Auswertung für den Fall des obigen Dipol-Feldes 2.3 beschränken wir uns auf den Spezialfall $\lambda = 0, \pi$. Wir betrachten das Dipol-Feld also in der Ebene, in der die beiden Achsen liegen. Da jede Komponente von Gleichung 2.6 erfüllt sein muss, wird die Bedingung 2.6 dann mit 2.3c wegen $\sin(\lambda) = 0$ zu folgendem Gleichungssystem:

$$-ds_\lambda B_\Theta = 0 \quad (2.7a)$$

$$ds_\lambda B_r = 0 \quad (2.7b)$$

$$ds_r B_\Theta - ds_\Theta B_r = 0 \quad (2.7c)$$

Die ersten beiden Gleichungen sind mit $ds_\lambda = 0$ trivial erfüllt und reduzieren das Problem auf ein zweidimensionales. Die Bedingung 2.7c kann mit dem Linienelement in Kugelkoordinaten $ds_r = dr$, $ds_\Theta = r d\Theta$, $ds_\lambda = r \sin(\Theta) d\lambda$ zu

$$\frac{dr}{r d\Theta} = \frac{B_r}{B_\Theta} \quad (2.8)$$

umgeformt werden. Anschaulich bedeutet diese Relation, dass die Verhältnisse von radialem zu polarem Linienelement der Feldlinie und von radialer zu polarer Feldkomponente des Vektor-Feldes gleich sein müssen. Um eine Parametrisierung für die Feldlinien zu erhalten, muss Gleichung 2.8 integriert werden. Die Integrationsvariablen werden mit einem Strich ' versehen, dann bezeichnet r und Θ den Abstand und Polar-Winkel an einem beliebigen Punkt auf einer Feldlinie, die nach Durchführung der Integration und Auflösen nach r mit $r(\Theta)$ parametrisiert ist. Die Wahl der unteren Integrationsgrenzen ist im Rahmen der möglichen Werte, die r' und Θ' annehmen können, beliebig. Hier wählen wir $R_{\pi/2}$ und $\pi/2$, und

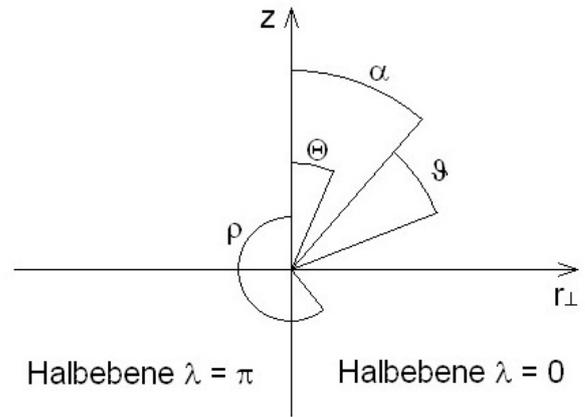


Abb. 2.2: Geometrie zur Betrachtung eines Dipol-Feldes in der Ebene $\lambda = 0, \pi$. Die Achse des Dipols ist unter α gegen die ausgezeichnete z -Achse geneigt. Der Polar-Winkel ϑ wird gegen die Dipol-Achse gemessen, der Polar-Winkel Θ gegen die z -Achse. Der Azimutal-Winkel ϱ , der nur in der Ebene $\lambda = 0, \pi$ definiert ist, wird ebenfalls gegen die z -Achse gemessen. Der geographische Pol beziehungsweise der magnetische Pol befindet sich bei $\Theta = 0, \pi$ beziehungsweise bei $\vartheta = 0, \pi$, der geographische Äquator beziehungsweise der magnetische Äquator befindet sich bei $\Theta = \pi/2$ beziehungsweise bei $\vartheta = \pi/2$. Die Bezeichnung geographische beziehungsweise magnetische Breite meint einen Winkel der gegen den geographischen beziehungsweise magnetischen Äquator gemessen wird.

setzen damit fest, dass eine Feldlinie $r(\Theta)$ am Polar-Winkel $\Theta = \pi/2$ den Wert $r(\pi/2) = R_{\pi/2}$ annimmt. Mit den Komponenten 2.3a und 2.3b ergibt sich

$$\int_{R_{\pi/2}}^r \frac{1}{r'} dr' = \int_{\pi/2}^{\Theta} \frac{\frac{2M}{r'^3} (\cos(\alpha) \cos(\Theta') + \sin(\alpha) \sin(\Theta') \cos(\lambda))}{\frac{M}{r'^3} (\cos(\alpha) \sin(\Theta') - \sin(\alpha) \cos(\Theta') \cos(\lambda))} d\Theta' \quad (2.9)$$

Nach Kürzen von M/r'^3 und Integration mit Hilfe des Computer-Algebra-Systems Wolfram Mathematica ergibt sich

$$\ln\left(\frac{r}{R_{\pi/2}}\right) = \ln\left(\frac{(2 \sin(\alpha - \Theta) - 2 \sin(\alpha + \Theta) + \sin(\alpha - \Theta - \lambda) + (2 \sin(\alpha - \pi/2) - 2 \sin(\alpha + \pi/2) + \sin(\alpha - \pi/2 - \lambda) + \sin(\alpha + \Theta - \lambda) + \sin(\alpha - \Theta + \lambda) + \sin(\alpha + \Theta + \lambda))^2}{(2 \sin(\alpha + \pi/2 - \lambda) + \sin(\alpha - \pi/2 + \lambda) + \sin(\alpha + \pi/2 + \lambda))^2}\right). \quad (2.10)$$

Daraus folgt durch Auflösen nach r und Vereinfachung unter Anwendung trigonometrischer Beziehungen

$$r(\Theta) = R_{\pi/2} (\sin(\Theta) - \cos(\Theta) \cos(\lambda) \tan(\alpha))^2. \quad (2.11)$$

Hier kann jedoch λ nicht als Funktion von Θ angegeben werden. Deswegen soll die Parametrisierung in ein gewöhnliches Polarkoordinaten-System (r, ϱ) , welches in der Ebene $\lambda = 0, \pi$ liegt, überführt werden (siehe Abbildung 2.2). Dabei ist r wieder der radiale Abstand vom Ursprung und ϱ der Azimutal-Winkel, der gegen die Achse gemessen wird, gegen die auch der ursprüngliche Polar-Winkel Θ gemessen wird. Dann kann eine Fallunterscheidung für $\lambda = 0, \pi$ durchgeführt werden:

- Für die Halbebene $\lambda = \pi$ kann in Gleichung 2.11 $\cos(\lambda) = -1$ gesetzt werden. Außerdem gilt hier $\varrho = \Theta$, da ϱ im mathematisch positiven Sinn gemessen wird. Dann ist

$$r(\varrho) = R_{\pi/2} (\sin(\varrho) - \cos(\varrho)(-1) \tan(\alpha))^2 = R_{\pi/2} \cos^{-2}(\alpha) \sin^2(\varrho + \alpha). \quad (2.12)$$

- Für die Halbebene $\lambda = 0$ kann in Gleichung 2.11 $\cos(\lambda) = +1$ gesetzt werden. Hier gilt $\varrho = 2\pi - \Theta$ und es folgt auch hier

$$r(\varrho) = R_{\pi/2} (\sin(2\pi - \varrho) - \cos(2\pi - \varrho) \tan(\alpha))^2 = R_{\pi/2} \cos^{-2}(\alpha) \sin^2(\varrho + \alpha). \quad (2.13)$$

Der zweite Teil von 2.12 und 2.13 stellt also einen geschlossenen Ausdruck für die Parametrisierung von Feldlinien eines unter dem Winkel α gegen eine ausgezeichnete Achse geneigten Dipol-Feldes in der Ebene, in der beide Achsen liegen, dar. Der Abstand der Feldlinien vom Ursprung bei $\varrho = \pi/2, 3\pi/2$ ist gleich $R_{\pi/2}$.

Die Feldlinien haben offensichtlich ihren maximalen Abstand vom Ursprung bei $\varrho = \pi/2 - \alpha$ (beziehungsweise auch bei $\varrho = 3\pi/2 - \alpha$), denn hier ist der Sinus extremal. Im dreidimensionalen Fall nennt man diese Ebene magnetischen Äquator. Nun ist also $r(\pi/2 - \alpha) = R_{\pi/2} \cos^{-2}(\alpha)$. Man kann deswegen $R_{\pi/2} \cos^{-2}(\alpha) = R_{\text{äq}}$ schreiben und drückt damit aus, dass $R_{\text{äq}}$ der radiale Abstand einer Feldlinie am magnetischen Äquator ist. Die Parametrisierung einer Feldlinie lautet dann kompakt

$$r(\varrho) = R_{\text{äq}} \sin^2(\varrho + \alpha). \quad (2.14)$$

Für die spätere Betrachtung der Pulsar-Magnetosphäre ist der Punkt einer magnetischen Feldlinie, an dem diese senkrecht zur Rotations-Achse des Neutronensterns verläuft, von Bedeutung. Deswegen wird jetzt für das allgemeine Dipol-Feld ein analoger Punkt beziehungsweise eine Punktmenge untersucht. Gesucht ist die Menge von Punkten, in denen die Feldlinien des Dipol-Feldes senkrecht zu einer ausgezeichneten Achse laufen. Für diese Achse wählen wir wieder die, gegen die der Polar-Winkel Θ gemessen wird. Außerdem betrachten wir das Problem in der Halbebene $\lambda = 0$, in der beide Achsen liegen. Nun wird ein kartesisches Koordinatensystem so in diese Ebene gelegt, dass dessen z -Achse parallel zu der Achse, gegen die Θ gemessen wird, ist. Dann lässt sich das Problem umformulieren zu:

Gesucht ist die Menge von Punkten, an denen die Feldlinien keine Änderung in z -Richtung erfahren. Dies ist genau an den Punkten der Fall, an denen das Vektor-Feld eine verschwindende z -Komponente annimmt, das heißt an denen $B_z = 0$ gilt. Diese Bedingung wird mit $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\Theta \vec{e}_\Theta + B_\lambda \vec{e}_\lambda$ und den z -Komponenten von $\vec{e}_r = (\sin(\Theta) \cos(\lambda)) \vec{e}_x + (\sin(\Theta) \sin(\lambda)) \vec{e}_y + \cos(\Theta) \vec{e}_z$ sowie mit $\vec{e}_\Theta = (\cos(\Theta) \cos(\lambda)) \vec{e}_x + (\cos(\Theta) \sin(\lambda)) \vec{e}_y - \sin(\Theta) \vec{e}_z$ und $\vec{e}_\lambda = -\sin(\lambda) \vec{e}_x + \cos(\lambda) \vec{e}_y$ sowie mit den Komponenten 2.3 zu

$$0 = B_z = + \frac{B_0 R^3}{r^3} \cos(\Theta_{B_z=0}) \left(\cos(\alpha) \cos(\Theta_{B_z=0}) + \sin(\alpha) \sin(\Theta_{B_z=0}) \right) - \frac{B_0 R^3}{2r^3} \sin(\Theta_{B_z=0}) \left(\cos(\alpha) \sin(\Theta_{B_z=0}) - \sin(\alpha) \cos(\Theta_{B_z=0}) \right) \quad (2.15)$$

spezifiziert, was sich umformen lässt zu

$$0 = \frac{1}{2} (3 \cos(2\Theta_{B_z=0} - \alpha) + \cos(\alpha)) \quad (2.16)$$

und offensichtlich nicht von r abhängig ist. Die Menge von Punkten, für die ein Dipol-Feld keine Komponente entlang der z -Achse hat, besteht also, wie man durch Auflösen nach dem Winkel

$$\Theta_{B_z=0} = \frac{1}{2} \left(\alpha \pm \arccos \left(-\frac{\cos(\alpha)}{3} \right) \right) \quad (2.17)$$

erfährt, in der Ebene $\lambda = 0, \pi$ aus zwei Geraden, die unter $\Theta_{B_z=0}$ gegen die z -Achse gewinkelt sind. Die Parametrisierung dieser $B_z = 0$ -Geraden lautet in der Ebene $\lambda = 0, \pi$ dann

$$z = \tan^{-1}(\Theta_{B_z=0}) r_\perp, \quad (2.18)$$

wobei r_\perp eine kartesische Koordinate senkrecht zur z -Achse ist. r_\perp ist dann der senkrechte Abstand eines Punktes von der z -Achse und entspräche in einem Zylinderkoordinaten-System der radialen Koordinate. Die Erweiterung dieser Geraden ins Dreidimensionale ergibt eine Fläche, für die $B_z = 0$ gilt. Diese $B_z = 0$ -Fläche besteht dann aus zwei Kegelmanteln, deren Kegel-Achse jedoch im Allgemeinen nicht mit der Dipol-Achse zusammen fällt.

Des weiteren ist es nützlich, den senkrechten Abstand r_\perp des Schnittpunktes einer bestimmten Feldlinie von äquatorialem Radius $R_{\text{äq}}$ mit der $B_z = 0$ -Geraden von der z -Achse zu bestimmen. Dazu bemerken wir, dass $r = \sqrt{z^2 + r_\perp^2}$ gilt. In der Parametrisierung 2.14 einer Feldlinie von äquatorialem Radius $R_{\text{äq}}$ muss der Azimutal-Winkel ϱ nun wieder durch den Winkel $\varrho = 2\pi - \Theta$ ersetzt werden, was in der Halbebene $\lambda = 0$ gilt. 2.14 lässt sich dann unter Nutzung der Parametrisierung 2.18 der $B_z = 0$ -Geraden und unter Nutzung der 2π -Periodizität des Sinus umschreiben zu

$$\sqrt{\tan^{-2}(\Theta_{B_z=0}) r_\perp^2 + r_\perp^2} = R_{\text{äq}} \sin^2(-\Theta_{B_z=0} + \alpha). \quad (2.19)$$

Die Neigung der $B_z = 0$ -Geraden ist durch Gleichung 2.17 gegeben. Damit kann nach Auflösen von 2.19 nach $r_\perp/R_{\text{äq}}$ und Einsetzen von 2.17 der senkrechte Abstand des $B_z = 0$ -Punktes einer Feldlinie mit äquatorialem Radius $R_{\text{äq}}$ von der z -Achse in Einheiten von $R_{\text{äq}}$ ausgedrückt werden:

$$\frac{r_{\perp, \pm}}{R_{\text{äq}}} = \sqrt{\frac{\sin^4 \left(\alpha - \frac{1}{2} (\alpha \pm \arccos(-\cos(\alpha)/3)) \right)}{\tan^{-2} \left(\frac{1}{2} (\alpha \pm \arccos(-\cos(\alpha)/3)) \right) + 1}} \quad (2.20)$$

Die Feldlinie eines um $\alpha = \pi/3$ geneigten Dipol-Feldes mit den zugehörigen $B_z = 0$ -Linien sind beispielhaft in Abbildung 2.3 gezeigt. In diesem Beispiel beträgt $\frac{r_{\perp, +}}{R_{\text{äq}}} \approx 0,11$ und $\frac{r_{\perp, -}}{R_{\text{äq}}} \approx 0,33$. Für den Spezialfall des ausgerichteten Dipol-Feldes mit $\alpha = 0$ fallen beide Abstände zusammen und es ist $\frac{r_{\perp, +}}{R_{\text{äq}}} = \frac{r_{\perp, -}}{R_{\text{äq}}} \approx 0,54$. Bei der späteren Betrachtung der physikalischen Vorgänge in der Pulsar-Magnetosphäre wird man einsehen, dass sich geladene Teilchen entlang von Dipol-Feldlinien bewegen und dabei Strahlung aussenden. Für Berechnungen in Zusammenhang mit dieser Krümmungsstrahlung wird der Krümmungsradius einer

Feldlinie von Belang sein. Der Krümmungsradius einer parametrisierten Kurve an einem Punkt dieser Kurve ist der Radius desjenigen parametrisierten Kreises, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert, das heißt dessen 0., 1. und 2. Ableitung nach dem Parameter an diesem Punkt jeweils mit der 0., 1. und 2. Ableitung der Kurve nach deren Parameter an diesem Punkt übereinstimmt [Fischer & Kaul, 2006]. Es kann gezeigt werden, dass der so definierte Krümmungsradius für eine zweidimensionale, mit dem Parameter t in einem kartesischen Koordinatensystem parametrisierte Kurve $x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$ durch den Ausdruck

$$r_K = \frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{z}(t) + \dot{z}(t)\ddot{x}(t)|} \quad (2.21)$$

gegeben ist [Fischer & Kaul, 2006], wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter t bezeichnet. Um dies auf die Kurve der Feldlinien des Dipol-Feldes anzuwenden, gehen wir von der Parametrisierung 2.14 in der Form $r = R_{\text{äq}} \sin^2(\varrho)$ aus. Es wird also der auf die ausgezeichnete Achse, die hier mit der Dipol-Achse übereinstimmt, bezogene Azimutal-Winkel ϱ als Parameter verwendet. Bis auf die Ersetzung der r_{\perp} -Achse durch die x -Achse stimmt das nun verwendete kartesische Koordinatensystem mit dem in Abbildung 2.2 gezeigten überein. r gibt offensichtlich die Komponente der Kurve in Richtung des radialen Einheitsvektors an, für den jedoch $\vec{e}_r = \sin(\varrho)\vec{e}_x + \cos(\varrho)\vec{e}_z$ gilt. Damit ergibt sich die Parametrisierung der Kurve von Feldlinien zu

$$x(\varrho) = R_{\text{äq}} \sin^3(\varrho) \quad (2.22a)$$

$$z(\varrho) = R_{\text{äq}} \sin^2(\varrho) \cos(\varrho). \quad (2.22b)$$

Damit und mit Gleichung 2.21 lässt sich nun unter Anwendung von Wolfram Mathematica und mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen der Krümmungsradius einer Dipol-Feldlinie mit äquatorialem Abstand $R_{\text{äq}}$ zu

$$r_K = \frac{(3 \cos(2\varrho) + 5)^{3/2}}{3\sqrt{2} \cdot (\cos(2\varrho) + 3)} \sqrt{R_{\text{äq}}^2 \sin^2(\varrho)} \quad (2.23)$$

bestimmen. Der Bruch ist eine zwischen den Werten $4/3$ und $1/3$ oszillierende Funktion und somit von der Größenordnung 1. Deshalb kann der Krümmungsradius größenordnungsmäßig durch den Ausdruck

$$r_K = \sqrt{R_{\text{äq}}^2 \sin^2(\varrho)} \quad (2.24a)$$

$$= \sqrt{R_{\text{äq}} \cdot r} \quad (2.24b)$$

angenähert werden, was eine häufig verwendete [Tang et al., 2008], vereinfachte Parametrisierung des Krümmungsradius einer Dipol-Feldlinie von äquatorialem Radius $R_{\text{äq}}$ ist.

2.1.3 Das Goldreich-Julian-Modell der Pulsar-Magnetosphäre

Bis Ende der 1960er Jahre wurde angenommen, dass Neutronensterne durch einen in Vakuum befindlichen, scharf begrenzten Körper beschrieben werden können. Die Skalenhöhe der radialen Dichteverteilung wird nämlich durch die starke Gravitation des Neutronensterns auf die Größenordnung cm reduziert, was im Vergleich zum Radius R tatsächlich vernachlässigbar wäre und die Beschreibung durch das Modell von Deutsch [1955] rechtfertigte.

Jedoch konnten Goldreich & Julian [1969] zeigen, dass dem nicht so ist. Dazu betrachte man den einfachen

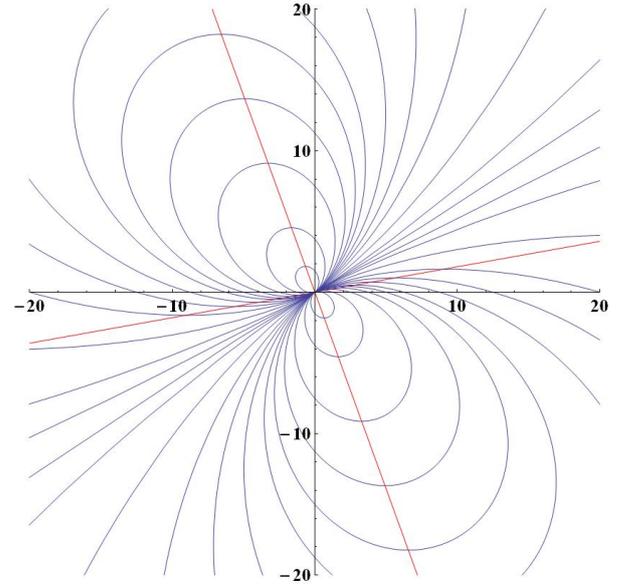


Abb. 2.3: Darstellung der Feldlinien (blau) eines Dipol-Feldes für den Fall $\alpha = \pi/3$ sowie der zugehörigen $B_z = 0$ -Geraden (rot) im Koordinatensystem von Abbildung 2.2, jedoch in dimensionslosen Einheiten. Die Feldlinien schneiden die $B_z = 0$ -Geraden dort, wo die Feldlinien senkrecht zur z -Achse verlaufen. Es wurde beliebig $R_{\text{äq}} = 2, 5, 10, 15, 20, 25, 35, 50, 80, 200, 1000, 10000$ gewählt.

Fall eines zunächst noch in Vakuum befindlichen, mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi/P$ rotierenden Neutronensterns mit dipolförmigem Magnetfeld, dessen Symmetrie-Achse parallel zur Rotations-Achse steht. In diesem Fall ist das Problem also achsensymmetrisch. Für das von Deutsch [1955] berechnete Magnetfeld würde sowohl für $r \gg c/\Omega$ als auch für $r \ll c/\Omega$ für die Komponenten des Magnetfelds $B_r \neq 0, B_\Theta \neq 0$ und $B_\lambda = 0$ gelten, das heißt nur die radiale und polare Komponente der magnetischen Flussdichte wäre nicht verschwindend. Bei Vorhandensein von Achsensymmetrie wird die Komponente eines Vektor-Feldes, die in der Ebene $\text{span}(\vec{e}_r, \vec{e}_\Theta)$ liegt, oft als poloidale Komponente bezeichnet, während die azimutale Komponente auch oft als toroidale Komponente bezeichnet wird [Chandrasekhar, 1961]. Im vorliegenden Fall wäre das Magnetfeld von Deutsch [1955] also nur poloidal gerichtet.

Außerdem wird nun von Goldreich & Julian [1969] angenommen, dass die elektrische Leitfähigkeit im Inneren des Neutronensterns perfekt ist, wodurch das hydromagnetische Theorem 2.1 erfüllt ist. Daraus kann über $\vec{E} = -\text{grad}(\Phi_{\text{el}})$ das elektrostatische Potenzial Φ_{el} im Inneren berechnet werden. Da das Potenzial Φ_{el} an der Grenzschicht von Neutronenstern zu Vakuum stetig sein muss, kann nun aus Φ_{el} mit Hilfe der Laplace-Gleichung $\text{div}(\text{grad}(\Phi_{\text{el}})) = 0$, die ja gemäß der Annahme, der Neutronenstern sei umgeben von ladungsfreiem Raum, anwendbar ist, das Potenzial Φ_{el} außerhalb des Neutronensterns gewonnen werden. Aus diesem ergibt sich wiederum mit $\vec{E} = -\text{grad}(\Phi_{\text{el}})$ das elektrische Feld außerhalb des Neutronensterns, welches mit dem von Deutsch [1955] im Grenzfall $r \ll c/\Omega$ für $\alpha = 0$ übereinstimmt. Es stellt sich dann heraus, dass die Komponente von \vec{E} in Richtung des Magnetfeldvektors \vec{B} am Ort (r, Θ) den Wert

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = -\frac{\Omega R}{c} \left(\frac{R}{r}\right)^7 B_0^2 \cos^3(\Theta) \quad (2.25)$$

annimmt [Goldreich & Julian, 1969], wobei B_0 wieder die magnetische Flussdichte am Pol der Sternoberfläche ist. Im Gegensatz zu $\vec{E} \cdot \vec{B}$ innerhalb des Neutronensterns (siehe Kapitel 2.1.1) ist das elektrische Feld entlang des Magnetfelds hier also nicht verschwindend. $\vec{E} \cdot \vec{B}$ wächst also innerhalb einer dünnen Schicht an der Sternoberfläche von Null auf den Wert 2.25 an. Da \vec{B} eine nicht verschwindende radiale Komponente besitzt, gilt dies auch für das elektrische Feld. Dieses hat somit an der Stern-Oberfläche eine nicht verschwindende Normalkomponente.

In Kapitel 2.1.1 wurde die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an einer Grenzschicht zwischen zwei Medien genutzt, um das Feld außerhalb der Grenzschicht zu beschreiben. Die Normalkomponente des elektrischen Feldes muss hingegen nicht stetig sein, sondern kann an der Grenzschicht einen Sprung aufweisen. Genau dies ist beim betrachteten Neutronenstern auch der Fall. Jedoch geht mit einer Diskontinuität der normalen Komponente des elektrischen Feldes eine nicht verschwindende Flächenladungsdichte σ im Bereich der Grenzschicht einher. Es befindet sich also eine Schicht aus elektrischen Ladungen auf der Oberfläche des Neutronensterns [Goldreich & Julian, 1969].

Auf diese Ladungen wirkt nun die durch das äußere elektrische Feld hervorgerufene Kraft entlang der Magnetfeldlinien. Diese Kraft wirkt je nach Vorzeichen der Flächenladungsdichte σ in Richtung oder entgegen der nach innen gerichteten Gravitationskraft. Sie ist jedoch für Elektronen beziehungsweise Positronen und typische Neutronenstern-Parameter um $\approx 8 \cdot 10^{11} \cos^2(\Theta)/P$ größer als die Gravitationskraft [Goldreich & Julian, 1969]. Somit werden die geladenen Teilchen der Ladungsschicht aus der Sternoberfläche herausgerissen und strömen entlang der magnetischen Feldlinien in die ursprünglich als Vakuum angenommene Umgebung.

Der Zustand, in dem der Neutronenstern von Vakuum umgeben ist, ist also instabil und deswegen nicht realisiert. Vielmehr ist die Umgebung des Neutronensterns von entlang der Magnetfeldlinien beweglichen Ladungsträgern erfüllt. Die Leitfähigkeit dieser Region ist deshalb zwar stark anisotrop, doch entlang der Feldlinien sehr hoch. Die Ladungsträger können also frei entlang der Magnetfeldlinien fließen, sind jedoch ansonsten an diese gebunden. Da, wie in Kapitel 2.1.1 gezeigt wurde, das Magnetfeld für $r \ll c/\Omega$ starr mit dem Neutronenstern mitrotiert, das heißt korotiert, gilt dies auch für die daran haftenden Ladungsträger.

Die Ladungen ordnen sich nun, bedingt durch die Komponente des elektrischen Feldes entlang des Magnetfelds, so an, dass $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ wird, das heißt sie kompensieren den Teil des elektrischen Feldes entlang des Magnetfelds zu Null. Somit sind die Magnetfeldlinien hier elektrische Äquipotentiallinien. Das elektrische Feld stellt sich also so ein, dass es senkrecht auf dem Magnetfeld steht, was sich dank der sehr

hohen Leitfähigkeit wieder durch das hydromagnetische Theorem 2.1 beschreiben lässt. Diesmal ist jedoch die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel\vec{B}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ allgemein die Summe aus der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\parallel\vec{B}}$ entlang der Magnetfeldlinien und der toroidalen Geschwindigkeit durch die korotierenden Ladungen. Wegen des Kreuzprodukts im hydromagnetischen Theorem trägt der Teil $\vec{v}_{\parallel\vec{B}}$ der Geschwindigkeit jedoch nicht zum elektrischen Feld bei. Das hydromagnetische Theorem lautet dann

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}}{c}. \quad (2.26)$$

Dieses elektrische Feld wird durch eine bestimmte Ladungs-Verteilung aufrecht erhalten. Deren Dichte ρ kann durch die 1. Maxwell-Gleichung $4\pi\rho = \text{div}(\vec{E})$ bestimmt werden und ergibt sich gemäß Goldreich & Julian [1969] zu

$$\rho_{\text{GJ}}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r})}{2\pi c(1 - (\Omega r \sin(\Theta)/c)^2)}. \quad (2.27)$$

Dies ist die sogenannte Goldreich-Julian-Ladungsdichte. Sie hängt offensichtlich sowohl von der radialen und polaren Koordinate des Raumpunktes \vec{r} als auch von dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit Ω und der magnetischen Flussdichte $B(\vec{r})$ sowie dem Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{\Omega}$ und $\vec{B}(\vec{r})$ ab, der nicht mit Θ verwechselt werden sollte. Mit der Ladung q der vorherrschenden Teilchen kann nun die Anzahl-Dichte $\rho_{\text{GJ}}(\vec{r})/q$ dieser Teilchen bestimmt werden. Dies gilt jedoch nur unter der Annahme, dass im Volumenelement an diesem Raumpunkt \vec{r} vollständige Ladungs-Trennung vorliegt, das heißt, dass dieses Volumenelement nur von Teilchen mit dem gleichen Betrag und dem gleichen Vorzeichen der Ladung bevölkert wird. Befinden sich im Volumenelement an einem Punkt zum Beispiel sowohl Elektronen als auch Positronen, so trägt nur der Überschuss der beiden Anzahl-Dichten zu ρ_{GJ} bei, da positive und negative Ladungen des gleichen Betrags sich gegenseitig ausgleichen.

Das Vorzeichen der Goldreich-Julian-Ladungsdichte ρ_{GJ} hängt offenbar von der Stellung des Vektors der magnetischen Flussdichte \vec{B} gegenüber dem Winkelgeschwindigkeits-Vektor $\vec{\Omega}$ ab. ρ_{GJ} ist positiv, wenn $\vec{\Omega} \cdot \vec{B}$ negativ ist, und umgekehrt. Die Flussdichte \vec{B} verhält sich aber näherungsweise entsprechend der Dipol-Geometrie 2.4 und steht deswegen nicht immer in der gleichen Richtung bezüglich $\vec{\Omega}$. Darum gibt es einen Bereich in der Umgebung des Pulsars, an dem die Goldreich-Julian-Ladungsdichte positiv ist, und einen, an dem sie negativ ist (siehe Abbildung 2.4, Titelbild). Diese beiden Bereiche werden von einer Fläche getrennt, an der die Goldreich-Julian-Ladungsdichte verschwindet. Für diese $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche gilt also $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} = 0$, das heißt der Vektor der magnetischen Flussdichte steht senkrecht auf dem Winkelgeschwindigkeits-Vektor. Dies ist genau dort der Fall, wo die magnetischen Feldlinien keine Änderung in Richtung von $\vec{\Omega}$ erfahren. In Kapitel 2.1.2 wurde bereits die Menge von Punkten gesucht, an denen ein Dipol-Feld keine Komponente in Richtung einer ausgewiesenen Achse (der z -Achse) hat. Diese Punktmenge wurde $B_z = 0$ -Fläche genannt. Wählen wir nun die Rotations-Achse $\vec{\Omega}$ des Neutronensterns als ausgewiesene Achse, so fällt die $B_z = 0$ -Fläche aus Kapitel 2.1.2 mit der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche zusammen. Aus Gleichung 2.17 folgt dann, dass im von Goldreich & Julian [1969] betrachteten Fall die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche aus zwei Teilflächen besteht, die jeweils einen Kegelmantel darstellen und unter einem Winkel von $0,5 \cdot \arccos(-1/3) \approx 55^\circ$ beziehungsweise $\pi - 0,5 \cdot \arccos(-1/3) \approx 125^\circ$ gegen die Rotations-Achse geneigt sind (siehe Abbildung 2.4).

Die Ladungen der Goldreich-Julian-Ladungsdichte befinden sich in Korotation mit dem Neutronenstern, solange der Betrag ihrer Korotationsgeschwindigkeit $|\vec{\Omega} \times \vec{r}| = \Omega r \sin(\Theta) = \Omega r_{\perp}$ die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigt. Die Fläche, an der dies jedoch der Fall ist, das heißt an der $\Omega r_{\perp} = c$ erfüllt ist, nennt man Lichtgeschwindigkeits-Zylinder oder kurz Licht-Zylinder. Dies ist eine zylinderförmige Fläche, deren Achse mit der Rotations-Achse des Neutronensterns zusammen fällt und deren Abstand von dieser Achse $r_{\perp} = c/\Omega = R_{\text{LZ}}$ beträgt (siehe Abbildung 2.4). Typische Werte für Licht-Zylinder betragen $R_{\text{LZ}} \approx 10^7 - 10^{10}$ cm und damit das 10- bis 10^4 -fache eines typischen Neutronensternradius.

Ladungsträger außerhalb des Licht-Zylinders können sich nicht in strikter Korotation befinden. Sie müssen eine zusätzliche, in Bezug auf die Rotationsrichtung gegenläufige Geschwindigkeitskomponente haben, um sich nicht schneller als mit c fortzubewegen. Da Ladungsträger jedoch an Magnetfeldlinien haften und umgekehrt, führt dies dazu, dass die Magnetfeld-Konfiguration außerhalb des Licht-Zylinders

Abb. 2.4: siehe Titelbild

Struktur der Pulsar-Magnetosphäre nach dem Goldreich-Julian-Modell gemäß Goldreich & Julian [1969]. Mitig ist der Neutronenstern zu sehen, dessen Rotations-Achse als auch dessen Symmetrie-Achse des Magnetfelds vertikal stehen, sodass über den Polen $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} > 0$ gilt. Der Polar-Winkel Θ wird gegen die Rotations-Achse gemessen. Der Bildausschnitt zeigt die Magnetfeldlinien in einer Ebene mit festem Azimutal-Winkel. Die grün gezeichnete korotierende Magnetosphäre besteht aus der Menge aller direkt geschlossenen und näherungsweise dipolförmigen Feldlinien. Sie wird begrenzt von der letzten geschlossenen Feldlinie, deren maximale Ausdehnung gleich dem Radius $R_{LZ} = c/\Omega$ des Licht-Zylinders ist. Die offenen Feldlinien haben nahe des Neutronensterns ebenfalls annähernd Dipol-Geometrie, in der Nähe des Licht-Zylinders nimmt jedoch die Abweichung von der Dipol-Geometrie zu. Eine zusätzliche radiale Komponente (sowie eine in dieser Zeichnung nicht sichtbare toroidale Komponente) wird zunehmend dominanter, sodass außerhalb des Licht-Zylinders, in der Wind-Zone, die radiale (und toroidale) Komponente vorherrscht. Entlang der kritischen Feldlinie, die den Licht-Zylinder senkrecht durchstößt, fließen keine Ladungen bevorzugt in eine Richtung, da hier keine Potenzialdifferenz zwischen Neutronenstern-Oberfläche und Außenbereich des Supernovaüberrestes vorliegt. Elektronen (Positronen und Protonen) fließen entlang der Feldlinien von der Oberfläche nach außen ab, die im Vergleich zur kritischen Feldlinie bei kleinerem (größerem) Polar-Winkel Θ liegen. Ebenfalls eingezeichnet ist die in Bezug auf die Rotations-Achse um $\approx 55^\circ$ geneigte $\rho_{GJ} = 0$ -Gerade, an der die Goldreich-Julian-Ladungsdichte ρ_{GJ} verschwindet. Bei kleinerem (größerem) Polar-Winkel ist ρ_{GJ} negativ (positiv), das heißt hier bevölkern bei vollständiger Ladungs-Trennung Elektronen (Positronen) die Magnetosphäre. Das Vorzeichen von ρ_{GJ} ist durch die Zeichen $+/-$ symbolisiert.

nicht mehr rein dipolförmig sein kann [Goldreich & Julian, 1969]. Hier müssen die Magnetfeldlinien eine toroidale Komponente haben, sodass die Ladungsträger durch Gleiten entlang der Magnetfeldlinien die Korotation insoweit kompensieren können, dass die Gesamtgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigt.

Zu der toroidalen Komponente der magnetischen Feldlinien außerhalb des Licht-Zylinders kommt noch hinzu, dass die Feldlinien hier nicht mehr direkt geschlossen sind, das heißt dass die poloidale Komponente einer Feldlinie, die die Neutronenstern-Oberfläche bei Θ_{Oberf} und bei $\pi - \Theta_{\text{Oberf}}$ verlässt, sich nicht mehr gemäß Gleichung 2.14 verhält, sondern dass die beiden Teilstücke, die die Oberfläche bei Θ_{Oberf} und bei $\pi - \Theta_{\text{Oberf}}$ verlassen, zunächst annähernd Dipol-Geometrie annehmen, dann in der Nähe des Licht-Zylinders vorwiegend radial verlaufen und erst weit außerhalb des Licht-Zylinders, in den äußeren Bereichen der Supernova-Kavität miteinander verbunden sind.

Die Feldlinie, die vom Licht-Zylinder tangiert wird, ist die äußerste noch direkt geschlossene Feldlinie. Man nennt sie deshalb letzte geschlossene Feldlinie (siehe Abbildung 2.4). Sie hat im Fall $\alpha = 0$ definitionsgemäß einen äquatorialen Abstand $R_{\text{äq}} = R_{LZ}$. Mit der Parametrisierung 2.14 (im Fall $\alpha = 0$ und mit der Ersetzung $\varrho = \Theta \forall \varrho < \pi$) einer Dipol-Feldlinie kann nun der Polar-Winkel berechnet werden, bei dem die letzte geschlossene Feldlinie die Neutronenstern-Oberfläche durchstößt, wenn man in 2.14 den Radius r der Feldlinie mit dem Neutronensternradius R gleichsetzt und dann nach dem Polar-Winkel auflöst. Mit der wegen $R/R_{LZ} \ll 1$ zulässigen Kleinwinkelnäherung ergibt sich

$$\Theta_{\text{Oberf,Polk}} = \sqrt{R/R_{LZ}}. \quad (2.28)$$

Den Bereich der Neutronenstern-Oberfläche mit $\Theta < \Theta_{\text{Oberf,Polk}}$ beziehungsweise mit $\Theta > \pi - \Theta_{\text{Oberf,Polk}}$ nennt man Polkappe des Neutronensterns. Im Fall $\alpha \neq 0$ ist dann die magnetische Polkappe gemeint und sie ist wieder dadurch definiert, dass sie von den Punkten begrenzt wird, an denen die letzten geschlossenen Feldlinien die Neutronenstern-Oberfläche durchstoßen. In diesem Fall ist jedoch die einfache Beziehung 2.28 nicht mehr haltbar.

Den Teil der Umgebung eines Pulsars, der vom rotierenden Magnetfeld dominiert wird, nennt man allgemein Magnetosphäre. Meistens ist damit speziell der Teil innerhalb des Licht-Zylinders gemeint, denn außerhalb davon nehmen die relativistisch entlang der Feldlinien ausströmenden Teilchen eine immer wichtiger werdende Rolle beim Energietransport und bezüglich der Formung des Magnetfelds ein.

Der Bereich innerhalb der letzten geschlossenen Feldlinie befindet sich in strikter Korotation mit dem Neutronenstern. Einzelne Ladungsträger können hier zwar zusätzlich zur Geschwindigkeitskomponente durch Korotation noch eine poloidale Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_{\parallel\vec{B}}$, also eine entlang der Feldlinien, besitzen, doch es findet sich dann wegen der Symmetrie in Bezug auf die Äquatorebene immer

eine Ladung gleichen Vorzeichens, die sich in entgegengesetzter Richtung entlang der Feldlinie bewegt. Die Geschwindigkeitskomponenten $\vec{v}_{\parallel \vec{B}}$ entlang des Magnetfelds kompensieren sich also und es resultiert strikte Korotation. Deswegen wird dieser Teil der Magnetosphäre korotierende Magnetosphäre genannt (siehe Abbildung 2.4).

Davon ist der Bereich der Magnetosphäre zu unterscheiden, der von den Feldlinien durchzogen ist, die den Neutronenstern an der Polkappe verlassen und nicht direkt geschlossen sind. Diese Feldlinien nennt man offene Feldlinien (siehe Abbildung 2.4). Sie sind zunächst, das heißt bei kleinen Abständen vom Neutronenstern, dipolförmig. In der Nähe des Licht-Zylinders beginnt jedoch eine zusätzliche radiale Komponente zu dominieren, die durch die toroidal korotierenden Ladungen innerhalb des Licht-Zylinders hervorgerufen wird. Außerdem ist hier wieder eine toroidale Komponente des Magnetfelds vorhanden, die durch die poloidal entlang der offenen Feldlinien ausströmenden Ladungen erzeugt wird. Die Fortsetzungen der offenen Feldlinien erfüllen, wie oben beschrieben, den Bereich außerhalb des Licht-Zylinders und reichen bis in den umgebenden Pulsarwind-Nebel beziehungsweise Supernovaüberrest. Den Bereich außerhalb des Licht-Zylinders nennt man Wind-Zone, da hier der Strom (Wind) elektrisch geladener Teilchen maßgeblich die Magnetfeld-Struktur beeinflusst. Teilweise wird die Bezeichnung Wind-Zone auch schon auf den von offenen Feldlinien durchsetzten Teil der Magnetosphäre innerhalb des Licht-Zylinders angewandt [Mestel, 1971].

Ladungsträger können sich entlang der offenen Feldlinien fortbewegen und die Magnetosphäre verlassen. Außerhalb des Licht-Zylinders muss dies sogar geschehen, denn andernfalls wäre die Gesamtgeschwindigkeit wieder $> c$. Welche Ladungen entlang welcher Feldlinien ausströmen, hängt davon ab, welches elektrostatische Potenzial Φ_{el} der Fußpunkt einer bestimmten Feldlinie auf der Neutronenstern-Oberfläche gegenüber dem Potenzial am äußeren Ende dieser Feldlinie beziehungsweise näherungsweise dem Potenzial des ISM hat. Im Fall von parallelen Dipol- und Winkelgeschwindigkeits-Vektoren nimmt das Potenzial Φ_{el} vom Wert 0 am Äquator zu den Polen hin ab und an zwei Punkten Θ_{krit} und $\pi - \Theta_{\text{krit}}$ ist das Potenzial an der Neutronenstern-Oberfläche gleich dem des ISM. In diesem Fall strömen negative Ladungsträger, das heißt vorwiegend Elektronen, entlang der Magnetfeldlinien aus, die bei $\Theta_{\text{Oberf}} < \Theta_{\text{krit}}$ beziehungsweise $\Theta_{\text{Oberf}} > \pi - \Theta_{\text{krit}}$ die Oberfläche verlassen, das heißt die dem Pol am nächsten liegen, denn deren Fußpunkt liegt auf niedrigerem Potenzial als das ISM. Entlang der Feldlinien, deren Fußpunkt bei Θ_{krit} beziehungsweise $\pi - \Theta_{\text{krit}}$ liegt, strömen keine Ladungsträger bevorzugt hinaus. Es findet also kein Stromfluss auf dieser Feldlinie, die auch kritische Feldlinie genannt wird, statt. Positive Ladungsträger strömen dann entlang von Feldlinien aus, deren Fußpunkt sich bei $\Theta_{\text{krit}} < \Theta_{\text{Oberf}} < \pi - \Theta_{\text{krit}}$ befindet, da hier die Neutronenstern-Oberfläche auf höherem Potenzial als das ISM liegt. Die Ladungen, die entlang der offenen Feldlinien die Magnetosphäre verlassen, gelangen dann in den umgebenden Pulsarwind-Nebel und können diesen, vorausgesetzt sie sind ausreichend hochenergetisch, durch Strahlungsprozesse wie Synchrotronstrahlung detektierbar machen.

Im bisher betrachteten Fall sind alle Größen zeitunabhängig, denn das achsensymmetrische Dipol-Feld rotiert um seine eigene Symmetrie-Achse. Mit diesem Modell kann also die gepulste Strahlung von Pulsaren nicht erklärt werden. Im Fall $\alpha \neq 0$ sind die Felder offensichtlich zeitabhängig, denn hier rotiert das Dipol-Feld nicht um seine Symmetrie-Achse und es ist $B(\vec{r}, t)$ an einem Punkt \vec{r} eine Funktion der Zeit t . Es gilt dann in einem Inertialsystem für die zeitliche Änderung $\partial_t = -\Omega \partial_\lambda$, wobei λ wieder der Azimutal-Winkel bezüglich der Ebene, in der beide Achsen liegen, ist. Dieser Fall des gewinkelten Dipol-Feldes ist ungleich schwieriger mathematisch zu behandeln. Qualitativ bleiben aber die Eigenheiten des Falls $\alpha = 0$ erhalten [Mestel, 1971]. Auch hier wird die Diskontinuität, das heißt die Unstetigkeit der Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen Neutronenstern und äußerem Medium, durch eine Flächenladungsdichte σ erzeugt, deren Wert im allgemeinen Fall

$$\sigma = -\frac{\Omega R B_0}{4\pi c} \cos(\Theta) \cdot \left(\cos(\alpha) \cos(\Theta) + \sin(\alpha) \sin(\Theta) \cos(\lambda) \right) \quad (2.29)$$

lautet [Mestel, 1971]. Zudem sorgt eine im Vakuumfall nicht verschwindende Komponente des elektrischen Feldes entlang der Magnetfeldlinien wieder dafür, dass die Oberflächen-Ladungsträger nicht durch die Gravitationskraft am Neutronenstern gehalten werden können. Auch hier bildet sich also eine mit elektrischen Ladungen der Goldreich-Julian-Ladungsdichte $\rho_{\text{GJ}}(t)$ angereicherte Magnetosphäre und diese nun zeitabhängige Ladungsverteilung führt wieder zum Verschwinden von $\vec{E} \cdot \vec{B}$, sodass nur das

ebenfalls zeitabhängige elektrische Feld $E(t)$ der Form 2.26 verbleibt, welches wieder senkrecht auf dem Magnetfeld steht [Mestel, 1971].

Ebenfalls unterscheidet man im gewinkelten Fall zwischen geschlossenen und offenen Feldlinien. Erste- re liegen vollständig innerhalb des Licht-Zylinders und bilden die korotierende Magnetosphäre, da sich die Ladungsträger hier in strikter Korotation mit dem Neutronenstern befinden. Die offenen Feldlini- en entspringen wieder der magnetischen Polkappe und durchstoßen den Licht-Zylinder, sodass geladene Teilchen an ihnen entlanggleiten und die Magnetosphäre verlassen können [Mestel, 1971].

2.1.4 Teilchenbeschleuniger in der Magnetosphäre

In den bisher beschriebenen Modellen von rotierenden, magnetisierten Neutronensternen sind diese immer von einer Ladungs-Verteilung $\rho = \rho_{\text{GJ}}$ umgeben, die dafür sorgt, dass lediglich ein elektrisches Feld verbleibt, welches senkrecht zum Magnetfeld steht. Ladungsträger, die an den Magnetfeldlinien entlanggleiten, werden also in einer solchen Magnetosphäre weder beschleunigt noch abgebremst.

Es wird jedoch angenommen, dass in realen Pulsar- Magnetosphären räumlich begrenzte Regionen stabil existieren, in denen ein starker Potenzialabfall entlang der magnetischen Feldlinien vorhanden ist und somit das elektrische Feld auch eine Komponente E_{\parallel} entlang der magnetischen Feldlinien aufweist. In solchen Bereichen werden geladene Teilchen dann entlang der Magnetfeldlinien beschleunigt und erreichen relativistische Geschwindigkeiten. Die nicht verschwindende elektrische Komponente entlang der Magnetfeldlini- en muss mit einer Abweichung der tatsächlichen Ladungsdichte ρ von der Goldreich-Julian-Ladungsdichte ρ_{GJ} einhergehen. Tatsächlich wird sich zeigen, dass in diesen Regionen der Betrag der tatsächlichen Ladungsdichte ρ weit niedriger ist, als es der Betrag der Goldreich-Julian-Ladungsdichte ρ_{GJ} wäre. Diese Bereiche sind also nahezu evakuiert und werden deswegen kurz als „Gap“ (Englisch: Lücke) bezeichnet.

Es werden drei solche Gaps im Bereich der offenen Feldlinien einer Pulsar-Magnetosphäre als möglich erachtet. Die „Polar Gap“ (Englisch: Polar-Lücke) befindet sich direkt über der magnetischen Polkappe des Neutronensterns und erstreckt sich nur bis in eine Höhe von einigen Neutronenstern-Radien [Arons & Scharlemann, 1979, Lyne, 2012]. Die hier beschleunigten Teilchen werden im Wesentlichen für die Erzeugung der Radiostrahlung von Pulsaren verantwortlich gemacht. Entlang, aber noch innerhalb des Randes des Bereichs offener Feldlinien, das heißt unmittelbar oberhalb der letzten geschlossenen Feldlinie, erstreckt sich von der Neutronenstern-Oberfläche bis hinaus zum Licht-Zylinder die „Slot Gap“ (Englisch: schlitzförmige Lücke) [Muslimov & Harding, 2003], mit der die Eigenschaften der gepulsten Strahlung im hochenergetischen Regime teilweise erklärt werden können [Hirotani, 2008a]. Ebenfalls oberhalb der letzten geschlossenen Feldlinie, jedoch erst ab der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche beginnend, befindet sich die „Outer Gap“ (Englisch: äußere Lücke) [Cheng et al., 1986a], die im Vergleich zur Slot Gap also kürzer aber dicker ist. Die Entstehung und Stabilisierung der Outer Gap soll im Folgenden kurz erklärt werden, da sie im weiteren Verlauf des Textes von Bedeutung ist.

Zunächst nehmen wir wie in Kapitel 2.1.3 an, dass die Achse des Dipol-Feldes in Richtung der Rotations- Achse $\vec{\Omega}$ steht, sodass am magnetischen Pol $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} > 0$ gilt, und dass in der Magnetosphäre vollständige Ladungs-Trennung realisiert ist. Wie in Abbildung 2.4 ist dann wieder auf der den Polen zugewandten Seite der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Flächen die Raumladung negativ und auf der dem Äquator zugewandten Seite positiv. Um die Entstehung der Outer Gap zu verstehen, ist die Annahme des folgenden geschlossenen Strom- systems in der Magnetosphäre nötig [Cheng et al., 1986a, Hirotani, 2005]. Entlang von Feldlinien mit

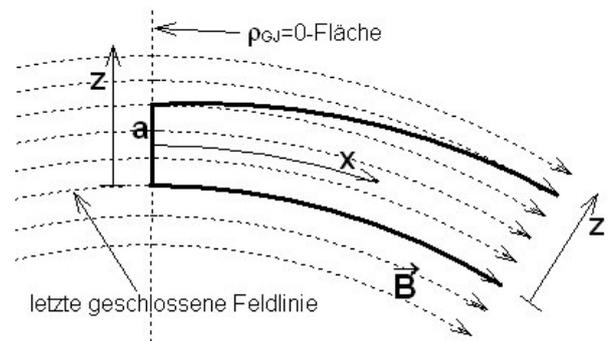


Abb. 2.5: Die von Cheng et al. [1986a] verwendete Geometrie zur Betrachtung der Outer Gap. Die Ränder (dick) erstrecken sich entlang der letzten geschlossenen Feldlinie, der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche, und entlang einer Linie im Abstand $a = a(\vec{r}(x))$ zur letzten geschlossenen Feldlinie. Der äußere Rand der Outer Gap befindet sich in etwa am Licht-Zylinder. Die Koordinate z beginnt an der letzten geschlossenen Feldlinie und verläuft senkrecht zu den Feldlinien. Dieses z sollte nicht mit dem z in Kapitel 2.1.2 verwechselt werden. x verläuft entlang der Feldlinien und beginnt an der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche.

höheren magnetischen Breiten als die der kritischen Feldlinie fließt ein elektrischer Strom von der Wind-Zone her kommend durch den Licht-Zylinder in die Magnetosphäre bis zur Neutronenstern-Oberfläche. Dieser Strom wird im Wesentlichen durch Elektronen dargestellt, die dann wegen der negativen Ladung in die entgegengesetzte Richtung, also vom Neutronenstern in die äußere Magnetosphäre strömen. Dieser Stromfluss wird durch einen entgegengesetzt gerichteten Strom kompensiert. Dieser fließt entlang von Feldlinien mit im Vergleich zur kritischen Feldlinie niedrigerer magnetischer Breite und durchquert somit einen Teil der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche. Dieser elektrische Strom fließt vom Neutronenstern hinaus durch den Licht-Zylinder und in die Wind-Zone. Die beiden Äste des Stromkreises sind einerseits über die gut leitende Neutronenstern-Oberfläche und andererseits über ein Stromsystem außerhalb der Magnetosphäre oder eventuell in den weiter außen gelegenen Bereichen des umgebenden Pulsarwind-Nebels geschlossen. Der Stromfluss bei niedrigerer Breite wird außerhalb der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche durch positive Ladungen (Positronen) realisiert, die nach außen durch den Licht-Zylinder fließen. Denn außerhalb des Licht-Zylinders können geladene Teilchen nicht nach innen strömen, da in diesem Fall die Gesamtgeschwindigkeit dieser Teilchen, die sich aus dem korotierenden Anteil und dem entlang der Feldlinien gerichteten Anteil, der bei nach innen gerichteter Bewegung ebenfalls eine Komponente in Richtung der Korotation hat, zusammensetzt, die Lichtgeschwindigkeit übertreffen würde. Die Positronen, die den Bereich offener Feldlinien bei im Vergleich zur $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche kleinerer magnetischer Breite (also den Bereich zwischen der letzten geschlossenen Feldlinie und der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche) bevölkern, werden also durch den Stromfluss nach außen gezogen. Dadurch fällt die tatsächliche Ladungsdichte ρ in diesem Bereich unter die Goldreich-Julian-Ladungsdichte ρ_{GJ} , es ist hier also $0 < \rho < \rho_{\text{GJ}}$. Die relativ zur Goldreich-Julian-Ladungsdichte gemessene Ladungsdichte $\rho - \rho_{\text{GJ}} < 0$ wirkt nun wie eine negativ geladene Region und erzeugt ein elektrisches Feld entlang der magnetischen Feldlinien, das die negativen Ladungsträger auf der Seite der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche mit höheren Breiten abstößt. Diese fließen somit nach innen in Richtung Neutronenstern und hinterlassen ebenfalls einen Bereich mit niedrigerem Betrag der tatsächlichen Ladungsdichte [Cheng et al., 1986a], sodass hier $\rho_{\text{GJ}} < \rho < 0$ gilt und die relativ zur Goldreich-Julian-Ladungsdichte gemessene Ladungsdichte hier $\rho - \rho_{\text{GJ}} > 0$ ist. Im Bereich um die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche bis hin zum Licht-Zylinder wird die Magnetosphäre also evakuiert und erhält (relativ zur Goldreich-Julian-Ladungsdichte gesehen) Raumladungen. Es entsteht also eine Lücke im Plasma der äußeren Magnetosphäre, die Outer Gap. Innerhalb der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche ist die Raumladung relativ gesehen positiv und außerhalb negativ. Unter der Annahme der vollständigen Evakuierung $\rho = 0$ beträgt dann die elektrostatisch wirksame Ladungsdichte $\rho - \rho_{\text{GJ}} = -\rho_{\text{GJ}}$. Daraus kann dann mit $\text{div}(\text{grad}(\Phi_{\text{el}})) = -4\pi(-\rho_{\text{GJ}})$ und mit angemessenen Randwertbedingungen das Potenzial Φ_{el} bestimmt werden.

