Dissertationsschrift

Axiomatisieren lernen mit Papierfalten

Entwicklung, Durchführung und Auswertung
eines Hochschulkurses für gymnasiale Lehramtsstudierende

Dmitri Nedrenco

Institut für Mathematik
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

April 2022

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Hans-Georg Weigand von Herzen für die sehr freundschaftliche Zusammenarbeit, konstante und unerschöpfliche Ermutigung, mein Promotionsprojekt zu Ende zu bringen, sowie für die Möglichkeit, diese Dissertationsschrift und Forschung frei nach meinen Vorstellungen zu gestalten und zu entwickeln.

Ich danke Prof. Dr. Theo Grundhöfer, dessen Lehrstuhl für Geometrie ich viele Jahre angehört habe. Ich danke ihm für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre über all die Jahre der Zusammenarbeit und für zahlreiche Anekdoten und Erzählungen, die ich nicht zuletzt in vielen Lehrveranstaltungen, in denen ich ihm assistiert habe, von ihm gelernt und verinnerlicht habe. Meine eigenen Lehrveranstaltungen habe ich dadurch wesentlich bereichern können.

Dr. Florian Möller kann ich nicht genug danken. Florian hat mir nicht nur gezeigt, wie gute Lehre und Forschung aussehen, sondern hat es auch nie geschafft, Nein zu sagen, wenn ich unzählige Male in seinem Büro stand, um um Hilfe – in allen Belangen – zu bitten. Es wäre keine Übertreibung zu behaupten, er sei nicht weniger Experte des 1-fach-Origami als ich; eine Tatsache, die sich auch dadurch belegen lässt, dass Florian meinetwegen solche Wörter wie »HJA6«, »Inzidenz« oder »Grundfaltung« sofort erklären, aber nicht mehr hören kann.

Ferner danke ich allen Kolleginnen und Kollegen, die es sich zur Angewohnheit gemacht haben, bei jeder Begegnung zu fragen: »Und, was macht die Diss?« und mir somit eine konstante Quelle neuer Motivation eröffnet haben.

Ich danke auch an dieser Stelle meiner Frau Anna, die aus unerklärlichen Gründen nie daran gezweifelt hat, dass diese Arbeit irgendwann fertig wird, und mir nie Vorwürfe gemacht hat, dass es so lange dauert. Ohne sie wäre die Fertigstellung dieses Promotionsprojekts – wir haben zwei kleine Kinder – prinzipiell nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird mathematisches Papierfalten und speziell 1-fach-Origami im universitären Kontext untersucht. Die Arbeit besteht aus drei Teilen.

Der erste Teil ist im Wesentlichen der Sachanalyse des 1-fach-Origami gewidmet. Im ersten Kapitel gehen wir auf die geschichtliche Einordnung des 1-fach-Origami, betrachten axiomatische Grundlagen und diskutieren, wie das Axiomatisieren von 1-fach-Origami zum Verständnis des Axiomenbegriffs beitragen könnte. Im zweiten Kapitel schildern wir das Design der zugehörigen explorativen Studie, beschreiben unsere Forschungsziele und -fragen. Im dritten Kapitel wird 1-fach-Origami mathematisiert, definiert und eingehend untersucht.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit den von uns gestalteten und durchgeführten Kursen »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten«. Im vierten Kapitel beschreiben wir die Lehrmethodik und die Gestaltung der Kurse, das fünfte Kapitel enthält ein Exzerpt der Kurse.

Im dritten Teil werden die zugehörigen Tests beschrieben. Im sechsten Kapitel erläutern wir das Design der Tests sowie die Testmethodik. Im siebten Kapitel findet die Auswertung ebendieser Tests statt.

Am Ende der Arbeit finden sich ein Kapitel mit den Ergebnissen der Arbeit sowie ein längerer Anhang. Im digitalen Zusatzmaterial sind noch weitere ergänzende Dokumente, Codierschemata etc. zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I.

Über mathematisches Papierfalten

Vor dem Begreifen
kommt das Greifen.

(*Friedrich Fröbel*)

1. Über Papierfalten und Axiomatisieren

Zunächst, was ist Papierfalten? Wird es einfach als Falten von Papier definiert, dann ist das eine viel umfassende Definition. Beliebiges Zerknüllen von Papier, per Hand oder mechanisch, mit Werkzeugen oder ohne Werkzeuge, nach Anleitung oder ohne, real oder als Simulation – all das ist in der Definition enthalten. Papiergröße, -dicke, -form, -farbe spielen hier offenbar keine Rolle. Typischerweise tritt das Wort »Papierfalten« in einem derart allgemeinen Rahmen nicht auf. Gemeinhin wird darunter eine gezielte[1] Faltung von Papier zu einem gewünschten Objekt verstanden: Papierflieger, Weihnachtsstern, Briefumschlag etc. So definiert die British Origami Society (BOS) in ihrer Konstitution[2] Papierfalten wie folgt: »The Society defines Origami as the folding of paper of any regular shape to form two dimensional or three dimensional models of living creatures, inanimate objects and abstract forms«. Es wird augenscheinlich weder erklärt, was unter »folding of paper« noch unter »regular shape« zu verstehen ist. Eine definierende Eigenschaft des Papierfaltens ist wohl das Erzeugen eines Falzes, eines scharfen Kniffes im Papier.[3] Etwas formalistisch ausgedrückt, kann Papierfalten als eine gewisse *kontrollierte* Reihenfolge der Falzplatzierung in (bereits gefaltetes) Papier angesehen werden.

Zugleich wird unter Papierfalten das sog. *Origami* verstanden.[4] Der Duden definiert Origami (aber nicht Papierfalten) als eine alte japanische Kunst des Papierfaltens.[5] Origami ist somit laut Duden ein spezielles Papierfalten, eine kunstvolle Form des Papierfaltens. Was bedeutet aber das Wort »Origami«? Im Japanischen steht *»oru«* für *»falten«* und *»kami«* für *»Papier«*. Zusammengesetzt ergibt sich nach den Regeln der japanischen Grammatik *origami*. Folglich liefert das Wort Origami

[1]»Zufälliges« Zerknüllen von Papier wurde aber auch bereits untersucht, vgl. [DiD02].

[2]Abgedruckt etwa im member's handbook der BOS.

[3]Papier kann auch entlang Kurven gefaltet werden. Ist jedoch das Ergebnis der Faltung (ggf. lokal) eben, dann ist der Falz dort notwendigerweise eine gerade Linie, vgl. [SC40], [FT99, S. 27]. Es hat falsche Beweise dieser Tatsache gegeben, aber in [SC40] wird dieses richtig bewiesen. Vgl. auch [Yat45, S. 154].

[4]Es gibt Arbeiten, die nahelegen, dass »Origami«, obwohl schon seit langer Zeit ein japanisches Wort, in Japan für die kunstvolle Faltung von Papierfiguren als Übersetzung des deutschen »Papierfalten« adoptiert wurde, vgl. [Oka97], [Lis97, S. 518]. Das Wort »Origami« wurde in Japan ähnlich wie vormals in Europa das Wort »Diplom« benutzt: Eine ein Mal gefaltete Urkunde, vgl. ebd.

[5]»Origami« auf Duden online. URL: https://www.duden.de/rechtschreibung/Origami (Abrufdatum: 2. Juni 2021).

an sich im Prinzip nicht mehr als »Papierfalten« bzw., je nach Übersetzung, »gefaltetes Papier«. Im Deutschen wird im Origami das »a« betont, im Japanischen wird das Wort wohl mit leichter Betonung des ersten »i« ausgesprochen.[6] In dieser Arbeit werden die beiden Wörter, Origami und Papierfalten, synonym verwendet: kontrolliertes Erzeugen von scharfen Falzen im Papier.

Es gibt spezifische Begriffe, die Mathematik und Origami vereinen, die wir aber nicht benutzen werden. »Origamics« wurde von Kazuo Haga 1994 als eine Mischung aus »origami« und »mathematics« eingeführt, vgl. [Hag02, S. 307]. Ferner ist gelegentlich das Wort »Origametry/Origametria« anzutreffen, das an die Verbindung zwischen Origami und Geometrie erinnern soll. Es ist unklar, wer diesen Term zuerst benutzt hat: Miri Golan und Paul Jackson beanspruchen die Erfindung für das Israeli Origami Center, vgl. [GJ09]. Aber vermutlich prägte diesen Begriff Steven Barr 1966, vgl. [Bar66], [Jus90b]; vgl. auch das aktuelle Buch [Hul20] von Tom Hull mit dem Titel »Origametry«. Wir werden jedoch hauptsächlich vom mathematischen Papierfalten sprechen.

1.1. Mathematisches Papierfalten

In dieser Arbeit wird Papierfalten primär aus mathematischer Perspektive betrachtet. Es muss daher für das weitere Vorgehen geklärt werden, *welches* Papierfalten damit gemeint ist. Zweifelsohne kann argumentiert werden, dass jedwede Faltung von Papier geometrischer Natur ist, weil dabei Geraden, Strecken, Punkte und Figuren (geometrische Objekte) entstehen und Spiegelungen und Symmetrien (geometrisch-algebraische Objekte) erzeugt werden. Wir wollen jedoch eine wesentlich engere Auffassung der mathematischen Komponente des Faltens verfolgen. Die von der BOS gegebene und gerade zitierte Definition ist auf ein mathematisches Verständnis des Faltens erkennbar nicht zugeschnitten. Eine strenge Definition eines irgendwie mathematisch gearteten Papierfaltens zu geben, fällt schwer.

Zum Einen ist die Vielfalt verschiedener Aspekte oder Teilbereiche des Faltens sehr groß: Von Kirigami über Flachfaltbarkeit, starres Falten und 1-fach-Origami, bis hin zu modulärem Falten und Tessellationen – diese recht disjunkten Gebiete haben, zugespitzt, nur Papier und den Prozess des Faltens gemein.[7] Sollte eine allumfassende Definition gegeben werden, fiele sie allgemein und wenig hilfreich aus.

Zum Anderen fällt es schwer, die wesentlichen Charakteristiken des Faltens herauszustellen und dann mathematisch zu modellieren: Wollen wir die Bewegung

[6] vgl. https://ja.forvo.com/word/origami/ sowie [Hag02, S. 307].

[7] Selbst das ist nicht unbedingt richtig: Bei starrem Falten wird naturgemäß starres Material wie etwa Metall, versehen mit Scharnieren anstelle von Falzen, gefaltet.

des Papiers oder nur das Resultat beschreiben? Wie kann die Nicht-Selbstdurchdringung des Papiers mathematisch erfasst werden? Mit der Sprache welcher mathematischen Disziplin soll Origami beschrieben werden? – All das sind wesentliche Fragen, die keine offensichtlichen Antworten haben.

So konzentriert sich etwa Tom Hull in einer seiner Definitionen des Origami (dort im Rahmen der Flachfaltbarkeitstheorie) auf den »Papier-Aspekt« des Faltens – Papier soll nicht geschnitten, gedehnt oder selbstüberschnitten werden: Demnach ist Origami auf einem gegebenen Faltmuster eine stetige injektive Funktion $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ für einen Bereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, die bis auf die Punkte auf den Falzen glatt ist, vgl. [Hul20, S. 76]. Es ist nicht sehr schwer, die fehlenden Begriffe wie Faltmuster und Falze zu definieren, allerdings verzichten wir hier darauf, da wir diese Definition nicht benötigen.

Eine wesentlich technischere Definition von Origami, in der etwa auch das Faltmuster und der Falt*prozess* sorgfältig definiert werden, stammt von Dacorogna et al., vgl. [DMP08]. Wir geben diese Definition (kompakter und leicht angepasst) an, um die Komplexität einer solchen Definition zu verdeutlichen.

Definition 1.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir nennen eine Abbildung $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ starr, falls u Lipschitz-stetig (und dann nach Rademacher fast überall differenzierbar) und die Jacobi-Matrix von u an fast allen Stellen orthogonal ist. *Das modelliert die Erfahrung, dass Papier nicht dehnbar ist.* Die Menge der Stellen, auf denen u nicht differenzierbar ist, bezeichnen wir mit Σ_u. *Das modelliert das Faltmuster, die Menge der Falze.*

Eine starre Abbildung u heiße stückweise stetig differenzierbar, falls

a) Σ_u in Ω abgeschlossen ist,
b) u auf jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega\backslash\Sigma_u$ stetig diffbar ist und
c) jedes Kompaktum in Ω nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von $\Omega\backslash\Sigma_u$ schneidet (*das modelliert unter anderem die Forderung, dass nur endlich viele Falze mit einem Punkt inzidieren.*)

Wir nennen u *Faltgut*, wenn zusätzlich eine Folge von Lipschitz-stetigen und injektiven Funktionen $u_k : \Omega \to \mathbb{R}^3$ existiert, die gleichmäßig gegen u konvergiert.

Ist zusätzlich $u(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$, dann nennen wir u eine *Flachfaltung*. ◊

Diese Definitionen mathematisieren den Prozess und die charakteristischen Eigenschaften des Papierfaltens. Ferner zeigen sie auf, dass es überhaupt möglich ist, den Faltvorgang mathematisch zu erfassen. Sie sagen jedoch nicht (wie etwa die

BOS), *was* gefaltet werden soll. So können diese Definitionen für Faltungen von Origami-Kranichen, aber auch von regelmäßigen Fünfecken verwendet werden.

Diese mathematisch formulierten Definitionen schränken das Falten auf spezielle mathematische Formen nicht ein, sie liefern lediglich mathematische Beschreibungen des Papierfaltens. Wir wollen jedoch Papierfalten aus einer mathematischen Perspektive jenseits des bloßen Faltprozesses auffassen und Papierfalten für mathematische Überlegungen und im Endeffekt für einen mathematikorientierten Unterricht gebrauchen. Dazu wollen wir verdeutlichen, welche Art des mathematischen Faltens für uns von besonderem Interesse ist.

Wird ein geometrisches Objekt, etwa eine Pyramide, gefaltet und anschließend oberflächlich mathematisch untersucht, indem beispielsweise ihr Volumen bestimmt wird, so ist eine Trennung dieser Aktivität in zwei Prozesse (das Falten und das Berechnen) erkennbar. Ohne eine Analyse[8] des Faltobjekts und die damit zwingend verbundene mathematische Analyse der Faltschritte, stellt für uns *das Falten* der Pyramide keinen erkennbaren mathematischen (sondern höchstens einen Motivations-)Mehrwert dar und kann ggf. durch Zusammenkleben eines Netzes der Pyramide oder einen 3D-Druck ersetzt werden. Die für die Volumenbestimmung wichtigen Längen können dann durch Messen o.Ä. bestimmt werden, vgl. auch [Geo11]. Aus unserer Sicht erhält das Falten der Pyramide einen mathematischen Mehrwert erst dann, wenn die nötigen Längen aus der Faltung heraus mithilfe gegebener Größen (zum Beispiel die Maße des Ausgangspapiers) bestimmt werden. Bleibt die Analyse der Faltung sowie der Faltschritte aus, wird also nach dem Prinzip »falte dies darauf« gefaltet, dann vermuten wir, dass es möglich sein wird, zwei separate Prozesse im Tun der Faltenden zu identifizieren. Prozess 1: Es wird gefaltet; eine räumlich-motorische Tätigkeit. Prozess 2: Es wird gerechnet, eine mathematische Tätigkeit. Dabei laufen beide Prozesse ggf. weitgehend unabhängig voneinander ab.[9] In der Definition des mathematischen Papierfaltens wollen wir versuchen, diese Auftrennung im Rahmen des Möglichen zu vermeiden. So wird das alleinige Falten von mathematischen Objekten (Würfel, Pyramide, regelmäßiges Fünfeck, Winkelhalbierende) von uns als keine *mathematische* Tätigkeit verstanden. Zu einer mathematischen Tätigkeit wird das Falten erst, wenn gewisse Regeln des Faltens beachtet werden und mathematische Ideen in die Faltung oder ihr Produkt aktiv von den Faltenden einbezogen werden. Beispielsweise kann ein Oktaeder aus Papier hergestellt werden, indem etwa mittels einer Videoanleitung oder einer Bildsequenz aus sechs Papierstücken Hilfsobjekte gefaltet werden, die anschließend zusammenge-

[8] Hier kann das Wort buchstäblich verstanden werden: Das gefaltete Objekt wird zerlegt, aufgefaltet.

[9] Diese Idee ist bereits in [Geo11, S. 354] verschriftlicht: »Paper folding is fun, but where is the math? Unless teachers develop lessons that address mathematical objectives, origami could be nothing more than a cute activity.«

steckt das Oktaeder ergeben [SH13, S. 54–57]. Das ist Falten eines mathematischen Objekts, aber in unserem Sinne kein mathematisches Papierfalten, da keine mathematischen Überlegungen in den Faltprozess einfließen. Daher wird zwischen Falten von (mathematischen) Objekten und dem *mathematischen Falten* unterschieden.

Definition 1.2. Unter *mathematischem Papierfalten* wird ein Teilgebiet des Papierfaltens verstanden, bei dem nach gewissen festgelegten und mathematisch erklärbaren Regeln in endlich vielen Schritten gefaltet wird, um anschließend das »Faltgut«, das Ergebnis der Faltung, mit mathematischen Methoden zu analysieren. ◇

Die »Regeln« und »mathematische Methoden« müssen je nach Anwendungsfall festgelegt werden.

Die Definition ist bereits so formuliert, dass sie an Konstruktionen im geometrischen Sinne erinnert. Die Reduktion des mathematischen Papierfaltens auf »Konstruieren« (wie mit Zirkel und Lineal) wäre jedoch zu restriktiv. Es gibt viele Arten des Papierfaltens, wie die sog. Flachfaltbarkeit, vgl. Anhang A.1, die ebenfalls zum Kanon des mathematischen Papierfaltens zählen, jedoch nicht primär als Konstruktionen betrachtet werden.

Der Begriff *Konstruktion* ist im Zusammenhang mit mathematischem Papierfalten sehr wichtig, aus axiomatischer aber auch aus der historischen Perspektive, vgl. Abschnitt 1.2. So ist etwa das sog. 1-fach-Origami, vermutlich *das* Beispiel für mathematisches Papierfalten, eng mit dem Begriff der Konstruktion verbunden und knüpft an Konstruktionen mit Zirkel und Lineal an. Dazu sollten wir klären, was unter Konstruktionen im Allgemeinen verstanden wird und was im Speziellen eine Faltkonstruktion sein soll.

In [Wei+14, S. 64–65] wird eine Konstruktion wie folgt charakterisiert:

> Ausgehend von einer im Allgemeinen vorgegebenen Ausgangskonfiguration wird durch Konstruktion mit ausgewählten Werkzeugen, die nur nach festgelegten Regeln eingesetzt werden dürfen, eine Zielkonfiguration erzeugt. [Dabei ist eine] Ausgangskonfiguration eine Menge geometrischer Objekte (z.B. Punkte, Kreise, Geraden) und ein System von Beziehungen [zwischen diesen Objekten]. Konstruktionsschritte [sind] eine endliche Anzahl von Operationen mit festgelegten Werkzeugen (z.B. Zirkel und Lineal), die nur nach festen Regeln verwendet werden. [...] [Eine] Zielkonfiguration [...] ist – falls sie existiert – wieder eine Menge geometrischer Objekte und Beziehungen, die die Ausgangskonfiguration einschließt und erweitert.

Wir ergänzen diese Definition durch einen iterativen Prozess: Jede Operation eines Konstruktionsschritts verwendet lediglich Objekte der Ausgangskonfiguration oder Objekte, die mittels bereits durchgeführter Operationen entstanden sind.

Wir werden diese Definition in der allgemeinen Form nicht benötigen und hauptsächlich in der euklidischen Ebene falten. Daher spezialisieren wir sie wie folgt:

Definition 1.3. Seien Teilmengen (zum Beispiel Punkte, Geraden, Kreise) der euklidischen Ebene gegeben. Diese nennen wir *konstruiert*. Eine *Faltkonstruktion* heiße ein endlicher, wiederholbarer und mathematisch erklärbarer Prozess, bei dem aus bereits konstruierten Teilmengen mittels Falten weitere Teilmengen der euklidischen Ebene entstehen. Diese Mengen nennen wir dann auch konstruiert. ◇

In Kapitel 3 geben wir eine Definition von 1-fach-Origami derart an, dass es im Sinne der Definitionen 1.2 und 1.3 Konstruieren und mathematisches Papierfalten ist. Bis dahin gebrauchen wir lapidar die alltägliche Beschreibung des 1-fach-Origami:

1-fach-Origami

Falte in der Ebene so, dass pro Faltschritt genau ein Falz entsteht.

Das 1-fach-Origami spielt in dieser Arbeit eine überragende Rolle. Um es kennenzulernen und mathematisch einzuordnen, wollen wir vor der formalen Definition und Analyse in Kapitel 3 den geschichtlichen Werdegang dieser Disziplin betrachten.

1.2. Geschichtliche Einordnung

In diesem Abschnitt geht es um die Entstehungsgeschichte von 1-fach-Origami. Dabei interessiert uns nicht die vollständige Beschreibung der einzelnen Schritte, sondern wir wollen uns bei der folgenden Darstellung auf zwei Fragen konzentrieren: Welchen Weg hat 1-fach-Origami aus axiomatischer Sicht absolviert und was kann über die Entdeckung und die daran beteiligten Personen der für 1-fach-Origami wichtigen Beloch-Faltung gesagt werden.

Im aktuellen Buch »A History of Folding in Mathematics« beschreibt Michael Friedman sehr detailliert die Entstehungsgeschichte des mathematischen Papierfaltens und konzentriert sich vor allem auf die Zeit vor 1940. Insbesondere diskutiert er ausführlich die Arbeiten zum Papierfalten von Friedrich Fröbel, Sundara Row, Adolf Hurwitz, Margherita Piazzolla Beloch und anderen. Außerdem beleuchtet er die Zeit um 1989, in der die moderne Formulierung der »Axiome« des 1-fach-Origami entstanden ist. Friedman konzentriert sich dabei auf die Darstellung der Ergebnisse von Humiaki Huzita und Jacques Justin. Noch aktueller ist das Buch [Hul20] von Tom Hull, in dem unter anderem viele geschichtliche Bemerkungen zu finden sind. Hull zitiert und ordnet viele der Quellen ein (vgl. dort Abschnitte 1.6, 2.5), die wir auch besprechen. Unsere Darstellung ist jedoch unabhängig von Hulls Buch entstanden.

Wir können uns auch nicht ansatzweise an das Niveau an Informiertheit und Detailliertheit von Friedman halten und beschränken uns auf sporadische Ereignisse, die uns für die Entwicklung des Themas der vorliegenden Arbeit als wertvoll erscheinen. Viele dieser Ereignisse sind in seinem Buch wesentlich ausführlicher beschrieben, wir verweisen auf diese Passagen entsprechend. Eine Vielzahl der unten dargestellten Ereignisse waren uns vor Friedman bekannt, allerdings verhilft sein Buch zu einem viel kohärenteren Blick auf die Geschichte des axiomatischen Papierfaltens, als es uns vor der Lektüre des Buches möglich war. Einige Ausführungen von Friedman sowie die betroffenen Originalarbeiten haben uns zu Nachforschungen angeregt, die zum Teil weitere interessante Details zur Entstehung des axiomatischen Papierfaltens beleuchten.

Für die vorliegende Arbeit gibt es insgesamt keinen Grund, über die Ursprünge des Papiers und des Papierfaltens genau zu berichten. Es gibt keinen oder nahezu keinen mathematischen Bezug zum Papierfalten bis in die Neuzeit.[10]

Erste Quellen: Fröbel, Row, Ahrens, Hurwitz Unter den ersten Quellen, in denen Papierfalten für mathematisch-geometrische Zwecke eingesetzt wurde, finden sich Ausführungen [Frö66] von Friedrich Fröbel, dem Begründer der modernen Kindergartenbewegung. Fröbels Beitrag zum Papierfalten, als eine von Fröbels Gaben,[11] ist mehr pädagogischer Natur für Kinder im Vorschulalter und hat mit 1-fach-Origami nichts zu tun. Für eine ausführliche Darstellung des Fröbelschen Beitrags zum Papierfalten verweisen wir auf [Fri18, Abschnitt 4.2.1].

Erst das Buch »Geometric Exercises in Paper Folding« [Row66] von Sundara T. Row aus dem Jahr 1893[12] untersuchte Papierfalten, das in großen Teilen als 1-fach-

[10] Friedman beginnt seine Erzählung bei Dürers Polyedernetzbetrachtungen, welche als faltmathematisch bezeichnet werden können, vgl. [Fri18, Kap. 2.1].

[11] Papierfalten war in der ursprünglichen Liste der Gaben nicht enthalten und wurde erst Jahre später, 1850, als eine Gabe eingeführt, vgl. [Fri18, Abschnitt 4.2.1.2].

[12] Wir kennen es heute in der editierten und überarbeiteten Version von Beman und Smith. Interes-

Origami[13] präsentiert wird, systematisch im Sinne eines Konstruktionswerkzeugs.[14] So wurden dort etwa Konstruktionen von regelmäßigen Drei, Sechs- und Achtecken aber auch von Parabeln oder allgemein von Kegelschnitten beschrieben. Row expliziert bereits in der Einleitung, dass mit Papierfalten einige Konstruktionen in der euklidischen Ebene leichter als mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden können. Im Wesentlichen will das Buch (konkret die ersten neun Kapitel) bekannte Konstruktionen von regelmäßigen Polygonen nachfalten.[15]

Rows Buch ist für uns von einigem Interesse, weil dort bereits Aussagen über allgemeine Konstruierbarkeit mit 1-fach-Origami getroffen werden. Row expliziert die Regeln des Faltens[16] nicht, jedoch widmet er erstaunlicherweise ein ganzes Kapitel, Kapitel XII, der Beschreibung der »allgemeinen Prinzipien«, die beim Konstruieren benutzt wurden (etwa Kongruenz, Symmetrie etc.).

Wie viele Autorinnen und Autoren nach Row unterschätzt auch er die Möglichkeiten des Papierfaltens

> »In Sundara Row's *Geometric Exercises in Paper Folding* it is evident that all ruler and compass constructions are possible by paperfolding. However, Sundara Row's angle trisection is admittedly only an approximation and he mistakenly implies that constructing a cube root is impossible in general«, vgl. [Mar98, S. 145], [Row66, §§ 96, 112].

Rows Buch, das vermutlich als erstes ausschließlich[17] geometrischem Papierfalten gewidmet ist, wurde viel gelesen, es wird in vielen Büchern zum geometrischen Konstruieren zitiert.

In den nächsten Jahrzehnten gab es mehrere Arbeiten zum Thema (geometrisches) Papierfalten, wir erwähnen nur einige davon, die uns unmittelbar betreffen (für eine ausführliche Besprechung verweisen wir auf [Fri18, Kapitel 5.1.1]).

Bereits 1901 hat der Mathematiker Dr. Wilhelm Ahrens im letzten Kapitel seiner »Mathematische Unterhaltungen und Spiele«, vgl. [Ahr01, Kap. XXIII], Papierfal-

santerweise haben die Herausgeber von Rows Buch über Felix Klein erfahren, welcher erstaunlicherweise bereits 1895 von Rows Buch wusste und dies in »Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie« erwähnte, vgl. [Row66, Editor's Preface], [Kle95, S. 33].

[13] Row benutzt dieses Wort natürlich nicht, aber seine Konstruktionen sind größtenteils im Sinne des 1-fach-Origami beschrieben.

[14] Row schreibt in der Einleitung des Buches, dass es von Fröbels Papierfalten-Gabe inspiriert wurde.

[15] »The first nine chapters deal with the folding of the regular polygons treated in the first four books of Euclid, and of the nonagon.«, [Row66, S. x].

[16] Unter anderem faltet er Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende. Für die Konstruktion des regelmäßigen Dreiecks benutzt er, in moderner Terminologie, die Faltung einer Parabeltangente, vgl. [Row66, § 25].

[17] Ein im Sinne des Buches wesentlicher Vorteil von Papierfalten gegenüber dem Zirkel und Lineal ist, dass keine Werkzeuge außer Papier selbst benötigt werden, vgl. [Row66, S. vii].

ten als eine Art Konstruktionswerkzeug betrachtet und sogar von »Fundamentalkonstruktionen« (Anführungszeichen im Original) gesprochen, vgl. [Ahr01, S. 396]. Friedman beurteilt diesen Aspekt vorsichtig als eine Art Versuch, Papierfalten axiomatisch aufzuziehen:

> »Ahrens was therefore the first, along with Wiener, to think about folding in terms of an approach that could be called axiomatic, since he attempted to ground it in fundamental operations«, vgl. [Fri18, S. 277].

Allerdings kann bei näherer Betrachtung eine axiomatische Bestrebung in Ahrens' Arbeit nicht nachgewiesen werden. Die Fundamentalkonstruktonen, von denen er drei angibt (in moderner Darstellung: Falten von Loten, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden), schreibt er in Anführungszeichen, was darauf hindeutet, dass er keine Absicht hat, diese als irgendeine Art Axiome zu behandeln, sondern möglicherweise diese Operationen (beim Falten spricht er operativ: »zur Deckung bringen«) als einige elementare, einschrittige und von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bekannte Operationen ansieht. Ferner benutzt Ahrens seine Fundamentalkonstruktionen nicht methodisch. Bei der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks (wie bei Row), vgl. Abb. 1.1, ignoriert er die ihm zur Verfügung stehende Lot-Fundamentalkonstruktion (Lot auf f durch B falten, um C zu konstruieren) und markiert stattdessen C mittels einer weiteren approximativen Faltung (und faltet somit nicht im Sinne von 1-fach-Origami oder einer Konstruktion).

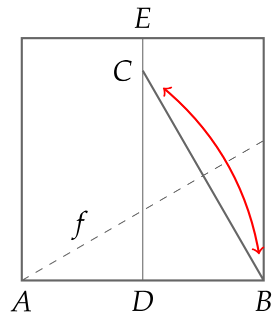


Abbildung 1.1.: Nachzeichnung der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks von Ahrens mittels Falten von Papier. Dort wird zunächst DE als Mittelsenkrechte von AB gefaltet. Dann sollen wir »*AB* um *A wenden*, so dass B auf DE fällt in C«. Dann soll *C mittels einer Falte* markiert werden. [beide Auszeichnungen von D.N.]. Hier verwendet Ahrens wie Row (in moderner Terminologie) das Falten der Tangente f an die Parabel, gegeben durch Brennpunkt B und Leitgerade DE, vgl. Satz 3.12 auf S. 3.12. Allerdings wird diese Operation nicht thematisiert, vgl. [Fri18, S. 276].

Darüber hinaus expliziert Ahrens, dass auch weitere Werkzeuge beim Falten verwendet werden dürfen,

> »wobei als Hülfsmittel zulässig sind ein Messer zum Zuschneiden des Papiers längs einer Falte und Papierstreifen zum *Abmessen* [Kursiv von D.N.] unter sich gleich langer Linien«, vgl. [Ahr01, Abschnitt I.].

Ahrens präzisiert sogar ebenda, dass das Anlegen von Papierstreifen abgemessener Länge tatsächlich auch zulässig ist, indem er einer Rechteckfaltung folgen lässt:

> »Soll das Rechteck vorgeschriebene Dimension haben, so bedient man sich zum Abmessen derselben eines Papierstreifens, dem man durch Falten und Abtrennen mit dem Messer eine geradlinige Kante gegeben hat«.

Insgesamt ist die Behandlung von Papierfalten durch Ahrens keineswegs so stringent wie dies etwa bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal üblich ist und obwohl er geometrische Konstruktionen »lediglich durch Falten von Papier« ausführen will, vgl. [Ahr01, S. 394], lässt eine gewisse Beliebigkeit in der Auswahl der Hilfsmittel sowie die Nichtbenutzung seiner eigenen Fundamentalkonstruktionen erkennen, dass von einer ernst gemeinten axiomatischen Absicht nicht die Rede sein kann.[18]

In darauffolgenden Jahren gab es vereinzelte Arbeiten zum mathematischen Papierfalten wie [Hur85; Lot07; YY08; Rup24], die wir nicht alle besprechen wollen und hierzu auf [Fri18, S. 278–295] verweisen.

Einen wesentlich formaleren Ansatz als bei Ahrens zeigt Adolf Hurwitz (im selben Jahr) 1907 in seinem 22. Tagebuch [Hur85, Tagebuch 22, S. 173-174]. Dort präzisiert er, dass »bei praktischer Ausführung von Faltungen [...] nur folgende Operationen mit Sicherheit auszuführen sind«. Hier wird der Unterschied zu Ahrens deutlich. Ahrens diskutiert nicht, warum er seine Fundamentalkonstruktionen so wählt, Hurwitz erklärt jedoch, dass nur die vier von ihm angegebenen möglich sind, nämlich (in moderner Darstellung) Falten des Schnittpunkts zweier Geraden, Falten von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden, Falten einer Parabeltangenten. Die von ihm angegebene Liste ist nicht vollständig und es wäre interessant zu wissen, wie Hurwitz zu der Erkenntnis kommt, dass »nur« diese vier Operationen möglich sind.[19] Jedoch nimmt Hurwitz die von Ahrens nur implizit verwendete Parabeltangentenkonstruktion als eine grundlegende Operation auf. Friedman nennt sie »Hurwitz's fold«.

[18] Friedman bemerkt »it seems, however, that Ahrens's interest in paper folding was somewhat limited. In a shorter version of his 1901 book, a book from 1907 called *Mathematische Spiele*, Ahrens does not mention paper folding in general or Row in particular«, vgl. [Fri18, S. 277]. Friedman übersieht jedoch die zweite wesentlich erweiterte Auflage, die nun in zwei Bänden (1910 und 1918) erscheint. Im Band 2 und Kapitel XXII finden wir Papierfalten wieder, die Darstellung wurde nur ganz unwesentlich aktualisiert, alle obigen Zitate und Schlussfolgerungen stimmen weiterhin.

[19] Das vollständige Zitat von Hurwitz ist »Bei praktischer Ausführung von Faltungen *wird man bald feststellen*, dass nur folgende Operationen mit Sicherheit auszuführen sind.« [Hervorhebung von D.N.] Das heißt Hurwitz leitet seine Operationen nicht aus formalen, sondern aus praktischen Beobachtungen ab.

Neben der Unvollständigkeit der Liste der ausführbaren Faltoperationen weist die Darstellung von Hurwitz noch eine weitere Ungenauigkeit auf: Er schreibt von mit Sicherheit ausführbaren Operationen, jedoch ist seine Parabeltangentenkonstruktion nicht immer ausführbar, etwa dann nicht, wenn A innerhalb der Parabel mit Brennpunkt B und Leitgeraden G liegt, vgl. Abb. 1.2. Friedman diskutiert diese Nichtausführbarkeiten sowie die sich daraus ergebenden epistemologischen Fragen [Fri18, S. 281]. Wir vermuten, dass es Hurwitz nicht darum ging, eine Theorie des

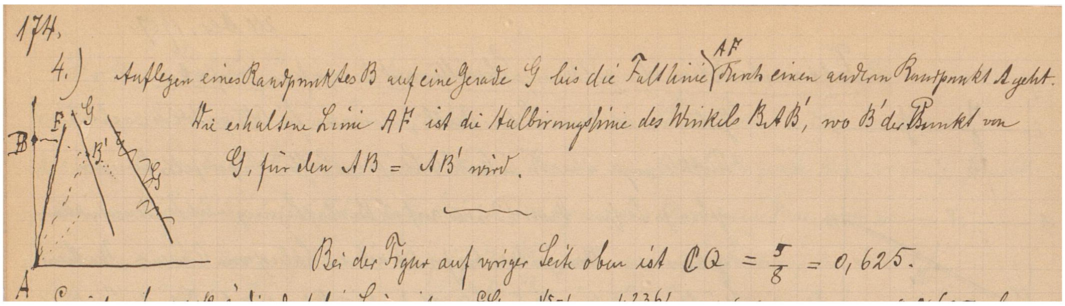


Abbildung 1.2.: Ein Teil der Seite 174 aus dem Tagebuch 22 von Adolf Hurwitz, vgl. [Hur85].

Papierfaltens zu entwickeln, sonst wäre seine Analyse des Papierfaltens vermutlich sorgfältiger ausgefallen.

C. A. Rupp Rupp geht in [Rup24] ein Schritt weiter als Hurzwitz und präzisiert, was und *wie* gefaltet werden *soll*, wenn er schreibt »Our outfit consists of a flat piece of paper on which are marked a fixed point 0 and an arbitrary curve C. We will choose 0 as the origin of our coordinate system, and we will call it the pole of the transformation.«, vgl. [Rup24, S. 433].

Stand bei Row oder Ahrens eher die Frage im Vordergrund, *was* gefaltet werden kann, so hat Hurwitz die Frage nach dem *Wie* des Faltens aus praktischen Überlegungen zu beantworten versucht, aber erst bei Rupp erkennen wir eine willkürlich erscheinende *Festlegung*, wie gefaltet werden soll. Aus unserer Sicht ist Rupp der erste, der Papierfalten durch bestimmte Regeln *definiert* und diese Regeln nicht aus dem Papierfalten ableitet. Genauer definiert er fünf Operationen des Papierfaltens, hat aber ein etwas anderes Verständnis von Konstruktion mit Papierfalten als dies etwa in Anlehnung an Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen üblich ist. So erlaubt er als erste seiner Operationen, jeden beliebigen Punkt des Papiers auf den Koordinatenursprung zu falten. Das heißt, die typische iterative Natur von Konstruktionen, bei denen nur (wenige) gegebene oder bereits konstruierte Punkte in weiteren Konstruktionen verwendet werden dürfen, ist für Rupp beim Falten nicht wichtig. Insbesondere hat er 1-fach-Origami nicht im Sinn. Rupp verfolgt mit Falten von Papier etwas andere Ziele als wir, daher diskutieren wir seine Arbeit nicht weiter. Friedman beschreibt Rupps Intention beim Falten so: »Folding for Rupp is transformation, which transforms one curve into another«, vgl. [Fri18, S. 285].

Margherita Piazzolla Beloch Einen wesentlichen und unerwarteten Beitrag zum mathematischen Papierfalten und konkret zu m1-fach-Origami leistete die italienische Mathematikerin Margherita Piazzolla Beloch. In ihren drei Artikeln aus den Jahren 1934–1936 zu diesem Thema hat Beloch gezeigt, wie mit 1-fach-Origami reelle Nullstellen von reellen kubischen Polynomen praktisch konstruiert werden können. Die erste und wahrscheinlich wichtigste der drei Arbeiten ([Bel34][20], [Bel36][21], [Bel90]) »Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row« führt eine bis dahin nicht entdeckte Operation des Faltens ein. Wegen der Bedeutung der Faltung wollen wir sie, Hull [Hul11, S. 308] und Friedman folgend, als Beloch-Faltung bezeichnen:

Beloch-Faltung

Seien Punkte P und Q sowie Geraden m und n gegeben. Die Punkte P und Q sind so zu falten, dass unter dieser Operation P auf m und Q auf n zu liegen kommen.[22]

Beloch erklärt, warum diese Faltung in der Regel möglich ist, indem sie sie als das Auffinden einer gemeinsamen Tangente an zwei Parabeln interpretiert. Dieser Interpretation und der Faltung werden wir in Kapitel 3 mehr Zeit widmen. Sie erklärt dann wie diese Operation es ihr ermöglicht, das Delische Problem mittels Falten zu lösen. Sie bemerkt außerdem, dass es ihre Faltung erlaubt, reelle Nullstellen kubischer Polynome zu finden und verweist dabei auf die (bekannte / »noto«) grafische Methode von Eduard Lill. Wir werden ihre Konstruktionen nicht nachzeichnen und nicht im Detail diskutieren, ordnen aber ihre Resultate und Methoden ein. Wir diskutieren ihre Konstruktionen nicht, weil dies bereits ausführlich bei Friedman und bei Hull geschehen ist, vgl. [Fri18, Abschnitt 5.2.2], [Hul11]. Außerdem war Beloch

[20] Abgedruckt (mit englischer Übersetzung von Michael Friedman) in [Fri18, Appendix A] und in [Bel67, S. 382–384].

[21] Abgedruckt in [Bel67, S. 385–388] und [Huz90b, S. XX–XXIV].

[22] Belochs ursprüngliche Formulierung (in englischer Übersetzung von Friedman) lautet: »Let A, B be the two given points and r, s be the two given straight lines. Denote by X, Y the vertices of the square to be build, lying respectively on the lines r, s«. Mit dem Quadrat meint Beloch das gesuchte Quadrat der im Vorfeld formulierten Konstruktionsaufgabe (englische Fassung und die Ergänzung in eckigen Klammern von Friedman): »Construct a square, two of whose opposite edges [or their extensions] pass through two given points, respectively, and two of whose adjacent vertices are respectively on two given straight lines«.

an einer Axiomatisierung des Papierfaltens nicht interessiert und hat ihre Operation nicht ausführlich studiert. Ferner liegt inzwischen eine angepasste Methode von Thomas Hull vor, vgl. [Hul11], mit der die Beloch-Faltung etwas leichter nachvollzogen werden kann. Unabhängig davon ist Belochs Beitrag zu 1-fach-Origami von unschätzbarer Bedeutung. Wir gehen nun auf einige für uns interessante Aspekte rund um ihre Arbeit ein.

Wir schrieben oben, dass die Beloch-Faltung *in der Regel* möglich ist. Damit ist eine generische Lage der Punkte P, Q und der Geraden m, n gemeint. In der Regel entstehen dann aus diesen Daten der Beloch-Faltung zwei Parabeln, die in der euklidischen Ebene generisch mindestens eine gemeinsame Tangente haben. Allerdings ist die Operation »falte zwei Punkte auf zwei Geraden« in dieser allgemeinen Form natürlich nicht immer ausführbar; das werden wir im Detail in Kapitel 3 und insbesondere in Tabelle 3.2 sehen. Beloch bezieht sich sicherlich auf diese generische Lage der gegebenen Objekte, wenn sie schreibt »Since two parabolas have three common tangents, the problem admits three solutions, including certain real solutions.«, vgl. [Fri18, S. 378]. Überraschenderweise betont Friedman indes an mehreren Stellen (S. 325, 327 ebenda), dass die Beloch-Faltung immer ausführbar sei.[23]

Die anderen beiden Arbeiten von Beloch können als Ergänzungen und teilweise Wiederholungen der Ausführungen des ersten Artikels angesehen werden. Beloch expliziert, dass mit ihrer Methode Nullstellen von Polynomen von Graden 1–4 gefunden werden können, allerdings gibt sie keine expliziten Faltanweisungen an. Beloch zeigte damit, dass 1-fach-Origami alle Konstruktionen – und darüber hinaus – ausführen kann, die mit Zirkel und Lineal möglich sind.

Beloch löste das Delische Problem explizit und erwähnte die Möglichkeit der Lösung des Trisektionsproblems explizit erst 1953 in [Bel53], vgl. auch [Fri18, S. 333], jedoch zeigte sie bereits 1936, dass alle kubischen Probleme – und die Winkeldreiteilung ist auf ein solches zurückführbar – mit 1-fach-Origami lösbar sind.

Wir lesen aus Belochs Arbeiten heraus, dass es ihr nicht darum ging, Papierfalten zu axiomatisieren. Auch die Bezeichnung der Beloch-Faltung, die sie lediglich »Operation« nennt, legt das nahe. Michael Friedman beschreibt ihre Operation als »Beloch's new fundamental operation«, möglicherweise auch in Anlehnung an Ahrens oder an Belochs »Lezioni di Matematica Complementare« von 1953, wo sie von »operazioni fondamentali« spricht, vgl. [Bel90, S. XIV]. In der Tat bezeichnet sie *andere* Operationen als Fundamentaloperationen, namentlich das Falten von Verbindungsgeraden und Schnitte von Geraden, aber nicht in den 1930er Jahren und nicht die Beloch-Faltung.

[23] Selbst unter der Annahme wie dort auf S. 325, dass P und Q nicht auf den Geraden m und n liegen, ist die Faltung nicht immer ausführbar, vgl. Tabelle 3.2 auf Seite 3.2.

Friedman paraphrasiert Belochs Formulierung der Beloch-Faltung zu »Given two points P_1 and P_2 and two lines l_1 and l_2, one can, whenever possible, make a single fold that places P_1 onto l_1 and P_2 onto l_2 simultaneously«. Diese Formulierung hat er vermutlich [Hul11, S. 308] entnommen. Diese Paraphrasierung ist mathematisch sinnvoll und richtig, aus definitorischer und axiomatischer Perspektive ist sie problematisch. Friedman, oder besser Tom Hull, formulieren die Faltung als Bewegen von Punkten auf Geraden. Das sorgt dafür, dass nun erklärt werden sollte, was dieses Bewegen/Platzieren in der Tat bedeuten soll (um etwa eine mathematische Analyse zu starten). Beloch benutzt diese Formulierung nicht, was im Nachhinein sehr geschickt ist, weil sie die euklidische Ebene nicht verlässt und keine Begriffe verwendet, die zusätzlich erklärt werden müssten. So formuliert sie ihre Faltung als eine Lösung der *Konstruktion*saufgabe, gewisse Punkte auf gewissen Geraden zu finden. Beloch beschreibt, wie diese Konstruktion ausgeführt wird, durchaus mit Faltbegriffen,[24] aber sie vermeidet die Faltbegriffe in der eigentlichen Konstruktion. Mit den Schwierigkeiten in der Definition des 1-fach-Origami und der dortigen Axiome beschäftigen wir uns in Kapitel 3.

Es ist aus unserer Sicht nicht ganz klar, wie Beloch ihre Faltung entdeckte. Sie kannte das Buch von Row, weil sie es an mehreren Stellen zitiert. Friedman legt nahe, dass Beloch von Giovanni Vacca inspiriert wurde.

Der Artikel »Della piegatura della carta applicata alla geometria« [Vac30] von Giovanni Vacca von 1930 ist für uns aus drei Gründen wichtig. Es ist der erste (und aus historischer Perspektive nicht ganz unumstrittene) Artikel über die Geschichte des Faltens in der Mathematik, vgl. [Fri18, S. 320], [Hul11, S. 313]). Er ist außerdem der letzte bekannte Artikel über mathematisches Papierfalten *vor* Belochs Publikationen. Da Vacca nichts über das exakte[25] Lösen von kubischen Gleichungen mittels Papierfalten, aber eine Art Übersichtsarbeit für die damalige Zeit schreibt, ist davon auszugehen, dass Margherita Beloch in der Tat die erste war, der dieses Lösen gelungen ist. Der dritte Grund, warum Vaccas Arbeit für uns interessant ist, ist sein Wunsch, Axiome des Faltens (»postulate per una geometria della carta piegata«, ebenda) aufzustellen und Bedingungen zu formulieren, wie Papier gefaltet werden darf. Es ist eine bemerkenswerte Forderung, Papierfalten axiomatisieren zu wollen, die in dieser Form noch nicht geäußert wurde. Rupp stellte zwar seine Operationen des Fal-

[24] Sie schreibt »Per trovare una tangente comune alle due parabole basta dunque ripiegare la carta in modo che[...]«, vgl. [Bel34, S. 187], in etwa »Um eine gemeinsame Tangente zweier Parabeln zu finden, reicht es daher, das Papier so zu falten [...]«.

tens vor, doch machte er klar, dass diese nur einige mögliche sind, vgl. [Rup24, S. 433], und eine Forderung nach Axiomatisierung des Faltens ist dort nicht zu finden. Auch Hurwitz listete lediglich einige Faltoperationen auf.

Friedman führt verschiedene Argumente dafür auf,[26] dass Beloch Vacca persönlich und daher seinen Artikel kannte. Allerdings zitiert Beloch Vaccas Artikel nicht (aber das Buch von Row), ein aus unserer Sicht merkwürdiger Umstand.

Die Zeit nach Beloch Bereits wenige Jahre nach der Veröffentlichung der Arbeiten von Margherita Beloch schrieb Luigi Tenca 1949 in Italien, dass die Frage nach systematischen Beschäftigungen mit Papierfalten fast vergessen sei,[27] und verwies auf Beloch.

Belochs Arbeiten wurden lange Jahre übersehen und erst Ende der 1980er Jahre wiederentdeckt und dann in [Huz90b] von mehreren Autoren zitiert.

Englischsprachigen Quellen in der Zeit nach Belochs Publikationen scheinen ihre Arbeiten nicht bekannt zu sein. So bespricht Coolidge 1940[28] in »A History of Geometrical Methods« das Falten von Papier als eine Konstruktionsmöglichkeit vgl. [Coo47, S. 57], kennt aber die Arbeiten von Beloch nicht.[29] Er erwähnt jedoch Sundara Row namentlich[30] (den Coolidge als »Sundara Rao« bezeichnet) und erklärt, dass beim Falten nur Falten von Mittelsenkrechten und Loten erlaubt sind. Insbesondere bemerkt er, dass Papierfalten dadurch nicht alle Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen abdecken kann.

Auch Robert C. Yates, dessen Arbeiten aus den 1940er Jahren[31] zusammen mit [Row66] (sicherlich bis 1989) die wichtigsten Quellen für mathematisches Papierfalten waren, kannte die Arbeiten von Beloch allem Anschein nach nicht. Wenn Publikationen über mathematisches Papierfalten zitiert werden, dann mit hoher Wahrscheinlichkeit die von Row und Yates, aber nicht von Beloch, vgl. auch [Hes56].

Auch das Verfahren von Eduard Lill zum grafischen Auffinden reeller Nullstel-

[25] Vacca schreibt, dass es wohl möglich sei, »mit ein wenig Aufmerksamkeit«, einen gegebenen Winkel zu dritteln, [Vac30, S. 49], aber er meinte sicherlich eine approximative Faltung.

[26] vgl. [Fri18, S. 319, 323, 328].

[27] »Non ci risulta invece consigliata in nessun testo la risoluzione sistematica dei problemi geometrici ricorrendo alla piegatura del foglio, esercizi pure istruttivi ed interessanti, la questione è ora quasi dimenticata: ne trattò anni sono, in un suo corso di matematiche complementari, la Prof. M. Piazzolla Beloch della Università di Ferrara«, vgl. [Ten49, S. 289].

[28] Der Nachdruck von 1947 scheint heute eher zugänglich zu sein.

[29] Coolidge zitiert eine Arbeit von Vacca, aber eine andere als die oben besprochene.

[30] Unverständlicherweise erscheint Row in der Liste der zitierten Autoren dort nicht.

[31] Hier sind vor allem [Yat45] und [Yat49] zu nennen. Die erste Arbeit mit dem Titel »Paper folding« beschäftigt sich explizit nur mit Papierfalten, wohingegen die zweite Quelle, ein Buch, Papierfalten als eines der vielen Konstruktionswerkzeuge im Buch behandelt.

len reeller Polynome, das Beloch verwendet hat, um kubische Gleichungen mit Papierfalten zu lösen, geriet zunehmend in Vergessenheit. War diese Methode noch zu Zeiten Felix Kleins »well known«, vgl. [Fri18, S. 332], [Hul11, S. 311], wurde sie irgendwann spätestens ab den 1960ern Jahren nicht mehr geläufig. In [Ria62] wird 1962 die lillsche Methode beschrieben und die Art der Darstellung suggeriert, dass diese Methode nicht mehr bekannt ist und darum neu beschrieben wird.

In der Zeit nach Belochs Publikationen sind durchaus mehrere Arbeiten über mathematisches Papierfalten entstanden, wenngleich sie meistens mehr eine Anleitung für Lehrkräfte waren, wie Papierfalten im Schulunterricht eingesetzt werden kann. Darunter ist etwa die Broschüre »Paper Folding for the Mathematical Class« [Joh57] von Donovan A. Johnson von 1957[32] zu nennen. Dort werden im Stil von Yates einfache Konstruktionen mit 1-fach-Origami für den Schulunterricht aufbereitet. Interessanterweise werden dort zunächst explizit Postulate des Faltens angegeben, etwa (wir paraphrasieren es) das Falten von Verbindungsgeraden, Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten und Parabeltangenten. Allerdings zählt die Beloch-Faltung nicht dazu.[33] Die Behandlung des Papierfaltens ist jedoch nicht auf 1-fach-Origami beschränkt. Es werden ebenfalls Papierknoten und Kegelschnitte gefaltet.

Bemerkung 1.4. Im Hinblick auf die spätere Diskussion zum Huzitas Beitrag sei bereits hier angemerkt, dass alle fünf Operationen, die heute mit HJA1–5 abgekürzt werden, zu diesem Zeitpunkt ausdrücklich genannt wurden: Lote bei Ahrens und Coolidge, Verbindungsgerade, Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende, Parabeltangenten bei Johnson. ♯

Die einflussreichsten Arbeiten dieser Zeit zum Thema waren zweifelsohne die Bücher von Robert C. Yates, »Tools« [Yat41] und noch vielmehr die spätere, überarbeitete Version »Geometrical Tools« [Yat49],[34] die deutlich bekannter geworden ist. Bereits 1941 stellt Yates drei Postulate des Faltens auf (im Wesentlichen sind dies Falten der Verbindungsgeraden, der Mittelsenkrechte und einer Parabeltangente) und zeigt, dass damit alle Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen durchgeführt werden können.[35] Das ist besonders interessant im Vergleich zu Coolidge aus dem Jahr davor. Genauer zeigt Yates, dass die Schnittpunkte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Geraden bzw. einem gegebenen zweiten Kreis per Falten konstruiert werden können. Allerdings diskutiert er die tatsächliche Ausführbarkeit dieser Faltungen in Spezialfällen nicht.[36] Diese Referenz ist wohl die erste, in der konstruktiv, aus

[32]Die editierte Ausgabe von Alton T. Olson von 1975 unter dem Titel »Mathematics Through Paper Folding« ist heute etwas besser erhältlich.

[33]Vgl. [Joh57, S. iii], [Ols75, S. 2].

[34]Dieses Buch war zur Zeit der Recherche in deutschen Bibliotheken weder auffindbar noch bestellbar.

[35]»Remarks: We have proved that, under the chosen postulates, all constructions of plane euclidean geometry can be executed by means of creases.« [Yat41, S. 62]

[36]Yates expliziert aber für die Faltung der Parabeltangenten: »We assume the point and line are so situated, that this may be accomplished«, vgl. dort die Fußnote auf Seite 154.

den Axiomen des 1-fach-Origami, begründet wird, dass Papierfalten ein mindestens so starkes Konstruktionswerkzeug wie Zirkel mit Lineal ist. Beloch wusste und erklärte das auch (und wesentlich mehr),[37] sie zeigte es auf eine algebraische Weise, indem sie erklärte, dass alle Gleichungen vom Grad 1-4 mit Papierfalten lösbar sind. Yates kannte die Arbeit von Row[38] und zitierte ihn bereits 1941 in [Yat41], jedoch erwähnte er Beloch in keiner dieser Arbeiten. Anders als Row expliziert Yates das Resultat seiner Faltpostulate, vgl. unsere Fußnote Nr. [35].

Ludwig Bieberbach[39] beschreibt in [Bie52, § 12] Konstruktionen mit einem Winkelhalbierer und erklärt, dass »Papierfalten« ein solcher Winkelhalbierer wäre. Neben der Konstruktion der Winkelhalbierenden, sind für ihn die Faltung der Verbindungsgeraden und der Parabeltangente die drei Operationen des Papierfaltens. Er schreibt, dass Papierfalten »ein völliger Ersatz für Zirkel und Lineal« sei. Das ist bemerkenswert, weil Bieberbach Yates' Arbeiten hierzu wohl nicht kennt.[40] Noch bemerkenswerter ist der nächste Satz aus [Bie52, S. 50]:

> »Bemerkt man noch, dass man auch die in § 16 zu besprechenden Konstruktionen dritten Grades durch *Einschiebung* [Das ist äquivalent zum markierten Lineal, D.N.] vermittels Papierfalten bewerkstelligen kann, so hat man einen Eindruck von der Tragweite dieses simplen Konstruktionsmittels.«

Es kann vermutet werden, dass Bieberbach erkannt hat, wie die Einschiebung per Papierfalten durchgeführt werden kann, nämlich indem eine Strecke zwischen zwei Geraden eingeschoben wird, was wiederum auf Falten von zwei Punkten auf zwei Geraden führt. Diese Bemerkung von Bieberbach, die er nicht weiter ausführt und keiner Quelle zuordnet, ist möglicherweise die erste deutsche Arbeit,[41] in der Papierfalten als ein stärkeres Konstruktionswerkzeug als Zirkel und Lineal erkannt wird. Das scheint bisher noch nicht thematisiert worden zu sein.

In den nachfolgenden dreißig Jahren gab es keine uns bekannten Arbeiten, welche die Arbeiten von Yates et al. wesentlich weiterentwickelt hätten.

---

[37] »[Papierfalten] è uno strumento che può servire utilmente per la risoluzione effettiva non soltanto di tutti i problemi risolubili con riga e compasso, ma anche di tutti i problemi di 3 e 4 grado«, [Bel90, S. 93].

[38] »The art of paper folding has been transplanted into the field of plane geometry with fascinating results by the Indian, T. Sundara Row«, vgl. [Yat45, S. 154].

[39] Der Begründer der sog. »Deutschen Mathematik« im Dritten Reich und aktiver Nationalsozialist (Mitglied der SA 1933, NSDAP 1937). Ein prominentes Opfer seiner Ansichten und Tätigkeiten war Edmund Landau 1934, vgl. [Meh87, S. 227].

[40] Bieberbach zitiert Yates auf S. 155, aber eine frühere Arbeit, [Yat40], die sich mit Konstruktionen und unter anderem mit markiertem Lineal, aber nicht mit Papierfalten beschäftigt.

[41] Außerdem die erste Arbeit nach Beloch und wesentlich vor Justin, Huzita, Martin, Abe und Messer.

Einschub: Origami außerhalb der Mathematik

In der Origamiwelt außerhalb der Mathematik entstanden in dieser Zeit Vereinigungen wie Origamy Center in New York (gegründet 1958) oder British Origami Society (gegründet 1967). Origami-Enthusiastinnen und -enthusiasten wie Lillian Oppenheimer, Gershon Legman, Robert Harbin, Akira Yoshizawa, Ligia Montoya, Vicente Solorzano und viele mehr haben in den 1950er und -60er Jahren auch dank dieser Vereinigungen voneinander erfahren, vgl. [Lis97, S. 520]. Das von Akira Yoshizawa erfundene und von von Samuel Randlett und Robert Harbin erweiterte Yoshizawa-Randlett-System zur Diagrammierung der Faltungen hat die Verbreitung und Popularisierung des Origami wesentlich vorangetrieben und wurde zur Standardnotation, vgl. [Hat21]. Eine der wichtigsten Personen in der Entwicklung der Origami-Kunst ist zweifelsohne Akira Yoshizawa, dessen jahrzehntelanges Wirken seit den frühen 1950er Jahren Origami aus einer Kindergartenbeschäftigung zu einer anspruchsvollen Kunstform gehoben hat. »The great breakthrough for origami [...] came after the Second World War when Akira Yoshizawa began to create his own imaginative models«, vgl. [Lis97, S. 519]. Sein Schaffen war wenig von mathematischen Ideen inspiriert, doch war es Yoshizawa, der modernes Origami mit lebensechten Tierfaltungen kreierte, vgl. ebd. Außerdem wurde das Yoshizawa-Randlett-System zu einem wichtigen Baustein für das Populärwerden des Origami und ermöglichte eine nachvollziehbare Dokumentation, eine Sequenzierung einer Faltung. Um lebensechte, realistische und komplexere Faltungen zu designen, mussten bestehende Faltungen analysiert, abstrahiert, verallgemeinert werden. Bereits in den 1930er und -40er Jahren sind neue Faltungen aus den Variationen der typischen Kranichfaltung entstanden, indem die Grundlage, die sog. Vogelbasis (bird base) der Kranichfaltung identifiziert und nach Designbedürfnissen modifiziert wurde, vgl. [Hat21]. Bemerkenswert ist dabei die Auffassung Yoshizawas zum mathematischen Papierfalten.

»Der Meister Yoshizawa verteidigte seinen Standpunkt von der »Reinheit« und »Schönheit« des Origami. Diese ist für ihn nur in Modellen gegeben, die die Natur widerspiegeln und mit Liebe geschaffen wurden – also in Einzigartigkeit. Er verurteilt vehement das geometrische Origami. Für ihn ist das modulare Origami herzlos und nur etwas für Roboter.« (Bericht von Paulo Mulatinho, Mitbegründer von Origami Deutschland e.V., zum Vortrag von Akira Yoshisawa auf dem Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami in Otsu Shiga, Japan, aus dem Jahr 1994, abgedruckt in »der

Falter« 17, Juni 1995, S. 11. Im gedruckten Beitrag [Miu97] von Yoshizawa zu dieser Konferenz findet sich auf Seite 464 die Bemerkung

»when we fold in a conventional way by matching the paper's corner to corner, edge to edge completes [sic!] in a standardized form. Our hands are dragged by the mechanical operation and become hands of robots«.

Mathematische Methoden und Analysen sind aber auch im künstlerischen Origami sehr präsent und teils notwendig geworden, etwa auch zum Designen komplizierter Objekte, vgl. [Lan97; Lan94; Lan18b; DO07]. Studien der Faltmuster gab es spätestens in den 1930er Jahren mit Miguel Unamuno, vgl. [Lis97, S. 519], und Vicente Solorzano, vgl. [Hat21], ein methodisches Studium der Faltmuster und Faltung kann bei Peter Engel, Jun Maekawa, Toshiyuki Meguro und Robert Lang in den 1980er Jahren beobachtet werden, vgl. ebd., [Mae08, S. 69]. Sie zerlegten die Faltmuster in spezielle Grundbausteine, *molecules*, und erzeugten neue Faltmuster durch geschicktes Zusammensetzen dieser Moleküle. Sowohl das Vorgehen als auch das Prinzip dieser Analysen erinnern stark an mathematisches Arbeiten und sind daher hier erwähnenswert. Nicht zuletzt war die erfolgreiche Entwicklung der Faltmuster und neuer, immer komplizierterer Faltobjekte der Vernetztheit vieler Origamischaffenden über die einschlägigen Vereinigungen und gedruckte Bücher zu verdanken, vgl. [Eng89; Mae08; KT87].

Die Situation war anders für konstruktives Origami. Hier gab es lange Zeit keine entsprechenden international bekannten Vereinigungen, es gab keine vernetzte community. Dies wird auch durch die mehrmalige Entdeckung der Beloch-Faltung durch Beloch, Justin, Huzita, Martin, Messer illustriert, wie wir noch sehen werden.

In den 1980er Jahren erschienen mehrere bahnbrechende Arbeiten auf dem Gebiet des mathematischen Papierfaltens.[42] Hishashi Abe gab[43] eine 1-fach-Origami Konstruktion der Winkeldreiteilung an, die auf alle (konstruierbaren) Winkel ausgeweitet werden konnte. Peter Messer gab eine 1-fach-Konstruktion[44] für die Lösung des Delischen Problems, über die wir weiter unten berichten werden. Jacques Justin verallgemeinerte und formalisierte diese Konstruktionen 1984–1986 zur ersten Axiomatisierung des 1-fach-Origami.[45]

Diese Situation hat sich im Jahr 1989 verändert als die erste internationale Origami-Konferenz »First International Meeting of Origami Science and Technology« von

[42] Die Theorie der Flachfaltbarkeit entstand in dieser Zeit und wurde von Jacques Justin, Jun Maekawa, Toshikazu Kawasaki und anderen intensiv untersucht. Wir können das in dieser Arbeit nicht genauer beleuchten und verweisen auf Anhang A.1, [Hul02b], [Hul20], [DO07].

[43] Publiziert 1980 auf Japanisch, vgl. [Fuc11].

[44] Damit wollen wir Konstruktionen mit 1-fach-Origami gelegentlich abkürzen.

[45] Über Justin und Messer berichten wir ab Seite 24.

Humiaki Huzita in Ferrara, Italien, organisiert und durchgeführt wurde. In dem von Huzita herausgebrachten Konferenzband [Huz90b] waren unter anderem wichtige Beiträge zur mathematischen Seite des Papierfaltens gesammelt und in einem Dokument abgedruckt. Auch die Artikel von Beloch und Justin zum mathematischen Papierfalten wurden mitaufgenommen.

Humiaki Huzita spielt eine wesentliche Rolle in der Geschichte der Axiomatisierung von 1-fach-Origami. Eine detaillierte Würdigung seines Beitrags ist in [Fri18, Abschnitt 6.1] gut dokumentiert, die wir nur geringfügig erweitern wollen. Huzita veranstaltete die besagte Konferenz und brachte den bedeutenden Konferenzband [Huz90b] heraus. In diesem Zuge wurden die Arbeiten von Beloch wieder entdeckt[46] und bekannter gemacht.[47] Typischerweise ist es Huzita, der genannt wird, wenn es um Axiome des 1-fach-Origami geht. Diese Axiome heißen meist Huzita-Justin-Axiome, die wir auf Seite 91 in Abb. 3.1 etwas angepasst wiedergeben. Huzita veröffentlichte eine Liste mit sechs »Aktionen«, die »einen Falz produzieren«[48], bereits 1986 in [Huz86] auf Italienisch.[49] Seine Beschreibung erinnert an unsere vorläufige Definition von 1-fach-Origami. Insbesondere ist bei Huzita keine Rede von Axiomen, Fundamentaloperationen oder Ähnlichem. Das ist aus »probabilmente esistono ancora altri modi di piegare la carta«, ebd, ersichtlich. Seine Liste enthält die fünf bereits gut bekannte Faltungen, vgl. Bemerkung 1.4, sowie die Beloch-Faltung. In diesem Artikel bespricht Huzita die Winkeldreiteilungen von Abe und Justin, welche die Beloch-Faltung bereits verwendeten. Daraus wird ersichtlich, dass Huzita hier keine neuen Faltungen entdeckte. In der Analyse der sechs Aktionen macht er einen Fehler und behauptet es gäbe eine einzige Möglichkeit, eine Gerade auf eine andere Gerade zu falten. Huzita übersetzt die Beloch-Faltung in eine algebraische Darstellung und erkennt, dass sie höchstens drei Lösungen haben kann.

In seinem Konferenzband publizierte Huzita diese Liste erneut und auf Englisch, vgl. [Huz90a]. Dort heißen die Aktionen nun »operations«, auch wenn der Titel der Arbeit »Axiomatic Development of Origami Geometry« lautet. Wie wir sehen werden, hatte Jacques Justin diese Resultate vermutlich vor dem Sommer 1984 aufgeschriebenen und verbreitet, vor Huzita. Huzita hat jedoch diese Operationen, die später öfter »Axiome« genannt wurden, bekannter gemacht (sicherlich auch durch

[46] Friedman vermutet, dass die Wiederentdeckung Belochs Arbeiten mehreren Menschen zu verdanken ist, aber am ehesten Benedetto Scimemi, vgl. [Fri18, S. 359]. In [Huz88] zitiert Huzita Beloch, nennt Scimemi aber nicht.

[47] Huzita nennt ganze fünf Gründe, warum die Origami-Arbeiten von Beloch unbekannt geblieben seien, unter anderem, weil sie auf Italienisch und ohne Bilder publizierte, vgl. [Huz88, S. 9].

[48] »[...] descriviamo una piegatura semplice. Il termino ›semplice‹ vuole indicare l'azione che produce una sola piega«, vgl. [Huz86, S. 433].

[49] Dieser Artikel ist abgedruckt im Konferenzband einer Konferenz, die im *März 1985* in Rom stattfand. Der Konferenzband wurde im *Februar 1986* gedruckt. Das wird später relevant.

die englischsprachige Darstellung seiner Ergebnisse). Sein Name als erster Formalisierer des 1-fach-Origami wurde etabliert, bevor die Ergebnisse von Beloch und Justin weithin bekannt wurden.

Seit diesem ersten internationalen Treffen wurden in regelmäßigen ca. 4-Jahres-Abständen weitere internationale Origami-Konferenzen durchgeführt. Die dortigen Ergebnisse sind in den Konferenzbänden [Miu97], [Hul02a], [Lan09], [Wan11], [Miu15], [Lan18a] (die gelegentlich als 1–7 OSME oder Origami$^{1-7}$ abgekürzt werden) dokumentiert. Diese Konferenzbände geben seitdem eine gute Übersicht über die Entwicklung (auch, aber bei weitem nicht nur) des mathematisch-algorithmisch orientierten Origami wieder.

Trotz der internationalen Zusammenkunft gab es auch nach der ersten und zweiten Konferenz (1989 und 1994) veröffentlichte Beiträge zum mathematischen Papierfalten, die von diesen Konferenzbänden nicht gewusst haben. Ein prominentes Beispiel ist die Arbeit von Auckly und Cleveland, vgl. [AC95]. Dort definieren sie sorgfältig, was es aus ihrer Sicht bedeuten soll, Origami-konstruierbar zu sein. Ihre Definition ist aus der mathematischen Perspektive und im Vergleich zu älteren Arbeiten wie von Rupp, Ahrens oder Yates sehr befriedigend. Origami wird dort als ein Konstruktionswerkzeug betrachtet und akkurat körpertheoretisch untersucht. Allerdings übersehen sie typische Konstruktionen mit 1-fach-Origami und so liefert ihre Definition eine schwache Version des 1-fach-Origami, die nicht einmal alle mit Zirkel und Lineal durchführbaren Konstruktionen abdeckt. Aus ihrer Literaturliste wird deutlich, dass sie außer [Row66] keine Arbeiten zum mathematischen Papierfalten wie [Bel34; Jus90b; Ger95] kannten. Genauer genommen haben sie ihre Arbeit ohne Kenntnis von Rows Buch geschrieben[50] und zitieren ein Origami-Buch von John Montroll, das künstlerisches Falten von Tieren thematisiert. Die Erwähnung der Arbeit von Auckly und Cleveland ist für uns auch deswegen interessant, weil sie ihr Origami völlig losgelöst von anderen Arbeiten zum Thema definiert haben, ad hoc. Ihr Ergebnis zeigt auf, wie wenig intuitiv eine vollständige Axiomatisierung des 1-fach-Origami sein kann; vor allem im Hinblick auf das Kapitel 3, in dem wir eine solche Axiomatisierung anstreben und Kapitel 4, 5, in denen wir die Idee und die Umsetzung einer solchen Axiomatisierung in der Lehre präsentieren.

Auch die Arbeit von Roger Alperin von 2000, in der 1-fach-Origami ebenfalls mathematisch definiert und analysiert wird, vgl. [Alp00], zeigt wie wenig die mathematische Origami community noch vernetzt war: Alperin zitiert unter anderem Auckly und Cleveland, Geretschläger, Row sowie Johnson, aber in seinem Artikel ist keine Rede von Justin, Beloch oder George Martin.

[50] »The referee mentioned two references which the reader may find interesting«, es geht um [Row66] und [Kle95].

Bemerkenswerterweise kam aber in Deutschland 1997 ein Sonderheft des Origami Deutschland e.V.[51] heraus, in dem Ernst Bläuenstein sehr ausführlich die konkreten Konstruktionen für kubische Probleme mit 1-fach-Origami angegeben, analysiert und nachgerechnet hat. Dort wird die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, das Delische Problem, die Konstruktionen von regelmäßigen 7- und 9-Ecken per »Papierfaltung« gelöst. Der Autor bemerkt, dass das Heft im Wesentlichen auf den Arbeiten von Humiaki Huzita basiert. Insbesondere wird dort [Huz90b] jedoch nicht Justin oder Beloch zitiert. Das ist auch deswegen bemerkenswert, weil der Österreicher Robert Geretschläger in [Ger95] eine zu der Liste von Huzita-Justin äquivalente Liste an Grundfaltungen angibt, *ohne* die Arbeiten von Huzita oder Justin zu zitieren. Aus dem Aufschrieb und der gesamten Darstellung in [Ger95] kann vermutet werden, dass diese Liste *unabhängig* von Justin und Huzita entstanden ist. Dieser Auffassung ist auch [DO07, S. 285, Fußnote 2]. Im Artikel [Ger95], der die Grundlage für das Buch »Geometric Origami« [Ger08] darstellt, werden explizit Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen mit 1-fach-Origami-Konstruktionen verglichen.

Jacques Justin Jacques Justin hat wesentliche Beiträge zum mathematischen Papierfalten geleistet. Besonders hervorzuheben sind Arbeiten über Flachfaltbarkeit und 1-fach-Origami, vor allem »Résolution par pliage de l'équation du troisieme degré et applications geometriques« [Jus90b]. In dieser sehr reichhaltigen Arbeit hat Justin fast alle zum Kanon der Mathematik des 1-fach-Origami gehörende Themen skizziert oder gar ausführlich behandelt. So taucht dort zum erstem Mal die vollständige Liste der Axiome (bei ihm Elementaroperationen) von 1-fach-Origami auf. Insbesondere werden sie dort erstmalig in symbolischer Form (vgl. Tabelle 1.1) beschrieben,[52] vgl. [Fri18, S. 366].

> Justin publizierte zum Thema 1-fach-Origami mehrere Artikel in kurzer Zeit. Das macht die Nachforschungen, wo und wie er zu seinen Ergebnissen kam, leichter, als es etwa bei Margherita Beloch ist. Gleichzeitig sind einige Publikationen mit Addenda versehen und rückdatieren einige seiner Entdeckungen. Außerdem überschneiden sich die Veröffentlichungen deutlich, weil Justin zeitgleich in populärwissenschaftlichen Magazinen (wie Le Pli), aber auch in Tagungsbänden publiziert hat. Zusätzlich ist es schwer, die Ergebnisse und Da-

[51] Origami Deutschland e.V. wurde 1989 gegründet und besteht bis heute. Die Vereinszeitschrift, die mehrmals jährlich erscheint, heißt »Der Falter«.

[52] Justin merkt an, dass es Peter Messer war, der ihn zur seiner symbolischen Notation der Elementaroperationen inspirierte, vgl. [Jus90b, S. 256].

tumsangaben auseinander zu halten, da Justin einige verschiedene Arbeiten mit demselben Titel publizierte.[53]

Wir wollen daher versuchen, aus unserer Sicht wichtige Meilensteine in Justins Publikationen zu 1-fach-Origami nachzuzeichnen. Die meisten nachfolgenden Darstellungen sind bereits Friedman bekannt und recht ausführlich in [Fri18, Abschnitt 6.2] präsentiert. Wir wollen eine etwas stärker zeitleistenorientierte Darstellung geben, beleuchten einige ggf. missverstandene Aspekte in Justins Veröffentlichungen und arbeiten heraus, dass wir die Priorität der Wiederentdeckung der Beloch-Faltung sowie die Erstpublikation der Huzita-Justin-Axiome bei Justin und nicht bei Huzita sehen.

Justin beschrieb in welchen Fällen diese Elementaroperationen, vgl. Tabelle 1.1, ausführbar sind, welche geometrische und algebraische Interpretation sie haben und wie viele Lösungen sie besitzen können. Etwas überraschend ist, dass Justin bei den Operationen 6 und 7 nur die algebraische Interpretation angibt, statt den üblichen geometrischen wie »Tangente an die Parabel...« und »simultane Tangente an zwei Parabeln...«, eine Beschreibung, die er bereits in Le Pli 20 verwendete.

In der folgenden Tabelle ist zu sehen, dass Justin die innere Struktur des 1-fach-Origami richtig erfasst hat: Wie lässt sich eine Faltung beschreiben, welche Angaben sind minimal nötig, um diese festzulegen. Wie bei linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen, wo die Angabe des Bildes einer Basis vollständig ausreicht, reduziert sich die Angabe einer Faltung auf die Angabe der Bilder von entscheidenden Punkten oder Geraden. Eine Faltung mittels Punkten und Geraden zu beschreiben, ist sicherlich nicht neu, bei Justin ist diese Beschreibung systematisch und elegant. Aus der systematischen Darstellung gewinnt er sogar eine neue, bis dahin nicht publizierte[54] Faltung.[55]

Friedman bemerkt in Tabelle 1.1 einen »Fehler«[56] von Justin, seine Korrektur ist aber nicht richtig. Genauer diskutiert Friedman, dass die 4. Operation von Justin eins bis zwei statt Null bis Eins Lösungen hat. Dabei interpretiert er die Angabe der Operation so, dass die beiden Geraden D und D' nichtparallel sind. Diese Interpretation ist aber nicht nachvollziehbar. Justin stellt für diese Operation die Bedingung

[53] So erschien der Artikel [Jus90a] im Januar 1984 im Rahmen eines Seminars in Paris und trug den Titel »Aspects mathematiques du pliage de papier«. Mit demselben Titel erschien eine etwas andere Arbeit 1987 in L'Ouvert, Nr. 47, S. 1-14.

[54] Wir werden sehen, dass Peter Messer diese Liste bereits auch entdeckt, aber nicht publiziert hatte.

[55] Die Faltung Nummer 4 in der Tabellle 1.1 wird immer noch häufig Hatori, der sie um 2001 wiederentdeckte, zugeschrieben. Daher trägt bei manchen Autorinnen und Autoren die Liste der Axiome/Elementaroperationen den Namen »Huzita-Hatori«. Eine nicht korrekte Bezeichnung, wie unsere Darstellung zeigt.

[56] Friedman sagt dazu »Tippfehler«, vgl. [Fri18, S. 366].

Operation	Bedingung	generisches Resultat	Anzahl
1) $P{\to}P,\ P'{\to}P'$	$P \neq P'$	Verbindungsgerade PP'	1
2) $P{\to}P'$	$P \neq P'$	Mittelsenkrechte von PP'	1
3) $P{\to}P,\ D{\to}D$		Senkrechte von P auf D	1, 2
4) $P{\to}D,\ D'{\to}D'$	$\neg(P \in D \wedge D \parallel D')$	Projektion von P auf D entlang D'	0, 1
5) $D{\to}D'$	$D \neq D'$	Winkelhalbierende von $\measuredangle D, D'$	1, 2
6) $P{\to}D,\ P'{\to}P'$	$\neg(P = P' \in D)$	Lösung einer quadratischen Gleichung	0–2
7) $P{\to}D,\ P'{\to}D'$	$\{P, P'\} \not\subseteq D \cap D' \ \wedge$ $\{P, D\} \neq \{P', D'\} \ \wedge$ $(P \notin D \vee P' \notin D' \ \vee$ $D \cap D' = \emptyset)$	Lösung einer kubischen Gleichung	0–3

Tabelle 1.1.: Die Tabelle von Justin mit Elementaroperationen. Bis auf stilistische Anpassungen und Übersetzung der Beschriftungen sowie Beschreibungen in der dritten Spalte ist die Tabelle unverändert aus [Jus90b] übernommen.

auf, dass nicht zugleich $P \in D$ und $D \parallel D'$ gelten. Friedman macht daraus fälschlicherweise $P \notin D$ *und* $D \nparallel D'$. In der Tat, wenn D und D' parallel (aber verschieden) sind und P *nicht* auf D liegt, dann wird es Situationen geben, in denen die Faltung ausführbar ist (eine Lösung) und solche, in denen sie nicht ausführbar ist (keine Lösung). Friedmans Erklärung, diese Operation habe immer mindestens eine Lösung, stimmt nur unter seiner Annahme, dass D und D' nichtparallel sind. Er erkennt jedoch korrekt, dass diese Operation Nr. 4 bis zu zwei Lösungen haben kann. Insofern geben wir Justin teilweise recht und verweisen auf die ausführliche Diskussion solcher Bedingungen in Kapitel 3. Der eigentliche Tippfehler passiert in der Interpretation von Friedman. So lautet die Erklärung der 4. Operation bei Justin »Projection de P sur D parallèlement à D'«, also eine *Projektion* von P auf D parallel zu oder entlang D'. In Friedmans Übersetzung wird daraus »Folding P on D, parallel to D'«. Wir würden diese Formulierung in der Origamiwelt so interpretieren: Falte P auf D, so dass der entstehende Falz parallel zu D' ist. Aber das ist etwas anderes. Eine bessere Übertragung wäre aus unserer Sicht: »Folding P on D, *perpendicular* to D'«. Friedman schreibt außerhalb der Tabelle »fold P on D along a crease perpendicular to D'«, eine Anweisung, die wir nicht deuten können.

Wir analysieren die Tabelle von Justin nicht im Detail, weil eine Herleitung der Grundlagen des 1-fach-Origami in Kapitel 3 ausgeführt wird. Wir merken nur kurz ein interessantes Detail in der Tabelle an. Justin schreibt, es gebe zwei Möglichkeiten, einen Punkt P auf sich selber und gleichzeitig eine Gerade D auf sich selber zu falten (das ist die 3. Operation in der Tabelle). Liegt P außerhalb von D, dann kann als Falz nur das Lot von P auf D infrage kommen. Liegt P auf D, dann ist neben diesem Lot ebenfalls D selbst ein möglicher Falz. Das bedeutet Justin lässt zu, dass bei einer Operation gar nicht gefaltet wird bzw. kein neuer Falz entsteht. Diese Ansicht wird uns in Kapitel 3 ebenfalls beschäftigen.

Weiter im Paper erklärt Justin, dass die einzelnen Elementaroperationen nicht unabhängig voneinander seien und die angegebene Liste somit redundant sei. Das ist aus axiomatischer Perspektive sehr interessant, weil diese Bemerkung die Frage nahelegt, ob die Huzita-Justin-Axiome als solche bezeichnet werden sollen.[57] Dieser Frage gehen wir in Kapitel 3 nach.

Justin zeigt ferner, wie mittels 1-fach-Origami reelle Nullstellen kubischer Polynome konstruiert werden können, und konstruiert ein regelmäßiges Siebeneck.[58]

Weiter zeigt er, wie die Winkeldreiteilung mittels 1-fach-Origami bewerkstelligt werden kann,[59] und gibt an, von der Lösung von Hishashi Abe erst nach der Veröffentlichung seiner Winkeldreiteilung erfahren zu haben, vgl. [Jus90b, Abschnitt 9.1].

Am Ende dieses Artikels beschreibt Justin die Körperstruktur der mit 1-fach-Origami konstruierbaren Punkte der Ebene[60] und expliziert, wann und wie er von verschiedenen Autorinnen und Autoren oder Ergebnissen erfahren hat.

Justin erklärt, seine Ergebnisse im Juni 1984 angekündigt zu haben, vgl. [Jus90b, S. 259]. Es ist für uns nicht ganz klar, wie diese Ankündigung zu verstehen ist. Es ist eher unwahrscheinlich, dass damit das Addendum im Paper [Jus90a] gemeint ist, sondern wohl eher das Manuskript, das Justin in Le Pli 20 zitiert, denn dort steht: »With Englisch abstract. Orithèque MFFP et B.O.S. Library«. Das würde erklären, wie nicht französischsprachige Autoren von seinen Ergebnissen erfuhren.

Zwischen März 1983 und Herbst 1985 publiziert Justin in elf Ausgaben des Le Pli (Ausgaben 14 bis 24) eine Artikelserie über Faltmathematik. Dabei geht es hauptsächlich um 1-fach-Origami in den Ausgaben 19 (Juni 1984), 20 (Oktober 1984), 21 (Dezember 1984). In der Ausgabe 19 schreibt Justin, dass vielen Faltern bekannt sei,

[57] Huzita und Huzita/Scimemi haben sich in [Huz90a; HS90] mit diesen Fragen nicht beschäftigt.

[58] Diese Konstruktion ist auf ein kubisches Problem reduzierbar.

[59] Das Delische Problem löst Justin als einen Spezialfall der Behandlung der Lösbarkeit von allgemeinen kubischen Gleichungen und zitiert Peter Messer, der eine elegante Konstruktion gefunden hat. Diese Konstruktion übernimmt er auch in Le Pli 21, Dezember 1984, [Jus84b, S. 3].

[60] Dabei erklärt Justin, dass solche Punkte als Schnittpunkte von Falzen, die mittels Elementaroperationen aus einigen bereits vorgegebenen Punkten entstehen, konstruierbar sind.

dass mit 1-fach-Origami (bei ihm einfach »pliage«) dasselbe wie mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.[61] Am 17. Januar 1984 findet ein Seminar in Paris statt, bei dem Justin über seine Forschung zum mathematischen Papierfalten berichtet. In der gedruckten Ausarbeitung, die vermutlich im Juni 1984 erschien, aber bereits vorher geschrieben war und in [Huz90b] abgedruckt ist, berichtet Justin zunächst Ähnliches (und zitiert unter anderem Row, Johnson und Yates). Im Addendum (datiert auf Juni 1984) korrigiert sich Justin und berichtet von einem wohl beispiellosen[62] und bemerkenswerten Resultat, dass mit 1-fach-Origami Gleichungen vom dritten Grad gelöst werden können. Insbesondere, fügt er hinzu, können Winkeldreiteilung und »les calcul des« kubische Wurzeln »très simplement« ausgeführt werden. Dazu erklärt Justin lediglich, dass dies durch eine einfache, aber ungewöhnliche Bedingung zu bewerkstelligen sei: Zwei gegebene Punkte auf zwei gegebene Geraden durch einen einzigen Falz bringen. Damit ist die Wiederentdeckung der Beloch-Faltung durch Justin auf Januar–Juni 1984 zu datieren.[63]

Dabei zitiert Justin in dieser Arbeit Beloch nicht. Es ist davon auszugehen, dass Justin erst 1986 von Beloch erfahren hat:[64] Seinem 1986 erschienenen Paper [Jus90b] fügt er ein Addendum hinzu und zitiert, unter Berufung auf Huzita, die Arbeit [Bel36] von Beloch.

Überraschenderweise lässt Justin im selben Artikel die abschließende Bemerkung 9.2 trotzdem abdrucken. Dort schreibt Justin wieder, dass 1-fach-Origami stärker als Zirkel und Lineal und dass dies aus zwei Gründen bemerkenswert sei: Erstens, weil zum Falten nur sehr einfache Mittel nötig sind (das hat bereits Sundara Row hervorgehoben) und, zweitens, weil lange Zeit niemand an der Operation – der Beloch-Faltung – interessiert zu sein schien bzw. es für sinnvoll hielt, die Ergebnisse zu veröffentlichen.[65] Die Arbeiten von Margherita Beloch, obwohl nun wiederentdeckt, werden auch bei Justin nicht gebührend gewürdigt. Ebenda gibt Justin eine mögliche Erklärung, wie er die Beloch-Faltung entdeckte. Er schreibt, dass diese Operation in der Origamiwelt wenig genutzt werde und die einzige Referenz, die

[61] »Mais au fait, quelles constructions de géométrie plane peut-on faire en pliage? La réponse est simple et connue de nombreux plieurs [...]: les mêmes qu'avec la règle et le compas.«, vgl. [Jus84c, S. 3].

[62] Diese Darstellung passt dazu, dass er von ähnlichen Resultaten von Messer erst im Juli 1984 erfuhr.

[63] Vermutlich könnte das noch genauer eingegrenzt werden: Die Texte für Le Pli 19 wird Justin möglicherweise nach April 1984 (Erscheinungsmonat von Le Pli 18) eingereicht haben. Damit wäre der Zeitrahmen etwa auf April–Juni 1984 zu begrenzen.

[64] Auch in Dezember 1984 schreibt Justin noch, dass seit fast Hundert Jahren (seit Rows Erstausgabe) niemandem eingefallen sei, über die [Beloch-Faltung] nachzudenken, um zu erkennen, dass dann 1-fach-Origami stärker als Zirkel und Lineal sei, vgl. [Jus84b, S. 3].

[65] Diese etwas überraschende Präzisierung dürfte Peter Messer gelten, weil er seine Ergebnisse Justin geschickt, aber nicht veröffentlicht hat. Es ist nicht nachvollziehbar, warum Justin Peter Messer nicht namentlich erwähnt.

er kennt, aus einer Broschüre[66] von BOS stamme, vgl. auch den letzten Absatz in [Jus84d]. Es wird aber nicht klar, ob er diese Faltung von dort hat oder nur eine Referenz für seine Faltung sucht. Seine Bemerkung ebenda: »une réflexion systématique aurait cependant dû conduire à cette opération«[67] klärt aus unserer Sicht die Sachlage nicht.

Schwierige Zitatenlage

In der Gesamtschau ist es unwahrscheinlich, dass Huzita die Quellenlage richtig darlegt. In [Huz86, S. 437] deutet er an (er schreibt »communicazione privata«), dass Justin die Winkeldreiteilung per 1-fach-Origami bereits 1982 entdeckt habe, vgl. auch [Fri18, S. 358]. Das kann wohl, angesichts der Darstellungen oben, kaum sein. Möglicherweise meint Huzita Ergebnisse zur Flachfaltbarkeit von Justin aus [Jus97], deren Vorläufer bereits 1982 in einigem Umlauf waren. Außerdem ist es unklar, warum Huzita in [Huz90a; HS90] die wichtige Arbeit von Justin [Jus90b] nicht zitiert und nicht erwähnt, war es doch Huzita, der Justin 1986 auf Belochs Arbeiten hingewiesen hat, vgl. das Addendum ebd. Daher erscheint auch nicht plausibel, warum Huzita um diese Zeit die Arbeiten von Beloch nicht gekannt haben soll.[68]

In Le Pli 20 führt Justin ganz zum Schluss die Beloch-Faltung ein. Er bemerkt auch, dass es diese Faltung ermöglicht, eine exakte Winkeldreiteilung durchzuführen. Allerdings führt er die Konstruktion nicht aus, obwohl er zu diesem Zeitpunkt (Oktober 1984) seine Winkeldreiteilung bereits aufgeschrieben hat (Juni 1984). Justin deutet ferner an, dass diese Faltung durch Verallgemeinerung aus der Betrachtung der Faltung eines Punktes auf eine Gerade gewonnen werden kann. Zu diesem Zeitpunkt kann Justin noch nicht die volle Stärke des 1-fach-Origami erkannt haben, denn er schreibt direkt davor, dass eine Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks per 1-fach-Origami nicht möglich sei. Gleichwohl zitiert er ebenda sein Manuskript mit dem selben Titel wie die spätere Arbeit [Jus90b] und das englische Abstract. In diesem späteren Artikel ist eine 1-fach-Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks aber realisiert. Die Publikationen der Ergebnisse von Justin lagen so nah beieinander, dass wir die verschiedene Beantwortung der Siebeneckfaltung nicht klären können.

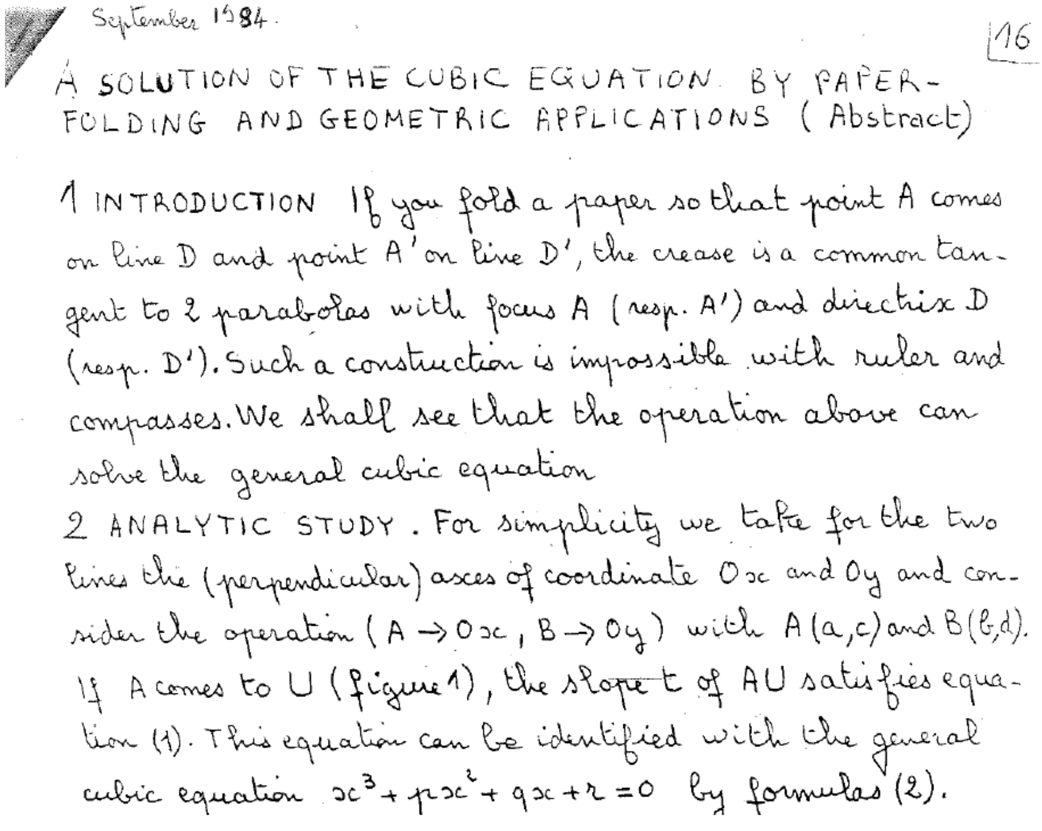
[66] BOS Booklet 21 »The Silver Rectangle« von John Cunliffe ist 1983 ersterschienen. Auf Seite 25 im Zuge einer Konstruktion eines Fünfecks wird die Beloch-Faltung (im Spezialfall mit zwei parallelen Geraden) stillschweigend verwendet, ohne sie hervorzuheben oder zu besprechen.

[67] In etwa: »Eine systematische Analyse hätte jedoch zu dieser Operation führen müssen«.

[68] »However, Huzita does not mention Beloch, and it seems that he did not hear about her or did not yet know of her work at this stage [1985-1986, D.N.]«, vgl. [Fri18, S. 358].

Durch einen Zufall sind wir auf das besagte englische Abstract gestoßen. Diese Arbeit hat Thomas Hull von Justin geschickt bekommen und hat uns freundlicherweise unter anderem dieses Dokument zukommen lassen.

Das Abstract ist offenbar nach dem Aufschrieb der Arbeit, die später als [Jus90b] gedruckt wird, geschrieben worden. Justin datiert es auf September 1984 und verweist dort auf die französische Arbeit. Dieses Manuskript besteht aus fünf Seiten auf Englisch und gibt kompakt wieder, was in der größeren französischen Arbeit zu finden ist. Ein Ausschnitt findet sich in Abb. 1.3.



September 1984.

16

A SOLUTION OF THE CUBIC EQUATION BY PAPER-FOLDING AND GEOMETRIC APPLICATIONS (Abstract)

1 INTRODUCTION If you fold a paper so that point A comes on line D and point A' on line D', the crease is a common tangent to 2 parabolas with focus A (resp. A') and directrix D (resp. D'). Such a constuction is impossible with ruler and compasses. We shall see that the operation above can solve the general cubic equation

2 ANALYTIC STUDY. For simplicity we take for the two lines the (perpendicular) axes of coordinate Ox and Oy and consider the operation (A → Ox, B → Oy) with A(a,c) and B(b,d). If A comes to U (figure 1), the ~~slope~~ t of AU satisfies equation (1). This equation can be identified with the general cubic equation $x^3+px^2+qx+r=0$ by formulas (2).

Abbildung 1.3.: Ein Ausschnitt aus dem englischen abstract von Justin zu [Jus90b].

In Le Pli 21 gibt Justin eine Konstruktion der Winkeldreiteilung an. Dort taucht die Konstruktion der Lösung des Delischen Problems von Peter Messer auf sowie die Erklärung von Justin, dass das Verfahren zum Lösen kubischer Gleichungen bereits in seinem in Le Pli 20 zitierten Manuskript zu finden sei.

Bis Ende 1984 hat Justin folglich die Winkeldreiteilung sowie die Beloch-Faltung publiziert. Die im März 1986 gedruckte Arbeit von Justin enthielt nicht nur alle Axiome des 1-fach-Origami, die bereits etwa durch Beloch und Yates gefunden wurden und die Huzita im selben Jahr publizierte. Justin gab ebenfalls ein neues Axiom an, das bei Huzita nicht zu finden ist.

Der Name von Peter Messer fällt häufig im Zusammenhang mit der Lösung des Delischen Problems per Papierfalten. Im Journal Crux Mathematicorum wurde im Juni 1985 unter der Nummer 1054 eine (Falt)Aufgabe von ihm abgedruckt, aus deren Lösung, abgedruckt im selben Journal erst im Dezember 1986, folgt, dass $\sqrt[3]{2}$ mit 1-fach-Origami konstruiert werden kann, vgl. [Mes85b; Rab86]. Wie kam Messer zu diesem Ergebnis?

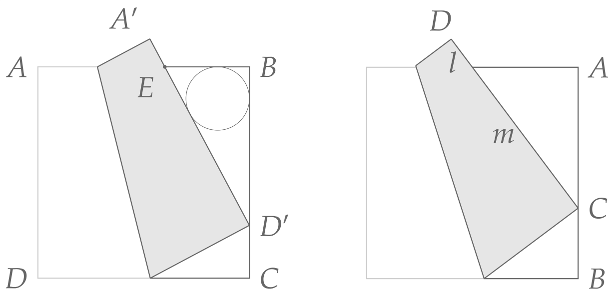


Abbildung 1.4.: Im Bild links: Nachzeichnung der Aufgabe 995 von Fukagawa aus [Fuk84]. Die linke untere Ecke D wird auf die rechte Kante des Quadrats gefaltet, auf den Punkt D'; die linke obere Ecke A geht auf den Punkt A' über. Der Punkt E ist der Schnittpunkt von $A'B'$ mit der oberen Kante. Es ist zu zeigen, dass der Radius des in das Dreieck $D'EB$ eingeschriebenen Kreises gleich $A'E$ ist. Im Bild rechts: Nachzeichnung der Aufgabe 1025 von Messer aus [Mes85a]. Es ist der kleinste Wert von $\frac{l}{m}$ zu bestimmen, falls C irgendwo auf AB gefaltet wird.

Im Dezember 1984 wurde in diesem Journal als Problem 995 eine Aufgabe von Hidetosi Fukagawa abgedruckt, vgl. [Fuk84]. Wegen der äußerlichen Ähnlichkeit und zeitlichen Nähe der Publikationen der Aufgaben 995 von Fukagawa und 1025 und 1054 von Peter Messer, vgl. Abb. 1.4, könnte vermutet werden, dass Messer die Aufgabe 995 kannte und sie ihn inspiriert oder auf die Idee gebracht hat, über geometrisches Falten nachzudenken.[69] Das ist aber nach Darstellung von Peter Messer[70] und wegen der Daten der Funde nicht der Fall. Die Resultate von Peter Messer

[69]Fukagawa hat sich nicht weiter mit Papierfalten beschäftigt. Sein Buch über alte japanische Tafelaufgaben (Sangaku) enthält die obige Aufgabe und die Standardkonstruktion eines regelmäßigen Fünfecks als Knoten aus einem Papierstreifen als zwei geometrische Beispiele des Faltens [FP89, Ex. 3.1, Ex. 4.3].

[70]»I don't recall that Crux problem 995 had much impact other than perhaps that my problem 1025 would be a second nice folding problem for the journal.«, private Korrespondenz, Juni 2021.

sind von der Aufgabe 995 unabhängig. Es ist mehr als naheliegend, dass Messer zu dem Zeitpunkt auch nichts über Arbeiten von Beloch gewusst hatte:

> »My best recall is that I independently discovered the seven fundamental (irreducible) ways to construct a linear crease in a folding plane. [...] At that time I knew of no published works on the subject of the ›fundamental (irreducible) ways‹ or even just the ›Beloch-fold‹«.[71]

Im Juli 1984 schickte[72] Messer Justin die Konstruktion und die Lösung des Problems 1054, vgl. [Jus90b, S. 259] und [Jus84b]. Justin zeichnet diese Aufgabe in Le-Pli 21 in Figure 37 nach, zitiert aber keine gedruckte Quelle, sondern verweist lediglich auf ein ihm von Peter Messer geschicktes »undatiertes« Manuskript. Dort ist die Angabe zu finden, dass die erste Version des Manuskripts von Juli 1984 und die zweite von Juli 1985 sei. Dieses Manuskript liegt uns nun vor[73]: Zwei Seiten sind dort der Beschreibung der sieben »fundamental cases« gewidmet, die restlichen drei Seiten beschreiben die Gleichungen, die diese sieben Faltungen algebraisch interpretieren, vgl. Abb. 1.5. Die von Messer verwendete Notation der Faltungen wurde von Justin übernommen, vgl. [Jus90b, S. 256], und ist heute die Standardnotation.

Justin schreibt darüber: »Un peu plus tard Peter Messer envoyait une étude systématique des opérations de pliage [Verweis auf unveröffentlichtes undatiertes Manuskript von P. Messer], donnant léquations des plis et montrant notamment que pour l'opération e), on aboutit au 3^{e} degré«,[74] vgl. [Jus84b, S. 2]. In [Jus90b, S. 259] ist eine leicht andere Bemerkung zu finden: »Un peu plus tard, en juillet 1984, Peter Messer (U.S.A.) nous envoyait un papier donnant l'équation du pli pour les diverses opérations élémentaires«.[75] Aus dieser gedruckten Darstellung wird nicht klar, was Messers Leistung war, obwohl der (vollständige) Titel seines Manuskripts »Summary notes of all irreducible cases of simultaneous superpositions of elemnets in a folding plane that will generate a finite number of distinct crease lines« recht eindeutig ist. In privater Korrespondenz[76] schildert Justin dies genauer: »The possibility of solving all equations of degree 3 was discovered by M. Piazzolla Beloch in 1936, and rediscovered, independently by P. Messer and myself, both in 1984«.

[71] Peter Messer erlaubte uns freundlicherweise diese private Korrespondenz abzudrucken.

[72] Das ist den Darstellung von Messer und den Vermerken in einem seiner unveröffentlichten Manuskripte zu entnehmen, vgl. auch [Jus84a, S. 19].

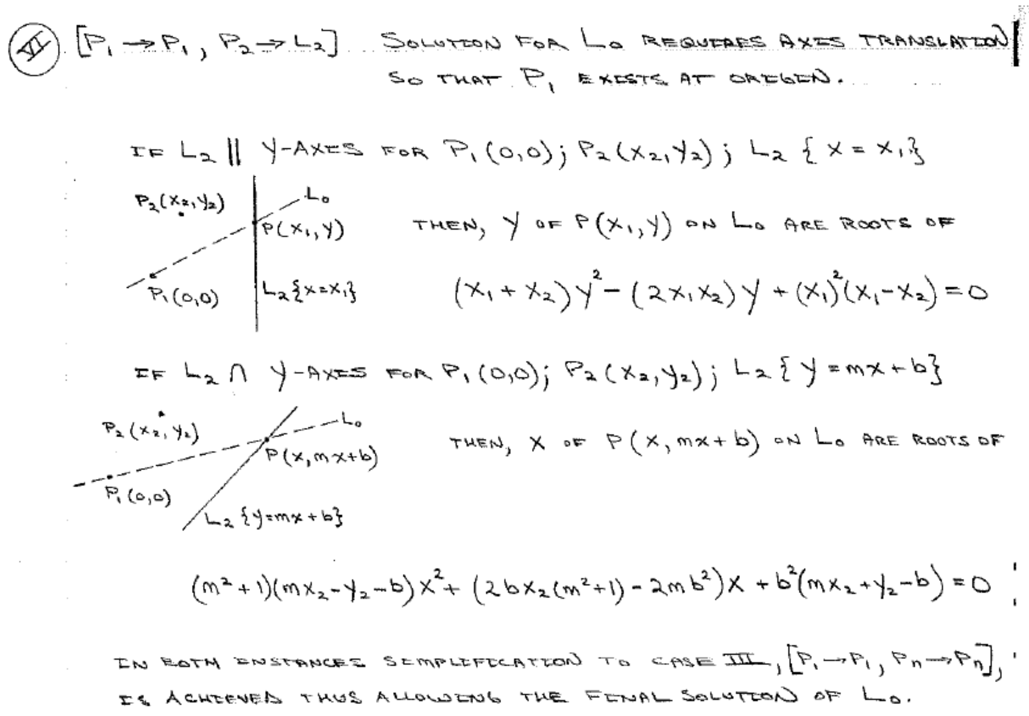
[73] Peter Messer schickte dieses Manuskript davor an Jacques Justin, Robert Lang und Thomas Hull.

[74] Das ist in etwa: »Ein bisschen später schickte Peter Messer eine systematische Studie von Faltoperationen und gab ihre Gleichungen an sowie zeigte insbesondere, dass wir für die Operation [Beloch-Faltung, D.N.] beim dritten Grad landen.«

[75] Das ist in etwa: »Ein bisschen später, im Juli 1984, schickte uns Peter Messer (USA) ein Paper mit Faltgleichungen verschiedener Elementaroperationen«.

[76] Wir zitieren aus einem Brief von Jacques Justin an Thomas Hull vom 6. Juni 1995 mit freundlicher Genehmigung von Thomas Hull.

Aus der heutigen Perspektive erscheint es unverständlich, warum Justin nicht genauer eingeordnet hat, was Messer ihm geschickt hat.



(IV) $[P_1 \to P_1, P_2 \to L_2]$ SOLUTION FOR L_0 REQUIRES AXES TRANSLATION SO THAT P_1 EXISTS AT ORIGIN.

IF $L_2 \parallel$ Y-AXES FOR $P_1(0,0)$; $P_2(x_2,y_2)$; $L_2\{x = x_1\}$

THEN, y OF $P(x_1,y)$ ON L_0 ARE ROOTS OF

$$(x_1+x_2)y^2-(2x_1x_2)y+(x_1)^2(x_1-x_2)=0$$

IF $L_2 \cap$ Y-AXES FOR $P_1(0,0)$; $P_2(x_2,y_2)$; $L_2\{y=mx+b\}$

THEN, X OF $P(x,mx+b)$ ON L_0 ARE ROOTS OF

$$(m^2+1)(mx_2-y_2-b)x^2+\left(2bx_2(m^2+1)-2mb^2\right)x+b^2(mx_2+y_2-b)=0$$

IN BOTH INSTANCES SIMPLIFICATION TO CASE III, $[P_1 \to P_1, P_n \to P_n]$, IS ACHIEVED THUS ALLOWING THE FINAL SOLUTION OF L_0.

Abbildung 1.5.: Ein Ausschnitt aus Messers Manuskript zur Behandlung der Beloch-Faltung, Seite 4. Mit freundlicher Genehmigung von Peter W. Messer.

Peter Messer hat sich Mitte der 1980er Jahre auch mit anderen Teilbereichen des mathematischen Papierfaltens, wie Polyederfaltungen, beschäftigt, allerdings wurde ihm dieses Gebiet nach eigener Darstellung »too crowded«; fortan beschäftigte er sich in den letzten Jahrzehnten mit der Taxomologie des Laufkäfers. Zu 1-fach-Origami hat er keine seiner Ergebnisse außer der Aufgabe 1054 publiziert. Wir hoffen, Peter Messer wird seine – inzwischen eher aus historischer Perspektive interessanten – Ergebnisse in den kommenden Jahren publizieren. Peter W. Messer, M.D., ist ein pensionierter Hautarzt aus Wisconsin, USA.

George E. Martin Im Jahr 1998 erschien das Buch »Geometric Constructions« von George E. Martin, in dem 1-fach-Origami als ein geometrisches Konstruktionswerkzeug neben klassischen Konstruktionswerkzeugen wie markiertem Lineal oder rostigem Zirkel verstanden, definiert und analysiert wird.

Im Sinne der früheren Arbeiten wie [Ahr01] oder [Hur85] führt Martin eine Fundamentaloperation ein, »fundamental folding operation«, S. 149. Allerdings, nun im Sinne Belochs und im Unterschied zu Ahrens und Hurwitz, ist seine Fundamentaloperation erzeugend: Mit ihr kann er ein 1-fach-Origami formulieren, das »mächtiger« als Zirkel mit Lineal ist: Konkret zeigt Martin, dass mit dieser Operation dieselben Punkte der Ebene wie mit markiertem Lineal konstruiert werden können, vgl. Theorem 10.14. ebenda. Martin erklärt seine Operation wie folgt, vgl. S. 149:

»If for two given points P and Q and for given lines p and q there are only a finite number of lines t such that both P^t [das ist das Spiegelbild von P an der Geraden t, D.N.] is on p and Q^t is on q, then we may fold the paper along each of these lines t.«

Hier ist zu bemerken, dass Martin die Operation (das ist erkennbar die Beloch-Faltung) restringiert und er definiert, wann gefaltet werden darf (wenn die Anzahl der potenziellen Falze endlich ist). Eine solche Erklärung, was unter einer Faltung zu verstehen ist, haben wir bereits auch bei Rupp oder etwa Auckly und Cleveland gesehen. Aber Martin ist wohl der erste, der die Endlichkeit der Anzahl der Lösungen in der Definition fordert.[77]

Wir wollen untersuchen, wie Martin diese Operation im Vergleich zu früheren Arbeiten fand und ob seine Entdeckungen unabhängig von Justin waren.

Der Zitatenlage nach kennt Martin die Arbeiten von Beloch nicht. Seine Hauptquellen für Papierfalten sind [Yat49] und [Row66]. Martin zitiert zwar den Konferenzband [Huz90b], aber dort hauptsächlich den Artikel von Huzita über Winkeldreiteilung. Da Martin ebenda zum Thema passende Artikel wie etwa den von Huzita und Scimemi nicht erwähnt oder zitiert, und auf die auf Italienisch geschriebenen Artikel von Beloch nicht eingeht, liegt die Vermutung nahe, dass Martin dieses Buch nicht gelesen oder zumindest nicht genau studiert hat.

Martin zitiert auch Tom Hulls Paper [Hul96], in dem die Winkeldreiteilung von Abe diskutiert wird. In diesem Paper bezieht sich der damals junge Mathematiker Hull (er schloss seine Promotion erst im darauffolgenden Jahr ab) auf eine Reihe von Artikeln, die in [Huz90b] gedruckt wurden, erwähnt aber Beloch auch nicht. Das ist umso bemerkenswerter als Hull Jahre später in [Hul11] eine der bekanntesten Darstellungen von Belochs Beitrag zum Papierfalten publiziert hat. Noch interessanter und seltener ist die Erklärung von ihm in diesem viel zitierten Paper, S. 307:

»it is perhaps more than a little embarrassing that numerous researchers since [Alp00; AC95; CS05; Ger95; Mar98], including the author [Hul96], have failed to cite Beloch's ground-breaking work. (Huzita, Scimemi [HS90], and Justin [Jus90b] are notable exceptions.)«

Hull expliziert also, dass Martin von Beloch hätte wissen müssen und ihre Arbeiten hätte zitieren sollen.

[77] Diese Forderung ist implizit bei Peter Messer zu finden, allerdings publizierte er seine Arbeit nicht.

Michael Friedman wundert sich in einer Fußnote (vgl. Fußnote 250 auf Seite 340 in [Fri18]), dass selbst Autoren, die über Papierfalten schreiben und über Arbeiten von Beloch wissen könnten, sie nicht zitieren. Dabei erwähnt er explizit George E. Martin und argumentiert, dass Martin [Huz90b] zitiert, und impliziert dabei, dass Martin von Beloch wissen müsste. Explizit schreibt Friedman, dass Martin Belochs Methoden benutzt, ohne sie zu zitieren, »the author [George E. Martin] does not mention Beloch's methods, despite using them«, [Fri18, S. 340]. Das ist nicht ganz fair und die Quellenlage bei Martin ist doch etwas subtiler.

Das Buch »Geometric Constructions« scheint nahezu allen Autorinnen und Autoren geläufig zu sein, die zu diesem Thema nach 1998 publizierten. Weniger geläufig scheinen Martins Vorarbeiten zum 10. Kapitel im Buch. Bemerkenswerterweise schreibt Martin auf S. 156:

> All attempts at bending the classical verging solutions by Nicomedes, Apollonius, Vieta, and Newton to the problem of the cube root by *paperfolding* [Hervorhebung von D.N.] have apparently failed. Nevertheless, the following construction, published by this author in 1979 [gemeint ist [Mar79], D.N.], does do the job.

Diese Referenz ist jedoch etwas ungeschickt. Im Jahr 1979 in [Mar79] erweitert Martin die Möglichkeiten des damals recht neuen Konstruktionswerkzeugs *Mira*, vgl. [LD77], und zeigt, dass mit der Mira nicht nur das Delische Problem gelöst werden kann, sondern gemeinsame Tangenten zu zwei gegebenen Parabeln konstruiert werden können. Teilweise wörtlich werden seine Ausführungen und Konstruktionen in diesem Artikel über Mira ins 10. Kapitel von [Mar98] auf Papierfalten übertragen. Interessanterweise ist aber in dem zitierten Artikel keine Rede von Papierfalten oder Origami. Die Konstruktion bezieht sich alleinig auf die Mira, welche aber letztlich bezüglich möglicher Konstruktionen mit 1-fach-Origami zusammenfällt.[78] Die Konstruktion von Martin kann ohne Änderungen als Konstruktion mit 1-fach-Origami übernommen werden, vgl. [Mar98, Figure 10.6]. Außerdem wurde im Artikel [LD77] gezeigt (und in [Mar98] zitiert und ohne Änderung auf 1-fach-Origami übertragen), dass Mira einen beliebigen konstruierten Winkel dritteln kann.[79]

Vermutlich noch weniger bekannt[80] ist die Arbeit [Mar85] von 1985, die sehr

[78]»The construction theory for the Mira is the same as that for paperfolding«, vgl. [Mar98, S. 155]. Das folgt aus mehreren Zitaten: 1979 zeigt Martin, dass mit Mira kubische Wurzeln und Trisektion möglich ist, also dass jeder Mira-Punkt ein markiertes-Lineal-Punkt ist, vgl. [Mar98, Definition 9.7, Theorem 9.8]. Diese Punkte sind genau die 1-fach-Origami-Punkte, vgl. Theorem 10.14 ebenda.

[79]Genauer genommen, wurde bereits 1963 in [Hoc63] gezeigt, wie mit Mira-ähnlichen-Werkzeugen jeder Winkel gedrittelt werden kann, vgl. auch [DO07, S. 289].

[80]In Deutschland ist dieser Artikel in keiner Bibliothek vorhanden (März 2021). Tom Hull zitiert diese Arbeit in [Hul11] und stellt die Verbindung wie oben zum Artikel [Mar79] in [Hul20] her als einer der Wenigen.

kompakt die wesentlichen Ideen und Beweise für das Kapitel 10 im Buch zusammenträgt. Dort hat Martin explizit gezeigt, dass dieselben Punkte und Geraden der Ebene mit 1-fach-Origami wie mit markiertem Lineal konstruierbar sind, vgl. [Mar85, Theorem].

Die fundamentale Faltoperation ist 1985 (in der gleichen Form wie 1998), aber auch schon 1979 bei Martin explizit (in leicht anderer Form) vorhanden, S. 205:

> *Construction Axiom* (1) P and Q are given distinct points, (2) p and q are given perpendicular lines, and (3) under the reflection in line t the image of P is on p and the image of Q is on q, then the line t can be constructed.

In der Arbeit von 1979 wird unmissverständlich formuliert: »In general, the construction axiom allows the construction of all tangents to two implicitly given parabolas.«, vgl. S. 207 ebenda.

Demnach erscheint die entscheidende Zutat für 1-fach-Origami, das ist nämlich die Beloch-Faltung, die Martin ausführlich studiert und auf der er später die Theorie des 1-fach-Origami aufgebaut hat, aber auch die Lösung des Delischen Problems und der Trisektion, in expliziter Form bereits vor Abe, Justin, Messer, Huzita und Geretschläger. Allerdings erkennt Martin da noch nicht, dass dieses Konstruktionsaxiom in gleicher Form auf Falten übertragen werden kann. Diese Erkenntnis ist erst 1985 in [Mar85] in gedruckter Form vorhanden.

Ähnlich wie bei Margherita Beloch sind diese Arbeiten von der Origami community teilweise übersehen worden. Die deutlich spätere Publikation [Mar98] verschleiert den frühen Beitrag von Martin zum mathematischen Papierfalten.

Nach diesen Betrachtungen sind wir der Meinung, dass George E. Martin, ebenfalls wie Jacques Justin, Margherita Beloch sowie Humiaki Huzita und Peter Messer, zu den Pionieren des 1-fach-Origami gezählt werden sollte. Sie fanden die entscheidenden Komponenten des 1-fach-Origami, die Beloch-Faltung sowie die allgemeine Lösbarkeit von kubischen Gleichungen mittels 1-fach-Origami, wohl unabhängig voneinander. Die Bezeichnung »Huzita-Justin-Axiome« für die Liste der Elementaroperationen kann aus unserer Sicht beibehalten werden, allerdings wäre »Justin-Huzita-Axiome« möglicherweise fairer.[81] Wir folgen Hull und Friedman und schlagen vor, die Beloch-Faltung Margherita Beloch zu Ehren als solche zu bezeichnen. Wir glauben jedoch, dass die Bezeichnung »Beloch-Martin-Faltung« korrekter wäre.

Die Zeit danach Die bereits von Justin, Martin und Huzita erzielten Ergebnisse wurden in weiteren Arbeiten ausgearbeitet und formalisiert. Robert Lang zeigte

[81] Da Peter Messer seine Ergebnisse nicht veröffentlichte, erscheint der Vorschlag, diese Axiome auch nach ihm zu benennen, etwas problematisch.

2003 als Erster, dass die Liste der von Justin gegebenen Axiome des 1-fach-Origami tatsächlich vollständig ist, vgl. [Lan03]. Einen anderen Beweis gaben später Tom Hull[82], [AL09], [Luc17b], [WG09b]. Ghourabi et al. untersuchten in [GKK13] die Abhängigkeiten zwischen diesen Axiomen[83] und zeigten konkret[84], dass sie alle Spezialfälle von einem sind – der Beloch-Faltung mit gewissen Restriktionen. In [Mar98], [Cox12, Ch. 10.3] finden sich unter anderem körpertheoretische Beschreibungen der mit 1-fach-Origami konstruierbaren Punkte in der Ebene. Auf diese Arbeiten werden wir in Kapitel 3 genauer eingehen, wenn wir über die Axiomatisierung des 1-fach-Origami reden.

1.3. Was ist und was soll Axiomatisieren?[85]

In Abschnitt 1.1 haben wir unser Interesse auf mathematisches Papierfalten und speziell auf das dort vorläufig definierte 1-fach-Origami eingeschränkt. In Abschnitt 1.2 beleuchteten wir den geschichtlichen Werdegang der Axiomatisierung des 1-fach-Origami. In Kapitel 3 geben wir eine sorgfältige Definition von 1-fach-Origami sowie axiomatisieren es entsprechend dieser Definition. In Kapitel 2 führen wir aus, neben anderen Zielen dieser Arbeit, dass eine Aufbereitung und Durchführung einer Axiomatisierung des 1-fach-Origami in der mathematischen Hochschullehre für uns von besonderer Bedeutung ist.

In diesem Abschnitt wollen wir uns daher zunächst mit Axiomatisieren im Allgemeinen beschäftigen, um in Abschnitt 1.4 der Frage besser nachgehen zu können, warum wir Axiomatisieren von Papierfalten in der Lehre einsetzen wollen.

Die Antwort auf die Titelfrage des Abschnitts hängt stark vom Kontext und der Zielsetzung ab. Das bezieht sich nicht nur auf die unterschiedlichen Interessensgruppen wie Schülerinnen und Schüler bzw. Lehramtsstudierende bzw. professionelle Mathematikschaffende. Bereits im professionellen Mathematikbetrieb findet die gestellte Frage verschiedene Antworten. Das liegt auch darin begründet, dass unter anderem die Definition eines Axioms vom benötigten Grad der Formalisierung abhängt.[86] Somit ist die bessere Frage vermutlich: Was bedeutet »Axiomati-

[82] Private Korrespondenz.

[83] Justin bemerkte ebenfalls in [Jus90b, S. 259], dass Elementaroperationen nicht unabhängig sind und gab an, dass zwei davon genügten, um alle Konstruktionen mit 1-fach-Origami zu ermöglichen.

[84] Bei Martin folgt das aus körpertheoretischen Gründen.

[85] Die offensichtliche Anlehnung an Dedekinds grundlegende Schrift sowie an Freudenthals »Was ist Axiomatik?« soll im folgenden nicht anmaßenden Sinne verstanden werden: Diese Formulierung beschreibt vielmehr sehr gut unsere Intention – Die Frage nach dem »Was« ist eng mit »Wozu« verbunden.

[86] Das leuchtet zwar zunächst ein, aber etwas geläufigere Begriffe wie »Vektorraum« oder »Gruppe« haben typischerweise »Standarddefinitionen«.

sieren« für wen? Wir berichten darüber zunächst aus verschiedenen Perspektiven und destillieren dann eine geeignete Antwort für unser Zielpublikum: gymnasiale Lehramtsstudierende.

Beispiel 1.5. Innerhalb der Axiomatisierung von Geometrien schreibt George E. Martin ein Axiomensystem *bestehe* aus undefinierten Termen und einer Liste von Aussagen, welche diese Terme betreffen, vgl. [Mar75, S. 34]. Im Kontext der Axiomatisierung der Mengenlehre *definiert* Oliver Deiser ein Axiomensystem als eine Liste von Formeln (der Sprache der Mengenlehre), vgl. [Dei10, S. 453]. In der Prädikatenlogik *definiert* Wolfgang Rautenberg jede Formelmenge einer Theorie (der ersten Stufe) als Axiomensystem, falls alle Aussagen dieser Theorie aus den Axiomen gefolgert werden können, vgl. [Rau08, S. 65]. Duden[87] formuliert zur Axiomatik sehr lakonisch aber zutreffend: »Lehre vom Definieren und Beweisen mithilfe von Axiomen«. Häufig ist ein Axiomensystem eine Menge von Axiomen; diese wiederum sind »unbewiesene Aussagen, die man an den Anfang einer Theorie stellt«, vgl. [JU15, S. 331] oder aus heute veralteter Sicht »Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden«, vgl. Briefwechsel Frege/Hilbert, zitiert aus [Hoc18, S. 237] oder eben einfach »Formeln« wie bei Deiser. ♯

Vermutlich sollten wir für eine Sachanalyse zunächst in der Lage sein, die Unterschiede in dem obigen Beispiel zumindest einzuordnen.

Bei Oliver Deiser finden wir in [Dei10, S. 449–454] eine etwas lesbarere und bei Wolfgang Rautenberg in [Rau08, Abschnitte 2.2-3] eine noch präzisere Darstellung dessen, was in der Logik unter Aussagen, Axiomen, Beweisen, Axiomensystemen, freien und gebundenen Variablen zu verstehen ist. Es wird unmittelbar klar, dass für uns eine rigorose Darstellung der formalen Logik nicht zielführend ist. Wir geben zunächst eine angepasste Idee von diesen Begriffen aus einer eher fachmathematischen Perspektive, achten aber darauf, nicht zu sehr in die Tiefe zu gehen, vgl. auch [EFT18, S. 5, 6].

Definition 1.6. Die *Sprache* einer (zu bildenden) Theorie besteht aus

a) Zeichen, die verwendet werden dürfen (Variablen, Klammern, Quantoren etc.)
b) Formeln und Regeln, wie diese Formeln aus erlaubten Zeichen gebildet werden dürfen (etwa $\varphi \vee \psi$ aus φ und ψ). ◇

Definition 1.7. Eine *Formel* in der gegebenen Sprache habe nur gebundene Variablen, wenn alle Vorkommen der Variablen $(x, y. \dots)$ durch $\forall$ oder $\exists$ (etwa $\forall x, \exists y$) quantisiert sind. Formeln mit nur gebundenen Variablen nennen wir *Aussagen*. ◇

So enthält die Formel $\forall x : x = y$ die nicht gebundene Variable y (x ist gebunden), die Formel $\forall x \exists y : y < x$ ist eine Aussage. Der intuitive Sinn dieser Setzung ist, dass

[87] »Axiomatik« auf Duden online. URL: https://www.duden.de/rechtschreibung/Axiomatik (Abrufdatum: 6. Juli 2021).

Aussagen ein Wahrheitsgehalt zugewiesen werden kann, sobald klar ist, woher die Variablen kommen: So ist $\forall x \exists y : y < x$ offenbar wahr für die reellen Zahlen und falsch für die natürlichen Zahlen. Einer Formel, die keine Aussage ist, können wir im Allgemeinen keinen Wahrheitswert zuordnen: Erst durch eine Spezialisierung von y (etwa $y := x$) können wir den Wahrheitsgehalt der Formel $\forall x : x = y$ entscheiden; ohne diese Spezialisierung ist die Frage nach der Wahrheit dieser Formel sinnlos.

Definition 1.8. Ein *Axiomensystem* ist eine Menge von Formeln (in der gegebenen Sprache). Ein *Axiom* ist ein Element eines Axiomensystem, also eine Formel. $\diamond$

Damit deuten wir in dieser Definition an, wie bei Deiser oder Ebbinghaus, vgl. [EFT18, S. 24], dass Axiome keine wahren Aussagen per se sein müssen; mehr noch, die Definition ist so gegeben, dass Axiome keine Aussagen sein müssen. Laut Duden[88] ist ein Axiom eine »gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf«, aber auch »nicht abgeleitete Aussage eines Wissenschaftsbereichs, aus der andere Aussagen deduziert werden«. In der zweiten eher wissenschaftsorientierten Deutung verzichtet selbst Duden auf die Wahrheitseigenschaft.

Diese scheinbar allgemeine Definition eines Axioms ist nicht sehr gekünstelt, auch wenn wir uns in der alltäglichen Mathematik Axiome ggf. anders vorstellen. So ist etwa das Axiom des inversen Elements in der Gruppentheorie in Form einer Formel mit nicht gebundener Variablen e gegeben, nämlich $\forall x \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = e$. In der Tat ist das eine unnötig formalistische Darstellung, es wird möglich sein, durch gewisse logische Vorbereitungen, Axiome immer als Aussagen zu notieren. Selbst im Lehrbuch zur mathematischen Logik von Wolfgang Rautenberg lesen wir auf Seite 65: »Wir gehen stets davon aus, dass alle Axiome einer Theorie Aussagen sind, folgen aber der üblichen Praxis, längliche Axiome als Formeln zu notieren und sich die Generalisierung der in den Axiomen eventuell frei vorkommenden Variablen stillschweigend ausgeführt zu denken.« Wir nehmen diese Vereinbarung dankend an und denken uns Axiome und Formeln einer Theorie stets als Aussagen.

Wie bereits in Beispiel 1.5 gesehen, definiert etwa George E. Martin Axiome als Aussagen. Mehr noch, seine Axiome sind »statements«, die wiederum nur »either true or false [...] but not both« sein können, vgl. [Mar75, S. 2, 34]. Das ist weder falsch noch richtig, sondern markiert lediglich den Grad der Formalisierung, auf dem er seine Darstellung basiert.

Wir erkennen, dass die Axiomensysteme in der Definition 1.8 keine *Bedeutung*, keine Funktion haben. Insbesondere muss aus ihnen nichts folgen. Hier wird ihnen diese Bürde nicht bereits per Definition auferlegt, vgl. auch Beispiel 1.9. Die Vor-

[88]»Axiom« auf Duden online. URL: https://www.duden.de/rechtschreibung/Axiom. (Abrufdatum: 7. Juli 2021)

stellung des Gebäudes[89] einer Theorie, die auf dem Axiomensystem fußt, ist in der Definition nicht enthalten. Wir geben eine Beschreibung in Definition 1.11 an, in der dieser Gebäude-Aspekt erkennbar ist.

Beispiel 1.9. Seien die Aussagen A, B, C, D, E, F in einer Theorie formuliert und gelten folgende Zusammenhänge: A beweist B, F beweist B, A und E beweisen C sowie D und E beweisen A. Wie können wir diesen Teil der Theorie axiomatisieren? Nach kurzer lokaler Umordnung sehen wir, dass wir A, B, C auf D und E zurückführen können. Für F liegt kein Beweis vor. Hier könnten wir also als ein Axiomensystem $\{D, E\}$ wählen und F als eine offene Vermutung stehen lassen oder F als ein Axiom ansehen.[90] $\sharp$

Bemerkung 1.10. Wir können bereits an diesem kleinen Beispiel 1.9 (meta)mathematische Aspekte wie Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit, Schlussregeln, Auswahl der Axiome etc. diskutieren. Doch dieses Beispiel erscheint als eine bloße Spielerei mit Symbolen. Es wird nicht ohne Weiteres gelingen, solche Minimalbeispiele mit interessanten Bedeutungen[91] zu füllen. Das Beispiel und die vorige Darstellung soll jedenfalls nicht bedeuten, dass Mathematik als Ganzes nichts mehr als eine Spielerei mit Symbolen ist, eine Auffassung die gelegentlich despektierlich als »Spielformalismus« bezeichnet wird, vgl. die Darstellung in [Tap13, Abschnitt 5.1] und [Hoc18, S. 78f]: »Freudenthal [...] spricht gar von einer ›pädagogischen Bankrotterklärung‹, wenn Lernenden gegenüber das Thema mit dem Argument gerechtfertigt werde, man solle sich unter Axiomen Spielregeln vorstellen«, vgl. [Hoc18, S. 79], [Fre73, S. 419]. Eine neuere didaktische Einbettung der Axiome in »Spielregeln« finden wir etwa bei Wörler et al. in [WvRS20]. $\sharp$

Es gibt nun insbesondere keinen Grund, den unbewiesenen, nicht wahren oder falschen Zustand der Axiome religiös einzufärben und von etwa »Glauben an Axiome« oder »Annahmen der Gültigkeit« zu sprechen. Die Axiome können trotz obiger Bemerkung wertfrei als Spielregeln angesehen werden, vgl. auch [Mit77, S. 14–15]; so würde es unnatürlich erscheinen, zu den Regeln des Sudokuspiels zu sagen, wir glauben, dass sie gelten.

Statt von der Wahrheit der Axiome zu sprechen, wird die inhaltliche Deutung der Axiome auf Modelle übertragen. Ein *Modell* eines Axioms ist dabei eine zur Sprache des Axiomensystems passende Struktur, in der alle Variablen interpretiert werden, so dass diese Interpretation gültig ist.[92] Ein Modell eines Axiomensystems ist entsprechend eine Struktur, in der alle Axiome gültig sind. So ist jede konkrete

[89] »Die Grundidee beruht auf der Tatsache, daß meist auch in umfassenden Wissensgebieten wenige Sätze – Axiome genannt – ausreichen, um dann rein logisch das ganze Gebäude der Theorie aufzubauen«, vgl. [Hil35a, S. 379]. Wir werden diese doch recht komplexe Gebäude-Vorstellung im Kapitel 7 in weitere Teilaspekte aufspalten.

[90] In der mathematischen Logik sind Theorien zumeist deduktiv abgeschlossen, das heißt alle Aussagen lassen sich aus den Axiomen beweisen, vgl. [Rau08, S. 64]. F müsste also ein Axiom sein, wenn die Theorie aus A, B, C, D, E, F bestünde.

[91] Hier sehen wir besonders gut, dass zum deduktiven Schließen keine Wahrheitsgehalte nötig sind.

[92] Wir drücken uns hier absichtlich um das Wort »wahr«.

Gruppe wie S_3 eine Struktur, in der alle Axiome der Gruppentheorie erfüllt sind. Die natürlichen Zahlen sind ein Modell für die Aussage $\forall n : n \geq 0$, die reellen Zahlen sind dagegen kein Modell dafür.[93] Eine verständliche Definition eines Modells eines Axiomensystems finden wir bereits bei Duden[94]: »Interpretation eines Axiomensystems, nach der alle Axiome des Systems wahre Aussagen sind«.

Modelle sind außerordentlich wichtig für die moderne (Meta)Mathematik. Typischerweise werden Beweise der Unabhängigkeit oder gar Widerspruchsfreiheit mittels Modellen geführt. Sehr prominent ist dies in Hilberts »Grundlagen der Geometrie«, aber natürlich historisch sehr wichtig auch in der absoluten Geometrie, wo mittels Modellen (von Cayley/Klein, Poincaré) die Unabhängigkeit des Parallelenpostulats erkannt wurde, vgl. [Mar75, Ch. 5].

Jede Gruppe, jeder Vektorraum sind Modelle für die Axiome der Gruppen- resp. Vektorraumtheorie. Durch grundlegende Resultate der Logik (hier etwa der Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe von Kurt Gödel) können wir uns im alltäglichen Arbeiten auf das Beweisen in Modellen fokussieren und benötigen keine Herleitungen aus den Axiomen mit logischen Kalkülen. Zum Glück! Oliver Deiser überspitzt die Situation zu: »Das tatsächliche formale Beweisen im Hilbert-Kalkül ist qualvoll. [...] Wer während seines Lebens etwas gegen die Logik gesagt hat, muß in der Hölle formale Beweise im Hilbert-Kalkül führen«, vgl. [Dei10, S. 461]. Für eine formalere Darstellung der Modelle verweisen wir auf [Rau08], für viele Beispiele für Modelle von Geometrien auf [Mar75, Ch. 5].

Das Wechselspiel zwischen Axiomensystemen und Modellen ist essenziell in der geschichtlichen Entwicklung der modernen Axiomatik, vor allem in Bezug auf (nicht)euklidische Geometrien, vgl. auch [Mar75, Ch. 5], [Hoc18, S. 23 ff.].

Nun definieren wir auch eine axiomatische Theorie rekursiv und erklären, was dabei »Axiomatisieren« bedeuten soll. Dazu greifen wir auf entsprechende Darstellungen von Tarski und Martin zurück, vgl. [Tar77, S. 127 f.], [Mar75, S. 34].

Definition 1.11. Gewisse Zeichen der Sprache bezeichnen wir als *undefinierte Begriffe*. Definieren wir weitere in der Sprache erlaubte Zeichen nur mithilfe der undefinierten Begriffe, so nennen wir diese neuen Zeichen *definierte Begriffe*. Formulieren wir nun ein Axiomensystem mittels (definierter und undefinierter) Begriffe, dann verstehen wir unter einer *axiomatischen*[95] *Theorie* neben Begriffen auch solche For-

[93] Ein nichtmathematisches Beispiel für interpretierbare Regeln ohne eigene Wahrheitszuweisungen sind Gesetzestexte. So ist der Satz »Die Würde des Menschen ist unantastbar« per se nicht wahr oder falsch. Ein Modell für diesen Satz ist die Bundesrepublik selbst. Außerhalb der Bundesrepublik ist dieser Satz (leider) nicht immer erfüllt.

[94] »Modell« auf Duden online. URL: https://www.duden.de/rechtschreibung/Modell.

[95] Tarski spricht von deduktiver Theorie; Martin von mathematischer Theorie; Rautenberg und Ebbinghaus sprechen eher einfach von (elementarer) Theorie.

meln der Sprache, die sich aus dem Axiomensystem beweisen lassen. Unter einem *Beweis* (einer Formel) verstehen wir eine endliche[96] Liste (geordnete Menge) von Formeln, die nach bestimmten Schluss- bzw. Deduktionsregeln gebildet wird, mit dem Axiomensystem oder bereits bewiesenen Formeln anfängt und mit der zu beweisenden Formel endet.[97]

Unter dem *Axiomatisieren* eines ggf. naiv gegebenen Teilgebiets der Mathematik verstehen wir den Prozess des Formalisierens (Formulieren der Sprache, der Logik, der Beweise zwischen Formeln) dieses Gebiets sowie die Angabe der undefinierten Begriffe und eines Axiomensystems. Das Resultat des Axiomatisierens, eine axiomatische Theorie, bezeichnen wir auch als *Axiomatisierung* des Gebiets. ◇

Diese Darstellung wird vielen professionellen Mathematikschaffenden für alltägliche Mathematik als unnötig formal erscheinen. Für solche, die sich nicht hauptsächlich mit Logiken beschäftigen, haben Axiomatisierungsfragen, Widerspruchsfreiheiten, Formalisierungen der Schlussregeln oder, plakativ, gar die gödelschen Sätze, in ihrem alltäglichen Tun schlicht keine Bedeutung.[98]

Auch daher ist die Frage berechtigt, wer mit solchen formalisierten Definitionen wie in 1.6, 1.7, 1.8, 1.11 vertraut sein müsste. Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage nach dem Was und Für-Wen bekommt also erste Umrisse: Natürlich (!) gibt es formalisierte Darstellungen von Theorien, Axiomen, Axiomensystem, Axiomatisieren, die aber möglicherweise für den mathematischen Alltag nicht wichtig sind.[99]

1.3.1. Einschub: Metamathematik

Ein Axiomensystem nennen wir *vollständig*, wenn über jede Aussage im Sinne von 1.6 entschieden werden kann, ob sie oder ihre Negation aus dem Axiomensystem heraus beweisbar ist. Mit einer kurzen Argumentation kann gezeigt werden, dass die Vollständigkeit etwa folgt, falls das Axiomensystem im Wesentlichen ein einziges Modell besitzt, vgl. [Mit77, S. 36, Satz 7].

Eine Aussage A nennen wir *unabhängig* von einer Menge M von Aussagen, wenn weder A noch $\neg A$ aus M heraus bewiesen werden kann.[100] Ein Standardbeispiel dafür ist das Kommutativgesetz, das unabhängig von den Axiomen der Gruppen-

[96] Diese Endlichkeit ist eine sehr natürliche Forderung. Wir werden beim Papierfalten Argumentationen sehen, in denen wir konkreten Gebrauch von dieser Forderung machen, vgl. Seite 163.

[97] Wir wollen in dieser Arbeit auf Darstellungen konkreter Logik und Schlussregeln verzichten.

[98] Bettina Heintz treibt es auf die Spitze, wenn sie ausruft: »›Die Gödel-Sätze sind mir völlig egal!‹ Das ist eine Haltung, die von vielen Mathematikern und Mathematikerinnen geteilt wurde, mit denen ich gesprochen habe.«, vgl. [Hei00, S. 69]; eine Haltung, die wir nicht nachvollziehen können.

[99] »As working mathematicians, we use only one set theory, only one logic, and only one type of number system; and these are intuitively based, whether we admit it or not«, vgl. [Wil67, S. 122].

[100] A ist dann unabhängig von M, wenn es Modelle für $M \cup \{A\}$ sowie Modelle für $M \cup \{\neg A\}$ gibt.

theorie ist. Das prominenteste Beispiel einer Aussage, die von den Axiomen der Mengenlehre (ZFC) unabhängig ist, stellt die Kontinuumshypothese von Cantor dar, vgl. [Dei10, Abschnitt 1.11]. Das prominenteste Beispiel einer unabhängigen Aussage in der Geometrie ist das Parallelenpostulat von Euklid, das unabhängig von den Axiomen der absoluten Geometrie ist. Speziell nennen wir ein Axiomensystem *unabhängig*, wenn jedes seiner Axiome vom Rest unabhängig ist.

Ein Axiomensystem nennen wir *widerspruchsfrei*, wenn es aus ihm heraus nicht möglich ist, eine Aussage und ihre Negation zu beweisen. Zur Widerspruchsfreiheit verwandt ist die *relative* Widerspruchsfreiheit. Diese liegt vor, wenn das betroffene Axiomensystem ein Modell besitzt (also ein Beispiel). Ist die Struktur, in der das Modell »lebt«, jedoch selbst widerspruchsfrei, dann gilt dies auch für das eigentliche Axiomensystem, vgl. [Tar77, S. 218]. So ist etwa die euklidische Geometrie relativ widerspruchsfrei bzgl. der Mengenlehre, weil die kartesische Ebene ein Modell darstellt, das letztlich auf Mengen zurückgeführt werden kann. Wäre gesichert, dass auch die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, dann wüssten wir, dass die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist.