In einer vereinfachten zweidimensionalen Geometrie, in der die Magnetfeldlinien durch konzentrische Kreise beschrieben wurden und die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche als senkrecht auf den Feldlinien stehend angenommen wurde, bestimmten Cheng et al. [1986a] die Komponenten des elektrischen Feldes in Richtung und senkrecht zu den Feldlinien. Dazu wurde gefordert, dass das Potenzial Φ_{el} am inneren Rand der Outer Gap, für den die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche gewählt wurde, am unteren Rand der Outer Gap, für den die letzte geschlossene Feldlinie gewählt wurde, und am oberen Rand der Outer Gap, der als im Abstand a zur letzten geschlossenen Feldlinie befindlich festgelegt wurde, verschwindet und dass die Outer Gap keinen äußeren Rand hat (siehe Abbildung 2.5), wenn auch die Annahme der vollständigen Evakuierung der Ladungs-Verteilung außerhalb des Licht-Zylinders nicht mehr haltbar ist. Für den Betrag des elektrischen Feldes in Richtung des Magnetfelds ergibt sich gemäß Cheng et al. [1986a]

$$E_{\parallel}(\vec{r}) = \frac{\Omega B(\vec{r}) a(\vec{r})^2}{c r_{\text{K,lGF}}(\vec{r})} \frac{z}{a(\vec{r})} \left(\frac{z}{a(\vec{r})} - 1 \right). \quad (2.30)$$

Es wurde hier angenommen, dass die Outer Gap am Ort \vec{r} die Breite $a(\vec{r}(x))$ hat. Da sich $\vec{r}(x)$ mit der Koordinate x , die entlang der Feldlinien von der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche nach außen gemessen wird (siehe Abbildung 2.5), verändert, ist die Breite der Outer Gap entlang x nicht zwangsläufig konstant. Da z die Koordinate senkrecht zu den magnetischen Feldlinien ist, verschwindet E_{\parallel} gemäß 2.30 am oberen und unteren Rand bei $z = a$ und $z = 0$. Obwohl die Feldlinien zur Lösung des Randwertproblems als konzentrische Kreise genähert wurden, ist der Krümmungsradius $r_{\text{K,lGF}}(\vec{r})$ der letzten geschlossenen Feldlinie nicht konstant, sondern über \vec{r} auch von der Koordinate x entlang der Outer Gap abhängig. Die

Abhängigkeit sollte wegen dem Dipol-Charakter der letzten geschlossenen Feldlinie noch von der Form 2.24b mit $R_{\text{äq}} = R_{\text{LZ}}$ sein, sodass dann 2.24b in 2.30 eingesetzt werden kann.

Die Outer Gap würde durch das Stromsystem anwachsen, bis der gesamte Bereich um die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche und außerhalb davon evakuiert wäre, denn erst dann würde das Stromsystem zum Erliegen kommen [Cheng et al., 1986a]. Die Outer Gap hält jedoch durch das elektrische Feld E_{\parallel} Prozesse aktiv, die das Anwachsen der evakuierten Region begrenzen. Obgleich die Outer Gap nahezu frei von geladenen Teilchen ist, treten doch immer wieder solche in die evakuierte Region ein.

- Dies geschieht einerseits sowohl durch Ladungsträger, die von der Neutronenstern-Oberfläche austreten und an der inneren Grenze in die Outer Gap eintreten, als auch durch Ladungsträger, die von außen den Licht-Zylinder durchschreiten, wenn dies auch aus oben genanntem relativistischen Grund nicht häufig der Fall sein wird.
- Andererseits ist die Outer Gap keine strahlungsfreie Region, sondern von mehreren Komponenten elektromagnetischer Strahlung durchdrungen. Im Wesentlichen ist dies γ -Strahlung, die, wie wir sehen werden, direkt in der Outer Gap erzeugt wird, thermische Röntgenstrahlung von der Neutronenstern-Oberfläche und weichere infrarot-optische Strahlung, die durch Synchrotronstrahlung von im Magnetfeld gyrierenden Ladungsträgern im Bereich der offenen Feldlinien außerhalb der Outer Gap erzeugt wird [Cheng et al., 1986b]. Die γ -Strahlung wechselwirkt in der Outer Gap nun mit der Röntgen- und infrarot-optischen Strahlung und erzeugt e^+e^- -Paare [Cheng et al., 1986a]. Außerdem können Ladungsträger durch Triplet Paar-Erzeugung bei der Wechselwirkung der γ -Strahlung mit bereits vorhandenen geladenen Teilchen generiert werden.

All diese Ladungsträger werden im elektrischen Feld 2.30 auf relativistische Geschwindigkeiten beschleunigt. Nachdem sie die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld schnell durch Abstrahlung hochenergetischer Synchrotronstrahlung verloren haben, bewegen sich die geladenen Teilchen dann entlang der magnetischen Feldlinien durch die Outer Gap und emittieren dabei sowohl durch Krümmungsstrahlung als auch durch inverse Compton-Streuung an den infrarot-optischen Photonen erzeugte hochenergetische Photonen. Diese drei Strahlungsprozesse, hauptsächlich jedoch der Prozess der Krümmungsstrahlung, stellen die eingangs erwähnte γ -Strahlung dar, die die Paar-Erzeugung antreibt und sich somit letztendlich selbst generiert.

Da sich die Ladungsträger entlang der Magnetfeldlinien fortbewegen und da die von ihnen emittierte Krümmungsstrahlung in einen schmalen Kegel in Fortbewegungsrichtung der erzeugenden Teilchen konzentriert ist (siehe Kapitel 2.2 und Rybicki & Lightman [1979]), bewegen sich die Photonen der γ -Strahlung immer nahezu tangential zu den Feldlinien. Wegen der Geometrie des Dipol-Feldes bedeutet dies dann, dass sich γ -Photonen, die auf einer bestimmten Feldlinie erzeugt werden, stets zu weiter außen gelegenen Feldlinien bewegen, also immer in Richtung der konvexen Seite eines Feldlinien-Bündels. Jedes Krümmungsstrahlungsphoton hat also eine Impuls-Komponente in Richtung der z -Achse von Abbildung 2.5. Dies führt dazu, dass eine Stelle in der Outer Gap oder in deren Umgebung umso stärker von γ -Strahlung durchsetzt ist, je größer z an dieser Stelle ist, also je weiter oberhalb der letzten geschlossenen Feldlinie diese Stelle gelegen ist. Ein stärkerer γ -Strahlungsfluss führt aber zu verstärkter e^+e^- -Paar-Erzeugung. Also werden bei größerem z mehr Ladungsträger generiert. An der letzten geschlossenen Feldlinie werden praktisch gar keine Paare erzeugt, da hier keine γ -Photonen auftreten.

Die erzeugten e^+e^- -Paare werden im elektrischen Feld E_{\parallel} getrennt und bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen. Dies führt zu einer Erniedrigung der Potenzialdifferenz der Outer Gap und damit zur Verringerung des elektrischen Feldes E_{\parallel} . In einem Bereich mit genügend großem z werden so viele e^+e^- -Paare erzeugt, dass die Magnetosphäre hier nicht vollständig evakuiert ist, da die abfließenden Ladungsträger ständig durch neue e^+e^- -Paare nachgefüllt werden. Dieser Bereich stellt die obere Grenze der Outer Gap dar. Diese Grenze ist jedoch nicht scharf definiert, sondern ist, bedingt durch die allmähliche Zunahme des γ -Strahlungsflusses mit zunehmendem z , ein allmählicher Übergang von der vollständig evakuierten Gap zur mit der Goldreich-Julian-Ladungsdichte gefüllten Magnetosphäre. Die Paar-Erzeugung sorgt also dafür, dass sich die Outer Gap nicht vollständig auf den Bereich um die $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche und außerhalb davon ausbreitet. Sie ist lediglich auf einen schmalen Bereich oberhalb

der letzten geschlossenen Feldlinie zwischen der $\rho_{GJ} = 0$ -Fläche und dem Licht-Zylinder begrenzt. Außerdem wird durch den γ -Strahlungsfluss, der den Bereich offener Feldlinien fast vollständig durchsetzt, gewährleistet, dass in anderen eventuell evakuierten Regionen durch Paar-Erzeugung diese Evakuierung unterbunden wird.

Bis hier ist die Existenz der Outer Gap lediglich eine Hypothese und basiert zum Großteil auf dem oben beschriebenen magnetosphärischen Stromkreis. Es ist jedoch durch Lösen des Satzes der Maxwell-Gleichungen und der Boltzmann-Gleichung für Elektronen, Positronen und Photonen in einer allgemein relativistisch beschriebenen Raumzeit möglich [Hirotani & Shibata, 1999, Hirotani, 2008a], zu zeigen, dass sich tatsächlich die von Cheng et al. [1986a] vorhergesagte Outer Gap und das damit einhergehende elektrische Feld E_{\parallel} bildet. Es zeigt sich dabei auch, dass die Outer Gap bei einem gewinkelt eingestellten Dipol-Feld mit $\alpha \neq 0$ nicht über den vollen Azimutal-Winkel $\Delta\lambda = 2\pi$ ausgebreitet ist, sondern tatsächlich nur in dem dem Licht-Zylinder zugewandten Raum zwischen letzter geschlossener Feldlinie und $\rho_{GJ} = 0$ -Fläche existiert. Im Fall des Crab-Pulsars ($\alpha \approx 60^\circ$) beträgt die azimutale Ausdehnung beispielsweise $\Delta\lambda \approx 4$ [Hirotani, 2008a]. Die polare Ausdehnung beziehungsweise die Ausdehnung in Richtung der oben verwendeten Koordinate z wird meist über eine dimensionslose Größe h angegeben. Dabei gilt die Definition $h(r) = (\vartheta_{\text{lgF}}(r) - \vartheta(r))/\vartheta_{\text{lgF}}(r)$, wobei ϑ_{lgF} der magnetische Polar-Winkel der letzten geschlossenen Feldlinie ist und somit h ein Maß für die Höhe einer durch $\vartheta(r)$ parametrisierten Linie über der letzten geschlossenen Feldlinie ist. Die Outer Gap befindet sich dann (außerhalb der $\rho_{GJ} = 0$ -Fläche) in einem Bereich $0 < h < h_{\text{OG}}$, wobei die obere Grenze der Outer Gap durch $h_{\text{OG}}(r) = (\vartheta_{\text{lgF}}(r) - \vartheta_{\text{OG}}(r))/\vartheta_{\text{lgF}}(r)$ parametrisiert ist. Die Outer Gap liegt also (außerhalb der $\rho_{GJ} = 0$ -Fläche) zwischen den Linien $\vartheta_{\text{lgF}}(r)$ und $\vartheta_{\text{OG}}(r)$. Ist h_{OG} von r unabhängig, so gilt $\vartheta_{\text{OG}}(r) = (1 - h_{\text{OG}})\vartheta_{\text{lgF}}(r)$. Im Fall des Crab-Pulsars ist genau dies näherungsweise der Fall. h_{OG} wird als konstant angenommen und je nach Simulation liegt h_{OG} im Bereich $0,1 < h_{\text{OG}} < 0,2$ [Hirotani, 2008a,b, Tang et al., 2008]. Ist ein konstanter Wert h_{OG} bekannt, so kann unter Annahme von Dipol-Geometrie der Abstand a der beiden die Outer Gap begrenzenden Feldlinien senkrecht zu diesen bestimmt werden. Gemäß Hirotani [2008b] ergibt sich

$$a(r) = 2h_{\text{OG}} \frac{r^2}{R_{\text{LZ}} \sin(\vartheta_{\text{lgF}}(r)) \sqrt{1 + 3 \cos^2(\vartheta_{\text{lgF}}(r))}}, \quad (2.31)$$

wobei $\vartheta_{\text{lgF}}(r)$ die aus Gleichung 2.14 mit $R_{\text{äq}} = R_{\text{LZ}}$ und $\varrho + \alpha = \vartheta$ durch Auflösen nach ϑ darstellbare inverse Parametrisierung

$$\vartheta_{\text{lgF}}(r) = \arcsin(\sqrt{r/R_{\text{LZ}}}) \quad (2.32)$$

der letzten geschlossenen Feldlinie ist. Diese Definition von $a(r)$ ist mit der Höhe $a(\vec{r})$ der Outer Gap von Cheng et al. [1986a] (siehe Abbildung 2.5) identisch. Somit kann der Ausdruck 2.31 zur Bestimmung des Verlaufs des elektrischen Feldes E_{\parallel} gemäß Gleichung 2.30 verwendet werden.

Zur Darstellung des Verlaufs von E_{\parallel} muss noch ein Ausdruck für den Betrag der magnetischen Flussdichte $B(\vec{r})$ in 2.30 gefunden werden. Dies ist mit Gleichung 2.5 möglich, wenn für ϑ der Ausdruck 2.32 verwendet wird, wodurch dann die Flussdichte entlang der letzten geschlossenen Feldlinie gemeint ist. Das

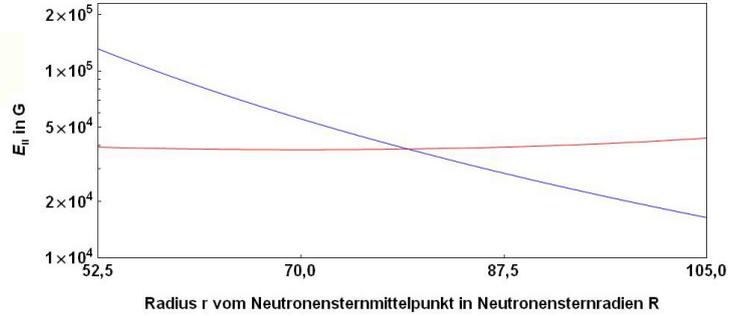


Abb. 2.6: Verlauf der zu den Magnetfeldlinien parallelen Komponente E_{\parallel} des elektrischen Feldes in der Outer Gap in Abhängigkeit vom Abstand r zum Zentrum des Neutronensterns für Parameter des Crab-Pulsars. Dargestellt ist der vereinfachte Ausdruck $E_{\parallel,N}$ (blau) gemäß Gleichung 2.35 sowie der durch Lösen eines elektrostatischen Randwertproblems durch Cheng et al. [1986a] erhaltene Ausdruck $E_{\parallel,CH}$ (rot) gemäß 2.34 (siehe Text zur Bestimmung von $E_{\parallel,CH}$). r ist in Vielfachen des Neutronensternradius R angegeben, E_{\parallel} in der Einheit G. r läuft vom inneren Rand der Outer Gap der mit der $\rho_{GJ} = 0$ -Fläche zusammenfällt, und somit annähernd bei $r = 0,5R_{\text{LZ}}$ lokalisiert ist (siehe Kapitel 2.1.2), bis zum äußeren Rand, der mit dem Licht-Zylinder identifiziert wird. Für die Größen R , B_0 , Ω , R_{LZ} und h_{OG} wurden die unter Kapitel 4 angegebenen Werte sowie $\eta = 0,01$ benutzt.

elektrische Feld E_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinien in der Outer Gap lässt sich also zusammenfassend unter Verwendung der in 2.30 einzusetzenden Beziehungen 2.24b, 2.5 und 2.31 jeweils mit 2.32 und mit $R_{\text{äq}} = R_{\text{LZ}}$ als Funktion von r und z darstellen. Im Folgenden soll die Abhängigkeit von E_{\parallel} von der Höhe z in der Gap nicht berücksichtigt werden. Deswegen wird die quadratische z -Abhängigkeit im Ausdruck 2.30 durch den Betrag des Mittelwerts

$$\left| \frac{1}{a} \cdot \int_0^a \frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} - 1 \right) dz \right| = \frac{1}{6} \quad (2.33)$$

ersetzt. Der so erhaltene Ausdruck

$$E_{\parallel, \text{CH}}(r) = \frac{\Omega B_0 R^3 h_{\text{OG}}^2}{3 c \sqrt{R_{\text{LZ}} \cdot r} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\arcsin(\sqrt{r/R_{\text{LZ}}}))} R_{\text{LZ}}} \quad (2.34)$$

für das elektrische Feld entlang der Magnetfeldlinien wird im Folgenden mit $E_{\parallel, \text{CH}}(r)$ bezeichnet, um anzudeuten, dass die verwendeten Ausdrücke im Wesentlichen auf Cheng und Hirotani zurückgehen. In Abbildung 2.6 ist $E_{\parallel, \text{CH}}(r)$ für Parameter des Crab-Pulsars gezeichnet. Ebenfalls ist hier eine sehr vereinfachte Darstellung von $E_{\parallel}(r)$ gezeichnet. Dazu wird lediglich von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass das elektrische Feld durch das Magnetfeld induziert wird. Deswegen kann E_{\parallel} näherungsweise als direkt proportional zum Betrag der magnetischen Flussdichte B gesetzt werden. Für B wird wieder der Ausdruck 2.5 verwendet, jedoch diesmal mit der zusätzlichen Näherung $\sqrt{1 + 3 \cos^2(\vartheta_{\text{lgF}}(r))} \approx 1$, die gerechtfertigt ist, da dieser Ausdruck mit 2.32 im Bereich $0 < r < R_{\text{LZ}}$ nur zwischen 2 und 1 variiert. Somit ergibt sich die im Folgenden verwendete einfache Beziehung

$$E_{\parallel, \text{N}}(r) = \eta \frac{B_0 R^3}{2r^3}, \quad (2.35)$$

die wegen dem starken Näherungscharakter mit dem Index N versehen ist. η ist die Proportionalitätskonstante zwischen elektrischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte und beträgt für Crab-ähnliche Pulsare größenordnungsmäßig $\eta \approx 0,01$ [Lyutikov et al., 2012]. Wie in Abbildung 2.6 zu sehen ist, liegt der Mittelwert von $E_{\parallel, \text{N}}$ nahe bei $E_{\parallel, \text{CH}}$, welches über die gesamte Outer Gap näherungsweise konstant ist. Die Auswirkungen der verschiedenen Verläufe von E_{\parallel} auf die Kinematik von geladenen Teilchen, die die Outer Gap durchqueren, und deren Auswirkungen auf die erzeugten Strahlungsspektren werden in Kapitel 4 untersucht. Dazu müssen jedoch zunächst die relevanten Strahlungsmechanismen genauer verstanden werden.

2.2 Krümmungsstrahlung

Die Pulsar-Magnetosphäre ist, wie oben gezeigt wurde, also kein Vakuum, sondern ist von Ladungsträgern erfüllt. Diese können über den Licht-Zylinder nach innen strömen beziehungsweise mittels der radialen Komponente des elektrischen Feldes aus der Neutronenstern-Oberfläche herausgesaugt werden. In der Outer Gap bewegen sich geladene Teilchen mit relativistischen Geschwindigkeiten. Sie sind jedoch aufgrund der Lorentz-Kraft gezwungen, sich entlang der magnetischen Feldlinien zu bewegen. In der Pulsar-Magnetosphäre sind diese, bedingt durch die Dipol-Form des Magnetfelds, nicht geradlinig sondern gekrümmt. Folglich bewegen sich die Ladungsträger entlang gekrümmter Bahnen, das heißt sie erfahren eine Beschleunigung, die eine rechtwinklig zum Geschwindigkeits-Vektor stehende Komponente hat. Nun ist aus der Elektrodynamik bekannt, dass jede beschleunigte Ladung elektromagnetische Strahlung emittiert. Da sich die Ladungsträger entlang gekrümmter Bahnen bewegen, bezeichnet man diese im vorliegenden Fall als Krümmungsstrahlung.

Das hierbei abgestrahlte elektromagnetische Spektrum sowie die Energieverlust-Rate, die die geladenen Teilchen erfahren, sollen im Folgenden für Elektronen bestimmt werden. Dazu wird die Analogie der Krümmungsstrahlung mit einem verwandten Strahlungsprozess, der Synchrotronstrahlung, betrachtet. Diese Verallgemeinerung der Zyklotronstrahlung entsteht, wenn geladene Teilchen relativistisch um Magnetfeldlinien gyrieren, was ja auch eine Bewegung entlang einer gekrümmten Bahn ist.

Deswegen wird zunächst ein Elektron der Masse m sowie der Ladung $q = -e$ (mit der Elementarladung e) betrachtet, das sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ durch ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} bewegt. Die Komponenten der Geschwindigkeit \vec{v}_\perp beziehungsweise \vec{v}_\parallel bezeichnen jeweils die zu \vec{B} rechtwinklig beziehungsweise parallel gerichtete Komponente. Mithilfe der Lorentz-Kraft sowie der Bewegungsgleichungen erhält man für den Betrag a_\perp der zeitlichen Änderung von \vec{v}_\perp (das heißt für die senkrecht auf dem Magnetfeld stehende Beschleunigungskomponente) den Wert

$$a_\perp = \frac{e \cdot v_\perp \cdot B}{\gamma mc}. \quad (2.36)$$

Hierbei bezeichnet $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = E/(mc^2)$ den Lorentz-Faktor der Elektronen, die sich mit der normierten Geschwindigkeit $\beta = v/c$ bewegen, und ist identisch zu deren mit ihrer Ruheenergie mc^2 normierten Gesamtenergie E . Diese Beschleunigung verursacht die oben erwähnte Gyration, also die Bewegung des Elektrons auf einer Kreisbahn. Da in diesem Fall die Zentripetalkraft durch die Lorentz-Kraft erbracht wird, folgt für die Gyrationkreisfrequenz $\omega_G = eB/(\gamma mc)$. Weil sich die Elektronen mit der Geschwindigkeitskomponente v_\perp auf dieser Kreisbahn bewegen, erhält man für den Gyrationradius $r_G = v_\perp/\omega_G$, also für den Radius der Kreisbahn:

$$r_G = \frac{\gamma mc \cdot v_\perp}{e \cdot B} \quad (2.37)$$

Es sei außerdem erwähnt, dass sich der Betrag a_\parallel der zeitlichen Änderung von \vec{v}_\parallel durch die Bewegungsgleichungen zu Null ergibt. Das Elektron bewegt sich also zusätzlich zur Gyration gleichförmig entlang der Magnetfeldlinien und insgesamt ergibt sich eine spiralförmige Trajektorie.

2.2.1 Energieverlust-Rate

Aus der Elektrodynamik stammt nun die folgende Beziehung [Rybicki & Lightman, 1979] für die gesamte abgestrahlte Leistung P einer beschleunigten Ladung q :

$$P = \frac{2q^2\gamma^4 a_\perp^2}{3c^3} \quad (2.38)$$

Hier wurde $a_\parallel = 0$ verwendet. Diese abgestrahlte Leistung geht dem Elektron verloren. Deshalb ist dessen zeitliche Energieänderung $dE/dt = -P$ und wird Energieverlust-Rate genannt. Elimination von a_\perp mit 2.36 ergibt die Energieverlust-Rate von Elektronen durch Synchrotronstrahlung:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4 \cdot B^2}{3m^2c^5} \cdot \gamma^2 \cdot v_\perp^2 \quad (2.39)$$

Um nun die Analogie zur Krümmungsstrahlung zu ziehen, wird diese Gleichung umgeschrieben, indem man mit $v_\perp^2 c \gamma^2$ erweitert und dann $\beta_\perp = v_\perp/c$ sowie den Gyrationradius r_G aus Gleichung 2.37 identifiziert. Man erhält

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2 c}{3} \cdot \frac{\gamma^4 \beta_\perp^4}{r_G^2}. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung der Energieverlust-Rate ist einzig von der Energie γ , der Geschwindigkeitskomponente β_\perp senkrecht zum Magnetfeld (also entlang der Gyrationbahn) sowie vom Bahnradius, hier dem Gyrationradius r_G , abhängig, jedoch unabhängig von der Magnetfeldstärke B .

Bewegt sich das Elektron mit Lorentz-Faktor γ und Geschwindigkeit v (entlang gekrümmter Magnetfeldlinien) auf einer gekrümmten Bahn, welche am Ort \vec{r} den Krümmungsradius $r_K(\vec{r})$ hat, so liegt der gleiche Fall vor wie bei einem Elektron, das um Magnetfeldlinien gyriert. Somit ist Gleichung 2.40 ebenfalls anwendbar, wenn r_G durch $r_K(\vec{r})$ sowie β_\perp durch $\beta = v/c$ ersetzt wird. Letzteres ist der Fall, da in der vorliegenden Analogie die Geschwindigkeitskomponente der spiralförmigen Bewegung, die senkrecht auf den Magnetfeldlinien steht, entlang der Gyrationbahn gerichtet ist und somit mit der Geschwindigkeit (entlang der Magnetfeldlinien) im Fall der Bewegung auf der gekrümmten Bahn identifiziert werden

muss. Da sich nun Elektronen in Pulsar-Magnetosphären stets relativistisch bewegen, wird $\beta \approx 1$ gesetzt und man erhält für die Energieverlust-Rate von Elektronen oder Positronen durch Krümmungsstrahlung:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2c}{3} \cdot \frac{\gamma^4}{r_K^2}. \quad (2.41)$$

Bewegt sich beispielsweise ein Elektron mit $\gamma = 10^7$ auf einer Bahn, der ein Krümmungsradius $r_K = 10^8$ cm zugeordnet werden kann, so gibt dieses Elektron eine Leistung $dE/dt \approx -4,6 \times 10^3$ erg s⁻¹ durch elektromagnetische Krümmungsstrahlung ab.

2.2.2 Spektrum

Um das Spektrum von Krümmungsstrahlung zu verstehen, betrachtet man zunächst wieder ein gyrierendes Elektron und dessen abgestrahltes elektrisches Feld. Dann erarbeitet man sein Synchrotronstrahlungsspektrum und macht sich hernach erneut die oben aufgezeigte Analogie zunutze.

Vorerst bewege sich das Elektron nicht-relativistisch ($\gamma \approx 1$) auf der Gyrationbahn. In diesem Fall ist seine Gyrationkreisfrequenz $\omega_Z = eB/(mc)$, die bekannte Larmor- oder Zyklotron-Kreisfrequenz. Nicht-relativistisch bewegte, beschleunigte Ladungen haben eine Abstrahlcharakteristik, die direkt proportional zu $\sin(\theta)$ ist, wobei θ der Winkel zwischen dem Beschleunigungsvektor und der Sichtlinie ist [Rybicki & Lightman, 1979]. Aufgrund der kreisförmigen Bahn des Elektrons hat das von einem Beobachter empfangene elektrische Feld ebenfalls eine sinusförmige Zeit-Abhängigkeit. Es schwingt mit der Frequenz, mit der das Elektron gyriert. Bekanntlich enthält eine sinusförmige Schwingung genau eine Frequenz. Das Spektrum, das ein Beobachter misst, hat also eine Spitze bei $\omega = \omega_Z$ und ist sonst gleich Null.

Nimmt man jetzt an, dass das Elektron leicht relativistisch gyriert, also mit einer Gyrationkreisfrequenz $\omega_G = eB/(\gamma mc)$, wobei $\gamma > 1$, dann wird die Abstrahlcharakteristik durch Aberration und den Doppler-Effekt verändert und ist nicht mehr symmetrisch zum Beschleunigungsvektor. In Richtung des Geschwindigkeitsvektors wird nun aufgrund des Doppler-Effekts mehr Energie emittiert als in die entgegengesetzte Richtung. Außerdem wird diese Energie durch Aberration in einen schmaleren Raumwinkel abgestrahlt als im nicht-relativistischen Fall (siehe Kapitel 2.3.2). Für den Beobachter zeigt die gemessene elektrische Feldstärke zwar noch immer eine Periodizität mit der Gyrationkreisfrequenz ω_G , doch sie ist nicht mehr rein sinusförmig. Stattdessen enthält sie gemäß der Theorie der Fourier-Transformation zusätzlich zu der Grundkreisfrequenz ω_G höhere Harmonische, also Anteile, die mit einem ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz schwingen. Das Spektrum besteht also aus mehreren äquidistanten Spitzen bei $\omega = k \cdot \omega_G$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Angenommen das Elektron bewegt sich extrem relativistisch ($\gamma \gg 1$), so dominieren Doppler-Effekt und Aberration. Die Strahlung wird nun größtenteils in einen schmalen Kegel mit halbem Öffnungswinkel γ^{-1} um den Geschwindigkeits-Vektor emittiert. In diesem Fall misst der Beobachter nur dann eine signifikante elektrische Feldstärke, wenn dieser schmale kegelförmige Strahl mit der Sichtlinie zwischen Beobachter und Elektron zusammenfällt. Dies resultiert in einer starken Abweichung von der Sinus-Form, nämlich in hohen und kurzen Spitzen (Pulsen) der elektrischen Feldstärke. Wie zuvor oszilliert die Feldstärke immer noch periodisch mit einer Schwingungsdauer $2\pi/\omega_G$. Jedoch sind die Pulse um den Faktor γ^{-3} kürzer als die Schwingungsdauer [Rybicki & Lightman, 1979]. Diesmal sind in dem Spektrum sehr viele Harmonische enthalten, die aber wegen $\omega_G \sim \gamma^{-1}$ nahe beieinanderliegen. Die Menge dieser Harmonischen ist das Synchrotronstrahlungsspektrum und die vom Beobachter empfangene Strahlung nennt man Synchrotronstrahlung. Es kann gezeigt werden [Rybicki & Lightman, 1979], dass erst oberhalb einer kritischen Kreisfrequenz

$$\omega_k = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_G \cdot \sin(\alpha) \quad (2.42)$$

die vorkommenden Harmonischen nicht mehr wesentlich zum Synchrotronstrahlungsspektrum beitragen. Der Faktor $\sin(\alpha)$ ist ungleich 1, wenn der Winkel α zwischen Magnetfeldlinien und Geschwindigkeitsvektor kleiner als $\pi/2$ ist.

In der Realität werden keine diskreten Spitzen bei $k \cdot \omega_G$, $k \in \mathbb{N}$ beobachtet sondern ein kontinuierliches

Spektrum der Synchrotronstrahlung. Die Ursache hierfür ist die Abhängigkeit der Gyrationkreisfrequenz $\omega_G \sim B/\gamma$ von der Magnetfeldstärke sowie vom Lorentz-Faktor der Elektronen. Das Magnetfeld, das die Region, in der die Elektronen gyrieren, durchsetzt, ist tatsächlich nie vollständig homogen, sondern seine Feldstärke ändert sich über die Region. Kleine Variationen in der Feldstärke verschieben dann auch die Gyrationkreisfrequenz und die Frequenzen aller Harmonischen. Ähnliches gilt für den Lorentz-Faktor γ . Dieser ist innerhalb einer Elektronen-Population nie exakt gleich, d. h. die Elektronen sind nie exakt monoenergetisch. Wieder führen Änderungen in γ zu einem Kontinuum von Gyrationkreisfrequenzen und zu einem Kontinuum von Frequenzen der Harmonischen. Im Gesamten führt dies zu einem kontinuierlichen Synchrotronstrahlungs-Spektrum.

Auf eine vollständige Herleitung des Synchrotronstrahlungs-Spektrums wird hier verzichtet, stattdessen sei auf die Behandlungen in Rybicki & Lightman [1979] und Blumenthal & Gould [1970] verwiesen sowie die ausführliche Herleitung in Longair [2002] (jedoch im SI-Einheitensystem) empfohlen. Dabei geht man von einem aus der Elektrodynamik stammenden Ausdruck für die frequenz- und beschleunigungsabhängige Strahlungsenergie-Verteilung aus. Nach der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ist dieser Ausdruck für ein gyrierendes Elektron anwendbar. Unter Berücksichtigung von relativistischem Doppler-Effekt, Aberration und Zeit-Retardation gelingt es, einen analytischen Ausdruck für das Spektrum einer gyrierenden Ladung zu ermitteln. Mit Spektrum ist hier die pro Frequenzintervall df abgestrahlte elektromagnetische Leistung $dP(f)$ als Funktion der Frequenz f gemeint. Wir nennen diese Größe auch spektrale Leistung. Da sie außerdem noch vom Lorentz-Faktor sowie von der magnetischen Feldstärke abhängt, schreiben wir $\frac{dP}{df}(f, \gamma, B)$. Die Einheit der spektralen Leistung dP/df ist dann $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$. Von Rybicki & Lightman [1979] stammt der folgende Ausdruck für das Synchrotronstrahlungs-Spektrum:

$$\frac{dP}{df}(f, \gamma, B) = 2\pi \frac{dP}{d\omega}(f, \gamma, B) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{mc^2} \cdot \frac{f}{f_k(\gamma)} \cdot \int_{f/f_k(\gamma)}^{\infty} K_{5/3}(z) dz \quad (2.43)$$

Hier bezeichnet $K_{5/3}$ die modifizierte Bessel-Funktion der Ordnung $5/3$ und $f_k = \omega_k/(2\pi)$ ist die zur kritischen Kreisfrequenz gehörige kritische Frequenz. Außerdem beschreibt der Faktor $\sin(\alpha)$ wieder den allgemeinen Fall $\alpha \neq \pi/2$. Es sei nochmals daran erinnert, dass die Strahlung aufgrund der relativistischen Aberration fast vollständig in einen schmalen Kegel entlang des Geschwindigkeits-Vektors, also in Richtung der aktuellen Bewegung des Elektrons, emittiert wird.

Nun wird, um erneut die Analogie zur Krümmungsstrahlung zu sehen, die Magnetfeldstärke aus dem Ausdruck 2.43 eliminiert, indem man mit γ erweitert und dann die Gyrationkreisfrequenz ω_G identifiziert. Außerdem nehmen wir wieder $\alpha = \pi/2$ an. Es ergibt sich

$$\frac{dP}{df}(f, \gamma, \omega_G) = \frac{\sqrt{3}e^2 \cdot \omega_G \cdot \gamma}{c} \cdot \frac{f}{f_k(\gamma)} \cdot \int_{f/f_k(\gamma)}^{\infty} K_{5/3}(z) dz. \quad (2.44)$$

Die spektrale Leistung hängt jetzt also explizit nur von den Parametern ω_G und γ ab, denn auch ω_k hängt explizit nur von ω_G und γ ab. Jedem sich bewegenden Elektron kann ein Lorentz-Faktor zugeordnet werden. Überdies kann jedem Elektron, das sich mit Geschwindigkeit $v \approx c$ auf einer Bahn mit Krümmungsradius $r_K(\vec{r})$ bewegt, eine Kreisfrequenz

$$\omega_K(\vec{r}) = c/r_K(\vec{r}) \quad (2.45)$$

zugewiesen werden. Somit spricht nichts dagegen, Gleichung 2.44 auch für den Fall eines Elektrons anzuwenden, das sich (entlang von Magnetfeldlinien) auf einer gekrümmten Bahn bewegt. Es darf also die Gyrationkreisfrequenz ω_G mit der Kreisfrequenz ω_K der Bewegung auf der gekrümmten Bahn identifiziert werden. Der Ausdruck für die spektrale Krümmungsstrahlungs-Leistung eines Elektrons lautet dann

$$\frac{dP}{df}(f, \gamma, \omega_K) = \frac{\sqrt{3}e^2 \omega_K \gamma}{c} \cdot \frac{f}{f_k(\gamma)} \int_{f/f_k(\gamma)}^{\infty} K_{5/3}(z) dz. \quad (2.46)$$

$$\omega_k = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_K \quad (2.47)$$

Auch hier wird der größte Teil der elektromagnetischen Energie innerhalb eines schmalen Kegels in Richtung des Geschwindigkeits-Vektors abgestrahlt (siehe Kapitel 2.3.2). Da der Geschwindigkeits-Vektor parallel zum Magnetfeld liegt, wird die Krümmungsstrahlung also tangential zu den magnetischen Feldlinien emittiert.

2.3 Inverse Compton-Strahlung

In astrophysikalischen Umgebungen befinden sich nun geladene Teilchen nicht immer nur in einem Magnetfeld und wechselwirken nicht nur mit diesem. Häufig durchqueren geladene Teilchen wie zum Beispiel Elektronen eine Umgebung, die von Photonen-Feldern durchsetzt ist. Dann sind auch Wechselwirkungen zwischen Elektronen und Photonen möglich. Eine solche Wechselwirkung ist die Compton-Streuung beziehungsweise die dazu verwandte inverse Compton-Streuung. Beide Prozesse werden im Folgenden behandelt. Dabei werden zwei verschiedene Bezugssysteme genutzt: Das Beobachter-System und das Elektronen-Ruhe-System. In Ersterem bewegt sich das Elektron relativistisch (das heißt mit $\gamma \gg 1$) und trifft auf das Photon. In diesem Bezugssystem sollen auch die Ergebnisse formuliert werden, sodass die Theorie mit den Messungen, die nur hier stattfinden, verglichen werden kann. Das Elektronen-Ruhe-System ist das Bezugssystem, in dem das Elektron ruht und somit den Lorentz-Faktor $\gamma' = 1$ hat. Wir einigen uns darauf, alle Größen, die im Elektronen-Ruhe-System gelten, mit einem Strich ' zu versehen und alle Größen im Beobachter-System ohne Strich zu schreiben. Darüber hinaus werden meist dimensionslose Energien ϵ verwendet, also die durch die Elektronen-Ruhe-Energie mc^2 geteilten dimensionsbehafteten Energien E . Außerdem treffen wir die Vereinbarung, Größen vor dem Streuereignis ohne Index zu schreiben und für Größen nach dem Streuereignis den Index ₁ zu benutzen.

2.3.1 Compton-Streuung

Die Streuung von Photonen an ruhenden Elektronen nennt man nach dem US-amerikanischen Physiker Arthur H. Compton, der dieses Phänomen intensiv untersuchte, Compton-Streuung und die damit verbundene Energieabnahme des Photons wird mit Compton-Effekt bezeichnet. Man befindet sich also zunächst im Elektronen-Ruhe-System und betrachtet ein einfallendes Photon der (dimensionslosen) Energie ϵ' , das an einem freien, ruhenden Elektron streut. Das gestreute Photon hat nun abhängig vom Ausfall-Winkel χ'_1 (dem Winkel zwischen ein- und ausfallendem Photonenimpuls-Vektor) eine im Vergleich zu ϵ' kleinere Energie ϵ'_1 . Diese erhält man [Rybicki & Lightman, 1979] mit der Erhaltung des Vierer-Impulses zu

$$\epsilon'_1 = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'(1 - \cos(\chi'_1))}. \quad (2.48)$$

Offensichtlich ist immer $\epsilon'_1 \leq \epsilon'$, das heißt Energie wird vom einfallenden Photon auf das Elektron übertragen, was in einer verringerten Photonenenergie resultiert. Die minimal mögliche gestreute Photonenenergie wird im Fall $\chi'_1 = \pi$ der Rückwärts-Streuung erreicht. Gleichheit besteht für Vorwärts-Streuung mit $\chi'_1 = 0$. Gleichheit wird ebenfalls annähernd ($\epsilon'_1 \approx \epsilon'$) erreicht, wenn $\epsilon' \ll 1$. Dieser Spezialfall kennzeichnet einen von zwei Grenzfällen:

- Thomson-Grenzfall, $\epsilon' \ll 1$: Es gilt $\epsilon'_1 \approx \epsilon'$. Hier kann das Photon als klassische elektromagnetische Welle behandelt werden. Streuung im Thomson-Grenzfall entspricht elastischen Stößen der klassischen Physik, da der Energieübertrag vernachlässigbar ist.
- Klein-Nishina-Grenzfall, $\epsilon' \gg 1$: Die Quantennatur der Photonen ist von wesentlicher Bedeutung. Dieser Fall entspricht inelastischen Stößen der klassischen Physik, da der Energieübertrag nicht vernachlässigbar ist.

2.3.2 Inverse Compton-Streuung

Jetzt begeben wir uns ins Beobachter-System. Hier streut ein Photon der Energie ϵ an einem Elektron der Energie γ , die gestreute Photonenenergie ist ϵ_1 . Bei ausreichend großem γ wird durch diesen Prozess Energie vom Elektron auf das Photon übertragen, man nennt ihn deswegen inverse Compton-Streuung. Die ungestreuten Photonen, die für inverse Compton-Streuung zur Verfügung stehen, nennt man auch Ziel-Photonen.

Beim Wechseln zwischen den beiden Bezugssystemen müssen die Regeln der Lorentz-Transformation beachtet werden, da sich die beiden Systeme mit dem Lorentz-Faktor γ zueinander bewegen. Energien sind durch den relativistischen Doppler-Effekt miteinander verknüpft und Winkel gehen durch die Gleichungen der Aberration ineinander über.

Die Geometrie des Streueignisses ist in Abbildung 2.7 veranschaulicht. θ mit beziehungsweise ohne $_1$ beziehungsweise $'$ bezeichnet stets den Winkel zwischen dem jeweiligen Photonenimpuls-Vektor und einer Koordinaten-Achse, zu der der Elektronengeschwindigkeits-Vektor parallel liegt. Dann lauten die Gleichungen der Dopplerverschiebung [Rybicki & Lightman, 1979]:

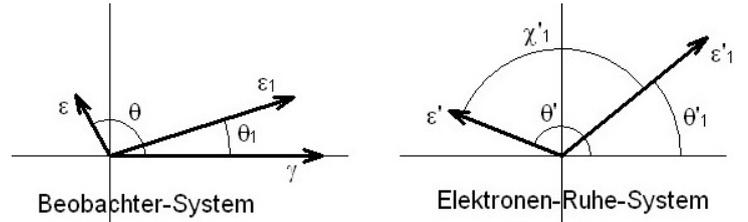


Abb. 2.7: Geometrie zur Compton-Streuung in zwei Bezugssystemen, die durch Lorentz-Boost γ auseinander hervorgehen.

$$\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \beta \cos(\theta)) \quad (2.49a)$$

$$\epsilon_1 = \gamma\epsilon'_1(1 + \beta \cos(\theta'_1)) \quad (2.49b)$$

Im vorliegenden relativistischen Fall gilt $\beta \approx 1$. Im Fall einer isotropen Photonen-Richtungsverteilung kommen alle Einfall-Winkel θ gleich oft vor. Folglich ist der Faktor in Klammern in Gleichung 2.49a im isotropen Fall gleich 1. Die einfallende Photonenenergie im Elektronen-Ruhe-System ist dann $\epsilon' \approx \gamma\epsilon$. Die Ausfall-Winkel θ'_1 sind nicht gleichverteilt, sondern über die Winkel-Abhängigkeit des differentiellen Streuquerschnitts festgelegt. Sie sind jedoch meist von der Größenordnung 1. Somit ist die gestreute Photonenenergie im Beobachter-System größenordnungsmäßig $\epsilon_1 \approx \gamma\epsilon'_1$. Im Thomson-Grenzfall ist außerdem $\epsilon'_1 \approx \epsilon'$ und damit $\epsilon_1 \approx \gamma^2\epsilon$. Ein anfangs niederenergetisches Photon kann also durch den inversen Compton-Effekt zu sehr hohen Energien hochgestreut werden.

Im Fall einer Frontal-Kollision ist $\theta = \pi$ und damit beträgt $\epsilon' = 2\gamma\epsilon$. Im Fall einer anti-frontalen ($\theta = 0$) oder streifenden ($\theta \gtrsim 0$) Kollision ist $\epsilon' = 0$ beziehungsweise ≈ 0 , da $\lim_{\beta \rightarrow 1}(\gamma(1 - \beta)) \rightarrow 0$.

Die obigen Bedingungen für den Thomson- und den Klein-Nishina-Grenzfall lassen sich jetzt im Beobachter-System formulieren:

- Thomson-Grenzfall, $\epsilon' \ll 1 \Rightarrow \gamma\epsilon \ll 1$
- Klein-Nishina-Grenzfall, $\epsilon' \gg 1 \Rightarrow \gamma\epsilon \gg 1$

Die Winkel sind über die Gleichungen

$$\theta' = \arccos\left(\frac{\cos(\theta) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta)}\right) \quad (2.50a)$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\cos(\theta'_1) + \beta}{1 + \beta \cos(\theta'_1)}\right) \quad (2.50b)$$

der relativistischen Aberration verknüpft [Dermer & Menon, 2007]. Die Funktionen $\theta'(\theta)$ beziehungsweise $\theta_1(\theta'_1)$ bilden für alle $0 < \beta < 1$ den Einfall-Winkel θ auf ein $\theta' > \theta$ beziehungsweise den Ausfall-Winkel θ'_1 auf ein $\theta_1 < \theta'_1$ ab (siehe Abbildung 2.7). Im extrem relativistischen Grenzfall mit $\beta \approx 1$ wird, jeweils unabhängig von θ beziehungsweise θ'_1 , der Bruch in 2.50a ≈ -1 beziehungsweise in 2.50b ≈ 1 und damit wird $\theta' \approx \pi$ beziehungsweise $\theta_1 \approx 0$. Im Elektronen-Ruhe-System scheinen also alle Photonen aus nahezu der gleichen Richtung, nämlich entlang der des Lorentz-Boosts, einzufallen. Die gestreuten Photonen

werden im Beobachter-System alle in nahezu der gleichen Richtung, nämlich in Bewegungsrichtung des Teilchens, emittiert. Diese Bündelung der abgestrahlten Leistung nennt man relativistische Fokussierung. Sie führt auch dazu, dass die Strahlung eines beschleunigt relativistisch bewegten, geladenen Teilchens in einen schmalen Kegel um den Geschwindigkeits-Vektor emittiert wird, wie dies zum Beispiel bei Synchrotron- und Krümmungsstrahlung der Fall ist.

2.3.3 Streuquerschnitte

Um zu beschreiben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Photon in eine bestimmte Richtung und mit einer bestimmten Energie invers Compton-gestreut wird, benötigt man das Konzept des differentiellen Streuquerschnitts (auch: Wirkungsquerschnitts). Dieser gibt den infinitesimalen Teil $d\sigma$ des gesamten Streuquerschnitts σ an, der für Streuung in den infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega'_1$ in Richtung Ω'_1 verantwortlich ist. Dann wird der differentielle Streuquerschnitt mit $\frac{d\sigma}{d\Omega'_1}$ bezeichnet. Die Nomenklatur ist jedoch nicht einheitlich. So ist gelegentlich mit differentiellm Streuquerschnitt auch der infinitesimale Teil $d^2\sigma$ des gesamten Streuquerschnitts σ gemeint, der Photonen mit Energien im Intervall $[\epsilon'_1; \epsilon'_1 + d\epsilon'_1]$ in den infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega'_1$ in Richtung Ω'_1 streut. Dieser wird mit $\frac{d^2\sigma}{d\Omega'_1 d\epsilon'_1}$ beschrieben. Im Folgenden wird für beide Größen die Bezeichnung „differentieller Streuquerschnitt“ gebraucht.

Mit Richtung Ω'_1 ist hier und im Folgenden keine wirkliche physikalische Größe gemeint, sondern ein Paar $(\phi'_{1,\theta'_1}, \theta'_1)$ aus Azimutal- und Polar-Winkel. Genauso gut kann man zur Beschreibung der Richtung Ω'_1 das Paar aus Polar-Winkel χ'_1 und zugehörigem Azimutal-Winkel ϕ'_{1,χ'_1} hernehmen. Der infinitesimale Raumwinkel ist wie üblich $d\Omega'_1 = \sin(\theta'_1) d\phi'_{1,\theta'_1} d\theta'_1 = \sin(\chi'_1) d\phi'_{1,\chi'_1} d\chi'_1$, wobei $0 \leq \theta'_1, \chi'_1 \leq \pi$ und $0 \leq \phi'_{1,\theta'_1}, \phi'_{1,\chi'_1} \leq 2\pi$.

Der volle differentielle Compton-Wirkungsquerschnitt von Photon-Elektron-Streuung kann mit Hilfe der Quantenelektrodynamik ermittelt werden und lautet [Dermer & Menon, 2007]:

$$\frac{d^2\sigma_C}{d\Omega'_1 d\epsilon'_1}(\epsilon'_1, \epsilon', \chi'_1(\Omega'_1)) = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\epsilon'_1}{\epsilon'}\right)^2 \left(\frac{\epsilon'_1}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon'_1} - \sin^2(\chi'_1)\right) \cdot \delta\left(\epsilon'_1 - \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'(1 - \cos(\chi'_1))}\right) \quad (2.51)$$

Hierbei ist $r_e = e^2/(mc^2)$ der klassische Elektronenradius. Die Diracsche Deltafunktion besagt lediglich, dass die Energie der gestreuten Photonen immer die durch Gleichung 2.48 spezifizierte ist. Im Thomson-Grenzfall $\epsilon' \ll 1$ vereinfacht sie sich zu $\delta(\epsilon'_1 - \epsilon')$. Integriert man dann über ϵ'_1 , so erhält man den differentiellen Thomson-Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega'_1}(\chi'_1(\Omega'_1)) = \frac{r_e^2}{2}(1 + \cos^2(\chi'_1)), \quad (2.52)$$

der bereits von Joseph J. Thomson im Rahmen der klassischen Theorie von der Streuung elektromagnetischer Wellen an Elektronen hergeleitet wurde und unabhängig von der Energie ϵ' der ungestreuten Photonen ist. Führt man zusätzlich noch die Integration über den Raumwinkel Ω'_1 , genauer gesagt über zugehörige Azimutal- und Polar-Winkel durch, so erhält man wegen $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2(\chi'_1)) \sin(\chi'_1) d\phi'_{1,\chi'_1} d\chi'_1 = \frac{16\pi}{3}$ den gesamten Thomson-Streuquerschnitt:

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} \quad (2.53)$$

Dieser wird häufig zur Normierung anderer Streuquerschnitte verwendet. Eine Näherung für den differentiellen Thomson-Streuquerschnitt geht von isotroper Streuung aus, vernachlässigt also die Winkel-Abhängigkeit in Gleichung 2.52. Dabei wird der gesamte Thomson-Streuquerschnitt σ_T gleichmäßig auf den vollen Raumwinkel 4π verteilt:

$$\frac{d\sigma_{T,\text{iso}}}{d\Omega'_1} = \frac{\sigma_T}{4\pi} \quad (2.54)$$

Führt man die Integration des differentiellen Streuquerschnittes aus Gleichung 2.51 über die gestreute Photonenenergie ϵ'_1 und über den Raumwinkel Ω'_1 im Klein-Nishina-Grenzfall $\epsilon' \gg 1$ durch, so erhält

man für den gesamten Streuquerschnitt den asymptotischen Ausdruck [Dermer & Menon, 2007]

$$\sigma_{\text{KN}} \simeq \frac{\pi r_e^2}{\epsilon'} \ln(2 \exp(1/2)\epsilon'). \quad (2.55)$$

2.3.4 Energieverlust-Rate im Thomson-Grenzfall

Betrachtet man eine Elektronen-Population, die sich in einer von Photonen durchsetzten Region aufhält, so sind häufig die Energieverluste der Elektronen von Interesse. Im Folgenden wird deshalb ein Ausdruck für die Energieverlust-Rate eines Elektrons hergeleitet, welches im Thomson-Grenzfall Photonen Compton-streut.

Diese Photonen haben eine Energie-Verteilung, die durch die spektrale Anzahl-Dichte $n(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon}(\epsilon)$ beschrieben wird. $dN(\epsilon)$ ist also die infinitesimale Anzahl-Dichte der Photonen (Anzahl von Photonen pro Volumeneinheit), die Energien im Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ haben. Das Integral $N = \int dN = \int n d\epsilon$ ist dann die Anzahl-Dichte aller Photonen ohne Berücksichtigung ihrer Energie. Desweiteren beschreibt $U = \int dU = \int \epsilon dN = \int \epsilon n d\epsilon = \int u d\epsilon$ die Energie-Dichte (Energie pro Volumeneinheit) des Photonen-Feldes, also die Energie, die in Form von Photonen pro Volumeneinheit vorliegt. $u(\epsilon) = \epsilon n(\epsilon)$ ist hierbei die spektrale Energie-Dichte des Photonen-Feldes und es gilt $u(\epsilon) = \frac{dU}{d\epsilon}(\epsilon)$, wobei $dU(\epsilon)$ die Energie-Dichte ist, die in Form von Quanten mit Energie aus dem Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ vorliegt. Die Richtungs-Verteilung der Photonen sei isotrop.

Aus der speziellen Relativitätstheorie ist bekannt [Blumenthal & Gould, 1970], dass das Verhältnis dN/ϵ und damit auch $(n d\epsilon)/\epsilon$ eine Lorentz-Invariante ist, also seinen Wert beim Wechsel zwischen Bezugssystemen nicht ändert. Angewendet auf Beobachter-System und Elektronen-Ruhe-System gilt dann:

$$\frac{n d\epsilon}{\epsilon} = \frac{n' d\epsilon'}{\epsilon'} \quad (2.56)$$

Eine weitere Lorentz-Invariante ist die von einem Elektron emittierte Leistung. In jedem Bezugssystem wird also die gleiche abgestrahlte Leistung gemessen. Dies ist der Fall, da Energie und Zeit jeweils die 0-Komponente von parallelen Vierer-Vektoren sind, und somit beide das gleiche Verhalten unter einer Lorentz-Transformation zeigen. Es ist also:

$$\frac{dE_{\text{ab}}}{dt} = \frac{dE'_{\text{ab}}}{dt'} \quad (2.57)$$

Aus der klassischen Stoßphysik ist bekannt, dass die mittlere freie Weglänge eines Teilchens, das eine Teilchen-Population der Anzahl-Dichte $\int dN$ durchquert, durch $(\sigma \int dN)^{-1}$ gegeben ist, wobei σ der Streuquerschnitt der Wechselwirkung ist. Damit und unter der Annahme, dass sich die Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit c fortbewegen, ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen durch $(c\sigma \int dN)^{-1}$ gegeben und der Kehrwert daraus ist die Stoß-Rate $\frac{dS}{dt} = c\sigma \int dN$. Deswegen kann im vorliegenden Problem im Elektronen-Ruhe-System die vom Elektron abgestrahlte Leistung $\frac{dE'_{\text{ab}}}{dt'}$ erhalten werden, wenn man zusätzlich die Energie $E'_1 = \epsilon'_1 \cdot mc^2$ des gestreuten Photons berücksichtigt.

$$\frac{dE'_{\text{ab}}}{dt'} = c\sigma_{\text{T}} \int \epsilon'_1 mc^2 dN' = c\sigma_{\text{T}} mc^2 \int \epsilon'_1 n' d\epsilon' \quad (2.58)$$

σ_{T} wurde verwendet, da wir uns in diesem Kapitel auf den Thomson-Grenzfall beschränkt haben. Genau deswegen gilt auch $\epsilon'_1 \approx \epsilon'$. Damit und mit obigen Invarianten gilt nach Erweitern mit ϵ' und nach Einsetzen der Doppler-Beziehung 2.49a mit darauffolgendem Kürzen von ϵ für die emittierte Leistung im Beobachter-System:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{ab}}}{dt} &= \frac{dE'_{\text{ab}}}{dt'} = c\sigma_{\text{T}} mc^2 \int \epsilon'_1 n' d\epsilon' = c\sigma_{\text{T}} mc^2 \int \epsilon' n' d\epsilon' = c\sigma_{\text{T}} mc^2 \int \epsilon'^2 \frac{n' d\epsilon'}{\epsilon'} = \\ &= c\sigma_{\text{T}} mc^2 \int \epsilon'^2 \frac{n d\epsilon}{\epsilon} = c\sigma_{\text{T}} mc^2 \gamma^2 \int (1 - \beta \cos(\theta))^2 \epsilon n d\epsilon \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Richtungs-Abhängigkeit im Term $(1 - \beta \cos(\theta))^2$ kann unter der Annahme von Isotropie durch einen Mittelwert ersetzt werden. Diesen erhält man durch Integration über den vollen Raumwinkel und anschließende Normierung durch genau diesen:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 - \beta \cos(\theta))^2 \sin(\theta) d\phi_\theta d\theta = 1 + \frac{\beta^2}{3} \quad (2.60)$$

Nach Identifikation der Energie-Dichte der ungestreuten Photonen folgt für die emittierte Leistung eines Elektrons:

$$\frac{dE_{ab}}{dt} = c\sigma_T mc^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) U \quad (2.61)$$

Genau genommen ist dies die Leistung, die ein invers Compton-streuendes Elektron in Form von gestreuten Photonen abgibt. Diese Leistung stimmt jedoch nicht exakt mit der Energie pro Zeiteinheit dE_e/dt überein, die dem Elektron verloren geht. Denn vor dem Streuprozess nimmt das Elektron pro Wechselwirkung mit einem Photon dessen komplette Energie auf. Die dem Elektron zugeführte Leistung beträgt deshalb $\frac{dE_{auf}}{dt} = c\sigma_T \int \epsilon cm^2 n d\epsilon = c\sigma_T mc^2 U$. Es kann dann folgende Raten-Gleichung aufgestellt werden, die aufgenommene Leistung positiv und abgegebene Leistung negativ summiert:

$$\begin{aligned} \frac{dE_e}{dt} &= \frac{dE_{auf}}{dt} - \frac{dE_{ab}}{dt} = c\sigma_T mc^2 U - c\sigma_T mc^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) U = \\ &= -c\sigma_T mc^2 U \left(\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) - 1\right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dies ist die Energieverlust-Rate eines Elektrons, das im Thomson-Grenzfall isotrop verteilte Photonen invers Compton-streut. Im extrem relativistischen Grenzfall vereinfacht sich die Beziehung wegen $\beta \approx 1$ und $\gamma \gg 1$ zu

$$\frac{dE_e}{dt} = -\frac{4}{3} c\sigma_T mc^2 \gamma^2 U. \quad (2.63)$$

Der im Vergleich zu anderer Literatur zusätzliche Faktor mc^2 ist verständlich, wenn man bedenkt, dass U gemäß obiger Definition eine dimensionslose Energie-Dichte ist, in dem Sinn dass U angibt, wie viel dimensionslose Energie pro Raumvolumen vorliegt, wohingegen E_e dimensionsbehaftet ist.