Die *mathematischen* Fragen über mathematische Theorien und ihre Eigenschaften, etwa ob ein Axiomensystem unabhängig, widerspruchsfrei, vollständig ist oder eine Aussage aus diesem Axiomensystem heraus beweisbar ist, sind genau genommen keine Fragen innerhalb der zu analysierenden Theorie,[101] sondern befinden sich auf einer Metaebene. Für das Studium dieser Begriffe und Eigenschaften hat David Hilbert im Zuge des Hilbert-Programms der 1920er Jahre das Wort *Metamathematik* geprägt, vgl. [Hil35b, S. 174], [Hil18, S. 415], [Tap13, Kapitel 2]. Metamathematik ist eine *mathematische* Disziplin, die axiomatische Theorien zum Gegenstand hat, vgl. [Lor62, S. 13]. Davon zu unterscheiden ist das »Reden über Mathematik«, wenn es um kognitive Prozesse etwa beim Verstehen eines Beweises geht. Entsprechend ist auch die KMK-Kompetenz »Mathematisch Argumentieren«, vgl. [Kul15, S. 11], nicht mit Metamathematik zu verwechseln.

Im Zusammenhang mit dem Axiomatisieren von mathematischen Theorien werden häufig Eigenschaften der Axiomensysteme erwähnt: Widerspruchslosigkeit, Unabhängigkeit, Vollständigkeit, die sog. Qualitätskriterien von Axiomensystemen. An einigen Stellen werden diese Eigenschaften als Anforderungen gesehen, vgl. [JU15, S. 332]; in [Bru+15, S. 190, Fußnote] »muss das [Axiomen]System vollständig [...] sein«; diese Eigenschaften werden sogar teils als definierende Eigenschaften präsentiert, vgl. [Tap13, Abschnitt 5.2.1]. Aber selbst für Hilbert waren sie nur bedingt

[101] Diese Unterscheidung ist prinzipieller Natur, wir sagen nur vereinfachend: Die eigentliche Mathematik muss nicht finit sein, dort gibt es etwa unendliche Mengen; die Metamathematik soll aber finit, endlich, konstruktiv sein, vgl. [Tap13, Kapitel 6].

wichtig. In den Anfängen des Hilbert-Programms schrieb David Hilbert in [Hil18, S. 407] zwar, dass eine Theorie »gewissen Anforderungen genügen [muss]«, doch diese Anforderungen besagen, dass *geprüft* werden soll, *ob* Axiome unabhängig sind und Widerspruchslosigkeit vorliegt. Insbesondere müssen die Qualitätskriterien eines Axiomensystems bei einem konkreten Axiomensystem nicht zwingend vorliegen. Hilbert hat es zugelassen, dass einige Axiome aus anderen folgen, wenn dadurch eine bessere Lesbarkeit ermöglicht wird: »Dabei hindert nichts, auch beweisbare oder unserer Überzeugung nach beweisbare Sätze als Axiome aufzunehmen«, vgl. [Hil35b, S. 160], vgl. auch die Darstellung von Christian Tapp in [Tap13, Abschnitt 5.2.1]. Ein Axiomensystem hört nicht auf ein solches zu sein, wenn dazu ein Axiom hinzugefügt wird, vgl. ebenda.

Es ist vorstellbar, dass die Überbetonung dieser drei Kriterien an einigen Stellen daher kommt, dass Hilbert 1899 (also zwanzig Jahre bevor das Hilbert-Programm formuliert wurde) in der »Grundlagen der Geometrie« diese Kriterien herausgestellt hat. So schreibt er dort in der Einleitung (zitiert nach [Vol15, S. 79]):

> »Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.«

Doch hier geht es speziell um euklidische Geometrie und nicht um allgemeine Theorien und Axiomensysteme. Allerdings finden wir in [Ken72, S. 134] ein Zitat von Evert Beth: »Since the publication of D. Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* (1899) it has become customary to require every set of axioms to be (1) *complete*, (2) *independent*, and (3) *consistent*«, vgl. [Bet65, S. 82]. Diese Erklärung sollte vorsichtig und im Zusammenhang zitiert werden.[102] Aus heutiger Sicht (aber auch schon damals) ist diese Vorstellung nur wenig nachvollziehbar, vor allem auch weil (absichtlich) nicht vollständige Axiomensysteme,[103] etwa der Gruppen- und Vektorraumtheorie, weitgehend bekannt waren. Der erste Unvollständigkeitssatz von Gödel deutet an, dass es zumindest mutig ist, die Vollständigkeit eines Axiomensystems *zu verlangen*.

Unter den drei Kriterien ist die Widerspruchslosigkeit noch die wichtigere, für Hilbert »von höchster Wichtigkeit«, vgl. [Hil18, S. 409], da sie garantiert, dass in der betrachteten Theorie nicht alle Aussage trivialerweise gültig sind. Ansonsten

[102] Evert Beth schreibt dort zunächst von »elementary axiomatics« (und später von »formalised axiomatics«) und genauer: »Our exposition of axiomatics, however, will have a provisory character«.

[103] Das ist das, was Tobias Hock in [Hoc18, S. 63] in Bezug auf Freudenthal, vgl. [Fre63, S. 7], als abstrahierende Axiomatik und polymorphe Axiomensysteme bezeichnet.

»[gefährdet] das Vorhandensein eines Widerspruchs in einer Theorie offenbar den Bestand der ganzen Theorie«, ebd. Zwar expliziert Hilbert in [Hil18] an verschiedenen Beispielen die Wichtigkeit der Unabhängigkeit, doch im Hilbert-Programm taucht sie nicht auf, dort ist der Sinn der Metamathematik die Sicherung der Widerspruchsfreiheit der Mathematik.

Der Nachweis der Widerspruchslosigkeit ist bereits für Hilbert kein leichtes Unterfangen, er schreibt: »Die Erkenntnis der inneren Widerspruchslosigkeit ist selbst bei längst anerkannten und erfolgreichen Theorien mit Schwierigkeit verbunden«, vgl. ebd. Seit dem zweiten Unvollständigkeitssatz von Gödel ist ein solcher Nachweis mit prinzipiellen Problemen verbunden.

Eine radikale Sicht auf diese Kriterien bietet Rudolf Schnabel in seiner Habilitationsschrift zur Axiomatisierung der euklidischen Geometrie:

> »[...] Hinzu kommt, dass die häufig genannten drei logischen Kriterien für ein Axiomensystem ›Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit‹ fragwürdig sind und von der eigentlichen Problematik nur ablenken. Die Widerspruchsfreiheit ist nicht notwendig für ein Axiomensystem, da dieses ja nichts anderes ist als die Definition eines Begriffs, und es wäre schlimm, wenn man die Bildung leerer Begriffe verbieten wollte. Es ist ja denkbar, dass man zum Zwecke einer längeren Untersuchung einen Begriff bilden und mit ihm schließen möchte, von dem man nicht entscheiden will, ob er widerspruchsfrei ist oder nicht. Immerhin ist z. B. eine der grundlegendsten Theorien der Mathematik, die Mengenlehre nämlich, nicht gesichert widerspruchsfrei.
> Die Vollständigkeit, wie immer man sie auch interpretiert (z. B. als Entscheidbarkeit aller Aussagen der Theorie), ist bei den wenigsten Axiomensystemen der geläufigen mathematischen Strukturen erfüllt (z. B. nicht bei Gruppen und Körpern), und sie ist ohnehin nur in seltenen Fällen zu realisieren, so dass die Forderung danach unrealistisch ist.
> Die Unabhängigkeit schließlich, d. h. die Bedingung, dass kein Axiom aus den übrigen folgt, hat zweifellos eine gewisse Berechtigung aus Ökonomiegründen, wird aber nichtsdestoweniger häufig absichtlich verletzt, um Unnatürlichkeit zu vermeiden. [...] Es ist klar, dass man irgendwelcher Kriterien für Axiomatisierungen bedarf, um nicht in eine sinnlose Beliebigkeit zu verfallen. Was dies aber für Kriterien sein sollen, und ob man sie genau genug beschreiben kann, ist ein echtes und auch dringliches Problem, das sicherlich nicht durch rein logische Betrachtungen lösbar ist«, vgl. [Sch81, 95f].

Nicht selten wird in der Literatur zur Beweiskompetenz (typischerweise außerhalb der Fachmathematik) Bezug zur Metamathematik und zum (angeblich gescheiterten, vgl. dazu aber [Tap13, Abschnitt 16.4]) Hilbert-Programm genommen und »seine« axiomatische Methode erwähnt. Vor allem bezogen auf das Beweisen im Schulunterricht, wenn von axiomatischer Methode oder axiomatischem Vorgehen die Rede ist, ist oft nicht klar, was gemeint ist. Die eigentliche axiomatische Methode im Sinne Hilberts kann sicherlich nicht gemeint sein, sondern höchstens einige ihrer Aspekte wie die Rekursivität von Beweisen sowie das Postulieren gewisser Annahmen. Dabei geht einer der wichtigsten Punkte des Axiomatisierens, das, was Freudenthal bekanntlich etwas hochtrabend als die Loslösung der ontologischen Bindung, vgl. [Fre63] und [Fre73, S. 418], bezeichnet, unter.

Zwar beschreibt Hilbert die axiomatische Methode an einigen Stellen nicht präzise, alltagssprachlich:

> »Um ein Teilgebiet einer Wissenschaft zu erforschen, basiert man es auf eine möglichst geringe Anzahl von möglichst einfachen, anschaulichen und faßlichen Prinzipien, die man als Axiome aufstellt und sammelt«, vgl. [Hil35b, S. 160] sowie
>
> »Axiomatisch verfahren heißt [...] mit Bewusstsein denken: während es früher ohne axiomatische Methode naiv geschah«, vgl. [Hil35b, S. 11].

Doch aus dem ersten Punkt seines Programms (s. unten) folgt unmissverständlich, dass Hilbert eine strenge Formalisierung meint. Für Hilbert ist axiomatische Methode »logisch unanfechtbar«, vgl. [Hil35b, S. 161], und sie dient »zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis«, vgl. [Tap13, S. 59].

Wir zitieren das Hilbert-Programm aus [Tap13, S. 35–36]. Dort wird die originale Formulierung, vgl. [Hil35b, S. 174], etwas präziser gefasst.

HP1 Alles, was bisher die eigentliche Mathematik ausmacht, wird nunmehr streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an beweisbaren Formeln wird.

HP2a Zu dieser eigentlichen Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, hinzu, in der – im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik – das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt.

HP2b Mit Hilfe der Metamathematik ist die Widerspruchsfreiheit der Axiome der formalisierten eigentlichen Mathematik zu beweisen und dadurch die formalisierte eigentliche Mathematik zu sichern.

Der erste Schritt in dem Programm ist daher die eigentliche Mathematik zu axiomatisieren. *Das* ist die axiomatische Methode, von der Hilbert spricht, vgl. [Hil35b, S. 160, 161], [Hil18, S. 405], [Tap13, S. 58, 59].

Bemerkung 1.12. Es gibt viele Begriffe mit »axiomatisch« darin: »axiomatisches Denken«, »axiomatisches Arbeiten«, »axiomatische Struktur« etc. Der erstere ist der Titel des Artikels [Hil18] von David Hilbert. Die ersten beiden Begriffe sind im Titel der Dissertationsschrift von Tobias Hock (sowie der gleichnamigen Arbeit [HHS16] von Hock et al.) enthalten, vermutlich in Anlehnung an Hilbert. Bei Hilbert kann unter axiomatischem Denken möglicherweise eine durch die axiomatische Methode geprägte Denkweise verstanden werden. Kurioserweise wird in den Arbeiten von Hock weder der eine noch der andere Begriff definiert oder erklärt. Auch sonst wird das Wort »axiomatisch« teilweise in einem Kontext benutzt, in dem eher vom freudenthalschem »lokalem Ordnen«[104] die Rede sein könnte. So schreiben etwa Ufer und Reiss in [RU09, S. 172] vom »Verständnis für die axiomatische Struktur mathematischen Wissens«, aber es wird nicht klar, was dabei »axiomatisch« bedeutet.[105] ♯

Beispiel 1.13. Wir geben auch ein Beispiel aus der Origami-Literatur an. So schreibt Michael Friedman in der Analyse des Buchs [Row66] von Sundara Row: »he suggests that the axiomatic approach is not the right one for mathematical education« und weiter »Row suggests that there would not be any need to consider axioms as unprovable«, vgl. [Fri18, S. 256]. Dabei bezieht er sich auf die Erklärung Rows: »The teaching of plane geometry in schools can be made very interesting by the free use of the kindergarten gifts. It would be perfectly legitimate to require pupils to fold the diagrams with paper. This would give them neat and accurate figures, and impress the truth of the propositions forcibly on their minds. It would not be necessary to take any statement on trust.«, vgl. [Row66, S. viii]. Es ist nicht erkennbar, dass Row hier irgendeine Aussage über Axiome trifft. Im Wesentlichen plädiert er dafür, Theoreme nicht einfach so hinzunehmen, sondern die Gültigkeit der gefundenen Zusammenhänge durch konkrete Erfahrungen zu verifizieren.[106] Von einem Abstieg bis zu Axiomen oder von Axiomen überhaupt ist keine Rede. Hier von einem »axiomatic approach« zu sprechen, ist eine Überinterpretation von Row. ♯

Raymond Wilder diskutiert in »The role of the axiomatic method«, vgl. [Wil67], drei verschiedene Typen der axiomatischen Methode.[107] Dabei ist die erste im Sinne von Euklid, »Euclidean type«, und die dritte eher im Sinne des Hilbert-Programms, in der die Logik formalisiert und eine wichtige Rolle spielt. Die zweite Art der axiomatischen Methode nach Wilder ist für uns besonders interessant, die »naive« Axiomatik eines »working mathematician«, vgl. [Wil67, S. 124]. Sie wird dort so beschrieben: »We [working mathematicians] are careful to list our primitive terms, but we list neither the logical nor the set-theoretic rules by which we shall abide«. Wir werden diese »naive« Methode später etwas genauer studieren.

[104]»Es blieb eben nichts anderes übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des *lokalen Ordnens* genannt.«, vgl. [Fre63, S. 6].

[105]Dort verweisen sie für Erklärung auf Abschnitt 5.1 und die Arbeit Ufer et al. von 2009, aber auch dort wird »axiomatisch« nicht erklärt.

[106]Wobei unklar bleibt, wie Kinder zwischen einer ungefähren und einer exakten Faltung eines Drittels einer Strecke unterscheiden könnten.

[107]Hans Freudenthal und anschließend Tobias Hock unterscheiden ebenfalls drei Stufen der Axiomatik: Die euklidische, die hilbertsche und die abstrahierende (bourbakische). Diese Einstufung unterscheidet sich aber von der von Wilder.

Zum Schluss dieses Einschubs wollen wir noch einige ähnlich klingende und nicht scharf getrennte Begriffe einordnen.

Bemerkung 1.14. Die Begriffe »Axiomatik«, »Axiomatisieren« und »axiomatische Methode« werden teilweise synonym verwendet, vgl. auch [Tap13, S. 40, Fußnote 3]. Das ist meistens kein Problem, weil in der Regel nicht genau definiert wird, was damit gemeint wird, und lediglich die endliche, rekursive Natur des Beweisens angedeutet werden soll. Hans Freudenthal unterscheidet prominent zwischen Axiomatik und Axiomatisieren. So könnte unter Axiomatik grob der Aufbau einer Theorie von den (irgendwie gefundenen) Axiomen und Grundbegriffen her verstanden werden. »Axiomatisieren« wäre dann hingegen ein gezieltes Auswählen (nach vorher überlegten Kriterien) von Axiomen und Grundbegriffen aus einer bereits (in irgendeiner Form bekannten) Theorie.
Demgegenüber sagt Michael de Villiers statt »Axiomatik« im obigen Sinne »constructive axiomatization« und statt »Axiomatisieren« entsprechend »descriptive axiomatization«, vgl. [dVil86]. Wenn wir zwischen Axiomatik und Axiomatisieren/Axiomatisierung unterscheiden werden, dann im freudenthalschen Sinne. Wir sehen eine Verbindung zwischen »axiomatischer Methode« und »Axiomatisieren« im folgenden banalen Sinn: Die Methode, nach der Theorien axiomatisiert werden, nennen wir axiomatisch.

Abgesehen von speziell konstruierten Theorien ist es nahezu unmöglich, pures Axiomatisieren in einer mathematischen Veranstaltung durchzuführen. Dies erforderte eine Kenntnis einer Theorie, ohne zuvor jegliche Strukturierung (Beweise, Zusammenhänge zwischen Aussagen) vorgenommen zu haben. Auf natürliche Weise entsteht eine Mischform zwischen Axiomatik und Axiomatisieren, indem die Theorie aus ersten Aussagen aufgebaut wird und die Vorstrukturierung parallel stattfindet. So werden wir das 1-fach-Origami in unseren Kursen strukturieren, axiomatisieren und definieren, vgl. Kapitel 5. ♯

Nach diesen Vorüberlegungen und Einordnungen stellt sich nun dringender die Frage, was und in welchem Sinne das Axiomatisieren für (Lehramts)Studierende bedeuten sollte. Wir schildern nun kurz die Situation in Würzburg.

Mathematikvorkurse

Das Institut für Mathematik in Würzburg bietet seit mehreren Jahren vor Beginn eines jeden Semesters einen mathematischen Vorkurs an, vgl. das Kapitel von Möller und Nedrenco in [NMck]. An diesen Vorkursen nehmen Studienanfängerinnen und -anfänger der Mathematik (und nah verwandter Studiengänge) teil. In unseren Vorkursen findet eine gewisse beschleunigte Enkulturation[108]in mathematische Sprache und mathematisches Arbeiten statt. Dort werden in sieben Tagen Grundlagen der Logik und Beweisstrukturen und -methoden (sowie der naiven Mengenlehre) gegeben. Weitere »Eingewöhnung« findet dann auf dieser Grundlage in konkreten Vorlesungen statt.

In den Mathematikvorkursen in Würzburg wird das formale Niveau einer Logikveranstaltung (verständlicherweise) nicht erreicht oder angestrebt. Trotzdem müssen bestimmte tragende Begriffe der Logik erklärt werden. So wird etwa das Wort »Aussage« nur im aristotelischen Sinne definiert:

> Unter einer (mathematischen) Aussage verstehen wir ein sprachliches Gebilde, bei dem es sinnvoll ist, zu fragen, ob es wahr oder falsch sei.

Offenbar ist das keine gute Definition, da hier weder »sprachliches Gebilde« noch »sinnvoll« definiert werden (»wahr/falsch« wird in der Aussagenlogik eingeführt). Wir können aber leicht erkennen, dass »sprachliches Gebilde« durch rekursiven Aufbau wie in Definition 1.6 ersetzt werden kann; »sinnvoll« deutet an, dass wir über Aussagen und nicht über allgemeine Formeln sprechen wie in Definition 1.7.

Bemerkung 1.15. Da ein adäquater Wahrheitsbegriff, der unsere alltägliche Erfahrung umfasst, widersprüchlich ist (Beispiele wie »Dieser Satz ist eine falsche Aussage« werden in unseren Vorkursen diskutiert, vgl. auch [Tar77, S. 253]), wird der mathematische Wahrheitsbegriff (oder besser *das Erfülltsein, Gültigsein*) in der Logik rekursiv aufgebaut. Dieser Aufbau ist möglicherweise aus der naiven Mengenlehre besser vertraut. Um Antinomien[109] zu vermeiden, erlauben wir nur bestimmten rekursiven Konstrukten eine Menge zu heißen. So auch hier: Erlaubte Formeln werden rekursiv aus gewissen Primformeln aufgebaut; weisen wir diesen Primformeln einen (Wahrheits)Wert zu (etwa 0 oder 1, *wahr* oder *falsch*, blau oder grün; solange wir von zweiwertigen Logiken sprechen), so können wir jeder gegebenen zulässigen Formel einen Wert zuweisen. In diesem eingeschränkten formalisierten Sinn kann ein unproblematischer Wahrheitsbegriff eingeführt werden. Typischerweise ist die heute geläufige mathematische Sprache so gestrickt, dass, um Diskussionen zu vermeiden, das Wort »wahr« eher der Aussagenlogik vorbehalten ist. So sagen wir eher über einen Satz dieser »gilt«, »ist bewiesen«, »folgt aus XY« und seltener »der Satz von Sylow ist wahr«. Typischerweise ist »zu zeigen«, dass etwas »gilt«, eher als zu beweisen, ein Satz sei wahr.
Es hat sich etabliert, bei weniger problematischen Stellen, naiv zu arbeiten[110]; bei problematischeren vorsichtiger, so wie mit der Wahrheit beispielsweise. Diese Intuition, wo welches formales Niveau benötigt wird, gehört wohl zur Enkulturation.[111] Die Intuition bezogen auf die axiomatische Methode zu verbalisieren ist letztlich unsere Intention. ♯

[108] Mit Jahnke und Ufer sehen wir dabei die Enkulturation als eine »Entwicklung, die der wissenschaftliche Nachwuchs durchlaufen muss, um sich [...] Normen und Regeln [einzelner mathematischer Teildisziplinen] anzueignen«, vgl. [JU15, S. 333].

[109] Die russelsche Menge $\{x \mid x \notin x\}$ führt zu einem Widerspruch. In der gängigen Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ist dieser Term aber keine Menge (und führt daher nicht zum Widerspruch), vgl. auch [Dei10, S. 183].

[110] So wird die Vereinigung $M \cup N$ zweier Mengen M und N teils verbal »Elemente, die in M oder in N liegen« beschrieben, oder naiv als $\{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ notiert. Dass diese Notation an Russell erinnert und nicht ohne Weiteres verbessert werden kann (beispielsweise axiomatisch), wird vermutlich nur Wenige besorgen.

[111] »Up to now the axiomatic method has certainly shown itself to be the most important tool for the codification of what our intuitions tell us«, vgl. [Wil67, S. 122].

Die obige naive Definition einer Aussage enthält bereits eine erste Abstraktion: Sie verlangt nicht, dass entschieden werden muss, ob das vorliegende Gebilde tatsächlich wahr oder falsch ist, vgl. dazu auch [Mar75, S. 2]. Es kann ja sein, dass wir das nicht (unmittelbar) entscheiden können. Ein häufiges Beispiel ist die goldbachsche Vermutung (jede gerade Zahl größer als Zwei ist Summe zweier Primzahlen). Wir haben keinen Beweis und kein Gegenbeispiel für diese Vermutung, aber wir könnten nicht bestreiten, dass es sinnvoll ist, nach dem Wahrheitsgehalt dieser Vermutung zu fahnden.

Bemerkung 1.16. Die übersimplifizierte *Beschreibung* einer Aussage scheint jedoch im mathematischen Alltag weitestgehend auszureichen, so wie die erwähnte Darstellung von Axiomen bei Martin.

So ähnlich verhält es sich mit dem Mengenbegriff. Die naive cantorsche Definition einer Menge als »jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens [...] zu einem Ganzen«, vgl. [Can95, S. 481] ist bekanntermaßen widersprüchlich und Mengen werden heute formal etwa durch die Zermelo-Fraenkelsche Axiome definiert. Allerdings begegnen uns diese Axiome im mathematischen Alltag selten und typischerweise genügt für den Alltag die naive Vorstellung.[112] ♯

Neben dem Begriff einer Aussage wird in den Vorkursen auch der Begriff »Definition« diskutiert. Wie bereits gesehen, spielt das Definieren eine wichtige Rolle für die axiomatische Methode (und für die gesamte Mathematik natürlich auch). Einen gewissen Zirkelschluss, die rekursive Problematik erkennen Studierende bereits an der polemischen Fragestellung: Was ist eine Definition einer Definition? In der Regel werden keine expliziten *Regeln* des Definierens diskutiert,[113] sondern es wird am Beispiel gezeigt, was gute und was schlechte Definition sind. Wir beschreiben umgangssprachlich, dass »links« das neue Zeichen steht, in der Mitte »:=« und »rechts«, das, was abgekürzt werden soll (unter Nichtverwendung von Zeichen, die definiert werden). So kann »Dreieck« als eine abkürzende Schreibweise für »drei nicht kollineare Punkte« verwendet werden, wenn bereits »kollinear« und »Punkt« definiert wurden.

Ein nächster Annäherungsversuch an die Beantwortung der Frage des Abschnitts kann aus einer anderen Perspektive, nämlich aus den *schul*mathematischen Überlegungen, versucht werden.

Bemerkung 1.17. Unser Zielpublikum ist ein anderes: Studierende und nicht Schülerinnen und Schüler. Das sorgt für allerlei Anpassungen, sollten wir versuchen, die üblichen Argumente und Darstellungen für und gegen Axiomatik (in der Schule) zu übertragen. Folgende Gründe für solche Anpassungen liegen auf der Hand:

---

[112] Georg Cantor war durchaus bewusst, dass diese Definition nicht genügend ist; er hat Probleme des von ihm begründeten Mengenbegriffs frühzeitig erkannt und versucht, den Mengenbegriff axiomatisch aufzubauen, vgl. [Dei10, S. 442].

[113] Alfred Tarski umschreibt das elegant mit: »Wenn eine Definition die ihr eigentümliche Aufgabe gut erfüllen soll, so [...]«, vgl. [Tar77, S. 48].

a) Studierende bekommen eine gewisse Menge an Grundlagen geboten, die für das alltägliche Arbeiten (im Studium) zunächst ausreicht und in der Schule in der Regel nicht zur Verfügung steht, vgl. Darstellungen auf Seite 48. Somit stellt sich die Frage nicht, *ob* Studierenden der rekursive Charakter der Mathematik und des Beweisens gezeigt werden soll; das geschieht bereits in den ersten Studientagen.
b) Das Beispiel 1.5 sowie Abschnitt 1.3.1 legen nahe, warum die für uns relevanten Begriffe wie »Axiom« und »Axiomatisieren« erst im Kontext passend definiert werden können. Das, was in der Schule ggf. noch eine »evidente Tatsache« sein mag, kann im Studium oder im professionellen Bereich durchaus »eine nicht abgeleitete Aussage« oder einfach »eine Formel« bedeuten.
c) Studierende lernen erste mathematische Theorien meist in axiomatisch strukturierter und wesentlich formaleren Form als in der Schule kennen: Vektorräume, reelle Zahlen, projektive Räume werden etwa axiomatisch definiert, die jeweiligen Theorien sorgfältig entwickelt.[114] Auch wenn dies keinesfalls nahelegt, dass Studierende *dadurch* mit der axiomatischen Methode *vertraut* sind, ist die Ausgangslage für die Beantwortung der Frage, welche Bedeutung das Axiomatisieren für Studierende (im Gegensatz zu Schülerinnen und Schülern) haben soll, eine andere.
d) Studierenden stehen daher viel mehr Inhalte zur exemplarischen Axiomatisierung zur Verfügung.
e) Studierende der Mathematik stellen eine spezielle Kohorte von Menschen dar, von denen wir schlicht erwarten, ein größeres Interesse an der Mathematik und Bereitschaft zum vertieften Arbeiten zu zeigen.

Es leuchtet demnach ein, dass die Überlegungen und Ergebnisse, die in Bezug auf eine irgendwie geartete Beschäftigung mit Axiomen in der Schule, nicht ohne Weiteres für das Lehramtsklientel angewendet werden kann. ♯

Bezogen auf den mathematischen Schulunterricht gibt es viele Überlegungen dazu, welche Rolle Beweise und Axiome dort spielen sollen. So spricht Heinrich Winter 1983 von einer »Fülle von Literatur zum Beweisen im Mathematikunterricht«, vgl. [Win83, S. 63]. Hans Freudenthal erwähnt eine »Mannigfaltigkeit der Publikationen über Axiomatik auf der Schule«, vgl. [Fre63, S. 26].

Wir können in dieser Arbeit die Entwicklung der Axiomatisierungsdebatte im Schulunterricht, auch aus sachanalytischer Sicht, nicht wiedergeben. Insbesondere wollen wir in unserer Arbeit keine sorgfältige Entwicklung[115] des Axiomatikthemas darlegen. Dazu müssten wir bei Euklid anfangen, über die Diskussionen zu Hilberts Zeit berichten, die Entwicklungen um die sogenannte Neue Mathematik in neuerer Zeit beleuchten und diese kritisch bewerten und schließlich die Lehren, die aus die-

[114] Trotzdem wird kaum jemand explizit die undefinierten Begriffe der Vektorraumtheorie oder den Unterschied zwischen syntaktischer und semantischer Folgerung explizieren.

[115] Oder auch: Wir wollen keine axiomatische Darstellung der axiomatischen Entwicklung geben. Das ist eine Paraphase eines Zitats von Albert Blank, das wir in [HHS16, S. 192] gefunden haben: »We need not use the axiomatic method of teaching to teach axiomatic method«.

ser langen Entwicklung für den heutigen Mathematikunterricht gezogen wurden, anhand der neueren Lehrpläne und der Kompetenzen wie *mathematisch Argumentieren* einordnen. All das wurde bereits in vielen Arbeiten erledigt.

In der kürzlich erschienenen Dissertation »Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht« [Hoc18] analysiert der Autor Tobias Hock die Entwicklung der Axiomatik und der axiomatischen Methode am Beispiel der Geometrie zwischen Euklid und Hilbert, die neueren Entwicklungen der Strukturmathematik seit Bourbaki und der Neuen Mathematik sowie ihren negativen und positiven Einfluss auf den Mathematikunterricht. Ferner werden aus diesen Betrachtungen Schlüsse für den heutigen Mathematikunterricht gezogen und neue Ansätze entwickelt. Die Thematik der Dissertationsschrift von Hock ist nah an unserer (abgesehen vom Zielpublikum), die gut lesbaren geschichtlichen und mathematischen Darstellungen sind ausreichend ausführlich, so dass wir es für angemessen halten, die dortigen Entwicklungen nicht zu wiederholen, auf diese Arbeit zu verweisen und nach Bedarf einzelne angesprochene Punkte herauszugreifen, zu kommentieren und einzuordnen.

Tobias Hock kommt zum Schluss, dass es »kaum vertretbar« sei, die Axiomatik »komplett aus dem Mathematikunterricht zu verbannen«, vgl. [Hoc18, S. 200]. »Schülerinnen und Schüler [sollten] nicht nur lernen, mit vorgegebenen Axiomensystemen deduktiv zu arbeiten, sondern auch Einsicht in das Zustandekommen verschiedener Axiomensysteme gewinnen«, ebd. Hock stellt gleichwohl entsprechend seinen Darstellungen klar, dass »ein axiomatischer Aufbau ganzer Schulstoffgebiete aus methodischen, lernpsychologischen und zeitlich-organisatorischen Gründen nicht zielführend ist«, ebd.

Auch Jahnke und Ufer konstatieren »die Tatsache, dass aus guten pädagogischen Gründen der axiomatische Aufbau der Mathematik in der Schule nicht thematisiert wird«, vgl. [JU15, S. 351] oder schärfer: »Es besteht ein weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet«, vgl. [JU15, S. 333], bemängeln aber ebenfalls, dass Schülerinnen und Schülern dadurch wichtige Vorstellungen über »die Natur des mathematischen Beweises«, die zwangsläufig Vorstellungen über die axiomatische Beschaffenheit der modernen Mathematik inkludiert, entgehen.

Hock resümiert seine Überlegungen zum Einsatz der Axiomatik in der Schule:

> »Es wäre definitiv zu begrüßen, wenn Schülerinnen und Schüler über einen längeren Zeitraum an verschiedenen Stellen ihres Bildungsweges (auch in der Sekundarstufe I) exemplarische und altersgemäße Einblicke in Aspekte der Axiomatik erhielten, und so zu einer vertieften Reflexion auf der Meta-Ebene befähigt würden.«, vgl. [Hoc18, S. 201].

Im dortigen Kapitel 4 gibt Hock entsprechend »exemplarische und altersgemäße Einblicke« anhand bereits publizierter Unterrichtseinheiten von etwa Hans-Georg Steiner oder Hans Niels Jahnke. In Kapitel 5 präsentiert er seine eigenen Unterrichtseinheiten (etwa zur Geometrie oder kolmogoffschen Axiomen).

Lehramtsstudierende stellen bzgl. Fachwissen und -können sicherlich eine Kohorte der Mathematikbetroffenen, die zwischen professionelle Mathematikschaffende und Schülerinnen und Schüler eingeordnet werden kann. Aus normativer Perspektive können wir behaupten: Das, was Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht können müssen, müssen Lehramtsstudierende auch können und natürlich noch mehr, nämlich zusätzlich mindestens das fachdidaktische Wissen. Analog können wir auf universitärer Ebene argumentieren. Professionelle Mathematikschaffende können als Ausbildende angesehen werden, folglich haben sie mehr fachmathematische Kompetenzen als Lehramtsstudierende. Folglich, um ein Niveau der Anforderungen an Lehramtsstudierende einzugrenzen, haben wir uns das Axiomatisieren nun nicht nur aus der fachmathematischer, sondern auch aus schulischer Perspektive angeschaut. Zusammenfassend: Gewiss *benötigen* Lehramtsstudierende nicht die volle Strenge der mathematischen Logik für gewisse Aspekte der axiomatischen Methode. Gewiss ist auch, dass sie mehr über diese Methode als etwa ihre späteren Schülerinnen und Schüler wissen sollten.

Beispiel 1.18. Als ein alltägliches und oberflächlicheres Beispiel für diese Sichtweise könnte die Abseitsregelung im Fußball[116] angeführt werden. So müssen im Zweifelsfall nur die (Linien)Schiedsrichterinnen und -richter (vgl. Mathematikprofis) exakt Bescheid wissen, wann Abseits vorliegt. Doch von einer Kommentatorin oder von einem Kommentator (vgl. Lehrkräfte) können wir zumindest eine sachgemäße Einschätzung einer vorgelegten Situation erwarten, ggf. mit einer Einordnung in frühere und modernere Auslegungen. Zuschauerinnen und Zuschauer (vgl. Schülerinnen und Schüler), selbst Fußballspielende, müssen nach unserer Einsicht den teilweise komplizierten Sachverhalt nicht erklären können. ♯

Entsprechend diesen Überlegungen steht dann außer Frage, dass Lehramtsstudierende folglich mit der Thematik der axiomatischen Methode vertraut sein sollten. Mehr noch, für Lehramtsstudierende ist die Situation ggf. weniger vorsichtig als für Lernende in der Schule zu bewerten: Von ihnen kann eine gewisse Kenntnis der axiomatischen Methode normativ verlangt werden.

Wir geben hierzu Schilderungen von Tarski und Klein für die geschichtliche Perspektive an, ordnen aber die Situation mit Ufer und Reiss sowie den Empfehlungen von GDM/DMV/MNU in die heutige Zeit ein.

Nach den Erfahrungen der sog. Neuen Mathematik, mutet das nächste Zitat von Alfred Tarski der 1960er Jahre etwas skeptisch an, doch seine Vorstellung leucht ein:

[116] Denn frei nach Rolf Miller »Fußball ist immer«, vgl. Rolf Millers *Tatsachen*, 2010-2014.

> »Für jeden, der eine Wissenschaft zu treiben oder zu studieren beabsichtigt ist es zweifellos wichtig, sich der [deduktiven] Methode bewusst zu sein, die man beim Aufbau einer Wissenschaft verwendet [...] Ohne diese Kenntnis ist es unmöglich, das Wesen der Mathematik zu begreifen«, vgl. [Tar77, S. 126].

Etwa 50 Jahre später formulieren Ufer und Reiss:

> »In jedem Fall wird erwartet, dass die Studierenden am Ende ihrer Ausbildung in der Lage sind, Beweise und mathematische Argumentationen zu bewerten, ggf. anzupassen und auch selbst zu konstruieren. Dazu gehört ein Verständnis für die axiomatische Struktur mathematischen Wissens«, vgl. [RU09, S. 172].

Wir finden, dass das folgende berühmte Zitat von Felix Klein in seiner Gänze durchaus auch dort von der (thematisch ähnlichen Frage nach) axiomatischen Methode handeln könnte, wo es um nichteuklidische Geometrien geht. Nach dieser diskutablen Substitution passt das Zitat sehr gut zu den Ergebnissen von Hock.

> »Jeder Lehrer muss notwendig etwas von der nichteuklidischen Geometrie kennen; denn sie gehört nun einmal zu den wenigen Teilen der Mathematik, die zum mindesten in einzelnen Schlagworten in weiteren Kreisen bekannt geworden sind; nach ihr kann daher jeder Lehrer jeden Moment gefragt werden. In der Physik gibt es ja ungleich mehr solche Dinge – fast jede neue Entdeckung gehört dahin –, die in jedermanns Munde sind und über die dann selbstverständlich jeder Lehrer unterrichtet sein muss. Man denke sich nur einen Lehrer der Physik, der über Röntgenstrahlen oder Radium nichts zu sagen weiß; einen viel besseren Eindruck würde auch der Mathematiker nicht machen, der auf Fragen über nichteuklidische Geometrie keine Auskunft geben kann! Demgegenüber möchte ich dringend davon abraten, im regulären Schulunterricht [...] nichteuklidische Geometrie zu bringen, wie das Enthusiasten immer wieder empfehlen. [...] schließlich ist es ja auch in Ordnung, dass der Lehrer ein bisschen mehr weiß als der durchschnittliche Schüler.« Felix Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, Band II, 1928, S. 199-200.

Letztlich postulieren die »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik« von 2008, bezogen auf »Geometrie – Strukturen von Raum und Form«, vgl. [DMV08, S. 153]: »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie«. Diese Kompetenz ist in die Empfehlung der GDM, DMV und MNU wie folgt eingeordnet: »Über die Kompetenz[en] soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik in der Sekundarstufe II unterrichtet«, vgl. ebd. S. 150. Sie wird uns noch in Kapitel 7 begegnen.

So gesehen, gehören für Lehramtsstudierende gewisse Grundkenntnisse der axiomatischen Methode neben den konkreten *unterrichtspraktischen* Aspekten zum *Bild* der Mathematik, die sie im Unterricht repräsentieren. Der *normative* Aspekt dieser Grundkenntnisse wird noch durch den nach Freudenthal ganz eigennützigen Sinn des Axiomatisierens ergänzt: Das *Erlernen des Definierens* »und nicht nur eine[r] Definition, die [...] vorgesetzt wird«, vgl. [Fre63, S. 20].

Das können wir als eine partielle Antwort auf die Frage »Was soll das Axiomatisieren für Lehramtsstudierende sein?«, »welchen Sinn soll das Axiomatisieren haben?« benutzen.

Für die Mathematik selbst ist der Sinn der Axiomatisierung unter anderem eine Strukturierung, Umordnung, Verschaffung der Klarheit, Vereinfachung der Theorie, vgl. [dVil86, S. 8]. Diese Strukturierung deckt also Redundanzen, mögliche Zirkelschlüsse, Begriffe, die versehentlich undefiniert verwendet wurden, etc. auf, vgl. ebenda. Für Studierende ist diese Problematik womöglich zweitrangig: Sie werden mit Theorien und Axiomensystemen konfrontiert, die bereits untersucht und bereinigt worden sind, bei denen zumindest die Lehrperson weiß, wie die Struktur der Theorie aussieht.

Reden wir nun über die konkrete Umsetzung: Wie vereinfachen, konkretisieren wir die fachmathematische Darstellung, so dass diese mathematisch akzeptabel und für Lehramtsstudierende trotzdem gut zugänglich wird?

Eine nicht formale, vereinfachende Darstellung birgt immer die Gefahr, falsche Vorstellungen zu erzeugen. Einige Vorstellungen mögen im alltäglichen Arbeiten unproblematisch bleiben (wie etwa der naive Mengenbegriff), andere können hartnäckig sein: Wir werden in Kapitel 7 darüber berichten, was sich Studierende unter Axiomen vorstellen oder besser wie sie sie definieren. So trifft zwar die bereits zitierte Definition der Axiomatik vom Duden als »Lehre vom Definieren und Beweisen mithilfe von Axiomen« den Kern des Begriffs, lässt aber (verständlicherweise) etwa den Zusammenhang zwischen den Begriffen »Definieren«, »Beweisen«, »Axiomen« vermissen.

Gleichzeitig wäre es völlig falsch diese Überlegung so zu interpretieren, die formalistische Sicht sei die einzig richtige. In seiner Zusammenfassung zur Rolle der Axiomatik im Mathematikunterricht beschäftigt sich Tobias Hock auch mit Bedenken gegen Axiomatik in der Schule etwa der folgenden Art: »Die eigentliche Bedeutung der axiomatischen Methode [sei] auf schulischem Niveau nicht in intellektuell redlicher Weise [zu] vermitteln«, vgl. [Hoc18, S. 88]. Beim Ausräumen dieser Bedenken argumentiert er unter anderem:

> »Eine Beschränkung auf einen (ggf. kleinen) Ausschnitt axiomatischen Denkens und Arbeitens bedeutet nicht automatisch, dass man als Lehrkraft intellektuell unredlich handelt, solange man nichts fachlich Falsches vermittelt oder den Schülerinnen und Schülern suggeriert, das Wesen der Mathematik erschöpfe sich in der Aufstellung von Axiomensystemen und der Herleitung von Aussagen aus diesen.«, vgl. [Hoc18, S. 89f].

Diese Auffassung teilen wir im Wesentlichen auch, wobei die Hoffnung, »nichts fachlich Falsches« bei einer nicht formalistischen Darstellung zu vermitteln, unerreichbar erscheint. Wir plädieren eher dafür, eine nicht formalistische (und im eigentlichen Sinne unvermeidbar falsche) Darstellung zu akzeptieren, jedoch bei aufkommenden Problemen bereit zu sein (und die Lehrkraft entsprechend vorzubereiten), die Darstellung nicht nur zu diskutieren, sondern anpassen zu können. Im gewissen Sinne benötigt diese Forderung ein tieferes Verständnis der Thematik als es bei einer formalen Darstellung der Fall wäre. Diese Auffassung erscheint uns als eine natürliche Verallgemeinerung der bereits zitierten Forderung von Ufer und Reiss, dass »die Studierenden [...] in der Lage sind, Beweise und mathematische Argumentationen [...] anzupassen«.

Beispiel 1.19. Beispielsweise beschreiben Jahnke und Ufer einleitend in [JU15, S. 331] eine Approximation der mathematikalltäglichen Vorstellungen einer Axiomatisierung[117]:

> »Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln. Axiome sind unbewiesene Aussagen, die man an den Anfang einer Theorie stellt.«

Selbst bei dieser professionellen Beschreibung können wir bei Bedarf gewisse Aspekte herausgreifen, die auf lange Sicht problematisch werden. So ist das Adjektiv »unbewiesen«, bezogen auf Axiome, problematisch. Da jedes Axiom A sich trivialerweise selbst beweist (etwa mit Tautologie $A \to A$ mit Modus Ponens), könnte diese Darstellung die Vorstellung erzeugen, ein Axiom sei kein Satz. Das implizierte wiederum die Vorstellung, dass Axiome unabhängig voneinander seien (sonst gäbe es Axiome, die sich beweisen lassen). Würden wir mit dieser Darstellung nun metamathematisch arbeiten wollen, müssten wir dann die gegebene Definition anpassen. Positiv gesehen, motiviert diese Überlegung eine Beschäftigung mit dem Begriff der Unabhängigkeit der Axiome.
So gesehen, gibt es keinen Grund, von Axiomen als »unbewiesenen« Aussagen zu sprechen, sondern nur von Aussagen; das approximiert aber unsere alltägliche Vorstellung davon. ♯

Konkret sehen wir eine Gefahr darin, durch Simplifizierung des komplexen Formalismus der mathematischen Logik und durch Vermittlung prägnanter aber vereinfachter Phrasen, Fehlvorstellungen zu erzeugen. So könnten Vorstellungen wie

[117] Wichtige Aspekte des Axiomatisierens: Der rekursive Aspekt des Beweisens, Axiome, keine Wahrheitszuweisungen, Gebäudeaspekt, verbindende Logik – sind vorhanden.

»undefinierte Begriffe seien undefinier*bar*«[118], »Axiome (als unbewiesene Aussagen) seien unbeweis*bar*«[119], »laut Gödel können in der Zahlentheorie jederzeit Widersprüche auftauchen«[120] etc., zum fehlerhaften Bild der Mathematik und der erzielten Ergebnisse durch die axiomatische Methode führen. Es ist folglich zu überlegen inwieweit auf einem nicht formalistischen Wege welche Grundgedanken der axiomatischen Methode Studierenden nahegebracht werden sollen.

Eine mögliche Antwort auf die Frage »was ist Axiomatisieren im Rahmen der Lehrkraftausbildung?« ist keine vereinfachende *Beschreibung* der Begrifflichkeiten, sondern eine Beschäftigung anhand ausgewählter Aspekte zum Thema, welche für ein prinzipielles Verständnis der Thematik ausreichen könnten. Im Schulunterricht ist für Hock »eine Thematisierung axiomatischer Aspekte [...] trotz der geäußerten Bedenken erstrebenswert«, vgl. [Hoc18, S. 91]. Konkrete Aspekte des Axiomatisierens arbeitet er nicht heraus, sondern verarbeitet die geschichtlichen Schilderungen und dort beobachteten Aspekte in den Lernzielen für Schülerinnen und Schüler, vgl. [Hoc18, S. 94]; die meisten Aspekte können aber bereits aus der Literatur zum Argumentieren und Beweisen entnommen werden.

Schauen wir uns einige naive[121] Darstellungen vergleichend an und extrahieren daraus tragende Aspekte und Vorstellungen einer Axiomatisierung.

Nach Duden »Lehre vom Definieren und Beweisen mithilfe von Axiomen« Hier wird offenbar nicht erklärt, *wie* dieses Definieren stattfindet und was genau *mithilfe* bedeutet. Der rekursive, endliche Aspekt kann dazu gedacht werden, ist aber nicht erkennbar.

Nach Martin »An axiom system [...] consists of some undefined terms and a list of statements, called axioms [...], concerning the undefined terms. One obtains a mathematical theory by proving new statements, called theorems, using only the axioms and previous theorems.« Der Beweisaspekt ist offensichtlich vorhanden, wird aber nicht expliziert. Es wird nicht vom Axiomatisieren, son-

[118] Natürlich ist etwa ein geometrischer Punkt definierbar: Die Punktmenge der euklidischen Geometrie ist durch ein widerspruchsfreies Axiomensystem für diese Geometrie *definiert*.

[119] Natürlich können auch Axiome bewiesen werden, je nach Wahl des Axiomensystems. Gerade bei einem Axiomensystem, das als nicht unabhängig erkannt wurde, müssen ja per Definition einzelne Axiome aus den restlichen heraus beweisbar sein.

[120] Diese Vorstellung ist tiefer liegend. Hier müsste geklärt werden, dass der zweite gödelsche Unvollständigkeitssatz nur sog. finite Beweismethoden einsetzt. Würde der Beweisapparat erweitert werden, so könnte der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie doch gelingen. In der Tat wurde ein solcher Beweis unter Verwendung von nicht finiter, aber eben spezieller transfiniter Induktion, die nicht innerhalb der Zahlentheorie bewiesen werden kann, von Gerhard Gentzen 1936 erbracht, vgl. [Gen36].

[121] »Naiv« bedeutet keinesfalls »falsch« oder »elementar«. Eher soll dieser Begriff einen intuitiven, nicht formalisierten Ansatz bedeuten.

dern von der Axiomatik gesprochen, vgl. Bemerkung 1.14. Eine Strukturierung einer bestehenden Theorie ist herauslesbar, aber nicht expliziert.

Nach Jahnke und Ufer vgl. Beispiel 1.19. Hier wird die Axiomatik aus dem Beweisbegriff heraus ausgearbeitet. Das ist eine gute Darstellung des Beweis- und Rekursionsaspektes, wobei für die Darstellung der Axiomatisierung (die hier nur teilweise beabsichtigt ist) noch der definitions-ontologische Aspekt fehlt. Ein wesentlicher Unterschied oder eine wesentliche Ergänzung der axiomatischen Methode gegenüber des Beweisaspektes der Rekursion ist, dass auch das Definieren einer Rekursion bedarf. Die präzise Form der Darstellung führt (gewollt?) zu weiteren Fragen (Welche Schlussregeln sind das denn? Wie verhält sich *deduktiv* zu den Schlussregeln? etc., vgl. auch Beispiel 1.19.)

Nach Beth »We may characterise a [...] *deductive theory* T as being the set of all statements [...] which can be derived, starting from a certain set of fundamental statements [...] by means of logical inference. Likewise, T is characterised by certain specific notions; these notions are either *primitive*, or else they must be *defined* in terms of the primitive notions.«, vgl. [Bet65, S. 81]. Das ist eine Variation aus den beiden vorhergehenden Punkten. Hier ist etwa der endliche Beweisgedanke etwas versteckt, aber Schlussregeln erwähnt; auch (Grund)Begriffe erfahren Rekursion.

kumulativ aus Obigem und nach Tarski Was würde es naiv bedeuten, eine Theorie oder eine Menge von Aussagen zu axiomatisieren? Dabei können wir beispielsweise an die euklidische Schulgeometrie, das Beispiel 1.9 oder die Physik denken. Haben wir noch keine Zusammenhänge zwischen einzelnen Aussagen gegeben, dann müssen wir sie zunächst lokal ordnen, Zusammenhänge suchen. Wir erkunden damit, welche Aussagen auf andere zurückgeführt werden können. Auf andere Aussagen zurückführen heißt endliche Ketten/Listen von Aussagen/Sätzen (und ggf. von Argumenten/Schlüssen) angeben, warum die jeweiligen Aussagen gelten/stimmen. Das birgt die Gefahr eines Zirkelschlusses. Ein Zirkelschluss sollte vermieden werden.[122] Eine bessere Formulierung ist daher: Wir wollen Satz A auf andere Sätze zurückführen, welche *zuvor*, also ohne die Verwendung von A, bewiesen wurden. Hier erkennen wir sofort eine weitere Notwendigkeit: Wollen wir jeden Beweis in endlich vielen Schritten und ohne Zirkelschlüsse absolvieren, dann müssen wir eine Liste von Aussagen formulieren, die am Anfang jeder Beweiskette stehen, ohne dass wir diese Aussagen auf andere zurückführen. Alle Aussagen und insbesonde-

[122] Beweisen wir etwa A mit B und C, dann sollte ein Beweis von C mit D und A vermieden werden. Oder: Beweisen wir den Zwischenwertsatz mittels des Nullstellensatzes von Bolzano, dann müssen wir aufpassen, dass der letztere keine Argumente verwendet, bei denen die Zwischenwerteigenschaft irgendwie auftritt.

> re diese anfänglichen Aussagen werden mit Begriffen formuliert, die, einem ähnlichen Prozess folgend, aus einigen wenigen Grundbegriffen heraus definiert werden. Bei den Grundbegriffen entscheiden wir uns, nicht zu erklären, was diese bedeuten sollen. Die Liste dieser anfänglichen Aussagen und Grundbegriffe nennen wir dann *Axiomensystem*. Der Prozess dieses Auffindens des Axiomensystems nennen wir *Axiomatisieren* und die so geschaffene Struktur und Hierarchie der Theorie nennen wir *Axiomatisierung* der Theorie.

Diese Erklärungen sind also mit einigen fachlichen und organisatorischen Schwierigkeiten verbunden: So wird bei keiner halbwegs ausgereifter Theorie innerhalb einer Lehrveranstaltung jede Aussage einzeln geprüft und lokal eingeordnet, daher taucht dieser Aspekt kaum auf; die Vorstellung, dass es sich durchführen lässt, scheint zu genügen.

Das Problem, dass der beschriebene Rekursionsprozess überhaupt mit einer kleinen Menge an Axiomen terminiert, wird bei didaktisch aufbereiteten Theorien keines sein, jedoch ist diese Vorstellung trügerisch: Bereits das grundlegende Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel ist nicht endlich axiomatisierbar, vgl. [Dei10, S. 476]. Bei einer größeren Theorie wie die der euklidischen Geometrie oder der allgemeinen Physik erscheint die Vorstellung auf einmal nicht sehr banal, dass eine (überschaubare) Liste von Axiomen existieren muss.[123]

Wir stellen insgesamt fest, dass Begriffe, die nicht formal definiert werden, aber eine gewisse formale Stufe suggerieren, zu falschen Vorstellungen führen können, wenn nicht zwischen einer Beschreibung und einer Definition der Begriffe unterschieden wird.

Beispiel 1.20. Haben Studierende Verständnisprobleme mit dem Begriff der p-Sylow-Gruppe, dann liegt das nicht daran, dass sie nicht hinreichend präzise definiert ist (eine Untergruppe U einer endlichen Gruppe G, so dass $|U|$ die höchste p-Potenz ist, die $|G|$ teilt). Die Situation ist anders mit den Begriffen wie »Axiomatisieren« oder »axiomatische Methode« oder gar »Beweis«. Hier liegt in der Regel keine lückenlose Definition vor, so dass bereits deshalb falsche Vorstellungen entstehen könnten. ♯

Folgende Aspekte des Axiomatisierens können wir aus der Literatur und obigen Darstellungen gewinnen. Diese Liste hat keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, wir benennen die typischen Aspekte und vermischen sie mit typischen Vorstellungen[124]

[123] Das berühmte sechste Hilbert-Problem fragt, ob die Physik axiomatisierbar sein, vgl. [Hil35a, S. 306–308]; in dieser Allgemeinheit ist das Problem bis heute noch nicht gelöst.

[124] Von einer Definition oder speziell von mathematischen Aspekten ist die damit verbundene Vorstellung freilich zu unterscheiden. Im Fachjargon würden wir von concept definitions und concept images sprechen, Begriffe, zu denen wir in Kapitel 2 zurückkommen. Die Vorstellung, ein Axiom sei eine tragende Säule des Theoriegebäudes, ist sicherlich hilfreich, doch keinesfalls für den Begriff charakterisierend.

zum Begriff. Die Unterteilung in Aspektgruppen ist nicht bindend und könnte auf verschiedene Weisen erfolgen.

Ausgewählte Aspekte der Axiomatisierung

syntaktische Aspekte

- Formalisierung der Logik und Schlussweisen
- Formalisierung der verwendeten Sprache
- Formalisierung des Wahrheitsbegriffs
- Rekursiver Aufbau von Theorien / Gebäudeaspekt
- Rekursiver Aufbau von Definitionen
- lokales Ordnen: Beweise von Aussagen

semantische Aspekte

- Einführung und Erklärung des Modellbegriffs
- Verzicht auf den Wahrheitsgehalt von Axiomen/Aussagen
- Verzicht auf den Realitätsbezug von Grundbegriffen
- Auswahl von Axiomen als anfängliche Aussagen
- Auswahl von Grundbegriffen
- Grundbegriffe werden mittels Axiomen definiert

sinnstiftende Aspekte

- Vereinfachung, Strukturierung der Theorien
- Analyse der lokalen Ordnungen, Elimination von Zirkelschlüssen
- sich daraus ergebende Wissenssicherung

metamathematische Aspekte

- Unabhängigkeit, Vollständigkeit, Widerspruchslosigkeit von Axiomensystemen
- Analyse und Auswahl von (finiten) zulässigen Beweismethoden
- Trennung zwischen syntaktischer und semantischer Ebene
- restliche Metamathematik

Wir können dann bei der Planung der Lehrveranstaltung überlegen, welche Aspekte für uns am wichtigsten sind und nach entsprechenden Beispielen suchen. Dabei sind nicht alle aus mathematischen Perspektive wichtigen Aspekte auch für die Lehre wichtig.

Wäre die Vermittlung der Vorstellung, die axiomatische Methode diene zur Wissens*sicherung*, wie dies etwa von Hilbert beabsichtigt wurde, ein wichtiger Aspekt in der Lehre, könnte dieser schnell zu Frustrationen führen. So genügt es nicht, zu *skizzieren*, was ein Beweis (als Folge von Aussagen, die durch *geeignete* Schlussregeln auseinander folgen), die Schlussregeln, die Logik dahinter sind. Das mag unplausibel erscheinen, aber welchen Grund gibt es, von Wissenssicherung, Wahrheit, Formalismus und Grundlagen der Mathematik zu sprechen, wenn die Darstellung notwendig skizzenhaft bleibt?

Einige der Axiomatisierungsaspekte sind für das Mathematikstudium schlichtweg nicht wichtig: Selten benötigen wir eine Unterscheidung zwischen verschiedenen Kalkülen; es hat sich in etwa etabliert, welche Schlüsse zulässig sind, das scheint zu reichen. Wir wissen ebenfalls, dass die Beweise selbst wohl kaum in strenger Form ausgeführt werden: »Allgemein anerkannt ist dabei, dass eine vollständige Formalisierung eines Beweises auf streng axiomatischer Ebene meist nicht erreicht wird«, vgl. [RU09, S. 158] und pointierter: »A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof«, laut Yuri Manin, zitiert nach [RU09, S. 158].

Kurzum: Das, was Grundlagenforschenden als essentiell erscheint, muss Studierenden noch lange nicht vermittelt werden. Ein schönes, aber leicht aus dem Zusammenhang gerissenes Zitat von Israel Kleiner dazu ist: »Too much rigor might lead to rigor mortis«, vgl. [Kle91, S. 294].

Auch beim 1-fach-Origami, das wir im Weiteren genauer studieren werden, konzentrieren wir uns auf einige wenige Aspekte der Axiomatisierung und bleiben auf einer wenig formalistischen Ebene. Wir streben es nicht an, Axiome des 1-fach-Origami in einem abstrakten formalistischen Rahmen zu formulieren und das tatsächliche Falten als ein Modell hiervon anzusehen. Insbesondere fangen wir da nicht bei undefinierten Termen und Aussagenformen an, sondern arbeiten bereits innerhalb der euklidischen Ebene.[125]

Bevor wir uns mit der Frage näher beschäftigen, welche Axiomatisierungsvorteile eine Analyse von 1-fach-Origami haben kann, pausieren wir daher kurz und schildern, was unter der euklidischen Ebene verstanden werden kann, in der das Falten stattfindet.

1.3.2. Einschub: Was ist die euklidische Ebene?

Die Antwort auf diese Frage, ist selbst aus mathematischer Sicht nicht ganz eindeutig. Der Term *euklidischer Raum* ist aus der Linearen Algebra bekannt, typischerweise wird darunter ein reeller Vektorraum V verstanden, ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ darauf. Speziell im Endlichdimensionalen würden wir dann vom

[125] Es hätte sicherlich einen Reiz außerhalb der Lehrveranstaltung, ein kategorisches Axiomensystem des 1-fach-Origami im hilbertschen Sinne zu finden, das überlassen wir anderen.

n-dimensionalen euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sprechen.[126] Die weitere Spezialisierung $n = 2$ liefert dann die euklidische Ebene, also $\mathbb{R}^2$ mit einem Skalarprodukt (ohne Einschränkung können wir das Standardskalarprodukt nehmen).

Die Bezeichnung »euklidisch« ist tatsächlich treffend, weil über das Skalarprodukt typische »schulgeometrische« Begriffe wie *Abstand*, *Winkel* etc. definiert werden können.

Andererseits erinnert der Begriff der euklidischen Ebene stark an die Schulgeometrie, in der typischerweise die reellen Zahlen formal nicht vorhanden sind.

In diesem, schulgeometrisch motivierten Kontext, kann eine Definition der euklidischen Ebene wünschenswert sein, die ohne die reellen Zahlen auskommt.

Das historisch bedeutende Axiomensystem von Euklid genügt heutigen mathematischen Standards nicht:[127] Es ist nicht stringent genug, die Definitionen sind nicht befriedigend, die Aussagen können nicht auf Axiome zurückgeführt werden, wichtige Konzepte wie Existenz von Schnittpunkten oder die Dazwischenheit fehlen, unbegründete Bewegungen von Dreiecken werden in Beweisen benutzt. Für eine kompakte Darstellung siehe [Mar75, Kapitel 11 »Euclid's Elements«] oder die Standardliteratur [Hea81, Ch. XI].

Wir verzichten auf die geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Formalisierung der euklidischen Geometrie oder gar auf ontologische Diskussionen über den Werdegang der euklidischen Geometrie und verweisen auf die kompakten Darstellungen in [Mar75, Abschnitt 12.2] sowie [Ken72]. Das rigorose Axiomensystem der euklidischen Ebene in den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert von 1899 war nicht das erste, Moritz Pasch gab eines bereits 1882, vgl. [Mar75, S. 172], doch das bekannteste und einflussreichste. Hilberts Vorgehen setzte Maßstäbe für die gesamte Mathematik und für das mathematische Arbeiten. Das Axiomensystem besteht aus rund zwanzig Axiomen (die Anzahl hängt davon ab, ob die Originalarbeit oder spätere Verbesserungen gemeint sind) und ist in fünf Gruppen (Axiome der Inzidenz, Anordnung, Kongruenz, Parallelität, Stetigkeit) aufgeteilt. Die Länge der Liste der Axiome aus den »Grundlagen der Geometrie« ist insofern ein insbesondere didaktisches Problem, als es banalerweise schwer ist, sich alle Axiome zu merken und mit ihnen zu arbeiten.

Für unsere Zwecke genügt es, ein moderneres und vereinfachtes Axiomensystem zu verwenden, eines, das bereits reelle Zahlen voraussetzt. Das ist insofern vertretbar, als wir mit Mathematikstudierenden arbeiten, die typischerweise bereits in ersten Semestern reelle Zahlen formal kennenlernen. Dieses Axiomensystem von George E. Martin haben wir in den Kursen vorgestellt und diskutiert, vgl. Seite 203.

[126] Diese Sichtweise ist etwa in [Lor92, Definition 1, Bemerkungen 1, 2] gut dargestellt.
[127] Trotzdem dürften die Bücher von Euklid mit die bedeutendsten Bücher der Menschheit sein.

1.4. Warum Papierfalten axiomatisieren?

Sollte die Frage der Überschrift so interpretiert werden: Warum *gerade Papierfalten* axiomatisieren, dann gibt es mehrere Antworten darauf. Primär ist Papierfalten natürlich nicht die einzige Möglichkeit, Axiomatisierungs- oder Konstruktionsaspekte auf eine unterhaltsame bzw. simplifizierte Weise (im Vergleich zur euklidischen Ebene) zu beleuchten. Ein schönes Beispiel für solche Axiomatisierungsaspekte ist die bekannte Axiomatisierung von Abstimmungsmengen von Hans-Georg Steiner. Eine Darstellung und Einordnung finden sich bei in [Hoc18, Abschnitt 4.2.1]. Konstruktionsaspekte können spielerisch auch anderweitig motiviert werden, vgl. die Blindseilgeometrie in [Bau20].

Ferner ist die euklidische Geometrie, deren axiomatische Begründung für Lehramtsstudierende auch in Hinblick auf die Beschäftigung mit Schulgeometrie in ihrem späteren Beruf ein sinnvolles Unterfangen[128] wäre, schwer zu axiomatisieren.[129]

Stellen wir uns auf den Standpunkt, dass bei der Axiomatisierung der euklidischen Ebene nicht die euklidische Ebene, sondern die axiomatische Methode im Vordergrund stehen sollte, dann erscheint die euklidische Ebene nicht unbedingt als das geeignete Mittel, um diese Methode zu verstehen. Arno Mitschka schreibt im Vorwort zu [Mit77]: »Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie [in der klassisch gewordenen Fassung von Hilbert] ist aber wegen seiner Kompliziertheit wenig geeignet zur Einführung in die grundlegenden Probleme der Axiomatik überhaupt«. Nach Rudolf Schnabel ist Hilberts System gar »unübersichtlich und [...] unnatürlich«, vgl. [Sch81, S. 95].

Insbesondere ist es zunächst nicht nötig, die euklidische Ebene als eine Axiomatisierungsaufgabe zu formalisieren. Für ein Verständnis des Prinzips der axiomatischen Methode könnte eine kleinere Theorie ausreichen, vgl. die erwähnten Beispiele aus [Hoc18]. Je nach dem, welche Aspekte der Axiomatisierung im Vordergrund stehen, können entsprechende Beispiele betrachtet werden. Im Vergleich zu Schülerinnen und Schülern haben Studierende den Vorteil, mehr Theorien zur Verfügung zu haben, die sie axiomatisch betrachten können. So stellte die Gruppentheorie ein gutes Beispiel für die ersten Begegnungen mit der Metamathematik dar. Die Qualitätskriterien des Axiomensystems können dort sehr schnell überprüft werden: Die üblichen Axiome sind unabhängig (wird überprüft durch Angabe von passenden algebraischen Strukturen als Modelle) und nicht vollständig (das Kommutativge-

[128] Wie in der bereits zitierten Empfehlung »die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie«, vgl. [DMV08].

[129] Hierfür sind außer dem hilbertschen neuere und kürzere Axiomensysteme bekannt, ihre Entwicklungen gut ausgearbeitet, vgl. [Mar75]. Unstrittigerweise werden solche Axiomatisierungen in Veranstaltungen gelegentlich durchgeführt, allerdings benötigen sie viel Zeit.

setz lässt sich nicht deduzieren), aber relativ widerspruchsfrei (jede Gruppe ist ein Modell). Die Gruppentheorie erscheint als ein gutes Werkzeug für eine bedeutungsvolle (vgl. Bemerkung 1.10) Axiomatisierungsaufgabe. Allerdings ist das Beispiel nicht direkt in den Schulunterricht implementierbar.

Bemerkung 1.21. Zur besseren Einordnung bemerken wir, dass etwa Hans-Georg Steiner mit seinen Abstimmungsmengen ein Beispiel *konstruiert* hat, um damit Axiomatisierungsfragen zu behandeln. Wir wollen jedoch nicht aus allen verfügbaren Beispielen für axiomatisierbare Theorien die beste wählen, sondern betrachten explizit ein konkretes Beispiel des 1-fach-Origami und wollen untersuchen, ob und wie geeignet dieses ist. ♯

Die Axiomatisierung von 1-fach-Origami vereint jedoch ebenfalls mehrere positiv anmutende Aspekte in einem: Das Falten von Papier kann als eine motivierende und unterhaltsame, weit vom Spielformalismus entfernte mathematische Beschäftigung gestaltet werden; die Theorie des 1-fach-Origami ist weit entwickelt und gut verstanden; sie bietet reichhaltige mathematische Ausblicke (wie 2-fach-Origami); diese Theorie reiht sich sehr gut in bestehende geometrische Beschäftigungen im Mathematikunterricht ein und ergänzt Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auf eine elegante Weise; 1-fach-Origami erlaubt eine technisch gut zu bewältigende, aber nicht triviale »naive«, vgl. Seite 47, Axiomatisierung, welche nach Bedarf auf einem mehr oder weniger formalen Niveau stattfinden kann, und gestattet viele leicht zu motivierende Fragen rund um die Themen Konstruieren, Systematisieren, Axiomatisieren, vgl. auch Kapitel 3 und 5. Insbesondere wird dort gezeigt, *wie* lokales Ordnen stattfinden kann. Dort werden wir auch sehen, dass 1-fach-Origami gewissermaßen vollständig, dortige Axiome nicht unabhängig und bezogen auf die euklidische Ebene relativ widerspruchsfrei sind. Das motiviert eine weiterführende Beschäftigung mit der euklidischen Ebene.

Die ontologische Loslösung wird in unserer Beschäftigung mit Papierfalten vorbereitet. Hierfür diskutieren wir immer wieder ausgehend vom Begriff der Konstruktion Fragestellung wie »was ist ein Falz?«, »was ist ein Faltpunkt?«, »was soll ein Faltdreieck sein?«. Das Falten wird in der (gegebenen) euklidischen Ebene inszeniert, daher ist es teilweise klar, was die Antworten sind (etwa Geraden und Punkte), jedoch hebt diese Beschäftigung die wichtige Fragen nach der Realität der verwendeten Objekte auf die abstraktere (euklidische) Ebene und lässt Studierende über Definitionen und Modelle sinnieren. Auch die Beschäftigung mit dem 1-fach-Origami selbst stellt uns vor eine grundsätzliche Definitionsaufgabe: Wie wollen wir 1-fach-Origami mathematisch sauber definieren? Diese Frage hängt während des ganzen Kurses in der Luft und motiviert eine fortschreitende Analyse des Themas. Das, was sonst schwerer darzustellen ist: Wie kann mit Axiomen definiert werden? lässt sich bei 1-fach-Origami gut veranschaulichen.

1.4.1. Warum Papierfalten?

Aus der anderen Perspektive, warum sich *überhaupt* mit Papierfalten in der Lehre beschäftigen, wollen wir auf die bestehende Literatur eingehen. Allerdings erscheint unser Thema, Einsatz von 1-fach-Origami in der Hochschullehre als eine Axiomatisierungsaufgabe, als zu speziell, als es dazu viele publizierte Forschungsergebnisse gäbe. In der Tat ist es unsere Auffassung, dass dieses Thema noch gar nicht angegangen worden ist. Insofern können wir keine spezifische Literaturübersicht geben und gehen nur sporadisch auf mehr oder weniger weit entfernte Forschungsrichtungen und -ergebnisse ein. So gibt es eine überschaubare Anzahl an Publikationen zu (positiven) Effekten beim Einsatz von Papierfalten im Mathematikunterricht, allerdings sind diese Studien meist auf Schulunterricht oder nicht axiomatische Behandlungen des Faltens ausgerichtet.

Mathematisches Papierfalten selbst ist sicherlich eine Nischenbeschäftigung im Mathematikunterricht höherer Stufen. Wir wollen den Einsatz von Papierfalten im Mathematikunterricht keinesfalls bis Friedrich Fröbel oder etwa »Dem kleinen Geometer« [YY08] zurückverfolgen. Es liegen außerdem nahezu keine Studiendaten zum Einsatz von Papierfalten im Mathematikunterricht vor dem Jahr 2000 vor, allenfalls Berichte über solche Einsätze. Wir wollen die Quellenlage kurz beleuchten.

Es gibt viele Berichte und Lehrkraftsbeobachtungen, die nahelegen, dass der Einsatz von Origami im Mathematikunterricht stattfindet[130] und diesen bereichern kann, vgl. [RR03], [HC01], [GJ09; Gol11]. Aber um wieder mit Georgeson zur Vorsicht zu mahnen: »Paperfolding is fun, but where is the math?«, [Geo11, S. 354].

Es gibt Unterrichtseinheiten zum mathematischen Papierfalten für nahezu alle Schulformen und -stufen. Prominente Beispiele von Sammlungen von Unterrichtseinheiten zum mathematischen Papierfalten sind etwa [Ols75], [SH13] für Sekundarstufe I und II, [Hul12] für die Sekundarstufe II und das universitäre Niveau. Doch Nachweise von Effekten solcher Einsätze sind rar, vgl. [Gol11], [Boa11], oder nicht befriedigend. In einigen Berichten finden sich Effektzuweisungen, die so nicht nachgewiesen wurden, und eher als empirische Daten der Autorinnen und Autoren anstatt aus Studien entstehen. In [Ars12] wird [Yos63] zitiert und so eingeordnet: »For instance, it is possible to prepare an activity to show the expansion of algebraic equation $(a + b)$ squared through paper folding activities and by doing so;[sic!] *students will be totally active while gaining algebraic knowledge*« [Kursiv von D.N.], vgl. [Ars12, S. 18]. Allerdings ist die Originalarbeit keine Studie und die von Arslan getroffene Behauptung ist aus den dortigen Beschreibungen nicht herauszulesen. An einigen Stellen werden nicht gut belegte, theoretisch deduzierte Vorteile von Origa-

[130]»Teachers in the USA have increasingly used origami in their classrooms«, vgl. [Miu97, S. 279].

mi im Unterricht als fertige Tatsachen präsentiert.

Demgegenüber betont Norma Boakes in mehreren Arbeiten, dass die im Rahmen ihrer Dissertation (von 2006) durchgeführte Analyse der bestehenden Literatur nur wenig Evidenz liefert, dass origamibasierter Unterricht tatsächlich, wie oft behauptet, räumliches Vorstellungsvermögen verbessere.[131] In ihren Untersuchungen konnte sie zeigen, dass diese Erfahrungstatsache, Origami verbessere räumliches Vorstellungsvermögen, durchaus valide ist: »regular and repeated exposure to origami benefited both the spacially strong and weak college-age students«, vgl. [Boa11, S. 185]. In einer aktuelleren Arbeit [AA15] bestätigen Arici und Aslan-Tutak, dass es wohl nur wenige Studien zu den Effekten von Origami bzgl. räumlichem Vorstellungsvermögen gibt.[132] In ihrer Studie untersuchen sie folglich den Einfluss einer origamibasierten Unterrichtsmethode im Geometrieunterricht (im Vergleich zum dort üblichen Unterricht) auf Schülerinnen und Schüler einer high-school in der Türkei. Sie kommen zum Ergebnis, dass »the origami-based instruction significantly enhanced participants' spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning«, vgl. [AA15, S. 195].

In der Masterarbeit [Ars12] von 2012 finden wir eine Literaturübersicht zu diversen bisher untersuchten Effekten von Papierfalten im Mathematikunterricht. Aus der Darstellung und der Quellenlage ist ersichtlich, dass es wenige Studien gibt, die Papierfalten im Mathematikunterricht auf dem Niveau der Sekundarstufe II oder der Universität untersuchen. Typischerweise finden wir Analysen einzelner Unterrichtssequenzen, in denen Papierfalten unterstützend eingesetzt wird, um geometrisch-algebraische Inhalte zu motivieren oder von einer etwas anderen Perspektive zu beleuchten. Dort heißt es: »Research studies which investigate the treatment effects of origami exercises when used in mathematics education are very limited in number«, vgl. [Ars12, S. 20]. In [AA15, S. 181] lesen wir: »origami has been used to improve understanding in mathematics in different grade levels but mostly on elementary or middle school levels«.

Eine weitere Übersicht publizierter Arbeiten über mathematisches Papierfalten in der Lehre stellen, wie bereits erwähnt, die sieben bisher erschienenen Konferenzbände 1–7OSME, dar. Es führte uns zu weit weg von unserem Thema, die vielfältigsten Ansätze für einen Einsatz von Origami im Unterricht zu beschreiben. Sehr unterschiedlich sind die Einsatzgebiete, von räumlichem Vorstellungsvermögen [Boa11] über mathematisches Kommunizieren [PL09] zu Fraktalverständnis [BSH15] und konkreten Unterrichtseinheiten [Hag02]. Wir begnügen uns mit der Feststellung,

[131] »I found throught extensive literature searches that there exist limited data to substantiate the claims that origami builds spatial skills«, vgl. [Boa11, S. 174].

[132] »Origami and spacial ability together was less studied [zitieren zwei Masterarbeiten aus der Türkei]«, vgl. [AA15, S. 181].

dass mathematisches Papierfalten im Mathematikunterricht durchaus präsent ist und beforscht wird, auch wenn die Evidenz der angenommenen Effekte nicht immer befriedigend ist.

Speziell für die bayerischen Schulen höheher Stufe ist die niedrige Präsenz eines origamibasierten Unterrichts leicht erklärbar: Die Lehrpläne, etwa der Sekundarstufe II, sehen kein Papierfalten vor, vgl. [Kul15; Kul03], und es liegt nicht auf der Hand, die dortigen Inhalte mit Papierfalten zu kombinieren. Dadurch bedingt besteht, rein formal, kein Bedarf am Origamiunterricht und folglich auch keine Nachfrage nach solchen Inhalten. Die Lehrkräfte können sich dennoch entscheiden, etwa konstruktionsbasierte Fragen mit dem Konstruktionswerkzeug 1-fach-Origami zu unterrichten oder zu motivieren. Es ist jedoch davon auszugehen, dass dazu nötiges fachliches, aber vor allem fachdidaktisches Wissen fehlt. Das liegt sicherlich auch daran, dass mathematisches Papierfalten, das über das Niveau von beispielsweise Polyederfaltungen oder Visualisierungen der Sätze der Pythagorasgruppe hinausgeht, kaum vorhanden sein dürfte.[133] Die dazu nötige Literatur ist im deutschsprachigen Raum spärlich vorhanden. Das zu einer gewissen Bekanntheit gelangte Buch »Papierfalten im Mathematikunterricht« [SH13] enthält viele origamibasierte Unterrichtseinheiten verschiedener Stufen und Schwierigkeitsgrade, dort fehlt aber eine kohärente[134] Darstellung der Regeln des Faltens,[135] die für ein Konstruktionswerkzeug wichtig sind; und so bleibt die Darstellung eine recht lose Ansammlung teilweise aus der Literatur unzitiert übernommener Faltaktivitäten. Zum sporadischen Einsatz von Papierfalten im Mathematikunterricht, das sich nicht als mathematisches Papierfalten qualifiziert, haben wir in Abschnitt 1.1 Stellung genommen.

Sollen also Lehrkräfte einen origamiorientierten Unterricht in Betracht ziehen, so sollen sie darauf entsprechend vorbereitet werden. Nicht nur fachliche und fachdidaktische Inhalte sollen angeeignet, sondern ganz praktische und motorisch teilweise nicht triviale Vorgänge eingeübt werden, um etwa bei Faltschwierigkeiten Hilfestellung geben oder um bei Nachfragen verwandte Faltungen oder Beispiele und Nichtbeispiele angeben zu können. Dies deutet auf eine gezielte Schulung der (angehenden) Lehrkräfte hin.

Bemerkung 1.22. An dieser Stelle denkbare LehrerInnen-Fortbildungen sind aus unserer Erfahrung schwer realisierbar. Die Fülle des Stoffs und die damit einhergehenden didaktischen Aspekte sind groß, was zu längeren Fortbildungsreihen führen müsste, die wiederum

[133] Ein Grund dafür ist der Darstellung in Abschnitt 1.2 zu entnehmen: mathematisches Papierfalten, das über ein gewisses elementares Niveau hinausgeht, ist relativ neu.

[134] In einigen Aktivitäten wird das Papier geschnitten, in anderen werden mehrere einzelne Stücke zusammengelegt; es wird mit Papierstreifen gefaltet, aber auch mit Kreisen.

[135] In der Tat werden im hinteren Teil des Buches (Seiten 156–160) die »Axiome des Papierfaltens« aufgelistet und teilweise diskutiert, doch die Darstellung im Buch, die sich auf diese Regeln keinerlei Bezug nimmt, bleibt davon unberührt, vgl. auch vorige Fußnote.

organisatorisch kaum zu bewältigen sind. So nahmen an einer solchen von uns organisierten (kostenlosen) Fortbildung (sie fand an drei Tagen zu je acht Stunden mit je zwei Wochen Pause dazwischen) immerhin acht Lehrkräfte aus der näheren Umgebung teil. ♯

Insofern besteht unsere Lösung darin, zukünftigen Lehrkräften, bereits im Studium eine Möglichkeiten anzubieten, sich mit mathematischem Papierfalten und seinem Einsatz im Unterricht zu beschäftigen. Dabei fokussieren wir speziell Konstruktionen mit 1-fach-Origami, da sie dem Lehrplan im Zusammenhang mit Konstruktionen mit Zirkel und Lineal recht nahe kommen, und somit ggf. leichter im regulären Unterricht eingesetzt werden könnten als andere Bereiche des mathematischen Papierfaltens, wie etwa die Flachfaltbarkeit.

In der Gesamtschau unserer Darstellungen bietet 1-fach-Origami eine elegante, unkonventionelle und vielversprechende Möglichkeit, eine übersichtliche mathematische Theorie zu axiomatisieren, zu Systematisieren und zu Formalisieren, nah an der Schulgeometrie.

Im nächsten Kapitel präsentieren wir unseres Forschungsvorhaben und mit den obigen Ausführungen verbundene Forschungsfragen. In Kapitel 3 beginnen wir mit einer Sachanalyse des Themas: definieren und axiomatisieren 1-fach-Origami. In Kapiteln 4 und 5 geben wir, entsprechend den Forschungszielen, einen auf unseren Erfahrungen und Überlegungen begründeten Vorschlag für einen universitären Kurs, in dem 1-fach-Origami systematisch behandelt wird.

Literatur zum Kapitel 1

[Ahr01] Wilhelm Ahrens. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Leipzig: Teubner, 1901 (*cf. S.* 10–12, 33).

[Alp00] Roger C. Alperin. »A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers«. In: *New York Journal of Mathematics* 6 (2000), S. 119–133 (*cf. S.* 23, 34, 89, 99, 129, 181, 195).

[AL09] Roger C. Alperin und Robert J. Lang. »One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms«. In: *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Robert J. Lang. A K Peters, 2009, S. 371–393 (*cf. S.* 37, 90–91, 99–101, 105, 107, 110, 114, 123, 127, 133, 197).

[AA15] Sevil Arıcı und Fatma Aslan-Tutak. »The Effect of Origami-Based Instruction on Spatial Visualization, Geometry Achievement, and Geometric Reasoning«. In: *Int J of Sci and Math Educ* 13.1 (Feb. 2015), S. 179–200 (*cf. S.* 66).

[Ars12] Okan Arslan. »Investigating Beliefs and Perceived Self-Efficacy Beliefs of Prospective Elementary Mathematics Teachers Towards Using Origami in Mathematics Education«. Masterarbeit. Ankara: Graduate School of Social Sciences of Middle East Technical University, Sep. 2012 (*cf. S.* 65–66).

[AC95] David Auckly und John Cleveland. »Totally Real Origami and Impossible Paper Folding«. In: *The American Mathematical Monthly* 102.3 (März 1995), S. 215–226 (*cf. S.* 23, 34, 95).

[BSH15] Ali Bahmani, Kiumars Sharif und Andrew Hudson. »Using Origami to Enrich Mathematical Understanding of Self Similarity and Fractals«. In: *Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Koryo Miura. International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education (2014, Tokio): American Mathematical Society, 2015, S. 723–733 (*cf. S.* 66).

[Bar66] Steven Barr. »"Origametry" Defined«. In: *The Origamian* 6.3 (Herbst 1966), S. 4 (*cf. S.* 4).

[Bau20] Andreas Bauer. »Ein Seil ist kein Zirkel«. In: *Alternatives Konstruieren - mit Zirkel und ... genial!* Der Mathematikunterricht Jahrgang 66 (Heft 3, Juni 2020). Hrsg. von Jan Franz Wörler, Christian van Randenborgh und Hans-Stefan Siller, S. 24–30 (*cf. S.* 63).

[Bel34] Margherita Piazzolla Beloch. »Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row«. In: *Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara* 2.11 (1934), S. 186–189 (*cf. S.* 14, 16, 23).

[Bel36] Margherita Piazzolla Beloch. »Sul metodo del ripiegamento della carta per la risolutione dei problemi geometrici«. In: *Periodico di matematiche* 4.16 (1936), S. 104–108 (*cf. S.* 14, 28).

[Bel53] Margherita Piazzolla Beloch. *Lezioni di Matematica Complementare*. Ferrara, 1953 (*cf. S.* 15).

[Bel67] Margherita Piazzolla Beloch. *Opere Scelte*. Padova: Cedam, 1967 (*cf. S.* 14).

[Bel90] Margherita Piazzolla Beloch. »Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta [ursprünglich erschienen in Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, 1936, S. 93-95]«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Ferrara, Dezember 1989: Università di Padova, 1990, S. XXV–XXVII (*cf. S.* 14–15, 19).

[Bet65] Evert W. Beth. *The Foundations of Mathematics*. Second revised edition. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1965 (*cf. S.* 44, 58).

[Bie52] Ludwig Bieberbach. *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Birkhäuser, 1952 (*cf. S.* 19).

[Boa11] Norma Boakes. »Origami and Spatial Thinking of College-Age Students«. In: *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (5OSME)*. Hrsg. von Patsy Wang-Iverson, Robert J. Lang und Mark Yim. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011, S. 173–187 (*cf. S.* 65–66, 228).

[Bru+15] Regina Bruder u. a., Hrsg. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum, 2015 (*cf. S.* 43).

[Can95] Georg Cantor. »Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre«. In: *Mathematische Annalen* 46.4 (1895), S. 481–512 (*cf. S.* 50).

[Coo47] Julian Lowell Coolidge. *A History of Geometrical Methods*. Oxford: Clarendon Press, 1947 (*cf. S.* 17).

[Cox12] David A. Cox. *Galois Theory*. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics. Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2012 (*cf. S.* 37, 89, 101, 129, 131–132).

[CS05] David A. Cox und Jerry Shurman. »Geometry and Number Theory on Clovers«. In: *The American Mathematical Monthly* 112.8 (Okt. 2005), S. 682–704 (*cf. S.* 34).

[DMP08] Bernhard Dacorogna, Paolo Marcellini und E. Paolini Emanuele. »Lipschitz-Continuous Local Isometric Immersions: Rigid Maps and Origami«. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 90.1 (Juli 2008), S. 66–81. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021782408000287 (*cf. S.* 5).

[Dei10] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre: die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. 3., korr. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2010 (*cf. S.* 38, 41, 43, 49–50, 59).

[DO07] Erik D. Demaine und Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, 2007 (*cf. S.* 21, 24, 35, 95, 98, 129, 133, 184).

[dVil86] Michael de Villiers. *The Role of Axiomatisation in Mathematics and Mathematics Teaching*. University of Stellenbosch: Research Unit for Mathematics Education, 1986 (*cf. S.* 48, 55).

[DiD02] Brian DiDonna. »To Fold or to Crumple?« In: *3. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Thomas Hull. A K Peters, 2002, S. 187–195 (*cf. S.* 3).

[DMV08] Empfehlungen von DMV GDM und MNU. »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik«. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16.3 (Juni 2008), S. 149–159 (*cf. S.* 54, 63, 77, 224, 246).

[EFT18] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. 6., überarbeitete und erweiterte Auflage. Lehrbuch. Berlin [Heidelberg]: Springer Spektrum, 2018 (*cf. S.* 38–39).

[Eng89] Peter Engel. *Folding the Universe: Origami from Angelfish to Zen*. Vintage Books, 1989 (*cf. S.* 21).

[Fre63] Hans Freudenthal. »Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?« In: *Der Mathematikunterricht* 9.4 (1963), S. 5–29 (*cf. S.* 44, 46–47, 51, 55).

[Fre73] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. 2. Klett, 1973 (*cf. S.* 40, 46).

[Fri18] Michael Friedman. *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*. Springer, 2018 (*cf. S.* 9–18, 22, 24–25, 29, 35, 47, 93, 192).

[Frö66] Friedrich Fröbel. »Anleitung zum Papierfalten«. In: *Friedrich Fröbel's gesammelte pädagogische Schriften*. Hrsg. von Wichard Lange. Neudr. der Ausg. 1863. Bd. 2. Osnabrück: Biblio-Verl., 1966, S. 371–388 (*cf. S.* 9).

[Fuc11] Clemens Fuchs. »Angle Trisection with Origami and Related Topics«. In: *Elemente der Mathematik* (2011), S. 121–131. URL: http://www.ems-ph.org/doi/10.4171/EM/179 (*cf. S.* 21, 189).

[FT99] Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov. »More on Paperfolding«. In: *The American Mathematical Monthly* 106.1 (Jan. 1999), S. 27–35 (*cf. S.* 3).

[Fuk84] Hidetosi Fukagawa. »Problem 995«. In: *Crux Mathematicorum* 10.10 (Dez. 1984), S. 319 (*cf. S.* 31).

[FP89] Hidetosi Fukagawa und Daniel Pedoe. *Japanese Temple Geometry Problems: San Gaku*. Winnipeg: Charles Babbage Research Centre, 1989 (*cf. S.* 31).

[Gen36] Gerhard Gentzen. »Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie«. In: *Math. Ann.* 112.1 (Dez. 1936), S. 493–565. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF01565428 (besucht am 01. 07. 2021) (*cf. S.* 57).

[Geo11] Joseph Georgeson. »Fold in Origami and Unfold Math«. In: *Mathematics Teaching in the Middle School* 16.6 (2011), S. 354–361 (*cf. S.* 6, 65).

[Ger95] Robert Geretschläger. »Euclidean Constructions and the Geometry of Origami«. In: *Mathematics Magazine* 68.5 (Dez. 1995), S. 357–371 (*cf. S.* 23–24, 34, 89–90, 98, 111, 127, 132).

[Ger08] Robert Geretschläger. *Geometric Origami*. Arbelos, 2008 (*cf. S.* 24, 90, 98, 132, 174, 178–179, 181–183).

[GKK13] Fadoua Ghourabi, Asem Kasem und Cezary Kaliszyk. »Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions«. In: *Automated Deduction in Geometry*. Hrsg. von Tetsuo Ida und Jacques Fleuriot. Bd. 7993. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 143–160. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-40672-0_10 (besucht am 27. 05. 2020) (*cf. S.* 37, 89, 102, 107, 114, 120, 124, 127).

[Gol11] Miri Golan. »Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry.« In: *Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*. Hrsg. von Patsy Wang-Iverson. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (2010, Singapur): CRC, 2011, S. 141–150 (*cf. S.* 65, 81, 228).

[GJ09] Miri Golan und Paul Jackson. »Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami«. In: *Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Robert Lang. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (4, 2006, Pasadena, Calif.): A K Peters, 2009 (*cf. S.* 4, 65).

[Hag02] Kazuo Haga. »Fold Paper and Enjoy Math: Origamics«. In: *3. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Thomas Hull. A K Peters, 2002, S. 307–328 (*cf. S.* 4, 66, 169).

[Hat21] Koshiro Hatori. *History of Origami*. (undatiert; besucht am 20. Mai 2021). URL: https://origami.ousaan.com/library/historye.html (*cf. S.* 20–21).

[Hea81] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics*. Dover Publications, 1981 (*cf. S.* 62).

[Hei00] Bettina Heintz. *Die Innenwelt der Mathematik: zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Ästhetik und Naturwissenschaften Bildende Wissenschaften – Zivilisierung der Kulturen. Wien: Springer, 2000 (*cf. S.* 42).

[Hes56] Adrien L. Hess. »Certain Topics Related to Constructions with Straightedge and Compasses«. In: *Mathematics Magazine* 29.4 (1956), S. 217–221 (*cf. S.* 17).

[HC01] William Higginson und Lynda Colgan. »Algebraic Thinking through Origami«. In: *Mathematics Teaching in the Middle School* 6.6 (2001), S. 343–349 (*cf. S.* 65).

[Hil18] David Hilbert. »Axiomatisches Denken«. In: *Mathematische Annalen* 78.1 (1918), S. 405–415 (*cf. S.* 43–47).

[Hil35a] David Hilbert. *Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes: nebst einer Lebensgeschichte*. Bd. 3. Gesammelte Abhandlungen / David Hilbert. Springer Berlin Heidelberg, 1935 (*cf. S.* 40, 59).

[Hil35b] David Hilbert. »Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung [ursprünglich erschienen in: Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ. Bd. 1, S.157-177 (1922)]«. In: *Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes: nebst einer Lebensgeschichte*. Bd. 3. Gesammelte Abhandlungen / David Hilbert. Springer Berlin Heidelberg, 1935 (*cf. S.* 43–44, 46).

[Hoc63] A. E. Hochstein. »Trisection of an Angle by Optical Means«. In: *The Mathematics Teacher* 56.7 (1963), S. 522–524 (*cf. S.* 35).

[Hoc18] Tobias Hock. »Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht«. Diss. RWTH Aachen, 2018 (*cf. S.* 38, 40–41, 44, 52, 55–57, 63, 202).

[HHS16] Tobias Hock, Johanna Heitzer und Inge Schwank. »Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht«. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37.1 (2016), S. 181–208 (*cf. S.* 47, 51).

[Hul96] Thomas C. Hull. »A Note on "Impossible" Paper Folding«. In: *The American Mathematical Monthly* 103.3 (März 1996), S. 240–241. URL: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00029890.1996.12004730 (besucht am 07. 05. 2021) (*cf. S.* 34).

[Hul02a] Thomas C. Hull, Hrsg. *3. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. A K Peters, 2002 (*cf. S.* 23).

[Hul02b] Thomas C. Hull. »On the Mathematics of Flat Origamis«. In: *3. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Thomas C. Hull. A K Peters, 2002, S. 29–38 (*cf. S.* 21).

[Hul11] Thomas C. Hull. »Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill«. In: *The American Mathematical Monthly* 118.4 (2011), S. 307–315 (*cf. S.* 14–16, 18, 34–35, 89, 192).

[Hul12] Thomas C. Hull. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press, 2012 (*cf. S.* 65, 98, 101, 115, 133, 149–150, 154, 159, 163, 173, 177, 179–181, 185, 192).

[Hul20] Thomas C. Hull. *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. New York: Cambridge University Press, 2020 (*cf. S.* 4–5, 9, 21, 35, 95, 129, 132–133, 174).

[Hur85] Adolf Hurwitz. »Die Mathematischen Tagebücher und der übrige handschriftliche Nachlass von Adolf Hurwitz.« Zürich, ETH Libr., 1985. URL: http://www.e-manuscripta.ch/ (*cf. S.* 12–13, 33).

[Huz86] Humiaki Huzita. »La recente concezione matematica dell'›Origami‹ – trisezione dell'angolo«. In: *Scienza e gioco*. Hrsg. von Sebastiano Izzo. Sansoni, Feb. 1986, S. 433–441 (*cf. S.* 22, 29).

[Huz88] Humiaki Huzita. »L'equazione di terzo grado si può risolvere con il metodo origami«. In: *Quadrato Magico* 19 (1988), S. 5–9 (*cf. S.* 22).

[Huz90a] Humiaki Huzita. »Axiomatic Development of Origami Geometry«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 143–158 (*cf. S.* 22, 27, 29, 97–98, 106).

[Huz90b] Humiaki Huzita, Hrsg. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990 (*cf. S.* 14, 17, 22, 24, 28, 34–35, 97).

[HS90] Humiaki Huzita und Benedetto Scimemi. »The Algebra of Paper-Folding (Origami)«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 215–222 (*cf. S.* 27, 29, 34, 97–98, 129).

[JU15] Hans Niels Jahnke und Stefan Ufer. »Argumentieren und Beweisen«. In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Hrsg. von Regina Bruder u. a. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2015, S. 331–355 (*cf. S.* 38, 43, 49, 52, 56, 229).

[Joh57] Donovan A. Johnson. *Paper Folding for the Mathematics Class*. 1957 (*cf. S.* 18).

[Jus84a] Jacques Justin. »A Solution of the Cubic Equation by Paper-Folding and Geometric Applications (Abstract).« Unveröffentlichtes Manuskript, Sep. 1984 (*cf. S.* 32).

[Jus84b] Jacques Justin. »Pliage et Mathematiques«. In: *Le Pli* 21 (Dez. 1984), S. 2–3 (*cf. S.* 27–28, 32).

[Jus84c] Jacques Justin. »Pliage et Mathematiques«. In: *Le Pli* 19 (Juni 1984), S. 2–3 (*cf. S.* 28, 93).

[Jus84d] Jacques Justin. »Pliage et Mathematiques«. In: *Le Pli* 20 (Okt. 1984), S. 2–3 (*cf. S.* 29).

[Jus90a] Jacques Justin. »Aspects Mathematiques du Pliage de Papier«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. (Das Original erschien am 17. Januar 1984 in Paris). Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 263–277 (*cf. S.* 25, 27).

[Jus90b] Jacques Justin. »Résolution par pliage de l'équation du troisieme degré et applications geometriques«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Hum. Huzita. (Nachdruck aus in *L'Ouvert: Journal de L'APMEP d'alsace et de l'IREM de strasbourg*, N°42, März 1986, S. 9–19). Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 251–261 (*cf. S.* 4, 23–24, 26–30, 32, 34, 37, 90, 96, 123, 127, 129, 133, 189).

[Jus97] Jacques Justin. »Towards a Mathematical Theory of Origami«. In: *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*. Hrsg. von Koryo Miura. Otsu Shiga: Seian University of Art and Design, 1997, S. 15–29 (*cf. S.* 29).

[KT87] Kunihiko Kasahara und Toshie Takahama. *Origami for the Connoisseur*. Japan Publication, Inc, 1987 (*cf. S.* 21, 169).

[Ken72] Hubert Collings Kennedy. »The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano«. In: *American Mathematical Monthly* 79.2 (1972), S. 133–136 (*cf. S.* 44, 62).

[Kle95] Felix Klein. *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. Hrsg. von F. Tägert. Leipzig: Teubner, 1895 (*cf. S.* 10, 23).

[Kle91] Israel Kleiner. »Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective«. In: *Mathematics Magazine* 64.5 (1991), S. 291–314 (*cf. S.* 61).

[Kul03] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003*. Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Kultusministerkonferenz. Luchterhand, 2003 (*cf. S.* 67, 77).

[Kul15] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hrsg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Kultusministerkonferenz. Köln: Link, 2015. 76 S. (*cf. S.* 43, 67, 77, 224).

[Lan94] Robert J. Lang. »Mathematical Algorithms for Origami Design«. In: *Symmetry: Culture and Science* 5.2 (1994), S. 115–152 (*cf. S.* 21).

[Lan97] Robert J. Lang. »The Tree Method of Origami Design«. In: *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*. Hrsg. von Koryo Miura. Otsu Shiga: Seian University of Art and Design, 1997, S. 73–82 (*cf. S.* 21).

[Lan09] Robert J. Lang, Hrsg. *Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (4, 2006, Pasadena, Calif.): A K Peters, 2009 (*cf. S.* 23).

[Lan18a] Robert J. Lang, Hrsg. *The Proceedings from the 7th International Meeting on Orgami in Science, Mathematics, and Education*. International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education (2018, Oxford): Tarquin, 2018 (*cf. S.* 23, 132).

[Lan18b] Robert J. Lang. *Twists, Tilings, and Tessellations: Mathematical Methods for Geometric Origami*. Boca Raton London New York: CRC Press, 2018 (*cf. S.* 21, 132).

[Lan03] Robert J. Lang. *Origami and Geometric Constructions*. 2015 (erste Version online erschienen: 2003). URL: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf (*cf. S.* 37, 163, 173).

[Lis97] David Lister. »Some Observations on the History of Paperfolding in Japan and The West: A Development in Parallel«. In: *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*. Hrsg. von Koryo Miura. Otsu Shiga: Seian University of Art and Design, 1997, S. 511–520 (*cf. S.* 3, 20–21).

[Lor92] Falko Lorenz. *Lineare Algebra II*. 3. überarb. Auflage. Wissenschaftsverlag, 1992 (*cf. S.* 62).

[Lor62] Paul Lorenzen. *Metamathematik*. BI-Hochschultaschenbücher. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1962 (*cf. S.* 43).

[Lot07] Alfred J. Lotka. »Construction of Conic Sections by Paper-Folding«. In: *School Science and Mathematics* 7.7 (Okt. 1907), S. 595–597. URL: http://doi.wiley.com/10.1111/j.1949-8594.1907.tb01084.x (*cf. S.* 12).

[LD77] Johnny W. Lott und Iris Mack Dayoub. »What Can Be Done with a Mira?« In: *The Mathematics Teacher* 77.5 (1977), S. 394–399 (*cf. S.* 35).

[Luc17b] Jorge C. Lucero. »On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane«. In: *Forum Geometricorum* 17 (2017), S. 207–221 (*cf. S.* 37, 90, 102, 107).

[Mae08] Jun Maekawa. *Genuine Origami*. Japan Publications, 2008 (*cf. S.* 21).

[Mar75] George E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, 1975 (*cf. S.* 38–39, 41, 50, 62–63, 104, 176, 203, 287).

[Mar79] George E. Martin. »Duplication the Cube with a Mira«. In: *The Mathematics Teacher* 72.3 (1979), S. 204–208 (*cf. S.* 35).

[Mar85] George E. Martin. »Paper-Folding«. In: *New York State Mathematics Teachers' Journal* 35 (1985), S. 137–140 (*cf. S.* 35–36).

[Mar98] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998 (*cf. S.* 10, 34–37, 90, 99, 108, 118, 124, 129–131, 174, 180).

[Meh87] Herbert Mehrtens. »Ludwig Bieberbach and Deutsche Mathematik«. In: *MAA Studies in Mathematics*. Studies in the History of Mathematics 26 (1987). Hrsg. von Ersther R. Phillips, S. 195–241 (*cf. S.* 19).

[Mes85a] Peter Messer. »Problem 1025«. In: *Crux Mathematicorum* 11.3 (März 1985), S. 83 (*cf. S.* 31).

[Mes85b] Peter Messer. »Problem 1054«. In: *Crux Mathematicorum* 11.6 (Juni 1985), S. 188 (*cf. S.* 31).

[Mit77] Arno Mitschka. *Axiomatik in der Geometrie*. Herder, 1977 (*cf. S.* 40, 42, 63, 203–204).

[Miu97] Koryo Miura, Hrsg. *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*. (die Konferenz fand 1994 in Otsu Shiga, Japan statt). Seian University of Art and Design, 1997 (*cf. S.* 21, 23, 65).

[Miu15] Koryo Miura, Hrsg. *Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education*. International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education (2014, Tokio): American Mathematical Society, 2015 (*cf. S.* 23).

[NMck] Dmitri Nedrenco und Florian Möller. »Der Vorkurs in Würzburg – Mathevorlesungen vor(er)leben«. In: *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen: Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse*. Hrsg. von Reinhard Hochmuth u. a. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Springer Berlin Heidelberg, Juni 2022 (im Druck) (*cf. S.* 48).

[Oka97] Masao Okamura. »Another View of the Word "ORIGAMI"«. In: *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*. Hrsg. von Koryo Miura. Seian University of Art and Design, 1997, S. 525–539 (*cf. S.* 3).

[Ols75] Alton T. Olson. *Mathematics Through Paper Folding*. Überarbeitete Version der Broschüre von Donovan A. Johnson von 1957. National Council of Teachers of Mathematics, 1975 (*cf. S.* 18, 65, 159, 174, 181, 185, 206).

[PL09] Sue Pope und Tung Ken Lam. »Using Origami to Promote Problem Solving, Creativity, and Communication in Mathematics Education«. In: *Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Robert J. Lang. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (4, 2006, Pasadena, Calif.): A K Peters, 2009, S. 517–524 (*cf. S.* 66).

[Rab86] Stanley Rabinowitz. »Problem 1054: Solution«. In: *Crux Mathematicorum* 12.10 (Dez. 1986), S. 284 (*cf. S.* 31, 190).

[Rau08] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die mathematische Logik: ein Lehrbuch*. 3. überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2008 (*cf. S.* 38, 40–41).

[RU09] Kristina Reiss und Stefan Ufer. »Was macht mathematisches Arbeiten aus?« In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 111.4 (2009), S. 155–177 (*cf. S.* 47, 54, 61).

[Ria62] M. Riaz. »Geometric Solutions of Algebraic Equations«. In: *The American Mathematical Monthly* 69.7 (Aug. 1962), S. 654–658 (*cf. S.* 18).

[RR03] Rebecca R. Robichaux und Paulette R. Rodrigue. »Using Origami to Promote Geometric Communication«. In: *Mathematics Teaching in the Middle School* 9.4 (2003), S. 222–229 (*cf. S.* 65).

[Row66] Sundara T. Row. *Geometric Exercises in Paper Folding*. Hrsg. von Wooster W. Beman und David E. Smith. Unabridged and unaltered republication of the second edition, 1905. New York: Dover Publications, Inc., 1966 (*cf. S.* 9–10, 17, 23, 34, 47).

[Rup24] C. A. Rupp. »On a Transformation by Paper Folding«. In: *The American Mathematical Monthly* 31.9 (Nov. 1924), S. 432–435 (*cf. S.* 12–13, 17).

[SH13] Reinhard Schmitt-Hartmann und Wilfried Herget. *Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Klett, 2013 (*cf. S.* 7, 65, 67).

[Sch81] Rudolf Schnabel. »Euklidische Geometrie«. Habilitationsschrift. Kiel, 1981 (*cf. S.* 45, 63).

[SC40] E. P. Starke und L. R. Chase. »E395«. In: *The American Mathematical Monthly* 47.6 (1. Juni 1940), S. 398 (*cf. S.* 3).

[Tap13] Christian Tapp. *An den Grenzen des Endlichen: das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus*. Mathematik im Kontext. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013 (*cf. S.* 40, 43–46, 48, 202).

[Tar77] Alfred Tarski. *Einführung in die mathematische Logik*. 5. Aufl. Vandenhoeck & Ruprecht, 1977 (*cf. S.* 41, 43, 49–50, 54).

[Ten49] Luigi Tenca. »Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio«. In: *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 4.3 (Okt. 1949), S. 288–298. URL: http://eudml.org/doc/194948 (*cf. S.* 17).

[Vac30] Giovanni Vacca. »Della piegatura della carta applicata alla geometria«. In: *Periodico di matematiche* 4.10 (1930), S. 43–50 (*cf. S.* 16–17).

[Vol15] Klaus Volkert, Hrsg. *David Hilbert: Grundlagen der Geometrie* (*Festschrift 1899*). Klassische Texte der Wissenschaft. Berlin Heidelberg: Springer, 2015 (*cf. S.* 44, 176).

[Wan11] Patsy Wang-Iverson, Hrsg. *Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (2010, Singapur): CRC, 2011 (*cf. S.* 23).

[WG09b] Julia Waschbusch und Thomas Gawlick. »Grundfaltungen des Origamis«. In: *Mathematik und Origami*. Der Mathematikunterricht 55.6 (Dez. 2009). Hrsg. von Jürgen Flachsmeyer, S. 49–62 (*cf. S.* 37, 99–100).

[Wei+14] Hans-Georg Weigand u. a. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg, 2014 (*cf. S.* 7).

[Wil67] Raymond Wilder. »The Role of the Axiomatic Method«. In: *American Mathematical Monthly* 74.2 (1967), S. 115–127 (*cf. S.* 42, 47, 49).

[Win83] Heinrich Winter. »Zur Problematik des Beweisbedürfnisses«. In: *JMD* 4.1 (März 1983), S. 59–95. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF03339229 (*cf. S.* 51).

[WvRS20] Jan Franz Wörler, Christian van Randenborgh und Hans-Stefan Siller. »Von Spielregeln, mathematischen Ideen und Axiomen«. In: *Alternatives Konstruieren - mit Zirkel und ... genial!* Der Mathematikunterricht Jahrgang 66 (Heft 3, Juni 2020), S. 2–4 (*cf. S.* 40).

[Yat40] Robert C. Yates. »The Angle Ruler, the Marked Ruler and the Carpenter's Square«. In: *National Mathematics Magazine* 15.2 (1940), S. 61–73 (*cf. S.* 19).

[Yat41] Robert C. Yates. *Tools, A Mathematical Sketch and Model Book*. Louisiana State University, 1941. URL: https://archive.org/details/YatesToolsMathematicalSketch-Model1941 (*cf. S.* 18–19).

[Yat45] Robert C. Yates. »Paper Folding«. In: *Multi-Sensory Aids in the Teaching of Mathematics. Eighteenth Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, 1945, S. 154–159 (*cf. S.* 3, 17, 19).

[Yat49] Robert C. Yates. *Geometrical Tools, A Mathematical Sketch and Model Book*. Educational Publishers, 1949 (*cf. S.* 17–18, 34).

[Yos63] Ruby Yoshioka. »Fold Paper to Learn Geometry«. In: *The Science News-Letter* 83.9 (1963), S. 138–139 (*cf. S.* 65).

[YY08] Grace Chisholm Young und William Henry Young. *Der kleine Geometer*. BG Teubner, 1908 (*cf. S.* 12, 65).

2. Forschungsgegenstand

In diesem Kapitel beschreiben wir unsere Forschungsziele und -fragen. Dabei können die Forschungsziele unmittelbar formuliert werden.

> **Erstes Forschungsziel:** Entwicklung und mehrfache Durchführung eines universitären Kurses zum mathematischen Papierfalten für gymnasiale Lehramtsstudierende, in dem sie geleitet wesentliche Ergebnisse und Axiome eines Teilgebiets des mathematischen Papierfaltens entdecken und dieses Gebiet axiomatisieren. Ferner lernen Studierende wesentliche Aspekte einer Axiomatisierung einer mathematischen Theorie und erfahren grundlegende Aspekte und Problematiken der modernen Sicht auf die Axiomatisierung der euklidischen Ebene. *In diesem eingeschränkten Sinn wollen wir in dieser Arbeit* Axiomatisieren lernen mit Papierfalten *verstehen.*

Die vorliegende Studie beschäftigt sich ausschließlich mit Mathematikstudierenden des gymnasialen Lehramts. Falls nicht anders vermerkt, wird mit »Studierenden« genau diese Gruppe bezeichnet. Die Einschränkung auf das gymnasiale Lehramt hat zweierlei Gründe:

a) Der Kern dieser Arbeit, die Axiomatisierung eines Teilgebiets des mathematischen Papierfaltens, spielt für Lehramtsstudierende der Mathematik eine größere Rolle als für andere Mathematikstudierende, da diese Thematik nah an der Schulgeometrie ist und im Zusammenhang mit der dort omnipräsenten euklidischen Ebene gesehen werden kann. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife [Kul15] wird von »formalen Beweisen« und »Beweise[n] und anspruchsvolle[n] Argumentationen« gesprochen. Das Wort »Axiom« kommt jedoch nicht vor. Nun spielt diese Thematik für das nichtgymnasiale Lehramt eine wesentlich geringere Rolle: So kommt das Wort »Axiom« in den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss [Kul03] ebenfalls nicht vor, das Wort »Beweis« kommt nur zwei Mal vor, betreffend Argumentationen zu den Sätzen von Thales und Pythagoras. Auch in den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik [DMV08] wird von »Axiomatik« nur im Zusammenhang mit der Sekundarstufe II gesprochen. Einige Argumente für eine Beschäftigung mit der axiomatischen Methode in der Ausbildung der Studierenden des gymnasialen Lehramts wurden bereits in Abschnitt 1.3 vorgebracht.

b) Es gibt allerdings keine prinzipiellen Gründe dafür, Nicht-Lehramtsstudierende in der Untersuchung nicht zu berücksichtigen. Diese Einschränkung ist im Wesentlichen auf lokale organisatorische Gegebenheiten wie etwa ECTS-Regelungen zurückzuführen, die hier nicht ausgeführt werden.

Das **zweite Forschungsziel** dieser Arbeit ist die Beantwortung der Forschungsfragen, die aus dem ersten Forschungsziel abgeleitet werden. Es wird sich im weiteren Verlauf zeigen, dass ihre Formulierung nicht unmittelbar erfolgen kann und zunächst vorbereitet werden muss.

Aus Abschnitten 1.3 und 1.4 sowie aus dem ersten Forschungsziel wird leicht ersichtlich, dass die Auseinandersetzung mit dem Begriff »Axiom« und dem Prozess des Axiomatisierens von zentraler Bedeutung für die vorliegende Arbeit ist. Die grundlegende Problemstellung dieser Studie hat sich in drei Teile partitioniert:

⋆ Vorstellungen der Studierenden zu Axiomen sammeln und kategorisieren,
⋆ Probleme der Studierenden im Umgang mit Axiomen identifizieren,
⋆ Auswirkung des Kurses auf die ersten beiden Punkte untersuchen.

Es soll also untersucht werden, welche Vorstellungen Studierende mit dem Begriff »Axiom« verbinden, welche mathematischen Fehler sie machen, wenn sie über Axiome reden oder mit ihnen arbeiten. Ferner soll untersucht werden, ob und in wie weit der durchgeführte Kurs eine Veränderung dieser Kenntnisse und Fähigkeiten bewirken kann.

Da die Problemstellung neuartig und wenig erforscht ist, wurde die Studie explorativ angelegt. Sie soll einerseits präzise Forschungsfragen generieren, die in weiteren breiter angelegten Studien quantitativ überprüft werden können, und andererseits erste Erkenntnisse in Richtung der Beantwortung dieser Fragen liefern.

Entsprechend dem beschriebenen explorativen Charakter der Studie erscheint ein qualitativer Ansatz für die Datenerhebung und -auswertung besser geeignet als der quantitative.[1] Die Datenerhebung basierte zum großen Teil auf schriftlichen Tests vor und Leitfadeninterviews nach dem Kurs, vgl. auch Abschnitt 6.1 für methodologische Fragen. Zur Gestaltung und Durchführung der Pretests wird in Abschnitt 6.2 und der Posttests in Abschnitt 6.3 berichtet. Eine qualitative Erhebung

[1] Aufgrund von zu erwartenden Teilnehmendenzahlen im unteren zweistelligen Bereich wäre eine quantitative Auswertung ohnehin methodisch inkorrekt.

erscheint auch deswegen passend, da die Studie einen Überblick über die Themenlage verschaffen soll. Bisher gibt es nur wenige Studien über das Verständnis von Axiomen und Axiomatisieren bei Studierenden, vgl. [Yan13] und Abschnitt 1.4. Mit einer qualitativen Befragung kann erfasst werden, wie Studierende über die Begriffe »Axiom« und »Axiomatisieren« nachdenken, speziell Interviews als eine Form der Befragung ermöglichen eine tiefe, individuelle Einsicht in Denkprozesse der Testpersonen, vgl. [BM93, S. 147 ff.]. So schreibt etwa Vollrath [Vol92, 128f.], »dass ein Begriff gelernt wurde, lässt sich [durch Tests] an erworbenen Kenntnissen und Fähigkeiten nachweisen« und weiter: »Aufschlussreicher sind jedoch die Art des Umgangs mit dem Begriff, das Denken und das Reden über den Begriff«. Insgesamt war es diese Auffassung, die maßgeblich für die Art und Weise verantwortlich war, wie die Datenerhebung und -analyse geplant wurden. Über die tatsächliche und abweichende Durchführung der Analysen werden wir in Kapitel 7 berichten.

Zu Beginn des Forschungsvorhabens konnten die Forschungsfragen noch nicht hinreichend präzise formuliert werden. Insbesondere waren die Begriffe »Vorstellung« und »Auswirkung« in diesem Kontext schwer zu greifen.[2] Das lag unter anderem daran, dass das Thema der axiomatischen Behandlung des mathematischen Papierfaltens für die mathematikdidaktische Forschung neu und schwer in traditionelle Forschungsbereiche einzuordnen ist. Mangels bekannter vergleichbarer Studien mussten sich die Forschungsfragen und -methoden erst entwickeln. In der Tat haben sie sich mit der Zeit und fortschreitenden Analyse geändert. Es wurde deshalb entschieden, die *Entwicklung* der Forschungsfragen in dieser Arbeit nicht zu verschleiern, sondern umgekehrt zu explizieren. Die Darstellung dieser Entwicklung bedarf jedoch einiger Erklärungen, wie etwa die Beschreibung der van-Hiele-Niveaus, vgl. Abschnitt 6.2.4.1 und kann nicht sinnvoll chronologisch und vollständig wiedergegeben werden. Um den Lesefluss nicht zu sehr zu stören, wird daher wie folgt vorgegangen. Der Ablauf der Forschungsprojekts wird hier skizziert, die Veränderung der Problemstellungen sowie der Methodik werden aufgezeigt, diskutiert und kurz begründet. Falls weitere Ausführungen nötig sind, werden sie auf spätere Kapitel ausgelagert. Hier wird in einer Art Zeitraffer der Studie mit Verweisen auf andere Kapitel bezüglich Details ein Überblick über die Entwicklung des Projekts gegeben.

[2]Nicht selten wird in der Literatur statt einer Definition einer Vorstellung beschrieben, was zu einer Vorstellung gehört. So schreiben Kattmann et al.: »Unter ›Vorstellungen‹ fassen wir kognitive Konstrukte verschiedener Komplexitätsebenen, also Begriffe, Konzepte, Denkfiguren und Theorien, zusammen«, vgl. [Kat+97, S. 11].

2.1. Zeitraffer der Studie

2.1.1. Phase 1, Sommer 2015

Im Sommersemester 2015 wurde der erste Kurs »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten« entsprechend dem ersten Forschungsziel geplant und durchgeführt.[3] Zu dem Zeitpunkt waren die Ziele der Untersuchung in folgender allgemeiner Form:

1a Kognitive Prozesse beim Axiomatisieren des 1-fach-Origami erfassen
1b Schwierigkeiten im Umgang mit Axiomen ausmachen
1c Veränderung der Einstellung zu Axiomen durch den Kurs erkennen

Begriffe wie »kognitive Prozesse«, »Schwierigkeiten«, »Einstellungen« sind hierbei nicht näher spezifiziert und haben im Wesentlichen die Richtung angedeutet, in welche die Entwicklung der Forschungsfragen gehen sollte.

Der Begriff »Einstellung« wurde in **1c** unglücklich gewählt, die Analyse der Einstellungen wurde letztlich nie verfolgt und auch in den Tests wurden keine diesbezüglichen Fragen gestellt. In den Interviews wurden hauptsächlich die ersten zwei Punkte **1a-b** fokussiert und angesprochen, vgl. Abschnitt 6.3.2, die Veränderung der Einstellung sollte aus den Antworten auf entsprechende Fragen in den Interviews nach dem Kurs extrahiert werden. Zwar wurde am Anfang des Kurses ein kleiner schriftlicher Test durchgeführt; er diente jedoch in erster Linie dem Sammeln der ersten Erkenntnisse über die Sachlage zum Punkt **1b**. An dieser Stelle waren es die Interviews, die hauptsächlich zur Beantwortung der Forschungsfragen dienen sollten. Ein Pre-Post-Design war an dieser Stelle noch nicht vollumfänglich umgesetzt.

In diesem Stadium war es noch nicht gelungen, eine präzisere Formulierung der Ziele der Untersuchung zu finden.

2.1.2. Phase 2, Winter 15/16

Im darauf folgenden Wintersemester 2015/2016 wurde der zweite leicht angepasste Kurs durchgeführt, vgl. Abschnitt 5.4.2. Der Leitfaden für die Interviews blieb gleich, um die Vergleichbarkeit der Daten zu gewährleisten. Das Datenerhebungsdesign wurde nun stärker in Richtung Pre-Post-Design gerückt, um die Entwicklung vor und nach dem Kurs besser zu kontrollieren. Dazu wurde der Pretest ausgebaut und an den Leitfaden angepasst, dort tauchten Fragen auf, die stärker als im vorherigen Test in Richtung der Vorstellungen über den Begriff »Axiom« tendieren, vgl. Anhang B.1. Trotzdem galt zu diesem Zeitpunkt die Interviewstudie noch immer als die eigentliche Datenquelle. Auch das Design der schriftlichen Pretests und

[3] Die Gestaltung und Durchführung aller Kurse findet sich im Teil II der Arbeit in Kapiteln 4 und 5.

mündlichen Posttests ist nicht unproblematisch, um Veränderungen methodisch korrekt festzustellen. Es wurde nach einem Messinstrument gesucht, dass die gewünschte und durch den Kurs verursachte Veränderung aufzeigen kann. Hierbei blieb immer noch unklar, *was* genau verändert bzw. gemessen werden soll, denn es wurde noch nicht festgelegt, in welchem Sinne etwa »Vorstellungen« in dieser Studie zu verstehen sind. Dazu wurde aus der Geometrie-Literatur, etwa [Gol11], ein mögliches Messinstrument abgeschaut, die van-Hiele-Niveaus. Diese Idee fand erst in der dritten Phase Verwendung. Die Interviews zu den beiden ersten Kursen wurden transkribiert, kommentiert und mit Memos versehen. Eine eingehende Analyse der Daten fand auch zu diesem Zeitpunkt noch nicht statt.

2.1.3. Phase 3, Winter 16/17

Nach der zweiten Testphase ist klar geworden, dass mit der Mischmethode der schriftlichen und Interview-Tests nur schwer eine Veränderung der Vorstellungen, Schwierigkeiten, Kompetenzen angemessen erfasst werden kann. Die erhobenen Daten zu Vorstellungen und Schwierigkeiten wurden für spätere Auswertungen (sobald die Forschungsfragen und Auswertungsmethoden hinreichend präzisiert wurden) aufbewahrt.

Es wurde nach einem Messinstrument gesucht, welches erlaubt, gewisse Verständnisindikatoren der Studierenden zu messen, in der Hoffnung, eine Änderung der gemessenen Indikatoren im Pre-Post-Design zu sehen. Dabei bestanden zwei Probleme: Erstens war noch nicht klar, was genau, welche Indikatoren welcher Kompetenzen gemessen werden sollten. So ist etwa nicht offensichtlich, welche Indikatoren signalisieren, ob jemand das Prinzip eines Axioms/Axiomensystems, oder besser den Prozess des Axiomatisierens, verstanden hat. Zweitens war nicht klar, mit welchem Test dies zu messen wäre. In [Gol11] wird eine Intervention mittels Papierfalten in israelischen Grundschulen beschrieben. Dort wurde eine Veränderung der van-Hiele-Niveaus beobachtet. Auch wenn die Methode von van Hiele nicht primär anwendbar schien, sondern in erster Linie für geometrische Kompetenzen im schulischen Kontext konzipiert wurde, bestand die Überlegung darin, dieses Messinstrument im hiesigen Kontext wie folgt einzusetzen. Bekannte Tests für van-Hiele-Niveaus enthalten oft (vgl. [BS86a], [Usi82]) Fragen zu Axiomen oder Fragen, die ein gewisses axiomatisches Verständnis erfordern. Somit könnte eine Veränderung in den Niveaus vor und nach dem Kurs ein Indiz dafür sein, dass die Veränderung auf die Kursinhalte zurückzuführen ist. Damit sollte das gerade beschriebene Problem der Indikatoren umgangen werden, indem indirekt Rückschlüsse auf die Wirkung des Kurses gezogen werden.

Der dritte Kurs im Wintersemester 2016/2017 wurde nochmals überarbeitet, die Pre- und Posttests waren stark vom van-Hiele-Modell beeinflusst.[4] Das Format der schriftlichen Pretests und Post- Interviews ist aber geblieben. Die Entscheidung basierte auf der bis dahin bewährten Frage-Form sowie auf organisatorischen Überlegungen zum Pretest. Die Problemstellung zu diesem Zeitpunkt lautete:

3a Welche Vorstellungen haben Studierende zum Themengebiet »Axiom«?
3b Welche Probleme haben sie aus mathematischer Sicht mit Axiomen?
3c Veränderung der van-Hiele-Niveaus vor und nach dem Kurs messen.

In dieser Phase tauchten in den Tests verstärkt Fragen auf, die ziemlich explizit *personal concept definitions* der Begriffe »Axiom« und »euklidische Ebene« abfragten. Diese Fragen wurden teilweise aus der Literatur übernommen. Zu diesem Zeitpunkt hätte bereits erkannt werden können, dass personal concept definitions im Sinne von [TV81] für diese Studie ein adäquater Zugang zu Vorstellungen über Axiome sind. Das ist aber leider nicht geschehen.

Tall und Vinner definierten 1981 *concept definition* als »a form of words used to specify that concept«, vgl. [TV81, S. 152]. Weiter im Text unterschieden sie zwischen einer *formal concept definition* – das ist eine »concept definition, which is accepted by the mathematical community at large« – und einer *personal concept definition*, die sie nicht explizit definieren.[5] Aus den gegebenen Erklärungen wie »Whether the concept definition is given to him [student] or constructed by himself [...]« (ebd.), kann eine Definition abgeleitet werden.

Definition 2.1. Als *personal concept definition* bezeichnen wir daher *a form of words used to specify that concept constructed by the person herself.*

Die Idee, die van-Hiele-Niveaus zu verwenden, führte in dieser Studie leider nicht zum Ziel, vgl. Abschnitt 6.2.4.3. Wir mussten unter anderem feststellen, dass die Übertragung der typischen van-Hiele-Fragen auf unser Thema nicht wie erwartet funktioniert hat.

2.1.4. Phase 4, Winter 18/19

Der vierte und letzte Kurs für die Studie wurde geplant und durchgeführt. Die vorläufigen Auswertungen der Daten aus den ersten drei Testphasen zeigten geringe Vergleichbarkeit der Vor- und Nachtests, basierend auf der Erhebungsmethode. Die

[4] vgl. Abschnitte 6.2.4, 6.3.4 sowie Anhang B.3.
[5] Das entbehrt nicht einer gewissen Komik.

erste Analyse der Pretests aus allen vier Kursen zeigte aber trotzdem interessante Resultate. Der Pre- und Post-Test wurden daher einheitlich gestaltet, beide nun schriftlich, vgl. Abschnitte 6.2.5, 6.3.5.

Der Kurs an sich wurde kaum mehr verändert, denn das Resultat aus den ersten drei Kursen schien das gesetzte Forschungsziel zu erreichen.[6]

Die zu diesem Zeitpunkt aktuelle und noch immer allgemeine Formulierung der Forschungsfragen lautete:

4a Welche Vorstellungen haben Studierende zum Themengebiet »Axiom«?
4b Welche Probleme haben Studierende aus mathematischer Sicht mit Axiomen?
4c Wie verändert der Kurs das Verständnis der Studierenden bzgl. der Axiome?

Die van-Hiele-Niveaus wurden fallen gelassen, aber einige Fragen aus den einschlägigen van-Hiele-Tests wurden übernommen, da dort die Thematik zu der hiesigen ähnlich ist und die Tests bereits erprobt und begründet wurden.

In **4c** ist von »Verständnis« die Rede. Da dies bekanntermaßen ein Begriff ist, der sich einer allgemein akzeptierten Operationalisierung entzieht, wurde normativ für diese Arbeit festgelegt: *Verständnis zeigt sich in ausgewählten Aspekten des Begriffs, die in der Antwort auftauchen*. Mehr von diesen Aspekten deuten auf besseres, weniger auf schlechteres Verständnis des Themas. Dabei sind »Aspekte« wie in [Gre+16, S. 17] zu verstehen: Teilbereiche eines mathematischen Begriffs, mit denen dieser fachlich charakterisiert werden kann. Selbstredend ist »Verständnis« subtiler als eine mechanische Überprüfungen der Anzahlen von Aspekten. Diese Problematik wird uns bei der Auswertung in den Abschnitten 7.2.8 und 7.2.9 deutlich begegnen.

Es ist dabei zu betonen, dass es im Kontext einer Lehrveranstaltung keine eindeutige bzw. offenkundig »richtige« Definition eines Axioms gibt. Wird nach der Definition eines Axioms gefragt, so ist die Antwort »eine nicht abgeleitete Aussage« korrekt, vgl. Definition 1.8, aber »ein Element eines Axiomensystems, also einer minimalen Menge von Aussagen, die widerspruchsfrei eine mathematische Theorie vollständig beschreiben« ist ebenfalls eine gute,[7] aber wesentlich andere Antwort.

Hierzu ein Beispiel: Auf die Frage *Wie würden Sie die euklidische Ebene definieren?* gab es unter anderem die Antworten: »Die euklidische Ebene ist die Zeichenebene« und »die euklidische Ebene ist $\mathbb{R}^2$ mit einem Skalarprodukt«. Die zweite Antwort weist ein tieferes Verständnis des Begriffs »euklidische Ebene« als die erste, weil sie wichtige Aspekte der Definition wie $\mathbb{R}^2$ und *Abstandsmessung* explizit ermöglicht. Dagegen bleibt die erste Antwort bei einer intuitiven Verständnisebene der euklidischen Ebene und liefert keine Aspekte, die einer Definition zuträglich wären.

[6] vgl. Abschnitte 5.4.4 und 5.5.
[7] Hier ist die Vollständigkeit etwas irritierend erklärt, daher ist die Antwort vielleicht nicht sehr gut.

Der Posttest wurde im Wesentlichen gleich gestaltet wie der Pretest, vgl. Anhänge B.4, C.4, nur mit dem Unterschied, dass im Posttest einige kursbezogene Fragen hinzukamen. Die entscheidenden Fragen nach Axiomen und euklidischer Ebene wurden klar in Richtung personal concept definition formuliert: »Wie würden Sie ... definieren?«. Fragen wie »Wie stellen Sie sich vor?« tauchen nicht mehr auf. Allerdings erwartet Frage 5 aus Pretest WS18/19 neben einer Definition der euklidischen Ebene auch eine Antwort auf »Was bedeutet die euklidische Ebene für Sie?«, und ermöglicht damit, einen Unterschied zwischen gegebenen Vorstellungen und versuchter Definition zu untersuchen.

Nach vielen Diskussionen und laufenden Analysen erreichten die Forschungsfragen dann das Ende der Entwicklung. Es scheint der Fall zu sein, dass nun die richtigen Formulierungen gefunden worden sind, die tatsächlich das abbilden, was herausgefunden werden sollte.

2.2. Finale Forschungsfragen

Den finalen Forschungsfragen stellen wir eine etwas genauere Erklärung sowie Begründung der gewählten Begriffe und Formulierungen voran.

concept definitions In der Regel geben Studierende auf die Frage »Wie würden Sie ein Axiom definieren?« keine allgemeine, mathematisch präzise Definition an. Das ist nicht weiter verwunderlich. Wenige Mathematikschaffende würden auf Anhieb eine solche Definition geben können, vgl. Abschnitt 1.3. Das bedeutet es ist nicht zweckmäßig, bei dieser Frage formal concept definitions des Begriffs »Axiom« zu erwarten.[8] Das unterscheidet diesen Begriff etwa von dem des Vektorraums: Von Studierenden kann eine formale Definition erwartet werden. In [Vin02, S. 69] warnt Shlomo Vinner zwar: »To know by heart a concept definition does not guarantee understanding of the concept«. Allerdings ist im universitären Rahmen die Definition eines Begriffs die korrekte Antwort auf die Frage, wie dieser Begriff definiert wird. Richtig ist, dass die obige Frage nach der Definition eines Axioms bereits so formuliert ist, dass personal concept definitions (was Teil des concept images ist) erwartet werden.[9] Studierende sollen *erklären*, wie der Begriff des Axioms festgelegt, beschrieben, definiert werden kann. Sie sollen nicht (nur) sagen, was sie sich

[8] Mit [Kah15, S. 127ff] könnte argumentiert werden, dass Studierende möglicherweise die schwerere Frage nach der Definition, die sie vermutlich nicht beantworten können, durch eine leichtere Frage nach ihrer *Vorstellung* hierzu ersetzen würden.

[9] Diese waren im Prinzip seit der ersten Phase in den Tests, erkennbar an den Formulierungen, angesprochen. Nun wird durch die finale Formulierung der Forschungsfrage transparent, dass es tatsächlich um personal concept definitions geht.

darunter *vorstellen*, sie sollen auch mathematisch tätig werden und versuchen, einen Begriff entsprechend ihren Vorstellungen zu definieren. In [Vin83] wird ein vergleichbarer Fall mit der Definition einer Funktion untersucht.

> Es lohnt sich, einen gewissen Unterschied zwischen bekannten und verwandten Konzepten zu *Vorstellungen* wie etwa »concept definition« und »Grundvorstellung« anzusprechen. Dazu wurde bereits reichlich publiziert (vgl. etwa [Rem15; Kli19]), so dass wir uns an der Literatur orientieren und nur das für uns Wichtige beleuchten.
>
> > »Während vom Hofe (1995) dem Begriff Grundvorstellung eine explizit deskriptive, normative (und konstruktive) Dimension zuweist, beschränken sich Tall & Vinner (1981) im Wesentlichen auf eine deskriptive Ebene, um Erklärungen für das Verhalten von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit mathematischen Begriffen zu finden. [...] Hierbei spielt insbesondere die Concept Definition eine wichtige Rolle, die bei vom Hofe weniger Berücksichtigung erfährt.«, vgl. [Kli19, S. 71].
>
> In dieser Arbeit sind letztlich die personal concept definitions die Vorstellungen, die uns interessieren.

euklidische Ebene Der Begriff der euklidischen Ebene wurde implizit oder explizit seit dem ersten Pretest abgefragt, vgl. Anhänge 7.3.8. Es könnte schließlich sein, dass Studierende den Begriff »Axiom« nie definiert gesehen haben und dieses Wort höchstens im alltäglichen Sinne kennen. Daher wäre es möglich, dass sie *deswegen* keinen sinnvollen Beitrag zur Definition eines Axioms im mathematischen Sinne leisten können. Diese Situation wäre kaum unterscheidbar von der, die insgesamt Schwierigkeiten mit Begriffsdefinitionen beinhaltet. Daher kann die gerade beschriebene Situation aufgelöst werden, indem eine zusätzliche Definitionsfrage aufgenommen wird, in der ein besser bekannter Begriff zu definieren ist. Die euklidische Ebene liegt thematisch (das 1-fach-Origami samt Axiomen findet in der euklidischen Ebene statt) nahe und taucht im Kurs mehrfach auf. Ihre Definition wurde daher als eine Vergleichsfrage hergenommen.[10] Im Verlauf der Studie hat sich diese Frage zunehmend zu einer eigenständigen Forschungsfrage entwickelt, die interessante Resultate liefert, vgl. Abschnitt 7.2.8.

Schwierigkeiten werden im fachmathematischen Sinne verstanden. Darunter wer-

[10] Möglicherweise wäre es wesentlich sinnvoller, einen wirklich bekannten Begriff, wie »Vektorraum«, »Gruppe« oder »Stetigkeit« zu nehmen.

den falsche oder nicht vollständige Antworten subsumiert. So ist die Aussage »ein Axiom ist eine Eigenschaft« mathematisch nicht korrekt und es gilt, solche Problemantworten zu identifizieren und zu analysieren.

Umgang Neben der reinen definitorischen Frage »wie definieren Sie ein Axiom?«, auf die eine plausible Antwort wie »ein Axiom ist ein Grundpfeiler einer Theorie« möglich ist, ist es wichtig zu erkennen, ob Studierende mit Axiomen im Kontext arbeiten können. Denn der Prozess des Axiomatisierens erfordert ja gerade Fähigkeiten im Umgang mit Axiomen. Laut Hans-Joachim Vollrath können zum Nachvollziehen, ob ein bestimmter Begriff gelernt wurde, bestimmte Stufen des Lernens mittels Tests überprüft werden. Wie aber bereits gesehen, sei jedoch ihm zufolge der Umgang mit dem Begriff aufschlussreicher, vgl. Seite 79 und [Vol84, S. 20]. So haben wir eine weiterführende Frage gestellt in der Form »Was ist der Unterschied zwischen Axiomen und Definitionen oder Theoremen?«, um zu erfahren, wie Studierende mit den Begriffen umgehen. Eine Antwort wie »Definitionen und Axiome können nicht bewiesen werden, Theoreme schon« erlaubt eine feinere Analyse und Fehlersuche.

mathematische Güte Statt mathematischer Güte könnte von der (*mathematischen*) *Qualität* der Antwort gesprochen werden. Es geht, salopp gesagt, darum, einzuschätzen wie mathematisch sinnvoll die Antworten auf die gestellte Frage sind.[11] Dabei ist immer zu beachten, dass bei diesen Fragen oft nicht *die eine* richtige Antwort existiert. Daher muss untersucht werden, inwieweit die Antwort die Frage – im mathematischen Sinne – beantwortet.

Das problematische Wort »Verständnis« aus **4c** wird abgelöst durch die neutralere mathematische Güte einer Antwort. Trotzdem wird es inhaltlich weiterhin versucht herauszufinden, ob einzelne Personen schwer greifbare Begriffe wie »Axiom« im dortigen Sinne *verstanden* haben. Dort wird von *ausgewählten Aspekten* gesprochen, was offenbar recht vage ist. Je nach Fragestellung werden wir situativ klären, was wir mit der mathematischen Güte genau meinen. Testfragen, die personal concept definition abfragen (»Wie würden Sie definieren?«), erlauben eine fachmathematische Bewertung: Wie vollständig ist die Antwort? Hierbei unterscheidet sich die Bewertung nur wenig von solchen in den Korrekturen von Übungsaufgaben oder Klausuren. Abhängig von der Fragestellung unterscheidet sich die Bewertungsskala. Zwar könnte die Bewertung etwa quantitativ erfolgen, doch oft waren wir an qualitativen Zuordnungen interessiert. Zum Beispiel ist die Antwort »$\mathbb{R}^2$« auf die Frage nach

[11] Diese Methode ist weder neu noch unnatürlich. So schreiben etwa Kattmann et al.: »Um die Vorstellungen [...] zu erfassen, [...] werden also Aussagen über die Struktur und Qualität von Konzepten gesucht«, vgl. [Kat+97, S. 12].

der Definition der euklidischen Ebene, ganz genau genommen, falsch, denn die Abstandmessung oder ein Skalarprodukt in der Antwort fehlen. Die vorgenommene Einordnung der Antwort ist aber »fast gut, aber nicht vollständig«, da die mathematische Einordnung bereits vorhanden und richtig, aber eben nicht vollständig ist. Dagegen ist die Antwort »die euklidische Ebene wird durch zwei senkrechte Achsen aufgespannt« qualitativ schlechter. Bei der Antwort ist nachvollziehbar, was die Person meint, aber diese Antwort gibt etwa keine Auskunft über den Vektorraum, aus dem die aufspannenden Vektoren kommen sollen, oder warum die Achsen senkrecht sein müssen. Die mathematische Güte äußert sich nicht in der Anzahl, sondern in der Einordnung und Bewertung der Aspekte.
Die mathematische Güte wird den einzelnen Antworten zugeordnet und ihre Pre-Post-Entwicklung beobachtet. Somit dient sie als ein Messwerkzeug der Veränderung der Qualität der Antworten vor und nach dem Kurs.

Die finalen Forschungsfragen lauten nun:

FFa Welche personal concept definitions zum Begriff »Axiom« und »euklidische Ebene« lassen sich in den Antworten der Studierenden identifizieren? In welchem Verhältnis steht das Ergebnis zu formal concept definitions?

FFb Welche Schwierigkeiten lassen sich im Umgang mit Axiomen feststellen?

FFc Wie verändert der Kurs die mathematische Güte der Antworten zum Thema »Axiom« und »Axiomatisieren«?

Literatur zum Kapitel 2

[BM93] Christian Beck und Hermann Maier. »Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung«. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 14.2 (1993), S. 147–179 (*cf. S.* 79, 219).

[BS86a] William F. Burger und J. Michael Shaughnessy. *Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry*. Final Report. Oregon State University, 1986 (*cf. S.* 81, 229–230, 232, 235, 237, 247–248).

[DMV08] Empfehlungen von DMV GDM und MNU. »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik«. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16.3 (Juni 2008), S. 149–159 (*cf. S.* 54, 63, 77, 224, 246).

[Gol11] Miri Golan. »Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry.« In: *Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*. Hrsg. von Patsy Wang-Iverson. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (2010, Singapur): CRC, 2011, S. 141–150 (*cf. S.* 65, 81, 228).

[Gre+16] Gilbert Greefrath u. a. *Didaktik der Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2016 (*cf. S.* 83).

[Kah15] Daniel Kahneman. *Schnelles Denken, langsames Denken*. Übers. von Thorsten Schmidt. Zwanzigste Auflage. München: Pantheon, 2015 (*cf. S.* 84).

[Kat+97] Ulrich Kattmann u. a. »Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftliche Forschung und Entwicklung«. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 3.3 (1997), S. 3–18 (*cf. S.* 79, 86, 219–220).

[Kli19] Marcel Klinger. »Grundvorstellungen versus Concept Image? Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theorien am Beispiel des Funktionsbegriffs«. In: *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht*. Hrsg. von Andreas Büchter u. a. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019, S. 61–75. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-24292-3_5 (besucht am 17. 03. 2020) (*cf. S.* 85).

[Kul03] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003*. Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Kultusministerkonferenz. Luchterhand, 2003 (*cf. S.* 67, 77).

[Kul15] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hrsg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Kultusministerkonferenz. Köln: Link, 2015. 76 S. (*cf. S.* 43, 67, 77, 224).

[Rem15] Verena Rembowski. »Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht: Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen«. Diss. Universität des Saarlandes, 2015. URL: https://publikationen.sulb.uni-saarland.de/handle/20.500.11880/26717 (*cf. S.* 85, 254).

[TV81] David Tall und Shlomo Vinner. »Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity«. In: *Educational Studies in Mathematics* 12.2 (Mai 1981), S. 151–169. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00305619 (besucht am 17. 03. 2020) (*cf. S.* 82).

[Usi82] Zalman Usiskin. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. ED220288. Chicago Univ. Ill., 1982 (*cf. S.* 81, 230–235, 266).

[Vin83] Shlomo Vinner. »Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function«. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14.3 (1983), S. 293–305 (*cf. S.* 85, 255–256).

[Vin02] Shlomo Vinner. »The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics«. In: *Advanced Mathematical Thinking*. Hrsg. von David Tall. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002, S. 65–81 (*cf. S.* 84, 221, 256).

[Vol84] Hans-Joachim Vollrath. *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett Stuttgart, 1984 (*cf. S.* 86, 144).

[Vol92] Hans-Joachim Vollrath. »Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweisens«. In: *Math Semesterber* 39.2 (Okt. 1992), S. 127–136. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF03186465 (besucht am 31. 08. 2021) (*cf. S.* 79).

[Yan13] Mark Yannotta. »Students' Axiomatizing in a Classroom Setting«. In: *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Bd. 2. 2013, S. 290–297 (*cf. S.* 79).

3. Zur Mathematik des 1-fach-Origami

Which folding operations do we want to incorporate into a definition
of those points and lines that can be constructed by paperfolding?
The answer to this question is by no means obvious. [...] we cannot
immediately write down a reasonable definition and go on from there.
George E. Martin, Geometric Constructions

In diesem mehr mathematischen Kapitel soll eine solide Definition und Analyse von 1-fach-Origami eingeordnet, vorbereitet und ausgeführt werden. Dabei ist das primäre Ziel der folgenden Darstellungen keine umfassende Behandlung von 1-fach-Origami, sondern eine Behandlung aus dieser Perspektive: Ein durch die axiomatische Methode motivierter Aufbau des Konstruktionswerkzeugs 1-fach-Origami, der für Studierende zugänglich ist, und der die üblichen Konstruktionen mit 1-fach-Origami vorbereitet. Es ist kein ausdrückliches Ziel der nachfolgenden Darstellung die Struktur des Körpers der 1-fach-Origami-Punkte im Detail zu analysieren und zu beweisen, vgl. Sätze 3.29, 3.31, auch weil dies für Axiomatisierungsfragen bezüglich 1-fach-Origami keine primäre Bedeutung hat. Wir wollen hingegen eine in den bekannten Begriffen der euklidischen Geometrie verankerte Definition des 1-fach-Origami geben und es aus mathematischer und falttechnischer Perspektive beschreiben. Die konkreten Faltkonstruktionen, die auch für unsere Kurse relevant sind, behandeln wir situativ in Kapitel 5. Den Definitionen und Analysen stellen wir eine Sachanalyse des Gebiets des 1-fach-Origami voran. Sie soll aufzeigen wie 1-fach-Origami in der Literatur eingeführt wird und welcher mathematischer Kontext für 1-fach-Origami in Frage kommt. Sie wird uns ferner helfen zu entscheiden, wie 1-fach-Origami aus mathematischer Sicht gelehrt werden kann.

In diesem Kapitel werden wir auch dann die Bezeichnung *1-fach-Origami* für die alltägliche Beschreibung des naiven Faltens – »so falten, dass genau ein Falz entsteht« – verwenden, wenn etwa die zitierten Quellen andere Bezeichnungen wählen, solange es sich erkennbar um dasselbe Konstruktionswerkzeug handelt. In der Literatur wird 1-fach-Origami typischerweise einfach als »origami« bezeichnet, vgl. [Ger95], [Cox12], [Alp00], [GKK13], [Luc19] etc.; in der Regel wird dieser Begriff nicht von »paper[ ]folding« unterschieden, vgl. etwa [Hul11]. Interessanterweise sieht Martin hier jedoch einen Unterschied: »paperfolding as a means of geometric construction and as opposed to origami [...]«, vgl. [Mar98, S. 145]. Alternativ werden auch Bezeichnungen wie »one-fold« bzw. »single-fold axioms/operations« von Origami verwendet, vgl. [AL09], [Luc17b].

3.1. Zur Definition von 1-fach-Origami

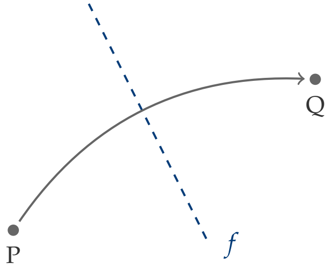
Der Begriff »1-fach-Origami« ist im Deutschen nicht fest etabliert und wurde aus dem Englischen von »one-fold origami« abgeleitet, vgl. [AL09]. Dabei soll »1-fach« bedeuten, dass bei einer Faltung exakt eine Faltlinie entsteht.[1] Diese Vorstellung liegt der klassischen Konstruktion mit einem Richtscheit nahe, da auch beim Falten neue Geraden der euklidischen Ebene aus bereits gefalteten Punkten (und Geraden) entstehen. Außerdem entstehen beim 1-fach-Origami keine Mehrfachlagen von »Papier«, die selbst wieder gefaltet werden, was unweigerlich zu gebrochenen Linien als Falze führte. Insofern reiht sich das 1-fach-Origami bereits durch die Anweisung, nur einen Falz (eine Gerade in der Ebene) zu produzieren, in die Reihe der klassischen Konstruktionswerkzeuge, wie etwa das markierte Lineal [Mar98, Chapter 9] oder Zirkel und Lineal.

Wie in Abschnitt 1.2 bereits dargelegt wurde, hat sich 1-fach-Origami aus praktischen Konstruktionen entwickelt und erst in den letzten dreißig-vierzig Jahren eine eingehende mathematische Analyse erfahren. Typischerweise geht die Definition von 1-fach-Origami nicht darüber hinaus, dass beim Falten (das ebenfalls nicht immer erklärt wird) genau ein Falz entstehen soll. Ferner wird 1-fach-Origami über die Liste der oft nicht präzise formulierten Huzita-Justin-Axiome [AL09, S. 2] bzw. elementaren Operationen [Jus90b, S. 256], [Ger08, S. 359] charakterisiert. Für eine nicht formalistische Behandlung des Faltens ist diese übliche Beschreibung ausreichend. Wir geben in Abb. 3.1 diese Huzita-Justin-Axiome in bereits leicht formalisierter Form an. Soll jedoch über die Bezeichnung *Axiome des Faltens* nachgedacht werden, wird eine formalisierte und präzise Definition von 1-fach-Origami benötigt.

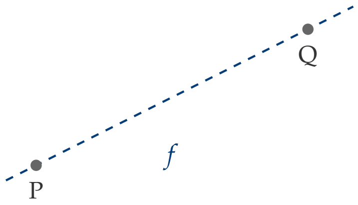
Ein erster Schritt hin zu einer abstrakten Definition des Faltens ist das Verständnis dafür, wodurch eine Faltung charakterisiert werden kann. So ist etwa bei den Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen die Existenz oder Beschaffenheit der eigentlichen Konstruktionswerkzeuge nicht wichtig. In ihrer Formulierung ist typischerweise keine Rede davon, dass »eine Linie *mit einem Richtscheit* gezogen werden« soll, die Wahl des Konstruktionswerkzeugs bleibt der Definition fern.[2] Sicherlich können auch andere Werkzeuge zum Einzeichnen von Linien und Kreisen genutzt werden.

[1] Das Wortspiel »1-fach« wie »einfach« ist intendiert, hat aber keine mathematische Bedeutung.

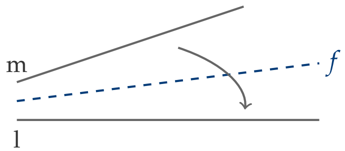
[2] Bemerkenswerterweise gibt es Quellen, die dennoch konkret vorschreiben, womit konstruiert werden soll. So schreibt Geretschläger: »Given two non-identical points P and Q, one can draw the unique straight line $l = PQ$ containing both points, using the straight-edge«, vgl. [Ger95, S. 357].



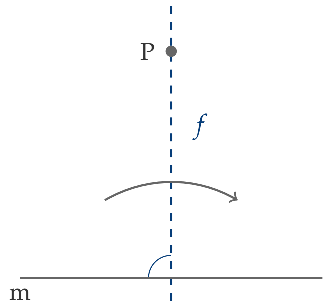
Für Punkte $P \neq Q$ ist f die eindeutige Mittelsenkrechte der Strecke $[PQ]$.



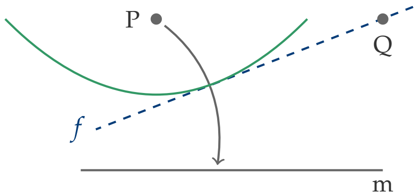
Für Punkte $P \neq Q$ ist f die eindeutige Verbindungsgerade von P und Q.



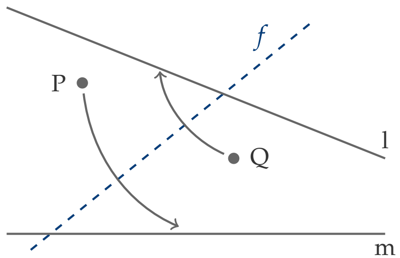
Für Geraden $m \neq l$ ist f eine der beiden Winkelhalbierenden der Winkel zwischen l und m.



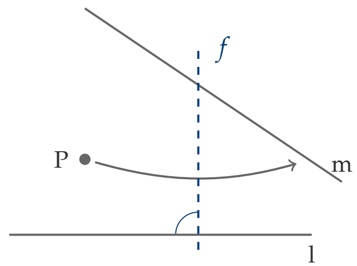
Für Punkt P und Gerade m ist f das Lot auf m durch P.



Für Punkte $P \neq Q$ und Gerade m mit $P \notin m$ ist f eine der höchstens zwei Tangenten durch Q an die Parabel (P, m) mit Brennpunkt P und Leitgeraden m.



Für Punkte P und Q und Geraden l und m ist f eine der höchstens *drei* simultanen Tangenten an die Parabeln $(P, m), (Q, l)$.



Für die Gerade l, die nicht parallel zur Geraden m ist, wobei $P \notin m$ für Punkt P gilt, ist f die einzige Tangente an die Parabel (P, m), die senkrecht auf l steht.

Abbildung 3.1.: Eine Darstellung der Huzita-Justin-Axiome mit angepasster Beschreibung der Falze. Siehe auch [AL09, S. 2] sowie [Ned20, S. 39].

In diesem Sinne ist ein wichtiger Schritt in Richtung der Abstraktion von Konstruktionen, dass nicht präzisiert wird (werden muss), *womit* die Konstruktion erfolgt. Diese doch naheliegende Erkenntnis ist für die Sachanalyse des Konstruktionswerkzeugs 1-fach-Origami nicht unwichtig. Studierende (denn sie stellen letztlich das Zielpublikum der Mathematisierung des 1-fach-Origami in dieser Arbeit dar) sollen alles Nicht-Notwendige für die Definition weglassen können. Sie müssen erkennen, worauf es ankommt, das ist: Was charakterisiert eine konkrete Faltung losgelöst von unnötigen Ausschmückungen.

Wir stellen diese Überlegungen der Definition voran, auch um klar zu machen, dass die letztendliche mathematische Definition von 1-fach-Origami im Nachhinein als möglicherweise naheliegend erscheint, am Anfang der Beschäftigung mit 1-fach-Origami vermutlich aber nicht offensichtlich ist.

Von den vielen Aspekten des allgemeinen Faltens, die eine präzise und zutreffende Definition erschweren, sind etwa zu nennen:

- Die Bewegung des Papiers im dreidimensionalen Raum beim Falten,
- die Notwendigkeit, die Selbstüberschneidung des Papiers auch mathematisch zu verhindern,
- das Nicht-Reißen oder -Dehnen des Papiers, aber auch
- stetige, teilweise glatte Bewegung und so weiter.

Im Fall des 1-fach-Origami können die meisten dieser Aspekte geschickt ignoriert werden, wenn eine passende Abstraktion gewählt wird. So ist etwa die konkrete Bewegung (im dreidimensionalen Raum) für das Erzeugen eines Falzes – wie es sich schnell herausstellt, aber dennoch nicht selbstverständlich ist, – nicht wichtig, es genügt im 1-fach-Origami die Angabe weniger einfacher Daten, um den zu erzeugenden Falz zu beschreiben.

Beispiel 3.1. In der Faltbeschreibung aus Abb. 3.2 für die Konstruktion eines regelmäßigen Dreiecks in einem gegebenen Quadrat: »Man falte die linke obere Ecke *so* auf die Mittelsenkrechte der unten Kante, *dass* der entstehende Falz durch die linke untere Ecke geht« ist bereits eine gewisse Mathematisierung zu erkennen. Trotzdem ist die Faltbeschreibung mathematisch schwer zu begreifen (auch falttechnisch ist das zu Beginn nicht problemlos): Es ist erkennbar, dass betroffene Punkte als Punkte in der Ebene algebraisiert werden können, allerdings ist nicht unmittelbar klar, wie dieses »so, dass« mathematisch umzusetzen ist, welche Rolle »der entstehende Falz« in der mathematisch präzisen Beschreibung spielen soll und gar ob diese Faltung überhaupt eindeutig und existent ist. ♯

Es gibt verschiedene Zugänge zur mathematischen Beschreibung von 1-fach-Origami. Soll die Eigenschaft des Papiers – es wird nicht gerissen oder gedehnt – in den Vordergrund gestellt werden, so könnte eine Beschreibung über Isometrien ange-

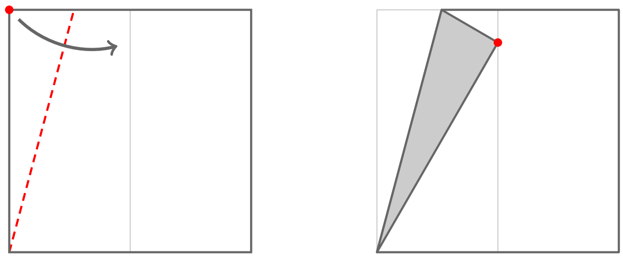


Abbildung 3.2.: Unter unendlich vielen Möglichkeiten, den roten Punkt auf die hellgraue Gerade zu falten, wählen wir eine, für die der Falz durch die untere linke Ecke des Quadrats geht.

strengt werden, indem die Abstandserhaltung betont wird. In einer (gewissermaßen vor der 1-fach-Origami-Zeit erschienenen) Arbeit [Cho64] führt Gustave Choquet ein Faltungsaxiom[3] ein (»axiome du pliage (ou de symétrie)«, S. 154); allerdings ist er nicht am Falten per se interessiert, sondern an der Axiomatisierung der euklidischen Ebene. Er benutzt[4] die »l'opération concrète de pliage d'une feuille de papier«, um ein Axiom zu definieren, mit dem er bequemer als in seiner anderen Axiomatik der Ebene Geradenspiegelungen definieren kann. Auch Michael Friedman stellt treffend fest, dass dieses Faltungsaxiom recht wenig mit eigentlichem Falten zu tun hat, vgl. [Fri18, S. 364]. Er macht ebenda allerdings eine denkwürdige Bemerkung: »However, Choquet does not define folding as a folding of paper, but as a function«. Das Interesse an der Arbeit von Choquet ist hier größtenteils aus geschichtlicher Perspektive bedingt, weil sein Buch möglicherweise als eine Inspirationsquelle für Jacques Justin diente, das Falten axiomatisch zu betrachten, vgl. [Jus84c, S. 2] und [Fri18, S. 364 oben].

Bemerkung 3.2. Bevor wir mit Choquet abschließen, erwähnen wir noch eine merkwürdige Interpretation der Darstellungen von Choquet in der englischen und deutschen Übersetzung, vgl. [Cho69] bzw. [Cho70]. So schreibt Choquet, vgl. [Cho64, S. 153]:

> »je propose donc ici une variante de la première axiomatique, basée sur un axiome de pliage qui est la formulation mathématique de l'opération concrète de pliage d'une feuille de papier autour d'une droite.«

[3] Zu einer Geraden G der Ebene Π seien $\Pi_1(G)$ und $\Pi_2(G)$ die beiden offenen Halbebenen, die von G definiert werden. Jede Isometrie von $\Pi_1(G) \cup G$ auf $\Pi_2(G) \cup G$, die G punktweise fixiert, heiße Faltung um G. Das Faltungsaxiom lautet dann: Zu jeder Geraden G gibt es wenigstens eine Faltung um G.

[4] Choquet führt an, dass diese Axiomatik eine Variante der Axiomatik aus [Cho55] darstellt. Dort taucht zwar das Falten kurz auf: »le plan que nous etudions est materialise par une feuille de papier plane (sur laquelle n'est figuré aucun repère), susceptible d'etre pliée« [S. 91], zu Deutsch etwa *der Plan, den wir verfolgen, wird durch ein flaches Blatt Papier (auf dem keine Referenzmarke abgebildet ist) verwirklicht, das gefaltet werden kann.* Jedoch erst in der Arbeit aus dem Jahr 1964 wird das Falten zu einem Axiom erhoben.

Er spricht von einer mathematischen Formulierung des Faltens. In der englischen Version wird daraus nicht nur eine »Formalisierung« und aus »Axiomatik« eine »Axiomatisierung«, sondern das Falten wird als einfach und alltäglich interpretiert:

> »I would like to add the following variation of the original axiomatization, based on the mathematical formalization of the simple, everyday experience of folding a piece of paper about a line.« [Cho69, S. 122]

In der deutschen Version wird aus dem Faltungsaxiom (axiome du pliage) unglücklicherweise »Spiegelungsaxiom«, vgl. [Cho70, S. 132], was die ganze Idee von Choquet verkehrt, und mit dem eigentlichen Begriff der Spiegelung, [ebd., S. 133] kollidiert. ♯

Es sind andererseits Ansätze denkbar, bei denen das Falten an sich völlig verschleiert wird (bei Choquet werden ganze Halbebenen bewegt). Erinnern wir uns an die Beloch-Faltung auf Seite 14, bei der zwei Punkte auf zwei Geraden gefaltet werden, genauer: ein Punkt P auf eine Gerade m und ein zweiter Punkt Q auf eine weitere Gerade n. Unabhängig von der Analyse dieser Faltung (ob sie ausführbar oder eindeutig ist, was sie mathematisch bedeutet) ist erkennbar, dass hier das Falten mathematisch irgendwie erklärt werden muss. Innerhalb des 1-fach-Origami wird aber die Aussage stimmen, dass jeder der gesuchten Falze eine Mittelsenkrechte darstellt, und zwar im folgenden Sinne: Ist f ein solcher Falz, dann wird P unter der konkreten Faltung an f auf einen Punkt P' auf m gefaltet und Q entsprechend auf $Q' \in n$. Der Falz f ist dann die gemeinsame Mittelsenkrechte der Strecken $[PP']$ und $[QQ']$. Dies hat zur Folge, dass nun auf das Falten verzichtet werden kann und das Erzeugen von f wie folgt beschrieben wird:

> Seien Punkte P und Q sowie Geraden m und n gegeben. Existieren Punkte $P' \in m$ und $Q' \in n$, so dass die Mittelsenkrechten von $[PP']$ und $[QQ']$ gleich sind, dann nennen wir jede solche Mittelsenkrechte einen konstruierten Falz.

Natürlich muss auch in dieser Beschreibung anschließend geklärt werden, unter welchen genauen Bedingungen diese Mittelsenkrechten zusammenfallen.

In der Literatur hat sich in der Formulierung eine Zwischenlösung etabliert: Die Beschreibung des Faltens findet vollständig in der Ebene statt, charakterisiert (nur) durch bestimmte Punkte und Geraden. Dabei bleibt eine gewisse Nähe zum praktischen Falten bestehen, indem beschrieben wird, was es bedeute, ein Objekt auf ein anderes zu falten. Wir geben in Abschnitt 3.1.2 einige dieser Formulierungen an, auch um zu analysieren, welche Stärken und Schwächen bereits veröffentlichte Definitionen für unser Vorhaben aufweisen.

Es ist wichtig herauszustellen, dass weder die Liste der Grundfaltungen, die wir im weiteren Verlauf erarbeiten werden, noch ihre Darstellung selbstverständlich sind. Das bedeutet insbesondere, dass nicht klar ist, wie die informelle Definition des 1-fach-Origami »es soll so gefaltet werden, dass pro Faltschritt genau ein Falz entsteht« formalisiert (und schließlich axiomatisiert) werden soll. Wie bereits in Abschnitt 1.2 aufgezeigt wurde, haben verschiedene Autoren, die sich mit Origami als Konstruktionswerkzeug beschäftigt haben, bis in die späten 1980er Jahre und teilweise darüber hinaus nicht erkannt, wie eine vollständige axiomatische Beschreibung von 1-fach-Origami aussieht. So haben Auckly und Cleveland [AC95] eine Version von 1-fach-Origami definiert und untersucht, die das volle Potenzial von 1-fach-Origami nicht ausschöpft: In ihrer Version ermöglicht 1-fach-Origami einige, aber nicht alle Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal durchführbar sind.

Selbst in der fachmathematischen Literatur sind bis zuletzt Formulierungen der »Axiome« von 1-fach-Origami zu finden, die mathematisch eher als unbefriedigend anzusehen sind. Etwa bei Demaine und O'Rourke in [DO07, S. 288] heißt es: »Recently Hatori suggested a seventh axiom [...]: Given one point and two lines, one can fold a crease perpendicular to one line so that the point maps to the other line.« Hier ist deutlich zu erkennen, dass es kein Axiom im mathematischen Sinne ist, da es weder eine präzise Aussage noch »one can fold« immer richtig ist – es kommt auf die Lage der Punkte und Gerade an. Etwa in [Hul20, S. 23] formuliert Tom Hull eine der »basic origami operations« als »given two points P_1 and P_2 and two lines L_1 and L_2, we can, *whenever possible*, make a fold [...]«.[5] Die Formulierung »whenever possible« lässt erkennen, dass die Beschreibung nicht vollständig und somit für eine strenge Definition nicht genügend ist. An einer späteren Stelle [Hul20, S. 26] bemerkt Hull allerdings trefflich: »several other authors use the word ›axiom‹ to refer to allowed folds. But since O6 and O7 [zwei der basic origami operations] are not always possible, ›operations‹ seems a more appropriate term.«

Diese Beispiele deuten an, dass eine Axiomatisierung von 1-fach-Origami vor allem für Studierende keine triviale Aufgabe sein dürfte. Das ist für die Zwecke dieser Arbeit nicht notwendig negativ, da wir nun ein mathematisches Gebiet haben, dessen Axiomatisierung nicht sehr tiefliegend, aber auch nicht ganz einfach ist.

3.1.1. Anforderungen an die Definition

Da Definitionen bekanntermaßen nicht falsch oder richtig, aber sinnvoll oder nicht sinnvoll sein können, wollen wir festlegen, welche Kriterien für eine – im Rahmen dieser Arbeit – sinnvolle Definition von 1-fach-Origami benötigt werden.

[5] Hervorhebung von D.N.

Eine mathematische Beschreibung des 1-fach-Origami sollte für unsere Zwecke so beschaffen sein, dass

a) die Formulierungen »falte dies auf jenes« vermieden werden und die Möglichkeit vorhanden ist, das Falten aus der Definition heraus mathematisch zu analysieren,
b) 1-fach-Origami ein Konstruktionswerkzeug im Sinne der in Abschnitt 1.1 beschriebenen Definition ist,
c) 1-fach-Origami in die geometrische Praxis eingebettet werden kann. So sollte es möglich sein, von etwa Verbindungsgeraden und Loten zu sprechen und die Ergebnisse eine Faltung nicht lediglich als Lösungen quadratischer und kubischer Gleichungen anzusehen. Außerdem sollte aus verschiedenen Möglichkeiten diejenige Darstellung zur Beschreibung des einzelnen Faltschritts gewählt werden, die im geometrisch-alltäglichen Sinn die natürlichere ist: So soll zur Charakterisierung eines Falzes die Beschreibung »Lot von etwas« oder »Winkelhalbierende eines Winkels« der Formulierung »gemeinsame Tangente zweier Parabeln« vorgezogen werden,
d) die übliche Beschreibung des 1-fach-Origami über die Huzita-Justin-Axiome direkt abbildbar ist,
e) die übliche Beschreibung des 1-fach-Origami, »so falten, dass dabei *eine*[6] gerade Linie entsteht«, nachvollziehbar ist,
f) sie möglichst im Rahmen eines universitären Kurses auch von Studierenden unterer Semester nachvollzogen werden kann.

Bevor eine genaue Definition und Analyse von 1-fach-Origami gegeben wird, sollen hier einschlägige Zugänge zu 1-fach-Origami entsprechend der obigen Forderungen inspiziert werden.

3.1.2. Definitionen von 1-fach-Origami in der Literatur

Es gibt mehrere Ansätze, Konstruktionen mit 1-fach-Origami mathematisch zu fassen. Wir beschreiben sie kurz und erklären ihre Stärken und Schwächen. Das soll uns als Hintergrund für eine solide Definition des 1-fach-Origami dienen.

[Jus90b] Diese bahnbrechende Arbeit wurde bereits 1986 veröffentlicht. Sie ist die erste weitgehend vollständige Behandlung von Grundfaltungen des 1-fach-Origami (die dort »opérations élémentaires« genannt werden). Jacques Justin gibt diese ohne Herleitung an. Die Liste ist vollständig, aber ohne einen

[6] Diese Forderung kann leicht für Verwirrung sorgen. Gefordert wird, dass pro Faltschritt aus gegebenen Daten eine einzige Gerade erzeugt wird; es wird *nicht* gefordert, dass es aus den gegebenen Daten nur eine Möglichkeit existieren muss, diesen Faltschritt auszuführen.

Beweis, und enthält, bis auf kleine Ungenauigkeiten, alle Fälle sowie die geometrische Interpretation der Faltungen. Aus der Darstellung der Ergebnisse ist ersichtlich, dass Justin alle Fälle sorgfältig analysiert hat. Die algebraische Struktur des 1-fach-Origami ist gut skizziert, bleibt aber ohne Beweis. Einige charakteristische Faltungen sind ausführlich beschrieben. In dieser Arbeit tauchen zum ersten Mal die Basisoperationen auf, definiert über Inzidenzen von Punkten und Geraden in der euklidischen Ebene. Diese Notation und Beschreibung der Faltungen werden auch heute noch verwendet.[7] In der Arbeit werden wichtige Ergebnisse mitgeteilt, aber die für uns wichtige Definition von 1-fach-Origami oder die Herleitung der Grundfaltungen fehlen.

[HS90], [Huz90a] Im selben Konferenzband [Huz90b], in dem auch die erwähnte Arbeit von Justin (wieder) abgedruckt wurde, veröffentlichte der Herausgeber des Bandes, Humiaki Huzita, eine Liste der Operationen des Faltens (»operations in origami geometry«) und verglich diese mit denen von Euklid, »possible actions in Euclidean [sic!]«, S. 144. Die Liste enthält bereits die Beloch-Faltung und besteht aus sechs (statt Justins sieben) Operationen. Huzita benutzt leicht mathematisierte Ausdrucksweise: Eine Operation beginnt etwa mit »given two distinct points« und geht in »you can fold superposing / making the crease« über. Dieser schwer zugängliche Artikel (das Buch [Huz90b] ist in Deutschland käuflich nicht erwerbbar)[8] lieferte die Grundlage der Huzita-Justin-Axiome, auch weil die Liste der Axiome von Justin noch mehrere Jahre lang übersehen worden ist. Huzita adaptiert seine Liste so, dass der Vergleich mit Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen möglichst offensichtlich ist, und faltet typische Konstruktionen etwa im Dreieck nach. Bemerkenswerterweise schreibt Huzita, dass seine Operationen nur eine Auswahl darstellen – ihm zufolge die einfachsten sind: »All the possible foldings are not listed here, but only the most common simple ones. Here the *simple folding* means an operation that makes one and only one full crease with one action«, vgl. [Huz90a, S. 144]. Damit betont er, dass hier mutmaßlich ausdrücklich Geraden in der Ebene als Falze auftauchen und nicht etwa Strecken (wie im praktischen Falten). In diesem Sinne würde die Bezeichung »1-fach-Origami« auch Huzitas Vorstellung von »einfachem Origami« genügen. Er schreibt allerdings weiter »[...] but many other foldings should also exist. Furthermore you can add or even invent a completely new fold«, vgl. [Huz90a, S. 145]. Damit wird deutlich, dass Huzita, im Vergleich zu Justin, die Vollständigkeit der Liste sei-

[7] Wir wissen aber bereits, dass sie auf Peter Messer zurückgeht.

[8] Dieses Buch soll laut Huzita nicht verkauft werden: In der Kopie des Buches in der Würzburger Universitätsbibliothek ist auf Seite 392 die Bemerkung »Not for sale« zu finden.

ner Operationen nicht analysiert hat. Auch im zweiten Paper (im selben Konferenzband), zusammen mit Benedetto Scimemi, in dem viel genauer die algebraische Struktur des 1-fach-Origami studiert wird, schreiben Huzita und Scimemi bemerkenswerterweise:

> »In fact, paper-folding cannot be canonically defined, and one should expect that any set of defining axioms can be enlarged so that some new constructions become possible«, vgl. [HS90, S. 216].

Wir vermuten, dass die Autoren sich implizit nicht auf 1-fach-Origami bezogen haben, sondern geometrisches Papierfalten im Allgemeinen im Sinne hatten. Jedoch untersuchten sie im Folgenden explizit nur das, was als 1-fach-Origami zu bezeichnen ist. Dies ist natürlich aus axiomatischer Perspektive interessant, da es aufzeigt, dass selbst professionelle Mathematiker[9] ohne eine sorgfältige Axiomatisierung Schwierigkeiten haben, das untersuchte Gebiet vollends zu überblicken. In dem gemeinsamen Artikel von Huzita und Scimemi, wie auch im Artikel von Justin, wurden fundamentale Eigenschaften von 1-fach-Origami herausgestellt und benannt. Es taucht eine gründliche und algebraische Analyse der Beloch-Faltung auf; der Körper der Origami-Zahlen wird genau charakterisiert; die Konstruierbarkeit der klassischen Probleme sowie einiger regulärer n-Ecke wird diskutiert. Es wird ferner genau und iterativ definiert, was es bedeute, einen Punkt der Ebene mit 1-fach-Origami zu konstruieren. Lediglich die (Huzita-Justin-)Axiome werden weder in [Huz90a] noch in [HS90] hergeleitet.

[Ger95] und [Ger08] Robert Geretschläger gibt eine im Wesentlichen gleiche Liste an »elementary geometric procedures of origami« wie Justin an, offenbar unabhängig von Justin. In der Formulierung dieser procedures heißt es »given [...] one can fold [...]«, ohne eine genauere Beschreibung, was das bedeutet oder wann dies der Fall ist. Eine Definition von 1-fach-Origami wird nicht gegeben, die angegebenen elementaren Prozeduren repräsentieren die Möglichkeiten des Konstruktionswerkzeugs. Der Hauptpunkt der früheren Arbeit ist ein genauer Vergleich zwischen elementaren euklidischen Prozeduren und denen von Origami. Es wird explizit gezeigt, dass und warum Origami mehr konstruieren kann als Zirkel und Lineal. In der späteren Arbeit wird zusätzlich großer Wert auf eine vollständige Konstruktionsbeschreibung gewisser regulärer n-Ecke gelegt, eine genaue Diskussion und Konstruktion von Nullstellen konkreter und allgemeiner (kubischer) Polynome wird ausgeführt.[10]

[9] Huzita war ein Physiker, aber Scimemi ist ein Mathematiker.

[10] Das Buch [Ger08] ist eines der drei größeren Monografien zum Thema mathematisches Papierfalten, die in den Jahren 2006–2008 erschienen sind. Die anderen beiden sind [Hul12, 1. Auflage] und [DO07]. Sie decken einen großen Teil der Aspekte des geometrischen Faltens ab.

[Mar98] Dieses recht bekannte Buch von George E. Martin analysiert im Kapitel X das Konstruktionswerkzeug 1-fach-Origami und stellt eine elegante Lösung für das etwas technische Problem, die Basisoperationen aufzulisten und die Vollständigkeit der Liste zu beweisen, vor. Dort wird direkt »the result of hindsight« präsentiert: Die Faltung von simultanen Tangenten an zwei Parabeln wird als die einzige Faltoperation benutzt und analysiert; es wird gezeigt, dass alle Punkte der euklidischen Ebene, die mit 1-fach-Origami konstruierbar sind, bereits auf diese Weise entstehen. Die Darstellung ist clever, effizient und kompakt, allerdings aus der faltpraktischen Perspektive befremdlich. So ist die Anforderung c) aus Abschnitt 3.1.1 nicht erfüllt, die Huzita-Justin-Axiome spielen hier keine Rolle und es ist nicht unmittelbar möglich, sie herzuleiten. Vor allem fällt ad hoc ein Vergleich zwischen Martins und etwa Justins Darstellungen schwer.[11] So ist es nicht direkt klar, wie zwei Geraden aufeinander gefaltet werden können, die Restriktion auf die einzige Faltoperation, die zwei Punkte und zwei Geraden erfordert, ist umständlich. Allerdings wählt Martin die Darstellung so, dass 1-fach-Origami als euklidisches Konstruktionswerkzeug gleichwertig mit dem markiertem Lineal ist. Zusammenfassend stellt die Darstellung von Martin das Ergebnis einer cleveren Axiomatisierung von 1-fach-Origami dar, deckt aber diesen Axiomatisierungsprozess nicht auf.

[Alp00] In der Arbeit von Roger Alperin werden die algebraischen Strukturen studiert, die aus einzelnen Origami-Axiomen entstehen. Dabei geht der Aufbau axiomatisch-kumulativ vor: Es werden nach und nach Axiome hinzugenommen und in jedem Schritt wird analysiert, welche immer größeren algebraischen Strukturen diese Axiomensysteme ergeben. Die Darstellung ist auf einem hohen mathematischen Niveau, beweist eine vollständige Charakterisierung von 1-fach-Origami und ist auch aus faltpraktischer Perspektive interessant. Allerdings bleiben einige aus der Axiomatisierungsperspektive wichtige Fragen ungeklärt. So darf die Beloch-Faltung angewendet werden »whenever possible« [Alp00, Thm. 5.3], die Huzita-Justin-Axiome werden ohne einen Vollständigkeitsbeweis aus der Literatur zitiert.

[AL09] Dieses viel zitierte Paper von Roger Alperin und Robert Lang war für die mathematische Entwicklung der Origami-Mathematik und für die vorliegende Arbeit recht einflussreich. Dort werden im Stile von Justin die Faltungen als »alignments« beschrieben and analysiert. Nicht nur 1-fach-Origami sondern auch das n-fach-Origami (eine eher theoretische Variante, bei der nicht nur ein Falz pro Faltschritt erstellt wird, sondern bis zu n) wird studiert und die Vollständigkeit der Liste der 1-fach-Origami-Axiome wird bewiesen. Es werden

[11] Diesen Vergleich führen Waschbusch und Gawlick in [WG09b] explizit aus.

einerseits alle betrachteten Objekte sorgfältig definiert (etwa Punkte, Geraden, Faltpunkte und Faltgeraden, alignments) und es wird definiert, was ein »one-fold axiom« sei, nämlich *»a one-fold axiom (1FA) is a minimal set of alignments that define a single fold line on a finite region of the Euclidean plane with a finite number of solutions«*, vgl. [AL09, S. 375]. Andererseits ist die Definition von »one-fold axiom« unbefriedigend, da sie den Sachverhalt nicht eindeutig definiert. So wird mit O6 das Axiom bezeichnet, das von den beiden alignments $F_{L_F}(P_1) \leftrightarrow L_1$ und $F_{L_F}(P_2) \leftrightarrow L_2$ der Form $AL4$ gebildet wird. L_F ist dabei die Geradengleichung des zu findenden Falzes, die Spiegelung an welchem die Punkte P_1 bzw. P_2 auf die Geraden L_1 bzw. L_2 bringt. »Minimal« bedeutet in diesem Fall, dass nur eines dieser beiden alignments der Definition noch nicht entspräche, weil es sonst für L_F unendlich viele Lösungen gäbe. Allerdings ist das so dargestellte »Axiom« O6 ein Schema, das von den eigentlichen Inputs P_1, P_2, L_1, L_2 und ihrer Lage zueinander abhängt. Je nach Lage wird es so sein, dass O6 ein one-fold-axiom ist (etwa in generischer Lage) oder nicht (etwa wenn der Abstand zwischen P_1 und P_2 kleiner ist als der Abstand zwischen Parallelen L_1 und L_2). Das ganze Schema O6 ist damit kein one-fold axiom. Außerdem klärt die Definition von one-fold axiom nicht, ob ein solches Axiom auch tatsächlich eine Lösung haben wird; das bezieht sich auf »[...] that define a single fold line [...]« aus der Definition. Die Anzahl der Lösungen auf endlich zu begrenzen ist in fast allen Arbeiten zum Thema gängige Praxis. Die eigentliche technische Schwierigkeit ist jedoch, genau die Fälle zu betrachten, in denen es keine Lösung gibt, das heißt die Faltung nicht ausführbar ist. Das erwähnte Paper war sowohl für unsere Definitionen 3.3 und 3.8 als auch für unsere Kurse von großer Bedeutung; die Darstellung von 1-fach-Origami über alignments spielte dort eine wichtige Rolle.

[WG09a] In diesem wenig beachteten und nur online veröffentlichten Dokument, als erweiterte Version des Artikels [WG09b] von Julia Waschbusch und Thomas Gawlick im *Der Mathematikunterricht*, wird sehr ähnlichen Fragen nachgegangen wie in diesem Kapitel: Wie lässt sich 1-fach-Origami (dort einfach als »Origami«) axiomatisieren und mathematisch beschreiben; in genau welchen Fällen sind die Grundfaltungen ausführbar? Diese etwas schwer zu lesende Arbeit geht ferner der Frage nach, wie sich die Huzita-Justin-Axiome mit der fundamental folding operation von Martin vergleichen, analysiert die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Grundfaltungen[12] und, im Anhang von Thomas Gawlick, geht der Frage nach, in welchen Fällen die Beloch-Faltung

[12] Es ist inzwischen nicht mehr rekonstruierbar, aber nicht auszuschließen, dass wir genau aus diesem Paper das Wort »Grundfaltungen« übernommen haben.

tatsächlich ausführbar ist, vgl. zur selben Frage [Luc19]. Dabei wird, zusätzlich zu den Darstellungen von Martin, eine kubische Kurve analysiert, die spätestens seit [Hul12] besser bekannt und in einigen Arbeiten (etwa in [KN16] oder [AL09]) als die *origami cubic curve* bezeichnet wird. Die Rechnungen dort im Anhang bezogen auf die Ausführbarkeit der Beloch-Faltung führen auf das nahezu identische Ergebnis wie bei uns.
Dieses Dokument hat sicherlich nicht nur deswegen wenig Aufmerksamkeit bekommen, weil es in deutscher Sprache und in der erweiterten Version in keinem Journal veröffentlicht wurde. Auch die stilistische Darstellung erschwert das Nachvollziehen der vielen Fallunterscheidungen. Die (axiomatische) Analyse scheint nicht ganz vollständig zu sein: So wird etwa im letzten (nicht nummerierten) Satz auf Seite 6 nach Axiom 5 in der Faltung vorausgesetzt, dass beide Punkte P und Q außerhalb von g liegen. Die restlichen (und zum Teil möglichen) Fälle, werden, soweit es die Beurteilung erlaubt, nicht betrachtet. Insgesamt ist die Analyse und die Methodik in diesem Artikel recht ähnlich zu der hiesigen, eine Tatsache, die uns bedauerlicherweise erst nach dem Aufschrieb der Analysen in Abschnitten 3.2 und 3.4 aufgefallen ist. Im Unterschied zum Paper geben wir eine Definition von 1-fach-Origami und leiten die möglichen Grundfaltungen etwas effizienter und ggf. transparenter her. Im Paper wird keine abschließende zufriedenstellende Übersicht gegeben, wann genau die einzelnen Grundfaltungen ausführbar sind. Ungeachtet dessen sollte die Arbeit als eine der Pionierarbeiten zum Thema »Axiomatisierung des 1-fach-Origami« betrachtet werden.

[Cox12] Im optionalen Kapitel 10.3 des Buchs »Galois theory« von David A. Cox wird eine solide mathematische Behandlung von 1-fach-Origami aus körpertheoretischer Sicht geboten. Die Vorarbeit, eine Charakterisierung von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen in Kapitel 10.1, wird genutzt, um die Beweise im Origami-Fall zu verkürzen. So wird 1-fach-Origami als eine Art Ergänzung zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen betrachtet »we will use origami [...] to do some constructions not possible by straightedge and compass«, [Cox12, S. 274]; zu den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal wird die Beloch-Faltung hinzugenommen. Diese Referenz ist eine wichtige Quelle für eine körpertheoretische Sicht auf und wesentliche Resultate von Origami, die, auch wie Martin, 1-fach-Origami in die Liste klassischer Konstruktionswerkzeuge einordnet. Einzelne Huzita-Justin-Axiome werden nicht diskutiert oder hergeleitet, die Beloch-Faltung wird aus der zitierten Winkeldreiteilung extrahiert und analysiert. Auch hier, wie bei Martin, wird definiert, was es bedeute, einen Punkt mit Origami zu konstruieren. Allerdings wird nicht klar, wie das mit praktischem Falten zusammenhängt. Wie bei Martin wird zur Konstruktion von Origami-Punkten erlaubt, Kreise zu konstruieren. Insgesamt ist die Darstellung von Cox eine sehr schöne und galoislastige Hinführung zum Hauptsatz des 1-fach-Origami, vgl. Sätze 3.29, 3.31.

[GKK13] Die Arbeit von Ghourabi et al. formalisiert die sieben Huzita-Justin-Axiome akkurat, analysiert genau die Situationen, in denen sie zu unendlich vielen Lösungen führen und – das zeichnet diese Arbeit besonders aus – zeigt die Abhängigkeit aller Axiome von der Beloch-Faltung. Damit wird in der Arbeit, ähnlich wie bei Martin, auf Seite 153 ein allgemeines Faltprinzip definiert »Given two points P and Q and two lines m and n, fold $\mathcal{O}$ [damit ist »Origami« gemeint, eine Art Papier[13]], along a line to superpose P and m, and Q and n«. In Theorem 1 wird dort dann gezeigt, dass alle Huzita-Justin-Axiome im Wesentlichen (einige technische Details vorausgesetzt) Spezialfälle dieses Prinzips sind. Es bleibt jedoch wie auch bei Alperin und Lang unklar, wann die Faltungen möglich und wann sie unmöglich sind. Auch diese Arbeit ist eine wesentliche Grundlage für hießige Überlegungen.

[Luc17b] und [Luc19] Die aktuellen Arbeiten von Jorge C. Lucero zur Axiomatisierung von 1-fach-Origami stellen dieses Gebiet auf eine formale Grundlage und analysieren sorgfältig die (Vollständigkeit der) Liste der Huzita-Justin-Axiome. Im Zuge dieser Analysen deduziert Lucero 2017 (bereits 2016 im Preprint [Luc17a]) eine neue und in unseren Augen diskussionsbedürftige Grundfaltung, vgl. Seite 107, die er aber ohne Erklärung in der Arbeit von 2019, die die Beloch-Faltung ausführlich diskutiert und für alle Lagebeziehungen von Punkten und Geraden charakterisiert, nicht mehr benutzt. Dabei wird in der Arbeit von 2019 überraschenderweise die übliche Bedingung, eine gültige/zulässige Faltung solle nur endlich viele Lösungen besitzen, außer Acht gelassen, möglicherweise um das main theorem weniger technisch formulieren zu können. So lautet das Hauptresultat für die Beloch-Faltung (S. 30):

> Given points P, Q, and lines m, n, a fold line that places P on m and Q on n exists if and only if the distance between P and Q is not smaller than the distance between m and n.

Im Beweis taucht der Fall $P = Q, m = n, P \notin m, Q \notin n$ auf, der der Bedingung des Theorems genügt, aber eine unendliche Lösungsmenge erlaubt. Die Argumentation von Lucero verläuft im Wesentlichen algebraisch, indem die ge-

[13] »An origami $\mathcal{O}$ is supposed to represent a square sheet of paper with four points on the corners and four edges that is subject to folding. Some intersections of lines may not fit on the square paper. However, we want to work with these points. To achieve this, we consider $\mathcal{O}$ to be a sufficiently large surface so that all the points and lines that we treat are on $\mathcal{O}$«, S. 145 ebd.

suchten Falze gewissermaßen als Nullstellen linearer, quadratischer oder kubischer Gleichungen erkannt und analysiert werden. In unserer Darstellung, wie etwa bei Waschbusch und Gawlick auch, konzentrieren wir uns so weit wie möglich auf eine synthetische Beschreibung.

Die folgenden Ausführungen grenzen sich von den kommentierten Quellen ab, indem wir sorgfältige Definitionen von 1-fach-Origami und Grundfaltungen geben und alle Fälle analysieren, in denen die Anzahl der Lösungen von Grundfaltungen eine natürliche Zahl ist. Dabei ist unsere Darstellung auch deswegen mühsam und nicht effizient – etwa im Vergleich zu eleganten Darstellungen bei Cox und Martin –, weil wir versuchen, keine Fälle offen zu lassen und gleichzeitig nur Argumente zu benutzen, die in einem breit angelegten Universitätskurs vorgetragen werden können, ohne gänzlich auf algebraische Rechnungen zu setzen. Ferner wollten wir die Axiomatisierungsarbeit nicht verschleiern, sondern sie nachvollziehbar machen.

3.2. Definition und Grundfaltungen von 1-fach-Origami

Beim praktischen Falten wird ein Stück des Papiers bewegt und der Rest des Papiers, in der Regel, fixiert. Das ist, mit anderen Worten und in der Ebene: Eine Halbebene wird bewegt und das Komplement wird fixiert. Daher läge es nahe, Falten über so genannte Halbspiegelungen[14] zu definieren. Allerdings lieferten alle Versuche, das Falten formal über Halbspiegelungen zu begründen, größere technische Schwierigkeiten oder endeten in nicht intuitiven und technischen Auswegen. Es gelänge zwar ohne größere Probleme zu beschreiben, was es bedeute, einen Punkt auf einen (anderen) Punkt zu falten, aber ein (aus stilistischen Gründen) analoger Weg für Geraden sorgte für Probleme: Zwei sich schneidende Geraden würden so an einer der beiden Winkelhalbierenden aufeinander gefaltet, dass Teile der beiden Geraden »auf einer Seite« der Winkelhalbierenden bewegt und die anderen Teile fixiert blieben, und nicht etwa so, wie es mathematisch elegant wäre, dass die eine Gerade auf die andere vollständig abgebildet werden würde.

Nach diesem Beispiel ist es etwas leichter erkennbar, dass der bessere und elegantere Zugang zum Falten über Spiegelungen erfolgen könnte. Das ist in der Tat der typische Zugang in der Literatur, etwa bei Martin, Lucero, Alperin und Lang. Wir haben aber auch bereits Ansätze gesehen, bei denen das undefinierte »one can fold« an den umständlichen Prozess des Faltens im Raum erinnerte und somit den

[14] Jede Gerade partitioniert die Ebene in zwei offene Halbebenen und die Gerade selbst. Eine von dieser Geraden induzierte Halbspiegelung spiegelt eine Halbebene auf die andere und fixiert punktweise den Rest.

mathematischen Kern des Faltens verschleierte: gewisse Geraden und Punkte *in der Ebene* auszuzeichnen. Es ist also vernünftig, die Abstraktion vom Falten so weit zu treiben, dass der eigentliche Prozess des Faltens möglichst keine Rolle spielt und das Falten nicht durch den Prozess, sondern so weit wie möglich allein durch das Ergebnis beschrieben wird.

Wir wollen demnach das 1-fach-Origami in der euklidischen Ebene verankern und die Beschreibung vollständig mit Mitteln der euklidischen Ebene durchführen. Dabei wollen wir wie bei Euklid oder Hilbert Punkte und Geraden als die wichtigsten Grundelemente ansehen. Das passt gut zum alltäglichen 1-fach-Origami, denn da können erfahrungsgemäß sämtliche Faltanleitungen mittels Bewegungen von Punkten und Geraden beschrieben werden.[15] Unter der euklidischen Ebene verstehen wir hier das Paar $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ aus $\mathbb{R}^2$ und dem Standardskalarprodukt, und verweisen auf Abschnitt 1.3.2. Für zwei Punkte der Ebene P und Q werden wir im Folgenden mit PQ die in der euklidischen Ebene eindeutige Verbindungsgerade der beiden Punkte, mit $[PQ]$ die Strecke zwischen P und Q und mit $\overline{PQ}$ die Länge dieser Strecke bezeichnen. Für eine Gerade g in der Ebene definieren wir eine Geradenspiegelung s_g als eine Selbstabbildung der Ebene, die jeden Punkt auf g fixiert und jeden Punkt P außerhalb von g auf den eindeutigen Punkt P' abbildet, so dass g die Mittelsenkrechte von $[PP']$ ist, vgl. [Mar75, Section 19.2]. Die so definierte Abbildung s_g ist eindeutig und eine involutorische Isometrie der Ebene; außerdem fixiert sie genau die Gerade g punktweise, vgl. ebenda. Die Gerade g wollen wir in diesem Kontext als die Achse der Spiegelung s_g bezeichnen.

Definition 3.3. Wir beschreiben mögliche Interaktionen zwischen Punkten und Geraden wie folgt: Für Punkte P, Q und Geraden l, m der euklidischen Ebene sagen wir

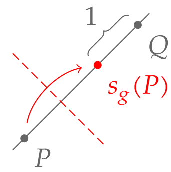
$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &:= \{\, g \text{ Gerade in } \mathbb{R}^2 \mid s_g(P) = Q\}, \\ m \leftrightarrow n &:= \{\, g \text{ Gerade in } \mathbb{R}^2 \mid s_g(m) = n\}, \\ P \leftrightarrow m &:= \{\, g \text{ Gerade in } \mathbb{R}^2 \mid s_g(P) \in m\}. \end{aligned} \tag{ζ}$$

Zu »$\leftrightarrow$« wollen wir »inzidiert« sagen. P, Q, m und n sowie andere Variablen für Punkte und Geraden der Inzidenzen nennen wir an der Inzidenz *beteiligte Objekte*.

Die Inzidenzen in (ζ) sind symmetrisch, da Geradenspiegelungen involutorisch sind. Das modelliert die vertraute Eigenschaft beim Falten, dass es egal ist, ob etwa P auf Q oder Q auf P gefaltet wird, in Zeichen: $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$. Die Inzidenz $m \leftrightarrow P$ sollte jedoch auch durch $s_g(P) \in m$ und nicht durch das Unsinnige $s_g(m) \in P$ charakterisiert werden. Wir werden statt $m \leftrightarrow P$ fast immer $P \leftrightarrow m$ schreiben. ◇

[15] Gleichzeitig ist das 1-fach-Origami ohnehin eine sehr spezielle Faltart, denn viele übliche Faltungen sind per se nicht 1-fach-Origami oder resultieren gar in 3D-Figuren.

Bemerkung 3.4. Die Formulierung und die Auswahl der Inzidenzen ist sicherlich nicht die einzige Möglichkeit, 1-fach-Origami zu formalisieren. So führen Alperin und Lang eine Möglichkeit der Inzidenz an, die sie in der Definition weglassen, die aber ihnen zufolge möglich wäre: Eine Gerade so falten, dass ihr Faltbild parallel zu einer zweiten Geraden ist, vgl. [AL09, S. 375]. Sie verzichten auf diese Inzidenz mit der Begründung, dass die Überprüfung ein unendliches Blatt Papier erforderte und daher faltpraktisch vernachlässigbar sei. Jedoch ist die Forderung nach Parallelität etwas künstlich. Auch völlig andere Beziehungen zwischen Geraden oder Punkten sind selbstredend denkbar.



Seien P und Q zwei verschiedene Punkte. Dann könnte eine Inzidenz aus den Geraden g bestehen, Spiegelung an welchen P so bewegt, dass $s_g(P)$ auf PQ landet mit $\overline{s_g(P)Q} = 1$ (eigentlich beliebiger Abstand ungleich Null), vgl. Bild rechts. Oder eine gegebene Gerade wird so gefaltet, dass sie senkrecht zu einer zweiten Geraden ist. Oder – damit weder 180 noch 90 Grad besonders ausgezeichnet werden – zwei gegebene Geraden werden unter dem Winkel von 30 Grad zum Schneiden gebracht.[16] Doch entsprechend unseren Anforderungen an die Definition, wollen wir unsere Darstellung möglichst kanonisch gestalten und keine neue Theorie entwickeln, sondern die vorhandene Praxis formalisieren. ♯

Definition 3.5. Unter einer *(1-fach-)Faltung* wollen wir Schnittmengen von Inzidenzen verstehen und sie aus stilistischen Gründen als eine Menge von Inzidenzen notieren. Besteht eine Faltung aus nur einer Inzidenz, dann lassen wir die Mengenklammern weg. Jedes Element einer 1-fach-Faltung nennen wir *Falz*, den Schnittpunkt zweier verschiedener nichtparalleler Falze *(Falt-)Punkt*. ◇

So soll beispielsweise die Faltung $\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\} = P \leftrightarrow P \cap Q \leftrightarrow n \cap P \leftrightarrow m$ die Menge der Geraden g der Ebene sein, die *gleichzeitig* P auf P, Q auf n und P auf m mittels s_g abbilden.[17]

Nicht alle Faltungen wollen wir zulassen. Einige sind unmöglich, das heißt die Schnittmengen sind leer, andere enthalten unendlich viele Falze, das heißt sie liefern unendlich viele Möglichkeiten, die Faltung auszuführen. Wir wollen nur solche Faltungen zulassen und analysieren, die eine faltpraktische Relevanz haben. Würden wir Faltungen zulassen, bei denen aus einer unendlichen Menge an Falzen auszuwählen wäre, so wäre das Ergebnis weder wiederholbar noch gut dokumentierbar.

Definition 3.6. Eine *zulässige* 1-fach-Faltung enthalte mindestens einen und höchstens endlich viele Falze. Nicht zulässige 1-fach-Faltungen heißen unzulässig. ◇

Die mögliche Forderung nach der Eindeutigkeit, der »Einelementigkeit«, der Faltung ist nicht zielführend, um reales Falten zu beschreiben; das ergibt sich etwa aus der Betrachtung der Faltung einer Geraden auf eine nicht parallele andere Gerade. Die beiden gleichberechtigten Faltmöglichkeiten wollen wir erlauben.

[16]Tatsächlich wurde eine Variante solcher Faltungen untersucht: Erik Demaine fragte in etwa wie die Struktur von so konstruierten Punkten der Ebene aussieht. Diese Frage wurde unter anderem in [Buh+12] und [Ned15] studiert und von Florian Möller in [Möl18] vollständig beantwortet.

[17]Dabei ist es zunächst unerheblich, ob eine Faltung leer ist oder nicht.

Bemerkung 3.7. Die Forderung, die Faltung habe einen nicht leeren Schnitt, führt zu elementaren aber lästigen Fallunterscheidungen. In der Literatur wird häufig die Endlichkeitsbedingung gestellt und statt nicht leerem Schnitt nach der Faltbarkeit *whenever possible* verlangt. An einigen Stellen wird noch optimistischer »you can fold« verwendet, vgl. [Huz90a, S. 144]. Das ist aus mathematischer Sicht leicht unbefriedigend, da unklar ist, ob eine vorgegebene Konfiguration nun faltbar ist. Unelegante Fallunterscheidungen können insofern entstehen, als eine in der Regel faltbare Konfiguration in Spezialfällen ggf. einen leeren Schnitt liefert und somit (in diesen Fällen) unzulässig wird. Solche Fälle exakt zu benennen, ist daher etwas technischer als dies typischerweise in der Literatur geschieht. $\sharp$

Definition 3.8. Um Redundanzen in der Beschreibung der Faltungen zu vermeiden, nennen wir solche zulässigen 1-fach-Faltungen *regulär*, bei denen die Anzahl der beteiligten Inzidenzen minimal ist, ohne dass sie unzulässig werden. $\diamond$

Bemerkung 3.9. Es ist leicht aus der Definition zu folgern, dass $P \leftrightarrow Q$ für verschiedene Punkte P und Q zulässig ist, denn sie besteht nur aus der Mittelsenkrechten der beiden Punkte. Auch die Faltung $\{P \leftrightarrow Q, R \leftrightarrow R\}$ für den Mittelpunkt R der Strecke $[PQ]$ ist zulässig (sie liefert dieselbe einelementige Menge), aber nicht regulär, weil eine kürzere Faltsequenz, nämlich $P \leftrightarrow Q$, bestehend nur aus einer Inzidenz, bereits zulässig ist. $\sharp$

Bemerkung 3.10. Wir halten explizit fest, dass die Definition der Faltung, wie auch sonst in der neueren Literatur, kein »Auffalten« des »Papiers« erfordert, da letztlich gar nicht gefaltet wird; es werden lediglich Geraden in der Ebene ausgezeichnet. Der eigentliche Vorgang des Faltens und des Auffaltens wird daher in der Formalisierung nicht modelliert. $\sharp$

Definition 3.11. Wir nennen zwei reguläre Faltungen *ähnlich*, wenn sie gleich viele definierende Inzidenzen je Inzidenztyp enthalten. Unter Inzidenztyp verstehen wir die fünf Möglichkeiten aus (ζ), wenn wir unterscheiden, ob beteiligte Objekte gleich oder verschieden sind: $P \leftrightarrow P$, $P \leftrightarrow Q$, $m \leftrightarrow n$, $m \leftrightarrow m$, $P \leftrightarrow m$. Diese Ähnlichkeit definiert eine Äquivalenzrelation (auf der Menge der regulären Faltungen). Eine *Grundfaltung* ist eine Äquivalenzklasse von ähnlichen Faltungen. Die Menge aller Grundfaltungen sowie aller Falze und Faltpunkte, die ausgehend von den Punkten $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$ der euklidischen Ebene mittels Grundfaltungen in endlich vielen Schritten konstruiert werden, nennen wir *1-fach-Origami*. Ein Objekt mit 1-fach-Origami zu konstruieren, heiße also eine endliche Abfolge von Grundfaltungen zu finden, die aus den Punkten 0 und 1 das gewünschte Objekt ergeben. In diesem Sinne ist 1-fach-Origami ein Konstruktionswerkzeug. $\diamond$

3.3. Studium regulärer Faltungen

Es wird ersichtlich, dass reguläre Faltungen die Hauptrolle in der Beschreibung von 1-fach-Origami spielen. Wir wollen sie daher im Folgenden klassifizieren und unterscheiden sie nach der Anzahl beteiligter *verschiedener* Objekte.

3.3.1. Faltungen mit einem Objekt

Es gibt hier keine einelementigen zulässigen Faltungen, da die einzigen Inzidenzen, die dies ermöglichen würden, genau $P{\leftrightarrow}P$ und $m \leftrightarrow m$ wären. Diese beiden Inzidenzen liefern jedoch zwei unendlich große Mengen, vgl. Abb. 3.3. Genauer besteht $P{\leftrightarrow}P$ aus dem Geradenbüschel $\mathcal{L}_P$ aller Geraden, die durch P verlaufen. Ist nämlich $g \in \mathcal{L}_P$, dann lässt die von g induzierte Spiegelung per Definition P invariant. Eine von einer Gerade $h \notin \mathcal{L}_P$ induzierte Spiegelung lässt P nicht invariant. Die Inzidenz $m \leftrightarrow m$ besteht aus allen zu m senkrechten Geraden sowie m selbst. Diese Menge bezeichnen wir mit L_m (das große »L« soll an »Lot« erinnern). Jede Gerade in L_m induziert Spiegelungen, die in der Tat m punkt- oder mengenweise fixieren. Jede andere Gerade ist nicht senkrecht zu oder gleich m und die davon induzierten Spiegelungen lassen m als Menge nicht invariant.

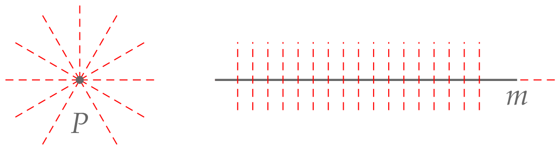


Abbildung 3.3.: Links $\mathcal{L}_P = \{g \text{ Gerade } \mid P \in g\} = P{\leftrightarrow}P$ das Geradenbüschel durch P, rechts die Menge $L_m = \{g \text{ Gerade } \mid g \perp m \text{ oder } g = m\} = m \leftrightarrow m$.

Wir wählen auch weiterhin, so weit wie möglich, einen synthetischen Zugang und algebraisieren die Probleme erst, wenn es unvermeidbar erscheint.

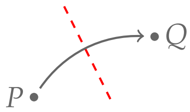
Die Gerade m ist als Element von L_m zugelassen, das ist ein bisschen kontrovers in der Literatur. So schließen [AL09, S. 6] bzw. [GKK13, S. 147] Faltungen, die keine neuen Geraden produzieren, aus.[18] Andererseits argumentiert Jorge Lucero, dass m unbedingt dazugehören sollte: »This operation [to fold along a given line] has been commonly disregarded by previous studies on the argument that it does not create a new line; however, completeness of the set [of elementary fold operations] demands its inclusion«, vgl. [Luc17b, S. 208]. Wir werden später sehen, dass diese Operation in unserem Setting möglich ist, aber nicht als eine Grundfaltung. Auch Luceros Behauptung, diese Faltung als Grundfaltung sei zur Vollständigkeit notwendig, kann nicht bestätigt werden.

3.3.2. Faltungen mit zwei Objekten

Für die weitere Analyse nehmen wir an, dass P und Q verschiedene Punkte und n und m verschiedene Geraden bezeichnen. Wir suchen zunächst nach regulären Faltungen mit nur einer Inzidenz.

[18]»Also, we do not consider the relationship of a line incident to the fold line since the goal is to define a fold line that does not already exist« bzw. »m is *not* considered as the fold line to superpose m onto itself as this does not create new lines«. Auch Peter Messer schreibt in seinem unveröffentlichten Manuskript: »The obvious case of [L_n = crease line] is omitted. (identity case)«.

$P \leftrightarrow Q$



Die Inzidenz $P \leftrightarrow Q$ besteht aus lediglich einem Element, nämlich der Mittelsenkrechten zur Strecke $[PQ]$, und ist somit bereits regulär. Das folgt unmittelbar aus der Definition von Geradenspiegelungen.

$m \leftrightarrow n$

Die Inzidenz $m \leftrightarrow n$, vgl. Abb. 3.4, enthält ein oder zwei Elemente. Sind n und m parallel, dann ist die einzige Gerade, die n auf m faltet,[19] die von n und m gleich entfernte parallele Gerade. Sind n und m nicht parallel, dann erzeugen sie vier Winkel, zwei Paare von Scheitelwinkeln, welche je eine Winkelhalbierende definieren. Diese beiden Winkelhalbierenden sind genau die Achsen der gesuchten Spiegelungen.

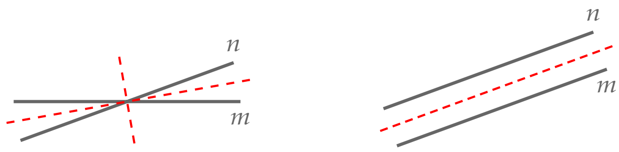


Abbildung 3.4.: Die Faltung von n auf m im Fall $n \nparallel m$ und $n \parallel m$.

$P \leftrightarrow m$

Die Inzidenz $P \leftrightarrow m$ ist nicht zulässig, weil sie unendlich viele Elemente enthält, unabhängig davon, ob P auf m liegt oder nicht. Diese Faltung wird in weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen, daher wollen wir sie etwas genauer anschauen.

Satz 3.12. Ist P ein Punkt auf der Geraden m, dann ist $P \leftrightarrow m = \mathcal{L}_p \cup L_m$. Ist $P \notin m$, dann ist $P \leftrightarrow m$ die Menge aller Tangenten an die Parabel $\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{PX} = \overline{Xm}\} =: \rho_{(P,m)}$ mit Brennpunkt P und Leitlinie m. Diese Menge der Tangenten bezeichnen wir mit $T_{\rho_{(P,m)}}$. Für Punkte X und Geraden y setzen wir dabei $\overline{Xy} := \min_{Y \in y} \overline{XY}$.

Beweis (wie in [Mar98, Thm. 10.3]): Ist $P \in m$, dann gilt $s_g(P) = P$ für alle $g \in L_P$ und $s_g(P) \in m$ für alle $g \in L_m$. Alle anderen Geraden induzieren Spiegelungen, die P außerhalb von m abbilden.

Sei nun $P \notin m$ und $R \in m$ beliebig. Dann ist $P \leftrightarrow R$ einelementig, nennen wir dieses Element f. Sei nun X der Schnittpunkt von f mit dem Lot (ist ungleich f) auf m durch R, vgl. Abb. 3.5.

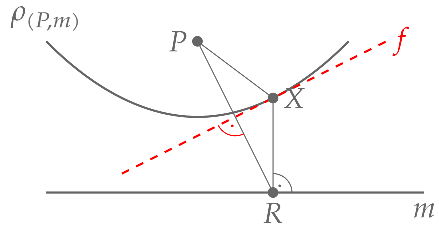


Abbildung 3.5.: Für $P \notin m$ besteht $P \leftrightarrow m$ aus den Tangenten an die Parabel $\rho_{(P,m)}$.

Wir zeigen, dass $\overline{PX} = \overline{XR}$ gilt und damit X auf der Parabel $\rho_{(P,m)}$ liegt. In der Tat ist das Dreieck PXR gleichschenklig, da f die Mittelsenkrechte der Strecke $[PR]$ ist. Es bleibt zu klären, ob f weitere Schnittpunkte mit der Parabel hat.

[19]Damit meinen wir die einzige Gerade, die in der Inzidenz $m \leftrightarrow n$ liegt.

Sei dazu $Y \in f \cap \rho_{(P,m)}$ und Y_m der Fußpunkt des Lotes auf m durch Y. Dann gilt $\overline{Y_m Y} = \overline{YP} = \overline{YR}$. Die erste Gleichung gilt, da Y auf der Parabel liegt, die zweite, da Y auf der Mittelsenkrechten von $[PR]$ liegt. Wäre $Y_m \neq R$, dann wäre das Dreieck $Y_m YR$ gleichschenklig mit rechten Basiswinkeln, ein Widerspruch. Also ist $Y_m = R$ und f tatsächlich eine Tangente an $\rho_{(P,m)}$. $\square$

Damit sehen wir, dass $m \leftrightarrow n$ und $P \leftrightarrow Q$ die einzigen regulären Faltungen mit *einer* Inzidenz sind. Insbesondere tauchen diese beiden in keiner weiteren regulären Faltung auf. Weitere mögliche Faltungen mit *zwei* verschiedenen Objekten sind genau[20]

$$\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}, \{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}, \{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m\}, \{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}, \{m \leftrightarrow m, P \leftrightarrow m\}, P \leftrightarrow m.$$

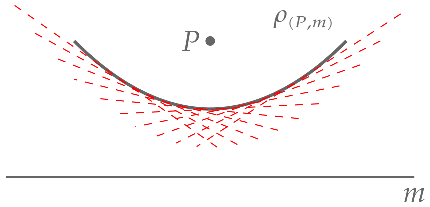
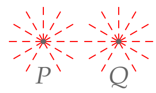


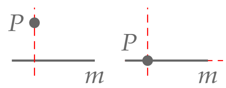
Abbildung 3.6.: Die unendliche Menge der Parabeltangenten an die Parabel $\rho_{(P,m)}$ als Lösungsmenge der Inzidenz $P \leftrightarrow m$ für $P \notin m$.

$\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$



Wir untersuchen Durchschnitte der restlichen fünf Faltungen: Es ist zunächst $P \leftrightarrow P \cap Q \leftrightarrow Q = \mathcal{L}_P \cap \mathcal{L}_Q = \{\text{Verbindungsgerade von } P \text{ und } Q\}$ regulär . Ferner ist

$\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$

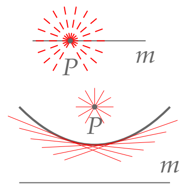


$$P \leftrightarrow P \cap m \leftrightarrow m = \mathcal{L}_P \cap L_m = \begin{cases} \{\text{Lot auf } m \text{ durch } P,\ m\}, & \text{falls } P \in m \\ \{\text{Lot auf } m \text{ durch } P\}, & \text{falls } P \notin m. \end{cases}$$

Das ist also auch eine reguläre Faltung, unabhängig von der Lage von P.

Dagegen ist die Faltung $\{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m\}$ immer unzulässig, denn es gilt

$\{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m\}$



$$P \leftrightarrow P \cap P \leftrightarrow m = \begin{cases} \mathcal{L}_P, & \text{falls } P \in m, \\ \mathcal{L}_P \cap T_{\rho_{(P,m)}} = \emptyset, & \text{falls } P \notin m, \end{cases}$$

und weil keine Tangente an $\rho_{(P,m)}$ den Punkt P passiert.

Als Nächstes betrachten wir die Faltung $\{P \leftrightarrow m, m \leftrightarrow m\}$. Es folgt mit Satz 3.12

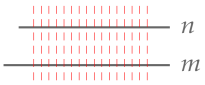
$$P \leftrightarrow m \cap m \leftrightarrow m = \begin{cases} (\mathcal{L}_P \cup L_m) \cap L_m = L_m, & \text{falls } P \in m, \\ \emptyset, & \text{falls } P \notin m. \end{cases}$$

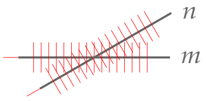
$\{P \leftrightarrow m, m \leftrightarrow m\}$

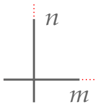
Dabei ist klar, dass weder m selbst noch Senkrechte zu m Tangenten von $\rho_{(P,m)}$ sind. Insbesondere ist diese Faltung unzulässig und im Fall $P \in m$ redundant: Dann gilt $\{P \leftrightarrow m, m \leftrightarrow m\} = m \leftrightarrow m$.

[20] Die Inzidenz $P \leftrightarrow P$ liefert drei, die Inzidenz $m \leftrightarrow m$ liefert zwei und $P \leftrightarrow m$ liefert eine Faltung. Die letzte ist unzulässig wie wir bereits gesehen haben, vgl. auch Abb. 3.6.

$\{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}$







Es bleibt die Faltung $\{n \leftrightarrow n, m \leftrightarrow m\}$ zu betrachten. Sie ist etwas eigenartig, weil sie in der Literatur [AL09, S. 7, Table 1] typischerweise als unzulässig angesehen wird, aber nach unserer Definition in einem Spezialfall eine reguläre Faltung liefert. Wir diskutieren diese Faltung etwas genauer.

Zunächst gilt für $m \parallel n$, dass der Durchschnitt $m \leftrightarrow m \cap n \leftrightarrow n = L_m \setminus \{m, n\}$ unendlich groß ist. Sind n und m hingegen nicht parallel und stehen nicht senkrecht aufeinander, dann ist der Schnitt leer, da $L_m \cap L_n = \emptyset$ ist.

Es bleibt der Fall $n \perp m$. Dann ist $m \leftrightarrow m \cap n \leftrightarrow n = \{m, n\}$. Damit ist diese Faltung regulär. Diese Faltung stellt eine Ausnahme dar, weil hier nie eine Gerade außer den bereits konstruierten Geraden n und m konstruiert wird.

Typischerweise wird in der Literatur auf diese Faltung verzichtet, weil sie unnötig erscheint. Allerdings werden wir auf Faltungen treffen, die komplizierter zu analysieren sind, und nur solche Falze enthalten, die bereits konstruiert wurden. Wir haben uns entschieden, der Definition zu folgen und alles zu betrachten, was daraus entsteht. Ein anderer Grund, diese Faltung als »natürlich« anzusehen, ist, dass sie sich im Prinzip von der allgemein akzeptierten Faltung $\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$ nicht sehr unterscheidet. In beiden Faltungen bleiben die beteiligten Objekte invariant. In beiden Fällen entsteht eine zu m senkrechte Gerade als eine Lösung.

Wir halten fest: Die Faltungen $\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$, $\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$, $\{n \leftrightarrow n, m \leftrightarrow m\}_{m \perp n}$ sind regulär und können somit keine Teile anderer regulärer Faltungen sein. Die Faltungen $\{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m\}$, $\{P \leftrightarrow m, m \leftrightarrow m\}$ sowie $\{n \leftrightarrow n, m \leftrightarrow m\}_{m \not\perp n}$ sind unzulässig. Sie können in keinen regulären Faltungen auftreten, da sie bereits gänzlich unmöglich oder redundant (werden also durch bereits kürzere Inzidenzen beschrieben) sind.

Außerdem sehen wir, dass es keine regulären Faltungen mit genau zwei verschiedenen Objekten und mehr als zwei beteiligten Inzidenzen gibt. Das liegt daran, dass alle denkbaren solchen Faltungen bereits mit weniger Inzidenzen zulässig sind oder in dem Sinne redundant sind, dass sie sich mit weniger als drei Inzidenzen beschreiben lassen wie gerade gesehen. Die regulären Faltungen mit zwei verschiedenen Objekten sind genau: $P \leftrightarrow Q$, $m \leftrightarrow n$, $\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$, $\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$, $\{n \leftrightarrow n, m \leftrightarrow m\}_{m \perp n}$.

3.3.3. Faltungen mit drei Objekten

Faltungen, die drei verschiedene Objekte involvieren, können nicht aus nur einer Inzidenz bestehen. Kandidaten für reguläre Faltungen mit drei Objekten und zwei Inzidenzen sind $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$, $\{P \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}$, $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$, $\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$, da alle anderen Möglichkeiten mit $P \leftrightarrow P$ bzw. $n \leftrightarrow n$ bereits untersucht wurden. Das können wir wie folgt einsehen: Von den fünf bekannten Inzidenztypen können $P \leftrightarrow Q$ und $m \leftrightarrow n$ nicht mehr auftreten, da sie bereits selbst regulär sind. Daher können weitere reguläre Faltungen mit drei Objekten und zwei Inzidenzen aus höchstens den Inzidenztypen $P \leftrightarrow P$, $m \leftrightarrow m$, $P \leftrightarrow m$ bestehen. Ist an so einer Faltung der Typ $Q \leftrightarrow Q$ beteiligt, dann muss dies die Faltung $\{Q \leftrightarrow Q, P \leftrightarrow m\}$ sein. Analog mit $n \leftrightarrow n$ und $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$. Die restlichen Möglichkeiten können nur aus zwei Inzidenzen vom Typ $P \leftrightarrow m$ bestehen und sind daher $\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$ oder $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$. Mehr Möglichkeiten gibt es nicht.

Betrachten wir die Inzidenz $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$ zunächst für $P \in m$: $Q \leftrightarrow Q \cap P \leftrightarrow m = \mathcal{L}_Q \cap (\mathcal{L}_P \cup L_m) = \{PQ\} \cup \left(\mathcal{L}_Q \cap L_m\right) = \{PQ, \mathrm{Lot}_{Q,m}\}$, also eine reguläre Faltung. Dabei interessiert nicht, ob Q auch auf m liegt, die Menge ist immer ein- oder zweielementig, je nach dem, ob die Verbindungsgerade mit dem Lot zusammenfällt, vgl. Abb. 3.7. Ferner gilt $Q \leftrightarrow Q \cap P \leftrightarrow m_{P \notin m} = \mathcal{L}_Q \cap \mathrm{T}_{\rho(P,m)}$. Liegt Q »innerhalb« der Parabel, gilt also $\overline{PQ} < \overline{Qm}$, dann ist der Schnitt leer, denn keine Tangente an $\rho(P,m)$ geht durch Q. Andernfalls gibt es eine oder zwei Tangenten an $\rho(P,m)$ durch Q, vgl. auch [Ger95, S. 365]. Damit ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$ genau dann nicht regulär, wenn P außerhalb von m und Q innerhalb der Parabel $\rho(P,m)$ liegen. $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$

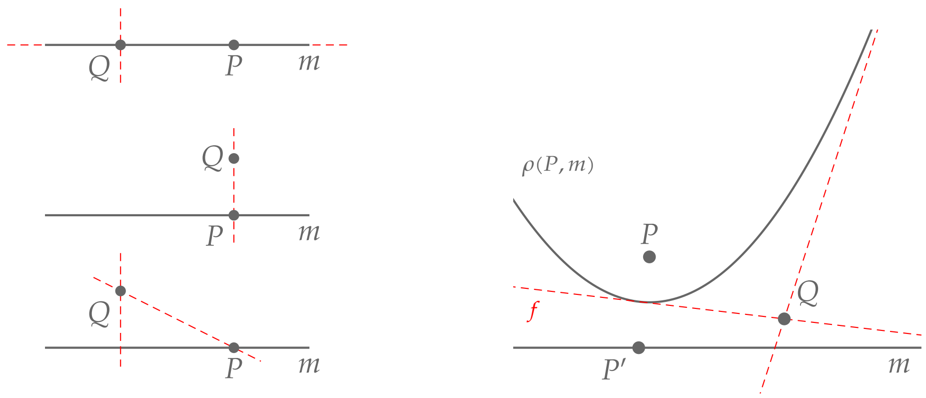


Abbildung 3.7.: Die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$ für $P \in m$ (mehrere Fälle links) und $P \notin m$. P' stellt das Bildpunkt von P nach der Faltung am Falz f dar.

Nun untersuchen wir $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$. Hier müssen wir mehrere Fallunterscheidungen machen. Sei zunächst $P \in m$. Dann gilt $n \leftrightarrow n \;\cap\; P \leftrightarrow m = L_n \cap (\mathcal{L}_P \cup L_m) =$ $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$

$$= (L_n \cap \mathcal{L}_P) \cup (L_n \cap L_m) = \begin{cases} L_n \backslash \{n\}, \text{ falls } n \parallel m, \\ \{m, n\}, \text{ falls } n \perp m, \\ \mathcal{L}_P \cap L_n = \begin{cases} \{\text{Lot auf } n \text{ durch } P,\ n\}, \text{ falls } P \in n \\ \{\text{Lot auf } n \text{ durch } P\}, \text{ falls } P \notin n, \end{cases} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Argumente haben wir bereits gesehen: $L_m \cap L_n$ ist $\{m, n\}$ oder leer, falls m und

n nicht parallel sind. Dann hängt die Inzidenz davon ab, ob die beiden Geraden senkrecht zueinander sind und ob P auch auf n liegt, vgl. Abb. 3.8.

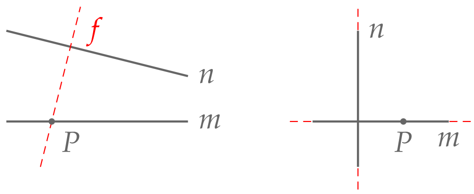


Abbildung 3.8.: Die Faltung $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$ mit $P \in m$: für $m \nparallel n$ und für $m \perp n$.

Sei nun $P \notin m$, vgl. Abb. 3.9. Dann suchen wir Tangenten an die Parabel $\rho(P, m)$, die senkrecht auf n stehen oder n sind. Sind m und n nicht parallel, dann gibt es immer eine oder zwei[21] solche Tangenten: n selbst könnte so eine Tangente sein; und eine der senkrechten Geraden auf n stellt immer eine solche Tangente dar. Sind m und n parallel, dann ist keine zu m (und n) senkrechte Gerade eine Tangente an $\rho(P, m)$. Der einzige mögliche Fall, der übrig bleibt, tritt ein, wenn n genau zwischen P und m liegt. Dann ist genau n im Schnitt $P \leftrightarrow m \cap n \leftrightarrow n$. Das heißt, genau dann ist die Faltung $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$ nicht regulär, wenn $P \in m \wedge m \parallel n$ oder $P \notin m \wedge \overline{Pn} \neq \overline{nm} > 0$.

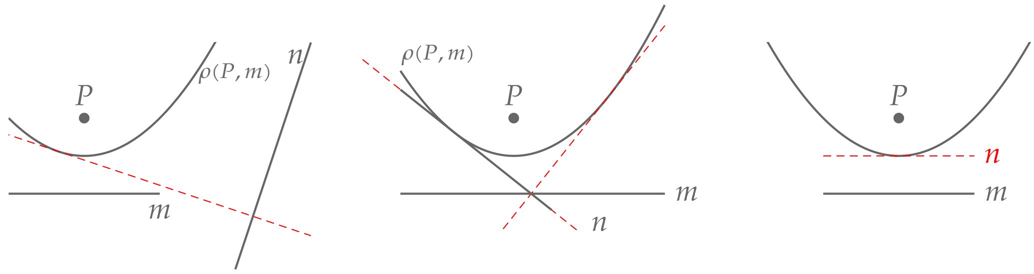


Abbildung 3.9.: Die Faltung $\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$ mit $P \notin m$. Links ist die generische Situation, in der Mitte ist n bereits selber ein Falz, rechts ist ein Beispiel für $m \parallel n$.

$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$ Wir kommen zu $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$, vgl. Abb. 3.10. Diese Faltung liefert dasselbe Ergebnis wie $m \leftrightarrow n$ bzw. $m \leftrightarrow m$, hat aber eine andere Struktur. Daher wird sie separat untersucht. Es ist ersichtlich, dass diese Faltung die Verbindungsgerade PQ auf m faltet und als Falz die beiden Winkelhalbierenden oder die Mittelparallele liefert, falls P und Q nicht beide auf m liegen. Das sollten wir trotzdem ausführen. Im Fall $P, Q \notin m$ ist die Aussage klar. Seien $P \in m, Q \notin m$, dann ist $P \leftrightarrow m = L_m \cup \mathcal{L}_P$. Aber kein Element von L_m ist eine Tangente an $\rho(P, m)$. Da nun also P auf m fixiert wird, ist die gesamte Faltung mittels Winkelhalbierenden von PQ und m beschreibbar. Liegen P, Q doch beide auf m, so ist die Faltung unzulässig, da alle Elemente in L_m die Faltung ermöglichen. Die Faltung ist also genau dann regulär, wenn P und Q nicht beide auf m liegen. Andernfalls ist sie redundant.

[21] Die Diskussion darüber, ob n eine Lösung sein darf, wurde bereits in Kapitel 1 erwähnt, vgl. Seite 26.

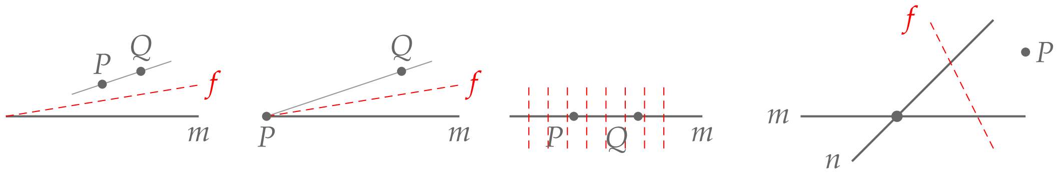


Abbildung 3.10.: Die linken drei Grafiken zeigen Beispiele von Faltungen $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$ mit P, Q beide außerhalb von m oder P oder Q auf m; ein zweiter Falz für $PQ \neq m$ ist nicht dargestellt. Rechts ist ein Beispiel für die Faltung $\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$ mit $m \nparallel n$; der Fall $m \parallel n$ ist trivialerweise nicht zulässig.

Abschließend untersuchen wir $\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$, vgl. Abb. 3.10. Diese Faltung spiegelt P eindeutig auf den Schnittpunkt von m und n, falls sie nicht parallel sind. Sind sie jedoch parallel, so kann das Spiegelbild von P offenbar nicht gleichzeitig auf m und n liegen. Damit ist diese Faltung genau dann regulär, wenn $P \neq (m \cap n)$ und $m \nparallel n$ gilt. Andernfalls ist sie gänzlich unmöglich. $\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$

Es gibt keine regulären Faltungen mit drei Objekten und mehr als zwei Inzidenzen, aus dem selben Grund wie im vorigen Abschnitt: Würden drei Inzidenzen eine reguläre Faltung ergeben, dann wäre dies mit zwei oder weniger dieser Inzidenzen bereits der Fall. Das liegt an den übrig gebliebenen Faltungen, die hier infrage kommen: $\{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$, $\{P \leftrightarrow P, P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$, $\{m \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$, $\{m \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n, P \leftrightarrow P\}$. Diese können wir leicht ausschließen, sie sind alle nicht regulär, vgl. die graue Box auf der Seite 110. Wir fassen zusammen: Die regulären Faltungen mit drei verschiedenen Objekten sind genau (sie können in keinen weiteren regulären Faltungen auftauchen):

$$
\begin{aligned}
&\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}, && \text{falls } P \in m \text{ oder } P \notin m \wedge \overline{PQ} \geq \overline{Qm}, \\
&\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}, && \text{falls } m \nparallel n \text{ oder } P \notin m \wedge \overline{Pn} = \overline{mn} > 0, \\
&\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}, && \text{falls } \mathrm{PQ} \neq m, \\
&\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}, && \text{falls } m \nparallel n \wedge P \neq m \cap n.
\end{aligned}
$$

3.3.4. Faltungen mit vier Objekten

Aufgrund der obigen Analysen stellen wir fest, dass als Kandidaten für reguläre Faltungen nur noch solche der Form $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ infrage kommen. Das liegt zu- $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ nächst daran, dass hier offenbar keine Faltungen mit einer Inzidenz oder keine neue reguläre Faltung mit zwei Inzidenzen möglich sind. Ferner müssten neue reguläre Faltungen mit drei oder mehr Inzidenzen aufgrund der bereits betrachteten regulären, unmöglichen und redundanten Fälle die Form $\{P \leftrightarrow P, P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, \ldots\}$ oder $\{n \leftrightarrow n, P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, \ldots\}$ oder $\{P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, P_3 \leftrightarrow m_3, \ldots\}$ mit lauter verschiedenen und folglich mehr als vier Objekten haben.

Betrachten wir $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$. Es gilt nun, verschiedene Lagebeziehungen zwischen diesen vier (nach wie vor) verschiedenen Objekten zu untersuchen.

Ist $P \in m$ und $Q \in n$, dann gilt mit Satz 3.12: $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n =$
$= (\mathcal{L}_P \cup L_m) \cap (\mathcal{L}_Q \cup L_n) = (\mathcal{L}_P \cap \mathcal{L}_Q) \cup (\mathcal{L}_P \cap L_n) \cup (\mathcal{L}_Q \cap L_m) \cup (L_m \cap L_n)$.
Wir wissen bereits, dass $\mathcal{L}_P \cap \mathcal{L}_Q$ genau die Verbindungsgerade PQ enthält. Damit ist der gesamte Schnitt immer nicht leer. Sind m und n parallel, dann ist $L_m \cap L_n = L_m \backslash \{m, n\}$ also insbesondere unendlich groß. Damit ist die Faltung im Fall $m \parallel n$ unzulässig. Gilt jedoch $m \nparallel n$, dann besteht $L_m \cap L_n$ höchstens aus m und n, nämlich genau dann, wenn m senkrecht auf n steht. Da die Mengen $\mathcal{L}_P \cap L_n$ und $\mathcal{L}_Q \cap L_m$ höchstens die Lote von P auf n und Q auf m wie auch m und n enthalten können, sehen wir nun, dass die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}_{P \in m \wedge Q \in n}$ regulär genau für $m \nparallel n$ ist, vgl. Abb. 3.11. Es ist unschwer zu sehen, dass die Anzahl der Falze hier maximal Drei ist. Die Faltung besteht nämlich aus den Gerade $\{PQ, \mathrm{Lot}_{P,n}, \mathrm{Lot}_{Q,m}\}$ oder $\{PQ, m, n\}$, jeweils nicht unbedingt dreielementig.

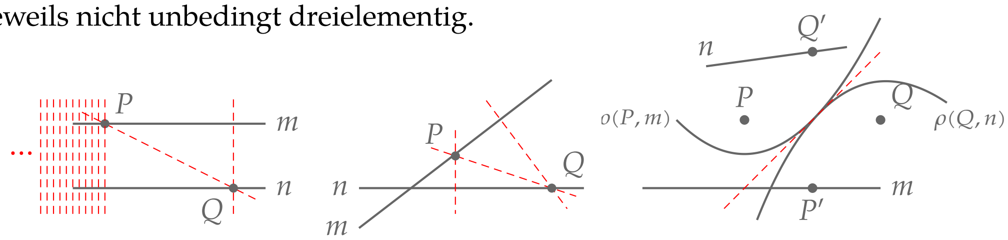


Abbildung 3.11.: Links ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ für $P \in m, Q \in n, m \parallel n$ unzulässig. In der Mitte ist dieselbe Faltung regulär, für $P \in m, Q \in n, m \nparallel n$. Rechts ist die generische Lage dieser Faltung dargestellt; P' bzw. Q' stellen die Bildpunkte von P bzw. Q nach der Faltung am angegebenen Falz dar.

Bemerkung 3.13. Es wird deutlich, dass die Komplexität der Fallunterscheidung zunimmt und die Analyse technischer wird. In der Literatur wurde diese Herausforderung oft elegant vermieden. Dafür musste etwa in Kauf genommen werden, dass einige Extremfälle ungeklärt blieben. So führt die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ in einigen sehr speziellen Situationen zur Verwirrung. Ist $(m \perp n) \wedge (P \in m) \wedge (Q \in m \cap n)$, dann ist $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n = \{m, n\}$, also eine Faltung, die etwa in [GKK13, S. 147] und [AL09, S. 6] nicht erlaubt wäre. Ändert sich die Bedingung leicht zu

$$m \perp n \ \wedge \ P \in m \ \wedge \ Q \in n \ \wedge \ P \neq m \cap n \neq Q,$$

dann ist $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n = \{m, n, PQ\}$, vgl. Abb. 3.12, und diese Faltung würde in der Literatur

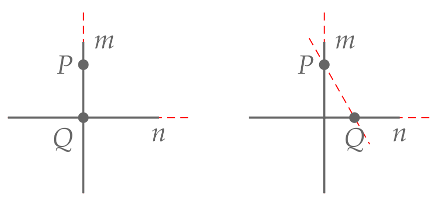


Abbildung 3.12.: Beispiele der Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ für $m \perp n$.

die Verbindungsgerade PQ liefern. Es ist ersichtlich, dass es recht schwierig ist, der Faltung a priori anzusehen, ob sie zulässig ist oder nicht, ohne viel mehr Fallunterscheidungen zu führen. Daher halten wir es für natürlicher, außer denen in der Definition 3.8 keine weiteren Anforderungen an die Faltungen zu stellen. $\sharp$

Nun bleibt die spannendste und reichhaltigste Faltung: $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ und $P \notin m$, vgl. Abb. 3.13. Diese beiden Fälle, $P \in m \wedge Q \in n$ und $P \notin m$ sind tatsächlich erschöpfend; ist $\neg(P \in m \wedge Q \in n)$, dann ist $P \notin m$ oder $Q \notin n$ und ggf. durch Umbenennung können wir $P \notin m$ annehmen. Dieser Fall inkludiert $Q \in n$, $Q \notin n$.

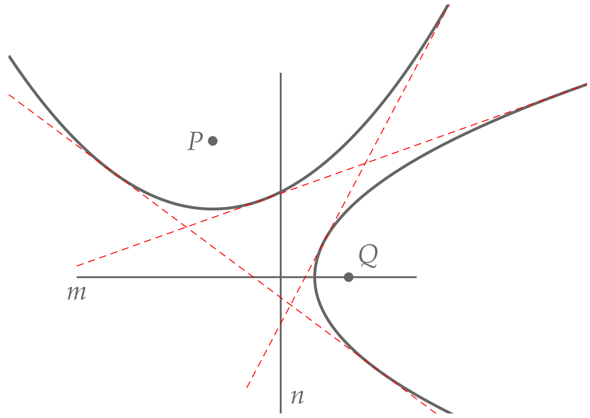


Abbildung 3.13.: Ein Beispiel von $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ mit drei Lösungen.

Wir dürfen ferner ohne Einschränkung annehmen,[22] dass m die Geradengleichung $y = -1$ und P die Koordinaten $(0, 1)$ hat, vgl. Abb. 3.14 und Abb. 3.5.

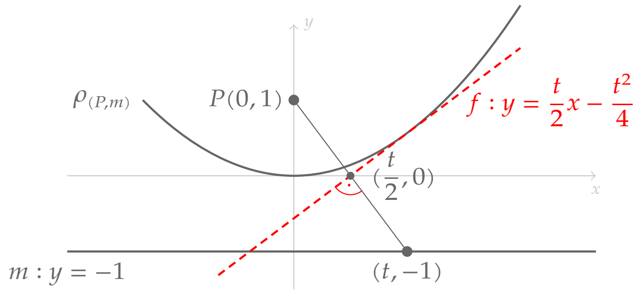


Abbildung 3.14.: Zur Berechnung der Faltgeradengleichung.

Nun folgen wir der Darstellung aus [Hul12, Act. 8], um die Falze der Faltung aus den Schnittpunkten einer speziellen Kurve mit einer Geraden zu gewinnen. Sei $Q = (a, b)$ und $P' = (t, -1)$ ein Punkt auf m für ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach Satz 3.12 wissen wir, dass wegen $P \notin m$ die Falze, die P auf m falten, Tangenten an die Parabel $\rho_{(P,m)}$ sind. Die Mittelsenkrechte f von $[PP']$ ist also einer dieser Falze und hat die Form

[22] An dieser Stelle wollen wir der dringenden Bequemlichkeit halber die Analyse algebraisieren und führen passende Koordinaten ein: Wir drehen das Koordinatensystem so, dass m die gewünschte Geradengleichung erfüllt. Danach lässt sich das Koordinatensystem in zu m senkrechter Richtung so skalieren, dass auch P die gewünschten Koordinaten erhält.

$f : y = vx + w$ für $v, w \in \mathbb{R}$. Da sie senkrecht auf PP' steht und durch den Mittelpunkt von $[PP']$ geht, erhalten wir für die Steigung von f den negativen Kehrwert von $\frac{1-(-1)}{0-t}$, also $\frac{t}{2}$. Außerdem gilt $(\frac{t}{2}, 0) \in f$ und insgesamt

$$f_t(x) = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}. \tag{†}$$

Wir wissen nun, dass für alle[23] $t \in \mathbb{R}$ die Faltung an der Geraden f_t den Punkt P auf m bewegt. Der Punkt Q wird an ebenjener Geraden f_t gespiegelt. Wir können *alle* möglichen Punkte bestimmen, die die Spiegelbilder von Q an der Geraden f_t ergeben. Dazu argumentieren wir wie eben: Sei $Q' = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein solches Spiegelbild von Q an f_t, so dass $Q' \notin f$ gilt[24] (insbesondere ist $Q \neq Q'$), dann liegt wieder der Mittelpunkt von $[QQ']$ auf f. Dieser ist $(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2})$. Die Steigung von QQ' und gleichzeitig von PP' ist $\frac{y-b}{x-a}$, also $-\frac{2}{t}$. Wir erhalten insgesamt für $f_t(\frac{x+a}{2})$:

$$\frac{y+b}{2} = \frac{x-a}{b-y} \cdot \frac{x+a}{2} - (\frac{x-a}{b-y})^2$$

oder äquivalent, nach Multiplikation mit $2(b-y)^2$,

$$(y+b)(y-b)^2 = (x^2 - a^2)(b-y) - 2(x-a)^2. \tag{⋆}$$

Wir bekommen für die Kurve einen polynomiellen Ausdruck in x und y. Insbesondere tauchen nun keine Probleme mit $Q = Q'$ oder $t = 0$ auf. Allerdings interessieren uns nicht die gesamte Kurve, sondern nur ihre Schnittpunkte mit der Geraden n:

> Zur Erinnerung: In der Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ bestimmen wir zunächst alle Tangenten f_t an die Parabel $\rho_{(P,m)}$. Für jede dieser Tangente berechnen wir den Spiegelpunkt von Q daran und erhalten eine kubische Kurve in x und y, vgl. Abb. 3.15. Genau die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Geraden n liefern uns die Elemente aus $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n$, weil dann Q auf n zu liegen kommt (und P sowieso auf m landet).

Nun erweitern wir die Darstellung nach Hull durch unsere angekündigten ausschöpfenden Fallunterscheidungen. Dazu scheiden wir $(\star)$ mit der Geraden n. Ist n senkrecht zu m, also von der Form $n : x = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, dann setzen wir in $(\star)$ lediglich $x = c$ und erhalten mit $(y+b)(y-b)^2 = (c^2 - a^2)(b-y) - 2(c-a)^2$ eine

[23] Der Fall $t = 0$ wurde in der Darstellung ausgeschlossen, um unendliche Steigungen zu vermeiden, aber für $t = 0$ ist $f_0(x) = 0$ ebenfalls eine Tangente an $\rho_{(P,m)}$.

[24] Das ist immer möglich: Sollte Q auf f_t für ein $t \in \mathbb{R}$ liegen, dann können wir beliebig viele andere $t \in \mathbb{R}$ wählen, für die das nicht der Fall ist.

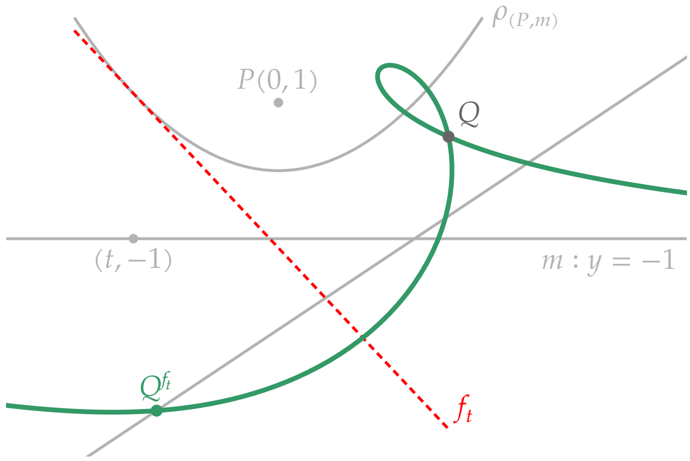


Abbildung 3.15.: Eine Algebraisierung der Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$: Die Gerade f_t ist hier die Mittelsenkrechte der Punkte P und $(t, -1) \in m$. An dieser Tangenten von $\rho_{(P,m)}$ wird Q auf Q^{f_t} gespiegelt. Variiert $(t, -1)$ auf m, beschreibt Q^{f_t} die grüne kubische Kurve. Für alle t, für die diese Kurve die Gerade n schneidet, erhalten wir $f_t \in P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n$. Hier sind drei Schnittpunkte zu sehen, aber f_t in rot passt im Bild zum Punkt Q^{f_t}. In der Grafik sind $Q = (2{,}5, 0{,}5)$ und $n : y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.

normierte kubische Gleichung in y, die bekanntlich immer eine (und maximal drei) Nullstelle(n) hat. Das heißt im Fall $m \perp n$ ist unsere Faltung regulär. Steht nun n nicht senkrecht auf m, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $n : y = cx + d$. Um die Schnittpunkte von $(\star)$ und n zu erhalten, setzen wir in $(\star)$ den Ausdruck $y = cx + d$ ein und erhalten die Kurve

$$F_{a,b,c,d}(x) : (cx + d + b)(cx + d - b)^2 - (x^2 - a^2)(b - cx - d) - 2(x - a)^2 = 0. \qquad (\ddagger)$$

Nun wollen wir die möglichen Elemente f_t aus $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow m$ bestimmen. Diese sind durch t vollständig charakterisiert. Wir wissen, dass $\frac{t}{2} = \frac{x-a}{b-y}$ und $y = cx + d$ gilt, das heißt insgesamt ist $t = \frac{2x-2a}{-cx+b-d}$. Daher ist t eine Möbiustransformierte von x, falls $2(b - d) - 2ac \neq 0 \iff ca + d \neq b$ gilt. Mit anderen Worten, t ist eine Möbiustransformierte von x, falls $Q = (a, b)$ *nicht* auf $n : y = cx + d$ liegt. Den Fall $Q \in n$ analysieren wir weiter unten und nehmen erstmal $Q \notin n$ an. Da nun die Inverse der Möbiustransformation existiert, können wir $t = \frac{2x-2a}{-cx+b-d}$ nach x auflösen und erhalten $x = \frac{(b-d)t+2a}{ct+2}$. Einsetzen von x in $(\ddagger)$ liefert für $F_{a,b,c,d}(t)$:

$$\frac{2(ac + d - b)^2 \left(4(b + ac + d) + 4(bc - a)t + (2 - b - ac + d)t^2 + ct^3\right)}{(2 + ct)^3} = 0$$

$$\underset{Q \notin n}{\iff} ct^3 + (2 - b - ac + d)t^2 + 4(bc - a)t + 4(b + ac + d) = 0. \qquad (\partial)$$

Damit ist (∂) die definierende Gleichung von t und die Kandidaten für t sind nur unter den Lösungen dieser Gleichung zu suchen. Insbesondere hat die Faltung nur höchstens drei Lösungen. Außerdem hat diese kubische Gleichung höchstens nur dann keine Lösungen, wenn $c = 0$ ist, also wenn $m \parallel n$ gilt. Andernfalls ist die Faltung regulär. Im Fall $c = 0$ wird aus (∂) die quadratische Gleichung

$$(2 - b + d)t^2 - 4at + 4(b + d) = 0$$

mit Diskriminanten $16a^2 - 16(b+d)(2-b+d) = 16(a^2+b^2-2b-d^2-2d)$. Die Faltung ist also nicht ausführbar, wenn $a^2 + b^2 - 2b - d^2 - 2d < 0$ gilt. Aber das können wir übersetzen in $a^2 + (b-1)^2 < (d+1)^2$. Dieser Ausdruck kann nun glücklicherweise geometrisch interpretiert werden, denn $\sqrt{a^2 + (b-1)^2}$ ist der Abstand von P zu Q und $d + 1$ ist der Abstand von m zu n. Die geometrische Einsicht, dass Falten Abstände nicht vergrößert und somit P nicht auf m und Q nicht auf n gefaltet werden können, wenn $\overline{PQ} < \overline{mn}$ ist, wird durch unsere Rechnung unterstützt. Außerdem sehen wir auf einmal, dass andernfalls die Faltung regulär ist, vgl. Abb. 3.16.

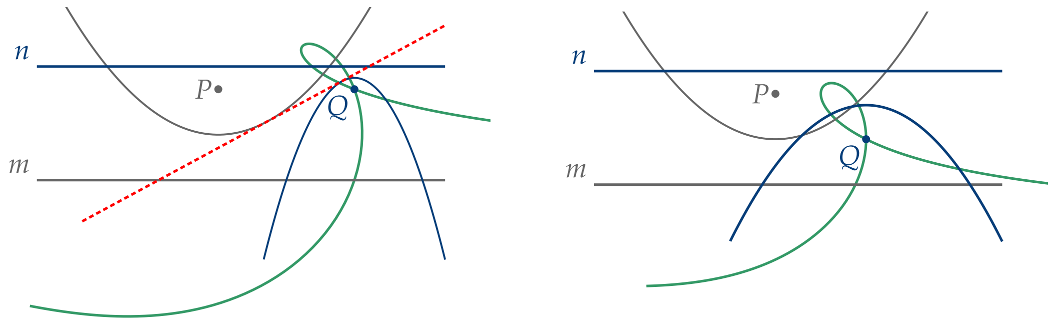


Abbildung 3.16.: Die beiden Situationen für $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ mit $m \parallel n$ und $P \notin m, Q \notin n$: Schneidet die grüne Kurve die Gerade n, dann gibt es eine gemeinsame Tangente (rot) an die beiden Parabeln, ansonsten nicht. Links ist $\overline{PQ} \geq \overline{mn}$ und die Faltung ist regulär. Rechts ist $\overline{PQ} < \overline{mn}$ und eine Faltung ist nicht möglich.

Bemerkung 3.14. Für die grafische Analyse und Darstellung der Origami-Kurve ist ggf. besser, die parametrische Form in Abhängigkeit von f_t zu wählen als die algebraische. Ist die Falzgleichung $f_t(x) = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$ wie in (†) und $Q = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, dann kann das Bild von Q unter der Faltung an f_t in Abhängigkeit von t bestimmt werden. Dazu wird eine Gleichung für die Spiegelung eines Punkts an einer Geraden verwendet, vgl. [Mar98, S. 147, Thm. 10.2]:

Das Spiegelbild des Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an der Geraden $aX + bY + c = 0$ ist (x', y') mit

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \quad \text{sowie} \quad y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}.$$

In der Situation wie in (†) sind die Koordinaten von Q^{f_t} daher

$$Q^{f_t} = \frac{1}{t^2 + 4}\left(t^3 - at^2 + 4bt + 4a, (b - 2)t^2 + 4at - 4b\right)$$

(mit $Q = (a, b)$ und $f_t : -2tx + 4y + t^2 = 0$). ♯

Es bleibt noch der Fall $P \notin m \wedge Q \in n$ zu analysieren. Es wäre nicht schwer, diesen Fall analog zu obigen Ausführungen zu algebraisieren und etwa $n : y = 0$ und $Q = (0,0)$ zu setzen. Dann erhielten wir eine annullierende Gleichung von t, die ebenfalls analysiert werden könnte. Doch wir begnügen uns mit der graphischen Auseinandersetzung, da sie plastischer den Fall klärt.

Hier sind zwei Fälle möglich, $\overline{PQ} \geq \overline{Qm}$ und $\overline{PQ} < \overline{Qm}$. Im ersten Fall, also wenn Q »außerhalb« der Parabel $\rho_{(P,m)}$ liegt, gibt es eine Tangente an $\rho_{(P,m)}$ durch Q, das liefert $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow Q \neq \emptyset$. Andernfalls zerfällt die Faltung in zwei Fälle. Für $m \parallel n$ ist keine Faltung möglich, da Elemente aus $L_n \cup \mathcal{L}_Q$ keine Tangenten an $\rho_{(P,m)}$ sind. Für $m \nparallel n$ ist jedoch $T_{\rho(P,m)} \cap L_n$ nicht leer, vgl. Abb. 3.17.

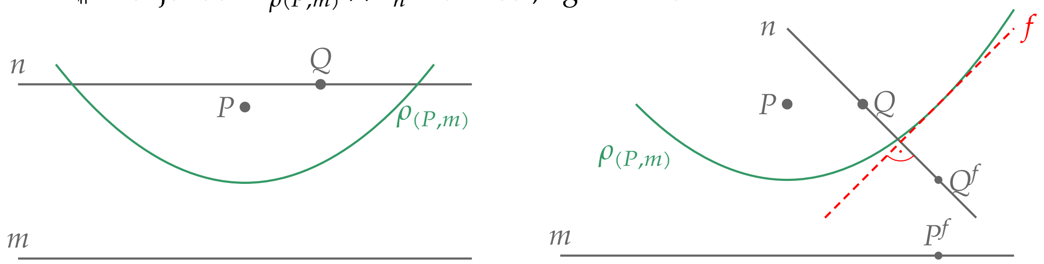


Abbildung 3.17.: Darstellung der möglichen Situationen, falls Q innerhalb der Parabel $\rho_{(P,m)}$ liegt: Links $m \parallel n$, Faltung ist nicht möglich; rechts $m \nparallel n$, Faltung ist möglich.

Wir sind mithin mit allen Fällen fertig und sehen, dass die Bedingungen an die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$, damit sie regulär ist, wesentlich vereinfacht[25] werden können. So haben wir oben gesehen, dass die regulären Fälle genau dann auftreten, falls

- $P \in m \wedge Q \in n \wedge m \nparallel n$ *oder*
- $P \notin m \wedge Q \notin n \wedge \left(m \nparallel n \vee \overline{PQ} \geq \overline{mn}\right)$ *oder*
- $\neg(P \in m \wedge Q \in n) \wedge \left(m \nparallel n \vee \overline{PQ} \geq \overline{mn}\right)$.

Nach genauer Betrachtung reduziert sich diese komplizierte auf eine einfache Bedingung: Die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ ist genau dann regulär, wenn

$$m \nparallel n \quad \textit{oder} \quad P \notin m \vee Q \notin n \wedge \overline{PQ} \geq \overline{mn}.$$

Da diese Reduktion nicht sofort ersichtlich ist, soll sie kurz begründet werden.

Lemma 3.15. Logisch äquivalent sind $m \nparallel n \vee \left((P \notin m \vee Q \notin n) \wedge \overline{PQ} \geq \overline{mn}\right)$ und

$$\begin{aligned}
&(P \in m \wedge Q \in n \wedge m \nparallel n) \vee \\
&\left((P \notin m \wedge Q \notin n) \wedge (m \nparallel n \vee \overline{PQ} \geq \overline{mn})\right) \vee \\
&\left((P \notin m \vee Q \notin n) \wedge (m \nparallel n \vee \overline{PQ} \geq \overline{mn})\right).
\end{aligned} \tag{$\circledast$}$$

[25] Etwa im Fall $P \notin m \wedge Q \in n$ und $m \parallel n$ ist die Bedingung $\overline{PQ} < \overline{Qm}$ dieselbe wie $\overline{PQ} < \overline{mn}$, da Q auf n liegt.

Beweis: Die zweite Zeile in ($\circledast$) ist von der Form $(X \wedge Y) \wedge$ Rest. Die dritte Zeile ebenda ist von der Form $(X \vee Y) \wedge$ Rest. Sie sind durch ein »Oder« verbunden. Die Distributivität liefert aus der zweiten und dritten Zeile daher einen Ausdruck der Form $((X \wedge Y) \vee (X \vee Y)) \wedge$ Rest. Die allgemeine Formel $(X \wedge Y) \vee (X \vee Y) \iff (X \vee Y)$ ist eine Tautologie, daher reduziert sich die Teilformel aus der zweiten und dritten Zeile von ($\circledast$) auf lediglich die dritte Zeile. Setzen wir nun $A := P \in m$, $B := Q \in n$, $C := m \nparallel n$ und $D := \overline{PQ} \geq \overline{mn}$, dann erhalten wir äquivalent aus ($\circledast$)

$$(A \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee D)).$$

Setzen wir $Y := A \wedge B$, dann wird daraus

$$(Y \wedge C) \vee (\neg Y \wedge (C \vee D)) \iff (Y \wedge C) \vee (\neg Y \wedge C) \vee (\neg Y \vee D).$$

Die Formel $(Y \wedge C) \vee (\neg Y \wedge C)$ ist wegen Distributivität äquivalent zu $(Y \vee \neg Y) \wedge C$. Aber $(Y \vee \neg Y)$ ist immer wahr und so erhalten wir logisch äquivalent die Endformel

$$C \vee (\neg Y \wedge D) \iff C \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge D).$$

Aber $C \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge D)$ ist genau $m \nparallel n \vee \Big((P \notin m \vee Q \notin n) \wedge \overline{PQ} \geq \overline{mn}\Big)$. □

Bemerkung 3.16. Am Anfang des Abschnitts 3.3.4 sahen wir, dass Kandidaten für reguläre Faltungen mit mehr als vier Objekten nur $\{P \leftrightarrow P, P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, \ldots\}$ oder $\{n \leftrightarrow n, P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, \ldots\}$ oder $\{P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2, P_3 \leftrightarrow m_3, \ldots\}$ mit lauter verschiedenen Objekten sein können. Wäre eine solche Faltung regulär, dann müsste sie ja minimal zulässig sein, vgl. Definition 3.8. Dann wären die enthaltenen Faltungen $\{P_1 \leftrightarrow m_1, P_2 \leftrightarrow m_2\}$ nicht regulär. Das geht nach dem Obigen nur dermaßen, dass $m_1 \parallel m_2$ und $P_1 \in m_1$ und $P_2 \in m_2$ gelten (in anderen regulären Fällen ist die Faltung gar nicht erst ausführbar). Aber in diesem Fall ist die Faltung redundant und kann nicht Teil einer regulären Faltung sein. Wir schließen daraus, dass es keine regulären Faltungen mit mehr als vier Objekten gibt. ♯

Die Liste *aller regulären* Faltungen unter der Annahme, dass Punkte P, Q und Geraden m, n alle verschieden sind, ist in der Tabelle 3.1 zusammengefasst:[26]

Der Tabelle 3.1 entnehmen wir, dass die ersten sieben regulären Faltungen nicht ähnlich sind und folglich verschiedene Grundfaltungen liefern, vgl. Definition 3.11. Die letzten drei regulären Faltungen sind ähnlich im Sinne der Definition 3.11, sie bestehen aus je zwei Inzidenzen desselben Typs. Die zugehörige Äquivalenzklasse, die zugehörige Grundfaltung, beinhaltet also drei Elemente. Die Grundfaltungen sind in Tabelle 3.2 angegeben.

[26]Vgl. Seiten 110, 113, 119. Dadurch dass die Objekte P, Q, m, n allesamt verschieden vorausgesetzt wurden, ist der Vergleich zu Literatur nicht ganz offensichtlich; einige der der Bedingungen aus etwa [GKK13, Table 1, Op. 6] verlagern sich bei uns auf andere Fälle.

$P \leftrightarrow Q$	immer
$m \leftrightarrow n$	immer
$\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$	immer
$\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$	immer
$\{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}$	mit $m \perp n$
$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$	mit $P \in m$ oder $P \notin m \wedge \overline{PQ} \geq \overline{Qm}$
$\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$	mit $m \nparallel n$ oder $P \notin m \wedge \overline{Pn} = \overline{mn} > 0$
$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow m\}$	mit $PQ \neq m$
$\{P \leftrightarrow m, P \leftrightarrow n\}$	mit $m \nparallel n$ und $P \neq m \cap n$
$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$	mit $m \nparallel n$ oder $(P \notin m \vee Q \notin n) \wedge \overline{PQ} \geq \overline{mn}$.

Tabelle 3.1.: Liste aller regulären Faltungen mit $P \neq Q$ und $n \neq m$

Bemerkung 3.17.

a) Aus der obigen Analyse folgt insbesondere, dass keine reguläre Faltung mehr als drei Lösungen haben kann. Die Forderung an zulässige Faltungen, nur endlich viele Lösungen zu erlauben, konnte deutlich verschärft werden.

b) In jeder 1-fach-Origami-Faltsequenz (etwa Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks) ist jeder einzelne Faltschritt eine Grundfaltung oder eine redundante Variante davon (»Falte A, B, C auf m« statt »Falte AB auf m« für kollineare Punkte A, B, C).

c) Die konkreten Faltungen $(0,0) \leftrightarrow (1,1)$ sowie $(0,0) \leftrightarrow (1,0)$ sind verschiedene Faltungen mit verschiedenen Falzmengen, doch gehören sie zur selben Grundfaltung $P \leftrightarrow Q$. Diese einzelnen konkreten Faltungen entstehen als Spezialisierungen der Grundfaltung und wir sagen dazu auch »Instanzen der Grundfaltung«. Es gibt also unendlich viele Instanzen einer Grundfaltung, aber nur endlich viele Grundfaltungen. Eine Instanz einer Grundfaltung ist eine konkrete Menge von Falzen. Aus Lesbarkeitsgründen werden wir gelegentlich auch zu Instanzen einer Grundfaltung »Grundfaltung« sagen und darauf achten, dass es nicht zur Verwirrung führt.

Grundfaltung	**Regularitätsbedingungen**	**Üblicher Name**	**geometrische Interpretation***
$P \leftrightarrow Q$	—	HJA1 / MS	Mittelsenkrechte von P und Q
$m \leftrightarrow n$	—	HJA3 / WH	Winkelhalbierenden von m und n
$\{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$	—	HJA2 / VG	Verbindungsgerade von P und Q
$\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$	—	HJA4 / Lot	Lot durch P auf m
$\{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}$	mit $m \perp n$		—
$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$	mit $P \in m$ oder $P \notin m \wedge \overline{PQ} \geq \overline{Qm}$	HJA5	Parabeltangenten durch Q
$\{n \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$	mit $m \nparallel n$ oder $P \notin m \wedge \overline{Pn} = \overline{mn} > 0$	HJA7	Parabeltangenten senkrecht zu n
$\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$	mit $P \neq Q \;\wedge\; m \nparallel n$ oder $P \neq Q \;\wedge\; m = n \;\wedge\; PQ \neq m$ oder $P = Q \;\wedge\; m \nparallel n \;\wedge\; P \neq m \cap n$ oder $P \neq Q \;\wedge\; m \neq n \;\wedge\; \big((P \notin m \vee Q \notin n) \;\wedge\; \overline{PQ} \geq \overline{mn}\big)$	HJA6	simultane Tangenten an die Parabeln $\rho_{(P,m)}$ und $\rho_{(Q,n)}$

Tabelle 3.2.: Liste aller Grundfaltungen zusammen mit den Regularitätsbedingungen und üblichen Bezeichnungen. In der letzten Grundfaltung können Punkte P und Q sowie Geraden m und n identisch sein. Das verletzt die Bedingung an eine Faltung regulär zu sein nicht, da die Regularitätsbedingungen so formuliert sind, dass in jedem Fall das Schema $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ eine reguläre Faltung liefert.
*) Im generischen Fall.

3.4. Struktur von und in 1-fach-Origami

Wir haben die Liste aller Grundfaltungen gefunden, um gegebene Punkte und Geraden zu falten. Hieraus entstehen viele weitere Fragen, unter anderem solche mit Bezug zum Axiomatisieren:

a) Ist die angegebene Liste vollständig? Deckt sie sich mit der Literatur?
b) Sind all diese Grundfaltungen (in irgendeinem Sinne) nötig?
c) Ist es gerechtfertigt, wenn die Grundfaltungen in der Literatur als »Axiome« des Faltens bezeichnet werden, vgl. [AL09, S. 4], [KGI11]?
d) Hat die Menge der Punkte von 1-fach-Origami eine mathematische Struktur?
e) Wie vergleicht sich die Liste der Grundkonstruktionen und die Menge der Punkte von 1-fach-Origami mit denen von Zirkel und Lineal?

Die Antworten auf diese Fragen helfen uns die (axiomatische) Struktur von 1-fach-Origami besser zu verstehen und in bestehende Strukturen einzuordnen.

3.4.1. Vollständigkeit der Grundfaltungen

Die angegebene Liste der Grundfaltungen, bezogen auf die Definitionen 3.3, 3.6, 3.8, 3.11 ist vollständig, das heißt für so definiertes 1-fach-Origami gibt es keine weiteren Grundfaltungen. Das liegt daran, dass die Liste der regulären Faltungen aus Tabelle 3.1 bereits vollständig ist. Ihre Vollständigkeit wurde durch Aufzählen aller Möglichkeiten, Punkte und Geraden der euklidischen Ebene im Sinne der Definition 3.8 zur Inzidenz zu bringen, bewiesen. Unsere Liste enthält eine Grundfaltung, die typischerweise nicht aufgelistet wird, die Faltung $\{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}_{m \perp n}$, da sie wie bereits gesehen keine »neuen« Falze außer bereits gegebenen m, n liefert. Diese Faltung ist offenbar redundant und kann ignoriert werden, da sie keine faltpraktische Anwendung findet und keine noch nicht konstruierten Objekte liefert. Die übrigen sieben Grundfaltungen entsprechen der Lage in der Literatur und unterscheiden sich ggf. in den Regularitätsbedingungen, da hier zusätzlich die Forderung nach der Ausführbarkeit der Faltung (d.h. die Schnittmenge der Inzidenzen ist nicht leer) explizit in den Bedingungen enthalten ist.

3.4.2. Abhängigkeiten zwischen Grundfaltungen

In der Literatur ist oft zu lesen, etwa bereits in [Jus90b, Remarques], dass die Grundfaltungen nicht unabhängig voneinander sind. Diese wesentliche Frage an ein Axiomensystem ist naturgemäß auch hier von großer Bedeutung. Dabei ist zunächst zu klären, was genau das Abhängigkeitsverhältnis bei Grundfaltungen bedeuten soll.

Definition 3.18. Seien $f, f_1, f_2, \dots, f_k$ Grundfaltungen. Kann jeder in jeder Instanz von f liegende Falz ausgehend von 0 und 1 mit $f_1, f_2, \dots, f_k$ konstruiert werden, dann sagen wir $f_1, f_2, \dots, f_k$ *dominiere* f. Wir sagen auch, dass f von den Grundfaltungen $f_1, \dots, f_k$ dominiert wird. ◇

Beispiel 3.19. Gegeben seien verschiedene Punkte P und Q sowie die Grundfaltung $f = P \leftrightarrow Q$. Mit der Grundfaltung $f_1 = \{P \leftrightarrow P, Q \leftrightarrow Q\}$ konstruieren wir die Verbindungsgerade m von P und Q. Mit den Instanzen $\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}$ sowie $\{Q \leftrightarrow Q, m \leftrightarrow m\}$ der Lotgrundfaltung f_2 erhalten wir zwei parallele und von m verschiedene Geraden l und n mit $P \in l$ und $Q \in n$. In $f_3 = l \leftrightarrow n$ liegt offenbar die Mittelsenkrechte von P und Q, es gilt in diesem Fall sogar $l \leftrightarrow n = P \leftrightarrow Q$. Damit dominieren die Grundfaltungen f_1, f_2, f_3 die Grundfaltung f. Wir können auch salopper sagen: »Können Winkelhalbierende, Lote und Verbindungsgeraden gefaltet werden, dann auch Mittelsenkrechten«. ♯

An diesem Beispiel erkennen wir, dass die eigenständige Faltung von Mittelsenkrechten für 1-fach-Origami prinzipiell entbehrlich ist.

Wir verzichten bewusst auf das Wort »abhängig« bei Grundfaltungen und benutzen den treffenderen Begriff der Dominanz, auch um klar zu machen, dass die dominierten Faltungen etwa aus faltpraktischer Perspektive durchaus eine eigene Daseinsberechtigung haben. Außerdem gibt es so keine Notwendigkeit, die Liste der Grundfaltungen nachträglich zu ändern.

Die natürliche Frage ist, welche Grundfaltungen von welchen anderen Grundfaltungen dominiert werden. Sie ist für uns zu genau, die Dominanzbeziehungen wurden etwa in [GKK13] genauer studiert. Wir wollen direkt zeigen, dass die Grundfaltung der simultanen Tangenten alle anderen Grundfaltungen dominiert.

Dazu muss jedoch die Definition von 1-fach-Origami wieder betrachtet werden. Falls die Startmenge für Faltkonstruktionen lediglich aus den Punkten 0 und 1 besteht, dann kann HJA6[27] nicht einmal angewendet werden, weil keine Faltgeraden vorgegeben sind. Wir umgehen das Problem, indem wir die Startmenge lokal hier neu setzen. Dabei folgen wir der Darstellung aus [Mar98, S. 151].

In der euklidischen Ebene seien die Geraden mit den Gleichungen $y = 0$, $x = 0$ und $y = 1 - x$ gegeben. Ihre Schnittpunkte $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ seien ebenfalls ausgezeichnet. Wir wollen sehen, dass die Menge aller Geraden und ihrer Schnittpunkte, die mittels *aller* Grundfaltungen aus den Punkten $(0,0)$, $(1,0)$ entsteht, bereits die Menge ist, die aus der iterativen Anwendung von HJA6 aus den drei erwähnten Geraden und Punkten hervorgeht. Die Beziehung »$\supseteq$« ist dabei klar, wie es aus der folgenden Konstruktionsvorschrift hervorgeht. Seien die Punkte 0 und 1 sowie alle Grundfaltungen gegeben.

[27] Das ist eigentlich die Beloch-Faltung. Wir werden mit HJA6 die Beloch-Faltung mit den Regularitätsbedingungen aus Tabelle 3.2 bezeichnen.

$\mathbb{1} := \mathrm{VG}(0, 1)$ Die x-Achse als Verbindungsgerade von 0 und 1.
$\mathbb{2} := \mathrm{Lot}(0, \mathbb{1})$ Die y-Achse als das Lot durch 0 auf die x-Achse.
$\mathbb{3} := \mathrm{WH}(\mathbb{1}, \mathbb{2})$ $y = x$ als eine der Winkelhalbierenden von $\mathbb{1}$ und $\mathbb{2}$.
$\mathbb{4} := \mathrm{Lot}(1, \mathbb{3})$ Schließlich die Gerade $y = 1 - x$ als das Lot durch 1 auf $\mathbb{3}$.

Damit kann alles, was mit HJA6 alleine gefaltet werden kann, natürlich auch mit allen Grundfaltungen gefaltet werden.

Die andere Inklusion ist interessanter. Seien nun die Geraden $y = 0$, $x = 0$ und $y = 1 - x$ sowie Punkte $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ gegeben.

Lemma 3.20. Durch jeden Faltpunkt gehen mindestens zwei Falze von HJA6.

Beweis: Die Aussage trifft auf die drei gegebenen Punkte offenbar zu. Da Anwenden von HJA6 nur Falze aber keine Faltpunkte konstruiert und Faltpunkte als Schnittpunkte zweier Falze definiert sind, stimmt die Aussage für jeden Faltpunkt. □

Lemma 3.21. Die Grundfaltung HJA6 dominiert HJA1 und HJA2.

Beweis: Seien P und Q verschiedene Punkte. Nach Lemma 3.20 gibt es nichtparallele Geraden m und n, so dass $P \in n$ und $Q \in m$ gilt. Dann ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und einer ihrer Falze ist $P \leftrightarrow Q$, nämlich die Mittelsenkrechte von P und Q. Die Argumentation hängt nicht davon ab, ob m oder n die Verbindungsgerade PQ ist.

Durch Umbenennung von m und n sei nun $P \in m$ und $Q \in n$, wobei immer noch $m \nparallel n$ gilt. Dann ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und einer ihrer Falze ist das einzige Element von $P \leftrightarrow P \cap Q \leftrightarrow Q$, also genau die Verbindungsgerade der Punkte P und Q. Damit dominiert HJA6 sowohl HJA1 als auch HJA2. □

Lemma 3.22. Jeder Falz von HJA6 trägt unendlich viele Faltpunkte.

Beweis: Zuerst trägt jeder Falz mindestens zwei Punkte: Für die drei vorgegebenen Geraden ist es bereits richtig; sei f ein weiterer Falz, dann schneidet dieser mindestens zwei von drei der vorgegebenen Geraden. Sind die entstandenen Schnittpunkte nicht unterschiedlich, dann ist f höchstens eine der Geraden $x = 1$ oder $y = 1$ oder $y = -x$ mit den Faltpunkten $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ bzw. $(0, 0)$ darauf. Die Mittelsenkrechte, vgl. Lemma 3.21, von $(0, 0)$ und $(1, 0)$ bzw. von $(0, 0)$ und $(0, 1)$ schneidet dann f in einem weiteren Punkt. Also trägt jeder Falz mindestens zwei Faltpunkte. Für jeden beliebigen Falz g seien Punkte P und Q darauf. Mit Lemma 3.21 ist die Mittelsenkrechte von P und Q auch ein Falz unter HJA6 und der Mittelpunkt M von $[PQ]$ entsprechend ein weiterer Punkt auf g. Iterative Anwendung dieser Argumentation auf die Punkte P und M liefert unendlich viele Faltpunkte auf g.

Korollar 3.23. Durch jeden Faltpunkt gehen unendlich viele Falze unter HJA6.

Beweis: Sei P ein Faltpunkt. Die Verbindungsgeraden, vgl. Lemma 3.21, zwischen P und den nach Lemma 3.22 unendlich vielen Faltpunkten eines beliebigen Falzes m mit $P \notin m$ liefern unendlich viele Falze durch P. □

Lemma 3.24. HJA6 dominiert HJA3.

Beweis: Seien verschiedene Geraden m und n gegeben. Nach Lemma 3.22 gibt es verschiedene Faltpunkte $P \in n$ und $Q \in m$. Die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ ist regulär: In jedem Fall, wenn $m \nparallel n$ gilt, und wegen $\overline{PQ} = \overline{mn}$, wenn $m \parallel n$ ist. In $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n$ liegen je nach Parallelität von m und n die Mittelparallele oder die beiden Winkelhalbierenden aus $m \leftrightarrow n$ sowie die Mittelsenkrechte von P und Q. □

Lemma 3.25. HJA6 dominiert HJA4.

Beweis: Seien Faltpunkt P und Falz m gegeben. Wir diskutieren zwei Fälle. Ist zunächst $P \notin m$, dann wählen wir mit Q einen beliebigen Faltpunkt auf m sowie eine beliebige Faltgerade n durch P, welche nicht parallel zu m sei. Das ist möglich nach Lemmata 3.20, 3.22. Mit Satz 3.12 enthält $P \leftrightarrow n \cap Q \leftrightarrow m$ die Falze $\mathrm{Lot}_{(P,m)}$, $\mathrm{Lot}_{(Q,n)}$ sowie PQ, nicht notwendigerweise alle drei verschieden. Damit ist das Lot von P auf m mit HJA6 faltbar.

Sei nun $P \in m$. Sei n eine beliebige zu m nichtparallele Faltgerade und $R \in n$ mit $R \notin m$. Dann kann mit HJA6 das Lot von R auf m gefaltet werden. Ist dieses Lot bereits das Lot von P auf m, dann liefert die Faltung $\{R \leftrightarrow n, P \leftrightarrow m\}$ das gesuchte Lot von P auf m. Ansonsten ist die Mittelsenkrechte des Fußpunkts des Lotes und R nach Lemma 3.21 faltbar. Das Lot von P auf diese Mittelsenkrechte schneidet n in Q. Die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ ist regulär und enthält als einen Falz das Lot von P auf m.

Es bleibt zu sehen, dass auch die zweite Lösung von $\{P \leftrightarrow P, m \leftrightarrow m\}_{P \in m}$, nämlich m selbst, durch HJA6 regulär faltbar ist. Sei dazu Q ein von P verschiedener Faltpunkt auf m und n eine von m verschiedene Gerade durch Q. Dann ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und enthält m als einen Falz. Damit dominiert HJA6 die Grundfaltung HJA4. □

Lemma 3.26. HJA6 dominiert die Grundfaltung $\{m \leftrightarrow m, n \leftrightarrow n\}_{m \perp n}$.

Beweis: Seien die Geraden m und n mit $m \perp n$ gegeben. Sei $P := m \cap n$. Nach Lemma 3.22 gibt es einen weiteren Punkt $Q \in n$. Dann ist $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und $P \leftrightarrow m \cap Q \leftrightarrow n = \{m, n\} = m \leftrightarrow m \cap n \leftrightarrow n$. □

Lemma 3.27. HJA6 dominiert die Grundfaltungen HJA5 und HJA7.

Beweis: Seien Faltpunkte P und Q sowie ein Falz m gegeben, so dass HJA5 regulär ist. Ist $P \in m$, dann ist die Konstruktion ähnlich im Beweis von Lemma 3.25. Sei n ein Falz durch Q, nichtparallel zu m (das ist möglich nach Lemma 3.20). Dann ist die Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und $P \leftrightarrow n \cap Q \leftrightarrow m$ enthält die Falze $\mathrm{Lot}_{(P,n)}$, $\mathrm{Lot}_{(Q,m)}$ sowie PQ, die nicht notwendig verschieden sein müssen.

Ist $P \notin m$, dann folgt aus der Regularitätsbedingung $\overline{PQ} \geq \overline{Qm}$. Sei n ein beliebiger Falz durch Q, dann ist $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär mit wenigstens den Falzen der Faltung $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow Q\}$. Damit dominiert HJA6 die Grundfaltung HJA5.

Seien nun der Punkt P und Geraden m, n so gegeben, dass die Grundfaltung HJA7 regulär ist. Die Argumentation verläuft ähnlich wie im Fall HJA5. Ist $m \nparallel n$, dann sei $Q \neq P$ ein beliebiger Faltpunkt auf n außerhalb von m. Damit ist $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär und die Falzmenge enthält

- m und n, falls $P \in m \wedge m \perp n$,
- die einzige senkrechte Tangente von $\rho(P, m)$ zu n, falls $P \notin m \wedge m \perp n$,
- das Lot von P auf n, falls $P \in m \wedge m \not\perp n$,
- die zu n senkrechte Tangente an $\rho(P, m)$ oder n, falls $P \notin m \wedge m \not\perp n$

gilt. Ist $m \parallel n$, dann folgt $P \notin m$ und $\overline{Pn} = \overline{mn} > 0$ aus der Regularitätsbedingung. Für jede Wahl von $Q \in n$ ist dann $\overline{PQ} \geq \overline{mn}$ und damit $\{P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n\}$ regulär mit den Falzen, von denen mindestens einer $n = P \leftrightarrow m \cap n \leftrightarrow n$ selbst ist. Damit sind alle Fälle behandelt und HJA6 dominiert HJA7. □

Nach dieser etwas mühsamer Arbeit haben wir das folgende Resultat bewiesen.

Satz 3.28. Die Grundfaltung HJA6 dominiert alle anderen Grundfaltungen. □

Wir können nun also sagen, dass alle Konstruktionsbeschreibungen innerhalb von 1-fach-Origami bereits mit einer einzigen Grundfaltung erfolgen können, der restringierten Beloch-Faltung, der Grundfaltung HJA6.

3.4.3. Grundfaltungen vs. Axiome

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass die einzelnen Grundfaltungen im axiomatischen Sinne nicht unabhängig voneinander sind und ihre Liste somit redundant ist. Wie schon bemerkt, waren diese Abhängigkeit bereits Jacques Justin klar. Daher ist es zunächst überraschend, wenn die Grundfaltungen dennoch als Axiome des 1-fach-Origami bezeichnet werden, vgl. [AL09], [KGI11]. Die Bezeichnungen »elementare Operationen«, »fundamentale Faltungen« vgl. [Jus90b], [Ger95], »basis fold operations«, vgl. [GKK13], legen nahe, dass es sich um Grundpfeiler der

Theorie des 1-fach-Origami handelt. Solche Grundpfeiler in mathematischen Theorien werden oft als Axiome bezeichnet. Aus fachmathematischer Sicht ist diese Bezeichnung für die Grundfaltungen sicherlich unzutreffend, da diese nicht einmal Aussagen sind. Die im vorigen Abschnitt diskutierte Dominanz der restringierten Beloch-Faltung legt ebenfalls nahe, die Grundfaltungen nicht als Axiome zu bezeichnen, vgl. ebenfalls Abschnitt 1.3.

Gleichzeitig ist aus fachdidaktischer Sicht einzuwenden, dass es in der Lehre durchaus hilfreich sein kann, die Grundfaltungen als Axiome zu bezeichnen und an diesem Fallbeispiel zu erklären, welche Anforderungen an Axiome gestellt werden.

Wir haben diese Sichtweise in [Ned20, S. 38] so formuliert:

> [...] über die Tatsache, dass diese »Axiome« [Grundfaltungen] nicht immer ausführbar sind, lässt sich streiten. Gut so! Schülerinnen und Schüler haben keine oder nur alltägliche Vorstellung von Axiomen und vom axiomatischen Denken und können folglich am gerade dafür ausgezeichneten 1-fach-Origami wesentliche Ideen über Axiome kennenlernen. Es ist aber gleichzeitig vertretbar, Grundfaltungen im Mathematikunterricht als Axiome zu bezeichnen. Für den Aufbau eines Axiomatisierungsverständnisses ist die anschließende Diskussion, ob sie als Axiome im mathematischen Sinne zu betrachten sind, ungemein wichtig. Insgesamt ist 1-fach-Origami eine geeignete Spielwiese für erste und ernste Diskussionen über Axiome.

3.4.4. Struktur von 1-fach-Origami

In diesem Abschnitt soll die algebraische Struktur des 1-fach-Origami angegeben werden. Die algebraische Perspektive erlaubt eine rasche Beurteilung, ob eine Konstruktion mit 1-fach-Origami möglich ist. Es ist an dieser Stelle nicht nötig, die entsprechenden Resultate vollständig zu entwickeln oder zu beweisen. Zum Ersten ist das für die Entwicklung der Kurse in Kapitel 5 von keiner primären Bedeutung. Die typischen Faltkonstruktionen werden dort im Rahmen der Unterrichtseinheiten vorgestellt und diskutiert. Diese Konstruktionen können auch als Zugang zum Beweis der in Satz 3.31 angeführten Ergebnisse genutzt werden. Allerdings ist der hier angegebene eher algebraische Zugang effektiver und eleganter. Zum Zweiten ist die Charakterisierung von 1-fach-Origami in Satz 3.31 in der Literatur gut dokumentiert und übersteigt zum Teil den Horizont der in den Kursen verlangten Grundkenntnisse. Zum Dritten bedürfte eine hinreichend ausführliche Darstellung vieler Lemmata und Definitionen. Für die weitere Entwicklung des Themas wird es genügen, die nötigen Resultate anzugeben und einzuordnen.

Was ist mit der algebraischen Struktur des 1-fach-Origami gemeint? Typischerweise, auch analog zur Struktur der Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen, wird darunter die Struktur der Menge alle Faltpunkte der euklidischen Ebene verstanden. Genauer ist dabei die Menge $\mathcal{O}$ aller Punkte der euklidischen Ebene gemeint, die ausgehend von $(0,0)$ und $(1,0)$ als Schnittpunkte von Falzen der Grundfaltungen auftreten. Im Lichte der Darstellung in Abschnitt 3.4.2 reicht dafür (mit kleinen Ergänzungen) die einzige Grundfaltung, nämlich HJA6. Die Menge $\mathcal{O}$ hat schöne algebraische Eigenschaften, welche entsprechend am elegantesten mit algebraischer Sprache formuliert werden. Es gibt verschiedene Charakterisierungen von $\mathcal{O}$, von denen wir einige im nächsten Satz sammeln wollen. In der Literatur, und weil das nächste Resultat eher algebraischer als geometrischer Natur ist, werden die Punkte (a,b) der euklidischen Ebene häufig mit den Elementen $a+ib$ im Körper der komplexen Zahlen identifiziert.

Satz 3.29. Die Menge $\mathcal{O}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.

Dieser Satz ist leicht zu beweisen; hierfür müssen für alle Körperaxiome entsprechende Faltkonstruktionen angegeben werden. Wir werden dies in mehreren Schritten in Kapitel 5 tun. Ein Beweis ist etwa in [Hul20, Lemmata 3.2–3.5] zu finden.

Da $\mathbb{Q}$ der Primkörper von $\mathbb{C}$ ist, folgt direkt

Korollar 3.30. Jede rationale Zahl ist mit 1-fach-Origami konstruierbar.

Eine tiefere Charakterisierung der Faltpunkte erfolgt im nächsten Satz.

Satz 3.31. Der Körper $\mathcal{O}$ der 1-fach-Origami-Punkte ist der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der unter quadratischem und kubischem Wurzelziehen sowie komplexer Konjugation abgeschlossen ist, vgl. [Alp00, Thm. 5.2].[28] Außerdem ist eine komplexe Zahl α genau dann ein 1-fach-Origami-Faltpunkt, wenn eine der drei folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

- Zu α gibt es Körper F_i mit $\mathbb{Q} = F_0 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}$ mit $[F_i : F_{i-1}] \in \{2,3\}$ für $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ und $\alpha \in F_n$.[29] Man sagt auch, α liege in einem 2–3-Turm über $\mathbb{Q}$. Vgl. [Cox12, Theorem 10.3.4c]
- α lässt sich mit einem *markierten Lineal* konstruieren. Vgl. [Mar98, Thm. 10.14]
- α ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ und es existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$, so dass die Galois-Gruppe des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$ die Ordnung $2^a 3^b$ besitzt. Vgl. [Cox12, Theorem 10.3.6] □

[28] In [Jus90b, S. 258] formuliert Justin diese Aussage in ähnlicher Form wie folgt: Sind p und q in $\mathcal{O}$, dann ebenfalls jede reelle Nullstelle von $x^3 + px + q = 0$.

[29] In [DO07, S. 289] wird behauptet, dass Huzita und Scimemi [HS90] als Erste das nachfolgende Resultat »established« haben. In der Tat wird dort eine Beweisskizze angegeben, die nicht ganz vollständig ist, wobei es nicht ganz schwer ist, sie zu vervollständigen. Das genannte Resultat ist bereits in [Jus90b] enthalten und im selbem Buch wie der Artikel von Huzita und Scimemi nachgedruckt. Allerdings beweist Justin seinen Fund nicht.