2.3.5 Energieverlust-Rate im Klein-Nishina-Grenzfall

Jetzt soll die Energieverlust-Rate im entgegengesetzten, dem Klein-Nishina-Grenzfall bestimmt werden. Dazu gehen wir nach Blumenthal & Gould [1970] vor, weisen jedoch darauf hin, dass dort mit ϵ stets dimensionsbehaftete Energien gemeint sind. Wir begeben uns gleich ins Beobachter-System und schreiben obige Raten-Gleichung 2.62 für die Energieverlust-Rate in einer allgemeineren, aber dennoch analogen Form:

$$\begin{aligned} \frac{dE_e}{dt}(\epsilon, \gamma) &= \int \epsilon \cdot mc^2 \frac{dS}{dt d\epsilon_1}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma) d\epsilon_1 - \int \epsilon_1 \cdot mc^2 \frac{dS}{dt d\epsilon_1}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma) d\epsilon_1 = \\ &= \int (\epsilon - \epsilon_1) \cdot mc^2 \frac{dS}{dt d\epsilon_1}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma) d\epsilon_1 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Vom Elektron absorbierte Energie wurde wieder positiv und emittierte Energie negativ gezählt. Die Größe $\frac{dS}{dt d\epsilon_1}$ misst die Rate an Streu-Ereignissen pro Energie-Intervall $[\epsilon_1; \epsilon_1 + d\epsilon_1]$, die ein Photon mit Energie in diesem Intervall hervorbringen. Ein allgemeiner Ausdruck dafür ist beispielsweise durch Gleichung 2.48 (beziehungsweise 2.54 im Klein-Nishina-Grenzfall) aus Blumenthal & Gould [1970] gegeben. Dieser ist neben dem Lorentz-Faktor γ explizit von der ungestreuten sowie der gestreuten Photonenenergie abhängig. Außerdem geht die Anzahl-Dichte $n(\epsilon) d\epsilon$ der isotrop verteilten, ungestreuten Photonen mit Energien im Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ in ihn ein. Präzise gesprochen beschreibt deswegen $\frac{dE_e}{dt}$ nicht die gesamte Energieverlust-Rate des Elektrons, sondern nur den infinitesimalen Teil der Energieverlust-Rate, der durch einfallende Photonen mit Energien im Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ bewirkt wird. Um in der Leibniz-Notation konsequent zu sein, müsste deshalb in Gleichung 2.64 $d\left(\frac{dE_e}{dt}\right)$ anstelle von $\frac{dE_e}{dt}$ und $d\left(\frac{dS}{dt d\epsilon_1}\right)$

anstelle von $\frac{dS}{dt d\epsilon_1}$ stehen, was jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit in Gleichung 2.64 unterdrückt wird.

Um einen anwendbaren Ausdruck für die infinitesimale Energieverlust-Rate zu erhalten, muss die Integration über ϵ_1 durchgeführt werden. Um daraus dann die gesamte Energieverlust-Rate zu ermitteln, müssen alle infinitesimalen Energieverlust-Raten aufsummiert, das heißt aufintegriert werden, was in einer zusätzlichen Integration über ϵ resultiert.

Zuvor wird jedoch analog zu der Näherung von Gleichung 2.62 zu Gleichung 2.63 die ungestreute Photonenenergie ϵ gegenüber der gestreuten ϵ_1 vernachlässigt. Dies ist, wie in Kapitel 2.3.2 gezeigt wurde, abgesehen vom nicht-relativistischen Fall immer zulässig.

Die Integration über ϵ_1 kann im Klein-Nishina-Grenzfall, das heißt unter Verwendung des Ausdrucks 2.54 von Blumenthal & Gould [1970], ausgeführt werden. Man erhält:

$$d\left(\frac{dE_e}{dt}(\epsilon, \gamma)\right) = -\pi r_e^2 m c^3 \frac{n(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon} \left(\ln(4\epsilon\gamma) - \frac{11}{6}\right) \quad (2.65)$$

Somit beträgt die gesamte Energieverlust-Rate von Elektronen der Energie γ , die Photonen der spektralen Anzahl-Dichte n im Klein-Nishina-Grenzfall Compton-streuen

$$\frac{dE_e}{dt}(\gamma) = \int d\left(\frac{dE_e}{dt}(\epsilon, \gamma)\right) = -\pi r_e^2 m c^3 \int_0^\infty \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \left(\ln(4\epsilon\gamma) - \frac{11}{6}\right) d\epsilon. \quad (2.66)$$

Der im Vergleich zu Blumenthal & Gould [1970] andere Faktor mc^3 anstelle von m^2c^5 stammt von der Tatsache, dass die dimensionslose Energie im Nenner steht.

Im Fall einer ausgedehnten, kontinuierlichen Verteilung der spektralen Anzahl-Dichte $n(\epsilon)$ muss das Integral über ϵ eventuell numerisch gelöst werden. Für den Spezialfall eines monochromatischen Photonenfeldes lässt sich das Integral jedoch leicht lösen. In diesem Fall gilt nämlich für die spektrale Anzahl-Dichte $n(\epsilon) = N_0 \delta(\epsilon - \epsilon_0)$, wobei N_0 die Anzahl-Dichte und ϵ_0 die Energie der Photonen sind. Dann ist die gesamte Energieverlust-Rate

$$\frac{dE_e}{dt}(\gamma) = -\pi r_e^2 m c^3 \int_0^\infty \frac{N_0 \delta(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \left(\ln(4\epsilon\gamma) - \frac{11}{6}\right) d\epsilon = -\frac{\pi r_e^2 m c^3 N_0}{\epsilon_0} \left(\ln(4\epsilon_0\gamma) - \frac{11}{6}\right). \quad (2.67)$$

Ein im Vergleich zum Thomson-Grenzfall wesentlicher Unterschied ist, dass die Energieverlust-Rate jetzt nur noch logarithmisch von der Energie γ der Elektronen abhängt.

2.3.6 Spektrum

Bisher wurde betrachtet, welchen Effekt inverse Compton-Streuung auf Elektronen hat. Sie verlieren Energie, indem sie diese an die Photonen übertragen. Jetzt soll die Energie-Verteilung der gestreuten Photonen untersucht werden, also das durch inverse Compton-Streuung erzeugte Spektrum erarbeitet werden. Dieses sollte neben dem differentiellen Streuquerschnitt des Prozesses noch von der Richtungs- und Energie-Verteilung der wechselwirkenden Teilchen abhängen, denn dies sind die Größen, die das Ereignis beschreiben.

Wir betrachten den allgemeinen Fall einer Wechselwirkung von Teilchen der Sorte a mit Teilchen der Sorte b .

Zunächst machen wir die Vereinfachung, dass sich alle Teilchen einer Sorte in dieselbe Richtung bewegen und auch dass alle Teilchen einer Sorte die gleiche Energie haben. Die Anzahl-Dichte der Teilchen der Sorte $i \in \{a, b\}$ im Beobachter-System sei N_i und die Anzahl-Dichte der Teilchen der Sorte i im Ruhesystem von Teilchen der Sorte $j \in \{a, b\}$ sei dann N_i^j . Betrachtet man den Prozess analog zu Dermer & Menon [2007] aus dem Bezugssystem, in dem die Teilchen der Sorte b ruhen, so ist wie auch in Kapitel 2.3.4 die Stoß-Rate eines Teilchens der Sorte b in der Population der Teilchen a durch

$$\frac{dS_a^b}{dt^b} = v_{\text{rel}} \sigma(\gamma_{\text{rel}}) N_a^b \quad (2.68)$$

gegeben. Hier ist N_a^b die Anzahl-Dichte von Teilchen der Art a im Ruhe-System von Teilchen der Art b . v_{rel} sowie γ_{rel} ist die Relativgeschwindigkeit sowie der zugehörige Lorentz-Faktor zwischen Teilchen verschiedener Art. Offensichtlich ist γ_{rel} eine Invariante, die sich aus den im Beobachter-System gemessenen Geschwindigkeiten $c\vec{\beta}_i$ der Teilchen und den zugehörigen Lorentz-Faktoren γ_i gemäß

$$\gamma_{\text{rel}} = \gamma_a \gamma_b (1 - \vec{\beta}_a \vec{\beta}_b) \quad (2.69)$$

zusammensetzt [Dermer & Menon, 2007].

Da sich N_b^b Teilchen der Sorte b pro Volumeneinheit aufhalten, beträgt die Anzahl der Stöße pro Zeit- und pro Volumeneinheit mit der Beziehung 2.68

$$\frac{d^2 S^b}{dt^b dV^b} = N_b^b \cdot \frac{dS_a^b}{dt^b} = v_{\text{rel}} \sigma(\gamma_{\text{rel}}) \cdot N_a^b N_b^b. \quad (2.70)$$

Wegen der relativistischen Längenkontraktion gilt allgemein für die Anzahl-Dichte N^{Ruhe} in einem System, in dem die betrachteten Teilchen ruhen und das sich mit γ bezüglich des Beobachter-Systems bewegt, $N^{\text{Ruhe}} = N^{\text{Beob}}/\gamma$. Im hiesigen Fall lässt sich folglich die Anzahl-Dichte N_i^i von i im Ruhesystem von i mit der Anzahl-Dichte N_i von i im Beobachter-System verknüpfen: $N_i^i = N_i/\gamma_i$. Insbesondere ist

$$N_a^a = N_a/\gamma_a \text{ und} \quad (2.71a)$$

$$N_b^b = N_b/\gamma_b. \quad (2.71b)$$

Außerdem hängt die Anzahl-Dichte N_i^i von i im Ruhesystem von i mit der Anzahl-Dichte $N_i^j|_{i \neq j}$ von i im Ruhesystem von j über $N_i^i = N_i^j|_{i \neq j}/\gamma_{\text{rel}}$ zusammen. Damit und mit 2.71a gilt speziell

$$N_a^b = N_a \gamma_{\text{rel}}/\gamma_a. \quad (2.72)$$

Mit den Gleichungen 2.69, 2.71b und 2.72 folgt für Gleichung 2.70

$$\frac{d^2 S^b}{dt^b dV^b} = v_{\text{rel}} \sigma(\gamma_{\text{rel}}) N_a N_b (1 - \vec{\beta}_a \vec{\beta}_b), \quad (2.73)$$

welche offensichtlich symmetrisch in a und b ist.

Jetzt verlassen wir die vereinfachte Betrachtung und nehmen an, dass beide Teilchen-Populationen eine ausgedehnte Verteilung in Energie und in ihrer Ausbreitungsrichtung haben. Die spektrale Anzahl-Dichte der Teilchen bezeichnen wir wieder mit $n_a(\epsilon_a)$ beziehungsweise $n_b(\epsilon_b)$ und es ist wieder $n_i = \frac{dN_i}{d\epsilon_i}$. Im Allgemeinen liegen jedoch keine isotropen Richtungs-Verteilungen vor, sondern die Anzahl-Dichte der Teilchen hat eine explizite Richtungs-Abhängigkeit. Deswegen wird im Folgenden eine spektrale Anzahl-Dichte $\nu_i(\epsilon_i, \Omega_i) = \frac{dn_i}{d\Omega_i} = \frac{d^2 N_i}{d\epsilon_i d\Omega_i}(\epsilon_i, \Omega_i)$ benutzt. Dabei beziffert $d^2 N_i$ die infinitesimale Anzahl-Dichte von Teilchen der Art i , deren Energie sich im Intervall $[\epsilon_i; \epsilon_i + d\epsilon_i]$ befindet und die sich in einem infinitesimal schmalen Kegel mit Öffnungsraumwinkel $d\Omega_i$ entlang der Richtung Ω_i ausbreiten. Es gilt dann $\int \nu_i d\Omega_i = \int dn_i = n_i$.

Um nun die zu Gleichung 2.73 analoge Stoß-Rate pro Volumeneinheit zu erhalten, müssen die infinitesimalen Anzahl-Dichten $d^2 N_i$ verwendet werden und all diese aufsummiert (das heißt aufintegriert) werden:

$$\frac{d^2 S^b}{dt^b dV^b} = c \int \int \beta_{\text{rel}} \sigma(\gamma_{\text{rel}}) (1 - \vec{\beta}_a \vec{\beta}_b) d^2 N_a d^2 N_b \quad (2.74)$$

Hier wurde von $\beta_{\text{rel}} = v_{\text{rel}}/c$ Gebrauch gemacht. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass bei gleichen Stoß-Partnern $a = b$ der Faktor $1/2$ hinzugefügt werden muss, um Selbst-Wechselwirkung nicht zu zählen. Diese Stoß-Rate pro Volumeneinheit gilt zunächst nur im Ruhesystem von Teilen der Art b . Da jedoch sowohl die Anzahl $d^2 S$ der Stöße als auch das Raumzeit-Volumen $dt dV$ invariant gegenüber Lorentz-Transformationen ist, gilt dies auch für deren Quotient [Dermer & Menon, 2007]. Somit gilt Gleichung 2.74 auch im Beobachter-System.

Die Integration über $d^2 N_a d^2 N_b$ wird in der Praxis in eine Integration über Energie und Raumwinkel

überführt, denn es ist $d^2 N_i = \nu_i d\epsilon_i d\Omega_i$. Damit und unter Beachtung der geometrischen Beziehung $\vec{\beta}_a \vec{\beta}_b = \beta_a \beta_b \cos(\theta)$, wobei θ der von Ω_a und Ω_b abhängige Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der wechselwirkenden Teilchen im Beobachter-System ist, ergibt sich für die Stoß-Rate pro Volumeneinheit

$$\frac{d^2 S}{dt dV} = c \oint \int_0^\infty \oint \int_0^\infty \beta_{\text{rel}} \sigma(\gamma_{\text{rel}}) (1 - \beta_a \beta_b \cos(\theta(\Omega_a, \Omega_b))) \nu_a(\epsilon_a, \Omega_a) \nu_b(\epsilon_b, \Omega_b) d\epsilon_a d\Omega_a d\epsilon_b d\Omega_b. \quad (2.75)$$

Dies ist die Anzahl der Stöße, die pro Zeiteinheit und pro Volumeneinheit auftreten.

Tatsächlich interessiert jedoch das Spektrum der invers Compton-gestreuten Strahlung. Dieses lässt sich durch eine Größe beschreiben, die Emissivität [Dermer & Menon, 2007] (oder auch monochromatischer Emissionskoeffizient [Rybicki & Lightman, 1979]) genannt wird. Bevor die Emissivität erarbeitet wird, spezifizieren wir den allgemeinen Fall von Teilchen der Arten a und b auf das vorliegende Problem. Die Sorte a wird durch Photonen und die Sorte b durch Elektronen ersetzt. Alle zu Photonen gehörigen Energien sowie deren spektrale Anzahl-Dichte schreiben wir im Folgenden der Einfachheit halber ohne Index. Die Richtung der einfallenden Photonen schreiben wir mit Index $_{\text{ph}}$, während die meisten Größen, die sich auf Elektronen beziehen, den Index $_e$ erhalten. Überdies kann man die Energie der Elektronen ϵ_e (vormals ϵ_b) mit deren Lorentz-Faktor γ identifizieren, den wir ohne Index schreiben, da ein Lorentz-Faktor für Photonen nicht gebraucht wird. Da sich Photonen mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, gilt $\beta_{\text{ph}} = 1$ (vormals $\beta_a = 1$) sowie $\beta_{\text{rel}} \lesssim 1$ und β_b wird schlicht zu β . Mit diesen Ersetzungen lautet Gleichung 2.75

$$\frac{d^2 S}{dt dV} = c \oint \int_1^\infty \oint \int_0^\infty \sigma(\gamma_{\text{rel}}) (1 - \beta \cos(\theta(\Omega_{\text{ph}}, \Omega_e))) \nu(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}) \nu_e(\gamma, \Omega_e) d\epsilon d\Omega_{\text{ph}} d\gamma d\Omega_e. \quad (2.76)$$

Die Emissivität $j(\epsilon_1, \Omega_1) = \frac{d^4 E}{d\epsilon_1 d\Omega_1 dt dV}(\epsilon_1, \Omega_1)$ gibt nun an, wie viel Energie in Form von Quanten, deren Energie im Intervall $[\epsilon_1; \epsilon_1 + d\epsilon_1]$ liegt, pro Zeit- und Volumeneinheit dt und dV in den Raumwinkel $d\Omega_1$ entlang der Richtung Ω_1 emittiert wird. Ein Ausdruck für die Emissivität kann nun vom Ausdruck 2.76 für die Stoß-Rate pro Volumeneinheit abgeleitet werden, denn bei jedem Stoßereignis wird ein gestreutes Photon mit einer bestimmten Energie emittiert. Jedoch muss, um die Abhängigkeit der Emissivität von Energie ϵ_1 und Richtung Ω_1 gestreuter Photonen zu erhalten, der gesamte Streuquerschnitt $\sigma(\gamma_{\text{rel}})$ durch den differentiellen Streuquerschnitt von Compton-Streuung, der in Kapitel 2.3.3 bearbeitet wurde, ersetzt werden. Seine Abhängigkeit von Größen im Beobachter-System lässt sich mit den Gleichungen 2.49 bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_C}{d\Omega'_1 d\epsilon'_1}(\epsilon'_1, \epsilon', \chi'_1) &= \frac{d^2 \sigma_C}{d\Omega'_1 d\epsilon'_1}(\epsilon'_1(\epsilon_1, \gamma, \Omega'_1(\gamma, \Omega_1)), \epsilon'(\epsilon, \gamma, \Omega(\Omega_{\text{ph}}, \Omega_e)), \chi'_1(\Omega'_1(\gamma, \Omega_1))) = \\ &= \frac{d^2 \sigma_C}{d\Omega_1 d\epsilon_1}(\epsilon_1, \Omega_1, \gamma, \epsilon, \Omega_{\text{ph}}, \Omega_e) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass der funktionale Zusammenhang zwischen Ω'_1 und Größen im Beobachter-System wegen der Gleichungen der relativistischen Aberration [Rybicki & Lightman, 1979] der Form $\Omega'_1(\gamma, \Omega_1)$ ist. Außerdem setzt sich, wie in Abbildung 2.7 zu erkennen ist, die Richtung Ω des Photons in Bezug auf die Elektronenrichtung aus der Richtung Ω_{ph} des einfallenden Photons und der Richtung Ω_e des einfallenden Elektrons zusammen.

Da die Emissivität nicht nur die Anzahl von Photonen angibt, die pro infinitesimalem Zeitintervall, Volumenintervall und Energieintervall in einen infinitesimalen Raumwinkel abgestrahlt werden, sondern den Betrag an Energie, der pro infinitesimalem Zeitintervall, Volumenintervall und Energieintervall in einen infinitesimalen Raumwinkel abgestrahlt wird, muss für jedes Stoßereignis noch die Energie $\epsilon_1 mc^2$ des gestreuten Photons mitgezählt werden. Deswegen wird neben dem differentiellen Streuquerschnitt noch die Energie der auslaufenden Photonen in Gleichung 2.76 eingefügt, um die Emissivität von inverser Compton-Strahlung zu erhalten.

$$\begin{aligned} j_{\text{IC}}(\epsilon_1, \Omega_1) &= c \oint \int_1^\infty \oint \int_0^\infty \epsilon_1 mc^2 \frac{d^2 \sigma_C}{d\Omega_1 d\epsilon_1}(\epsilon_1, \Omega_1, \gamma, \epsilon, \Omega_{\text{ph}}, \Omega_e) \cdot \\ &\quad \cdot (1 - \beta \cos(\theta(\Omega_{\text{ph}}, \Omega_e))) \nu(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}) \nu_e(\gamma, \Omega_e) d\epsilon d\Omega_{\text{ph}} d\gamma d\Omega_e \end{aligned} \quad (2.78)$$

Die exakte Abhängigkeit $\theta(\Omega_{\text{ph}}, \Omega_e)$ lautet gemäß Dermer & Menon [2007]

$$\theta = \arccos \left(\cos(\theta_{\text{ph}}) \cos(\theta_e) + \sqrt{1 - \cos^2(\theta_{\text{ph}})} \sqrt{1 - \cos^2(\theta_e)} \cos(\phi_{\text{ph}, \theta_{\text{ph}}} - \phi_{e, \theta_e}) \right), \quad (2.79)$$

wobei θ_i und ϕ_{i, θ_i} $i \in \{\text{ph}, e\}$ jeweils Polar- und zugehörigen Azimutal-Winkel eines Teilchens der Art i in einem beliebig gewählten Koordinatensystem im Beobachter-System darstellen.

2.4 Triplet Paar-Erzeugung

Die Wechselwirkung eines Photons mit einem Elektron (Positron) führt nicht unbedingt zur Streuung des Photons. Ein weiterer im Rahmen der Quantenelektrodynamik möglicher Prozess ist die sogenannte Triplet Paar-Erzeugung (TPP für Englisch: triplet pair production). Dies ist die Erzeugung eines e^+e^- -Paares durch Kollision von Elektron (Positron) und Photon, wobei das eingehende Elektron (Positron) als Rückstoß-Elektron (-Positron) verbleibt: $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + e^- + e^+$

Ein solcher Prozess hat zwei wesentliche Resultate:

- Die ursprünglichen Elektronen (Positronen werden im Folgenden nicht mehr explizit genannt) geben einen Teil ihrer Energie an das erzeugte Paar ab. Dadurch erleiden die Elektronen Energieverlust. Dieser kann möglicherweise die Kinematik relativistischer Elektronen in astrophysikalischen Umgebungen beeinflussen und infolgedessen auch das von den Elektronen abgegebene Strahlungsspektrum verändern.
- Es findet analog zur γ - γ -Paar-Erzeugung effektiv eine Vervielfachung der Zahl vorhandener Elektronen statt, das heißt die Anzahl-Dichte einer Elektronen-Population wird erhöht. Ein in ein Photonen-Feld einfallendes Elektron kann durch aufeinanderfolgende Zyklen von TPP einen Schauer von Elektronen hervorrufen. Dieser verursacht durch Strahlungsprozesse wieder neue Photonen-Felder. Das Zusammenspiel dieser Vervielfachungsprozesse nennt man elektromagnetische Kaskade.

TPP wird aus zwei Gründen nur wenig Beachtung geschenkt. Erstens, weil der Prozess in der Störungstheorie von dritter Ordnung ist und dies naiv einen geringen Streuquerschnitt suggeriert und zweitens, weil ein Ausdruck für den vollständigen differentiellen Streuquerschnitt sehr umfangreich und deswegen schwer handhabbar ist. Wegen der Komplexität der Ausdrücke wird TPP meist im Elektronen-Ruhe-System behandelt. Anwendungsbezogene Ausdrücke wie zum Beispiel Energie-Verteilungen der einzelnen Sekundärteilchen können bisher im Beobachter-System nur durch numerische Integration oder analytisch durch geeignete Näherungen gefunden werden [Mastichiadis et al., 1986].

Im Gegensatz zu inverser Compton-Streuung, findet TPP erst ab einer Mindest-Energie der einfallenden Photonen statt: Der Prozess kann auftreten, wenn die Energie der Photonen im Elektronen-Ruhe-System größer als $4mc^2$ ist, also wenn gilt [Mastichiadis et al., 1986]:

$$\epsilon' \stackrel{2.49a}{=} \gamma \epsilon (1 - \beta \cos(\theta)) \stackrel{2.86b}{=} \epsilon (\gamma - p_e \cos(\theta)) > 4 \quad (2.80)$$

Da wegen Gleichung 2.49a die Photonenergie im Elektronen-Ruhe-System von der Photonenergie ϵ im Beobachter-System, dem Lorentz-Faktor γ und dem Winkel θ zwischen den Einfallsrichtungen abhängt, lässt sich diese Bedingung für das Einsetzen von TPP in eine Bedingung für den Winkel θ

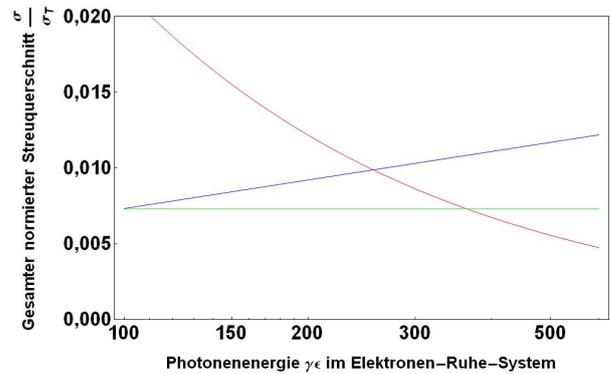


Abb. 2.8: Vergleich von gesamtem Streuquerschnitt von TPP (blaue Kurve) gemäß Gleichung 2.81 und inverser Compton-Streuung im Klein-Nishina-Grenzfall (rot) gemäß Gleichung 2.55 in halblogarithmischer Skalierung. Beide Streuquerschnitte wurden durch den Thomson-Streuquerschnitt σ_T geteilt. Außerdem ist die von Dermer & Schlickeiser [1991] verwendete Näherung $\sigma_{\text{TPP}} = \alpha \sigma_T$ (grün) aufgetragen.

überführen: TPP setzt erst ein, wenn θ einen minimalen Grenzwinkel $\theta_{\min} = \arccos(\beta^{-1}(1 - 4/(\gamma\epsilon)))$ überschreitet.

Ein analytischer Ausdruck für den gesamten Streuquerschnitt von TPP wurde von Haug [1981] angegeben. Er lautet

$$\sigma_{\text{TPP}} = \frac{3}{8\pi} \sigma_{\text{T}} \alpha \left(\frac{28}{9} \ln(2\gamma\epsilon) - \frac{218}{27} \right) \quad (2.81)$$

und wurde durch numerische Integration des differentiellen Streuquerschnittes und darauffolgendem analytischen Fit erhalten. α ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und $\gamma\epsilon$ die Photonenenergie im Elektronen-Ruhe-System bei rechtwinkligem Einfall ($\theta = \pi/2$). Für große Energien $\gamma\epsilon$ ist der gesamte Streuquerschnitt also direkt proportional zu $\sim \ln(2\gamma\epsilon)$. Durch Vergleich (siehe Abbildung 2.8) mit dem gesamten Streuquerschnitt für inverse Compton-Streuung im Klein-Nishina-Grenzfall aus Gleichung 2.55 ist offensichtlich, dass TPP ab einer Grenzenergie $\gamma\epsilon \approx 256$ der dominierende Prozess ist. Dies bedeutet jedoch nicht zwangsläufig, dass bei großen Energien $\gamma\epsilon$ der einfallenden Photonen TPP auch der Prozess ist, der die Energieverlust-Rate der streuenden Elektronen dominiert. Denn hierfür spielt neben der Wechselwirkungs-Rate die Energie, welche die erzeugten Teilchen ($e^- + e^+$ im Fall von TPP und γ im Fall von Compton-Streuung) erhalten, eine wesentliche Rolle. Um später Energieverlust-Raten von TPP und Compton-Streuung unter Anwendung der Verhältnisse von Pulsar-Magnetosphären vergleichen zu können, werden jetzt Ausdrücke für die Energieverlust-Rate von TPP besprochen.

2.4.1 Energieverlust-Rate durch Monte-Carlo Simulation

Ein Ausdruck für die Energieverlust-Rate von TPP wurde von Mastichiadis [1991] mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation, das heißt mit Hilfe von einer großen Zahl an Zufallsexperimenten, ermittelt. Das Vorgehen lässt sich grob in vier Schritte unterteilen:

- Zunächst wird der vollständige differentielle Streuquerschnitt numerisch über den Raumwinkel und die Energie des Rückstoß-Elektrons sowie über die Raumwinkel der erzeugten Teilchen integriert, um den doppelt differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d^2\sigma_{\text{TPP}}}{d\epsilon_+ d\epsilon_-}(\epsilon, \gamma, \theta, \epsilon_+, \epsilon_-)$ zu erhalten. Durch erneute numerische Integration über die Energie ϵ_- des erzeugten Elektrons wird daraus der einfach differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma_{\text{TPP}}}{d\epsilon_+}(\epsilon, \gamma, \theta, \epsilon_+)$ in Bezug auf die Positronen-Energie erzielt. Diese beiden differentiellen Streuquerschnitte werden durch einen Polynomzug gefittet, um die Implementierung in die Monte-Carlo Simulation zu vereinfachen.
- Ein einzelnes Zufallsexperiment, also ein einzelnes zufälliges TPP-Ereignis, wird folgendermaßen durchgeführt: Zunächst wird zufällig eine beliebige Energie ϵ der einfallenden Photonen sowie ein beliebiger Lorentz-Faktor γ gewählt. Daraufhin wird ein Einfall-Winkel θ aus einer Verteilung, in die der gesamte Streuquerschnitt (aus Gleichung 2.81) eingeht, herausgegriffen. Mit diesem Satz $\{\epsilon, \gamma, \theta\}$ kann der zuvor bestimmte einfach differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma_{\text{TPP}}}{d\epsilon_+}(\epsilon_+)$ als reine Funktion von ϵ_+ spezifiziert werden. Gemäß dieser Verteilung wird dann zufällig eine Positronenenergie ϵ_+ ermittelt. Mit Hilfe des nun vorliegenden Satzes $\{\epsilon, \gamma, \theta, \epsilon_+\}$ wird wieder der zuvor hergeleitete doppelt differentielle Streuquerschnitt $\frac{d^2\sigma_{\text{TPP}}}{d\epsilon_+ d\epsilon_-}(\epsilon_-)$ als reine Funktion von ϵ_- dargestellt. Daraus wird dann entsprechend seiner Verteilung wieder ein Wert ϵ_- bestimmt. Nun wird angenommen, dass die Energie $\epsilon_- + \epsilon_+$ der beiden erzeugten Teilchen vollständig aus der Energie γ des einfallenden Elektrons gespeist wird. Die Photonenenergie ϵ wird also als vernachlässigbar, $\epsilon \ll 1$, vorausgesetzt. Dann ist aber die Energie der beiden erzeugten Teilchen genau der Betrag, der dem ursprünglichen Elektron verloren geht, das heißt $\Delta\gamma = -(\epsilon_- + \epsilon_+)$.
- Wird ein solches Zufallsexperiment für ein Paar $\{\epsilon, \gamma\}$ sehr oft durchgeführt, so lässt sich ein mittlerer Energieverlust pro TPP-Ereignis erzielen. Wird dies noch für viele verschiedene Paare $\{\epsilon, \gamma\}$ wiederholt, so lässt sich eine Funktion $\Delta\gamma(\epsilon, \gamma)$ ermitteln. Diese wurde von Mastichiadis [1991] gefittet, um sie analytisch darstellbar zu machen.
- Die Wechselwirkungs-Rate für TPP ist nun analog zu Kapitel 2.3.4 durch $\frac{dS}{dt} = c\sigma_{\text{TPP}} \int dN$ gegeben. Dabei stellt $dN(\epsilon) = n(\epsilon) d\epsilon$ wieder die infinitesimale Anzahl-Dichte der Photonen mit

Energien im Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ dar. Die Wechselwirkungs-Rate gibt an, wieviele TPP-Ereignisse pro Zeiteinheit und pro einfallendem Elektron stattfinden. Da $\Delta\gamma$ die Energie angibt, die pro Ereignis im Durchschnitt für ein Elektron verloren geht, stellt dann das Produkt beider Größen die Energieverlust-Rate eines Elektrons durch TPP dar.

Der von Mastichiadis [1991] unter Anwendung dieses Verfahrens erhaltene Ausdruck für die Energieverlust-Rate eines Elektrons der Energie γ in einem monochromatischen Photonen-Feld der Anzahl-Dichte N_0 und der Photonenenergie ϵ_0 lautet:

$$\frac{dE_e}{dt} = -5\alpha r_e^2 m c^3 N_0 \frac{(\epsilon_0 \gamma)^{1/4}}{\epsilon_0} \left(\frac{28}{9} \ln(2\gamma\epsilon_0) - \frac{218}{27} \right) \quad (2.82)$$

Liegt kein monochromatisches Photonen-Feld vor, sondern eines, in dem die Photonen verschiedene Energien besitzen, die gemäß der spektralen Anzahl-Dichte $n(\epsilon)$ verteilt sind, so muss im Ausdruck 2.82 $\frac{dE_e}{dt}$ durch $d\left(\frac{dE_e}{dt}\right)$ und N_0 durch $dN = n(\epsilon)d\epsilon$ ersetzt werden. Diese infinitesimalen Energieverlust-Raten werden dann alle aufsummiert, was in einer Integration mündet. Der komplette ϵ -abhängige Teil im Ausdruck 2.82 muss also über ϵ integriert werden. Somit ist die Energieverlust-Rate eines Elektrons der Energie γ in einem Photonen-Feld der spektralen Anzahl-Dichte $n(\epsilon)$ gegeben durch:

$$\frac{dE_e}{dt} = -5\alpha r_e^2 m c^3 \int_0^\infty n(\epsilon) \frac{(\epsilon\gamma)^{1/4}}{\epsilon} \left(\frac{28}{9} \ln(2\gamma\epsilon) - \frac{218}{27} \right) d\epsilon \quad (2.83)$$

Setzt man hier wieder das monochromatische Photonen-Feld $n = N_0\delta(\epsilon - \epsilon_0)$ ein, so bekommt man Gleichung 2.82 zurück.

Ein prinzipiell ähnliches numerisches Verfahren haben Anguelov et al. [1999] gewählt, jedoch mit zwei Unterschieden:

- Durch Einsatz der Programmiersprache Mathematica kann die intern verwendete Anzahl an Stellen, mit denen gerechnet wird, beliebig erhöht werden. Numerische Rechnungen sind somit genauer und verlässlicher.
- Außerdem werden die zu lösenden Integrale durch geeignete Substitutionen derart umgeformt, dass sie bei akzeptabler Rechenzeit mit zuvor unerreichter Genauigkeit ausgewertet werden können. Ohne Substitution handelt es sich bei den Integranden um sich in einem schmalen Bereich der Integrationsvariablen schnell ändernde Funktionen, die deshalb schwer behandelbar sind.

Die so von Anguelov et al. [1999] erhaltene analytische Darstellung der Energieverlust-Rate für ein in einem Feld monochromatischer Photonen der Energie ϵ_0 und der Anzahl-Dichte N_0 befindliches Elektron lautet:

$$\frac{dE_e}{dt} = -0,386\pi\alpha r_e^2 m c^3 N_0 \frac{(\ln(2\epsilon_0\gamma))^2}{\epsilon_0} \left(\ln(2\gamma\epsilon_0) - \frac{218}{84} \right) \quad (2.84)$$

Der im Vergleich zu Gleichung 2.82 wesentliche Unterschied ist die Abhängigkeit $\sim (\ln(2\epsilon_0\gamma))^2$ bei Anguelov et al. [1999] verglichen mit $\sim (\epsilon_0\gamma)^{1/4}$ bei Mastichiadis [1991], die durch unterschiedliche Parametrisierungen des mittleren Energieverlusts pro Stoß bedingt ist.

Bei einem nicht monochromatischen Photonen-Feld muss erneut über den vollständigen ϵ -abhängigen Teil einschließlich der spektralen Anzahl-Dichte $n(\epsilon)$ integriert werden, wodurch man folgendes Ergebnis für die Energieverlust-Rate erhält:

$$\frac{dE_e}{dt} = -0,386\pi\alpha r_e^2 m c^3 \int_0^\infty n(\epsilon) \frac{(\ln(2\epsilon\gamma))^2}{\epsilon} \left(\ln(2\gamma\epsilon) - \frac{218}{84} \right) d\epsilon \quad (2.85)$$

2.4.2 Energieverlust-Rate durch analytische Näherung

Einen eleganten Weg haben Dermer & Schlickeiser [1991] gefunden, um die Energieverlust-Rate von TPP rein analytisch bestimmen zu können. Jedoch sind dazu, wie im Folgenden gezeigt wird, Näherungen

erforderlich.

Zunächst rufe man sich in Erinnerung, dass in dimensionsbehafteten Einheiten für den Impuls P eines Teilchens der Geschwindigkeit v und der Masse M die Beziehung $P = M(v) \cdot v = \gamma M_{\text{Ruhe}} \cdot v$ gilt. Geht man durch Division mit $M_{\text{Ruhe}}c$ zum normierten, das heißt dimensionslosen Impuls über, so ist $p = P/(M_{\text{Ruhe}}c) = \gamma\beta$. Man identifiziert β mit der normierten Geschwindigkeit des Teilchens und γ ist seine dimensionslose Energie. Da sich Photonen mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen gilt also in dimensionslosen Einheiten in der im Folgenden verwendeten Notation:

$$\text{Photonen:} \quad p = \epsilon \quad (2.86a)$$

$$\text{Elektronen:} \quad p_e = \gamma\beta \approx \gamma \quad (2.86b)$$

Die Näherung in 2.86b bezieht sich auf den extrem relativistischen Grenzfall. Außerdem sei daran erinnert, dass die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines ruhemassebehafteten Teilchens in dimensionslosen Einheiten $\gamma^2 = p^2 + 1$ lautet.

Zur Behandlung der Triplet Paar-Erzeugung sei nun ein Photon mit Impuls p und ein Elektron mit Impuls p_e , die wie in Abbildung 2.9 gezeigt unter einem Winkel θ kollidieren, gegeben. Dies bezieht sich auf das Beobachter-System B, in dem ja letztlich die Energieverlust-Rate angegeben werden soll. Darüber hinaus sei das Koordinatensystem derart gewählt, dass der Elektronen-Impulsvektor \vec{p}_e parallel zur x -Achse ausgerichtet ist.

Nun gehen wir durch eine Lorentz-Transformation mit Lorentz-Faktor $\gamma_{\text{BK}} = (1 - \beta_{\text{BK}}^2)^{-1/2}$ in ein anderes Bezugssystem K über, das sich mit der Geschwindigkeit β_{BK} bezüglich B bewegt. Dieses System K ist nicht das Elektronen-Ruhe-System. Vielmehr ist es dadurch definiert, dass in diesem System K die x -Komponente des Gesamtimpulses $p_{\text{ges},K,x}$ verschwindet. In diesem Bezugssystem ist der Photonenimpuls p_K unter dem Winkel θ_K zum Elektronenimpuls $p_{e,K}$ ausgerichtet, wobei die Winkel θ und θ_K durch die Gleichungen der relativistischen Aberration auseinander hervorgehen.

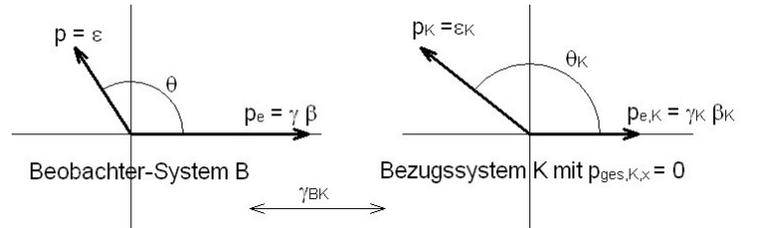


Abb. 2.9: Geometrie zur Triplet Paar-Erzeugung. Das Bezugssystem K, in dem das Gesamtsystem „Photon + Elektron“ keinen Impuls in x -Richtung hat, ist über eine Lorentz-Transformation mit γ_{BK} mit dem Beobachter-System verbunden. γ beziehungsweise γ_K sind die Lorentz-Faktoren zwischen dem Elektronen-Ruhe-System und B beziehungsweise K. Verwendet sind hier die Beziehungen 2.86.

Nun macht man sich folgende Beobachtung der experimentellen Teilchenphysik zunutze [Perl, 1974, Dermer & Schlickeiser, 1991]: Experimente in Teilchenbeschleunigern haben ergeben, dass bei großer Gesamtenergie $\gamma_K + \epsilon_K \gg 1$ das erzeugte e^+e^- -Paar im System K über viele einzelne Kollisionen gemittelt ruht. Somit ist die Annahme gerechtfertigt, dass sich die erzeugten Teilchen in K nicht bewegen und somit ihre kinetische Energie verschwindet. Da sich das System K aber mit dem Lorentz-Faktor γ_{BK} in Bezug zum Beobachter-System B bewegt, hat ein erzeugtes Teilchen in diesem System B im Schnitt die Energie γ_{BK} . Deswegen beträgt, wenn man die Energie des einfallenden Photons unberücksichtigt lässt, der Energieverlust eines einfallenden Elektrons pro TPP-Ereignis $\Delta\gamma = -2\gamma_{\text{BK}}$. Verbleibt also noch, γ_{BK} zu bestimmen.

Dazu macht man den in K definitionsgemäß zulässigen Ansatz

$$p_{\text{ges},K,x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{K,x} = -p_{e,K,x}. \quad (2.87)$$

Hierbei lässt sich die x -Komponente des Elektronenimpulses durch Lorentz-Transformation von B nach K durch

$$p_{e,K,x} = \gamma_{\text{BK}}(p_{e,x} - \beta_{\text{BK}}\gamma) = \gamma_{\text{BK}}(p_e - \beta_{\text{BK}}\gamma) \quad (2.88)$$

darstellen. Zum Verständnis von 2.88 sollte man γ hier weniger als Lorentz-Faktor sondern als Energie des Elektrons in B erkennen. Die x -Komponente des Photonenimpulses beträgt, wie man in Abbildung 2.9 erkennt,

$$p_{K,x} = p_K \cos(\theta_K) \stackrel{2.86a}{=} \epsilon_K \cos(\theta_K). \quad (2.89)$$

Die Photonenenergie ϵ_K im System K geht dabei mit Hilfe der Doppler-Beziehung 2.49a, die hier

$$\epsilon_K = \gamma_{BK} \epsilon (1 - \beta_{BK} \cos(\theta)) \quad (2.90)$$

lautet, aus den Größen im System B hervor und die relativistische Aberration ergibt

$$\cos(\theta_K) = \frac{\cos(\theta) - \beta_{BK}}{1 - \beta_{BK} \cos(\theta)}. \quad (2.91)$$

Einsetzen von Gleichungen 2.91 und 2.90 in Gleichung 2.89 und diese sowie Gleichung 2.88 dann in 2.87 ergibt:

$$(\cos(\theta) - \beta_{BK}) \epsilon = -(p_e - \beta_{BK} \gamma) \quad (2.92)$$

Löst man diese Relation nach β_{BK} auf und berechnet mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung den Lorentz-Faktor γ_{BK} , so ergibt sich für diesen

$$\gamma_{BK} = \frac{\gamma + \epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon^2(1 - \cos^2(\theta)) + 2\epsilon(\gamma - p_e \cos(\theta))}}. \quad (2.93)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, muss eine Einschränkung vorgenommen werden: Die Photonen seien niederenergetisch und die Elektronen extrem relativistisch, das heißt es ist $\epsilon \ll 1 \ll \gamma$. Damit lässt sich der Zähler von 2.93 auf γ nähern. Wegen der Ungleichung 2.80 für die TPP-Eintrittsschwelle gilt außerdem $\epsilon \ll 1 < 4 < \epsilon(\gamma - p_e \cos(\theta))$. Damit lässt sich der Nenner von 2.93 approximieren, sodass sich Folgendes ergibt:

$$\gamma_{BK} = \frac{\gamma}{\sqrt{2\epsilon(\gamma - p_e \cos(\theta))}} = \frac{\gamma}{\sqrt{2\epsilon'}} \quad (2.94)$$

Mit der obigen Argumentation ergibt sich nun der Energieverlust eines Elektrons pro TPP-Wechselwirkung zu $\Delta\gamma = -2\gamma/\sqrt{2\epsilon'}$. Die Rate, mit der TPP-Ereignisse stattfinden, beträgt analog zu Kapitel 2.3.4 $\frac{dS}{dt} = c \int \sigma_{\text{TPP}} (1 - \beta \cos(\theta)) d^2N$, wobei wieder $d^2N = \nu(\epsilon, \Omega) d\Omega d\epsilon = \nu(\epsilon, \theta, \phi_\theta) \sin(\theta) d\phi_\theta d\theta d\epsilon$ die Anzahl-Dichte der im infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega$ entlang der Richtung Ω einfallenden Photonen mit Energien aus dem Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ ist. Der Faktor $(1 - \beta \cos(\theta))$ stammt, wie auch in Kapitel 2.3.6 deutlich wurde, von der Transformation der Photonendichte. Die Energieverlust-Rate erhält man aus der Stoß-Rate, indem man wieder bei jedem Stoß den Energieverlust mitzählt. Dann erhält man in dimensionsbehafteten Einheiten:

$$\frac{dE_e}{dt} = -c \int_0^\infty \int_{\theta_{\min}}^\pi \int_0^{2\pi} 2 \frac{\gamma}{\sqrt{2\epsilon'}} mc^2 \sigma_{\text{TPP}} (1 - \beta \cos(\theta)) \nu(\epsilon, \theta, \phi_\theta) \sin(\theta) d\phi_\theta d\theta d\epsilon \quad (2.95)$$

Im Fall einer isotropen Photonen-Richtungsverteilung $\nu(\epsilon, \theta, \phi_\theta) = n(\epsilon)/(4\pi)$ kann die Integration über ϕ_θ ausgeführt werden:

$$\frac{dE_e}{dt} = -mc^3 \alpha \sigma_T \int_0^\infty \int_{\theta_{\min}}^\pi \frac{\gamma}{\sqrt{2\epsilon'}} (1 - \beta \cos(\theta)) n(\epsilon) \sin(\theta) d\theta d\epsilon \quad (2.96)$$

Hier wurde außerdem der gesamte TPP-Streuquerschnitt durch $\alpha \sigma_T$ angenähert, was für nicht zu große Energien $\gamma \epsilon$ akzeptabel ist (vergleiche Abbildung 2.8).

Nun gilt die Beziehung $d(\cos(\theta)) = -\sin(\theta) d\theta$ und wegen Gleichung 2.49a auch $d\epsilon' = -\epsilon \gamma \beta d(\cos(\theta)) = -\epsilon p_e d(\cos(\theta))$. Damit lässt sich die Integrationsvariable von θ zu ϵ' substituieren, sodass

$$\frac{dE_e}{dt} = -mc^3 \alpha \sigma_T \int_0^\infty \int_4^{2\gamma\epsilon} \frac{1}{\epsilon p_e} \frac{\gamma}{\sqrt{2\epsilon'}} (1 - \beta \cos(\theta)) n(\epsilon) d\epsilon' d\epsilon \quad (2.97)$$

verbleibt. Die einander entsprechenden Integrationsgrenzen lassen sich mit Hilfe von Gleichung 2.80

zuordnen. Nun lässt sich leicht weiter rechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{dE_e}{dt} &\stackrel{2.49a}{=} -\frac{mc^3\alpha\sigma_T}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \int_4^{2\gamma\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon p_e \sqrt{\epsilon'}} \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon} n(\epsilon) d\epsilon' d\epsilon = \\
&= -\frac{mc^3\alpha\sigma_T}{\sqrt{2}p_e} \int_0^\infty \int_4^{2\gamma\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\epsilon^2} n(\epsilon) d\epsilon' d\epsilon = \\
&= -\frac{mc^3\alpha\sigma_T}{\sqrt{2}p_e} \int_0^\infty \frac{2(2\gamma\epsilon)^{3/2}}{3\epsilon^2} n(\epsilon) d\epsilon = \\
&\stackrel{\beta\approx 1}{=} -\frac{4mc^3\alpha\sigma_T\sqrt{\gamma}}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} n(\epsilon) d\epsilon
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Dabei wurde in der vorletzten Umformung die Annahme $\epsilon\gamma \gg 1$ gemacht. Dann ist nämlich der Beitrag vor der unteren Integrationsgrenze vergleichsweise unwesentlich.

Kapitel 3

Qualitative Beschreibung der Modellvorstellung

Aus dem in Kapitel 2 dargelegten Wissen über die Pulsar-Magnetosphäre und der darin stattfindenden Wechselwirkungsprozesse soll nun ein Modell aufgestellt werden, das genügend einfach ist, um es im Rahmen dieser Arbeit quantitativ auswerten zu können, das aber noch immer möglichst realitätsnah ist. Wie üblich in Pulsar-Modellen gehen wir davon aus, dass geladene Teilchen in einer Gap, im vorliegenden Fall der Outer Gap, beschleunigt werden und Strahlung produzieren. Diese bewegt sich geradlinig fort und entweicht aus der Pulsar-Magnetosphäre und den umgebenden Strukturen.

Die Outer Gap hat tatsächlich keine einfach zu beschreibende Form und ist nicht an allen Seiten scharf begrenzt (siehe Hirotani [2008a] und Kapitel 2.1.4). Überdies variiert das elektrische Feld E_{\parallel} , das die Outer Gap durchsetzt, mit den Koordinaten x und z (vergleiche Gleichung 2.34) beziehungsweise mit r (vergleiche 2.35). Im Folgenden soll die Outer Gap der Einfachheit halber jedoch nur eindimensional beschrieben werden. Die Abhängigkeit von der Höhe z soll unberücksichtigt bleiben, ebenso eine eventuelle azimutale Abhängigkeit im Falle $\alpha \neq 0$. Alle Größen variieren also nur entlang einer Koordinate x , die entlang der Gap verläuft. Die Richtung \vec{e}_x , in der diese Koordinate x verläuft, wird in unserem Modell mit der Richtung \vec{e}_r der radialen Koordinate r eines Kugelkoordinaten-Systems identifiziert, es wird also $\vec{e}_x = \vec{e}_r$ gesetzt. Dies ist eine grobe Näherung, da die Outer Gap nicht genau radial in der Magnetosphäre liegt. Läge die Gap genau radial in der Magnetosphäre, so wäre die Ersetzung $\vec{e}_x = \vec{e}_r$ eine exakte Identität. Da jedoch in unserem Modell nicht die genaue Ausrichtung der Outer Gap in der Magnetosphäre spezifiziert werden kann und deshalb keine exakte Zuordnung von x und der Kugelkoordinate r geschehen kann, muss hier die Identifikation von \vec{e}_x mit \vec{e}_r vorgenommen werden. Diese Näherung vereinfacht die späteren Rechnungen, bei denen entlang der Outer Gap integriert werden soll (siehe unten). Bei diesen Integrationen wird dann entlang x , und somit in unserer Vereinfachung auch entlang r integriert. Die während der Integration benötigten Größen $E_{\parallel, \text{CH}}$ und $r_{\text{K,lgF}}$ werden aber immer an der Stelle r auf der letzten geschlossenen Feldlinie ausgewertet.

Der innere Rand der Gap ist im Modell von Cheng et al. [1986a] bei der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche lokalisiert. Der innere Rand liegt also näherungsweise beim Schnittpunkt der $\rho_{\text{GJ}} = 0$ -Fläche mit der letzten geschlossenen Feldlinie. Für den Fall $\alpha = 0$ ist dann, wie in 2.1.2 gezeigt wurde, der innere Rand annähernd bei $r = 0,5R_{\text{LZ}}$ gelegen. Tatsächlich gilt diese Beziehung für den senkrechten Abstand r_{\perp} . Jedoch ist erstens die Outer Gap bei relativ niedrigen geographischen Breiten gelegen und somit $r \approx r_{\perp}$ und zweitens ist ohnehin nur die Größenordnung relevant, da ja auch r und x nicht exakt identisch sind.

Die äußere Grenze der Outer Gap wird im vorliegenden Modell mit dem Licht-Zylinder identifiziert, das heißt bei $r \approx r_{\perp} = R_{\text{LZ}}$ gelegen angesehen, da im Modell von Cheng et al. [1986a] hier die Stabilität der Gap nicht mehr gewährleistet ist und außerdem die Form des Magnetfelds wesentlichen Abänderungen von der Dipol-Form unterliegt.

Die Grenze in nicht-radialer Richtung (also die obere und untere, sowie die beiden in azimutaler Richtung gelegenen) müssen vorerst nicht näher spezifiziert werden, sondern erst dann, wenn über die Querschnittsfläche der Outer Gap aus „Flussdichte“-Größen, also aus Größen, die auf Einheitsflächen bezogen sind, absolute Größen bestimmt werden sollen.

Es wird angenommen, dass das elektrische Feld E_{\parallel} entlang der Outer Gap, also tatsächlich entlang \vec{e}_x und in unserer Vereinfachung entlang \vec{e}_r , gerichtet ist. Für das elektrische Feld werden stets die beiden Ausdrücke $E_{\parallel,N}$ und $E_{\parallel,CH}$ aus Kapitel 2.1.4 benutzt und jeweils die Resultate miteinander verglichen. Des Weiteren nehmen wir analog zur Idee von Lyutikov et al. [2012] an, dass sich zwei gegenläufige Strahlen aus Elektronen beziehungsweise aus Positronen durch die Gap bewegen. Im Fall, in dem am magnetischen Pol $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} > 0$ gilt, ist die effektive Raumladung am inneren Ende der Outer Gap positiv und am äußeren Ende negativ. (Im Fall $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} < 0$ am magnetischen Pol wären lediglich alle Vorzeichen umgekehrt.) Dementsprechend besteht der nach außen gerichtete Teilchenstrahl aus Positronen und der nach innen gerichtete Strahl aus Elektronen. Diese Teilchen werden durch das Feld E_{\parallel} beschleunigt und gewinnen somit Energie, während sie sich durch die Gap bewegen. Bei dieser Bewegung wird je nach Größe von γ Krümmungsstrahlung emittiert. Dadurch erfahren die Teilchen einen Energieverlust (siehe Gleichung 2.41). Wenn sich Energiegewinn und -verlust pro Zeiteinheit die Waage halten, verändert sich γ nicht mehr. Ist der Energiegewinn größer als der -verlust, so steigt γ an und umgekehrt. Somit kann den Teilchen an jeder Stelle r in der Gap ein Lorentz-Faktor $\gamma(r)$ zugeordnet werden. Alle Teilchen eines Strahls haben in unserem Modell also den gleichen Verlauf $\gamma(r)$, das heißt alle Teilchen eines Strahls bewegen sich gleichartig durch die Gap.

Der Wert der Anzahl-Dichte N_e ist eine schwer zu bestimmende Größe. N_e hängt erstens davon ab, wie viele Teilchen am Stromkreis der Pulsar-Magnetosphäre beteiligt sind und somit von außen in die Outer Gap eintreten, und zweitens davon, wieviele Teilchen durch Paar-Erzeugung innerhalb der Gap neu produziert werden. Vor allem γ - γ -Paar-Erzeugung aber möglicherweise auch TPP können die Anzahl-Dichte um mehrere Größenordnungen erhöhen [Wang & Hirotani, 2011, Takata et al., 2011]. Da diese Prozesse stark von den vorhandenen Photonen-Feldern abhängen, welche nicht gleichförmig über die Gap verteilt sind, muss angenommen werden, dass auch die Anzahl-Dichte der Teilchen in realistischen Modellen räumlich variiert, was natürlich wieder auf die Verteilung der Strahlung rückwirkt. Dies alles muss in unserem einfachen Modell unberücksichtigt bleiben. Für die Anzahl-Dichte der Teilchen-Strahlen soll hier schlicht ein Wert verwendet werden, der sich an der Goldreich-Julian-Dichte orientiert, denn diese gibt einen ungefähren Wert für Teilchen-Dichten in Pulsar-Magnetosphären an. Es soll also $N_e = |\rho_{GJ}(\vec{r})/e|$ verwendet werden. Zur weiteren Vereinfachung und um diese Größe unabhängig vom Ort zu machen, beschränken wir uns auf die Goldreich-Julian-Dichte nahe der Äquatorebene und annähernd im Abstand des Licht-Zylinders ($r \sin(\Theta) \approx c/\Omega$). Der Term in Klammern im Nenner von Gleichung 2.27 wird dann klein gegen 1. In der Äquatorebene ist jedoch auch $|\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r})| = \Omega B(\vec{r})$ und mit dem Ausdruck 2.5 mit $\vartheta = \pi/2$ wird dies zu $\Omega B(\vec{r}) = \Omega(B_0 R^3)/(2r^3)$. In der Umgebung des Licht-Zylinders $r \approx R_{LZ}$ ist also $\Omega B = \Omega B_0 R^3/(2R_{LZ}^3)$ und damit ist $\Omega B \ll \Omega B_0$. Der Term in Klammern im Nenner von Gleichung 2.27 und der Term R^3/R_{LZ}^3 kompensieren sich also näherungsweise. Um eine sinnvolle Größenordnung für die Goldreich-Julian-Dichte im Bereich der Outer Gap zu bestimmen, werden deswegen diese beiden Terme vernachlässigt. Für die Anzahl-Dichte der Teilchenstrahlen wird in diesem Modell also der einfache Ausdruck $N_e = \Omega B_0/(4\pi c e)$ verwendet. Die Elementarladung im Nenner stammt von der Umrechnung von Ladungsdichte in Anzahl-Dichte, wobei hier vollständige Ladungs-Trennung angenommen wurde.