Damit sind alle mit 1-fach-Origami konstruierbaren Punkte der euklidischen Ebene charakterisiert. Insbesondere lassen sich spezielle Punkte der Ebene auf Konstruierbarkeit mit 1-fach-Origami überprüfen. Sei etwa $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ für ein $n \geq 3$. Ist ζ_n oder besser ihre kartesische Entsprechung $(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n})$ ein Faltpunkt, dann ist insbesondere der Winkel[30] $\frac{2\pi}{n}$ und somit auch das regelmäßige n-Eck (charakterisiert durch die Eckpunkte auf dem Einheitskreis) 1-fach-konstruierbar, denn mit 1-fach-Origami können Winkel vervielfacht werden, vgl. Seite 173.[31] Die klassische Frage nach der Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken kann hier aus dem vorigen Satz abgeleitet werden. Diese Frage für das markierte Lineal wurde von James Pierpont 1895 beantwortet, vgl. [Mar98, S. 140], [Pie85]. Zusammen mit dem Ergebnis aus dem Satz 3.31 wollen wir daher den folgenden Satz auch Pierpont zuschreiben.

Satz 3.32 (Pierpont). Sei $n \geq 3$. Ein regelmäßiges n-Eck ist genau dann mit 1-fach-Origami konstruierbar,[32] wenn $n = 2^a 3^b \prod_{i=1}^{k} p_i$ für $a, b, k \in \mathbb{N}_0$ und p_i paarweise verschiedene Pierpont-Primzahlen,[33] also Primzahlen der Form $2^l 3^m + 1$ für $l, m \in \mathbb{N}_0$, sind. Für Beweise siehe [Gle88, Theorem 2], [Mar98, Pierpont's Theorem].

3.4.5. 1-fach-Origami vs. Zirkel und Lineal

Wir haben gerade gesehen, dass 1-fach-Origami dieselbe algebraische Konstruktionsstärke wie das markierte Lineal besitzt. Dieses wiederum konstruiert bekanntlich mehr Punkte als Zirkel und Lineal. Insofern ist nun indirekt klar, dass 1-fach-Origami »mächtiger« ist, wie das oft in der Literatur zu lesen ist, als Zirkel und Lineal. Sollen die Konstruktionswerkzeuge »1-fach-Origami« und »Zirkel und Lineal«, welche beide in der euklidischen Ebene operieren, miteinander verglichen werden, dann können, wie eben, nicht nur die Mengen von Objekten, die sie zu konstruieren vermögen, verglichen werden. Auch die Konstruktionsschritte können verglichen werden, also *wie* die beiden Werkzeuge zu ihrem Ziel gelangen. Diese beiden Aspekte erscheinen hier am sinnvollsten, um einen Vergleich zwischen Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und 1-fach-Origami zu ziehen. Weitere Kriterien, wie etwa die Einfachheit der Konstruktion oder die praktische Genauigkeit, sind denkbar,

[30] Die Verbindungsgeraden von ζ_n und 0 sowie von $0, 1$ sind faltbare Geraden, daher nennen wir die von diesen Geraden eingeschlossenen Winkel ebenfalls faltbar oder 1-fach-konstruierbar.

[31] Alternativ liegen mit ζ_n auch alle Potenzen ζ_n^k im Körper $\mathcal{O}$.

[32] Die volle Konstruktionsstärke von 1-fach-Origami wird hier nicht benötigt, wie Andrew Gleason 1988 in [Gle88] zeigte. Es genügt ein schwächeres Konstruktionswerkzeug, der sog. Tomahawk, vgl. [Mar98, S. 20], mit dem, salopp gesprochen, Winkeldreiteilung möglich, aber kubisches Wurzelziehen im Allgemeinen nicht möglich ist.

[33] Nach einer noch offenen Vermutung von Gleason gibt es unendlich viele solche Primzahlen, vgl. [Gle88, Fußnote 8, S. 191]. Das ist interessant im Vergleich zu viel selteneren Fermat-Primzahlen.

doch für uns hier im Detail nicht von Bedeutung.

Um die Mengen von konstruierbaren Objekten etwas genauer als im einleitenden Absatz zu vergleichen, nutzen wir die übliche Charakterisierung der Menge der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte in der euklidischen Ebene:

Satz 3.33. Die Menge der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte ist der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der unter quadratischem Wurzelziehen abgeschlossen ist. Außerdem ist eine komplexe Zahl α genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn eine der drei folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

- Zu α gibt es Körper F_i mit $\mathbb{Q} = F_0 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}$ mit $[F_i : F_{i-1}] = 2$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\alpha \in F_n$. Man sagt auch, α liege in einem 2-Turm über $\mathbb{Q}$. Vgl. [Cox12, Theorem 10.1.6]
- α lässt sich mit dem Zirkel allein konstruieren. Das ist das berühmte Mohr-Mascheroni Resultat, vgl. [Mar98, Theorem 3.15] sowie [Hun94] für einen kurzen und elementaren Beweis.
- α ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ und die Ordnung der Galois-Gruppe des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$ ist eine 2er-Potenz. Vgl. [Cox12, Theorem 10.1.12] □

Vergleichen wir die Aussagen der Sätze 3.31 und 3.33, dann stellen wir fest, dass 1-fach-Origami im folgenden Sinne mächtiger ist als Zirkel und Lineal: Alle Punkte der euklidischen Ebene, die aus Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen hervorgehen, können auch mit 1-fach-Origami konstruiert werden, und darüber hinaus kann mit 1-fach-Origami mehr konstruiert werden. Dies liegt etwa daran, dass ein 2-Körperturm insbesondere ein 2-3-Körperturm ist, es aber Körpererweiterungen vom Grad 3 gibt. Die Aussagen der Sätze 3.31 und 3.33 suggerieren auch die folgende verbreitete aber mathematisch unsaubere Umschreibung der Leistungsfähigkeit der beiden Werkzeuge: Mit Zirkel und Lineal können »alle quadratischen« und mit 1-fach-Origami »alle kubischen« Gleichungen gelöst werden. Diese Beschreibung ist deswegen unsauber, weil sie implizit voraussetzt, dass über Gleichungen in einer Variable die Rede ist. Allerdings ist unklar, aus welchem Körper die Koeffizienten dieser Gleichungen kommen. Die volle Aussagenkraft steckt aber in den erwähnten Sätzen, denn dort können Koeffizienten natürlich auch aus passenden Erweiterungskörpern von $\mathbb{Q}$ kommen. Insbesondere können die Koeffizienten rational gewählt werden, da $\mathbb{Q}$ der Primkörper dieser Erweiterungskörper ist.

Am Anfang des Abschnitts haben wir eine zweite Möglichkeit in Betracht gezogen, um Zirkel und Lineal mit 1-fach-Origami zu vergleichen: Durch welche Operationen gelangen die Werkzeuge zu den konstruierten Objekten? Welche *Grundkonstruktionen* liegen beiden Werkzeugen zugrunde und lassen sie sich vergleichen?

Zum Vergleich der Grundkonstruktionen beider Werkzeuge listen etwa [Ger95] und [Cox12, S. 255-6] folgende Grundkonstruktionen für Zirkel und Lineal auf:

E1 Für zwei verschiedene Punkte P und Q kann eine Gerade konstruiert werden, auf der beide Punkte liegen.

E2 Für drei Punkte $P \neq Q$ und M kann ein eindeutiger Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{PQ}$ konstruiert werden.

E3 Der Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden, die wie in E1 entstanden sind, kann konstruiert werden oder existiert nicht.

E4 Die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises, die wie in E1-2 entstanden sind, können konstruiert werden oder existieren nicht.

E5 Die Schnittpunkte zweier verschiedener Kreise, die wie in E2 entstanden sind, können konstruiert werden oder existieren nicht.

Geretschläger beschreibt dabei, wann genau die Schnittpunkte in E3–5 existieren, wobei Cox lediglich bemerkt, »assuming they [Mengen der Schnittpunkte] are nonempty«. Der eigentliche Vergleich zwischen den Grundkonstruktionen E1–5 und den Grundfaltungen wurde bereits in [Ger95] und [Ger08] ausführlich behandelt, auf diese Darstellung verzichten wir hier. Dort wird gezeigt, dass jede der Grundkonstruktionen E1 bis E5 auch durch (eine Kombination von) Grundfaltungen ersetzt werden kann.

Es ergibt sich nicht nur, dass 1-fach-Origami alle Punkte konstruieren kann, die mit Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen konstruierbar sind. Wir sehen, dass sogar alle Konstruktionsschritte, die Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen definieren, bereits mit 1-fach-Origami ausführbar sind. Wir werden in Kapitel 5 auf viele konkrete Konstruktionen im Detail eingehen. In den Kursen kam typischerweise an diesem Punkt die Frage auf, warum denn in der Schule Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen nicht durch 1-fach-Origami ersetzt werden. Diese Frage besitzt mehr Dimensionen als nur die mathematische, daher diskutieren wir das hier nicht.

3.5. Einordnung und Ausblick

Das mathematische Papierfalten beschränkt sich nicht auf 1-fach-Origami. Vor allem in den letzten Jahren ist der Fokus der mathematischen Untersuchungen in Richtung des eher angewandten Origami gewechselt, vgl. [Lan18a, Bände 2-4] – seit 1990 eine Standardquelle für einen aktuellen Überblick in der (mathematischen) Origami community. Aktuell wird viel an starrem Falten (rigid foldability) geforscht [Hul20, S. 290], [Abe+16]. Eine Mathematisierung des künstlerischen Origami ist ebenfalls zu beobachten [Lan18b], [Lan18a, Band 2].

Innerhalb des geometrisch-algebraischen Papierfaltens werden unter anderem Verallgemeinerungen von 1-fach-Origami untersucht. So beschäftigt sich das 2-fach-Origami mit der Frage, Gleichungen welchen Grades mit Falten gelöst werden können, wenn dabei nicht nur ein Falz, sondern zwei Falze gleichzeitig erzeugt werden dürfen, vgl. [AL09, ab S. 379], [Nis15], [KN16]. Es scheint aber schwer zu sein, den Grundfaltungen (die Anzahl ist je nach Zählung dreistellig) anzusehen, welche Gleichungen sie zu lösen vermögen, vgl. [Hul20, Open Problem 4.1]. Bisher konnte (auch mit unserer Unterstützung) gezeigt werden, dass alle generischen septischen Gleichungen in einer Variablen, deren Koeffizienten mit 2-fach-Origami konstruierbar sind, mit 2-fach-Origami gelöst werden können, vgl. [KN16, Theorem 4]. Alperin und Lang zeigten zwar, dass alle Gleichungen[34] vom Grad $n \geq 3$ mit reellen Lösungen mit $(n-2)$-fach-Origami gelöst werden können, aber es ist noch ziemlich offen, inwieweit $n-2$ hier verbessert werden kann, vgl. [AL09, Theorem 1], [Hul20, Open Problem 4.2].

Ein weiteres großes Teilgebiet des mathematischen Papierfaltens ist die Theorie der Flachfaltbarkeit, vgl. [Hul12, Act. 21-24], [Hul20, Ch. 5-6], [BH96], deren Hauptfrage, wie folgt, sehr alltäglich formuliert werden kann: Welche Faltmuster lassen sich zu einem flachen Objekt falten. Die Präzisierung dieser Hauptfrage ist etwas technisch. Wir werden die Flachfaltbarkeit in Kapitel 5 in der Kursbeschreibung ohne eine präzise mathematische Definition benutzen. Wesentliche Resultate sowie mathematische und didaktische Überlegungen finden sich in [BN16]. Dieser Bericht wird mit freundlicher Genehmigung des Zweitautors im Anhang A.1 abgedruckt. Für eine sorgfältige Behandlung der Flachfaltbarkeit wird auf [DO07, Ch. 12-13], [Hul20, Part II] verwiesen.

Literatur zum Kapitel 3

[Abe+16] Zachary Abel u. a. »Rigid Origami Vertices: Conditions and Forcing Sets«. In: *Journal of Computational Geometry* Vol 7.1 (2016), S. 171–184. arXiv: 1507.01644. URL: https://jocg.org/index.php/jocg/article/view/3013/2724 (besucht am 27. 05. 2020) (*cf. S.* 132).

[Alp00] Roger C. Alperin. »A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers«. In: *New York Journal of Mathematics* 6 (2000), S. 119–133 (*cf. S.* 23, 34, 89, 99, 129, 181, 195).

[AL09] Roger C. Alperin und Robert J. Lang. »One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms«. In: *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Robert J. Lang. A K Peters, 2009, S. 371–393 (*cf. S.* 37, 90–91, 99–101, 105, 107, 110, 114, 123, 127, 133, 197).

[34] Bereits 1986 regte Jacques Justin an, n-fach-Origami zu formalisieren und fragte, ob damit alle algebraischen Gleichungen gelöst werden können, vgl. [Jus90b, S. 260].

[AC95] David Auckly und John Cleveland. »Totally Real Origami and Impossible Paper Folding«. In: *The American Mathematical Monthly* 102.3 (März 1995), S. 215–226 (*cf. S.* 23, 34, 95).

[BN16] Johannes Beck und Dmitri Nedrenco. *Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. urn:nbn:de:bvb:20-opus-133647. Universität Würzburg, 2016. URL: https://opus.uni-wuerzburg.de/frontdoor/index/index/docId/13364 (*cf. S.* 133, 150–152, 155).

[BH96] Marshall Bern und Barry Hayes. »The Complexity of Flat Origami«. In: *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996, S. 175–183 (*cf. S.* 133, 153).

[Buh+12] Joe Buhler u. a. »Origami Rings«. In: *J. Aust. Math. Soc.* 92.3 (Juni 2012), S. 299–311 (*cf. S.* 105).

[Cho55] Gustave Choquet. »Sur l'enseignement de La Géométrie Élémentaire«. In: *L'enseignement Des Mathématiques*. Hrsg. von Jean Piaget. Delachaux & Niestlé, 1955, S. 75–129 (*cf. S.* 93).

[Cho64] Gustave Choquet. *L'enseignement de La Géometrie*. Paris: Hermann, 1964 (*cf. S.* 93).

[Cho69] Gustave Choquet. *Geometry in a Modern Setting*. Hermann, 1969 (*cf. S.* 93–94).

[Cho70] Gustave Choquet. *Neue Elementargeometrie*. Vieweg, 1970 (*cf. S.* 93–94).

[Cox12] David A. Cox. *Galois Theory*. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics. Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2012 (*cf. S.* 37, 89, 101, 129, 131–132).

[DO07] Erik D. Demaine und Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007 (*cf. S.* 21, 24, 35, 95, 98, 129, 133, 184).

[Fri18] Michael Friedman. *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*. Springer, 2018 (*cf. S.* 9–18, 22, 24–25, 29, 35, 47, 93, 192).

[Ger95] Robert Geretschläger. »Euclidean Constructions and the Geometry of Origami«. In: *Mathematics Magazine* 68.5 (Dez. 1995), S. 357–371 (*cf. S.* 23–24, 34, 89–90, 98, 111, 127, 132).

[Ger08] Robert Geretschläger. *Geometric Origami*. Arbelos, 2008 (*cf. S.* 24, 90, 98, 132, 174, 178–179, 181–183).

[GKK13] Fadoua Ghourabi, Asem Kasem und Cezary Kaliszyk. »Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions«. In: *Automated Deduction in Geometry*. Hrsg. von Tetsuo Ida und Jacques Fleuriot. Bd. 7993. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 143–160. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-40672-0_10 (besucht am 27. 05. 2020) (*cf. S.* 37, 89, 102, 107, 114, 120, 124, 127).

[Gle88] Andrew M. Gleason. »Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon«. In: *The American Mathematical Monthly* 95.3 (März 1988), S. 185–194 (*cf. S.* 130).

[Hul11] Thomas C. Hull. »Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill«. In: *The American Mathematical Monthly* 118.4 (2011), S. 307–315 (*cf. S.* 14–16, 18, 34–35, 89, 192).

[Hul12] Thomas C. Hull. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press, 2012 (*cf. S.* 65, 98, 101, 115, 133, 149–150, 154, 159, 163, 173, 177, 179–181, 185, 192).

[Hul20] Thomas C. Hull. *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. New York: Cambridge University Press, 2020 (*cf. S.* 4–5, 9, 21, 35, 95, 129, 132–133, 174).

[Hun94] Norbert Hungerbühler. »A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem«. In: *The American Mathematical Monthly* 101.8 (Okt. 1994), S. 784–787 (*cf. S.* 131).

[Huz90a] Humiaki Huzita. »Axiomatic Development of Origami Geometry«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 143–158 (*cf. S.* 22, 27, 29, 97–98, 106).

[Huz90b] Humiaki Huzita, Hrsg. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990 (*cf. S.* 14, 17, 22, 24, 28, 34–35, 97).

[HS90] Humiaki Huzita und Benedetto Scimemi. »The Algebra of Paper-Folding (Origami)«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Humiaki Huzita. Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 215–222 (*cf. S.* 27, 29, 34, 97–98, 129).

[Jus84c] Jacques Justin. »Pliage et Mathematiques«. In: *Le Pli* 19 (Juni 1984), S. 2–3 (*cf. S.* 28, 93).

[Jus90b] Jacques Justin. »Résolution par pliage de l'équation du troisieme degré et applications geometriques«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Hum. Huzita. (Nachdruck aus in *L'Ouvert: Journal de L'APMEP d'alsace et de l'IREM de strasbourg*, N°42, März 1986, S. 9–19). Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 251–261 (*cf. S.* 4, 23–24, 26–30, 32, 34, 37, 90, 96, 123, 127, 129, 133, 189).

[KGI11] Asem Kasem, Fadoua Ghourabi und Tetsuo Ida. »Origami Axioms and Circle Extension«. In: *Proceedings of the 2011 ACM Symposium on Applied Computing - SAC '11*. The 2011 ACM Symposium. TaiChung, Taiwan: ACM Press, 2011, S. 1106–1111 (*cf. S.* 123, 127).

[KN16] Joachim König und Dmitri Nedrenco. »Septic Equations Are Solvable by 2-Fold Origami«. In: *Forum Geometricorum* 16 (2016), S. 193–205 (*cf. S.* 101, 133).

[Lan18a] Robert J. Lang, Hrsg. *The Proceedings from the 7th International Meeting on Orgami in Science, Mathematics, and Education*. International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education (2018, Oxford): Tarquin, 2018 (*cf. S.* 23, 132).

[Lan18b] Robert J. Lang. *Twists, Tilings, and Tessellations: Mathematical Methods for Geometric Origami*. Boca Raton London New York: CRC Press, 2018 (*cf. S.* 21, 132).

[Luc17a] Jorge C. Lucero. »On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane«. 28. Mai 2017. arXiv: 1610.09923 [math]. URL: http://arxiv.org/abs/1610.09923 (besucht am 27. 05. 2020) (*cf. S.* 102).

[Luc17b] Jorge C. Lucero. »On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane«. In: *Forum Geometricorum* 17 (2017), S. 207–221 (*cf. S.* 37, 90, 102, 107).

[Luc19] Jorge C. Lucero. »Existence of a Solution for Beloch's Fold«. In: *Mathematics Magazine* 92.1 (Jan. 2019), S. 24–31. URL: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0025570X.2019.1526591 (besucht am 27. 02. 2021) (*cf. S.* 89, 101–102).

[Mar75] George E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, 1975 (*cf. S.* 38–39, 41, 50, 62–63, 104, 176, 203, 287).

[Mar98] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998 (*cf. S.* 10, 34–37, 90, 99, 108, 118, 124, 129–131, 174, 180).

[Möl18] Florian Möller. »When Is an Origami Set a Ring?« 27. Apr. 2018. arXiv: 1804.10449 [math]. URL: http://arxiv.org/abs/1804.10449 (besucht am 16. 04. 2021) (*cf. S.* 105).

[Ned15] Dmitri Nedrenco. »On Origami Rings«. 27. Feb. 2015. arXiv: 1502.07995 [math]. URL: http://arxiv.org/abs/1502.07995 (besucht am 16. 04. 2021) (*cf. S.* 105).

[Ned20] Dmitri Nedrenco. »Mathematik der Dreifaltigkeit«. In: *Alternatives Konstruieren - mit Zirkel und ... genial!* Der Mathematikunterricht Jahrgang 66 (Heft 3, Juni 2020). Hrsg. von Jan Franz Wörler, Christian van Randenborgh und Hans-Stefan Siller, S. 31–40 (*cf. S.* 91, 128, 159–161, 163, 166, 173, 175, 178).

[Nis15] Yasuzo Nishimura. »Solving Quintic Equations by Two-Fold Origami«. In: *Forum Mathematicum* 27.3 (1. Jan. 2015). URL: https://www.degruyter.com/view/j/forum.2015.27.issue-3/forum-2012-0123/forum-2012-0123.xml (besucht am 27. 05. 2020) (*cf. S.* 133).

[Pie85] James Pierpont. »On an Undemonstrated Theorem of the Disquisitiones Arithmeticæ«. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 2.3 (Dez. 1985), S. 77–83 (*cf. S.* 130).

[WG09a] Julia Waschbusch und Thomas Gawlick. *Grundfaltungen des Origamis*. 2009. URL: https://docplayer.org/50440733-Grundfaltungen-des-origamis.html (besucht am 24. 03. 2021) (*cf. S.* 100).

[WG09b] Julia Waschbusch und Thomas Gawlick. »Grundfaltungen des Origamis«. In: *Mathematik und Origami*. Der Mathematikunterricht 55.6 (Dez. 2009). Hrsg. von Jürgen Flachsmeyer, S. 49–62 (*cf. S.* 37, 99–100).

Teil II.

Über die Kurse

Lehrmathematik ist eine Reihe miteinander mysteriös verknüpfter Trivialitäten.

(*private Kommunikation*)

4. Überblick über die Kurse

In diesem Kapitel beschreiben wir die Gestaltung des Kurses »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten«. Dieser semesterlange Kurs fand viermal statt, weitere Randdaten, Rahmen- sowie Durchführungsbedingungen werden in Abschnitt 4.2 präsentiert. Die Inhalte der Kurse finden sich in Kapitel 5.

In Abschnitt 4.1 halten wir die Grobziele dieser Veranstaltung fest. Die Ziele der einzelnen Kurseinheiten werden erst in Kapitel 5 beschrieben. Die mathematische Sachanalyse des 1-fach-Origami haben wir in Kapitel 3 gegeben. Eine Einordnung in die Bildungsstandards haben wir in Kapitel 1 in Abschnitten 1.3 und 1.4 gesehen. Zur Lehrmethodik verweisen wir auf den Abschnitt 4.3.

Die Kursbeschreibung aus Kapitel 5 ist eine idealisierte und kommentierte Darstellung der eigentlichen vier Kurse. Mit dieser Beschreibung wird das erste Forschungsziel, vgl. Kapitel 2, erreicht. Die Inhalte der vier Kurse werden dann kurz in Abschnitt 5.4 dargestellt.

4.1. Grobziele der Kurse

Die groben Richtziele für die Kurse, die wir bereits in Kapitel 2 innerhalb des Forschungsziels formuliert haben, spalten wir nun in kursspezifische Grobziele auf.

Grobziele

Studierende

a) untersuchen als Beispiel einer überschaubaren Theorie 1-fach-Origami aus zunächst naiver Perspektive und entwickeln eine präzise Beschreibung der Faltungen und resultierender Konstruktionen,
b) entdecken fundamentale Faltoperationen des 1-fach-Origami,
c) analysieren und formalisieren diese Grundfaltungen und entscheiden, ob sie als Axiome für 1-fach-Origami ausgewählt werden können,
d) konstruieren mit 1-fach-Origami klassische sowie fachspezifische Faltungen, vergleichen sie mit Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und analysie-

ren diese fachmathematisch,

e) erhalten einen Überblick über die Konstruktionsmöglichkeiten des 1-fach-Origami aus theoretischer und faltpraktischer Sicht,[1]
f) entdecken am Beispiel der »Flachfaltbarkeit« typische Resultate eines Teilgebiets des mathematischen Papierfaltens und ordnen diese lokal,
g) diskutieren über Qualitätsmerkmale von Axiomensystemen anhand des behandelten 1-fach-Origami sowie anhand der euklidischen Ebene aus klassischer und moderner Sicht,
h) gewinnen einen Einblick in die Metamathematik und Grundlagen der Axiomatik,
i) bearbeiten in Vorträgen oder Hausarbeiten grundlegende Fragen der Faltdidaktik, -methodik und beschäftigen sich mit dem Medieneinsatz beim Faltenlehren; damit bereiten sie eine mögliche Umsetzung im zukünftigen Mathematikunterricht vor.

Diese Ziele bestimmen bereits eine grobe Gliederung der Kurse: Angefangen mit technisch einfachen und alltäglichen Faltungen entdecken und analysieren Studierende immer kompliziertere Konstruktionen. Dabei bemerken sie Schwierigkeit in der Präsentation der Faltungen (etwa das Fehlen einer angemessenen Unterrichtssprache, gar jeglicher angemessener Verbalisierung für eine Faltanleitung) eignen sich typische Sprechweisen an. Im weiteren Verlauf werden die kennengelernten Konstruktionen unter die Lupe genommen und auf Grundfaltungen zurückgeführt. Damit geschieht eine gewisse naive Axiomatisierung des Gebiets. An- und abschließend wird auf die Axiomatisierung der euklidischen Ebene eingegangen.

Auch das Abstraktionsniveau steigt mit dem Fortschreiten des Kurses zunehmend. Es wird mit relativ leicht zu entdeckenden Gesetzmäßigkeiten der Flachfaltbarkeit angefangen, sie werden lokal geordnet und bewiesen. Beim 1-fach-Origami steigt das Niveau von anfänglichen Beispielfaltungen über algorithmische Faltkonstruktionen bis zu kubischen Problemen, Definitionsaufgaben und metamathematischen Fragen. Beim Übergang zur euklidischen Ebene bleibt das Niveau mit undefinierten Grundbegriffen, gödelschen Resultaten und Modellen hoch.

4.2. Übersicht und Daten

Die vier Kurse waren jeweils einsemestrig, fanden

[1] Dieses Ziel liefert eine Rechtfertigung dafür, in den Kursen auf Faltungen und Konstruktionen einzugehen, die nicht unmittelbar für unsere Axiomatisierungszwecke, sondern für allgemeine Faltbildung nützlich ist.

^{15}**Kurs** im Sommersemester 2015,
^{16}**Kurs** im Wintersemester 2015/16,
^{17}**Kurs** im Wintersemester 2016/17,
^{19}**Kurs** im Wintersemester 2018/19,

jeweils ein Mal in der Woche statt. Eine Sitzung dauerte 90 Minuten. In der Abb. 4.1 finden sich unter anderem die Fachsemesterzahlen der Teilnehmenden je Kurs.

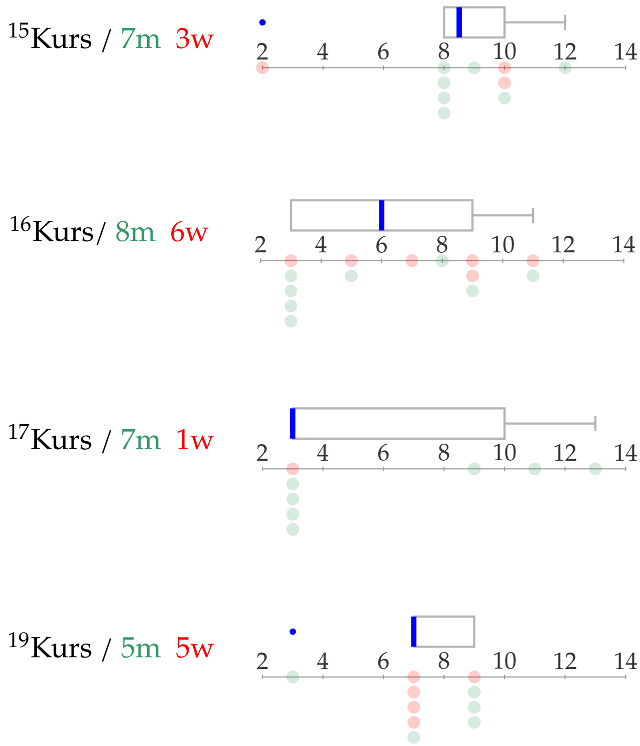


Abbildung 4.1.: Fachsemesterzahlen der Studierenden aus den Kursen (Pre-Post-Test absolviert). Die Boxen stellen *IQR*, die Antennen $1,5 \times IQR$, der blaue vertikale Strich den Median und die blauen Punkte Ausreißer dar. Ein roter Kreis repräsentiert eine Studentin und ihr Fachsemester, ein grüner Kreis einen Studenten und sein Semester.

4.2.1. Rahmenbedingungen und Voraussetzungen

Folgende Rahmenbedingungen waren für die Kurse unveränderbar vorgegeben:

- Der Kurs wird im sog. Freien Bereich angeboten, das heißt nur gymnasiale Lehramtsstudierenden können für diesen Kurs ECTS-Punkte angerechnet bekommen. Ferner bedeutet dies, dass der Besuch des Kurses in keinster Weise verpflichtend gemacht werden kann. Insbesondere konnten keine verpflich-

tenden Übungsaufgaben eingesetzt werden, was die Möglichkeiten zum Reflektieren und Üben des Kursstoffs erheblich einschränkte.
- Die Kursdauer beträgt ein Semester, der Kurs beansprucht zwei Semesterwochenstunden und im Falle des Bestehens werden drei ECTS-Punkte angerechnet. Die Prüfungsleistung ist eine zu einer 10–12-seitigen Projektarbeit äquivalente Leistung.

Eine weitere Bedingung für die Teilnahme an den Kursen war, dass Studierende möglichst regelmäßig den Kurs besuchen sollten. Es gab keine Anwesenheitskontrolle, jedoch wurden die Studierenden angehalten, nicht öfter als zwei Mal zu fehlen. In der Tat hielten sich die Teilnehmenden weitestgehend daran.

4.2.2. Vorwissen

Das tatsächliche Fachsemester der jeweiligen Studierenden war für die Teilnahme keine Einschränkung, allerdings wurden bevorzugt Studierende ab dem dritten Fachsemester zugelassen, damit sie zumindest mit wesentlichsten Techniken und Begriffen der Hochschulmathematik vertraut waren.

Es wäre zwar wünschenswert, Studierende mit vorhandenem algebraischen Vorwissen für die Teilnahme an den Kursen zu gewinnen. Aus lokal-organisatorischen Gründen war jedoch nur mit einer einstelligen Zahl an Interessenten zu rechnen, die über dieses Vorwissen verfügten. Um das Zustandekommen des Kurses nicht zu gefährden, wurde daher auf das algebraische Vorwissen verzichtet und entsprechende Resultate, etwa solche über mit Zirkel und Lineal konstruierbare Zahlen, wurden im Kurs bei Bedarf mitgeteilt.

In der Tat variierte das (algebraische) Vorwissen der Teilnehmenden in den Kursen stark, es konnte aber beobachtet werden, dass auch weniger erfahrene Studierende am Kursgeschehen trotzdem erfolgreich teilnehmen konnten.

Schulgeometrisches Wissen wie etwa Ähnlichkeit von Dreiecken, Strahlensätze, Sätze der Pythagoras-Gruppe, trigonometrische Sätze im Dreieck wurden implizit vorausgesetzt, da sie explizit in den Kursen beim Analysieren von Faltkonstruktionen und Begründen von deren Richtigkeit gebraucht wurden. In der Tat war dieses Wissen bei Teilnehmenden oft nicht uneingeschränkt vorhanden. Das führte zu durchaus wertvollen Diskussionen, behinderte aber die zeitliche Ausgestaltung des Kurses teilweise erheblich.

4.2.3. Ausstattung und benötigte Materialien

Abgesehen von speziellen Faltungen haben Studierende fast ausschließlich mit (ein- und zweifarbigen) quadratischen Papierstücken der Seitenlängen zwischen 10 und

20 Zentimetern gefaltet, welche sie in ausreichender Anzahl zur Verfügung gestellt bekamen. Der Dozent faltete zumeist mit größeren Papieren mit Seitenlängen 20 bis 30 cm, in der Tafelebene oder in der Luft.

> In vielen traditionellen Faltkonstruktionen werden Papiere im DIN-A4-Format verwendet. Das hat natürlich den Vorteil, dass diese Papiere (etwa als Druckerpapier) schnell und günstig verfügbar sind. Außerdem ist diesen Papieren ein irrationales Verhältnis der Seiten intrinsisch gegeben, was in vielen Konstruktionen von Vorteil sein kann. Wir präferieren jedoch die puristische Form der Quadrate zum Falten, vgl. auch die Darstellung in [Sch19, Kapitel 3].

Die Kursräume waren immer mit einer Kreidetafel und einem Beamer ausgestattet. In den letzten zwei Kursen wurde eine »U-Formation« der Tische eingeführt, da sie deutlich vorteilhafter für gemeinsames Falten und Diskutieren erscheint.

In der Summe wurden als Hilfsmittel Kreidetafel, Tische, Faltpapiere, selten Beamer verwendet.

4.3. Lehrmethodik

Bei der Gestaltung der Kurse orientierten wir uns in erster Linie am Stoff, vgl. Kapitel 3, Abschnitt 1.3. Es wurde im Vorfeld festgelegt, welche Inhalte behandelt werden sollen, dabei wurde kein Skript erstellt, da die Kurse nicht im Stile einer Vorlesung, sondern einer Gruppendiskussion stattfinden sollten. Dementsprechend waren die Inhalte nicht starr vorgegeben, sondern orientierten sich am Kursgeschehen. Je nach Situation konnten wir entscheiden, ob gewisse vorbereitete Inhalte zeitlich verschoben, durch andere ersetzt oder als Hausaufgaben gestellt werden konnten.

Die Atmosphäre und räumliche Gestaltung waren darauf ausgerichtet, eine gemeinsame ungezwungene Beschäftigung mit dem Thema zu ermöglichen. Studierende wurden angehalten und aufgefordert, ihre Einschätzungen abzugeben, Lösungen vorzuschlagen, vorzuführen, Lösungen anderer kritisch zu bewerten. Diskussionen waren erwünscht und größtenteils produktiv und lehrreich.

> **Einschränkende Bemerkung**
>
> Wir haben bereits in den Kapiteln 1 und 2 die Sichtweise von Hans-Joachim Vollrath vorgetragen, in einem entdeckenden Mathematikunterricht werde über Begriffe nicht nur geredet, sondern mit ihnen auch gehandelt.[a]

Es wäre leicht zu behaupten, gerade eine Beschäftigung mit Papierfalten erfülle die Bedingung, über die Begriffe (des 1-fach-Origami) nicht nur zu reden, sondern sie händisch zu erarbeiten. Tatsächlich ist das natürlich nur bis zum gewissen Grad möglich. Lassen sich bestimmte Dreieckskonstruktionen direkt falten und beim Falten analysieren, wird es nur exemplarisch möglich sein, eine kubische Gleichung per Falten zu lösen; selbst das geht nur partiell per Falten. So werden bestimmte Punkte der Ebene durch 1-fach-Origami konkret konstruiert, doch es wird in der Regel algebraisch nachgerechnet, dass diese Punkte in der Tat die gesuchten Lösungen sind. Gewissermaßen ist das natürlich auch Arbeiten mit dem 1-fach-Origami, allerdings auf einer anderen Ebene, auf der das Falten an sich eine untergeordnete Rolle spielt.

[a] Vgl. auch [Vol84, S. 20].

Die von uns eingesetzte und angestrebte Lehrmethodik lässt sich mehreren didaktischen Prinzipien zuordnen.

Wir pflegten die *sokratische Methode* des Fragens bis zu einem gewissen und vertretbaren Grad. Konkrete Beispiele aus den Kursen geben wir in Kapitel 5. Natürlich konnten wir diese Methode in puristischer Form (»der Lehrer fragt nicht, noch antwortet er«, vgl. [Wag74, S. 6]) nicht vollends umsetzen, dafür war die Fülle des Stoffes gemessen an der vorhandenen Unterrichtszeit nicht verhältnismäßig.

Es bietet sich an, die Struktur und die Motivation der Kurse auch in das *Entdeckende Lernen* einzuordnen. Schließlich wurden Studierende mit großen Überfragen »Wie lässt sich 1-fach-Origami definieren?«, »Welche Grundfaltungen besitzt 1-fach-Origami?« aber auch kleinen situativen Fragen wie »Wie wollen wir ein Faltdreieck definieren?« konfrontiert, die sie scheinbar alleine beantworten sollten. In der Tat gab es nur selten den Eindruck, dass Studierende nicht daran geglaubt haben, diese Fragen *selbständig*, aber natürlich mit unserer Unterstützung, anzugehen und zu lösen. Wir hatten den Eindruck, sie *wollten* diese Aufgaben lösen, auch wenn sie jederzeit etwa nach Grundfaltungen des 1-fach-Origami hätten googeln können.

Dabei sind wir uns der deutlichen Kritik von David Kollosche am Prinzip des Entdeckenden Lernens bewusst, vgl. [Kol17, S. 228]:

> »Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Entdeckendes Lernen nicht generell gegenüber dem Expositionslernen zu bevorzugen ist«.

Für diesen speziellen Kurs, in dem das Entdecken der inneren Strukturen beim Falten und nicht etwa das Erlernen konkreter Handlungsschemata gerade der Punkt ist, halten wir trotzdem an dieser Methode vorsichtig fest. David Kollosche präzisiert ferner, es gäbe einen Konsens darüber, »dass ungelenktes Entdecken in der

Regel nicht zu besseren Lernleistungen als Expositionslernen führt«, vgl. [Kol17, S. 226]. Wir sehen diese Kritik trotz unserer Lehrerfahrung auch für unsere Kurse als anwendbar an, distanzieren uns aber auch insofern davon, als unsere Kurse kein pures Entdeckendes Lernen, sondern eine fachlich orientierte und begründete Mischung aus Exposions- und Entdeckeckungslernen darstellen, was Kollosche als »hybride« Form bezeichnet, vgl. ebenda.

Auch aus der Perspektive des sog. genetischen Prinzips lässt sich unser Kurs sehen. Aus der Beschreibung von Hans-Georg Weigand in »Didaktische Prinzipien«[2]

> »Das zentrale Anliegen des *genetischen Prinzips* ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelernt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den *Prozess* der Entstehung von Mathematik erhalten. Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich nur um Nacherfindungen handelt.«

folgern wir für uns, dass das Nacherfinden der Grundfaltungen, Faltkonstruktionen und algebraischen Ergebnisse zumindest teilweise innerhalb des genetischen Prinzips eingeordnet werden kann.

So ist die vage, wenig greifbare Definition von 1-fach-Origami, als eine Faltart, die genau einen Falz erzeugt, im Sinne obiger didaktischer Konzepte sinnvoll und gewollt. Studierende suchen dabei nach einer brauchbaren Definition, versuchen sie wiederzuentdecken.

Auch aus der Perspektive der *didaktischen Rekonstruktion*, wie dies etwa in [Wei15, S. 263] beschrieben wird, lassen sich die Kurse eiordnen. Gewissermaßen kann hier ein Wechsel von den prämathematischen Konzepten (Falten, Basteln) zu ihren mathematischen Formalisierungen beobachtet werden. So werden Studierende dazu motiviert, gefaltete Konstruktionen zu analysieren, zu mathematisieren, untereinander einzusortieren. Der Wechsel könnte hier in der Beobachtung stecken, dass Studierende dasselbe Objekt, eine konkrete Faltung, nun mit neuen Augen sehen.

Hans-Georg Weigand schreibt aber dazu, vgl. [Wei15, S. 263]:

> »Da es sich bei Begriffsentwicklungen aber häufig nicht um einen *Wechsel*, sondern ›lediglich‹ um Veränderungen, Erweiterungen oder Umorganisieren vorhandener Vorstellungen handelt, erscheint der Begriff der *begrifflichen* oder *didaktischen Rekonstruktion* (conceptual reconstruction) angemessener« und

[2] vgl. »Texte zu Grundfragen der Mathematikdidaktik«, Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg, 2003, `https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/vollrath_begriffe.pdf`, Seite 5.

> »Während die ursprüngliche Idee der *Conceptual Change Theorie* vor allem auf einen Vorstellungswandel bei konkreten fachlichen Inhalten und auf die kognitiven Aspekte des Lernens bezogen war, wurde mittlerweile die *didaktische Rekonstruktion* um motivationale, soziale, situative und metakognitive Aspekte erweitert.«

Einerseits erweitert die mathematische Darstellung der Faltungen die Vorstellungen von einer Faltung. Auch die ggf. naiven Vorstellungen von Axiomen der Studierenden werden durch fachlich fundierte Erkenntnisse und Vorstellungen erweitert. Andererseits geht es hier um genau die fachlichen Inhalte, zu denen die Vorstellungen gründlich geändert werden sollen. Das geschieht aus der Motivation heraus, die Faltungen zu verstehen, sie auch mathematisch zu fassen, banale Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit gewisser Faltungen beantworten zu können. Der Wechsel der Perspektive, eine bessere mathematische Darstellung der Faltung sind auch insofern fruchtbar, als es nun wesentlich leichter ist, vorhandene Probleme zu lösen. Speziell beim Axiomenbegriff kann es durchaus sein, dass Vorstellungen nicht weiter benutzt (etwa dass Axiome »unbeweisbar« sind) und durch neue ersetzt werden müssen. Die Situation passt zur Beschreibung von Merenluoto et al.:

> »Conceptual change is used to characterize situations where learner's prior knowledge is incompatible with the new conceptualization, and where learners are often disposed to make systematic errors or build misconceptions«, vgl. [ML04, S. 519].

Die nach der conceptual change theory zum Wechsel notwendigen Bedingungen: Unzufriedenheit mit vorhandenen Vorstellungen, Verständlichkeit, Plausibilität und Fruchtbarkeit der neuen Vorstellungen, vgl. ebenda, sind in unserem Fall leicht, wenn auch etwas eingeschränkt, zu erkennen.

Die Einschränkung kommt auch von den Vorsichthinweisen aus der Literatur. Die Vorstellungen der Studierenden können »sehr stabil und robust gegenüber Unterrichtsinhalten, die zwar der Fachsystematik entsprechen, jedoch quer zu den individuellen Modellen liegen« sein, vgl. [Vol+15, S. 581]. Bezogen auf die Formalisierung der Faltungen, kann das in der Tat ein Problem sein, wenn Studierende sich nicht »belehren« lassen und an ihrer Vorstellungen von Falten, etwa als einer dreidimensionalen Bewegung o.Ä., halten. Dem widmen wir in den Kursen gesonderte Aufmerksamkeit.

Aus der Perspektive der Axiomatisierungsfragen können auch weitere Probleme auftreten. So heißt es in der zitierten Arbeit von Vollstedt et al. weiter:

> »Schülerinnen und Schüler [verfügen] oftmals über Präkonzepte, die kaum an tragfähige wissenschaftliche Vorstellungen anschlussfähig sind.

> In den Situationen, in denen diese Präkonzepte nicht vereinbar sind mit den im Unterricht beobachteten Phänomenen, erweist sich das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler oftmals resistent gegenüber der notwendigen Restrukturierung. Die Lernenden tendieren eher dazu, ihre vorherigen Vorstellungen oberflächlich anzupassen oder gar zu stabilisieren, anstatt sie zu überdenken«, vgl. [Vol+15, S. 583].

In der Tat werden wir in unseren Tests beobachten, dass Studierende, obwohl mit universitären Darstellungen zum Axiomenkomplex konfrontiert, teilweise auf ihre schulischen, alltäglichen Vorstellungen zurückgreifen.

Diesem Problem begegnen wir in der Lehre (offenbar nicht erfolgreich genug), indem wir solche Präkonzepte und allgemeine Vorstellungen etwa zum Begriff des Axioms immer wieder situativ auf die Probe stellen und diskutieren wie tragfähig diese Vorstellungen sind. Das entspricht auch der Empfehlung, »in diesem Fall muss das Wissen neu strukturiert werden, so dass es zu einer Reorganisation der Konzepte kommt«, vgl. ebenda. Aber hier dürfen wir uns trotzdem nicht zu viel erhoffen, denn »empirische Forschung hat jedoch gezeigt, dass diese Vorgehensweise nicht immer eine Änderung der Konzepte bei den Schülerinnen und Schülern evoziert«, vgl. ebenda.

In der Analyse unserer Kurse erkennen wir jedoch einige Hinweise darauf, dass die verwendete Lehrmethode möglicherweise mit der didaktischen Rekonstruktion vereinbar ist. Wir erzeugen absichtlich eine gewisse Unzufriedenheit mit der vorhandenen Beschreibung des 1-fach-Origami, indem wir immer wieder Situation diskutieren, in denen die naive bzw. bis dahin erarbeitete Definition des 1-fach-Origami nicht tragend ist. Unter der Annahme, dass Studierende der Mathematik eine solche unbefriedigende Situation tolerieren können, sehen wir einige Voraussetzungen als erfüllt, dass ein concept change zumindest prinzipiell stattfinden könnte.

> »The learner needs to tolerate a cognitive ambiguity when dealing with the new knowledge system. [...] Coping with a new complex conceptual system is possible only if the learner has sufficient metacognitive skills to grasp conflicting notions« und
> »Our hypothesis is that this kind of learning approach (the experience-of-conflict path) is needed in tasks that demand conceptual change«, vgl. [ML04, S. 525].

Auch das beobachtete und in den Vorlesungsumfragen und Interviews geäußerte Interesse der Studierenden an den Inhalten der Kurse deutet an, dass die Teilnehmenden der Kurse die herbeigeführte mathematisch unbefriedigende Darstellung der Grundfaltungen und des 1-fach-Origami insgesamt aushalten können:

> »There is no doubt that interest and self-efficacy [...] are the fundamental aspects of high sensitivity and high tolerance of ambiguity«, ebenda.

Allerdings sind wir uns dessen bewusst, dass dieses Interesse und sogar ein gewisser Spaß im Kurs problematisch sein können, wenn Studierende lediglich glauben, die Inhalte und die neuen Konzepte verstanden zu haben:

> »High interest and self-efficacy might also increase the learner's tendency to take the path of illusion-of-understanding. This means that the learners' prior knowledge is developed enough for recognizing familiar elements in the new phenomenon, but not enough to pay attention to the novel aspect going beyond his/her current conceptions«, ebenda.

Insgesamt lässt sich die Lehrmethode unsere Kurse zum Teil im Lichte des conceptual change oder der didaktischen Rekonstruktion ansehen, aber diese Theorie ist nicht primär für die Gestaltung und Analyse der Kurse.

Für diese Kurse haben wir kaum eigene Faltkonstruktionen entwickelt, sondern bedienten uns inhaltlich aus der Literatur, die in Kapitel 3 bereits diskutiert und eingeordnet wurde. Viele der Konstruktionen, gar Lerneinheiten, sind bereits Folklore oder gehören zum Standardrepertoire einer mathematischen Origamibeschäftigung. Wir haben jedoch eine neue, zusammenhängende und aufeinander aufbauende Darstellung für diese Konstruktionen gefunden, was in der Literatur typischerweise nicht der Fall ist.

Literatur zum Kapitel 4

[Kol17] David Kollosche. »Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung.« In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 38.2 (Okt. 2017), S. 209–237 (*cf. S.* 144–145).

[ML04] Kaarina Merenluoto und Erno Lehtinen. »Number Concept and Conceptual Change: Towards a Systemic Model of the Processes of Change«. In: *Learning and Instruction* 14.5 (Okt. 2004), S. 519–534 (*cf. S.* 146–147).

[Sch19] Michael Schmitz. »Papierfalten im Mathematikunterricht: Anregungen und Beispiele«. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, 2019 (*cf. S.* 143, 150, 154, 157, 159).

[Vol84] Hans-Joachim Vollrath. *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett Stuttgart, 1984 (*cf. S.* 86, 144).

[Vol+15] Maike Vollstedt u. a. In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Hrsg. von Regina Bruder u. a. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2015, S. 567–590 (*cf. S.* 146–147).

[Wag74] Martin Wagenschein. »Entdeckung der Axiomatik«. In: *Der Mathematikunterricht* 1 (1974), S. 52–70 (*cf. S.* 144).

[Wei15] Hans-Georg Weigand. »Begriffsbildung«. In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Hrsg. von Regina Bruder u. a. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2015, S. 255–278 (*cf. S.* 145).

5. Der Kursentwurf

Dieser Kursentwurf ist das Resultat der vier Kurse, die wir von 2015 bis 2019 durchgeführt haben. Die nachfolgenden Beschreibungen lassen sich nicht einem konkreten Kurs zuordnen, sondern stellen ein idealisiertes und optimiertes Kursgeschehen, vor allem der letzten beiden Kurse, dar. Dabei geben wir Einblicke in tatsächliche Diskussionen aus den Kursen, die größtenteils aus unseren Gedächtnisprotokollen entstanden sind. Damit soll eine authentischere Darstellung des Kursgeschehens gegeben werden.

Die Beschreibung orientiert sich an vierzehn bis fünfzehn Sitzungen (je 90 Minuten) und teilt sich in drei Phasen ein: Die anfängliche Phase mit der Flachfaltbarkeit bestehend aus drei Sitzungen; die Hauptphase mit 1-fach-Origami mit acht–neun Sitzungen; die abschließende Phase zu Metamathematik mit drei Sitzungen.

Es ist kein Ziel dieses Abschnitts, eine minutiöse Darstellung der Kurse zu geben. Einerseits würde eine umfassende mathematische und didaktische Ausarbeitung den anvisierten Rahmen dieser Arbeit bei Weitem übertreffen. Bezüglich der fachlichen Gestaltung sind die meisten Konstruktionen und Diagramme ohnehin bereits in der Literatur reichlich diskutiert worden. Andererseits ist eine solche Ausarbeitung nicht möglich: Das Procedere im Kurs wurde nicht aufgezeichnet und die Gedächtnisprotokolle können die teilweise lebhaften und reichhaltigen Diskussionen im Kurs unmöglich wiedergeben. Wir werden daher zum Einen den inhaltlichen Rahmen des Kurses skizzieren und ausgewählte mathematische Sequenzen ausführen. Zum Anderen kommentieren wir die inhaltliche Gestaltung anhand der tatsächlich gemachten Erfahrungen, schlagen Verbesserungen vor und zeigen auf, wie der Kurs in Zukunft aussehen könnte.

Quellenhinweis

Ein Großteil des behandelten Stoffs findet sich bereits im ausgezeichneten Buch »Project Origami« von Thomas Hull, vgl. [Hul12]. Dort sind nicht nur viele konkrete Anleitungen zum Falten zu finden, sondern auch ihre didaktischen Einordnungen, Lehrerfahrungen des Autors sowie interessante weiterführende Themen. Dieses Buch diente für die Gestaltung unserer Kurse als die wichtigste Grundlage. Viele der im Buch angeführten Faltungen gehören aber auch zur Origamifolklore und sind ebenfalls in vielen Quellen vorgestellt und analysiert worden. So sind etwa die Sequenzen zum gleichseitigen Dreieck, Satz von Haga, Würfelverdoppelung etc. auch bei Michael Schmitz in [Sch19] ausführlich diskutiert worden.

Bemerkung 5.1. Wir hielten es für wichtig, Studierenden nicht nur Konstruktionsaufgaben mit 1-fach-Origami nahezubringen, sondern auch einige klassische Modelle der Origamikunst vorzuführen. In der regulären Vorlesungszeit hätte dafür die Zeit nicht ausgereicht, deswegen haben wir optionale Falttreffen angeboten, in denen Studierende, vordergründig ohne mathematischen Bezug, gefaltet haben. Diese Aktivität haben wir als sehr hilfreich empfunden, nicht nur um die Atmosphäre des Kurses zu lockern, sondern Studierende auch besser auf Faltsequenzen vorzubereiten, wenn sie später Papierfalten im eigenen Unterricht einbeziehen wollen. Unter anderem haben wir nunmehr klassische Faltungen wie »flapping bird«[1], »Trinkbecher«[2], »square weave«[3], »miura-ori«[4] und viele weitere weniger bekannte Faltungen gemeinsam gefaltet. ♯

5.1. Zu Beginn: Flachfaltbarkeit, drei Sitzungen

Die Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit wird im Wesentlichen so ausgeführt wie wir sie bereits in [BN16], abgedruckt in Anhang A.1, veröffentlicht haben. Die Problemstellungen, Fachbegriffe, Theoreme und Beweise werden hier nicht wiederholt, wir verweisen dazu auf die Darstellungen dort. Unsere Erfahrung aus den Kursen hat uns gezeigt, dass drei Sitzungen für unser Vorhaben sinnvoll sind. Die anfängliche Fragestellung ist schnell formuliert: Welche lokale Faltmuster sind flachfaltbar? Genauere Ziele der Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit im Kurs sind:

Studierende

- falten eigenständig verschiedene Beispiele lokaler Faltmuster
- stellen Vermutungen zur lokalen Flachfaltbarkeit auf
- übersetzen ihre Vermutungen in »Tafelsprache«/Fachsprache
- überprüfen durch Nachfalten Vermutungen Anderer

[1] Die Analyse des Faltmusters zeigt eine Verbindung zwischen Flachfaltbarkeit und 2-färbbaren Graphen auf, vgl. Anhang A.1, Satz 9, sowie [Hul12, Act. 20] für Faltanleitung und mathematische und didaktische Einordnung.

[2] Diese Aktivität haben wir teilweise in der eigentlichen Vorlesung durchgeführt, vgl. Abschnitt 5.2.1. Sie eignet sich hervorragend zum Einstieg ins Falten: Benennen der Faltschritte, Diskutieren über fehlende Fachsprache sowie einige mathematische Fragestellungen, vgl. [Sch19, Abs. 16].

[3] vgl. [Gje09, S. 57–59] und Abbildung 5.1.

[4] vgl. [Hul12, S. 307], Anhang A.1, S. 7.

- arbeiten in Kleingruppen, um Beweise ihrer Vermutungen zu finden
- charakterisieren lokale Flachfaltbarkeit
- analysieren Faltmuster auf lokale und globale Flachfaltbarkeit
- erfahren den aktuellen Stand der Theorie zur globalen Flachfaltbarkeit

Diese dreiteilige Unterrichtssequenz dient in erster Linie dem Einstieg in das praktische Falten sowie einer gemeinsamen Kommunikation und dem Erlernen fachtypischer Begriffe wie »Faltmuster«, »Falz«, »Berg/Tal« etc. Die Umformulierung der Vermutungen aus alltäglicher beschreibender Sprache hin zu einer tafelgerechten[5] stärker mathematisch orientierten Sprache sehen wir dabei als einen wichtigen ersten Formalisierungsschritt beim Falten.

Als Einstieg in das Thema eignet sich gut – als eine Ergänzung zum Einstieg in [BN16] – die Faltsequenz eines Trinkbechers. Die Faltung wird dabei absichtlich mit der üblichen Faltsprache angeleitet: »[...] wir falten *dies darauf* und diese Ecke nach unten *so weit es geht*«. Das ist eine sehr amüsante Faltung, die ausnahmslos für Heiterkeit und gute Atmosphäre sorgt. Mathematisch dient sie als ein Beispiel für flachgefaltete Objekte. Daraus entwickeln wir zwei Fragen: Wie beschreiben wir solche Faltmuster mathematisch und wie beschreiben wir solche Faltanleitung mit mathematisierter Sprache.

Wir betrachten die Flachfaltbarkeit als ein kleines, wenig formales Beispiel für lokales Ordnen von Aussagen: Studierende stellen Beziehungen zwischen gefundenen Vermutungen auf, was letztlich einem lokalen Ordnen in diesem kleinen Rahmen gleicht.

Beispiel 5.2. Wir geben nun beispielhaft einige Äußerungen der Studierenden in einer noch nicht optimierten Form an.

- »Wenn jede Falte eine zu sich kollineare Falte besitzt, dann ist das F[alt]M[uster] f[lach]f[altbar]« – das ist falsch.
- »Wenn zwei benachbarte Linien sich mit Berg und Tal abwechseln, dann ist es nicht flachfaltbar, folgen hingegen einem Berg wieder ein Berg oder einem Tal wieder ein Tal, so ist es flachfaltbar« – das ist falsch.
- »Wenn die Winkel der Täler und der Berge in der Summe sich ausgleichen, dann müsste es flachfaltbar sein« – ist noch zu unpräzise, nach einer Präzisierung aber richtig.

Vermutungen werden diskutiert, tafelgerecht aufgeschrieben, widerlegt oder bewiesen. ♯

Bemerkung 5.3. Zur Eigenbeschäftigung mit dem Thema bekamen Studierende eine kleine Auswahl an Übungsaufgaben:

[5]»Eine Äußerung ist tafelgerecht, wenn sie eine eindeutige Aussage ist, die in eine Zeile der Tafelebene passt. Ist eine Äußerung nicht tafelgerecht, dann wollen wir sie so abändern, dass sie tafelgerecht wird, und möglichst nah an der Originaläußerung bleibt.«, vgl. Anhang A.1, Fußnote 2.

a) *»Welche Vor- und Nachteile siehst du im Verwenden der Theorie der Flachfaltbarkeit im Schulunterricht?«*
Studierende hoben typischerweise den positiven Motivations- und Unterhaltungswert der Beschäftigung hervor, gaben aber zum Teil zu Bedenken, dass sie nicht ohne Weiteres in die Lehrpläne passt und hohen zeitlichen und Vorbereitungsaufwand benötigt. »Während des Erarbeitens einer Lösung trainieren die Schüler Vermutungen aufzustellen, sie durch Beispiele zu veranschaulichen und in der Fachsprache der Mathematik zu kommunizieren«. Aber neben dem »Motivationspotential« kann diese Aktivität auch »Auslöser für Enttäuschung sein, wenn Schüler erwarten, dass sie schöne Papierfiguren falten«. Teilweise beschrieben Studierende genau, ab welcher Klassenstufe und warum diese Aktivität durchgeführt werden könnte und wie sie zu den KMK-Kompetenzen passt.

b) *»Sei ein lokales Faltmuster[6] gegeben. Kann es immer so verändert werden, dass es flachfaltbar wird? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, mit welchem* minimalen *Aufwand?«*
Diese Frage haben wir sinnvollerweise gestellt, nachdem die Charakterisierung (mit dem Satz von Kawasaki-Justin) der lokalen Flachfaltbarkeit bereits bekannt war. Studierende gaben hierzu vielseitige, teilweise gut überlegte algorithmische Antworten.

c) *»Betrachte das ausgeteilte globale Faltmuster. Begründe mit lokaler Flachfaltbarkeit aber auch mit Berg-Tal-Betrachtungen, dass dieses Faltmuster global nicht flachfaltbar ist.«*
Hierzu haben wir einschlägige Faltmuster ausgeteilt und diskutiert.

Natürlich lassen sich mehr Aufgaben angeben, wir listen eine Auswahl der gestellten auf. ♯

Im zweiten Teil (d.i. in der dritten Sitzung) dieser Aktivität ging es um die globale Flachfaltbarkeit. Hier lassen sich schöne Beispiele falten und mathematisch analysieren, vgl. Anhang A.1, Abschnitt. 2.6. So sind die bereits erwähnten Faltungen *square twist*, *miura-ori*, *flapping bird* allesamt reichhaltig an mathematischen Entdeckungen und für Studierende spannend. Allerdings sind diese konkret für lokales Ordnen oder axiomatische Aspekte wenig zuträglich und eignen sich eher der vollständigen Darstellung wegen.

Abschließende Betrachtungen Studierende äußern viele Vermutungen zu lokaler Flachfaltbarkeit, diese Aktivität wird in der Regel gut angenommen.[7] Viele Vermutungen sind nicht korrekt und lassen sich leicht widerlegen. Studierende erkennen in der Regel schnell, dass es drei Charakteristiken des Faltmusters gibt, bei denen es sich lohnt, genauer hinzuschauen: Die Anzahl der Falze, die Unterscheidung der

[6] In unserer Quelle [BN16] haben wir dazu » 1-fach-Faltmuster« gesagt. Hier wollen wir das nicht mit 1-fach-Origami verwechseln und sagen dazu »lokales Faltmuster«. Diese definierten wir in den Kursen direkt wie folgt: »Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien P ein Punkt im Inneren des Einheitsquadrats $[0,1]^2$ und $l_1, l_2, \dots, l_n$ Strahlen, die von P ausgehen. Seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die aufeinanderfolgenden positiven Winkel zwischen den l_j. Wir nennen l_j Falze und diese Partition des Quadrats ›lokales Faltmuster‹.«

[7] Eine Ausnahme schien der [19]Kurs zu sein. Dort sind wir nur mühsam voran gekommen. Es ist nicht erkennbar geworden, warum diese gut erprobte Aktivität in diesem Kurs nicht »zündete«.

Berg- und Talfalze sowie die Winkelmaße zwischen den Falzen. Dabei entsteht die Vorstellung, es gehe um »Winkeln« zwischen den Falzen, nicht sofort und muss erst etabliert werden. Studierende sprechen stattdessen öfter über »Flächen«. Das ist nicht falsch, aber nicht immer hilfreich. In der Regel entwickeln mehrere, aber nicht alle Studierenden, gute Beweisideen für entscheidende Vermutungen. Diese werden dann im Plenum vorgestellt und diskutiert. Der Ausblick in Richtung der globalen Flachfaltbarkeit (sie ist in allgemeiner Form ein NP-vollständiges Problem, vgl. [BH96]) ist eine mathematisch interessante weiterführende Beschäftigung, ist aber für unsere Ordnungs- und Axiomatisierungsaspekte nicht entscheidend. Insgesamt bewerten wir die vorgestellte Flachfaltbarkeit als eine sinnvolle »Aufwärm«- und Einstiegsaktivität in das Falten und mathematisches Kommunizieren. Für zukünftige Einsätze dieser Aktivität lohnt es sich dennoch auszuprobieren, ob der etwas »verschult« anmutende Ansatz, wie hier angedeutet und in Anhang A.1 ausgeführt, nicht weiter verbessert werden könnte.

Wir können uns gut vorstellen, diese Aktivität nur auf lokale Flachfaltbarkeit und zwei Sitzungen einzuschränken. Damit fügte sich diese Aktivität besser in die Konzepte des lokalen Ordnens und Mathematisierens wie oben beschrieben ein. Allerdings sorgen gerade die »spannenden« Faltungen aus dem Bereich der globalen Flachfaltbarkeit für unerwartete Zusammenhänge zwischen schönen Faltungen und Mathematik: Das lineare Auffalten der Miura-Ori, die Zweifärbbarkeit des flapping birds, die Rotationsbewegung des square twists, das überraschende Ergebnis dessen Parkettierung aus einem Quadrat Papier, vgl. Abbildung 5.1.

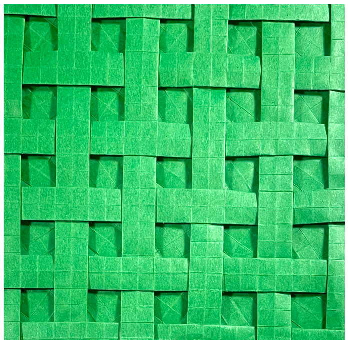


Abbildung 5.1.: Square weave.

Wir sehen viel Potenzial in dieser Beschäftigung in vertiefenden Hausaufgaben[8] zur lokalen Flachfaltbarkeit, die diese Aktivität etwas stärker in das gewohnte universitäre Arbeiten einbinden.

5.2. Hauptteil: 1-fach-Origami, acht–neun Sitzungen

In dieser Unterrichtssequenz geschieht das Eigentliche, worum es im Kurs geht: Eine Formalisierung und Strukturierung einer Faltaktivität, konkret 1-fach-Origami. Darin werden 1-fach-Origami als eine eigenständige Faltart definiert, die Grundfaltungen hiervon aus vielen Konstruktionen herausgearbeitet und untersucht sowie eine naive metamathematische Analyse dieses Gebiets gegeben.

[8] Ein gutes Beispiel wäre die Aufgabe b) aus Bemerkung 5.3.

Es wird uns aus Platzgründen nicht gelingen, (Falt)Inhalte, ihre mathematischen und didaktischen Betrachtungen sowie unsere Erfahrungen dazu in aller Ausführlichkeit zu präsentieren.[9] In der Tat sind die meisten Inhalte unserer Kurse bereits bekannt und an diversen Stellen mit Faltanleitungen und mathematischen Ausführungen versehen. Beispielsweise sind hier die Faltsequenzen zum delischen Problem, Winkeldreiteilung oder der Lill-Beloch-Methode zu nennen.

In unserer Darstellungen setzen wir bekannte Inhalte insofern gewissermaßen neu[10] zusammen, als dabei die Grundfaltungen von 1-fach-Origami das Ziel und nicht nur eine Beiläufigkeit oder Voraussetzung sind. Insofern werden wir uns mehr auf die Einordnung der jeweiligen Inhalte in unser Vorhaben konzentrieren und über Erfahrungen aus den Kursen berichten. Für konkrete Faltanleitungen oder mathematische Ausführungen verweisen wir auf die Literatur.

Dieser Abschnitt stellt aufgrund der volatilen Dynamik in den Kursen eine optimierte, idealisierte und teilweise neu geordnete Beschreibung der eigentlichen Kursvorgänge dar. Diese volatile Dynamik ist naturgemäß auf verschiedene Interessen und Nachfragen der Teilnehmenden zurückzuführen, je nach Situation mussten einige Inhalte etwa vorgezogen oder anders präsentiert werden, auch wenn dies zuvor vorbereiteten und geplanten Verläufen nicht immer entsprochen hat.

In Abschnitt 4.1 beschrieben wir bereits die Grobziele für die Kurse. Hier gehen wir nun auf einzelne Ziele ein und unterteilen sie in feinere Ziele.

A. 1-fach-Origami isolieren, Beschreibung suchen

Studierende

a) falten Beispiele und Nichtbeispiele zu 1-fach-Origami und identifizieren Unterschiede zwischen allgemeinem Falten und 1-fach-Origami
b) diskutieren anhand dieser Beispiele Eigenschaften einer Konstruktion
c) geben eine erste Definition von 1-fach-Origami und erkennen Problemstellen dieser Definition
d) finden eine befriedigende Definition von »Falten« und » 1-fach-Origami«.

Diese ersten Ziele decken die ganze Bandbreite der 1-fach-Origami-Beschäftigung ab: Von den anfänglichen elementaren Beispielen und naiven Beschreibungen von 1-fach-Origami suchen Studierende während des Kurses eine akzeptable Charakterisierung von 1-fach-Origami. Das Erreichen dieser Ziele hat höchste Priorität in

[9] Eine solche Darstellung bedürfte ganzer Bücher, vgl. etwa [Hul12], [Sch19].
[10] Teile der Darstellungen, die folgen werden, haben wir bereits etwa in [Ned17] beschrieben. Wir zitieren entsprechend.

diesem Abschnitt. Studierende sollen verstehen, *warum und wie* eine skizzenhaft beschriebene Beschäftigung mathematisiert werden kann. Sie sollen erkennen, dass Definitionen tatsächlich *gewählt* werden und die entstehende Theorie von diesen Wahlen abhängig ist. Die Rolle der Konstruktion für eine mathematische Behandlung des 1-fach-Origami soll erkannt werden.

Bemerkung 5.4. Teile der oben dargestellten und ausgeführten Ziele könnten bereits mittels Flachfaltbarkeit angesprochen werden. So könnten der Begriff der Flachfaltbarkeit, dem zugrunde liegende Objekte (wie Knoten, Kanten, Flächen etc.), ausgeschärft und zur mathematischen Definition präzisiert werden, wie etwa in [BN16, Definition 2]. In den Kursen haben wir an dieser Stelle lediglich auf diese Publikation verwiesen. Auch die eben beschriebene Formalisierung der Flachfaltbarkeit könnte in Zukunft eine Alternative zu unserem Zugang zur Flachfaltbarkeit darstellen, vgl. Seite 152. ♯

B. Grundfaltungen entdecken und beschreiben

Studierende

a) isolieren mittels konkreter Faltungen Kandidaten für Grundfaltungen
b) geben eine von Anschauung unabhängige Beschreibung von Grundfaltungen
c) analysieren algebraische Möglichkeiten von Grundfaltungen und
d) vergleichen einzelne Grundfaltungen mit entsprechenden Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen.

C. Grundfaltungen analysieren

Studierende

a) untersuchen grafisch und analytisch Zusammenhänge zwischen Grundfaltungen
b) finden dominante Grundfaltungen
c) erarbeiten die vollständige Liste der Grundfaltungen
d) diskutieren Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen Grundfaltungen und Axiomen.

Diese Ziele visieren eine Systematisierung des 1-fach-Origami an. Hier sollen Grundfaltungen erkannt, analysiert und in Beziehung zueinander gesetzt werden. Der Beweis der Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen stellt einen Höhepunkt des Kurses dar.

D. (klassische) Faltungen, Vergleich mit Zirkel und Lineal

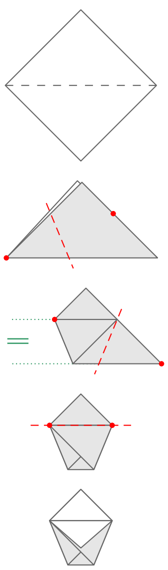
Studierende

a) falten und analysieren ausgewählte regelmäßige Polygone und aus der Schulgeometrie bekannte Konstruktionen
b) lösen per 1-fach-Origami ausgewählte klassische Probleme der Geometrie
c) vergleichen ausgewählte Konstruktionswerkzeuge anhand der Lösbarkeit der klassischen Probleme
d) diskutieren den Aufbau der Schulgeometrie mittels Faltungen.

Mit diesen Zielen wird 1-fach-Origami in bestehende (schul)geometrische Konzepte eingeordnet. Studierende erkennen, dass mit 1-fach-Origami mehr als mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist und falten Konstruktionen nach, die vielmehr aus algebraisch-geometrischer denn axiomatischer Perspektive beeindruckend sind. Eine wichtige Säule des Kurses ist, Studierende nicht nur auf axiomatische Ideen rund um 1-fach-Origami zu führen, sondern ihnen konkrete Faltkonstruktionen beizubringen und diese mathematisch untersuchen zu lassen.

Diese Ziele erreichen wir nicht in chronologischer Folge. Sie sind auch nicht disjunkt voneinander.

Im Folgenden beschreiben wir die für das 1-fach-Origami vorgesehenen Einheiten. Dabei sind diese nicht alle gleich lang und erlauben je nach Interesse und Vorankommen im Kurs größere Spielräume. Wir geben ungefähre Zeitangaben zu jeder Einheit an. Überall dort, wo konkrete Rechnungen das (zeitliche) Kursgeschehen ausbremsen mögen, empfehlen wir die entsprechenden Inhalte in Form von Hausaufgaben oder Handouts auszulagern.



5.2.1. Erste Einheit: 1-fach-Origami und Brüche

Diese Einheit involviert Ziele A a), A c) und A b), B a) sowie teilweise B b) und B d).
Dauer: zweieinhalb bis drei Sitzungen.

Zu Beginn der Beschäftigung gibt es viele Möglichkeiten, sich dem 1-fach-Origami zu nähern. So kann etwa mit traditionellen Faltungen aus der Origamifolklore angefangen werden. Wenn noch nicht in der Flachfaltbarkeit geschehen, kann hier etwa der Trinkbecher gefaltet werden, vgl. Rand. Das Ziel eines solchen Starts ist es, schnell plausibel zu machen, dass die mathematische Beschreibung der Faltvorgänge und entstehender Falze kompliziert erscheint.

Beispiel 5.5. Gerade am Beispiel des Trinkbechers wird deutlich, dass eine fachmathematische Beschreibung der Faltung fehlplatziert wirkt. Etwa im letzten Schritt, wenn eine Lasche herunter gefaltet wird, können wir zwar andeuten, dass der zugehörige Falz eine gewisse Verbindungsgerade ist. Jedoch können wir kaum sinnvoll verschiedene Ebenen/Laschen voneinander unterscheiden, sie mathematisch beschreiben, ohne auf eine unelegante Weise Bezeichnungen einzuführen. Natürlich kann mit der Faltung Mathematik betrieben werden (wir haben hierzu bereits Michael Schmitz zitiert), jedoch ist der Faltvorgang selbst nur teilweise sinnvoll mathematisierbar. Das zeigt auf, dass es eventuell mathematisch leichter ist, sich zunächst auf solche Faltungen zu konzentrieren, bei denen keine aufeinanderliegende, bereits gefaltete Schichten gefaltet werden – das 1-fach-Origami deutet sich an. ♯

Wollten wir Faltmuster mehrfach gefalteter Papierstücke analysieren, dann würden wir als Falze statt Geraden geknickte Linien entdecken, vgl. Abbildung 5.2: Es ist nicht unmittelbar klar, wie ein Faltschritt, bei dem geknickte Falze entstehen, einzuordnen ist. Dabei ist nicht von Bedeutung, ob dessen Beschreibung kompliziert ist: Es geht darum, Falten als eine geometrische Tätigkeit anzusehen und plausibel zu machen, dass es von Vorteil wäre, Falten in bereits bekannte Strukturen – wie die »Schulgeometrie« – einzuordnen. Es gibt genügend Beispiele für Falten mit geknickten Falzen in der mathematischen Literatur, wie etwa der Schwan in [Sch19, Abschnitt 2.2.2]. Allerdings ist eine gewisse methodische Beliebigkeit von Faltung zu Faltung erkennbar, wenn unklar bleibt, ob auch gefaltetes Papier wieder gefaltet werden darf (das Resultat sind pro Faltschritt mehrere ggf. geknickte Falze) und wie der Faltprozess und die Entstehung der Falze zusammenhängen.

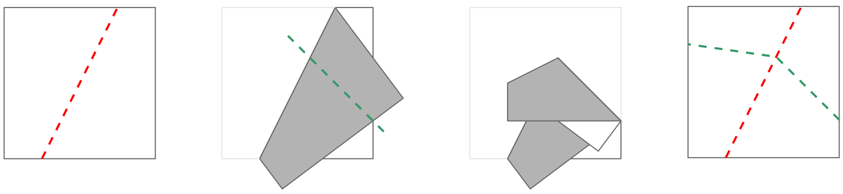


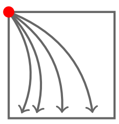
Abbildung 5.2.: Falten von bereits gefaltetem Papier produziert oft geknickte Faltlinien.

In der euklidischen Geometrie sind u. a. Geraden und Punkte primäre Objekte und so kann motiviert werden, warum wir zu Beginn eine Faltart anvisieren wollen, bei der keine geknickten Linien, sondern Geraden[11] entstehen. Durch diese Überlegung wird direkt klar, dass ein solches Falten im Allgemeinen nur dann möglich ist, wenn das zu faltende Papier (als ein Abschnitt der euklidischen Ebene) nicht bereits gefaltet vorliegt, vgl. auch [Ned17, S. 22]. Mit diesem Zugang ist nun aus Plausibilitätsgründen direkt möglich, die betrachtete Faltart als »falte ein Stück Papier so, dass dabei nur Geraden entstehen; falte wieder auf« zu »definieren«. Dieser

[11] Natürlich werden diese Geraden im praktischen, endlichen Falten durch Strecken repräsentiert, aber es ist naheliegend, diese ins Unendliche fortgesetzt zu denken.

Zugang ist etwas nachteilig, weil hier noch gefordert und motiviert werden soll, dass nur solches Falten betrachtet wird, bei dem *genau eine* Gerade entsteht. Das nennen wir dann kurzerhand »1-fach-Origami«. Außerdem scheint dieser Zugang 1-fach-Origami etwas zu schnell in den Vordergrund zu bringen.

Ein alternativer Start ist die Route über den Begriff der Konstruktion. Hier könnte etwas provokativ die Frage diskutiert werden, ob das Zerknüllen eines Papierstücks als (konstruktives) Falten betrachtet werden sollte. Diese Frage zielt darauf ab, dass Studierende an dem Beispiel diskutieren, warum Zerknüllen wohl eher keine Konstruktionstätigkeit ist und direkt versuchen, Forderung an den Faltprozess zu stellen, damit dieser als eine Konstruktion verstanden werden kann. Dabei können wir etwas salopp ins Feld führen, dass »Konstruieren« eine möglichst mathematische Aktivität ist.
Bei diesem Zugang können wir also zunächst verschiedene Faltungen ausprobieren, um dann darüber zu diskutieren, ob sie als Konstruktionen angesehen werden sollen. In [Ned17, S. 12] geben wir ein passendes Beispiel:



> »Eine Konstruktion soll wiederholbar und eindeutig sein. Mit Eindeutigkeit soll verstanden sein, dass diese Konstruktion ohne weitere Erklärungen (etwa Vorführen der Faltung) unmissverständlich von einer anderen Person ausgeführt werden kann. Als Beispiel dient hier schnell eine Faltung einer Quadratecke auf eine der Seiten des Quadrats. Ohne genauere Angaben ist diese Faltung unmöglich genauso zu wiederholen, es gibt unendlich viele Möglichkeiten, eine solche Faltung durchzuführen, wobei keine von diesen ausgezeichnet ist«.

Dadurch nähern wir uns dem Begriff der Konstruktion, definieren diesen und überlegen, unter welchen Voraussetzungen die Anweisung »falte so, dass dabei nur ein Falz entsteht« eine Konstruktion ist. Für unser Vorhaben ist der Begriff der Konstruktion unabdingbar, allerdings wird bei diesem Zugang etwas unnatürlich auf Konstruieren gedrängt.

Eine weitere Alternative für den Anfang ist, mit dem Falten an schulgeometrisches Wissen anzuknüpfen: Wie könnte Papierfalten in der Schulgeometrie genutzt werden? Dieser Zugang ist äußerst zeitsparend, weil Studierende direkt auf Nachahmen der Konstruktionen von Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, Parallelen etc. gelenkt werden. Eine ähnliche Strategie haben wir im ^{16}Kurs verfolgt, vgl. Abschnitt 5.4.2. Damit ist leicht einsichtig, dass Falten hier als ein Konstruktionswerkzeug zum Erzeugen von Geraden fungieren soll. Wie im vorigen Zugang kann hier »Konstruktion« zunächst besprochen werden; allerdings im Unterschied zur vorigen Methode ist diese mehr auf Schulgeometrie und Zirkel & Lineal zugeschnitten.

Eine noch weitere Alternative, die wir in [Ned20, S. 32] andeuten, erzwingt durch geschicktes Fragen, Falten als eine Konstruktionsaufgabe anzusehen. Dort fragen wir direkt zu Beginn, ob per Falten halbiert und gedrittelt werden kann und diskutieren die sich daraus ergebende Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Faltungen. Diesen Zugang sehen wir als den natürlichsten für das, was wir vorhaben, sobald klar ist, dass wir uns mit 1-fach-Origami beschäftigen wollen.

Allen diesen Zugängen ist gemein, dass sie das Falten in die euklidische Ebene einbetten wollen, so dass keine Bewegungen im Raum eine relevante Rolle spielen. Die euklidische Ebene kann dabei verschiedentlich vorgegeben werden. Es ist offenbar nicht zielführend, sie bereits hier axiomatisch zu beschreiben. Es genügte auch zunächst, »in der Zeichenebene«, »wie in der Schule« zu arbeiten. Wir präferieren eine universitäre Einbindung und verstehen unter der euklidischen Ebene das Paar aus $\mathbb{R}^2$ und dem Standardskalarprodukt darauf. Damit ist klar, wie Abstände zu messen sind, was Punkte und Geraden sind.

Wir erzeugen eine Mischung aus diesen Ansätzen, motivieren 1-fach-Origami wie folgt, greifen Konstruktionsideen auf und steigen in erste Konstruktionsaufgaben mit Falten wie oben angedeutet ein.

Dazu falten wir zunächst einige leichte Beispiele[12] wie *Trinkbecher* oder *Fünfeckstreifen*[13] und verwenden dabei vorwiegend die Faltsprache: »Falte dies auf jenes«, die auch bereits teilweise mathematisiert sein kann: Etwa beim Trinkbecher im zweiten Schritt »falte die linke Ecke so auf die rechte Kante, dass der gefaltete Abschnitt der linken Kante *parallel* zur Grundlinie ist«. Im weiteren Verlauf fragen wir nach einer mathematischeren Beschreibung der Faltung. Dabei erklären wir, warum wir das wissen wollen: Damit eine Anleitung ohne Bilder und Videos und folglich eine genauere Analyse der Faltung möglich wäre.[14] Hierfür ist die Aussage bei der Trinkbecherfaltung »die Lasche teilt den Trinkbecher in zwei gleich große Flächen«, vgl. etwa [Sch19, S. 113], sehr hilfreich. Um hier von »gleich« zu sprechen, sollte die Faltung genau und nicht nur approximativ verstanden werden. Hierbei wird unmittelbar klar, dass für *genaue* mathematische Zusammenhänge bereits bekannte mathematisch-geometrische Objekte und Ideen hilfreich sind. So erkennen Studierende beispielsweise beim Becher in der Regel schnell, dass die Sprache der Schulgeometrie mit Dreiecken, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden hier die nö-

[12] Jede dieser Faltungen kann eine ganze Unterrichtseinheit in Anspruch nehmen, so viele interessante mathematische Zusammenhänge sind dort verborgen. Es ist aber nicht unser Anspruch, hier diese Faltungen eingehend zu beleuchten.

[13] Nehmen wir einen langen Papierstreifen, falten die Enden zu einem einfachen Überhandknoten und ziehen die Enden langsam auseinander bis der Knoten flach vorliegt, dann ist im Knoten ein regelmäßiges Fünfeck erkennbar, vgl. [Hul12, Act. 10], [Ols75, §52].

[14] Außerdem zielen wir natürlich auf mathematisches Papierfalten ab, vgl. Definition 1.2.

tige Präzisierung liefert. Einigen wir uns darauf, primär mathematisches Papierfalten zu betrachten, dann ist es nicht mehr schwer, die anschließenden Fragen wie »Welche Arten von Faltungen gibt es denn?« oder »Welche solcher Faltbewegungen wollen wir erlauben?« (wenn »Zerknüllen« oder »Auseinanderziehen« beim Fünfeckstreifen für uns kaum mathematisierbar sind) zu motivieren und Kriterien für Konstruktionen ins Spiel zu bringen. Studierende lassen sich mit diesen Überlegungen leicht dazu überzeugen, Falten als eine Konstruktionsaufgabe anzusehen und sich zunächst auf Faltungen zu konzentrieren, bei denen eine Gerade entsteht.

Wir präferieren eine solche Annäherung ans 1-fach-Origami der Vorgabe: »Betrachten wir nur solches Falten, bei dem pro Schritt genau ein Falz entsteht«, da somit 1-fach-Origami nicht nur nicht beliebig erscheint, sondern auch eine erste Einordnung in Konstruktionen und Geometrie stattfindet.

Nachdem wir einen gewissen Anfang etabliert und 1-fach-Origami angesprochen haben, beginnen wir damit, diese Faltart von verschiedenen Seiten zu studieren. Wir beginnen mit sehr leichten Aufgaben. Wir schreiben dazu in [Ned20, S. 32]:

> »Eine erste Aufgabe ›Teile eine Seite des Quadrats in zwei gleiche Teile‹ ist schnell gelöst. Eine Faltung wie in Abbildung 5.3 ist zu erwarten. Lernende erkennen, dass der (eindeutige) Falz als die Mittelsenkrechte beider Punkte erklärt werden kann. Allerdings sind neben den Lösungen ›falte die Mittelsenkrechte‹ oder ›falte den einen Punkt auf den anderen‹ auch Antworten wie ›halbiere das Quadrat‹, ›lege die eine Kante auf die andere‹ (mit Vorzeigen) usw. ganz üblich.«

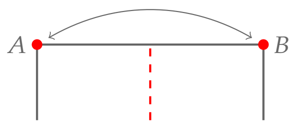


Abbildung 5.3.: Eine exakte Streckenhalbierung mittels einer Mittelsenkrechten.

Es ergeben sich bei dieser Darstellung viele Diskussionspunkte. Es ist bemerkenswert wie unterschiedlich die Beschreibung derselben Faltung ausfallen kann: Mal wird ein Punkt bewegt, mal eine ganze Kante; mal ist die Beschreibung eindeutig (eindeutige Mittelsenkrechte) mal nicht (Halbierung des Quadrats). Es lohnt sich, Studierenden diese Unterschiede klar zu machen. Mit der Faltsprache sind wir an der Vorstellung des eigentlichen Vorgangs näher dran, mit der Fachsprache (Mittelsenkrechte) bekommen wir sofort eine Reihe von Erkenntnissen: Diese Faltung ist eindeutig, exakt und lässt sich in der euklidischen Ebene ausdrücken.

Bemerkung 5.6. Die Benutzung der Fach-, Unterrichts-, Faltsprache ist für unsere Kurse von immenser Bedeutung und wird mehrfach thematisiert. So sagen wir beim Falten lapidar »falte die Tür«, wenn wir die Faltung aus Abbildung 5.3 meinen, fügen hinzu »wir falten dazu die linke Kante auf die rechte und präzisieren »damit haben wir die Mittelsenkrechte von $[AB]$ konstruiert«. Wir glauben, dass diese unterschiedlichen Sprechweisen eine gute Balance zwischen dem Faltprozess und seiner Mathematisierung darstellen. So ist die ehrlichere und praktischere Anweisung in unserem Beispiel, die Kante auf die Kante zu falten. Sich aber dessen bewusst zu sein, dass hier eine Mittelsenkrechte gefaltet wird, ist wichtig. Sicherlich wäre eine Behandlung der Faltkonstruktionen unter der Benutzung der Faltsprache der mathematischen Beschäftigung im Kurs nicht angemessen. Gleichzeitig erscheint eine erzwungene Algebraisierung der Faltungen (etwa Einführung von Koordinaten dort, wo ein synthetischer Zugang eleganter ist) oder Vermeidung der Faltsprache wenig sinnvoll. Daher gilt es, eine situative Unterrichtssprache zu finden, zwischen verschiedenen Darstellungen zu wechseln und diese verschiedenen Perspektiven auf eine Faltung anzubieten. ♯

Bemerkung 5.7. An der Stelle kann die Frage auftauchen, was denn konstruiert werden soll: Zahlen? »Ist $\frac{1}{3}$ per 1-fach-Origami faltbar?«, (Strecken)Längen? »Drittele die Strecke mit 1-fach-Origami« oder gar Gleichungen gelöst werden? »Ist $x - \frac{1}{3} = 0$ per 1-fach-Origami lösbar?«. Diese Ambivalenz kennen wir bereits von Zirkel und Lineal. Dort sagen wir »π ist mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar«, meinen dabei, dass Strecken dieser Länge nicht konstruierbar sind und beweisen das, indem wir die Aufgabe in Gleichungen übersetzen und sie mit algebraischen Methoden lösen.[15] Analog verhält es sich mit Falten. ♯

Erkennen wir als nächstes, dass nun induktiv alle Stammbrüche der Form $\frac{1}{2^k}$ für natürliche k faltbar sind,[16] dann ist die nächste Frage leicht zu motivieren: »Können wir per Falten Strecken auch dritteln?«. Diese Frage liegt im Kern der anfänglichen 1-fach-Origami-Beschäftigung. Sie produziert sehr interessante Faltungen, Diskussionen und Erkenntnisse. Über die herausgestellte Rolle der Zahl Drei für 1-fach-Origami haben wir bereits in [Ned20, S. 32–33] geschrieben.

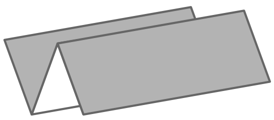


Abbildung 5.4.: Eine approximative Brieffaltung zur Streckendrittelung.[17]

> »Oft wird hierzu die sog. Brieffaltung wie in Abbildung 5.4 benutzt. Jüngere wie ältere Lernende sind von dieser Drittelung schnell überzeugt und sehen (erst einmal) keinen qualitativen Unterschied zur Faltung der Mittelsenkrechten von oben. Doch ist das eine Konstruktion? Ist das ei-

[15] Genauer würden wir formulieren: Die Zahl a ist konstruierbar, wenn der Punkt $(a, 0)$ Schnittpunkt konstruierter Geraden ist. Der Zusammenhang zwischen Zahlen und *Strecken* ist hier wesentlich, weil etwa eine *Fläche* mit dem Flächeninhalt π mit Zirkel und Lineal konstruierbar wäre.

[16] Wir lassen hier noch offen, dass konstruierte Punkte Schnittpunkte von konstruierten Geraden sind.

[17] Zur Wahrheit gehört, dass diese Faltung etwa in 2-fach-Origami mathematisiert werden könnte, aber das führte hier sicherlich zu unnötigen Ablenkungen.

> ne 1-fach-Konstruktion? Ähnelt sie der Konstruktion von $\frac{1}{2}$? Die Halbierung von oben ist nur praktisch augenmaßgenau, doch sie ist theoretisch perfekt ausführbar. Die Brieffaltung ist jedoch nur augenmaßgenau – mehr nicht. Ferner gibt es keine Möglichkeit, die zwei entstehenden Falze separat voneinander exakt zu falten. Das ist also keine 1-fache-Konstruktion, weil nicht einer sondern zwei Falze pro Faltschritt erzeugt werden. Es ist nicht leicht, Lernende von diesem Argument zu überzeugen. Aber was soll die Beschreibung dieser Faltung sein, außer: ›Falte solange bis es gleich aussieht‹? Lernende werden versuchen, die Strecke abzumessen, durch drei zu teilen und das Ergebnis abzutragen. Auch wenn dies eine Herausforderung darstellt, kann es sehr lohnenswert sein, mit ihnen die ›Spielregeln‹ zu diskutieren und explizit auf weitere Werkzeuge (außer Papier selbst) zu verzichten«.

Wie im Zitat beschrieben, entbrennt aus dieser Brieffaltung eine produktive Diskussion. An der Stelle muss nun geklärt werden, was unter einer (Falt)Konstruktion zu verstehen ist. Studierende sollen auf die Inhalte der Definition 1.3 gestoßen werden. Ferner beschließen wir, 1-fach-Konstruktionen als spezielle Faltkonstruktionen zu verstehen, insbesondere ist jede Faltung per 1-fach-Origami eine Konstruktion, entsteht also aus endlich vielen, wiederholbaren und mathematisierbaren Schritten.

Um die Wichtigkeit der Zahl Drei für 1-fach-Origami zu demonstrieren, beschreiben wir einige Faltungen zur Streckendrittelung, aus denen fast alle wichtigen Erkenntnisse dieser Einheit folgen.[18] Dabei verfolgen wir zwei Ziele: Den Blick für 1-fach-Origami als Konstruktionswerkzeug zu schärfen und besonders einfache, immer wieder auftauchende Faltungen zu entdecken.

Wir haben bereits etabliert, dass Falten zweier verschiedener Punkte aufeinander eine Konstruktion der Mittelsenkrechten dieser beiden Punkte nach sich zieht. Hier entstehen keine Zweifel, dass diese eindeutige Faltbewegung eine Faltkonstruktion ist und zu 1-fach-Origami gehört. Gleichzeitig ist es sinnvoll zu bemerken, dass hier »verschiedene Punkte« entscheidend ist. Der Ausdruck »Mittelsenkrechte« zweier identischer Punkte wäre nicht nur sinnfrei, sondern Falten eines Punktes auf sich selber erlaubte unendlich viele Faltmöglichkeiten. Das ist nicht wünschenswert.[19] Wir notieren folglich, dass 1-fach-Origami Mittelsenkrechten (MS) falten kann. Wir könnten nun also fragen, welche vergleichbaren Faltkonstruktionen noch sehr ein-

[18] Studierende geben teilweise sehr originelle Faltungen zum Dritteln an. Wir verweisen für einige Beispiele auf die Auswertung der entsprechenden Frage in Abschnitt 7.2.3.

[19] An dieser Stelle kann die Endlichkeitsforderung auch harmlos formuliert werden: Würden wir eine schriftliche Faltanleitung ohne Bilder abliefern, in der ein Punkt auf sich selbst zu falten wäre, dann hätten die Faltenden das Problem (da wir Beliebigkeit ausgeschlossen haben) zu entscheiden, welche der unendlich vielen Falzen hier zu wählen sind.

fach per 1-fach-Origami gelingen. So gingen wir bereits etwa im [16]Kurs vor, vgl. Abschnitt 5.4.2. Alternativ können wir aus den Drittelungskonstruktionen der Studierenden solche Konstruktionen ableiten.

Beispiel 5.8. Soll eine Strecke in fünf gleiche Teile geteilt werden, dann werden viele Origamipraktizierende die sog. Fujimoto-Approximation wählen, vgl. [Lan03], [Hul12, Act. 3]. Für das Dritteln ist diese Faltung aus praktischer Sicht eher unnötig, aber für unser Vorgehen gut zu gebrauchen. In [Ned20, S. 33] schreiben wir dazu:

> »Falten wir irgendwo auf der [zu drittelnden] Strecke (zufällig, keine Konstruktion!) eine Markierung, von der wir glauben, dass sie ungefähr $\frac{1}{3}$ der Strecke darstellt. Die Länge der Strecke bis zur Markierung vom linken Rand aus gesehen ist, genau genommen, $\frac{1}{3} + \varepsilon$, für einen Fehler ε. Nun, rechts von der Markierung liegt eine Strecke der Länge $\frac{2}{3} - \varepsilon$. Da das Halbieren von Strecken mit 1-fach-Origami bereits bekannt ist, nutzen wir es: Es entsteht außen rechts eine Strecke der Länge $\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}$. Links von dieser Strecke liegt eine Strecke der Länge $\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$. Nochmaliges Halbieren bringt $\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{4}$. Wir sehen, dass im Grenzwert dieses Prozesses eine exakte Streckendrittelung entsteht. Aber: Ist das eine Konstruktion? Nein, das ist kein endlicher Prozess.«

Diese Faltung zeigt eindrucksvoll, dass 1-fach-Origami in der Tat präzise formuliert werden sollte, damit auch bei solchen Faltungen, in denen jeder Schritt (MS) zu 1-fach-Origami gehört,[20] das Ergebnis aber nicht, die Zugehörigkeit zu 1-fach-Origami klar entschieden werden kann. Es entstehen Diskussionen darüber, ob diese Faltung so wichtig ist, dass sie trotzdem zu 1-fach-Origami dazugehören sollte, oder ob das Konstruktionsprinzip für 1-fach-Origami wichtiger sei. ♯

Nicht selten schlagen Studierende zum Dritteln (oder allgemein zum n-Teilen) einer Strecke die wohl aus der Schule bekannte Strahlensatz-Konstruktion vor, vgl. Abbildung 5.5. Die Idee ist, die Drittelung einer Strecke $[AB]$ auf die Viertelung ei-

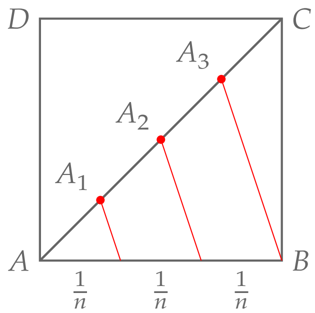


Abbildung 5.5.: Eine Skizze für die n-Teilung einer Strecke für $2^k < n \leq 2^{k+1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Diagonale wird in 2^{k+1} gleiche Teile geteilt. Die »linkesten« n der so entstehenden Punkte auf der Diagonale liefern die n-Teilung der unteren Kante.

[20]Der erste Schritt könnte durch Streckenhalbierung ersetzt werden und folglich konstruierbar sein.

ner anderen Strecke $[AC]$ zurückzuführen. Dazu wird C irgendwo außerhalb AB gewählt und $[AC]$ geviertelt (das können wir allein mit (MS) erledigen). Es entstehen Punkte A_1, A_2, A_3 auf $[AC]$, wobei A_3 am nächsten zu C ist. Nun werden zu BA_3 parallele Geraden durch A_1 und A_2 gefaltet, die eine Drittelung von $[AB]$ liefern. Der Nachweis der Korrektheit wird mit dem Strahlensatz geführt. Studierende realisieren diese Faltung in der Regel so, dass sie $[AB]$ als eine Quadratseite und $[AC]$ als die Quadratsdiagonale auswählen. Diese Faltung ist recht intuitiv und äußerst hilfreich für das weitere Vorgehen. Wir können nun Studierende bitten, die einzelnen Schritte zu bewerten und zu entscheiden, ob die Faltung zu 1-fach-Origami gehört. Folgende Diskussionspunkte sind von Interesse:

a) Die Faltung der Diagonale im Quadrat ist eine Mittelsenkrechte (von $[BD]$). Auf Nachfrage beschreiben Studierende sie aber auch als eine Verbindungsgerade (von A und C), vgl. Abbildung 5.6, oder auch als Winkelhalbierende (des Winkels $\measuredangle BAD$). Was bedeuten das für uns?

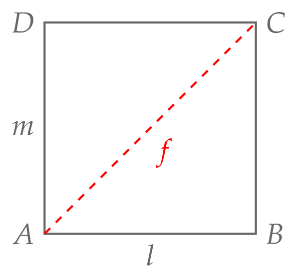


Abbildung 5.6.: Ein Falz als Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Verbindungsgerade.

b) Sollen Faltungen von Verbindungsgeraden und Winkelhalbierenden im Allgemeinen zu 1-fach-Origami gehören?
c) Haben diese eine ähnliche Beschreibung wie (MS) der Form »falte x auf y«?
d) Gehören Faltungen von Parallelen zu 1-fach-Origami?
e) Können sie exakt und nicht nur approximativ gefaltet werden?
f) Ist nun die gesamte Faltung als 1-fach anzusehen?

Die vorgenannten Punkte prägen die beabsichtigte Diskussion im Kurs. Wir schildern nun einige der möglichen Überlegungen. Zu a): Da (MS) bereits 1-fach ist, liegt es nahe, dasselbe über Verbindungsgeraden (VG) und Winkelhalbierende (WH) zu sagen oder, vorsichtiger, zu vermuten. Zu b): Die Frage erfordert einige Überlegungen. Die Faltung (MS) ist eindeutig, sie bringt zwei verschiedene Punkte zur Inzidenz, das scheint gut verstanden zu sein. Reden wir über Winkelhalbierende, dann ist die Faltung etwas nebulöser. Typischerweise reden wir beim Falten nicht über Winkeln, sondern sagen wie in Abbildung 5.6: Wir falten m auf l oder $[AD]$ auf $[AB]$. Was ist der Unterschied? Die Winkelhalbierende von $\measuredangle BAD$ ist eindeutig, es gibt jedoch zwei verschiedene Möglichkeiten, m auf l zu falten: Neben der Faltung an f bewirkte die Faltung an der Senkrechten zu f durch A das gewünschte Ergebnis. An der Stelle zeigen wir nochmal auf, wie hilfreich es war, auf das eigentliche Falten beim Mathematisieren zu verzichten: Falten wir tatsächlich m auf n, dann sehen wir einen Teil von m fixiert und den anderen bewegt. Bei einer unvorsichtigen Interpretation wäre das Faltbild von m nicht einmal eine Gerade. Die mathematisch sinnvolle Interpretation des Faltbilds von m als das *Spiegel*bild von m an der Winkelhalbierenden muss erstmal erarbeitet und richtig eingeordnet werden. Auch *erscheint* Falten nicht als Spiegeln, eher Halbspiegeln. Die im Nachhinein plausible Interpretation von (WH) als die *Menge* der entsprechenden Falze, ist mitnichten intuitiv.

> Hier und im Folgenden werden wir mehrfach betonen, dass diese Diskurse aus fachmathematischer Perspektive sehr elementar sind. Ihr Nutzen liegt jedoch in den axiomatischen und definitorischen Aspekten einer Präzisierung von 1-fach-Origami. Wir wollen uns von der anfänglichen Sicht auf das 1-fach-Origami, vgl. auch Seite 8, Faltkonstruktionen wie in Definition 1.3 *nacherfinden* und damit eine bessere Definition von 1-fach-Origami *entwickeln*.

Verstehen wir (MS) als eine Faltung eines Punktes auf einen anderen, dann passt die Verbalisierung von (WH) als »Faltung einer Geraden auf eine andere« besser in den Rahmen und ist für das Nachfolgende hilfreicher als »Faltung einer Winkelhalbierenden«, da nun kein komplizierter Begriff wie »Winkel« auftaucht.

Das Problem kann im Vorfeld vermieden werden, wenn von »Winkelhalbierenden« gar nicht gesprochen wird, sondern direkt über Faltungen von Geraden auf Geraden, wie es in der Faltsprache üblich wäre. Später, wenn wir über Verbindungsgeraden und Lote sprechen, kommen wir aber ohnehin auf die Bezeichnung »Winkelhalbierende«. Aber es ist besser, gleich zu Beginn das Problem auszuräumen.

Die Faltung (WH) führt uns zu weiteren definitorischen Entscheidungen: Da es nun bis zu zwei Möglichkeiten gibt (je nach Parallelität der Geraden), zwei Geraden aufeinander zu falten, stellt sich die Frage, ob so eine nicht eindeutige Faltung zugelassen werden sollte. Studierende haben in der Regel keine Bedenken, diese Faltung zu 1-fach-Origami zu zählen, ihr Verlust wiegte schwer. Ihre Akzeptanz gibt uns die Möglichkeit, die endliche Lösbarkeit einer Faltkonstruktion ins Spiel zu bringen.

> Es gilt zwischen einem *endlichen Prozess* und *endlicher Lösbarkeit* zu unterscheiden. Dies fällt Studierenden zunächst nicht leicht. Die Fujimoto-Faltung aus Beispiel 5.8 liefert in unendlich vielen Schritten eine eindeutige Lösung, dagegen liefert (WH) in einem Schritt eine ggf. mehrdeutige Lösung.

Wir fragen, welche Uneindeutigkeiten der Faltungen für Studierende noch in Ordnung wären: Wenn wir zwei verschiedene Lösungen einer Faltanweisung zulassen, wollen wir auch drei, 100, unendlich viele zulassen?[21] Diese Überlegung sorgt für einige Irritationen und wir einigen uns darauf, erstmal nur »endlich viele« mögliche Lösungen zuzulassen.[22] Damit gehört (WH) zu 1-fach-Origami: Für zwei verschiedene Geraden erzeugt sie genau einen Falz ggf. auf zwei verschiedene Weisen. Mehr noch: Die angestrebte Definition ist nun so zu formulieren, dass sie (WH) mit ihren beiden Lösungen inkludiert.

Die Faltung der Verbindungsgeraden ist mathematisch harmloser, da eindeutig, aber praktisch schwerer zugänglich und schwerer zu analysieren. Soll die Verbindungsgerade zweier Punkte im Inneren eines Quadrats tatsächlich gefaltet werden, dann wird das je nach Lage dieser Punkte zu einer, für Ungeübte, motorisch anspruchsvollen Tätigkeit.[23] Dies wiederum führt dazu, dass Studierende kurz daran zweifeln, diese Faltung sei eine Konstruktion (und damit 1-fach), weil das Ergebnis der Faltung ggf. sehr unpräzise ist. Diese Bedenken sind schnell ausgeräumt, wenn wir den Unterschied zwischen *praktisch genau* und *theoretisch genau* thematisieren, vgl. auch [Ned20, S. 3]. *Die praktische akkurate Faltbarkeit wollen wir damit nicht zur Bedingung für 1-fach-Origami machen.*

Zu c): Es ist abzuwägen, ob bereits hier thematisiert werden soll, dass (VG) als »einen Punkt *und* einen anderen Punkt auf sich selber falten« formuliert werden soll. In den Kursen haben wir das vom zeitlichen Fortschritt abhängig gemacht. Die Verschiebung auf später hilft uns dann bei der Auffindung komplizierter Grundfaltungen. Soll dieser Punkt hier besprochen werden, dann bemerken wir die Andersartigkeit dieser Faltung. Hier werden bereits bekannte Objekte *nicht* bewegt. Wir erwarten bei einer Faltung, etwas auf etwas anderes zu legen. Wie soll diese Faltung formalisiert werden? Die im Nachhinein banale Visualisierung, beide Punkte bleiben unter der Faltung fix oder alternativ sie werden *auf sich selbst* gefaltet, ist nicht sofort greifbar. Inzwischen präferieren wir, diesen Punkt in dieser Sequenz noch nicht auszuführen, damit die Dreiecksfaltung in der nächsten Sequenz »spannender« bleibt.

Zu d,e): Falten von Parallelen ist in Abbildung 5.5 wesentlich. Die Entscheidung darüber, ob die Parallelenfaltung zu 1-fach-Origami gehört, ist etwas schwerer zu treffen. Zunächst kommt das Problem auf, zu einer Geraden m eine Parallele l durch einen $P \notin m$ konkret zu falten. Wir haben mit der Brieffaltung erkannt, dass die

[21] Wir erinnern an die Situation der »Punkt-auf-Punkt«-Faltung bei zwei gleichen Punkten.

[22] Auch endlich viele, aber viele mögliche Lösungen, würden in der Praxis zum gleichen Problem wie bei unendlich vielen Lösungsmöglichkeiten führen: Wie wählen wir eine? An der Stelle ignorieren wir aber das Problem.

[23] Etwa die bereits erwähnte Verbindungsgerade BA_3 aus Abb. 5.5 zu falten, erfordert etwas Übung.

»parallele Bewegung« von m auf P, die der Brieffaltung ähnelt, keine Konstruktion darstellen kann.[24] Studierende können auf die Idee kommen, eine Parallele durch zwei Lot-Konstruktionen zu ersetzen, vgl. Abbildung 5.7. Unterstützend können

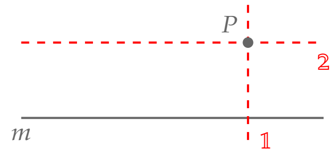


Abbildung 5.7.: Eine 1-fache-Konstruktion von Parallelen. $\mathbb{1}$ =Lot(P, m), $\mathbb{2}$ =Lot(P,$\mathbb{1}$).

wir zunächst die folgende Aufgabe stellen: »Sei P ein Punkt im Inneren eines Quadrats. Falte die Parallele durch P zu der unteren Kante des Quadrats.« Hier ist eher zu erwarten, dass Studierende etwa die linke Quadratkante so auf sich selbst falten, dass der Falz durch P verläuft. Somit erhalten sie eine Idee für den allgemeinen Fall.

Bemerkung 5.9. Diese Stelle eignet sich gut, *Grundfaltungen* ins Spiel zu bringen. Wir sind weit davon entfernt, sie hier präzise zu definieren, und geben lediglich eine plausible Interpretation des Wortes: Das sind solche Faltung, die bereits in einem Schritt entstehen. Dabei ist diese Visualisierung fragil. Was ist hier ein Schritt? Hier müsste zunächst genau geklärt werden, was mit dem Papier, der Ebene tatsächlich geschieht. Wollten wir die Bewegung in der Erklärung vermeiden und stattdessen eine gewisse naheliegende Irreduzibilität oder Unabhängigkeit der Grundfaltungen bemühen, würden wir etwa feststellen, dass (VG) durch (Lot) und (MS), aber auch (MS) durch (Lot), (VG), (WH) ersetzt werden können, vgl. Seite 199. Wir präferieren hier, keine Diskussionen zu starten, weil das unweigerlich zu einer vernünftigen Definition von Grundfaltungen führte; dafür ist es hier zu früh. ♯

Es wird nun diskutiert, ob die Lot-Konstruktion in 1-fach-Origami akzeptiert wird. Nicht überraschend sind folgende Bedenken: Falten wir eine Gerade auf sich selber, sodass der Falz durch einen bestimmten Punkt verläuft, dann ist das ja nur augenmaßgenau; das Problem hatten wir auch bei der Brieffaltung und (VG). Gegenargumente sind: Wir haben schon gesehen, dass die praktische Faltgenauigkeit für die Zugehörigkeit zu 1-fach-Origami keine Rolle spielt und wir wissen aus der euklidischen Geometrie, dass Lote eindeutig sind.[25] Wir erkennen die Nützlichkeit der Einbettung des 1-fach-Origami in die ebene Geometrie.

Möglicherweise ist es bereits hier angebracht, die Lot-Faltung zu einer Geraden m durch einen Punkt P so zu formulieren: »Falte m auf sich selbst *und* P auf sich selbst.« Ein Vorteil dieser Formulierung ist, dass Phrasen wie oben »sodass der Falz

[24] Falten von zwei parallelen Geraden aufeinander, also ein Spezialfall von (WH), ist dagegen etwas anderes, hier sind beide Geraden bereits konstruiert und der Falz ist eindeutig.

[25] Spätestens hier ist mit Rückblick auf Kapitel 3 klar, dass eine formale Präzisierung der Grundfaltungen die hiesigen wackeligen Argumente stützen würde, allerdings ist an dieser Stelle das Niveau der Argumentation der Tätigkeit durchaus angemessen.

durch einen Punkt verläuft« vermieden werden. Ein weiterer Vorteil ist sicherlich, dass bereits dadurch die Struktur der Faltungen aufgedeckt wird, bei der Punkte und Gerade entweder auf andere Objekte oder auf sich selber gefaltet werden; und *andere Formulierungen zur Beschreibung der Faltungen sind nicht nötig.* Ein Nachteil dieser Präzisierung ist, dass sie bereits relativ früh in der Beschäftigung stattfindet und somit das Entdecken weiterer Grundfaltungen unnötig automatisiert. Wir schlagen daher vor, je nach Kursverlauf abzuwägen, ob hier einfach darüber abgestimmt wird, Lote zu 1-fach-Origami aufzunehmen, oder ob doch die innere Struktur bereits hier analysiert wird.

In jedem Fall erkennen wir, dass die Parallelen-Konstruktion auf (Lot) reduziert werden kann. Es kann diskutiert werden, ob bereits deshalb die Parallelen-Faltung nicht als eine Grundfaltung betrachtet werden sollte. Einerseits müssten wir dann alle anderen Grundfaltungen regelmäßig auf irgendwelche Abhängigkeiten untersuchen, das wollen wir zunächst vermeiden. Andererseits scheint es plausibel, *offenbar* »zerlegbare« Faltungen nicht als Grundfaltungen anzusehen: So konstruieren wir etwa $\frac{1}{4}$ einer Strecke, indem wir zweimal (MS) anwenden, und es wäre unbefriedigend, die Vierteilung als eine Grundfaltung anzusehen. Solange die Liste der Grundfaltungen nicht vollständig ist, können wir auch gar nicht wissen, ob es nicht eine Grundfaltung gibt, die zu einem Punkt und einer Geraden *in einem Schritt* $\mathrm{Par}(P, m)$ produziert.[26]

Zum Einüben der Lot-Faltung könnte die folgende, auch vom Kontext unabhängig wertvolle und im Weiteren benötigte, Aufgabe gestellt werden: Sei m eine Gerade und $P \notin m$ ein Punkt. Können wir den Spiegelpunkt P^m von P an der Geraden m mit 1-fach-Origami konstruieren? Die Lösung benutzt mehrfach die Lot-Faltung und (WH) und zeigt, ähnlich wie bei der Parallelen-Faltung, dass Spiegeln eines Punktes nicht als Grundfaltung betrachtet werden braucht, vgl. Abbildung 5.8.

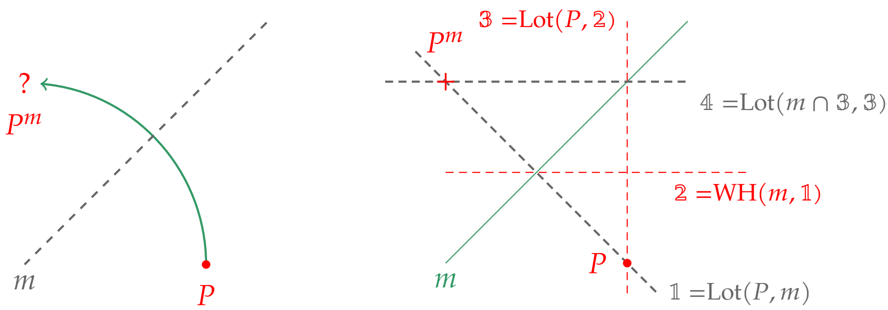


Abbildung 5.8.: 1-fach-Konstruktion von P^m als Schnittpunkt konstruierter Geraden $\mathbb{1}$, $\mathbb{4}$.

[26]Unabhängig davon, wie die Diskussion hier verläuft, ist sie wertvoll für erste Überlegungen zum Sinn und Wesen von (voneinander unabhängigen) Grundfaltungen und letztlich von Axiomen.

Auf Seite 164 wollten wir in f) wissen, ob nun die gesamte Faltung 1-fach ist. Jeder Schritt der Konstruktion ist nach unserer Vereinbarung 1-fach (Mittelsenkrechten, Lote, Parallelen etc.), dabei benutzen die jeweiligen Faltschritte lediglich bereits mit 1-fach-Origami erzeugte Objekte (Punkte und Geraden). Hierbei meinen wir mit »erzeugten Punkten« Schnittpunkte von mit 1-fach-Origami konstruierten Geraden. Diese Geraden entstehen aus der endlichen Anwendung von Grundfaltungen.

Wir sollten nun genauer klären, wie Punkte der euklidischen Ebene zu Faltpunkten werden. Die gerade erwähnte Konstruktionsvorschrift für Punkte als Schnittpunkte von konstruierten Geraden erscheint so selbstverständlich und aus der Schulgeometrie vertraut, dass wir uns fragen können, ob diese Vorschrift in der Definition überhaupt erwähnt werden sollte. Dazu betrachten wir ein faszinierendes Beispiel.

Eine klassische Konstruktion, die Haga-Faltung oder Hagas Theorem,[27] zeigt nicht nur eine weitere elegante Streckendrittelung, sondern erkundet die Grenzen des 1-fach-Origami. Die Haga-Faltung ist ausführlich samt Rechnungen und vielfältigen Verallgemeinerungen von Kazuo Haga in [Hag02] beschrieben, ist aber in zahlreichen Quellen behandelt worden. In den Kursen haben wir teilweise einige der Verallgemeinerungen angeschaut, vgl. Abbildung 5.9, hier interessiert uns lediglich der ursprüngliche Satz von Haga für $n = 3$.

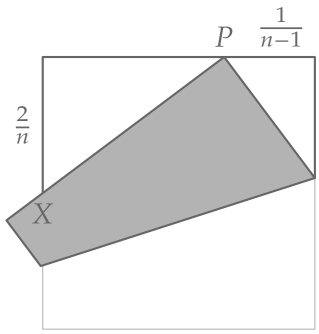


Abbildung 5.9.: Die Haga-Faltung zur Konstruktion von Stammbrüchen. Klassisch ist der Fall $n = 3$. Im Bild ist der Fall $n = 4$ gezeichnet und $n \geq 3$ angedeutet.

Die Faltung besteht zunächst aus zwei Schritten. Die obere Kante des Einheitsquadrats wird per (MS) halbiert (i. A. $(n-1)$-geteilt). Nun wird die untere rechte Ecke des Quadrats auf den soeben entstandenen Kantenmittelpunkt, P, per (MS) gefaltet. Falten wir diesen letzten Schritt nicht auf, sondern betrachten die Stelle X, an der die untere Kante des Papiers nun die linke Kante berührt. Es stellt sich heraus, dass der Abstand von dieser Stelle bis zur linken oberen Ecke genau $\frac{2}{3}$ beträgt. Da Halbieren per (MS) bereits 1-fach ist, haben wir somit die linke Kante gedrittelt.

[27]Benannt nach Kazuo Haga. Haga selbst schreibt die erste Publikation seiner Konstruktion Fushimi 1979 zu, vgl. [Hag02, S. 314] sowie [KT87, S. 18-19].

Die Beschreibung haben wir so gewählt, dass es ggf. nicht sofort klar ist, warum diese Faltung keine 1-fache ist. In der Regel wird dieser Umstand in der Literatur nicht thematisiert. Nachfolgend beschreiben wir daher, wie wir diese Faltung in den Kursen präsentieren, welche Diskussionen sich bzgl. 1-fach-Origami ergeben und wie diese schöne Faltung zu 1-fach-Origami konvertiert werden kann.

Beispiel 5.10. In den Kursen moderieren wir die Stimmung oft durch »lustige« Faltungen. Unweigerlich muss aus dem gefalteten Trinkbecher getrunken werden. Auch kann die Haga-Faltung durch einen weiteren Schritt (aus einem zweifarbigen, weiß-roten quadratischen Papier mit weißer Seite nach oben) zum Weihnachtsmann umfunktioniert werden. Dazu falten wir die markierten Punkte (A auf B) per Bergfaltung wie in Abbildung 5.10 aufeinander. Der Weihnachtsmann mit roten Mantel und Münze, mit weißen Gesicht und Sack voller Geschenke ist dann nicht zu übersehen. Diese Faltung geht auf Paula Versnick zurück und ziert den Umschlag von »Minimal Origami« von Jean-Jerome Casalonga. ♯

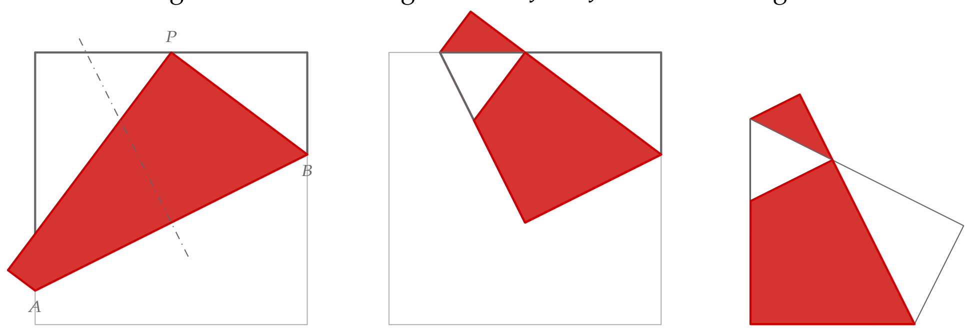


Abbildung 5.10.: Die Faltung des Weihnachtsmanns: Zuerst die Haga-Faltung, dann die Bergfaltung an der Mittelsenkrechten von $[AB]$.

Die Haga-Faltung gehört in dieser Form nach unserer Auffassung nicht zu 1-fach-Origami, da die entscheidende Stelle auf der linken Kante nicht als Schnittpunkt zweier Falze entsteht. Dieser Umstand führt zu einigen Diskussionen in allen Kursen. Es wird argumentiert, dass beide beteiligten Kanten, die untere und linke, als konstruierte Falze zugelassen sind (das ist korrekt), daher ist der Punkt X konstruiert (das ist nicht per se klar). Das Spiegelbild der unteren Kante in der Faltung ist noch nicht konstruiert. Das erkennen wir auch daran, dass beim Auffalten, der Punkt X nicht vorhanden ist, es sei denn er wurde durch ein zusätzliches »Umknicken« oder Markieren (das gehört sicherlich nicht zu 1-fach-Origami) gekennzeichnet. Wir plädieren dafür, nur solche Punkte als konstruiert anzusehen, die Schnittpunkte von zwei Falzen sind.

Bemerkung 5.11. Dieses Problem tritt nur in der Faltpraxis auf. Modellieren wir 1-fach-Origami ohne Papierbewegungen (das tun wir implizit ohnehin schon), als Mittelsenkrechten- und Lot-Erzeugung etc., dann sehen wir den Punkt X gar nicht. Bei hartnäckigen Diskussionen kann betont werden, dass die Faltung nur daraus besteht, die Mittelsenkrechte AB als konstruiert zu erkennen. ♯

Diese mathematisch triviale aber formalistisch bemerkenswerte Nuance zeigt auf, dass Arbeiten in einem zuvor abgesteckten und regelbasierten Gebiet die Notwendigkeit mit sich bringt, die Gebietszugehörigkeit wachsam zu überprüfen.[28]

In der Tat ist es leicht, die Haga-Faltung so zu komplettieren, dass sie 1-fach wird: Studierende erhalten diese Aufgabe[29] als Hausaufgabe und haben damit Schwierigkeiten.[30] So ist zwar erkennbar, dass die gesuchte Gerade das Lot durch P auf die Verbindungsgerade PB ist (damit ist die Aufgabe gelöst), vgl. Abbildung 5.10, doch innerhalb des Quadrats ist dieses Lot nicht gut faltbar. Eine simple Alternative ist die Sequenz (sei f der Falz aus der Haga-Faltung): $\mathbb{1}$ =MS(P, B), $\mathbb{2}$ =Lot$(\mathbb{1}, f \cap \mathbb{1})$, $\mathbb{3}$ =Lot$(\mathbb{2}, P)$. X ist dann der Schnittpunkt von $\mathbb{3}$ mit der linken Quadratseite.

Der Beweis der Richtigkeit der Haga-Faltung ist elementar, auch wenn nicht offensichtlich. Typischerweise wird dies per Ähnlichkeit von Dreiecken bewiesen. In der Abb. 5.9 sind die beiden weißen Dreiecke ähnlich zueinander. Mit dem Satz von Pythagoras können die Seitenlängen im rechten Dreieck bestimmt werden ($\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ für $n = 3$). Aus der Ähnlichkeit folgen die nötige Seitenlängen im linken Dreieck.

Die Beschäftigung mit Hagas Theorem kann eine ganze Sitzung in Anspruch nehmen, wenn wir die Faltung beweisen, ins 1-fach-Origami einordnen und die Faltung verallgemeinern wollen. Wir empfehlen, nur das nötigste im Kurs zu machen, und den Rest aus Zeitgründen auf Hausaufgaben oder Handouts auszulagern.

Fassen wir diese Überlegungen zusammen, dann haben wir fast alle wichtigen Zutaten für eine arbeitsfähige Darstellung von 1-fach-Origami. Einige Aspekte bleiben noch zu klären:

a) Studierende stoßen auf ein Henne-Ei-Problem: Was war zuerst da? Punkte, um mit ihnen per Grundfaltungen Geraden zu erzeugen, oder Geraden, deren Schnittpunkte Faltpunkte sind? Studierende machen also erste Erfahrungen mit Problemen, die in der euklidischen Ebene auf ontologische Fragestellungen führen.[31] Wir lösen diese Bedenken pragmatisch auf, indem wir an den Anfang der 1-fach-Origami-Beschäftigung einige Punkte und Geraden (etwa die Ecken eines Quadrats und die Verlängerungen seiner Kanten)[32] stellen.

[28] Fachmathematisch kennen Studierende viele Beispiele für solches Verhalten: Arbeiten wir mit natürlichen Zahlen und subtrahieren diese voneinander, dann könnte das Ergebnis aus den natürlichen Zahlen führen: Subtraktion ist keine Verknüpfung auf natürlichen Zahlen. Oder Faktorgruppenbildung: Faktorisieren einer Gruppe nach einem Normalteiler liefert wieder eine Gruppe, nach einer Untergruppe in der Regel nicht.

[29] »Kann die Haga-Faltung so erweitert werden, dass der $\frac{2}{3}$-Punkt mit 1-fach-Origami konstruiert ist?«

[30] Das basiert auf der Anzahl und Qualität der eingereichten Lösungen.

[31] Hier haben wir keine ernsthaften Probleme, da wir bereits vorausgesetzt haben, dass Punkte und Geraden die der euklidischen Ebene sind, das heißt wir müssen uns hier keine Gedanken über das *Wesen* dieser Objekte machen.

[32] Auf Nachfrage oder als Hausaufgabe klären wir, dass je nach Setup bereits zwei Punkte der Ebene zum Start ausreichen, vgl. Kapitel 3 und Beispiel 5.12.

Beispiel 5.12. Seien die Punkte 0 und 1 der komplexen Ebene gegeben. Wir beschreiben sehr kompakt, wie daraus ein Quadrat mit den Eckpunkten $0, 1, i, i + 1$ mittels Grundfaltungen entsteht:

$$x = \mathrm{VG}(0,1),\ y = \mathrm{Lot}(x,0),\ i+1 = \mathrm{Lot}(x,1) \cap \mathrm{WH}(x,y),\ i = \mathrm{Lot}(i+1,y) \cap y.$$

Die Kanten des Quadrats sind dabei bereits im Prozess entstanden. ♯

b) Mit Blick auf die Definitionen rund um 1-fach-Origami aus Kapitel 3 ist unschwer zu erkennen, dass die bisherige Behandlung des 1-fach-Origami im Kurs weit von der dortigen entfernt ist. Das ist für uns kein Problem, die provozierte Unzufriedenheit mit der Definition von 1-fach-Origami ist gewollt, Studierende sollen konkret erfahren, wie eine Theorie schrittweise formalisiert wird. Aus der Literatur ist leicht zu erkennen, dass die dortige mathematische Darstellung nicht sehr formalistisch (aber für die Autorinnen und Autoren trotzdem implizit akzeptabel) ist. Es ist folglich anzunehmen, dass Studierende an dieser Stelle ebenfalls keine pedantische Definition erwarten. Wir sind zur Überzeugung gelangt, dass die stringentere (und weniger lückenhafte) Darbietung von 1-fach-Origami aus Kapitel 3 nicht beim Entwickeln von 1-fach-Origami in den Kursen angestrebt werden soll, sondern erst (wenn überhaupt) dann, wenn die Struktur von 1-fach-Origami entdeckt und gut verstanden ist. Vor allem die Finessen aus Abschnitt 3.2 bei der Definition von Grundfaltungen und etwa von regulären Faltungen sind an dieser Stelle aus unserer Sicht wenig hilfreich.

c) Wir erkennen die rekursive endliche mathematisierte Struktur von 1-fach-Origami: Konstruierte Objekte, Punkte und Geraden, entstehen in kontrollierter Anwendung gut verstandener Grundfaltungen. Studierende werden auf die Idee gelenkt, dass diese Auffassung nun lediglich das Auffinden *aller* möglicher Grundfaltungen benötigt. Das 1-fach-Origami ist dann aus dieser Sicht die Menge der Schnittpunkte (Faltpunkte) von Geraden, die per Grundfaltungen aus vorgegebenen und bereits konstruierten Punkten und Geraden in endlich vielen Schritten erzeugt werden, sowie ebenjene Faltgeraden.

Wir stellen nun fest, dass wir vier Grundfaltungen (MS, WH, VG, Lot) gefunden haben und einige Studierende äußern zum ersten Mal die Vermutung, dies seien schon alle. Das nutzen wir als eine willkommene Überleitung zu Dreiecks-Konstruktionen in der nächsten Einheit und zur Entdeckung weiterer Grundfaltungen. Die Grundfaltungen haben wir noch nicht ausführlich studiert, das machen wir erst, wenn das Auffinden neuer Faltungen ins Stocken gerät.

Beispiel 5.13. Eine wunderbare Möglichkeit, die vier gefundenen Grundfaltungen in einem Beispiel zu benutzen, ist nicht nur elegant, sondern hilft uns, alle rationalen Zahlen mit

1-fach-Origami zu falten. Dieses Beispiel aus Abbildung 5.11, das wir bereits in [Ned20] verwendet haben, fasst alle unseren Überlegungen zusammen: Es ist eine 1-fach-Konstruktion, dort werden Strecken halbiert und gedrittelt, alle bisherigen Grundfaltungen kommen vor.

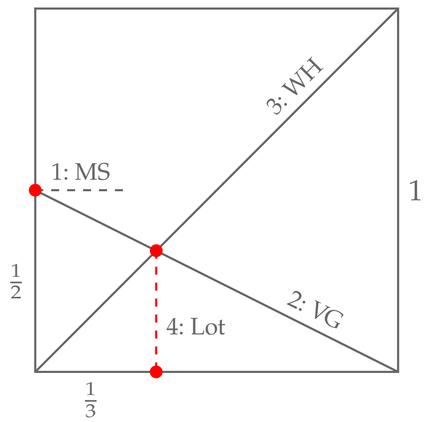


Abbildung 5.11.: Eine elegante 1-fach-Konstruktion von $\frac{1}{3}$. Ersetzen wir in der Abbildung $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{n-1}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 3$, dann wird statt $\frac{1}{3}$ entsprechend $\frac{1}{n}$ konstruiert. Weitere Verallgemeinerungen finden sich in [Lan03, S. 12], [Mon09, S. 29].

Dieses sog. »Diagonalverfahren« ist gut bekannt, vgl. [Lan03], [Hul12, Act. 4], die Herausstellung der vier Grundfaltungen haben wir in der Literatur noch nicht gesehen.

Der Beweis dieser Konstruktion ist ebenfalls elegant. Studierende versuchen zunächst, über Ähnlichkeit von Dreiecken zu argumentieren, aber das ist etwas lästig. Ein schöner Perspektivenwechsel liefert die Interpretation der Winkelhalbierenden als die Ursprungsgerade $y = x$ (mit dem Koordinatenursprung in der linken unteren Ecke) und die Verbindungsgerade als $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Diese Interpretation durch lineare Funktionen ist Studierenden vertraut, die nötigen Rechnungen führen sie selbständig aus. ♯

Zum Abschluss dieser Einheit erwähnen wir noch wichtige Konstruktionen, die wir größtenteils mittels Hausaufgaben untersucht haben.

Winkelverdoppelung Sei ein Winkel gegeben, repräsentiert durch zwei sich im Punkt P schneidende Geraden m und n. Um diesen Winkel zu verdoppeln, genügt es, einen von P verschiedenen Punkt auf m zu finden und diesen an n zu spiegeln. Die Verbindungsgerade dieses Bildes mit P bildet mit n zum ursprünglichen gleich großen Winkel. Ist außer P noch kein anderer Punkt auf m konstruiert, dann finden wir außerhalb von m einen konstruierten Punkt und fällen von ihm das Lot auf m.

Dieses Resultat werden wir etwa bei der Winkeldreiteilung benutzen.

Streckenverschiebung In der xy-Ebene seien zwei konstruierte Punkte A und B o.E. außerhalb der x-Achse gegeben. Wir wollen einen Punkt C auf der x-Achse mit $\overline{AB} = \overline{0C}$ konstruieren. Das erledigen wir in zwei Schritten, vgl. Abb. 5.12.

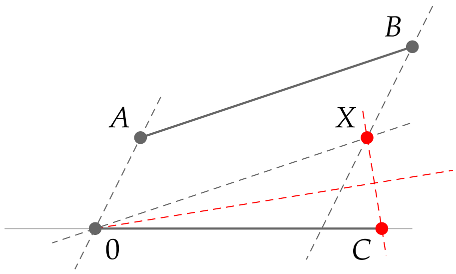


Abbildung 5.12.: Eine 1-fach-Faltung der Verschiebe-Konstruktion. Zunächst wird durch zweimalige Parallelenkonstruktion X erzeugt. Das Lot durch X auf die Winkelhalbierende von $\measuredangle C0X$ liefert das gesuchte C.

Addition Seien zwei (1-fach-)Origami-Zahlen a und b gegeben, das heißt seien die Faltpunkte $(a, 0), (b, 0)$ gegeben. Die Summe $a + b$ kann mit bereits besprochenen Mitteln wie folgt elementar konstruiert werden: Die Mittelsenkrechte von $[(a, 0)(b, 0)]$ liefert den Faltpunkt $(\frac{a+b}{2}, 0)$. Spiegeln von $(0, 0)$ am Lot zur x-Achse durch $(\frac{a+b}{2}, 0)$ liefert $(a + b, 0)$ wie gewünscht, vgl. Abb 5.13. Für alternative Argumentation siehe auch [Hul20, S. 49].

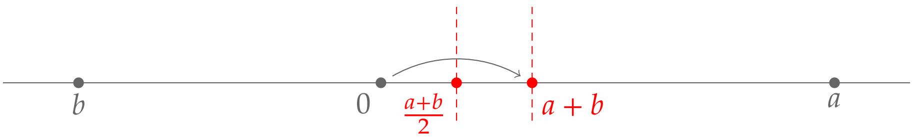


Abbildung 5.13.: Eine Faltkonstruktion von Summen zweier Zahlen.

Multiplikation/Division Für die Multiplikation und Division von Origami-Zahlen $a, b \neq 0$ benutzen wir die aus der ebenen Geometrie bekannte Strahlensatzkonstruktionen, eine Faltkonstruktion davon ist in [Hul20, S. 49] zu finden, vgl. auch [Ger08, §6]. Gelegentlich haben wir auch die äußerst elegante und mit 1-fach-Origami reproduzierbare Konstruktion aus [Mar98, S. 34] vorgestellt, vgl. Abb. 5.14 sowie [Ols75, §37].

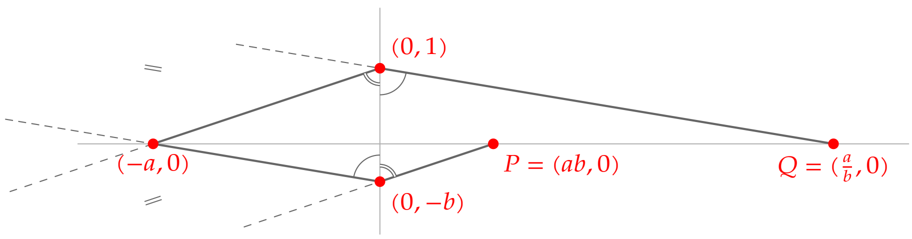


Abbildung 5.14.: Faltkonstruktionen zum Multiplizieren und Teilen zweier Origami-Zahlen $a, b \neq 0$. Die Parallele durch $(0, 1)$ zu $(-a, 0)(0, -b)$ schneidet die x-Achse in $Q = (\frac{a}{b}, 0)$. Die Parallele durch $(0, -b)$ zu $(-a, 0)(0, 1)$ schneidet die x-Achse in $P = (ab, 0)$. Für diese Konstruktionen sind nur (VG) und (Lot) nötig. Der Beweis erfolgt elementar aus Ähnlichkeit von Dreiecken.

Wir besprechen und kommentieren diese Ergebnisse und stellen fest, dass die Menge der Origami-Zahlen ein Körper ist. Wir erkennen leicht, dass für zwei Origami-Zahlen a und b auch der Punkt (a, b) faltbar ist. Damit können wir die komplexen Zahlen $a + ib$ ebenfalls als Origami-Zahlen bezeichnen und erkennen, dass solche Zahlen einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ bilden, vgl. Satz 3.29. Diese Erkenntnisse beschäftigen uns aber nur am Rande.

Bemerkung 5.14. Es ist sicherlich nicht notwendig, die Einheiten genau so durchzuführen. In der Tat haben wir uns in den Kursen nicht strickt daran gehalten. Es wird aber möglich sein, anhand der beschriebenen Aktivitäten wichtige Ziele (Entdeckung der vier Grundfaltungen und Präzisierung der Definition) auch in ganz anderer Abfolge zu erreichen. ♯

5.2.2. Zweite Einheit: Dreiecke und Parabeln

Diese Einheit vertieft die Ziele A b), involviert B a), c-d), D a).
Dauer: eine bis eineinhalb Sitzungen.

In dieser Einheit wollen wir eine neue Grundfaltung entdecken, indem wir regelmäßige Dreiecke zu falten versuchen.

Nachdem wir uns mit Zahlen und Strecken beschäftigt haben, wollen wir überlegen, was wir aus der Schulgeometrie nachfalten können. Dazu beginnen wir mit einer absichtlich nebulöser Aufgabenstellung. Wir zitieren dazu aus [Ned20, S. 34f.]:

> »›Falte ein Dreieck!‹ Diese unspezifische Aufforderung führt zu verschiedenen Lösungen. Die Meisten halbieren das Quadrat (vgl. Abb. 5.15 links), andere finden kreative Lösungen (vgl. Abb. 5.15 rechts). Dabei kann bemerkt werden, dass der Umriss im ersten Fall ein Dreieck ist, im zweiten dagegen ein Fünfeck, und es erst einmal nicht klar, was genau die Lösung sein soll. Dies bereitet die wichtige Frage vor: ›Was ist überhaupt ein Dreieck?‹ oder besser ›Wie wollen wir Dreiecke definieren?‹. Sollen sie einen dreieckigen Schatten werfen? Sollen sie durch drei Falze begrenzt sein? [...] Können gar gleichseitige Dreiecke (mit 1-fach-Origami) gefaltet werden? Das ist eine wesentlich kompliziertere Fragestellung. *Hilfreiche Tipps:* Gehen wir über drei gleiche Seiten (im Quadrat haben wir bereits vier gleich große Seiten) oder über drei gleich große Winkel (vielleicht ist 30° leicht faltbar? Ist hier ein rechtwinkliges Dreieck faltbar, dessen einer Winkel einen Sinus von 1/2 besitzt?)?«.

Die beiden Faltungen in Abbildung 5.15 sind bemerkenswert. Nicht nur legen sie nahe, dass Studierende nicht von sich aus in 1-fach-Origami arbeiten und über Dreiecke mehr visuell statt konstruktiv denken, sondern sie eröffnen eine lehrreiche Diskussion über das Wesen von Dreiecken.

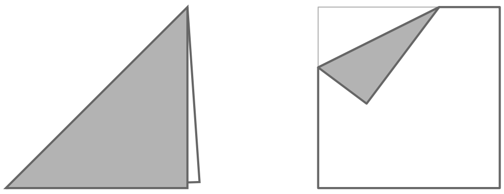


Abbildung 5.15.: Naive Faltungen von Dreiecken

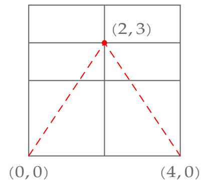
Bitten wir Studierende ihre Faltungen zu erklären, dann kommt in der Regel die Antwort »es sieht wie ein Dreieck aus«. Dabei müssen wir genauer hinsehen, denn im rechten Bild in Abb. 5.15 muss präzisiert werden, welches »es« sie meinen (drehen wir das Blatt um, dann ist kein Dreieck zu sehen). Fragen wir Studierende, ob ihre Faltungen 1-fach sind, dann wissen nicht alle direkt eine Antwort. Die fünfeckige Dreiecksfaltung entsteht zufällig und ist daher schnell aussortiert. Das linke Bild der Abb. 5.15 ist erstaunlicherweise 1-fach, sobald es aufgefaltet wird (und wie ein Quadrat in Abb. 5.6 aussieht). Das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ dort wird begrenzt durch zwei vorgegebene und einen per (MS) konstruierten Falze. Äußerst lehrreich ist die Nachfrage, wie Studierende Dreiecke definieren würden: Die Bandbreite reicht von *Flächen*, die gewissermaßen begrenzt sind, über »*Strecken*, die sich in drei Punkten treffen«, zu »drei *Punkte* und ihre Verbindungs*geraden*«, zu »drei Punkte nicht auf einer Geraden«.[33] Wir kommen zurück zu 1-fach-Origami, indem wir fragen, wie wir nun Dreiecke dort definieren *wollen*. Diese Frage ist sehr natürlich, weil auch in der Fachmathematik Dreiecke recht unterschiedlich definiert werden, vgl. [Fil93, S. 81], [Vol15, S. 84], [Mar75, S. 98]. Wir entscheiden uns, etwas anders als in der eleganten Definition eines Dreiecks als »drei nichtkollineare Punkte«, für die Verbindungsgeraden dreier nicht kollinearer Punkte, weil die Geraden – Falze – mehr an Falten erinnern.

In diesem Setting fordern wir Studierende weiter auf, ein *regelmäßiges* Dreieck mit 1-fach-Origami (in einem gegebenen Quadrat) zu falten. Das ist eine für die meisten Studierenden schwierige Aufgabe. Typischerweise ist das Problem, dass sie nicht wissen, wo sie anfangen sollen: Sollen sie gleich lange Kanten konstruieren? Sollen sie über gleich große Winkel gehen? Wo soll dieses Dreieck im Quadrat liegen?[34] Studierende entwickeln nicht selten falsche Lösungen, die gewissen Fehlvorstellungen aufgesessen sind (rechte Winkeln per Streckendrittelung dritteln wollen) oder nur Approximationen sind (»das sieht gleichseitig aus«).