Die emittierte Strahlung wird im Fall von Krümmungsstrahlung wegen der relativistischen Fokussierung in Bewegungsrichtung der emittierenden Teilchen, also tangential zu den Feldlinien, abgestrahlt. Da der Krümmungsradius $r_{K,lGF}(R_{LZ}) \approx R_{LZ}$ der letzten geschlossenen Feldlinie im Bereich des Licht-Zylinders in etwa so groß wie ebendieser ist (siehe Gleichung 2.24b), kann man näherungsweise annehmen, dass sich die Krümmungsstrahlungsphotonen während ihrer Bewegung durch die Gap nicht sehr weit von der Feldlinie entfernen, auf der sie erzeugt wurden. Und da die Höhe (Dicke) der Outer Gap nicht sehr viel geringer als ihre Länge ist, wird in unserem Modell angenommen, dass alle erzeugten Photonen innerhalb der Outer Gap bleiben. Es existiert somit zusätzlich zu jedem der beiden Teilchenstrahlen ein Krümmungsstrahlungsstrahl. Die spektrale Energie-Flussdichte (spezifische Intensität) der nach außen gerichteten Krümmungsstrahlung an einem Punkt mit Koordinate r in der Gap ist dann die Summe (das Integral über r) all der spektralen Leistungsdichte (Emissivität), die zwischen der inneren Grenze der Gap und r durch Krümmungsstrahlung ausgesandt wurde und nach außen läuft. Ebenso ist die spektrale Energie-Flussdichte (spezifische Intensität) des nach innen laufenden Photonenstrahls an einem Punkt r in der Gap dann die Summe (das Integral über r) all der spektralen Leistungsdichte (Emissivität),

die zwischen r und der äußeren Grenze der Gap durch Krümmungsstrahlung emittiert wurde und nach innen gerichtet ist.

Es existieren also vier Strahlen, zwei nach innen und zwei nach außen propagierende, wovon wiederum jeweils einer aus Photonen und einer aus den ursprünglichen, geladenen Teilchen besteht. Zu jedem Photonenstrahl existiert dann ein entgegengesetzt gerichteter Teilchenstrahl, sodass Photonen und Teilchen dieser beiden Strahlen frontal aufeinandertreffen. Solche frontalen Kollisionen sind, wie in Kapitel 2.3.2 deutlich wurde, im Vergleich zu den ebenfalls möglichen anti-frontalen Kollisionen, viel energiereicher, vorausgesetzt die Teilchen bewegen sich relativistisch. Die Photonen, die mit den Teilchen frontal kollidieren, können nun von diesen invers Compton-gestreut werden. Ist dies der Fall, so entsteht jeweils eine weitere Photonen-Population, die wegen der relativistischen Aberration wieder zu einem schmalen Strahl gebündelt ist. Erneut ist im vorliegenden Modell die spektrale Energie-Flussdichte (spezifische Intensität) des invers Compton-gestreuten nach außen laufenden Strahls an einer Stelle r die Summe (das Integral) der spektralen durch inverse Compton-Streuung hervorgerufenen Leistungsdichte (Emissivität), die innerhalb von r emittiert wurde, also zwischen der inneren Gap-Grenze und r . Die Photonen dieses Strahls haben eine größere Energie als die ungestreuten Krümmungsstrahlungsphotonen (siehe 2.3.2), denn ein Teil der Energie der Teilchen wurde während der Streuung auf die Photonen übertragen. Dies führt wiederum zu einem Energieverlust der geladenen Teilchen.

Die beiden nach außen laufenden Photonenstrahlen können die Magnetosphäre verlassen und sich geradlinig bis zum Beobachter ausbreiten. Da diese Strahlen nicht isotrop aus der Pulsar-Magnetosphäre abgestrahlt werden, sondern nur innerhalb der Outer Gap in Richtung der dortigen Magnetfeldlinien, ist immer nur aus einem schmalen Raumwinkel Strahlung der Outer Gap messbar. Fällt dieser Raumwinkel im Laufe der Rotation des Neutronensterns mit der Sichtlinie des Beobachters zum Neutronenstern zusammen, so nimmt der Beobachter Pulse wahr und der Neutronenstern ist als Pulsar sichtbar.

Zusätzlich zu den Krümmungsstrahlungsphotonen können auch andere Photonen-Felder, wie die thermischen Röntgen-Photonen von der Neutronenstern-Oberfläche und die niederenergetischeren gepulsten Komponenten, von den Teilchenstrahlen invers Compton-gestreut werden und zu Energieverlusten der Teilchen führen. Neben den Energieverlusten, die die Teilchen durch Krümmungsstrahlung und inverse Compton-Streuung erleiden, stellt Triplet Paar-Erzeugung einen weiteren Wechselwirkungs-Prozess dar, der die Energie der Teilchen verringert, denn TPP kann ebenfalls zwischen entgegengesetzt gerichteten Photonen- und Teilchenstrahlen stattfinden. Sind die Energieverluste eines Teilchens pro Zeiteinheit durch inverse Compton-Streuung und durch TPP vergleichbar oder größer wie die durch Krümmungsstrahlung verursachten, so sollten diese in der Bestimmung des Lorentz-Faktors γ bei der Bewegung durch die Gap ebenfalls berücksichtigt werden.

Kapitel 4

Quantitative Auswertung

Im Folgenden wird das in Kapitel 3 aufgestellte Modell quantitativ ausgewertet. Dies geschieht durchwegs mit dem Computer-Algebra-System Wolfram Mathematica. Außerdem beziehen wir uns auf den Fall des Crab-Pulsars, sodass folgende Werte von Pulsar-Parametern und Naturkonstanten verwendet werden:

Masse des Elektrons / Positrons: $m = 9,1 \times 10^{-28} \text{ g}$

Lichtgeschwindigkeit: $c = 3,0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$

Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,6 \times 10^{-27} \text{ erg s}$

Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante: $\alpha = 137^{-1}$

Boltzmann-Konstante: $k_B = 1,4 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$

Elementarladung: $e = 4,8 \times 10^{-10} \text{ Fr}$

Magnetische Flussdichte auf der Neutronenstern-Oberfläche am magnetischen Pol: $B_0 = 3,8 \times 10^{12} \text{ G}$ [ATNF Pulsar Catalogue, 2012]

Radius des Neutronensterns: $R = 1,5 \times 10^6 \text{ cm}$ [Bejger & Haensel, 2002]

Abstand Erde - Crab-Pulsar: $R_{\text{Crab}} = 2200 \times 3,1 \times 10^{18} \text{ cm}$ [ATNF Pulsar Catalogue, 2012]

Rotationsdauer des Neutronensterns: $P = 3,3 \times 10^{-2} \text{ s}$ [ATNF Pulsar Catalogue, 2012]

Anzahl-Dichte eines Teilchenstrahls (siehe Kapitel 3): $N_e = \Omega B_0 / (4\pi c e) = 1,1 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$

Höhe der Outer Gap: $h_{\text{OG}} = 0,2$ [Hirotani, 2008a]

Verhältnis von E-Feld zu B-Feld in der Outer Gap (siehe Gleichung 2.35): $\eta = 0,01$ [Lyutikov et al., 2012]

Abstand des Licht-Zylinders $R_{\text{LZ}} = 1,6 \times 10^8 \text{ cm}$

Klassischer Elektronenradius (siehe Kapitel 2.3.3): $r_e = 2,8 \times 10^{-13} \text{ cm}$

Thomson-Streuquerschnitt (siehe Gleichung 2.53): $\sigma_T = 6,7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$

Im cgs-Einheitensystem gelten außerdem die Umrechnungen $\text{Fr} = \text{erg}^{1/2} \text{ cm}^{1/2}$, $\text{G} = \text{Fr cm}^{-2}$ und $\text{erg} = \text{g cm}^2 \text{ s}^{-2}$.

Im folgenden Kapitel 4.1 wird jeweils nur ein geladenes Teilchen betrachtet, das sich durch die Outer Gap bewegt. Es soll für dieses Teilchen die Funktion $\gamma(r)$ gefunden werden, sodass an jeder Stelle r der Gap die Geschwindigkeit/Energie des Teilchens bekannt ist. In Kapitel 4.2 wird dann das Krümmungsstrahlungsspektrum eines einzelnen Teilchens an der Stelle r erarbeitet und darauf aufbauend das integrierte, innerhalb beziehungsweise außerhalb von r emittierte Spektrum bestimmt. Erst dann wird der Übergang von einem Teilchen auf einen Strahl aus Teilchen vollzogen und dessen gesamtes Spektrum berechnet. Daraufhin wird in 4.3 die inverse Compton-Streuung des einlaufenden Krümmungsstrahlungsspektrums mit dem auslaufenden Teilchenstrahl betrachtet und das gestreute Spektrum erarbeitet. Die ursprüngliche Funktion $\gamma(r)$ wird in 4.1 unter der Annahme bestimmt, dass die Krümmungsstrahlungs-Energieverluste gegenüber allen anderen Energieverlusten dominieren. Ob diese Annahme im Rahmen des verwendeten Modells zulässig ist, wird in Kapitel 4.4 untersucht. Dazu werden zunächst anhand von Beobachtungen weitere Photonen-Felder, die neben der Krümmungsstrahlung noch die Outer Gap durchdringen, über inverse Compton-Streuung oder TPP mit den Teilchen wechselwirken können und möglicherweise nicht-vernachlässigbare Energieverluste der geladenen Teilchen hervorrufen könnten, betrachtet. Alle diese Photonen-Felder werden dann darauf getestet, ob sie bei den Teilchen relevante Energieverluste

verursachen. Somit wird die Zulässigkeit des Verfahrens von Kapitel 4.1 geprüft, denn diese ist nur dann gewährleistet, wenn sämtliche zusätzlichen Energieverluste nicht viel größer als jene durch Emission von Krümmungsstrahlung sind.

4.1 Kinetik der geladenen Teilchen

4.1.1 Aufstellen der Differenzialgleichung

Wir gehen nun wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, dass an den magnetischen Polen $\vec{\Omega} \cdot \vec{B} > 0$ gilt. Es wird dann, wie in Kapitel 3 erklärt, ein Positron betrachtet, das an der inneren Grenze der Outer Gap nach außen losläuft. Dessen Funktion $\gamma_{\text{aus}}(r)$ soll bestimmt werden. Analog betrachten wir ein Elektron, das an der äußeren Grenze der Gap losläuft und sich nach innen bewegt. Auch die Funktion $\gamma_{\text{ein}}(r)$ des Elektrons soll gefunden werden. Dazu wird nun eine Differenzialgleichung zwischen γ und r aufgestellt.

Die gesamte Energieänderungsrate eines Teilchens besteht aus Energiegewinn-Rate und Energieverlust-Rate. Es ist also

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_{\text{Gew}}}{dt} + \frac{dE_{\text{Ver}}}{dt}. \quad (4.1)$$

In diesem Modell wird Energiegewinn durch die Beschleunigung des geladenen Teilchens im elektrischen Feld erzielt. Aus der klassischen Physik folgt $dE_{\text{Gew}} = F dr = qE_{\parallel} dr = qE_{\parallel} v dt$, wobei die Geschwindigkeit v bei Positronen der Ladung $q = e$ positiv ist, da diese nach außen laufen, und bei Elektronen der Ladung $q = -e$ negativ ist, da diese nach innen laufen. Es sei daran erinnert, dass E_{\parallel} den Betrag der elektrischen Feldstärke bezeichnet (vergleiche Kapitel 2.1.4) und in unserem Modell nach außen gerichtet ist. Für beide Teilchenstrahlen gilt also

$$dE_{\text{Gew}} = eE_{\parallel} |v| dt. \quad (4.2)$$

In diesem Abschnitt wird die Annahme gemacht, dass alleine Krümmungsstrahlung zu den Energieverlusten der Teilchen beiträgt. Diese Annahme muss später überprüft werden (siehe Kapitel 4.4.3). Die Energieverlust-Rate beträgt also in unserem Fall gemäß Gleichung 2.41

$$\frac{dE_{\text{Ver}}}{dt} = -\frac{2e^2 c}{3} \cdot \frac{\gamma^4}{r_{\text{K}}^2}, \quad (4.3)$$

wobei angemerkt werden sollte, dass bei der Herleitung von 2.41 bereits die Annahme $\beta \approx 1$ gemacht wurde. Es wird also vorausgesetzt, dass die Teilchen bereits relativistisch (also mit $\beta \approx 1$, $\gamma \gg 1$) in die Gap eintreten. Dies ist durchaus der Fall, da außerhalb der Gap-Grenze eine Schicht existieren muss, in der E_{\parallel} vom Wert innerhalb der Gap auf Null abfällt und in der die Ladungsträger bereits vorbeschleunigt werden.

Die gesamte Energieänderungsrate beträgt also

$$\frac{dE}{dt} = eE_{\parallel} |v| - \frac{2e^2 c}{3} \cdot \frac{\gamma^4}{r_{\text{K}}^2}, \quad (4.4)$$

was mit $E = \gamma mc^2$ in eine Differenzialgleichung zwischen dem Lorentz-Faktor und der Zeit t überführt werden kann:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{mc} E_{\parallel} - \frac{2e^2}{3mc} \cdot \frac{\gamma^4}{r_{\text{K}}^2} \quad (4.5)$$

Hierbei wurde ebenfalls von der relativistischen Näherung Gebrauch gemacht, sodass $|v| \approx c$ gesetzt werden konnte. Nun soll noch die Koordinate t in r transformiert werden. Die Beziehung zwischen deren infinitesimalen Elementen ist, einmal mehr unter der relativistischen Näherung, $dt = dr/v = dr/(\pm |v|) \approx dr/(\pm c)$, wobei hier und im Folgenden das obere/untere Vorzeichen für den nach außen/innen gerichteten Strahl gilt. Somit ergibt sich die Differenzialgleichung für die Koordinate r zu

$$\frac{d\gamma}{dr} = \pm \frac{e}{mc^2} E_{\parallel} \mp \frac{2e^2}{3mc^2} \cdot \frac{\gamma^4}{r_{\text{K}}^2}. \quad (4.6)$$

4.1.2 Lösen der Differenzialgleichung

Die Differenzialgleichung 4.6 soll nun für die beiden elektrischen Felder $E_{\parallel,N}$ und $E_{\parallel,CH}$ und jeweils für den nach innen und den nach außen gerichteten Strahl gelöst werden. Die Lösungen werden mit $\gamma_{N,aus}$, $\gamma_{N,ein}$, $\gamma_{CH,aus}$ und $\gamma_{CH,ein}$ bezeichnet. Im Fall mit $E_{\parallel,CH}$ wird für r_K der Ausdruck 2.24b mit $R_{\text{äq}} = R_{LZ}$ benutzt, während im Fall mit $E_{\parallel,N}$ die für $r \approx R_{LZ}$ gültige Näherung $r_K \approx R_{LZ}$ benutzt wird. Es sind also folgende beiden Differenzialgleichungen zu lösen:

$$\frac{d\gamma_N}{dr} = \pm \frac{e \cdot \eta B_0 R^3}{2mc^2 \cdot r^3} \mp \frac{2e^2 \cdot \gamma_N^4}{3mc^2 \cdot R_{LZ}^2} \quad (4.7a)$$

$$\frac{d\gamma_{CH}}{dr} = \pm \frac{e}{3mc^3} \frac{\Omega B_0 R^3 h_{OG}^2}{\sqrt{R_{LZ} \cdot r} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\arcsin(\sqrt{r/R_{LZ}}))} R_{LZ}} \mp \frac{2e^2}{3mc^2} \cdot \frac{\gamma_{CH}^4}{R_{LZ} \cdot r} \quad (4.7b)$$

Die Differenzialgleichung 4.7a ist von der Form $d\gamma_N/dr = \pm k_1 r^{-3} \mp k_2 \gamma_N^4$ und ist möglicherweise analytisch lösbar. Bei Gleichung 4.7b ist jedoch k_1 keine Konstante mehr, sondern kompliziert von r abhängig und nicht beziehungsweise nur unter erheblichem Aufwand analytisch lösbar. Deswegen sollen beide Fälle numerisch mit Hilfe von Wolfram Mathematica gelöst werden.

Dazu müssen geeignete Randwertbedingungen festgelegt werden. Für den auswärts gerichteten Strahl, der ja an der inneren Gap-Grenze bei $r = 0,5R_{LZ}$ losläuft (siehe Kapitel 3), wird

$$\gamma_{aus}(r = 0,5R_{LZ}) = 10 \quad (4.8a)$$

gewählt. Das Positron tritt also mit $\gamma_{aus} = 10$ von innen in die Outer Gap ein. Für den nach innen gerichteten Strahl, der ja an der äußeren Gap-Grenze bei $r = R_{LZ}$ losläuft, wird

$$\gamma_{ein}(r = R_{LZ}) = 10 \quad (4.8b)$$

gewählt. Es ist also wegen $10 \gg 1$ die in 4.1.1 geforderte relativistische Näherung erfüllt. Der Ort r , an dem das Teilchen losläuft, wird im Folgenden Startpunkt genannt. Der Startpunkt für γ_{aus} ist also $r = 0,5R_{LZ}$ und der für γ_{ein} ist $r = R_{LZ}$.

Insgesamt soll also Gleichung 4.7a und 4.7b jeweils mit der Randwertbedingung 4.8a und 4.8b gelöst werden.

Man kann durch Einsetzen von Werten r und γ im Bereich $0,5R_{LZ} < r < R_{LZ}$ und $10 < \gamma < 10^5$ in die beiden Summanden der Gleichungen 4.7 zeigen, dass für beide Formen von E_{\parallel} der erste Summand, der ja die Beschleunigung im E-Feld beschreibt, betragsmäßig viel größer als der zweite Summand ist. Im Bereich $0,5R_{LZ} < r < R_{LZ}$ und $10 < \gamma < 10^5$ sind die Energieverluste durch Krümmungsstrahlung also vernachlässigbar. Diese Bereiche werden von den Variablen dort angenommen, wo die Teilchen loslaufen, denn dort ist γ noch $< 10^5$. Qualitativ müssen dann die Lösungen der Gleichungen 4.7 wie in Abbildung 4.1 gezeigt aussehen, denn $d\gamma/dr$ ist unter Vernachlässigung des zweiten Summanden für den auswärts laufenden Strahl positiv und für den einwärts laufenden negativ. Es ist also zu erwarten, dass γ jeweils zunächst stark ansteigt. Erst bei $\gamma \gg 10^5$ werden die Verluste durch Krümmungsstrahlung relevant und sorgen für eine Sättigung von γ .

Bei der Lösung wird in allen vier Fällen folgendermaßen vorgegangen:

- Zunächst wird mit Mathematica die Differenzialgleichung gelöst. Dies geschieht mit dem Befehl `NDSolve[]`, der numerisch mit einer intern selbst gewählten Methode eine Lösung für γ sucht. Die Ausgabe von `NDSolve[]` ist stets ein Objekt der Art `InterpolatingFunction[]`, also eine Interpolation über eine Punktmenge. Diese kann zwar angezeigt, ausgewertet und weiterbehandelt werden, wobei Letzteres wieder eine `InterpolatingFunction[]` ergibt, hat jedoch keine analytische Darstellung, kann also nicht als Funktion $\gamma(r)$ ausgedrückt werden. Da in unserem Fall jedoch ein analytischer Ausdruck für γ gefunden werden soll, wird die erhaltene `InterpolatingFunction[]` im Folgenden durch einfache Funktionen gefittet.

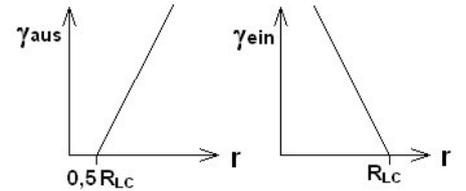


Abb. 4.1: Erwarteter Verlauf der Funktion $\gamma_{aus}(r)$ (links) beziehungsweise der Funktion $\gamma_{ein}(r)$ (rechts) für kleines γ , das heißt unter Vernachlässigung des Krümmungsstrahlungsterms.

- Zunächst ist es jedoch sinnvoll, sich einen Überblick über die Funktion $\gamma(r)$ zu verschaffen. Dies wurde in Abbildung 6.1 für alle vier Fälle mit verschiedenen Werten für η und h_{OG} getan. Die physikalische Erläuterung der Verläufe von $\gamma(r)$ soll vorerst auf Kapitel 4.1.3 verschoben werden. Für das weitere Verständnis des Fittens mit Mathematica sei lediglich darauf hingewiesen, dass $\gamma(r)$ in jedem der vier Fälle einen sehr steilen und einen weniger steilen Bereich hat.
- Mathematica kann jedoch Objekte der Art `InterpolatingFunction[]` nicht direkt fitten. Deswegen muss eine Liste von Funktionswerten erstellt werden, die dann gefittet werden kann. Dazu wird zunächst mit `Table[]` eine eindimensionale Liste $\{\mathbf{r}\}$ erstellt, in der der r -Bereich von der inneren bis zur äußeren Gap-Grenze in diskrete Punkte aufgeteilt ist. Im vorliegenden Fall wurden circa 10^5 Datenpunkte benutzt. Bei der Erstellung der Liste $\{\mathbf{r}\}$ muss darauf geachtet werden, dass dort, wo sich γ innerhalb eines kurzen Bereichs von r schnell ändert, die Intervalle zwischen den einzelnen Punkten kleiner sind, als dort, wo sich γ nur langsam ändert. Die Punkte in der Liste $\{\mathbf{r}\}$ sind also nicht äquidistant verteilt, sondern liegen in dem Bereich, wo die Änderung von γ groß ist, enger zusammen.
- Nun wird das zweidimensionale Objekt $\{\mathbf{r}, \text{InterpolatingFunction}[]\}$ an jedem Element der Liste $\{\mathbf{r}\}$ ausgewertet und dadurch eine zweidimensionale Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ erstellt, in der jedem Wert r der zugehörige Punkt γ zugeordnet ist. Dadurch, dass in obiger Liste $\{\mathbf{r}\}$ die Punkte nicht äquidistant gewählt wurden, ist jetzt gewährleistet, dass in der Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ in den schmalen Bereichen, in denen sich γ stark ändert, dennoch genügend viele Datenpunkte enthalten sind, um den Verlauf von $\gamma(r)$ verfolgen zu können. Diese Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ kann nun gefittet werden.
- Es ist jedoch für Mathematica nicht beziehungsweise nur mit unzureichendem Ergebnis möglich, die vollständige Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ mit einer einzigen Funktion zu fitten. Deswegen muss die Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ in einzelne Teillisten, in diesem Fall in genau drei Teillisten, aufgeteilt werden. Die zwei Stellen r , an denen die beiden Schnitte ausgeführt werden, müssen individuell und derart gewählt werden, dass die resultierenden Teillisten durch einfache Funktionen mit möglichst wenigen Parametern gefittet werden können. Oft bieten sich Extrema oder Wendepunkte für solche Schnittpunkte an.
- Die einzelnen Teillisten können nun mit `FindFit[]` gefittet werden. Dazu muss stets eine Modellfunktion $\gamma(r)$ mit Parametern angegeben werden, an die die Teilliste gefittet werden soll. Es wurden als Modellfunktionen stets Potenzgesetze oder Polynome verwendet:
 - Potenzgesetze wurden als Modellfunktion lediglich für die Fits von γ_{N} und dabei wiederum nur bei den Teillisten, die den langsam veränderlichen Teil von $\gamma_{\text{N}}(r)$ beschreiben, benutzt. Als Potenzgesetz wurde immer entweder $c_1 \cdot r^{c_2} + c_3$ oder $c_1 \cdot (r + c_4)^{c_2} + c_3$ angesetzt.
 - * Im ersten Fall mit $c_1 \cdot r^{c_2} + c_3$ muss der Parameter c_2 jeweils manuell gefittet werden. Die beiden restlichen Parameter c_1 und c_3 werden dann von Mathematica angepasst. Es stellte sich in jedem Fall, in dem als Modellfunktion ein Potenzgesetz der angegebenen Form gewählt wurde, heraus, dass $c_2 = -1/1,3$ die beste Beschreibung liefert.
 - * Im zweiten Fall mit $c_1 \cdot (r + c_4)^{c_2} + c_3$ gibt $c_2 = -1/1,3$ ebenfalls den besten Fit. Außerdem kann hier durch manuelle Anpassung von c_4 auf einen Wert ungleich Null der Parameter c_3 auf einen Wert nahe beziehungsweise gleich Null gebracht werden. Diese Methode wird jedoch im Weiteren nicht weiter verfolgt, da sie im Vergleich zur ersten Methode keine besseren Fits liefert, und zudem komplizierter ist.
 - Polynome wurden in allen anderen Fällen benutzt, das heißt für alle Teillisten von γ_{CH} und für die Teillisten von γ_{N} , die den schnell veränderlichen Teil von $\gamma_{\text{N}}(r)$ und den Bereich um das Maximum beschreiben. Es wurden ausschließlich Polynome der Form $\gamma(r_0) + p_1 \cdot (r - r_0)^{a_1} + p_2 \cdot (r - r_0)^{a_2} + p_3 \cdot (r - r_0)^{a_3} + p_4 \cdot (r - r_0)^{a_4} + p_5 \cdot (r - r_0)^{a_5}$ verwendet, und für den Satz $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ wurden die Kombinationen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (ungerades Polynom) oder $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (gerades Polynom) benutzt. Für r_0 wurde meist ein Wert von r gewählt, an dem $\gamma(r)$ ein Maximum oder einen Wendepunkt hat. Für $\gamma(r_0)$ wurde der Wert von γ an der Stelle $r = r_0$ verwendet, den man aus der Liste $\{\mathbf{r}, \gamma\}$ erhält. Wenn $\gamma(r_0)$ ein Wendepunkt

ist, bietet sich ein ungerades Polynom an, wenn $\gamma(r_0)$ ein Maximum ist, bietet sich ein gerades Polynom an. Die übrigen fünf Parameter $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ fittet Mathematica.

- In jedem Fall ergeben sich drei Fit-Funktionen, von denen jede $\gamma(r)$ in einem Teil des Bereichs von der inneren bis zur äußeren Gap-Grenze beschreibt. Aus diesen drei Fit-Funktionen wird mit einer Schachtelung der Befehle `If[Bedingung für Wertebereich von r, Fit-Funktion für diesen Wertebereich, If[...]]` eine stückweise definierte Funktion $\gamma(r)$ für den vollständigen Bereich von r , also von der inneren bis zur äußeren Gap-Grenze, zusammengesetzt. Diese wird jeweils in den folgenden Kapiteln weiter verwendet. Alternativen zu der Schachtelung von `If[]` sind der Befehl `Piecewise[]` oder eine stückweise Definition mit Hilfe des Bedingungsoperators `/;`. Jedoch bringen beide Alternativen keine wesentliche Ersparnis in der Rechenzeit bei der Anwendung beziehungsweise der Auswertung der Funktionen.
- Anstatt die Fit-Funktionen hier explizit anzugeben und anstatt sie zu zeichnen, ist in Abbildung 6.2 der absolute Fehler der Fit-Funktion (also die Differenz zwischen der durch das Objekt `InterpolatingFunction[]` beschriebenen Funktion sowie der Fit-Funktion) sowie deren relativer Fehler (also der durch die Funktion `InterpolatingFunction[]` geteilten Differenz zwischen der `InterpolatingFunction[]` und der Fit-Funktion) angegeben.

4.1.3 Physikalische Erklärung der Lösung

In Abbildung 6.1 sind die Verläufe der vier Funktionen $\gamma(r)$ jeweils mit verschiedenen Parametern über den gesamten Bereich der Outer Gap dargestellt. In allen vier Fällen lässt sich $\gamma(r)$ in zwei Teilbereiche aufteilen:

- Im Bereich nahe des Startpunkts, also nahe des Randes der Outer Gap, an dem der Ladungsträger mit $\gamma = 10$ losläuft, hat $\gamma(r)$ stets einen steilen Verlauf. In den beiden Fällen für γ_{aus} ist dies an der inneren Gap-Grenze der Fall. Die Änderung von $\gamma_{\text{aus}}(r)$ ist hier stark positiv. In den Fällen für γ_{ein} läuft das Teilchen an der äußeren Gap-Grenze los und die Änderung von $\gamma_{\text{ein}}(r)$ ist hier stark negativ, da sich das Teilchen in die negative Richtung der r -Achse bewegt. Dies entspricht den in Abbildung 4.1 skizzierten Erwartungen an $\gamma(r)$. Das Teilchen wird also innerhalb einer kurzen Strecke stark beschleunigt, das heißt auf hohe Energien gebracht. Offensichtlich erleiden die Teilchen in diesem Bereich (fast) noch keine Energieverluste. Es dominiert also jeweils der erste Term in den Gleichungen 4.7. Diesen sehr steilen und schmalen Teil von $\gamma(r)$ nennen wir im Folgenden Beschleunigungsteil.

Je größer γ wird, desto wichtiger wird der zweite Term in den Gleichungen 4.7 und desto kleiner wird der Betrag der Steigung von $\gamma(r)$. An einem im Folgenden Kompensationspunkt genannten Punkt, an dem der Betrag der Änderung von $\gamma(r)$ ein Minimum hat, ist die Differenz zwischen Energiegewinn durch Beschleunigung im elektrischen Feld und Energieverlust durch Emission von Krümmungsstrahlung minimal. Ist dieser Punkt zudem noch ein Maximum von $\gamma(r)$, so kompensiert sich der Energiegewinn durch Beschleunigung im elektrischen Feld und der Energieverlust durch Emission von Krümmungsstrahlung exakt zu Null.

- Ab diesem Kompensationspunkt wird der Verlauf von $\gamma(r)$ durch die r -Abhängigkeit der beiden Terme von 4.7 bedingt und ist von der Randwertbedingung (nahezu) unabhängig. γ ändert sich jetzt nur noch langsam mit r und ist in allen behandelten Fällen von der Größenordnung 10^7 . Diesen Teil von $\gamma(r)$ nennen wir im Folgenden Strahlungsteil. In den beiden Fällen von γ_{N} lässt sich die r -Abhängigkeit am besten durch das Potenzgesetz $\sim r^{-1/3}$ beschreiben (vergleiche Kapitel 4.1.2). γ_{N} nimmt also mit steigendem r ab. Dies lässt sich qualitativ verstehen, wenn man bedenkt, dass die auf den Ladungsträger wirkende, durch das elektrische Feld hervorgerufene Kraft mit steigendem r abnimmt. In den Fällen von γ_{CH} ist die beschleunigende Kraft, wie in Kapitel 2.1.4 gezeigt wurde, annähernd unabhängig von r . Jedoch ist $r_{\text{K}} \sim \sqrt{r}$ und deswegen der Krümmungsstrahlungs-Term in 4.7b $\sim r^{-1}$. Hier nehmen die Energieverluste also mit zunehmendem r ab. Deswegen steigt γ_{CH} mit r langsam an.

Wie aufgrund des linearen Zusammenhangs des ersten Terms in 4.7a mit dem Parameter η zu erwarten ist, verursacht η in γ_N eine Streckung / Stauchung der ganzen Funktion in y -Richtung. Der Strahlungsteil wird in seiner Form nicht von η geändert. Der Beschleunigungsteil hingegen wird bei kleinerem η ausgedehnt. Die Beschleunigung erfolgt also auf einem längeren Bereich von r , sodass der Kompensationspunkt sich vom Startpunkt des Teilchens entfernt. Gleiches gilt für den Parameter h_{OG} in Bezug auf den Verlauf von γ_{CH} . Lediglich ist hier zu beachten, dass die Abhängigkeit des Beschleunigungsterms in 4.7b von h_{OG} quadratisch ist.

Darstellungen der gefitteten Funktionen $\gamma(r)$ haben scheinbar den gleichen Verlauf wie der in Abbildung 6.1 dargestellte Verlauf des Objekts `InterpolatingFunction[]`. In den Abbildungen 6.2a, c, e und g ist jedoch zu erkennen, dass die Fit-Funktionen im Beschleunigungsteil und im Bereich um den Kompensationspunkt bis zu Werten der Größenordnung 10^5 vom tatsächlichen Verlauf von γ abweichen. Jedoch zeigen die Abbildungen 6.2b, d, f und h, dass das Verhältnis der Abweichungen zum tatsächlichen Wert von γ in weiten Teilen des Definitionsbereichs kleiner als 1% ist. Nur in einem sehr schmalen Bereich am Startpunkt des Teilchens wird der relative Fehler sehr groß, was daran liegt, dass das tatsächliche $\gamma(r)$ am Startpunkt gemäß den Randwertbedingungen 4.8 genau den Wert $\gamma = 10$ annimmt, das gefittete $\gamma(r)$ jedoch nicht zwangsläufig den Randwertbedingungen genügt. Dieser große relative Fehler in dem schmalen Bereich um den Startpunkt kann jedoch getrost akzeptiert werden, da in diesem Bereich von r die Energie γ ohnehin noch so klein ist, dass die in den folgenden Kapiteln zu berechnenden Spektren davon praktisch unbeeinflusst bleiben.

Eine Variation des Randwerts γ in den Bedingungen 4.8 ist im Rahmen sinnvoller Werte $1 \ll \gamma \ll 10^7$ nicht von Einfluss auf den Verlauf von $\gamma(r)$ im Strahlungsteil. Natürlich verändert die Wahl des Randwerts jedoch den Verlauf von $\gamma(r)$ im Beschleunigungsteil. Der Kompensationspunkt wird geringfügig früher erreicht, je größer der Randwert γ ist. Da das im Folgenden zu berechnende Krümmungsstrahlungsspektrum im Wesentlichen vom Strahlungsteil von $\gamma(r)$ bestimmt wird, wird der Randwert γ nicht als Parameter behandelt.

4.2 Krümmungsstrahlungsspektrum

4.2.1 Spektrum $\frac{dP}{df}(f, r)$ in Abhängigkeit vom Ort in der Outer Gap

Jetzt wird das Krümmungsstrahlungsspektrum berechnet, das ein Teilchen bei seiner Bewegung durch die Outer Gap emittiert. Es werden wieder die vier Fälle $\gamma_{N,aus}$, $\gamma_{N,ein}$, $\gamma_{CH,aus}$ und $\gamma_{CH,ein}$ behandelt und die Spektren heißen dementsprechend $\frac{dP}{df}_{N,aus}$, $\frac{dP}{df}_{N,ein}$, $\frac{dP}{df}_{CH,aus}$ und $\frac{dP}{df}_{CH,ein}$. Zur Berechnung machen wir uns Gleichung 2.46 zu Nutze. Die ursprüngliche Funktion $\frac{dP}{df}(f, \gamma, \omega_K)$ ist von γ und ω_K abhängig, welche im hiesigen Fall der Bewegung durch die Outer Gap beide r -abhängig sind. Es ergibt sich also eine Funktion $\frac{dP}{df}(f, r)$, die ein Spektrum beschreibt, welches an jedem Punkt r verschieden ist. Die Spektren werden jeweils durch die Energie, die von einem Teilchen pro Zeit- und Frequenzintervall emittiert wird, ausgedrückt.

In den beiden Fällen γ_N wurde der Krümmungsradius r_K jeweils als $\approx R_{LZ}$ genähert. Dies wird konsequenterweise auch bei der Bestimmung von $\frac{dP}{df}_N$ getan. Es wird hier also Gleichung 2.45 zu $\omega_K = c/R_{LZ}$ vereinfacht. In den Fällen γ_{CH} wurde Gleichung 2.24b mit $R_{\text{äq}} = R_{LZ}$ benutzt. Deshalb wird $r_K = \sqrt{R_{LZ} \cdot r}$ auch zur Berechnung von $\frac{dP}{df}_{CH}$ benutzt.

Zur Berechnung des Integrals über die modifizierte Bessel-Funktion wird der Befehl `NIntegrate[]` verwendet, da dieser schneller in der Auswertung ist und dennoch ein Ergebnis sehr hoher Genauigkeit liefert (relativer Fehler im Bereich 10^{-10}). Ein analytisch darstellbarer Ausdruck ist im Folgenden ohnehin nicht erforderlich.

Die vier sich so ergebenden Krümmungsstrahlungsspektren sind beispielhaft in Abbildung 6.3 für verschiedene Werte von r entlang der Outer Gap gezeichnet. Die Spektren haben ihr Maximum im Bereich $f \approx 10^{24}$ Hz, was Photonen mit Energie im GeV-Bereich entspricht. Im niederfrequenten Bereich der Spektren ist deutlich die Abhängigkeit $\frac{dP}{df} \simeq f^{1/3}$ erkennbar, die jedes Synchrotron und Krümmungsstrahlungsspektrum für $f \ll f_k$ annimmt [Rybicki & Lightman, 1979]. Oberhalb von f_k werden diese Spektren durch $\frac{dP}{df} \simeq f^{1/2} \cdot \exp(-f/f_k)$ beschrieben [Rybicki & Lightman, 1979]. Dieser

exponentielle Abfall ist ebenfalls in den dargestellten Spektren qualitativ erkenntlich.

Die Spektren $\frac{dP}{df}_N$ unterscheiden sich in zwei Eigenschaften: Erstens sind die Spektren (in doppelt-logarithmischer Darstellung) in x -Richtung gegeneinander verschoben und zweitens sind sie in y -Richtung gestreckt. Das ganze Spektrum ist bei kleinerem γ_N und somit bei größerem r tiefer und zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Somit erscheint bei größerem r das Maximum bei kleineren Frequenzen und nimmt auch selbst einen geringeren Wert an. Dies lässt sich mit Gleichung 2.46 leicht verstehen: Zunächst sei bemerkt, dass ω_K für $\frac{dP}{df}_N$ eine Konstante in r ist, da $r_K = R_{LZ}$ genähert wurde. Somit geht die r -Abhängigkeit von $\frac{dP}{df}_N(f, r)$ nur über $\gamma_N(r)$ in $\frac{dP}{df}_N$ ein, denn es ist hier auch $f_k \sim \gamma(r)^3$. Der Teil hinter dem Malpunkt in 2.46 ist eine Funktion von f , die sich (in doppelt-logarithmischer Darstellung) für verschiedene f_k nur durch eine Verschiebung in x -Richtung unterscheidet, deren Maximum jedoch immer den gleichen Wert annimmt. Zunehmendes f_k mündet in einer Verschiebung in positive x -Richtung und umgekehrt. Somit ist die Verschiebung der Spektren in negative x -Richtung für abnehmende γ_N und damit auch für zunehmende r verständlich. Parallel dazu werden die Spektren wegen dem Faktor γ vor dem Malpunkt in 2.46 in y -Richtung gestreckt / gestaucht. Zunehmendes γ_N und damit abnehmendes r mündet in einer Streckung und umgekehrt. Dass sich die Spektren für tiefe Frequenzen asymptotisch angleichen, ist eine Eigenheit der Krümmungsstrahlung mit konstantem Krümmungsradius.

In den Fällen γ_N gibt ein Teilchen also umso mehr Leistung ab, je weiter innen in der Outer Gap es sich befindet (vorausgesetzt, das Teilchen befindet sich nicht im Beschleunigungsteil von $\gamma_{N,aus}$), denn bei kleineren r sind die Integrale über die spektrale Leistung (Fläche unter den Kurven in Abbildungen 6.3(a) und (b)) größer. Im Kapitel 4.2.2 werden die Spektren über den Weg des Teilchens, also über r , integriert. Dies entspricht anschaulich einer Summation der einzelnen Kurven in den einzelnen Abbildungen von 6.3. In den Fällen $\frac{dP}{df}_N$ tragen dann zu niedrigen Frequenzen offensichtlich alle Orte r gleichermaßen bei, denn bei niedrigen Frequenzen sind die Spektren $\frac{dP}{df}_N(f, r)$ unabhängig von r , wohingegen zu hohen Frequenzen die Orte mit kleinem r stärker beitragen, da an Orten mit kleinem r im hochfrequenten Regime mehr Leistung emittiert wird als an Orten mit größerem r .

Dies alles ist auch in den beiden Abbildungen 6.4(a) und (b) ersichtlich, in denen $\frac{dP}{df}_N(f, r)$ für verschiedene Frequenzen f als Funktion des Ortes r dargestellt ist. Hier wird also verbildlicht, aus welchem Bereich der Outer Gap Krümmungsstrahlung einer bestimmten Frequenz stammt. Die Emission von Krümmungsstrahlung ist umso mehr zu kleinerem r verlagert, je größer die Frequenz ist. Die spektrale Leistung ist über die gesamte Outer Gap im Frequenzbereich um $f = 10^{24}$ Hz am größten.

Die Spektren $\frac{dP}{df}_{CH}$ liegen im Vergleich zu $\frac{dP}{df}_N$ näher beieinander. Dies ist dadurch verursacht, dass $\gamma_{CH}(r)$ im Strahlungsteil weniger stark variiert als $\gamma_N(r)$. Außerdem schneiden sich die Spektren verschiedener Orte r im Bereich von $f_k \approx 3 \times 10^{24}$ Hz. Unterhalb davon dominieren Beiträge von kleinerem r leicht, also Beiträge von Orten, die weiter innen in der Gap liegen. Bei hohen Frequenzen dominieren Beiträge mit größerem r leicht. Dies ist auch wieder in den Abbildungen 6.4(c) und (d) sichtbar. Wieder ist in allen Bereichen der Outer Gap die spektrale Leistung im Regime um $f \approx 10^{24}$ Hz am größten.

Dies kann erklärt werden, wenn man bedenkt, dass im Fall von $\frac{dP}{df}_{CH}$ der Krümmungsradius r -abhängig ist und dass deswegen $\omega_K(r) \sim r^{-1/2}$ gilt. Die r -Abhängigkeit von $\frac{dP}{df}_{CH}(f, r)$ geht also nicht nur über $\gamma_{CH}(r)$ in $\frac{dP}{df}_{CH}$ ein, sondern auch über $\omega_K(r)$. Der Faktor γ vor dem Malpunkt im Ausdruck 2.46 sorgt zunächst dafür, dass das Spektrum umso stärker in y -Richtung gestreckt ist, umso größer γ und damit auch umso größer r ist. Der Faktor ω_K mindert jedoch wegen der Abhängigkeit $\sim r^{-1/2}$ die Streckung in y -Richtung mit zunehmendem r . Er mindert sie nicht nur, sondern der Abfall von $r^{-1/2}$ mit zunehmendem r überkompensiert sogar die Zunahme von $\gamma_{CH}(r)$ im Strahlungsteil, wie man sich durch Zeichnen der Funktion $\gamma_{CH}(r) r^{-1/2}$ überzeugen kann. Das führt also zu einer Stauchung der Spektren in y -Richtung mit zunehmendem r . Darüber hinaus gilt nun $f_k \sim \gamma(r)^3 r^{-1/2}$. Die Verschiebung (in doppelt-logarithmischer Darstellung) des Spektrums in positive x -Richtung mit zunehmendem f_k und damit mit zunehmendem γ_{CH} und damit wiederum mit zunehmendem r wird also ebenfalls durch den Term $r^{-1/2}$ reduziert. Spektren mit größerem r werden etwas weniger weit in positive x -Richtung verschoben, als dies für $f_k \sim \gamma(r)^3$ der Fall wäre. Zusammenfassend werden die Spektren $\frac{dP}{df}_{CH}$ also mit zunehmendem r (in doppelt-logarithmischer Darstellung) leicht nach rechts verschoben und in y -Richtung gestaucht, wodurch das sich-Schneiden der einzelnen Spektren verständlich wird. Im Gegensatz dazu werden die

Spektren $\frac{dP}{df}_N$ nach links verschoben und ebenfalls gestaucht.

4.2.2 Integriertes Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int}}(f, d)$

Ein Teilchen, das sich durch die Outer Gap bewegt, sendet also an jedem Ort r das Spektrum $\frac{dP}{df}$ aus. In Kapitel 3 wurde erklärt, dass sich im Rahmen unserer Modellvorstellung die gesamte von einem Teilchen erzeugte Strahlung entlang der gleichen Trajektorie in die gleiche Richtung fortbewegt und sich somit überlagert und aufsummiert. Die akkumulierte Strahlung eines sich mit $\gamma_{\text{aus}}(r)$ nach außen bewegenden Positrons am Ort d ist somit die Summe der gesamten Strahlung, die innerhalb von d von diesem Positron emittiert wurde, also das Integral über alle $\frac{dP}{df}_{\text{aus}}(f, r) dr$ mit $r < d$. Ebenso summieren sich die Anteile $\frac{dP}{df}_{\text{ein}}(f, r) dr$, die ein sich mit $\gamma_{\text{ein}}(r)$ nach innen bewegendes Elektron außerhalb von d abstrahlt, am Ort d zu einem gesamten Spektrum, das sich analog durch Integration von $\frac{dP}{df}_{\text{ein}}(f, r) dr$ mit $r > d$ ergibt. Anschaulich werden also die Summen der einzelnen Kurven aus den Abbildungen 6.3(a) - (d) gebildet. Diese Integrationen sollen im Folgenden für jeden der vier Fälle $\frac{dP}{df}_{N,\text{aus}}$, $\frac{dP}{df}_{N,\text{ein}}$, $\frac{dP}{df}_{CH,\text{aus}}$ und $\frac{dP}{df}_{CH,\text{ein}}$ durchgeführt werden.

Es werden also folgende vier Integrale berechnet:

$$\frac{dP}{df}_{\text{int},N,<d}(f, d) = \int_{0,5R_{LZ}}^d \frac{dP}{df}_{N,\text{aus}}(f, r) dr \quad (4.10a)$$

$$\frac{dP}{df}_{\text{int},N,>d}(f, d) = \int_d^{R_{LZ}} \frac{dP}{df}_{N,\text{ein}}(f, r) dr \quad (4.10b)$$

$$\frac{dP}{df}_{\text{int},CH,<d}(f, d) = \int_{0,5R_{LZ}}^d \frac{dP}{df}_{CH,\text{aus}}(f, r) dr \quad (4.10c)$$

$$\frac{dP}{df}_{\text{int},CH,>d}(f, d) = \int_d^{R_{LZ}} \frac{dP}{df}_{CH,\text{ein}}(f, r) dr \quad (4.10d)$$

Stets gilt $0,5R_{LZ} < d < R_{LZ}$.

Da $\frac{dP}{df}$ die Einheit $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ hat, haben die Funktionen $\frac{dP}{df}_{\text{int}}$ wegen der Integration über r die ungewöhnliche Einheit $\text{erg cm s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$, die jedoch wie folgt verständlich wird: In Kapitel 4.2.1 wurde eine Größe betrachtet, die angibt, welche Leistung pro infinitesimalem Frequenzintervall von einem Elektron in dessen Bewegungsrichtung abgestrahlt wird. Diese Größe wurde mit $\frac{dP}{df}$ bezeichnet. Tatsächlich müsste man jedoch $\frac{d^3P}{df dV d\Omega_{\text{ph}}}$ schreiben, was dann die Leistung angäbe, die pro infinitesimalem Frequenzintervall und Volumenelement in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ um die Richtung Ω_{ph} emittiert wird. Diese Größe würde Emissivität genannt werden [Dermer & Menon, 2007]. Die Abhängigkeit von der Anzahl-Dichte eines Elektrons am Ort \vec{r}_0 müsste man dann durch eine Diracsche Deltafunktion $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ einbringen, ebenso müsste man die Richtungs-Abhängigkeit durch $\delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0)$ darstellen, da ja die Krümmungsstrahlung stark in eine Richtung Ω_0 fokussiert ist. Dann wäre also $\frac{d^3P}{df dV d\Omega_{\text{ph}}} = \frac{dP}{df} \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Die beiden Deltafunktionen haben wir bisher nicht berücksichtigt, deswegen hatten wir in Kapitel 4.2.1 eine Größe, die in $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ und nicht in $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{ster}^{-1}$ gemessen wird. Würde man nun die Emissivität $\frac{d^3P}{df dV d\Omega_{\text{ph}}}$ über den Ort r entlang der Outer Gap integrieren, so erhielte man eine Größe $\frac{d^3P}{df dA d\Omega_{\text{ph}}}_{\text{int}}$, die angäbe, welche Leistung pro Frequenzintervall und pro Flächenelement in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ um die Richtung Ω_{ph} fließt. Dies wäre eine physikalisch sinnvolle Größe, die spezifische Intensität oder Helligkeit genannt werden kann [Rybicki & Lightman, 1979]. Da jedoch der Quotient $\frac{d^2}{dV d\Omega_{\text{ph}}}$ vernachlässigt wurde, haben wir jetzt eine Größe $\frac{P dr}{df}_{\text{int}}$ mit der oben genannten Einheit $\text{erg cm s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist jedoch in den Gleichungen 4.10 schlicht $\frac{dP}{df}_{\text{int}}$ geschrieben. Man sollte sich jedoch bewusst sein, dass eigentlich $\frac{P dr}{df}_{\text{int}}$ gemeint ist, was durch Multiplikation mit der Anzahl-Dichte und der Richtungs-Abhängigkeit in die spezifische Intensität $\frac{d^3P}{df dA d\Omega_{\text{ph}}}_{\text{int}} = \frac{P dr}{df}_{\text{int}} \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ übergeht. Die Integrationen 4.10 können nicht analytisch ausgeführt werden, da die Integranden zu kompliziert von r abhängen. Deswegen wird wieder der Befehl `NIntegrate[]` herangezogen. Bei der Auswertung des

Spektrums nach der numerischen Integration gemäß 4.10 ergibt sich jedoch folgendes Problem: Der Integrationsbereich liegt immer zwischen dem Startpunkt des Teilchens und d . In der Nähe des Startpunkts und im angrenzenden Beschleunigungsteil ist $\gamma(r)$ noch sehr klein, das heißt $\ll 10^7$. Dementsprechend ist hier auch $f_k(\gamma(r))$ viel kleiner als typische Frequenzen $10^{20} \text{ Hz} < f < 10^{26} \text{ Hz}$, an denen das Spektrum ausgewertet werden soll. Dies führt dazu, dass die Terme $\frac{f}{f_k}$ in Gleichung 2.46 derartig groß werden, dass Mathematica sie nicht behandeln kann. Deswegen wird die numerische Integration nicht genau am Startpunkt begonnen, sondern erst an einem Punkt im Beschleunigungsteil, bei dem γ bereits ausreichend groß ist. Dieser Punkt muss je nach dem Verlauf von $\gamma(r)$ individuell gewählt werden. Durch diese Verschiebung der Integrationsgrenze entsteht ein Verlust im integrierten Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int}}$. Dieser Verlust der Anteile von $\frac{dP}{df}$ zwischen dieser leicht verschobenen Integrationsgrenze und dem Startpunkt ist jedoch akzeptabel, da ja, wie in 4.2.1 gezeigt wurde, die Spektren von kleinem γ vergleichsweise schwach sind und nur im sehr niederfrequenten Bereich, an dem wir hier ohnehin nicht interessiert sind, zum integrierten Spektrum beitragen würden. Es zeigt sich, dass für $\gamma > 5 \times 10^5$ die Auswertungen der Spektren problemlos sind. An diesem Richtwert orientiert sich die Bestimmung der tatsächlich verwendeten Integrationsgrenzen.

In der Abbildung 6.5(a) sind die integrierten Spektren für die beiden Fälle $\frac{dP}{df}_{\text{int,N}}$ gezeichnet. Es wurde jeweils von dem soeben gewählten Punkt, der nahe des Startpunkts des Teilchens liegt, bis zum gegenüberliegenden Rand der Outer Gap integriert. Für den Fall $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ eines sich nach außen bewegenden Positrons ist also die von diesem Teilchen emittierte spektrale Leistung gezeigt, die am äußeren Rand der Gap durch eine senkrecht zur Strahlrichtung stehende Einheitsfläche fließt. Im Fall des sich nach innen bewegenden Elektrons ist mit $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ die Leistung gezeichnet, die am inneren Gap-Rand pro Einheitsfläche nach innen strömt. Offensichtlich liegen beide integrierten Spektren sehr nahe beieinander. Wieder ist die spektrale Leistung bei rund 10^{24} Hz am größten, unterhalb davon wächst sie gemäß dem Potenzgesetz $\simeq f^{1/3}$ an und oberhalb erfährt sie den exponentiellen Abfall $\simeq f^{1/2} \cdot \exp(-f/f_k)$. Dass die beiden integrierten Spektren sehr nahe beieinanderliegen, ist natürlich dadurch verursacht, dass die beiden Verläufe γ_N über weite Teile der Outer Gap identisch sind. Bei genauem Vergleich der beiden Spektren fällt jedoch auf, dass $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ im Bereich des Maximums etwas größer ist als $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$. Dafür ist bei Frequenzen oberhalb des Maximums $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ größer als $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$. Es ist:

f in Hz	$\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ in $\text{erg cm s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$	$\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ in $\text{erg cm s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$
10^{24}	$7,59 \times 10^{-12}$	$7,38 \times 10^{-12}$
2×10^{25}	$3,49 \times 10^{-13}$	$3,60 \times 10^{-13}$
3×10^{25}	$8,10 \times 10^{-14}$	$8,58 \times 10^{-14}$

Diese Abweichungen lassen sich folgendermaßen verstehen: Da die rechte Integrationsgrenze von $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ weiter vom Startpunkt von $\gamma_{N,\text{ein}}$ entfernt liegt, als die linke Integrationsgrenze von $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ vom Startpunkt von $\gamma_{N,\text{aus}}$ (siehe Abbildung 6.5(a)), wurde effektiv im Fall $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ über einen geringfügig größeren Bereich integriert. Dies hat zur Folge, dass im Fall $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ etwas mehr Anteile, die von gemäßigten γ stammen, mitgezählt wurden und somit $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$ um das Maximum herum größer als $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ ist. Da jedoch $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ exakt bis $0,5R_{\text{LZ}}$ integriert wurde und hier an der inneren Gap-Grenze Werte von $\gamma_{N,\text{ein}}$ auftreten, die größer als der Maximalwert von $\gamma_{N,\text{aus}}$ sind, sind in $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ Anteile mit größerem γ enthalten als im Fall $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$. Anteile mit maximalem γ erzeugen nun aber die höchsten Frequenzen. Deswegen ist $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},>d}$ im hochfrequenten Teil etwas größer als $\frac{dP}{df}_{\text{int,N},<d}$. Die integrierten Spektren $\frac{dP}{df}_{\text{int,CH}}$ sind in Abbildung 6.5(b) dargestellt. Sie haben ihr Maximum wieder bei $\approx 10^{24} \text{ Hz}$ und nehmen ansonsten den für Krümmungsstrahlung typischen Verlauf an. Die Abweichungen zwischen $\frac{dP}{df}_{\text{int,CH},<d}$ und $\frac{dP}{df}_{\text{int,CH},>d}$ sind geringer als im vorherigen Fall, was daran liegt, dass die einzelnen Anteile sich nicht stark unterscheiden (siehe Abbildungen 6.3(c) und (d)). Im niederfrequenten Bereich ist $\frac{dP}{df}_{\text{int,CH}}$ etwas größer als $\frac{dP}{df}_{\text{int,N}}$. Letzteres ist dafür für große Frequenzen größer. Dies ist dadurch verursacht, dass γ_N größere Werte erreicht. Insgesamt sind die integrierten

Spektren $\frac{dP}{df}_{\text{int,CH}}$ jedoch vergleichbar mit $\frac{dP}{df}_{\text{int,N}}$. Dies ist bemerkenswert, da doch durchaus verschiedene Ausdrücke für den Krümmungsradius und für das beschleunigende elektrische Feld verwendet wurden (siehe Kapitel 4.1.2 und Abbildung 2.6). Der genaue Verlauf des elektrischen Feldes spielt offenbar im Rahmen dieses vereinfachten Modells nahezu keine Rolle für das Krümmungsstrahlungs-Spektrum.

4.2.3 Umrechnung in spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int}}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d)$

Es kann jetzt also an jedem Ort d in der Outer Gap das Krümmungsstrahlungs-Spektrum berechnet werden, das von einem Teilchen erzeugt wurde und dessen Photonen entlang der Gap strömen. In Kapitel 3 wurde erklärt, dass nun jeder dieser Strahlen aus Krümmungsstrahlung mit den Teilchen des entgegengesetzt gerichteten Strahls durch inverse Compton-Streuung wechselwirkt. Zur Berechnung des sich ergebenden inversen Compton-Spektrums kann Gleichung 2.78 herangezogen werden. Darin steht jedoch nicht die bisher verfügbare spektrale Leistung, sondern die spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int}}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d)$ mit Richtungs-Abhängigkeit. Deswegen soll nun die Größe $\frac{dP}{df}_{\text{int}}$ in die spektrale Anzahl-Dichte der Photonen umgerechnet werden.

In Kapitel 4.2.2 wurde erläutert, dass das Spektrum der Krümmungsstrahlung eines Teilchens korrekt durch die spezifische Intensität $\frac{d^3P}{df dA d\Omega_{\text{ph}} \text{int}} = \frac{P dr}{df}_{\text{int}} \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ beschrieben wird. Dabei ist die Größe $\frac{P dr}{df}_{\text{int}} \cong \frac{dP}{df}_{\text{int}}$, die durch die Integration 4.10 erzielt wurde, die spektrale Leistung.

Bisher wurde immer nur die Strahlung betrachtet, die ein einziges Teilchen erzeugt. Tatsächlich strömt jedoch eine große Anzahl an Teilchen durch die Pulsar-Magnetosphäre. Der Schritt von einem Teilchen zu einer Population aus vielen Teilchen soll nun getan werden. Wir nehmen also an, dass die Teilchenstrahlen, die sich durch die Outer Gap bewegen, nicht nur wie bisher aus einem Teilchen bestehen, sondern dass die Teilchenstrahlen eine Anzahl-Dichte N_e haben, die sich von der Deltafunktion $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ unterscheidet, denn diese gibt ja die Anzahl-Dichte für einen Strahl aus nur einem Teilchen an. Weiterhin gilt jedoch, dass sich alle Teilchen eines Strahls mit dem jeweiligen $\gamma(r)$ für diesen Strahl durch die Gap bewegen. Die gesamte spezifische Intensität für jeden der Strahlen aus Krümmungsstrahlung ist also $\frac{d^3P}{df dA d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}} = \frac{P dr}{df}_{\text{int}} N_e \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0)$, denn da alle Teilchen eines Strahls das gleiche $\gamma(r)$ haben, können wir annehmen, dass alle Teilchen eines Strahls das gleiche Krümmungsstrahlungs-Spektrum erzeugen und somit das Gesamtspektrum aus dem Spektrum eines Teilchens durch Multiplikation mit der Anzahl der Teilchen hervorgeht. Die Deltafunktion $\delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0)$ wird belassen, da wir annehmen, alle Teilchen und damit auch alle Photonen bewegen sich in die gleiche Richtung.

In Kapitel 3 wurde bereits dargelegt, dass die Anzahl-Dichte N_e tatsächlich eine schwer zu bestimmende Funktion des Ortes \vec{r} ist, dass jedoch im vorliegenden Modell ein konstanter Wert $\Omega B_0 / (4\pi c e)$ verwendet wird, der sich nach der Goldreich-Julian-Dichte richtet. Es ist also

$$\frac{d^4E}{dt df dA d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d) = \frac{P dr}{df}_{\text{int}}(f, d) \cdot \frac{\Omega B_0}{4\pi c e} \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0). \quad (4.11)$$

Dies gibt die Energie dE an, die pro Zeiteinheit dt in Form von Photonen, deren Energie im Intervall $[hf; hf + h df]$ liegt, pro Frequenzintervall df und pro Flächeneinheit dA in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ in Richtung Ω_{ph} strömt.

- Division durch h ergibt nun die Energie, die pro Zeiteinheit in Form von Photonen, deren Energie im Intervall $[hf; hf + h df]$ liegt, pro Energieintervall $dE = h df$ und pro Flächeneinheit in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ in Richtung Ω_{ph} strömt.
- Multiplikation mit $\frac{mc^2}{1} \frac{1}{mc^2} = 1$ erzielt die dimensionslose Energie $d\epsilon = dE / (mc^2)$, die pro Zeiteinheit in Form von Photonen, deren Energie im Intervall $[hf; hf + h df]$ liegt, pro dimensionslosem Energieintervall $d\epsilon = dE / (mc^2)$ und pro Flächeneinheit in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ in Richtung Ω_{ph} strömt.
- Da ein Photon die dimensionslose Energie ϵ besitzt, ergibt Division durch ϵ die Anzahl $dS = d\epsilon / \epsilon$ von Photonen, deren Energie im Intervall $[hf; hf + h df]$ liegt und die pro Zeiteinheit, pro dimensionslosem Energieintervall und pro Flächeneinheit in den Raumwinkel $d\Omega_{\text{ph}}$ in Richtung

Ω_{ph} strömen. Diese Größe $\frac{d^4 S}{dt d\epsilon dA d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d)$ kann als spektrale Flussdichte bezeichnet werden.

- Allgemein gilt, dass die Flussdichte eines strömenden Fluids gleich dem Produkt aus dessen Strömungsgeschwindigkeit und Anzahl-Dichte ist. Deswegen kann durch Division durch c aus der spektralen Flussdichte die spektrale Anzahl-Dichte $\frac{d^3 S}{d\epsilon dV d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d) = \frac{d^2 N}{d\epsilon d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d) = \frac{dn}{d\Omega_{\text{ph}} \text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d) = \nu_{\text{ges,int}}(f, \Omega_{\text{ph}}, d)$ der Photonen erzielt werden.
- Um die explizite Abhängigkeit von der dimensionslosen Energie zu bekommen, muss in allen Argumenten $f = \epsilon \cdot mc^2/h$ ersetzt werden.

Insgesamt ergibt sich also:

$$\nu_{\text{ges,int}}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d) = \frac{1}{\epsilon hc} \cdot \frac{P dr}{df}_{\text{int}}(\epsilon \cdot mc^2/h, d) \cdot \frac{\Omega B_0}{4\pi c\epsilon} \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) \quad (4.12)$$

Da die Anzahl $d^3 S$ sowie die dimensionslose Energie $d\epsilon$ keine Einheit haben, hat $\nu_{\text{ges,int}}$ die Einheit $\text{cm}^{-3} \text{ster}^{-1}$.

Die erhaltenen spektralen Anzahl-Dichten von Photonen sind für alle vier Strahlen in Abbildung 6.6 gezeichnet. Es wurde jeweils von der Integrationsgrenze nahe des Startpunkts der Teilchen bis zur gegenüberliegenden Gap-Grenze integriert, sodass also $\nu_{\text{ges,int},<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ beziehungsweise $\nu_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, \Omega_0, 0,5R_{\text{LZ}})$ die spektrale Anzahl-Dichte der sich nach außen / innen bewegenden Photonen am äußeren / inneren Gap-Rand beschreibt. Jeweils ist $\nu_{\text{ges,int}}$ im Bereich um die zur kritischen Frequenz f_k gehörige dimensionslose Energie ϵ_k gezeichnet, welche einige 10^4 beträgt, für die Fälle γ_N jedoch durchschnittlich etwas größer ist als für γ_{CH} . Im Bereich um ϵ_k erfahren die spektralen Anzahl-Dichten analog zum Verlauf des Krümmungsstrahlungs-Spektrums eine Änderung der funktionalen Abhängigkeit von $\simeq \epsilon^{-2/3}$ für $\epsilon \ll \epsilon_k$ zu $\simeq \epsilon^{-1/2} \exp(-\epsilon/\epsilon_k)$ im Bereich $\epsilon \gg \epsilon_k$. Wie auch bei den integrierten Spektren ist erkennbar, dass $\nu_{\text{ges,int},N,>d}$ im hochenergetischen Bereich etwas größer ist als $\nu_{\text{ges,int},N,<d}$, was dadurch verursacht ist, dass $\gamma_{N,\text{ein}}$ an der inneren Gap-Grenze die größten Werte erreicht. $\nu_{\text{ges,int},N}$ ist außerdem im hochenergetischen Bereich größer als $\nu_{\text{ges,int},\text{CH}}$, da γ_N durchschnittlich größer als γ_{CH} ist und somit mehr hochenergetische Anteile im Spektrum enthalten sind.

Für abnehmende Energien wird $\nu_{\text{ges,int}}$ offenbar immer größer und hat wegen $\simeq \epsilon^{-2/3}$ bei $\epsilon = 0$ sogar eine Singularität. Um die Anzahl-Dichte der Krümmungsstrahlungs-Photonen zu erhalten, müsste man die spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int}}$ über ϵ von 0 bis ∞ integrieren, was wegen der Singularität sehr aufwändig ist. Jedoch gibt es, wie in Kapitel 4.4.1 gezeigt wird, im nieder- und mittlereenergetischen Bereich zahlreiche weitere Photonen-Populationen, die die Population von Krümmungsstrahlungs-Photonen überlagern und in ihrer spektralen Anzahl-Dichte noch übertreffen. So ist zum Beispiel in der Outer Gap mit Sicherheit eine thermische Photonen-Population präsent, die durch die Schwarzkörper-Strahlung der Neutronenstern-Oberfläche verursacht ist. Die spektrale Energie-Dichte von Schwarzkörper-Strahlung eines Körpers der Temperatur T ist gemäß Demtröder [2005] durch

$$\frac{d^2 E}{df dV}(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3 \cdot (\exp(hf/(kT)) - 1)} \quad (4.13)$$

gegeben, was sich wieder leicht in eine spektrale Anzahl-Dichte von Photonen umrechnen lässt: Division durch die Energie hf eines Photons ergibt die spektrale Anzahl-Dichte, die jedoch noch auf die Frequenz bezogen ist. Durch Anwendung von $f = \epsilon mc^2/h$ und $df = mc^2/h \cdot d\epsilon$ erhält man die spektrale Anzahl-Dichte

$$\nu_{\text{Planck}}(\epsilon, T, \Omega_{\text{ph}}) = \frac{8\pi m^3 c^3 \epsilon^2}{h^3 \cdot (\exp(\epsilon mc^2/(kT)) - 1)} \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) = \quad (4.14)$$

$$= n_{\text{Planck}}(\epsilon, T) \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0), \quad (4.15)$$

die jetzt auf die dimensionslose Energie bezogen ist, so wie dies auch in $n_{\text{ges,int}}$ beziehungsweise $\nu_{\text{ges,int}}$ der Fall ist (siehe 4.12 und zuvor). Außerdem wurde hier angenommen, dass sich alle thermischen Photonen

in radialer Richtung Ω_0 vom Neutronenstern fortbewegen.

Die Oberflächen-Temperatur des Crab-Pulsars wurde mit Hilfe von Beobachtungen des Chandra Röntgen-Teleskops auf $T \approx 2 \times 10^6$ K [Tennant et al., 2001] oder leicht darunter [Weisskopf et al., 2004] festgesetzt. Dazu wurde angenommen, dass die gesamte Röntgen-Strahlung zwischen den Pulsen, also in den Minima der Lichtkurve, durch thermische Strahlung von der Neutronenstern-Oberfläche herrührt.

In Abbildung 4.2 sind thermische Schwarzkörper-Spektren (ausgedrückt in der spektralen Anzahl-Dichte gemäß Gleichung 4.14) für verschiedene Temperaturen gezeichnet. Gleichung 4.14 gibt jedoch die spektrale Anzahl-Dichte unmittelbar über der Photosphäre des Neutronensterns an, wir sind hingegen an der spektralen Anzahl-Dichte im Bereich der Outer Gap interessiert, welche sich im Fall des Crab-Pulsars im radialen Abstand von $r \approx 100R$, also circa 100 Neutronenstern-Radien von diesem entfernt, befindet. Ein radial vom Neutronenstern ausgehender Photonenfluss wird nun um den Faktor R^2/r^2 verdünnt. Deswegen beträgt die spektrale Anzahl-Dichte im Bereich der Gap nur noch $\nu_{\text{Planck}} \cdot 100^{-2}$. Außerdem ist in Abbildung 4.2 die spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int,CH},<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ der Krümmungsstrahlungs-Photonen des auswärts gerichteten Teilchenstrahls am äußeren Gap-Rand gezeichnet. Für den sich nach innen bewegenden Strahl sowie für die Fälle $\nu_{\text{ges,int,N}}$ ergibt sich praktisch kein Unterschied zum gezeigten Fall. Offensichtlich dominiert im Bereich $\epsilon < \epsilon_{\text{ab}} \approx 10^{-2}$ die thermische Strahlung über die Krümmungsstrahlung. Die Wahl der Abschneide-Energie ϵ_{ab} hat sich am Spektrum für die durch die Chandra-Beobachtung nahegelegte Temperatur $T = 2 \times 10^6$ K gerichtet. Das (gepulste und ungepulste) Spektrum unterhalb von ϵ_{ab} kann also problemlos durch ein thermisches Spektrum mit $T = 2 \times 10^6$ K beschrieben werden. Oberhalb von der Abschneide-Energie wird die gepulste Strahlung weiterhin durch die Krümmungsstrahlungs-Komponente beschrieben. Um im Folgenden bei den Integrationen der spektralen Anzahl-Dichte keinen unnötigen Aufwand zu betreiben, wird ab jetzt jeder der vier Ausdrücke $\nu_{\text{ges,int}}$ mit der Heaviside-Funktion $H(\epsilon - \epsilon_{\text{ab}})$ multipliziert, sodass $\nu_{\text{ges,int}}$ dann für $\epsilon < \epsilon_{\text{ab}}$ immer den Wert 0 annimmt. Mit folgender spektraler Anzahl-Dichte ν beziehungsweise Anzahl-Dichte n wird also weitergerechnet:

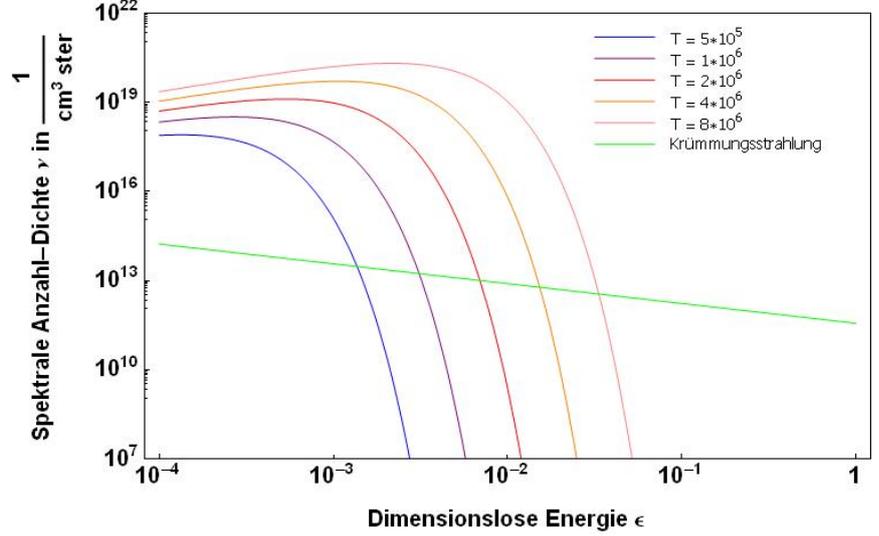


Abb. 4.2: Vergleich der spektralen Anzahl-Dichte der durch Krümmungsstrahlung beziehungsweise thermische Strahlung von der Neutronenstern-Oberfläche generierten Photonen in der Outer Gap. Aufgetragen ist in doppelt-logarithmischer Darstellung $\nu_{\text{Planck}}(\epsilon, T, \Omega_0) \cdot 100^{-2}$ für verschiedene Temperaturen T sowie $\nu_{\text{ges,int,CH},<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ (grün) gegen die dimensionslose Energie.

$\nu_{\text{ges,int,CH},<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ der Krümmungsstrahlungs-Photonen des auswärts gerichteten Teilchenstrahls am äußeren Gap-Rand gezeichnet. Für den sich nach innen bewegenden Strahl sowie für die Fälle $\nu_{\text{ges,int,N}}$ ergibt sich praktisch kein Unterschied zum gezeigten Fall. Offensichtlich dominiert im Bereich $\epsilon < \epsilon_{\text{ab}} \approx 10^{-2}$ die thermische Strahlung über die Krümmungsstrahlung. Die Wahl der Abschneide-Energie ϵ_{ab} hat sich am Spektrum für die durch die Chandra-Beobachtung nahegelegte Temperatur $T = 2 \times 10^6$ K gerichtet. Das (gepulste und ungepulste) Spektrum unterhalb von ϵ_{ab} kann also problemlos durch ein thermisches Spektrum mit $T = 2 \times 10^6$ K beschrieben werden. Oberhalb von der Abschneide-Energie wird die gepulste Strahlung weiterhin durch die Krümmungsstrahlungs-Komponente beschrieben. Um im Folgenden bei den Integrationen der spektralen Anzahl-Dichte keinen unnötigen Aufwand zu betreiben, wird ab jetzt jeder der vier Ausdrücke $\nu_{\text{ges,int}}$ mit der Heaviside-Funktion $H(\epsilon - \epsilon_{\text{ab}})$ multipliziert, sodass $\nu_{\text{ges,int}}$ dann für $\epsilon < \epsilon_{\text{ab}}$ immer den Wert 0 annimmt. Mit folgender spektraler Anzahl-Dichte ν beziehungsweise Anzahl-Dichte n wird also weitergerechnet:

$$\nu_{\text{ges,int}}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d) = H(\epsilon - \epsilon_{\text{ab}}) \cdot \underbrace{\frac{1}{\epsilon h c} \cdot \frac{P dr}{df}_{\text{int}}(\epsilon \cdot m c^2 / h, d) \cdot \frac{\Omega B_0}{4 \pi c e}}_{n_{\text{ges,int}}(\epsilon, d)} \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) = \quad (4.16)$$

$$= n_{\text{ges,int}}(\epsilon, d) \cdot \delta(\Omega_{\text{ph}} - \Omega_0) \quad (4.17)$$

4.3 Strahlungsspektrum durch inverse Compton-Streuung

In unserem Modell existieren nun vier Strahlen in der Outer Gap: Zwei Teilchenstrahlen, von denen sich einer nach innen und einer nach außen bewegt, und zwei Photonenstrahlen aus Krümmungsstrahlung, die ebenfalls in entgegengesetzte Richtungen durch die Gap laufen. Wie in Kapitel 3 erläutert wurde, gehen wir jetzt davon aus, dass jeder Photonenstrahl von dem entgegengesetzt gerichteten Teilchenstrahl invers Compton-gestreut wird. Es wird sich dann zeigen, dass die gestreuten Photonen aufgrund der re-

lativistischen Aberration ebenfalls stark in eine Richtung fokussiert sind und somit wieder einen Strahl bilden, der in Richtung des ursprünglichen Teilchenstrahls verläuft. Es entstehen also zwei gestreute Photonenstrahlen, von denen wiederum einer nach innen und der andere nach außen durch die Gap strömt. Im Folgenden wird nur noch der auswärts gerichtete gestreute Photonenstrahl betrachtet, da dieser die Pulsar-Magnetosphäre auf direkterem Wege verlässt und deswegen die Berechnungen näher an den Beobachtungen liegen werden. Die sich ergebenden Spektren der beiden gestreuten Photonenstrahlen werden sich jedoch nicht stark unterscheiden, da sich, wie in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt wurde, die Spektren der entgegengesetzten Krümmungsstrahlungs-Strahlen sowie die Kinematik der entgegengesetzten Teilchenstrahlen nur leicht quantitativ unterscheiden.

Für die gestreute Photonen-Population soll im Folgenden das Spektrum berechnet werden. Zunächst soll analytisch ein auswertbarer Ausdruck für die Emissivität gefunden werden. Daraufhin soll dieser Ausdruck numerisch ausgewertet werden und schließlich wird die Emissivität wieder über die Outer Gap integriert, um eine spezifische Intensität zu erhalten.

4.3.1 Analytische Spezifizierung des invers Compton-gestreuten Spektrums

Gesucht ist also ein Ausdruck für die Emissivität $j_{\text{IC}}(\epsilon_1, \Omega_1) = \frac{d^4 E}{d\epsilon_1 d\Omega_1 dt dV}(\epsilon_1, \Omega_1)$, die bereits in Kapitel 2.3.6 für den relativ allgemeinen Fall beliebiger Photonen- und Elektronen-Verteilungen $\nu(\epsilon, \Omega_{\text{ph}})$ und $\nu_e(\gamma, \Omega_e)$ behandelt wurde. Der Ausdruck 2.78 soll also aufbauend auf Kapitel 2.3 und auf Dermer & Menon [2007] (Vorsicht: Letzteres ist teilweise fehlerhaft geschrieben) für die entgegengesetzt gerichteten Photonen- und Teilchenstrahlen spezifiziert werden. Dies kann schrittweise mit Hilfe von geeigneten Annahmen geschehen:

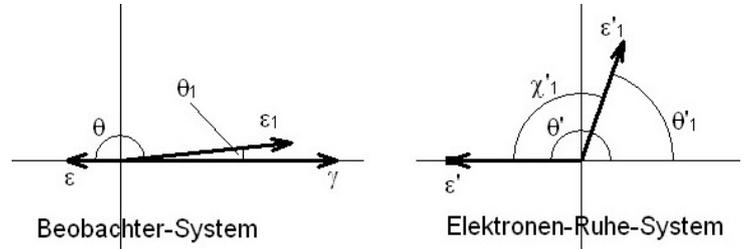


Abb. 4.3: Auf Abbildung 2.7 aufbauende Geometrie zur Compton-Streuung in zwei Bezugssystemen, die durch den Lorentz-Boost γ auseinander hervorgehen. Positronen und Photonen bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen. Wegen der relativistischen Aberration ist der gestreute Photonenstrahl im Beobachter-System parallel zum Positronen-Strahl gerichtet.

1. Wir begeben uns ins Beobachter-System, das heißt in das mit der Magnetosphäre korotierende Bezugssystem. (In diesem System geschehen in der Realität natürlich nicht die Beobachtungen. Es soll jedoch im Gegensatz zum Elektronen-Ruhe-System gesehen werden und wird deshalb Beobachter-System genannt.) In diesem System ist auch die Emissivität 2.78 formuliert.

Im Beobachter-System bewegt sich der Teilchenstrahl (aus Positronen) in der Outer Gap in Richtung \vec{e}_r nach außen. Der Strahl aus Krümmungsstrahlungsphotonen bewegt sich entgegengesetzt, also nach innen in Richtung $-\vec{e}_r$. Die Photonen kollidieren also frontal mit den streuenden Positronen. Die geometrischen Verhältnisse sind in Abbildung 4.3 veranschaulicht.

2. Diese Kollisionen geschehen ausschließlich im Klein-Nishina-Grenzfall. Dies kann man folgendermaßen einsehen: In Kapitel 4.1.3 wurde deutlich, dass der Lorentz-Faktor der Teilchen über sehr weite Teile der Gap größer als 10^6 ist, dass also $\gamma > 10^6$ gilt. Des Weiteren wurde in Kapitel 4.2.3 die spektrale Anzahl-Dichte der Krümmungsstrahlungs-Photonen unterhalb von $\epsilon_{\text{ab}} \approx 10^{-2}$ abgeschnitten, sodass $\epsilon > \epsilon_{\text{ab}}$ gilt. Überdies führt das frontale Kollidieren wegen relativistischer Doppler-Verschiebung zur Identität $\epsilon' = 2\gamma\epsilon$ (vergleiche Kapitel 2.3.2). Zusammengenommen gilt also für sämtliche möglichen Streueignisse

$$\epsilon' \approx \gamma\epsilon > 10^6\epsilon > 10^6\epsilon_{\text{ab}} = 10^6 \cdot 10^{-2} = 10^4 \gg 1. \quad (4.18)$$

Die Bedingung (siehe 2.3.2) für Streuung im Klein-Nishina-Grenzfall ist also stets erfüllt und die dimensionslose ungestreute Photonenenergie ist im Elektronen-Ruhe-System viel größer als 1.

Mit Ungleichung 4.18, also im Klein-Nishina-Grenzfall, wird Gleichung 2.48 zu

$$\epsilon'_1 \stackrel{\chi'_1 \gg 0}{\approx} \frac{\epsilon'}{\epsilon'(1 - \cos(\chi'_1))} = \frac{1}{1 - \cos(\chi'_1)}. \quad (4.19)$$

Die bedingende Ungleichung $\chi'_1 \gg 0$ bedeutet, dass der Winkel χ'_1 (siehe Abbildung 4.3) nicht verschwindend klein sein darf. Wäre dies der Fall, so wäre der zweite Summand im Nenner von 2.48 nicht mehr zwangsläufig $\gg 1$.

- Die Positronen haben alle die Energie $\gamma_{\text{aus}}(d)$. Außerdem bewegen sie sich alle in Richtung des Einheitsvektors \vec{e}_r , der in Richtung der x -Achse der Koordinatensysteme aus Abbildung 4.3 zeigt. Diese Richtung Ω_e der Impulse der Positronen kann durch das Paar $\theta_e = \pi/2$ und $\phi_{e,\theta_e} = 0$ beschrieben werden, wobei der Polar-Winkel θ_e gegen die y -Achse des Systems von Abbildung 4.3 gemessen wird und ϕ_{e,θ_e} der zugehörige Azimutal-Winkel ist und gegen die x -Achse gemessen wird. (Jede andere Wahl des Koordinatensystems $(\theta_e, \phi_{e,\theta_e})$ wäre möglich. Jedoch müssen die im Folgenden verwendeten Deltafunktionen korrekt normiert werden.) Außerdem haben in unserem Modell die Teilchenstrahlen die Anzahl-Dichte N_e (siehe Kapitel 3). Dann ist die spektrale Anzahl-Dichte mit Richtungs-Abhängigkeit des Positronen-Strahls

$$\nu_e(\gamma, \Omega_e, d) = N_e \cdot \delta(\gamma - \gamma_{\text{aus}}(d)) \cdot \delta(\phi_{e,\theta_e} - 0) \delta(\theta_e - \pi/2). \quad (4.20)$$

- Die spektrale Anzahl-Dichte mit Richtungs-Abhängigkeit des ungestreuten Photonenstrahls ist durch den Ausdruck 4.17 gegeben. Das Koordinatensystem von $(\theta_{\text{ph}}, \phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}})$ muss so gewählt werden, dass es gleich ausgerichtet wie das von $(\theta_e, \phi_{e,\theta_e})$ ist. Die Richtung Ω_0 verläuft in unserem Fall in Richtung $-\vec{e}_r$ und lässt sich dann durch das Paar $\theta_0 = \pi/2$ und $\phi_{0,\theta_0} = \pi$ ausdrücken. Es ist also

$$\nu(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}) = \nu_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, \Omega_{\text{ph}}, d) = n_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, d) \cdot \delta(\phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}} - \pi) \delta(\theta_{\text{ph}} - \pi/2). \quad (4.21)$$

- Aus Abbildung 4.3 wird klar, dass der Einfall-Winkel stets $\theta = \pi$ ist. Dies folgt auch aus Gleichung 2.79 mit den soeben in 3 und 4 spezifizierten Winkeln für die Richtungs-Abhängigkeiten der Strahlen. $\theta = \pi$ ist lediglich ein Ausdruck für das frontale Kollidieren.
- Es ist $\gamma \gg 1$ und damit $\beta \approx 1$. Dies wird von Dermer & Menon [2007] „head-on approximation“ genannt, ist jedoch im Grunde nur der extrem relativistische Grenzfall. Dermer & Menons Bezeichnung „head-on approximation“ ist jedoch anschaulich, wenn man sich Folgendes klar macht: Auch wenn die beiden Strahlen im Beobachter-System nicht frontal kollidierten, wäre mit $\gamma \gg 1$ und $\beta \approx 1$ im Elektronen-Ruhe-System wegen relativistischer Aberration (vergleiche Kapitel 2.3.2) der Einfall-Winkel $\theta' = \pi$, fände also im Elektronen-Ruhe-System „frontale Kollision“ statt (sofern man in einem Ruhe-System von frontalem Kollidieren zweier Teilchen sprechen kann). In unserem Fall findet sogar im Beobachter-System Frontal-Kollision (gemäß Punkt 5) statt, die „head-on approximation“ wird dadurch noch verstärkt.
- In der verwendeten Geometrie gilt allgemein $\theta' = \theta'_1 + \chi'_1$ und speziell bei uns mit Punkt 6 $\pi = \theta'_1 + \chi'_1$. Daraus folgt $\cos(\chi'_1) = -\cos(\theta'_1)$. Mit dieser Beziehung wird Gleichung 2.49b zu $\epsilon_1 = \gamma \epsilon'_1 (1 - \cos(\chi'_1))$ und mit der Näherung 4.19 folgt $\epsilon_1 \approx \gamma$, was dann jedoch auch nur unter der Bedingung $\chi'_1 \gg 0$ gültig ist. Im Klein-Nishina-Grenzfall ist also in der „head-on approximation“ und für nicht zu kleine χ'_1 die gestreute Photonenergie im Beobachter-System nahezu gleich der ursprünglichen Teilchenenergie. In Kapitel 6.3.4 aus Dermer & Menon [2007] wird außerdem mit Hilfe von Streuquerschnitt-Momenten gezeigt, dass die durchschnittliche gestreute Photonenergie im Klein-Nishina-Grenzfall und in der „head-on approximation“ gleich der Teilchenenergie ist.
- Damit kann man nun den Teil $\frac{d\sigma_C}{d\epsilon_1}(\epsilon_1, \gamma, \epsilon, \Omega_{\text{ph}}, \Omega_e)$ des differentiellen Streuquerschnitts von Gleichung 2.78 spezifizieren zu

$$\frac{d\sigma_C}{d\epsilon_1}(\epsilon_1, \gamma, \epsilon) = \sigma_{\text{KN}}(\epsilon'(\epsilon, \gamma)) \cdot \delta(\epsilon_1 - \gamma). \quad (4.22)$$

Dies drückt aus, dass jeder infinitesimale Teil des Klein-Nishina-Streuquerschnitts zu Energien $\epsilon_1 = \gamma$ streut. Die Abhängigkeit von den Richtungen Ω_{ph} und Ω_e der einfallenden Photonen und

Positronen ist nicht mehr vorhanden, da in der Frontal-Kollision $\epsilon' = 2\gamma\epsilon$ ist (siehe Kapitel 2.3.2) und somit ϵ' nicht mehr von dem Einfall-Winkel θ abhängt, da dieser $= \pi$ ist. Diese Spezifikation von θ lässt auch die Abhängigkeit der Energie ϵ' und damit des differentiellen Streuquerschnitts von Ω_{ph} und Ω_e verschwinden.

Der gesamte Klein-Nishina-Streuquerschnitt σ_{KN} ist durch den Ausdruck 2.55 gegeben, sodass sich

$$\frac{d\sigma_{\text{C}}}{d\epsilon_1}(\epsilon_1, \gamma, \epsilon) = \frac{\pi r_{\text{e}}^2}{2\gamma\epsilon} \ln(4 \exp(1/2)\gamma\epsilon) \cdot \delta(\epsilon_1 - \gamma) \quad (4.23)$$

ergibt.

9. Wegen $\beta \approx 1$ wird, wie in Kapitel 2.3.2 deutlich wurde, die gestreute Strahlung durch die relativistische Aberration stark gebündelt. Es ist $\theta_1 \approx 0$ (siehe Abbildung 4.3), die emittierten Photonen bewegen sich also in die gleiche Richtung wie das ursprüngliche Positron. Alle infinitesimalen Anteile des differentiellen Streuquerschnitts bewirken also Streuung in die Richtung der Positronen-Bewegung. Deshalb kann die Richtungs-Abhängigkeit des differentiellen Streuquerschnitts durch Deltafunktionen ausgedrückt werden. Es ist somit

$$\frac{d^2\sigma_{\text{C}}}{d\Omega_1 d\epsilon_1}(\epsilon_1, \Omega_1, \gamma, \epsilon) = \frac{d\sigma_{\text{C}}}{d\epsilon_1}(\epsilon_1, \gamma, \epsilon) \cdot \delta(\phi_{1,\theta_1} - \phi_{e,\theta_e})\delta(\theta_1 - \theta_e), \quad (4.24)$$

was mit 4.23 folgende Beziehung ergibt:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{C}}}{d\Omega_1 d\epsilon_1}(\epsilon_1, \Omega_1, \gamma, \epsilon) = \frac{\pi r_{\text{e}}^2}{2\gamma\epsilon} \ln(4 \exp(1/2)\gamma\epsilon) \cdot \delta(\epsilon_1 - \gamma) \cdot \delta(\phi_{1,\theta_1} - \phi_{e,\theta_e})\delta(\theta_1 - \theta_e) \quad (4.25)$$

10. Nun haben wir mit 4.20, 4.21 und 4.25 explizite Ausdrücke für alle Teile des Integranden der Emissivität 2.78. Wegen Punkt 5 kann außerdem in der Emissivität $\theta(\Omega_{\text{ph}}, \Omega_e) = \pi$ gesetzt werden. Es ist dann

$$\begin{aligned} j_{\text{IC}}(\epsilon_1, \Omega_1, d) &= c \oint \int_1^\infty \oint \int_0^\infty \epsilon_1 mc^2 \cdot \frac{\pi r_{\text{e}}^2}{2\gamma\epsilon} \ln(4 \exp(1/2)\gamma\epsilon) \delta(\epsilon_1 - \gamma) \cdot \\ &\quad \cdot \delta(\phi_{1,\theta_1} - \phi_{e,\theta_e})\delta(\theta_1 - \theta_e) \cdot 2 \cdot n_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, d) \delta(\phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}} - \pi)\delta(\theta_{\text{ph}} - \pi/2) \cdot \\ &\quad \cdot N_e \delta(\gamma - \gamma_{\text{aus}}(d)) \delta(\phi_{e,\theta_e} - 0)\delta(\theta_e - \pi/2) d\epsilon d\Omega_{\text{ph}} d\gamma d\Omega_e = \\ &= 2N_e mc^3 \epsilon_1 \oint \delta(\phi_{e,\theta_e} - 0)\delta(\theta_e - \pi/2) \delta(\phi_{1,\theta_1} - \phi_{e,\theta_e})\delta(\theta_1 - \theta_e) \cdot \\ &\quad \cdot \int_1^\infty \delta(\gamma - \gamma_{\text{aus}}(d)) \delta(\epsilon_1 - \gamma) \oint \delta(\phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}} - \pi)\delta(\theta_{\text{ph}} - \pi/2) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \frac{\pi r_{\text{e}}^2}{2\gamma\epsilon} \ln(4 \exp(1/2)\gamma\epsilon) n_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, d) d\epsilon \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\theta_{\text{ph}}) d\phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}} d\theta_{\text{ph}} d\gamma \sin(\theta_e) d\phi_{e,\theta_e} d\theta_e. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Integrationen über $d\Omega_e = \sin(\theta_e) d\phi_{e,\theta_e} d\theta_e$, über $d\Omega_{\text{ph}} = \sin(\theta_{\text{ph}}) d\phi_{\text{ph},\theta_{\text{ph}}} d\theta_{\text{ph}}$ sowie über $d\gamma$ können dank der Deltafunktionen durchgeführt werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} j_{\text{IC}}(\epsilon_1, \Omega_1, d) &= \frac{N_e \pi r_{\text{e}}^2 mc^3 \epsilon_1}{\gamma_{\text{aus}}(d)} \cdot \delta(\phi_{1,\theta_1} - 0)\delta(\theta_1 - \pi/2) \cdot \delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{aus}}(d)) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\epsilon} \ln(4 \exp(1/2)\gamma_{\text{aus}}(d)\epsilon) \cdot n_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, d) d\epsilon. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die Emissivität der invers Compton-gestreuten Strahlung. Die Integration über ϵ lässt sich jedoch analytisch nicht weiter ausführen, sondern nur numerisch mit Mathematica berechnen, da $n_{\text{ges,int},>d}(\epsilon, d)$ auch nur numerisch vorliegt.

4.3.2 Betrachtung der invers Compton-gestreuten Emissivität

Es liegt also an jedem Ort d eine andere invers Compton-gestreuete Emissivität vor. Die Funktion $j_{\text{IC}}(\epsilon_1)$ an einem bestimmten Ort d ist offensichtlich eine Deltafunktion an der Stelle $\epsilon_1 = \gamma_{\text{aus}}(d)$, besteht also aus einer scharfen Spitze um $\gamma_{\text{aus}}(d)$ und ist ansonsten Null. Im Fall $\gamma_{\text{N,aus}}$ sitzen die Spitzen bei umso größerem ϵ_1 , je kleiner das d ist, bei dem sie erzeugt werden, denn $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ nimmt (im Strahlungsteil) mit abnehmendem d zu. Im Fall $\gamma_{\text{CH,aus}}$ sitzen die Spitzen hingegen bei umso größerem ϵ_1 , je größer der Ort d ihrer Erzeugung ist, denn $\gamma_{\text{CH,aus}}(d)$ nimmt (im Strahlungsteil) mit zunehmendem d zu.

Im Folgenden wird bei den numerischen Rechnungen jedoch keine Diracsche Deltafunktion verwendet, sondern eine Gauß-Verteilung $f(\mu, \sigma, \epsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(\epsilon_1 - \mu)^2/(2\sigma^2))$ mit der Breite σ um den Mittelwert μ , für den dann $\gamma_{\text{aus}}(d)$ verwendet wird, da hier ja das Maximum der Glockenkurve liegen soll. Die Gauß-Verteilung ist bereits auf $\int f(\epsilon_1) d\epsilon_1 = 1$ normiert und geht für $\sigma \rightarrow 0$ in eine Deltafunktion über. Diese Ersetzung der Deltafunktion durch die Gauß-Verteilung ermöglicht später die numerische Integration über d .

Die Höhe der Spitze der Emissivität $j_{\text{IC}}(\epsilon_1)$ an einem Ort d ist durch den Bruch am Anfang der rechten Seite der Gleichung 4.27 sowie durch das Integral an deren Ende gegeben. Der Bruch hat jedoch stets den gleichen Wert $N_e \pi r_e^2 m c^3$, da er $\epsilon_1/\gamma_{\text{aus}}(d)$ enthält, was sich zu 1 kürzen lässt, weil die Emissivität (fast) nur bei $\epsilon_1 = \gamma_{\text{aus}}(d)$ von Null verschieden ist. Effektiv hängt die Höhe der Emissivität also nur vom Wert des Integrals in 4.27 ab. Bei der Auswertung dieses Integrals, welche wieder mit dem Befehl `NIntegrate[]` erzielt wird, stellt sich folgendes Problem: Der Integrationsbereich läuft über den vollen Wertebereich von ϵ , geht also von 0 bis ∞ . Da der Integrand, speziell $n_{\text{ges,int,>d}}$, jedoch unterhalb der Energie $\epsilon_{\text{ab}} = 10^{-2}$ abgeschnitten wurde (vergleiche 4.17), wird kein Fehler gemacht, wenn die Integration erst bei $\epsilon = 10^{-2}$ begonnen wird. Jedoch nimmt selbst die Integration von 10^{-2} bis ∞ zu viel Rechenzeit in Anspruch. Es muss also auch die obere Integrationsgrenze ϵ_0 herabgesetzt werden. In folgender Tabelle wurde das Integral von Gleichung 4.27 für den Fall γ_{N} am Ort $d = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ für verschiedene obere Integrationsgrenzen ϵ_0 ausgewertet:

obere Integrationsgrenze ϵ_0	Rechenzeit in s	Wert des Integrals in cm^{-3}
2×10^{-2}	145	$3,01 \times 10^{13}$
3×10^{-2}	463	$4,26 \times 10^{13}$
4×10^{-2}	774	$4,99 \times 10^{13}$
5×10^{-2}	780	$5,47 \times 10^{13}$
6×10^{-2}	791	$5,81 \times 10^{13}$
10×10^{-2}	1086	$6,60 \times 10^{13}$

Offensichtlich wird die Zunahme des Wertes des Integrals mit gleichmäßig ansteigendem ϵ_0 immer geringer. Dies ist wegen dem Abfall des Integranden mit zunehmendem ϵ der Fall. Hingegen wird die Rechenzeit mit ansteigendem ϵ_0 länger. Deswegen wird im Folgenden meist ein Wert von nicht mehr als 5×10^{-2} für die obere Integrationsgrenze ϵ_0 benutzt, man sollte sich aber bewusst sein, dass die Ergebnisse umso genauer und deswegen umso vertrauenswürdiger sind, je größer ϵ_0 ist.

Die Abhängigkeit des Wertes des Integrals in Gleichung 4.27 vom Ort d lässt sich in folgender Tabelle erkennen. Hier wurde das Integral für den Fall γ_{N} mit oberer Integrationsgrenze $\epsilon_0 = 2 \times 10^{-2}$ an verschiedenen Orten d ausgewertet:

Ort d	Rechenzeit in s	Wert des Integrals in cm^{-3}
$\frac{4}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{6}{10}R_{\text{LZ}}$	170	$2,40 \times 10^{13}$
$\frac{5}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{5}{10}R_{\text{LZ}}$	148	$3,01 \times 10^{13}$
$\frac{6}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{4}{10}R_{\text{LZ}}$	154	$3,62 \times 10^{13}$
$\frac{7}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{3}{10}R_{\text{LZ}}$	174	$4,24 \times 10^{13}$

Bei kleiner werdendem d wird das Integral offensichtlich größer. Dies kann man leicht verstehen: Bei kleinerem d ist $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ größer und somit ist auch bei kleinerem d der Logarithmus-Term größer. Die Änderung des Logarithmus im Wertebereich von γ ist jedoch so gering, dass dies praktisch keine Rolle für den Wert des Integrals spielt. Jedoch ist bei kleinerem d die spektrale Anzahl-Dichte $n_{\text{ges,int,N,>d}}(\epsilon, d)$ größer, da mit kleiner werdendem d immer mehr Krümmungsstrahlung aufintegriert wird. Dies begründet die Zunahme des Integrals mit kleiner werdendem d . Im Fall γ_{CH} ist die Abhängigkeit $\gamma_{\text{CH,aus}}(d)$

entgegengesetzt. Mit kleinerem d wird $\gamma_{\text{CH,aus}}(d)$ kleiner. Da jedoch die Änderung des Logarithmus wieder so gering ist, ist dies praktisch vernachlässigbar. Auch im Fall γ_{CH} werden mit abnehmendem d wieder mehr Photonen der Krümmungsstrahlung aufintegriert und somit wird $n_{\text{ges,int,CH,>}d}(\epsilon, d)$ größer, je kleiner d ist. Deswegen ist im Fall γ_{CH} ebenfalls zu erwarten, dass das Integral mit abnehmendem d anwächst.

Im Fall γ_{N} sind die Spitzen der Emissivität also umso größer, je kleiner der Ort d ist, bei dem sie erzeugt wurden. Bei umso kleinerem d sitzt eine Spitze jedoch, wie oben erklärt wurde, bei umso größerem ϵ_1 . Zusammengenommen folgt also, dass im Fall γ_{N} Spitzen bei größerem ϵ_1 , also solche, die bei höherer Energie sitzen, auch einen höheren Wert, also eine größere Emissivität annehmen. Dies ist auch in Abbildung 6.7(a) ersichtlich. Dort ist für drei verschiedene Orte d die Emissivität $j_{\text{IC,N}}(\epsilon_1, \Omega_e, d)$ beispielhaft gezeichnet. Es wurde für die Breite der Gauß-Verteilung $\sigma = 10^5$ verwendet. Dieser große Wert ist nötig, um die Gauß-Verteilung als solche und nicht nur als senkrechten Strich erkenntlich zu machen. Es sei darauf hingewiesen, dass wegen der Normierung der Gauß-Verteilung deren Höhe auch vom Wert σ beeinflusst wird. Größere σ führen zu niedrigeren Maximalwerten.

Analog dazu ist in Abbildung 6.7(b) für die gleichen drei Orte die Emissivität $j_{\text{IC,CH}}(\epsilon_1, \Omega_e, d)$ gegen die Energie ϵ_1 aufgetragen. Hier sind die Spitzen umso größer, je niederenergetischer sie sitzen. Dies ist die Folge daraus, dass einerseits bei kleineren Orten d der Wert des Integrals größer, also die Spitze höher ist, und dass andererseits wegen dem Verlauf von $\gamma_{\text{CH}}(d)$ die Spitzen der Emissivität bei umso kleinerem ϵ_1 sitzen, je weiter innen in der Gap sie erzeugt wurden.

4.3.3 Integriertes Spektrum

Gleichung 4.27 beschreibt die durch inverse Compton-Streuung hervorgerufene Emissivität j_{IC} am Ort d . Diese gibt an, wie viel Energie am Ort d in Form von Photonen, deren dimensionslose Energie im Intervall $[\epsilon_1; \epsilon_1 + d\epsilon_1]$ liegt, pro Zeit- und Volumeneinheit, pro dimensionslosem Energieintervall und pro Raumwinkelelement produziert wird und in die Richtung Ω_1 strömt. Wie bereits in Kapitel 3 vorweggenommen und in 4.3.1 bestätigt wurde, ist j_{IC} stark fokussiert, also zu einem Strahl gebündelt, dessen Photonen sich nach außen durch die Outer Gap bewegen. Dies ist an den Deltafunktionen $\delta(\phi_{1,\theta_1} - 0)\delta(\theta_1 - \pi/2)$ in 4.27 erkennbar. An einem Ort l_2 in der Gap sind also all die invers Compton-gestreuten Photonen messbar, die zwischen der inneren Gap-Grenze und l_2 erzeugt wurden. Die Strahlung am Ort l_2 , die wieder durch die spezifische Intensität I ausgedrückt wird, ist also die Summe all der Strahlungsanteile, die an Orten innerhalb von l_2 emittiert wurden, oder anders ausgedrückt das Integral der Emissivität über den Ort $d < l_2$. Es werden also analog zu Kapitel 4.2.2 die Integrale

$$I_{\text{IC,N}}(\epsilon_1, \Omega_1, l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} j_{\text{IC,N}}(\epsilon_1, \Omega_1, d) dd \quad (4.28a)$$

$$I_{\text{IC,CH}}(\epsilon_1, \Omega_1, l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} j_{\text{IC,CH}}(\epsilon_1, \Omega_1, d) dd \quad (4.28b)$$

mit $l_1 = 0,5R_{\text{LZ}}$ berechnet. Die spezifische Intensität I_{IC} gibt an, wie viel Energie am Ort d in Form von Photonen, deren dimensionslose Energie im Intervall $[\epsilon_1; \epsilon_1 + d\epsilon_1]$ liegt, pro Zeit- und Flächeneinheit, pro dimensionslosem Energieintervall und pro Raumwinkelelement in Richtung Ω_1 durch diese Flächeneinheit, welche senkrecht zu Ω_1 gerichtet ist, fließt. Berechnet man dann noch das Integral für $l_2 = R_{\text{LZ}}$, so erhält man die spezifische Intensität, die die Magnetosphäre verlässt und im Idealfall detektierbar ist. Die Berechnung dieses Integrals wird einmal mehr mit `NIntegrate[]` durchgeführt, denn der Integrand, speziell $n_{\text{ges,int,>}d}$, liegt nur numerisch vor. Da numerische Integration über eine Diracsche Deltafunktion nicht möglich ist, musste, wie bereits oben erwähnt wurde, diese durch eine Gauß-Verteilung ersetzt werden.

4.3.3.1 Vorbetrachtungen

Um die Berechnung der Integrale 4.28 nicht blind von Mathematica durchführen zu lassen und hinzunehmen, sondern die Ergebnisse zu verstehen, soll die Lösung schrittweise erarbeitet werden. Der

komplizierte Integrand von 4.28 soll zunächst stark vereinfacht werden. Betrachten wir das Integral, in dem lediglich die Deltafunktion $\delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{aus}}(d))$ steht, welche durch die Gauß-Verteilung ersetzt wird:

$$\int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} f(\gamma_{\text{N,aus}}(d), \sigma, \epsilon_1) dd \quad (4.29)$$

$f(\gamma_{\text{N,aus}}(d), \sigma, \epsilon_1)$ ist eine Gauß-Verteilung der unabhängigen Variablen ϵ_1 um den Mittelwert $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ mit der Breite σ , die möglichst klein sein sollte, damit die Approximation an die eigentlich zu verwendende Deltafunktion möglichst gut ist. Offensichtlich ist dieser Mittelwert der einzige d -abhängige Teil des Integranden von 4.29. Deswegen unterscheidet sich der Integrand bei Änderung von d nur in einer Verschiebung des Mittelwerts. Im Integral 4.29 werden also anschaulich sehr viele sehr eng nebeneinander liegende Gauß-Verteilungen aufsummiert. Beim Durchlaufen der Integrationsvariablen d von $0,5R_{\text{LZ}}$ bis R_{LZ} ändert sich der Mittelwert $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ nicht gleichmäßig, denn $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ ist keine lineare Funktion, sondern hat den in Abbildung 6.1(a) gezeigten Verlauf. Dort lässt sich erkennen, dass im Strahlungsteil von $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ Folgendes gilt: Je größer $\gamma_{\text{N,aus}}$ ist, desto größer ist der Betrag von $d(\gamma_{\text{N,aus}}(d))/dd$, also der Änderung von $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ mit d . Umgekehrt gilt: Bei kleiner werdendem $\gamma_{\text{N,aus}}$ nimmt auch der Betrag der Änderung von $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ mit d ab. Beim Durchlaufen der Integrationsvariablen d ändert sich deswegen der Mittelwert $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ der Gauß-Verteilungen umso schneller, je größer er ist und umso langsamer, je kleiner er ist. Dies bedeutet, dass die aufzuintegrierenden Gauß-Verteilungen bei größeren Mittelwerten weniger nah aneinander liegen und bei kleiner werdenden Mittelwerten immer enger nebeneinander liegen. Bei kleineren Mittelwerten ist die „Dichte“ an Gauß-Verteilungen also größer als bei großen Mittelwerten. Somit werden bei kleineren Mittelwerten im Grunde „mehr“ Gauß-Verteilungen aufintegriert. Deswegen ist zu erwarten, dass die sich ergebende Funktion in ϵ_1 im Wesentlichen abfällt, also mit steigendem ϵ_1 abnimmt. Die Integration wurde für $\sigma = 5 \times 10^5$ mit dem Befehl `NIntegrate[]` ausgeführt und die sich ergebende Funktion ist in Abbildung 6.8(a) dargestellt. Dort werden die soeben aufgestellten Vermutungen bestätigt.

Der Buckel bei maximalem nicht verschwindendem ϵ_1 ist dadurch verursacht, dass $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ bei seinem Maximum noch in einem schmalen Bereich eine betragsmäßig sehr geringe Steigung annimmt und somit hier die „Dichte“ der Gauß-Verteilungen nochmals erhöht wird.

Wegen dem doch relativ großen σ ist am Rand die Verschmierung der Gauß-Verteilungen erkennbar. Die kleinen Unstetigkeiten sind vermutlich einerseits durch Fehler in der numerischen Integration und andererseits durch die Unstetigkeiten der Funktion $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$, die ja aus drei verschiedenen Fit-Funktionen zusammengesetzt ist, verursacht.

Verkleinert man σ bei der Berechnung von 4.29, so geschehen im Wesentlichen drei Veränderungen: Erstens ist der Funktionsverlauf am Rand weniger verschmiert, zweitens werden die Unstetigkeiten extremer, also schmaler und höher, und drittens wird der Buckel schärfer, also schmaler und höher. Die Höhe der Funktion bleibt aber insgesamt nahezu gleich, denn die Gauß-Verteilungen sind normiert.

Auf eine weitere Eigenheit soll hingewiesen werden: Eine normierte Gauß-Verteilung mit $\sigma = 5 \times 10^5$ beträgt in ihrem Maximum größenordnungsmäßig 10^{-7} . Dennoch ist der Wert des Integrals von der Größenordnung 1. Dies ist dadurch erklärbar, dass an einem bestimmten Punkt ϵ_1 nicht nur die Gauß-Verteilung, deren Mittelwert bei diesem ϵ_1 liegt, beiträgt, sondern wegen der großen Breite σ eben auch die zahlreichen benachbarten Gauß-Verteilungen.

Als nächstes wird das Integral

$$\int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \frac{\epsilon_1}{\gamma_{\text{N,aus}}(d)} f(\gamma_{\text{N,aus}}(d), \sigma, \epsilon_1) dd \quad (4.30)$$

betrachtet, in dem nun bereits die volle ϵ_1 -Abhängigkeit von 4.27 steckt. Dieses Integral ist ebenfalls in Abbildung 6.8(a) gezeichnet. Im Idealfall mit $\sigma \rightarrow 0$ wäre der Term $\frac{\epsilon_1}{\gamma_{\text{aus}}(d)} = 1$ an den Stellen $\epsilon_1 = \gamma_{\text{aus}}(d)$ und $= 0$ an allen anderen ϵ_1 . Er würde also im Vergleich zum Integral 4.29 nichts ändern. Im vorliegenden Fall wurde jedoch $\sigma = 5 \times 10^5$ verwendet. Hier wirkt der Faktor $\frac{\epsilon_1}{\gamma_{\text{aus}}(d)}$ offensichtlich glättend. Die Unstetigkeiten sowie der Buckel sind nicht mehr vorhanden.