[33] Wir ignorieren hier, dass diese Beschreibungen teilweise keine Definition von Dreiecken liefern, weil sie Sonderfälle nicht berücksichtigen, diskutieren das aber im Kurs.

[34] Ähnliche Probleme und Lösungsansätze haben wir bei Schülerinnen und Schülern, aber auch bei Lehrkräften in entsprechenden Fortbildungen beobachtet.

Bemerkung 5.15. Es kann passieren, dass Studierende originelle und unerwartete Ideen entwickeln. So hat eine Studentin im [19]Kurs auf die Frage nach der Faltbarkeit eines regelmäßigen Dreiecks wie folgt reagiert. Sie überlegte, dass die Höhe (und Mittelsenkrechte) im gesuchten Dreieck auf eine der Kanten der Länge 1 genau $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lang ist. Daraufhin hat sie gezeigt, wie Strecken der Länge $\sqrt{3}$ gefaltet werden, und verwendet, dass Strecken per Falten translatiert werden können. Damit hat sie nicht nur die Aufgabe gelöst, sondern gleich zwei weitere Themen aufgestoßen: Faltbarkeit von Wurzelausdrücken und Körperoperationen mittels Falten. Es ist dann die Entscheidung der Lehrperson, diesen neuen Pfaden direkt zu folgen und die Entdeckungsatmosphäre im Kurs zu fördern, oder etwas strukturierter die Dynamik in geplante Entdeckungsschienen zu lenken.



Ein häufiger Lösungsvorschlag, bei dem das erzeugte Dreieck gleichseitig aussieht, aber keines ist,[35] ist am Rand abgebildet. Diese »Lösung« mit drei (MS) und zwei (VG) ist aber eher für Schülerinnen und Schüler typisch, Studierende machen den Fehler seltener.[36] ♯

Wir können mehrere Tipps gegeben. Wir empfehlen, eine Basisseite des zukünftigen Dreiecks mit einer Quadratseite zu identifizieren (dann müsste letztlich die Höhe des gesuchten Dreiecks gefaltet werden). Ferner weisen wir darauf hin, dass das Quadrat bereits *vier* gleiche Seiten hat und wir nur *drei* benötigen.

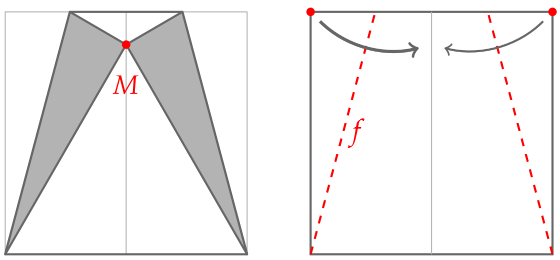


Abbildung 5.16.: Faltung eines gleichseitigen Dreiecks. Links: Drei Kanten des Quadrats formen ein gleichseitiges Dreieck. Rechts: Die linke obere Ecke des Quadrats wird so auf die Mittelsenkrechte der unteren Seite gefaltet, dass der entstehende Falz durch die linke untere Ecke geht. Analog auf der rechten Seite des Quadrats, vgl. auch [Mon09, S. 46-47], [Hul12, Act. 1].

Studierende entdecken mit diesen Tipps die Faltung aus Abb. 5.16 links und viele akzeptieren sie als eine Lösung. Dabei falten sie die linke und rechte Kante des Quadrats symmetrisch zueinander und bilden damit aus drei gleich langen Kanten des Quadrats ein gleichseitiges Dreieck. Erst auf Nachfrage erkennen Studierende, dass hier ein ähnliches Problem wie bei der Brief- und Haga-Faltung vorliegt. Falten wir das linke Bild in Abb. 5.16 wieder auf (und erhalten das rechte Bild), dann

[35]Hier sind fälschlicherweise sowohl die Dreiecksseite als auch die Höhe darauf rationale Zahlen.

[36]In einem Workshop bei einem Schulbesuch hat eine Schülerin die Aufgabe »Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck per Falten« so gelöst: Sie zeichnete mit dem Geodreieck 60°-Winkel ein und faltete dann die eingezeichneten Strecken. Es war nicht leicht zu vermitteln, dass die (zugegebenermaßen nicht präzise gestellte) Aufgabe etwas anderes im Sinne hatte.

sehen wir das gewünschte Dreieck nicht mehr. Studierende erkennen, dass M das Spiegelbild der linken oberen Ecke am Falz f ist. Folglich liefert das Lot auf f durch die linke obere Ecke M als Schnittpunkt von Falzen. Nun müssen wir lediglich M mit den linken und rechten unteren Ecken per (VG) verbinden. Damit erscheint diese korrigierte Faltung 1-fach zu sein, aber was ist die Faltung, die f erzeugt? Wie lässt sie sich beschreiben?

Beispiel 5.16. Die elegante, schnelle und faltpraktisch üblichere Faltung eines gleichseitigen Dreiecks, vgl. Abb. 5.17, finden Studierende in der Regel nicht. Wir stellen die Lösung vor und benutzen sie in weiteren Faltungen, die reguläre Dreiecke benötigen. ♯

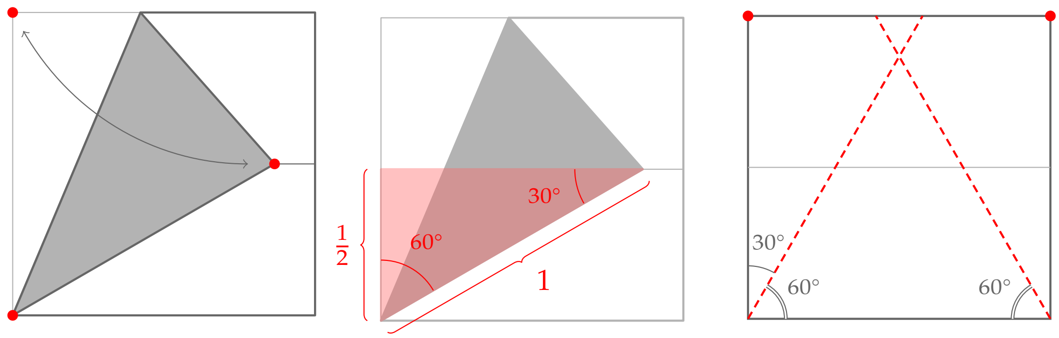


Abbildung 5.17.: Dreischrittige 1-fach-Faltung eines gleichseitigen Dreiecks, vgl. [Mon09, S. 65], [Ger08, S. 120f]. Die linke obere Ecke wird so auf die Mittelsenkrechte der rechten Seite gefaltet, dass der Falz durch die linke untere Ecke geht. Nach dem Auffalten dasselbe mit den rechten Ecken wiederholen. Ein rechtwinkliges Dreieck mit doppelt so langer Hypotenuse wie einer der Katheten ist ein $30° - 60° - 90°$-Dreieck.

Wir machen Studierende darauf aufmerksam, dass die Beschreibung wie oben »falte ... so, dass *der Falz* durch ... verläuft« unweigerlich das Problem der Brieffaltung erbt. In [Ned20, S. 36] haben wir dazu wie folgt Stellung genommen:

> »[...] es muss lediglich der richtige Zugang, die passende Umformulierung, gefunden werden. ›Falte einen Punkt auf eine Gerade, so dass der Falz durch einen zweiten Punkt geht‹. Aber wir haben noch gar keinen Falz, das heißt hier würde eine unendliche Menge von Geraden abgesucht werden (Augenmaß!) ›bis es passt‹. Betrachten wir die vorigen Faltungen, dann lassen sie sich auch falzfrei beschreiben: Falte einen Punkt auf einen anderen, eine Gerade auf eine andere (das Ergebnis ist dann ein Falz). Was geschieht aber hier? Ein Punkt wird bewegt, ein zweiter bleibt invariant. Vielleicht so: ›Falte einen Punkt auf eine Gerade und gleichzeitig einen zweiten Punkt auf sich selbst‹?«

Wir können von hier in mehrere Richtungen gehen: Wir können uns auf diese neuartige Faltung konzentrieren, weiter über regelmäßige Dreiecke und Polygone nachdenken oder die Quadratwurzel aus Bemerkung 5.15 ins Auge fassen. Wir sprechen über alle diesen Themen; die Kursatmosphäre bestimmt die Reihenfolge.

Beispiel 5.17. Wir erwähnen zwei schöne Ausblicke zu dieser Einheit. Wir folgen Thomas Hull und fragen Studierende, ob das soeben konstruierte gleichseitige Dreieck das flächengrößte im Quadrat, vgl. [Hul12, Act. 1], [Ger08, S. 118f]. Diese Optimierungsaufgabe ist nicht ganz leicht (und Studierende vermuten zunächst das gefaltete Dreieck sei bereits das flächengrößte) und erfordert ein bisschen Trigonometrie und Analysis. Für uns ist sie interessant, weil wir das flächenmaximale Dreieck im Quadrat bereits teilweise gesehen haben: In Abb. 5.16 haben wir einen 15°-Winkel konstruiert, der entsprechende Falz kann zu einem gleichseitigen Dreieck im Quadrat ergänzt werden. Rechnungen zeigen, dass das gesuchte flächenmaximale Dreieck tatsächlich so entsteht.

Eine weitere schöne Anwendung des gleichseitigen Dreiecks ist die Faltung (keine 1-fach-Origami-Konstruktion in unserem Sinne) eines Tetraeders. Sie erfordert im letzten Schritt ein gewisses motorisches Geschick, sorgt aber *immer* für gute Stimmung. Die vollständige Faltanleitung findet sich in [Mon09, S. 64-65], vgl. auch Abb. 5.18. ♯

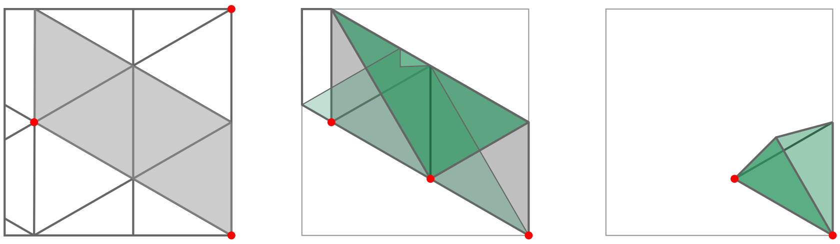


Abbildung 5.18.: Links: Ein Faltmuster des regelmäßigen Tetraeders mit 1-fach-Origami; die roten Referenzpunkte deuten ein regelmäßiges Dreieck an. Mitte: Das beinahe gefaltete Tetraeder sowie die aktuelle Position der roten Punkte; Rechts: Das fertige Tetraeder. Diese Abbildung haben wir bereits in [Ned16, S. 32] verwendet.

Die Analyse der »Dreiecksfaltung« wirft Fragen auf. Wir betrachten ein Beispiel dieser Faltung, die wir nun als »falte Punkt P auf Gerade m *und* Punkt Q auf sich selbst« beschreiben, vgl. Abb. 5.19.

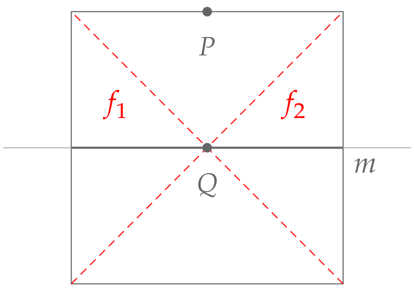
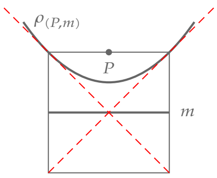


Abbildung 5.19.: Wollen wir P auf m falten, dann gibt es dafür bekanntlich unendlich viele Möglichkeiten. Fordern wir in dieser Faltung zusätzlich, dass Q fixiert bleibt, dann sehen wir mit den Falzen f_1 und f_2 bereits zwei Möglichkeiten.

a) Lässt sich diese Faltung »schulgeometrisch« beschreiben? In Abb. 5.19 sehen Falze wie (VG), (MS) oder (WH) aus. Ist das immer so?
b) Ist die Faltung im Allgemeinen ausführbar?
c) Wie viele Lösungen hat sie im Allgemeinen? Wir sehen ja Beispiele mit mindestens zwei Lösungen.

Die Antworten auf diese Fragen stellen eine für uns bereits klassische Sequenz dar, die stark von Thomas Hull und George E. Martin inspiriert ist, vgl. [Hul12, Act. 6], [Mar98, Ch. 10]. Dazu betrachten wir wieder den unendlichen Part dieser Faltung: »Falte einen Punkt auf eine Gerade«. Studierende werden gebeten, auf einem DIN-A4-Blatt (im Querformat) in der Nähe der unteren Kante (4-5 cm von unten und mittig) einen Punkt P zu markieren (das ist kein 1-fach-Origami), und diesen auf verschiedene Weisen auf die untere Kante m zu falten (und auffalten). Das gelingt technisch nicht gut, daher bekommen sie gesagt, dass das Resultat dasselbe ist, wenn sie stattdessen die untere Kante so falten, dass ihr Faltbild den Punkt berührt,[37] vgl. Abb. 3.6. Nicht alle Studierende erkennen, dass der Epigraph der so entstehenden Menge von Falzen eine Parabel ist, einige vermuten hier einen Halbkreis. Das ist eine willkommene Motivation, mathematisch zu überlegen, was davon stimmt. Dafür erklären wir die klassische Sicht auf Parabeln über Brennpunkte und Leitlinien wie in Satz 3.12.[38] Wie im dortigen Beweis, mit an unseres Vorgehen angepassten Notationen, beweisen wir, dass der Epigraph tatsächlich eine Parabel $\rho(P, m)$ ist. Das gilt für $P \notin m$. Den Fall $P \in m$ betrachten wir erst anschließend. Es folgt, dass die von uns erzeugten Falze als Tangenten an diese Parabel beschreibbar sind. Wir folgern, dass die vollständige »Dreiecksfaltung« Tangenten an $\rho(P, m)$ als Falze produziert, die mit Q inzidieren. Auf einmal sehen wir, dass diese Faltung, die wir nun besser »Tangentenfaltung« taufen, im generischen Fall zwei Lösungen hat.



Bemerkung 5.18. Einige Studierende scheinen die alternative Beschreibung zu präferieren und besser zu verstehen: Da der Punkt Q in der Faltung am Falz f fixiert und P (hier wird implizit $P \neq Q$ angenommen) auf P^f bewegt wird, können wir (dank der Isometrie beim Falten) $[QP^f]$ auch als Radius des Kreises mit Mittelpunkt M und Radius $[QP]$ ansehen. Die Notwendigkeit von $P^f \in m$ für die Existenz der Faltung modellieren wir mit den Schnittpunkten dieses Kreises mit m. Die Interpretation erlaubt direkt, die mögliche Anzahl an Lösungen für die Faltung (keine bis zwei) zu erkennen und sogar die Bedingung für die Existenz dieser Faltung anzugeben ($\overline{PQ} \geq \overline{Qm}$). In unserer parabolischen Darstellung ist die Existenz gegeben, wenn Q nicht »im Inneren« der Parabel $\rho(P, m)$ liegt. ♯

Nach dieser Analyse kommen in der Regel keine Bedenken auf, dass die Tangentenfaltung nur eine Version von (MS), (VG) oder (WH) ist. Zum Einen erkennen

[37] Studierende werden auf die involutorische Natur einer Spiegelung und daher auf die Symmetrie beim Falten hingewiesen.
[38] In den Kursen verstanden Studierende unter Parabeln primär Graphen quadratischer Funktionen.

Studierende, dass sie strukturell wesentlich anders als die drei vorgenannten ist, zum Anderen ist gar nicht erkennbar, wie sich die Tangentenfaltung im Allgemeinen aus den anderen hervorgehen könnte.[39]

Zu unserer Analyse der Tangentenfaltung gehört dazu, alle Spezialfälle zu untersuchen. Diese Analysen bei den anderen vier Grundfaltungen waren nahezu trivial (solange von *verschiedenen* beteiligten Objekten die Rede war), nur die (WH) enthält zwei wesentlich verschiedene Fälle: Sind die beiden Geraden parallel oder nicht. Die Tangentenfaltung ist unübersichtlicher. Nicht nur müssen wir den ausgearteten Fall $P = Q \in m$ für 1-fach-Origami ausschließen (alle Geraden durch P sind Lösungen), sondern müssen uns zum ersten Mal damit befassen, dass eine Faltanleitung *nicht* ausführbar sein könnte, also keine Lösungen besitzt. Das Problem haben wir sowohl im Fall $P = Q \notin m$, als auch dann, wenn Q »innerhalb« der Parabel $\rho(P, m)$ liegt. Wir müssen also entscheiden, in welcher Form wir diese Faltung zulassen wollen. Da wir keine penible Betrachtung wie in Kapitel 3 anstreben, einigen wir uns darauf, nur die Situation $P \notin m$ zu betrachten. Wir können nicht mehr rekonstruieren, ob Studierende je Bedenken hatten, dass eine Faltung auch mal nicht ausführbar sein kann. Wir einigen uns jedenfalls darauf, sie nur in den Fällen $P \notin m$ und $\overline{PQ} \geq \overline{Qm}$ zu betrachten und somit zu Recht von Parabeltangenten (Tan) sprechen zu dürfen.

In der nächsten Einheit untersuchen wir einige Faltungen, die (Tan) ausnutzen. Es wird sich zeigen, dass sie naturgemäß bei vielen Faltungen eine wichtige Rolle spielt, etwa zur Polygonfaltung oder zum Lösen quadratischer Gleichungen.

5.2.3. Dritte Einheit: Polygone und quadratische Gleichungen

In dieser Einheit greifen wir das Ziel B d) wieder auf sowie bedienen Ziele D a), D d).
Dauer: Eineinhalb bis zwei Sitzungen.

Diese Einheit ist aus mathematikdidaktischer und axiomatischer Sicht kaum interessant. Hier betrachten wir faltpraktisch (innerhalb von 1-fach-Origami) konkrete Konstruktionen von ausgewählten Polygonen, die zum Repertoire der Falt-Mathematik gehören.[40]

Den fachmathematischen Teil dieser Einheit bilden (aus der Literatur bereits bekannte) Sequenzen zum Lösen quadratischer Gleichungen. Wir verweisen hier vor allem auf [Ols75, §38], [Ned18, Online-Begleitmaterial],[41] [Hul12, Act. 6].

Aus Zeitgründen verzichten wir im Kurs auf gemeinsames Falten von anspruchsvollen Faltanleitungen. In verschiedenen Kursen haben wir mit 1-fach-Origami regu-

[39] In der Tat wird das nicht gelingen. Roger Alperin zeigte bereits, dass (MS), (WH), (VG), (Lot) alleine einen kleineren Körper als mit (Tan) zusammen erzeugen, vgl. [Alp00, Thm. 3.3, 4.1].
[40] Robert Geretschläger hat sehr ausführlich über Faltbarkeit von Polygonen in [Ger08] geschrieben.
[41] vgl. auch Anhang A.2.

läre Fünf-, Sechs-, Sieben- und Achtecke aus einem Quadrat gefaltet. In den letzten Kursen haben wir auf Fünf- und Siebenecke in den Sitzungen verzichtet.[42] Die Faltung eines regelmäßigen Fünfecks findet sich etwa in [Ger08, S. 134f.]. Allerdings ist das dort keine 1-fach-Faltung. Wir haben die Faltung leicht angepasst und in 1-fache Form gebracht, die Faltanleitung teilen wir Studierenden in der Regel zum Nachfalten aus, vgl. Anhang A.3.

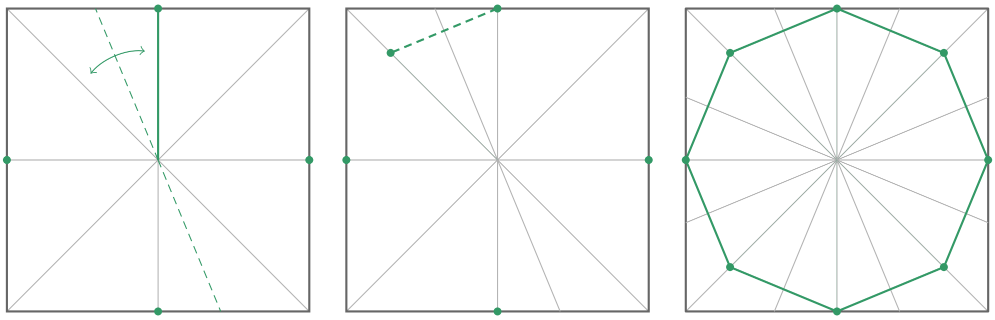
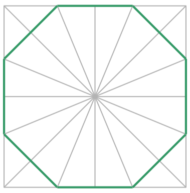
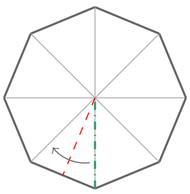


Abbildung 5.20.: 1-fach-Faltung eines regulären Achtecks im Quadrat. Mittels (MS) und (WH) werden zunächst die hellgrauen Hilfslinien und damit vier der gesuchten Ecken gefaltet. Vier fehlende Ecken des Achtecks entstehen aus der Anwendung von (WH), (Lot). Die Kanten des Achtecks entstehen aus der Anwendung von (VG).

Die Faltung eines regulären Achtecks ist recht einfach, Studierende können sie ohne größere Probleme finden und falten, allerdings nicht immer 1-fach. Oft verwenden sie die Faltung im linken Bild in Abb. 5.20, um den neuen Punkt wie im mittleren Bild per Umknicken oder Stift zu markieren. Wir benutzen diese Faltung, um ein weiteres Mal auf 1-fach-Origami aufmerksam zu machen und die Übertragung einer Strecke (hier per (WH) und Lot) zu üben.



Bemerkung 5.19. Das Achteck in Abb. 5.20 ist nicht flächenmaximal im Quadrat, siehe dazu [Ger08, S. 122] und das Bild am Rand. Da unser Achteck etwas *schwerer* als das flächenmaximale zu falten ist, haben wir uns aus Übungsgründen dafür entschieden. ♯



Bemerkung 5.20. Wir erwähnen eine amüsante Möglichkeit, aus regulären n-Ecken reguläre $(n-1)$-Ecke zu falten, die wir in der Regel für $n = 8$ oder $n = 6$ vorführen. In der Achteckfaltung (wenn wir das Achteck ausschneiden oder alles störende wegfalten) falten wir eine Ecke auf eine benachbarte, siehe Rand. Dabei lassen wir eines der acht gleichschenkligen Dreiecke »verschwinden« und das Resultat ist nicht mehr flach, sondern eine Pyramide mit einem regulärem *Sieben*eck als Grundfläche.[43] Wir nutzen diese nette Faltung, um wieder über Konstruktionen und über die Akzeptanz solcher workarounds zu diskutieren. ♯

[42]Regelmäßige Siebenecke können mit Zirkel und Lineal nicht konstruiert werden, aber mit 1-fach-Origami (sobald die Beloch-Faltung vorhanden ist). Die Konstruktion läuft auf das Lösen eines nichttrivialen kubischen Problems hinaus; das deutet die Komplexität der Faltung an. Ausführliche Diskussionen und Faltanleitungen finden sich etwa in [Ger08, S. 145f.].

[43]In [PT15] wurden solche Faltungen in der Tat zum Konstruieren regulärer Polygone benutzt.

Insgesamt werden wir keine Theorie der Faltbarkeit von regulären Polygonen entwickeln. Zum Einen aus Zeitgründen, zum Anderen weil das entsprechende Resultat aus Satz 3.31 folgt.[44] Wir geben im weiteren Verlauf (nachdem alle Grundfaltungen gefunden wurden) lediglich das Resultat aus Satz 3.32 an.

Als Nächstes üben wir die Tangentenfaltung, indem wir ein reguläres Sechseck im Quadrat falten, vgl. Abb. 5.21, und kommentieren einige Aspekte hiervon.

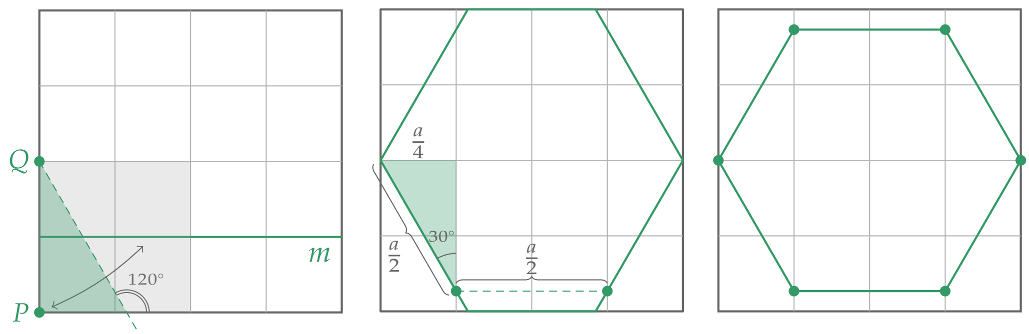


Abbildung 5.21.: Eine 1-fach-Konstruktion eines regulären Sechsecks. Das ist eine ergänzte Anleitung angelehnt an [Mon09, S. 52]. Alternative Faltanleitungen auch für flächenmaximale reguläre Sechsecke finden sich in [Mon09, S. 53] und [Ger08, §16.3].

So haben wir öfter das Quadrat in 16 kleine Quadrate (oder entsprechende Kanten vier-)teilen müssen, das erledigen wir mit sechs (MS). Beim Falten sagen wir »falte einen Schrank«, um die Faltsprache mal wieder zu akzentuieren. Studierende bekommen also die Faltanleitung auf verschiedene Weisen vermittelt.

Studierende sollen überlegen, was sie nun eigentlich falten wollen, um ein gleichseitiges Sechseck zu erhalten. Die erste Idee erinnert an die Situation mit dem gleichseitigen Dreieck: Studierende schlagen vor, 60°-Winkel zu konstruieren. Wir setzen diesen Vorschlag um, indem wir im linken unteren Quadratviertel die Tangentenfaltung aus der Dreieckskonstruktion, vgl. Abb. 5.17, nachahmen (wir wissen schon, dass dort ein $30° - 60° - 90°$-Dreieck entsteht, grün in Abb. 5.21 links). Wiederholen wir die Faltung in anderen Quadranten, dann erhalten wir ein Sechseck mit Innenwinkeln gleich 120°. Nicht allen Studierenden ist bewusst, dass gleich große Winkel noch kein reguläres Polygon liefern und, im Gegensatz zum Dreieck, die Kantenlängen *zusätzlich* gleich groß sein müssen. In Abb. 5.21 in der Mitte sehen wir, wieder wegen $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, dass die Schnittpunkte aus dem vorigen Schnitt tatsächlich ein reguläres Sechseck liefern.

Bemerkung 5.21. Studierende erkennen direkt an den Diagonalen des konstruierten Sechsecks in Abb. 5.21 in der Mitte, dass es nicht gleichseitig ist. Typischerweise haben wir zusätzlich mit Bastelmagneten Sechsecke vorgeführt, die gleich lange Kanten haben, aber be-

[44] Im [19] Kurs bemerkten wir, dass das Falten von regelmäßigen Polygonen kaum auf Interesse stieß.

weglich bleiben: Also legen die Kantenlängen die Winkel nicht fest. Das ist anders als in der Raumgeometrie mit Polyedern. Dort sind konvexe Polyeder nach dem Starrheitssatz von Cauchy starr. Wir führen ferner ein *bewegliches* nichtkonvexes Polyeder vor (konkret das Steffens Polyeder[45]), vgl. [DO07, Abschnitt 23.2.3]. ♯

Wir kommen nun zum Lösen quadratischer Gleichungen mit 1-fach-Origami als eine weitere Anwendung der Tangentenfaltung. Hierzu gibt es verschiedene Zugänge. Einerseits können wir, die übliche Konstruktion mit Zirkel und Lineal von $\sqrt{a}$ für eine bereits konstruierte Zahl a nachahmen, vgl. Abb. 5.22.

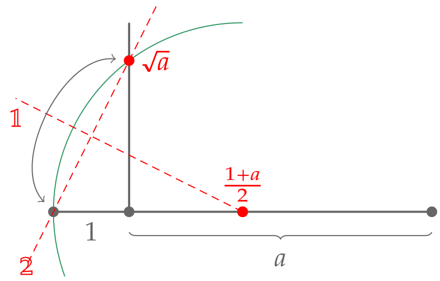


Abbildung 5.22.: Nachfaltung der »Höhensatz«-Konstruktion von Wurzeln. Falten wir den Punkt $(a+1, 0)$, das Lot $x = 1$ und per (MS) den Punkt $(\frac{a+1}{2}, 0)$ dann liefern die Falze $\mathbb{1}$ und $\mathbb{2}$ den Punkt $(1, \sqrt{a})$ und somit die gesuchte Länge $\sqrt{a}$. Die Z&L-Konstruktion, die zum selben Ergebnis führt, ist durch die grüne Kreislinie angedeutet.

Wir erkennen in Abb. 5.22, dass die Tangentenfaltung zwei Möglichkeiten hat, den Falz $\mathbb{1}$ zu erzeugen, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Ergänzend zur Bemerkung 5.18 sehen wir damit, dass die (Tan) den Zirkel gewissermaßen nachahmt.

Eine alternative, iterative Faltkonstruktion von Quadratwurzeln haben wir in [Ned18] vorgestellt (sie wurde nur im [19]Kurs ausgeteilt, vgl. Anhang A.4).

Eine weitaus effektivere und auch später hilfreiche Faltkonstruktion von Nullstellen quadratischer Gleichungen ist bereits auf Seite 115 und in Abb. 3.14 angedeutet. Dort algebraisieren wir den Part $P \leftrightarrow m$ der Tangentenfaltung und erhalten die parametrisierte Geradengleichung $f_t : y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$ der Falze. Vervollständigen wir die Tangenfaltung durch $Q \leftrightarrow Q$, lassen also f_t durch Q laufen und somit t auf höchstens zwei Werte einschränken, dann können wir bei geschickter Wahl von Q sehen, dass t eine vorgegebene quadratische Gleichung löst. Wollen wir mit 1-fach-Origami konkret die Gleichung $x^2 - px + q = 0$ für Origami-Zahlen p und q lösen, dann konstruieren wir den (offenbar faltbaren) Punkt $Q := (\frac{p}{2}, \frac{q}{4})$. Falten wir nun $P = (0, 1)$ auf $m : y = -1$ so, dass der entstehende Falz f_t durch Q verläuft, so sehen

[45]vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Steffen's_polyhedron. Wir haben das Polyedernetz aus Papier ausgeschnitten und zum Polyeder geklebt, dann die Seitenflächen mit einem 3D Stift verstärkt, damit sie nicht biegbar werden. Mit Karton oder sehr festem Papier lässt sich die Verbiegung der Seitenflächen kaum vermeiden.

wir sofort, dass Q eine Nullstelle von $x^2 - px + q$ ist.[46] Im Kurs lösen wir ergänzend zu diesen allgemeinen Überlegungen konkret eine ausgewählte quadratische Gleichung, etwa $x^2 - 7x + 5 = 0$, und verweisen auf [Ned18], wo wir alle Einzelschritte und einige didaktische Überlegungen expliziert haben, vgl. auch Anhang A.2.

Für Studierende mit Algebra-Vorkenntnissen bemerken wir, dass Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in das Lösen von quadratischen Gleichungen übersetzbar sind.[47] Wir haben gerade gesehen, dass 1-fach-Origami solche Probleme lösen kann, folglich stellen wir fest, dass mit 1-fach-Origami mindestens so viel konstruiert werden kann wie mit Zirkel und Lineal. Studierende vermuten typischerweise, vor allem zu Beginn der Beschäftigung, dass 1-fach-Origami ein weniger potentes Konstruktionswerkzeug ist, und sind jetzt fast der Überzeugung, dass 1-fach-Origami genauso mächtig wie Zirkel und Lineal ist.

Bemerkung 5.22. In jedem Kurs haben Studierende gefragt, warum 1-fach-Origami Zirkel und Lineal im Schulunterricht nicht ersetzt. Das hat selbstverständlich nicht nur mathematische Gründe. Aus mathematischer Perspektive können wir zwar prinzipiell alle Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen durch 1-fach-Origami ersetzen, aber wir können diese Konstruktionen nicht »nachfalten«. So können wir die Schnittpunkte zweier Kreise nur umständlich nachfalten, indem wir entsprechende quadratische Gleichungen mit 1-fach-Origami lösen. Der Aufbau der Geometrie in der Schule mittels 1-fach-Origami ist möglich, allerdings können die Konstruktionen nicht eins-zu-eins ersetzt und müssen neu gedacht werden. ♯

Die natürliche Fortsetzung unserer Beschäftigung ist nun zu fragen, ob es eine Fortsetzung gibt: Ist 1-fach-Origami nun vollständig erfasst? Wie schon bemerkt, neigen Studierende dazu, die Frage zu bejahen. In der nächsten Einheit beschreiben wir mögliche Fortsetzungen, die wir in verschiedenen Kursen ausprobiert haben.

5.2.4. Vierte Einheit: Beloch-Faltung und klassische Probleme

Diese Einheit involviert die Ziele B a-c) und D b-d). Dauer: eineinhalb bis zwei Sitzungen.

Die leichteste aber am wenigsten elegante Möglichkeit, den Faden aus der letzten Einheit aufzunehmen, ist Studierenden ein Gegenbeispiel für »1-fach = Z&L« vorzuführen. Dafür eignen sich, passend zu den genannten Zielen, die Faltkonstruktionen zum delischen Problem oder zur Winkeldreiteilung. Die Idee dabei ist, Studierende zu überraschen, mehr für 1-fach-Origami zu begeistern. Der Hintergrund ist, dass beide Probleme zum Lösen die Beloch-Faltung benötigen und allein mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Dabei haben wir bei der Winkeldreiteilung die Faltung angeleitet, ohne die Beloch-Faltung zu fokussieren oder zu kommentieren,

[46] Diese Darstellung ist eine Kombination von [Ols75, §38] und [Hul12, Act. 6].

[47] Falls im Kurs Studierende ohne Algebra-Kenntnisse dabei waren, gaben wir eine kurze Übersicht über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal aus algebraischer Sicht, vgl. Satz 3.33.

sondern wir haben uns auf den Nachweis der Winkeldreiteilung konzentriert. Erst im Nachhinein haben wir die Beloch-Faltung anvisiert und analysiert. Das ist sicherlich keine gelungene Möglichkeit, um diese Faltung zu entdecken. Diesen Weg haben wir in den ersten beiden Kursen ausprobiert, weil nicht klar war, wie Studierende die Beloch-Faltungen aus (nichttrivialen) Faltungen destillieren sollen, die sie nicht kennen.

Eine bessere Alternative, die auch dann gut passt, sollten Studierende einen »Beweis« von »1-fach = Z&L« verlangen, ist die ersten fünf Grundfaltungen wieder zu analysieren und (so die im Kurs erklärte Hoffnung) zum Finden weiterer Grundfaltungen oder zum Nachweis der Vollständigkeit der Liste zu nutzen.

Wir betrachten die Grundfaltungen nun genauer. Das muss nicht zum ersten Mal hier geschehen, die nachfolgenden grafischen und symbolischen (als Ergänzung zu »euklidischen«) Beschreibungen haben wir gelegentlich auch während früherer Einheiten verwendet. Diese Stelle scheint jedoch geeignet zu sein, um diese Beschreibungen zu systematisieren.

Sehen wir uns die Mittelsenkrechtenfaltung (MS) an, dann wird dort ein Punkt auf einen *anderen* gefaltet, wir können das durch $P \leftrightarrow Q$ symbolisieren. $P \leftrightarrow P$ ist kein 1-fach-Origami wegen unendlicher Lösungsmenge.[48]

Analog ergibt (WH) Winkelhalbierende zweier verschiedener Geraden. Dazu sagen wir, die eine Gerade wird auf die andere gefaltet und kürzen es mit $m \leftrightarrow n$ ab. Das Symbol $m \leftrightarrow m$ ist ebenfalls keine in 1-fach-Origami zugelassene Faltung.

Die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte ist per se anders. Hier werden *zwei* an sich in 1-fach-Origami nicht erlaubten Faltungen zu einer Grundfaltung kombiniert, symbolisch $P \leftrightarrow P \wedge Q \leftrightarrow Q$. Dieser Analyse geht voraus, dass wir bereits darüber gesprochen haben, Grundfaltungen falzfrei zu formulieren: Die Angabe »falte so, dass der Falz durch zwei gegebene Punkte geht« ist nicht falsch und beschreibt letztlich die Verbindungsgerade, hindert uns aber daran, so wie bei der »Dreiecksfaltung«, die eigentliche Struktur der Faltung zu erkennen.

Die Lotfaltung folgt der Struktur von (VG), dort werden auch zwei Objekte *nicht bewegt*, ein Punkt und eine Gerade bleiben fixiert, in Zeichen $P \leftrightarrow P \wedge m \leftrightarrow m$.[49]

[48] Hier könnte die Frage aufkommen, was genau etwa $P \leftrightarrow Q$ bzw. $P \leftrightarrow P$ sein sollen. Ist das erste eine Abbildung? Eine Gerade? Eine Menge? Wie passt das zur unendlichen Falzmenge $P \leftrightarrow P$? Diese Fragen haben wir uns zur Darstellungen in Kapitel 3 geführt. Im Kurs greifen und betonen wir diese Problematik auf, diskutieren mögliche Lösungen aber erst am Schluss von 1-fach-Origami.

[49] Es kann passieren, dass die Frage auftaucht »Wie können Grundfaltung anders als per $\wedge$ entstehen?« Es ist nicht unmöglich, etwa $P \leftrightarrow P \backslash m \leftrightarrow m$ betrachten zu wollen. Es stellt sich nur die Frage, was dieses Symbol repräsentieren soll. Ist das eine Abbildung, eine Menge? »Falte P auf P, aber so, dass m nicht fixiert bleibt, wird letztlich zu $P \leftrightarrow P \wedge m \leftrightarrow \neg m$. Es zeigt sich, dass die Formalisierung der Faltung Fragen ermöglicht, die sich vom Falten entfernen. Wir wollen jedoch lediglich 1-fach-Origami und keine abstrakten Strukturen studieren, die aus solchen Pfeilnotationen entstehen.

Auch die Tangentenfaltung  benötigt zwei Faltangaben $P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow Q$, involviert aber sogar drei Objekte.[50]

Betrachten wir nun die Faltungen in symbolischer Form

$$
\begin{aligned}
&P \leftrightarrow Q \\
&m \leftrightarrow n \\
&P \leftrightarrow P \wedge Q \leftrightarrow Q \\
&P \leftrightarrow P \wedge m \leftrightarrow m \\
&P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow Q,
\end{aligned}
$$

dann ist ein System nicht unbedingt erkennbar: Die Anzahl der beteiligten Faltungen und Objekte variiert; Punkte werden mal auf Punkte mal auf Geraden gefaltet; Objekte werden mal auf sich selbst mal auf andere Objekte gefaltet. Selbst $\leftrightarrow$ ist nur eine Abkürzung für ein mathematisch nicht gut verstandenes Objekt.

Studierende werden angehalten, neu zu überlegen, ob sie einen Grund sehen, warum diese Liste vollständig sein sollte. Als Tipp schlagen wir vor, neue Grundfaltungen *zu erfinden*. Das ist ein wichtiger Schritt, weil Studierende nach einigen Beispielen ein System hinter den Grundfaltungen erkennen. Gegebenenfalls hilft das, neue Grundfaltungen zu finden. Dieser Zugang erscheint als ein Spielchen mit Symbolen. Der Prozess hier erinnert jedoch nur an *Spielformalismus*, Studierende verlieren bei dieser Suche keinen Realitätsbezug. Auch sind die Spielregeln nicht mal expliziert. Etwa die formal denkbare Zeichenkette $P \leftrightarrow P \wedge P \leftrightarrow Q \wedge Q \leftrightarrow Q$ für zwei verschiedene Punkte P, Q würden Studierende nicht mal vorschlagen, weil sie direkt sehen können, dass sie nicht funktionierte.

Studierende schlagen einige interessante Faltungen vor: Drei Punkte auf eine Gerade falten, zwei Punkte auf eine Gerade falten, einen Punkt auf eine Gerade falten *und* diese auf sich selber etc. Im ^{16}Kurs wurde HJA7 so entdeckt. Es ist im Ermessen der Lehrperson, inwieweit diese Entdeckungen gehen sollen. Viele der Vorschläge würden naturgemäß nichts Neues liefern. So ist etwa Falten von zwei Punkten auf eine Gerade nichts anderes als (WH), bis auf Spezialfälle (wenn die Punkte gleich oder etwa beide auf der Geraden liegen). Dann leuchtet auf einmal ein, dass *drei* Punkte auf eine Gerade zu falten, im generischen Fall eine Kombination aus (WH) und (Tan) ist: Hier werden solche Tangenten an eine Parabel gesucht, die gleichzeitig eine Winkelhalbierende sind. Wir erkennen, dass diese Faltung, wenn überhaupt möglich, dann ein Spezialfall von (Tan), also nichts Neues, ist. Dabei betrachten wir nicht alle Spezial- und Ausartungsfälle. So ist etwa der obige Vorschlag $P \leftrightarrow m \wedge m \leftrightarrow m$ in generischen Fall $P \notin m$, auf den wir uns sowieso geeinigt haben,

[50]Sie ist bisher die einzige Faltung, bei der nichttriviale Fälle ausgeschlossen werden müssen, damit sie zu 1-fach-Origami gezählt werden kann.

gar nicht möglich. Auch die Faltung eines Punktes auf eine Gerade, die senkrecht zu einer gegebenen Geraden durch einen zweiten Punkt verläuft, klingt nur kompliziert. Diese Faltung zerfällt offenbar in (Lot) und (Tan).

Studierende schlagen aber keine völlig abenteuerlichen Faltungen vor, etwa 16 Punkte auf 3 Geraden zu falten. Dabei ist interessant (sollten wir diesen Vorschlag provokativ ins Spiel bringen) wie sie das begründen. Es wäre ungenügend zu sagen, dass solche Faltungen überbestimmt und folglich im Allgemeinen gar nicht ausführbar sind. Schließlich ist (Tan) auch nicht immer ausführbar. Eine verbesserte Argumentation wäre, darauf hinzudeuten, dass bereits zwei Punkte auf eine Gerade zu falten, eine Grundfaltung liefert, nämlich (WH), und alle zusätzlichen Forderungen diese Faltung höchstens unmöglich machen, aber keine neue Grundfaltung liefern.

Es liegt nahe, die Grundfaltungen noch weiter zu sezieren, und einzelne Inzidenzen wie $P \leftrightarrow Q$ oder $P \leftrightarrow P$ unter die Lupe zu nehmen, etwa so wie in Kapitel 3. Es gibt keinen mathematischen Grund, das nicht zu tun. Aus pädagogischen Gründen greifen wir aber die Beloch-Faltung auf, sobald sie vorgeschlagen wird und analysieren diese samt Winkeldreiteilung und delischem Problem. Erst dann kehren wir zur Analyse zurück und vervollständigen die Liste der Grundfaltungen.

Sobald also der Vorschlag $P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow n$ fällt, greifen wir ihn auf und pausieren die systematische Suche. Studierende werden angehalten, durch konkretes Falten ein Gefühl dafür zu bekommen, wann diese Faltung ausführbar, ob sie ausführbar ist. Typischerweise wird das nicht gut gelingen, weil Studierende die Faltung wörtlich nehmen: Sie falten einen Punkt auf eine Gerade, bewegen diesen darauf hin und her und versuchen, dabei den zweiten Punkt auf die zweite Gerade zu platzieren. Vor allem wenn sie dabei die Geraden »ungünstig« wählen, etwa senkrecht zueinander, kann es vorkommen, dass sie keinen passenden Falz innerhalb ihres Papiers finden. Das ist nicht schlimm, sie erkennen, dass die Faltung unübersichtlich und möglicherweise kompliziert ist. Kommt die Vermutung, die Faltung sei gar unmöglich, dann schlagen wir vor, direkt in die Faltungen einzusteigen, und die Analyse der Faltung nach hinten zu schieben.[51]

Wir beginnen nun mit der Winkeldreiteilung. Sei dazu ein konstruierter Winkel $45 \leq \alpha < 90°$ zu dreiteilen. »Konstruiert« bedeutet dabei für uns, dass α von zwei 1-fach-konstruierten Geraden eingeschlossen ist. Wir konstruieren im Quadrat und schließen α zwischen einem Falz n und der unteren Quadratseite ein. Ihren Schnitt-

[51] Finden Studierende eigenhändig faltbare Beispiele für $P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow n$, dann fragen wir, ob diese Faltung »etwas Spannendes (lösen) kann«, und führen die nachstehenden Faltungen vor.

punkt P legen wir in die untere linke Ecke, vgl. Abb. 5.23 links. Halbieren wir per (MS) die linke Kante des Quadrats und erhalten den Schnittpunkt Q, dann falten wir die Mittelsenkrechte m von $[PQ]$ mit $M := PQ \cap m$. Damit ist für die Beloch-Faltung alles vorbereitet und wir arbeiten innerhalb von 1-fach-Origami. Falten wir nun $P \leftrightarrow m$ und $Q \leftrightarrow n$ (eine Lösung f ist innerhalb des Quadrats faltbar), dann erhalten wir die Punkte $P' \in m$ und $Q' \in n$ (auch als Schnittpunkte nach zweifacher Lot-Anwendung auf f durch P bzw. Q). Das Viereck $PP'QQ'$ ist nach Konstruktion ein symmetrisches Trapez, insbesondere gehen in der Spiegelung an f die Diagonalen PQ' und QP' ineinander über, vgl. Abb. 5.23 Mitte. Daher schneiden sich diese Diagonalen und f in einem Punkt, S, vgl. Abb. 5.23 rechts.

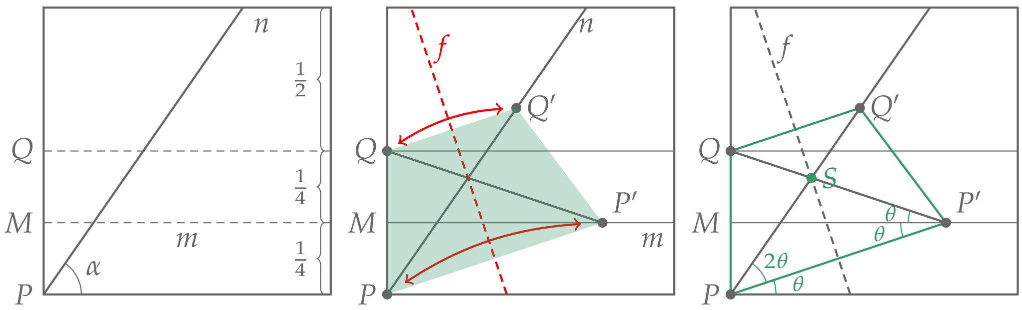


Abbildung 5.23.: Winkeldreiteilung mit 1-fach-Origami.

Sei der zwischen der unteren Quadratseite und PP' eingeschlossene Winkel mit θ bezeichnet. Dann ist nach Konstruktion auch der Wechselwinkel $\measuredangle MP'P$ gleich θ. Da $[QM]$ und $[MP]$ gleich lang und daher $\triangle MP'Q$ zu $\triangle MP'P$ ähnlich sind, ist auch $\measuredangle QP'M = \theta$. Die Mittelsenkrechte f von $[PP']$ ist im Dreieck $\triangle PSP'$ die Symmetrieachse (hier geht $SP' = QP'$ ein), folglich ist $\measuredangle P'PQ' = 2\theta$ und wir haben $\alpha = 3\theta$. Falten wir noch PQ' auf PP', dann haben wir α mit 1-fach-Origami in drei gleiche Teile geteilt.

Bemerkung 5.23. Wollen wir auch andere Winkel $0° < \beta < 360°$ dreiteilen, dann finden wir mit 1-facher Winkelhalbierung ein $k \in \mathbb{N}$ mit $45 \leq \frac{\beta}{2^k} < 90°$. Nun konstruieren wir $\theta = \frac{\beta}{3 \cdot 2^k}$ und kommen durch Winkelverdoppelung (auch 1-fach) auf $\theta \cdot 2^k = \frac{\beta}{3}$ zurück.

Jacques Justin hat in seinem grundlegenden Artikel [Jus90b] eine direkte Winkeldreiteilung für Winkel zwischen 0° und 360° angegeben. Wir führen jedoch die etwas übersichtlichere Dreiteilung nach Hishashi Abe vor und argumentieren ähnlich wie [Fuc11]. ♯

Bemerkung 5.24. Die anfängliche »Schrank-Faltung« ist nicht notwendig. Wir sehen an der Argumentation, dass es ausreichte, $\overline{QM} = \overline{MP}$ sicher zu stellen. Das wird in den meisten Darstellungen dieser Faltung genau so gehandhabt: durch ein Q auf der linken Kante wird eine Parallele zur unteren Kante gefaltet, dann die Mittelparallele. Angesichts der nächsten Faltung von $\sqrt[3]{2}$, bei der eine Kantendrittelung nötig ist, könnte bereits hier die linke Kante in drei gleiche Teile geteilt werden, um beide Faltungen einander näher zu bringen. ♯

Das sind sehr elegante Faltung und Argumentation. Studierende finden diese kleine Sequenz sehr interessant, den Meisten ist bekannt, dass diese Konstruktion mit Zirkel und Lineal im Allgemeinen nicht möglich ist. Das macht 1-fach-Origami und die Beloch-Faltung für Studierende schlagartig bemerkenswert und eröffnet neue Diskussionsmöglichkeiten. Folgende Aspekte müssen wir aufgreifen:

- Wie kann diese neue Faltung anders beschrieben werden? Was genau macht sie anders als Z&L?
- Wann ist sie ausführbar und ist sie wirklich 1-fach-Origami?
- Welche weiteren Probleme können wir mit 1-fach-Origami lösen, die mit Z&L nicht lösbar sind?

Wir wollen die Dominanz von 1-fach-Origami über Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen festigen und führen eine weitere Faltung durch, eher wir die Beloch-Faltung analysieren, und greifen das delische Problem auf.

In einem Quadrat teilen wir die rechte Kante in drei gleiche Teile und bezeichnen die Endpunkte des unteren Drittels mit P und Q wie in Abb. 5.24.[52]

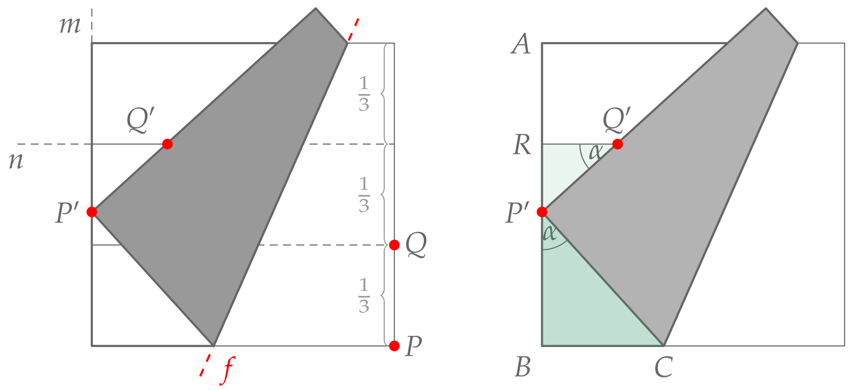


Abbildung 5.24.: Eine 1-fache Lösung des delischen Problems.

Falten wir P auf die linke Kante m und Q auf die obere Drittelungslinie n, dann teilt das Bild P' von P unter dieser Faltung an f die linke Kante in zwei Strecken im Verhältnis $\sqrt[3]{2}$. Die Begründung dafür ist nicht offensichtlich und trickreich. Wir führen im Kurs die wesentlichen Argumentationen und überlassen Studierenden ggf. die abschließende Rechnung als eine Hausaufgabe. Wir geben aber wichtige Tipps: $\overline{BP'} := 1$ (diese Normierung erleichtert die Rechnungen) $\overline{AP'} =: X$, $\triangle RQ'P'$ und $\triangle BCP'$ sind ähnlich, $\overline{P'Q'} = \overline{PQ} = \frac{X+1}{3}$, $\overline{RP'} = X - \frac{X+1}{3}$, $\overline{BC} + \overline{CP'} = X + 1$. Diese Informationen führen auf $X = \sqrt[3]{2}$, vgl. [Rab86].

[52]Studierende wussten zum Teil nicht mehr, wie sie eine Strecke in drei gleiche Teile mit 1-fach-Origami effektiv teilen können.

Diese Faltungen zeigen uns, dass es kein Zufall zu sein scheint, dass die Beloch-Faltung mit kubischen Problemen zu tun hat.[53] Nun wollen wir die Beloch-Faltung genauer analysieren.

Offenbar ist sie grundsätzlich ausführbar, wir haben zwei Beispiele gesehen. Zerlegen wir sie in $P \leftrightarrow m$ und $Q \leftrightarrow n$, dann suchen wir Tangenten an die Parabel $\rho(P, m)$, die *zugleich* Tangenten an die Parabel $\rho(Q, n)$ sind. Wir suchen also *gemeinsame* Tangenten an diese beiden Parabeln. Diese Interpretation ist nicht schwer, allerdings ist sie für Studierende wenig hilfreich. Sie wissen in der Regel nicht, dass es im generischen Fall drei verschiedene solcher Tangenten gibt. Auch ist nicht offensichtlich, warum Zirkel und Lineal solche Tangenten nicht auch konstruieren könnten. Wir benötigen eine genauere Analyse dieser Faltung. Dazu kehren wir zurück zu den allerersten Versuchen, diese Faltung zu verstehen. Studierende falteten P auf $P^f \in m$ und bewegten P^f auf m so, dass Q^f, die Spiegelbilder von Q an den Falzen f, auf n zu liegen kamen. Faltpraktisch war das schwierig, aber was bedeutet das mathematisch? Halten wir einen Falz f fest, der P auf m faltet, und spiegeln nun Q daran. Der Punkt Q^f wird in der Regel nicht freiwillig auf n liegen. Lassen wir aber f durch die Menge der Tangenten an $\rho(P, m)$ laufen, dann durchläuft Q^f eine Kurve. Trifft Q^f in dieser Bewegung mal n, dann sind wir fertig: Der entsprechende Falz f ist eine der gesuchten gemeinsamen Tangenten. Genauere mathematische Analysen haben wir bereits ab Seite 115 ausgeführt. Diese Analysen führen wir mit Studierenden nicht so ausführlich durch. Wie dort algebraisieren wir jedoch die Beloch-Faltung und stellen fest, dass die Spur von Q^f eine kubische Kurve in zwei Variablen ergibt.[54] $Q^f \in n$ bedeutet nichts anderes, als diese Kurve mit n zu schneiden – ein weiterhin kubisches Problem, aber in einer Variablen. Jede Lösung dieser kubischen Gleichung gibt einen Punkt $P^f \in m$ und somit $f := \mathrm{MS}(P, P^f)$. Damit beantworten wir die Frage nach der Faltbarkeit der Beloch-Faltung algebraisch, indem wir ein entsprechendes kubisches Problem auf Lösbarkeit untersuchen.

Bemerkung 5.25. In dieser Form ist dieses Resultat noch nicht vollends erstaunlich. Erst die umgekehrte Interpretation ist es: Finden wir per Falten gemeinsame Tangenten an vorgegebene Parabeln, dann lösen wir per Falten gewisse kubische Probleme. ♯

Im Kurs gehen wir nicht in die Details, die wir in Kapitel 3 zum Untersuchen der Beloch-Faltung ausführen. Wir betrachten einige konkrete Beispiele für Faltbarkeit und Nichtfaltbarkeit der Beloch-Faltung sowie geben das fertige Resultat der Untersuchung wie in Tabelle 3.2 an.

[53] Studierende erinnern sich teilweise an das Ergebnis aus der Algebra-Vorlesung, die Winkeldrittelung sei ein kubisches Problem. Ansonsten erwähnen wir diese Tatsache an der richtigen Stelle.

[54] Diese Kurve, die origami cubic curve, führen wir mittels GeoGebra vor. Dort hilft die Funktion »Ortslinie« (die Q^f und P^f als Input benötigt) diese Kurve zu konstruieren.

Wir stellen also fest, dass die Beloch-Faltung nach unseren anfänglichen Überlegungen zu 1-fach-Origami gezählt werden kann: Wir konnten solche Bedingungen an die Faltung stellen, dass sie nur endlich viele Lösungen zulässt, maximal drei.

Im Unterschied zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen kann diese Faltung und folglich 1-fach-Origami viele kubische Probleme lösen, es bleibt noch zu sehen, dass alle kubischen Probleme so gelöst werden können. Diese Lücke schließen mit einer weiteren prominenten Konstruktion: Der Lill-Beloch-Methode.[55]

Sei das reelle Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit Origami-Zahlen $a, b, c, d > 0$. Wir beschränken uns hier auf positive Koeffizienten; der allgemeine Fall ist nicht wesentlich schwerer, aber für diese Details verweisen wir im Kurs auf die Literatur.[56]

Bemerkung 5.26. An vielen Stellen in der Beschreibung der Kurse kann der Eindruck entstehen, dass wir technische Details und den »mathematischen Teil« der Faltungen meiden. Das ist bis zum gewissen Grad sicherlich so und primär durch zwei Faktoren bedingt: Für viele technische Details ist nicht genug Zeit vorhanden: Gemeinsames Falten oder gar grobe Darstellungen interessanter Faltungen beanspruchen einen wesentlichen Teil der vorhandenen Zeit. Würden wir auf Vollständigkeit der Ausführungen besonders achten, könnten wir einen nicht unwesentlichen Teil der Inhalte nicht präsentieren. Zweitens lag es uns daran (auch aus Gründen der Pre-Post-Beobachtung), Studierende möglichst im Kurs zu behalten, vgl. auch die Kursgegebenheiten in Abschnitt 4.2.1. ♯

Die Idee hinter der Methode ist leicht: Wir konstruieren mithilfe dieser Koeffizienten einen Streckenzug in der Ebene, vgl. Abb. 5.25 links. Zu diesem Streckenzug suchen wir einen weiteren, speziellen Polygonzug. Dieser zweite Streckenzug lässt uns eine reelle Nullstelle des gegebenen Polynoms direkt ablesen. Den ersten Streckenzug können wir dabei im schulischen Achsenkreuz einfach einzeichnen: Vom Koordinatenursprung laufen wir a Einheiten nach rechts, von dort b Einheiten nach oben; von dort c Einheiten nach links und anschließend d Einheiten nach unten. Den finalen Punkt nennen wir Q. Der zweite Streckenzug startet wieder im Koordinatenursprung $(0, 0)$. Von dort wollen wir zwei Punkte auf dem ersten Streckenzug so setzen, das der eine, $P1$, auf der Strecke der Länge b, der zweite, P_2, auf der Strecke der Länge c zu liegen kommen und die Winkel $\measuredangle P_2P_1(0, 0)$ und $\measuredangle QP_2P_1$ beide $90°$ sind, vgl. Abb. 5.25 links. Dann sind die Dreiecke $\triangle PAP_1, \triangle P_1BP_2, \triangle P_2CQ$ offenbar ähnlich. Diese saloppe Beschreibung präzisieren wir nun algorithmisch.[57]

---

[55] Vgl. die Darstellungen in [Hul11], [Hul12], [Fri18, §5.2.3.1].

[56] Insbesondere bekamen Studierende neben unseren Ausführungen auch die Handouts aus [Hul12, S. 85–87] sowie Beispiele für Polynome mit nichtpositiven Koeffizienten, vgl. Anhang A.7.

[57] In der Literatur wird der zweite Streckenzug etwas eingängiger mit dem Laufweg einer Billardkugel motiviert, die aus dem Koordinatenursprung zum Punkt Q rollt und dabei von den »Wänden« des Streckenzugs im rechten Winkel abprallt. Die Vernachlässigung der physikalischen Gesetze wird dabei hingenommen. Diese grafische Erklärung kommt an ihre Grenzen, sobald wir nichtpositive Koeffizienten zulassen, aber die Mathematik dahinter ist trotzdem in Ordnung.

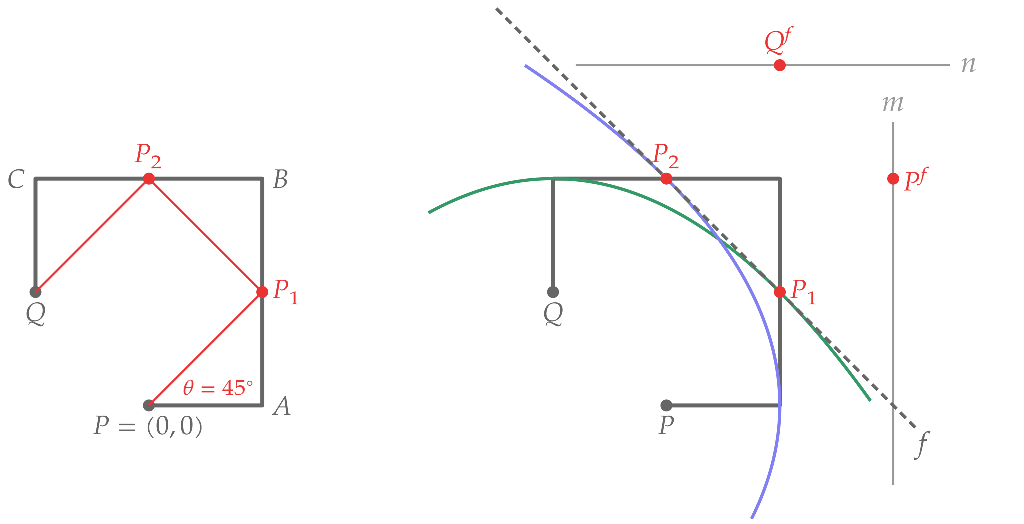
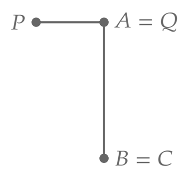


Abbildung 5.25.: Grafische Darstellung der lillschen Methode mit 1-fach-Origami am Beispiel des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Die offensichtliche Nullstelle -1 entspricht im Satz von Lill $-1 = \tan(\theta) \iff \theta = 45°$. Links ist der Aufbau der lillschen Methode mit $a = \overline{PA} = 1 = \overline{CQ} = d$ und $b = \overline{AB} = 2 = \overline{BC} = c$, rechts die Umsetzung des Verfahrens mittels 1-fach-Origami und der Beloch-Faltung $P \leftrightarrow m, Q \leftrightarrow n$. Die Faltung liefert den Falz f, der eine gemeinsame Tangente an die grüne $\rho(Q, n)$ und blaue $\rho(P, m)$ Parabeln ist. Die Lote auf f durch P und Q liefern den gesuchten Streckenzug.



1. Schritt Setze $P = (0, 0)$;

2. Schritt Konstruiere Punkte $A := (a, 0)$, $B := (a, b)$, $C := (a - c, b)$, $D := (a - c, b - d)$.

3. Schritt Konstruiere den Streckenzug zu $PABCQ$.

4. Schritt Finde Punkte P_1 auf AB und P_2 auf BC dermaßen,[58] dass $\measuredangle P_2 P_1 (0, 0)$ und $\measuredangle P_1 P_2 Q$ rechte Winkel sind.[59]

Satz von Lill für kubische Polynome Der Winkel $\theta := \measuredangle APP_1$ liefert die Nullstelle $-\tan(\theta)$ des gegebenen Polynoms.

Die eigentliche Schwierigkeit ist also, die Punkte P_1 und P_2 zu finden. Der Streckenzug lässt sich daraus offenbar leicht rekonstruieren. Der Beweis des Satzes von Lill ist aber sehr einfach. Setzen wir ohne Einschränkung $a = 1$ und $x := \overline{AP_1}$, $y := \overline{BP_2}$, dann gilt $x = \tan(\theta)$ und $x = \frac{y}{b-x} = \frac{d}{c-y}$. Also gelten $y = bx - x^2$ und $d = x(c - y) = x(c - bx + x^2) = cx - bx^2 + x^3$. Insgesamt folgt also $x^3 - bx^2 + cx - d = 0$ und $-x = -\tan(\theta)$ ist eine der gesuchten Nullstellen.

[58] Diese Punkte können tatsächlich außerhalb der Strecken $[AB]$ bzw. $[BC]$ liegen. Sollten die Punkte $A = B$ oder $B = C$ im allgemeinen Fall der Konstruktion zusammenfallen, dann werden die Lote zu AP durch A bzw. BC durch C ersatzweise genommen. Das deckt nicht alle trivialen Fälle ab, aber der Rest ist leicht zu vervollständigen, vgl. Streckenzug am Rand für das Beispiel $x^3 - 2x^2 - 2$. Dort müssten wir $P = (0, 0)$ auf $m : x = 2$ und $Q = (1, 0)$ auf $n : y = -4$ falten.

[59] Wir sehen, dass dieser Schritt (noch) nicht konstruktiv ist.

Für uns interessant ist die Frage, wie 1-fach-Origami helfen kann, diese Nullstelle zu finden. Es stellt sich heraus, dass die gesuchten Punkte P_1, P_2 oder besser ihre Verbindungsgerade als ein Falz interpretiert werden können. Dazu beschreiben wir die modernere Lösung von Hull und nicht die traditionelle von Beloch.

Zu unserem Streckenzug $PABCQ$ konstruieren wir zwei Hilfsgeraden, nämlich $m : x = 2a$ und $n : y = b+d$, vgl. Abbildung 5.25 rechts. Die Geraden sind so gewählt, dass die Punkte P bzw. Q von ihnen doppelt so weit entfernt sind als die Punkte A bzw. C. Falten wir P auf m und Q auf n, dann[60] erhalten wir einen Falz f, der den Streckenzug $PABCQ$ in Punkten P_1 auf AB und P_2 auf BC. Das liegt daran, dass f die Mittelsenkrechte von PP^f und QQ^f und die jeweiligen Mittelpunkte liegen nach Konstruktion von m und n auf AB bzw. BC. Damit (Lote sind mit 1-fach-Origami faltbar) erhalten wir den Streckenzug PP_1P_2Q und haben die gesuchte Nullstelle auch per 1-fach-Origami gefunden.

Je nach vorhandener Zeit könnte hier das Studium dieser Faltung und dieses Resultats fortgeführt werden. Es wäre noch zu zeigen, dass tatsächlich alle kubischen Polynome mit 1-fach-Origami lösbar sind, vgl. Beispiel 5.28.

Diese Lill-Beloch-Methode haben wir nach der sachlichen Analyse mit GeoGebra modelliert, vgl. dazu Anhänge A.5, A.6, A.7.

Bemerkung 5.27. Die drei klassischen Vorzeige-Faltungen mit simultanen Tangenten (Winkeldrittelung, delisches Problem, Lill-Beloch-Methode) eignen sich nach unserer Erfahrung wenig zum *Nacherfinden* der Beloch-Faltung. Die vorgestellten Lösungen zur Winkeldrittelung sowie zum delischen Problem existieren gewissermaßen ohne die Beloch-Faltung nicht. Daher ist das schwer, diese Konstruktion anders zu motivieren, um erst nach der Konstruktion die Beloch-Faltung darin zu entdecken. Die ursprüngliche Lill-Konstruktion ist falzfrei formuliert, kann folglich *vor* der Beloch-Faltung motiviert und analysiert werden. Allerdings ist die Idee, die Beloch-Faltung für die Lill-Konstruktion (für Polynome dritten Grades) anzuwenden, nicht trivial und eignet sich aus unserer Sicht nicht zur eigenständigen *Entdeckung* der Beloch-Faltung, vgl. auch die Arbeiten von Beloch zum Thema.

Diese drei Vorzeige-Faltungen demonstrieren jedoch eindrücklich die Stärke und Eleganz von 1-fach-Origami und gehören somit nach unserem Eindruck auf jeden Fall zu einer ausführlichen Beschäftigung mit 1-fach-Origami.[61] Da diese Konstruktionen jedoch nicht von Bedeutung für das Mathematisieren und Axiomatisieren des 1-fach-Origami sind, behandeln wir sie hier nur skizzenhaft. Für ausführliche Rechnungen, die wir im Kurs ausgeführt haben, verweisen wir hier auf die Literatur. ♯

[60] Mit unseren Ergebnissen aus Kapitel 3 können wir leicht überprüfen, ob diese Faltung existiert. Je nach Fortschreiten im Kurs können wir ad hoc oder allgemein argumentieren. In der Regel begnügen wir uns mit dem Fall der positiven Koeffizienten, dort ist auch die grafische Darstellung leichter zu motivieren.

[61] Aus rein mathematischer Perspektive genügte für die vollständige Beschreibung des 1-fach-Origami alleine die Lill-Beloch-Methode zur Lösung allgemeiner kubischer Gleichung. Die anderen beiden Konstruktionen sind lediglich elegante Formen von Spezialfällen dieser Methode.

Beispiel 5.28. In einigen Kursen haben wir ferner die Argumentation von Roger Alperin übernommen, vgl. [Alp00, S. 129], und zu einem beliebig vorgegebenen kubischen Polynom[62] passende Parabeln konstruiert. Gemeinsame Tangente, die per 1-fach-Origami gefunden werden können, liefern dann reelle Nullstellen des Polynoms und zeigen etwas direkter und mathematisch eleganter als bei Lill-Beloch, dass 1-fach-Origami allgemeine kubische Probleme löst. ♯

Abschließend geben wir das Resultat der Sätze 3.31 und 3.32 an. Insbesondere berichten wir darüber, dass das *markierte Lineal* zum 1-fach-Origami und Zirkel zum Z&L algebraisch äquivalent sind, vgl. Satz 3.33.

5.2.5. Fünfte Einheit: Liste der Grundfaltungen, nochmals Definition

Diese Einheit beschäftigt sich unter anderem mit den Zielen A d), C a-b, C c-d).
Dauer: eine bis eineinhalb Sitzungen.

Nachdem es klar geworden ist, dass 1-fach-Origami auch unerwartete und recht potente Faltungen erlaubt, sind sich Studierende nicht mehr sicher, wie viele Grundfaltungen noch zu entdecken sind. Auch aus Zeitgründen, wollen wir nun eine abschließende Analyse der Grundfaltungen durchführen. Dazu überlegen wir uns, was eine Grundfaltung »macht«: Sie bewegt oder fixiert Objekte – Punkte oder Geraden. Auch dann, wenn die Grundfaltung Objekte fixiert, *bewegt* sie diese auf sich selbst. Wir können also fragen, welche Objekte eine Grundfaltung auf welche Objekte bewegen kann? In dieser Verbalisierung ist die Antwort leicht:[63]

- Ein Punkt kann auf sich, auf einen anderen Punkt, auf eine Gerade gehen, also
  - ⋆ $P \leftrightarrow P$
  - ⋆ $P \leftrightarrow Q$
  - ⋆ $P \leftrightarrow m$
- Eine Gerade kann ebenfalls auf sich, auf eine andere Gerade, auf einen Punkt gehen, also
  - ⋆ $m \leftrightarrow m$
  - ⋆ $m \leftrightarrow n$
  - ⋆ $P \leftrightarrow m$, symmetrisch wegen »Auffalten«.[64]

[62] Nach der Tschirnhaus-Transformation.

[63] Wir *entscheiden* uns, als mögliche Faltziele von Punkten und Geraden nur Punkte und Geraden anzuschauen. Es wäre jedoch völlig denkbar, anders formulierte Faltziele anzuschauen, etwa die Inzidenz $P \leftrightarrow \neg Q$ für Punkte P und Q, also Falten von P *nicht* auf Q. Speziell diese Inzidenz widerspricht der ganzen Natur des finitistischen 1-fach-Origami, da nicht einmal die beteiligten Objekte klar spezifiziert sind.

[64] Insbesondere muss eine sorgfältige Definition von 1-fach-Origami diesen Umstand abbilden.

Wir sehen also fünf Möglichkeiten, uns interessierende Objekte prinzipiell zu falten. Es ist nicht gesagt, dass dafür keine weiteren natürlichen Möglichkeiten existieren. Wir haben bereits in Kapitel 3 darüber berichtet, dass andere Autoren eine Art der Brieffaltung als eine mögliche Bewegung von parallelen Geraden ansehen. Letztlich benötigen wir eine genaue Formalisierung des 1-fach-Origami, um diese Fragen sachgerecht zu klären, siehe dort. An dieser Stelle haben Studierende keine Einwände und so belassen wir es bei diesen fünf Möglichkeiten.

Die beiden Faltungen $P \leftrightarrow Q$ und $m \leftrightarrow n$ sind offenbar bereits Grundfaltungen, wir haben sie schon analysiert.

Betrachten wir $P \leftrightarrow P$, $m \leftrightarrow m$, $P \leftrightarrow m$ und versuchen aus ihnen Grundfaltungen zu kreieren, dann können wir offenbar die übrigen vier nachbilden mit

$$\begin{aligned} \mathrm{VG}(P,Q) &: P \leftrightarrow P \wedge Q \leftrightarrow Q, \\ \mathrm{Lot}(P,m) &: P \leftrightarrow P \wedge m \leftrightarrow m, \\ \mathrm{Tan}(P,m,Q) &: P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow Q, \\ \text{Beloch-Faltung} &: P \leftrightarrow m \wedge Q \leftrightarrow n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bemerkung 5.29. Rückblickend waren die ersten Grundfaltungen (alle außer der Beloch-Faltung) leicht zu motivieren und zu finden. Die Beloch-Faltung war eine größere Herausforderung, für deren Nacherfindung wir Alternativen vorgestellt haben.

Die Grundfaltung HJA7, die wir aus Kapitel 3 kennen, wird im praktischen Falten eher selten verwendet und ist daher auch schwer aus der Faltpraxis heraus zu motivieren.[65] In den Kursen haben wir zwei verschiedene Zugänge kennengelernt. Zum Einen, kann diese Faltung, $P \leftrightarrow m \wedge n \leftrightarrow n$, bei der systematischen Suche, die wir in der vorigen Einheit beschrieben haben, entdeckt werden, wie im ^{16}Kurs, vgl. Abschnitt 5.4.2. Da sie in Parabeltangenten und Lote dekodiert werden kann, spricht nichts dagegen, sie direkt bei der Entdeckung zu besprechen und zu analysieren. Die Analyse ist nicht schwer und meist grafisch leichter, allerdings ist die Anzahl der möglichen Lösungen, Spezial- und Ausartungsfälle recht unübersichtlich, vgl. Kapitel 3. Zum Anderen, präferieren wir es, HJA7 erst bei der folgenden Begründung der Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen zu »entdecken«. ♯

Der Beweis der Vollständigkeit[66] der gefundenen Liste der Grundfaltungen kann in unserem Kurs, innerhalb einer Unterrichtssequenz und in der Ausführlichkeit von Kapitel 3 nicht stattfinden. Eine genauere Analyse ist in diesem Kurs aus unserer Sicht nicht nötig und zeitlich kaum möglich.[67] Daher behandeln wir im Kurs

[65] Einer der Schritte in der Tetraederfaltung benötigt HJA7: In der Abbildung 5.18 links entsteht die rechte vertikale Gerade, indem der linke rote Punkt auf die rechte Kante gefaltet wird und die obere Kante aus sich selbst. In dieser speziellen Faltung zerfällt HJA7 aber in (Lot) und (WH)/(MS).

[66] Die Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen ist mit der metamathematischen Vollständigkeit nicht zu verwechseln. Das machen wir im Kurs klar und nutzen diese Bemerkung (an einer geeigneten Stelle) für entsprechende Diskussionen.

[67] Das unterscheidet unseren Kurs von grundlegenden mathematischen Vorlesungen, die weiteren Vorlesungen als Grundlage dienen, und daher sorgfältig und fehlerfrei gelehrt werden sollen.

eine weniger detaillierte Beweisführung aus der Literatur und diskutieren an entsprechenden Stellen gewisse Ungenauigkeiten, vgl. Seite 99. Unsere Darstellung im Kurs orientiert sich stark am Vorgehen von Thomas Hull[68] und [AL09].

Die Grundfaltungen aus der Liste 5.1 bestehen aus zwei Inzidenzen und lassen sich sinnvollerweise wie folgt tabellarisch erfassen, vgl. auch [AL09, Table 1].

$\wedge$	$P \leftrightarrow P$	$m \leftrightarrow m$	$P \leftrightarrow m$
$Q \leftrightarrow Q$	(VG)	(Lot)	(Tan)
$n \leftrightarrow n$	(Lot)	$\lightning$	???
$Q \leftrightarrow n$	(Tan)	???	(Beloch)

Tabelle 5.1.: Tabellarische Darstellungen der Grundfaltungen mit zwei Inzidenzen. Wir erkennen die symmetrische Natur der entstehenden Faltungen.

Hier profitieren wir von einer nicht detaillierten Argumentation: Im Kurs einigten wir uns darauf, beim Falten immer mindestens einen neuen Falz zu erzeugen (damit haben wir viele der mühsamen Spezialfälle aus Abschnitt 3.2 versteckt). Dann ist der Eintrag $\lightning$ keine Grundfaltung: Sind m, n parallel, dann hätte die Faltung $m \leftrightarrow m \wedge n \leftrightarrow n$ unendlich viele Lösungen, wären sie nicht parallel, dann gäbe es keine Lösung.[69]

Dank dieser tabellarischen Darstellung entdecken wir einen neuen Kandidaten für eine Grundfaltung, $P \leftrightarrow m \wedge n \leftrightarrow n$. Wir stellen fest, dass es hier um solche Tangenten an $\rho(P, m)$ geht, die senkrecht auf der Geraden n stehen. Weitere Analysen der Anzahl der Lösungen sowie der Spezialfälle führen wir im Kurs durch und erkennen diese siebte Faltung als 1-fach.

Das Entdecken der siebten Grundfaltung *im Beweis* der Vollständigkeit finden Studierende überraschend und bemerkenswert; einige sind erstaunt, dass es ganze sieben Grundfaltungen gibt; einige sind darüber irritiert, diese Faltung übersehen zu haben. Die saloppe rückblickende Erkenntnis »wie sollen noch weitere Grundfaltungen entstehen; es gibt keine weiteren Möglichkeiten« scheint das Bedürfnis der Studierenden nach einer Finalisierung von 1-fach-Origami zu befriedigen. Wir begründen das Ende des »Beweises« mal wie in der Literatur mit Freiheitsgraden der entstehenden Faltgeraden, mal mit einer ähnlichen, aber nicht ausschöpfenden Fallunterscheidung wie in Kapitel 3.

Hier bekommen die Grundfaltungen ihre endgültigen Namen: Huzita-Justin-Axiome. Wir haben im Vorfeld nicht verraten (auch wenn dies den Studierenden klar sein müsste), dass diese Grundfaltung bereits bekannt sind und somit einen

[68] private Kommunikation.

[69] Ausgenommen ist der Fall, wenn m und n senkrecht zueinander sind, dann entsteht in unserem Setting kein neuer Falz, was nicht erlaubt ist, siehe jedoch Seite 110.

Namen haben. Wir nutzen diesen Namen als eine Motivation für den Übergang zu den Axiomen: »Moment mal, warum nennen Leute Grundfaltungen ›Axiome‹?«. Haben wir davor Grundfaltungen anekdotisch als Axiome bezeichnet, fokussieren wir nun diese Frage: »Inwiefern können die Grundfaltungen des 1-fach-Origami als dessen ›Axiome‹ bezeichnet werden?«.

Diese Frage sorgt immer für (beabsichtigte) Irritationen. Studierende erwarten diese Frage in der Regel nicht. Sie motiviert die Beschäftigung mit Abhängigkeiten zwischen Grundfaltungen weiter unten. Studierende sind nicht selten zwiegespalten zwischen der befremdlichen Vorstellung eines beweisbaren Axioms (einer Grundfaltung, die auf andere Grundfaltungen reduziert werden kann) und dem zuvor geführten Beweis über die Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen.

Studierende haben teilweise passende Vorstellungen zu Axiomen und sogar zur Minimalität von Axiomensystemen, auch wenn sie dies nicht immer gut formulieren können: »Axiome sind so fundamental wie möglich.«[70]

Die Beurteilung der Sachlage, Grundfaltungen vs. Axiome, fällt in der Regel nicht leicht, vgl. Abschnitt 3.4.3. Wir sprechen wie dort verschiedene Sichtweisen darauf an. So haben wir die Vorstellung einer Grundfaltung geformt und mit der Zeit angepasst und es könnte sein, dass dadurch auch eine Veränderung der Vorstellungen über Axiome eingetreten ist.

Wir blicken auch zurück auf die gesamte Beschäftigung mit 1-fach-Origami und überlegen, in welchem Sinne es axiomatisiert wurde. Hier reden wir noch nicht über Modelle und Axiome im Allgemeinen, machen aber klar, dass 1-fach-Origami nicht abstrakt definiert und analysiert wurde, sondern innerhalb eines anderen Systems. Das ist eine sinnvolle Überleitung zur euklidischen Ebene im nächsten Abschnitt, da Studierende nun feststellen, dass einige entscheidende axiomatische Fragen des 1-fach-Origami einfach auf diejenigen dort verlagert wurden: Das Wesen von Punkten, Geraden, Spiegelungen, Mengen etc.

Bevor wir zu etwas allgemeineren metamathematischen Fragen im nächsten Abschnitt übergehen, studieren wir eine solche direkt am Beispiel von 1-fach-Origami.

Von den drei Qualitätsmerkmalen eines Axiomensystems ist die Unabhängigkeit der Axiome dasjenige, welches durch 1-fach-Origami besonders gut erarbeitet werden kann. Wir haben bereits an einigen Stellen gesehen, dass unsere Grundfaltungen in Spezialfällen durch andere Grundfaltungen ersetzt werden können. In einigen Fällen haben Studierende im Kurs oder im Rahmen einer Hausaufgabe Grundfaltung auch gänzlich auf andere zurückführen können. So finden Studierende in der Regel den folgenden Zusammenhang leicht. Sind P, Q zwei verschiedene Punkte, dann ist $\mathrm{VG}(P, Q) = \mathrm{Lot}(P, \mathrm{MS}(P, Q))$. Es sieht so aus, als bräuchten wir die

[70] Aus einer schriftlichen Antwort auf eine Hausaufgabe.

Grundfaltung (VG) nicht mehr. Allerdings finden Studierende ab und zu auch andere Zusammenhänge, etwa ersetzen sie $\mathrm{MS}(P,Q)$ mittels (VG), (WH), (Lot) via $\mathbb{1} := \mathrm{VG}(P,Q)$ und $\mathbb{2} := \mathrm{Lot}(P,\mathbb{1})$, $\mathbb{3} := \mathrm{Lot}(Q,\mathbb{1})$, $\mathbb{4} := \mathrm{WH}(\mathbb{1},\mathbb{2})$, $\mathbb{5} := \mathrm{WH}(\mathbb{1},\mathbb{3})$, $\mathrm{MS}(P,Q) = \mathrm{Lot}(\mathbb{4} \cap \mathbb{5}, \mathbb{1})$, vgl. auch Beispiel 3.19. Diese Erkenntnis ist für sie erstaunlich: Worauf sollen wir denn nun verzichten? Auf (VG)? Auf (MS)? Wir nutzen diese Situation, um klar zu machen, dass Axiome nicht eindeutig festgelegt sind, und je nach Wunsch gewählt werden. Insgesamt führen wir nur exemplarisch weitere Abhängigkeitsuntersuchungen durch, konzentrieren uns jedoch auf die Beloch-Faltung und zeigen in generischen Fällen ihre Dominanz, vgl. Anhang A.9. An dieser Stelle wollen wir sie systematischer angehen und fragen, welche der Grundfaltungen weggelassen werden könnten, ohne dass Konstruktionen mit 1-fach-Origami prinzipiell verändert werden müssten.

Bemerkung 5.30. Es gilt aufzupassen, wie diese Frage gestellt wird: Die Frage »Welche Grundfaltungen reichen aus, um alle konstruierbaren Punkte zu falten?« ist prinzipiell eine andere als »Welche Grundfaltungen reichen aus, um alle 1-fach-Faltungen durchzuführen?«. Das Ergebnis ist zwar dasselbe: HJA6, aber das muss unterschiedlich begründet werden. Im ersten Fall genügt es, eine Charakterisierung des Körpers der Origamizahlen zu finden und zu zeigen, dass HJA6 gewisse kubische Probleme löst. Im zweiten Fall wird eine Betrachtung, etwa wie unsere Dominanzanalyse in Abschnitt 3.4.2, nötig. $\sharp$

Zum Abschluss des Hauptteils sinnieren wir nochmal darüber, wie 1-fach-Origami nun im Lichte unserer Überlegungen besser definiert werden könnte.

Das Interesse im ^{17}Kurs an einer befriedigenden Definition von 1-fach-Origami war stärker als sonst ausgeprägt. Wir haben Studierende mehrfach darauf hingewiesen, einen Vorschlag zu machen. Wir zitieren nun einen schriftlichen Vorschlag eines ^{17}Kursteilnehmers und greifen diesen daraufhin auf.

> »Wenn ich das im Kurs richtig verstanden hatte, können/sollen wir schreiben wenn wir eine Idee für eine eventuell sinnvolle Definition haben. Mein Vorschlag wäre: Wir reden ja bisher (und von meinem Gefühl her muss das auch so bleiben) immer davon ein Objekt (Punkt, Falz) auf ein anderes abzubilden und evtl noch eine Nebenbedingung dabei zu erfüllen (z.B. entstehender Falz muss durch einen Punkt gehen) und dabei entstehen dann unsere Falze. Meine Idee wäre eine Faltung als Abbildung anzusehen die eben genau diese Objektzuordnung mit Nebenbedingung erfüllt und (das ist der Knackpunkt der für uns unbrauchbare Abbildungen herausfiltert) eine endliche Anzahl von Fixgeraden besitzt. Die Fixgeraden sind dann natürlich genau die Falze die durch die Faltung entstehen können und die endliche Anzahl garantiert uns die Eindeutigkeit so wie wir sie verstanden haben. Das ist sicherlich noch irgendwie ausbaubar aber bisher ist mir immerhin kein großes Manko eingefallen...«

Bis hierhin hatten wir eine Vorstellung davon, was Faltpunkte (Schnittpunkte von Falzen), Falze (Resultate der Grundfaltungen), 1-fach-Origami (Mengen der Faltpunkte und Falze) sein sollten. Die Grundfaltungen sollten Faltkonstruktionen sein und aus bereits konstruierten Objekten in endlich vielen Schritten neue Falze (und daher Faltpunkte) erzeugen. Die Liste der Grundfaltungen schien nun auch hinreichend zufriedenstellend bestimmt worden zu sein. Allerdings kann dieses Resultat nicht ernst genommen werden, solange nicht klar ist, *was* die Grundfaltungen selbst sein sollten. Wir haben sie als gewisse Halbspiegelungen visualisiert, aber eher ihre markanten Resultate, die Falze, betrachtet.

Der Vorschlag des Studenten beschreibt exakt diesen Zugang. Wir haben uns entschieden, diesem Vorschlag im Kurs zu folgen und Faltungen als Halbspiegelungen aufzuschreiben. Aus Abschnitt 3.2 wissen wir, dass diese Wahl mathematisch in die Sackgasse führt, und wir Inzidenzen besser gleich als Mengen von Falzen betrachten sollten. Allerdings ist der Zugang über Halbspiegelungen an dieser Stelle im Kurs, wie bereits mehrfach betont, natürlicher und hinreichend genau in diesem ersten Formalisierungsanlauf.

Für (nicht unbedingt verschiedene) Punkte P, Q und Geraden m, n erklären wir die Inzidenzen $P \leftrightarrow Q$, $m \leftrightarrow n$, $P \leftrightarrow m$ als Mengen von Halbspiegelungen σ, für die $\sigma(P) = Q$ resp. $\sigma(m) = n$ resp. $\sigma(P) \in m$ gilt. Das entspricht der studentischen Vorstellung von Nebenbedingungen. Daraus kreieren wir Grundfaltungen, indem wir sie als minimale Mengen von Inzidenzen definieren, so dass ihr Durchschnitt endlich, aber nicht leer ist. Damit wird etwa $P \leftrightarrow P \wedge Q \leftrightarrow Q$ bzw. nun besser $P \leftrightarrow P \cap Q \leftrightarrow Q$ zu einer Menge von Halbspiegelungen, die eben P auf P und Q auf Q halbspiegeln. Anschließend stellen dann die Achsen dieser so gefundenen Halbspiegelungen die Falze dar. Mit der Forderung »nicht leer« zeigen wir als Ausblick weitere benötigte Analysen auf. Wir fordern damit, dass die Grundfaltungen ausführbar sind, d. h. mindestens eine Lösung existiert, müssen das dann auch garantieren. Wir deuten im Kurs die nötigen Überlegungen an, die wir in Kapitel 3 ausgeführt haben. Dort haben wir gesehen, dass alle Spezialfälle (die wegen unserer Forderung nun notwendig geworden sind) nicht ganz leicht aufzulisten sind. Studierende bekommen ein ähnliches Ergebnis wie in Tabelle 3.2 präsentiert. Zum Abschluss der Beschäftigung mit 1-fach-Origami erhalten sie ferner die »1-fache Übersicht«, vgl. Anhang A.8.

Etwa an dieser Stelle bietet es sich an, den Absprung von 1-fach-Origami zu grundlegenden axiomatischen und euklidischen Fragestellungen zu schaffen.

Abschließende Betrachtungen Nicht alle Sequenzen fanden Studierende »interessant« oder »spannend«, nicht alle Sequenzen sind so abgelaufen, wie hier beschrieben. Dabei waren die größeren Herausforderungen (1) das Zeitmanagement: Keine Faltsequenz konnte im geplanten Zeitrahmen durchgeführt werden, zu vielfältig waren Bedürfnisse und Fähigkeiten der Kursteilnehmenden; kaum eine Diskussion verlief wie geplant. Auch (2) die Freiwilligkeit der Teilnahme war ein nicht geringes Hindernis im Kurs, das betrifft vor allem die Hausaufgaben. Dadurch bedingte Punkt (2) auch Punkt (1). Trotzdem sehen wir die Beschäftigung mit 1-fach-Origami im Kontext unserer Ziele und Fragen als gelungen an.

Viele der Faltungen, die wir im Kurs verwendet haben, sind in der community bereits bekannt, erprobt, diskutiert. Somit lag das Experimentelle des Kursen mehr in der Auswahl und Anordnung der (teils bereits etablierten) Sequenzen. Der Spagat zwischen einer Formalisierung von 1-fach-Origami und einer eleganten Einführung in mathematisches Papierfalten war und ist nicht ganz leicht zu realisieren.

Eine Alternative zu unserem Vorgehen wäre, das Kursgeschehen umzudrehen. Wir könnten mit komplizierten Faltungen wie etwa der Winkeldreiteilung und weiteren traditionellen Faltungen anfangen und aus ihrer Analyse destillieren, was wir letztlich als 1-fach-Origami verstehen wollen. Dieser Ansatz wäre im Sinne des lokalen und globalen Ordnens, allerdings wäre dann das Kursziel ein anderes, es wäre ein Aufräumen und Sortieren des Gebiets. Der entdeckende Teil der Beschäftigung wäre eventuell verloren gegangen, es sei denn Studierende müssten entsprechende Faltungen selbst (nach)erfinden. Aus unserer Sicht eignet sich dieser Ansatz eher für solche Personen, die bereits verstehen, wie eine Axiomatisierung abläuft.

Insgesamt ist dieser Hauptteil der Beschäftigung sehr volatil und lebt von der Mitarbeit der Studierenden. Umso schwerer fällt es, einen halbwegs detaillierten Unterrichtsplan anzugeben, da dieser in jedem Fall von der wirklichen Umsetzung unterschiedlich sein wird.

5.3. Metamathematik, euklidische Ebene: drei Sitzungen

In diesem abschließenden Teil des Kurses *machen* wir am wenigsten Mathematik, *sprechen* aber am meisten *über* Mathematik. Der Übergang vom Hauptteil ist fließend. Die Analyse der Abhängigkeiten zwischen den Grundfaltungen kann etwa dort- oder hierhin platziert werden und dient als eine Brücke hin zu metamathematischen Fragen.

In diesem dritten Abschnitt des Kurses treten keine Überraschungen auf. Thematisch diskutieren wir auf abstrakterer Ebene das, was durch 1-fach-Origami sorgfältig vorbereitet worden ist. Die ontologischen Fragen werden nun konkretisiert, die als Fundament dienende euklidische Ebene analysiert, ihr solides Fundament wird thematisiert. So gesehen, haben wir mit 1-fach-Origami eine kognitive Vorbereitung absolviert, um nun das Wesen einer axiomatisierten / zu axiomatisierenden Theorie ggf. besser verstehen zu können.

Einzig die Gewichtung und Einordnung dieser Thematik ist bei uns anders gegeben als dies etwa in mehr fokussierten axiomatischen Betrachtungen der Fall wäre, vgl. auch Abschnitt 1.3. So ist für uns der überaus spannende öffentlich gewordene Diskurs über die *Wahrheit* der Axiome und ihre Möglichkeiten des Definierens zwischen Hilbert und Frege weniger aus historischer oder fachmathematischer Sicht interessant. Damit demonstrieren wir vielmehr, dass ähnliche Fragen, die auch uns im Kurs beschäftigen (etwa Definitionen von 1-fach-Origami, Faltpunkten, Falzen, Unterschiede zwischen Grundfaltungen und Axiomen), durchaus nicht triviale Antworten haben können, mit denen auch Experten Probleme hatten.

Frege: »Axiome nenne ich Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fliesst, die man Raumanschauung nennen kann. Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen. [...]«

Hilbert: »Sie schreiben: ›Axiome nenne ich Sätze ... Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen.‹ Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz. [...]«

Und Hilbert weiter: »Meine Meinung ist eben die, dass ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formulirt, nenne ich Axiome und komme so dazu, dass die Axiome [...] die Definitionen der Begriffe sind.« *zitiert aus* [*Hoc18, Hist 4*], *vgl. auch* [*Tap13, S. 52-54*].

Die Ziele dieser kurzen Unterrichtssequenz lauten: Studierende

a) erfahren und erörtern übliche Qualitätsmerkmale eines Axiomensystems
b) erfahren sehr grob die Entwicklung der Axiome der euklidischen Ebene von Euklid bis Martin und betrachten entsprechende Axiomensysteme
c) erarbeiten Definitionen wichtiger Grundbegriffe der (Meta)Mathematik wie Axiom/Beweis/Modell
d) suchen alltägliche Beispiele für »Axiomatik« bzw. »Axiomatisieren«
e) beschäftigen sich mit der Bedeutung der Begriffe »Wahrheit« in der Logik und »Punkt« in der Geometrie.

Zu a): Unsere Diskussion und Analyse der Abhängigkeiten zwischen Grundfaltungen erlaubt auf eine sehr natürliche Weise, die Frage nach dem Ziel der Unabhängigkeit eines allgemeinen Axiomensystems zu stellen und zu diskutieren. In diesem Kontext werden die bekannten Qualitätsmerkmale eines Axiomensystems wie in Abschnitt 1.3.1 besprochen und in moderne Sicht auf die Mathematik eingeordnet. Hierzu lesen und besprechen wir die Position von Rudolf Schnabel, vgl. Seite 45.

Zu b): Für die Darstellung der euklidischen Geometrie haben wir uns hauptsächlich an den Büchern [Mar75], [Mit77], [Fil93] orientiert.

Bemerkung 5.31. Wir wollen einen Auszug aus [Ned17, S. 30] zitieren, in dem wir eine nur leicht idealisierte Unterhaltung aus dem [17]Kurs wiedergeben. Dieser Auszug zeigt auf, wie wir mit Papierfalten (oder besser mit Papier) zunächst naive Unterhaltungen über das Wesen der euklidischen Ebene provozieren.

– Wie stellt ihr euch die euklidische Ebene vor?
– Naja, eben eine Fläche, so die Tischebene unendlich fortgesetzt.
– Tischebene suggeriert, dass sie flach ist.
– Ja klar! So ein großes unendliches Stück Papier.
– Dieses Papier kann ich nehmen und so wellen, dann ist das nicht mehr flach.
– Naja, aber ...
– Es wäre schon komisch, wenn die euklidische Ebene beim Wellen keine mehr wäre. So wie eine Parabel, wenn man sie dreht – sie wird vielleicht nicht mehr als eine quadratische Funktion beschrieben – aber eine Parabel ist das doch immer noch.
– Hm, stimmt, ich muss dann die Abstände anpassen, aber irgendwie ist das komisch.
– Ja, aber das ist doch einfach $\mathbb{R}^2$ und das ist flach, die Achsen sind doch gerade.
– Komisch ist, dass $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}$ gar nichts davon wissen, dass sie flach oder gerade sein sollen: Das sind doch Mengen, wir geben ihnen diese Form, weil wir sie in der Zeichenebene visualisieren wollen.

Spätestens hier stelle ich eine Verwunderung in den Augen Studierender fest, so haben sie darüber noch nicht nachgedacht und sie haben nicht gemerkt, dass sie in die schwierig zu motivierende Diskussion mittels eines Blattes Papier hereingeraten sind. Vielleicht sind sie jetzt bereit, einen neuen Gedanken über die Fundamente der Geometrie aufzunehmen?

Der Dialog wurde durch ein Modell der euklidischen Ebene in [Mar75, S. 53] inspiriert. ♯

Nach der Darstellung der Postulate von Euklid haben wir einige Lücken seiner Geometrie besprochen: Schnittpunkte von Kreisen (»warum existieren Schnittpunkte überlappender Kreise?«), allgemein das Problem der Anordnung (»was ist ›links‹?«) und der Dazwischenheit (»wie definieren wir eine Strecke?«), Nichtverwendung der Definition eines Punktes und das nicht sehr elementare fünfte Postulat (sowie die Version von Playfair).

Es ergab sich eine Diskussion über mögliche Lösungen dieser Lücken. Hier spielte das Axiom von Pasch und die Dazwischenheit eine wichtige Rolle, abschließend wurde der Übergang zu Hilberts Axiomen thematisiert. Diese Axiome wurden nur oberflächlich besprochen und kommentiert. Wir haben uns vielmehr auf das Axiomensystem der euklidischen Ebene von Martin konzentriert, vgl. Anhang A.10, weil dort bereits reelle Zahlen als gegeben auftauchen, eine für Studierende nachvollziehbare Abkürzung.

Zu c): Beim Übergang zu anfänglichen metamathematischen Fragen haben wir für uns wichtige Begriffe definiert oder zumindest eine gängige Erklärung angeboten. Darunter haben wir »Definition« und »Aussage« im Sinne der Ausführungen auf Seite 49 eingeführt, aber formalere Präzisierungen thematisiert. »Axiom« wurde eine (mit den Grundbegriffen formulierte) ausgezeichnete Aussage genannt. Eine Menge von Axiomen: Axiomensystem. Wir sprachen über Modelle als Interpretationen von Axiomensystemen und sahen uns leichte und anspruchsvolle einschlägige Beispiele an, etwa: *Axiom 1* Für je zwei verschiedene Punkte existiert eine eindeutige Verbindungsgerade, *Axiom 2* Es gibt drei nicht kollineare Punkte. Die Kugelgeometrie als möglicher Kandidat für die Axiome der euklidischen Ebene.

Folgende Fragestellungen hinsichtlich allgemeiner Axiomatik und euklidischer Ebene haben wir aus den Betrachtungen des 1-fach-Origami entwickelt und zur Diskussion gestellt, vgl. Anhang A.11 für ausgewählte Hausaufgaben zum Thema.

- Was sollen Axiome leisten? *In Anlehnung an* Grund*faltungen des 1-fach-Origami*
- Welche Eigenschaften sollen Axiome haben? *Nach der Dominanzbetrachtung bei 1-fach-Origami*
- Welche grundlegenden Begriffe des 1-fach-Origami haben wir gefunden? Sind diese definiert? Sind diese definier*bar*? *Mit dem Subtext: Origami-Punkte und -Geraden sind Punkte und Geraden der euklidischen Ebene, also dort definierbar.*
- Wie definieren wir Punkte und Geraden in der euklidischen Ebene? Hier haben wir die Lösung von Pasch/Hilbert, Punkte und Geraden zunächst undefiniert zu lassen, nochmal aufgegriffen und diskutiert. Dabei finden wir das Beispiel aus [Mit77, 14f.] sehr hilfreich: Auch bei Schach spielt es keine Rolle, *was* die Figuren *wirklich* sind, es geht um ihre Beziehung zu einander und um die Spielregeln.

Zu d): Nicht selten werden Beispiele wie »DNA/Genetik«, »Noten/Musik«, »Buchstaben/Sprache« als Beispiele für Axiomatisieren ins Spiel gebracht. Beispiele für Axiomatik zu finden, ist nicht leicht: Beispiele wie »zehn Gebote/Religion«, »Zutaten/Rezepte« lassen sich auch dem Axiomatisieren zuordnen und sorgen für heitere Diskussionen. Ein Unterschied wird deutlicher am Beispiel der Gruppentheorie:

Die heutige Darstellung lässt sich eher der »Axiomatik« zuordnen, obwohl, historisch betrachtet, die Gruppentheorie (wie auch die allermeiste Mathematik) aus einem Axiomatisierungsprozess entstand.[71] Im Kurs beleuchteten wir die verschiedenen Zugänge zu einer mathematischen Theorie via Axiomatik vs. Axiomatisierung im Prinzip und an konkreten Beispielen wie oben. Eine Diskussion über »Beweisbarkeit« der Axiome wurde angestrengt. Entsprechende (meta)mathematischen Begriffe, etwa die eines Beweises oder der Beweisbarkeit wurden definiert oder erläutert. Prinzipiell stoßen solche Diskussionen bei Studierenden auf wenig Widerstand, die Problemstellungen (wie etwa das Auffinden eines geeigneten Axiomensystems oder die prinzipielle Abkehr von der Notwendigkeit, über die Beweisbarkeit von Axiomen zu entscheiden) erscheinen Studierenden in der Regel plausibel, auch wenn wir zeitbedingt vergleichsweise wenig darüber sprechen können. Als ebenfalls problematisch erscheint uns nach den Erfahrungen aus den Kursen die Erkenntnis, dass die grundlegenden ontologischen und metamathematischen Probleme allgemeiner Axiomensysteme oder speziell der euklidischen Geometrie zu weit weg vom 1-fach-Origami liegen, als die Lehren aus 1-fach-Origami hier eine Hilfestellung bieten könnten.

Erst an dieser Stelle konnten wir sinnvollerweise den im Kurs aufgespannten Bogen zwischen Flachfaltbarkeit (leichtes lokales Ordnen), 1-fach-Origami (lokales und globales Ordnen) und euklidischer Ebene (Betrachtung des erfolgten globalen Ordnens samt ontologischer Lösung) aufklären.

Nicht systematisch, aber von Kurs zu Kurs unterschiedlich und je nach Atmosphäre wurde über die gödelschen Resultate und damit verbundene Probleme des Hilbert-Programms, über Probleme der Definierbarkeit von »Wahrheit« berichtet.

Abschließende Betrachtungen Ein wesentlicher Nachteil dieser Einheit aus mathematischer Perspektive ist die fast anekdotische Darstellung der Inhalte. Die Axiome von Euklid oder von Martin können nur angesprochen und wenig diskutiert werden. Es ist aber auch kein Ziel unserer Kurse, die euklidische Ebene abschließend zu axiomatisieren. Insofern erscheint eine situative Besprechung und Analyse von Modellen etwa zum Begriff der Dazwischenheit oder die Auswirkungen des Austauschens oder Weglassens gewisser Axiome eine vertretbare Herangehensweise. Studierende bekommen einen Eindruck von axiomatischen Problemstellungen der euklidischen Ebene – das scheint uns ausreichend zu sein. Eine alternative und vertiefende Herangehensweise wäre aus unserer Sicht eine Selbstbeschäftigung mit ausgewählten Themen dieses Themengebiets in Form einer Projektarbeit.

[71] Wir haben mit einigem Erstaunen festgehalten, dass Studierende teilweise zum ersten Mal erfahren haben, dass Mathematik in der Regel nicht so entsteht wie sie unterrichtet wird.

In unseren Kursen haben nur einzelne Studierende Vorträge oder Projektarbeiten zu diesem Thema behandelt, daher können wir die Auswirkungen dieser Alternative nicht sinnvoll beurteilen. Das in den Kursen ausgeteilte Exzerpt[72] der wesentlichen Ideen und Zitaten rund um das Axiomatisieren (der euklidischen Ebene) wurde gemeinsam gelesen und diskutiert. Damit wurden viele der besprochenen Aspekte zusammenfassend und komprimiert wiedergeben. Für eine vertiefte Beschäftigung mit der Thematik (auch zu »Wahrheit«, »Ontologie«, »Hilbert-Programm« etc.) wären angesichts der knappen Zeit dieser Einheit eigenständige Auseinandersetzungen mit den Themen in Form von Ausarbeitungen oder Vorträgen zu empfehlen.

5.4. Inhaltsangaben der Pilotkurse

5.4.1. Sommer 2015

In diesem ersten Kurs waren hauptsächlich Studierende höherer Semester vertreten, Median und Durchschnitt der Fachsemester: 8,5. Für die Teilnahme am Kurs war im Vorfeld die Empfehlung ausgesprochen worden, Kenntnisse der Algebra-Vorlesung mitzubringen. Kennzeichend für diesen Kurs war vorwiegend nicht das Entdecken der Grundfaltungen, sondern das Arbeiten und Konstruieren mit ihnen. Ein großer Wert wurde auf konkrete Faltungen gelegt: Studierende sollten verschiedene Beispiele auch in Abgrenzung zu 1-fach-Origami falten können. Dieser Kurs war stark experimentell und als Pilotkurs anzusehen. In der nachfolgenden Darstellung werden Kernpunkte der einzelnen Kurseinheiten wiedergegeben.

1. Stunde Einfache Faltungen zum Einstieg: Hasenohr, Innenwinkelsumme im Dreieck, Fünfeck-Streifen, vgl. [Ols75, §§15, 24, 52]. Definition von »Falz« als Gerade in der Ebene. Erste Beispiele »einfacher« Faltungen: Winkelhalbierende, Verbindungsgerade, Mittelsenkrechte, Lot werden auch in Anlehnung an die Schulgeometrie genannt. Damit erfolgt eine Einordnung und Formalisierung der Faltung »Quadrat der Hälfte nach halbieren«. Faltbeschreibungen mittels einfachen Faltungen werden beschrieben. Berg-, Talfalz werden eingeführt. Es wird untersucht, was als ein Faltdreieck zu bezeichnen ist.

2. Stunde Wiederholung und die Analyse der Anzahl der Lösungen einfacher Faltungen. Faltungen und Analyse (verschiedener Vorschläge) eines regelmäßigen Dreiecks im Quadrat. Eine neue einfache Faltung wird identifiziert: (Tan). Als Anwendung und in Gruppenarbeit: Maximales regelmäßiges Dreiecks im Quadrat falten. Analyse der Konstruierbarkeit eines regelmäßigen Fünfecks und Charakterisierung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Satz

[72] Das kann als eine kurze Vorläuferversion des Abschnitts 1.3 angesehen werden.

von Gauß-Wantzel und die Frage nach entsprechenden Charakterisierung für 1-fach-Origami. Beispiel einer Diagrammierung einer Faltsequenz (regelmäßiges Dreieck im Quadrat) für den Schulbezug. Tetraeder aus einem Quadrat unter Benutzung der Faltung des regelmäßigen Dreiecks falten. Hausaufgabe: Erste Analyse der neuen Faltung eines Punktes auf eine Gerade.

3. Stunde Wiederholung und erste Strukturierung der Grundfaltungen. Welche Konstruktionen lassen sich damit falten? Was ist eine Konstruktion: Eine Analyse anhand verschiedener Faltbeispiele und Versuch einer Definition. Hausaufgabe: Nachfalten einer ausgeteilter Faltsequenz eines regelmäßigen Fünfecks, das Easy Pentagon von Robert Geretschläger. Hausaufgabe: Ist die Faltung 1-fach-Origami?

4. Stunde Wiederholung und Besprechung der Hausaufgaben. Ein studentischer Vortrag zum Thema Falten eines Punktes im Quadrat. Faltung und Analyse eines regelmäßigen Sechsecks; Faltung eines regelmäßigen Fünfecks als Grundfläche einer Pyramide aus dem regelmäßigen Sechseck. Diskussion über Darstellungsformen und Medieneinsatz von Origami im Unterricht. Studium von Parabeln über Brennpunkte und Leitgeraden. Analyse von (Tan). Damit Faltung von Lösungen ausgewählter quadratischer Gleichungen. Hausarbeit: Faltung und Diagrammierung eines regelmäßigen Achtecks.

5. Stunde Der Satz von Haga und Falten von Stammbrüchen. Spiegelungen und Winkelverdopplungen. Algebraische Herleitung der Nichtkonstruierbarkeit des regelmäßigen 7-Ecks mit Zirkel und Lineal. Hausaufgabe: Hagas Faltung als 1-fach-Origami interpretieren. Hausaufgabe: Geradenspiegelung mittels 1-fach-Origami nachahmen.

6. Stunde Wiederholung: Falten von rationalen Zahlen und Stammbrüchen; Satz von Haga und das Diagonalverfahren zum Falten von rationalen Zahlen, speziell: Faltung von $\frac{1}{n}$ mittels $\frac{1}{n-1}$. Faltung und Analyse des delischen Problems mit 1-fach-Origami. Die sechste Grundfaltung wird identifiziert. Erste Überlegungen zur Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen. Erste Beispiele für kubische Gleichungen mit der Lill-Beloch-Methode. Gruppenarbeit mit Schulbezug: Faltung eines Würfels mit verschiedenen Methoden.

7. Stunde algebraische Reduktion von Winkeldreiteilungen auf ein kubisches Problem; studentische Präsentation zur Winkeldreiteilung mit 1-fach-Origami. Allgemeine Lill-Beloch-Methode zum Lösen kubischer Gleichungen mittels 1-fach-Origami.

8. Stunde Lill-Beloch-Faltung modelliert mit GeoGebra. Entdeckung und erste Analyse der origami cubic curve. Algebraisierung der Faltgeraden als Parabeltangenten. Charakterisierung von Origami-Zahlen.

9. Stunde Analyse der bisher gefundenen Grundfaltungen, ihre Formalisierung mittels Inzidenzen wie bei Alperin und Lang. Versuch eines Beweises der Vollständigkeit der Liste der Grundfaltungen, Studierende werden auf die Entdeckung einer siebten Grundfaltung gestoßen. Definition eines Origami-Axioms nach Alperin und Lang.

10. Stunde Übergang zu Metamathematik: Unabhängigkeit, Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen, Modelle eines Axiomensystems. Analyse der Unabhängigkeit der Grundfaltungen von 1-fach-Origami. Kurze geschichtliche Einordnung der euklidischen Axiome.

11. Stunde Probleme der Axiome von Euklid. Es wird über die Grundlagen von David Hilbert und die Axiome berichtet. Beispiele für Axiomensysteme in anderen Bereichen: Gruppentheorie, Axiome kleiner Theorien. Diskussion über Axiomatisieren vs. Axiomatik in der Mathematik und in der Lehre.

12. Stunde vertiefte Analyse der euklidischen Ebene. Definitionen von Dazwischenheit, Strecke, Strahl, Dreieck, Winkel. Axiome der euklidischen Ebene von George E. Martin. Diskussion über die Sicht von Rudolf Schnabel auf Vollständigkeit, Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit. Berichte über das Hilbert-Programm und die gödelschen Unvollständigkeitssätze.

13. Stunde Einführung in die Flachfaltbarkeit als ein Anwendungsbeispiel für weitere Arten des Faltens.

Erkenntnisse und Verbesserungsvorschläge In diesem Kurs hatten wir uns inhaltlich zu viel vorgenommen. Der rote Faden ist aus dem Blick geraten,[73] der Kurs wurde insgesamt jedoch trotzdem sehr gut angenommen und gut bewertet.[74]

Wir konnten wichtige Erkenntnisse für die Lehre des Faltens sammeln sowie Probleme in der Umsetzung hiervon identifizieren. Insbesondere wurden Fragen nach dem Medieneinsatz geklärt: Wir haben in Zukunft darauf verzichtet, eine Dokumentenkamera zum Vorführen der Faltungen zu verwenden, auch grafisches Falten (etwa mit GeoGebra) haben wir in Zukunft stark reduziert. Wir haben den Wert der Flachfaltbarkeit als ein erstes Beispiel zum lokalen Ordnen erkannt und gaben dieser Tätigkeit mehr Raum in den ersten Sitzungen zukünftiger Kurse. Ferner haben wir erkannt, dass der Kurs eine klarere Struktur und eine geringere Orientierung an schulhmathematischen Bedürfnissen braucht. Eine Schulung der Studierenden zu Origami-Lehrkräften muss innerhalb des Kurses ausbleiben und wurde auf ein Extra-Treffen zum (Freizeit-)Falten verlagert. Wir haben beschlossen, metamathematischen Fragen sowie der euklidischen Geometrie (insgesamt fast vier Sitzungen

[73] Laut Vorlesungsumfrage war der Mittelwert der Antworten zur Aussage »Ein roter Faden ist erkennbar« 3,9 (1,0 entspricht »triff nicht zu«, 5,0 entspricht »trifft zu«). $\sigma = 1{,}1, N = 9$.

[74] »Gesamteindruck der Veranstaltung« laut Vorlesungsumfrage $mw = 4{,}6,\ \sigma = 0,5$.

in diesem Kurs) weniger Zeit zu widmen. Es wurde eine Ausarbeitung zu wichtigen Aspekten dieser Sitzungen erstellt, die in zukünftigen Kursen im Sinne des inverted classroom im Vorfeld ausgeteilt und im Kurs besprochen wurde.

5.4.2. Winter 15/16

In diesem Kurs haben wir die Flachfaltbarkeit nach vorne gebracht. Im Anschluss daran wurde das 1-fach-Origami behandelt. Abschließend wurde auf die Metamathematik und formalisierte euklidische Ebene eingegangen.

1.–4. Stunde Bedingt durch das Interesse der Studierenden an dem Thema wurden ganze vier Stunden der Flachfaltbarkeit gewidmet. Eine eingehende Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit im Sinne des Anhangs A.1 war die Folge. Verschiedene Vermutungen zur lokalen Flachfaltbarkeit wurden aufgestellt, diskutiert, verworfen oder bewiesen; der Zusammenhang zwischen 2-färbbaren Graphen und der Flachfaltbarkeit auch am Beispiel des square-twists (vgl. Bild 10 in A.1) wurde behandelt; offene Probleme der globalen Flachfaltbarkeit wurden angesprochen.

Beispiel 5.32. Nach der ersten Stunde wurde die Frage zum eigenen Nachdenken gestellt: Wo und in welcher Form Flachfaltbarkeit im Mathematikunterricht eingesetzt werden könnte. Schriftliche Antworten einiger Studierenden boten interessante Überlegungen. So sahen die meisten diese Beschäftigung ab der 9. bzw. 10. Klasse und im Wahlunterricht, da sie sonst keine offensichtliche Stelle im Lehrplan dafür gefunden haben. Eine Studentin plädierte dafür, bereits in unteren Klassenstufen die Flachfaltbarkeit einzusetzen. Damit könnten, ihr zufolge, Begriffe der Dreidimensionalität und des Winkels thematisiert werden. Aber auch die Kommunikation über gefaltete Beispiele und Nichtbeispiele könnte eine gute Übung sein. In der Kollegstufe sah sie die Flachfaltbarkeit als ein gutes Beispiel zum Üben von Aufstellen präziser mathematischer Aussagen. $\sharp$

5. Stunde Anfang der Beschäftigung mit 1-fach-Origami. Die euklidische Ebene wird als $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt eingeführt. Eine Analogie zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen wird gesucht. Studierende erkennen, dass Konstruktionen wie (MS), (WH), (VG), (Lot) mit 1-fach-Origami offenbar ausführbar sind. Es wird vorgeschlagen, auch die Konstruktion einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden als eine der »einfachen« Faltungen anzusehen. Es werden viele Beispiele und Nichtbeispiele zu 1-fach-Origami gefaltet. Die Stunde trägt einen Erkundungscharakter. Als Hausaufgabe sollen Studierende überlegen, wie mit 1-fach-Origami, analog zu naheliegenden Konstruktion der Hälfte einer Strecke, ein Drittel einer Strecke gefaltet werden kann. Als eine weitere Hausaufgabe soll eine 1-fach-Faltung gefunden werden, mit der das Spiegelbild eines Punktes an einer Geraden konstruiert wird.

6. Stunde Der Trinkbecher wird gefaltet und das Faltmuster untersucht. Es wird festgestellt, dass es recht schwer ist, mathematisch zu beschreiben, wie und welche Falze dabei entstehen. Auch aus diesen Komplexitätsüberlegungen wird entschieden, sich auf 1-fach-Origami zu beschränken. 1-fach-Origami wird in Analogie zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen als Schnittpunkte gefalteter Geraden eingeführt. Faltungen werden dabei über Halbspiegelungen formuliert. Streckendrittelungen werden diskutiert, dabei dominiert die Strahlensatz-Konstruktion. Sie wird im Plenum verallgemeinert, somit können alle Stammbrüche mit 1-fach-Origami konstruiert werden. Sie erfordert aber viele Faltschritte und es wird aufgegeben, nach kürzeren Faltsequenzen zu suchen. Die Zahlen 0 und 1 wurden als faltbar gefordert. Die Faltbarkeit von Loten sowie die Spiegelungsaufgabe aus der letzten Stunde liefert etwa, dass alle ganzen Zahlen faltbar sind. Damit sind alle rationalen Zahlen theoretisch 1-fach-faltbar. Es wird gefragt, ob es einfachere, direktere Faltungen dafür gibt. Um einen Vergleich zwischen Möglichkeiten zu ziehen und eine weitere Suche zu motivieren, formulieren wir das Resultat über die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen und wollen in der nächsten Stunde diskutieren, ob 1-fach-Origami nicht nur rationale lineare, sondern auch quadratische Gleichungen lösen kann. Die *Haga*-Aktivität wird durchgeführt.

7. Stunde Ziel der Stunde: Entdeckung und Analyse von (Tan) aus den Faltungen eines regelmäßigen Dreiecks. Die *Faltdreieck*-Aktivität wird durchgeführt. Die *Faltparabel*-Aktivität wird durchgeführt. Als Hausaufgabe soll überlegt werden, wie ein Dreieck definiert wird, ob die Haga-Faltung als 1-fach-Faltung durchführbar ist, wie ein gegebener Winkel mit 1-fach-Origami verdoppelt werden kann.

8. Stunde In dieser Stunde dominiert das Lösen von quadratischen Gleichungen mittels 1-fach-Origami das Geschehen. Es wird besprochen wie Wurzelausdrücke wie $\sqrt{a}$ für eine bereits konstruierte Zahl a mittels 1-fach-Origami in Anlehnung an Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen konstruiert werden. In Gruppenarbeit werden weitere Faltungen erarbeitet, etwa Falten von $\sqrt{n+1}$ mittels $\sqrt{n}$.[75] Die Rolle der Parabeltangentenfaltung für das Lösen quadratischer Gleichungen wird herausgestellt, konkrete Gleichungen per Falten werden gelöst. Der Satz von Gauß-Wantzel wird präsentiert, eingeordnet, diskutiert.

9. Stunde In dieser Stunde haben wir auf bisher entdeckte Konstruktionen und Faltungen zurückgeblickt und sie wieder der Analyse unterzogen: Welche Konstruktionen benutzen welche Faltungen, und haben sie lokal sortiert. Es wurden die Faltungen (MS), (WH), (Lot), (VG), (Tan) als grundlegend eta-

[75] Vgl. etwa [Ned18, Abschnitt 3.3].

bliert. An konkreten Faltungen der regulären 3, 4, 5, 6, 7, 8-Ecke wurde besprochen, welche davon mit 1-fach-Origami faltbar sind und welche grundlegende Faltungen dabei beteiligt sind. Die entstandene Frage, ob in 1-fach-Origami nur diese und keine weiteren grundlegenden Faltungen möglich sind, wurde aufgenommen und weitergegeben. In Gruppenarbeit haben Studierende die grundlegenden Faltungen genauer analysiert. Eine Studentin fand eine neue grundlegende Faltung, die HJA7. Dabei abstrahierte sie die Beschreibung der Faltungen und gelang zur Faltung »Punkt auf Gerade1, Gerade2 auf Gerade2«, eine Faltung, die wir in diesem Kurs noch nicht beschrieben hatten.

10. Stunde In dieser Stunde wurde aus algebraischer Sicht betrachtet, dass die Menge der mit 1-fach-Origami konstruierbaren Punkte einen Teilkörper der komplexen Zahlen bildet. Dazu wurden etwa Summen und Produkte so faltbarer Punkte mittels bekannter Konstruktionen mit ähnlichen Dreiecken nachgebildet. Es wurde festgestellt, dass 1-fach-Origami mindestens so stark wie Zirkel und Lineal ist. Dazu wurde ein Handout ausgeteilt, auf dem die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen charakterisiert und die dazu nötigen Hilfskonstruktionen (etwa Schnittpunkte von Kreisen) mit 1-fach-Origami nachgebildet wurden.

Im weiteren Verlauf sollte weiterhin überlegt werden, ob nun alle Grundkonstruktionen mit 1-fach-Origami gefunden wurden. In Anlehnung an die vorige Stunde schlug ein Student die Faltung vor, in der ein Paar von Punkten auf ein Paar von Geraden gleichzeitig gefaltet werden soll. Das führte zur Diskussionen über die gemeinsame Tangente zweier Parabeln. In Gruppenarbeit wurden verschiedene Fälle gefaltet und so die maximale Anzahl an Lösungen (drei) vermutet. Der Beweis davon wurde ausgelagert, stattdessen wurden Konstruktionen von $\sqrt[3]{2}$ und ein Beispiel der *Lill*-Aktivität betrachtet.

11. Stunde Ein Handout mit bisher entdeckten Faltungen wurde ausgeteilt, vgl. Anhang A.8, und diskutiert. Die origami cubic curve wurde betrachtet. Mit ihrer Hilfe wurde visualisiert und dann nachgerechnet, dass die Beloch-Faltung maximal drei Lösungen haben kann. Die *Winkeldreiteilung*-Aktivität wurde durchgeführt. Als Hausaufgabe sollten Studierende darüber nachdenken, welche der grundlegenden Faltungen für unsere Konstruktionen wirklich nötig sind und auf welche verzichtet werden kann. Studierende beantworteten die Frage nach der Unabhängigkeit dieser Grundfaltungen unterschiedlich: Einige sahen jede der Grundfaltungen als notwendig an, andere erkannten, dass sich einzelne Grundfaltungen mittels mehrerer anderer Grundfaltungen nachbilden lassen (zum Beispiel kann (VG) durch (MS)+(Lot) erzielt werden). Teilweise wurde argumentiert, dass die Beloch-Faltung nötig sei, sonst wäre

1-fach-Origami nicht stärker als Zirkel und Lineal.

12. Stunde Die Hausaufgabe zur Abhängigkeiten wurde besprochen und eingeordnet. Ein Handout wurde ausgeteilt, aus dem hervorgeht, dass alle Grundfaltungen generisch Spezialfälle der Beloch-Faltung sind, vgl. Anhang A.9. Die Inzidenzen der Grundfaltungen wurden abschließend betrachtet; es wurde gezeigt, dass es keine weiteren Grundfaltungen mehr gibt. Es wurde bewiesen, dass mit 1-fach-Origami generische kubische Gleichungen gelöst werden können. Ein Analogon zum Satz von Gauß-Wantzel für 1-fach-Origami wurde formuliert. Wir haben abschließend über die Definition von 1-fach-Origami diskutiert und eine Definition gemeinsam erarbeitet.

13. Stunde Objekte des 1-fach-Origami wurden als Objekte in der euklidischen Ebene definiert. Es wurde zum Studium der euklidischen Ebene übergeleitet. Ein kurzer Überblick über die Axiome und Postulate von Euklid wurde gegeben. Probleme und Lücken aus moderner Sicht wurden an ausgewählten Beispielen diskutiert. Studierende wurden angehalten, eine Definition eines Punktes zu geben; die ontologische Problematik wurde thematisiert. Beispiele für kleine Axiomensysteme und ihre Modelle wurden gezeigt, metamathematische Qualitätskriterien von Axiomensystemen wurden am Beispiel von 1-fach-Origami diskutiert und allgemein definiert.

14. Stunde Wir haben kurz die Axiomensysteme von Hilbert und Martin betrachtet. Wir haben uns ferner Beispiele für Axiomatisieren und Axiomatik angeschaut und Unterschiede herausgearbeitet. Mithilfe einer ausgeteilten Handreichung »Bemerkungen zu Axiomen und Axiomensystemen« haben wir uns abschließend mit weiterführenden Fragen rund um das Axiomatisieren mathematischer Theorien beschäftigt.

Erkenntnisse und Verbesserungsvorschläge Auf der Suche nach dem roten Faden aus dem letzten Kurs wird mehr vorgegeben. Für die Beschäftigung mit 1-fach-Origami wird festgelegt, was die euklidische Ebene, Faltung, Halbspiegelung sein sollen. So gesehen bleiben nur noch die Grundfaltungen zu entdecken. Hier haben wir zu viel vorgegeben, in diesem Kurs war ein zu großer Teil dem Expositionslernen gewidmet. Die Motivation, sich 1-fach-Origami in Analogie zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen anzuschauen, führte dazu, dass die ersten Grundfaltungen nicht aus den Faltungen heraus, sondern aus abstrakten Überlegungen gefunden wurden. Wir sehen es als sinnvoller an, Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und die Schulmathematik weniger zu fokussieren und konkrete Faltungen zu analysieren, aus denen dann die Grundfaltungen extrahiert werden. Auch die Flachfaltbarkeit nahm eine zu wichtige Stelle ein. Dadurch blieb am Ende zu wenig Zeit für die wichtigere Beschäftigung mit metamathematischen Fragen. Auf der anderen Seite war zu erkennen, dass die Beschäftigung mit dem Hilbertschem Axiomensystem und mit metamathematischen Fragen rund um die euklidische Ebene in 1-2 Stunden kaum sinnvoll sein kann. Dabei kann kaum eine Diskussion entstehen (allein schon aus Zeitgründen), der Expositionscharakter dieser Darstellung entspricht dem sonstigen Verlauf im Kurs kaum noch. Gleichzeitig kann in dieser kurzen Zeit kaum eine fachmathematisch ordentliche Darstellung der Sachverhalte stattfinden. Somit blieb es zumeist bei anekdotischer Darstellung und vielen Handouts, die von Studierenden größtenteils nicht sorgfältig gelesen wurden. Daher wurde für die nächsten Kurse beschlossen, die metamathematischen Aspekte direkter an 1-fach-Origami zu knüpfen und die formale euklidische Ebene nur anhand der Axiomatisierung von George E. Martin sowie anschließenden Diskussionen zu beleuchten. Ein besonderer positiver Aspekt dieses Kurses war die spontane, aber wie geplant anmutende, Entdeckung der Grundfaltungen. So haben Studierende vorbildlich die ersten fünf Grundfaltungen analysiert und sind dabei auf die Beloch-Faltung und HJA7 gestoßen. Die von uns gegebene Unterstützung bei dieser Analyse war, wie gewünscht, minimal und reduzierte sich im Wesentlichen, sokratisch, auf das Wiederholen dessen, was im Plenum vorgeschlagen wurde.

5.4.3. Winter 16/17

Die Gestaltung und Durchführung des Kurses unterscheidet sich nur geringfügig von dem Kursentwurf aus den Abschnitten 5.1, 5.2, 5.3. Daher verzichten wir hier auf eine explizite Darstellung.

5.4.4. Winter 18/19

Die Gestaltung und Durchführung des Kurses unterscheidet sich nur geringfügig von dem Kursentwurf aus den Abschnitten 5.1, 5.2, 5.3. Daher verzichten wir hier auf eine explizite Darstellung.

5.5. Fazit und Ausblick

Ergänzend zu den *abschließenden Bemerkung* am Ende der einzelnen Einheiten ziehen wir ein Gesamtfazit zu diesem Kapitel.

Der Kurs hat sein Hauptziel erreicht, innerhalb der gegebenen Rahmenbedingungen eine nicht sonderlich komplizierte Beschäftigung mit Papierfalten zu spezifizieren, einzugrenzen, zu formalisieren, einigermaßen zufriedenstellend zu definieren sowie in allgemeine metamathematische Fragen einzuordnen. Zugleich sind diese Kurse bei Studierenden gut bis sehr gut angekommen und wurden entsprechend bewertet.[76]

In Zukunft wäre es interessant, einen minimalistischeren Kurs auszuprobieren: Auf Inhalte aus Abschnitten 5.1, 5.3 verzichten, den Hauptteil entsprechend um formale Betrachtungen wie in Kapitel 3 erweitern. Genauer würden wir den Hauptteil so oder so ähnlich verfolgen und anschließend die Definitionen präzisieren und alle Spezialfälle der Grundfaltungen erfassen. Ein solcher Zugang wäre vermutlich für Studierende höherer Semester oder für solche mit Erfahrungen im mathematischen Papierfalten besser geeignet. Dieser Kurs verlöre gewiss an Eleganz und Attraktivität und würde etwas andere Ziele verfolgen, allerdings wäre dieser Zugang besser an (tiefere) axiomatische Fragestellungen angepasst.

Ebenso gut können wir uns einen größeren Kurs vorstellen, etwa vierstündig anstatt wie bei uns zweistündig. Das hätte den großen Vorteil, dass die Hauptsäulen (Flachfaltbarkeit, 1-fach-Origami, Metamathematik und die euklidische Ebene) ihrer Bedeutung angemessener behandelt werden könnten. Ferner ergäbe sich mehr Zeit für konkrete und weiterführende Faltungen *im Kurs*, eine bessere Akzentuierung von selbständigem und Gruppen-Arbeiten. Die Fülle von sinnvollen und unterstützenden Übungsaufgaben könnte so besser abgearbeitet werden, Vorträge und Projektarbeiten der Studierenden könnten in das Kursgeschehen eingebunden werden und den Kurs dadurch maßgeblich bereichern.

Literatur zum Kapitel 5

[Alp00] Roger C. Alperin. »A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers«. In: *New York Journal of Mathematics* 6 (2000), S. 119–133 (*cf. S.* 23, 34, 89, 99, 129, 181, 195).

[AL09] Roger C. Alperin und Robert J. Lang. »One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms«. In: *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Robert J. Lang. A K Peters, 2009, S. 371–393 (*cf. S.* 37, 90–91, 99–101, 105, 107, 110, 114, 123, 127, 133, 197).

[BN16] Johannes Beck und Dmitri Nedrenco. *Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. urn:nbn:de:bvb:20-opus-133647. Universität Würzburg, 2016. URL: `https://opus.uni-wuerzburg.de/frontdoor/index/index/docId/13364` (*cf. S.* 133, 150–152, 155).

[BH96] Marshall Bern und Barry Hayes. »The Complexity of Flat Origami«. In: *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996, S. 175–183 (*cf. S.* 133, 153).

[DO07] Erik D. Demaine und Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007 (*cf. S.* 21, 24, 35, 95, 98, 129, 133, 184).

[76] Einige Ergebnisse aus den jeweiligen anonymen Instituts-Vorlesungsumfragen finden sich in Form von Profillinien in Anhang A.12.

[Fil93] Andreas Filler. *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*. 1993. URL: https://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/publikat/filler_eukl-ne-geom.pdf (*cf. S.* 176, 203).

[Fri18] Michael Friedman. *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*. Springer, 2018 (*cf. S.* 9–18, 22, 24–25, 29, 35, 47, 93, 192).

[Fuc11] Clemens Fuchs. »Angle Trisection with Origami and Related Topics«. In: *Elemente der Mathematik* (2011), S. 121–131. URL: http://www.ems-ph.org/doi/10.4171/EM/179 (*cf. S.* 21, 189).

[Ger08] Robert Geretschläger. *Geometric Origami*. Arbelos, 2008 (*cf. S.* 24, 90, 98, 132, 174, 178–179, 181–183).

[Gje09] Eric Gjerde. *Origami Tessellations: Awe-Inspiring Geometric Designs*. A K Peters, 2009 (*cf. S.* 150).

[Hag02] Kazuo Haga. »Fold Paper and Enjoy Math: Origamics«. In: *3. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Thomas Hull. A K Peters, 2002, S. 307–328 (*cf. S.* 4, 66, 169).

[Hoc18] Tobias Hock. »Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht«. Diss. RWTH Aachen, 2018 (*cf. S.* 38, 40–41, 44, 52, 55–57, 63, 202).

[Hul11] Thomas C. Hull. »Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill«. In: *The American Mathematical Monthly* 118.4 (2011), S. 307–315 (*cf. S.* 14–16, 18, 34–35, 89, 192).

[Hul12] Thomas C. Hull. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press, 2012 (*cf. S.* 65, 98, 101, 115, 133, 149–150, 154, 159, 163, 173, 177, 179–181, 185, 192).

[Hul20] Thomas C. Hull. *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. New York: Cambridge University Press, 2020 (*cf. S.* 4–5, 9, 21, 35, 95, 129, 132–133, 174).

[Jus90b] Jacques Justin. »Résolution par pliage de l'équation du troisieme degré et applications geometriques«. In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Hrsg. von Hum. Huzita. (Nachdruck aus in *L'Ouvert: Journal de L'APMEP d'alsace et de l'IREM de strasbourg*, N°42, März 1986, S. 9–19). Ferrara, Dez. 1989: Università di Padova, 1990, S. 251–261 (*cf. S.* 4, 23–24, 26–30, 32, 34, 37, 90, 96, 123, 127, 129, 133, 189).

[KT87] Kunihiko Kasahara und Toshie Takahama. *Origami for the Connoisseur*. Japan Publication, Inc, 1987 (*cf. S.* 21, 169).

[Lan03] Robert J. Lang. *Origami and Geometric Constructions*. 2015 (erste Version online erschienen: 2003). URL: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf (*cf. S.* 37, 163, 173).

[Mar75] George E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, 1975 (*cf. S.* 38–39, 41, 50, 62–63, 104, 176, 203, 287).

[Mar98] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998 (*cf. S.* 10, 34–37, 90, 99, 108, 118, 124, 129–131, 174, 180).

[Mit77] Arno Mitschka. *Axiomatik in der Geometrie*. Herder, 1977 (*cf. S.* 40, 42, 63, 203–204).

[Mon09] John Montroll. *Origami Polyhedra Design*. A K Peters, 2009 (*cf. S.* 173, 177–179, 183).

[Ned16] Dmitri Nedrenco. »Mehr Papierfalten braucht das Land«. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 42.101 (2016), S. 31–34. URL: https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/12 (*cf. S.* 179).

[Ned17] Dmitri Nedrenco. »Gestaltung und Durchführung eines Universitätskurses ›Axiomatisieren lernen mit 1-fach-Origami‹ für gymnasiales Lehramt«. In: *Papierfalten im Mathematikunterricht: Bericht zum Kolloquium vom 24.2.2017 an der FSU Jena*. Hrsg. von Michael Schmitz. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik. 2017, S. 12–32 (*cf. S.* 154, 157–158, 203).

[Ned18] Dmitri Nedrenco. »Irrationales Falten«. In: *mathematik lehren* 36.208 (Juni 2018), S. 36–38 (*cf. S.* 181, 184–185, 210, 355–356, 358–359, 361, 363).

[Ned20] Dmitri Nedrenco. »Mathematik der Dreifaltigkeit«. In: *Alternatives Konstruieren - mit Zirkel und ... genial!* Der Mathematikunterricht Jahrgang 66 (Heft 3, Juni 2020). Hrsg. von Jan Franz Wörler, Christian van Randenborgh und Hans-Stefan Siller, S. 31–40 (*cf. S.* 91, 128, 159–161, 163, 166, 173, 175, 178).

[Ols75] Alton T. Olson. *Mathematics Through Paper Folding*. Überarbeitete Version der Broschüre von Donovan A. Johnson von 1957. National Council of Teachers of Mathematics, 1975 (*cf. S.* 18, 65, 159, 174, 181, 185, 206).

[PT15] José Ignacio Royo Prieto und Eulàlia Tramuns. »Abelian and Non-Abelian Numbers via 3D Origami«. In: *Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education*. Hrsg. von Koryo Miura. International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education: American Mathematical Society, 2015, S. 45–54 (*cf. S.* 182).

[Rab86] Stanley Rabinowitz. »Problem 1054: Solution«. In: *Crux Mathematicorum* 12.10 (Dez. 1986), S. 284 (*cf. S.* 31, 190).

[Sch19] Michael Schmitz. »Papierfalten im Mathematikunterricht: Anregungen und Beispiele«. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, 2019 (*cf. S.* 143, 150, 154, 157, 159).

[Tap13] Christian Tapp. *An den Grenzen des Endlichen: das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus*. Mathematik im Kontext. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013 (*cf. S.* 40, 43–46, 48, 202).

[Vol15] Klaus Volkert, Hrsg. *David Hilbert: Grundlagen der Geometrie* (*Festschrift 1899*). Klassische Texte der Wissenschaft. Berlin Heidelberg: Springer, 2015 (*cf. S.* 44, 176).

Teil III.

Über die Tests

Die euklidische Geometrie
ist der mathematische Teil
der Anschauung.

(*Aus einem Interview*)

6. Gestaltung der Tests

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die Entwicklung und Durchführung der schriftlichen Tests und Interviews.

6.1. Methodologische Fragen

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir die Datenerhebungsmethode, die wir in dieser Arbeit verwendet haben, begründen. Wie die Daten in einzelnen Kursen konkret erhoben wurden, beschreiben wir in den Abschnitten 6.2 und 6.3.

Bereits in Kapitel 2 erklärten wir, warum unsere Untersuchung explorativ ist. Am Anfang der Studie wollten wir primär verstehen, welche Vorstellungen Studierende zu Axiomen besitzen. Vor allem angesichts des neuartigen und explorativen Charakters unserer Fragestellung und dem Blick in die relevante Literatur erschienen Interviews dafür angemessen, vgl. [Kat+97, S. 12], [BM93, S. 166], [BD06, S. 50], auch nicht zuletzt da Testpersonen »eher zu mündlichen Äußerungen bereit und in der Lage sind als zum Anfertigen von schriftlichen Ausarbeitungen«, vgl. [BD06, S. 308].

Wir haben uns entschieden, die Studierenden *nach* dem jeweiligen Kurs zu interviewen. Konkrete Umsetzung sowie die Leitfäden zu den Interviews finden sich in Abschnitt 6.3. Interviews *vor* den Kursen durchzuführen, war aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es schien zunächst, dass wir selbst aus den Interviews nach dem Kurs eventuelle Veränderungen in den Vorstellungen der Studierenden durch den Kurs erfassen könnten: Darauf zielten einige der Fragen in unseren Leitfäden ab (etwa die Frage III in Anhang C.1). Diese Überlegung erklärt, warum wir nicht bereits zu Beginn der Studie ein fixes Pre-Post-Design etabliert haben. Die Interviews wurden also zunächst als die primäre Datenerhebungsmethode zur Beantwortung der Forschungsfragen angesehen. Ein kurzer schriftlicher Test vor dem ersten Kurs diente zunächst nur als zusätzliches Material.