Zum Vergleich sollen nun noch die Integrale

$$\int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d)) dd \quad (4.31)$$

$$\int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \frac{\epsilon_1}{\gamma_{\text{aus}}(d)} \delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d)) dd \quad (4.32)$$

mit der Deltafunktion $\delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d))$ anstelle von $f(\gamma_{\text{N,aus}}(d), \sigma, \epsilon_1)$ berechnet werden. Dies ist für Mathematica mit dem Standardbefehl `Integrate[]` möglich und ergibt die in Abbildung 6.9(a) in blau und grün dargestellten Verläufe. Insgesamt entsprechen die Ergebnisse denen im Fall der Gauß-Verteilung (vergleiche Abbildung 6.8(a)). Lediglich sind die Abgrenzungen schärfer und Unstetigkeiten treten nur dort auf, wo auch $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ unstetig ist, nämlich bei $\epsilon_1 = \gamma_{\text{N,aus}} \approx 4,84 \cdot 10^7$ beziehungsweise $5,57 \cdot 10^7$. Der Verlauf des Integrals 4.31 kann nicht nur anschaulich verstanden werden, wie dies oben anhand des Pendants 4.29 mit der Gauß-Verteilung geschehen ist, sondern auch analytisch hergeleitet werden: Dazu machen wir uns die Eigenschaft

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (4.33)$$

der Deltafunktion zunutze [Nolting, 2007]. x_i ist die i -te Nullstelle der Funktion $g(x)$. n ist die Anzahl an Nullstellen und $g'(x_i)$ ist die an der Nullstelle x_i ausgewertete Ableitung von g nach x . Diese Eigenschaft wird nun das Integral 4.31 vereinfachen. Dazu identifizieren wir die unabhängige Variable x mit der Integrationsvariablen d . Das Argument g der Deltafunktion lautet dann

$$g(d) = \epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d). \quad (4.34)$$

Die Nullstelle d_{NS} von g lässt sich durch Bilden des Inversen bestimmen:

$$\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d_{\text{NS}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_{\text{NS}} = \gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1) \quad (4.35)$$

$\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}$ ist die Umkehrfunktion von $\gamma_{\text{N,aus}}$, bildet also eine dimensionslose Energie auf einen Ort ab. Die Identität 4.33 lautet also in unserem Fall

$$\delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d)) = \frac{\delta(d - \gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1))}{\left| \gamma'_{\text{N,aus}}(\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)) \right|}. \quad (4.36)$$

Mit dieser Eigenschaft vereinfacht sich das Integral 4.31 zu

$$\begin{aligned} \int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \delta(\epsilon_1 - \gamma_{\text{N,aus}}(d)) dd &= \int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \frac{\delta(d - \gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1))}{\left| \gamma'_{\text{N,aus}}(\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)) \right|} dd = \\ &= \frac{1}{\left| \gamma'_{\text{N,aus}}(\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)) \right|} \int_{0,5R_{\text{LZ}}}^{R_{\text{LZ}}} \delta(d - \gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)) dd = \\ &= \frac{1}{\left| \gamma'_{\text{N,aus}}(\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)) \right|} \cdot \begin{cases} 1, & \text{wenn } \gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1) \in [0,5R_{\text{LZ}}; R_{\text{LZ}}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Bedingung, dass $\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)$ zwischen $0,5R_{\text{LZ}}$ und R_{LZ} liegen muss, um einen von Null verschiedenen Wert zu erzielen, ist äquivalent dazu, dass ϵ_1 in dem Wertebereich von $\gamma_{\text{N,aus}}$ liegen muss. Der Ausdruck auf der rechten Seite von 4.37 lässt sich nun zeichnen, ohne eine Integration ausführen zu müssen. In Abbildung 6.9(a) ist dies ebenfalls getan. Die Ableitung $\gamma'_{\text{N,aus}}(d)$ wurde numerisch von Mathematica bestimmt und die Umkehrfunktion $\gamma_{\text{N,aus}}^{\text{inv}}(\epsilon_1)$ wurde analytisch aus der Fit-Funktion $\gamma_{\text{N,aus}}(d) = 1,2 \cdot 10^6 + 6,6 \cdot 10^{13} \cdot x^{-1/1,3}$ zwischen dem zweiten Schnittpunkt und der äußeren Gap-Grenze

(siehe Kapitel 4.1.2) bestimmt. Da diese Fit-Funktion die tatsächliche Funktion $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ im Beschleunigungsteil und im Bereich um das Maximum gar nicht beziehungsweise nur sehr schlecht beschreibt, ist am hochenergetischen Teil der roten Kurve in Abbildung 6.9(a) ein Sprung vorhanden und die Beschreibung durch 4.37 ist hier schlecht.

Die Integrale 4.29 bis 4.32 mit $\gamma_{\text{CH,aus}}$ anstelle von $\gamma_{\text{N,aus}}$ wurden ebenfalls probeweise ausgewertet und die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.8(b) und 6.9(b) gezeigt. Qualitativ ergibt sich ein ähnliches Resultat. Natürlich ist der Bereich, in dem sich ein nicht verschwindender Wert ergibt, schmaler, denn der Wertebereich von $\gamma_{\text{CH,aus}}$ ist (im Strahlungsteil) auch weniger ausgedehnt als im Fall $\gamma_{\text{N,aus}}$. Dafür werden größere Werte angenommen. Dies ist dadurch begründet, dass sich $\gamma_{\text{CH,aus}}(d)$ nicht so schnell mit d verändert wie $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$ und dadurch die Gauß-Verteilungen / Deltafunktionen enger beieinanderliegen und sich dadurch an einem bestimmten ϵ_1 mehr Anteile aufsummieren. Im Fall mit $\gamma_{\text{N,aus}}$ fallen die vom Integral angenommenen Werte von circa 6 cm beim niedrigsten ϵ_1 auf circa 2 cm beim höchsten ϵ_1 ab. Im Gegensatz dazu ist im Fall $\gamma_{\text{CH,aus}}$ der Abfall von circa 12 cm auf circa 8 cm prozentual gesehen weniger stark. Dies ist dadurch verursacht, dass sich der Betrag der Steigung von $\gamma_{\text{CH,aus}}(d)$ (im Strahlungsteil) weniger stark ändert als der von $\gamma_{\text{N,aus}}(d)$.

4.3.3.2 Durchführung der numerischen Integration

Nun kann prinzipiell die numerische Integration 4.28 der Emissivität durchgeführt werden und nach den soeben angestellten Vorüberlegungen kann dann dem Ergebnis getraut werden. Jedoch stellt sich hier erneut und leider noch sehr verstärkt das Problem zu hoher Rechenzeit. Bedenkt man, dass alles in allem vier Integrale (2.46, 4.10, 4.27 und 4.28) numerisch zu lösen sind, ist die hohe Rechenzeit verständlich. Das Integral $I_{\text{IC,N}}(\epsilon_1, \Omega_e, l_1, l_2)$ (siehe 4.28a) wurde in folgender Tabelle probeweise für verschiedene Parameter ausgewertet: Es wurde stets ein sehr kleiner Integrationsbereich von l_1 bis l_2 verwendet und $I_{\text{IC,N}}$ wurde lediglich am Punkt $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{2,0})$, also in der Mitte des von Null verschiedenen Teils der sich ergebenden aufintegrierten Gauß-Verteilungen, ausgewertet. Es werden die Abkürzungen $l_{1,0} = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ und $l_{2,0} = 1,000001 \cdot (\frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}})$ sowie (der Abstand zwischen diesen beiden Punkten) $b = l_{2,0} - l_{1,0}$ verwendet.

Breite σ	obere Inte.gr. ϵ_o	l_1	l_2	Rechenzeit in s	$I_{\text{IC,N}}$ in $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{ster}^{-1}$
1	3×10^{-2}	$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	25 092	109,1
1	2×10^{-2}	$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	7 984	76,9
10	2×10^{-2}	$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	1 606	67,8
10	2×10^{-2}	$l_{1,0} - b$	$l_{2,0} + b$	4 794	76,9
10	2×10^{-2}	$l_{1,0} - 5b$	$l_{2,0} + 5b$	9 059	76,9
100	2×10^{-2}	$l_{1,0} - 10b$	$l_{2,0} + 10b$	3 736	76,8
100	2×10^{-2}	$l_{1,0} - 50b$	$l_{2,0} + 50b$	7 991	76,9

Im Vergleich der ersten mit der zweiten Zeile wird wieder offensichtlich, was bereits in Kapitel 4.3.2 erkannt wurde. Die obere Integrationsgrenze ϵ_o des Integrals aus 4.27 sollte möglichst groß gewählt werden, um einen möglichst genauen Wert der Emissivität und damit auch der spezifischen Intensität zu erzielen. Eine Erhöhung von ϵ_o lässt aber auch die Rechenzeit stark steigen.

Zwischen zweiter und dritter Zeile wurde lediglich die Breite σ der Gauß-Verteilungen erhöht. In der dritten Zeile dauert die numerische Integration kürzer, was vermutlich daran liegt, dass Mathematicas Algorithmen die einzelnen Gauß-Kurven nun besser integrieren kann, da diese sich jetzt weniger schnell verändern, also weniger steil sind. Wegen dem erhöhten σ ist die Höhe der einzelnen Gauß-Verteilungen nun verringert. Deswegen ist der Wert $I_{\text{IC,N}}$ von Zeile 2 auf Zeile 3 gesunken und somit weniger genau. In der vierten Zeile wurde der Integrationsbereich von l_1 bis l_2 gleichmäßig verbreitert. Er ist im Vergleich zu den Zeilen 1 bis 3 um den Faktor 3 größer. Selbstverständlich erhöht sich damit auch die Rechenzeit. Der Wert $I_{\text{IC,N}}$ rückt aber ebenfalls nach oben in Richtung des Werts aus Zeile 2. Dies ist folgendermaßen verständlich: Da keine Deltafunktionen integriert werden, sondern Gauß-Verteilungen, die mit σ aufgeweicht sind, tragen zum Wert von $I_{\text{IC,N}}$ bei $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{2,0})$ nicht nur solche Gauß-Verteilungen bei, deren Mittelwert exakt bei $\frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{\text{N,aus}}(l_{2,0})$ liegt, sondern wegen der Verschmierung eben auch solche, die bei geringfügig anderem ϵ_1 ihren Mittelwert haben. Deren Flanke

steuert dann zum Wert von $I_{IC,N}$ am Punkt $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{2,0})$ auch einen zwar geringen, aber eben nicht verschwindenden Anteil bei, auch wenn ihr Mittelwert nicht genau an diesem Punkt liegt. Außerdem gilt: Je größer der Integrationsbereich von l_1 bis l_2 ist, desto größer ist auch der Bereich $[\gamma_{N,aus}(l_1); \gamma_{N,aus}(l_2)]$. Und damit gilt auch, dass die Menge (Anzahl) an Gauß-Verteilungen, deren Wert bei $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{2,0})$ aufintegriert wird, größer ist, denn es werden immer genau die Gauß-Verteilungen berücksichtigt, deren Mittelwert innerhalb des Bereichs $[\gamma_{N,aus}(l_1); \gamma_{N,aus}(l_2)]$ liegt.

In der fünften Zeile wurde der Integrationsbereich von l_1 bis l_2 nochmals stark vergrößert. Der Wert von $I_{IC,N}$ hat sich jedoch im Vergleich zu Zeile 4 nicht mehr (signifikant) erhöht. Offensichtlich liegen die Gauß-Verteilungen, die durch diese Erhöhung des Integrationsbereichs noch zusätzlich aufintegriert werden, schon so weit vom Auswertepunkt $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{1,0}) + \frac{1}{2}\gamma_{N,aus}(l_{2,0})$ entfernt, dass ihre Flanken an diesem Auswertepunkt schon sehr niedrig sind und praktisch nicht mehr zu $I_{IC,N}$ beitragen.

In Zeile 6 wurde die Breite einmal mehr verzehnfacht, der Integrationsbereich von l_1 bis l_2 wurde ungefähr verdoppelt. Das Ergebnis liegt bereits recht nahe des Werts aus Zeile 2.

In Zeile 7 ist die Breite σ gleich dem 100-fachen der Breite von Zeile 2. Der Integrationsbereich von l_1 bis l_2 ist im Vergleich zu Zeile 2 ebenfalls fast 100-fach ausgedehnt. Die Rechenzeit sowie der Wert von $I_{IC,N}$ sind ähnlich zu denen der zweiten Zeile. In Zeile 5 ist Breite und Integrationsbereich bezüglich Zeile 2 in etwa verzehnfacht, ebenfalls mit ähnlicher Rechenzeit und ähnlichem Wert von $I_{IC,N}$. Deswegen macht es für die Auswertung im Folgenden keinen großen Unterschied, ob man große Breiten und weite Integrationsbereiche oder kleine Breiten und kurze Integrationsbereiche benutzt.

Zur Berechnung der Werte $I_{IC,N}$ in der Tabelle auf Seite 65 wurden stets die gleichen Werte $l_{1,0}$ und $l_{2,0}$ verwendet, das heißt das Integral wurde stets am gleichen Punkt ϵ_1 ausgewertet. Das soeben abgeleitete Verhalten von $I_{IC,N}$ sowie der Rechenzeit bei veränderten Werten σ , l_1 und l_2 gilt zunächst also nur an diesem speziellen ϵ_1 . Ohne hier explizit die erhaltenen Ergebnisse anzugeben sei jedoch darauf hingewiesen, dass eine analoge Evaluation auch für andere $l_{1,0}$ und $l_{2,0}$ (bei gleichbleibendem b) und somit andere ϵ_1 durchgeführt wurde. Dabei ergab sich ein analoges Verhalten des Wertes von $I_{IC,N}$ sowie der Rechenzeit bei Änderung von σ , l_1 und l_2 .

Überdies wurde eine weitere Evaluation für das Integral $I_{IC,CH}(\epsilon_1, \Omega_e, l_1, l_2)$ (siehe 4.28b) durchgeführt. Wieder ergibt sich ein ähnliches Verhalten von $I_{IC,CH}$ und der Rechenzeit bei Änderung von σ , l_1 und l_2 . Lediglich ein geringfügiger Unterschied zum Fall $I_{IC,N}$ tritt hier auf: Bei gegebenem σ sättigt der Wert von $I_{IC,CH}$ erst bei einem größeren Abstand von l_1 zu l_2 , also bei einem größeren Integrationsbereich. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, dass sich $\gamma_{CH}(d)$ (im Strahlungsteil) langsamer mit d ändert als $\gamma_N(d)$ (vergleiche Abbildung 6.1). Dadurch entspricht im Fall $I_{IC,CH}$ einem Integrationsbereich bestimmter Länge in d ein geringerer Bereich in ϵ_1 , innerhalb dessen Gauß-Verteilungen bei der Integration mitgezählt werden, als im Fall $I_{IC,N}$. Um also im Fall $I_{IC,CH}$ noch alle Gauß-Verteilungen, deren Flanken zum Wert bei ϵ_1 beitragen, mitzuzählen, muss ein größerer Integrationsbereich gewählt werden.

Um die tatsächliche spezifische Intensität $I_{IC}(\epsilon_1, \Omega_e, 0,5R_{LZ}, R_{LZ})$ als reine Funktion in Abhängigkeit von ϵ_1 zu erhalten, müsste also der Integrationsbereich von $l_1 = 0,5R_{LZ}$ bis $l_2 = R_{LZ}$ ausgedehnt sein, das heißt sich über die gesamte Outer Gap erstrecken. Außerdem müsste, um $I_{IC}(\epsilon_1)$ als glatte Kurve zu zeichnen, das Integral 4.28 an jedem möglichen Punkt ϵ_1 ausgewertet werden. In Anbetracht der oben angegebenen Rechenzeiten ist dies nicht annähernd möglich. Deswegen werden folgende beiden Methoden angewandt:

- Dank der Ergebnisse der Vorbetrachtungen der Kapitel 4.3.2 sowie 4.3.3.1 können wir sicher sein, dass es sich bei $I_{IC}(\epsilon_1)$ nicht um eine in einem schmalen Bereich stark veränderliche oder schnell oszillierende Funktion handelt. Deswegen reicht es aus, $I_{IC}(\epsilon_1)$ an endlich vielen, in etwa äquidistant liegenden Punkten ϵ_1 auszuwerten.
- In Anbetracht der Zeilen 3 bis 5 der Tabelle auf Seite 65 erscheint es nicht nötig, den Integrationsbereich bei $\sigma = 10$ größer als von $l_{1,0} - b$ bis $l_{2,0} + b$ zu wählen. Analog dazu erscheint es nach Vergleich der Zeile 6 und 7 nicht nötig, dass bei $\sigma = 100$ der Integrationsbereich weiter ausgedehnt als von $l_{1,0} - 10b$ bis $l_{2,0} + 10b$ ist. Allgemein ausgedrückt bedeutet das: Das Verhältnis von der Länge des Integrationsbereichs um den Auswertepunkt ϵ_1 zur Breite σ muss im Fall $I_{IC,N}$ nicht größer als $\approx 3b/10$ sein.

Im Fall $I_{IC,CH}$ sollte, wie oben bemerkt wurde, die Länge des Integrationsbereichs etwas größer sein. Hier gilt in etwa: Das Verhältnis von der Länge des Integrationsbereichs um den Auswertepunkt ϵ_1 zur Breite σ muss nicht größer als $\approx 5b/10$ sein.

Deswegen wird für jeden Punkt ϵ_1 , an dem $I_{IC}(\epsilon_1)$ ausgewertet wird, nur ein sehr geringer Integrationsbereich von l_1 bis l_2 benutzt, der jedoch, wie soeben gezeigt wurde, völlig ausreichend ist, da Gauß-Verteilungen, die weiter von ϵ_1 entfernt liegen, ohnehin nicht mehr maßgeblich zu $I_{IC}(\epsilon_1)$ beitragen.

Die so erhaltenen Spektren $I_{IC,N}(\epsilon_1)$ und $I_{IC,CH}(\epsilon_1)$ sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Wie erwartet sind die Spektren auf einen schmalen Bereich in ϵ_1 konzentriert. Die Energie ϵ_1 der invers Compton-gestreuten Photonen ist also auf einen engen Bereich begrenzt. Dies liegt natürlich an der Klein-Nishina-Näherung 4.22, der zufolge die Energien der gestreuten Photonen nur bei Energien der streuenden Teilchen liegen. Im Fall $I_{IC,CH}$ ist der nicht verschwindende Teil der spezifischen Intensität mit $\approx 0,75 \cdot 10^7$ noch schmaler als im Fall $I_{IC,N}$ mit $\approx 2,25 \cdot 10^7$, da γ_{CH} (im Strahlungsteil) einen kleineren Wertebereich als γ_N annimmt. $I_{IC,N}$ nimmt von niedrigen zu hohen Energien zunächst stark zu, flacht dann langsam ab und nimmt für hohe Energien ϵ_1 eine leicht negative Steigung an. Der grobe Verlauf von $I_{IC,N}(\epsilon_1)$ ist qualitativ verständlich, wenn man bedenkt, dass der Integrand von 4.28a bis auf Vorfaktoren das Produkt aus dem Integral von Gleichung 4.27 und dem Integranden von Ausdruck 4.30 ist. Dementsprechend gibt das Produkt der Kurve in Abbildung 6.8(a) mit dem Verlauf der Spitzen der Gauß-Verteilungen gemäß Abbildung 6.7(a) den Verlauf von $I_{IC,N}(\epsilon_1)$ wieder. Die Kurve in Abbildung 6.8(a) fällt mit zunehmendem ϵ_1 leicht ab. Die Höhe der Spitzen der Gauß-Verteilungen wird jedoch, wie in Abbildung 6.7(a) zu sehen ist, mit zunehmendem ϵ_1 deutlich größer. Als Resultat nimmt $I_{IC,N}(\epsilon_1)$ (zumindest im Zentralbereich des nicht verschwindenden Bereichs) leicht zu.

$I_{IC,CH}$ fällt über (fast) den gesamten nicht verschwindenden Bereich mit zunehmendem ϵ_1 annähernd gleichmäßig ab. Dies ist wieder verständlich, wenn man das eben Gesagte bedenkt und das Produkt der Kurve in Abbildung 6.8(b) mit dem Verlauf der Höhe der Gauß-Verteilungen in Abbildung 6.7(b) bildet. Die Höhe der Gauß-Verteilungen fällt gemäß dieser Abbildung mit wachsendem ϵ_1 ab und die Kurve in Abbildung 6.8(b) fällt auch langsam ab. Dementsprechend nimmt $I_{IC,CH}(\epsilon_1)$ ebenfalls mit zunehmendem ϵ_1 ab.

4.4 Prüfung des Modells auf Selbstkonsistenz

Bisher existiert in unserem Modell Krümmungsstrahlung sowie invers Compton-gestreuete Strahlung. Erstere wurde direkt von den sich relativistisch bewegenden Teilchen erzeugt und Selbige erleiden durch die Emission der Krümmungsstrahlung einen Energieverlust. Die invers Compton-gestreuete Strahlung wurde durch Wechselwirkung der Krümmungsstrahlungsphotonen mit den Teilchen erzeugt. Letztere geben im Klein-Nishina-Grenzfall ihre gesamte Energie an die Ziel-Photonen ab und erzeugen damit VHE-Photonen. Währenddessen verlieren die Teilchen die abgegebene Energie. Dieser Energieverlust wurde jedoch in der ursprünglichen Berechnung der Kinetik der Teilchen in Kapitel 4.1.1 nicht berücksichtigt. Darin wurde in der Raten-Gleichung für die Energie eines Teilchens lediglich Krümmungsstrahlung als Energieverlust-Mechanismus der Teilchen vorausgesetzt. Dies ist jedoch nur dann zulässig, wenn die Verluste durch Krümmungsstrahlung betragsmäßig größer sind als die Verluste durch inverse Compton-Streuung. Ob dem so ist, soll in diesem Kapitel überprüft werden. Falls die Probe negativ ausfällt, wäre das vorliegende Modell nicht in sich schlüssig, da die Resultate des Modells dann den Annahmen widersprechen. Die Differenzialgleichung zur Bestimmung der Funktionen $\gamma(r)$ müsste dann um den Term, der die Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung beschreibt, erweitert werden. Dadurch würde sich $\gamma(r)$ verändern, genauer gesagt würde $\gamma(r)$ kleiner werden. Dadurch nähme aber auch die Emissivität der Krümmungsstrahlung ab, was wiederum auf die inverse Compton-Streuung rückwirken würde. In der Differenzialgleichung stünde dann neben γ auch die spektrale Anzahl-Dichte der Ziel-Photonen, welche aus γ hervorgeht. Dieses Gleichungssystem wäre nicht mehr einfach zu lösen.

Als Energieverluste kommen jedoch nicht nur Emission von Krümmungsstrahlung und inverse Compton-Streuung durch Krümmungsstrahlungsphotonen als Ziel-Photonen in Frage. Unzweifelhaft sind in der Outer Gap weitere Photonen-Populationen präsent, die als Ziel-Photonen für inverse Compton-Streuung und

für TPP zur Verfügung stehen. Durch Wechselwirkung mit diesen zusätzlichen Photonen-Populationen werden weitere Energieverluste für die Teilchen verursacht, die ebenfalls der Differenzialgleichung zur Bestimmung der Kinetik der Teilchen hinzugefügt werden müssten, sofern sie vergleichbar oder größer als die Verluste durch Krümmungsstrahlung sind.

Im Folgenden werden zunächst zusätzliche Ziel-Photonen-Felder, die eventuell in Bezug auf die Energieverluste relevant sind, dargestellt. Dies geschieht hauptsächlich anhand von Beobachtungen. Daraufhin werden die Leuchtkräfte der infrarot-optischen sowie der UV-Photonen-Population bestimmt. Abschließend werden die Energieverlust-Raten aller Photonen-Populationen berechnet und miteinander verglichen.

4.4.1 Mögliche Ziel-Photonen-Felder

Bereits verwendet wurde als Ziel-Photonen-Population die durch Krümmungsstrahlung hervorgerufene Komponente. Diese wird in ihrem Spektrum auch weiterhin bei der Energie $\epsilon_{\text{ab}} = 10^{-2}$ abgeschnitten, da unterhalb derselben die thermische Strahlung von der Neutronenstern-Oberfläche dominiert. Diese wird im Folgenden als zweite mögliche Ziel-Photonen-Komponente betrachtet.

Weitere Photonen-Populationen treten im Rahmen dieses einfachen Modells nicht auf. Sie sind jedoch zweifellos vorhanden, da erstens die beobachtete gepulste Strahlung nicht nur aus Strahlung oberhalb von 10^{-2} besteht, sondern über das gesamte Spektrum gemessen wird und zweitens weitere Photonen-Populationen durch verbesserte Magnetosphären-Modelle, durch zusätzliche Betrachtung der „Polar Gap“ oder durch Hinzunahme weiterer Strahlungsprozesse auch theoretisch beschrieben werden können.

Photonen-Populationen, die unterhalb der thermischen Komponente existieren, werden hier kurz anhand von gemessenen Spektren dargestellt.

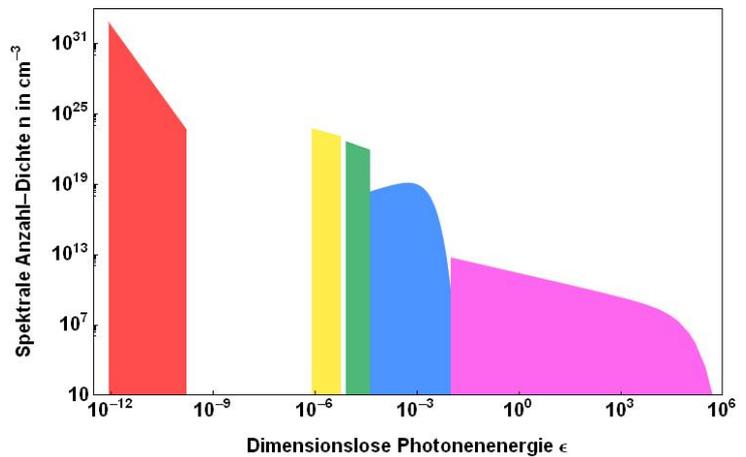


Abb. 4.4: Dargestellt ist in doppelt-logarithmischer Skalierung die spektrale Anzahl-Dichte n der für inverse Compton-Streuung oder TPP möglichen Ziel-Photonen-Populationen gegen die dimensionslose Photonenergie ϵ . Die fünf Ziel-Photonen-Felder bestehen aus Radiophotonen (n_{Radio} , rot), infrarot-optischen Photonen (n_{opt} , gelb), UV-Photonen (n_{UV} , grün), thermischen Röntgen-Photonen (blau) und γ -Photonen der Krümmungsstrahlung (lila). Das thermische Spektrum $n_{\text{Planck}}(\epsilon, T)$ wurde für die Temperatur $T = 2 \times 10^6$ K gezeichnet und für das Krümmungsstrahlungs-Spektrum wurde exemplarisch $n_{\text{ges,int,N,>d}}(\epsilon, d)$ an der Stelle $d = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ ausgewertet.

- Spektren der gepulsten Strahlung des Crab-Pulsars im Radiobereich wurden beispielsweise von Maron et al. [2000] oder Moffett & Hankins [1999] bestimmt. Im Vergleich zu denen anderer Pulsare ist das Crab-Pulsar-Spektrum sehr steil, die Flussdichte S_{Beob} nimmt also mit steigender Frequenz stark ab. Im Bereich $400 \text{ MHz} < f < 10 \text{ GHz}$ verhält sich die Flussdichte gemäß $S_{\text{Beob}} \sim f^{-3,0}$ zur Frequenz, folgt also in einem weiten Bereich einem Potenzgesetz.

Im Folgenden soll für das Spektrum im Radiobereich die Messung der Flussdichte von Moffett & Hankins [1999] verwendet werden. Dort wurde die gemessene Funktion $S_{\text{Beob}}(f) = C \cdot f^{-3,0}$ nicht explizit angegeben, sondern lediglich der Exponent des Potenzgesetzes. Deswegen muss der Koeffizient C durch einen Fit der Funktion $C \cdot f^{-3,0}$ an einige Messwerte bestimmt werden.

S_{Beob} gibt die in Observatorien registrierte spektrale Energie-Flussdichte an. Um das Spektrum der Messung jedoch mit den bisher berechneten Spektren vergleichen zu können, ist es vorteilhaft, wieder die spektrale Anzahl-Dichte an Photonen zu bestimmen, und zwar nicht deren Wert in der Nähe des Observatoriums, sondern den in der Outer Gap. Die Radiophotonen strömen entlang eines schmalen Kegels, der den konstanten Raumwinkel Ω aufspannt, vom Pulsar aus in Richtung des Beobachters, der sich in der Entfernung $R_{\text{Crab}} = 2200 \times 3,1 \times 10^{18} \text{ cm}$ [ATNF Pulsar Catalogue,

2012] befindet und die spektrale Energie-Flussdichte S_{Beob} misst. Es wird also die spektrale Leistung $S_{\text{Beob}} \cdot \Omega R_{\text{Crab}}^2$ in Form von Radiophotonen abgestrahlt. Diese spektrale Leistung bleibt bei der Propagation von ihrem Ursprungsort durch die Magnetosphäre bis hin zum Beobachter annähernd erhalten. Deswegen gilt $S_{\text{Beob}} \cdot \Omega R_{\text{Crab}}^2 = S_{\text{OG}} \cdot \Omega R_{\text{LZ}}^2$, wenn S_{OG} die spektrale Energie-Flussdichte in der Outer Gap ist, die hier als im Abstand R_{LZ} zum Ursprungsort der Strahlung befindlich angenommen wird.

Die spektrale Energie-Flussdichte S_{OG} wird dann ganz analog zu dem Verfahren, das von Gleichung 4.11 zu 4.12 führte, in die spektrale Anzahl-Dichte überführt, sodass sich schließlich

$$n(\epsilon) = \frac{S_{\text{Beob}}(\epsilon)}{\epsilon hc} \cdot \frac{R_{\text{Crab}}^2}{R_{\text{LZ}}^2} \quad (4.38)$$

für die Umrechnung der gemessenen spektralen Energie-Flussdichte in die spektrale Anzahl-Dichte in der Outer Gap ergibt.

Das sich durch das beschriebene Verfahren ergebende Spektrum, genauer gesagt die spektrale Anzahl-Dichte n_{Radio} , im Radiobereich gemäß Moffett & Hankins [1999] ist in Abbildung 4.4 rot dargestellt. Dazu wurde das Spektrum unterhalb von 100 MHz und oberhalb von 20 GHz, also geringfügig außerhalb des Frequenzintervalls, in dem die Messung von Moffett & Hankins [1999] durchgeführt wurde, abgeschnitten, um sicherzustellen, dass das Spektrum außerhalb des von der Messung abgedeckten Bereichs nicht durch eine Funktion beschrieben wird, die hier eventuell gar nicht mehr gilt.

- Bei höheren Energien ist der Verlauf des Spektrums verschieden von dem im Radiobereich. Die spektrale Energie-Flussdichte steigt im infraroten Bereich leicht an und ist im optischen Bereich annähernd konstant, wie Messungen von Sandberg & Sollernan [2009], Carramiñana et al. [2000] oder Eikenberry et al. [1997] zeigen. Von Carramiñana et al. [2000] wird der genaue funktionale Verlauf der im Bereich $437 \text{ nm} < \lambda < 900 \text{ nm}$ gemessenen spektralen Energie-Flussdichte angegeben. Diese kann dann wieder gemäß 4.38 in die spektrale Anzahl-Dichte umgerechnet werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass in Carramiñana et al. [2000] die spektrale Energie-Flussdichte als $S_{\text{Beob}} = d^3E/(dt dA d\lambda)$ definiert ist, wohingegen in 4.38 $S_{\text{Beob}} = d^3E/(dt dA df)$ gilt. Wegen $f = c/\lambda$ gilt aber $\frac{1}{df} = \frac{-\lambda^2}{c d\lambda}$. Der von Carramiñana et al. [2000] angegebene Ausdruck muss also mit λ^2/c multipliziert werden, um ihn für Gleichung 4.38 zulässig zu machen. Das von Carramiñana et al. [2000] gemessene Spektrum ist, ausgedrückt durch die spektrale Anzahl-Dichte n_{opt} , ebenfalls in Abbildung 4.4 gezeichnet (gelb) und wurde bei $1 \times 10^{14} \text{ Hz} \hat{=} 3000 \text{ nm} \hat{=} 0,4 \text{ eV}$ und bei $7 \times 10^{14} \text{ Hz} \hat{=} 428 \text{ nm} \hat{=} 2,9 \text{ eV}$ abgeschnitten, ist also noch etwas in den infraroten Spektralbereich ausgedehnt.
- Im UV-Bereich wird das Spektrum mit $S_{\text{Beob}} \sim f^{-0,035}$ wieder etwas steiler [Sollerman et al., 2000]. Die spektrale Energie-Flussdichte dieser Messung im Bereich $114 \text{ nm} < \lambda < 172 \text{ nm}$ muss wieder bestimmt werden, indem die Funktion $S_{\text{Beob}}(f) = C \cdot f^{0,035}$ an einzelne Messwerte gefittet wird. Hernach wird wieder Gleichung 4.38 angewendet, um die spektrale Anzahl-Dichte n_{UV} zu erhalten, die wieder in Abbildung 4.4 dargestellt ist (grün). Hier wird als Frequenz, unterhalb/oberhalb der das Spektrum abgeschnitten wird, $1 \times 10^{15} \text{ Hz} \hat{=} 300 \text{ nm} \hat{=} 4 \text{ eV}$ beziehungsweise $5 \times 10^{15} \text{ Hz} \hat{=} 60 \text{ nm} \hat{=} 20 \text{ eV}$ benutzt.

Außerdem ist in Abbildung 4.4 noch das thermische Spektrum sichtbar (blau). Dieses wurde unterhalb von $5 \times 10^{15} \text{ Hz} \hat{=} 60 \text{ nm}$ abgeschnitten, da spätestens hier die UV-Komponente überwiegt. Oberhalb des Planck-Spektrums ist noch das Spektrum der Krümmungsstrahlung zu sehen (lila). Insgesamt liegen also fünf Photonen-Populationen vor, die im Folgenden alle als mögliche Ziel-Photonen betrachtet werden:

- Radiophotonen, beschrieben durch n_{Radio} , basierend auf der Messung von Moffett & Hankins [1999].
- Infrarot-optische Photonen, beschrieben durch n_{opt} , basierend auf der Messung von Carramiñana et al. [2000].

- UV-Photonen, beschrieben durch n_{UV} , basierend auf der Messung von Sollerman et al. [2000].
- Thermische Photonen, im Wesentlichen Röntgen-Photonen, beschrieben durch n_{Planck} mit $T = 2 \times 10^6$ K gemäß 4.15 multipliziert mit dem Faktor $\cdot 100^{-2}$.
- Krümmungsstrahlungsphotonen, im Wesentlichen γ -Photonen, beschrieben durch $n_{ges,int}$ gemäß 4.17.

4.4.2 Leuchtkräfte

Für spätere Zwecke sollen nun die Leuchtkräfte der soeben genannten Photonen-Felder bestimmt werden. Wir beschränken uns hierbei auf die Leuchtkraft der infrarot-optischen und der UV-Photonen-Population. Basierend auf den Messungen der spektralen Energie-Flussdichte $S_{Beob}(f)$ wird über $S_{OG}(f) = S_{Beob}(f) \cdot R_{Crab}^2 / R_{LZ}^2$ die spektrale Energie-Flussdichte am Licht-Zylinder des Crab-Pulsars berechnet. Durch Integration der Größe $S_{OG}(f)$ über die Frequenz f erhält man die Energie-Flussdichte der jeweiligen Photonen-Population. Die oben angegebenen Abschneide-Frequenzen gewährleisten, dass wirklich nur über Frequenzen im jeweiligen Spektralbereich integriert wird. Die spektrale Energie-Flussdichte der infrarot-optischen Photonen-Population wird also von 1×10^{14} Hz bis 7×10^{14} Hz integriert, die der UV-Photonen-Population wird von 1×10^{15} Hz bis 5×10^{15} Hz integriert.

Nun muss noch die Fläche gefunden werden, durch die diese Energie-Flussdichte am Licht-Zylinder aus der Outer Gap nach außen strömt. Die gesuchte Fläche ist die Schnittfläche von Outer Gap und Licht-Zylinder, denn in unserem Modell werden die Photonen in der Outer Gap erzeugt und strömen durch diese über den Licht-Zylinder aus der Outer Gap hinaus in die äußere Pulsar-Magnetosphäre. Außerhalb der Outer Gap werden in unserem Modell keine Photonen erzeugt. Um nun diese Schnittfläche zu erhalten, erinnern wir uns an Gleichung 2.31, die den Abstand $a(r)$ der beiden Feldlinien angibt, die die Outer Gap begrenzen. $a(r)$ ist also die Ausdehnung der Outer Gap in meridionaler Richtung. $a(R_{LZ})$ beschreibt dann die Höhe der Outer Gap am Licht-Zylinder. Für die azimutale Ausdehnung der Outer Gap wird hier schlicht $\Delta\lambda \cdot R_{LZ}$ verwendet, also die Länge eines Kreisbogens, dessen Radius der des Licht-Zylinders ist. Da die Outer Gap im Fall des Crab-Pulsars nicht gleichmäßig und vollständig um die Rotations-Achse des Pulsars ausgeprägt ist, beträgt $\Delta\lambda \approx 4$ [Hirotani, 2008a] und nicht 2π , wie dies im Fall $\alpha = 0^\circ$ wäre. Die Schnittfläche, durch die die Photonen das emittierende Volumen (die Outer Gap) verlassen, ist nun das Produkt $a(R_{LZ}) \cdot 4R_{LZ}$ aus azimutaler und meridionaler Ausdehnung.

Multipliziert man diese Fläche mit der oben berechneten infrarot-optischen / UV-Energie-Flussdichte und verdoppelt das Ergebnis, um beide Outer Gaps in den beiden Hemisphären zu berücksichtigen, so erhält man die Energie, die in Form von infrarot-optischen / UV-Photonen pro Zeiteinheit die Outer Gap verlässt, die Leuchtkraft. Diese ist also

$$L = 2 \cdot a(R_{LZ}) \cdot 4R_{LZ} \cdot \frac{R_{Crab}^2}{R_{LZ}^2} \cdot \int S_{Beob}(f) df. \quad (4.39)$$

Für die spektrale Energie-Flussdichte S_{Beob} im UV-Bereich gemäß Sollerman et al. [2000] ergibt sich $L_{UV} \approx 2 \times 10^{34}$ erg s $^{-1}$. Für die spektrale Energie-Flussdichte S_{Beob} im infrarot-optischen Bereich gemäß Carramiñana et al. [2000] ergibt sich $L_{opt} \approx 6 \times 10^{33}$ erg s $^{-1}$.

4.4.3 Vergleich von Energieverlust-Raten

Nun können die verschiedenen Energieverlust-Raten miteinander verglichen werden. Dazu betrachten wir den Fall eines nach außen durch die Outer Gap laufenden Teilchenstrahls, der mit den oben aufgelisteten Photonen-Feldern wechselwirkt. Als Wechselwirkungsmechanismen wird inverse Compton-Streuung und TPP betrachtet. Es wird von folgenden Gleichungen Gebrauch gemacht, die jeweils eine Energieänderung pro Zeit beschreiben. Positive Vorzeichen bedeuten für das Teilchen einen Energiegewinn, negative Vorzeichen signalisieren einen Energieverlust. Die Energieänderungs-Rate ist jeweils in der Einheit erg s $^{-1}$ ausgedrückt.

In unserem Modell gewinnen die Teilchen Energie durch die Beschleunigung im induzierten elektrischen Feld in der Outer Gap. Die Energieänderungs-Rate ist durch Gleichung 4.2 gegeben, wobei im vorliegenden Fall wieder $|v| \approx c$ gesetzt werden darf. Im Fall γ_N wird für den Verlauf des elektrischen Feldes der Ausdruck 2.35 verwendet, im Fall γ_{CH} hingegen die Beziehung 2.34. Es werden also folgende beiden Energiegewinn-Raten betrachtet:

$$\frac{dE}{dt}(r) = ec \cdot \eta \frac{B_0 R^3}{2r^3} \quad (4.40a)$$

im Fall γ_N , wobei wie bisher $\eta = 0,01$ benutzt wird, und

$$\frac{dE}{dt}(r) = ec \cdot \frac{\Omega B_0 R^3 h_{OG}^2}{3c \sqrt{R_{LZ}} \cdot r \sqrt{1 + 3 \cos^2(\arcsin(\sqrt{r/R_{LZ}}))} R_{LZ}} \quad (4.40b)$$

mit $h_{OG} = 0,2$ im Fall γ_{CH} . Als Energieverlust-Mechanismus wurde zur Bestimmung der Kinetik der geladenen Teilchen bereits die Emission von Krümmungsstrahlung herangezogen. Deren Energieverlust-Rate ist durch Gleichung 2.41 gegeben. Für den Krümmungsradius wird im Fall γ_N wieder die Näherung $r_K \approx R_{LZ}$ benutzt, während im Fall γ_{CH} der etwas genauere Ausdruck 2.24b mit $R_{\text{äq}} = R_{LZ}$ eingesetzt wird. Die Energieverlust-Rate durch Krümmungsstrahlung wird also im Fall γ_N durch

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -\frac{2e^2 c}{3} \cdot \frac{\gamma^4}{R_{LZ}^2} \quad (4.42a)$$

beziehungsweise im Fall γ_{CH} durch

$$\frac{dE}{dt}(\gamma, r) = -\frac{2e^2 c}{3} \cdot \frac{\gamma^4}{r \cdot R_{LZ}} \quad (4.42b)$$

beschrieben. Betrachtet man nun die inverse Compton-Streuung des Teilchenstrahls mit den verschiedenen Photonen-Populationen, so muss man unterscheiden, ob die Wechselwirkung im Thomson- oder im Klein-Nishina-Grenzfall stattfindet. Gemäß Kapitel 2.3.2 ist der Thomson-Grenzfall realisiert, wenn $\gamma\epsilon \ll 1$ erfüllt ist. Im Gegensatz dazu impliziert $\gamma\epsilon \gg 1$ die Gültigkeit des Klein-Nishina-Grenzfalls. Welcher Fall vorliegt, hängt von der Energie der Ziel-Photonen ab, denn die streuenden Teilchen haben für größenordnungsmäßige Abschätzungen ein konstantes $\gamma \approx 10^7$. Betrachten wir zunächst die Radiophotonen. Deren spektrale Anzahl-Dichte ist nur für Frequenzen kleiner als 20 GHz beziehungsweise für dimensionslose Energien kleiner als $\epsilon = 1,6 \times 10^{-10}$ von Null verschieden. Für sämtliche Energien ϵ der Radiophotonen gilt also wegen $\epsilon\gamma < 1,6 \times 10^{-10} \cdot 10^7 \ll 1$ der Thomson-Grenzfall. Die Energieverlust-Rate ist dann durch Gleichung 2.63 gegeben und lautet explizit

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -\frac{4}{3} c \sigma_T m c^2 \gamma^2 \int_0^\infty \epsilon n_{\text{Radio}}(\epsilon) d\epsilon. \quad (4.44)$$

Die nächsthöher gelegene Photonen-Population ist die der infrarot-optischen Photonen, die sich oberhalb von der Frequenz 10^{14} Hz beziehungsweise oberhalb von der dimensionslosen Energie $\epsilon = 8,1 \times 10^{-7} \approx 10^{-6}$ erstreckt. Für die infrarot-optischen Photonen und damit auch für alle energetisch höher gelegenen Photonen gilt somit $\epsilon\gamma > 10^{-6} \cdot 10^7 \gg 1$. Für die infrarot-optischen Photonen ist die Relation \gg nur knapp erfüllt, für die UV-, die thermischen sowie die Krümmungsstrahlungsphotonen ist sie gut erfüllt. Diese vier Populationen werden also im Klein-Nishina-Grenzfall Compton-gestreut, für den die Energieverlust-Rate durch Gleichung 2.66 gegeben ist und hier nochmals notiert sei:

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -\pi r_e^2 m c^3 \int_0^\infty \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \left(\ln(4\epsilon\gamma) - \frac{11}{6} \right) d\epsilon. \quad (4.45)$$

Anstelle von $n(\epsilon)$ werden die fünf Anzahl-Dichten $n_{\text{opt}}(\epsilon)$, $n_{\text{UV}}(\epsilon)$, $n_{\text{Planck}}(\epsilon)$ und $n_{\text{ges, int, N, > r}}(\epsilon, r)$ beziehungsweise $n_{\text{ges, int, CH, > r}}(\epsilon, r)$ eingesetzt. Im Fall der beiden letzten Ausdrücke ist $\frac{dE}{dt}$ dann noch r -abhängig. Zu guter Letzt wird noch die Energieverlust-Rate durch TPP betrachtet. Dazu werden die

drei Ausdrücke 2.98, 2.83 und 2.85 herangezogen, die auf die Arbeiten von Dermer & Schlickeiser [1991], Mastichiadis [1991] und Anguelov et al. [1999] zurückgehen. Es werden also die Ausdrücke

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -\frac{4mc^3\alpha\sigma_T\sqrt{\gamma}}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} n(\epsilon) d\epsilon, \quad (4.46)$$

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -5\alpha r_e^2 mc^3 \int_0^\infty n(\epsilon) \frac{(\epsilon\gamma)^{1/4}}{\epsilon} \left(\frac{28}{9} \ln(2\gamma\epsilon) - \frac{218}{27} \right) d\epsilon \quad (4.47)$$

und

$$\frac{dE}{dt}(\gamma) = -0,386\pi\alpha r_e^2 mc^3 \int_0^\infty n(\epsilon) \frac{(\ln(2\epsilon\gamma))^2}{\epsilon} \left(\ln(2\gamma\epsilon) - \frac{218}{84} \right) d\epsilon \quad (4.48)$$

jeweils für die fünf Anzahl-Dichten $n_{\text{opt}}(\epsilon)$, $n_{\text{UV}}(\epsilon)$, $n_{\text{Planck}}(\epsilon)$ und $n_{\text{ges,int,N,>r}}(\epsilon, r)$ beziehungsweise $n_{\text{ges,int,CH,>r}}(\epsilon, r)$ ausgewertet, wobei im Fall der letzten beiden Anzahl-Dichten dann auch $\frac{dE}{dt}$ wieder r -abhängig ist. Die Population der Radiophotonen wird hier nicht betrachtet, da deren Photonen wegen $\epsilon\gamma < 1,6 \times 10^{-10} \cdot 10^7 \not\geq 4$ nicht per TPP mit den Teilchen wechselwirken (vergleiche Ungleichung 2.80). Streng genommen dürfen die Gleichungen 4.46 bis 4.48 auch nicht auf die Population aus Krümmungsstrahlungsphotonen angewendet werden, denn bei der Herleitung aller drei Gleichungen wurde $\epsilon \ll 1$ vorausgesetzt. Dies ist jedoch bei der hiesigen Population aus Krümmungsstrahlungsphotonen nicht vollständig erfüllt (vergleiche Abbildung 4.4).

Es sei darauf hingewiesen, dass die Gleichungen für die Energieverlust-Rate von inverser Compton-Streuung und von TPP unter der Annahme einer isotropen Richtungs-Verteilung der Ziel-Photonen hergeleitet wurden. In unserem Fall sind jedoch die Populationen der Ziel-Photonen stark anisotrop. Die erhaltenen Ergebnisse sind also lediglich in ihrer Größenordnung aussagekräftig.

Bei der Auswertung der Integrale der Gleichungen 4.45 bis 4.48 für die Anzahl-Dichten $n_{\text{ges,int,N,>r}}$ und $n_{\text{ges,int,CH,>r}}$ stellt sich wieder das Problem, dass die Berechnung des Integrals bis zur oberen Integrationsgrenze ∞ zu zeitintensiv ist. Da die Integranden jedoch alle wieder mit steigendem ϵ abfallen, bleibt der Fehler akzeptabel, wenn man nur bis zu einer endlichen oberen Integrationsgrenze ϵ_o integriert. Es wird im Folgenden $\epsilon_o = 1000 \times 10^{-2}$ gewählt, wobei 10^{-2} der Wert ϵ_{ab} ist, unterhalb dessen $n_{\text{ges,int,N,>r}}$ und $n_{\text{ges,int,CH,>r}}$ verschwinden.

In den Abbildungen 6.11 und 6.12 wurden die verschiedenen Energieänderungs-Mechanismen 4.40a bis 4.48 miteinander verglichen. Es wurde stets der Betrag von $\frac{dE}{dt}$ gegen die Energie γ der Teilchen aufgetragen. Sämtliche r -abhängigen Energieänderungsraten wurden an der Stelle $r = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ ausgewertet. In unserem Modell weisen die vier Funktionen $\gamma(r)$ aus Kapitel 4.1 jedem r nur genau ein γ zu. Es ist also streng genommen nicht zulässig, die Energieverlust-Raten an einem bestimmten r für verschiedene γ auszuwerten. Dennoch ist es sinnvoll, die Abhängigkeit $\frac{dE}{dt}(\gamma)$ für einen ausgedehnten Bereich in γ an einem bestimmten Ort zu betrachten. Dabei wird also angenommen, dass noch zusätzliche Teilchen in der Outer Gap vorliegen, deren γ nicht den Funktionen $\gamma(r)$ aus Kapitel 4.1 gehorcht.

Abbildung 6.11 bezieht sich auf den Fall γ_{N} , Abbildung 6.12 auf den Fall γ_{CH} .

In jeder einzelnen Teilabbildung ist der Energiegewinn durch die Beschleunigung im elektrischen Feld aufgetragen (schwarze Linie). Selbstverständlich ist dieser nicht von der Energie der Teilchen abhängig. Ein Vergleich zwischen Abbildung 6.11 und 6.12 ergibt keinen erkennbaren Unterschied in der Größe des Energiegewinns. Dies ist verständlich, da die beschleunigenden elektrischen Felder $E_{\parallel,\text{N}}$ und $E_{\parallel,\text{CH}}$ an der Stelle $r = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ in etwa gleich groß sind (siehe Abbildung 2.6). Würde man r variieren, so würde im Fall γ_{CH} die Energiegewinn-Rate annähernd gleich bleiben. Im Fall γ_{N} würde die Energiegewinn-Rate bei größer/kleiner werdendem r abnehmen/zunehmen.

Der Energieverlust durch Abgabe von Krümmungsstrahlung ist ebenfalls in jeder einzelnen Teilabbildung eingezeichnet (türkisfarbene Linie). Die Abhängigkeit $\sim \gamma^4$ verursacht die große Steigung. Vergleicht man wieder Abbildung 6.11 und 6.12, so fällt auf, dass in letzterer Abbildung die Energieverlust-Rate (betragsmäßig) ein wenig größer ist als in Abbildung 6.11. Dies ist verständlich, wenn man Gleichung 4.42a mit Gleichung 4.42b an der Stelle $r = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}} < R_{\text{LZ}}$ vergleicht. Die Tatsache, dass die Verluste durch Krümmungsstrahlung im Fall γ_{CH} etwas größer sind als im Fall γ_{N} , führt dazu, dass der Wert γ , an dem die Krümmungsstrahlungs-Verluste gleich dem Energiegewinn durch Beschleunigung sind, im

Fall γ_{CH} niedriger liegt. Anschaulich bedeutet dies, dass der Schnittpunkt der türkisfarbenen mit der schwarzen Linie im Fall γ_{CH} bei niedrigerem γ liegt. Das γ an diesem Schnittpunkt ist aber gerade der Wert der Funktion $\gamma_{\text{aus}}(\frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}})$. Insofern ist es schlüssig, dass in der Mitte der Outer Gap $\gamma_{\text{CH,aus}}$ kleiner ist als $\gamma_{\text{N,aus}}$ (vergleiche Abbildung 6.1).

Betrachten wir nun die Energieverlust-Raten durch inverse Compton-Streuung, die in den Abbildungen 6.11(a) und 6.12(a) dargestellt sind. Hier besteht praktisch kein Unterschied zwischen dem Fall γ_{N} (Abbildung 6.11(a)) und dem Fall γ_{CH} (Abbildung 6.12(a)). Für die Energieverlust-Rate der Radio-, der infrarot-optischen, der UV- und der thermischen Photonen wurde ja ohnehin jeweils die gleiche Anzahl-Dichte und der gleiche Ausdruck für $\frac{dE}{dt}$ verwendet. Zur Berechnung der Energieverlust-Rate durch Krümmungsstrahlungsphotonen wurde $n_{\text{ges,int,N,>r}}(\epsilon, \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}})$ beziehungsweise $n_{\text{ges,int,CH,>r}}(\epsilon, \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}})$ verwendet. Dennoch ergibt sich kein merklicher Unterschied.

Die Energieverlust-Rate der Teilchen, die durch inverse Compton-Streuung mit Krümmungsstrahlungsphotonen verursacht wird (pink), ist offensichtlich um viele Größenordnungen kleiner als die, die durch Emission von Krümmungsstrahlung verursacht wird (türkis). Ähnliches gilt für den Energieverlust durch Streuung der thermischen Photonen (blau). Hingegen kann für niedrige Teilchenenergien γ die inverse Compton-Streuung von infrarot-optischen (gelb), von UV- (grün) sowie von Radiophotonen (rot) mit der Abgabe von Krümmungsstrahlung konkurrieren. Für Teilchenenergien γ kleiner als rund $1,5 \times 10^7$ ist der Verlust durch Streuung infrarot-optischer Photonen sogar der größte Energieverlust-Mechanismus. Für Energien γ in der Größenordnung 10^6 verursacht die Streuung von UV- und Radiophotonen ebenfalls größere Energieverluste als die Emission von Krümmungsstrahlung dies tut. Werte von $\gamma \approx 10^7$ oder darunter treten jedoch in diesem Modell ohnehin kaum in der Outer Gap auf. Gäbe es Teilchen mit $\gamma \approx 10^7$ oder darunter, so würde deren γ sofort stark ansteigen, denn im Bereich $\gamma \approx 10^7$ und unterhalb davon ist die Energiezunahme wesentlich größer als alle anderen Energieverluste.

Wegen der Abhängigkeit $\frac{dE}{dt} \sim \gamma^2$ im Thomson-Grenzfall und der schwächeren Abhängigkeit $\frac{dE}{dt} \sim \ln(\gamma)$ im Klein-Nishina-Grenzfall ist für genügend große γ immer die Streuung der Radiophotonen (abgesehen von der Emission von Krümmungsstrahlung) der dominierende Energieverlust-Mechanismus.

Die Energieverlust-Raten durch TPP sind in den Abbildungen 6.11(b), 6.11(c) und 6.11(d) für den Fall γ_{N} und in den Abbildungen 6.12(b), 6.12(c) und 6.12(d) für den Fall γ_{CH} dargestellt. Erneut ist kein wesentlicher Unterschied zwischen γ_{N} und γ_{CH} vorhanden.

Ein Vergleich der jeweiligen Abbildungen (b), (c) und (d) miteinander liefert ebenfalls keine qualitativen Unterschiede, sondern lediglich geringfügige quantitative Unterschiede. Die TPP-Energieverlust-Rate der UV-Photonen sowie die der thermischen Photonen ist in allen drei Fällen nahezu identisch. Die Ausdrücke 4.46 bis 4.48 von Dermer & Schlickeiser [1991], Mastichiadis [1991] und Anguelov et al. [1999] stimmen also im größenordnungsmäßigen Bereich $\gamma \approx 10^7$ für mittelergetische ($\epsilon \approx 10^{-5} - 10^{-2}$) Photonen gut überein. Bei den Krümmungsstrahlungsphotonen sowie bei den infrarot-optischen Photonen liefert für große γ der Ausdruck 4.46 jeweils etwas größere Werte für die Energieverlust-Rate als der Ausdruck 4.47 und dieser liefert wieder etwas größere Werte als der Ausdruck 4.48. Für nieder- sowie hochenergetische Photonen ergeben sich also für große γ geringfügige Diskrepanzen zwischen den Ausdrücken von Dermer & Schlickeiser [1991], Mastichiadis [1991] und Anguelov et al. [1999]. Bei den infrarot-optischen Photonen ist bei niedrigen γ in den Ausdrücken 4.47 und 4.48 deutlich der logarithmische Abfall mit abnehmendem γ zu erkennen. Die TPP-Energieverlust-Rate der infrarot-optischen Photonen nimmt im Bereich um $\gamma = 4 \times 10^6$ stark ab, da sich hier die Größe $\epsilon\gamma$ bereits dem Schwellenwert 4 annähert, unterhalb dessen TPP gar nicht mehr stattfindet und somit auch keine Energieverluste durch TPP auftreten können. Der Ausdruck 4.46 von Dermer & Schlickeiser [1991] überschätzt hier offensichtlich die Energieverlust-Rate. Dies stimmt mit den Befunden von Dermer & Schlickeiser [1991] und Anguelov et al. [1999] überein.

Wie auch im Fall der inversen Compton-Streuung sind TPP-Energieverluste mit Krümmungsstrahlungs- und thermischen Photonen als Ziel-Photonen im Bereich sinnvoller Werte von γ völlig vernachlässigbar gegenüber anderen Energieverlust-Mechanismen. Die Verluste durch TPP an den infrarot-optischen Photonen können sich für Werte von $\gamma \approx 4 \times 10^6$ den Verlusten durch Abgabe von Krümmungsstrahlung annähern. Verluste durch TPP an den UV-Photonen können sie für niedrige γ sogar übersteigen. Jedoch gilt auch hier wieder das Argument, dass der übermächtige Energiegewinn durch Beschleunigung schnell zu größerem γ führt, was dann auch die Verluste durch Krümmungsstrahlung stark anwachsen lässt.