Seit dem zweiten Durchlauf im Winter 2015/2016 reifte unser Ansatz zu einer Pre-Post-Testung heran. Vorstellungen und Probleme gedachten wir noch immer hauptsächlich in den Post-Interviews zu erfassen, die Veränderungen (bezogen auf die dritte Forschungsfrage) sollten durch den Vergleich entsprechender Fragen in

Pre- und Posttests beobachtet werden. Wir bemerkten, dass der erste schriftliche Pretest kurze und trotzdem reichhaltige Daten lieferte. So heißt es zwar bei Bortz und Döring, schriftliche Äußerungen »werden jedoch vom Respondenten als anstrengender und schwieriger erlebt als mündliche Äußerungen«, doch seien diese »weniger spontan, besser durchdacht und erschöpfender«, vgl. [BD06, S. 308]. Insofern erscheinen uns hier schriftliche Pretests keineswegs dem Untersuchungsziel nicht angemessen zu sein, vgl. auch [Kat+97, S. 12]. Wir beschreiben das Design der jeweiligen Tests in den folgenden Abschnitten.

Zusätzlich zur dieser Methodik setzten wir im dritten Durchlauf, also im Wintersemester 2016/2017, ein weiteres Werkzeug ein, um eventuelle durch den Kurs bewirkte Veränderungen indirekt zu erfassen: Wir wollten die van-Hiele-Niveaus der Studierenden vor und nach dem Kurs messen und aus eventuellen Veränderungen Antworten auf die Forschungsfragen ableiten, vgl. Abschnitte 6.2.4, 6.3.4.

Die Testmethodik änderte sich im letzten Kurs noch einmal. Wir gelangten in unserem Fall zur Überzeugung, dass eine angemessene Untersuchung der Veränderung der Studierendenvorstellungen nur dann möglich ist, wenn beide Pre- und Posttests gleich gestaltet sind. Die Möglichkeit, vor und nach dem Kurs Interviews zu führen, war weder vorhanden noch schien sie erstrebenswert zu sein. Daher entschieden wir uns, beide Pre- und Posttests des letzten Durchlaufs im Wintersemester 2018/2019 schriftlich durchzuführen, vgl. Abschnitte 6.2.5, 6.3.5.

In Kapitel 7 werden wir sehen, dass die Auswertung der Daten anders verlaufen wird als hier geplant. Insbesondere werden wir auf die Interviews verzichten. Wir setzen aber hier die Linie dieser Arbeit fort, die *Entwicklung* der Studie darzulegen, und berichten in diesem Kapitel über alle geplanten und durchgeführten Tests.

6.2. Design der Pretests

Wie bereits schon mehrfach beschrieben, umfasst diese Arbeit vier semesterlange Kurse, in denen Studierende zu Beginn des Kurses einen Pretest schrieben. Bevor wir auf die Gestaltung der jeweiligen Pretests eingehen, geben wir zunächst einen Überblick über die grundsätzlichen Gestaltungsüberlegungen.

6.2.1. Überblick

Übersichtlichkeitshalber wird die Schreibweise aus Kapitel 4 erweitert: Im Folgenden werden die jeweiligen Kurse, Pre- und Posttests mit einer vorangestellten Hochzahl eingeordnet. »Frage x_y« steht für die Frage x aus ^{y}Pretest. Für $X \in \{$ Kurs, Pretest, Posttest$\}$ bedeutet

$^{15}\mathbf{X}$ X aus dem Sommersemester 2015
$^{16}\mathbf{X}$ X aus dem Wintersemester 2015/16
$^{17}\mathbf{X}$ X aus dem Wintersemester 2016/17
$^{19}\mathbf{X}$ X aus dem Wintersemester 2018/19.

Die Pretests wurden immer in der ersten Sitzung des jeweiligen Kurses geschrieben, bevor die Studierenden genauer wussten, was sie im Kurs erwartet. Insbesondere wussten die Studierenden lediglich, dass die Pretests für eine Studie relevant sind, doch wussten sie zu keinem Zeitpunkt während des Kurses über den Inhalt der Studie Bescheid. Studierende wurden stets gebeten, an dem Pretest teilzunehmen. Sie wurden darauf hingewiesen, dass ihre aktive Teilnahme am Kurs sowie am abschließenden Posttest für die Studie wichtig wäre. Sie wurden gebeten, nur dann am Kurs teilzunehmen, wenn sie damit einverstanden seien.

Die Tests bestanden aus einem beidseitig beschriebenen DIN-A4-Blatt (einzige Ausnahme ^{17}Pretest mit zwei getackerten Blättern und drei Seiten, vgl. Anhang B.3). Studierende sollten ihre Antworten direkt in dafür vorgesehene Freiantwortfelder schreiben. Die Größe der freigelassenen Bereiche wurde mit Kolleginnen und Kollegen im Vorfeld diskutiert und abgestimmt und sollte die Länge der Antwort suggerieren, die uns als gerade ausreichend vorkam. Diese Vorgabe könnte natürlich das Antwortverhalten beeinflusst haben.

Die Fragen (ihre Gestaltung und Formulierung) wurden intensiv mit Kolleginnen und Kollegen im Vorfeld besprochen, so dass davon ausgegangen werden konnte, dass die Fragen verständlich formuliert waren. Studierende durften frei antworten und waren nur durch den vorgegebenen Platz auf dem Fragebogen beschränkt. Wir ordnen unsere Fragen den sog. *Kurzaufsatzaufgaben*, wie in [MK12, Abschnitt 3.3.1] beschrieben, unter. Die Auswahl der Fragen folgte aus der Analyse der Forschungsfragen. Die Fragen wurden teilweise aus vergleichbaren Tests modifiziert übernommen und wurden von Test zu Test weiterentwickelt.

Grundsätzlich waren die meisten Fragen »weich« formuliert. So wurden etwa zunächst keine genauen Definitionsfragen (»Was ist...?«, »Wie ist ... definiert?«) gestellt, die eher auf formal concept definitions abzielen. Es wurde schlicht befürchtet, dass Studierende ggf. mangels einer genauen Definition die Frage schlicht unbeantwortet lassen könnten. Wir hielten eher *indirekte, depersonalisierte, hypothetische* Formulierungen, vgl. [MK12, Abschnitt 3.5.1] für besonders geeignet: »Wie würden Sie jemandem erklären?«, »Was würden Sie sagen?« etc., die eher auf concept images zu uns interessierenden Begriffen abzielen. Vinner schreibt in diesem Zusammenhang, vgl. [Vin02, S. 74]:[1]

[1] Unter »concept definition« ist bei Vinner ziemlich sicher die formal concept definition zu verstehen.

> »A natural method to learn about somebody's concept definition is by a direct question [...]. This is because definitions are verbal and explicit. On the other hand, in order to learn about somebody's concept image usually indirect questions should be posed, as the concept image might be non-verbal and implicit.«

Vor dem Testen wurden den Testpersonen folgende Punkte erklärt: Die Auswertung erfolgt anonym;[2] sie sollten jedoch ein Passwort auf den Fragebogen notieren, um dieses wieder im Posttest zu verwenden. Während der Testphase durften keine Fragen gestellt werden, Studierende sollten die Fragen so beantworten, wie sie sie verstehen. Unter anderem sollte damit erreicht werden, dass alle Probanden dieselben Bedingungen während des Tests haben, was für eine gewisse Durchführungsobjektivität sorgen sollte, vgl. [BD06, S. 195]. Die Tests waren zeitlich unbeschränkt, allerdings wurde jedes Mal eine anvisierte Bearbeitungsdauer vorgegeben, die von Kurs zu Kurs aufgrund verschiedener Länge der Tests unterschiedlich war. Die im Weiteren angegebene Testzeit bezieht sich auf den Zeitpunkt, zu dem die letzte Testperson mit der Bearbeitung fertig geworden ist. Nach den Tests wurde regulär mit dem Kurs begonnen, ohne die Testfragen zu diskutieren oder zu kommentieren.

Zwar nahmen an den Pretests zum Teil mehr Studierende als an Posttests teil, aber die Antworten derjenigen, die an Posttests nicht teilnahmen, wurden aus dem Datenpool entfernt, um eine konsistentere Auswertung zu ermöglichen. Zum Teil waren die betroffenen Personen bereits nach den ersten Treffen nicht mehr erschienen oder erschienen gegen das Ende des Kurses nicht regelmäßig. Es wurde daher entschieden, nur Kursteilnehmende in die Auswertung aufzunehmen, die sowohl am jeweiligen Pre- und Posttest als auch regelmäßig am Kurs teilgenommen haben.

In der Tabelle 6.1 sind die relevanten personenbezogenen Daten der Studierenden aus den Pretests, aber ohne die Statistik aus Abbildung 4.1, dargestellt.

^{15}Kurs	2	8	8	8	8	9	10	10	10	12				
^{16}Kurs	3	3	3	3	3	5	5	7	8	9	9	9	11	11
^{17}Kurs	3	3	3	3	3	9	11	13						
^{19}Kurs	3	7	7	7	7	7	9	9	9	9				

Tabelle 6.1.: Fachsemesterzahlen (aufsteigend sortiert) der Studierenden aus den Pretests. Rot symbolisiert Studentinnen, grün Studenten.

[2] Das ist in der Tat falsch. In Wahrheit müsste von einer »pseudonymen Auswertung« gesprochen werden. Dieser Fehler wurde erst im ^{19}Pretest behoben.

6.2.2. Design von ^{15}Pretest

Diesen Pretest haben zwölf Personen abgegeben. Zehn davon haben den Kurs regelmäßig besucht und wurden zum Posttest zugelassen. Die Testzeit betrug 22 Minuten. Dieser Test diente zur Pilotierung der Formulierungen und Themenbereiche.

6.2.2.1. Test-Design

In der Sachanalyse rund um das Thema »Axiomatisieren« haben sich drei Leitbegriffe herauskristallisiert, die auch in den Kursen eine wichtige Rolle spielten: Konstruktion, lokales Ordnen, Axiome. Deswegen wurde der Versuch unternommen, »Signalfragen« zu diesen Leitbegriffen zu stellen, die erfassen sollten, *was* und *wie* eine Testperson über einen dieser Begriffe denkt und damit arbeitet, um anschließend (nach der Intervention) zu untersuchen, ob und inwieweit sich die Qualität der Antworten verändert hat.

Die Beschäftigung mit 1-fach-Origami ist stark durch den Konstruktionsbegriff geprägt. Die im Kursverlauf zu entdeckenden Grundfaltungen erfordern eine Grundidee davon, was Axiome sind bzw. welche Aussagen als Axiome ausgewählt werden. Schließlich, um diese Axiome zu entdecken, sie zu verstehen oder etwa auf Unabhängigkeit zu untersuchen, bedarf es einer Idee vom lokalen Ordnen. Somit wurden die drei genannten Themen ausgewählt, um zu untersuchen, mit welcher Prädisposition dieser Thematik gegenüber Studierende den Kurs beginnen. Im folgenden Abschnitt werden die dazu gestellten Fragen vorgestellt und diskutiert.

6.2.2.2. Item-Design

Der Pretest beinhaltete fünf Fragen, vgl. Anhang B.1. Die ersten zwei Fragen sammelten allgemeine Informationen über die Testpersonen. Frage 1_{15} sollte klären, ob grundlegendes Algebrawissen vorhanden ist, da sich viele der Inhalte der Kurse elegant algebraisch darstellen lassen. Frage 2_{15} sollte erfassen, ob die Studierenden, die sich für diesen Kurs interessierten, bereits mit Papierfalten in Berührung gekommen waren. Implizit sollte erfasst werden, ob sie mit mathematischem Papierfalten bereits Erfahrungen hatten.[3] Diese Frage wurde in der Auswertung als irrelevant erkannt und wurde ab ^{17}Pretest nicht mehr gestellt.

Frage 3_{15}, genauer ihre Formulierung, ist leider misslungen, da die implizite Absicht, eine Strecke in drei *gleiche* Teile zu teilen, in der Formulierung nicht explizit auftaucht. Das Ziel der Frage war es zu erfassen, ob Studierende für die Lösung der Aufgabe eine mathematische Konstruktion anführen würden. Damit sollte in

[3] In der Tat gab es im gesamten Verlauf der vier Kurse zwei Studierende (^{15,19}Kurse), die sich bereits vor dem Kurs im Zuge ihrer Zulassungsarbeiten mit mathematischem Papierfalten beschäftigten.

Erfahrung gebracht werden, ob Studierende an Konstruktionen denken, wenn sie vor geometrische Aufgaben gestellt werden. Außerdem sollte erfasst werden, ob Studierende eine Begründung ihrer Konstruktion angeben werden. In der Auswertung dieser Frage haben wir daher eher darauf geachtet, ob Studierende von sich aus eine exakte Drittelung angeben und wie sie diese Frage überhaupt angehen.

Es war zunächst nicht klar, wie nach Begriffen »Axiom«, »Axiomatik« etc. gefragt werden könnte, ohne diese Begriffe zu verwenden. Axiome sind Studierenden vermutlich geläufig, aber Axiomatik eher nicht. Deswegen hielten wir es für schwierig, direkt zu fragen, was Axiomatik sei oder was darunter zu verstehen sei.

In den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik steht im Bereich *Geometrie* »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie«, vgl. [DMV08, S. 153]. Diese etwas schwer verständliche Kompetenz[4] schien gut zu passen, um das Problem elegant zu lösen, da sie die drei in unseren Kursen wesentliche Begrifflichkeiten – Axiomatik, Konstruktion, euklidische Geometrie/Ebene – beinhaltet und miteinander kombiniert, aber keine Definition explizit abfragt. Studierende sollen hier eine Kompetenz erklären, die sie laut den Standards im Laufe des Studium erwerben sollten, vgl. [DMV08, S. 150]; es ist daher interessant zu sehen, ob sie die Aussage darin überhaupt erfassen. Aus diesen beiden Gründen wurde entschieden, Studierende diese Kompetenz mit einfachen Worten erklären zu lassen und somit den bereits angesprochenen »Umgang« mit den Begriffen zu beobachten. Unsere Hoffnung war, dass durch dieses indirekte Abfragen der Begriffe und der Aufforderung, einfache Worte zu verwenden – also die Aussage zu vereinfachen, auf andere Begriffe zurückzuführen –, beobachtet werden könnte, wie Studierende diese Begriffe verstehen und damit arbeiten.[5]

Die zugehörige Frage 4_{15} kann daher nach der obigen Überlegung als indirekt angesehen werden, vgl. [MK12, Abschnitt 3.5.1]. Wir wollten dabei verstehen:

- Welche Aspekte eines Axioms / Axiomensystems sind in den Antworten erkennbar? Wie werden Axiome ggf. erläutert, definiert?
- Wird diese Kompetenz sachlich korrekt erläutert?
- Welche unerwarteten Aussagen zu den relevanten Begriffen lassen sich in den Antworten identifizieren?

Bei der Erstellung des Pretests wurde als Nächstes darüber nachgedacht, was »Axiomatisieren verstehen« bedeuten soll. Mit der vorigen Frage wollten wir die

[4] Sie lässt sich als »Mathematisch kommunizieren« auf gehobenen Anforderungsniveaus aus dem Katalog der Kompetenzen aus den Bildungsstandards einordnen, vgl. [Kul15, S. 17].

[5] Die Auswertung hat ergeben, dass es nicht einfach ist, zugehörige Antworten zu codieren und zu analysieren. Diese Frage tauchte u. a. deswegen in den letzten beiden Pretests nicht mehr auf.

Vorstellungen der Studierenden zu diesem Thema sammeln und gleichzeitig den Umgang mit den Begriffen analysieren (ein im Nachhinein ambitionierter Wunsch angesichts einer einzigen schriftlichen Frage). Statt nun »Axiomatisieren«, also globales Ordnen, direkt abzufragen, wollten wir sehen, ob Studierende »im Kleinen« lokal ordnen können.

In der Frage 5_{15} sollten Studierende daher vorgelegte Aussagen über natürliche Zahlen lokal ordnen. Die Frage wurde so gestaltet, dass sie für alle Mathematikstudierende verständlich und lösbar sein sollte.

Dabei wurde vorausgesetzt, dass von der üblichen Arithmetik Gebrauch gemacht werden soll, um etwa in der Antwort E die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$ abzukürzen oder in der Antwort C die Primfaktorzerlegung zu benutzen. Gleichzeitig ist zu bemerken, dass für die Beantwortung der Frage die tatsächliche Unendlichkeit der Primzahlmenge oder der Menge der natürlichen Zahlen nicht nötig ist.

Eine Analyse der fünf Aussagen ergibt: Aussagen A, B und D sind offenbar wahr. Die Aussage E ist nicht wahr.[6] Die Aussage C ist wahr, sie ist die Kernidee des euklidischen Beweises für die Existenz unendlich vieler Primzahlen. Diese Aussage ist wahrscheinlich vielen Studierenden geläufig, aber möglicherweise können sie sie in dieser Form nicht einordnen.

Die Entscheidung, Aussagen über natürliche Zahlen vorzulegen, hat Vor- und Nachteile. Ein Vorteil ist, dass die Aussagen in der »gewohnten« lesbaren Form auftreten. Ein Nachteil ist, dass der (offenkundige) Wahrheitsgehalt der einzelnen Aussagen, die Beantwortung der Frage möglicherweise erschwert. So ist die Aussage E in der üblichen Arithmetik nicht wahr und wurde ausgewählt, um zu überprüfen, inwieweit Testpersonen Beziehungen zwischen einzelnen Aussagen untersuchen bzw. beurteilen können, unabhängig von ihrem konkreten Wahrheitsgehalt. Genauer genommen sind die Aussagen $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow C$, $E \Rightarrow D$ allesamt logisch wahr, da E eine falsche Aussage ist. Allerdings ist die Beziehung $E \Rightarrow C$ keine, die von uns in die Musterantwort aufgenommen wurde. Im Kontrast dazu ist die Aussage $A \wedge B \Rightarrow D$ bereits ohne zusätzliche Interpretation der Wahrheitsgehalte der Aussagen A und B wahr. Somit ist die Frage nicht einwandfrei formuliert und Testpersonen könnten ggf. Probleme haben, diese Frage richtig zu verstehen und zu beantworten.[7] Wir erwarteten die Antwort $E \lightning D$, $A \wedge B \Rightarrow D$, $A \wedge C \Rightarrow D$, $C \Rightarrow B$.

In der Auswertung wurde analysiert, inwieweit sich die tatsächlichen Antworten von dieser Antworten unterschieden, um Indizien dafür zu sammeln, ob Studierende innerhalb dieser Aufgabe lokales Ordnen erkennen und durchführen können.

[6] In der üblichen Arithmetik sind alle Zweierpotenzen 2^k für $k \in \mathbb{N}$ unterschiedlich und es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.

[7] In [19]Pretest, in dem die Idee nach dem lokalem Ordnen wieder aufgegriffen wird, wurden Aussagen daher nur noch abstrakt formuliert.

Die Gestaltung des ^{15}Pretest offenbart, dass hier keine ernsthafte Vergleiche zwischen Pre- und Posttests geben wird, da dieser Pretest nicht reichhaltig genug war, um verschiedene uns interessierende Aspekte wirklich abzudecken.

6.2.3. Design von ^{16}Pretest

Den Pretest haben vierzehn Kursteilnehmerinnen und -teilnehmer geschrieben. Sie alle nahmen am Posttest am Ende des Kurses teil. Die Durchführung sowie die Testbedingungen waren wie im ^{15}Pretest. Die Testzeit betrug 23 Minuten.

6.2.3.1. Test-Design

Dieser zweite Pretest hat sich stark am ^{15}Pretest orientiert. Da Vergleichbarkeit der Tests angestrebt wurde, ist der ^{16}Pretest nur leicht modifiziert und ergänzt worden. Die ersten Auswertungen der Pre- und Posttests nach dem ersten Kurs waren zum Zeitpunkt des ^{16}Pretests nicht abgeschlossen, doch es war bereits ersichtlich, dass die Frage 4_{15} (Frage 8_{16}) viele Antworten ermöglicht, aus denen nur schwer abzulesen war, was die entsprechende Person etwa unter dem Begriff »Axiom« versteht. Daher wurden zwei weitere Fragen zu diesem Thema, 6–7_{16}, hinzugenommen: Studierende sollten konkret auf das Wort »Axiom« angesprochen werden sowie erklären, was sie unter der euklidischen Ebene verstehen. Die Frage nach der euklidischen Ebene erscheint hier zunächst missplatziert, ihre Aufnahme in den Fragebogen wurde bereits auf Seite 85 thematisiert.

Außerdem wurden bis auf Designanpassungen die Eingangsfragen 1_{15}, 2_{15} (sie wurden zu Fragen 2_{16}, 3_{16}, 4_{16}) übernommen, vgl. Anhang B.2. Hinzu kam Frage 1_{16}, die lediglich als eine leicht zu beantwortende Eingangsfrage dienen sollte. Frage 4_{15} wurde unverändert übernommen (hier Frage 8_{16}).

6.2.3.2. Item-Design

Aus Frage 3_{15} (Streckendrittelung) entstand Frage 5_{16}: Nun kommt das Wort »gleiche« bezogen auf »in drei gleiche Teile teilen« vor. Diese Anpassung ist für die Eindeutigkeit der Frage wichtig und korrigiert die unpräzise Formulierung aus ^{15}Pretest. Die neue Formulierung der Frage enthält implizit die Aufforderung, die Gleichheit der erhaltenen Teilstrecken zu begründen. Die Frage soll daher aufzeigen, ob Studierende hier an Konstruktionen denken und ihre Lösungen begründen; oder ob sie lediglich eine naive Teilung in drei Teile angeben. Ferner beinhaltet Frage 3_{16} nun den Zusatz »Kennen Sie noch weitere Möglichkeiten?«. Dieser wurde hinzugenommen, um möglichst ausschließen zu können, dass Studierende die einfachste Methode aus den ihnen bekannten angeben – in dem Fall kann in der Auswertung nicht entschieden werden, ob die betreffende Person auch eine weitere, möglicherweise formalere Methode kennt. So kann die Antwort »ich würde es falten« nicht eindeutig eingeordnet werden, dagegen erlaubt die Antwort »ich würde es falten oder den Strahlensatz verwenden« eine differenziertere Analyse.

Die Frage 6_{16} will Vorstellungen zum Begriff »Axiom« der Studierenden erfassen. Dabei gibt es mehrere Bedenken: Es ist davon auszugehen, dass Studierende keine fachmathematische Definition des Wortes »Axiom« kennen. Somit ist die Frage »Wie ist ein Axiom definiert?« eher verwirrend.[8] Wir wussten noch nicht, ob Studierende diese Frage beantworten können und wollten die Situation vermeiden, dass sie die Frage lieber unbeantwortet lassen. Daher wurde nicht konkret nach einer Definition, sondern, indirekt und abgeschwächt, nach einer Erklärung des Begriffs gefragt. Vergleichbare Formulierungen haben wir auch in weiteren Fragen der Pretests verwendet. Beispielsweise fragt 7_{16} nicht nach einer Definition der euklidischen Ebene und auch nicht nach der Natur ebenjener (»Was *ist* die euklidische Ebene?«), sondern fragt, was die euklidische Ebene *für die betreffende Person sei*.[9] Hier wird absichtlich nicht nach der Vorstellung des Objekts »euklidische Ebene« (»Wie stellen Sie sich die euklidische Ebene vor?«), sondern nach dem Objekt selbst gefragt. In späteren Pretests wurde diese Frage doch variiert und hinzu kam die Frage nach der persönlichen Definition »wie würden Sie [...] definieren?«. Dies geschah, um der Situation vorzubeugen, dass Studierende – eine exakte Definition wissend – nur ihre Vorstellung »Zeichenebene« etc. zu Papier bringen. Insgesamt haben die Fragen nach Axiomen und euklidischen Ebenen mehrere Entwicklungen von Test zu Test erfahren.

Die Situation ist etwas anders in Frage 7_{16}. Studierende lernen in der Linearen Algebra wie sie euklidische Räume definieren, die euklidische Ebene ist ein Spezialfall davon. Das bedeutet, die Antwort »$\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt« könnte bekannt sein. Allerdings muss beachtet werden, dass Studierende durch das Setting des Kurses und die vorangegangenen Fragen möglicherweise eher an die schulgeometrische »Ebene« und nicht an Lineare Algebra denken. Im schulgeometrischen Kontext werden sie vermutlich keine formale Definition der euklidischen Ebene kennen. Die Frage geht nicht primär darauf ein, ob Studierende die euklidische Ebene genau definieren können, sondern welche formale oder nicht formale Antwort sie geben werden.

Primär war die Frage 7_{16} als eine komparative Frage designt: Es könnte in der

[8] Auch die Frage »wie würden Sie das Wort »Axiom« definieren?«, die offenbar personal concept definition abfragt und in späteren Tests auftaucht, haben wir damals als zu direkt empfunden.

[9] Doch sogar bei dieser Formulierung gab es mehrere leere Abgaben. Im Nachhinein glauben wir, dass die Frage 7_{16} durchaus schwerer zu beantworten ist als die natürliche Frage »Wie definieren Sie die euklidische Ebene?«. Das wurden in den späteren Pretests berücksichtigt.

Auswertung hilfreich sein zu vergleichen, ob ein Zusammenhang zwischen der Qualität der Antworten auf Fragen 6_{16} und 7_{16} zu finden ist.

Zusammen mit Frage 8_{16} werden in diesem Pretest die Begriffe »Axiom« und »euklidische Ebene« in mehreren Kontexten abgefragt, um eine bessere Analyse der Antworten zu ermöglichen. Fragen 6_{16} und 7_{16} haben einen gewissen definitorischen Bezug, Frage 8_{16} setzt diese einzelnen Begriffe in Kontext.

6.2.4. Design von ^{17}Pretest

Insgesamt nahmen am Pretest dreizehn Studierende teil. Allerdings haben vier von ihnen bereits direkt nach dem Pretest erklärt, sie würden nicht regulär am Kurs teilnehmen. Eine weitere Person, die am Pretest teilnahm, erschien gegen Ende des Semesters nicht regelmäßig im Kurs und kam nicht zum Interview. Diese Personen wurden aus der Statistik und Auswertung entfernt. Die Anzahl an Kursteilnehmenden, die in die Auswertung aufgenommen wurde, beträgt daher acht. Die Testzeit betrug 25 Minuten.

Bemerkung 6.1. Nach diesem Pretest und während des ^{17}Kurses kam die Idee auf, Pretest-Antworten der Studierenden mit denen von fertig studierten Mathematikerinnen und Mathematikern, weiter als »externe Personen« bezeichnet, zu vergleichen. Dazu wurden drei Kollegen (zwei Doktoranden und ein promovierter Mathematiker) gebeten, im gleichen Setting wie bei Studierenden, diesen Pretest zu absolvieren, um Hinweise auf mögliche Unterschiede in den Antworten zu bekommen. Außerdem wollten wir eine gewisse Passung sehen, da natürlich zu erwarten wäre, dass externe Personen dabei besser abschneiden. Ergebnisse dieser drei Extra-Tests werden bei der Auswertung kenntlich gemacht. ♯

6.2.4.1. Test-Design

Die Forschungsfrage FFc und ihre Vorläufer beschäftigt sich mit Veränderungen gewisser Kompetenzen der Studierenden. Die Vorversion 3c, vgl. Seite 82, zielte speziell auf Veränderungen von van-Hiele-Niveaus.

In der Literatur gibt es Versuche, Veränderungen der Leistungen der Schülerinnen und Schüler nach einer Beschäftigungen mit Origami zu messen (vgl. etwa [Gol11], [Boa11]). Dabei hat die erstere eine Veränderung in den van-Hiele-Niveaus gemessen. Dieser Ansatz schien für uns ein guter Weg zu sein, Probleme der ersten beiden Testphasen zu beheben.[10] Daher haben wir uns entschieden, mögliche Veränderung von van-Hiele-Niveaus durch den Kurs zu messen.

[10] Schließlich lag die Vorstellung, Studierende verbessern gewisse, messbare, für die Forschungsfragen relevanten Kompetenzen aufgrund des Kurses, bereits zu Beginn unsere Studie auf der Hand. Allerdings war nicht klar, welches Messinstrument dafür geeignet sei, welche Kompetenzen dafür am besten passten.

Wir wollen nun kurz erläutern, was diese Niveaus sind, wie sie gemessen werden können und wie wir dies umgesetzt haben. In Abschnitt 6.2.4.3 erläutern wir warum wir diese Ideen letztlich doch verworfen haben.

Über van-Hiele-Niveaus

Die van-Hiele-Niveaus wurden in der Literatur mehrfach beschrieben, kritisiert, weiterentwickelt, angewendet. Auf den ursprünglichen Arbeiten von Dina van Hiele-Geldof und Pierre van Hiele aus den späten 1950er Jahren aufbauend haben unter anderem Alan Hoffer, William Burger, Michael Shaughnessy in den 1980er Jahren diese Niveaus weiterentwickelt und erforscht, vgl. [Hof81; Hof83; BS86b]. Das zugehörige Modell »beschreibt die Entwicklung geometrischen Denkens von Kindern in mehreren Stufen, die einerseits einer fortschreitenden Entwicklung begrifflichen Wissens von einem inhaltlichen, anschauungsgebundenen Verständnis hin zu einem formal-axiomatischen Verständnis entsprechen, andererseits jedoch zunehmendes Verständnis für mathematische Argumentationen modellieren«, vgl. [JU15, S. 343]. Dabei wurden fünf (1–5) solche Niveaus identifiziert, ihre Deskriptoren unterscheiden sich je nach Quelle, vgl. etwa [Hof83, S. 207], [BS86b, S. 31], [JU15, S. 343], [BS86a].[a] Diese Niveaus können in der Tat helfen, geometrische Denkprozesse zu beschreiben,[b] vgl. [BS86b, S. 32, 46], [May83], [Pus03, S. 11], und scheinen auch zu existieren, vgl. [May83][c], allerdings konnte ihre diskrete Natur wie von van Hiele postuliert nicht bestätigt werden, vgl. [Hie86], [JU15, S. 343], [BS86b, S. 45]. In der Literatur wurden je nach Quelle verschiedene Argumentationsprozesse innerhalb einiger der van-Hiele-Niveaus identifiziert, vgl. [GJ98, S. 29], die je nach konkreter Aufgabe mal mehr mal weniger aktiviert werden. Daraus entstand eine Matrix der Prozesse und zugehöriger Niveaus, vgl. Tabelle 6.2. Es wurde aber gezeigt, dass die Zuordnung der van-Hiele-Niveaus zu Testpersonen nicht unabhängig von der jeweiligen Aufgabe bzw. Argumentationsprozess geschehen kann, vgl. [May83, 58, 64, hypothesis 2] und Testpersonen somit unterschiedliche Niveaus bei verschiedenen Denkprozessen aufweisen können.

[a] Eine der ausführlicheren Deskriptorenlisten findet sich bei [BS86b, S. 43–45].

[b] Insgesamt scheint das Modell von van Hieles einen beobachtbaren Beitrag im Mathematikunterricht geleistet zu haben: »Piaget framework has not produced much change in the classroom while van Hiele's work has«, vgl. [Pus03, S. 11].

[c] Dort heißt es »The hypothesis H_1 that the van Hiele levels form a hierarchy is accepted«, dabei lautet H_1: »For each geometric concept, a student at level N will answer all questions at a level below N to criterion but will not meet the criterion on questions above level N.«.

Verschiedene Tests zum Messen der van-Hiele-Niveaus bei Testpersonen wurden entwickelt, vgl. [Usi82], [BS86b], [BS86a], [GJ98].

Es war kein Ziel unserer Studie, ein eigenes reliables und valides Messinstrument zur Messung solcher Niveaus zu entwickeln,[11] sondern vorhandene Tests ggf. modifiziert zu übernehmen.

Allerdings gab es mehrere Einschränkungen, warum wir bestehende Tests nicht direkt übernehmen konnten. In [Usi82] wurden Multiple-Choice-Tests durchgeführt und die Antworten als richtig oder falsch markiert, wonach die Anzahl an richtigen Antworten das entsprechende Niveau bescheinigen sollte. Dieses Vorgehen hat viel Kritik erfahren, vgl. etwa [GJ98, S. 27], [Cro90, S. 238]. In späteren Tests wurde etabliert, dass Leitfadeninterviews besser geeignet wären, vgl. [BS86b; BS86a], [GJ98, S. 27], [Pus03, S. 23] und nicht den Fragen, aber den Antworten van-Hiele-Niveaus zugeordnet werden sollten, vgl. [GJ98, S. 27].[12] In unserem Setting war ein Interview als Pretest nicht erwünscht und wir wollten bei schriftlichen Items bleiben.

Daher haben wir uns stark an Gutierrez und Jaime orientiert, die eine Test-Mischform erarbeitet haben: »We want these written items to be as close as possible to an item for a semi-structured clinical interview, where it is possible for the interviewer to modify the questions, to give some hint, etc. depending on the previous student's answers and the reflected thinking level«, vgl. [GJ98, S. 33]. Dabei war ihr Ziel, reliable Tests »with a minimum number of items« zu entwickeln, so dass »each item should require the students to give detailed answers, in order to obtain a clear picture of their reasoning«, vgl. [GJ98, S. 28]. So konnten Papier-und-Bleistift-Tests verwendet werden, in denen aber die Möglichkeit vorgesehen war, die jeweilige Antwort zu begründen. Wir sehen diese Methodik als besonders passend für unsere Situation. Letztlich haben wir versucht, genau dieses Ziel von Gutierrez und Jaime umzusetzen, nur die Items wurden an unsere Situation angepasst.

Wir wollen nun beschreiben, wie wir die Items für unseren Test zusammengestellt haben. Zunächst wurden bestehende Tests analysiert. Gutierrez und Jaime beschrieben, basierend auf eigenen Analysen und ähnlichen Ideen aus früheren Arbeiten, fünf Argumentationsprozesse, die helfen sollen, die van-Hiele-Niveaus zu charakterisieren. Diese Prozesse beschreiben sie mittels einer Tabelle [GJ98, S. 32], die hier übersetzt dargestellt wird, vgl. Tabelle 6.2.

Die Items von Gutierrez und Jaime sind für unsere Zwecke zu speziell auf den Geometrieunterricht ausgerichtet, so dass wir sie teilweise austauschen mussten.

Dank der Explizierung der Attribute in der Tabelle konnten wir also Items su-

[11] Das ist allein aus Zeitgründen gerechtfertigt. So schreiben Gutierrez und Jaime »we have been working for several years in the design of such a test«, vgl. [GJ98, S. 28].

[12] Insbesondere ist dann kein (genauer) Erwartungshorizont für die jeweiligen Fragen vorgesehen.

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Erkennen	physikalische Attribute	mathematische Eigenschaften	-	-
Verwenden von Definitionen	-	Nur Definitionen mit einfacher Struktur	Jede Definition	Akzeptanz mehrerer äquivalenter Definitionen
Formulieren von Definitionen	Liste physikalischer Eigenschaften	Liste mathematischer Eigenschaften	Menge notwendiger und hinreichender Eigenschaften	Äquivalenz von Definitionen beweisen
Klassifizieren	Exklusiv, basiert auf physikalischen Attributen	Exklusiv, basiert auf mathematischen Attributen	Variieren zwischen inklusiven und exklusiven Attributen	-
Beweisen	-	Verifikation mit Beispielen	Nicht formale logische Beweise	Formale logische Beweise

Tabelle 6.2.: Verschiedene Attribute der Argumentationsprozesse auf jedem der van-Hiele-Niveaus, vgl. [GJ98, S. 32]. Die Tabelle haben wir übersetzt und bereinigt.

chen, die den Anforderung von Gutierrez und Jaime entsprechen. Für den Test präzisieren sie, vgl. [GJ98, S. 32]:

A) It must evaluate the five processes listed above (recognition, formulation and use of definitions, classification, proof).

B) It must evaluate the four levels of reasoning, that is, every student should have the possibility of answering questions according to his/her maximum capability of reasoning.

C) It must provide the students with an opportunity to explain the reasons for their answers so the researcher can determine which level of reasoning was behind every answer.

Dabei sprechen sie explizit nur von vier Niveaus und lassen das fünfte Niveau aus, da »its existence has not been clearly established«, aber auch weil »as Spanish primary or secondary students are far from performing the kind of reasoning associated with level 5«, vgl. [GJ98, S. 28]. Für unsere Zwecke wären aber Items auch auf dem höchsten Niveau sinnvoll, so dass wir aus anderen Tests einige Items übernommen haben. Dazu haben wir uns hauptsächlich der Arbeiten [BS86b] und [Usi82] für Items und weitere Inspirationen bedient. Auch die Items in [Hof81, Table 2] waren sehr hilfreich für die Suche nach Fragen, die die oberen van-Hiele-Niveaus bedienen. Obwohl der in [Usi82] vorgeschlagene Test kritisiert wurde, konnten einige dortige Fragen für [17]Pretest in angepasster Form verwendet werden. Genauer wurden die entsprechenden multiple-choice-Fragen durch den Zusatz ergänzt, die

gewählte Option zu erklären, in Übereinstimmung mit Testanforderungen von Gutierrez und Jaime. Wir haben unter anderem solche Fragen aus [Usi82] übernommen, die nach unserer Einschätzung Antworten auf höchstem Niveau erlaubten.[13]
In der Literatur finden sich theoretisch überzeugende Deskriptoren des höchsten van-Hiele-Niveaus, die sich aber nicht ohne Weiteres in die Darstellung wie in Tabelle 6.2 einordnen lassen. So finden wir etwa bei Alan Hoffer detaillierte Beschreibungen, die sich auf etwas andere Prozesse beziehen, vgl. [Hof81, Table 1]. Er schreibt ferner auf Seite 14 zum fünften Niveau: »The student understands the importance of precision in dealing with foundations and interrelationships between structures«.

Der resultierende ^{17}Pretest ist somit eine überlegte Zusammenstellung aus bekannten Tests und bereits durchgeführten Pretests, so dass das Ergebnis passend für die Beantwortung unserer damaligen Forschungsfragen erschien. Die letztendliche Auswahl und die Anordnung der Items für den ^{17}Pretest ist durch unsere und kollegiale Einschätzung zustande gekommen. Die Art und Weise wie die einzelnen Items formuliert wurden, ist stark von Formulierungen aus dem (schwer zugänglichen) Report [BS86a] inspiriert. Die Begründungen für die einzelnen Items finden sich in Abschnitt 6.2.4.2. In Anhang B.3 finden sich die so zusammengestellte Fragen und in der Tabelle 6.4 findet sich eine Zuordnung der theoretisch möglichen Niveaus und Prozesse für die jeweiligen Items.

Bemerkung 6.2. Methodische Schwächen in unserer Testgestaltung sind nicht zu übersehen. Zunächst haben wir versucht, einen sorgfältig gestalteten Test aus der Literatur auf Bereiche und Kompetenzen anzuwenden, die von diesem Test so nicht geplant waren. Dieses Problem scheint nur beschränkt gravierend zu sein, da die verwendeten Items aus Tests stammen, die alle ein Ziel haben: van-Hiele-Niveaus bestimmen.

Eine weitere Tücke sind die Testpersonen. Die meisten Tests wurden für Schülerinnen und Schüler konzipiert, wir wollten jedoch Mathematikstudierende testen. Jedoch scheint auch dies kein großes Problem zu sein, da auch Mayberry in ihren van-Hiele-Tests Lehramtsstudierende getestet hatte, vgl. [May83].

Ein wesentlich größeres Problem aus unserer Sicht ist die Umgestaltung des Tests von Gutierrez und Jaime. Für uns war es notwendig, den Test auf unsere Bedürfnisse anzupassen. Das hat den Preis, dass wir keinerlei Kontrolle über die Validität des Tests haben. $\sharp$

Zum Auswerten der Tests argumentieren Gutierrez und Jaime, dass es nicht sinnvoll sei, einer Person eine Zahl – ihr van-Hiele-Niveau – zuzuordnen. Vielmehr zeigen sie auf, dass vielen Testpersonen nur zu einem gewissen Grad »degree of acquisition« eines der Niveaus zugeordnet werden kann, vgl. [GJ98, S. 43]. Dabei haben sie fünf Intervalle für diese Grade angegeben, vgl. Tabelle 6.3.
Damit bekommt jede Testperson ein Quintupel (bei Gutierrez und Jaime sind das Quadrupel) zugeordnet: der Grad der Aneignung eines der fünf van-Hiele-Niveaus.

[13] Dort waren Items 21–25 für das höchste van-Hiele-Niveaus vorgesehen. Wir haben Item 23 weitestgehend übernommen und Item 24 im Posttest verarbeitet.

[0 %, 15 %]	no acquisition
(15 %, 40 %)	low acquisition
[40 %, 60 %]	intermediate acquisition
(60 %, 85 %)	high acquisition
[85 %, 100 %]	complete acquisition

Tabelle 6.3.: Intervalle der acquisition von van-Hiele-Niveaus nach Gutierrez und Jaime

6.2.4.2. Item-Design

Frage 1_{17} soll wieder den Einstieg in den Test erleichtern.

Vor dem Test wurde angenommen, dass die Studierende bereits das erste van-Hiele-Niveau auf jeden Fall besitzen, daher wurde dazu lediglich eine Frage gestellt. Frage 2_{17} ist aus [Usi82, S. 158] entnommen und durch den Zusatz »Erklären Sie bitte Ihre Entscheidung« ergänzt. Diese Frage wurde als ein Repräsentant für untere Niveaus ausgewählt. Dabei wurde davon ausgegangen, dass sie die schwierigste unter der ersten fünf Fragen in [Usi82] ist, denen dort das niedrigste van-Hiele-Niveau zugeordnet ist. In [GJ98, Item 1] sollten Testpersonen aus einer Menge von angegebenen Figuren Polygone auswählen und anschließend weitere Teilfragen dazu beantworten. Dies schien für den vorliegenden Test nicht angebracht zu sein, weil davon auszugehen war, dass Studierende diese Fragen weitestgehend problemlos klären und die richtige Antwort »E« angeben würden. Daher fiel die Entscheidung auf die Frage 2_{17}, da sie kompakt und einfach ist, aber eine gute Unterscheidung der Antworten ermöglicht, vor allem, wenn sie ihre Entscheidung begründen.

Frage 3_{17} ist (die eingedeutschte Version von) Item 3. A aus [GJ98, S. 36], wobei hier die Teilfrage »Write all the important properties which are shared by squares and rhombi« weggelassen wurde, da wir nur begrenzt viel Zeit für die Durchführung des Pretests hatten und die restlichen Teilfragen ausreichend differenzierend erschienen. Diese Frage kann als eine Kombination der Fragen 6–8 in [Usi82, S. 158 f.] betrachtet werden. Die Analyse dieser Frage ist kurz: Quadrate sind Rauten mit der zusätzlichen Eigenschaft, nur rechte Innenwinkel zu besitzen. Das liefert bereits eine mathematisch solide Antwort auf die erste Teilfrage und impliziert die Antwort der zweiten Teilfrage: Es gibt keine solchen Eigenschaften. Um also diese Frage mathematisch korrekt beantworten zu können, müssen vermutlich mindestens Definitionen einer Raute und eines Quadrats zur Verfügung stehen. Dabei sollten diese vorhandenen Definitionen kompatibel sein, sonst könnte es schwierig sein, die Frage zu beantworten. So könnte eine Raute als ein Parallelogramm und ein Quadrat als ein Rechteck mit jeweils gleichlangen Seiten verstanden werden. Dann ist es möglicherweise nicht sofort klar, ob und welche Inklusionen zwischen der Menge der Rauten und Quadraten besteht.

In [GJ98, S. 36] finden wir eine ausführliche Darstellung von typischen Antworten auf die Fragen auf verschiedenen Niveaus sowie ihre Zuordnung zu diesen van-Hiele-Niveaus. Die Items dort legen einen größeren Wert auf Beweise und Beweisführungen als in ^{17}Pretest angestrebt wurde. Daher weichen die nachfolgenden Fragen immer weiter von [GJ98] ab.

Die Frage 4_{17} wird in [Pus03, S. 62 f.] diskutiert und stammt aus [Car98]. Diese Frage erschien sehr passend, da sie eine Möglichkeit liefert, sie auf einem hohen Niveau zu beantworten: In der Tat ist eine solche Zeichnung möglich, wenn passende sphärische Dreiecke in der Projektion in die Ebene gezeichnet werden.

So könnte die Antwort lauten (vorausgesetzt das Dreieck ist in der euklidischen Ebene zu denken): Eine solche Zeichnung ist aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck nicht möglich bzw. das Dreieck ist ausgeartet. Tatsächlich besteht keine Notwendigkeit, dieser Frage die euklidische Geometrie zu unterstellen, und so könnte die Antwort lauten: »Es gibt sphärische Dreiecke, deren Innenwinkelsumme von 180° abweicht«. Dazu muss gesagt werden, dass diese Interpretation im Kollegium durchaus kontrovers diskutiert wurde, da nicht selten die Meinung zu hören war, dass die Frage bereits die euklidische Geometrie stark impliziert (»einer Schülerin sagt«). Trotzdem erlaubt diese Frage Antworten auf vielen Ebenen, lässt sich sowohl schriftlich als auch im Interview gut abfragen und ist damit für den Test wertvoll. Der Erkenntnishintergrund dieser Frage ist mindestens dreierlei: Glauben Studierende, dass die Zeichnung nicht möglich ist? Dann implizieren sie damit mit hoher Sicherheit die euklidische Ebene. Wie argumentieren sie? Sie können bekannte Sätze heranziehen oder mit der anschaulichen Unmöglichkeit argumentieren. Argumentieren sie überhaupt? Hier kann identifiziert werden, ob Studierende eine Notwendigkeit darin sehen, eine Begründung ihrer Einschätzung zu geben. Je nach dem wie ausgeprägt die Begründung der Antwort ist, kann dieser Antwort ein van-Hiele-Niveau zugeordnet werden, vgl. [Pus03, S. 63].

Die Frage 5_{17} ist die veränderte Frage 17 aus [Usi82, S. 163]. Die Antwortmöglichkeiten wurden expliziter dargestellt und es wurde präzisiert, dass die Figur, von der gesprochen wird, ein Viereck ist. Sonst erscheint die Frage nicht wohl gestellt. Ferner wurde nach einer Begründung der Antwort gefragt.

Hier wird die Idee der Inklusion und Exklusion verschiedener Vierecke aus Frage 3_{17} weiter verschärft. Nun müssen Studierende präzise Aussagen über Beziehungen zwischen drei Klassen von Vierecken angeben. Dabei müssen nicht nur Definitionen von Quadraten und Rechtecken vorhanden sein, um diese Frage mathematisch treffend zu beantworten, sondern mit einer Definition einer »neuen Figur« (ein

Viereck mit vier gleichen Seiten) arbeiten. Usiskin ordnet dieser Frage das zweithöchste Niveau zu.

Die Frage soll also analysieren, ob Studierende die einzig richtige Antwort »C« auswählen *und* wie sie ihre Entscheidung begründen. Dabei ist die Hoffnung, dass die eben erwähnte Inklusion und Exklusion in der Antwort offenbart wird und damit Rückschlüsse auf die Qualität der Antwort ermöglicht.

Es wäre besser hier statt »evtl. Begründung« doch »Begründen Sie Ihre Entscheidung« zu schreiben.

Die Frage 6_{17} ist die Frage 23 aus [Usi82, S. 166]. Diese Frage stuft Usiskin auf das höchste van-Hiele-Niveau ein. In der Übersetzung der Frage wurde für »true« das Wort »gelten« statt »wahr« verwendet, weil dies als eine passendere Übersetzung erschien. Die richtige Antwort »D« soll explizit zwischen Antworten unterscheiden, für die auch andere als die »üblichen« Geometrien existieren und sinnvoll (darin kann Mathematik betrieben werden) sind. Wir haben abweichend von Usiskin von »Mr. Playfair« geschrieben, um eine versteckte Andeutung an das fünfte Postulat und die Axiomenwahl zu machen.

Wichtig ist die Ergänzung der Frage um »Was kann man dazu sagen?«. Diese Ergänzung bot die Möglichkeit, die Antworten besser zu analysieren. Leider erscheint dieser Zusatz nun als zu versteckt. Es wäre besser, direkt nach den Antwortmöglichkeiten explizit nach einer Begründung zu verlangen.

Zwar wurde für ^{17}Pretest nur eine Frage aus [GJ98] direkt übernommen, doch mehrere Fragen (obwohl in [Usi82] oder [BS86a] abgeschaut) orientieren sich daran oder an ihren Formulierungen und inkludierten Ideen. So behandelt Frage 4_{17} dieselbe Thematik wie Item 6 aus [GJ98]. Die Frage 6_{17} steht Item 7 dort nah.

Die Fragen 7_{17} bis 10_{17} haben sich stark an den bereits durchgeführten ^{15}Pretest und ^{16}Pretest orientiert, weil sie nach wie vor die zentralen Fragen der Untersuchung sind, und um eine Vergleichbarkeit der Pretests zu ermöglichen.

Dabei ist Frage 7_{17} dieselbe wie Frage 5_{16}.

Frage 8_{16} wurde zu Frage 8_{17} um das Axiomensystem ergänzt. Nach der Sichtung der Ergebnisse der früheren Pretests haben wir bemerkt, dass Studierende öfter nicht ein einzelnes Axiom definieren, sondern von einer Menge von Axiomen sprechen (»Axiome bilden eine Grundlage«). Daher entstand die Idee, diese Frage möglicherweise leichter zu machen, indem zuerst Axiomensysteme beschrieben werden sollten. Danach würde es leichter sein zu sagen, was ein Axiom ist, nämlich ein Element des Axiomensystems. Dabei erscheint im Nachhinein die Ambiguität der Formulierung nicht befriedigend: Es wird gefragt, was ein Axiomensystem *ist*, aber wie ein Axiom einer Person *erklärt werden könnte*. Hier wäre die Alternative »Wie würden Sie jemanden erklären, was ein Axiomensystem ist? Was ist dann ein

Axiom?« entscheidend besser. Weitere besser geeignete Alternativen sind im Nachhinein denkbar.

Da die Frage 8_{17} eine mathematisch richtige, aber schwer eindeutig zu analysierende Antwort »ein Axiom ist eine ausgezeichnete Aussage (in einer mathematischen Theorie)« erlaubt, wurde eine Frage hinzugezogen, die in [BS86b] bereits Verwendung fand. Frage 9_{17} soll also ermöglichen, eine abgrenzende, operative Antwort im Kontext zu geben, die eine differenziertere Analyse erlaubt. Besonders interessant ist auch im Hinblick auf die Forschungsfrage FFb, ob und wie die Testpersonen ihre Definitionen aus der vorigen Frage anwenden. Außerdem kann diese Frage erst auf den höheren van-Hiele-Niveaus beantwortet werden, da sie implizit nach Definitionen und Vergleich ebenjener fragt.[14] Wir zogen hier die Formulierung »Können Sie andeuten« der Formulierung »Was ist der Unterschied« vor, um die Situation abzufedern, dass Studierende nichts reinschreiben, wenn sie keine exakte Antwort wissen.

Abschließend erweitert Frage 10_{17} die Frage 7_{16} um den Zusatz »Wie würden Sie [die euklidische Ebene] definieren?« Dieser Zusatz ist wichtig, um erkennen zu können, ob Studierende zwischen einer anschaulichen und einer formalen Erklärung unterscheiden. Außerdem gewährt diese aktualisierte Formulierung eine Absicherung: Die Antwort »als Zeichenebene« auf die erste Teilfrage ist besser einordenbar, wenn auf die zweite Teilfrage die Antwort »als $\mathbb{R}^2$« folgt. In der Tat wäre die Formulierung »Was ist die euklidische Ebene« aus Frage 10_{17} präziser, doch die Situation, in der Studierende keine genaue Definition kennen und stattdessen ihre Vorstellung der euklidischen Ebene liefern (also eine andere Frage beantworten), ist gut möglich. Außerdem könnte diese Formulierung unnötigerweise die Zahl von Leerabgaben erhöhen, was in einem schriftlichen Test nicht förderlich ist. Die finale Formulierung schien diese Probleme abzufedern.

Insgesamt ist festzustellen, dass der resultierende ^{17}Pretest stärker »definitionslastig« im Vergleich zu »beweislastigem« Test von [GJ98] ist.

Die Fragen wurden analysiert und wie in [GJ98] wurden ihnen mögliche van-Hiele-Niveaus zugeordnet, auf denen diese Fragen beantwortet werden können. Wie bei Gutierrez und Jaime wurden diese möglichen Bereiche theoretisch begründet, vgl. Tabelle 6.4. Aus methodischer Sicht denken wir, dass unser Test die drei Anforderungen erfüllt, vgl. Seite 231.

[14] Nach dem Test hat sich überraschend herausgestellt, dass das Wort »Theorem« nicht Allen geläufig ist, daher wurde in ^{19}Pretest um Unterscheidung zwischen »Axiom, Definition und Satz« gebeten.

	Erkennen	Verwenden	Formulieren	Klassifizieren	Beweisen
Frage 2	1–2	2	1–2	1–2	
Frage 3		2–3		1–3	
Frage 4					1–4
Frage 5	2	2–4		2–3	2–4
Frage 6		2–4			2–5
Frage 7					2–3
Frage 8		2–4	2–5		
Frage 9		2–4	2–4	2–3	
Frage 10			2–5	2–3	

Tabelle 6.4.: Theoretisch bestimmte Bereiche der van-Hiele-Niveaus nach Frage und Prozess, angelehnt an [GJ98, S. 42] und verfeinert. Grau dargestellte Zahlen deuten Prozesse an, die vermutlich nur erkennbar sind, falls eine Begründung angegeben wurde.

6.2.4.3. Zur Auswertung von ^{17}Pretest nach van Hiele

Die Auswertung des ^{17}Pretests ziehen wir aus Kapitel 7 hier vor, um unsere van-Hiele-Betrachtungen zusammenhängend und abschließend darzustellen.

Um die Pretests auszuwerten, erstellten wir zunächst einen Auswertungsleitfaden, der stark vom Auswertungsleitfaden in [BS86a, Appendix B] inspiriert war. Mit diesem Leitfaden haben wir alle Antwortbögen aus ^{17}Pretest ausgewertet und bei jeder Frage, soweit möglich, Argumentationsprozesse und Niveaus entsprechend Tabellen 6.2, 6.4 zugeordnet.

Beispiel 6.3. Auf die Frage 5_{17} gab ein Student aus dem 13. Semester die richtige Antwort »C« mit der Begründung »Quadrate sind Rechtecke mit gleich langen Seiten: quad $\Longrightarrow$recht« und »Teilt man ein Rechteck längs der Diagonalen erhält man ein Rechtwinkliges Dreieck. S.d.P. [Satz des Pythagoras?]. gegenüberliegende Seiten gleich lang etc.«. Dieser Antwort ordnen wir K3 und B3 mit leichter Tendenz zu B4 zu. Hier E2 zuzuordnen ist möglich, aber unnötig, weil die anderen Prozesse offenbar auf einem höheren Niveau dominieren. Die Begründung ist nicht vollständig, so ist der Beweis skizzenhaft und verwendet unausgesprochene charakterisierende Eigenschaften eines Rechtecks. Auch darauf, dass andere Möglichkeiten falsch sind, geht der Student nicht ein. Er kann offenbar Quadrate als spezielle Rechtecke erkennen und klassifiziert die Situation also richtig. Die Verwendung der Definition (Quadrate seien Rechtecke mit gleich langen Seiten) ist erkennbar, aber die Bewertung müsste hier V2 ergeben, was aber als zu schlecht erscheint. Die Antwort erlaubt aus unserer Sicht keine differenzierte Bewertung des Verwendungs-Prozesses. $\sharp$

Anschließend haben wir nach mehrmaligem Durchsehen dieser Zuordnungen jeder Testperson für jedes der van-Hiele-Niveaus eine Prozentzahl zugeordnet. Diese Zahl sollte unsere zusammenfassende Einschätzung ausdrücken, zu welchem Grad das jeweilige Niveau erreicht wurde. Daraus entstand die Matrix in Tabelle 6.5.

Semester	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	Niveau 5
3	80 %	50 %	20 %	0 %	0 %
3	80 %	85 %	40 %	20 %	0 %
3	100 %	100 %	40-50 %	0 %	0 %?
3	100 %	100 %	70 %	15 %	0 %
3	70 %	60 %	10 %	0 %	0 %
9	100 %	100 %	90 %	70 %	??
11	80 %	80 %	30 %	0 %	0 %
13	100 %	90 %	40 %	10 %	10 %
13	100 %	90 %	60 %	??	0 %
Doktorand	90 %	70 %	70 %	20 %	??
Doktorand	100 %	100 %	90 %	70 %	??
Dr.	100 %	90 %	70 %	70 %	$\geq$ 40 %

Tabelle 6.5.: Das Ergebnis der ersten Auswertung des [17]Pretests. Jede Testperson bekommt ein Quintupel zugeordnet. Sortiert nach Semesterzahlen. Zum Vergleich und gesondert sind die Quintupel der externen Personen aufgelistet.

Bereits bei der Auswertung haben wir bemerkt, dass die Zuordnung (der Prozesse, Niveaus, Aneignungsgrade) sehr schwierig ist. Teilweise waren die Antworten so knapp oder ohne Begründung, dass eine sinnvolle Zuordnung nicht möglich war. Diese Problematik ist auch in Tabelle 6.5 erkennbar. Dort sind mehrere Fragezeichen zu finden. In diesem Fall gab es nicht ausreichend Informationen, um eine Entscheidung zu treffen. Auch die konkreten Zahlen (85 % vs. 80 %) deuten an, dass wir uns oft mehr auf Erfahrung aus der Korrektur von Studierenderlösungen denn auf exakten Auswertungsalgorithmus stützen mussten. Mehrere Quintupel scheinen die hierarchische Struktur der van-Hiele-Niveaus nicht vollumfänglich zu unterstützen, vgl. (100 %, 90 %, 70 %, 70 %, 40 %) bzw. (80 %, 85 %, 40 %, 20 %, 0 %) in der letzten bzw. zweiten Zeile der Tabelle. Wir vermuten hier eine nicht optimale Auswertung oder Gestaltung des Tests.

Nach der Auswertung fanden wir die Zahlen nicht überzeugend. Keine Person würde laut diesem Test annähernd das höchste Niveau erreicht haben. Kaum jemand wäre auf dem zweithöchsten Niveau. Vermutlich fehlten eher die Fragen, die eine Differenzierung auf den höchsten Niveaus liefern würden. Viele der Testpersonen würden hiernach nicht über das zweite van-Hiele-Niveau hinauskommen.

Insgesamt hatten wir oft das Gefühl, der mögliche Spielraum für die Zuordnung der Niveaus oder Aneignungsgrade ist unverhältnismäßig groß. Ein wesentliches Problem war die fehlende Information, wie mit Grenzsituationen umzugehen ist. Wie ist eine korrekte Antwort zu bewerten, bei der die Begründung der Antwort fehlt, obwohl eine Begründung gefordert war? Wie genau akkumulieren sich die einzelnen Bewertungen von Frage zu Frage? Sollen einzelne Fragen unterschiedlich gewichtet werden?

Bemerkung 6.4. Mayberry berechnet für jede Testperson Dispersion und Konsens aus den zugeordneten van-Hiele-Niveaus für verschiedene Aufgaben und verwirft aufgrund des Ergebnisses die bereits angesprochene Hypothese, dass Testpersonen ein van-Hiele-Niveau unabhängig von getesteten Konzepten erreichen werden, vgl. [May83, S. 58, 63–64]. Wir haben auf eine solche Berechnung verzichtet, weil unsere Konzepte bzw. gestellte Aufgaben noch weiter als dort auseinander lagen und bereits ohne diese Berechnung offensichtlich war, dass sich keine eindeutige und valide Zahl für die van-Hiele-Niveaus ergibt. ♯

Wir hatten keine Möglichkeit, die Tests auch von anderen sachkundigen Kolleginnen und Kollegen auswerten zu lassen, um dann durch Konsensbildung zu einer besseren Bestimmung der Quintupel zu kommen.

Bemerkung 6.5. Die einzige Ausnahme bildete eine Auswertung der Antworten auf die Fragen 7_{16}, 10_{17}, 4_{19} (allesamt die euklidische Ebene betreffend) durch einen Kollegen. Dabei einigten wir uns auf ein numerisches Codierschema (0 bis 7). Die Zahl »0« etwa stand für Leerabgaben, »4« für mathematisch vertretbare Antworten (»mathematisch nicht falsch, geht in die richtige Richtung, ist aber keine mathematische Definition«) und »7« für »mathematisch einwandfrei«. 32+3 Antworten wurden eigenständig nach diesem Schema bewertet, dabei kamen 32 Antworten von Studierenden und 3 von externen Personen. In 20+2 (63 %) Fällen waren wir uns direkt ob der Bewertung einig. Durch die anschließende Diskussion einigten wir uns in weiteren 9+1 Fällen auf eine gemeinsame Bewertung (insgesamt also Einigkeit in 32 von 35 Fällen, das sind 91 %). Dieses überzeugende Ergebnis hat uns gezeigt, dass unsere Interpretation der Antworten zumindest nicht völlig irreführend ist. Weitere solche Auswertungen und Konsensbildungen haben wir nicht durchgeführt. ♯

Stattdessen haben wir den Auswertungsleitfaden leicht angepasst und präzisiert, vgl. Anhang B.5, und die Analyse mehrere Monate später wieder durchgeführt. Abgetippte Antworten zweier Studenten finden sich zum Vergleich in Tabelle B.1 im Anhang, eine Beispielauswertung findet sich in Anhang B.6. Bei der Auswertung haben wir gehofft, durch die Erfahrung der ersten Auswertung, eine verbesserte und eindeutigere Bewertung zu erreichen. Aus unserer Sicht ist das Gegenteil eingetreten. Eine peniblere, sorgfältigere Auswertung hat Zahlen produziert, aus denen wir keine valide Quintupel bilden konnten, vgl. Tabelle 6.6.

Es ist uns nicht gelungen, für jede Testperson aus einer Matrix wie in Tabelle 6.6 ein

Auswertung	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Erkennen	2								
Verwenden	2↗	2			–				
Formulieren								2↗	4↘
Klassifizieren	2↗	1-2		2			2	2	
Beweisen			3	2-3	–	2		$\leq$3	

Tabelle 6.6.: Eine Beispielauswertung (rechte Spalte der Tabelle B.1 im Anhang) aus dem zweiten Auswertungsanlauf nach Argumentationsprozessen je Frage.

Quintupel zu bilden, welches mit unserem Eindruck vom jeweiligen Antwortbogen übereinstimmen würde.[15] So fallen die Auswertungen der externen Personen zwar besser aus, aber nicht deutlich genug basierend auf den tatsächlichen Antworten.

Wir vermuten hierfür mehrere Gründe: 1) Uns fehlte Erfahrung und sachkundige Kolleginnen und Kollegen, um die Antworten nach dieser Methode auszuwerten und zu einem Konsens zu bringen. 2) Es ist durchaus möglich, dass der zusammengestellte [17]Pretest nicht wie erwartet ein valides Instrument liefert und nicht mit Ergebnissen aus der Literatur vergleichbar ist. Das könnte in der Tat auch 3) an unseren Formulierungen der Items liegen. Studierende haben merklich oft die Fragen in schulische Kontexte eingeordnet und die Fragen entsprechend beantwortet. So haben nicht Wenige in der Frage 4_{17} didaktische Überlegungen angeführt. Wir haben uns bemüht, die Fragen so zu gestalten, dass Studierende Probleme und Fragen *Anderer* beurteilen, interpretieren sollten, und sich nicht gezwungen fühlten, ihre eigene Wissenslücken zu offenbaren. Die Akzentuierung auf »eine Schülerin«, »Mr. Playfair«, »jemanden« könnte Studierende dazu verleitet haben, die Fragen aus der Sicht der Lehrperson zu beantworten. Auch in den Interviews haben wir deutlich gemerkt, dass Studierende bei vielen Fragen diese Sichtweise eingenommen haben. Möglicherweise wären hier direktere Fragen wie etwa die Alternativen zu Frage 4_{17} »können Sie ein Dreieck ... zeichnen?« oder »gibt es solche Dreiecke, dass ...?« besser geeignet. 4) Die Methodik von Gutierrez und Jaime könnte nicht ohne Weiteres auf Studierende übertragbar sein.

Nach unserer Einschätzung sollten die Daten besser erhoben und ausgewertet werden als es uns gelungen ist.

[15]Beispielsweise hatten wir das Gefühl, die Antworten und Fehler in Tabelle B.1 in der linken Spalte gut zu verstehen. Die fehlenden Begründungen und Antworten, starke Unterschiede in Antwortqualitäten und damit verbundene Unsicherheiten in der Zuordnung ergaben das Auswertungsergebnis auf der ersten Seite im Anhang B.6, das uns wenig hilfreich erscheint.

6.2.5. Design von ^{19}Pretest

Der Pretest wurde in der ersten Sitzung durchgeführt. Als Testzeit wurden 20 bis 30 Minuten angenommen, Befragte durften aber nach Belieben länger schreiben. Nach 27 Minuten waren alle fertig. Den Pretest schrieben zwölf Personen mit, zwei davon haben den Kurs anschließend nur unregelmäßig besucht und sind nicht zum Posttest erschienen. Daher wurden ihre Antworten aus der Darstellung und Auswertung entfernt.

Der ^{19}Pretest verzichtet auf das Vorgehen im ^{17}Pretest, in dem aktiv das van-Hiele-Modell zum Einsatz kam. Zum einen ist es darin begründet, dass die Auswertung von ^{17}Pretest keine eindeutigen bzw. keine methodisch vollends befriedigenden Ergebnisse bezüglich der Zuteilung der van-Hiele-Niveaus zeigte, s. Abschnitt 6.2.4.3. Zum anderen wurde nach drei durchgeführten Pretests entschieden, auf Interviews zu verzichten und im Posttest dieselben Fragen im selben Format wie im Pretest zu stellen (der Posttest wurde lediglich um kursbezogene Fragen erweitert), um die Vergleichbarkeit des Pre- und Posttests letztlich zu gewährleisten. Zusammenfassend überzeugte die Auswertung von ^{17}Pretest nicht und so sollte ein einfacher Test gestaltet werden, mit dem eine qualitative Veränderung in den Antworten der Studierenden nach dem Kurs untersucht werden sollte.

^{19}Pretest enthält nun Fragen, die direkt kurs- und forschungsrelevante Inhalte abfragen. Die Formulierungen und die Auswahl der Fragen schienen uns nach drei vorherigen Durchläufen weitgehend zufriedenstellend zu sein.

Frage 5_{15} wurde überarbeitet und abstrahiert und als Frage 3_{19} wieder übernommen. Sie soll zweierlei leisten. Zum Einen soll sie aufzeigen, dass Studierende (wie angesichts des Mathematikstudiums vermutet werden könnte) keine Schwierigkeiten damit haben, Aussagen (abstrakter Natur) logisch zu sortieren, einen Zusammenhang aufzustellen. Sollten hier dennoch Probleme auftreten, könnte dies ein Indiz dafür sein, dass Studierende auch mit globalem Ordnen Schwierigkeiten haben werden. Zum Anderen soll getestet werden, ob Studierende erkennen, dass die Frage nicht nur *eine* richtige Antwort erlaubt. Diese Tatsache kann tiefsinnig interpretiert werden: Die Wahl eines Axiomensystems ist nicht notwendigerweise eindeutig und verschiedene Axiome können als eines dienen. Diese in der Frage versteckte Überlegung soll helfen, die Studierenden zu selektieren, die dies erkennen.

Frage 2_{19} ist Frage 4_{17} und wurde bereits in Abschnitt 6.2.4 diskutiert. Wir fanden die Frage bereits dort sinnvoll, weil sie eine Vielfalt an Antworten auf allen möglichen Niveaus erlaubt. Die Formulierung haben wir teilweise kritisiert, weil sie die Situation zu sehr in die Schule und dortige pädagogische Überlegungen rückt. Allerdings fanden wir nach der Sichtung der Antworten auf diese Frage aus ^{17}Pretest, dass selbst in diesem Fall einige Personen die sphärische Möglichkeit erkennen oder ihre Argumentation in der euklidischen Ebene hinreichend begründen.

Fragen 4_{19}, 5_{19}, 6_{19} wurden bereits in ^{17}Pretest gestellt. Hier wurden sie teilweise umformuliert. Frage 4_{19} ist eine verbesserte, präzisierte Formulierung von 10_{17}.

Frage 5_{19} verzichtet auf das Axiomensystem, vgl. Frage 8_{17}, da die Überlegung aus Abschnitt 6.2.4, Studierenden fällt es leichter, diesen Begriff zu definieren, nicht bestätigt wurde. Um jedoch Beliebigkeit in den Antworten zu vermeiden, wurde auch in dieser Frage zusätzlich nach einer Definition gefragt und endlich konkret die personal concept definition angesprochen. Wie bereits in den Überlegungen zur Frage 10_{17} dargestellt, soll die Zweiteiligkeit der Frage nach einer formlosen Erklärung und einer formaleren Definition, die Antwort reichhaltiger und damit besser einordenbar machen. Die Frage 6_{19} ist die unveränderte Frage 9_{17}.

Insgesamt erscheint uns die Form des ^{19}Pretests unter den gegebenen Bedingungen als gelungen. Würden wir den Test nochmal durchführen, dann ohne Frage 2_{19}, aber mit mehr Axiomatisierungsfragen, vgl. auch Abschnitt 7.3.7.

Sicherlich würden wir einen längeren und tiefergehenden Pretest begrüßen. Das könnte in einem Kurs realisiert werden, in dem mehr Zeit und weniger Freiwilligkeit der Teilnahme gegeben wären.

6.3. Design der Posttests

Die Posttests wurden zeitnah nach dem Kursende durchgeführt, in terminlicher Absprache mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern, jedoch innerhalb von zwei Wochen nach dem Kursende. Zu den Posttests wurden alle Kursteilnehmende zugelassen, die regelmäßig im Kurs erschienen sind und am Pretest teilgenommen haben.

Die ersten drei Posttests: ^{15}Posttest, ^{16}Posttest und ^{17}Posttest wurden in Form eines Interviews geführt, der letzte ^{19}Posttest wurde in Form eines Papier-und-Stift-Tests, analog zum ^{19}Pretest, durchgeführt. Über methodologische Fragen haben wir bereits in Abschnitt 6.1 berichtet.

In Abschnitt 6.3.1 geben wir einen Überblick über die Gestaltung und Durchführung der Posttests im Allgemeinen. In Abschnitten 6.3.2 bis 6.3.5 gehen auf die Gestaltung der jeweiligen Posttests ein.

6.3.1. Überblick

Alle Interviews haben wir als Doppel-Interviews durchgeführt. Alle Kursteilnehmenden einzeln zu interviewen schien uns aus folgenden Gründen nicht geeignet:

Zeitlicher Aspekt Die Datenerhebung und -auswertung ist sonst zu umfangreich.

Interaktiver Aspekt Einzelinterviews mit »dem Dozenten« könnten beklemmend sein, vgl. [BD06, S. 319] und ein unnatürliches Verhalten der Probanden verursachen, vgl. [Bor04, S. 65]; ein Gespräch mit zwei Personen könnte die Situation entspannen und dadurch die Interviews effizienter machen.

Diskussionsaspekt Die in Doppel-Interviews entstehenden Interaktionen und Diskussionen könnten eher wichtige Erkenntnisse über Denkprozesse liefern als es in Einzelinterviews möglich wäre, vgl. ebenda.

Die Einteilung der Studierenden auf die Interview-Paare erfolgte bewusst nicht zufällig, sondern nach »Passung«. Durch die subjektive Einschätzung basierend auf den Beobachtungen aus dem Kurs wurden Paare gebildet, die fachlich als ungefähr gleich eingeschätzt wurden und »miteinander reden konnten«. Nicht in jedem Fall ist diese Voraussetzung erfüllt gewesen, in einigen Fällen ist die fachliche Ähnlichkeit nicht gegeben gewesen. Auf eine der Alternativen – im Gegensatz zur Ähnlichkeit, ganz unterschiedliche Paare zu bilden – wurde aus pragmatischen Gründen verzichtet: Entsteht kein oder kein rundes Gespräch, dann ist das Interview möglicherweise gescheitert.

Studierende aller Kurse wussten prinzipiell nicht, was genau in den Kursen und Interviews beforscht wird. Wir haben das absichtlich nicht kommuniziert, um eine mögliche Beeinflussung des Datenmaterials zu reduzieren.

Vor den Interviews haben wir den Studierenden mitgeteilt, dass es ist nicht notwendig sei, sich auf die Interviews vorzubereiten (diese Bemerkung sollte bewirken, dass möglichst keine Prüfungsstimmung, sondern eine Gesprächsatmosphäre aufkommen sollte, vgl. den Interaktionsaspekt oben). Insbesondere waren keine Prüfungsleistungen an den Gesprächsverlauf geknüpft. Wir haben die Moderation der Interviews alleine übernommen und uns dabei an die Richtlinien für die Interviewmoderation aus der Literatur orientiert, vgl. [BD06, S. 320].

Alle Interviews verliefen nach demselben Schema: Nach der Begrüßung bekamen Studierende Plätze zugewiesen, vgl. Abb. 6.1. Auf dem Tisch lagen Schreib- sowie Faltpapier und Stifte.

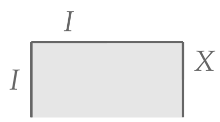


Abbildung 6.1.: Schematische Anordnung der Sitzpositionen in den Interviews. *X* – Interviewer, *I* – Interviewten.

Alle Interviews wurden mit Einverständnis der Interviewten audiographiert und anschließend von uns eigenhändig transkribiert.[16]

[16]Der Vollständigkeit halber: Die Transkripte entstanden mithilfe der Software f5, die zwischenzeitlich f4transkript heißt, und mit dem »einfachen Transkriptionssystem« transkribiert, vgl. [DP13, S. 21–23].

Die Interviews wurden nicht strikt nach dem Leitfaden durchgeführt, sondern die jeweiligen Antworten der Interviewten bestimmten maßgeblich die Reihenfolge und die Auswahl der Fragen. Es wurde nicht penibel darauf geachtet, dass beide Interviewten gleich oft zu Wort kamen.

Die Interviewten durften frei auf die gestellten Fragen antworten. Es wurde darauf geachtet, dass Beide zu jeder Frage eine Äußerung abgeben, auch wenn dies nur eine kurze Bestätigung der Sichtweise des Gegenübers war. Während des Interviews haben wir bei Bedarf verdeckt Gesprächsnotizen angefertigt. Nach den Interviews wurden ergänzende Gesprächsnotizen gemacht.

Im Übrigen orientierte sich die Durchführung der Interviews an den üblichen Arbeitsschritten bei qualitativen Interviews, vgl. [BD06, S. 310]. Alle Interviews wurden nach dem gleichem Muster durchgeführt, wir haben uns bemüht, die Formulierungen und Abläufe im Rahmen der Möglichkeiten vergleichbar zu gestalten, so dass wir von einer gewissen Objektivität der Interviewdurchführung im Sinne von [BD06, S. 326] ausgehen.

6.3.2. Sommer 2015

Der Fragenkatalog ist im Anhang C.1 zu finden. Die dortigen Formulierungen sind sorgfältig ausgearbeitet und mittels kollegialer Diskussionen präzisiert und bereinigt worden.

Insgesamt wurden zehn Menschen in Paaren interviewt, was eine Gesamtzahl von fünf Interviews ergibt. Alle fünf Interviews wurden zusätzlich und mit Einverständnis der Studierenden videografiert. Das aufgezeichnete Videomaterial wurden nachträglich lediglich für Sichererungs- und Vergleichszwecke benutzt. Die Interviews dauerten zwischen 46 und 91 Minuten, unter anderem je nach Gesprächsbereitschaft der Studierenden. Die Leitfadenfragen wurden in drei Gruppen eingeteilt: »Einleitung«, »Über Axiome« (in der Schule und im Studium) sowie »Faktisches Wissen«. Die Fragen im Interview wurden jedoch wie bereits angemerkt nicht zwingend in der geplanten Reihenfolge abgefragt, sondern passten sich dem Gesprächsverlauf an.

Die »Einleitung« diente dazu, das Gespräch anzufangen. Studierende wurden gebeten zu erzählen, womit wir uns aus ihrer Sicht im Kurs beschäftigt haben. Die zweite Frage nach »1-fach-Origami« und was das sei wurde erst gestellt, nachdem dieser Begriff von Interviewten verwendet wurde. Diese Frage sollte bereits faktisches Wissen offenbaren sowie Begriffe wie »Axiome«, »Konstruktionen« etc. aktivieren, um auf sie im weiteren Verlauf abfragen zu können.

Sobald das Wort »Axiom« gefallen ist, wurde die Einstellungsfrage III gestellt, nicht nur um Studierende zu einer Reflexion über den Kurs zu bewegen, sondern auch um ihre subjektive Sicht auf den Einfluss des Kurses anzusprechen.. Die anschließende Kontrollfrage (der Kurs habe die Sichtweise auf *Zirkel-und-Lineal-Konstruktion* verändert) diente zum Abgleich, denn diese Konstruktionen an sich wurden im Kurs nicht behandelt. Das bedeutet, im Prinzip müsste die Antwort auf diese Frage »nein« lauten.[17] Allerdings ist zu hoffen, dass die Beschäftigung mit Origamikonstruktionen grundsätzlich die Sichtweise auf mathematische Konstruktionen verändert hat. Daher könnten hier tiefere Einsichten auftauchen.

Um diese Frage-Strategie auch für den Begriff des Axiomatisierens zu benutzen, wurde entschieden, die eigentliche Frage auszulagern. Vielleicht sprechen Studierende leichter darüber, wozu es Axiome gibt, und wie sie entstehen, wenn sie nicht über sich selbst, sondern über andere sprechen. Daher wurden Fragen zu fiktiven Schulproblemen gestellt.

So sollten die Fragen »Welche Bedeutung sollen Axiome in der Schulmathematik spielen?« sowie »Welche Probleme im Umgang mit Axiomen [siehst du in der Schule]?« Studierende herausfordern, ihre Sichtweise auf das axiomatische Denken, die Wichtigkeit einer axiomatischen Basis für mathematische Theorien und mögliche damit verbundene Schwierigkeiten, zu elaborieren. Die Nachfragen wie »hast du diese Probleme auch?« sollten die Situation noch weiter aufklären.

In einer weiteren Frage sollten Studierende an einem konkreten Beispiel (eine Schülerin möchte Beweise aus dem Schulbuch formaler fassen) aufzeigen, wie sie über lokales Ordnen denken und ob sie das Prinzip des Axiomatisierens verinnerlicht haben.[18] Die Idee dieser Frage war herauszufinden, ob Studierende bemerken, dass die Schulmathematik und insbesondere die Schulgeometrie nicht axiomatisch aufgebaut ist und dass dies das Problem der besagten Schülerin ist. Ferner sollte mit dieser Frage erfasst werden, ob Studierende in der Schule überhaupt nach ihrem Eindruck mit Axiomensystemen[19] in Berührung gekommen sind.

Bemerkung 6.6. Wie auch in den Pretests haben wir »weiche« Formulierungen der Fragen gewählt, vgl. Seite 221. Fragen der Form »Wie definierst du ein Axiom?« oder »Was verstehst du unter einem Axiom?« wurden weichere Formulierung wie »Hast du mit Menschen [...]

[17] Diese Frage haben Studierende anders interpretiert und beantwortet. »jetzt sind wir quasi zurückgegangen und haben gesagt, ja, aber Falten (..) damit können wir mehr machen. Und das war wirklich überraschend für mich« oder aus einem Interview nach dem zweiten Kurs: »Ich würde sagen, dass ich die Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen ein bisschen weniger als die natürlichste Konstruktionsmethode jetzt ansehe. Weil ich eben das Papierfalten auch als eine natürliche Art der Konstruktion bezeichnen würde«. Studierende haben diese, doch etwas unglücklich formulierte Frage, auf einen Vergleich zwischen 1-fach-Origami und Zirkel und Lineal reduziert.

[18] In der Auswertung zeigte sich, dass sie bei dieser Frage eher an didaktische Probleme (wie unterstützen sie diese Schülerin in ihrem Vorhaben) gedacht haben und den mathematischen Kern der Frage nicht wahrgenommen haben. Die Frage muss also als nicht gelungen gewertet werden.

[19] Etwa das der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Andrei Kolmogorow.

über Axiome [...] gesprochen?« oder »Warum will man eigentlich Axiome finden?« vorgezogen. Wir wollten damit reichhaltigere Gespräche begünstigen. Dieses Ziel, Interviewbeteiligte möglichst in ein entspanntes Gespräch über Axiome einzubinden, ist zwar deutlich erreicht worden. Aber diese »weichen« Fragen zu Axiomen, die einen, wie es schien, cleveren Umweg über die Schule machten, wurden von vielen der zukünftigen *Lehr*kräfte zu wörtlich genommen wurden. Studierende haben sich zum Teil zu sehr in die eigentliche Klassensituation eingedacht und produzierten für unsere Zwecke teilweise nur schwer interpretierbare Antworten. ♯

Anschließend wurden Fragen zu Axiomen im Studium gestellt. Hier kann erwartet werden, dass Studierende Vektorraumaxiome oder Gruppenaxiome kennen und ansprechen würden. Daraufhin kann die Frage gestellt werden, wie sie denn nun ein Axiom anderen Menschen erklären würden.[20]

Eine für die Interviews entscheidende Frage war die Wiederholung von 4_{15}, in der eine Kompetenz aus [DMV08] erläutert werden soll. Die Formulierung der Kompetenz lag den Interviewten in schriftlicher Form vor. Die Erwartung hinter dieser Frage war ein Vergleich der Antworten im Pre- und Posttest herzustellen und eine mögliche Veränderung der Qualität der Antworten zu beschreiben. Außerdem soll diese Frage aufzeigen, wie Studierende mit Begriffen zum Thema »Axiom« im Kontext umgehen. Sie sollten über die Formulierung der Kompetenz nachdenken und ihre Meinung dazu äußern. Dabei sollten die Signalwörter wie »Axiomatik« und »Konstruktion« ggf. erklärt werden und damit zur Auswertung beitragen.

Schließlich sollte auch abgefragt werden, welche fachmathematischen Inhalte aus dem Kurs behalten wurden. Die Erwartung war, dass Studierende die Axiome des 1-fach-Origami benennen und erläutern können; dass sie den Prozess des Axiomatisierens erklären und von Axiomatik unterscheiden können. Außerdem sollten sie ein–zwei typische Konstruktionen aus dem Kursverlauf beschreiben können. Die Frage »Welche Konstruktion hat dich am meisten fasziniert?« trägt keinen mathematischen Mehrwert, soll aber die Unterhaltung erleichtern und eine Überleitung zu fachmathematischen Inhalten ermöglichen. Die Teilfrage nach den Unterschieden zwischen mathematischem Papierfalten und Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen soll behaltene fachmathematische Inhalte abfragen.

Eine ab ^{16}Pretest stets vorhandene Frage nach der Vorstellung oder Definition der euklidischen Ebene war bereits ab ^{15}Posttest ein fester Bestandteil der Interviews. Mit dieser Frage sollte nicht nur das fachmathematische Verständnis abgefragt werden, sondern es sollte beobachtet werden, ob Studierende nun tatsächlich ihr im Kurs neu erworbenes Wissen zur euklidischen Ebene darlegen oder zu ihnen bereits vor dem Kurs präsenten Vorstellungen zurückkehren.

[20] Diese Frage erlaubt einen Vergleich zum ^{16}Pretest und insbesondere Frage 6_{16}, die noch nicht in ^{15}Pretest enthalten war.

Zusammenfassend empfinden wir im Rückblick die Gestaltung und Durchführung dieser Pilotierung als gut durchdacht und den gesetzten Zielen entsprechend, aber einige Formulierungen waren schlicht zu lang.

6.3.3. Winter 15/16

Es gab keine inhaltlichen Änderungen zum ^{15}Posttest. Wir haben zu diesem Zeitpunkt das Datenmaterial aus ^{15}Pre- und Posttest nicht eingehend analysiert und entschieden uns, zunächst mehr Material zu sammeln und der Vergleichbarkeit der Daten aus den ^{15}Posttest und ^{16}Posttest Vorzug zu geben. Der Fragenkatalog ist im Anhang C.2 zu finden. Dort haben wir die Ziele des Interviews schriftlich festgehalten und die einzelnen Fragen erläutert.

Insgesamt wurden vierzehn Menschen in Paaren interviewt, was eine Gesamtzahl von sieben Interviews ergibt. Die Interviews dauerten zwischen 35 und 80 Minuten. Kurze Interviewzeiten kamen zum Teil auch aufgrund präziser und schneller Antworten seitens der Interviewten zustande.

6.3.4. Winter 16/17

Der Fragenkatalog ist im Anhang C.3 zu finden. Insgesamt wurden acht Menschen in Paaren interviewt, was eine Gesamtzahl von vier Interviews ergibt.

Die Interviewdauer betrug 60, 77, 91 und 93 Minuten. Diese längeren Zeiten im Vergleich zu früheren Posttests waren größtenteils durch den erweiterten Fragenkatalog bedingt.[21] Denn nachdem sich ^{17}Pretest stark an van-Hiele-Niveaus orientiert hat, musste auch der ^{17}Posttest dementsprechend verändert werden. Es wurde entschieden, um Vergleichbarkeit zu älteren Posttests zu ermöglichen, die wesentlichen Fragen des Leitfadens aus ^{16}Posttest beizubehalten[22] (wenn auch nicht alle Fragen tatsächlich gestellt wurden), aber zusätzlich die van Hiele spezifischen Fragen zu stellen. Damit sollte der Anschluss an die vorhergehenden Tests ermöglicht werden und eine Vergleichbarkeit zum ^{17}Pretest gegeben werden. Dementsprechend ist zu den übergeordneten Fragen der Interviews aus ^{15}Posttest ein weiteres hinzugekommen: *Ist eine Veränderung der van-Hiele-Niveaus in den Antworten feststellbar?*

Genauer sind sechs van-Hiele-relevante Fragen in ^{17}Posttest aufgenommen worden. Diese erläutern wir nun im Detail. Frage XIII in ^{17}Posttest ist aus [BS86a, S. 37] entnommen, als Ersatz für die Frage 2_{17}, die im Pretest sehr gut beantwortet wurde,

[21] Zwar ist die Anzahl der Fragen gleich geblieben, doch sind Fragen hinzugekommen, die eine längere Antwortzeit brauchen.

[22] Genauer sind die Fragen *V, VI, X, XI, XIII* aus ^{16}Posttest nicht übernommen worden. Fragen *IX* und *XII* wurden umformuliert oder ergänzt übernommen.

aber für die Interviews keine erkennbar gute Gesprächsgrundlage böte. Die neue Frage erlaubt indes eine hinreichende Vertiefung in die Untersuchung, ob Studierende das erste van-Hiele-Niveau erreicht haben. Dazu ist in [BS86a, S. 42] zu lesen: »Purpose: To discover what attributes (shape, size, proportion, orientation, etc.) the student attends to when drawing distinct triangles (student-generated triangles).«

Frage XIV wiederholt die Frage 4_{17}.

Frage XV wiederholt Frage 3_{17} und ergänzt sie um »gemeinsame Eigenschaften« von Quadraten und Rauten, wie es auch im Original von [GJ98, S. 36] der Fall ist. Diese Ergänzung wurde in den ^{17}Pretest aus Zeitgründen nicht aufgenommen.

Frage XVI ist ebenfalls aus ^{17}Pretest übernommen worden, dort als Frage 5_{17}. Hierbei schrieben beide Interviewten ihre Antwort verdeckt auf einen Zettel und diskutierten danach ihre Sichtweisen.

Fragen XVII und XVIII orientieren sich stark an [GJ98, Item 5.1, Item 8]. Sie bedienen die Prozesse des Beweisens und Formulierens von Definitionen, vgl. Tabelle 6.2 auf Seite 231 und erlauben Antworten auf den obersten van-Hiele-Niveaus. Die erste der beiden Fragen sollte für Studierende (insbesondere wenn sie zu zweit arbeiten) nicht schwer zu lösen sein. Sie zählen die tatsächlichen Diagonalen im Fünfeck, dann ggf. im Sechseck. Möglicherweise kommen sie auf die Idee, Diagonalen im Drei- und Viereck zu zählen. Mit diesen vier Zahlen entwickeln sie eine Vermutung für den allgemeinen Fall, die sie etwa mittels vollständiger Induktion beweisen. Die zweite Frage (Frage XVIII) ist selbst für Studierende mutmaßlich ungewöhnlich, da sie selten zwei verschiedene Definitionen vergleichen müssen. Zwar müssen Studierende überaus häufig *Aussagen* auf Äquivalenz prüfen, meist in der Form $A \iff B$. Dies ist aber hier im Wesentlichen dasselbe. Konkret müssen sie etwa die Aussage »Ein Viereck, in dem die Summe je zweier neben einander liegender Winkel gleich 180° ist, ist ein Parallelogramm« begründen. Anschließend zeigen sie die umgekehrte Richtung. Ohne Zweifel ist dies hier die mathematisch anspruchsvollste Frage. In [GJ98, S. 42] ist zu lesen: »In our sample we did not find any student solving correctly this item. A few students in level 4 were able to prove only one of the implications.«

Diese Fragen wurden in den Posttest aufgenommen, um nah am von Gutierrez und Jaime entworfenen Test zu sein. Dazu hatten wir nun – im Gegensatz zum Pretest – ausreichend Zeit. In der Tat schreiben die Autoren dort, dass sie aus den acht entwickelten Items, lediglich eine Auswahl von fünf Items in den jeweiligen Tests verwendet haben. Dabei haben sie für am weitesten fortgeschrittene Gruppen der Testpersonen (dort »3 and 4 grades of Secondary«, vgl. [GJ98, S. 28, 43]) die Items 1, 3, 5, 6, 8 gewählt. Die Items 3, 5, 8 entsprechen den Fragen XV, XVII und XVIII. Frage XIII ist vergleichbar mit Item 1 und Item 6 wird durch Fragen XIV und XVI vertretbarerweise ersetzt. Dadurch kann eine hohe Vergleichbarkeit der beiden Tests als gegeben gesehen werden.

Auch in diesem Posttest haben wir an Interviews festgehalten, obwohl wir den Pretest mit den »van-Hiele-Fragen« schriftlich durchgeführt haben. Zum Einen, weil wir bereits in früheren Posttests Interviews eingesetzt haben und somit uns eine reichhaltigere Datenlage erhofft haben. Zum Anderen ist die Interviewform wohl die geeignetere Form der Befragung, um die van Hiele Niveaus zu ermitteln, das haben wir bereits in Abschnitt 6.2.4.1 dargelegt. Sicherlich erscheint es nicht plausibel, noch immer schriftliche mit mündlichen Befragungen zu mischen, um Vergleiche zu ziehen. Bei diesem Test wollten wir im Interview möglichst nah an das Testdesign von Gutierrez und Jaime kommen, weil dieses bereits etabliert und erprobt wurde. Dabei dachten wir, dass die eigentlichen Items nicht entscheidend sind, schließlich wollten wir sehen, ob sich die van-Hiele-Niveaus wegen des Kurses verändert haben; und diese Niveaus sollten in der Theorie von konkreten Items nicht abhängen (zumindest solange die Items valide sind). Diese Überlegungen erscheinen uns im Nachhinein zumindest diskutabel.

6.3.5. Winter 18/19

Der Posttest findet sich im Anhang C.4.

Der Posttest wurde zwei Tage nach der letzten Sitzung geschrieben. Es gab keine Zeitbeschränkung, die Teilnehmenden haben zwischen 19 und 44 Minuten gebraucht. Insgesamt sind zehn Kursteilnehmende zum Posttest angetreten. Eine Person war im 3., fünf im 7. und vier im 9. Fachsemester.

Für den Posttest haben sich die Befragten etwas mehr Zeit genommen als für den ^{19}Pretest (in der Tat wurden auch mehr Fragen gestellt) und sie haben etwas mehr Text zu den einzelnen Fragen geschrieben.

Der ^{19}Posttest hatte alle Fragen aus ^{19}Pretest übernommen und wurde um einige weiteren Fragen ergänzt, die vor dem Kurs nicht abgefragt werden konnte (etwa fachmathematische Inhalte aus dem Kurs). Außerdem wurden die Fragen im ^{19}Posttest umnummeriert im Vergleich zum ^{19}Pretest. Dies diente einer thematischen Sortierung innerhalb des Tests (etwa Fragen nach Axiomen, danach lokales Sortieren, danach globales Sortieren). Es besteht der folgende Zusammenhang:

[23] Im ^{19}Posttest wurden für diese Frage neue Items gewählt, damit Studierende nicht die gleiche Antwort aus dem Gedächtnis aufschreiben, sondern nachweisen, dass sie die Fragestellung unabhängig von den zugrunde liegenden Aussagen beherrschen.

^{19}Pretest	^{19}Posttest
Frage 1	Frage 1
Frage 2	Frage 3
Frage 3	Frage 7[23]
Frage 4	Frage 9
Frage 5	Frage 5
Frage 6	Frage 6[24]

Tabelle 6.7.: Umnummerierung der Fragen zwischen ^{19}Pre- und Posttest

Die in ^{19}Posttest neu aufgenommen Fragen werden nun kurz erläutert. Frage 2 aus ^{19}Posttest ist eine aktualisierte und konkretisierte Version der Fragen 5_{16} und 7_{17}. Sie soll fachmathematisches Wissen nach dem Kurs abfragen. Dabei ist wichtig, ob Studierende Konstruktionen oder Näherungslösungen beschreiben (diese Thematik wurde am Beispiel einer Streckendrittelung im Kurs ausführlich diskutiert). Studierende können hier die im Kurs gelernten Verfahren angeben und beschreiben. Einige dieser Verfahren waren nicht in 1-fach-Origami enthalten, daher kann mit dieser Zusatzfrage bestimmt werden, ob 1-fache Konstruktionen dieses Problems von Studierenden behalten wurden und ob sie gewisse Grundlagen von 1-fach-Origami erworben haben.

Frage 4 aus ^{19}Posttest soll ebenfalls fachmathematisches Wissen abfragen und außerdem analysieren, welche Darstellungsform Studierende hierbei wählen (als Skizze, als eine mathematische Beschreibung, als Faltbeschreibung). Die Darstellungsform hilft einzuschätzen, wie Studierende möglicherweise über diese Axiome denken. In der Fragestellung ist »skizzieren« ausdrücklich erlaubt, weil etwa HJA7 keinen trivialen Namen trägt und eine Skizze (die im Idealfall durch eine Beschreibung ergänzt wird) sehr hilfreich sein kann. Die Formulierung »möglichst viele« möchte Tür für vertiefende Antworten offen halten. So können Studierende nur die Beloch-Faltung nennen und die Wahl erklären. Sie können alle sieben Grundfaltungen auflisten. Sie können (das kam nicht vor) erläutern, dass die Grundfaltungen keine Axiome im engeren Sinne sind usw.

Die dritte zusätzliche Frage im ^{19}Posttest ist Frage 8. Hier sollen Studierende erklären, was das im Kurs vermutlich neu gelernte Wort »Axiomatisieren« bedeutet. Dabei gibt es keine normativ richtige Antwort auf diese Frage. Vielmehr will die Frage in Erfahrung bringen, ob Studierende die Grundidee des Prozesses begriffen und behalten haben.

[24] Die Formulierung dieser Frage musste im Posttest verbessert werden: »andeuten« wurde nach dem Pretest nicht als präzise genug wahrgenommen und durch »erläutern« ersetzt.

Die drei zusätzlichen Fragen 2, 4 und 8 sind also nicht nur als Wissensfragen zu verstehen. Vielmehr erlauben sie weitere Schlüsse auf das Verständnis der Studierenden grundsätzlicher Fragen und Probleme des Axiomatisierungsprozesses.

Alle Transkripte der Interviews finden sich im digitalen Zusatzmaterial im Ordner »Interviewtranskripte«.

6.4. Abschließende Betrachtungen

Nach dem Dokumentieren und Analysieren der Pre- und Posttest-Fragebögen erscheint uns die final erreichte Form der Tests wie in [19]Pre- und Posttest dem Untersuchungsgegenstand angemessen zu sein. Wir haben eine methodische Vergleichbarkeit der Fragen und Antworten erreicht, können also Veränderungen in den Antworten erkennen und analysieren. Die vorherigen Tests haben uns gezeigt, welche Formulierungen einer Verbesserung bedürfen und welche Fragen einen besonderen Mehrwert aufweisen. Die Auswahl und die Formulierung der Items in [19]Posttest scheint die in FFa-b angesprochenen Themenbereiche ausreichend abzudecken.

Literatur zum Kapitel 6

[BM93] Christian Beck und Hermann Maier. »Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung«. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 14.2 (1993), S. 147–179 (*cf. S.* 79, 219).

[Boa11] Norma Boakes. »Origami and Spatial Thinking of College-Age Students«. In: *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (5OSME)*. Hrsg. von Patsy Wang-Iverson, Robert J. Lang und Mark Yim. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011, S. 173–187 (*cf. S.* 65–66, 228).

[Bor04] Rita Borromeo Ferri. *Mathematische Denkstile: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre. Hildesheim Berlin: Franzbecker, 2004 (*cf. S.* 243).

[BD06] Jürgen Bortz und Nicola Döring. *Forschungsmethoden und Evaluation: für Human- und Sozialwissenschaftler*. 4., überarb. Aufl., [Nachdr.] Heidelberg: Springer-Medizin-Verl, 2006 (*cf. S.* 219–220, 222, 243–244, 254, 324).

[BS86a] William F. Burger und J. Michael Shaughnessy. *Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry*. Final Report. Oregon State University, 1986 (*cf. S.* 81, 229–230, 232, 235, 237, 247–248).

[BS86b] William F. Burger und J. Michael Shaughnessy. »Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry«. In: *Journal for research in mathematics education* 17.1 (1986), S. 31–48 (*cf. S.* 229–231, 236).

[Car98] William M. Carroll. »Middle School Students' Reasoning about Geometric Situations«. In: *Mathematics Teaching in the Middle School* 3.6 (März–Apr. 1998), S. 398–403 (*cf. S.* 234, 262–263).

[Cro90] Mary L. Crowley. »Criterion-Referenced Reliability Indices Associated with the van Hiele Geometry Test«. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 21.3 (1990), S. 238–241 (*cf. S.* 230).

[DMV08] Empfehlungen von DMV GDM und MNU. »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik«. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16.3 (Juni 2008), S. 149–159 (*cf. S.* 54, 63, 77, 224, 246).

[DP13] Thorsten Dresing und Thorsten Pehl. *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse: Anleitungen Und Regelsysteme Für Qualitativ Forschende*. 5. Auflage. Marburg: Eigenverlag, 2013. URL: www.audiotranskription.de/praxisbuch (*cf. S.* 243).

[Gol11] Miri Golan. »Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry.« In: *Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*. Hrsg. von Patsy Wang-Iverson. International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (2010, Singapur): CRC, 2011, S. 141–150 (*cf. S.* 65, 81, 228).

[GJ98] Angel Gutiérrez und Adela Jaime. »On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning«. In: *Focus on learning problems in mathematics* 20 (1998), S. 27–46 (*cf. S.* 229–237, 248).

[Hie86] Pierre M. van Hiele. *Structure and Insight*. Developmental Psychology Series. Orlando u.a.: Acad. Pr., 1986 (*cf. S.* 229).

[Hof81] Alan Hoffer. »Geometry Is More than Proof.« In: *Mathematics teacher* 74.1 (1981), S. 11–18 (*cf. S.* 229, 231–232).

[Hof83] Alan Hoffer. »Van Hiele-based Research«. In: *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. 1983, S. 205–227 (*cf. S.* 229).

[JU15] Hans Niels Jahnke und Stefan Ufer. »Argumentieren und Beweisen«. In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Hrsg. von Regina Bruder u. a. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2015, S. 331–355 (*cf. S.* 38, 43, 49, 52, 56, 229).

[Kat+97] Ulrich Kattmann u. a. »Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftliche Forschung und Entwicklung«. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 3.3 (1997), S. 3–18 (*cf. S.* 79, 86, 219–220).

[Kul15] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hrsg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Kultusministerkonferenz. Köln: Link, 2015. 76 S. (*cf. S.* 43, 67, 77, 224).

[May83] Joanne Mayberry. »The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers«. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 14.1 (Jan. 1983), S. 58–69 (*cf. S.* 229, 232, 239).

[MK12] Helfried Moosbrugger und Augustin Kelava, Hrsg. *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion: mit 66 Abbildungen und 41 Tabellen*. 2., aktualisierte und überarbeitete Auflage. Springer-Lehrbuch. Berlin Heidelberg: Springer, 2012 (*cf. S.* 221, 224).

[Pus03] Eleanor Pusey. »The van Hiele Model of Reasoning in Geometry : A Literature Review«. Masterarbeit. Raleigh: North Carolina State University, 2003. URL: http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.16/2275 (*cf. S.* 229–230, 234).

[Usi82] Zalman Usiskin. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. ED220288. Chicago Univ. Ill., 1982 (*cf. S.* 81, 230–235, 266).

[Vin02] Shlomo Vinner. »The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics«. In: *Advanced Mathematical Thinking*. Hrsg. von David Tall. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002, S. 65–81 (*cf. S.* 84, 221, 256).

7. Auswertung der Tests

It is ignorance alone
that could lead anyone
to try to prove the axiom.
Aristoteles

Dieses Kapitel ist der Auswertung der Pre- und Posttests gewidmet. Im einleitenden Abschnitt 7.1 präsentieren wir die grundsätzliche Auswertungsmethodik. Im längeren Abschnitt 7.2 analysieren wir das in den Pretests erhobene Datenmaterial und beantworten die ersten beiden Forschungsfragen. In Abschnitt 7.3 wird anschließend der einzige schriftliche Posttest analysiert und ausgewertet. Dort wird die dritte Forschungsfrage beantwortet.

7.1. Auswertungsmethodik

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, warum wir auf die Analyse der Interviews verzichtet und uns stattdessen auf die Untersuchung der schriftlichen Tests konzentriert haben. Anschließend beschreiben wir die Methodik dieser Untersuchung für schriftliche Pre- und Posttest. Zum Schluss erklären wir unser Vorgehen, um die Ergebnisse aus Pre- und Posttests zu vergleichen.

Auswahl der Daten In Kapitel 2 beschrieben wir bereits die Entwicklung der Forschungsfragen und Tests. Wir haben dort gesehen, dass diese Entwicklung zu einem schriftlichen Pre-Post-Design geführt hat. Alle drei Forschungsfragen allein aus den Daten der [19]Pre- und Posttests zu beantworten, erscheint uns jedoch etwas problematisch und verschwenderisch. Wir haben viel mehr Daten gesammelt und haben eine reichhaltige Grundlage für die Analyse. Die Daten aller Pretests und Interviews auszuwerten, erscheint uns gleichwohl aus zeitlichen und methodischen Gründen nicht möglich. Die vielen Interviews könnten methodisch akzeptabel auf einige ausgewählte reduziert werden, eine zusammenfassende Inhaltsanalyse könnte einer weiteren Reduktion der Datenmenge dienen. Allerdings haben wir im Laufe der vorläufigen Analysen methodische Schwierigkeiten entdeckt, die uns zur Einschätzung führten, dass wir zumindest die Forschungsfrage FFc aus der Analyse der Interviews nicht beantworten können. Unsere Interviews wurden derart geplant und durchgeführt, dass damit FFa-b beantwortet werden sollen. Inzwischen erscheinen uns diese Interviews aber nur teilweise zur Beantwortung der Forschungsfragen geeignet zu sein. Das wollen wir ausführen.

In Kapitel 2 haben wir ferner gesehen, dass die Einsicht, personal concept definitions zu betrachten, in unserem Design erst spät an Bedeutung gewann.

In Abschnitt 6.2 sahen wir bereits die Sichtweise von Shlomo Vinner, wie concept definitions bzw. concept images zu einem Begriff erhoben werden können; nämlich durch direkte bzw. indirekte Fragen.

Unsere Situation unterscheidet sich insofern von der Vinners, als wir Begriffe untersuchen, für die Studierende in der Regel keine Standarddefinition haben. Selbst wenn wir nach einer Definition direkt fragen, können sie in der Regel nur eine Approximation dazu, ihre Vorstellung, ihre personal concept definition und somit Teile des concept image, angeben. Daher sind wir weder in der Situation, formale Definitionen abzufragen, noch wollen wir völlig auf eine irgendwie geartete ausformulierte Antwort verzichten.

Verena Rembowski formuliert personal concept definitions als »ein ausformuliertes Abbild des Concept Image einer Person«, vgl. [Rem15, S. 66]. Gleichzeitig sind personal concept definitions jedoch insbesondere Definitionen. Formale Definitionen sind in der Regel verschriftlicht. Mündlich eine druckreife Definition zu formulieren, ist nicht üblich, und auch nicht besonders einfach. Hier erinnern wir an das Zitat aus [BD06, S. 308]: »Schriftliche Äußerungen sind weniger spontan, besser durchdacht und erschöpfender«. Diese Erfahrungen haben wir bei der Sichtung der Pre- und Postdaten ebenfalls gemacht.

In unserer Situation (und anders als typischerweise in der Literatur) geht es um universitäre Lehre, dort sehen wir den Abstand zwischen personal und formal concept definitions kleiner als es in der Schule eher der Fall wäre. Daher sind wir auch an einem schriftlich »ausformulierten Abbild« interessiert und interpretieren die Definition 2.1 etwas enger als Rembowski.

Prinzipiell spricht jedoch nichts dagegen, aus den Interviews entsprechende Codierschemata zu entwickeln, damit FFa-b beantworten zu wollen und mit diesen Schemata die Pretests zu codieren und damit auf FFc einzugehen.[1] Wir haben uns aus pragmatischen aber auch aus methodischen Gründen dagegen entschieden. So war es beispielsweise nicht immer möglich, beide Interviewten gleich viel zu einer Frage sagen zu lassen. Nicht selten kam »ich sehe das genau so«. Dies schränkte

[1] Allerdings haben wir kein uns befriedigendes Auswertungsdesign gefunden, Pretest- und Interviewdaten zusammenzubringen.

die Möglichkeit und Aussagekraft einer (Qualitäts)Bewertung bedeutend ein.[2] Das haben wir zwar bereits bei der Planung berücksichtigt, aber damals ging es uns noch eher darum, ins Gespräch zu kommen, und kumulativ, nicht notwendig personenbezogen, Vorstellungen und Erkenntnisse zu Axiomen zu sammeln. Ferner waren die Interviews nicht immer so konsistent und leitfadentreu, wie wir es uns vorgestellt haben. Somit haben wir nicht von allen beteiligten Personen Antworten zu allen Fragen sammeln können. Das stellt uns vor eine weitere Schwierigkeit, Pre- und Posttests zu vergleichen.

Die Verlagerung der Auswertung auf schriftliche Tests bleibt nicht ohne Nachteile. Es bedeutet den Verlust der vielschichtigen, teilweise mehrseitigen Antworten auf eine Frage, die im Pretest mit einem Satz beantwortet wird. Angesichts dessen brauchen wir uns keine Hoffnung zu machen, aus den Daten der Pretests reichhaltige, verallgemeinerbare Aussagen zu den Problemen und Vorstellungen der Studierenden zum Thema »Axiom« zu erhalten. Wir können lediglich verschiedene Typen solcher Vorstellungen erarbeiten und daraus ggf. Hypothesen generieren.

In Folge dieser methodischen Entscheidungen analysieren wir im Weiteren nur die schriftlichen Tests. Dabei wollen wir die meisten Erkenntnisse für die Beantwortung der Forschungsfragen FFa-b aus *allen* vier Pretests gewinnen. Die Beantwortung der FFc basieren wir jedoch auf dem Vergleich zwischen [19]Pre- und Posttest. In den nächsten Abschnitten erklären wir genauer, wie wir hier vorgehen.

Bemerkung 7.1. Alle Antworten zu ausgewählten Items aus schriftlichen Pre- und Posttests wurden abgetippt und finden sich im digitalen Zusatzmaterial unter »abgetippteAntworten.txt«. Dort und im Folgenden bedeuten die Kürzel *XpreY.Z* die Antwort der Person mit der Nummer Z zum Item Y aus dem ^{X}Pretest. Analog mit dem Posttest. Für alle Y ist Z dieselbe Person (innerhalb eines Tests). ♯

Methodik für die Pretests Wir haben uns entschieden, alle Items der Pretests auszuwerten. Das liegt darin begründet, dass die zugehörigen Items so designt wurden, dass sie alle zur Beantwortung unserer Forschungsfragen beitragen sollen. Viele dieser Items können ihrem Wesen nach direkt und fachmathematisch ausgewertet werden. Andere sind reichhaltiger und subtiler. Bei solchen Items gehen wir an den Text mit qualitativen Methoden heran.

Dabei orientieren wir uns an der Analyse von Shlomo Vinner aus [Vin83]. Dort geht er unter anderem der Frage »In your opinion what is a function?« nach, die strukturell nahe dem kommt, was wir in den Tests abfragen. Vinner berichtet von

[2] Bereits bei der versuchten Auswertung im Sinne des van-Hiele-Modells, siehe dazu die Abschnitte 6.2.4.1 und 6.2.4.3, haben wir mit diesem Problem kämpfen müssen. Teilweise liegen uns nur partielle Antworten pro Interviewten vor. Eine kumulative Auswertung ist aber dadurch erschwert, dass sich den Antworten je nach Interviewten verschiedene Niveaus zuordnen lassen.

den Ergebnissen der Untersuchung, indem er die »main concept definitions« präsentiert. Allerdings wird nicht klar, wie diese Kategorien genau entstanden sind.

Wie in Kapitel 2 bereits erläutert, ist unsere Studie explorativ, daher erscheint nach vielen Abwägungen offenes Codieren sowie eine induktive Kategorienbildung im Sinne der grounded theory am besten zu passen. Für konkretes methodisches Vorgehen orientieren wir uns an Kuckartz' Darstellung in [Kuc18, Abschnitt 4.2], für eher theoretische Grundlagen konsultieren wir Anne Teppo in [Tep15].

Wir weichen insofern von der üblichen Vorgehensweise ab, vgl. etwa [Kuc18, S. 82], als wir doch sehr eng am Text offen codieren und nahezu jedes Wort umdrehen, um die maximale Bedeutung der Antwort auszuschöpfen. Das ist aus mehreren Gründen sinnvoll. Zunächst haben wir im Gegensatz zu üblichen qualitativen Interviewanalysen vergleichsweise wenig Datenmaterial: Jede Antwort besteht aus ein-zwei Sätzen, daher *können* wir sehr nah am Text bleiben. Ferner ist die inhaltliche Dichte in unseren Daten wegen der mathematischen Sprache sicherlich höher als üblicherweise in solchen Analysen oder in, von Natur aus, etwas weniger kompakt formulierten Interviews: Die ganze Aussage bei uns reduziert sich auf wenige Zeilen. Hier *müssen* wir notgedrungen fast jedes Wort anschauen. Aufgrund dieser Vorgehensweise wird unsere Theorie die Rohdaten vermutlich gut repräsentieren – eine der fundamentalen Forderungen der *grounded* theory, vgl. [Tep15, S. 15].

Die Strategie der Auswertung wird im Abschnitt 7.2 anhand konkreter Items deutlicher werden. Wir analysieren die Tests itemweise.

Für die Beurteilung der Auswertung müssen wir kurz zu Shlomo Vinner zurückkommen. In der späteren Arbeit [Vin02], die als ein Update von [Vin83] gesehen werden kann, erklärt er, wie concept definition und concept image mit »Verstehen« zusammenhängen. Dazu sagt er: »We assume that to acquire a concept means to form a concept image for it. [...] To understand, so we believe, means to have a concept image«, vgl. [Vin02, S. 69]. Diese Definition erscheint uns etwas fragwürdig, vor allem wenn wir auf unser Datenmaterial der Tests schauen. Geben Studierende eine mit eigenen Worten formulierte Definition eines Begriffes an, also ihre personal concept definition, die ja ein Teil des concept images ist, dann ist Vinners »understand« bereits erfüllt. Seine Definition scheint die Situation aufzufangen, wenn mathematisch falsche Erklärungen abgegeben werden. Natürlich sind diese immer noch Teile des concept images, aber fachmathematisch würden wir uns schwer tun, hier von »understand« zu sprechen. Nach unserem Gefühl sollte die Definition zumindest »To understand means to have a *somewhat correct* concept image« lauten. Wir bleiben daher bei unserer Sichtweise auf das »Verstehen« von Seite 86, indem wir die dort definierte mathematische Güte der Antworten (anhand der Darstellungen aus Abschnitten 1.3, 1.3.1, 1.3.2) beurteilen werden.

Methodik für den Posttest Der ^{19}Posttest spaltet sich in zwei Teile. Der eine Teil enthält Items, die bereits in ^{19}Pretest zum Einsatz kamen. Diese Items werden anhand der Methoden der dortigen Items ausgewertet und ein Vergleich zwischen Pre- und Postantworten wird gezogen. Der andere Teil des Posttests besteht aus Items 4 und 8 (zu Axiomen des 1-fach-Origami und zum Axiomatisieren). Diese Items werden mit ähnlichen Methoden wie Items aus den Pretests analysiert. Die entsprechenden Ergebnisse helfen der Beantwortung der Forschungsfragen FFa-b. Das Item 8 (Axiomatisieren) taucht in dieser Form in keinem der Pretests auf, daher ist ein direkter Vergleich nicht möglich. Wir werden in Abschnitt 7.3.7 darauf eingehen, ob wir hier dennoch zu FFc beitragen können.

Methodik des Vergleichs des Pre- und Posttests Wir basieren den Vergleich primär auf der mathematischen Güte wie sie bereits in Kapitel 2 beschrieben und angekündigt wurde. Etwas genauer können wir Antworten zu fünf Items (Fragen 2–6_{19}) mit ihren Pendants aus dem Posttest vergleichen. Dabei lassen sich Pretest-Fragen 2–3_{19} mit ihren Posttest-Entsprechungen direkt vergleichen und eine kumulative sowie eine von-Person-zu-Person-Veränderung vergleichsweise leicht festhalten.

Die Pretest-Fragen 4–6_{19} sowie ihre Pendants, Posttest-Fragen 4–5 und 9 werden mithilfe der herausgearbeiteten Aspekte und Güte-Bewertungen verglichen.

Antworten auf die Items 2, 4, 8 aus ^{19}Posttest können wir nur sehr oberflächlich mit den Ergebnissen von einigen Fragen aus früheren Pretests vergleichen, da die betroffenen Items nur ansatzweise ähnliche Kompetenzen abfragen.

Anhand dieser Einzelvergleiche wollen wir abschließend deduzieren, ob und welche Veränderungen in den Antworten feststellbar sind.

7.2. Auswertung der Pretests

In diesem Abschnitt wollen wir alle Pretests analysieren und auswerten. Auch die Eingangsfragen und solche Fragen, die sich im Nachhinein als nicht gelungen herausgestellt haben, wollen wir anführen, um die Analyse zu vervollständigen.

Einige der gestellten Fragen tauchen in mehreren Pretests auf, oft sind die jeweiligen Formulierung (leicht) unterschiedlich, so dass die Antworten auf die Fragen nicht bedenkenlos als ein einheitlicher Textkorpus betrachtet werden können. Wir sind zur Überzeugung gelangt, dass eine aufmerksame gemeinsame Analyse dieser Antworten aus folgenden Gründen trotzdem möglich und sinnvoll ist:

- Die Auswertung sortiert nach Pretests und Fragen würde ein zu fragmentiertes Material ergeben, in dem nur schwer Zusammenhänge auffindbar wären,

- die Formulierungen sind teilweise nur bedingt unterschiedlich; wir diskutieren die jeweiligen Unterschiede und ihre Auswirkungen in den entsprechenden Abschnitten,
- von diesem Umstand sind nur wenige Kernfragen betroffen: Insbesondere Fragen 4_{19}, 5_{19}. Etwa die Fragen 6_{19} und 9_{17}, die gemeinsam analysiert werden, sind identisch formuliert. Fragen außerhalb von ^{19}Pretest sind als zusätzliches Material anzusehen und nicht primär entscheidend.

Die Tabelle 7.1 expliziert welche Fragen gemeinsam ausgewertet werden. Die ersten drei Abschnitte 7.2.1, 7.2.2 und 7.2.3 gehören den Einstiegsfragen. Die nächsten beiden Abschnitte 7.2.4 und 7.2.5 beschäftigen sich mit Drei- und Vierecken. Der Abschnitt 7.2.6 greift lokales Ordnen auf. Der Abschnitt 7.2.7 ist eine Brücke zwischen globalem Ordnen und euklidischer Geometrie. Der Abschnitt 7.2.8 nimmt sich konkret der euklidischen Ebene an. Der abschließende aber zentrale Abschnitt 7.2.9 beschäftigt sich mit Axiomen und ihrer Abgrenzung von anderen Begriffen.

	^{15}Pretest	^{16}Pretest	^{17}Pretest	^{19}Pretest
Abbildung 4.1		1	1	1
Abschnitt 7.2.1	1	2, 3		
Abschnitt 7.2.2	2	4		
Abschnitt 7.2.3	3	5	7	
Abschnitt 7.2.4			4, 6	2
Abschnitt 7.2.5			2, 3, 5	
Abschnitt 7.2.6	5			3
Abschnitt 7.2.7	4	8		
Abschnitt 7.2.8		7	10	4
Abschnitt 7.2.9		6	8–9	5–6

Tabelle 7.1.: Übersicht über die kombiniert ausgewerteten Fragen der Pretests zusammen mit den Referenzen. Die Zahlen stehen für die entsprechenden Items sortiert nach Pretest und Abschnitt.

7.2.1. Fragen 1_{15}, 2_{16}, 3_{16}: Algebraerfahrungen

Die Antworten auf die Eingangsfragen waren in ^{15}Pretest und ^{16}Pretest ähnlich, mit geringen Unterschieden, die vermutlich durch die unterschiedliche durchschnittliche Semesterzahl der jeweiligen Kursteilnehmenden zu erklären wäre. So hat die überwiegende Mehrheit eine Algebravorlesung besucht, jedoch nur die Hälfte könnte »ungefähr« definieren, was eine Körpererweiterung ist. Rund je ein Drittel gab an zu wissen, was eine Körpererweiterung ist, vgl. Tabelle 7.2. Mit diesen Angaben war also klar, dass eine körpertheoretische Charakterisierung des 1-fach-Origami nur eingeschränkt möglich ist. In der Tat haben Studierende, die keine Algebravorlesung besucht haben, mit hoher Wahrscheinlichkeit keine hochschulmathematischen Kenntnisse über Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen (also etwa über Winkeldreiteilung oder Konstruierbarkeit von Zahlen mit Zirkel und Lineal), das heißt auch hier ist im Kurs nur eine eingeschränkte Behandlung dieser Inhalte zwecks Vergleiche mit 1-fach-Origami-Konstruktionen möglich.[3] !

		ja	nein	ungefähr
Algebravorlesung	^{15}Pretest	9	1	
	^{16}Pretest	9	5	
Körpererweiterung	^{15}Pretest	3	2	5
	^{16}Pretest	5	2	7

Tabelle 7.2.: Auswertung der Eingangsfragen aus ^{15}Pretest und ^{16}Pretest

7.2.2. Fragen 2_{15} und 4_{16}: Falterfahrungen

Acht von zehn Studierenden im ^{15}Pretest gaben an, schon oft Figuren aus Papier gebastelt zu haben. Im ^{16}Pretest waren es acht von vierzehn. Dabei haben nur zwei von insgesamt 24 Studierenden in der genaueren Beschreibung nichts angegeben. Die restlichen 22 Studierende nannten Modelle, die sie schon mal gefaltet haben. Die überwiegende Mehrheit faltete dabei eher klassische Modelle (wie Papierflieger, Frösche und Kraniche), fünf Teilnehmende machten Angaben, die auf etwas fortgeschrittene Modelle schließen lassen (modulare Sterne u. Ä.). Jedenfalls lässt sich aus diesen Daten schließen, dass quasi alle Kursteilnehmende bereits basale Erfahrungen mit Papierfalten hatten. Ob dies ihr Interesse am Kurs teilzunehmen geweckt oder begünstigt habe, wurde nicht untersucht. Ferner lässt sich aus den Angaben der Studierenden schließen, dass sie nahezu keine Vorerfahrungen mit mathematischem Papierfalten haben und insbesondere kein Wissen über die Origami-Inhalte der Kurse besitzen. Dies festzustellen, war einer der Hauptgründe für die Frage. !

7.2.3. Fragen 3_{15} und 5_{16}, 7_{17}: Streckendrittelung

Bereits in der Beschreibung der ^{15,16}Pretests haben wir dargelegt, dass Fragen 5_{16} und 7_{17} recht verschieden von 3_{15} sind, da in Frage 3_{15} keine explizite Forderung

[3]Mit dem Ausrufezeichen am Rand heben wir wichtige Feststellungen hervor.

nach der Gleichheit der drei Teile auftaucht.[4] Ungeachtet dessen ergibt sich ein unerwartetes Bild der Antworten, vgl. Tabelle 7.3.

	^{15}Pretest $n = 10$	^{16}Pretest $n = 14$	^{17}Pretest $n = 8$
falsch / $\neq \frac{1}{3}$	(3)	2	1
nicht interpretierbar	1	1	
Abmessen/3	1	6	5
Falten / Brieffaltung	4	7	3
sonderbar	1	4	1
Strahlensatz bzw. zentrische Streckung	4	2	2
math. Konstruktion	4	2	2

Tabelle 7.3.: Zusammenfassung der Angaben zur Drittelung einer Strecke mit Mehrfachnennung. Mit n ist die Anzahl der Testpersonen bezeichnet.

Studierende wählten recht verschiedene Methoden zum Dritteln: Von Abmessen[5] über Falten[6] bis zu zentrischer Streckung[7] und Strahlensatz. Zwei Antworten blieben nicht interpretierbar: In einer Antwort war eine nicht konklusive Zeichnung angegeben, die andere lautete »Mithilfe einer Zirkel-und-Lineal-Konstruktion«.

Bemerkenswerterweise gaben vier von zehn Studierenden aus dem ^{15}Pretest eine mathematische Konstruktion als Lösung an, obwohl dort die Gleichheit der ermittelten drei Teile nicht explizit gefordert war. Im Gegensatz dazu haben dies lediglich zwei von vierzehn bzw. von acht Personen im ^{16}Pretest bzw. ^{17}Pretest getan, *obwohl* diesmal die Gleichheit gefordert war.[8] Auch aus diesem Grund scheint uns die gemeinsame Auswertung der Antworten gerechtfertigt.

Von den vielen Antworten der Studierenden in allen drei Pretests waren lediglich drei schlicht falsch. So hat eine Testperson die Haga-Faltung, vgl. Abbildung 5.9, per Text und Zeichnung angedeutet und fälschlicherweise behauptet, dass dadurch die *rechte* Kante gedrittelt ist. Insgesamt in zwei Antworten wurden Faltschritte angegeben, die nicht zu einem Drittel, sondern im Wesentlichen zu $\frac{3}{8} \neq \frac{3}{9}$ führen.

[4] In der Tat gaben drei Studierende in ^{15}Pretest explizit an, dass die Frage nicht präzise ist, etwa »falls die 3 Teile gleich lang sein sollen, dann mittels zentrische Streckung [mit Zeichnung]«.

[5] Der Kern dieser Antwort war: Die Strecke abmessen, diese Zahl durch drei teilen, ggf. das Ergebnis einzeichnen/abtragen. Aus ^{17}Pretest: »Die einfachste, aber etwas unmathematische Methode wäre Messen und dann durch 3 teilen«. Hier wurde also eher die Drittelung der *Länge* der Strecke und nicht der Strecke selber angestrebt.

[6] Meistens die Brieffaltung, vgl. Abb. 5.4.

[7] Die Kernidee, die zusätzlich zum Text meist per Zeichnung verdeutlicht wurde: Eine Strecke dreimal abtragen und sie von einem Punkt aus auf die gegebene Strecke projizieren.

[8] Diese Aufforderung steckt unmissverständlich in der Formulierung »in drei gleiche Teile«; insbesondere müsste diese Lösung die Gleichheit nachweisen oder zumindest suggerieren.

Studierende haben sich vermutlich von der anschaulichen Nähe von $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{3}$ sowie relativ leichten Faltbarkeit von $\frac{3}{8}$ irritieren lassen.

Es gab noch drei weitere Antworten in ^{15}Pretest, die die Strecke mit Ansage nicht in *gleiche* Teile gedrittelt haben (in Tabelle 7.3 durch Klammerung hervorgehoben). Wir haben sie nicht als falsch gewertet, da in der Aufgabe die Gleichheit nicht verlangt wurde. Sechs weitere waren, wenn nicht immer falsch, dann zumindest eher sonderbar, weil die Lösungen unnötig kompliziert waren oder weitere Schritte implizit verwendet haben, welche zur Lösung noch ergänzt werden müssten.

Beispiel 7.2. So wurde etwa vorgeschlagen, die vorliegende Strecke als eine Winkelhalbierende eines Dreiecks anzusehen, dann eine weitere Winkelhalbierende in diesem Dreieck zu konstruieren und den Schnittpunkt als Referenzpunkt der Drittelung zu nehmen. In der Tat liefert dieses Vorgehen zwar eine mathematische Dreiteilung der gegebenen Strecke, jedoch ist diese Lösung insofern sonderbar, als sie nicht erklärt, welches Dreieck zu konstruieren und wie dies zu bewerkstelligen ist.

Ein weiteres sonderbares Beispiel aus ^{17}Pretest, paraphrasiert: Die Strecke ist als eine Schnur gegeben. Sie wird um ein nicht näher spezifiziertes gleichseitiges Dreieck (dessen Ecken Pflöcke sind) gewickelt und die Pflöcke so lange verschoben, also das Dreieck skaliert, bis die Schnur exakt der Umfang des Dreiecks ist.

Oder: Ein gleichseitiges Dreieck [ohne Erklärung] wird in einer Ecke aufgeschnitten und der Umfang (als wäre das Dreieck aus Draht o. Ä.) flachgebogen. $\sharp$

Auffallend oft sind Faltlösungen genannt worden, vierzehn Mal. Wir vermuten, dass dies schlicht durch die Thematik der Kurse geprimet ist.

Eine weitere deutliche Tendenz mit zwölf Nennungen stellt die »Abmessmethode« dar: Die gegebene Strecke wird gemessen, die Zahl dann gedrittelt und das Ergebnis ggf. abgetragen. Die Häufigkeit der Nennung bestärkt die Vermutung, dass die Testpersonen die Aufgabe nicht aus mathematisch-konstruktivistischer, sondern vielmehr aus alltäglich-praktischer Perspektive betrachtet und beantwortet haben. Denn die Brieffaltung liefert keine exakte Drittelung und ist keine Konstruktion. Abmessen liefert ebenfalls keine Konstruktion. Die am häufigsten angegebenen Lösungen sind also eher im alltäglichen aber nicht im mathematischen Sinne korrekt.

Die einzigen genannten und mathematisch korrekt ausgeführten Lösungen der Drittelungen sind solche, die mittels Zirkel und Lineal explizit oder implizit mit einer zentrischen Streckung vorgehen.[9] Diese wurden insgesamt acht Mal genannt. Die restlichen Angaben sind keine Konstruktionen sondern Näherungen oder beinhalten nicht als Konstruktion zu bezeichnenden Schritte: Etwa einen Halbkreisbogen der Länge nach dritteln und dann »flach machen«.

Etwas überraschend antworteten die externen Personen in ^{17}Pretest: Eine Person

[9] Jedoch gaben zwei von vier Personen aus ^{16,17}Pretest, die eine Konstruktion angegeben haben, auch weitere Möglichkeiten an, die keine Konstruktionen waren, etwa Abmessen oder die Brieffaltung.

gab an, keine Antwort zu kennen. Eine andere verwechselte das Problem mit der Winkeldrittelung und gab an, dass dieses Problem unlösbar sei. Die dritte Person löste die Aufgabe mathematisch korrekt mittels einer Strahlensatz-Konstruktion.

Vermutlich ist es nicht überraschend, dass Studierende oft keine Konstruktion zur Streckendrittelung kennen. Daher wollen wir nicht schlussfolgern, dass Studierende (vor allem bezogen auf ^{16,17}Pretest) keine Konstruktion angeben. Wir halten aber fest, dass Studierende aus ^{16,17}Pretest hauptsächlich Lösungen abgeben, die die Aufgabe nicht vollständig lösen. Dagegen geben 40 % der Studierenden aus ^{15}Pretest eine Konstruktion als Lösung an, selbst als das nicht gefordert wurde. Eine mögliche Erklärung könnte mit der Semesterzahl zusammenhängen: *Lehramts*studierende höherer Semester haben mit größerer Wahrscheinlichkeit eine Veranstaltung zur Didaktik der Geometrie bereits besucht, wo sie ggf. eine solche Konstruktion gesehen haben. Die Mediane der Semesterzahlen aus ^{15,16,17}Pretest waren entsprechend 8,5, 6 und 3. Es ist aber nicht der Fall, dass Studierende höherer Semester nur »gute« Lösungen abgegeben oder die der niedrigeren Semester nur weniger gute.[10]

7.2.4. Fragen 4_{17} und 2_{19}: Dreieck zeichnen sowie Frage 6_{17}

In [Car98, S. 400] werden fünf verschiedene Stufen der Antworten exemplarisch angegeben – von einer inhaltsleeren Antwort bis zur vollständigen Begründung, vgl. Tabelle 7.4.

Es kann darüber diskutiert werden, ob die Musterantworten tatsächlich als solche gelten sollen, denn dort werden die nötigen Sätze oder Axiome (Innenwinkelsumme im Dreieck, das Parallelenpostulat o.Ä.) eher angedeutet als explizit benannt und die euklidische Ebene wird in keiner Form erwähnt. Antworten der Form »das Dreieck hätte zwei parallele Seiten« können wir nicht als mustergültig ansehen. Ferner enthält die Tabelle keine Hinweise darauf, dass die genannte Zeichnung in anderen Geometrien durchaus möglich ist.[11] Allerdings schreibt der Autor, dass die Antwort »Perhaps this would be possible on another type of surface that isn't flat« als eine höherwertige akzeptiert werden würde; sie wurde in der dortigen Untersuchung aber von keiner Testperson gegeben, [Car98, S. 399].

Unsere Auswertung orientiert sich an den Kategorien aus Tabelle 7.4, wir sind aber der Meinung, wie gerade dargestellt, dass diese Tabelle weder erschöpfend noch sachlich korrekt erscheint.

[10] Die externen Personen bilden kein Gegenbeispiel zur Vermutung: Die eine externe Person mit der richtigen Lösung war in die Veranstaltung zur Didaktik der Geometrie involviert, die anderen beiden externen Personen nicht.

[11] Wir können viele solche Dreiecke auf einer Kugel zeichnen. Mehr noch, wir können diese Zeichnung auf einem Blatt Papier andeuten. Insofern ist ein solches *Zeichnen* auch auf Papier möglich.

Niveau	Beschreibung und Beispielantworten der SuS
0	Keine Antwort oder Themaverfehlung; geometrische Sprache nicht verwendet: »Ich stimme Sheila nicht zu, da man's nicht machen kann.«
1	Inkorrekte Antwort, aber Begründung teilweise versucht: »Ja, weil alle Dreiecke einen rechten und einen linken Winkel haben.« »Ja, man kann einen oben und einen unten machen.« Teilweise korrekte Antwort mit schwacher Begründung: »Nein, weil alle Dreiecke rechte Winkel besitzen.«
2	Korrekte Antwort mit unvollständiger Begründung: »Nein, weil man nur einen rechten Winkel in ein Dreieck packen kann.«
3	Korrekte Antwort mit guter Argumentation. Erklärung übersteigt Niveau 2, basiert aber eher auf konkretem und visuellem Verständnis als auf abstraktem Wissen: »Weil wenn man zwei rechte Winkel zusammentut, hat man bereits drei Seiten, die nicht geschlossen sind.« »Nein, weil wenn man zwei rechte Winkel zeichnete und versuchte sie zu verbinden, bekäme man ein Quadrat oder ein Rechteck. Zwei rechte Winkel sind bereits drei Seiten.«
4	Musterantwort. SuS verwenden Wissen über Dreiecke und Winkel: »Dreiecke haben drei Seiten und 180°. Wenn es zwei rechte Winkel sind, dann gleichen sie 180°. Aber das sind nur zwei Winkel.« »Wie sollte man denn zwei rechte Winkel, die 180° ergeben, haben, wenn man nur Zwei Drittel des Dreiecks erledigt hat?« »Man hätte zwei parallele Seiten«

Tabelle 7.4.: Einteilung der Beispielantworten zu Frage 4_{17} im Sinne von [Car98] auf die Frage »[...] whether [students] agree with another student, 'Sheila', who says she can draw a triangle with two right angles«. Übersetzt aus dem Englischen.

Unser Ziel ist herauszufinden, ob Studierende in dieser Frage erkennen, dass eine nichteuklidische Lösung möglich ist oder ob sie implizit oder explizit die euklidische Ebene voraussetzen. Außerdem ist wichtig, im Falle der Annahme der euklidischen Ebene, ob Studierende die Unmöglichkeit eines solchen Dreiecks begründen oder dies als selbstverständlich ansehen. Diese Aufgabe regt eine interessante Beobachtung an: Obwohl Studierende die Unmöglichkeit der Zeichnung in der euklidischen Ebene erkennen und entsprechend antworten, kann es durchaus sein, dass sie die Unmöglichkeit nicht begründen, weil es ihnen als trivial erscheint und sie die Aufgabe etwa mit nur »ich würde ihr erklären, dass es nicht geht« kommentieren. Aufgrund dessen müsste dieser Antwort laut Tabelle 7.4 das niedrigste Niveau zugeordnet werden, da hier keine »geometrische Sprache« verwendet wird. Auch aus diesem Grund erscheint die Tabelle 7.4 nicht gut differenzierend zu sein.

In der Tat gab es keine einzige Antwort, die auf die ersten drei Stufen aus Tabelle 7.4 direkt passte: Die Antworten der Studierenden waren allesamt höherwertig in Sinne der Tabelle, also dort auf dem 3. oder 4. Niveau, oder sie gaben so wenig an, dass keine konklusive Aussage gemacht werden konnte. Das überrascht nicht, denn es konnte nicht erwartet werden, dass Studierende Fehler wie »linke Winkel« oder »alle Dreiecke sind rechtwinklig« machen würden. Unterschiede in den Antworten waren also vorwiegend in der mehr oder minder vollständigen Argumentation zu erwarten, mehr oder minder expliziten Verwendung und Erwähnung der euklidischen Ebene oder gar in der Erwähnung nichteuklidischer Möglichkeiten.

Die eigentliche Auswertung dieser Frage soll zwischen ^{17}Pretest und ^{19}Pretest unterscheiden, da in beiden Pretests interessante einzelne Tendenzen erkennbar sind, die durch kumulatives Auswerten nicht auffallen würden. Das liegt auch daran, dass in ^{17}Pretest externe Personen mit ausgewertet werden, die in ^{19}Pretest keine Rolle spielen.

7.2.4.1. Frage 4_{17}

Nur eine von acht Personen gab nicht an, dass die Zeichnung nicht möglich ist: »Zeige es mir. Es scheint mir als besser erst die Durchführung ihres Planes zu sehen«, vgl. *17pre4.3*. Insgesamt fünf Personen haben die Frage etwas pädagogisch ausgelegt und beschrieben aus dieser Perspektive, was sie der Schülerin sagen würden von der Form: »Sie soll es mir zeigen« (drei Nennungen), etwa »Ich würde sagen, dass er es mir vormachen soll«. Eine Person vermutete, dass die Schülerin nicht verstanden habe, was rechte Winkel sind, vgl. *17pre4.8*.

Fünf von acht Personen gaben eine Begründung dafür an, warum die Zeichnung nicht möglich ist, indem sie wahlweise teils mit Mehrfachnennung Argumente wie Innenwinkelsumme im Dreieck (vier Nennungen), Parallelität der Seiten (zwei Nennungen) oder Nichtexistenz von 0°–Winkel bzw. ausgearteter Dreiecke (drei Nennungen) verwanden.

Nur ein Mal wurde explizit auf »die Ebene« verwiesen, aber ohne weitere Ausführungen, vgl. *17pre4.6*. Dort heißt es lediglich: »[...] dass dies nicht der Fall ist (in der Ebene)[...]«.

Die restlichen drei Antworten waren insofern nicht explizit als sie lediglich die (für sie wohl offensichtliche) Unmöglichkeit der Zeichnung erwähnt haben, aber nichts weiter ausgeführt haben: »aufzeigen, dass dies nicht möglich ist. Ihr Beispiel anhören und sie ihren Fehler suchen lassen«, vgl. *17pre4.5*.

Im Sinne von Tabelle 7.4 können daher fünf von acht Personen bereits mit dem höchsten Niveau assoziiert werden, die anderen drei Antworten erlauben keine passende Einteilung. Streng genommen, müssten wir ihnen das 0. Niveau zuordnen, was die Eignung der Tabelle für Studierende in Frage stellt.

Wir sehen folglich, dass die Mehrheit der Studierenden ihre Wahl begründet und einschlägige Argumente verwendet. Allerdings erkennen die Studierenden mit einer Ausnahme nicht, dass ihre Argumentation die euklidische Ebene impliziert. Im Sinne der Tabelle 6.2 würden wir schließen, dass basierend auf dieser Frage Studierende nicht das höchste Argumentationsniveau erreichen und zumindest nicht explizit zwischen verschiedenen Geometrien unterscheiden. Das ist umso bemerkenswerter, wenn wir auf die Antworten der externen Personen blicken.

Die drei externen Testpersonen antworteten objektiv besser: Zwei von ihnen gaben an, dass die Zeichnung »in der euklidischen Ebene« nicht funktioniere (einmal mit Begründung, einmal ohne), aber in anderen Geometrien: »etwa sphärische«, »auf einem Globus« klappe, vgl. *17pre4.ext1,3*. Die dritte Person begründete mit der Innenwinkelsumme im Dreieck die Unmöglichkeit der Zeichnung, ohne die zugehörige Geometrie zu benennen. In dieser Frage ist ein ungewöhnlich deutlicher qualitativer Unterschied in den Antworten zwischen Hochschulpersonal und Studierenden feststellbar. Zwei von drei der externen Personen machen ihre Antwort auf diese Frage von der verwendeter Geometrie abhängig. !

Frage 6_{17}

Es ist besonders interessant nach der Frage 4_{17} die Antworten auf die Frage 6_{17} anzusehen. Die dortige Formulierung könnte ein Hinweis für Studierende sein, 4_{17} zu überdenken, zumal die richtige Antwort auf 6_{17} den meisten gelang.

Hier sollen Studierende über eine Theorie nachdenken, in der ein Dreieck eine kleinere Innenwinkelsumme als 180° hat. Sechs von acht Studierenden (und alle drei externen Personen) wählten die Antwort »D«, dass in dieser Theorie andere Annahmen als in der üblichen Geometrie verwendet wurden. Eine Testperson wählte die Antwort »B« (Mr. Playfair hat einen logischen Fehler gemacht) und korrigierte auf der Angabe die Formulierung »kleiner als 180°« zu »gleich 180°«. Eine weitere Testperson wählte die Antwort »E« (nichts vom Obigen ist richtig) ohne Begründung. Niemand von den Studierenden begründete die Antwort. Eine externe Person erklärte, dass es eben nicht der Fall ist, dass in allen Geometrien die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° betrage; eine andere externe Person bemerkte fälschlicherweise, dass dies auf der Kugel stimmen würde.

Insgesamt ist also leicht zu erkennen, dass die Allermeisten den richtigen Zugang zu dieser Frage gefunden haben, aber nahezu niemand hatte die Wahl erklären können oder wollen, warum die ausgewählte Antwort stimmt. Diese Frage scheint das Antwortverhalten in der Frage 4_{17} nicht beeinflusst zu haben, wenn wir die Antworten von Person zu Person ansehen. Auch kumulativ ist erkennbar, dass dort die meisten davon ausgehen, die Zeichnung ist nicht möglich; hier aber die Möglichkeit zulassen, dass andersartige Dreiecke denkbar sind. Die Auswertung dieser Frage könnte darauf hindeuten, dass die Formulierung von 4_{17} doch suggestiv ist.

Wir können aber unsere Beobachtung weiter festigen, dass Studierende Innenwinkelsummensätze in anderen Geometrien nicht kennen oder zumindest ihre Kenntnis aus irgendwelchen Gründen in diesen Fragen nicht andeuten.[12]

7.2.4.2. Frage 2_{19}

Eine Person erwähnte die euklidische Geometrie explizit; »Insb. würde ich verdeutlichen, dass ein Dreieck (in der eukl. Geometrie) immer 180° als Winkelsumme hat«, vgl. *19pre2.9*. Eine weitere Person machte Andeutungen darüber, dass »außerhalb der geraden Fläche«, also abhängig vom »Untergrund (Fläche, Kugel,...)« sie sich vorstellen könne, »dass das [...] klappen kann«, vgl. *19pre2.10*. Nahezu alle (acht von zehn) Testpersonen gaben pädagogische Anmerkungen an: »Ich würde sie auffordern, mit ihre Idee zu zeigen«, »ich würde sie fragen, ob sie mir das zeigen kann«, »Überlege nochmal, ob das überhaupt möglich ist?«, vgl. *19pre2.4,8,1*. Einige stellten sogar weiterführende pädagogische Überlegungen an: »Ich würde es vormachen lassen, nicht vor der gesamten Klasse, aber nach der Stunde. [...] an ihrer Def. des Dreiecks bzw. rechter Winkel [muss] gearbeitet werden«, vgl. *19pre2.7*

Wenn die Unmöglichkeit der Zeichnung (in der vermutlich implizit angenommen euklidischen Ebene) begründet wurde (fünf von zehn Testpersonen), dann wurden in der Tat einschlägige Argumente herangezogen: Innenwinkelsumme, Parallelität zweier Geraden, Unmöglichkeit eines Winkels mit 0°. Auch hier würden fünf von zehn Personen mit dem 4. Niveau aus der Tabelle 7.4 bewertet werden. Eine weitere Person, die auch nichteuklidische Möglichkeiten erkennt, aber die Unmöglichkeit der Zeichnung in der Ebene weder expliziert noch begründet, sondern lediglich andeutet: »Ich kann mir vorstellen, dass das außerhalb der geraden Fläche, die wir gewohnt sind, irgendwo klappen kann«, vgl. *19pre2.10*, müsste aus unserer Sicht ebenfalls auf dem 4. Niveau angesehen werden. Die vier Antworten, aus denen lediglich hervorgeht, dass die Zeichnung nicht klappe, könnten wie im vorigen Abschnitt mit dem 0. Niveau versehen werden, aber letztlich fehlt hier eine Konfron-

[12]Genau genommen haben neun von elf Testpersonen diese Aufgabe korrekt beantwortet und laut dem Test von Usiskin für diese Antwort Punkte auf dem höchsten van-Hiele-Niveau gesammelt. Dort hat ein wesentlich geringerer Anteil an college-Testpersonen diese richtige Antwort ausgewählt, vgl. [Usi82, S. 170/181].

tation, eine Nachfrage, ob sie es auch begründen können. Wir notieren hier lediglich, dass die vier Personen jedenfalls nicht von sich aus eine Begründung angeben.

Insgesamt lassen sich die Antworten aus beiden Pretests auf diese Frage so analysieren und zusammenfassen: Eine knappe Mehrheit der Studierenden begründet die Unmöglichkeit der Zeichnung, ohne jedoch zu explizieren, dass dabei an (euklidische) Ebene gedacht wird. Die Begründungen sind, falls angegeben, richtig bzw. lassen sich problemlos zu ausführlichen Begründungen ergänzen: »Anschließend mit dem Satz über Innenwinkel von Dreiecken argumentieren (180° im Dreieck) also eine Ecke den Winkel 0° haben müsste«, vgl. *19pre2.3*. Testpersonen, die mit der Nichtexistenz von 0°-Winkeln argumentieren, scheinen die Voraussetzung an die ein Dreieck definierenden drei Punkte, nicht kollinear zu sein, ohne Zweifel zu akzeptieren. Niemand von den Studierenden hat eine Möglichkeit für eine solche Zeichnung in anderen Geometrien angegeben (mit der Ausnahme einer Vermutung, dass es auf der Kugel ginge).[13] Das kann zweierlei interpretiert werden: Einerseits könnte die Fragestellung den Fokus zu sehr auf eine Ebene(nzeichnung) lenken und die Testpersonen so daran hindern, ihr vorhandenes Wissen von nichteuklidischen Geometrien zu präsentieren. Andererseits könnte das Ergebnis darauf deuten, dass Testpersonen in ihren geometrischen Vorstellungen in der euklidischen Geometrie bleiben oder, falls vorhanden, ihr Wissen über andere Geometrien nicht ausgeprägt oder zumindest bei dieser Frage nicht aktiviert wird. Die (in keinster Weise repräsentative) Gegenüberstellung der Antworten der externen Personen deutet an, dass Ersteres notwendigerweise nicht der einzige Grund ist. !

Bemerkung 7.3. Steigende Semesterzahl der Studierenden garantiert jedenfalls keine bessere Antwort auf diese Frage: Am ^{19}Pretest waren hauptsächlich 7. und 9. Semester beteiligt; am ^{17}Pretest hauptsächlich das 3. Semester, vgl. Abbildung 4.1. Die beiden Studierenden aus dem 11. bzw. 13. Semester aus ^{17}Pretest gaben keine Begründungen an, vgl. *17pre4.3,7*. Die beiden Studierenden vom Anfang des Abschnitts, vgl. *19pre2.9,10*, waren im 7. Semester. Die Bewertung (über die Niveaus oder über die Anzahl der Begründungen) beider Pretests in dieser Fragen ist aber sehr ähnlich. ♯

7.2.5. van-Hiele-Fragen 2_{17}, 3_{17} und 5_{17}

Diese drei Fragen konzentrieren sich auf gewisse Eigenschaften von Vierecken. Dabei soll in Frage 2_{17} per Augenmaß erkannt werden, dass drei Figuren Parallelogramme sind. In Frage 3_{17} sollen Inklusionsbeziehungen zwischen Rauten und Quadraten expliziert werden. In der Frage 5_{17} geht es um Erkennen von Beziehungen

[13] Ein Student im 13. Fachsemester aus dem ^{17}Kurs, der am Posttest nicht teilnahm und daher nicht in die Gesamtauswertung einbezogen wurde, schrieb: »[...] Auf einer Ebene würde sie scheitern, aber auf einer Kugel [b]eispielsweise ist es möglich. [...]«.

zwischen Quadraten, Rechtecken und speziellen Vierecken.

In jeder der Aufgabe müssen Studierende Definitionen von entsprechenden Vierecken kennen, um die Aufgabe zu lösen. Zum Einen fragen diese Aufgaben ab, ob Studierende diese vier (Parallelogramm, Raute, Rechteck, Quadrat) Definitionen kennen. Die Definition eines Parallelogramms genügt dabei, um die erste Aufgabe zu lösen. In den anderen beiden Aufgaben müssen Definitionen zweier bzw. dreier Figuren gegenübergestellt werden. Zum Anderen soll untersucht werden, nicht nur ob Studierende hier die richtigen Beziehungen erkennen, sondern auch ob und wie sie diese begründen.

Frage 2 Die Frage 2_{17} hatte den Meisten keine Probleme bereitet. Nur eine Person wählte die falsche Antwort »A«, nur das Viereck X sei ein Parallelogramm. Dabei schrieb sie zur Begründung: »Rechteck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind«. Alle anderen Personen wählten richtigerweise »E« aus und die Begründungen waren fast identisch: »die jeweils gegenüberliegenden Seiten sind parallel«. Zwei Personen ergänzten, dass es sich hier um Vierecke handelt. Ein Student und zwei externe Personen schrieben, dass es »so scheine«, als wären hier die jeweils gegenüber liegenden Seiten parallel – eine bemerkenswert zurückhaltende Antwort. Die ausführlichste Antwort kam von einer externen Person: »Definiert sind Parallelogramme als Vierecke mit 2 Paaren paralleler Seiten. Rein optisch scheinen alle drei Figuren Parallelogramme zu sein«.

! In die kleine Falle der Figur Z, die wie eine Raute aussieht, ist niemand getappt.[14]

Diese Auswertung zeigt, dass Studierende bis auf eine Ausnahme die Definition eines Parallelogramms beherrschen und auf konkrete Figuren anwenden können.

Frage 3 Die Frage 3_{17} fiel viel weniger eindeutig aus. Zwar gaben alle acht Studierenden die Eigenschaft »Alle Innenwinkel sind 90°«.[15] Seltener waren die charakterisierenden Eigenschaften »Diagonalen sind gleich lang« (drei Nennungen) und »besitzt einen Umkreis« (eine Nennung). Doch es wurden auch mehrere falsche Zusatzantworten gegeben: »Alle Seiten sind gleich lang« (vier Nennungen). Eine Person schrieb »4 Seiten sind gleich, 4 Ecken, 4 rechte Winkel, die Summe der Innenwinkel 360°, 1 Fläche«, hier wurde wohl die Frage nicht richtig interpretiert. Bei dieser Teilfrage entsteht der Eindruck, Studierende wussten nicht genau, was Rauten sind.

[14] Hier könnte die Antwort kommen, dass die Figur eine Raute und daher kein Parallelogramm ist. Wir werden Ähnliches in der nächsten Aufgabe sehen.

[15] Eine Person schrieb »Es gibt einen 90° Winkel«, was wohl so zu interpretieren ist: Rauten mit einem rechten Winkel sind Quadrate.

Die zweite Teilfrage sollte diese Vermutung weiter testen. Hier wäre die Antwort »Es gibt keine, denn alle Quadrate sind auch Rauten« zu erwarten. Eine solche Antwort gab nur eine von acht Personen an. Zwei weitere schrieben »keine«. Die anderen fünf Personen offenbarten eine gewisse Fehlvorstellung von Rauten. Zwei Personen gaben hier an, die Winkel können, müssen aber nicht alle gleich groß sein bzw. gegenüberliegende Winkel können, müssen aber nicht 90° sein. Drei weitere Personen beschrieben Eigenschaften, die nicht mal Rauten charakterisieren, etwa »Rauten können gestreckt oder gestaucht sein, bleiben aber Rauten«, »Diagonalen stehen senkrecht aufeinander«.

Insgesamt gaben drei Personen vollständig richtige Antworten an, wesentlich weniger als bei der vorigen Frage. Einerseits zeigt das, dass das Wissen über Rauten nicht vollständig abrufbar ist – das ist für unsere Zwecke primär nicht von großer Bedeutung. Andererseits bräuchten Studierende natürlich schon solides Wissen über »Schulgeometrie«, um darin fortgeschrittene (Ordnungs)fragen zu traktieren. !

Bemerkung 7.4. Die externen Personen schnitten bei dieser Frage kaum besser ab. Zwei Testpersonen konnten nicht überzeugend zwischen Rauten und Quadraten unterscheiden. Die dritte Person gab drei charakterisierende Eigenschaften von Quadraten an, die nicht alle Rauten haben und schrieb zur zweiten Teilfrage fast vorbildlich »Jedes Quadrat ist per Definition auch eine Raute, daher kann es keine wesentlichen Eigenschaften dieser Art geben«. Noch besser wäre es, auf »wesentlichen« zu verzichten. $\sharp$

Frage 5 Die Frage 5_{17} fiel gemischt aus. Fünf von acht Studierenden kreuzten nur »C« an. Zwei Weitere kreuzten auch »C« an: Ein Mal »B, C«[16] und ein Mal »A, C, D«.[17] Eine weitere Person kreuzte etwas undeutlich an, wohl aber »C«. Alle Studierenden haben also erkannt, dass »C« zur Lösung gehört. Dabei wurde »C« nahezu nicht begründet, wenn eine Begründung vorlag, dann hauptsächlich um andere Optionen auszuschließen. Seltene Begründungen waren eher Paraphasierungen der Aussage, etwa: »C, da jedes Rechteck hat gleichlange Diagonalen, jedes Quadrat ist ein Rechteck« oder deuteten die Begründung an: »Jedes Quadrat ist immer auch ein Rechteck, und ein Rechteck besitzt aufgrund seiner Symmetrie gleichlange Diagonalen«. Insgesamt vier Personen haben eine Begründung für »C« gegeben oder zumindest versucht. Interessanterweise drei *andere* Personen haben versucht, die falschen Antworten auszuschließen. Dabei hat nur eine Person die falschen Optionen durch Skizzieren von Gegenbeispielen ausgeschlossen.

Insgesamt haben Studierende die richtige Aussage gefunden, wussten aber größtenteils nicht, wie sie diese gut begründen *und* die anderen Optionen ausschließen. !

[16] Mit fehlerhafter Argumentation, u.a.: »Bei gleichlangen Diagonalen kann es sich auch um ein Quadrat handeln. Also ist diag ⇒ quad falsch«.

[17] Ohne jegliche Argumentation.

Überraschend waren die Antworten der externen Personen zu dieser Frage: Eine Person behauptete, alle fünf Aussagen seien falsch, die andere »widerlegte« alle Optionen; zu »C« schrieb sie: »Bei C stimmt recht ⇒ diag nicht, Bsp. [gezeichnetes langgezogenes Rechteck«. Die dritte externe Person kreuzte »C« und begründete die Falschheit der anderen Optionen wie folgt »Das Beispiel [ein kleines gezeichnetes Drachenviereck] eines Drachenvierecks mit gleich langen Diagonalen, die sich nicht gegenseitig halbieren, zeigt, dass weder ›diag ⇒ recht‹ noch ›diag ⇒ quad‹ wahr ist«. Die richtige Antwort hat diese Person nicht begründet.

Bemerkung 7.5. Diese Fragen offenbaren nicht nur gewisse Wissenslücken und Fehlvorstellungen über Vierecke – bei Studierenden wie bei externen Personen –, sondern zeigen auch eine gewisse Trägheit, gemachte Aussagen zu begründen, selbst wenn dies gefordert wird. In Abschnitt 6.2.4.3 sahen wir diese Fragen aus dem van Hiele Blickwinkel und sahen auch, dass es nicht ganz leicht ist, diese Antwortverhalten nach gewissen, für Schülerinnen und Schüler entwickelten Auswertungsstrategien, in wenige Zahlen zu fassen. ♯

7.2.6. Fragen 5_{15} und 3_{19}: Lokales Ordnen

Wir bündeln die Auswertungen der beiden Fragen 5_{15} und 3_{19} in diesem Abschnitt, weil sie derselben Fragestellung nachgehen. Allerdings sind die konkreten Aufgaben recht unterschiedlich, so dass wir die jeweiligen Ergebnisse nicht vergleichen werden und nur situativ die Auswertung angeben.

7.2.6.1. Frage 5_{15}

Die Formulierung der Frage war unglücklich und ambivalent, vgl. Seite 225. Den Antworten ist nicht anzusehen, dass Studierende die Frage nicht verstanden hätten, jedoch ist eine seriöse Auswertung wegen der Ambivalenz erschwert. Hier sind insbesondere zwei Punkte zu nennen: Antworten der Form »es besteht keine Beziehung zwischen A und E« kann als wahr aber auch als falsch interpretiert werden. Es scheint, Studierende wollten sagen: Beide Aussagen haben miteinander nichts zu tun, es gibt keinen kausalen Zusammenhang; das ist korrekt. Andererseits ist A eine wahre und E eine falsche Aussage. Somit sind die Aussagen $A \Rightarrow E$ bzw. $E \Rightarrow A$ aussagenlogisch falsch bzw. wahr. Wir wollen hier nicht diskutieren, ob Studierende »⇒« als einen Zusammenhang sehen oder nicht, vermutlich dachten sie tatsächlich nur an kausale Zusammenhänge. Es ist etwas überraschend, dass keine Testperson den Wahrheitsgehalt der Aussagen explizit beurteilte, etwa »A ist wahr, aber E ist nicht wahr«. Wir haben (seltene) Aussagen »es besteht keine logische Beziehung zwischen A und E« nicht bewertet.

Ein weiterer Problempunkt war die Antwort »$A \Rightarrow B$« (zwei Nennungen) ohne weitere Erklärungen. Wir haben sie als falsch bewertet, entsprechend der obigen Ausführung, dass Studierenden auf die Wahrheitsgehalte der Aussagen nicht eingingen und weil wir sicherlich nicht sagen würden, die Unendlichkeit folgt, *weil* Primzahlen natürliche Zahlen sind. Aus der logischen Perspektive ist »$A \Rightarrow B$« eine wahre Aussage, weil beide A und B dies sind. Allerdings haben Studierende das nicht expliziert.

Die Auswertung wurde folgendermaßen vorgenommen: Jede der von Testpersonen gemachten Aussagen bekam $+1$ falls sie wahr und -1 falls sie falsch war. Es ergab sich die Tabelle 7.5.

Anzahl wahrer Aussagen	3	3	3	1	2	7	3	2	0	3	2	3	32
Anzahl falscher Aussagen	1	1	1	2	1	0	0	2	1	0	4	0	13
Differenz	+2	+2	+2	-1	+1	+7	+3	0	-1	+3	-2	+3	+19

Tabelle 7.5.: Jede Spalte zeigt die Bewertung einer Person. Insgesamt wurden 32 wahre Aussagen (etwa »$E \lightning D$«) und 13 falsche Aussagen (etwa »$A + D \Rightarrow B$«) gemacht.

Eine Studentin (sieben wahre, keine falschen Aussagen) erstellte ein Diagramm der Form:

$$\left.\begin{array}{r} B \Leftrightarrow C \\ A \end{array}\right\} \Rightarrow D \lightning E.$$

Dieses Diagramm stellt die wesentlichen Beziehungen zwischen gegebenen Aussagen übersichtlich dar. Diese Antwort kann daher als ein vorbildliches lokales Ordnen angesehen werden.

Ferner offenbart die Auswertung, dass Studierende in erster Linie Schwierigkeiten mit logischen Aussagen aufwiesen; was vermutlich nicht zuletzt an der Aufgabenstellung lag. Insgesamt wurden 13 falsche Aussagen gemacht, vgl. Tabelle 7.5. Daher kann in der Auswertung wenig über das Vermögen der Testpersonen, lokal zu ordnen, gesagt werden. Dieses Item wurde in den Folgetests daher nicht berücksichtigt. Eine veränderte und auf logische Zusammenhänge reduzierte Aufgabe wurde in ^{19}Pretest verwendet.

7.2.6.2. Frage 3_{19}

Die Frage 3_{19} wurde im Vergleich zu Frage 5_{15} auf aussagenlogische Formulierungen reduziert. Die Aussagen wurden abstrahiert und die Aufgabe wurde verändert: Auffinden eines minimalen Erzeugendensystems, keine Zusammenhänge wie in der älteren Aufgabe.[18] Neun von zehn Personen haben alle fünf Aussagen richtig

[18] Zur Vollständigkeit gehört auch, dass die Studierenden vermutlich die naheliegende Annahme gemacht haben, dass alle fünf Aussagen wahr sind. Dazu gibt es eigentlich keinen Anlass, aber das

interpretiert (das ist aus den entsprechenden Diagrammen erkennbar) und eine richtige Antwort gegeben. Die vollständige Antwort wäre: »Benötigt werden mindestens zwei Aussagen: *B* und *E oder D* und *E*«. Eine Person schrieb fälschlicherweise, dass alle fünf Aussagen nötig seien.

Diese Zahlen lassen darauf schließen, dass die Fragestellung verständlich war und Studierende im Wesentlichen keine erkennbaren logischen Schwierigkeiten hatten, diese Frage zu beantworten. Mehr noch, es kann gesagt werden, dass lokales Sortieren von dargebotenen Aussagen keine wesentliche Schwierigkeit für die Testpersonen war. Alle Befragten haben ein Diagramm erstellt, aus dem erkennbar ist, wie die Aussagen ihrer Meinung nach zusammenhängen. Zwei Personen haben versucht, ihre Lösung zu begründen; andere Befragte scheinen hierfür keine Notwendigkeit gesehen zu haben.

Neun von zehn Personen haben *eine* Lösung angegeben, also etwa »*B* und *E*« (zwei Nennungen) oder »*D* und *E*« (fünf Nennungen, mit einer expliziten Begründung). Die zusätzliche intendierte aber nicht explizit geforderte Entscheidung, alle möglichen Lösungen (»Minimalsysteme«) für die Aufgabe zu finden, wurde von zwei dieser neun Personen getroffen. Der Rest hat hier vermutlich keine Notwendigkeit gesehen, alle (in dem Fall äquivalenten) Lösungen zu finden. Es ist außerdem nicht entscheidbar, ob die Nichtangabe aller Lösungen eine bewusste Entscheidung war – schließlich löst *eine* Lösung die Aufgabe –, oder die Befragten die Möglichkeit der Existenz weiterer Lösungen nicht erkannt haben.

Bemerkung 7.6. Im Vergleich dazu: Von fünf (nicht repräsentativ gewählten) unmittelbaren Kolleginnen und Kollegen (darunter Promovierende und Promovierte) haben in einer schriftlichen Befragung drei Personen alle Lösungen der Aufgabe angegeben und zwei Personen haben richtige Aussagen gemacht, aus denen eine richtige Lösung folgt, allerdings haben sie diese Lösung nicht explizit angegeben. ♯

Es sind daher keine Hinweise darauf erkennbar, dass die auf die Aussagenlogik reduzierte Aufgabe (im Vergleich zu Frage 5_{15}), eine Menge von Aussagen zu sortieren, Studierenden Schwierigkeiten bereitet. Es könnte ferner gemutmaßt werden, dass Ursachen für mögliche Schwierigkeiten der Studierenden mit lokalem und globalem Ordnen nicht primär in der Aussagenlogik liegen. Das legt zusätzlich nahe, dass die Ergebnisse aus der Frage 5_{15} kritisch zu sehen sind.

Dieses Ergebnis zeigt, das eine Beschäftigung im Kurs mit lokalem und globalem Ordnen Studierende nicht aus prinzipiellen Gründen vor unüberbrückbare Probleme stellt. Aus dieser Perspektive kann lokales und globales Ordnen im Kurs behandelt werden.

ergibt sich aus dem Sprachgebrauch. Keine Testperson hat in ihrer Antwort irgendwelche Andeutungen gemacht in diese Richtung.

Im Posttest wurde diese Frage ein bisschen variiert, um zu überprüfen, ob das beschriebene positive Ergebnis auch mit anderen Aussagen reproduzierbar ist. Eine Abänderung der Fragestellung war hier gerechtfertigt, da nicht mehr die Frage bestand, ob Aufgaben von diesem Typ nach dem Kurs *besser* gelöst werden können, weil dies schlicht die Unterscheidung nicht mehr liefern kann. Interessant war jedoch ferner herauszufinden, ob nun nach dem Kurs mehr Studierende eine vollständige Lösung der Aufgabe geben würden.

7.2.7. Fragen 4_{15} und 8_{16}: Mit Axiomatik umgehen

Die Antworten auf die beiden gleichlautenden Items 4_{15} und 8_{16} analysieren wir als einen Text.

Diese Items sollen Erkenntnisse zur Beantwortung der Forschungsfrage FFb liefern: Wie arbeiten Studierende mit dem Begriff des Axioms bzw. der Axiomatik im Kontext? Außerdem sammeln wir hier erste Erkenntnisse zur Forschungsfrage FFa: Wie erklären Studierende Axiomatik und ähnliche Begriffe? Auf Seite 224 haben wir im Rahmen der Designbesprechung zu diesen Items bereits konkrete Fragen an den Textkorpus formuliert, um die gerade genannten Fragen zu beantworten.

Der Textkorpus besteht hier aus zehn Antworten aus dem ^{15}Pretest, darunter eine Leerabgabe, und vierzehn Antworten aus dem ^{16}Pretest, also insgesamt aus 23 nichtleeren Antworten. Es gab ferner eine Abgabe mit »Verstehe ich nicht«, vgl. *16pre8.1*, und eine Abgabe, die wir mit »kein Beitrag zur Lösung« quittieren und nicht weiter analysieren.[19] Drei weitere Antworten sind sehr nah an der zu erklärenden Kompetenz geblieben und werden nicht weiter betrachtet,[20] vgl. Beispiel 7.7. Somit besteht unser Datenpool aus 18 Antworten, die wir im Weiteren analysieren.

Beispiel 7.7.

- »Die Studierenden kennen Axiomatik und Konstruktion und erkennen darin die Grundlage der euklidischen Geometrie. D.h. Axiomatik und Konstruktion werden verstanden und der Zusammenhang zur euklidischen Geometrie wird erkannt« – *16pre8.2*
- »Für die euklidische Geometrie werden zuerst die Axiomatik und die Konstruktion eingeführt, welche als Grundlagen dienen.« – *16pre8.3*
- »Studierende meinen, dass Axiomatik und Konstruktion eine Basis schaffen, die euklidische Geometrie zu beschreiben.« – *16pre8.12*

Die obigen Antworten haben wir aus der weiteren Auswertung entfernt, da sie zu nah an der Originalformulierung blieben. ♯

[19]»In meinen Augen wird von uns als Kompetenz verlangt, dass wir unseren Schülern im späteren Unterricht Grundstrukturen im Bereich Mathematik, euklidischen Geometrie, einfach und verständlich erläutern sollen«, vgl. *16pre8.5*.

[20]Das bezieht sich insbesondere auf Häufigkeitsanalysen, die wir im Weiteren angeben werden.

Wir sind an den Text im Sinne der grounded theory herangetreten und haben die Antworten offen codiert und induktiv ein Codierschema gebildet.[21] Dabei sind inhaltliche und strukturelle Kategorien entstanden, mit denen wir also beobachten, wie die Kompetenz inhaltlich erklärt wird und welche Strukturen die Antworten aufweisen. Mit dieser Analyse und den herausgearbeiteten Kategorien wollen wir nun über die Antworten berichten und sie beurteilen.

Wir berichten zunächst über gewisse Häufigkeiten, um eine erste Perspektive auf das Textmaterial zu bekommen.

Im Folgenden beziehen wir uns auf die oben erwähnten achtzehn Antworten. Das heißt die anderen Antworten werden in die folgenden Statistiken nicht aufgenommen.

So wird zwar der Begriff »euklidische Geometrie« elf Mal verwendet, aber nur drei Mal zumindest annähernd explizit erklärt, jedoch nicht definiert.[22] Wir können dies noch nicht so interpretieren, dass die Studierenden den Begriff »euklidische Geometrie« (zu) kennen (glauben), aber wir können festhalten, dass sie hier keinen Bedarf darin sehen, diesen zu definieren oder zu erläutern; oder ihn dafür schlicht nicht gut genug verstehen.

Der Begriff »Konstruktion« wird auch häufig genannt, neun Mal, allerdings wird hier häufiger der Versuch unternommen, diesen Begriff auch zu erklären: drei Mal wird dieser mit Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gleichgesetzt, vgl. *15pre4.5,7,9*, ein Mal durch konkrete Konstruktionsvorschriften erläutert, wie etwa »Abstand von einem Punkt abtragen«, vgl. *15pre4.4*, zwei Instanzen ersetzen diesen Begriff durch sehr vage »praktische Anwendungen« und »Folgerungen«, vgl. *16pre8.11,13* – Definitionen sind das alles nicht. Das deutet daraufhin, dass Studierende teilweise das Gefühl haben, diesen Begriff eher erläutern zu müssen. Diese Erkenntnis, nur wenige Studierende erklären vorkommende Begriffe dieser Kompetenz, lässt sich auch bei »Axiomatik« oder »formale Grundlegung« beobachten.

Der Begriff »Axiomatik« (taucht in der Fragestellung auf) wird selten genannt, hauptsächlich nur in den an der Originalformulierung zu nah gelegenen Antworten, die wir nicht zählen. Nur ein Mal sonst wird dieses Wort genannt und dann auch erklärt: »Die Axiomatik, also die Tatsache, dass in der Geometrie sich das Wissen auf ein paar grundlegende Feststellungen, welche nicht bewiesen werden können bzw. einfach definiert sind, aufbaut«, vgl. *15pre4.5*; passenderweise ist diese Antwort als

[21] Vgl. »Codierschema Code:Kompetenz.pdf« im digitalen Zusatzmaterial.

[22] Mit »klassische[r] Geometrievorlesung« gleichgesetzt, vgl. *16pre8.8*, oder durch »Grundlage eines Teilgebiets der Geometrie« ersetzt, vgl. *15pre4.3*. Eine weitere Instanz umschreibt wohl die euklidische Geometrie als »komplizierte Geometrische Formen und Sachverhalte«, vgl. *16pre8.9*.

die beste bewertet worden, vgl. mathematische Güte weiter unten. Die Axiomatik wird in der Tat in mehreren Antworten erklärt, allerdings nicht mehr so explizit und meist einfach mit Axiomen gleichgesetzt: Wir haben fünf Instanzen gefunden, in denen dort, wo »Axiomatik« stehen müsste, lediglich »Axiome« verwendet wurde. Diese Ersetzungsstrategie, die uns bereits in Kapitel 2 bei der Formulierung der finalen Forschungsfragen begegnete, ist leicht nachvollziehbar: Studierende kennen das Wort »Axiomatik« zuallermeist nicht, und ersetzen dieses durch ein leichteres, besser bekanntes Wort »Axiom«.[23]

Beispiel 7.8. Axiomatik wird, wenn überhaupt, dann anhand einiger Aspekte erklärt oder besser: durch ein anderes sprachliches Gebilde ersetzt. So wird der Aufbau der Geometrie »in bestimmten Art und Reihenfolge kombiniert«, vgl. *16pre8.9*, Begriffe der Geometrie auf einige wenige zurückgeführt, vgl. *15pre4.4*, oder Axiom angedeutet: »aus wenigen vorgegebenen Grundsätzen«, vgl. *15pre4.6*. Diese Aspekte, die wir hier beobachten, werden wir weiter unten genauer studieren. Neben der oben zitierten gut bewerteten Erklärung der Axiomatik finden wir lediglich eine weitere Ausführung: »Sowohl die Kenntnis von unbewiesenen Grundaussagen zur Geometrie als auch das Entwickeln weiterer Zusammenhänge aus diesen Grundaussagen«, vgl. *16pre8.6*. ♯

Wir sehen, dass die euklidische Geometrie, Konstruktion und Axiomatik von den Studierenden seltenst explizit erläutert werden: »Axiomatik« zwei Mal, »Konstruktion« ein Mal, »euklidische Geometrie« und alle anderen Instanzen für diese drei Begriffe werden nicht erklärt, sondern höchstens durch andere keinesfalls charakterisierende Aspekte dieser Begriffe ersetzt.

Die Häufigkeitsanalyse zeigt, dass Studierende am ehesten die Axiomatik erklären wollen. Das passt dazu, dass dieser Begriff wohl der unbekanntere der drei ist.

Es ist nicht ganz einfach zu erkennen, wann Studierende »Axiomatik« und wann »Axiom« zu erklären versuchen. Wie oben erwähnt, verwendeten fünf Personen beide Begriffe synonym. In einigen Passagen erklären Studierende explizit Axiome, ohne einen konkreten Bezug zur Axiomatik herzustellen: »die Grundlagen der klassischen Geometrievorlesung [liegen] bei grundlegenden Axiomen«, vgl. *16pre8.8*. Diese Erklärungen[24] sind meist sehr vage. Drei Studierende geben passende wie unpassende Beispiele für Axiome,[25] andere drei sprechen vage von »Festlegungen«,

[23]Vgl. dazu *15pre4.7-8, 16pre8.7,10,14*: »Durch das Einführen von Axiomen [...] wird der Grundstein [...] gelegt«, »Konstruktionen und Axiome sind [...]«, »Axiome und Konstruktion sind [...]«, »[...] sowohl mit Hilfe von Axiomen als auch Konstruktionen [...]«, »Die euklidische Geometrie soll [...] anhand der Axiome [...] erklärt werden«.

[24]Wir haben insgesamt acht Stellen gefunden, die auf eine Erklärung des Wortes »Axioms« hindeuten. Das scheint recht viel zu sein, dafür, dass dieses Wort in der Kompetenz nicht explizit auftaucht.

[25]»aus wenigen vorgegebenen Grundsätzen (z.B. Pythagoras)«, vgl. *15pre4.6*, »grundlegende Konstruktionen, wie die Parallelenkonstruktion oder die Konstruktion von Mittelsenkrechten [...] qua-

»Feststellungen«, »Axiome: Regeln zunutze machen«. Nur zwei Studierende betten Axiome mathematisch als Aussagen ein: »unbewiesene Grundaussagen zur Geometrie«, »Axiome als fundamentale Aussagen«, vgl. *16pre8.6,14*.

Bemerkenswert ist die einmalige Antwort, die einen Zusammenhang zwischen Konstruktionen und Axiomen herstellt: »Es werden grundlegende Konstruktionen als Grundkonstruktionen vorgegeben, quasi als Axiome«, vgl. *15pre4.9*. In keiner anderen Antwort wurde eine solche Verbindung hergestellt.

Im Kontext der verwendeten Wörter ist zu bemerken, dass der Begriff »Aussage« insgesamt nur drei Mal fällt. Dies ist ein Indiz auf ein wenig ausgeprägtes mathematisches Vokabular der Studierenden zu diesem Thema.

! Wir stellen also fest: Studierende erklären die Kernbegriffe der Kompetenz, insbesondere »Axiomatik« selten kaum explizit, eher werden die Begriffe durch recht vage Formulierungen einzeln oder kumulativ ersetzt.[26]

Im Folgenden wollen wir beurteilen, ob Studierende den Inhalt der Kompetenz mathematisch korrekt darstellen.

Wird diese Kompetenz sachlich korrekt beantwortet? Da es bei diesem Item um *Umschreibungen* einer Kompetenz geht, gibt es nicht die eine richtige Antwort. Genauso wenig können wir die Antworten in richtige und falsche einteilen. Wir wollen lediglich beurteilen, ob die jeweilige Antwort fachmathematische Inhalte korrekt verwendet, ob sie den *aus unserer Perspektive* in der Kompetenz dargestellten Sachverhalt plausibel wiedergibt und inwieweit sie die Kompetenz vollständig abdeckt.[27]

Zunächst wollen wir sehen, wie Studierende diese Kompetenz verstehen: Was soll in dieser Kompetenz was leisten?

Die Neuoperationalisierung der Kompetenz durch Studierende, offenbart ein breites Spektrum an Möglichkeiten. Sie schreiben: Studierende »erklären«, »(er)/kennen«, »beherrschen«, »können durchführen«, »meinen«. Das sind alles denkbare Optionen. Auch bezüglich der Funktion der Axiomatik und Konstruktion für die euklidische Geometrie finden wir verschiedene vertretbare Ausdrücke:

- Einige sehen diese Funktion in gewisser Beweisbarkeit, Fundierung von »Gesetzmäßigkeiten« (vier Instanzen):
  - »um im Bereich Geometrie Gesetzmäßigkeiten formal festhalten zu kön-

si als Axiome«, vgl. *15pre4.9*, »bei grundlegenden Axiomen, z.B. Definition Winkelsumme im Dreieck, etc.«, vgl. *16pre8.8*.

[26] Wir sahen bereits die Ersetzungen »Axiomatik=Axiom« und »Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen« für »Konstruktion«. Es wird aber auch kumulativ ohne Erklärung ersetzt: »Studenten kennen den theoretischen mathematischen Hintergrund von euklidischer Geometrie«, vgl. *15pre4.10*: »theoretischer mathematischer Hintergrund« als Ersatz für Axiomatik und Konstruktion?

[27] So deckte die Antwort »Axiome der Schulgeometrie sollen präzisiert werden« nur Teilaspekte der Kompetenz ab.

nen«, vgl. *15pre4.1*,[28]
  - »zu beschreiben, wie Aussagen aus der euklidischen Geometrie sich konstituieren«, vgl. *16pre8.10*,
  - »[euklidische Geometrie] kann daraus abgeleitet werden«, vgl. *16pre8.7*;

- für Andere helfen Axiomatik und Konstruktion, die euklidische Geometrie zu »erklären« oder zu »verstehen« (fünf Nennungen):
  - »um euklidische Geometrie zu erklären«, vgl. *16pre8.6*,
  - »Grundstein für das Verständnis der euklidischen Geometrie«, vgl. *15pre4.7*;

- Viele entfernen sich nur wenig von der Originalformulierung und sprechen von Grundlagen (vier Personen):
  - »Konstruktionen und Axiome sind die Grundlagen für ›höhere‹ euklidische Geometrie«, vgl. *15pre4.8*,
  - »Grundbausteine für die euklidische Geometrie«, vgl. *15pre4.9*.

Aber auch hier bleiben einige Vorstellungen sehr vage. So sollen »Konstruktion und Axiome [...] den Studenten also als Vorlage / Idee / Bild für abstrakte(re) Gebilde [dienen], da sie anschaulich einen Sachverhalt darstellen können«, vgl. *15pre4.8*. Welche abstrakte Gebilde und Sachverhalte genau gemeint sind oder warum Konstruktionen und Axiome der Anschaulichkeit zuträglich sind, wird nicht erklärt.

In ihrer Erläuterung der Kompetenz führen dabei einige Studierende neue Inhalte hinzu, in etwa zu gleichen Teilen passend wie unpassend. So interpretieren sie mehr als vorhanden hinein, sprechen von »Lehramtsstudenten«, »höherer Geometrie«, »Formen«,[29] »Konstruktionsmethoden« oder interpretieren pädagogische Überlegungen[30] hinein. Sie fügen aber auch hilfreiche und angemessene Inhalte hinzu, sprechen von »unbewiesenen Grundaussagen«, vgl. *16pre8.6*, und deuten undefinierte Begriffe einer axiomatischen Theorie an.[31]

Insgesamt geben Studierende hier ziemlich unterschiedliche und unterschiedlich qualitative Antworten. Das macht es schwer, die Antworten auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Eine Möglichkeit, die Antworten besser zu verstehen, ist ihre mathematische Qualität zu beurteilen. Wir haben hierzu vier Kategorien herausgearbeitet.[32]

[28] Das Zitat geht weiter mit »bzw. formale Ansatzpunkte für das Lösen von Problemen mithilfe von Geometrie [...] zu haben« – eine interessante Sichtweise.

[29] »Formen in der Geometrie haben jeweils bestimmte Eigenschaften«, vgl. *15pre4.4*.

[30] »alle schulmathematischen Probleme lösen können und in der Lage sein, dieses Können an Schüler und Schülerinnen weiterzugeben«, vgl. *15pre4.6*.

[31] »[...] Sie sind sich über die Begriffe Punkt, Gerade und Kreis im Klaren und versuchen nur mit diesen Begriffen [...]«, vgl. *15pre4.4*.

[32] Für die Einteilung aller Antworten nach ihrer mathematischen Güte siehe »Codierschema Code:Kompetenz.pdf« im digitalen Zusatzmaterial.

gute Antwort *vier Mal:* Alle Antworten, welche die Kompetenz nicht nur angemessen darstellen, sondern sie durch Erklären der Hauptwörter auch verständlicher machen. »[...] [Studierende] sind sich über die Begriffe Punkt, Gerade und Kreis im Klaren und versuchen nur mit diesen Begriffen komplexere Figuren zu konstruieren bzw. allgemein Konstruktion zu erklären und herzuleiten [...]«, vgl. *15pre4.4*. Drei der vier dieser Antworten kamen aus [15]Pretest.

gut, aber nah am Text *zwei Mal:* Solche Antworten, die die Kompetenz angemessen erklären, aber nah am Text bleiben, das heißt keine oder wenige Begriffe verständlicher machen. »Durch das Einführen von Axiomen und das Anwenden (zunächst) einfacher Konstruktionen (mit Zirkel & Lineal) wird der Grundstein für das Verständnis der euklidischen Geometrie gelegt«, vgl. *15pre4.7*.

Teilaspekte vorhanden *vier Mal:* Solche Antworten, die nur in Teilen die Kompetenz erläutern und nicht als gute Antworten betrachtet werden. Beispiel: »Studenten kennen den theoretischen mathematischen Hintergrund von euklidischer Geometrie und können ihn anwenden. Beispielsweise bei Beweisen von Sätzen über Dreiecke«, vgl. *15pre4.10*.

mathematisch nicht ausreichend *acht Mal:* Solche Antworten, die zu vage bleiben »Die Studierenden bauen und gestalten Dinge«, vgl. *15pre4.3*, mathematisch inkorrekte Vorstellungen liefern »bei grundlegenden Axiomen, z.B. Definition Winkelsumme im Dreieck«, vgl. *16pre8.8*, aber weder zu nah am Text noch völlig am Thema vorbei sind: »Von ganz von vorne wird die euklidische Geometrie aufgebaut und Festlegungen von Folgerungen klar getrennt«, vgl. *16pre8.13*.

! Zusammen mit der letzten Kategorie und den sechs im Vorfeld ausgeschlossenen Antworten haben wir folglich 14 von 24 Antworten, mehr als die Hälfte, die diese Kompetenz sachlich angemessen nicht beschreiben können. Das ist viel angesichts der Tatsache, dass Studierende über eine Kompetenz verfügen sollen, die sie nicht angemessen erklären können, also möglicherweise nicht einmal verstehen.

Elf von vierzehn dieser Antworten kommen aus [16]Pretest (vierzehn Testpersonen) und drei aus [15]Pretest (zehn Testpersonen). Allerdings ist die Semesterzahl kein guter Prädiktor für die Qualität der Antwort.

Wir können leicht erkennen, dass dieses Ergebnis trotz der Komplexität und Formulierung der Fragestellung keine erfreuliche Statistik darstellt. Auch deswegen ist dies nicht zufriedenstellend, weil die Antwort »Axiome und Konstruktion sind die Grundlage der euklidischen Geometrie, sie kann daraus abgeleitet werden.«, vgl. *16pre8.7*, bereits zu den besseren gehört (Teilaspekte vorhanden).

Welche Aspekte eines Axioms / Axiomensystems sind erkennbar? Wenn über Axiome und den Aufbau der euklidischen Geometrie geschrieben wird, dann können wir drei Aspekte ausmachen: Gebäude-, Herkunfts- sowie Beweisaspekt. Im Gebäudeaspekt ist die Vorstellung erkennbar, dass die Geometrie aus ihren Fundamenten aufgebaut/abgeleitet wird: »grundlegende Konstruktionen«, »fundamentale Aussagen« usw., insgesamt fünf Textstellen. Im Codierschema schreiben wir zu diesem Aspekt: »Hierunter fallen alle Textstellen, die eine Vorstellung erzeugen, eine Theorie (oder konkret die euklidische Geometrie) wie ein Gebäude aus etwas aufgebaut ist«. Dabei kann der Gebäudeaspekt sowohl anschaulich-räumlich »von ganz von vorne wird die euklidische Geometrie aufgebaut«, vgl. *16pre8.13*, als auch zeitlich »durch das Einführen von Axiomen und das Anwenden (zunächst) einfacher Konstruktionen«, vgl. *15pre4.7*, verstanden werden (drei Textstellen).

Der Beweisaspekt[33] taucht in den Antworten sehr sporadisch und kaum wahrnehmbar auf. Das Wort »formal« aus der Originalformulierung taucht in einer einzigen Antwort *15pre4.1* auf, um Beweisen/Zeigen/Herleiten von Objekten der Geometrie geht es in vier weiteren Antworten, etwa »mit einfachen grundlegenden Konstruktionstechniken auch komplizierte Geometrische Formen und Sachverhalte zu zeigen«, vgl. *16pre8.9*. Zwei Personen bringen von sich aus die Beweisbarkeit von Axiomen. Sie sprechen dabei von »unbewiesenen Grundaussagen«, vgl. *16pre8.6*, bzw. von »ein paar grundlegende[n] Feststellungen, welche nicht bewiesen werden können«, vgl. *15pre4.5*. Ansonsten spielt das Beweisen in den Antworten keine Rolle.

Ein in diesen Antworten kaum wahrnehmbarer aber wichtiger Aspekt ist der Herkunftsaspekt.[34] Allerdings ist die Vorstellung des Festlegens eines Axiomensystems zu Beginn einer Theorie (was im Begriff »Axiomatik« enthalten ist) wenig konkret: »Durch das Einführen von Axiomen [...] wird der Grundstein für das Verständnis der euklidischen Geometrie gelegt«, vgl. *15pre4.7*. Dieser Aspekt findet in den Antworten in dieser nicht ausgereifter Form zwei Mal Erwähnung, die zweite Textstelle besagt, dass »grundlegende Feststellungen der Geometrie« »einfach definiert sind«, vgl. *15pre4.5*. Es wäre übertrieben, in der Antwort auf die gestellte Frage, eine Erklärung über die Herkunft der Axiome zu erwarten. Die Tatsache, dass dieser Aspekt nur in zwei besseren Antworten Erwähnung findet, legt nahe, dass die Problematik des Auswählens eines Axiomensystems für die Studierenden zumindest in dieser Frage keine oder keine wichtige Rolle spielt.

Es ist nicht überraschend, dass die von uns am besten bewertete Antwort *15pre4.5* alle drei Aspekte beinhaltet; Axiomatik und Konstruktion werden hier erklärt:

> »Als Grundlage der euklidischen Geometrie wird zum einen die Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) und die Axiomatik, also die Tatsache, dass in der Geometrie sich das Wissen auf ein paar grundlegende Feststellungen, welche nicht bewiesen werden können bzw. einfach definiert sind, aufbaut.«

[33]»Diese Kategorie wird aktiv, sobald dort von Beweisen, Zeigen, Begründen, Argumentieren, kurz: von Argumenten, die Rede ist«.

[34]»Woher kommen die Axiome? Wird etwas über ihre Herkunft/Entstehung/Auswahl gesagt?«

Leider ist das Vorhandensein mehrerer dieser Aspekte in einer Antwort kein Garant der Güte. So sehen wir die Antwort *16pre8.9* »Mit einfachen grundlegenden Konstruktionstechniken auch komplizierte Geometrische Formen und Sachverhalte zu zeigen und darzustellen, indem man diese in bestimmten Art und Reihenfolge kombiniert« als mathematisch nicht ausreichend, obwohl dort der Beweis- und Gebäudeaspekt erkennbar sind. Eine weitere Antwort mit zwei (Gebäude- und Herkunfts)Aspekten ist *15pre4.7*: gut, aber nah am Text.

! Aus dieser Auswertung haben wir gelernt, dass Studierende diese Kompetenz überwiegend nicht hinreichend gut erklären können. Sie drücken sich zumeist vage aus und nur wenige von ihnen geben zu erkennen, dass sie mit dem Begriff »Axiomatik« vertraut sind und umgehen können.

7.2.8. Fragen 7_{16}, 10_{17} und 4_{19}: die euklidische Ebene

In diesem Abschnitt untersuchen wir Antworten auf zwei Fragen: Welche personal concept definitions haben Testpersonen zur euklidischen Ebene und was ist dazu aus fachmathematischer Sicht zu sagen? Wir werden alle drei betroffenen ^{16,17,19}Pretests zusammen auswerten, in denen eine entsprechende Frage auftauchte. Allerdings wurde in ^{16}Pretest nach einer Definition nicht explizit gefragt: »Was ist für Sie die euklidische Ebene?«. In ^{17,19}Pretest dagegen schon: »Was ist für Sie die euklidische Ebene? Wie würden Sie die euklidische Ebene definieren?« bzw. »Was bedeutet für Sie der Begriff ›euklidische Ebene‹? Wie würden Sie diesen definieren?«. Richtigerweise sollten die Antworten der drei Tests für sich genommen ausgewertet werden, weil die jeweiligen Fragen nicht identisch waren. Möglicherweise lässt sich der Unterschied zwischen abweichenden Fragestellungen in dieser Auswertung vernachlässigen, da wir uns hier für zwei gerade angekündigte Fragen interessieren, die sich ggf. von den leichten Abweichungen zwischen den Items nicht so stark beeinflussen lassen.

Überall dort, wo die Unterschiede in der Fragestellung die Antwort mutmaßlich beeinflussen, versuchen wir dies kenntlich zu machen, ansonsten wird versucht, gemeinsame Tendenzen aufzudecken. Die erste Übersicht über die Situation verschaffen folgende Zahlen: Insgesamt gab es

$$^{16}\text{Pretest} + {}^{17}\text{Pretest} + {}^{19}\text{Pretest} = 14 + 8 + 10 = 32 \text{ Abgaben},$$

davon $5 = 3+2+0$ leer,[35] also 27 nicht leere Abgaben. Ferner gab es $0+2+1 = 3$ Mal die Antwort »kann ich nicht erklären«[36] und eine Themenverfehlung, vgl. *16pre7.11*,

[35] Es gab leere Antworten nur in den ersten beiden Pretests. Unklar bleibt: Lag es an der Dauer des Tests oder daran, dass die Frage nach der Definition möglicherweise leichter zu beantworten ist oder an anderen Gründen?

[36] vgl. *17pre10.3,7* und *19pre4.6*.

da wurde wohl die euklidische Ebene mit dem euklidischen Algorithmus verwechselt. Damit gibt es $10 + 4 + 9 = 23$ für die weitere Auswertung relevante Abgaben. Bereits hier sehen wir, dass 9 von 32 Personen keinen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage lieferten.

Auch hier sind wir an den Text im Sinne der grounded theory herangetreten und haben die Antworten offen kodiert und induktiv ein Codierschema gebildet.[37] Um das Material zu analysieren, haben wir uns an den folgenden Fragen orientiert:

- Wird zwischen Bedeutung, Vorstellung, Definition unterschieden?
- Wie wird die euklidische Ebene beschrieben? Wird sie definiert?
- Welche Aspekte der euklidischen Ebene lassen sich identifizieren?
- Welche unerwarteten Vorstellungen lassen sich beobachten?
- Welche mathematische Güte kann den Antworten zugeordnet werden?

Das erstellte Codesystem scheint gesättigt zu sein: Die Kategorien wurden aus den Antworten in ^{16,17}Pretest entwickelt, die Antworten aus ^{19}Pretest ließen sich damit gut codieren. Allerdings sind die Antworten selbst höchst unterschiedlich und – trotz der Kürze vieler Antworten – gleicht kaum eine der anderen.

Wird zwischen Bedeutung, Vorstellung, Definition unterschieden? Wir wollen das Datenmaterial stufenweise verstehen. Zunächst schauen wir uns an, in welcher Form die Antworten auftreten.

Aus den Daten lässt sich nur in wenigen Fällen schließen, dass Studierende zwischen ihrer Vorstellung der euklidischen Ebene und deren Definition unterscheiden. Nur in höchstens vier Fällen lässt sich diese Unterscheidung explizit feststellen.[38] Nicht überraschend ist diese Unterscheidung nur in ^{17,19}Pretest zu finden, wo die Items zweigeteilt waren. Eine weitere Person machte keine solche Unterscheidung, schrieb aber explizit »[...] ich würde definieren [...]«, vgl. *17pre10.2*. Rein formal gesehen, beantworteten nur drei Personen den zweiten Teil der Items 10_{17} und 4_{19}.

Fast alle (siebzehn Personen) beschrieben die euklidische Ebene indes in der ist/wird-Form[39], etwa »eine euklidische Ebene wird durch drei Punkte im Raum aufgespannt«, vgl. *19pre4.2*, oder »die euklidische Ebene ist der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$«, vgl. *16pre7.6*, oder »ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$«, vgl. *16pre7.9*.

[37] vgl. »Codierschema Code:EE.pdf« im digitalen Zusatzmaterial.

[38] »Definition: $\mathbb{R}^2$. Für mich ist die euklidische Ebene ›die Ebene der Tafel‹[...]«, vgl. *19pre4.3*; oder »Eine Ebene, die in den Rationalen zahlen liegt ([ungleich] $\mathbb{C}$). Def: Eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{R}^n$-VR«, vgl. *17pre10.5*; oder »Umgangssprachlich = nicht gekrümmte (unendlich ausgedehnte) Fläche. Durch 3 (euklidische) Punkte wird eindeutig eine Ebene festgelegt, diese ist gerade das Objekt, die alle durch 3 Punkte gehenden (euklidischen) Geraden enthält«, vgl. *17pre10.6*. Eine weitere Antwort fällt rein syntaktisch in diese Gruppe, inhaltlich aber eher nicht: »Für mich bedeutet ›euklidische Ebene‹ die Ebene, die man aus der Schule kennt. Die euklidische Ebene wird durch drei Achsen aufgespannt, die alle senkrecht aufeinander stehen«, vgl. *19pre4.8*.

[39] Es wird eine Aussage gemacht; etwa »Die EE ist...«, »Die EE wird...«.

Demgegenüber stehen beschreibende Eigenschaften der euklidischen Ebene (lediglich drei Funde) etwa »die euklidische Ebene hat zwei Achsen [...]«, vgl. *16pre7.5*, oder »die euklidische Ebene enthält alle Punkte, die von zwei Achsen (z.B. x und y) aufgespannt werden«, vgl. *19pre4.1*, sowie »2-dimensionale Ebene, heißt eine Fläche, die unendlich groß ist und durch 2 Vektoren/Geraden beschrieben werden kann«, vgl. *19pre4.7*. Bei dieser »hat/kann«-Form werden gewisse Teile der euklidischen Ebene beschrieben. Allerdings bleibt unklar, ob diese Teile die ganze Ebene bereits abdecken und charakterisieren sollen. So gesehen, werden nur Teile der personal concept definition angegeben. Die anderen Antworten können aufgrund ihrer ist-Form schon eher als personal concept definitions der euklidischen Ebene gesehen werden.

Es wird aus den Daten nicht klar, warum bei einer zweigeteilten Frage in ^{17,19}Pretests meistens nur eine Antwort folgt. Bei der Formulierung der Frage wurde die Form »Ich stelle mir vor ... und ich würde definieren / es ist definiert als ...« als Antwort angedacht. Diese Struktur ist wie oben angedeutet in nur etwa vier Fällen gewissermaßen erkennbar. Allein aus der überwiegenden ist/wird-Form der Antwort und der Quellenlage wird nicht erkennbar, ob Studierende zwischen einer Definition und einer anschaulichen Vorstellung der euklidischen Ebene unterscheiden oder ob ihre Antwort beide Teilfragen auf einmal abdeckt. Dabei haben Studierende eine realistische Möglichkeit (im Unterschied zu den Axiom-Items), eine präzise Definition der euklidischen Ebene zu geben.

Wie wird die euklidische Ebene beschrieben? Wie wird sie definiert? Wir haben bereits gesehen, dass nur wenige Personen explizit ihre Antworten als Definitionen gekennzeichnet haben. Die Ist-Form der meisten Antworten lässt sich jedoch problemlos als eine Definition der euklidischen Ebene interpretieren. In diesem Sinne wollen wir wissen, wie die euklidische Ebene definiert wurde.

In Anlehnung an Abschnitt 1.3.2 zur euklidischen Ebene wollen wir zunächst überlegen, welche Art der Definition in den Antworten möglich wäre. Drei verschiedene Zugänge erscheinen uns als primär möglich:

Erstens, Studierende könnten die euklidische Ebene in irgendeinem Sinne aus der Schulperspektive etwa anhand euklidischer Postulate, Koordinatensysteme, Ebenengleichungen etc. beschreiben. Wie die Ebene im Schulunterricht erklärt wird, können wir im Allgemeinen nicht beurteilen: Der entsprechende bayerische Lehrplan sieht eine Definition nicht vor;[40] umso interessanter ist es, Antworten im Sinne dieses Zugangs zu sehen. Laut Lehrplan wird ab der fünften Jahrgangsstufe mit ei-

[40]Im alten bayerischen gymnasialen Lehrplan war noch von »euklidischem Vektorraum« und »euklidischer Geometrie« die Rede, vgl. https://www.isb.bayern.de/download/9018/lehrplanm_g9alt.pdf. Wir beziehen uns hier und im Folgenden auf den jüngeren G8-Lehrplan und nicht auf den neusten LehrplanPLUS und nicht auf den älteren G9-Lehrplan, weil fast alle Testpersonen mit größter Wahrscheinlichkeit im G8-System unterrichtet wurden.

nem Koordinatensystem[41] und in der Kollegstufe mit einem drei*dimensionalen* kartesischem Koordinatensystem, Vektoren, Skalarprodukt (auf $\mathbb{R}^3$) und im Anschauungsraum gearbeitet.[42]

Zweitens, die Studierenden könnten die euklidische Ebene als einen Spezialfall eines euklidischen Raums aus den Einführungsveranstaltungen zur Linearen Algebra kennen, vgl. auch Abschnitt 1.3.2.

Drittens und eher unwahrscheinlich könnten Studierende eine synthetische Definition mittels moderner Axiomensysteme etwa nach Hilbert andeuten.[43] Dort sind dann euklidische Ebenen Modelle aufgestellter Axiomensysteme. Nun, etwas vorgreifend, kann bereits gesagt werden: Wenig überraschend hat keine Testpersonen die dritte Variante angegeben. Dagegen aber doch überraschend hat sich nur eine Person der prominenten Paralleleneigenschaft genähert: »Die gewöhnliche Zeichenebene, in der sich z.B. zwei Geraden entweder schneiden oder parallel sind«, vgl. *16pre7.1*. Ansonsten spielt das Parallelenpostulat hier keine Rolle.

Nun zur Definition selbst: Üblicherweise wird eine Definition eines Objekts in der Mathematik aussondernd gegeben, das heißt ein zu definierendes Objekt wird mittels eines Oberobjekts mit einschränkenden, definierenden Eigenschaften festgelegt.[44] So etwa »Eine Funktion heißt stetig, wenn sie ...«, »Unter einer Fano-Ebene verstehen wir eine projektive Ebene mit...«. Wir wollen also zunächst wissen, ob eine Definition tatsächlich in dieser Form gegeben wurde und welche Obermengen und definierende Eigenschaften benutzt wurden. Diese Form der Definition wurde tatsächlich in den Daten mehrheitlich gefunden, von den zwanzig hierfür relevanten Antworten (die drei Antworten der »kann/hat«-Form werden nicht berücksichtigt) gaben zwölf Leute ihre Antwort in aussondernder Form an[45] und acht Personen beschrieben die euklidische Ebene als ein Objekt, ohne definierende Eigenschaften anzugeben, etwa »die euklidische Ebene ist der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$«, vgl. *16pre7.6*, aber auch »durch 3 (euklidische) Punkte wird eindeutig eine Ebene festgelegt«, vgl. *17pre10.6*.

[41] vgl. M 5.2 unter `https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26333.html`.

[42] vgl. M 11.2 unter `https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html`.

[43] In den hiesigen fachdidaktischen Veranstaltungen zu elementarer Geometrie wird eine Definition der euklidischen Ebene nach unserem Kenntnisstand entweder nicht gegeben oder die »euklidische Geometrie« wird über George E. Martins Axiome eingeführt.

[44] Genauer genommen ist das nicht richtig: In vielen Definitionen werden aus vorhandenen Objekten neue Objekte mathematisch anderer Form erzeugt (zum Beispiel wird aus einer Menge und einer Abbildung ein Tupel, um eine Gruppe zu definieren); die Überlegung mit der aussondernden Eigenschaft liefert jedoch keine ganz falsche Vorstellung.

[45] »Die gewöhnliche Zeichenebene, in der sich z.B. zwei Geraden entweder schneiden oder parallel sind«, vgl. *16pre7.1*, oder »Eine Ebene, die geordnet ist«, vgl. *19pre4.5*. Hier wurde nicht berücksichtigt, ob die jeweilige Antwort mathematisch korrekt ist.

Als Obermenge wurden sowohl Vektorräume gewählt (vier Mal $\mathbb{R}^2$, drei Mal $\mathbb{R}^3$ und ein Mal $\mathbb{R}^n$) als auch eher geometrische Objekte genannt: »Ebene« (vier Nennungen), »Fläche« (drei Nennungen), »gewöhnliche Zeichenebene« (zwei Nennungen). Hier zeichnet sich bereits ab, dass eine gemeinsame Vorstellung oder gemeinsame formale Definition nicht vorhanden sein wird.

Welche definierenden Eigenschaften wurden genannt? Vor allem viele unterschiedliche: Wir konnten 27 Textstellen finden, in denen eine definierende Eigenschaft angegeben wurde; dabei waren es zwölf verschiedene Eigenschaften. Diese Eigenschaften lassen sich grob auf zwei Kategorien einteilen: in algebraische und in geometrische mit je siebzehn bzw. zehn Nennungen. In einigen Antworten tauchen offenbar mehrere definierende Eigenschaften auf. Dabei sehen wir sechs eher geometrische und sechs eher algebraische Aspekte.

Etwas genauer kann die euklidische Ebene laut Antworten mittels geometrischer Eigenschaften charakterisiert werden: über ihre senkrecht[46] stehenden Achsen bzw. über parallele Geraden (drei bzw. eine Nennungen), über dort durchführbare Operationen (mit Zirkel und Lineal, eine Nennung) sowie über ihre Krümmung als eine »nicht gekrümmte« Fläche, vgl. *17pre10.6*, die »unendlich ausgedehnt« ist (ebd.), je zwei Nennungen.

Von den algebraischen Eigenschaften tauchen besonders häufig die Erklärungen über Dimensionen auf (sechs Nennungen), etwa als eine zweidimensionale Fläche, zweidimensionaler Raum. Auch häufig wird die euklidische Ebene als genau $\mathbb{R}^2$ charakterisiert[47] (vier Nennungen).

Eine weitere häufige Unterkategorie algebraischer Eigenschaften ist das Erzeugen der (euklidischen) Ebene mit verschiedenen Objekten (Achsen, Punkten, Geraden) mit insgesamt fünf Nennungen, etwa »wird durch drei Punkte im Raum aufgespannt«, vgl. *19pre4.2*, oder »durch 3 (euklidische) Punkte wird eindeutig eine Ebene festgelegt«, vgl. *17pre10.6*. Wir haben uns entschieden, Antworten dieser Art algebraisch zu interpretieren: Es ist nicht ganz nachvollziehbar, wie Studierende ihre Antwort genau einordnen, wir vermuten hier die Drei-Punkte-Form einer Ebene[48] wie sie in der Oberstufe unterrichtet wurde. Die Interpretation könnte auch universitär ausfallen, denn etwa in der projektiven Geometrie werden in projektiven Räumen projektive Ebenen als (Unterraum)Erzeugnisse dreier nicht kollinearer Punkte generiert. Allerdings erscheint uns nach genauer Inspektion des Duktus der Antworten die schulische Interpretation wahrscheinlicher.[49]

[46] Etwa »die eukl. Ebene wird durch zwei senkrechte Achsen (›x‹, ›y‹) aufgespannt«, vgl. *19pre4.9*.

[47] Etwa »Definition: $\mathbb{R}^2$«, vgl. *19pre4.3*.

[48] Der Bezug zur *euklidischen* Ebene (im Kontrast zu affinen, projektiven etc. Ebenen) wird in den zitierten Antworten jedoch nicht geklärt.

[49] Diese interessante Möglichkeit einer minimalistischen Definition der euklidischen Ebene mahnt zur

Eine weitere, seltenere algebraische Eigenschaft benennt Normen / Abstände: »Ein zweidimensionaler Raum in dem Abstände zwischen 2 Punkten $x\&y$ als $|x - y|$ festgelegt sind«, vgl. *19pre4.4*, sowie »die euklidische Ebene ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Norm, die durch das euklidische Skalarprodukt induziert wird«, vgl. *16pre7.2*.

Natürlich benutzen viele Studierende in ihrer Antwort geometrisch-anschauliche und zugleich algebraische Ausdrücke: »Für mich ist die euklidische Ebene ›die Ebene der Tafel‹, also anschaulich gemacht. Also etwas Zweidimensionales« oder »eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{R}^n$-VR«, vgl. *19pre4.3* bzw. *17pre10.5*. Das zeigt, dass Studierende in ihrer personal concept definition durchaus Vorstellungen mit definierenden Eigenschaften mischen.

Zum Vergleich und zur besseren Einordnung wollen wir die Antworten der drei externen Personen aus ^{17}Pretest hier anführen. Alle drei haben keine geometrische Interpretation erkennen lassen, die algebraische Natur der Vorstellung manifestiert sich bei allen drei in Form der Obermenge $\mathbb{R}^2$. Dabei formulieren zwei von drei ihre Antwort als eine Definition: »$\mathbb{R}^2$ mit [...]«. Die dritte Person deutet einen Unterschied zwischen Vorstellung und Definition an, wenn sie schreibt: »$\mathbb{R}^2$ als eher anschauliche Vorstellung. Ich weiß, dass da noch was fehlt, also etwa [...] die euklidische Norm«, vgl. *17pre10.ext3*. Bei allen Drei ist das Charakterisierende, was auf $\mathbb{R}^2$ folgt, eher struktureller und nicht anschaulicher Natur.

Es fällt auf, dass die Antworten zur euklidischen Geometrie recht vektorraumlastig sind. In fast jeder Definition oder Vorstellung spielen Dimensionalität, Vektorräume oder Erzeugnisse eine Rolle. Diese Begrifflichkeit und Sichtweise können wir eher der analytischen Geometrie zuordnen. Die synthetische Sichtweise auf die euklidische Geometrie/Ebene mit Punkten, Geraden, Parallelitäten, Inzidenzen – also die der axiomatischen Sichtweise von Euklid, Hilbert usw. – ist in purer Form nur zwei Mal vorhanden: »Die gewöhnliche Zeichenebene, in der sich z.B. zwei Geraden entweder schneiden oder parallel sind« bzw. »nicht gekrümmte (unendlich ausgedehnte) Fläche«, vgl. *16pre7.1* bzw. *17pre10.6*. Alle anderen Antworten verwenden eher die analytische oder gemischte Sichtweise. Die Mischform ist mit etwa neun Nennungen[50] relativ häufig vertreten. Diese Mischung haben wir bereits bei den definierenden Eigenschaften gesehen. Wir vermuten, dass solche Antworten eher aus der Schulsprache oder der Sprechweise aus den entsprechenden Veranstaltungen

Vorsicht, denn sie ist noch nicht endgültig überzeugend: In der zweiten zitierten Antwort ist eine gewisse Zirkularität nicht behoben; in der ersten könnten etwa auch Erzeugnisse von drei Punkten in Vektorräumen über endlichen Körpern betrachtet werden.

[50] Etwa »Ich würde die euklidische Ebene als Menge aller Punkte definieren die auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegen«, vgl. *17pre10.2*, oder »eindimensionale Ebene«, vgl. *16pre7.4*.

zur Didaktik der Geometrie entstammen; diese Ausdrucksweise lässt sich weniger mit linear-algebraischer Tradition vereinbaren.

Die restlichen Antworten werden mehrheitlich von der analytischen Sprechweise dominiert, dabei teilen sie sich in zwei Gruppen auf: eher vektorielle oder eher kartesische Sprechweise. Die erstere mit einschlägigen Vorstellungen wie »die euklidische Ebene ist der $\mathbb{R}^2$«, vgl. *19pre4.10*, oder »ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$«, vgl. *16pre7.9*, bezieht sich eher auf Vektorräume. Die andere hat mutmaßlich eher den schulischen Zungenschlag, wobei Achsen und Koordinaten die Vorstellung dominieren: »Ein Punkt in der Ebene ist durch seine x,y-Koordinaten eindeutig bestimmt«, vgl. *19pre4.9*, »die Ebene, die man aus der Schule kennt. Die euklidische Ebene wird durch drei Achsen aufgespannt, die alle senkrecht aufeinander stehen«, vgl. *19pre4.8*. Diese achsenlastige Vorstellung war verstärkt im ^{19}Pretest vorhanden: Vier von neun analysierten Antworten bedienten diese Vorstellung.

Wir sehen also, dass Studierende zur Beschreibung der euklidischen Ebene hauptsächlich auf die algebraische Sprache der analytischen Geometrie zurückgreifen, Begriffe der synthetischen Geometrie werden hauptsächlich mit denen der analytischen gemischt. Wir können daher mutmaßen, dass eine Besprechung der Grundlagen der euklidischen Ebene, wie dies in unseren Kursen geschah, unter der Zuhilfenahme der reellen Zahlen, etwa im Sinne von George E. Martin, den Studierenden näher als der synthetische Ansatz von Hilbert ohne Rückgriffe auf $\mathbb{R}$ läge. !

Welche weiteren Aspekte der euklidischen Ebene lassen sich identifizieren? Obwohl die Fragestellung bereits die Formulierung »die euklidische Ebene« enthält, fassen acht Personen die euklidische Ebene als ein nicht eindeutiges Objekt auf bzw. schließen die Existenz mehrerer Ebenen, die die Eigenschaft haben, euklidische Ebene zu sein, nicht aus: »ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$«, vgl. *16pre7.9*, »eine Ebene, die durch einen Eckpunkt und 2 Geraden entsteht«, vgl. *16pre7.12*. Hier interpretieren wir »eine *jede* Ebene, die das tut« hinein. Zwölf Studierende schreiben dagegen über »die« euklidische Ebene oder lassen erkennen, dass diese für sie ein eindeutiges Objekt ist. Auch daran ist erkennbar, dass Studierende keine feste gemeinsame Vorstellung von »der euklidischen Ebene« haben; viele von ihnen billigen bewusst oder unbewusst verschiedenen Objekten zu, »euklidische Ebene« zu sein. Diese Vielfalt ist bei den externen Personen nicht vorhanden: Sie sprechen gemeinsam von $\mathbb{R}^2$, das wir in der Regel als ein eindeutiges Objekt ansehen würden.[51] Wir wissen nicht, ob dieser Aspekt rein sprachlicher Natur ist, oder ob Studierende die Existenz mehrerer (womöglich nicht isomorpher) euklidischen Ebenen zulassen. Das ist in der Tat,

[51] Präziser würden wir sagen $\mathbb{R}^2$ ist bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt; jeder der unendlich vielen zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^3$ kann beispielsweise zur Definition der euklidischen Ebene, die dann auch bis auf Isomorphie festliegt, herangezogen werden.

abhängig von der gewählten Definition der euklidischen Ebene, nicht ganz offensichtlich: George E. Martin definiert jedes Modell eines gewissen Axiomensystems als euklidische Ebene und *beweist* dann, dass alle solchen Modelle isomorph sind, vgl. [Mar75, S. 320, 323]. Gedanken dieser Art sind in den Antworten in keinster Weise erkennbar.

Neben dem Eindeutigkeitsaspekt der euklidischen Ebene haben wir den Anschauungsaspekt in den Daten ausgemacht. Vier Studierende verbinden die euklidische Ebene explizit mit etwas Anschaulichem, der Zeichenebene, der Tafelebene, sie diene als Veranschaulichung, vgl. *16pre7.1,7, 17pre10.1, 19pre4.3*.

Es ist uns ferner aufgefallen, dass nur ganz wenige Antworten eine ausgeprägt universitäre Ausdrucksweise aufweisen. So etwa »$:= \{X \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ Ebene}\}$«, vgl. *17pre10.2*, oder »$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Norm, die durch das euklidische Skalarprodukt induziert wird« in *16pre7.2*, oder »ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$« aus *16pre7.9*. Diese Ausdrucksweise ist der Universität nicht vorbehalten, wo sie routiniert verwendet wird, doch ist sie wohl weniger im Schulgebrauch Standard. Die anderen Antworten sind mitnichten außeruniversitär oder »verschult«, doch könnten sie zweifellos auch im Schulunterricht formuliert werden, etwa »eine Ebene, die durch einen Eckpunkt und 2 Geraden entsteht«, vgl. *16pre7.12*, oder »ein zweidimensionaler Raum in dem Abstände zwischen 2 Punkten x&y als $|x - y|$ festgelegt sind«, vgl. *19pre4.4*.

Interessanterweise klingen die Antworten der externen Personen eindeutig universitär. Das ist nicht verwunderlich. Verwunderlich finden wir eher die geringe Anzahl der Antworten der Studierenden, die eindeutig universitär klingen. !

Bemerkung 7.9. Vielleicht ist hier eine gute Stelle, um die Antworten der externen Personen zu zitieren, um einen besseren Vergleich zu studentischen Antworten zu haben.

> *17pre10.ext1*: »Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standard Skalarprodukt«.
>
> *17pre10.ext2*: »Ich würde die eukl. Ebene als $\mathbb{R}^2$ definieren mit den üblichen Vektorraumeigenschaften des $\mathbb{R}^n$«.
>
> *17pre10.ext3*: »$\mathbb{R}^2$ als eher anschauliche Vorstellung. Ich weiß, dass da noch was fehlt, also etwa Metrik oder eine Norm, z.B. die euklidische Norm«.

Auch wenn den Antworten unterschiedliche Qualität zukommt, klingen sie anders als typische Antworten der Studierenden. $\sharp$

Welche unerwarteten Aspekte lassen sich beobachten? »keine Antwort« kam im Wesentlich von niedrigeren Semestern (vier Mal drittes Semester und ein Mal siebtes Semester). Das ist gewissermaßen erstaunlich, denn die Lineare Algebra wurde bereits von allen Studierenden besucht, das heißt die Definition der euklidische Räume liegt bereits in der Vergangenheit. Es ist jedenfalls kein offensichtlicher Grund erkennbar, warum höhere Semester bei dieser Frage besser abschneiden sollten. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass Studierende in höheren Semestern mehr mathematische Erfahrung besitzen und zumindest seltener ganz falsche Antworten aufschreiben würden. Das können wir aber hier nicht genauer beurteilen, untersuchen aber im Folgenden einen möglichen Zusammenhang zwischen der Qualität der Antwort und der Semesterzahl der Testperson.

Einige Studierende haben (zumindest ist das ihren Antworten zu entnehmen) teilweise seltsame Vorstellung über die euklidische Ebene, wie folgende Zitate belegen. So werde sie in *16pre7.8* als eine »endliche Teilmenge vom $\mathbb{R}^3$« dargestellt oder in *19pre4.8* »durch drei Achsen aufgespannt«. Die euklidische Ebene sei »geordnet« und habe eine »Skala«, vgl. *19pre4.5*, sei »ein flaches Stück Papier«, vgl. *19pre4.10*, sei eine ihrer Teilmengen oder sie lasse Operationen »*nur* mit Zirkel und Lineal« [Hervorhebung D.N.] zu, vgl. *16pre7.6*. All diese Vorstellungen ließen sich erklären,[52] aber mangels größerer Datensätze nicht vernünftig verallgemeinern. Daher bleibt unklar, ob diese teilweise ungewöhnlichen Vorstellungen nur einzelne Phänomene oder mehreren Menschen zuordenbare Fehlvorstellungen sind.

Sehr interessant sind die konträren Vorstellungen darüber, welches Objekt die Veranschaulichung des anderen ist. Dazu vergleichen wir die Antwort »die euklidische Ebene ist die Veranschaulichung des kanonischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ (in Form eines kartesischen Koordinatensystems)« von *17pre10.1*, mit der einer externen Person »$\mathbb{R}^2$ als eher anschauliche Vorstellung [der euklidischen Ebene]«, vgl. *17pre10ext.3*.

Dieser Vergleich zwischen der euklidischen Ebene und $\mathbb{R}^2$ in diesen beiden Aussagen ist einzigartig. Sie bekräftigen die Vermutung, dass es keine allgemeine Vorstellung des Begriffs »euklidische Ebene« geben wird. Die Antwort der externen Person entspricht eher der Lehrmeinung: $\mathbb{R}^2$ (mit Skalarprodukt) ist ein Modell der euklidischen Ebene, die abstrakt axiomatisch definiert ist. Interessant in der ersten Antwort ist eine mutmaßliche Unterscheidung zwischen $\mathbb{R}^2$ und dem kartesischen Koordinatensystem.

Insbesondere zeigen diese beiden Antworten auf, dass die euklidische Ebene sowohl als eine Abstraktion, deren Modell ein Vektorraum (mit Koordinaten, bekannten Zahlen; ein im Studium wohl untersuchtes Objekt) ist, als auch als ein Modell (als Zeichenebene, bekannt aus der Schule) des abstrakten Vektorraumbegriffs fungieren und gedacht werden kann.

Überraschend selten in den schriftlichen Daten – genau ein Mal – ist die Vorstellung der Ebene als ein (unendliches) Blatt Papier, dass in persönlichen Gesprä-

[52] Das Vorhandensein einer Skala zum Beispiel geht vermutlich direkt auf die schulische Vorstellung der Ebene mit einem Achsenkreuz und Teilstrichen auf den beiden Achsen zurück, wie das oft abgebildet wird.

chen durchaus öfter zu hören war. Auch die unendliche Ausdehnung und »Flachheit« der Ebene war nur selten vertreten,[53] obwohl dies laut Wikipedia *die* Vorstellung über eine mathematische Ebene ist: »In mathematics, a plane is a flat, two-dimensional surface that extends infinitely far«.[54]

Überraschend selten gab es ferner die Vorstellung der euklidischen Ebene als die Gaußsche Zahlenebene bzw. die Menge $\mathbb{C}$: »$\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}$«, vgl. *16pre7.10*.

Obwohl uns das erzeugte Codierschema als gesättigt erscheint, zeigen diese Einzelzitate auf, dass ihre tatsächliche oder nur scheinbare Einzigartigkeit in größeren Befragungen geklärt werden sollte.

Welche mathematische Güte kann den Antworten zugeordnet werden? Alle gegebenen Antworten haben wir auf ihre mathematische Korrektheit überprüft. Zunächst teilen sie sich in zwei Gruppen auf: Die unbewerteten neun Antworten und die restlichen, die sich in weitere fünf Hauptkategorien einteilen lassen. In Tabelle 7.6 schlüsseln wir die Häufigkeiten der einzelnen Kategorien nach Semesterzahlen der Personen auf, um einen Eindruck davon zu bekommen und Tendenzen zu erkennen.

mathematische Qualität	*Häufigkeiten nach Fachsemester*						
	3.	**5.**	**7.**	**8.**	**9.**	**11.**	**13.**
keine Antwort	4		1				
»weiß nicht«			1			1	1
Themenverfehlung	1						
mathematisch falsch	3	2	1				
mathematisch vertretbar	2			1	2		
fast gut, aber kein Körper			2		2		
fast gut, aber kein Abstand	2		1		3	1	
gute Antwort					1	1	

Tabelle 7.6.: Verteilung der mathematischen Güte sortiert nach Fachsemester.

Aufsummiert ergeben die Häufigkeiten die Zahl 33 (statt 32 beteiligten Personen), das liegt daran, dass eine Person zwei wesentlich unterschiedlich qualitative Antworten gegeben hat, die wir als verschiedene Antworten werten wollen: »Eine Ebene, die in den Rationalen zahlen liegt $\neq \mathbb{C}$. Def: Eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{R}^n$-VR«, vgl. *17pre10.5*. Betrachten wir zunächst einige Beispiele, um die Kategorien besser zu verstehen.

[53] vgl. *17pre10.6, 19pre4.7*: »2-dimensionale Ebene, [...] die unendlich groß ist« bzw. »nicht gekrümmte (unendlich ausgedehnte) Fläche«.

[54] vgl. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plane_(geometry)`. Aufgerufen: 10. Januar 2022.

Beispiel 7.10. »Eine Ebene, die geordnet ist« ist mathematisch falsch, vgl. *19pre4.5*. In der Regel gibt es hier keine globale Anordnung und die Darstellung ist überaus unspezifisch.

»Die euklidische Ebene enthält alle Punkte, die von zwei Achsen (z.B. x und y) aufgespannt werden« ist eine mathematisch vertretbare, aber keine gute Antwort, vgl. *19pre4.1*. Die nachfolgende bessere Antwort ist ähnlich, aber hier fehlt die exklusive Beziehung; es wird nur gesagt, was in dieser Ebene liegt, aber nicht spezifiziert, ob dies auch alles ist, was dort zu finden ist. Weitere Kritikpunkte sind wie in der nachfolgenden Antwort.

»Die eukl. Ebene wird durch zwei senkrechte Achsen (›x‹, ›y‹) aufgespannt« ist eine gute, aber wesentlich unvollständige Antwort, vgl. *19pre4.9*. »Senkrecht« ist hier nicht nötig, es ist nicht klar, was »Achsen« sein sollen, auch unklar in welchem Kontext »aufgespannt« zu verstehen ist, denn die zugrunde liegende Struktur ist nicht spezifiziert. Offenbar ist die Vorstellung geprägt vom Achsenkreuz wie in der Schulgeometrie. Die Vorstellung ist nicht falsch, ist aber keine gute Definition. Wir sortieren die Antwort unter »fast gut, aber kein Körper« ein.

»Die euklidische Ebene ist der $\mathbb{R}^2$« wie in *19pre4.10* ist nur zum Teil richtig, eine geeignete Abstandsmessung fehlt, daher geben wir dieser und ähnlichen Antworten das Prädikat »fast gut, aber der Abstand fehlt«. Wir wollen keine qualitative sondern nur inhaltliche Unterscheidung zwischen diesen beiden fast guten Kategorien sehen. $\sharp$

Ein Drittel der Antworten waren »fast gut« – elf Instanzen. Das andere Drittel waren mathematisch falsche oder vertretbare Antworten. Lediglich zwei Antworten, beide aus dem ^{16}Pretest, sehen wir als gute Antworten: Sie enthalten bereits akzeptable Definitionen oder lassen sich zu solchen ohne Weiteres ergänzen.

> »Die euklidische Ebene ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Norm, die durch das euklidische Skalarprodukt induziert wird«, vgl. *16pre7.2*.
>
> »Die euklidische Ebene ist der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; in der eukl. Eb. Können Operationen nur ›mit Zirkel und Lineal‹, also mit einer Geraden und einem Abstands-Übertrager durchgeführt werden«, vgl. *16pre7.6*.

Das erste Zitat ist dabei die einzige mathematisch einwandfreie Antwort aus allen Pretests. Die Einordnung des zweiten Zitats ist etwas diskutabel, aber dort sind die entscheidenden Ingredienzen, der zweidimensionale reelle Vektorraum und die euklidische Abstandsmessung, vorhanden. Wir haben schon weiter oben bemängelt, dass hier von »nur« mit Zirkel und Lineal die Rede ist, auch daher ist die Antwort mathematisch nicht einwandfrei.

Bemerkung 7.11. Der Blick zu externen Personen zeigt eine deutlich höhere Qualität ihrer Antworten im Vergleich zu Studierenden. Die Antwort vgl. *17pre10.ext1* ist mustergültig, vgl. Bemerkung 7.9. Die Antwort *17pre10.ext2* ist fast gut, aber ihr fehlt ein Skalarprodukt. Die Antwort *17pre10.ext3* ist gut und eigentlich einwandfrei. $\sharp$

Achtzehn Antworten sind mindestens mathematisch vertretbar und haben also eine akzeptable und nachvollziehbare personal concept definition. Ein Drittel ist in diesem Kontext nicht weit von einer formal concept definition entfernt, jedoch nur eine Person gibt eine solche an.

Es ist jedoch festzustellen, dass fast die Hälfte der Antworten (15 von 33) keine mathematisch vertretbare Qualität aufweist. Diese Zahlen sind nicht erfreulich, auch wenn der Begriff »euklidische Ebene« sicherlich kein im üblichen Fach-Curriculum häufig vorkommende Begriff ist.

Bemerkung 7.12. Speziell bei dieser Frage ist uns aufgefallen, dass höhere Semester teilweise bessere Antworten abgeben als niedrigere, vgl. Tabelle 7.6. Aufgrund des Datenmaterials (33 Antworten verteilt auf sieben verschiedene Semester und je nach Gruppierung fünf bis sieben verschiedene Güten) erschien eine statistische Analyse kaum möglich. Wir wollen kurz beschreiben, wie wir hier vorgegangen sind und warum wir auf eine detaillierte Auswertung verzichten.

Wir haben die leeren, »ich weiß nicht« Antwort sowie die Themenverfehlung mit 0 bewertet, mathematisch falsche Antworten mit einer $0,5$ (weil dort zumindest gewisse Vorstellungen genannt wurden), mathematisch vertretbare Antworten mit einer 1, fast gute mit einer 2 und die guten Antworten mit einer 3. Somit haben wir fünf quantitative Bewertungskategorien. Die konkreten Zahlen haben keine tiefere Bedeutung, ihre Wahl ist sicherlich diskutabel, erscheint uns jedoch für basale Korrelationsberechnungen nicht allzu abwegig zu sein.

Eine ungefilterte Korrelationsberechnung (unter der Annahme eines linearen Modells) ergibt einen positiven Korrelationskoeffizienten von etwa 0,4.[55] Auch ein Chi-Quadrat-Test (dessen Anwendung hier durchaus problematisch ist) hilft hier kaum weiter.[56]

Es wäre möglich, die Daten etwas zu präparieren und etwa einige Semester zusammenzufassen[57] sowie zusätzlich die Mittelwerte der oben eingeführten Zahlen pro Semester oder mehrere Semester als neue Datenpunkte zu bilden. Auf diese Weise ist es möglich, die gesamte Datenmenge auf drei noch theoretisch vertretbare Datenpunkte zu reduzieren. Dann sehen wir tatsächlich ein gutes Fitting zwischen steigender Semesterzahl und mathematischer Qualität der Antwort, aber dieses Ergebnis wollen wir in keinster Weise als einen Beleg unserer Beobachtung, sondern höchstens als einen vermuteten Zusammenhang deuten, welcher in weiteren Untersuchungen überprüft werden könnte. $\sharp$

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass

- Studierende keine gemeinsame Vorstellung zur euklidischen Ebene haben,
- aber ihre Definitionen eher der analytischen Geometrie zuordenbar sind,
- die mathematische Qualität der Antworten recht durchwachsen ist, aber mit steigendem Fachsemester möglicherweise steigt,
- mehr als die Hälfte der Studierenden eine vertretbare Vorstellung zur euklidischen Ebene besitzt.

[55] Der Wert ist nur eine sehr grobe Schätzung, er hängt etwa von den Bewertungszahlen ab. Dieser ändert sich aber unter vertretbaren Abänderungen der Bewertungszahlen nicht sehr stark.

[56] Wir erhalten hier einen p-Wert von etwa 0,17.

[57] Etwa solche aus dem ersten, zweiten und dritten Drittel des Studiums bei durchschnittlicher Studiendauer von zwölf Semestern.

7.2.9. Fragen 6_{16}, 8_{17} und 5_{19}: Axiom erklären

In diesem zentralen Abschnitt wollen wir der schwierigen Frage nachgehen, welche personal concept definitions Studierende zum Axiomenbegriff haben. Dazu analysieren wir Antworten auf die Items 6_{16}, 8_{17}, 5_{19}. Diese drei Items wurden verschieden formuliert:

16pre6 Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?

17pre8 Was ist ein Axiomensystem? Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?

19pre5 Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären? Wie würden Sie es definieren?

Die Unterschiede in der Formulierung sind deutlich. In jedem Fall sollen Testpersonen das Wort »Axiom« jemandem erklären, das ist der gemeinsame Durchschnitt. Zusätzlich sollen Testpersonen in ^{17}Pretest ein Axiomensystem erklären und in ^{19}Pretest Axiome zu definieren versuchen. Wir wollen dennoch die gegebenen Antworten auf diese verschiedenen Fragen als einen Textkorpus analysieren. Dabei separieren wir die Analyse des Axiomensystems vom Rest. Wir werden sehen, dass keine Testperson einen expliziten Unterschied zwischen »erklären« und »definieren« macht, daher erscheint unsere Absicht, die Antworten als gewissermaßen homogen zu betrachten, zunächst plausibel. Die erste Statistik gibt einen Überblick: Es gab

$$\text{16pre6} + \text{17pre8} + \text{19pre5} = 14 + 8{+}(3) + 10 = 32{+}(3) \text{ Antworten.}$$

Eingeklammert sind die der externen Personen. Dabei hat jede Testperson eine nichtleere Antwort gegeben, eine Beobachtung, die auch im Vergleich zur Frage nach der euklidischen Ebene aus Abschnitt 7.2.8 erstaunt. Jede einzelne Testperson hat also eine Vorstellung von Axiomen, die sie mit mindestens einem Satz erklären kann.

Wir haben aus dem Material aller drei Pretests das Codierschema entwickelt.[58]

In ^{17,19}Pretest haben wir zusätzlich die Items 9_{17} und 6_{19}, in denen Unterschiede zwischen Axiomen, Definitionen, Theoremen erklärt werden sollen. Wir wollen dieses zusätzliche Material in der Analyse nutzen, um ggf. tiefere Einsichten in das Antwortverhalten der Studierenden zu bekommen. Konkret beschreiben vereinzelte Testpersonen Axiome in den Items 9_{17} und 6_{19} anders als in den eigentlichen Items bzw. fügen sie wesentliche Aspekte hinzu. In diesen Fällen ziehen wir diese zusätzlichen Informationen für die Analyse des Axiom-Items heran.

Um die Antworten zu verstehen und auszuwerten, orientierten wir uns an den folgenden Fragen:

a) Werden Axiome in den Antworten definiert? Wenn ja, wie?
b) Welche Aspekte / Eigenschaften von Axiomen können identifiziert werden? Wie tragen sie zur Definition bei?
c) Wird eher eine mathematische oder eher alltägliche Antwort gegeben?

[58] vgl. »Codierschema Code:Axiom.pdf« im digitalen Zusatzmaterial.

d) Welche mathematische Fehler lassen sich erkennen?
e) Welche mathematische Güte weisen die Antworten auf?
f) Wie wird ein Axiomensystem beschrieben?
g) Was ist zu den Unterschieden zwischen Axiom, Definition, Satz zu sagen?

Wir fangen zunächst von unten an, um die zusätzlichen Fragen aus dem Weg zu räumen und uns dann auf den Axiomenbegriff zu konzentrieren.

7.2.9.1. Personal concept definitions zum Axiomensystem

Wir betrachten nur ^{17}Pretest, um die Frage nach dem Axiomensystem zu analysieren, weil nur dort direkt danach gefragt wurde. Wir betrachten auch nur solche Antworten, in denen das Wort »Axiomensystem« explizit gefallen und erklärt wurde. Wir zählen hier fünf von acht solcher Antworten bei Studierenden und zwei von drei bei externen Personen. Bis auf eine Antwort werden Axiomensysteme in diesen Antworten als Container für Axiome präsentiert: »Sammlung widerspruchs- ! freier Axiome«, vgl. *17pre8.6*, »ein Axiomensystem enthält verschiedene Axiome«, vgl. *17pre8.4*, der meist durch eine oder mehrere Eigenschaften bestimmte Axiome bündelt: sinnvoll, widerspruchsfrei, minimal, als Grundlage einer Theorie. Interessanterweise sprechen die externen Personen vom Axiomensystem als dem wichtigeren Part, das Axiom ist bei ihnen lediglich ein Element des Axiomensystems. Bei Studierenden wird eher ein Axiom erklärt und mit Eigenschaften versehen; Axiomensysteme sind dann bloß Mengen von Axiomen. Die externen Personen kommen also der Darstellung, die wir in Definition 1.8 geben, näher.

Die Analyse der Antworten fällt uns leichter, wenn wir Antworten der externen Personen denen der Studierenden gegenüber stellen. Hier wird bereits deutlich, dass externe Testpersonen die metamathematischen Qualitätskriterien eines Axiomensystems, vgl. Abschnitt 1.3.1, eher kennen und Studierende eher nicht kennen oder für die Antwort als nicht wichtig ansehen.

Diese Beobachtung können wir etwa anhand der Vollständigkeit sehen, also der Forderung, alle in der Sprache der Theorie formulierbaren Sätze auf die gewählten Axiome zurückführen zu können: »D.h. alle Sätze können mit ihnen und ggf. bereits bewiesenen Sätzen bewiesen werden«, vgl. *17pre8.ext3*. Dies ist in der Tat eine realistische Forderung im Vergleich zum studentischen »alles weitere«, vgl. *16pre6.13*. Nur eine externe Person spricht alle drei Kriterien an, aber alle sprechen von Minimalität oder Widerspruchsfreiheit in diesem Kontext. Das ist bei Studierenden nicht der Fall. Dort[59] taucht ein einziges Mal ein solches Kriterium auf: »Axiomensystem ist dann eine Sammlung widerspruchsfreier Axiome«, vgl. *17pre8.6*. Studierende beschreiben eher den Nutzen eines Axiomensystems: Es dient zur Aufbau der Theorie

[59] Wir sprechen hier nur von den Antworten auf die Frage »Was ist ein Axiomensystem?«.

bzw. »um weitere Aussagen herzuleiten«, vgl. *17pre8.6*. Externe Testpersonen geben nicht unbedingt eine formal(aufgeschrieben)e Antwort, aber ihre Antworten enthalten solide mathematische Vorstellungen über Axiomensysteme. Studierende beschreiben hier etwas »alltagssprachlich« (falls dieses Adjektiv zur Aufklärung der Situation überhaupt hilfreich ist) was sie sich unter Axiomensystemen vorstellen. Ihre Vorstellungen sind dadurch keineswegs falsch, aber sie liegen einer Definition eines Axiomensystems ferner. Gleichzeitig antworten sie nicht wesentlich anders (nur etwas schlechter formuliert) als es in der Literatur der Fall ist, vgl. Seite 46 für die hilbertsche Darstellung.

Die Antwort einer externen Person kann kaum lakonischer und zugleich solide sein: »Axiomensystem zu einer Theorie: Die Menge aller minimal nötigen Axiome, die widerspruchsfrei diese Theorie aufbauen«, vgl. *17pre8.ext3*.

Eine weitere Antwort enthält eine Vorstellung, die wir nicht entschlüsseln können: »Axiomensystem: Eine Modellvorstellung die auf nicht verifizierte[n] Gesetze[n] beruht«, vgl. *17pre8.5*. Es ist unklar, was mit der Modellvorstellung gemeint sein könnte. Die nicht verifizierten Gesetze klingen nach unbewiesenen Axiomen, wie es oft formuliert wird. Letztlich können wir uns darauf keinen Reim machen.

Die restlichen Antworten verzichten auf eine explizite Erklärung eines Axiomensystems, sprechen jedoch von »Axiomen« oder geben ein Beispiel eines Axiomensystems an.

Es ist erstaunlich, dass nur eine Person ein Beispiel eines Axiomensystems andeutet: »Bsp. Newton«, vgl. *17pre8.8*. Weder Euklid, noch Kolmogorow, noch Axiome für projektive Räume, noch Axiome eines Vektorraums werden je genannt. Erst nachdem uns das aufgefallen ist, haben wir gemerkt, dass ein Beispiel hier ganz natürlich wäre. Offenbar verspüren die Antwortenden keinen Bedarf an Beispielen für ihre Erklärungen.

Insgesamt sind die Vorstellungen zu Axiomensystemen aus mathematischer Sicht zufriedenstellend. Die Vorstellung eines Containers für Axiome scheint stabil zu sein, sie ist in nahezu allen Antworten explizit oder implizit erkennbar. Für eine Definition eines Axiomensystems ist die Vorstellung auch ausreichend.

Allerdings, wenn Studierende die Qualitätskriterien von Axiomensystemen nur wenig kennen, wäre es wünschenswert, das zu ändern.

7.2.9.2. Axiom vs. Definition vs. Theorem

Die Items 9_{17}, 6_{19} erfragten die Unterschiede zwischen den Begriffen »Axiom«, »Definition«, »Theorem/Satz«. Wir widmen der Analyse nur einen Unterabschnitt. Zum Einen fällt die Analyse recht kurz aus, zum Anderen haben wir die Antworten auf diese Items hinzugezogen, um die Antworten auf die Axiom-Items besser zu verstehen und einzuordnen. Daher ist der nachfolgende Bericht hier gut platziert.

Ein Muster in den Antworten zu finden ist nicht leicht, zu sehr unterscheiden sich die Antworten. In mehreren Fällen werden die drei Begriffe separat erläutert, aber ein Zusammenhang oder Unterschied nicht angedeutet.

Bei den Definitionen ist ein Muster jedoch sehr deutlich: Studierende wissen, welche Rolle einer Definition zukommt, sie legt Begriffe fest. Typischerweise wird dies verschiedentlich präzisiert: Die Begriffe werden durch Definitionen eindeutig/ willkürlich festgelegt, ohne eine Aussage über die Begriffe zu machen, etwa »eine Definition ist eine willkürliche Zuordnung einer Bezeichnung zu einem bestimmten Sachverhalt«, vgl. *19pre6.2*. Bei Definitionen sind daher kaum Probleme erkennbar.

Wie bereits erwähnt, haben Studierende aus ^{17}Pretest teilweise Probleme mit dem Wort »Theorem«. So verwechselt eine Person es mit einer Vermutung: »Ein Theorem ist auch eine Art Regel / Vorschrift / Formel bei der man von ausgeht, dass sie stimmt, aber sich nicht sicher ist«, vgl. *17pre9.8*. Drei Personen sagen nichts dazu oder kennen es schlicht nicht: »ein Theorem kann ich nicht erklären«, vgl. *17pre9.7*, oder erwähnen es gar nicht (zwei Mal). Drei Studierende von acht erklären Theoreme korrekt (eine Art Aussage, die aus Axiomen abgeleitet wird), eine Darstellung ist merkwürdig: »Ein Theorem ist die Vorform eines Axioms, d.h. es muss noch dementsprechend durch empirische Forschung bestätigt werden«, vgl. *17pre9.2*. In ^{19}Pretest tauchen ebenfalls teilweise merkwürdige Erklärungen eines Satzes, aber in der Regel wird dieser Begriff sachgemäß erklärt.

Der Begriff der Definition ist der weniger problembehaftete von den dreien.

Wenn die Unterschiede aufgezeigt werden, dann mittels Wahrheit/Gültigkeit, aber auch Beweisbarkeit oder Eindeutigkeit der jeweiligen Begriffe. Das erläutern wir in Kürze. Zunächst zu Definitionen.

So wird der Unterschied zwischen Definitionen und Axiomen mal an der *Eindeutigkeit* festgemacht: »Eine Definition ist abhängig vom Definitionsgeber. Jeder kann sich Dinge definieren, wie es ihm gefällt, d.h. Definitionen sind unterschiedlich. Ein Axiom existiert nur in der einen Form«, vgl. *17pre9.2*, mal an der *Beweisbarkeit* »Deshalb müssen Definitionen auch grundlegend nicht bewiesen werden, können aber auch nichts beweisen (im Gegensatz zu Axiomen)«, vgl. *17pre9.3*, oder *Wahrheit* »Axiom setzt Inhalte oder Aussagen als wahr fest. Definition legt Bezeichnungen fest«, vgl. *17pre9.6*. Auch hier gibt es keine Einheitlichkeit.

Zu mathematisch nicht vertretbaren Darstellungen kommt es vereinzelt dann, wenn zwischen den drei Begriffen ein Unterschied oder Zusammenhang erklärt wird: »Axiome werden als natürlich gegeben vorausgesetzt & allgemein als wahr akzeptiert. Definitionen sind Begriffsklärungen & benötigen keine Verifizierung«, vgl. *19pre6.4*. Das ist weitestgehend in Ordnung, der Text geht aber mit »Sätze leiten sich aus Definitionen ab. Alle math. Sätze müssen bewiesen werden. Der Unterschied liegt also darin, ob man die Richtigkeit von Axiomen/Def./Sätzen beweisen muss oder nicht & also Def. auf Axiomen & Sätze wiederum auf Definitionen aufbauen«. Dieses längere Zitat zeigt passende Vorstellungen zu einzelnen Begriffen, aber Schwierigkeiten, wenn es um Abgrenzungen dieser Begriffe geht. Gleichzeitig ist das gar nicht so einfach, die Problemstellen sicher zu identifizieren. Beispielsweise in dieser Antwort leiten sich Sätze aus Definitionen ab, das ist zumindest sprachlich eine unglückliche Formulierung, weil Ableiten eher mit Beweisketten in Verbindung gebracht wird. Außerdem bauen hier Definitionen auf Axiomen auf. Nach Hilbert ist das unter Umständen genau richtig (das macht es schwer, Fehler als solche zu benennen), allerdings erscheint hier die hilbertsche Interpretation kaum wahrscheinlich zu sein und wir sehen hier eher eine unvorteilhafte Vorstellung.

Bei den richtigen Darstellungen werden in der Regel Definitionen von Axiomen und Theoremen getrennt (legen Begriffe fest vs. enthalten eine Aussage) und der Beweisbarkeitsunterschied wird dann zwischen Axiomen und Theoremen gezogen: »Ein Satz kann im Gegensatz zu einem Axiom bewiesen werden. Eine Definition enthält keine Aussage über Zusammenhänge von Begriffen, sondern Definitionen legen fest, wie bestimmte Dinge bezeichnet werden«, vgl. *19pre6.9*.

Einzelne seltsamen Darstellungen klingen zunächst falsch, aber auch sie lassen sich teilweise tiefsinnig interpretieren und als korrekt betrachten – es bleibt leider unklar, ob dieses Hineininterpretieren der Sichtweise der Testperson entspricht. So lesen wir »Satz: Bewiesenes Axiom« in *19pre6.10*. Das klingt überraschend, aber es muss nicht notwendig falsch sein, vor allem weil hier Axiome den Status einer Art Vermutung haben, vgl. ebenda: »Axiom: Annahmen über den Zusammenhang zwischen def. Begriffen und ohne Beweis«.

! Insgesamt sind die Darstellungen soweit in Ordnung, Studierende versuchen die Begriffe zu erklären, oft gelingt es mathematiksprachlich nicht gut, oft werden nur einzelne Begriffe erklärt, ohne auf den gefragten Unterschied konkret einzugehen.

7.2.9.3. Welche Aspekte von Axiomen können identifiziert werden?

Wir wollen nun über verschiedene Facetten des Axiomenbegriff berichten, wie wir sie in den Antworten vorfanden. Darin haben wir neun Aspekte des Begriffs identifizieren können. Das ist für uns überraschend viel und zeigt, dass Studierende vielfältige, teilweise stark ausgeprägte Vorstellungen zu diesem Begriff haben. Dabei können wir diese Aspekte grob zu fachmathematischen, metamathematischen und funktionalen Hauptaspekten zusammenfassen, vgl. die folgende Auflistung:

- funktionale Aspekte
  - Nutzaspekt
  - Gebäudeaspekt

- fachmathematische Aspekte
  - Gültigkeitsaspekt
  - Beweisaspekt
  - Wahrheitsaspekt
  - Atomarer Aspekt
- metamathematische Aspekte
  - Minimalitätsaspekt
  - Vollständigkeitsaspekt
  - Herkunftsaspekt

Die Hauptaspekte tragen sprechende Namen: Die funktionalen Aspekte sollen aufzeigen, wozu Axiome gut sind, was mit ihnen gemacht werden kann, was ihre Funktion innerhalb einer Theorie ist.

Die fachmathematischen Aspekte beschreiben das Wesen eines Axioms, welche mathematischen Eigenschaften haben sie?

Die metamathematischen Aspekte greifen zwei der drei hilbertschen Qualitätskriterien eines Axiomensystems auf, die Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Axiome. Die Widerspruchsfreiheit einer Menge von Axiomen haben wir hier eher in den fachmathematischen Aspekten aufgefangen, weil sie selten vorkommt und dann mit der Wahrheit oder Gültigkeit interagiert. Außerdem fügen wir hier den Herkunftsaspekt hinzu, dort fassen wir Repliken zusammen, welche andeuten, woher die Axiome kommen. Das erscheint uns eher zu den metamathematischen Überlegungen zu gehören. Die metamathematischen Aspekte befassen sich eher mit Axiomen als eine Menge denn mit einzelnen Axiomen. Die entsprechenden Textstellen verbalisieren die Anforderungen an Axiome als eine Menge.

Diese neun Aspekte sind nicht immer disjunkt aufgeteilt. Eine klare Linie zwischen Wahrheit und Gültigkeit, zwischen der Nützlichkeit und der Gebäudevorstellung zu ziehen ist nicht leicht oder teilweise nicht sinnvoll. Daher werden auch die Häufigkeiten der Codes nur begingt eine Rolle spielen.

Keiner dieser Aspekte ist für die Definition eines Axioms notwendig, zumindest aus der Sicht der Definition 1.8. Den Grad der Abstraktion, auf dem ein Axiom einfach als eine beliebige Aussage gesetzt werden könnte, erreichen nur mathematisch unzureichenden Antworten, die sehr vage etwa von »typischen Eigenschaften von Dingen« sprechen, vgl. *16pre6.4*, oder Axiome lakonisch als »Gesetzmäßigkeiten« beschreiben, vgl. *16pre6.12*. Antworten mit eher plausibleren Darstellungen schmücken die Definition meist mit mehreren Aspekten aus, darin beschreiben sie vor allem den Sinn oder das Wesen eines Axioms (der Sinn steckt eher in den funktionalen, das Wesen eher in den fachmathematischen Aspekten).

Die funktionalen bzw. fachmathematischen Aspekte sind wesentlich häufiger, wir haben 43 bzw. 48 Stellen (gegenüber 15 Stellen bei metamathematischen Aspekten) identifiziert.

Der Nutzaspekt *Vorstellungen zum Nutzen von Axiomen, wozu sind Axiome da, was sollen sie leisten.*

Der Nutzaspekt ist der häufigste einzelne Aspekt. Wir zählen 25 passende Stellen. Etwa 60 Prozent der Testpersonen inkludieren diesen Aspekt in ihre Antwort. Typischerweise ist unter diesem Aspekt die beweisende Kraft von Axiomen subsumiert. In mehr als der Hälfte der Textstellen beschreiben Testpersonen, dass Axiome dafür da sind, damit aus ihnen »weitere Aussagen/Folgerungen« »gezogen/abgeleitet« werden können:

> *16pre6.1*: »Mit Hilfe eines Axioms können viele Folgerungen gezogen werden«, *16pre6.13*: »Eine grundlegende Festlegung, aus der alles weitere gefolgert werden kann«, *17pre8.ext1*: »Die Idee ist möglichst viel aus möglichst wenigen Axiomen herzuleiten«, *19pre5.7*: »Es gilt als Grundbaustein für Beweise oder Folgerungen«.

! Hier gibt es nicht sehr viel Varietät, die Vorstellung und auch die Formulierung sind recht uniform. So gesehen ist das die häufigste Vorstellung der Testpersonen zum Axiomenbegriff.

Der Nutzen der Axiome endet aber hier nicht. Fünf Personen sehen den Nutzen in der Fähigkeit von Axiomen, Begriffe zu definieren. Das ist eine etwas unerwartete Vorstellung, über die wir in Abschnitt 7.2.9.5 berichten, wenn wir über fehlerhafte Vorstellungen schreiben. Der Rest des Nutzaspekts besteht aus der systembildenden Eigenschaft von Axiomen: Sie sind quasi Grundlagen einer Theorie, genauer ist das ihre Funktion, die Theorie aufzubauen, sie zu stützen. Dieser Teilaspekt ist kaum vom Gebäudeaspekt zu unterscheiden, allerdings fehlt hier die dort eher prägende visuelle Komponente. Hier scheint der Aufbau der Theorie eher im logischen, mathematischen, konstruktiven Sinne gemeint zu sein:

> *16pre6.9*: »Eine nicht beweißbare Aussage bzw. Voraussetzung, die die Grundlage eines mathematischen Systems bildet«, *17pre8.3*: »ein Verbund von Axiomen auf dem eine Theorie gründen kann«, *19pre5.6*: »Ein Axiom ist eine Grundannahme [...] mithilfe dessen man seine Theorie aufbaut«.

Gebäudeaspekt *Bild eines Gebäudes, etwas baut auf grundlegenden Aussagen auf.*

Dem Gebäudeaspekt sind wir bereits bei Frage 4_{15} begegnet. Dort war der Gebäudeaspekt im Zusammenhang mit der Axiomatik aufgetaucht und bediente im Wesentlichen dieselben Vorstellungen wie hier.

Dieser Aspekt wird von einer recht visuellen Vorstellung dominiert, eine mathematische Theorie ist auf Axiomen »aufgebaut«, diese sind »Grundpfeiler«, »grundlegende« Teile (einer Theorie), sie bilden ein »Gerüst«. Bei diesen Darstellungen haben wir in der Tat ein Gebäude vor Augen und die Axiome sind die wichtigen, grundlegenden Fundamente / Grundpfeiler, aus denen das Theoriegebäude aufgebaut ist. Dabei variiert die visuelle Komponente von den Gerüsten und Grundpfeilern wie in »auf der Basis weniger Axiome also Annahmen kann ein großes Gerüst gebaut werden« und »sie bilden daher so etwas wie die Grundpfeiler in einem bestimmten Wissensgebiet« in *19pre5.3* und *16pre6.1*, zu abstrakteren Grundsystemen »›Axiom‹ ist das, was vorgegeben ist, ein Grundsystem auf der alle andere[n] Theoreme basi[e]r[en] und bewiesen werden können«, vgl. *19pre5.5*, und fundamentalen Aussagen »ein Axiom ist eine grundlegende fundamentale, wahre Aussage«, vgl. *16pre6.14*.

Diesen Aspekt zählen wir zu den funktionalen, weil hier die Fundament-*Rolle* der Axiome expliziert wird. Dieser Aspekt ist zugleich recht entbehrlich für eine Definition, Charakterisierung des Begriffs »Axiom«, aber nahezu unentbehrlich für ein sachgemäßes concept image dieses Begriffs. Diese Gebäudevorstellung taucht zwischen einem Drittel und der Hälfte aller Antworten auf (je nach dem wie wir die Überschneidungen mit dem Nutzaspekt behandeln) und ist damit eine der häufigeren. Andererseits ist das Fehlen dieser Vorstellungen in mindestens der Hälfte der Antworten auch bemerkenswert.

Wir kommen nun zu den fachmathematischen Aspekten. Dazu zählen wir solche, die dem Begriff eines Axioms mathematische Eigenschaften verleihen. In den Antworten konnten wir hauptsächlich solche Vorstellungen finden, die sich mit der Beweisbarkeit und Gültigkeit der Axiome befassen. Die weniger häufigen aber nah verwandten Teilaspekte sind die einfache Beschaffenheit sowie das Wahrsein eines Axioms, das sich zumindest sprachlich, aber auch fachmathematisch von dem Gültigkeitsaspekt absetzt.

Beweisaspekt Der Beweisaspekt ist einer der häufigsten in den Antworten und der häufigste fachmathematische. Der Beweis-Status eines Axioms ist für Studierende aller Pretests, wie erwartet, eine der wichtigsten Charakteristiken von Axiomen. Genauer hat die Hälfte aller Testpersonen den Beweisaspekt in ihre Vorstellung über Axiome inkludiert.

Dieser Aspekt hat viele Konsequenzen und wirkt in andere Aspekte mit hinein. So interagiert dieser etwa mit dem Minimalitätsaspekt. Wäre nämlich ein Axiom eine beweisbare oder gar bereits bewiesene Aussage, dann gäbe es andere Axiome, aus denen diese Aussage folgte, und somit könnte auf dieses Axiom aus Minimalitätsgründen verzichten werden. Auf der Ebene eines einzelnen Axioms ist eine ähnliche Überlegung mit dem atomaren Aspekt naheliegend. Beim Nutzaspekt wird nicht selten herausgestellt, dass mit Axiomen (die dort nicht bewiesen sind) *andere* Aussage *bewiesen* werden können.

In den Antworten wird der Beweis-Status eines Axioms prinzipiell verschieden beantwortet. Kurz lässt sich das so erklären: Die Einen sagen Axiome *können*, die Anderen sagen sie *müssen* nicht bewiesen werden. Das sehen wir uns im Detail an.

Bemerkung 7.13. Bereits in Abschnitt 1.3, nach Beispiel 1.19 haben wir unsere Bedenken geäußert, dass einige Vorstellungen zum Beweis-Status eines Axioms problematisch werden können. Das beobachten wir nun in den Antworten.

Prinzipiell kann uns der Beweis-Status eines Axioms egal sein, solange wir uns nicht mit metamathematischen Fragen wie der Unabhängigkeit der Axiome voneinander zum Ende des Axiomatisierungsprozesses befassen.

Diese entspannte »egal«-Haltung können wir zweierlei ausdrücken, wenn wir von Axiomen sprechen: Wir können zum Beweis-Status schlicht nichts sagen oder wir können andeuten, dass wir uns darüber Gedanken gemacht haben, und sagen: Axiome seien (vorerst) unbewiesene Aussagen. Erkennen wir (später), dass ein konkretes Axiom doch aus den restlichen folgt,[60] dann können wir überlegen, ob wir es weglassen oder aus stilistischen oder didaktischen Gründen trotzdem beibehalten.[61] Insbesondere ist eine Reduktion eines Axioms auf andere Axiome kein Problem, sondern eine Folge eines genaueren Hinsehens. Der zweite Fall kollidiert dann gewissermaßen mit der »unbewiesen«-Vorstellung. ♯

Die angedeutete entspannte Haltung ist in einer einzigen Antwort zu finden: »Ein Axiom ist eine unbewiesene Grundannahme«, vgl. *16pre6.10*. Eine ähnliche, aber leicht andere Vorstellung präsentieren die meisten Anderen: Ein Axiom muss nicht bewiesen werden. So sehen es zwei Drittel der Testpersonen (innerhalb des Beweis-

! aspekts):[62] Die Testpersonen scheinen sich rechtfertigen zu müssen, *warum* Axiome unbewiesen sind. Das lösen sie auf, indem sie das einfach postulieren: Es *muss* nicht bewiesen werden. Das befriedigt auch den mathematischen Usus: Alle Aussagen müssen begründet werden – außer Axiome, sie müssen eben nicht begründet werden. Insofern vertreten knapp zwei Drittel der Instanzen des Beweisaspekts eine gut nachvollziehbare, plausible Einstellung zur Beweisbarkeit von Axiomen.

Die restlichen neun Instanzen stellen eine wesentlich schärfere Forderung an

! Axiome. Sie behaupten Axiome seien grundsätzlich nicht beweisbar: »Ein Axiom ist eine Annahme, die zwar logisch ist sich aber nicht beweisen lässt« laut *17pre8.1* oder »ein Axiom ist ein nicht beweisbarer Zusammenhang« in *16pre6.8*. Die Vorstel-

[60]Den etwas lästigen und trivialen Fall des Selbstbeweises $A \to A$ einer Aussage A lassen wir weg.

[61]Typisches Beispiel sind hier wieder die Vektorräume. In der Regel ist die Addition eines Vektorraum axiomatisch als kommutativ gesetzt. Allerdings folgt sie leicht aus den anderen Axiomen.

[62]»Ein Axiom ist eine Aussage, die nicht bewiesen werden muss«, vgl. *16pre6.7*, oder »etwas, das man ohne Beweis annimmt«, vgl. *19pre5.10*.

lung schießt über das Ziel hinaus. Sie zieht nach sich, dass wir einen Beweis der Unbeweisbarkeit (aus den anderen Axiomen?) liefern müssten, falls eine Aussage zu einem Axiom ernannt wird. Sie verlangt also bereits per Definition, dass Axiome voneinander unabhängig sein müssen. Kommt die Vorstellung aus dieser Richtung, dann wäre sie nachvollziehbar, obwohl für eine *Definition* eines Axioms etwas übertrieben und nicht alltagstauglich: In vielen Axiomensystemen, denen Studierende begegnen, stecken Redundanzen drin, wie gerade bei Vektorräumen gesehen.

Gleichwohl lesen sich die Antworten der Testpersonen anders: Sie deuten nicht an, dass ein Axiom aus den *anderen* Axiomen nicht ableitbar ist, sie stellen *ein* Axiom als eine nicht beweisbare Aussage dar. Das ist genau die Vorstellung, vor der wir auf Seite 56 gewarnt haben. In der bereits zitierten Antwort, in der Axiome logisch sind, aber sich trotzdem nicht beweisen lassen, klingt sogar der Wunsch mit, sie beweisen zu wollen, aber scheinbar geht das schlicht nicht.

Wir sehen hier also einen seltenen Fall einer Vorstellung zu Axiomen, die lieber korrigiert oder zumindest überdacht werden sollte.

Trotz der mathematisch ungünstigen Vorstellung wollen wir entsprechende Antworten keinesfalls abwerten. Das ist auch deswegen nicht möglich, weil diese Vorstellung durchaus in elaborierten, sonst recht hilfreichen Antworten vorkommen kann,[63] aber auch in weniger differenzierten.[64] Diese Vorstellung ist in keinem Fall »schlechteren« Antworten zuzurechnen.

Gültigkeits- und Wahrheitsaspekt Beide Aspekte sind recht verwandt, ihre Analyse nebeneinander zu stellen, erscheint hilfreich.

Der Gültigkeitsaspekt inkludiert Vorstellungen, bei denen es um eine gewisse Gültigkeit von Axiomen geht. Typischerweise ist in den Antworten dann von »gelten« die Rede. Dabei gehören auch solche Antworten hierher, in denen beschrieben wird, wer oder was diese Gültigkeit prüft/absegnet/verifiziert.

Zum Wahrheitsaspekt zählen wir solche Antworten, in denen explizit von Wahrheit der Axiome gesprochen wird.

Der Gültigkeitsaspekt ist gewissermaßen eine moderne Version des Wahrheitsaspekts. Er ist näher an der heute gängigen mathematiklogischen Erfülltsein-Beziehung und ist weniger problematisch als der Wahrheitsgehalt einer Aussage, vgl. Bemerkung 1.15. Auch in der modernen Formulierung der Mathematik sagen wir eher

[63]»Ein Axiom ist eine grundlegende Aussage, welche man nicht beweisen kann. Eine Theorie basiert auf (möglichst wenigen) Axiomen, aus denen dann weitere Aussagen (Sätze, Korollare, ...) gefolgert werden können. Im Sinne einer Theorie nimmt man die Wahrheit dieser Axiome an« aus *19pre5.9*. Diese Person gab übergreifend gute bis sehr gute Antworten.

[64]»Ein Axiom ist eine Annahme, die man nicht beweisen kann und als gültig vorausgesetzt wird« aus *17pre8.7*.

etwas *gilt*, ein Satz ist gültig, als dieser Satz ist *wahr*. Für Axiome ist das besonders treffend. In einem Vektorraum sind die Vektorraumaxiome erfüllt, sie gelten dort; »Vektorraumaxiome sind wahr« klingt holprig und ungewohnt.[65] Insofern können wir zumindest diese beiden Aspekte auch mathematisch miteinander vergleichen. Der Gültigkeitsaspekt ist in den Antworten deutlich häufiger zu finden.

Dabei ist Gültigkeit nicht gleich Gültigkeit. So sind Testpersonen unterschiedlich vorsichtig, wenn es darum geht. Für die Einen ist diese Gültigkeit an keine Bedingungen geknüpft und ist »uneingeschränkt gültig« wie in *19pre5.7* oder »es gilt also ohne Beweis und immer« in *19pre5.5*. Die Anderen sagen neutraler, dass diese Gültigkeit angenommen, vorausgesetzt wird, »ein Axiom ist eine Annahme, die man nicht beweisen kann und als gültig vorausgesetzt wird«, vgl. *17pre8.7*. Die Vorsichtigeren erlauben den Axiomen zu gelten, solange sie nicht widerlegt wurden, eine Gültigkeit unter Auflagen: »Diese [Regel] kann man (bisher) nicht widerlegen«, vgl. *17pre8.8*.

Merkwürdigerweise geben genau die Studierenden aus ^{17}Pretest (alle acht Personen, inklusive einer, die nicht vom Gelten sondern vom Wahrsein spricht) eine Instanz an, warum die Axiome gelten. Sie antworten quasi auf die Frage »wer sagt denn, dass sie gelten?«. Dabei unterscheiden wir zwei Instanzen: Die Selbstevidenz (es ist klar, dass die Axiome gelten, sie sind logisch, vgl. *17pre8.1,4,5*) und die soziale Evidenz (»auf die man sich einigt«, »die man selbst als gültig erachtet«, »durch Beobachtung / Experimente / Rechnung etc. festgelegt«, vgl. *17pre8.3,7,8*).

In den anderen Pretests spielt die verifizierende Instanz keine Rolle. Dort ist nur davon die Rede, dass Axiome aus genannten Gründen gültig sind, aber es wird nicht darüber sinniert, wer über diese Gültigkeit entscheidet.[66]

Der Wahrheitsaspekt scheint vom Gültigkeitsaspekt getrennt zu sein. Testpersonen sprechen entweder über gültige oder wahre Axiome mit nur einer Ausnahme der sehr aspektreichen Antwort *16pre6.1*: »[...] Aussage die als wahr gilt bzw festgelegt ist [...]«, in der beide Aspekte auftauchen.

Die Wahrheit der Axiome, ähnlich wie ihre Gültigkeit, wird in den Antworten oft *angenommen*: »Im Sinne einer Theorie nimmt man die Wahrheit dieser Axiome an«, vgl. *19pre5.9*, oder einfach als vorhanden dargestellt: »Ein Axiom ist eine grundlegende fundamentale, wahre Aussage«, vgl. *16pre6.14*. Die einzelnen Häufigkeiten sind

[65] Allerdings ist die Formulierung »in jedem konkreten Vektorraum ist jedes Vektorraumaxiom eine wahre Aussage« treffend und durchaus sagbar. Es ist mathematisch besser von wahren Aussagen (noch besser in einem Modell, einem konkreten Beispiel) als von »wahr« kontextfrei zu sprechen.

[66] Warum das so ist, können wir nicht erklären. Die etwas andere auch Axiomensysteme betreffende Fragestellung in ^{17}Pretest wäre ein denkbarer, aber doch überraschender Grund. Ein natürlicherer Grund wäre die niedrigere durchschnittliche Semesterzahl in ^{17}Pretest, aber auch in den anderen Pretests gab es niedrigere Semester ohne diese verifizierende Instanz. Am ^{17}Pretest nahmen ja auch hochsemestrige Personen teil.

sehr niedrig (der Wahrheitsaspekt ist in sechs Antworten identifiziert), so dass hier kaum verallgemeinerbare Aussagen getroffen werden können.

Trotzdem spielen der Gültigkeits- bzw. Wahrheitsaspekt in mehr als der Hälfte der Antworten eine Rolle, daher gehören diese Aspekte zu den charakteristischen Aspekten des Axiomenbegriffs *bei Studierenden*.

Der Wahrheitsaspekt taucht gar nicht und der Gültigkeitsaspekt nur geringfügig (»ein Axiom ist eine Vereinbarung die für ein Gebiet gelten soll«, vgl. *17pre8.ext1*) bei den externen Personen auf. Für sie spielen diese Aspekte in dieser Frage keine Rolle. Sie beschreiben Axiome eher über metamathematische Aspekte. Das kann aber an rein statistischen Gründen liegen (3 vs. 32 Antworten).

Der atomare Aspekt Dieser Aspekt ist kein gut entwickelter. Die vier zugehörigen Antworten unterscheiden sich deutlich in ihrer Vorstellung. Genau genommen, drücken sie, alle vier, eine unterschiedliche Idee aus. Das Verbindende ist die Einfachheit, Irreduzibilität, Minimalität eines Axioms. Insofern fehlen uns hier mehr Daten, um herauszufinden, ob dieser Aspekt tatsächlich Bestand hat oder nur eine lose Verbindung einzelner Teilaspekte darstellt. Die vier Vorstellungen sind die folgenden: Ein Axiom *soll* »möglichst einfach« gestrickt sein, vgl. *16pre6.1*. Hier denken *wir* vor allem an das fünfte Postulat vs. Playfair Axiom. Eine ähnliche Vorstellung zur Einfachheit hat eine leicht andere Motivation: Laut *19pre5.3* ist ein Axiom so einfach, dass es *deswegen* nicht bewiesen werden muss. Allerdings erscheint uns diese Vorstellung zirkulär oder einfach nicht tragbar, weil bei genauerem Hinsehen ungeklärt bleibt, wie nun die Einfachheit entschieden wird: An der Syntax, an der Beweisbarkeit, an der Plausibilität? In jedem Fall erscheint das Wort »einfach« hier nicht hilfreich. Diese Vorstellung ist aber ein gutes Beispiel, um eine Diskussion über das Wesen eines Axioms zu starten. In *16pre6.8* sehen wir die Irreduzibilität eines Axioms, »[es wird] so lange als geltend angenommen, bis eine Widerlegung oder eine weitere Unterteilung gefunden wird«. Eine ähnliche Vorstellung steckt in der Minimalität eines Axioms als »kleinster Bestandteil«, vgl. *19pre5.6*.

In der mathematischen Literatur haben wir bei Axiomen tatsächlich oft mit syntaktisch sehr einfach gebauten oder für die jeweilige Theorie ganz natürlich erscheinenden Aussagen zu tun. Der atomare Aspekt im Sinne der ersten zitierten Antwort ist folglich oft automatisch erfüllt. Die anderen Antworten haben wohl das gleiche Ziel, aber ihre Formulierungen enthalten zusätzliche leicht verwirrende Informationen. Etwa die Unzerlegbarkeits-Idee erinnert an irreduzible Polynome, ist aber für eine *Aussage* wenig hilfreich. Was diesen Aspekt interessant macht, ist die Abgrenzung vom metamathematischen Minimalitätsaspekt, bei dem es um eine minimale *Anzahl* an Axiomen geht. Dort und auch typischerweise in der Literatur wird die Beschaffenheit eines einzelnen Axioms selten thematisiert, auch wenn das eine de facto Eigenschaft vieler Axiome ist.

Metamathematische Aspekte Die metamathematischen Aspekte spielen in den Antworten eine geringe Rolle. Die drei identifizierten Teilaspekte: der Minimalitäts-, Vollständigkeit- und Herkunftsaspekt tauchen in je fünf Antworten auf. Dabei sind je zwei Nennungen des Minimalitäts- und Vollständigkeitsaspekts bereits in den Antworten der externen Personen zu finden.

Der Herkunftsaspekt ist hier etwas überraschend, wir würden ihn eher bei den Items zu Axiomatisierung erwarten. Hier geht es darum, woher Axiome kommen, wie sie ausgewählt werden. Die Vorstellung dazu ist in den Antworten nicht stark ausgeprägt und recht eindeutig: Axiome werden »festgelegt«, teilweise mit Erklärungen von wem: »von einem Gremium« bzw. »durch Beobachtung / Experimente/ Rechnung«, vgl. *16pre6.5, 17pre8.8*. Eine weitere Person expliziert die Vorstellung, die implizit in vielen Antworten steckt, dass ein Axiom »meist Bestandteil eines Axiomensystems ist«, vgl. *16pre6.10*. Das passt zu den Vorstellungen zum Axiomensystem aus Abschnitt 7.2.9.1.

Auch der Vollständigkeitsaspekt ist schwach ausgeprägt. Damit meinen wir nicht nur die geringe Anzahl an entsprechenden Textstellen, sondern auch die Formulierung der zugehörigen Vorstellung. Alle Textstellen sprechen von vielen Sätzen, die aus den Axiomen folgen. Dabei quantifizieren sie »viel« größtenteils durch »alle«, etwa »eine grundlegende Festlegung, aus der alles weitere gefolgert werden kann«, vgl. *16pre6.13*, oder »d.h. alle Sätze können mit ihnen [Axiomen] und ggf. bereits bewiesenen Sätzen bewiesen werden«, vgl. *17pre8.ext3*. Hier sehen wir, dass die externe Person bewusst oder unbewusst vorsichtig ist und nur von allen *Sätzen* spricht, also von bewiesenen Aussagen. Studierende bauen diese Einschränkung in ihren Antworten nicht ein. Auch die zweite externe Person ist vorsichtig, aber auf eine andere clevere Art: In vgl. *17pre8.ext1* soll lediglich »möglichst viel« aus den Axiomen abgeleitet werden. Ein gutes Beispiel dafür, dass die Vollständigkeitsvorstellung, wenn auch vorhanden, kaum ausformuliert wird, liefert *19pre5.10*: »z.B. hat Euklid [...] am Anfang ein paar Axiome angenommen um alles auf ihnen aufzubauen«.

Dieser Aspekt gehört zusammen mit dem Beweis- und Wahrheitsaspekt zu potenziell gefährlichen, weil dort, wie wir bereits gesehen haben, mathematisch nicht tragbare Vorstellungen aufkommen können. Wir sehen auch hier, dass dies tatsächlich der Fall ist, wenn Studierende zu optimistisch die Möglichkeiten eines Axiomensystems einschätzen.

Der Minimalitätsaspekt ist fast naturgemäß weniger problematisch. Hier geht es um die von einem einzelnen Axiom etwas entfernte Vorstellung, die eher zu einem

Axiomensystem passt: Der Wunsch nach einer geringer Anzahl an Axiomen. Für externe Testpersonen ist diese Forderung wieder zentral bei der Beschreibung von Axiomensystemen. Studierende (drei Personen aus ^{19}Pretest) sprechen eher beiläufig von »ein paar«, »wenigen« bzw. »möglichst wenigen« Axiomen, wenn sie die Rolle von Axiomen in einer Theorie beschreiben.

Insgesamt sehen wir die schon geäußerte Beobachtung bestätigt, dass die metamathematischen Aspekte des Axiomenbegriffs für Studierende eine geringe Rolle spielen. Für externe Personen stimmt diese Feststellung auch, allerdings sind metamathematische Aspekte für sie bzgl. des Begriffs »Axiomensystem« wichtig.

7.2.9.4. Mathematisierte vs. alltagssprachliche Antworten

Die beschriebenen Aspekte zeigen nicht alle Facetten der Antworten. Wir wollen ihre Struktur und Formulierung besser verstehen.

Dazu fragen wir uns: Was sind denn Axiome als Objekte? Testpersonen geben ganz unterschiedliche Objekte an, wobei zwei dominant sind: 12 Mal wird ein Axiom als eine Aussage einsortiert, 12 Mal als eine (Grund)annahme. Außerdem sind Axiome Grundlagen,[67] Festlegungen,[68] Regeln,[69] (Grund)gesetze,[70] Gesetzmäßigkeiten,[71] Vereinbarungen,[72] Begebenheiten,[73] Eigenschaften.[74] Nicht alle dieser Objekte sind mathematisch korrekt oder mathematisch sinnvoll; ganz offenbar versuchen einige Testpersonen eine eher mathematische Darstellung zu liefern, während andere möglicherweise absichtlich eine eher alltagssprachliche Formulierung wählen. Die Grenzen sind dabei fließend. Wir halten aber fest, dass ein Drittel der Testpersonen die mathematisch korrekte Einordnung vornimmt und von einer Aussage spricht, während der Rest mehr oder minder verwandte Begriffe benutzt, die aber ein eher unpassendes Vokabular darstellt.[75] Dabei scheint diese Feststellung nicht davon abzuhängen, ob in der Item-Formulierung explizit nach einer Definition des Begriffs gefragt wurde oder nicht.

[67] »Ein Axiom ist eine Grundlage, auf der man aufbauen kann«, vgl. *16pre6.3*.

[68] »Eine grundlegende Festlegung, aus der alles weitere gefolgert werden kann«, vgl. *16pre6.13*.

[69] »Ein Axiom ist eine durch Beobachtung / Experimente / Rechnung etc. festgelegte Regel«, vgl. *17pre8.8*.

[70] »Ein Axiom ist ein festgelegtes Grundgesetz von einem Gremium«, vgl. *16pre6.5*.

[71] »Als Axiom versteht man eine Gesetzmäßigkeit«, vgl. *16pre6.12*.

[72] »Ein Axiom ist eine Vereinbarung die für ein Gebiet gelten soll«, vgl. *17pre8.ext1*.

[73] »Ein Axiom ist eine Begebenheit«, vgl. *17pre8.4*.

[74] »Axiome sind sozusagen die Eigenschaften, die ein Ding haben muss«, vgl. *19pre5.8*.

[75] Dabei interpretieren wir die Einordnung »Ein Axiom ist eine Annahme« als nicht sonderlich hilfreich. Das erfasst schlicht das Wesen eines Axioms nicht. Eine Annahme ist hier zu weit gefasst. So könnten wir einer Theorie die Annahme (oder Vereinbarung) »Ab hier wollen wir mit $\mathbb{K}$ einen kommutativen Körper bezeichnen« oder »sei Epsilon größer Null« voranstellen. In einem Beweis könnten wir die Annahme $k \in \mathbb{N}$ treffen.

Die Struktur der Antworten ist nicht sehr ähnlich, aber es gibt einige Tendenzen. Viele Antworten, vor allem aus ^{16}Pretest benutzen die Form:

Axiom ist [Objekt], [fachmathematischer Aspekt], [funktionaler Aspekt],

etwa in *16pre6.2*: »Ein Axiom ist eine Aussage, die man als gegeben annimmt, und mit der man weitere Aussagen folgern kann« oder *19pre5.5*: »›Axiom‹ ist das, was man nicht beweisen muss, es gilt also ohne Beweis und immer. ›Axiom‹ ist das, was vorgegeben ist, ein Grundsystem auf der alle andere[n] Theoreme basi[e]r[en] und bewiesen werden können«. Mehr als die Hälfte aller Antworten, wir zählen 21 Mal, sind in dieser oder größtenteils in dieser Form gegeben.

Vier Antworten sind in einer eher kompakteren Form:

Axiom ist [Objekt], [fachmathematische Aspekte],

etwa in *17pre8.5*: »Axiom = Geltende Gesetze, die nicht bewiesen werden müssen, da klar ist, das diese Gelten«.

Neun Antworten sind etwas einfacher gestrickt, etwa wie in *16pre6.12*: »Als Axiom versteht man eine Gesetzmäßigkeit«.

Eine Antwort ist reichhaltiger, sie enthält fast alle Aspekte: »Eine möglichst einfache Aussage die als wahr gilt bzw festgelegt ist und die nicht zu beweisen ist. Mit Hilfe eines Axioms können viele Folgerungen gezogen werden. Sie bilden daher so etwas wie die Grundpfeiler in einem bestimmten Wissensgebiet«, vgl. *16pre6.1*.

Die verwendete Sprache, um die Aspekte zu beschreiben, ist jedoch leider kaum zu differenzieren. Ob Testpersonen von »Beweisen« oder »Begründen«, von »festgelegt« oder »angenommen«, von »Theorie aufbauen« oder »alle Sätze folgern« sprechen – mathematiksprachlich gesehen macht das keinen Unterschied, das sind alles akzeptable und übliche Formulierungen.

Natürlich sind einige Antworten besser formuliert als die anderen, doch dies liegt nach unserem Gefühl hauptsächlich an der mehr oder weniger treffenden *mathematischen* Erklärung der einzelnen Aspekte: Etwa *alle Aussagen der Theorie folgern* oder *alle Sätze der Theorie folgern* lässt sich nur fachmathematisch differenzieren. Inwieweit das eine mehr oder weniger mathematisiert/formalisiert ist als das andere, lässt sich nicht sagen. Die entsprechenden Einordnungen solcher Antworten trafen wir bereits im Unterabschnitt über Aspekte. Auch »ein Axiom ist eine Grundannahme, soz. ein kleinster Bestandteil, aus dem man weitere Sachen folgern kann« von *19pre5.6* mit dem saloppen »weitere Sachen« klingt sicherlich nicht mathematisch. Aber eine klare reliable Differenzierung von *19pre5.10* mit »etwas, das man ohne Beweis annimmt, um überhaupt mit der Theorie aufbauen zu können« (bezogen darauf, was nun aus den Axiomen folgt), finden wir (ohne eine normative Zielantwort) kaum realisierbar. Wir können also auf der sprachlichen Ebene höchsten drei sehr ungleichmäßige Kategorien aufstellen:

Antworten, in denen Axiome in keinster Weise eingegrenzt werden und keine Absicht aufzeigen, mathematikübliche Formulierungen zu verwenden (hierunter fallen drei Antworten[76]); Antworten, die Axiome als Aussagen formulieren; und alle anderen Antworten, die den Großteil ausmachen.

In zwölf Antworten ist ein Axiom eine Aussage, in den restlichen zwanzig Antworten sind Axiome irgendwas anderes (inklusive zwei Antworten von externen Personen). Der Unterschied, ob Testpersonen von Aussagen sprechen oder nicht, ist für uns ein wichtiger: Das ist die einzige gemeinsame Wisseneinheit über Axiome aus der fachmathematischen Sicht, vgl. Definition 1.8. In allen anderen Aspekten und Formulierungen können sich selbst professionelle Antworten unterscheiden.

7.2.9.5. Welche Fehler oder fehlerhafte Vorstellung lassen sich identifizieren?

Sehen wir von den drei vorhin erwähnten zu vagen Antworten ab, dann finden wir in den restlichen Antworten lediglich eine einzige Stelle, die eindeutig mathematisch falsch ist. Überdies taucht sie in den Erklärungen zu den Unterschieden auf: »Ein Axiom ist die erste Folgerung daraus [aus einer Definition]«, vgl. *19pre6.7*. Dabei werden Axiome im eigentlichen Item vertretbar dargestellt: »Ein Axiom ist eine Grundlage, eine Art Definition oder Grundaussage die nur auf der Definition eines Sachverhalts beruht und uneingeschränkt gültig ist. Es gilt als Grundbaustein für Beweise oder Folgerungen«, vgl. *19pre5.7*. Wir sehen nicht, wie ein Axiom eine Folgerung sein könnte, aber auch hier ist erkennbar, dass die Vorstellung zum Axiom nicht ganz korrekt aber auch nicht völlig daneben ist.

Ganz bemerkenswert sind die restlichen Antworten aus dem Grund, weil sie insgesamt mindestens nachvollziehbare Vorstellungen präsentieren. Sie enthalten teilweise durchaus sonderbare Vorstellungen, die meisten davon haben wir bereits in Abschnitt 7.2.9.3 diskutiert, allerdings beherrschen sie in der Regel lediglich Teile einer Antwort.

So gesehen, haben Studierende fast ausschließlich nur solche Antworten gegeben, die für eine Erklärung eines Axioms zu vage sind, oder solche, die sich größtenteils vertreten lassen. !

Weitere vereinzelte fehlerhafte Vorstellungen betreffen uns hier nur am Rande, sie touchieren die eigentliche Frage nur. So wird etwa in *17pre9.2* ein Theorem als »die Vorform eines Axioms« bezeichnet, das bereits an sich eine seltsame Vorstellung ist,

[76]»Die Eigenschaften die für bestimmte Dinge typisch sind«, »Regel, Gesetzmäßigkeit, etwas dass man in Schemata ›packen‹ kann. Sachverhalte, welche man schematisch bearbeiten kann durch bestimmte Axiome«, »Als Axiom versteht man eine Gesetzmäßigkeit«, vgl. *16pre6.4,11-12*.

zumal hier offenbar Theoreme mit Vermutungen zusammengeworfen werden: »d.h. es muss noch dementsprechend durch empirische Forschung bestätigt werden«, so geht das Zitat weiter. Auch das plausibel klingende »die gesamte Mathematik baut quasi auf festgelegten Axiomen auf« aus *19pre5.4* ist in unserem Kontext eine vorteilhafte Vorstellung, weil sie die Rolle der Axiome in der Mathematik aufzeigt. Allerdings ist die Vorstellung problematisch, weil es je nach Definition einer Axiomatisierung nicht sofort klar ist, ob jede mathematische Theorie axiomatisierbar ist.[77] Auch die bereits besprochene Antwort »Satz: Bewiesenes Axiom« in *19pre6.10* klingt zunächst seltsam, sie ist aber nicht falsch, falls wie dort Axiome als etwas noch nicht bewiesenes gesehen werden. Das entspricht sogar der Auffassung in Definition 1.8.