Vergleicht man für die einzelnen Photonen-Populationen die TPP-Verluste mit jenen durch inverse Compton-Streuung, so wird offenbar, dass für die energetisch am höchsten gelegene Population, nämlich die der Krümmungsstrahlungsphotonen, beide Wechselwirkungs-Prozesse vergleichbare Energieverlust-Raten liefern. Je niedriger die Energie der einzelnen Photonen-Populationen wird, desto dominanter werden Verluste durch inverse Compton-Streuung gegenüber TPP-Verlusten. Bezüglich der infrarot-optischen Photonen-Population ist die Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung bereits um mehr als einen Faktor 10 größer als die TPP-Energieverlust-Rate. Da letztere stärker mit γ ansteigt als die Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung, werden TPP-Verluste für genügend große γ gegenüber Verlusten durch inverse Compton-Streuung überwiegen. Jedoch ist dann die Energieverlust-Rate durch Emission von Krümmungsstrahlung noch dominierender.

Zusammenfassend lässt sich also für das verwendete Modell der Magnetosphäre des Crab-Pulsars Folgendes sagen: In einer Umgebung, in der keine Verluste durch Emission von Krümmungsstrahlung auftreten, können TPP-Verluste mit solchen durch inverse Compton-Streuung konkurrieren, insbesondere für hochenergetische Photonen-Felder. Für (in Anbetracht der Verhältnisse in der Pulsar-Magnetosphäre zu) kleine γ ist die Energieverlust-Rate durch im Klein-Nishina-Grenzfall invers Compton-gestreuete mitteleenergetische Photonen-Populationen größer als jene durch die Emission von Krümmungsstrahlung. Im Bereich von Werten für γ , die tatsächlich angenommen werden, das heißt für γ im Bereich von einigen 10^7 , sind jedoch sämtliche Energieverlust-Raten durch TPP und durch inverse Compton-Streuung vernachlässigbar gegenüber der Energieverlust-Rate durch die Abgabe von Krümmungsstrahlung. Insofern sind die Annahmen, die zur Aufstellung der Differenzialgleichung in Kapitel 4.1 und somit zur Kinetik der geladenen Teilchen geführt haben, gerechtfertigt. Die Ergebnisse des Modells widersprechen den Modellannahmen also nicht. Das Modell ist somit in sich schlüssig. Seine Resultate und deren Bedeutung sollen im Folgenden rekapituliert werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse, Ausblick

5.1 Zusammenfassung

Im Rahmen eines in sich abgeschlossenen Modells der Pulsar-Magnetosphäre wurde die elektromagnetische VHE-Strahlung des Crab-Pulsars simuliert. Dies wurde parallel anhand zweier verschiedener Fälle (Index γ_N und γ_{CH}) getan, die sich in den angenommenen Gleichungen für die elektrische Feldstärke und für den Krümmungsradius der magnetischen Feldlinien unterscheiden.

Zunächst wurde die Kinetik der geladenen Teilchen bei ihrer Propagation durch die Outer Gap betrachtet. Dazu wurde angenommen, dass Positronen an der inneren Gap-Grenze injiziert werden und sich nach außen bewegen, während Elektronen am äußeren Gap-Rand injiziert werden und in Richtung Neutronenstern beschleunigt werden. Die äußere Gap-Grenze wurde als am Licht-Zylinder gelegen angenommen und die innere Gap-Grenze wurde als auf halber Strecke zwischen Neutronenstern-Oberfläche und Licht-Zylinder gelegen angenommen. In allen Fällen werden die geladenen Teilchen auf einer kurzen Strecke (dem Beschleunigungsteil), die zwischen circa 2 % und 10 % der Ausdehnung der Outer Gap beträgt, beschleunigt und erreichen relativistische Geschwindigkeiten mit Lorentz-Faktoren in der Größenordnung 10^7 . Ein weiterer Anstieg des Lorentz-Faktors wird dadurch begrenzt, dass die Teilchen während ihrer Bewegung entlang den gekrümmten magnetischen Feldlinien Krümmungsstrahlung emittieren und somit Energie verlieren. Über weite Teile (den Strahlungsteil) der Outer Gap halten sich Energiegewinn und -verlust ungefähr die Waage, sodass sich die Energie γ nur langsam mit r ändert. Energieverluste durch inverse Compton-Streuung oder durch Triplet Paar-Erzeugung (TPP) spielen für die Parameter und Verhältnisse der Magnetosphäre des Crab-Pulsars keine Rolle. Dies wurde verifiziert, indem für verschiedene Photonen-Populationen, die in der Outer Gap auftreten, die jeweiligen Energieverlust-Raten berechnet wurden und mit jener, die durch die Abgabe von Krümmungsstrahlung resultiert, verglichen wurden. Lediglich für Lorentz-Faktoren um 10^7 oder darunter muss inverse Compton-Streuung für die Bestimmung der Energieverluste der Teilchen betrachtet werden. Dieses Ergebnis, dass die Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung in der Crab-Pulsar-Magnetosphäre vernachlässigbar ist, ist bemerkenswert, da es in einem scheinbaren Widerspruch zu Berechnungen anderer Autoren wie zum Beispiel Lyutikov et al. [2012] steht. Darauf wird in Kapitel 5.3 näher eingegangen. TPP muss bei der Behandlung von Energieverlust-Raten erst dann Beachtung geschenkt werden, wenn der Lorentz-Faktor nicht größer als einige 10^6 ist. Dies bedeutet jedoch keinesfalls, dass TPP oder gar inverse Compton-Streuung grundsätzlich in der Crab-Pulsar-Magnetosphäre vernachlässigbar ist. Inverse Compton-Streuung kann, wie auch gezeigt wurde, vorhandenen Photonen-Populationen noch zusätzlich Energie zuführen und somit eine weitere höherenergetische Photonen-Population erzeugen. TPP kann effektiv die Anzahl vorhandener Teilchen erhöhen und Energie zwischen den Teilchen umverteilen. Dies wurde im vorliegenden Modell nicht miteinbezogen. Die Anzahl-Dichte der Teilchen wurde als konstant angenommen und allen Teilchen am Ort r wurde strikt die Energie $\gamma(r)$ zugeordnet.

Im Fall γ_N erreichen die Teilchen insgesamt leicht höhere Energien als im Fall γ_{CH} . Die Funktion $\gamma_N(r)$ fällt (im Strahlungsteil) von der inneren zur äußeren Gap-Grenze um rund 40 % ab. Die Funktion $\gamma_{CH}(r)$

steigt (im Strahlungsteil) hingegen von der inneren zur äußeren Gap-Grenze an, jedoch nur um circa 20 %.

Während ihrer Bewegung durch die Outer Gap strömen die geladenen Teilchen entlang den magnetischen Feldlinien. Diese sind gemäß der Dipol-Geometrie, die hier über die gesamte Outer Gap angenommen wurde, gekrümmt. Somit unterliegen die geladenen Teilchen einer beschleunigten Bewegung und strahlen dementsprechend Krümmungsstrahlung ab. Deren vom Ort r abhängige Emissivität für einzelne Teilchen wurde unter Verwendung der Funktionen $\gamma_N(r)$ und $\gamma_{CH}(r)$ berechnet. Da in diesem Modell gilt, dass sämtliche Krümmungsstrahlungsphotonen eines Strahls sich in die gleiche Richtung bewegen und überlagern, kann die spezifische Intensität an einer beliebigen Stelle d berechnet werden, indem die Emissivität über den Ort r bis d integriert wird. Dies wurde numerisch mit Hilfe des Programms Mathematica durchgeführt. Es bestehen jeweils (nahezu) keine Unterschiede zwischen dem sich einwärts und dem sich auswärts bewegenden Photonenstrahl. Das über die gesamte Outer Gap integrierte Spektrum der Krümmungsstrahlung ist im Fall γ_N leicht zu höheren Frequenzen als im Fall γ_{CH} verschoben. Das Maximum der spezifischen Intensität liegt jedoch in beiden Fällen bei $\approx 1 \times 10^{24}$ Hz, was einer dimensionslosen Photonenenergie von $\epsilon \approx 8 \times 10^3$ und einer Energie von $E \approx 4$ GeV entspricht, was näherungsweise mit der Energie E_{abk} im gemessenen Crab-Spektrum übereinstimmt, bei der der Übergang von Potenzgesetz zu exponentiell abfallendem Verlauf sitzt (siehe Abbildung 1.4).

Dieses Krümmungsstrahlungs-Spektrum wurde bei $\epsilon = 10^{-2}$ abgeschnitten, da unterhalb dieser Energie die thermische Strahlung der Oberfläche des Neutronensterns, dessen Temperatur mit 2×10^6 K angenommen wurde, überwiegt.

Daraufhin wurde die Wechselwirkung der Teilchen mit den gegenläufigen Photonenstrahlen betrachtet. Die Teilchen des nach außen laufenden Positronenstrahls vollziehen inverse Compton-Streuung an den Krümmungsstrahlungsphotonen des einwärts laufenden Strahls. Diese inverse Compton-Streuung findet ausschließlich im Klein-Nishina-Grenzfall statt. Deswegen kann davon ausgegangen werden, dass die gestreuten Photonen die vollständige Energie der streuenden Teilchen erhalten. Außerdem sind die gestreuten Photonen aufgrund der großen Lorentz-Faktoren der Teilchen wieder in Form eines schmalen Strahls gebündelt und propagieren vom Neutronenstern radial weg. Im Fall γ_N ergibt sich eine Photonenpopulation, die sich über $\epsilon \approx 3,50 \times 10^7 - 5,75 \times 10^7$ erstreckt. Im Fall γ_{CH} liegen die Energien der Photonen hingegen durchschnittlich niedriger und sind auf den schmäleren Bereich $\epsilon \approx 3,75 \times 10^7 - 4,50 \times 10^7$ beschränkt. Die spezifische Intensität sinkt hier von $800 \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1}$ am niederenergetischen Ende fast gleichmäßig auf Null ab. Die spezifische Intensität im Fall γ_N steigt von niedrigen zu hohen Energien zunächst stark an und bleibt dann annähernd konstant bei maximalen Werten von nur $150 \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1}$. Die höchsten erreichbaren Photonenenergien liegen also im stark genäherten Fall γ_N bei $\epsilon \approx 5,75 \times 10^7$, im realistischeren Fall γ_{CH} bei nur $\epsilon \approx 4,50 \times 10^7 \hat{=} E \approx 2,30 \times 10^4$ GeV. Dies liegt noch deutlich über den bisher gemessenen höchsten Energien von $E \approx 3,5 \times 10^2$ GeV [Aleksić et al., 2012] (vergleiche Abbildung 1.4). Um diese Diskrepanz zu deuten, soll nun ein Vergleich des gesamten in dieser Arbeit berechneten Spektrums mit dem beobachteten Spektrum angestrebt werden. Bereits hier kann jedoch gesagt werden, dass die beiden in dieser Arbeit betrachteten Fälle γ_N und γ_{CH} ähnliche Ergebnisse hervorbringen. Insofern ist der Ausdruck 2.35 in Verwendung mit $r_K \approx R_{LZ}$ eine gute Näherung für 2.33 in Verwendung mit 2.24b und $R_{\text{äq}} = R_{LZ}$. Lediglich im Spektrum der invers Compton-gestreuten Photonen ergeben sich geringfügige Unterschiede.

5.2 Vergleich mit Beobachtungen

Die berechneten VHE-Spektren, das heißt das Krümmungsstrahlungs- und das invers Compton-gestreuete Spektrum, sollen nun noch mit den Beobachtungen, speziell mit den Fermi-LAT- und MAGIC-Daten, verglichen werden. Dazu ist noch eine Umrechnung der bisher verwendeten Größen notwendig, denn von Beobachterseite aus wird üblicherweise die Größe $E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}$ angegeben. N war bisher eine Anzahl-Dichte von Teilchen. Hier steht N aber für die Anzahl an registrierten Photonen. Dementsprechend ist $\frac{d^3 N}{dt dA dE}$ die Anzahl an Photonen mit Energien im Intervall $[E; E + dE]$, die pro infinitesimalem Energieelement, Zeitelement und Flächenelement gemessen werden.

Behandeln wir zunächst den Fall der Krümmungsstrahlung. Wir gehen von Ausdruck 4.11 aus, der die

vom gesamten Teilchenstrahl erzeugte spezifische Intensität am Ort d in der Outer Gap angibt. Um nun die Größe $E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}$ zu erhalten sind folgende Umrechnungen nötig:

- Zunächst vernachlässigen wir die Deltafunktion der Richtungs-Abhängigkeit in 4.11. Das bedeutet, wir messen stets die Größe im Fokus des Photonenstrahls.
- Um die explizite Abhängigkeit von der Energie zu bekommen, muss in allen Argumenten von 4.11 $f = E/h$ ersetzt werden. Um das Argument E dann nicht in der Einheit erg, sondern in GeV auszudrücken, muss $E = E_{\text{GeV}}/(6,2 \cdot 10^2)$ geschrieben werden, denn es ist $\text{erg} \approx 6,2 \times 10^{11} \text{ eV}$.
- Division durch h ergibt die Energie $d^3 E$, die in Form von Photonen, deren Energie im Intervall $[E; E + dE]$ liegt, pro Energieelement $dE = h df$, pro Zeitelement und pro Flächenelement durch dieses Flächenelement strömt.
- Die Energie, die in Form von Photonen mit Energie E vorliegt, ist gleich der Anzahl solcher Photonen multipliziert mit dieser Energie. Somit darf man $d^3 E = E \cdot d^3 N$ schreiben. Deswegen muss nur noch einmal mit E multipliziert werden, um die erwünschte Größe zu bekommen.
- Diese gilt nun aber am Ort d in der Outer Gap. Gemessen wird jedoch der Wert am Ort des Observatoriums, welches sich im Abstand R_{Crab} befindet. Deswegen muss analog zum Vorgehen in Kapitel 4.4.1 noch mit $R_{\text{LZ}}^2/R_{\text{Crab}}^2$ multipliziert werden.
- Die so erhaltene Größe hat $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ als Einheit. Nach Multiplikation des numerischen Wertes der Größe mit 0,62 ist die Größe dann in der Einheit $\text{TeV s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ gegeben, sodass ein Vergleich mit den Fermi-LAT- und MAGIC-Daten (siehe Abbildung 1.4) möglich ist.
- Schließlich ist eine Multiplikation mit 2 nötig, die weiter unten erklärt wird.

Insgesamt ergibt sich also für den Fall der Krümmungsstrahlung

$$E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}_{\text{Kr, Beob, TeV}}(E_{\text{GeV}}) = 2 \cdot \frac{P dr}{df}_{\text{int, CH, <d}}(E_{\text{GeV}}/(6,2 \cdot 10^2 \cdot h), R_{\text{LZ}}) \cdot \frac{\Omega B_0}{4\pi c e} \cdot \frac{E_{\text{GeV}}}{6,2 \cdot 10^2 \cdot h} \cdot \frac{R_{\text{LZ}}^2}{R_{\text{Crab}}^2} \cdot 0,62. \quad (5.1)$$

Es wurde hier der auswärts gerichtete Strahl aus Krümmungsstrahlungsphotonen im Fall γ_{CH} verwendet. Der Fall γ_{N} wird von nun an hinsichtlich der Krümmungsstrahlung nicht weiter beachtet, da hier die Spektren sehr ähnlich sind. Außerdem wurde für die Integration 4.10c $d = R_{\text{LZ}}$ benutzt, sodass über die gesamte Outer Gap integriert wird.

Betrachten wir nun die invers Compton-gestreuete Strahlung. Wir gehen hier von den spezifischen Intensitäten 4.28 mit $l_1 = 0,5R_{\text{LZ}}$ und $l_2 = R_{\text{LZ}}$ aus. Auch hier wird also über die gesamte Outer Gap integriert. Nun werden jedoch geringfügig andere Umrechnungen verwendet, um eine Größe $E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}$ zu erzielen:

- Wir vernachlässigen wieder die Deltafunktion der Richtungs-Abhängigkeit in 4.28 beziehungsweise in 4.27.
- Um die explizite Abhängigkeit von der Energie zu bekommen, muss in allen Argumenten von 4.28 $\epsilon_1 = E/(mc^2)$ gesetzt werden. Um das Argument E dann nicht in der Einheit erg, sondern in GeV auszudrücken, muss $E = E_{\text{GeV}}/(6,2 \cdot 10^2)$ geschrieben werden, denn es ist $\text{erg} \approx 6,2 \times 10^{11} \text{ eV}$.
- Division durch mc^2 ergibt die Energie $d^3 E$, die in Form von Photonen, deren Energie im Intervall $[E; E + dE]$ liegt, pro Energieelement $dE = mc^2 \cdot d\epsilon_1$, pro Zeitelement und pro Flächenelement durch dieses Flächenelement strömt.
- Erneut darf man $d^3 E = E \cdot d^3 N$ schreiben. Deswegen muss nur noch einmal mit E multipliziert werden, um die erwünschte Größe zu bekommen.

- Diese gilt nun aber am Ort l_2 in der Outer Gap. Gemessen wird jedoch der Wert am Ort des Observatoriums, welches sich im Abstand R_{Crab} befindet. Deswegen muss noch mit $R_{\text{LZ}}^2/R_{\text{Crab}}^2$ multipliziert werden.
- Die so erhaltene Größe hat $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ als Einheit. Nach Multiplikation des numerischen Wertes der Größe mit 0,62 ist die Größe dann in der Einheit $\text{TeV s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ gegeben.
- Schließlich ist eine Multiplikation mit 2 nötig, die weiter unten erklärt wird.

Insgesamt ergibt sich also für den Fall der invers Compton-gestreuerten Strahlung

$$E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}_{\text{IC, Beob, TeV}}(E_{\text{GeV}}) = 2 \cdot I_{\text{IC}}(E_{\text{GeV}}/(6,2 \cdot 10^2 \cdot mc^2), 0,5R_{\text{LZ}}, R_{\text{LZ}}) \cdot \frac{E_{\text{GeV}}}{6,2 \cdot 10^2 \cdot mc^2} \cdot \frac{R_{\text{LZ}}^2}{R_{\text{Crab}}^2} \cdot 0,62. \quad (5.2)$$

Für I_{IC} wird jeweils einer der beiden Ausdrücke 4.28 verwendet.

Im VHE-Bereich werden zwei Puls-komponenten innerhalb einer Pulsperiode beobachtet, die P1 und P2 genannt werden und sich geringfügig unterscheiden. Die beiden Pulse entstehen, da der aus der Outer Gap stammende Photonenstrahl bei einer Neutronenstern-Umdrehung zweimal mit der Sichtlinie zusammen fällt. Dies ist der Fall, da die Outer Gap unter einem von Null verschiedenen Winkel gegen die Magnetfeld-Achse ausgerichtet ist und sich fast vollständig um den Neutronenstern erstreckt. Die Magnetfeld-Achse ist wiederum unter einem von Null verschiedenen Winkel gegen die Rotations-Achse ausgerichtet. Die Daten, die im Folgenden zum Vergleich herangezogen werden, stammen von Messungen von Fermi-LAT und MAGIC und wurden aus Abbildung 4a von Aleksić et al. [2012] (Abbildung 1.4) entnommen. Es werden im Folgenden jeweils die Werte der Größe $E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}$ als Summe beider Puls-komponenten verwendet. Deswegen

wurden die Ausdrücke 5.1 und 5.2 zusätzlich noch verdoppelt (siehe letzter Punkt in obigen Aufzählungen). Außerdem beschränken wir uns auf Daten, die mit dem von MAGIC bestimmten Phasenintervall (8,8% [Aleksić et al., 2012]) gewonnen wurden. Wir beziehen uns also in Abbildung 1.4 auf die schwarze punktierte Linie für Fermi-Daten und auf die roten Quadrate für die MAGIC-Daten.

In Abbildung 5.1 ist der Vergleich angestellt. Es wurde jedoch im Gegensatz zu allen bisherigen Rechnungen und im Gegensatz zu den Gleichungen 5.1 und 5.2 $N_e = 10^{-4} \cdot \Omega B_0/(4\pi ce)$ als Fit-Parameter gesetzt. Diese im Vergleich zu $\Omega B_0/(4\pi ce)$ geringere Anzahl-Dichte würde auch aus Gründen bezüglich der Gap-Stabilisierung favorisiert werden. Hätten die Teilchen-Strahlen, die durch die Outer Gap propagieren, tatsächlich die Goldreich-Julian-Dichte, so würde sich das elektrische Feld rasch abbauen und die Beschleuniger-Region würde verschwinden.

Wäre $N_e = \Omega B_0/(4\pi ce)$, so läge das Krümmungsstrahlungs-Spektrum um 10^4 höher, die Spektren der invers Compton-gestreuerten Strahlung wären wegen der quadratischen Abhängigkeit von N_e um den Faktor $(10^4)^2$ erhöht.

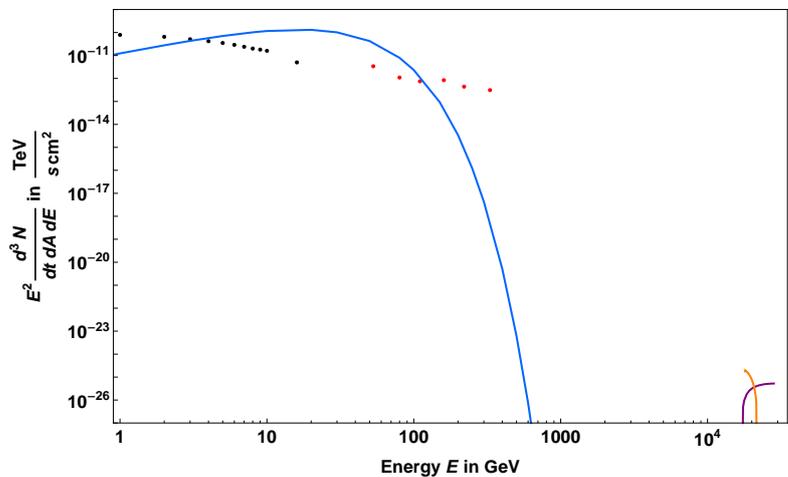


Abb. 5.1: Vergleich des theoretischen und beobachteten VHE-Spektrums. Dargestellt ist in doppelt-logarithmischer Skalierung die Größe $E^2 \cdot \frac{d^3 N}{dt dA dE}$ gegen die Photonenenergie E . Die Beobachtungen werden durch die Fermi-Daten (schwarz) sowie durch die MAGIC-Daten (rot) repräsentiert. Das in dieser Arbeit simulierte Krümmungsstrahlungs-Spektrum (blau) gemäß Gleichung 5.1 für den Fall $\gamma_{\text{CH,aus}}$ ist neben den beiden invers Compton-gestreteten Spektren gemäß Gleichung 5.2 (lila für den Fall γ_{N} und orange für den Fall γ_{CH}) als durchgezogene Linie dargestellt, deren Eckigkeit aus der begrenzten Anzahl von Auswertepunkten resultiert. Zur Berechnung der Spektren wurde $N_e = 10^{-4} \cdot \Omega B_0/(4\pi ce)$ verwendet.

Das theoretisch simulierte Krümmungsstrahlungs-Spektrum kann die gemessenen Daten, deren Fehler wegen ihrer Kleinheit in Abbildung 5.1 nicht erkennbar wären, nur sehr näherungsweise beschreiben. Im funktionalen Verlauf stimmt das berechnete Spektrum nicht mit den Beobachtungen überein. Der Abknick-Punkt $E_{\text{abk}} \approx 6 \text{ GeV}$ in den Fermi-Daten, bei dem der Übergang von Potenzgesetz zu exponentiellem Abfall erfolgt, kann nur größenordnungsmäßig erklärt werden.

Die Daten der MAGIC-Beobachtungen können ebenfalls nicht beschrieben werden, weder durch Krümmungsstrahlung noch durch invers Compton-gestreute Strahlung gemäß unserem Modell. Es ist vorstellbar, dass die MAGIC-Daten durch inverse Compton-Streuung der Krümmungsstrahlungsphotonen an niederenergetischeren Teilchen oder durch inverse Compton-Streuung von niederenergetischen Photonen (Radiophotonen) im Thomson-Grenzfall erklärt werden können [Mannheim, 2013].

Die beiden invers Compton-gestreuten Spektren in Abbildung 5.1 liegen, wie bereits oben erklärt wurde, bei ähnlichen Energien. Sie können mangels vorhandener Daten nicht verifiziert werden. Sie dürfen jedoch als eine Vorhersage für eine absolute Obergrenze der Photonen des Crab-Pulsars angesehen werden. Naiv suggeriert der Verlauf des invers Compton-gestreuten Spektrums für den Fall γ_{CH} (orange) eine bessere Anpassung an die vorhandenen Daten als der Verlauf für den Fall γ_{N} (lila). Doch bedenkt man, dass das Spektrum zwischen den MAGIC-Daten und der vorhergesagten Obergrenze über fast zwei Größenordnungen unbekannt ist, sollte hier noch nicht zwischen den Fällen γ_{N} und γ_{CH} entschieden werden.

5.3 Vergleich zur Arbeit von Lyutikov et al. [2012]

In Kapitel 4.4.3 wurde gezeigt, dass Energieverluste der geladenen Teilchen durch inverse Compton-Streuung für die Bedingungen des Crab-Pulsars nicht beziehungsweise nur für infrarot-optische Photonen bei niedrigen Lorentz-Faktoren relevant sind. Dieser Befund steht im scheinbaren Widerspruch zu Ergebnissen von Lyutikov et al. [2012].

Dort wird ein Outer Gap-Modell des Crab-Pulsars verwendet, das ähnlich zu dem in dieser Arbeit ist. In Lyutikov et al. [2012] wird behauptet, die Energieverlust-Rate durch die inverse Compton-Streuung von UV-Photonen sei annähernd gleich der Energieverlust-Rate durch die Emission von Krümmungsstrahlung. Um zu dieser Aussage zu gelangen, wird zunächst ähnlich wie in Kapitel 4.1.1 der Lorentz-Faktor berechnet, der sich durch die Balance von Energiegewinn durch Beschleunigung im induzierten elektrischen Feld und Energieverlust durch Abgabe von Krümmungsstrahlung ergibt. Es folgt $\gamma = 3 \cdot 10^7$. Daraufhin wird der Ausdruck

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4}{3} \left(\frac{mc^2}{\epsilon} \right)^2 U \sigma_{\text{T}} c \quad (5.3)$$

[Lyutikov et al., 2012] für die Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung einer Population monochromatischer Photonen im Klein-Nishina-Grenzfall herangezogen. Die (hier nicht dimensionslose) Energie der Photonen ist ϵ und die Gesamtheit der monochromatischen Photonen hat die Energie-Dichte U . Unter Verwendung des oben angegebenen Lorentz-Faktors $\gamma = 3 \cdot 10^7$ und unter Verwendung von $\epsilon = 1 \text{ eV} \cdot \epsilon_{\text{UV},0}$ (also für infrarot-optische Photonen, wenn $\epsilon_{\text{UV},0} \approx 1$, und für UV-Photonen, wenn $\epsilon_{\text{UV},0} \approx 10$) wird nun die Energieverlust-Rate durch Abgabe von Krümmungsstrahlung mit dem Ausdruck 5.3 gleichgesetzt. Die sich ergebende Gleichung liefert dann einen Ausdruck für die Energie-Dichte U der Photonen mit Energie $1 \text{ eV} \cdot \epsilon_{\text{UV},0}$, die impliziert, dass beide Energieverlust-Raten gleich sind. Aus dieser Energie-Dichte U wird dann unter der Annahme, das Volumen der Outer Gap habe den Wert $V = 0,1 \eta_{\text{G},-1} R_{\text{LZ}}^3$, die Leuchtkraft L berechnet, bei der beide Energieverlust-Raten gleich sind. Es ergibt sich $L = 10^{35} \text{ erg s}^{-1} \cdot \epsilon_{\text{UV},0}^2$ [Lyutikov et al., 2012]. Für infrarot-optische Photonen ($\epsilon_{\text{UV},0} \approx 1$) wären also bei einer Leuchtkraft $L = 10^{35} \text{ erg s}^{-1}$ beide Energieverlust-Raten gleich. Für UV-Photonen ($\epsilon_{\text{UV},0} \approx 10$) wäre hingegen die Leuchtkraft $L = 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$ nötig, damit beide Energieverlust-Raten gleich sind. Laut Lyutikov et al. [2012] ist die tatsächlich gemessene Leuchtkraft bei $\epsilon = 1 \text{ eV} \cdot \epsilon_{\text{UV},0}$ gleich $L = 10^{34} \text{ erg s}^{-1} \cdot l_{34}$. Die Größe l_{34} wird nicht näher spezifiziert. In Anbetracht unserer Ergebnisse aus Kapitel 4.4.2 sollte $l_{34} \approx 0,6$ für die infrarot-optische Photonen-Population und $l_{34} \approx 2,0$ für die UV-Photonen-Population sein. Ist nun $\epsilon_{\text{UV},0} \approx 1$ (infrarot-optische Photonen), so kann man unter grober

Näherung gerade noch sagen, dass die tatsächliche Leuchtkraft der nötigen Leuchtkraft entspricht. Ist jedoch $\epsilon_{\text{UV},0} = 10$ (UV-Photonen), so liegen bereits drei Größenordnungen zwischen der tatsächlichen und der nötigen Leuchtkraft. Insofern erscheint die Aussage, die beobachtete Leuchtkraft von UV-Photonen sei ungefähr gleich der Leuchtkraft, die nötig ist, damit die Energieverlust-Rate durch die Abgabe von Krümmungsstrahlung gleich der Energieverlust-Rate durch inverse Compton-Streuung ist [Lyutikov et al., 2012], zweifelhaft. Allenfalls gilt dies für die Leuchtkraft infrarot-optischer Photonen. Dies entspricht auch den Ergebnissen aus Kapitel 4.4.3. Bei richtiger Interpretation der Ergebnisse aus Lyutikov et al. [2012] besteht also kein qualitativer Unterschied zwischen diesen und den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit.

5.4 Ausblick

Zu Anfang dieser Arbeit wurden einige Fragen gestellt, die die Probleme der aktuellen Pulsar-Forschung zum Ausdruck bringen. Einige dieser Fragen konnten durch diese Arbeit beantwortet werden.

So wurde beispielsweise die Kinetik von elektrisch geladenen Teilchen bei ihrer Bewegung durch die Magnetosphäre, insbesondere durch die Outer Gap, geklärt. Während ihrer Beschleunigung durch das elektrische Feld innerhalb der Gap verlieren die Teilchen Energie durch die Emission von Krümmungsstrahlung. Andere Mechanismen des Energieverlustes wie zum Beispiel TPP oder inverse Compton-Streuung sind in der Outer Gap des Crab-Pulsars irrelevant. Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit dem von Lyutikov et al. [2012], auch wenn dort anderes behauptet wird.

Obleich inverse Compton-Streuung in Bezug auf die Energieverlust-Rate der Teilchen unbedeutend ist, verursacht dieser Wechselwirkungs-Prozess eine wichtige Eigenschaft des Crab-Spektrums. Die höchstenergetischen Photonen werden durch inverse Compton-Streuung von Krümmungsstrahlungsphotonen an den relativistischen Teilchen in der Outer Gap erzeugt. Die Energie dieser invers Compton-gestreuten Photonen wird wegen der Gültigkeit des Klein-Nishina-Grenzfalls effektiv durch jene der streuenden Teilchen beeinflusst. Die maximale Energie der Teilchen steuert also die maximale Energie der Photonen.

Andere Fragen bleiben hingegen weiter unbeantwortet. So konnten die hochenergetischen Daten von Fermi-LAT nicht befriedigend durch die Krümmungsstrahlung einer einzigen Teilchen-Population beschrieben werden. Zudem konnte kein Mechanismus gefunden werden, der die MAGIC-Messungen erklären kann.

Zu einer besseren theoretischen Beschreibung des Spektrums wäre eine Verfeinerung des Modells der Pulsar-Magnetosphäre hilfreich. Im vorliegenden Modell wurde stets Dipol-Geometrie angenommen und für die Form der Outer Gap wurden Ausdrücke aus anderen Arbeiten herangezogen. Zum Zweck einer einfachen Beschreibung der eindimensionalen Rechnungen durch die Koordinate r wurde angenommen, die Outer Gap liege radial ausgedehnt in der Magnetosphäre, obwohl dies allenfalls in einer Monopol-Geometrie, nicht aber in der Dipol-Geometrie oder in noch realistischeren Magnetosphären-Modellen der Fall wäre. Ein zweidimensionales Magnetosphären-Modell könnte die Stärke der stattfindenden Wechselwirkungs-Prozesse in Abhängigkeit von einer Höhen-Koordinate berücksichtigen. Ein weiterer Vorteil eines solchen verbesserten Modells wäre die Möglichkeit, die empfangene Lichtkurve des Pulsars, also Pulsabstände, -breiten und -formen angeben zu können und mit den Beobachtungen vergleichen zu können.

Vor allem aber ist die Einbindung weiterer Wechselwirkungs-Prozesse notwendig, um die sich in der Outer Gap abspielende Physik genauer wiederzugeben und damit ein detaillierteres Spektrum zu erhalten. Die Annahme einer konstanten Anzahl-Dichte an Teilchen ähnlich der Goldreich-Julian-Dichte ist zu vereinfacht. Bezieht man die beiden Prozesse TPP und γ - γ -Paar-Erzeugung mit ein, so ist die Anzahl-Dichte der Teilchen vom Ort abhängig und an verschiedenen Orten der Outer Gap möglicherweise stark verschieden. Elektromagnetische Kaskaden werden durch diese Prozesse erst möglich.

Die durch Paar-Erzeugung neu generierten Teilchen (Sekundärteilchen) erhöhen zwar die gesamte Anzahl-Dichte, doch sie haben eine geringere Energie als die primären Teilchen und unterscheiden sich folglich von diesen. In einem verbesserten Modell muss also zwischen mehreren Teilchen-Populationen (Generationen) unterschieden werden, die jeweils verschiedene Energien und Anzahl-Dichten haben. Diese Teilchen-Populationen wechselwirken dann mit den Strahlungsfeldern, die dann ebenfalls in mehreren

Populationen (Generationen) vorliegen. Ein Resultat könnte sein, dass die inverse Compton-Streuung der Krümmungsstrahlungsphotonen an Sekundärteilchen mit hoher Anzahl-Dichte und Lorentz-Faktoren $\gamma \ll 10^7$ eine Strahlungs-Komponente erzeugt, die die von MAGIC registrierte Komponente darstellt. Es ist außerdem denkbar, dass die MAGIC-Komponente durch inverse Compton-Streuung im Thomson-Grenzfall verursacht wird [Mannheim, 2013]. Um diese Wechselwirkung zu simulieren, müssten jedoch ausreichend niederenergetische Photonen-Populationen in das Modell implementiert werden.

Noch eleganter als eine strikte Trennung in Primär- und Sekundärteilchen wäre es, die einzelnen Teilchen-Populationen nicht getrennt zu betrachten, sondern eine spektrale Anzahl-Dichte zu verwenden, die dann von der Energie/Frequenz (und vom Ort) abhängig ist.

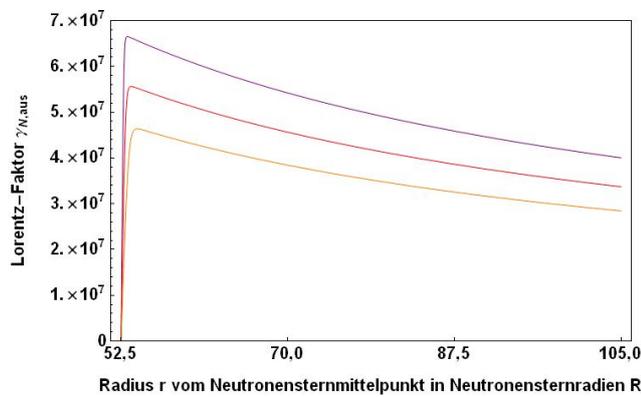
Durch detailliertere Modelle und Einbeziehung weiterer physikalischer Prozesse kann die theoretische Modellierung der Pulsar-Magnetosphären-Physik also noch stark verbessert und die mit der Beobachtung vergleichbaren Resultate können präzisiert werden. Es bleibt jedoch offen, ob es in Zukunft möglich sein wird, die verfügbaren Beobachtungen vollständig und in allem Detail von theoretischer Seite wiederzugeben. Außerdem muss auch weiterhin damit gerechnet werden, dass zukünftige Beobachtungen der Pulsare und insbesondere des Crab-Pulsars unerwartete Eigenschaften dieser astrophysikalischen Objekte offenbaren. Die Pulsar-Forschung der nächsten Jahre mag also gleichermaßen bestehendes Wissen vertiefen als auch neue Erkenntnisse ans Licht bringen. Dies hat Jonathan Arons bereits 2007 auf den Punkt gebracht:

„Exciting times lie ahead!“

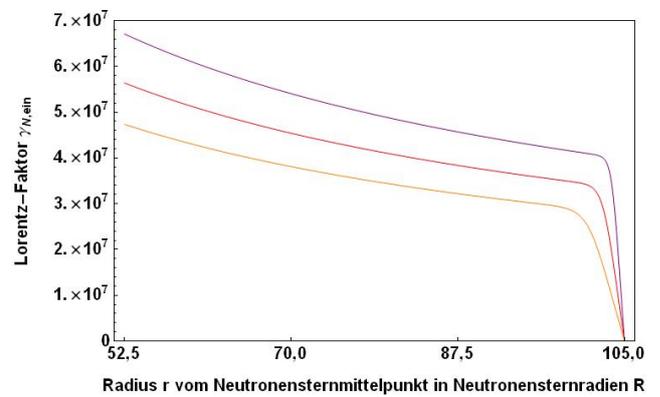
Jonathan Arons [Arons, 2007]

Kapitel 6

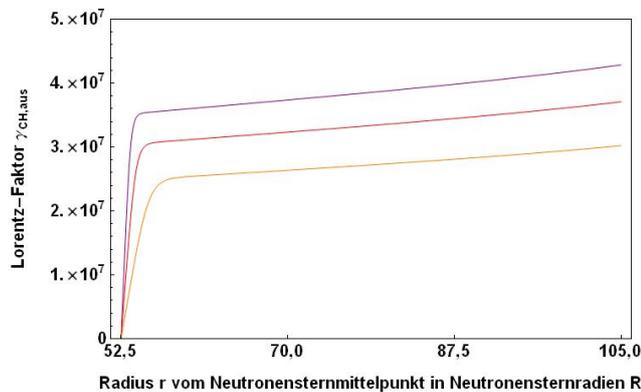
Anhang



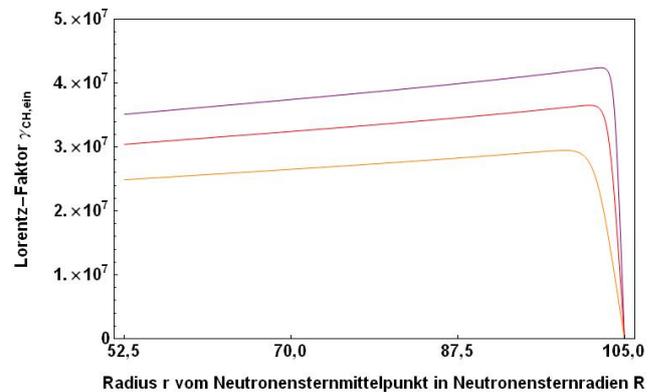
(a) Funktion $\gamma_{N,\text{aus}}$ als numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbedingung 4.8a. Es wurden die Parameter $\eta = 0,02$ (lila), $\eta = 0,01$ (rot) und $\eta = 0,005$ (orange) verwendet.



(b) Funktion $\gamma_{N,\text{ein}}$ als numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbedingung 4.8b. Es wurden die Parameter $\eta = 0,02$ (lila), $\eta = 0,01$ (rot) und $\eta = 0,005$ (orange) verwendet.

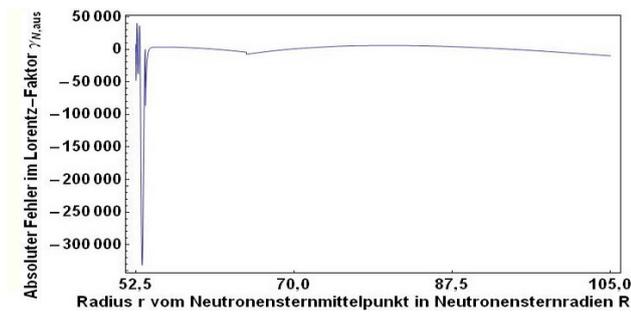


(c) Funktion $\gamma_{CH,\text{aus}}$ als numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbedingung 4.8a. Es wurden die Parameter $h_{OG} = 0,2$ (lila), $h_{OG} = 0,15$ (rot) und $h_{OG} = 0,1$ (orange) verwendet.

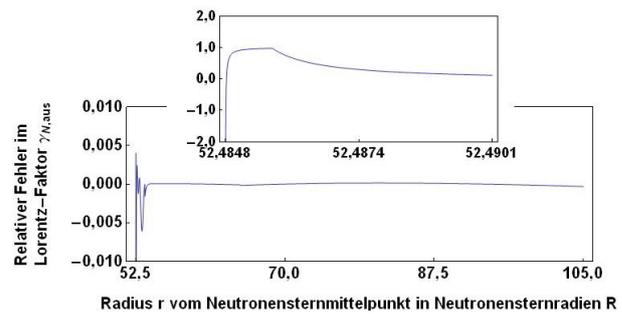


(d) Funktion $\gamma_{CH,\text{ein}}$ als numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbedingung 4.8b. Es wurden die Parameter $h_{OG} = 0,2$ (lila), $h_{OG} = 0,15$ (rot) und $h_{OG} = 0,1$ (orange) verwendet.

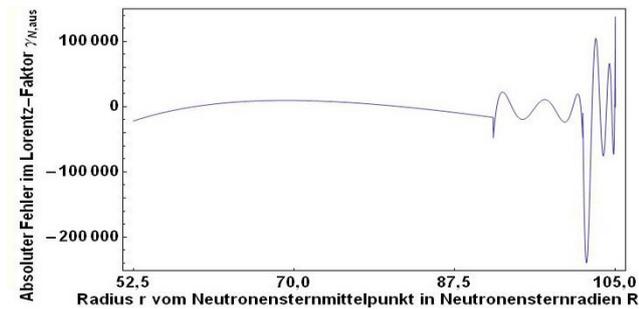
Abb. 6.1: Numerische Lösungen der kinetischen Differenzialgleichungen 4.7 der geladenen Teilchen im elektrischen Feld der Outer Gap mit Energieverlusten durch Krümmungsstrahlung unter den Randwertbedingungen 4.8, vergleiche Kapitel 4.1.2. Die lilafarbenen Kurven stellen die im weiteren Verlauf verwendeten Funktionen dar.



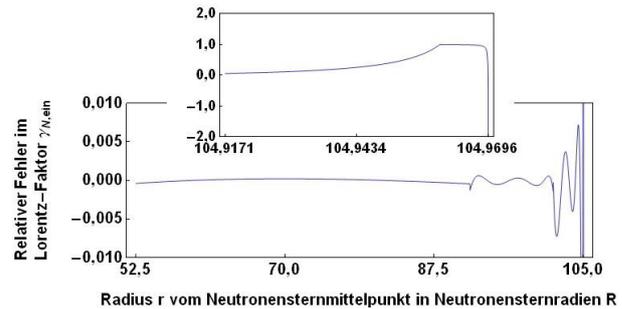
(a) Absoluter Fehler der Funktion $\gamma_{N,\text{aus}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbed. 4.8a.



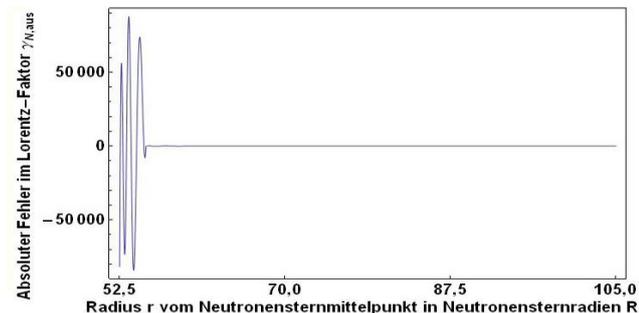
(b) Relativer Fehler der Funktion $\gamma_{N,\text{aus}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbed. 4.8a.



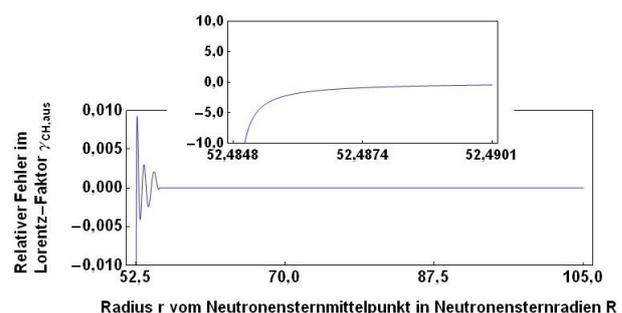
(c) Absoluter Fehler der Funktion $\gamma_{N,\text{ein}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbed. 4.8b.



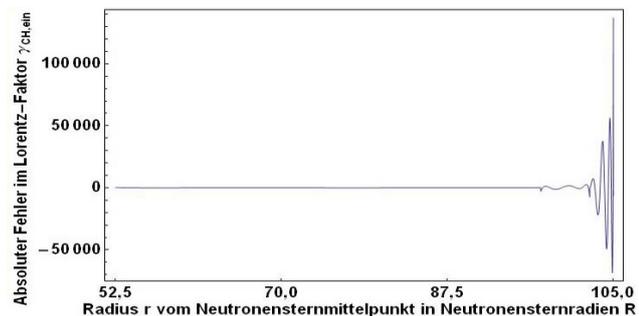
(d) Relativer Fehler der Funktion $\gamma_{N,\text{ein}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7a mit Randwertbed. 4.8b.



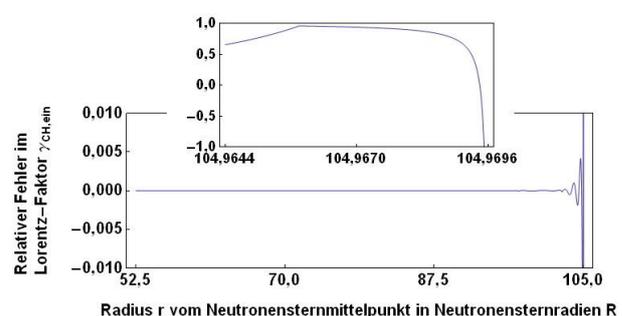
(e) Absoluter Fehler der Funktion $\gamma_{CH,\text{aus}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbed. 4.8a.



(f) Relativer Fehler der Funktion $\gamma_{CH,\text{aus}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbed. 4.8a.

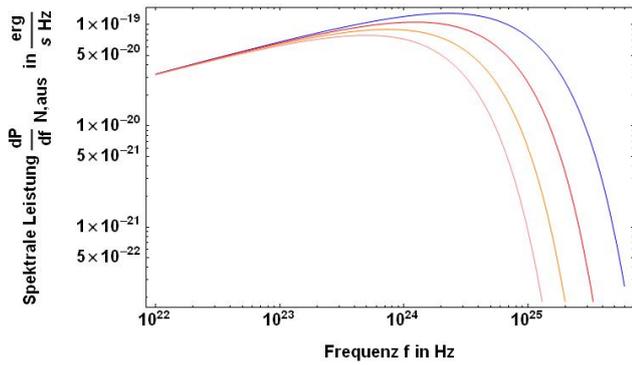


(g) Absoluter Fehler der Funktion $\gamma_{CH,\text{ein}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbed. 4.8b.

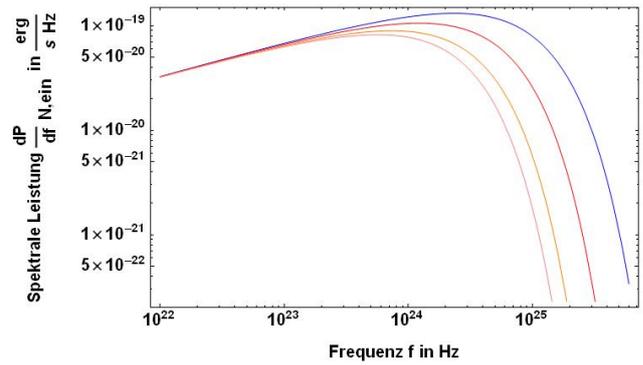


(h) Relativer Fehler der Funktion $\gamma_{CH,\text{ein}}$ in Bezug auf die numerische Lösung der DGL 4.7b mit Randwertbed. 4.8b.

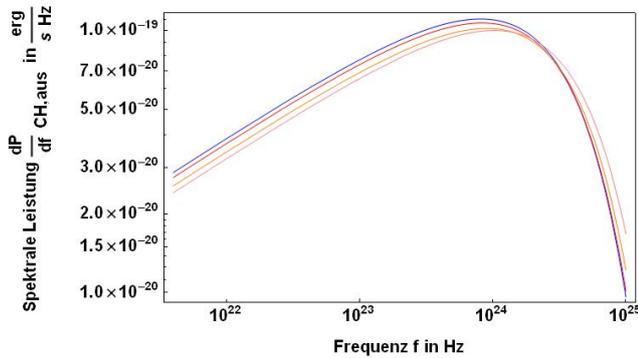
Abb. 6.2: Vergleich der Fit-Funktionen $\gamma(r)$ mit der ursprünglichen numerischen Lösung der Differentialgleichungen für die Bewegung geladener Teilchen in der Outer Gap. Der absolute Fehler ist die Differenz zwischen der numerischen Lösung und deren Fit, vergleiche Kapitel 4.1.2. Der relative Fehler ist der absolute Fehler geteilt durch die numerische Lösung. Als Parameter wurden stets $\eta = 0,01$ und $h_{\text{OG}} = 0,2$ verwendet. Die linke / rechte Grenze der x -Achse ist jeweils bei $r = 0,5R_{\text{LZ}} = 52,4848R$ beziehungsweise $r = R_{\text{LZ}} = 104,9696R$ gelegen, die unterschiedliche Beschriftung ist durch verschiedene Rundungen $52,4848 \approx 52,5$ beziehungsweise $104,9696 \approx 105,0$ beim Zeichnen bedingt.



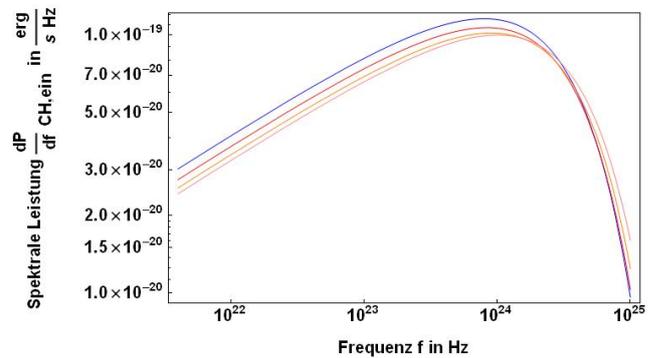
(a) Funktion $\frac{dP}{df}_{N,\text{aus}}$ jeweils für das r , an dem das Maximum von $\gamma_{N,\text{aus}}(r)$ liegt (blau), $r = \frac{2}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{3}R_{\text{LZ}}$ (rot), $r = \frac{1}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{3}R_{\text{LZ}}$ (orange), $r = R_{\text{LZ}}$ (rosa).



(b) Funktion $\frac{dP}{df}_{N,\text{ein}}$ jeweils für $r = 0,5R_{\text{LZ}}$ (blau), $r = \frac{2}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{3}R_{\text{LZ}}$ (rot), $r = \frac{1}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{3}R_{\text{LZ}}$ (orange), das r , an dem der Wendepunkt von $\gamma_{N,\text{ein}}(r)$ liegt (rosa).

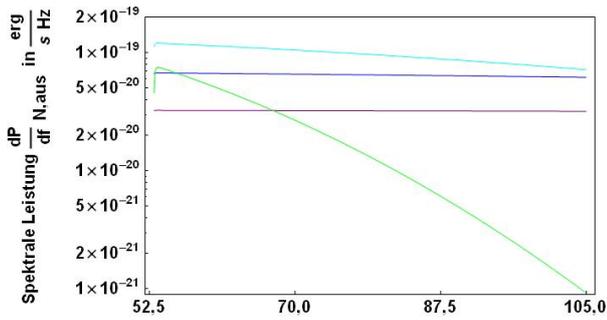


(c) Funktion $\frac{dP}{df}_{\text{CH,aus}}$ jeweils für das r , an dem der Wendepunkt von $\gamma_{\text{CH,aus}}(r)$ liegt (blau), $r = \frac{2}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{3}R_{\text{LZ}}$ (rot), $r = \frac{1}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{3}R_{\text{LZ}}$ (orange), $r = R_{\text{LZ}}$ (rosa).

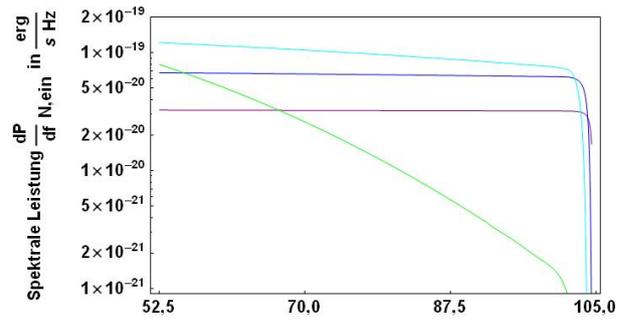


(d) Funktion $\frac{dP}{df}_{\text{CH,ein}}$ jeweils für $r = 0,5R_{\text{LZ}}$ (blau), $r = \frac{2}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{3}R_{\text{LZ}}$ (rot), $r = \frac{1}{3}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{3}R_{\text{LZ}}$ (orange), das r , an dem das Maximum von $\gamma_{N,\text{ein}}(r)$ liegt (rosa).

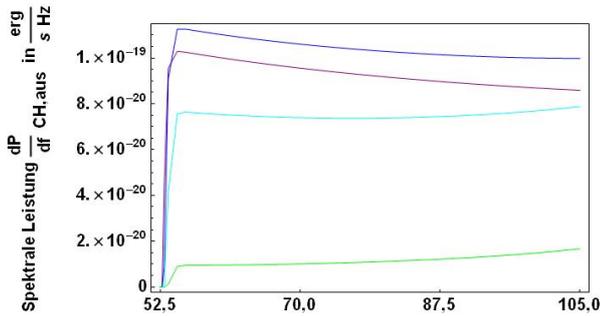
Abb. 6.3: Dargestellt sind hier in doppelt-logarithmischer Skalierung die berechneten Krümmungsstrahlungsspektren der sich durch die Outer Gap bewegendenden Teilchen für die Funktionen $\gamma_{N,\text{aus}}$, $\gamma_{N,\text{ein}}$, $\gamma_{\text{CH,aus}}$ und $\gamma_{\text{CH,ein}}$. Die Spektren $\frac{dP}{df}(f, r)$ sind jeweils für vier verschiedene Orte r entlang der Outer Gap als Funktion der Frequenz f gezeichnet.


 Radius r vom Neutronensternmittelpunkt in Neutronensternradien R

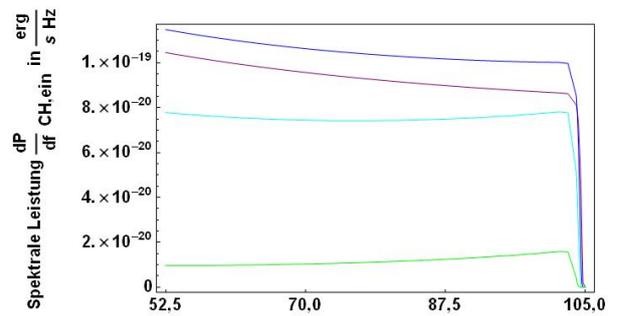
(a) Funktion $\frac{dP}{df}_{N,\text{aus}}$ jeweils für $f = 10^{22}$ Hz (lila), $f = 10^{23}$ Hz (blau), $f = 10^{24}$ Hz (türkis), $f = 10^{25}$ Hz (grün) im Bereich $\frac{99}{100}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{100}R_{\text{LZ}} < r < R_{\text{LZ}}$ in halblogarithmischer Darstellung.


 Radius r vom Neutronensternmittelpunkt in Neutronensternradien R

(b) Funktion $\frac{dP}{df}_{N,\text{ein}}$ jeweils für $f = 10^{22}$ Hz (lila), $f = 10^{23}$ Hz (blau), $f = 10^{24}$ Hz (türkis), $f = 10^{25}$ Hz (grün) im Bereich $0,5R_{\text{LZ}} < r < \frac{1}{100}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{99}{100}R_{\text{LZ}}$ in halblogarithmischer Darstellung.

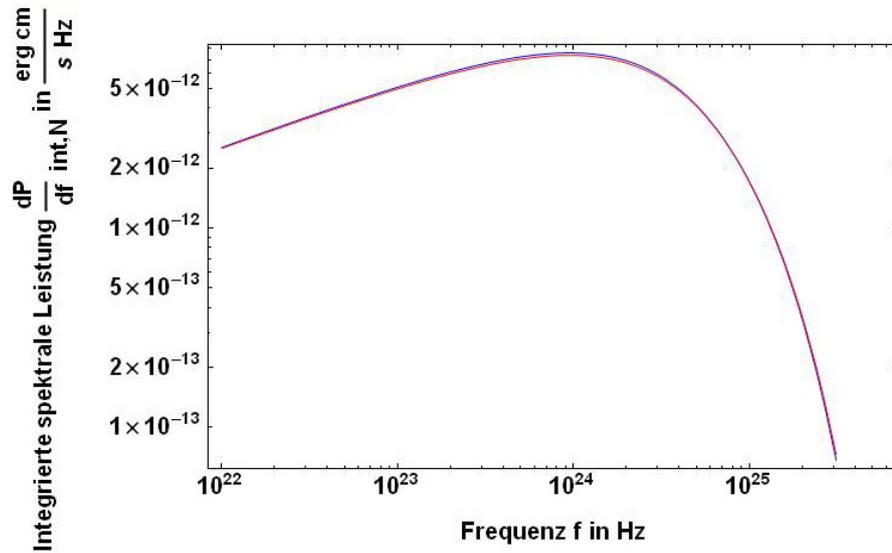

 Radius r vom Neutronensternmittelpunkt in Neutronensternradien R

(c) Funktion $\frac{dP}{df}_{\text{CH},\text{aus}}$ jeweils für $f = 3 \times 10^{23}$ Hz (lila), $f = 10^{24}$ Hz (blau), $f = 3 \times 10^{24}$ Hz $\approx f_k$ (türkis), $f = 10^{25}$ Hz (grün) im Bereich $0,5R_{\text{LZ}} < r < R_{\text{LZ}}$.

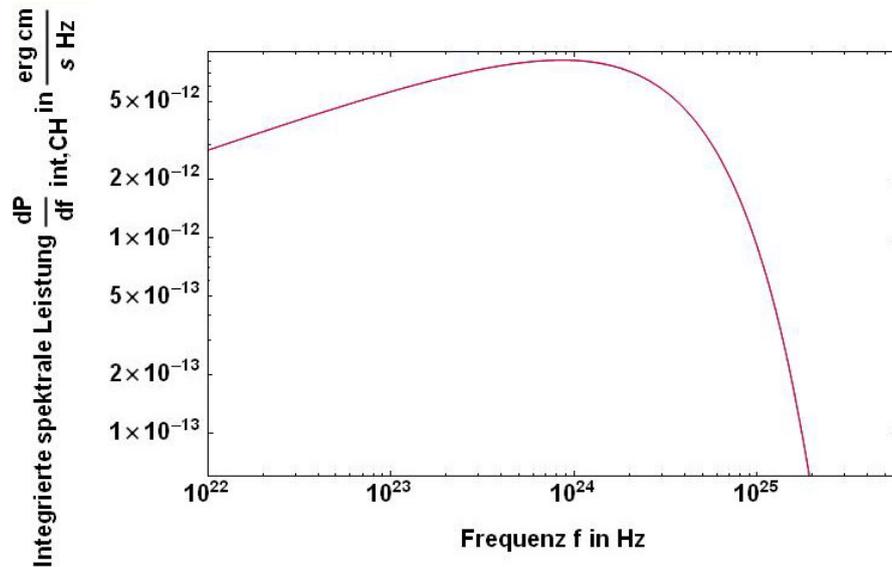

 Radius r vom Neutronensternmittelpunkt in Neutronensternradien R

(d) Funktion $\frac{dP}{df}_{\text{CH},\text{ein}}$ jeweils für $f = 3 \times 10^{23}$ Hz (lila), $f = 10^{24}$ Hz (blau), $f = 3 \times 10^{24}$ Hz $\approx f_k$ (türkis), $f = 10^{25}$ Hz (grün) im Bereich $0,5R_{\text{LZ}} < r < R_{\text{LZ}}$.

Abb. 6.4: Dargestellt sind hier die berechneten spektralen Leistungen durch Krümmungsstrahlung der sich entlang der Outer Gap bewegenden Teilchen für die Funktionen $\gamma_{N,\text{aus}}$, $\gamma_{N,\text{ein}}$, $\gamma_{\text{CH},\text{aus}}$ und $\gamma_{\text{CH},\text{ein}}$. Die Funktionen $\frac{dP}{df}(f, r)$ sind jeweils für vier verschiedene Frequenzen f als Funktion des Ortes r entlang der Outer Gap gezeichnet. Da die Auswertung von $\frac{dP}{df}$ für sehr kleine γ , also am Startpunkt und im Beschleunigungsteil, sehr zeitaufwändig beziehungsweise fehlerhaft ist, wird in (a) und (b) nicht der volle Bereich $0,5R_{\text{LZ}} < r < R_{\text{LZ}}$ gezeichnet.

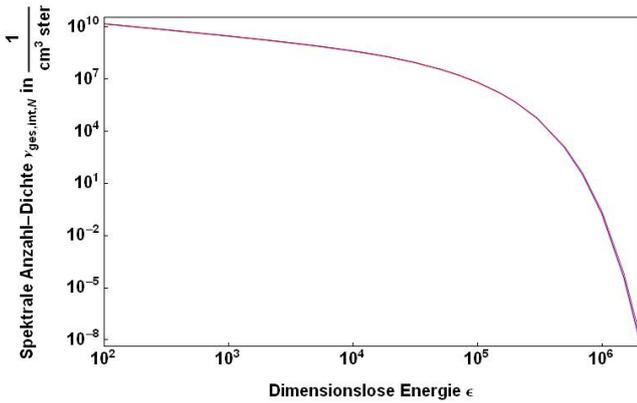


(a) Dargestellt ist das Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int},N,<d}(f, R_{\text{LZ}})$ (blau) eines sich nach außen bewegendes Positrons, für das als innere Integrationsgrenze $\frac{9999}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet wurde, sowie das Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int},N,>d}(f, 0,5R_{\text{LZ}})$ (rot) eines sich nach innen bewegendes Elektrons, für das als äußere Integrationsgrenze $\frac{10}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{9990}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet wurde.

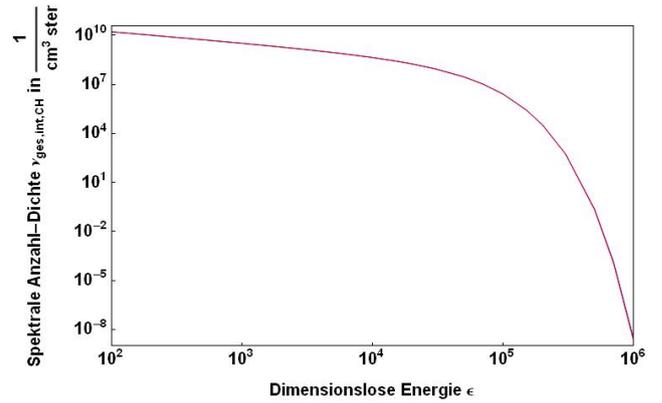


(b) Dargestellt ist das Spektrum $\frac{dP}{df}_{\text{int},CH,<d}(f, R_{\text{LZ}})$ (blau) eines sich nach außen bewegendes Positrons, für das als innere Integrationsgrenze $\frac{9998}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet wurde, sowie $\frac{dP}{df}_{\text{int},CH,>d}(f, 0,5R_{\text{LZ}})$ (rot) eines sich nach innen bewegendes Elektrons, für das als äußere Integrationsgrenze $\frac{4}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{9996}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet wurde.

Abb. 6.5: Integrierte Spektren $\frac{dP}{df}_{\text{int}}$ der Krümmungsstrahlung eines sich entlang der Outer Gap bewegendes Teilchens. Dargestellt ist in doppelt-logarithmischer Skalierung die spektrale Leistung gegen die Frequenz. Es wurde jeweils über die gesamte Outer Gap integriert, sodass die gesamte Krümmungsstrahlung, die ein Teilchen bei seiner Bewegung durch die Outer Gap erzeugt, enthalten ist. Siehe Kapitel 4.2.2 zur Bestimmung der Integrale.

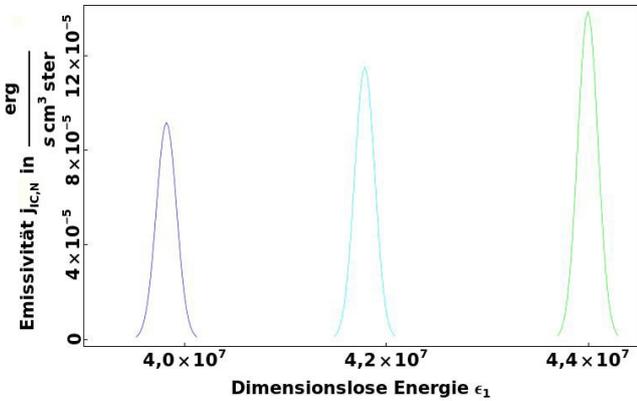


(a) Dargestellt ist die spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int},N,<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ (blau) des sich nach außen bewegenden Strahls am äußeren Gap-Rand. Als innere Integrationsgrenze wurde wieder $\frac{9999}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet. Außerdem ist $\nu_{\text{ges,int},N,>d}(\epsilon, \Omega_0, 0,5R_{\text{LZ}})$ (rot) des sich nach innen bewegenden Strahls am inneren Gap-Ende dargestellt. Hierfür wurde als äußere Integrationsgrenze wieder $\frac{10}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{9990}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet.

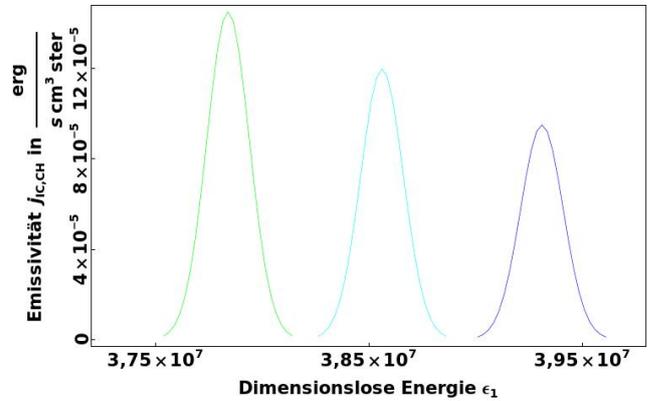


(b) Dargestellt ist die spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int},CH,<d}(\epsilon, \Omega_0, R_{\text{LZ}})$ (blau) des sich nach außen bewegenden Strahls am äußeren Gap-Ende. Als innere Integrationsgrenze wurde wieder $\frac{9998}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{2}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet. Außerdem ist $\nu_{\text{ges,int},N,>d}(\epsilon, \Omega_0, 0,5R_{\text{LZ}})$ (rot) des sich nach innen bewegenden Strahls am inneren Gap-Ende dargestellt. Hierfür wurde als äußere Integrationsgrenze wieder $\frac{4}{10000}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{9996}{10000}R_{\text{LZ}}$ verwendet.

Abb. 6.6: Integrierte spektrale Anzahl-Dichte $\nu_{\text{ges,int}}$ der Krümmungsstrahlungs-Photonen eines sich entlang der Outer Gap bewegenden Teilchenstrahls, siehe Kapitel 4.2.3 zur Bestimmung von $\nu_{\text{ges,int}}$. Dargestellt ist in doppelt-logarithmischer Skalierung die spektrale Anzahl-Dichte gegen die dimensionslose Photonenenergie ϵ . Es wurde wieder über die gesamte Outer Gap integriert, sodass sämtliche Photonen, die ein Strahl bei seiner Bewegung durch die Outer Gap erzeugt, enthalten sind. Die Eckigkeit der Kurven ist durch eine begrenzte Anzahl an Auswertepunkten der Funktion bedingt, wodurch jedoch die Auswertung in akzeptabler Zeit möglich wurde.

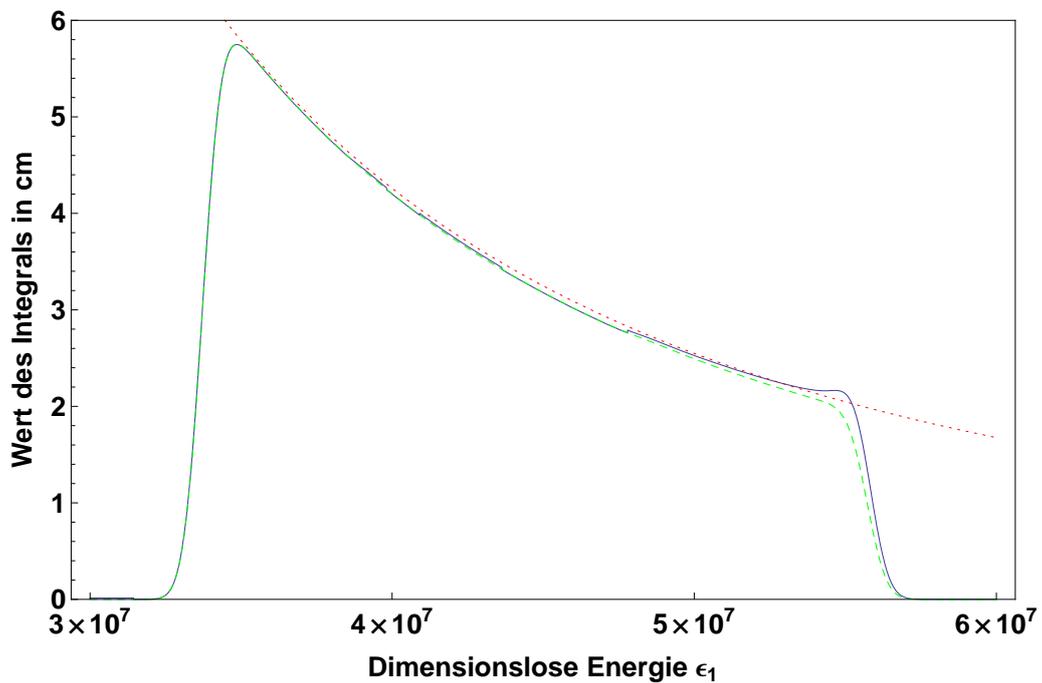


(a) Fall γ_N . Gezeichnet ist die Emissivität $j_{\text{IC},N}$.

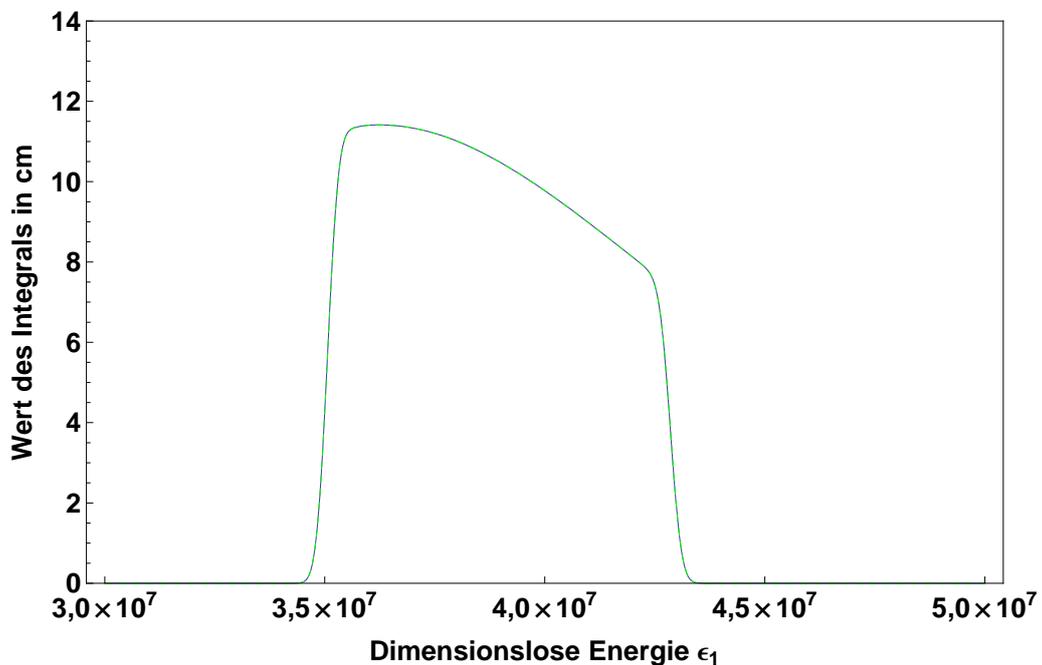


(b) Fall γ_{CH} . Gezeichnet ist die Emissivität $j_{\text{IC},CH}$.

Abb. 6.7: Jeweils drei beispielhafte Spektren der invers Compton-gestreuten Emissivität gemäß Gleichung 4.27 für den Fall eines sich mit γ_{aus} nach außen bewegenden Positronenstrahls, der die Photonen eines nach innen gerichteten Strahls aus Krümmungsstrahlung invers Compton-streut. Gezeichnet ist die Emissivität $j_{\text{IC}}(\epsilon_1, \Omega_1, d)$ im Fokus $\Omega_1 = \Omega_e$ des Strahls gegen die gestreute dimensionslose Photonenenergie ϵ_1 für die Orte $d = \frac{4}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{6}{10}R_{\text{LZ}}$ (blau), $\frac{5}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{5}{10}R_{\text{LZ}}$ (türkis) und $\frac{6}{10}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{4}{10}R_{\text{LZ}}$ (grün). Es wurde $\sigma = 10^5$ und $\epsilon_0 = 3 \times 10^{-2}$ verwendet.

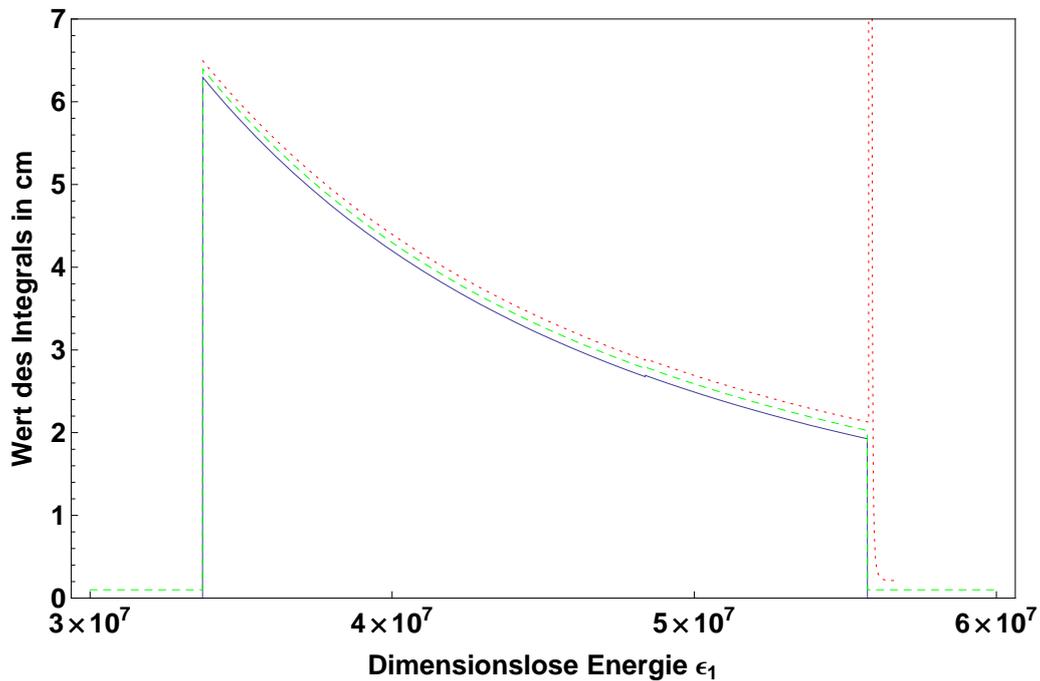


(a) Gezeichnet ist in Abhängigkeit von ϵ_1 in Blau der Wert des Integrals 4.29 mit $\sigma = 5 \cdot 10^5$ sowie in Grün gestrichelt der Wert des Integrals 4.30 mit $\sigma = 5 \cdot 10^5$. Zusätzlich ist in Rot punktiert die Funktion $1,3 \cdot 10^{18} \cdot \epsilon_1^{-2,3}$ als näherungsweise Fit gezeichnet.

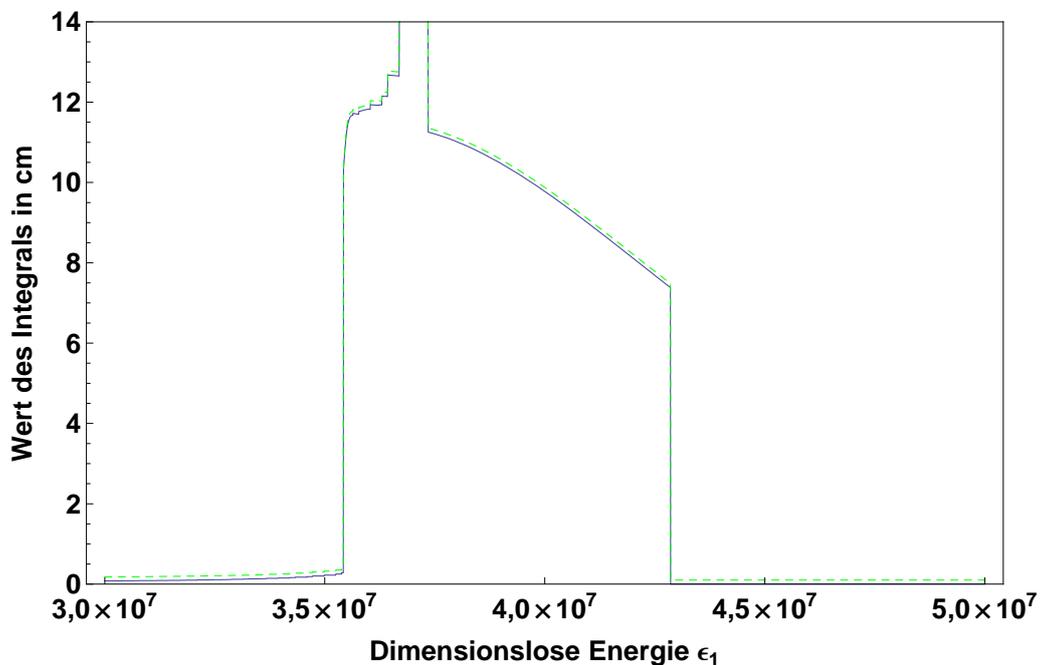


(b) Gezeichnet ist in Abhängigkeit von ϵ_1 in Blau der Wert des Integrals 4.29 mit $\gamma_{\text{CH,aus}}$ anstelle von $\gamma_{\text{N,aus}}$ und mit $\sigma = 2 \cdot 10^5$ sowie in Grün gestrichelt der Wert des Integrals 4.30 mit $\gamma_{\text{CH,aus}}$ anstelle von $\gamma_{\text{N,aus}}$ und mit $\sigma = 2 \cdot 10^5$.

Abb. 6.8: Integral über Gauß-Verteilungen variabler Mittelwerte

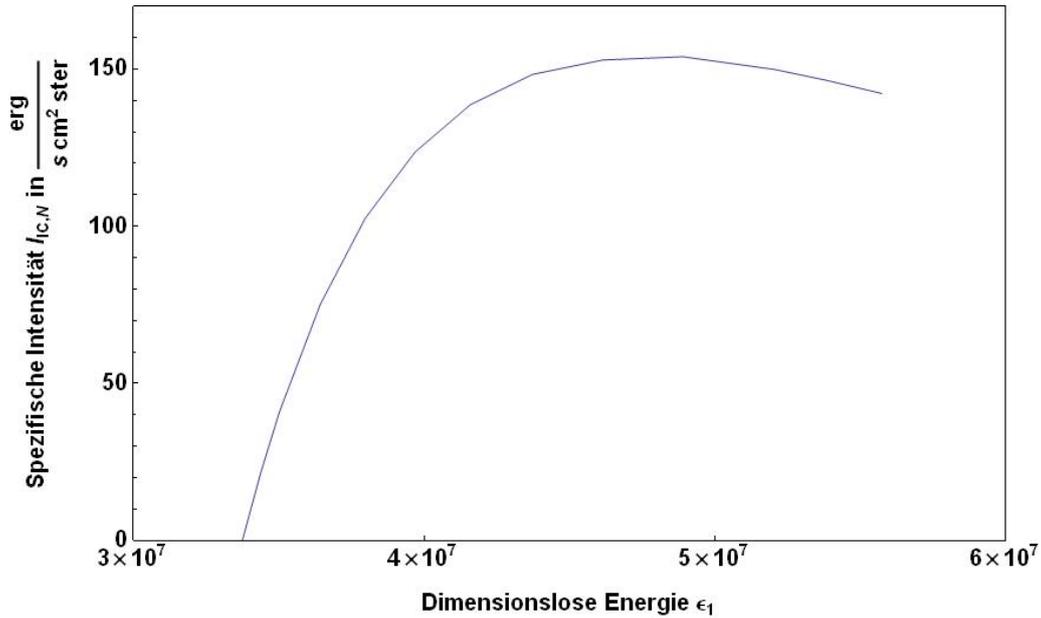


(a) Gezeichnet ist in Abhängigkeit von ϵ_1 in Blau der Wert des Integrals 4.31 sowie in Grün gestrichelt der Wert des Integrals 4.32. Zusätzlich ist in Rot punktiert der durch analytische Umformung gewonnene Ausdruck 4.37 gezeichnet. Da alle drei Kurven sehr nahe beieinanderliegen, wurde die grüne / rote Kurve um 0,1cm / 0,2cm in y -Richtung verschoben.

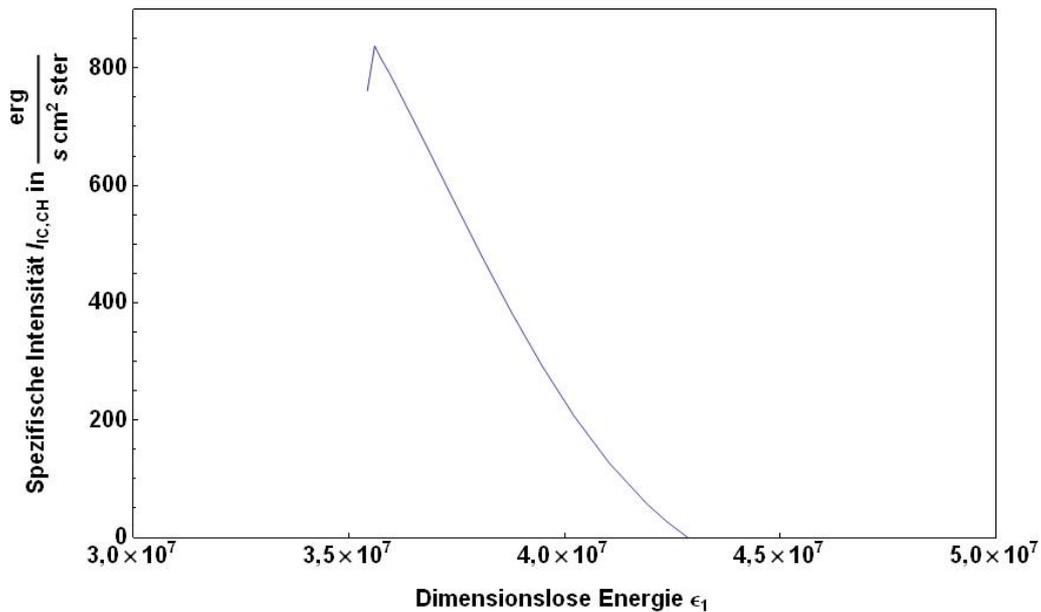


(b) Gezeichnet ist in Abhängigkeit von ϵ_1 in Blau der Wert des Integrals 4.31 mit $\gamma_{\text{CH,aus}}$ anstelle von $\gamma_{\text{N,aus}}$ sowie in Grün gestrichelt der Wert des Integrals 4.32 mit $\gamma_{\text{CH,aus}}$ anstelle von $\gamma_{\text{N,aus}}$. Da beide Kurven sehr nahe beieinanderliegen, wurde die grüne Kurve um 0,1cm in y -Richtung verschoben.

Abb. 6.9: Integral über Diracsche Deltafunktionen variabler Mittelwerte



(a) Spezifische Intensität $I_{IC,N}(\epsilon_1)$.



(b) Spezifische Intensität $I_{IC,CH}(\epsilon_1)$.

Abb. 6.10: Betrachtet wird hier die durch inverse Compton-Streuung des nach innen gerichteten Strahls aus Krümmungsstrahlung am entgegengesetzt gerichteten Teilchenstrahl hervorgerufene spezifische Intensität I_{IC} im Fokus $\Omega_1 = \Omega_e$ des sich ergebenden, sich nach außen durch die Outer Gap bewegenden Strahls. Dargestellt ist diese jeweils am äußeren Ende der Outer Gap, es ist also das Integral der Emissivität über die gesamte Outer Gap berechnet. Die Eckigkeit der Kurven ist durch eine begrenzte Anzahl an Auswertepunkten der Funktion bedingt, wodurch jedoch die Auswertung in akzeptabler Zeit möglich wurde. Die Funktionen $I_{IC}(\epsilon_1)$ wurden an dreizehn Stellen $\epsilon_{1,i} = \gamma_{\text{aus}}(d_i)$ ausgewertet, wobei die dreizehn Orte d_i in etwa äquidistant über die gesamte Outer Gap verteilt sind. Der eigentlich erforderliche Integrationsbereich von $l_1 = 0,5R_{LZ}$ bis $l_2 = R_{LZ}$ konnte dank dem in Kapitel 4.3.3.2 beschriebenen Verfahren auf ein Intervall der Breite $l_2 - l_1 = 3b$ beziehungsweise $5b$ verkleinert werden. Dieses Intervall ist jeweils auf den Ort d_i zentriert. Es wurde $\sigma = 10$ für die Breite der Gauß-Verteilungen sowie $\epsilon_0 = 5 \times 10^{-2}$ für die obere Integrationsgrenze des Integrals in 4.27 verwendet.

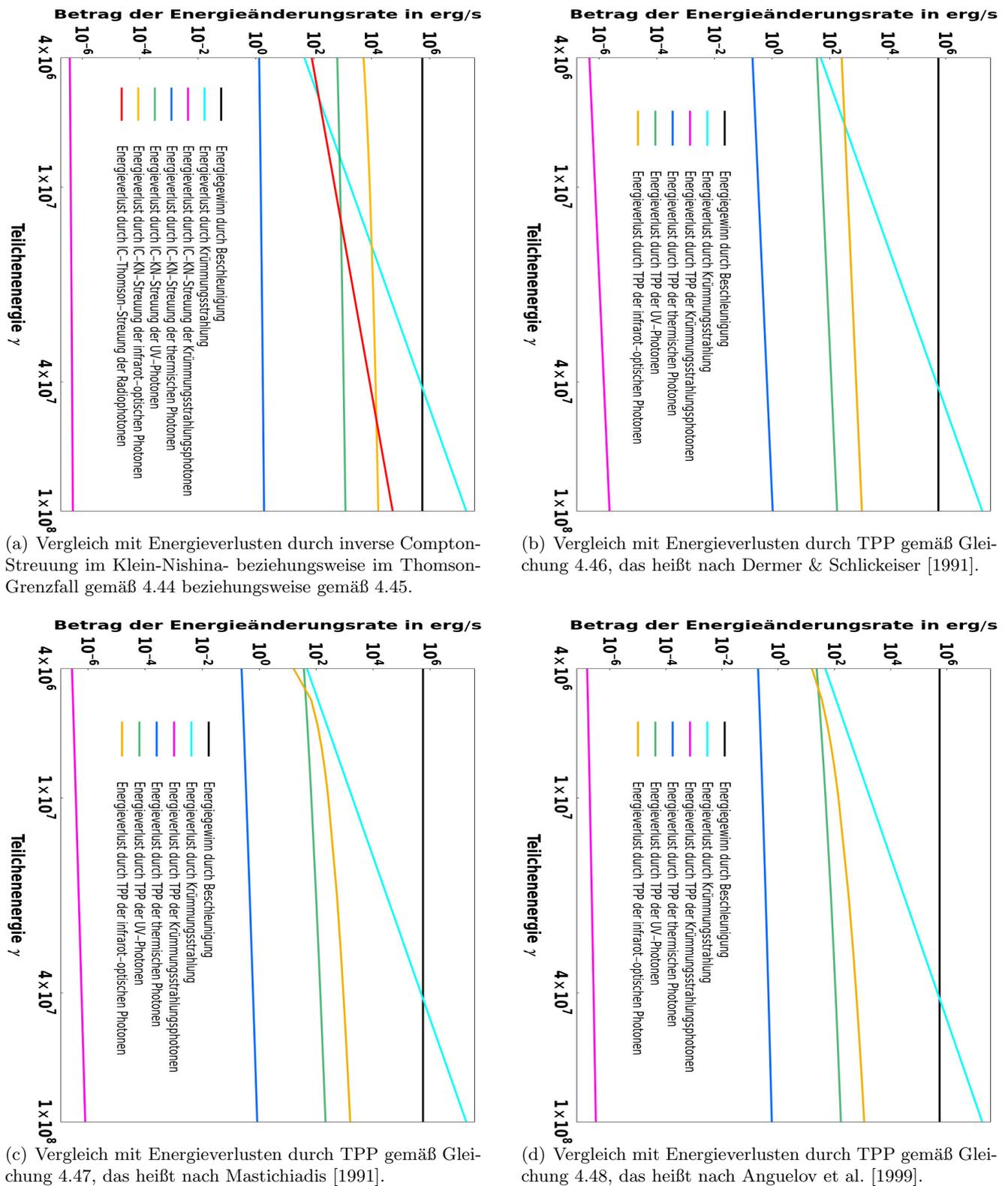
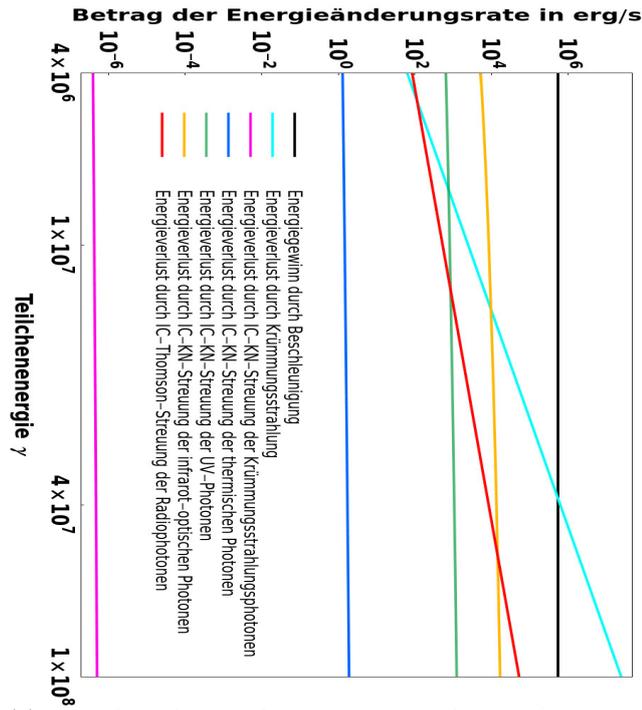
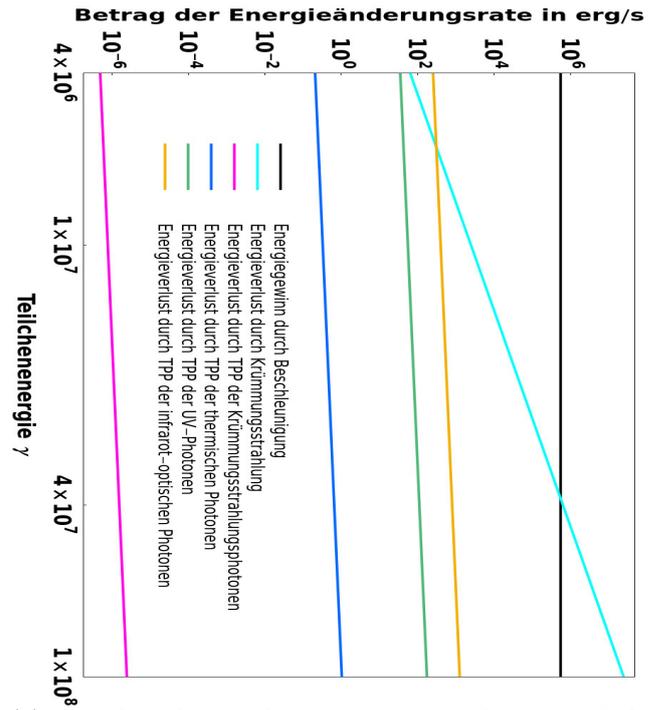


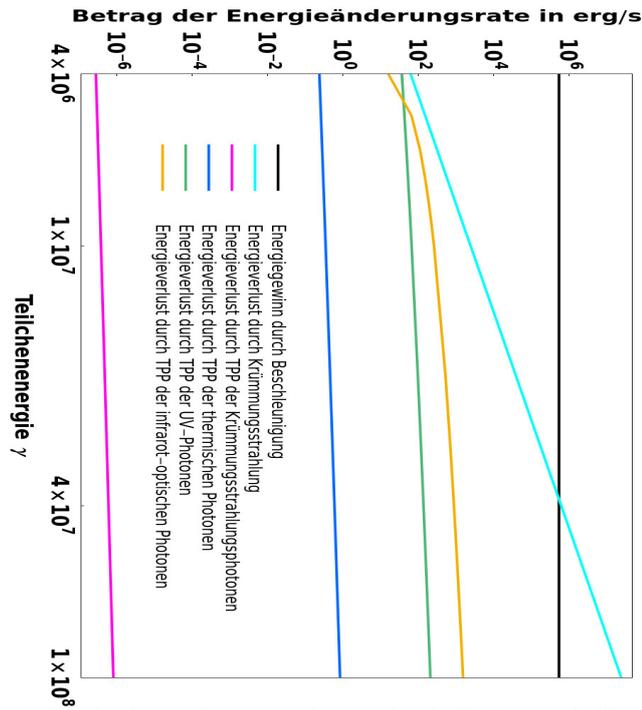
Abb. 6.11: Vergleich der Energieverlust-Rate der Teilchen des sich nach außen bewegenden Strahls durch die konkurrierenden Wechselwirkungsprozesse in der Outer Gap für den Fall γ_N . Aufgetragen ist in doppelt-logarithmischer Skalierung für verschiedene Prozesse und verschiedene Ziel-Photonen-Felder der Betrag der Rate der Energieänderung gegen die Energie γ der Teilchen. Stets ist der Energiegewinn durch die Beschleunigung im elektrischen Feld gemäß 4.40a sowie der Energieverlust durch Emission von Krümmungsstrahlung gemäß 4.42a eingezeichnet. Die Anzahl-Dichte $n_{\text{ges,int},N,>r}$ der sich einwärts bewegenden Krümmungsstrahlungs-Photonen gemäß 4.17 wurde am Ort $r = \frac{1}{2}0,5R_{\text{LZ}} + \frac{1}{2}R_{\text{LZ}}$ ausgewertet. Für die obere Grenze der Integrale, in denen $n_{\text{ges,int},N,>r}(\epsilon)$ auftaucht, wurde $\epsilon_0 = 1000 \times 10^{-2}$ verwendet. Die Eckigkeit der gelben Kurve wurde durch die begrenzte Zahl an Auswertungspunkten verursacht.



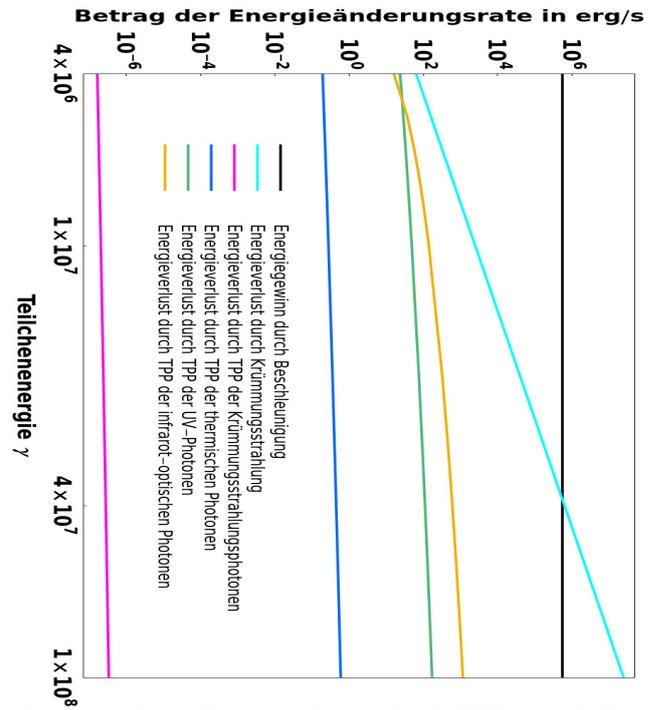
(a) Vergleich mit Energieverlusten durch inverse Compton-Streuung im Klein-Nishina- beziehungsweise im Thomson-Grenzfall gemäß 4.44 beziehungsweise gemäß 4.45.



(b) Vergleich mit Energieverlusten durch TPP gemäß Gleichung 4.46, das heißt nach Dermer & Schlickeiser [1991].



(c) Vergleich mit Energieverlusten durch TPP gemäß Gleichung 4.47, das heißt nach Mastichiadis [1991].



(d) Vergleich mit Energieverlusten durch TPP gemäß Gleichung 4.48, das heißt nach Anguelov et al. [1999].

Abb. 6.12: Zum Vergleich der Energieverlust-Rate der Teilchen des sich nach außen bewegenden Strahls durch die konkurrierenden Wechselwirkungsprozesse in der Outer Gap für den Fall γ_{CH} . Aufgetragen ist in doppelt-logarithmischer Skalierung für verschiedene Prozesse und verschiedene Ziel-Photonen-Felder der Betrag der Rate der Energieänderung gegen die Energie γ der Teilchen. Stets ist der Energiegewinn durch die Beschleunigung im elektrischen Feld gemäß 4.40b sowie der Energieverlust durch Emission von Krümmungsstrahlung gemäß 4.42b eingezeichnet. Die Anzahl-Dichte $n_{ges,int,CH,>r}$ der sich einwärts bewegenden Krümmungsstrahlungs-Photonen gemäß 4.17 wurde am Ort $r = \frac{1}{2}0,5R_{LZ} + \frac{1}{2}R_{LZ}$ ausgewertet. Für die obere Grenze der Integrale, in denen $n_{ges,int,CH,>r}(\epsilon)$ auftaucht, wurde $\epsilon_0 = 1000 \times 10^{-2}$ verwendet. Die Eckigkeit der gelben Kurve wurde durch die begrenzte Zahl an Auswertepunkten verursacht.

Literaturverzeichnis

- Abdo, A. A., et al., 2010, *Fermi Large Area Telescope Observations of the Crab Pulsar And Nebula*, Ap. J., 708, 1254
- Aleksić, J., et al., 2012, *Phase-resolved energy spectra of the Crab pulsar in the range of 50-400 GeV measured with the MAGIC telescopes*, Astron. & Astrophys., 540, 69
- Aliu, E., et al., 2011, *Detection of Pulsed Gamma Rays Above 100 GeV from the Crab Pulsar*, Science, 334, 69
- Anguelov, V. , 1999, *On the numerical analysis of triplet pair production cross-sections and the mean energy of produced particles for modelling electron-photon cascade in a soft photon field*, J. of Phys. G, 25, 1733
- Arons, J., Scharlemann, E. T., 1979, *Pair formation above pulsar polar caps - Structure of the low altitude acceleration zone*, Ap. J., 231, 854
- Arons, J., 2007, *Pulsars: Progress, Problems and Prospects*, arXiv:0708.1050
- ATNF Pulsar Catalogue version 1.46, 2012
<http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>
siehe auch Manchester, R. N., et al, 2005, Astron. J., 129, 1993, arXiv:astro-ph/0412641
- Baade, W., Zwicky, F., 1934, *Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays*, Phys. Rev., 46, 76
- Baumjohann, W., Treumann, R. A., 1997, *Basic Space Plasma Physics*, Imperial College Press
- Bejger, M., Haensel, P., 2002, *Moments of inertia for neutron and strange stars: Limits derived for the Crab pulsar*, Astron. & Astrophys., 396, 917
- Blumenthal, G. R., Gould, R. J., 1970, *Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases*, Rev. of Mod. Phys., 42, 237
- Carramiñana, A., et al., 2000, *Optical Spectrum of Main-, Inter-, and Off-Pulse Emission from the Crab Pulsar*, Ap. J., 542, 974
- Carroll, B. W., Ostlie, D. A., 2007, *An Introduction to Modern Astrophysics - Second Edition*, Pearson Addison Wesley
- Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Dover Pub. Inc.
- Cheng, K. S., Ho, C., Ruderman, M., 1986, *Energetic Radiation from Rapidly Spinning Pulsars. I. Outer Magnetosphere Gaps*, Ap. J., 300, 500
- Cheng, K. S., Ho, C., Ruderman, M., 1986, *Energetic Radiation from Rapidly Spinning Pulsars. II. Vela and Crab*, Ap. J., 300, 500
- Cocke, W. J., Disney, M. J., Taylor, D. J., 1969, *Discovery of Optical Signals from Pulsar NP 0532*, Nature, 221, 525

- Comella, J. M., et al., 1969, *Crab Nebula Pulsar NP 0532*, Nature, 221, 453
- Cowling, T. G., 1953, *The Sun*, Kuiper G. P.
- Demtröder, W., 2005, *Experimentalphysik 3*, Springer
- Dermer, C., Schlickeiser, R., 1991, *Effects of triplet pair production on ultrarelativistic electrons in a soft photon field*, Astron. & Astrophys., 252, 414
- Dermer, C., Menon, G., 2007, *Lecture Series in Black Hole Astrophysics*,
http://heseweb.nrl.navy.mil/gamma/~dermer/lectures/Book/chpt6_rev.pdf
- Deutsch, A. J., 1955, *The Electromagnetic Field of an Idealized Star in Rigid Rotation in Vacuo*, An. D'Astrophys., 18, 1
- Eikenberry, S. S., et al., 1997, *High Time Resolution Infrared Observations of the Crab Nebula Pulsar and the Pulsar Emission Mechanism*, Ap. J., 477, 465
- Fischer, H., Kaul, H., 2006, *Mathematik für Physiker - Band 3*, B.G. Teubner Verlag
- Gold, T., 1968, *Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources*, Nature, 218, 731
- Goldreich, P., Julian, W. H., 1969, *Pulsar Electrodynamics*, Ap. J., 157, 869
- Haug, E., 1981, *Simple Analytic Expressions for the Total Cross Section for γ -e Pair Production*, Z. Naturfor., 36a, 413
- Hessels, J. W. T., et al., 2006, *A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz*, Annu. Rev. Astron. & Astrophys., 8, 265
- Hewish, A., 1970, *Pulsars*, Science, 311, 3901
- Hewish, A., et al., 1986, *Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source*, Nature, 217, 709
- Hirotoni, K., Shibata, S., 1999, *One-dimensional electric field structure of an outer-gap accelerator - I. γ -ray production due to curvature radiation*, Mon. Not. R. astr. Soc., 308, 54
- Hirotoni, K., 2005, *High energy emission from pulsars: Outer gap scenario*, Adv. in Sp. Res., 35, 1085
- Hirotoni, K., 2008, *High Energy Emission from Rotation-Powered Pulsars: Outer-gap vs. Slot-gap Models*, arXiv:0809.1283
- Hirotoni, K., 2008, *Outer-gap versus Slot-gap Models for Pulsar High Energy Emissions: The Case of the Crab Pulsar*, Ap. J., 688, L25
- Landau, L., 1932, *On the theory of stars*, Phys. Z. d. Sow., 1, 285
- Longair, M. S., 2002, *High energy astrophysics - volume 2*, Cambridge University Press
- Lyne, A., Graham-Smith, F., 2012, *Pulsar Astronomy - Fourth Edition*, Cambridge Astrophysics Series
- Lyutikov, M., et al., 2008, *The very-high energy emission from pulsars: a case for inverse Compton scattering*, Ap. J., 754, 33
- Mannheim, K., 2013 *Persönliches Gespräch*
- Maron, O., et al., 2000, *Pulsar spectra of radio emission*, Astron. & Astrophys. Suppl. Ser., 147, 195
- Mastichiadis, A. et al., 1986, *Electron-Positron Pair Production by Ultrarelativistic Electrons in a Soft Photon Field*, Ap. J., 300, 178

- Mastichiadis, A. , 1991, *Relativistic electrons in photon fields: effects of triplet pair production on inverse Compton gamma-ray spectra*, Mon. Not. R. astr. Soc., 253, 235
- Mestel, L., 1971, *Pulsar Magnetosphere*, Nature Phys. Scie., 233, 149
- Moffett, D. A., Hankins, T. H., 1999, *Polarimetric Properties of the Crab Pulsar between 1.4 and 8.4 GHz*, Ap. J., 522, 1046
- Muslimov, A. G., Harding, A. K., 2003, *Extended Acceleration in Slot Gaps and Pulsar High-Energy Emission*, Ap. J., 588, 430
- Nolting, W., 2007, *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*, Springer
- Ostriker, J. P., Gunn, J. E., 1969, *On the Nature of Pulsars. I. Theory*, Ap. J., 157, 1395
- Otte, N. A., 2008, *Detection of the Crab pulsar above 25 GeV with the MAGIC telescope*, 37th COSPAR Scientific Assembly, 37, 2311
- Pacini, F., 1968, *Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants*, Nature, 219, 145
- Pacini, F., Salpeter, E. E., 1968, *Some Models for Pulsed Radio Sources*, Nature, 218, 733
- Perl, M., 1974, *High Energy Hadron Physics*, Wiley
- Rybicki, G. B., Lightman, A. P., 1979, *Radiative processes in astrophysics*, John Wiley & Sons
- Sandberg, A., Sollerman, J., 2009, *Optical and infrared observations of the Crab Pulsar and its nearby knot*, Astron. & Astrophys., 504, 525
- Sharp, N. A./NOAO/AURA/NSF, 1989
http://www.noao.edu/image_gallery/html/im0565.html
- Sollerman, J., et al., 2000, *Observations of the Crab Nebula and its Pulsar in the Far-Ultraviolet and in the Optical*, Ap. J., 537, 861
- Staelin, D. H., Reifenstein III, E. C., 1986, *Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula*, Science, 162, 1481
- Takata, J., Wang, Y., Cheng, K. S., 2010, *Pulsar High Energy Emissions from Outer Gap Accelerator Closed by a Magnetic Pair-creation Process*, Ap. J., 715, 1318
- Tang, A. P. S., 2008, *A Revisit of the Phase-resolved X-ray and Gamma-ray Spectra of the Crab Pulsar*, Ap. J., 676, 562
- Tennant, A. F., 2001, *Discovery of X-Ray Emission from the Crab Pulsar at Pulse Minimum*, Ap. J., 554, 173
- Wang, R., Hirotani, K., 2011, *Death Line of Gamma-Ray Pulsars with Outer Gaps*, Ap. J., 736, 127
- Weisskopf, M. C., et al., 2004, *Chandra Phase-Resolved X-Ray Spectroscopy of the Crab Pulsar*, Ap. J., 601, 1050
- Young, M. D., et al., 1999, *A radio pulsar with an 8.5-second period that challenges emission models*, Nature, 400, 848

Abbildungsverzeichnis

1.1	Optische Aufnahme des Crab-Pulsars mit dem Kitt Peak Mayall Teleskop von Sharp/NOAO [1989]	4
1.2	P - dP/dt -Diagramm aller bekannten Pulsare	5
1.3	Spektrum des Crab-Pulsars aus dem Jahr 1969 aus Hewish [1970]	6
1.4	Hochenergie-Spektrum des Crab-Pulsars von MAGIC, EGRET und VERITAS aus Aleksić et al. [2012]	7
2.1	Darstellung des Magnetfelds sowie des elektrischen Feldes im Modell eines starr rotierenden, scharf begrenzten, magnetisierten, perfekten Leiters gemäß Deutsch [1955]	11
2.2	Geometrie zur Betrachtung eines Dipol-Feldes	13
2.3	Beispielhafte Darstellung eines Dipol-Feldes sowie der $B_z = 0$ -Geraden	16
2.4	Titelbild: Struktur der Pulsar-Magnetosphäre nach dem Goldreich-Julian-Modell gemäß Goldreich & Julian [1969]	19
2.5	Die von Cheng et al. [1986a] verwendete Geometrie zur Betrachtung der Outer Gap	21
2.6	Verlauf des elektrischen Feldes E_{\parallel} in der Outer Gap in Abhängigkeit vom Abstand r für Parameter des Crab-Pulsars	24
2.7	Geometrie zur Betrachtung der Compton-Streuung	30
2.8	Vergleich von gesamtem Streuquerschnitt von Triplet Paar-Erzeugung und Compton-Streuung	37
2.9	Geometrie zur Betrachtung der Triplet Paar-Erzeugung	40
4.1	Erwarteter Verlauf von $\gamma(r)$ für kleines γ	48
4.2	Vergleich von Krümmungsstrahlung und thermischer Strahlung von der Neutronenstern-Oberfläche.	57
4.3	Geometrie zur Betrachtung der Compton-Streuung der beiden Strahlen in der Outer Gap	58
4.4	Spektrum der möglichen Ziel-Photonen-Felder.	68
5.1	Vergleich des theoretischen und beobachteten VHE-Spektrums.	78
6.1	Numerische Lösungen der kinetischen Differenzialgleichungen der geladenen Teilchen im elektrischen Feld der Outer Gap mit Energieverlusten durch Krümmungsstrahlung	82
6.2	Vergleich der Fit-Funktionen $\gamma(r)$ mit der ursprünglichen numerischen Lösung der Differenzialgleichungen für die Bewegung geladener Teilchen in der Outer Gap	83
6.3	Berechnete Krümmungsstrahlungs-Spektren der sich durch die Outer Gap bewegenden Teilchen.	84
6.4	Berechneter Verlauf der spektralen Leistung entlang der Outer Gap für verschiedene Frequenzen.	85
6.5	Integrierte Spektren der Krümmungsstrahlung eines sich entlang der Outer Gap bewegenden Teilchens.	86
6.6	Spektrale Anzahl-Dichte der Krümmungsstrahlungs-Photonen eines sich entlang der Outer Gap bewegenden Teilchenstrahls.	87
6.7	Spektrum der invers Compton-gestreuten Emissivität	87
6.8	Integral über Gauß-Verteilungen variabler Mittelwerte	88

6.9	Integral über Diracsche Deltafunktionen variabler Mittelwerte	89
6.10	Integriertes Spektrum (spezifische Intensität) der durch inverse Compton-Streuung in der Outer Gap erzeugten Strahlung.	90
6.11	Energieänderungsrate der Teilchen des sich nach außen bewegenden Strahls durch verschiedene Wechselwirkungsprozesse in Abhängigkeit von der Teilchenenergie für den Fall γ_N	91
6.12	Energieänderungsrate der Teilchen des sich nach außen bewegenden Strahls durch verschiedene Wechselwirkungsprozesse in Abhängigkeit von der Teilchenenergie für den Fall γ_{CH}	92