Außerdem sehen wir eine ungewöhnliche Eindeutigkeitsvorstellung: »Ein Axiom existiert nur in der einen Form«, vgl. *17pre9.2*, im Gegensatz zu Definitionen, die dort beliebig gewählt werden können. Dabei ist diese Eindeutigkeit nicht nachvollziehbar. Klar, die ausgeschriebene Formulierung eines Axioms ist in dieser konkreten Form eindeutig, aber dann auch jede konkrete Definition. In welchem anderen Sinne ein Axiom eindeutig sein soll, ist nicht klar: Etwa das Parallelenpostulat kann ja etwa durch das Playfair Axiom ersetzt werden.

Eine weitere interessante Antwort, bei der die hilbertsche Sicht durchscheint: »Ein Axiom [...] wird als wahr angenommen, weil die empirische Forschung bisher noch keinen Widerspruch dazu gefunden hat«, vgl. *17pre8.2* und Seite 202, wo die Widerspruchsfreiheit der Axiome laut Hilbert genau das Kriterium der Wahrheit der Axiome ist. Aus heutiger Sicht erscheint diese Auffassung etwas altmodisch, heute würden wir schlicht nicht sagen, Axiome seien per se wahr.[78] Aber diese etwas sonderbar klingende Vorstellung können wir keinesfalls als falsch abtun.

Interessant zu beobachten ist auch, was *nicht* in den Antworten steckt. In der Literatur wird ein Axiom typischerweise (und korrekterweise) innerhalb einer Theorie beschrieben[79] oder zumindest an eine Theorie geknüpft, vgl. »Axiome sind unbewiesene Aussagen, die man an den Anfang einer Theorie stellt« aus Beispiel 1.19. Studierende tun das in der Regel nicht. Sie beschreiben Axiome an sich, im luftleeren Raum, oder sie deuten eine Menge an Aussagen an, die mit Axiomen in Verbindung gebracht wird, aber Wörter wie Theorie o. Ä. fallen bei diesen Items selten.[80]

! Insgesamt sind diese seltsamen Vorstellungen eher einzelne Ereignisse. Gebün-

[77] Natürlich können wir banalerweise alle Aussagen einer Theorie als Axiome bezeichnen, aber diese Möglichkeit hängt eben von der Definition eines Axioms bzw. Axiomensystems ab.

[78] Aber in jedem Beispiel/Modell einer axiomatisch definierten Struktur sind die Axiome per definitionem eines Modell wahre Aussagen.

[79] vgl. die zweite Definition von Duden auf Seite 39 oder Hilberts Zitat auf Seite 1.3.1.

[80] Etwa in [16]Pretest kein einziges Mal; in zwei von drei der Antworten der externen Personen; drei Mal in [19]Pretest.

delte problematische Vorstellungen haben wir bereits bei der Aspekte-Betrachtung angesprochen. Hier fehlt uns offenbar an einer größeren Datenmenge, um solche Fehler besser statistisch einzuordnen.

Eine etwas häufiger vertretene Vorstellung, die zunächst falsch erscheinen könnte, müssen wir uns genauer anschauen. Hier werden Axiome und Definitionen miteinander in Verbindung gebracht. Zwei Beispiele dazu wären: »Axiome sind sozusagen die Eigenschaften, die ein Ding haben muss, um einer bestimmten Definition zu gehören«, vgl. *19pre5.8*, und »Axiome sind Aussagen, die als wahr angenommen werden & aufgrund derer es möglich ist, mathematisch Begriffe eindeutig zu definieren«, vgl. *19pre5.4*.

Einerseits können wir hier die hilbertsche Sichtweise hineininterpretieren: Eine Menge von (widerspruchsfreien) Axiomen definiert a posteriori die undefinierten Begriffe, vgl. Seite 202. Wenn dieses Hineininterpretieren zutreffend wäre, wäre dies sehr zufriedenstellend, denn schließlich sollen Studierende genau diese Vorstellung verinnerlichen, dass die undefinierten Begriffe, wenn wir etwa an die euklidische Ebene denken, durch ihre Beziehungen zueinander, aus den Axiomen der zugehörigen Theorie heraus, definiert werden, vgl. semantische Aspekte einer Axiomatisierung auf Seite 60.

Betrachten wir andererseits die beiden Zitate genauer, dann fällt auf, dass das erste vermutlich von etwas anderem spricht. Erinnern wir uns an die typische Definition einer Gruppe in der Literatur. In den einschlägigen Algebra-Lehrbüchern ist das ein Paar aus einer Menge und einer Verknüpfung darauf, das gewissen *Axiomen* genügt. Dabei schreiben viele Autoren hier statt »Axiom« eher »Eigenschaften«, »Beziehungen« o.Ä. Wollen wir die Existenz einer Inversen in einer Gruppe (Ding) als eine Eigenschaft dieses Dinges ansehen, dann erscheint die gegebene Antwort gut nachvollziehbar. Person 8 lässt jeden Zweifel über diese Interpretation fallen, wenn sie in der ergänzenden Frage schreibt: »Eine Definition beinhaltet Axiome«, vgl. *19pre6.8*.

Es ist gut vorstellbar, dass Studierende Axiome typischerweise in Verbindung mit Definitionen sehen: Wird ein Vektorraum definiert, dann heißt es oft: Ein Vektorraum ist [...], das den folgenden Axiomen genügt. Aus dieser Perspektive ist es sehr plausibel, wenn Studierende schreiben, Axiome sind Eigenschaften von Begriffen. Allerdings kommt es auf die Formulierung an. In dem Zitat »Ein Axiom ist ein Teil einer mathematischen Gesetzmäßigkeit. Mehrere Axiome zusammen können Sätze & Begriffe erklären / definieren« erkennen wir sofort diese Sichtweise, es wird auch klar (falls die Interpretation zutrifft), was mit einer mathematischen Gesetzmäßigkeit gemeint ist: Vektorräume, Gruppen o.Ä. Gleichzeitig kann diese Vorstellung zu weit führen: »Axiome sind sozusagen die Eigenschaften, die ein Ding haben muss, um einer bestimmten Definition zu gehören«. Das klingt so, als müsste jeder Begriff axiomatisch eingeführt werden. Das mag für Vektorräume stimmen, aber einen Untervektorraum können wir dann ohne Axiome definieren.

Wir können sieben Antworten mit potenziell dieser Vorstellung finden.[a]

Diese Vorstellung ist fast ausschließlich dem [19]Pretest vorbehalten und ist dort in mehr als der Hälfte der Antworten zu erkennen. Das ist recht überraschend und wir können nicht ausschließen, dass dies auf die Algebra-Veranstaltung zurückzuführen ist, die wohl die meisten Teilnehmenden besuchten.

Das Problem dieser üblichen Gruppendefinition, wie wir es sehen, ist das Folgende: Haben Studierende die Vorstellung, dass Axiome (immer) wahr oder gültig sind, dann kollidiert dies mit dieser Definition, weil dort etwas als Axiom bezeichnet wird, was erst einmal erfüllt werden muss. Um eine mögliche Bildung von fehlerhaften Vorstellungen zu vermeiden, können wir uns zwei Lösungen für Definition mathematischer Strukturen vorstellen.

- Eine mathematische Struktur nennen wir Gruppe/Vektorraum/Körper, falls folgende Aussagen gelten: [Auflistung der entsprechenden All- und Existenzaussagen]. Diese Darstellung findet sich in vielen Lehrbüchern ohnehin. Allerdings wird dann nicht selten trotzdem von Axiomen der definierten mathematischen Struktur gesprochen, vgl. [Hup83, S. 2] und [KM17, S. XIV, 455].
- Es werden Aussagen (dieselben All- und Existenzaussagen von oben) formuliert und als Axiome der entsprechenden Struktur bezeichnet. Jede mathematische Struktur, die diesen Axiomen genügt (das kann noch entsprechend durch den Modellbegriff weiter erklärt werden), nennen wir Gruppe/Vektorraum/Körper etc.

Damit werden Axiome gemieden oder außerhalb einer Definition formuliert, was einer mathematiklogischen Sichtweise entspräche.[b]

[a] Nur potenziell, weil einige Formulierungen keine eindeutige Interpretation erlauben, vgl. *19pre6.6*: »Ein Axiom bildet die Grundlage für andere Definitionen«. Was hier genau gemeint ist, ist uns nicht klar.

[b] Wir haben keinerlei Daten, um zu behaupten, dass dadurch diese problematische Vorstellung verschwinden würde. Das könnte in Zukunft untersucht werden.

7.2.9.6. Mathematische Güte der Antworten

Die herausgearbeiteten und beschriebenen Aspekte und fehlerhaften Vorstellungen von Axiomen helfen mit am besten, die Forschungsfragen FFa,b zu beantworten. Trotzdem fehlt zu einem besseren Gefühl für abgegebene Antworten noch eine Art Gesamtbild: Wie setzen sich die einzelnen Aspekte zu einer Antwort zusammen? Dafür wollen wir gewissermaßen den Typ der Aspekte sowie die mathematische Güte je Antwort betrachten.

In Kapitel 2 haben wir als Bewertungskriterium die mathematische Güte einer Antwort als die Anzahl der verschiedenen verwendeten Aspekte ins Spiel gebracht. Diese einzelne Zahl ist hier auf keinen Fall ein Qualitätsmerkmal, denn viele Aspekte können auch auf falsche oder problematische Vorstellungen hindeuten.[81] Da wir es ausdrücklich nicht für sinnvoll halten, einzelne Aspekte gegeneinander aufzuwiegen, haben wir folglich zwei Beurteilungsmaße der mathematischen Güte: die Reichhaltigkeit der Antwort und die sprachliche Einordnung des Axiom-Objekts.[82]

Nachdem wir die entsprechenden Axiomsaspekte identifiziert und die Antworten hierdurch codiert haben, ist es nun ein leichtes, die Antworten dadurch zu quantisieren. Wir haben jeder Antwort ein Tripel zuordnet, bestehend aus den Anzahlen der funktionalen, fachmathematischen und metamathematischen Aspekte (in dieser Reihenfolge). Die Summe der Komponenten der Tripel gibt einen Eindruck der »Reichhaltigkeit« der Antwort.[83]

Die erreichte Anzahl an Aspekten je Antwort reicht von Null bis Sechs, durchschnittlich[84] 2,8 mit Median 3 und Standardabweichung 1,3, vgl. Tabelle 7.7 sowie Abbildung 7.1 auf Seite 326.[85] Die erwartbare Anzahl an Aspekten ist also drei. Davon ausgehend sprechen wir von »vielen Aspekten« ab vier Aspekten, von wenigen Aspekten bei zwei oder weniger Aspekten. Doppelt so viele Studierende haben wenige Aspekte als viele Aspekte angegeben (dreizehn vs. sechs). In zehn Antwor-

[81] Etwa »›Axiom‹ ist das, was man nicht beweisen muss, es gilt also ohne Beweis und immer«, vgl. *19pre5.5*, enthält die problematische Vorstellung der Allgemeingültigkeit, trotzdem erhält allein diese Teilantwort drei Aspektpunkte.

[82] Die vollständige Bewertung der mathematischen Güte findet sich im digitalen Zusatzmaterial unter »Axiom-Bewertung.xlsx«.

[83] Mehrere Instanzen eines Aspekts zählen wir nur einmal, bei gleicher Anzahl an Aspekten sehen wir die Antwort als reichhaltiger, welche mehr Hauptaspekte bedient. Eine Priorisierung verschiedener Aspekte findet hier nicht statt.

[84] Für die nachfolgenden Maß- und Korrelationsberechnungen haben wir die externen Personen aus der Auswertung entfernt. Außerdem haben wir die drei Antworten *16pre6.4,11-12* ignoriert, die viel zu vage waren. Sie haben von keinen Aussagen gesprochen und ihre Antworten enthielten keine relevanten Aspekte. Wir sprechen im Folgenden daher von 29 Antworten der Studierenden.

[85] In den nachfolgenden Tabellen sehen wir deutliche Unterschiede zwischen den drei Vorkursen, was die Zahl der Aspekte angeht. Die geringere Zahl an Aspekten in [17]Pretest kann durchaus an der Fragestellung liegen (dort mussten Testpersonen zunächst ein Axiomensystem erklären). Wir wollen diese Unterschiede zwischen einzelnen Pretests aber nicht genauer studieren.

ten fanden wir drei Aspekte. Nur eine Person davon bediente ausschließlich einen Hauptaspekt (den fachmathematischen); alle anderen Neun beschränkten sich auf zwei Hauptaspekte. Alle Antworten mit vielen Aspekten bedienen alle drei Hauptaspekte. Die Antworten mit vielen Aspekten sind also tatsächlich im eigentlichen Sinn reichhaltiger, sie beleuchten Axiome aus diversen Perspektiven.

	Alle Pretests		[16]Pretest		[17]Pretest		[19]Pretest	
	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
6	–	1	–	1	–	–	–	–
4–5	3	2	–	–	–	–	3	2
3	6	4	2	2	3	1	1	1
2	7	3	3	3	4	–	–	–
0–1	3	–	3	–	–	–	3	–

Tabelle 7.7.: Gegenüberstellung der Anzahl der Aspekte, y-Achse, und der Sprache (Axiom als Aussage: 1, oder nicht: 0), x-Achse. Kumulativ und für jeden Pretest einzeln. Externe Personen und zu vage Antworten wurden entfernt.

Beispiel 7.14. Vergleichen wir die Antwort »ein Axiom ist ein nicht beweisbarer Zusammenhang (Annahme), der so lange als geltend angenommen wird, bis eine Widerlegung oder eine weitere Unterteilung gefunden wird« von *16pre6.8* mit der »ein Axiom ist eine Annahme die so einfach ist, das[s] sie nicht zu beweisen ist, bzw. bewiesen werden muss. Auf der Basis weniger Axiome also Annahmen kann ein großes Gerüst gebaut werden« von *19pre5.3*. Beide Antworten sprechen von Annahmen, beide klingen irgendwie ähnlich. Die Betrachtung der Aspekte zeigt aber deutliche Unterschiede: Die erste Antwort ist auf einen, den fachmathematischen, Aspekt fokussiert, ihr Tripel ist (0, 3, 0). Die zweite ist insofern reichhaltiger als sie alle drei Hauptaspekte, wenn auch zum Teil schwach ausgeprägt, anspricht; Tripel (1-2, 2, 1). ♯

Die Anzahl der Aspekte korreliert schwach positiv mit der verwendeten Sprache in den Antworten (0,38) und gar nicht mit der Semesterzahl (-0,06).

Abschließend halten wir fest: Wir haben Aspekte des Axiomenbegriffs aus den Antworten herausgearbeitet und mathematisch diskutiert, problematische Stellen gefunden und eingeordnet, Antworten mithilfe der Güte miteinander verglichen und konkrete Ansatzpunkte geliefert, um Problemstellen zu begegnen.

Zusammenfassend sehen wir, dass die allermeisten Antworten nachvollziehbare Vorstellungen zum Axiomenbegriff enthalten, selbst wenn sie mathematisch teilweise problematisch erscheinen. Ihre Thematisierung und mathematische Einordnung könnte die (Darstellung der) Vorstellungen korrigieren.

7.2.10. Fazit zu den Pretests

Zu Beginn der Auswertung haben wir festgestellt, dass Studierende Konstruktionsaufgaben nicht unbedingt konstruktiv lösen und ihre Lösungen nicht unbedingt begründen, vgl. Abschnitt 7.2.3. Es lohnte sich also tatsächlich, über Konstruieren und Formalisieren im Kurs detailliert zu sprechen. Die Ergebnisse im Posttest werden zeigen, dass Studierende nach dem Kurs häufiger Konstruktionen zur Lösung von Konstruktionsaufgaben angeben.

Bemerkung 7.15. Wir konzentrieren uns in dieser Zusammenfassung nur auf Studierende. Bezogen auf den [17]Pretest haben wir Antworten der Studierenden mit denen der externen Personen verglichen. Diese Vergleiche waren für uns hilfreich, um die Antworten der Studierenden besser zu verstehen und einzuordnen. Eine auf sich gestellte Einschätzung der Qualität der Antworten externer Personen besäße für uns allerdings keinen Mehrwert und wurde daher nicht einbezogen. ♯

Wir haben ferner eine Reihe interessanter übergreifender Erkenntnisse sammeln können. Die zunächst nebensächlich erscheinenden Fragen zu Drei- und Vierecken aus Abschnitten 7.2.4 und 7.2.5 liefern Einsichten zur Gestaltung einer Axiomatisierung (der euklidischen Ebene). Dort sahen wir, dass Studierende durchaus Schwierigkeiten haben, eher leichte Fragen zu Drei- und Vierecken zu beantworten. Das können wir in unserem Kontext so interpretieren: Ehe wir mit dem Axiomatisieren einer Theorie anfangen können, müssen wir feststellen, dass die Theorie gut verstanden und beherrscht wird (frei nach Freudenthal: Man kann keine Theorie axiomatisieren, die man nicht versteht). Unsere Ergebnisse deuten also darauf, dass Axiomatisieren eines halbwegs bekannten Gebiets wie der euklidischen Ebene auch daran scheitern oder zu erheblichen Verzögerungen führen könnte, dass eine schlicht lokale *inhaltliche* Sortierung von Aussagen Studierende vor Probleme stellen kann. Hingegen haben wir keine ernsthaften Hinweise darauf gefunden, dass Studierende *logische* Schwierigkeiten mit lokalem Ordnen haben, vgl. Abschnitt 7.2.6. Diese Überlegungen setzen methodische und inhaltliche Grenzen an Axiomatisierungsvorhaben.[86]

Eine weitere, die ersten Beobachtungen verbindende, Erkenntnis kam aus einer anderen Richtung: In Abschnitt 7.2.7 analysierten wir Erklärungen der Studierenden zu einer vorgelegten Textpassage, die Begriffe wie »Axiomatik«, »euklidische Geometrie« und »Konstruktion« miteinander verwob. Die Auswertung zeigte, dass mehr als die Hälfte der Studierenden diese Passage sachlich angemessen nicht erklären kann. Das äußert sich auch in der Tatsache, dass die wenigen Versuche, diese Hauptbegriffe der Kompetenz zu erklären, von wenig Erfolg gekrönt waren. Studie-

[86]Wir erinnern daran, dass in unseren Kursen 1-fach-Origami gleichzeitig entdeckt und sortiert wurde. Daher hatten wir kein grundsätzliches Wissen, das wir *davor* hätten sammeln müssen.

rende kennen das Wort »Axiomatik« überwiegend nicht; sie ersetzen es stillschweigend durch »Axiome«.

Nicht wenige Studierende hätten aufgrund dieser kumulativen Erkenntnisse vermutlich Schwierigkeiten, eine Axiomatisierung einer Theorie durchzuführen oder lediglich nachzuvollziehen, da sie wohl nicht wüssten, wann diese abgeschlossen ist und was dafür zu tun ist.

Zur Beantwortung der Forschungsfrage FFa benötigen wir einen Überblick über die personal concept definitions der Studierenden zum Axiomenbegriff und zur euklidischen Ebene. Das haben wir in Abschnitten 7.2.8 und 7.2.9 umgesetzt. Unser Beitrag zur Beantwortung dieser Forschungsfrage ist hauptsächlich dort zu finden.

Primär haben wir gelernt, dass Studierende zu beiden Begriffen keine einheitliche Vorstellung besitzen; mehr noch, dass die Vorstellungen der Studierenden weit auseinandergehen. In ihren Antworten machten Studierende fast ausnahmslos keinen Unterschied zwischen einer Definition eines Begriffs und ihrer Vorstellung zu diesem Begriff. Sie versuchten direkt, ihre Vorstellung davon, was ein Axiom oder die euklidische Ebene sind, zu verschriftlichen. Sie gaben also eine personal concept definition an.

Die Frage nach der euklidischen Ebene haben wir ursprünglich im Vergleich zum Axiom-Item mitaufgenommen, um zu sehen, wie Studierende Begriffe mit und ohne eine(r) vorhandenen formalen Definition beschreiben. Wir haben gesehen, dass unsere Befürchtung, Studierende würden kaum etwas Analysierbares zu Axiomen schreiben, hat sich nicht bestätigt. Insofern ist der ursprüngliche Zweck der Frage nach der euklidischen Ebene entfallen. Die Antworten hierzu zeigten jedoch deutlich, dass zwar mehr als die Hälfte der Studierenden vertretbare Vorstellungen dazu zeigt, nur Wenige hier eine wirklich gute Antwort abliefern können und ein großer Teil der Studierenden keine vertretbare Beschreibung der euklidischen Ebene abgibt.

Die Vorstellungen zu Axiomen überraschten uns aus mehreren Gründen. Jede Testperson hat eine Vorstellung dazu. Diese Vorstellungen weisen große Vielfalt mit neun Aspekten und drei Hauptaspekten auf. Diese Vielfalt zeugt nicht immer von Qualität der Antwort. Nur ein Drittel der Studierenden gibt an, Axiome seien Aussagen, der Rest ordnet Axiomen mathematisch weniger passende Begriffe zu. Hier finden wir uns bei der Forschungsfrage FFb wieder, bei der es um mathematische Schwierigkeiten im Umgang mit Axiomen geht. Das ist der nächste überraschende Punkt unserer Untersuchung: Studierende haben wenige mathematisch nicht haltbare Vorstellungen zu Axiomen. Die meisten lassen sich gut nachvollziehen und sind jedenfalls mathematisch prinzipiell nicht falsch. Allerdings sind die Formulierungen der Antworten (mathematisch) verbesserungswürdig, aber das trifft auf fast alle Test-Items zu.

Die Schwierigkeiten in den Vorstellungen zu Axiomen betreffen hauptsächlich Beweis- und Vollständigkeitsaspekte. Hier fehlt es Studierenden, unserer Einschätzung nach, an mathematischer Tiefe und Einordnung des Themas. Wir glauben aber, dass eine Thematisierung etwa der gödelschen Resultate und der mit Beweisbarkeit zusammenhängenden gewissen Beliebigkeit bei der Auswahl von Axiomen diesen Vorstellungen mehr Substanz verleihen könnte.

Im weiteren Umgang mit Axiomen zeigen Studierende teilweise Unsicherheiten, wenn es um Abgrenzungen zu anderen Begriffen geht. So verwischen sie die Grenzen zwischen Axiomen und Definitionen, eine Besonderheit, der wir in Abschnitt 7.2.9.5 nachgegangen sind.

Die einzige weitere Möglichkeit, den Umgang der Studierenden mit Axiomen im Kontext zu sehen, stellt das bereits besprochene Kompetenz-Item dar. Dort haben Studierende den verwandten Begriff »Axiomatik« fast nie erklärt, nur wenige gaben gute Umschreibungen des Begriffs.

Unser Beitrag zur Forschungsfrage FFb ist daher beschränkt. In weiteren Untersuchungen lohnt es sich nun, sich weniger auf die problematischen Vorstellungen zum Axiom zu konzentrieren, sondern eher mehr Erhebungen zum Arbeiten mit Axiomen im Kontext zu planen.

Zusammenfassend haben wir gesehen, dass Studierende kaum etwas über Axiomatik sagen, Axiomensysteme jedoch zufriedenstellend beschreiben können, Axiome von Definitionen nicht immer sicher unterscheiden (können) und zu Axiomen teils reichhaltige und hier und da fehlerbehaftete Vorstellungen besitzen. Aber fast immer sind ihre Vorstellungen nachvollziehbar.

Zu einem wesentlichen Ergebnis aus den Pretests zählt unser Versuch, die Forschungsfragen mithilfe der van Hiele Niveaus zu beantworten. Wir haben in Abschnitt 6.2.4 darüber berichtet, wie dies geplant, umgesetzt und ausgewertet wurde und warum wir diese Methodik nicht weiter verfolgt haben.

Abschließend halten wir fest, dass wir selbst im letzten Test gesehen haben, dass es Fragen und Formulierungen gibt, die von Studierenden anders als beabsichtigt verstanden bzw. die von uns nicht optimal formuliert wurden. Die Entwicklung der Pretests ist also auch eine Entwicklung der Items und Formulierungen. Schlussendlich haben wir eine finale Formulierung der Items gefunden, die uns doch weitgehend zufrieden stellt.

7.3. Auswertung des ^{19}Posttests

In diesem Abschnitt werten wir den ^{19}Posttest aus. Die Auswertung erfolgt je nach Frage unterschiedlich. Fragen 2–4, 7–8 werden direkt ausgewertet. Fragen 3 und 7 werden zusätzlich mit vergleichbaren Fragen aus dem Pretest verglichen.

Fragen 5, 6, 9 werden mit den in den Pretests entwickelten Codierschemata codiert und mit den Antworten des ^{19}Pretests verglichen. Ein Vergleich von Person zu Person über alle Fragen hinweg findet nicht statt.

An diesem Posttest nahmen dieselben zehn Personen teil, denen wir bereits in der Auswertung des ^{19}Pretests in Abschnitt 7.2 begegnet sind.

7.3.1. Posttest, Frage 2: Streckendrittelung

Diese Frage ist kaum vergleichbar mit den früheren Fragen zur Streckendrittelung, da hier explizit nach Faltkonstruktionen gefragt wird.

Sie erfasst mehrere Aspekte: Können Studierende eine Faltung zur Streckendrittelung angeben? Wählen sie dabei eine 1-fach-Faltung? Können sie ihre Wahl bzgl. 1-fach-Origami einordnen?

Alle Studierenden gaben mindestens eine Faltung an. Insgesamt gaben zehn Studierende zwölf Verfahren an. Zwei Studierende erfalteten dabei ein falsches Ergebnis.[87] Zwei Studierende wählten die Brieffaltung, bemerkten aber, dass sie nicht 1-fach und »nicht sonderlich genau« sei, aber eine »genauere Version« falle ihnen nicht mehr ein. Trotzdem gab eine dieser Personen noch das Diagonalverfahren als Alternative an. Insgesamt gaben fünf der zehn Studierenden das Diagonalverfahren an, dabei waren die Konstruktionsbeschreibungen gut bis sehr gut. Drei von ihnen explizierten, dass dieses Verfahren 1-fach-Origami ist.

Drei Leute gaben die Haga-Faltung zum Dritteln an, hier waren die Konstruktionsschritte teilweise weniger präzise: »Halbiere das Blatt«. Zwei von drei erklärten, dass die Haga-Faltung kein 1-fach-Origami sei, aber es Methoden gäbe, mit der die Haga-Faltung zu 1-fach-Origami wird (das haben wir im Kurs besprochen).

In neun von zwölf Fällen wurde die Einordnung vorgenommen, ob die vorgelegte Faltung 1-fach ist, in allen Fällen richtig. Drei von zehn Studierenden gaben sehr gute bis exzellente Antworten, eine von ihnen gab sowohl die Haga-Faltung (mit Zeichnung und Beweisidee) als auch das vollständige Diagonalverfahren an. Diese Person schrieb unnötig einschränkend »es existieren 2 Verfahren«.

[87] Eine Faltung war eine Variante des Diagonalverfahrens, vgl. Abb. 5.11. Hier wurde allerdings behauptet, das Lot auf die dortige Gerade 2 durch den Mittelpunkt des Quadrats drittele die untere Kante. Richtig ist: Es viertelt diese Kante. Die andere Antwort faltete die Winkelhalbierende einer der Diagonalen im Quadrat mit der unteren Kante. Diese Winkelhalbierende soll die rechte bzw. linke Kante im Quadrat dritteln. Das ist nicht der Fall.

Die Hälfte der Studierenden konnte folglich eine Faltkonstruktion mit 1-fach-Origami angeben. Weitere drei haben mit Haga eine übliche Faltung zum Dritteln angegeben. Nur zwei Studierende gaben falsche Konstruktionsschritte an.

Wir finden dieses Resultat völlig in Ordnung. Acht von zehn Studierenden kennen mindestens eines der gängigen Verfahren zum Dritteln einer Strecke per Falten und die meisten wählen dabei eine 1-fach-Konstruktion. Dieses Ergebnis mit dem aus Abschnitt 7.2.3 zu vergleichen wäre inkorrekt (zumindest aufgrund der Fragestellungen und der im Kurs besprochenen Verfahren), aber ein Blick in die Tabelle 7.3 dort suggeriert, dass Studierende im ^{19}Kurs Falt*konstruktionen* zur Streckendrittelung kennenlernten, die sie früher nicht kannten, und dass sie diese überwiegend auch (kurze Zeit) nach dem Kurs wiedergeben können. !

7.3.2. Posttest, Frage 3: Dreieck zeichnen

Die Auswertung dieses Items lässt letzte Zweifel verfliegen, dass Studierende diese Frage nahezu vollständig aus pädagogischer und nicht inhaltlicher Sicht aufgefasst haben. Da diese Frage identisch zur Frage 2_{19} im ^{19}Pretest gestellt wurde, können wir hier die Auswertung sowohl kumulativ als auch personenbezogen durchführen.

Nur eine von zehn Personen gab im Posttest eine qualitativ bessere Antwort an, vgl. *19pre2.7/19post3.7*, indem sie nun eine Begründung für die Unmöglichkeit der Zeichnung angab. Waren im Pretest noch zwei Andeutungen auf die Möglichkeit der Zeichnung in anderen Geometrien zu finden (vgl. *19pre2.9,10*), fehlten im Posttest jegliche Hinweise auf die euklidische oder andere Geometrien. Diese beiden und die anderen Studierenden haben sich nun nur noch auf die Frage konzentriert, wie sie der Schülerin am einfühlsamsten beibringen, dass sie sich irrt: »Gemeinsam können wir noch Fehler suchen / uns freuen, dass es klappt!«, vgl. *19post3.10*. Das erklärt vermutlich, warum den Antworten im Posttest mathematische Argumente eher fehlten. Zwar ist die Anzahl der Antworten gleich geblieben, in den ein Argument für die Unmöglichkeit vorgetragen wurde: fünf von zehn. Allerdings sind die Argumente schwächer geworden: Alle Fünf sprachen bloß von »Winkelsumme«, vgl. *19post3.2,4,6,7,9*.

Die Antworten der Studierenden im Pre- und Posttest ähneln sich stark. Das ist sicherlich nicht sehr überraschend, führt uns aber zum Schluss, dass Studierende über dieses Item nach dem Pretest weder mit anderen Studierenden diskutierten, noch ihre eigene Antwort angezweifelt haben. Diese Feststellung ist umso erstaunlicher als wir im Kurs Beispiele anderer Geometrien (in denen solche Dreiecke existieren) angerissen haben. Vermutlich wäre die Antwort anders ausgefallen, hätten wir im Kurs explizit »rechte« Dreiecke in der Kugelgeometrie betrachtet.[88]

Wir stellen also fest, dass die Betrachtungen der euklidischen Ebene und Modelle einfacher Geometrien, die uns im ^{19}Kurs beschäftigt haben, nicht ausreichend waren, um eine positive Änderung der (Qualität der) Antworten zu diesem Item zu bewirken. Dieses Item scheint uns endgültig unpassend, wir würden es nicht wieder verwenden.

7.3.3. Posttest, Frage 4: Axiome des 1-fach-Origami

Diese Frage ist erstaunlich gut ausgefallen. Fast alle Testpersonen nannten in irgendeiner Form die Beloch-Faltung (meistens »zwei Punkte auf zwei Geraden falten«) und sagten, dass diese für alle anderen Axiome/Grundfaltungen ausreiche.

Genauer gab es eine einzige Themenverfehlung.[89] Eine Person schrieb unter anderem, dass »O6« (gemeint ist die Beloch-Faltung) ausreiche, allerdings hat sie sich in deren Beschreibung vertan.[90] Eine weitere Person gab fünf der Grundfaltungen an (darunter eine etwas spezielle Version der Beloch-Faltung), ohne weiter darauf einzugehen. Die anderen sieben Testpersonen gaben gute Antworten. Sie schrieben, dass die Beloch-Faltung ausreiche, um die weiteren Grundfaltungen (die sie teilweise angaben) zu folgern.

So gesehen, gaben neun von zehn Testpersonen mindestens fünf der Grundfaltungen an oder erklärten, dass alle Grundfaltungen aus der Beloch-Faltung folgen. Zwei dieser Antworten enthielten zusätzlich alle sieben Grundfaltungen.[91]

Einige Antworten waren sehr gut. Etwa *19post4.9* lautet: »Ich dachte wir hätten nur eins [Axiome des 1-fach-Origami]: Falte zwei Punkte auf zwei Geraden. Daraus lassen sich alle anderen Grundfaltungen ableiten [Es folgt die Auflistung der anderen sechs Grundfaltungen].«

Das Wort »Grundfaltung« ist in drei Antworten zu finden. In sieben anderen Antworten ist hingegen von Axiomen die Rede. Eine Person bemerkte interessanterweise »Frage ist, was ist ein Axiom?«, vgl. *19post4.3*, aber einen expliziten Unterschied zwischen Axiomen und Grundfaltungen machten nur zwei Personen: Die gerade zitierte sehr gute Antwort, die einen Unterschied zwischen den sieben Grundfaltungen und *einem* Axiom macht, und »eigtl. gibt es 7 Grundkonstruktionen die als

[88] Wir haben solche Dreiecke in einem der Kurse diskutiert, jedoch ziemlich sicher nicht in ^{19}Kurs.

[89] Die Person beschrieb eher die Anforderungen an Grundfaltungen, vgl. *19post4.7*.

[90] »Man kann einen Punkt so auf eine Gerade falten, dass der Falz durch 2 weitere, geg. Punkte verläuft«, vgl. *19post4.4*. Das beschreibt eine Faltung, bei der das Spiegelbild eines vorgegebenen Punktes an einer vorgegebenen Geraden auf der anderen vorgegebenen Geraden liegt; das ist generisch unmöglich.

[91] Im Kurs haben wir die Formalisierung nicht so weit getrieben wie in Kapitel 3 und hatten die redundante und namenlose achte Grundfaltung wie in Tabelle 3.2 nicht zur Verfügung.

Axiome bezeichnet werden«, vgl. *19post4.6*. Bis auf diese zwei Bemerkungen machten Studierende nicht erkennbar, ob Axiome des 1-fach-Origami bzw. Grundfaltungen für sie unterschiedliche Konzepte sind.

Insgesamt sind die Antworten zu dieser Frage recht durchdacht. Studierende konnten den fachlichen Inhalt dieser Frage weitestgehend gut bis sehr gut klären. Wir schließen daraus, dass sie die Grundfaltungen gut behalten haben und dass sie verstanden haben, wie 1-fach-Origami aufgebaut ist.

Bemerkung 7.16. Auch die sehr guten Antworten gingen nicht auf die Problematik ein, dass etwa die Beloch-Faltung nicht immer ausführbar ist. Sie sprachen dann nur von der generischen Version der Beloch-Faltung. Eine genaue Darstellung oder Diskussion dieser Faltung haben wir jedoch in dieser Frage gar nicht erwartet. ♯

7.3.4. Posttest, Frage 7: lokales Ordnen

Das Ergebnis der Auswertung dieser Frage im Vergleich zu dem aus ^{19}Pretest ist ähnlich, aber leicht verbessert.

Die Aufgabe haben wir so interpretiert, dass die Aussagen A, C, D äquivalent zueinander sind und folglich aus jeder dieser drei Aussagen zusammen mit E die Aussage B folgt. Daher sind die minimal benötigten Aussagen, um alle fünf Aussagen herzuleiten: Die Aussage E mit einer der drei Aussagen A, C, D. Diesen Drei-Zykel haben vier Personen explizit angedeutet.

Keine der zehn Personen gab eine falsche Antwort, aber wie auch im Pretest haben nicht alle Personen alle Antwortmöglichkeiten aufgelistet. Genauer gaben drei Personen eine vollständige Antwort,[92] eine leichte Verbesserung gegenüber dem Pretest (dort zwei). Die Person, die im Pretest falsch geantwortet hat, gab diesmal eine richtige Antwort und begründete diese. Auch hier ist also eine Verbesserung festzustellen. Insgesamt sehen wir, dass fünf Personen ihre Antwort gegenüber dem Pretest verbessern konnten, drei Personen haben gleich gute Antworten wie im Pretest gegeben und zwei gaben Antworten an, die weniger ausführlich als im Pretest waren. Wir stellen insgesamt eine leichte aber spürbare Verbesserung in der Qualität der Antworten fest. Wir können daraus nicht schließen, dass diese Verbesserung auf den Kurs zurückzuführen ist, aber das Ergebnis bekräftigt die Auffassung, dass lokales Ordnen von einfachen Aussagen von Studierenden gut verstanden wird und eventuelle, aus anderen Fragestellungen hergeleitete Axiomatisierungsprobleme, nicht im lokalen Ordnen einfacher Aussagen liegen.

[92] Eine davon wie im Pretest und zwei weitere haben sich hierdurch im Vergleich zum Pretest verbessert. Die zweite Person aus dem Pretest, die eine vollständige Lösung angab, gab hier im Posttest lediglich eine Lösung an.

7.3.5. Posttest, Frage 9: euklidische Ebene

In diesem Abschnitt werten wir die Antworten auf die Frage 9 des ^{19}Posttests: »Was bedeutet für Sie der Begriff ›euklidische Ebene‹? Wie würden Sie diesen definieren?«. Den auf die euklidische Ebene bezogenen Teil der Forschungsfrage FFa haben wir bereits in Abschnitt 7.2.8 beantwortet. Hier wollen wir sehen wie sich die mathematische Güte der Antworten seit dem Pretest entwickelt hat. Dazu haben wir das bereits entwickelte Codierschema benutzt, vgl. Abschnitt 7.2.8. Das Codierschema für diese Frage haben wir folglich nicht neu entwickelt, sondern ein bestehendes Codierschema verwendet und leicht angepasst, weil sich die Antworten aus dem Posttest damit zwar gut codieren ließen, jedoch einige wenigen neuen Codes benötigt haben. Es gab aber keine essenziellen Änderungen. Das entsprechende Datenmaterial findet sich im digitalen Zusatzmaterial unter »Codierschema Code:EE:19.pdf«.

Zunächst betrachten wir strukturelle Veränderungen zum ^{19}Pretest. Es hat sich nicht sehr viel verändert, die Antworten liegen nun sprachlich etwas näher beieinander als noch im Pretest. So wurden alle Antworten in der ist-Form festgehalten.[93] Dabei hat keine Person explizit erwähnt, wie die euklidische Ebene definiert wird, es wurde lediglich festgestellt, etwa »die euklidische Ebene ist das Koordinatensystem, welches man in der Schule verwendet«, vgl. *19post9.8*. Waren im Pretest die Antworten noch eher in aussondernder Form aufgeschrieben, hat sich hier die Situation leicht verändert: Sechs von zehn Antworten verwendeten keine aussondernden Formulierungen, etwa »$\mathbb{R}^2$, Menge aller Punkte in der Ebene«, vgl. *19post9.3*. Nur zwei von zehn Personen schreiben im Posttest über mindestens »eine« euklidische Ebene oder lassen mehrere zu[94] (im Pretest waren es vier von neun; zwei davon gingen im Posttest zum bestimmten Artikel über). Der Rest spricht von »der« euklidischen Ebene. Das hat keine tiefere Bedeutung, insbesondere gehen Studierende auf zugehörige Isomorphiefragen o.Ä. nicht ein, legt aber unter anderem nahe, dass die Antworten etwas ähnlicher werden.

Der universitäre Duktus ist nun in den Antworten deutlich zu erkennen, was auch mit der Verbesserung der Qualität der Antworten einhergeht. Drei Post-Antworten klingen nun eher nach einer formalen Definition (im Pretest Null), etwa »euklidische Ebene ist ein zweidimensionaler Fall von Euklidische[m] Raum« bzw. »$\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \star \mid \star \rangle$«, vgl. *19post9.4,9*.

Die Vorstellungen bzw. der geometrische Bezug haben sich nicht stark verändert. Wie auch im Pretest klingen die meisten Antworten (sechs von zehn) nach analytischer Geometrie, dabei wird von Vektoren, Achsen, Körpern und Erzeugnissen gesprochen, »die euklidische Ebene lässt sich durch zwei Vektoren aufspannen«, vgl.

[93] Auch Formulierungen der Form »sie lässt sich erzeugen« oder »sie bezeichnet« haben wir der ist-Form zugeordnet, weil die Formulierung »sie ist das Erzeugnis« sehr ähnlich ist.

[94] »Ein Teilbereich des $\mathbb{R}^2$«, vgl. *19post9.4*.

19post9.7. Die anderen Antworten sind eher eine Mischung aus den analytischen und synthetischen Mustern, etwa »$\mathbb{R}^2$, Menge aller Punkte in der Ebene«, vgl. *19post9.3*, wie im Pretest auch. Zwar blieben nur vier von zehn Personen bei nahezu gleicher Zuordnung, vgl. etwa Personen[95] $1, 3, 4, 8$, aber auch bei den Personen $7, 10$ haben sich die Vorstellungen nicht dramatisch verändert.[96]

Auch kumulativ sieht die Datenlage im Posttest eher besser aus, aber am besten scheint uns hier ein personenbezogener Vergleich zu sein.

Deutliche Änderungen gab es bei den Antworten von vier Leuten. Die einzige deutliche Verschlechterung ist bei der Person 2 festzustellen: War die Pre-Antwort »eine euklidische Ebene wird durch drei Punkt[e] im Raum aufgespannt« recht vage aber (auch daher) fast gut, ist die Post-Antwort »die euklidische Ebene ist die Menge aller Punkte die durch Geraden miteinander verbunden werden kann« schlicht falsch. Andere drei Veränderungen waren positiver Natur. Aus

> »Mit dem Begriff ›euklidische Ebene‹ kann ich leider erstmal nichts anfangen« in *19pre4.6*

wurde nun unter anderem

> »[...] Nach meiner Vorstellung handelt es sich dabei um eine zweidimensionale Ebene ähnlich wie $\mathbb{R}^2$« in *19post9.6* – eine fast gute Antwort.

Aus »die eukl. Ebene wird durch zwei senkrechte Achsen (›x‹, ›y‹) aufgespannt. Ein Punkt in der Ebene ist durch seine x,y-Koordinaten eindeutig bestimmt« der Person 9 wurde schlicht »$\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \star \mid \star \rangle$«, mathematisch einwandfrei. Dabei hat diese Person im Pretest der Antwort vorangestellt: »Da ich die math. Definition jetzt nicht kenne, würde ich sagen«.

Aus der mathematisch falschen Pre-Antwort der Person 5: »Eine Ebene, die geordnet ist. Bzw. die eine Skala hat, mit der man arbeiten kann« wurde im Posttest »euklidische Ebene ist ein zweidimensionaler Fall von Euklidische[m] Raum«, eine gute Antwort.[97] Insgesamt verzeichnen wir im Posttest zwei Personen, deren Antworten sich eher verschlechtert haben.[98]

[95] Wir bezeichnen im Folgenden mit »Person n« die Antworten *19pre4.n* und *19post9.n*.

[96] vgl. bei Person 7: »2-dimensionale Ebene, heißt eine Fläche, die unendlich groß ist und durch 2 Vektoren/Geraden beschrieben werden kann« im Pretest gegenüber »die euklidische Ebene lässt sich durch zwei Vektoren aufspannen« im Posttest. Oder Person 3: »Definition: $\mathbb{R}^2$ [...]« gegenüber »$\mathbb{R}^2$, Menge aller Punkte in der Ebene [...]«.

[97] Diese Antwort ist nicht einwandfrei, weil die Definition des euklidischen Raumes nicht gegeben wird. Allerdings genügt uns diese Antwort, da euklidische Räume in der Linearen Algebra gängigere Begriffe sind. Schließlich erlauben wir ja auch in guten Antworten $\mathbb{R}^2$ und »Standardskalarprodukt« undefiniert zu lassen.

[98] vgl. Personen $2, 4$. Die erstere haben wir gerade angeschaut. Die zweitere hat bei etwa gleicher Vorstellung eine schwammigere Antwort gegeben: Aus »Ein zweidimensionaler Raum in dem Abstände zwischen 2 Punkten $x \& y$ als $|x - y|$ festgelegt sind« wurde »Ein Teilbereich des $\mathbb{R}^2$ mit bestimmten Normen, bzw. Abständen«.

Die Qualitäten zweier anderer Antworten sind im Wesentlichen gleich geblieben, vgl. Personen 1 und 7: In beiden Fällen geht es im Wesentlichen um den Spann zweier Vektoren bzw. Achsen.

Drei Personen konnten leicht bessere Antworten geben, vgl. Personen 3, 8, 10. Dabei korrigierte Person 8 ihre falsche Vorstellung einer dreidimensionalen Ebene zum kartesischem Koordinatensystem und Personen 3 und 10 fügten zu $\mathbb{R}^2$ Formulierungen hinzu, die wir wohlwollend als euklidische Abstandsmessung enthaltend interpretieren.[99]

Die restlichen drei Personen konnten ihre Antwort wesentlich verbessern, darüber haben wir bereits berichtet.

Insgesamt sehen wir bei zwei Verschlechterungen eine spürbare Verbesserung der gesamten Datenmenge. Im Posttest haben wir nun gute Antworten (neu) und auch sogar eine einwandfreie – das ist eine deutliche Änderung zum Pretest.

Andererseits gibt es die Datenlage nicht her, diese Verbesserungen auf den Kurs zurückzuführen. Die meisten Verbesserungen stecken lediglich in etwas besseren Formulierungen. Die Inhalte der Kurse lassen sich nur geringfügig erkennen in »$\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \star \mid \star \rangle$« oder »unendlich großes Blatt Papier mit Grundkonstr. wie in Aufg. 4 [gemeint sind 1-fach-Origami-Axiome]«, vgl. *19post9.3*, oder »$\mathbb{R}^2$ [...] inkl. der Axiome von Euklid«, vgl. *19post9.10*. Dabei liefern die letzten beiden einen eher geringen Beitrag zur besseren Qualität der Antwort. Insbesondere ist keine Andeutung der Axiome von Hilbert oder Martin vorhanden. Das bekräftigt unsere Schlussfolgerung aus Abschnitt 7.3.2, durch den Kurs wird der Blick der Studierenden auf die euklidische Ebene wenn überhaupt dann nur geringfügig geändert. Für eine substantielle Änderung würde vermutlich eine intensivere Beschäftigung mit der euklidischen Ebene – ähnlich wie mit 1-fach-Origami – benötigt werden, die bei uns aus Zeitgründen nicht erfolgte. Aus der Sicht von conceptual change ist das nicht verwunderlich, wenn Studierende angesichts dieser kurzen Beschäftigung mit der euklidischen Ebene fest an ihren hergebrachten Vorstellungen hierzu halten.

Bemerkung 7.17. Ferner erwähnenswert im Posttest sind zwei Zitate, die Origami betreffen, etwa »Origami findet in der eukl. Ebene statt«, vgl. *19post9.10*, und zwei Zitate, die Euklid explizit erwähnen, etwa »die euklidische Ebene lässt sich auf Euklid bzw. dessen Verständnis von Geometrie zurückführen«, vgl. *19post9.6*, – zwei Neuerungen zum Pretest.

Mit der höheren mathematischen Qualität im Posttest sank naturgemäß die Anzahl seltsamer Vorstellungen, zwei sind aber zu nennen: »Alle Objekte in dieser Ebene sind entspre-

[99] vgl. etwas kryptische »Menge aller Punkte in der Ebene mit Grundkonstruktionen Zirkel & Lineal« bzw. »ich denke dass die eukl. Ebene der $\mathbb{R}^2$ ist inkl. der Axiome von Euklid«. Bei »Axiome von Euklid« denken wir etwa auch an die auszeichnende Eigenschaft paralleler Geraden oder die Möglichkeit, Kreise zu zeichnen, sonst wissen wir nicht, wie die Aussage zu verstehen ist.

chend 2dimensional«, vgl. *19post9.7*, eine offensichtlich falsche Vorstellung, die etwa Punkte der Ebene vernachlässigt. Aber auch »ein Teilbereich des $\mathbb{R}^2$«, vgl. *19post9.4*, lässt offen, welcher Teilbereich und warum dies nur ein Teilbereich ist.

Person 8 bestand beide Male darauf, dass die euklidische Ebene aus der Schule bekannt ist: »die Ebene, die man aus der Schule kennt« und »das Koordinatensystem, welches man in der Schule verwendet«. Hier wäre eine gewisse Präzisierung interessant. $\sharp$

7.3.6. Posttest, Frage 5: Axiom erklären

In diesem Abschnitt vergleichen wir die Antworten zur Frage 5 aus dem ^{19}Pre- bzw. Posttest.[100] Kurz: Die Güte der Antworten im Vergleich zum Pretests hat sich kumulativ verbessert. Aber auch alle anderen Parameter deuten auf eine positive Veränderung hin. Wir beschreiben das aus mehreren Perspektiven.

!

Studierende haben im Posttest banalerweise mehr geschrieben. Das können wir allein an der Zahl der verwendeten Wörter ablesen: 295 im Pretest gegenüber 416 im Posttest.[101]

Etwas substantieller sind die inhaltlichen Änderungen. Axiome sind Aussagen für nunmehr sechs (im Pretest vier) Studierende. Das heißt mehr als die Hälfte weiß nun, Axiome mathematisch richtig einzuordnen. Nicht vorhanden in den ^{16,17}Pretests, mit drei Erwähnungen eine Randerscheinung im ^{19}Pretest, ist die Verwendung des Wortes »Axiom« *innerhalb einer Theorie* im Posttest deutlich gestiegen. Sechs von zehn Studierenden erklären Axiome nicht mehr im luftleeren Raum, sondern innerhalb einer Theorie oder für eine Theorie. Zwei Studierende im Posttest präzisieren, dass sie zunächst eine Theorie haben und zu dieser Axiome suchen. Diese Erklärung überschneidet sich stark mit Vorstellungen zum Axiomatisieren, vgl. nächsten Abschnitt. Wir haben also mehr als die Hälfte der Studierenden, die nun einen mathematisch sinnvollen Rahmen setzen, in den sie Axiome einbetten und diese mathematisch korrekt einordnen.

Eine Neuheit im Posttest sind zwei Antworten, die nun zwischen einer Erklärung eines Axioms und dessen Definition explizit unterscheiden. Das kann so interpretiert werden, dass diese Testpersonen die Frage diesmal genauer gelesen haben, aber auch, dass sie nun tatsächlich genug Informationen zu Axiomen haben, um ihre Vorstellung von einer Definition unterscheiden zu können. Allerdings sind die Formulierungen in beiden Fällen stilistisch nicht von anderen Antworten oder Erklärungen zu unterscheiden:

[100]Die Daten zum Vergleich vom Pre- und Posttest finden sich im digitalen Zusatzmaterial unter »Axiom-Aspekte-PrePost19.xlsx«. Das Codierschema findet sich ebenda unter »Codierschema Code:Axiom19.pdf«.

[101]Das ist nicht ganz präzise, weil wir einige Zeichen aus den Tests mit Wörtern umschrieben haben.

> »Def: Ein Axiom ist eine einer Theorie zugrunde liegende Aussage, aus der mithilfe weiterer Axiome, alle Zusammenhänge dieser Theorie bewiesen werden können. Erklärung: Ein Axiom ist ein Grundbaustein einer Theorie und es ist zweitrangig ob es wahr oder falsch ist, aber aufgrund von Axiomen können nun alle Aussagen einer Theorie als wahr oder falsch betitelt werden.« vgl. *19post5.2*

Die Anzahl der verwendeten Aspekte steigt. Der Durchschnitt ist von 3,15 auf 4,3, der Median von 3,5 auf 4,75 gestiegen (bei kleinerer Standardabweichung im Posttest: gesunken von 1,79 auf 1,03). Diese Veränderung ist eine (knapp) nicht signifikante Verbesserung,[102] aber ein nicht signifikanter Trend mit mittlerer Effektstärke.
! Studierende geben also wesentlich mehr Aspekte an, vgl. auch Abbildung 7.1. Wie ändert sich dieser Zuwachs inhaltlich? Betrachten wir die einzelnen Aspekte.

Bemerkung 7.18. Allerdings ist die Veränderung auf Personenebene deutlich anders. Nur zwei Personen haben leicht weniger Aspekte genannt als im Pretest (vier gegenüber fünf).
! Alle anderen Antworten enthielten mehr Aspekte. Dabei waren die Änderungen teils stark. Zwei Personen haben nun vier bzw. fünf Aspekte genannt (im Pretest Null bzw. Eins). Im Posttest gab es lediglich eine Antwort mit zwei Aspekten und sonst ≥ 4, im Pretest noch drei Antworten mit ≤ 1 Aspekten. ♯

Es ergaben sich kaum relevante Änderungen im funktionalen Hauptaspekt: Der Gebäudeaspekt ist nun weniger wichtig geworden, der Nutzaspekt weist keine nennenswerte Unterschiede auf; Studierende bleiben in etwa bei ihrer Vorstellung hierzu. Allerdings ging die Vorstellung, Axiome werden zum Definieren von Begriffen eingesetzt, zurück (von vier auf zwei).

Der Gültigkeitsaspekt spielt im [19]Pre- wie Posttest kaum eine Rolle. Dieselben zwei Personen sprechen von der Gültigkeit der Axiome, eine davon nicht mehr von »uneingeschränkt gültig«.

Im Pretest gab es zwei Stimmen zum Wahrheitsaspekt, Axiome wurden als wahr angenommen. Im Posttest äußern sich nun vier Personen dazu und die Antworten sind differenzierter als in den Pretests. Hier ist an zwei Stellen deutlich, dass die Wahrheit der Axiome im Modell gemeint ist: »Um eine Theorie aufzubauen wählt man eine gewisse Menge von Axiomen aus (Axiomensystem) und legt deren Belegung fest (Modell)«, vgl. *19post5.9*, bzw. etwas vager »diese Aussage wird als wahr angenommen um in der Theorie arbeiten zu können«, vgl. *19post5.1*. Eine Person expliziert sogar »es ist zweitrangig ob es [Axiom] wahr oder falsch ist«, vgl. *19post5.2*, – eine in den Pretests nicht vorhandene differenzierte Ansicht. Im Posttest gewinnt der Wahrheitsaspekt an korrekter Bedeutung, die Vorstellungen dazu sind gut und besser formuliert.

[102] Der einseitige Ein-Stichproben-t-Test liefert $t(9) = -1.8$ und $p = 0,052$. Die Effektgröße ist 0,57, vgl. auch [BD06, S. 609].

Der atomare Aspekt (auch sonst eine Randerscheinung) spielt im ^{19}Pre- wie Posttest quasi keine Rolle (zwei bzw. eine Instanz).

Der Beweisaspekt gewinnt deutlich an Bedeutung (nunmehr sieben gegenüber vier von zehn Personen erwähnen ihn). Alle sieben Personen sagen korrekterweise Axiome müssen nicht bewiesen werden; zwei davon sind sich aber nicht sicher und fügen hinzu »kann man nicht beweisen«.[103] Hier ergab sich also eine leichte Korrektur der Vorstellung und Personen, die diesen Aspekt in ihre Vorstellung neu aufnahmen, und diesen auch korrekt dargestellt haben.

Im fachmathematischen Hauptaspekt gab es somit deutliche Änderungen im Beweis und Wahrheitsaspekt. Aus sprachlicher und fachmathematischer Sicht sehen wir diese Änderungen als positiv an.

Die deutlichste Änderung gab es im metamathematischen Hauptaspekt. Die Anzahl der betroffenen Instanzen hat sich von sechs auf dreizehn mehr als verdoppelt, wobei der Vollständigkeitsaspekt kaum an Relevanz verloren oder bekommen hat (zwei vs. drei Antworten im Pre- bzw. Posttest mit jeweils recht schwacher Ausprägung: »alles« in *19pre5.10* und »alle weitere[n] Aussagen« in *19post6.5*).

Aber der Minimalitätsaspekt wurde durch die Unabhängigkeit von Axiomen präzisiert. Aus »wenigen« Axiomen bei Person 3 im Pretest sind im Posttest »unabhängige« Axiome geworden – ein besserer Fachterminus.

Die Herkunft der Axiome, ein Nischenaspekt in allen Pretests, bekommt einen ungewöhnlichen Zulauf im Posttest. Im ^{19}Pretest mit einem einzigen Wort noch zu greifen, spricht nun die Hälfte der Personen treffend und teils ausführlich davon, woher Axiome kommen. Vom lakonischen »besonders ausgezeichnet« und sogar einfach »ausgezeichnet«[104] bei Personen 9 und 10 zum ausführlichen »entsteht nicht dadurch, dass man sich denkt: Ach heute überleg ich mir ein paar Axiome. Sondern erst ist die Theorie & ich will an das Fundament der Theorie → Essenz des Ganzen«, vgl. *19post5.3*, in der wir sogar Axiomatik und Axiomatisierung als Gegenteile sehen.

Dieser Aspekt schlägt die Brücke zum Axiomatisieren, Studierende inkludieren in ihre Vorstellung die Daseinsberechtigung für Axiome. Dabei sind zwei Darstellungen etwas unglücklich formuliert: Bei Person 7 ist ein Axiom »etwas natürlich gegebenes zu einem Objekt«. Das entzieht sich unserer Vorstellung, weil unklar ist, wie etwa eine Funktion ihr inhärente Axiome haben soll. Auch »ein Axiom ist die kleinste Einheit eines Axiomensystems« von *19post5.6* ist unglücklich: Entweder ist es eine Einheit, ein Element eines Axiomensystems, oder die kleinste Einheit einer Theorie, aber die kleinste Einheit eines Axiomensystems klingt wenig hilfreich.

[103] Aber auch im Pretest waren drei von vier Personen der korrekten Meinung, Axiome müssen nicht bewiesen werden. Die vierte Person bediente den Beweisaspekt im Posttest nicht.

[104] Das ist dann im Wesentlichen die Darstellung aus Definition 1.8.

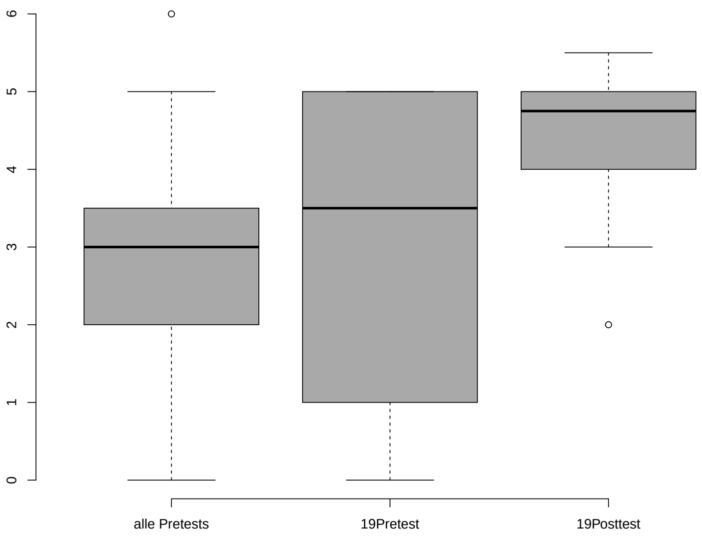


Abbildung 7.1.: Boxplots zur Darstellung der Anzahl der Aspekte in den Antworten zu den Axiom-Items. Links: Alle drei Pretests, ohne externe Personen und ohne drei zu vagen Antworten, $n = 29$. Mitte: ^{19}Pretest, rechts: ^{19}Posttest, $n = 10$ jeweils.

Eine weitere, mit unseren Mitteln objektiv nicht messbare positive Veränderung ist die Formulierung der Antworten. Wir können bei einigen Studierenden die offenbar im Kurs gehörten Formulierungen erkennen.[105] Wir interpretieren das so, dass Studierende ihre Vorstellungen mit neu gelerntem Wissen anreichern und dass sie vor allem dieses Wissen in ihre Vorstellungen aufnehmen. Das ist mitnichten selbstverständlich.[106]

Beispiel 7.19. So haben wir Stellen wie »es ist zweitrangig ob es wahr oder falsch ist«, »ein Axiom ist ein sprachliches Gebilde«[107] oder »eine Aussage, die besonders ausgezeichnet ist« identifizieren können, die auf die Gespräche in den Kursen hindeuten und in der Form in den Pretests nicht vorhanden waren.

Allerdings gab es auch Personen, die (Teile) ihre(r) Vorstellung unverändert beibehielten. Etwa die Person 5 hat im Pretest geschrieben: »›Axiom‹ ist das, was man nicht beweisen muss, es gilt also ohne Beweis und immer«. Im Posttest klang ein Ausschnitt sehr ähnlich: »Axiom ist eine Aussage, die keinen Beweis braucht und gilt immer.« ♯

[105] Das werden wir etwas deutlicher im Axiomatisieren-Item sehen.

[106] Das sahen wir kurz im Kapitel 4 als wir über Problemstellen mit conceptual change sprachen.

[107] Das ist etwas unverständlich. Oft wird eine Aussage mangels besserer Definition als ein gewisses sprachliches Gebilde »definiert«, vgl. die aristotelische Definition auf Seite 49. Axiome sind Aussagen. Daher können wir bei Bedarf von Axiomen als von sprachlichen Gebilden sprechen, allerdings ist das etwas ungeschickt.

7.3.7. Posttest, Frage 8: Axiomatisieren

Wir haben die Antworten auf dieses Item offen codiert und essenzielle Kategorien und Aspekte herausgearbeitet. Neben der Codierung bewerteten wir die Antworten aus fachmathematischer Perspektive anhand Definitionen und Ausführungen aus Abschnitt 1.3, insbesondere Definitionen 1.11 und 1.8. Das unterscheidet sich auch insofern von den Axiom-Item im Pretest als Studierende mit einer Definition von Axiomatisieren konfrontiert wurden.

Bemerkung 7.20. Wir haben keinen Grund gesehen, dieses Item mit dem Codierschema aus dem Axiom-Item zu codieren, da diese beiden Items prinzipiell unterschiedliche Fragen behandeln. Dass die entsprechenden Aspekte a posteriori recht ähnlich, aber beim Axiom-Item viel reichhaltiger sind, ist den abgegebenen Antworten geschuldet und zeigt möglicherweise, dass die Vorstellungen der Studierende zum Axiomatisieren noch nicht stark ausgebildet sind. ♯

Bemerkung 7.21. Dieses Item hilft uns bedingt, Erkenntnisse für die Beantwortung der Forschungsfragen FFa,b zu sammeln. Allerdings hilft es enorm für die Forschungsfrage FFc, da wir nun die Antworten zu diesem und zum Axiom-Item vergleichen und somit tiefere Einsichten in die Entwicklung der Antworten vom Pre- zum Posttest erhalten können. ♯

Wir wurden durch die Reichhaltigkeit der Antworten auf diese Frage überrascht. Die Antworten sind vielfältig und ähneln sich recht wenig. Das spiegelt sich wider in einem codereichen Codierschema mit niedrigen Häufigkeiten pro Code. Angesichts dessen erscheint uns eine kumulative Analyse der Antworten nicht zielführend, wir sehen keine offensichtlich verallgemeinerbaren Tendenzen außer der wenigen folgenden. Stattdessen erscheint es uns möglich und lehrreich, die Antworten nach ihrer Qualität zu sortieren. In dieser Sortierung erkennen wir, dass besser bewertete Antworten mehr und vielfältige Aspekte beinhalten und diese besser darstellen. Wir geben zunächst einige Resultate der Analyse an und gehen dann die sortierten Antworten durch, ordnen sie ein und kommentieren diese.

Positiv zu bewerten ist der Umstand, dass die Hälfte der Testpersonen von »Aussagen« spricht, wenn sie »Axiomatisieren« erklären. Dabei meinen sie Teile einer Theorie, etwa »bewiesene Aussagen immer aus anderen Aussagen herzuleiten«, vgl. *19post8.3*, oder »aus erkannten Phänomenen/Aussagen sollen [...] Axiome [...] gefolgert werden«, vgl. *19post8.4*. Allerdings erklärt die best bewertete Antwort als einzige, dass auch Axiome Aussagen sind, vgl. *19post8.9*. Die restlichen fünf sprachen von Zusammenhängen, Phänomenen, Thesen, vgl. *19post8.1,2,8*, oder formulierten ihre Antwort ohne eine solche Erwähnung, vgl. *19post8.7,10*. Das ist deswegen erwähnenswert, weil diese Personen im Axiom-Item Axiome als Aussage bezeichneten.

Interessant ist die Vorstellung zum Verhältnis zwischen der Menge der (beweisbaren) Aussagen einer Theorie und den zugrunde liegenden Axiomen. Nur eine

Person sagt explizit, dass »alle Aussagen auf Axiome zurück[ge]führt« werden, ohne dass eine eingrenzende Menge von Aussagen benannt wird, vgl. *19post8.6*. Die andere Perspektive vertreten die meisten Anderen. Sie formulieren dabei vorsichtig, dass Axiomatisieren sich auf eine bestehende Theorie bezieht (fünf Nennungen) und innerhalb dieser Theorie werden dann passende Axiome gesucht. Das passt sehr gut zu dem, was wir beim Axiom-Item für die ^{19}Pre-Posttests gesehen haben.

Interessant ist auch zu entdecken, was Studierende darüber denken, woher Axiome kommen.[108] Die Herkunft der Axiome taucht nur in den besseren Antworten auf, vgl. *19post8.1,3,4,9,10*. In *19post8.4*, der weniger qualitativen unter den genannten, werden Axiome in der Axiomatik »gegeben« und beim Axiomatisieren etwas nebulös aus »erkannten Aussagen« »gefolgert«. Die anderen vier Antworten deuten mehr oder weniger klar an, dass Axiome im Axiomatisierungsprozess aus anderen Aussagen/Sätzen/Phänomenen entstehen. Wir sahen aber bereits im vorigen Abschnitt, dass der Herkunftsaspekt im Posttest auch beim Axiom-Item eine größere Rolle spielt.

Ferner bemerkenswert ist die Tatsache, dass *keine* Testperson auf die nötige Spezifizierung der undefinierten Terme für eine Theorie eingeht, vgl. Definition 1.11. Die Antworten konzentrieren sich auf das Auffinden der Axiome oder das Herleiten der Aussagen der Theorie aus diesen Axiomen. Genauer haben sieben von zehn Personen ihre Antworten so formuliert, dass sie auf eine Kernthese gebracht werden können: Axiomatisieren heißt ein Axiomensystem finden. Aber nur eine Person expliziert das, siehe weiter unten.

Folgende Aspekte haben wir aus den Antworten destilliert, die wir ferner in drei Hauptaspekte, ähnlich wie im Axiom-Item, eingeteilt haben: die visuellen, formalen und metamathematischen Aspekte.[109] Diese Aspekte müssen nicht unabhängig voneinander sein. Eine Textstelle kann mehreren Aspekten zuordenbar sein. Etwa die Beweis-, Gebäude- und Iterationsaspekte können eng miteinander verbunden sein, wie etwa in der von *19post8.3* inspirierten Darstellung: Bewiesene Aussagen immer weiter aus anderen bewiesenen Aussagen herleiten, bis man ganz unten bei den Axiomen angekommen ist. Der visuelle Aspekt ist hier durch den Gebäudeaspekt vertreten.[110] Bei den formalen Aspekten sind der Prozessaspekt[111] sowie dessen Ite-

[108] Die Bedeutung des Herkunftsaspekts hängt von der Fragestellung ab. In dem Axiom-Item ist dieser prinzipiell nebensächlich. Beim Axiomatisieren ist die Überlegung, woher Axiome kommen oder wie sie ausgewählt werden, eine der zentralen.

[109] vgl. »Codierschema Code:Axiomatisieren.pdf« im digitalen Zusatzmaterial.

[110] Hier landen Textstellen, die eine Vorstellung offenbaren, eine Theorie basiert auf einem Fundament oder ist darauf aufgebaut.

[111] Axiomatisieren wird als ein (andauernder) Prozess dargestellt. Auch dieser Prozess ist vom Beweisaspekt nicht unabhängig, denn die eigentliche Iteration beim Axiomatisieren ist das iterative Verfeinern eines Beweises bis hin zu den Axiomen.

rationsteilaspekt und der Beweisaspekt[112] eingeordnet. Die metamathematischen Aspekte beschreiben den Minimilätsanspruch an Axiome[113] sowie – der Vollständigkeitsaspekt – die Reichweite des Gebäudes, welches aus den Axiomen errichtet wird.[114] Insbesondere spielen bei diesem Item Wahrheits-, Widerspruchs- oder Gültigkeitsüberlegungen keine nennenswerte Rolle (im Gegensatz zum Axiom-Item).

Wir kommen nun zu den Antworten. Das ist ein gewisser Höhepunkt, denn hier sehen wir, auch in Rohform, was Studierende über das Axiomatisieren denken und darunter verstehen – eine der grundsätzlichen Fragen der Arbeit.

19post8.8: »Axiomatisieren bedeutet, eine These zu haben und daraus Axiome zu bilden, um diese These zu einem beweisbaren Satz zu machen«. Das ist mathematisch nicht haltbar. Hier könnte jede These einfach als ein Axiom deklariert werden, dann würde sie zu einem beweisbaren Satz werden. Alternativ dürfte hier zu jeder These/Aussage ein separates (lokales?) Axiomensystem gesucht werden.

→ Diese Antwort passt nicht zur Pre-Post-Verbesserung (von 1 auf 5,5 Aspekte, bessere Sprache) im Axiom-Item. So reichhaltig die Antwort *19post5.8* dort ist, so wenig sagend ist diese hier.

19post8.5: »Eine Aussage durch Axiome beweisen, oder mit Aussagen, die schon mit Axiomen bewiesen w[u]rden.« Diese Antwort ist nicht falsch, beantwortet aber eine andere Frage: Hier wird lediglich das Funktionsprinzip eines Beweises beschrieben, die Beziehung zum Axiomatisieren aber nicht geklärt.

→ Diese Person hat sich in ihren Vorstellungen zu Axiomen bemerkenswert nicht beeinflussen lassen. Es gab keine großen Pre-Post-Veränderung im Axiom-Item (beides mit vielen Aspekten). Diese Antwort zeigt, dass Axiomatisieren keinen bleibenden Eindruck hinterlassen hat.

Die restlichen acht Antworten passen zur Frage und geben zumindest teilweise korrekte Vorstellungen über den Axiomatisierungsprozess ab.

19post8.2: »Unter Axiomatisieren versteht man den Vorgang praktische Anwendungen und Zusammenhänge mithilfe von Axiomen auf eine Theorie ›herunterzubrechen‹«. Hier dominiert einzig der Gebäudeaspekt. Der Prozessaspekt steckt im Wort »Vorgang«, der die Tätigkeit des Axiomatisierens beschreibt. Wir finden jedoch, dass dies nur eine schwache Ausprägung des Prozeduralen ist. Weitere Ausführungen wie »praktische Anwendungen« bleiben zu vage und erlauben keine konklusive Analyse. Die

[112] Hier landen alle Textstellen, bei denen die Wörter »Beweisen«, »Zeigen«, »Begründen« u.Ä. explizit auftauchen. Sie bedienen die Vorstellung, dass beim Axiomatisieren etwas bewiesen, begründet, hergeleitet, gefolgert wird. Dieser Aspekt erfasst im Wesentlichen die Vorstellung, dass gewisse Aussagen der Theorie (ggf. mithilfe von Axiomen) bewiesen werden.

[113] Die Textstellen bedienen die Vorstellung, die Menge der Axiome ist möglichst klein zu wählen.

[114] Hierunter fallen alle Vorstellungen, die beschreiben, welche Aussagen (einer Theorie) aus Axiomen abgeleitet werden können.

Rolle der Theorie bleibt ungeklärt. Es liest sich so, als lieferte das Axiomatisieren eine Theorie als ein Output, vgl. auch Definition 1.11. Dort ist das Resultat des Axiomatisierens einer Theorie eine axiomatische Theorie. Vom Wortlaut her erscheint uns die hiesige Antwort anders gemeint zu sein als es in Definition 1.11 beabsichtigt ist. Das ist interessant in Bezug auf weitere Antworten, die den Begriff »Theorie« in diesem Zusammenhang anders verarbeiten. Die Darstellung ist ziemlich vage und allgemein, die Vorstellungen nicht überzeugend und nicht vertieft geschildert.

→ Das ist eine weitere Antwort mit einer starken Pre-Post-Veränderung im Axiom-Item (von Null auf vier Aspekte, Unterscheidung zwischen Definition und Erklärung, Axiome sind nun Aussagen, präzisere Formulierungen) und einer mathematisch schwach formulierten Antwort in diesem Item.

19post8.6: »Unter ›Axiomatisieren‹ versteht man, dass man alle Aussagen auf Axiome zurückführt bzw. mit ihnen aufbaut«. Hier dominiert ebenfalls der Gebäudeaspekt. Es wird zusätzlich konkretisiert, dass vom Axiomatisieren *alle Aussagen* betroffen sind. Das ist das erste Auftreten des Vollständigkeitsaspekts, allerdings in grober Form ohne an irgendeine Theorie gebunden zu sein. Das Axiomatisieren ist als eine Tätigkeit oder allgemein als ein Objekt gar nicht eingeordnet.

→ Diese Antwort passt sprachlich und thematisch zum Axiom-Item. Dort fand keine starke Veränderung statt (von drei auf vier Aspekte, Formulierung leicht verbessert). Auch in den Pre-Post Axiom-Items ist die Dominanz des Gebäudeaspekts deutlich. Die Vorstellungen und Formulierungen sind nicht gut ausgebildet, wir ziehen hierzu auch die Frage 6 des Posttests heran, wo bei den Unterschieden erklärt wird: »Definition sind Aussagen« und »Axiome sind Bestandteile von Aussagen«.

Die nachfolgenden beiden Antworten der Personen 4 und 7 sind recht speziell, weil sie sehr nah an den im Kurs benutzten (grafischen) Darstellungen bleiben. Sie schildern als Einzige den Unterschied zwischen Axiomatik und Axiomatisieren und erklären das Axiomatisieren hierdurch mithilfe der Axiomatik. Es sind die einzigen Antworten, in denen das Wort »Axiomatik« fällt.

19post8.4: »Axiomatisieren ist die Art & Weise, auf die Mathematik entsteht. Anstatt, wie bei der Axiomatik, direkt von gegebenen Axiomen auszugehen & aus ihnen weitere Def./Sätze abzuleiten, wird beim Axiomatisieren umgekehrt vorgegangen. Aus erkannten Phänomenen/Aussagen sollen allg. gültige & übergeordnete Gemeinsamkeiten (Axiome) gefolgert werden«. Hier finden wir eine ungewöhnliche Darstellung. Es wird dem Axiomatisieren ein Platz in der Mathematik zugeordnet und als die Umkehrung der Axiomatik präsentiert. Diese Erklärungen offenbaren eine gute Vorstellung davon, was Axiomatisieren *bedeutet*. Dessen Wirkmechanismus bleibt jedoch eher verborgen. Es wird nicht klar, ob »erkannt« hier »bewiesen« bedeutet. Ebenfalls unklar ist, wie Axiome gefolgert werden sollen, und worauf hier »allgemeingültig« bezogen ist.[115] Es fällt uns schwer, die Vorstellung von Axiomen als »Gemeinsamkeiten« zu teilen. Kaum vorstellbar ist das so gemeint, dass Axiome als Glieder einer jeden (bis zu den Axiomen verfeinerten) Beweiskette gesehen werden. Andererseits ist die Axiomatik besser formuliert: Dort werden Axiome vorgegeben und mit ihnen Sätze bewiesen (etwas unglücklich ist hier die Erwähnung von Definitionen). Axiomatisieren ist dann als die Umkehrung beschrieben, was durchaus berechtigt ist, allerdings ist die Ausformulierung dieser Umkehrung weniger gut gelungen. Insgesamt haben wir hier ein gutes Bild erhalten, was Axiomatisieren, hauptsächlich als Gegenpart der Axiomatik, bedeutet.

→ Wenig Pre-Post-Veränderung im Axiom-Item (von vier auf fünf Aspekte). Diese Antwort scheint direkt an das im Kurs Besprochene anzuknüpfen.

Bemerkung 7.22. Axiome als Gemeinsamkeiten anzusehen ist völlig legitim. Denken wir an Vektorräume oder Gruppen vor ihrer Axiomatisierung, also an Mengen von Beispielen, dann ist die Axiomatisierung der Gruppen- bzw. Vektorraumtheorie das Suchen nach *Gemeinsamkeiten*, einer Menge von Aussagen, die allen Beispielen gemein sind. Anders ausgedrückt wäre das Axiomatisieren hier das Formalisieren, das Abstrahieren dieser vielen Beispiele. Noch anders könnten wir sagen, wir suchen hier ein Axiomensystem zu einer Menge von *Modellen*. Wir sehen in Definition 1.11 Axiomatisieren bereits auf der formalen Stufe; so scheinen alle Studierenden den Begriff auch aufzufassen. Daher erscheint diese Interpretation in der obigen Antwort zwar denkbar, aber auch wegen des Sprachgebrauchs der Antwort eher unwahrscheinlich. ♯

19post8.7: »Eigentlich ist die Mathematik als Axiomatik aufgebaut [Zeichnung: oben ›Theorie‹, unten ›Axiome‹. Runder Pfeil von unten nach oben ›Axiomatik‹, von oben nach unten ›Axiomatisieren‹ – wie im Kurs dargestellt]. *Im Studium: Man lernt Axiome und soll darauf basierend Beweise zur Theorie finden. Axiomatisieren funktioniert in die andere Richtung: Ausgehend von der Theorie die man entdeckt erschließt man sich die dafür nötigen Axiome«.* In dieser stark visuellen Antwort, die den Gebäudeaspekt mehrfach betont, wird Axiomatisieren nicht nur erklärt, sondern auch in Relation zur Axiomatik gesetzt. Dank dieser Einordnung bekommen wir eine gute Vorstellung über die Funktionsweise des Axiomatisierens geboten. Hier wird etwa zum ersten Mal klar formuliert, dass eine bereits vorhandene Theorie ein Input für das Axiomatisieren ist. Der Beweisaspekt ist eng mit dem Gebäudeaspekt verknüpft, Beweise helfen aus Axiomen heraus die Theorie aufzubauen. Das Prozedurale ist vorhanden, aber schwach ausgeprägt: »Beweise finden«, »erschließt man sich«. Die Iterationsperspektive können wir in der Antwort aber nicht erkennen. Hier dominiert die visuelle Komponente, die formalen Aspekte werden nicht oder nicht gut erklärt. So bleibt unklar, welche Axiome eine Theorie benötigt und was das überhaupt be-

[115] Im Axiom-Item ist von »allg. als wahr angenommenen Bausteinen« die Rede.

deutet. Es wird nicht klar, was in der Theorie steckt, also aus welchen Elementen eine Theorie besteht: Werden zu Sätzen/Aussagen usw. Axiome gesucht oder was bedeutet »Beweise zur Theorie finden«?

→ Diese Antwort passt gut zu dem, was im Kurs zum Axiomatisieren besprochen wurde, aber passt wenig zu den Antworten im Axiom-Item. Dort sind die beiden Pre-Post-Antworten durchschnittlich reichhaltig (je drei Aspekte), wobei die Antwort im Posttest eher schlechter ist (Axiom wird von »Grundaussage« zu »etwas natürlich gegebene[m] zu einem Objekt«).

Die metamathematischen Aspekte bleiben eher den nachfolgenden Antworten vorbehalten. Die gerade besprochenen zwei Antworten bieten eine gute Vorstellung über Axiomatisieren, besser als die vorigen Antworten. Das Handwerkliche, die eigentliche Beschreibung bleibt, trotz mehrerer angerissener Aspekte und ggf. wegen der starken Visualisierung, eher im Dunkeln.

Interessant ist auch das Spannungsfeld zwischen Axiomatik und Axiomatisieren in diesen Antworten zu beobachten: Mathematik entsteht demnach als Axiomatisieren, ist aber als Axiomatik aufgebaut.

19post8.1: »Unter Axiomatisieren verstehe ich, eine Theorie und deren Phänomene auf die wesentlichen Grundannahmen zurückzukürzen. Aus diesen Grundannahmen kann ich alle anderen Schritte und Phänomene folgern und zeigen«. Diese Antwort beinhaltet mehrere Aspekte des Axiomatisierens. Der Gebäudeaspekt geht in den Beweisaspekt über: Zunächst werden gewisse Fundamente der Theorie gesucht, dann wird expliziert, dass sich die Theorie aus diesen Fundamenten auch rekonstruieren lässt. Der Minimalitätsaspekt taucht hier etwas verdeckt auf – es wird von »wesentlichen« Grundannahmen (eine gewisse Tautologie ist erkennbar) gesprochen, ohne dies auszuführen. Auch der Vollständigkeitsaspekt ist vertreten, es wird dargestellt, dass alle Phänomene (wohl Aussagen) einer Theorie aus den Grundannahmen (wohl Axiomen) folgen – eine fast universelle Fehlvorstellung der Testpersonen, wie wir noch sehen werden.[116] Auch hier wird nicht von Aussagen, sondern von Phänomenen gesprochen, das Axiomatisieren als Objekt nicht präzisiert. Wir haben diese Antwort an dieser Stelle positioniert, weil sie mehr Aspekte anspricht und auf uns etwas pointierter wirkt. Einen prinzipiellen Vorrang dieser Antwort über *19post8.4,7* können wir nicht ausmachen.

→ Die Formulierung hier bleibt hinter den Erwartungen zurück. Im Axiom-Item gab es eine spürbare Pre-Post-Verbesserung in der Sprache (Axiome sind Aussagen statt mathematischen Gesetzmäßigkeiten) und eine leichte Steigerung in den Aspekten (von eins auf zwei, präzisere Formulierung).

[116] Im Allgemeinen lassen sich natürlich nicht alle in der Theorie formulierbaren Aussagen beweisen. Diese gödelsche Unvollständigkeit haben wir bereits in Abschnitt 7.2.9.3 beim Vollständigkeitsaspekt thematisiert.

Bemerkung 7.23. Die Natur des Vollständigkeitsaspekts in den Antworten ist sehr interessant. Beim Axiomatisieren findet ein zweiseitiger und gegensätzlicher Prozess statt. Einerseits streben wir nach einem möglichst übersichtlichen Axiomensystem, aber andererseits wollen wir so viele Axiome haben, dass nach Möglichkeit alle bisher bekannten Sätze dieser Theorie sich daraus ableiten lassen.[117] Hier erkennen wir ein Problem. Diese globale Aufgabe auf einmal zu lösen, ist verständlicherweise kaum möglich, daher wird sie durch lokales Ordnen ersetzt und der Iterationsprozess so lange ausgeführt, bis ein zufriedenstellendes Netzwerk aus Aussagen und ihren Zusammenhängen entsteht – in dieser Vorstellung sind dann Axiome einfach ablesbar. Um diese Darstellung abzukürzen, können Testpersonen schlicht sagen: Axiome in der Theorie finden, *so dass* alle bekannten Sätze daraus ableitbar sind. Der Prozess des Auffindens wird hier aber unterschlagen und das »so dass« ist eine massive Simplifizierung des Geschehens. ♯

19post8.10: »Axiomensystem zu einer bestehenden Theorie erarbeiten«. Diese Antwort passt nicht gut zu den restlichen Antworten. Sie ist bemerkenswert kurz und korrekt. Da nicht spezifiziert ist, was unter einem Axiomensystem zu verstehen ist (das ist auch die einzige Nennung dieses Begriffs in diesen Antworten), können wir der Antwort keine falschen Vorstellungen vorwerfen. Unter denkbaren kurzen Antworten auf die gestellte Frage ist diese Antwort sicherlich eine der besseren. Hier wird zu einer bestehenden Theorie in einem Prozess ein Axiomensystem entwickelt, insbesondere ist der Prozessaspekt vorhanden. Im Unterschied zu nachkommenden Antworten, die zwischen der Menge der Aussagen eines Axiomensystems und der der Aussagen einer Theorie unterscheiden, ist hier eine banale Lösung erlaubt: Jede Aussage der Theorie ist ein Axiom. Mathematisch ist es nicht falsch, wenn auch nicht hilfreich, vgl. auch Definition 1.8.

→ Die Darstellung passt zu sonst auch eher minimalistischen Darstellungen im Axiom-Item. Es gab eine merkliche Pre-Post-Verbesserung im Axiom-Item. Im Posttest sind nun abstraktere, präzisere Formulierung aus dem Kurs erkennbar (Axiome sind gewisse ausgezeichnete Aussagen vs. »Etwas, das man ohne Beweis annimmt). Die vielen Aspekte (von fünf auf vier) wurden etwas weniger, das ist wohl der Orientierung an der Definition 1.8 geschuldet. Auch die Antwort auf dieses Item passt zu dieser Definition und fügt sich gut in die restlichen Erklärungen.

19post8.3: »Man hat eine Theorie und will die Axiome, welche der Theorie zugrunde liegen bekommen. Daher versucht man bewiesene Aussagen immer aus anderen Aussagen herzuleiten & damit die kleinstmögliche Menge zu bekommen, dass man alle Aussagen der Theorie beweisen kann«. Diese Antwort ist sehr vielseitig, sie enthält eine gut geformte, gut formulierte und klare Vorstellung des Axiomatisierens. Sie ordnet Axioma-

[117]Das erinnert gewissermaßen an den Basisbegriff für Vektorräume: Eine Basis als ein minimales Erzeugendensystem. Allerdings hinkt der Vergleich stark, da wir weder eine sinnvolle Minimalität noch ein wirkliches Erzeugendensystem haben.

tisieren sowohl visuell (Gebäudeaspekt, Axiome liegen zugrunde) als auch formal (Iterations- und Beweisaspekte: bewiesene Aussagen aus anderen Aussagen herleiten), als auch metamathematisch (Minimalitätsaspekt: kleinstmögliche Menge von Axiomen; Vollständigkeitsaspekt: alle Aussagen der Theorie beweisen) ein. Dabei ist diese Antwort die einzige, die den Iterationsaspekt des Axiomatisierens herausstellt.[118] Mathematisch verbesserungswürdig ist die Forderung, alle Aussagen der Theorie beweisen zu können. Es wird zwar zunächst von bewiesenen Aussagen gesprochen, die auf Axiome zurückgeführt werden, aber die Formulierung »alle Aussagen der Theorie« ist eindeutig zu verstehen. Selbst in dieser guten Darstellung ist die Gödel-Problematik nicht gelöst. Wie bereits erwähnt wäre der Vollständigkeitsaspekt wie folgt korrekter bedient: Solche Axiome innerhalb der Theorie finden, so dass sich alle *bisher bewiesenen* Aussagen (Sätze) darauf zurückführen lassen.

→ Hier ist eine gute Entwicklung erkennbar. Im Pretest war bereits eine reichhaltige Vorstellung (mit 4,5 Aspekten) zum Axiom vorhanden. Im Posttest wurde sie besser formuliert (nun fünf Aspekte, Axiome bleiben hier zwar weiterhin (Grund)annahmen, aber aus »wenigen« werden »unabhängige« Axiome, die auch noch widerspruchsfrei sein sollen) und besser erklärt (hier wird ausführlich auf die Herkunft der Axiome eingegangen). Die Ausführung in diesem Item passt sprachlich und mathematisch gut dazu und zeigt, dass die Person ihre reichhaltige Vorstellung gut formulieren und auf das neue Wort »Axiomatisieren« übertragen kann.

Die nachfolgende Antwort ist zwar kurz, aber mit Abstand die mathematisch reichhaltigste und geschickteste.

19post8.9: »Das deduktive Ableiten von Axiomen aus einer bereits bestehenden Theorie, also das Suchen nach möglichst wenig Aussagen (Axiomen), sodass alle Sätze der Theorie daraus folgen«. Das ist die einzige Antwort, die den Formalismus einer axiomatischen Theorie erwähnt. Hier sind die meisten der von uns erarbeiteten Aspekte in kurzer prägnanter Form vorhanden. Nicht nur das Prozedurale im »Suchen« wird deutlich, sondern vielmehr eine gewisse Passungsgenauigkeit der Axiome anvisiert: Eine so kleine Menge wie möglich, aber so groß wie nötig. Durch diesen Aspekt sind diese und die vorige Antworten besonders ausgezeichnet, sie explizieren die schwierige Suche nach einem solchen (kleinen) Axiomensystem, aus der die ganze Theorie rekonstruierbar ist. Diese Vorstellung ist noch nicht erkennbar in *19post8.1*, dort ist das Auffinden der Axiome von der anschließenden Herleitung der Aussagen entkoppelt.[119] Der mathematisch unnötige Gebäudeaspekt ist hier durch einen ausgeprägten Beweisaspekt ersetzt. Es wird präzisiert, dass Axiome Aussagen sind, und der Vollständigkeitsaspekt ist vorsichtiger als bei den Anderen, und vermutlich kor-

[118] In *19post8.5* ist die Iteration ebenfalls ersichtlich, allerdings bezieht sie sich auf den Beweisbegriff.
[119] Aber im Axiom-Item ist darauf, wie gerade dargestellt, ausführlich eingegangen worden.

rekt, vorhanden: Es wird nicht behauptet, dass alle in der Theorie formulierbaren *Aussagen* aus den Axiomen folgen, sondern lediglich *Sätze*, also beweisbare Aussagen. Aufgrund des differenzierten Sprachgebrauchs der Antwort ist es gut möglich, dass die Testperson in der Tat zwischen Sätzen und Aussagen unterschieden hat.

→ Beide Antworten zum Axiom-Item im Pre- und Posttest waren bereits gut. Im Posttest hat die Person ihre Darstellung deutlich an die Kursinhalte angepasst: »Ein Axiom ist lediglich eine Aussage, die besonders bezeichnet wird« im Vergleich zu »Ein Axiom ist eine grundlegende Aussage«. Auch die Darstellung in diesem Item passt sprachlich und mathematisch gut zum Axiom-Item. Die Person spricht im Posttest von Modellen und Belegungen, sie scheint ihre Vorstellung für sich vorteilhaft mit neuem Wissen angereichert zu haben.

Insgesamt sind, mathematisch gesehen, acht von zehn Antworten akzeptabel bis sehr gut, sie zeigen eine mehr oder weniger ausgeprägte und differenzierte Vorstellung des Axiomatisierungsprozesses. Beim Design der Frage in Abschnitt 6.3.5 wollten wir wissen, ob Studierende »die Grundidee des Prozesses, nämlich das geschickte Sortieren und Auswählen einiger weniger Aussagen, begriffen und behalten haben«. Wir haben gesehen, dass der Minimalitätsaspekt nur in zwei sehr guten Antworten vorhanden ist (fast identisch im Axiom-Item). Es fällt uns schwer zu entscheiden, ob Studierende das gerade zitierte Ziel erreichen. Besser scheint die Feststellung, dass sie auf ihre Art nachvollziehbare und tragbare Vorstellungen zum Axiomatisieren abgeben. Insgesamt sind wir mit der Qualität der Antworten ! und der Reichhaltigkeit der Vorstellungen bei diesem Item zufrieden.

Wir haben keinen guten Vergleichsdatensatz zu diesem Item, um unsere Zufriedenheit angemessen zu bewerten. Wir hätten dieses Item auch in den ^{19}Pretest integrieren sollen. Die Items 4_{15}, 8_{16}, in denen auch über Axiomatik gesprochen wird, und die wir in Abschnitt 7.2.7 analysiert haben, zeigen nur wenige Parallelen zu diesem Item. Dort hat jedenfalls beinahe keine Testperson eine korrekte Darstellung der Axiomatik angeboten, vgl. auch das Schlusswort auf Seite 280.

Obwohl das Axiom-Item im Posttest und dieses Item kumulativ gute Ergebnisse und Verbesserungen zeigen, ist die Situation auf Personenebene, wie wir gerade gesehen haben, eine andere. Eine (mitunter starke) Verbesserung der Darstellung im Axiom-Item garantiert keine gute Antwort im Axiomatisieren-Item. Wir können sehen, dass das Axiom-Item eine obere Schranke für die Qualität des Axiomatisieren-Items ist.

Der Kurs konnte folglich möglicherweise geholfen haben, die Vorstellung zum Axiom zurecht zu rücken und diese besser zu formulieren. Allerdings reichte vermutlich die Beschäftigung mit dem Axiomatisieren-Begriff nicht aus, um die erworbenen passablen Vorstellungen zum Axiomatisieren auch gut zu formulieren. !

7.3.8. Fazit zum Posttest

In diesem Abschnitt blicken wir auf die Auswertung des Posttests zurück.

Die Frage 3, bei der wir hofften, Hinweise auf die Einbindung euklidischer und anderer Geometrien in die Vorstellungen der Studierenden zu finden, enttäuschte. Hier konzentrierten sich die Testpersonen auf eher pädagogische Aspekte. Diese Frage würden wir folglich nicht wieder verwenden. Ihr Ersatz sollte weniger suggestiv auf die Schule bezogen sein und etwas direkter auf die Sonderstellung der euklidischen Geometrie hindeuten. Eine durchdachte Mischung aus dieser und Frage 6_{17} sollte in Erfahrung bringen, ob Studierende wissen und im Kontext erkennen können, dass die euklidische Geometrie *eine* mögliche Geometrie ist. Insbesondere soll diese Frage ermitteln, ob Studierende das charakterisierende Parallelenpostulat (oder äquivalente Aussagen) in ihrer Begründung mitanführen.[120]

Die Frage 7 zum lokalen Ordnen zeigte erwartungsgemäß und leicht verbessert zum Pretest, dass Studierende keine Probleme mit logischem Sortieren einfacher Aussagen haben. Zum Bestätigen dieser Beobachtung können wir uns eine weitere Frage vorstellen, die im Kontext einer bekannten Theorie (etwa Vektorraum- oder Gruppentheorie), Studierende auffordert, fünf bis sechs Aussagen unter einander zu sortieren.

Auch die anderen fachmathematischen, aber direkt auf den Kurs bezogenen, Fragen (2, 4 und 8) haben deutlich gezeigt, dass Studierende zu wichtigen Meilensteinen aus dem Kurs sachgemäß Stellung nehmen können und dieses neu gelernte Wissen zufriedenstellend darstellen können. Konkret sahen wir, dass fast alle Testpersonen nun passende Faltungen für eine Streckendrittelung angeben können und korrekt einschätzen können, ob ihre Angabe eine Konstruktion ist oder nicht. Ferner berichteten Studierende trefflich über Grundfaltungen des 1-fach-Origami und zeigten, dass sie über Grundzüge dieser Theorie auf einem mindestens ausreichenden Niveau schreiben können. Dabei gab es hier wie auch bei der Streckendrittelung exzellente Antworten. Auch die übergreifende und zentrale Frage nach dem Wesen des Axiomatisierens beantworteten Studierende insgesamt zufriedenstellend. Sie zeigten, dass ihnen das Grundprinzip des Axiomatisierens (ein Axiomensystem zu einer Theorie finden) bekannt ist, und sie konnten ihre Vorstellungen dazu größtenteils mathematisch akzeptabel darstellen. Allerdings blieb die Qualität der Antworten hinter der zu dem Axiom-Item zurück.

[120] Eine mögliche Formulierung klänge so: »Der Mathematiker Mr. Playfair spezialisiert sich auf eine Geometrie, in der es ihm zufolge möglich ist, Dreiecke mit Innenwinkelsummen von mehr als 180 Grad zu zeichnen. Nehmen Sie Stellung zu einer der folgenden Aussagen: a) Mr. Playfair muss sich vertan haben. b) Mr. Playfair hat eine seltsame Vorstellung von »Geometrie«. c) Ich kann mir eine solche Geometrie sehr gut vorstellen. d) Ich habe keine Idee, worum es hier geht.

Die Kernfragen 4-5, 9 zum Axiomenbegriff und zur euklidischen Ebene haben wir vergleichend zum Pretest ausgewertet. Die euklidische Ebene wurde im Posttest besser definiert, die deutlich spürbaren Verbesserungen steckten größtenteils in besseren Formulierungen und in der etwas besseren mathematischen Güte.

Auch die Darstellung der Vorstellungen zum Axiomenbegriff besserte sich im Posttest nachweisbar. Die Antworten wurden reichhaltiger, ausführlicher, mathematisch präziser und ähnlicher. In den gegebenen Antworten ist eine qualitative Änderung in den Aspekten festzustellen: Die Antworten wurden fachmathematisch besser und sie waren häufiger metamathematisch geprägt. Die Darstellungen der Axiome überschnitten sich in ihren Aspekten deutlich mit denen aus dem Axiomatisieren-Item.

Die Gegenüberstellung der Antworten zum Axiom- bzw. Axiomatisieren-Item zeigte verborgene Entwicklungen vom Pre- zum Posttest. So haben wir bereits festgehalten, dass kumulative Verbesserungen deutlich wahrnehmbar sind, allerdings unterscheiden sich diese nicht nur von Person zu Person, sondern auch von Item zu Item. Eine starke Pre-Post-Verbesserung bei Axiomen garantierte keine hohe Qualität beim Axiomatisieren. Tatsächlich zeigten nur drei von zehn Personen eine hohe Qualität sowohl im Axiom- als auch im Axiomatisieren-Item mitsamt einer guten Entwicklung in den Formulierungen; als könnten sie das gelernte Wissen in ihre Vorstellung gut integrieren und gewinnbringend einsetzen. Zwei weitere Antworten zum Axiomatisieren-Item passen stilistisch zum Axiom-Item, wenngleich das Niveau der Formulierungen mittelmäßig ist. Die Hälfte der Testpersonen zeigt aber deutlich unterschiedliche Qualitäten in den beiden Items.

Insgesamt sehen wir eine Bestätigung unserer Beobachtungen aus dem Kurs: Studierende können kursspezifische Fragen gut beantworten; die kontinuierliche Thematisierung der Grundfaltungen des 1-fach-Origami scheint sich in reichhaltigeren und besser formulierten Antworten zum Axiom-Item widerzuspiegeln; die Beschäftigung mit dem Axiomatisierungsprozess scheint für Studierende zu kurz ausgefallen zu sein:[121] Studierende erwarben zwar passende Vorstellungen zum Begriff und Prozess, aber etwa bei der Hälfte der Testpersonen ist das entsprechende concept image zum Axiomatisieren schwächer ausgeprägt als zum Axiomenbegriff.

Diese Ergebnisse liefern eine Antwort auf die Forschungsfrage FFc: Der ^{19}Kurs scheint die mathematische Güte der Antworten zum Axiom-Item nachweisbar verändert zu haben. Wir haben keine belastbare quantitative Analysen dazu durchgeführt, vielmehr wurde die Veränderung der Qualität der Antworten beurteilt. Somit

[121] Tatsächlich wurden passende Angebote im Kurs gemacht, vgl. Anhang A.11. Dort haben wir Hausaufgaben gestellt, die wesentliche Stützen für die Beantwortung der Posttest-Fragen beinhalten. Lediglich zwei Personen haben ihre gemeinsame Lösung zu diesem Übungsblatt abgegeben, eine davon (nicht überraschend) mit der besten Antwort im Axiomatisieren-Item.

bleibt diese Beobachtung im Stadium einer Hypothese: *Unsere entwickelten Kurse lassen die mathematische Güte der Antworten zum Axiom-Item signifikant steigen.*

Ferner lassen uns die gelieferten Ergebnisse zur Einschätzung kommen, dass Studierende nun besser in der Lage sind, einer Axiomatisierung einer mathematischen Theorie zu folgen oder eine solche durchzuführen. In diesem Sinne könnten wir sagen, Studierende haben nun gewissermaßen *gelernt* wie Axiomatisieren funktioniert, im engen Sinn des Ausdrucks »Axiomatisieren lernen« wie im ersten Forschungsziel auf Seite 77 erklärt.

Literatur zum Kapitel 7

[BD06] Jürgen Bortz und Nicola Döring. *Forschungsmethoden und Evaluation: für Human- und Sozialwissenschaftler*. 4., überarb. Aufl., [Nachdr.] Heidelberg: Springer-Medizin-Verl, 2006 (*cf. S.* 219–220, 222, 243–244, 254, 324).

[Car98] William M. Carroll. »Middle School Students' Reasoning about Geometric Situations«. In: *Mathematics Teaching in the Middle School* 3.6 (März–Apr. 1998), S. 398–403 (*cf. S.* 234, 262–263).

[Hup83] Bertram Huppert. *Endliche Gruppen I*. 2. Nachdr. d. 1. Aufl. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 134. Berlin: Springer, 1983 (*cf. S.* 310).

[KM17] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra: Gruppen - Ringe - Körper*. 4. Auflage. Lehrbuch. Berlin [Heidelberg]: Springer Spektrum, 2017 (*cf. S.* 310).

[Kuc18] Udo Kuckartz. *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. vierte Auflage. Grundlagentexte Methoden. Weinheim: Beltz Juventa, 2018 (*cf. S.* 256).

[Mar75] George E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, 1975 (*cf. S.* 38–39, 41, 50, 62–63, 104, 176, 203, 287).

[Rem15] Verena Rembowski. »Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht: Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen«. Diss. Universität des Saarlandes, 2015. URL: https://publikationen.sulb.uni-saarland.de/handle/20.500.11880/26717 (*cf. S.* 85, 254).

[Tep15] Anne R. Teppo. »Grounded Theory Methods«. In: *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. Hrsg. von Angelika Bikner-Ahsbahs, Christine Knipping und Norma Presmeg. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015, S. 3–21 (*cf. S.* 256).

[Usi82] Zalman Usiskin. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. ED220288. Chicago Univ. Ill., 1982 (*cf. S.* 81, 230–235, 266).

[Vin83] Shlomo Vinner. »Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function«. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14.3 (1983), S. 293–305 (*cf. S.* 85, 255–256).

[Vin02] Shlomo Vinner. »The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics«. In: *Advanced Mathematical Thinking*. Hrsg. von David Tall. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002, S. 65–81 (*cf. S.* 84, 221, 256).

Ergebnisse der Arbeit

Im ersten Teil dieser Dissertationsschrift entwickeln wir Grundlagen für eine mathematische Beschäftigung mit 1-fach-Origami und Axiomatisieren in unseren Kursen für Mathematiklehramtsstudierende.

Im ersten Kapitel haben wir zunächst mathematisches Papierfalten definiert und diskutiert. Anschließend haben wir die Entstehungsgeschichte des 1-fach-Origami seit den 1890er Jahren bis in die heutige Zei beschrieben, welches wir zunächst alltagssprachlich formuliert haben. Dazu haben wir die vorhandene Literatur beleuchtet und die wesentlichen Meilensteine der Entwicklung sorgfältig dargestellt und aus einigen neuen Blickwinkeln betrachtet. Unseren wichtigsten Beitrag hierzu sehen wir in der Aufklärung der Beiträge zum 1-fach-Origami von Jacques Justin, Humiaki Huzita, Peter W. Messer, George E. Martin, Ludwig Bieberbach und der damit verbundenen Prioritätsfragen. Der Kern dieser Beschäftigung ist die Analyse der Entwicklung des 1-fach-Origami aus der Perspektive einschlägiger Autorinnen und Autoren, um ein besseres Gefühl dafür zu bekommen, was Fachleute unter dem Gebiet, das wir im Folgenden untersuchen wollen, verstehen. Anschließend beschäftigen wir uns mit dem Axiomatisierungsprozess einer mathematischen Theorie. Dazu fassten wir die Sachlage aus unterschiedlichen Quellen zusammen, entwickelten darauf basierend eine für unsere Arbeit angemessene Definition des Axiomatisierungsprozesses und trugen wesentliche Aspekte hiervon zusammen. In diesem Zusammenhang haben wir die für unsere Untersuchungen notwendigen Grundlagen der Metamathematik, vgl. Abschnitt 1.3.1, und der euklidischen Ebene, vgl. Abschnitt 1.3.2, ausgearbeitet. Abschließend stellten wir einen Zusammenhang zwischen einer Beschäftigung mit 1-fach-Origami und dem Axiomatisierungsprozess her und diskutierten Gründe, warum dieses Themas in der universitären Lehre behandelt werden sollte.

Im zweiten Kapitel formulieren wir die Forschungsziele und -fragen und zeigen den methodischen Rahmen der Arbeit auf. Kennzeichnend für unsere Arbeit ist dabei, dass wir nicht nur die endgültig formulierten Forschungsfragen vorstellen, sondern auch die vorausgehende Darstellung der *Entwicklung* ebendieser sowie damit verbundene Schwierigkeiten und Überlegungen beschreiben.

Im dritten Kapitel analysieren wir die Quellenlage zur Definition und Darstellung von 1-fach-Origami, um darauf basierend eine einheitlichere Darstellung der

Grundlagen des 1-fach-Origami zu geben. Das sehen wir als eine der wichtigsten Leistungen dieser Arbeit an. Dabei haben wir sorgfältig reguläre Faltungen und Grundfaltungen des 1-fach-Origami definiert und klassifiziert. Ferner beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Struktur von und in 1-fach-Origami. Wir haben Abhängigkeiten zwischen Grundfaltungen analysiert und haben die bekannte Dominanz der restringierten Beloch-Faltung, der Grundfaltung HJA6, gegenüber anderer Grundfaltungen innerhalb unserer Darstellung bestätigt, vgl. Satz 3.28. Der Vollständigkeit halber trugen wir Erkenntnisse zum Körper der mit 1-fach-Origami konstruierbaren Zahlen zusammen und verglichen 1-fach-Origami mit einschlägigen Konstruktionswerkzeugen.

Im zweiten Teil der Arbeit beschreiben wir die Gestaltung und Durchführung der Kurse zum Axiomatisieren von 1-fach-Origami, die zwischen 2015 und 2019 insgesamt viermal stattfanden.

Im vierten Kapitel formulieren wir Grobziele für unsere Kurse, vgl. Abschnitt 4.1, und geben eine allgemeine Übersicht über Rahmenbedingungen rund um die Kurse. Im Abschnitt zur Lehrmethodik ordnen wir anschließend unsere Lehrmethode kritisch in einschlägige didaktische Lehrkonzepte ein.

Im fünften Kapitel präsentieren wir ein idealisiertes Skript zum Kurs, das wir anhand unserer Erfahrungen aus den vier Kursen entwickelt haben. Dort stellen wir nicht nur Inhalte der Kurse und konkrete Beispiele daraus vor, sondern beschreiben auch Überlegungen und Alternativen zum präsentierten Vorgehen. Studierende haben in den Kursen am Beispiel des 1-fach-Origami erfahren, wie eine mathematische Theorie entsteht, wie sie formalisiert und axiomatisiert werden kann. Ein weiteres wichtiges Ergebnis dieser Arbeit sehen wir in dem theoretisch gut begründbaren Aufbau der in der Literatur zwar bekannten aber typischerweise nicht einheitlich präsentierten Inhalte rund um das 1-fach-Origami. Nach der Entwicklung und Durchführung der Kurse sowie der Fertigstellung des Skripts in diesem Kapitel sehen wir das erste Forschungsziel als erreicht an, vgl. Seite 77 und Abschnitt 5.5.

Im dritten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit dem zweiten Forschungsziel, der Beantwortung der drei Forschungsfragen.[1] Dazu haben wir eine empirische Untersuchung durchgeführt und Studierende vor und nach dem jeweiligen Kurs befragt. Das Ziel dieses Teils der Arbeit ist es also, die Entwicklung, Durchführung und Auswertung dieser Befragungen im Detail nachzuzeichnen und anhand der Auswertungen die drei Forschungsfragen zu beantworten.

[1] FFa: Welche personal concept definitions zum Begriff »Axiom« und »euklidische Ebene« lassen sich in den Antworten der Studierenden identifizieren? In welchem Verhältnis steht das Ergebnis zu formal concept definitions?
FFb: Welche Schwierigkeiten lassen sich im Umgang mit Axiomen feststellen?
FFc: Wie verändert der Kurs die mathematische Güte der Antworten zum Thema »Axiom« und »Axiomatisieren«?.

Im sechsten Kapitel beschreiben wir das Design der entwickelten Pre- und Posttests. Dabei schildern wir im Detail die Überlegungen, Probleme und ihre Lösungen bei der Auswahl und Formulierung der einzelnen Items zu Axiomen, lokalem und globalem Ordnen, Konstruktionen und der euklidische Ebene. Ein wesentlicher Teil des Kapitels ist ferner dem aus unserer Sicht erfolglosen Versuch gewidmet, das van Hiele Modell für die Beantwortung unserer Forschungsfragen einzusetzen. Wir explizieren die methodische Rahmung, Gestaltung und Auswertung der entsprechenden an van Hiele Niveaus ausgerichteten Tests und schildern an konkreten Beispieltestbögen, warum dieses Vorgehen für die Studie nicht tragfähig war.

Im siebten Kapitel werten wir die schriftlichen Pre- und Posttests teils aus fachmathematischer Sicht, teils mittels einschlägiger qualitativer Methoden im Hinblick auf die Beantwortung der Forschungsfragen aus. Die akkumulierten Erkenntnisse aus der Auswertung der Pretests im Abschnitt 7.2 liefern Antworten auf die ersten beiden Forschungsfragen, vgl. Abschnitt 7.2.10. Dort haben wir unter anderem gesehen, dass Studierende vielfältige und aspektreiche Antworten zu Axiomen liefern. Wir konnten neun Aspekte zum Axiomenbegriff aus den Antworten heraus identifizieren und fassten sie zu funktionalen, fachmathematischen und metamathematischen Hauptaspekten zusammen. Wir haben ferner gesehen, dass Studierende ihre Vorstellungen häufig mathematisch unpräzise formulieren. Die Vorstellungen sind jedoch selten mathematisch eindeutig falsch. Die Analysen zum Posttest liefern Daten für die Beantwortung der dritten Forschungsfrage, vgl. Abschnitt 7.3.8. Dort haben wir gesehen, dass die mathematische Güte der Antworten, vgl. Seite 86, nachweisbar steigt. Allerdings liefert unsere explorative Studie keine belastbaren quantitativen Antworten und wir belassen diese Forschungsfrage im Stadium einer noch zu überprüfenden Hypothese.

Angesichts der [19]Pre-Post-Entwicklung zum Axiom-Item aus Abschnitten 7.2.9 und 7.3.6 können wir abschließend vorschlagen, die Vorstellungen der Studierenden zu Axiomen nicht grundlegend verändern zu wollen, sondern die in dieser Arbeit identifizierten zugehörigen Aspekte in entsprechenden Vorlesungen/Kursen zu thematisieren und mathematisch einzuordnen. Die Ergebnisse lassen sich so interpretieren, dass unsere Studierende im [19]Posttest und nach dem [19]Kurs ihre Vorstellungen aus dem [19]Pretest etwas besser formulieren und mathematisch besser präsentieren können. Diese Entwicklung sehen wir als positiv an.

Anhänge

A.1. Flachfaltbarkeit

Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen

Dmitri Nedrenco[⋆] und Johannes Beck[⋆]

[⋆]Institut für Mathematik, Universität Würzburg

17. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Origami oder Papierfalten (jap. *oru* – falten, *kami* – Papier) begegnet uns in vielen alltäglichen Situationen: Als Briefkouvert, Weihnachtssterne und dergleichen mehr. Auch Mathematik begegnet uns vielfach in der Umwelt: In Form von Zahlen, geometrischen Formen wie Spielwürfel, bogenförmige Gewölbe, Brücken, usw. Selbst, wenn wir sie nicht wahrnehmen, ist Mathematik da – zum Beispiel bei der Ampelsteuerung, GPS und digitalen Verschlüsselungen.

Seltener sehen wir eine Kombination von Mathematik und Papierfalten: etwa diverse DIN-A-Formen, die halbiert wieder eine DIN-A-Form haben, gefaltete Papiereinkaufstüten, ideenreiche Versandpakete. Papierfalten spielt im Mathematikunterricht jedoch üblicherweise nur insofern eine Rolle, als man schöne Formen (Würfel, Sterne) oder Visualisierungen bekannter Sätze (Pythagoras, Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck, Papierstreifenknoten) vorfaltet. Darüber hinaus birgt Papierfalten allerdings ein hohes mathematisches Potenzial, so dass es schade ist, es lediglich als ein Visualisierungswerkzeug zu benutzen. Wir wollen in dieser Arbeit aufzeigen, wie man Papierfalten auf einem hohen mathematischen Niveau betreiben und eine mathematische Theorie mit eigenen Händen erschaffen kann.

Es gibt bereits viele Arbeiten, die Papierfalten mathematisch betrachten. Gezeigt wurde u. a. wie Lösungen von Gleichungen dritten Grades mittels Papierfalten konstruiert werden können, vgl. [Hul12, pp. 78–79] oder wie man besondere geometrische Objekte (wie Polyeder oder Vielecke) faltet, vgl. [Mon09]. Ganze Sammlungen von vollständig ausgearbeiteten Arbeitsblättern für einen Einsatz im Unterricht zu ganz verschiedenen Themenbereichen sind bereits erschienen, vgl. [SHH13], [Hul12].

Eine sehr schöne Theorie des mathematischen Papierfaltens ist aus unserer Sicht die Theorie der Flachfaltbarkeit. Diese Theorie geht der folgenden Frage auf den Grund: Kann ein gegebenes Faltmuster zu einer flachen Figur gefaltet werden (denken Sie etwa an einen gefalteten Kranich und sein Faltmuster)? Es scheint nur wenige deutschsprachige Quellen wie [Hun13] zu geben, die sich mit dieser Theorie beschäftigen. Im deutschsprachigen Raum schrieb unseres Wissens noch niemand darüber, wie man diese Beschäftigung sinnvoll in der (Hoch)schulmathematik einsetzen kann. Jedoch gibt es ein herausragendes englisches Buch [Hul12] zu diesem Thema von Thomas Hull[1]: »Project Origami«, an dem sich auch unsere Arbeit maßgeblich orientiert. Wir wollen die Theorie der Flachfaltbarkeit im deutschsprachigen Raum bekannter machen. In dieser Arbeit stellen wir Einsatzmöglichkeiten für den Schulunterricht dar, diskutieren Probleme bei der Umsetzung und schlagen mögliche Lösungen vor.

2 Eine Unterrichtssequenz

2.1 Vorbereitungen

Es stellt sich zuerst die Frage, ob sich die Beschäftigung mit Papier und der Flachfaltbarkeit überhaupt an Inhalte und Ziele eines schulischen Curriculums anknüpfen lässt.

Einerseits soll diese Beschäftigung kein Ersatz und keine Alternative für den üblichen Schulunterricht werden. Andererseits können Schülerinnen und Schüler bei dieser Beschäftigung Mathematik so betreiben, wie es Mathematikerinnen und Mathematikern zu eigen ist. Damit ist gemeint, dass Schülerinnen und Schüler Vermutungen aufstellen, Beispiele und Gegenbeispiele dafür suchen und schließlich mathematische Beweise führen. Dabei werden vor allem die Leitidee *Raum und Form* sowie die Kompetenzen *kommunizieren* und *argumentieren* angesprochen, vgl. [KMK12] und Abschnitt 4.

[1]Tom Hull ist auch einer der führenden Forscher der Theorie der Flachfaltbarkeit.

Aus unserer sich Sicht eignet sich daher diese Unterrichtssequenz besonders für Projektarbeiten, wissenschaftspropädeutische Seminare oder vergleichbare Konzepte.

Dauer

Um eine offene und schülerzentrierte Arbeitsweise zu ermöglichen, gehen wir von etwa drei Sitzungen à 90 Minuten aus. Alternativ lässt sich diese Aktivität auch in weniger Zeit durchführen. Dazu ist es aber nötig, den Grad der Offenheit zu reduzieren und die Beschäftigung stärker zu strukturieren; aus unserer Sicht hat diese Option den Nachteil, dass man damit Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit nimmt, selbstständig alle Entdeckungen zu machen. Auch wenn wir der Meinung sind, dass die erste, offenere Variante bevorzugt werden sollte, geben wir in Abschnitt 3.2 einige Ideen für eine mögliche Vorstrukturierung des Entdeckens.

Material

Als Material brauchen Sie lediglich eine große Tafel und viel Papier. Gut eignen sich schlichte Notizzettel der Größe 10 cm × 10 cm für die Klasse und größere Papiere für Sie, ca. 20 cm × 20 cm, vorzugsweise zweifarbig, damit die Klasse Ihrem Falten leichter folgen kann.

Klasse

Bei einer Gruppengröße von ca. 8–12 Schülerinnen und Schülern kann noch idealerweise auf jede Meinung, jede Behauptung und jede Faltung eingegangen werden. Bei einer größeren Klasse könnte man sie entweder in Gruppen arbeiten lassen oder als Moderator dafür sorgen, dass möglichst alle gleichermaßen eingebunden werden.

2.2 Hinführung zum Thema

Beginnen Sie damit, dass Sie ein bereits gefaltetes Modell vorstellen, zum Beispiel ein Tetraeder vgl. [Mon09, pp. 65-66] oder einen Würfel, vgl. [Mon09, pp. 87–88], oder einen Kranich, vgl. [Hul12, pp. 210–211]. Falten Sie dieses Objekt auseinander und zeigen Sie der Klasse das Faltmuster, die Menge der Falze. Die klassische Frage des Origami, die man sich in diesem Zusammenhang stellen kann ist: Wie kann man ein bestimmtes Objekt (eben Kraniche oder Tetraeder) falten, das heißt, wie sieht das Faltmuster dazu aus? Wir stellen uns jedoch hier eine umgekehrte Frage: Kann man entscheiden, ob ein vorliegendes Faltmuster gefaltet werden kann, so dass das Ergebnis flach auf dem Tisch liegt? Anschaulich gesprochen: Ist es möglich, dieses Objekt in ein Buch zu legen, ohne dass neue Falze entstehen? Insbesondere möchte man dies entscheiden, *ohne* tatsächlich falten zu müssen. Diese Frage kann daher so formuliert werden: Kann ein Computer allein durch die Angabe des Faltmusters erkennen, ob dieses flachfaltbar ist?

Wir beschreiben nun, wie eine Unterrichtssequenz aus diesen Fragen entstehen kann.

2.3 Erste Schritte

Nehmen Sie ein quadratisches Stück Papier in die Hand, markieren Sie einen Punkt in der Mitte und zeichnen Sie Strecken vom Punkt zum Rand ein. Vergleichen Sie das Bild 1(a).

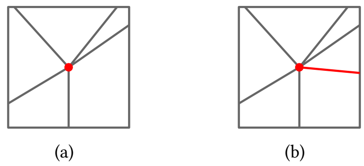


Bild 1: *Ein willkürliches Faltmuster links ist nicht flachfaltbar; erst ein gut platzierter sechster Falz (rechts, rot) erlaubt es, das Faltmuster flachzufalten.*

Ist dieses Faltmuster flachfaltbar? Versuchen wir dieses Faltmuster tatsächlich flachzufalten, so wird es nicht gelingen, ohne weitere Falze hinzuzufügen. Warum ist das so? Fügt man allerdings geschickt Falze ein wie im Bild 1(b), so gibt es eine Möglichkeit, das neue Faltmuster flachzufalten. Probieren Sie es aus!

Wie kann man das verstehen? Gibt es allgemeine Aussagen hierzu? Hier kann man Schülerinnen und Schülern vorschlagen, mehrere Beispiele auszuprobieren und Vermutungen aufzustellen, unter welchen Bedingungen ein solches Beispiel flachfaltbar sein wird oder nicht. Ein schönes Eingangsbeispiel ist im Bild 2(a) zu sehen.

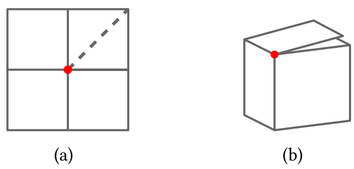


Bild 2: *Versuchen wir das Faltmuster links zu falten, so dass der gestrichelte Falz in die andere Richtung als die vier weiteren Falze schaut, dann erhalten wir eine so genannte Ecke (rechts).*

Ein solcher Anfang ist nicht ganz unproblematisch. Erstens, die Klasse sollte in der Lage sein, mit einem solch offenen Vorgehen zurecht zu kommen, mit selbstständigem Arbeiten oder Arbeiten in Gruppen vertraut sein. Zweitens: Ist das Niveau der Klasse zu niedrig, so kann es passieren, dass nur schwer und wenige Vermutungen aufgestellt werden.

Wird jedoch diese Form der Fragestellung angenommen, so kann das für ein Gefühl der Selbstständigkeit und Eigenverantwortung im mathematischen Unterricht sorgen.

Gelingt dieses zugegebenermaßen sehr offene Vorgehen nicht, so kann man zunächst Faltmuster mit drei–vier Falzen studieren.

Wir geben beispielhaft einige Schüleräußerungen an, die man zu Beginn hören kann:

a) *»Mit drei Falzen gehts nicht!«* An dieser Stelle kann man fragen, was diese Aussage genau bedeutet: Gemeint ist wahrscheinlich, dass kein Faltmuster mit genau drei Falzen je flachfaltbar sein kann. Das ist zwar richtig, aber es ist nicht zu empfehlen, direkt nach einem Beweis zu suchen. Sammeln Sie erstmal weitere Vermutungen. Allerdings kann man die Klasse fragen, ob jemand doch ein solches

Faltmuster flachfalten kann. Sollte es jemandem gelingen (das geht nicht!), dann ist folgender Trick von ungeheurer Wirkung: Bitten Sie die Schülerin oder den Schüler das gefaltete Modell Anderen zum Überprüfen zu geben. Es wird sich sehr schnell herausstellen, dass das Faltmuster nicht genau drei Falze besitzt.

b) *»Muss der Punkt genau in der Mitte liegen?«* Sie können sich und Ihre Klasse davon überzeugen, dass die Position des Punktes keine mathematische Relevanz hat; dies ist lediglich eine faltpraktische Festlegung.

c) *»Muss das ein Punkt sein? Kann ich auch mehrere Punkte einzeichnen?«* Diese Frage muss geschickt nach hinten gestellt werden, da sie deutlich komplizierter ist. Erklären Sie der Klasse, dass zuerst »kleinere Brötchen gebacken werden sollten und für den Anfang reicht es, sich auf lediglich einen Punkt zu konzentrieren.

d) *»Spielt das eine Rolle in welche Richtung ich die Falze falte?«* Das spielt eine sehr große Rolle, wie wir im Folgenden sehen werden. An dieser Stelle bietet es sich an, die beiden Begriffe einzuführen: *Berg-* und *Talfalz*.

Links ist ein Bergfalz, rechts ein Talfalz angedeutet.

Wenn man so will, ist diese Unterscheidung eine *Färbung* der Falze des Faltmusters – Berge sind eine Farbe, Täler eine andere. Eine Färbung ist lediglich eine weitere Eigenschaft der Falze des Faltmusters. Zu sagen, ein Faltmuster sei flachfaltbar bedeutet also eine Färbung der Falze zu finden (in Berge und Täler), mit der man tatsächlich (genau dieser Färbung folgend) das Muster zu einem flachen Objekt falten kann. Welche Beobachtungen lassen sich über Berge und Täler in einem Faltmuster machen?

Nachdem nun die anfänglichen Fragen und Missverständnisse geklärt wurden, können sich Schülerinnen und Schüler auf das Ausprobieren konzentrieren. Sie haben genug Papier vor sich liegen und sollen möglichst frei nach Beispielen für flachfaltbare aber auch nicht flachfaltbare Muster suchen. Dabei entstehen (zweifellos!) verschiedene Beobachtungen, die man auch festhalten sollte. Wir empfehlen, eine geäußerte Behauptung eines Schülers an die Tafel samt seinem Namen zu schreiben, etwa: »Tina: Es gibt Beispiele für nicht flachfaltbare Muster mit genau vier Falzen.« Es ist nicht zu erwarten, dass Tina dies genau so gesagt hat. Stattdessen wohl eher: »Ich habe ein Beispiel gefunden mit vier Falzen, wo es nicht flach wird.« Damit die geäußerten Behauptungen tafelgerecht [2] aufgeschrieben werden können, bietet sich es an, die Schüler zu fragen, ob sie ihre Äußerungen prägnanter formulieren könnten (damit fördern Sie ein weiteres Reflektieren des Gesagten). Nur, wenn Tina keine prägnante Formulierung findet, sollte die Lehrperson eine Formulierung vorschlagen; dabei sollte man Tina fragen, ob diese Umformulierung ihre Behauptung richtig wiedergibt.

Es ist durchaus schwierig, Vermutungen zu finden, sie in Worte zu fassen und sich zu trauen, diese der ganzen Klasse zur Diskussion zu stellen. Daher empfehlen wir, unmotivierte oder bis zu diesem Zeitpunkt nicht ins Geschehen einbezogene Schülerinnen und Schüler so einzubinden, dass man sie bittet, ihre Meinung bzw. Einschätzung zu bisher festgehaltenen Vermutungen zu äußern. Keinesfalls sollte man jedoch neue Behauptungen erzwingen.

Erfahrungsgemäß erhält man nach einer Weile folgende Vermutungen in ungefähr dieser Form:

- ⋆ Ali: »4 Falze und flachfaltbar, dann genau ein Falz anderer Farbe.
  Umformuliert von »Bei 4 Falzen gibt es 3 Berge und ein Tal.«
- ⋆ Regina: »Gerade Anzahl an Falzen $\Longrightarrow$ flachfaltbar.«
  Diese Aussage ist nicht richtig und es ist zu erwarten, dass sofort Gegenbeispiele folgen. Nehmen Sie trotzdem diese Aussage auf, kritisieren Sie sie nicht und bitten Sie Regina ein von ihren Mitschülern gefundenes Gegenbeispiel zu untersuchen. Sobald sie dieses als solches einsieht, kann man die Aussage durchstreichen (aber nicht wegwischen).
- ⋆ Peter: »Bei 4 Falzen zwei gegenüberliegende Winkel in der Summe 180° $\Longrightarrow$ flachfaltbar«.
- ⋆ Anna: »Wenn alle Winkel gleich groß sind, dann ist das Faltmuster flachfaltbar.«

Nun können wir beobachten, dass die gesammelten Behauptungen drei Richtungen ansprechen, die bisher in keinem Zusammenhang stehen[3]: Anzahl der Falze, Färbung der Falze, Winkel zwischen den Falzen. Diese drei Richtungen sollen nun untersucht werden.

2.4 Anzahlen und Farben

Nachdem wir nun drei Richtungen ausgemacht haben, die wir untersuchen sollten, lassen wir die Klasse entscheiden, welche davon wir uns zunächst vornehmen wollen. Tatsächlich ist es aber leichter, anfangs über Farben der Falze nachzudenken und wir versuchen, die Schülerinnen und Schüler in diese Richtung zu lenken. Richtig ist, dass in einem flachfaltbaren Faltmuster die Falze nicht beliebige Farben haben können, so sind zum Beispiel Faltmuster mit nur vier Bergen oder Faltmuster mit exakt sechs Bergen und zwei Tälern nicht flachfaltbar. Wir sehen es als sehr bereichernd an, die Schülerinnen und Schüler viele Beispiele falten und analysieren zu lassen – sie entdecken wichtige Zusammenhänge und stoßen womöglich auf weitere Beobachtungen. An dieser Stelle wollen wir begreifen, was über einen Zusammenhang zwischen Bergen und Tälern in einem flachfaltbaren Faltmuster ausgesagt werden kann. Wir sehen zwei vielversprechende Richtungen, wie Sie diese Frage in der Klasse angehen können.

[2] Eine Äußerung ist *tafelgerecht*, wenn sie eine eindeutige Aussage ist, die in eine Zeile der Tafelebene passt. Ist eine Äußerung nicht tafelgerecht, dann wollen wir sie so abändern, dass sie tafelgerecht wird, und möglichst nah an der Originaläußerung bleibt.

[3] An dieser Stelle bietet es sich an, bisher wenig aktive Schülerinnen und Schüler ins Gespräch einzubinden.

Sind Sie gewillt und ist die Klasse in der Lage, offen zu arbeiten, so können Sie fragen, welche Beobachtungen über die Anzahlen von Bergen und Tälern gemacht werden können.

Entscheiden Sie sich dagegen für ein stärker moderiertes Vorgehen, so schlagen wir vor, eine Tabelle anzufertigen, in der Anzahlen von Bergen und Tälern in flachgefalteten Mustern der Klasse festgehalten werden. Eine solche Tabelle könnte wie folgt aussehen:

n	B	T
4	3	1
4	1	3
6	4	2
8	5	3
14	8	6.

Dabei sei n die Summe von Bergen, B, und Tälern, T. Bei diesem Vorgehen erscheint es leichter, die richtige Behauptung aufzustellen, dass die Anzahlen verschiedener Farben sich um 2 unterscheiden. Hier ist interessant zu bemerken, dass mit steigendem n die Tatsache $|B - T| = 2$ immer weniger intuitiv wird: Warum soll es denn nicht möglich sein, bei 34 Falzen genau 20 Berge und 14 Täler zu haben? Diese Beobachtung könnte eine interessante Diskussion ergeben und vielleicht zum ersten Mal bei dieser Beschäftigung aufzeigen, dass die Theorie hinter der Flachfaltbarkeit reichhaltiger sein kann, als man womöglich angenommen hat.

An dieser Stelle empfehlen wir, der Klasse nochmal klar zu machen, dass einige Beispiele keinen Beweis ersetzen. Vielmehr können Sie fragen, wer glaubt, dass diese erstaunliche Formel $|B - T| = 2$ im Allgemein richtig ist. Wenn sich die Mehrheit für die Richtigkeit ausspricht, kann man der Klasse vorschlagen, nach einem Beweis zu suchen. In der Tat stammt der hier angeführte Beweis von einem Schüler [Hul12, p. 223]. Es gilt abzuschätzen, wie schwer sich die Klasse mit dem Beweis tun wird. Wir skizzieren, wie eine Beweisführung ablaufen könnte.

Zuerst muss man betonen, dass, um die Verhätnisse im gefalteten Zustand besser erkennen zu können, es sich empfiehlt, die Lage der einzelnen Schichten des Papiers anzusehen, vgl. Bild 3. Es empfiehlt sich ferner, eine Umgebung der Spitze abzuschneiden, um eine bessere Sicht zu bekommen. Was kann man am Querschnitt beobachten? Skizzieren Sie den Querschnitt und machen Sie deutlich, dass die Eckpunkte des entstehenden Vielecks Enden der Falze sind.

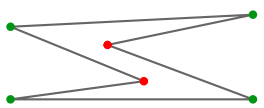


Bild 3: *Querschnitt eines flachfaltbaren (in einem beinahe gefalteten Zustand) Faltmusters. Grüne Punkte repräsentieren Täler, rote Punkte repräsentieren Berge. Im gefalteten Zustand ist das Vieleck entartet.*

- ⋆ Lehrerin: Welche Figur ergibt sich als Querschnitt?
- ⋆ Werner: Das ist ein Vieleck.
- ⋆ Lehrerin: Richtig. Was kann man über dieses Vieleck sagen?
- ⋆ Peter: Zu Bergen gehören große Winkel, zu Tälern gehören kleine Winkel.
  Das kann man durch Auf- und Zusammenfalten deutlich demonstrieren. Dreht man das Papier jedoch um, so sind große Winkel bei Tälern und kleine bei Bergen.
- ⋆ Sonja: Naja, genau genommen, wenn das Blatt flach gefaltet ist, dann entsprechen Bergen Winkel von 360° und Tälern 0°.

Es ist eine gute Idee, sich die Winkelsumme des Vielecks aus zwei verschiedenen Perspektiven anzuschauen. Einerseits wurde gerade implizit gesagt, dass sie $360° \cdot B + 0° \cdot T$ beträgt. Andererseits versuchen wir jetzt, das Wissen über Winkelsummen im Vieleck zu aktivieren. Damit holen wir eventuell Schülerinnen und Schüler zurück ins Boot, die sich in dem Thema noch nicht zurechtfinden; hier können sie ihr Wissen aus der Schule anwenden.

»Was weiß man über die Innenwinkelsumme eines n-Ecks?« Man kann vielleicht erwarten, dass die Antwort $(n - 2) \cdot 180°$ bekannt ist. Wenn nicht, dann ist das eine gute Möglichkeit, den Beweis anhand einer passenden Triangulierung wie im Bild 4(b) zu besprechen. Die einzige Voraussetzung, die bereits klar sein

(a) (b)

Bild 4: *Ein Polygon und eine mögliche Triangulierung.*

muss, ist, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt. Einigt man sich darauf, dass $n = B + T$ gilt, so folgt leicht (siehe dazu auch Kapitel 5) $B - T = -2$.

An dieser Stelle bieten sich folgende zwei Fortsetzungen an. Erstens, »lassen sich irgendwelche der Aussagen, die wir an der Tafel stehen haben, bereits mit dem eben bewiesenen Satz folgern?« Ja. Nämlich, dass eine ungerade Anzahl der Falze im Faltmuster unweigerlich dazu führt, dass es nicht flachgefaltet werden kann!

Sonja: Naja, wenn die Differenz zweier Zahlen gerade ist, dann auch die Summe. Damit folgt dann, dass ein flachfaltbares Muster auf jeden Fall aus einer *geraden* Anzahl an Falzen besteht.

Das ist sehr schön und die Frage, ob drei Falze zu etwas Flachem führen können, ist hiermit negativ beantwortet.

Zweitens, kann man fragen, ob die umgekehrte Richtung gilt: *Folgt aus der Formel $|B - T| = 2$ bereits, dass das Faltmuster flachgefaltet werden kann?* Das ist nicht richtig und es ist zu erwarten, dass schnell Gegenbeispiele gefunden werden. Es reicht sogar, ein Muster mit drei Bergen und einem Tal anzuschauen, wie in Bild 5. Hier sind drei Berge und ein Tal so eingezeichnet, dass man zuerst die Diagonale falten kann und einsieht, dass die beiden anderen Falze nicht zusammen passen.

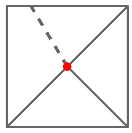


Bild 5: *Platzieren wir den vierten (gestrichtelten) Falz ungünstig, dann kann man schnell sehen, dass das Faltmuster nicht flach wird.*

Woran liegt das? Was fehlt noch, um eine hinreichende Bedingung zu finden? An dem Beispiel von eben sehen wir, dass die Winkel zwischen den Falzen eine entscheidende Rolle spielen, denn läge der Talfalz auf der Diagonale von links oben nach rechts unten, so ließe sich das Muster ohne Mühe flachfalten.

Hier kann man (sollte eine Pause oder eine Hausaufgabe eingelegt werden) eine kleine Aufgabe stellen: Ist der 4. Falz eindeutig, wenn drei bereits vorgegeben sind und das Muster flach werden soll? Oder gibt es weitere Möglichkeiten? Wenn ja, wie viele? Die Antwort ist recht simpel, aber vielleicht hilft sie Schülerinnen und Schüler im nächsten Schritt.

⋆ Ist ein Winkel größer als 180°, so muss dieser auf eine eindeutige Weise geteilt werden.

⋆ Ist kein Winkel größer als 180°, so kann jeder Winkel auf genau eine Art geteilt werden. Das ergibt drei Möglichkeiten.

2.5 Winkel und ihre Charakterisierung

Bevor man die Rolle der Winkel für die Flachfaltbarkeit charakterisiert, bietet es sich an, kurz über die gesammelten Vermutung zu reflektieren: Geklärte Vermutungen werden abgehakt oder durchgestrichen (je nach dem, ob sie stimmen oder nicht stimmen) und die entsprechenden Schülerinnen und Schüler für ihren Beitrag zur Klärung gelobt.[4]

Der Einstieg in die Untersuchung der Rolle der Winkel für die Flachfaltbarkeit könnte folgendermaßen verlaufen:

⋆ Lehrerin: Peter, kannst du deine Behauptung klären?

⋆ Peter: Naja, wie man in Ihrem Beispiel mit vier Falzen sieht, kann es nur dann flachfaltbar sein, wenn gegenüberliegende Winkel 180° in der Summe ergeben.

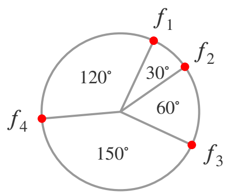
Richtig ist sogar eine wesentlich allgemeinere Aussage, nämlich dass die alternierende Winkelsumme eines flachfaltbaren Faltmusters Null ergibt. Wir sehen hier zwei gute Möglichkeiten, um fortzufahren:

Induktiv: Den Fall mit vier Falzen und der Winkelbedingung, wie von Peter vorgeschlagen, genau zu studieren; dann den Fall mit sechs Falzen anzuschauen und dort nach einer passenden Winkelbedingung zu suchen und dann eventuell den allgemeinen Fall zu untersuchen.

Deduktiv: Eine andere Möglichkeit wäre, die von Peter vorgeschlagene Winkelbedingung zu verallgemeinern (sofern es geht) und erst dann den allgemeinen Beweis zu führen.

Wir gehen nach der ersten Variante vor, weil sie aus unserer Sicht greifbarer ist, betonen aber, dass sich alle wesentlichen Argumentationsschritte auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Wir haben vier Falze $f_1, \dots, f_4$ und daher[5] vier aufeinander folgende Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.



Wie kann man die Behauptung »Wenn dieses Muster flachfaltbar ist, dann gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$« beweisen? Wenn wir uns eine kleine Ameise vorstellen, die sich im Kreis um den Schnittpunkt der vier Falze bewegt, dann ist es sofort klar, dass sie am selben Punkt ankommt, wenn sie einmal im Kreis gelaufen ist. Wenn diese Ameise ganz klein ist, dann können wir das Papier flachfalten, ohne dass sie davon Kenntnis nimmt – und läuft immer weiter im Kreis. Angenommen, wir beobachten die Bewegung der Ameise ab dem Moment, wenn sie auf dem Falz f_1 ist.

Wenn wir nun, wie in der Argumentation zu $|B - T| = 2$, den Querschnitt des Papiers anschauen, dann merken wir, dass ihre

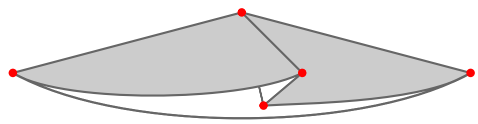


Bild 6: *Querschnitt eines beinahe flachgefalteten Faltmusters.*

Auslenkung von f_1 zu f_2, f_3, f_4 auf ihrem Laufkreis folgendermaßen beschreibbar ist:

Position	Auslenkung
f_1	0
f_2	α_1
f_3	$\alpha_1 - \alpha_2$
f_4	$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$
$f_1 = f_5$	$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$

daher folgern wir $0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$. Gleichzeitig gilt in unserem Faltmuster die Gleichung $360° = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, woraus sich durch Addition der beiden Gleichungen sofort das Behauptete, $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$, ergibt. Dies gibt Peter recht.

Bei Betrachtung der Argumentation fällt auf, dass $n = 4$ kein entscheidender Einflussfaktor ist. Die Formeln lassen sich für jede beliebige gerade Anzahl der Falze in einem flachfaltbaren Faltmuster aufstellen. Würden wir also n Falze haben (n gerade),

[4] Wenn sich eine Vermutung als falsch herausstellt, dann sollten wir die betreffende Person vorsichtig fragen, ob sie die Argumentation einsieht und es daher akzeptiert, dass ihre Vermutung durchgestrichen wird. Falsche Vermutungen sollten lediglich durchgestrichen, aber nicht weggewischt werden.

[5] Ein Faltmuster ist durch die Lage der Falze oder die Größe der aufeinander folgenden Winkel festgelegt.

dann würde die obige Überlegung auf die Formel führen[6]:

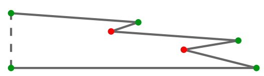
$$0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n.$$

Nun würden wir gern die Frage stellen, ob jetzt genau gesagt werden kann, wann ein Faltmuster flachfaltbar ist und wann nicht. Aufmerksame Schülerinnen und Schüler kommen vielleicht auf die Idee, dass die alternierende Winkelsumme aus dem vorigen Absatz eigentlich verrät, wie man vorgehen könnte.

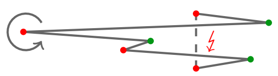
Genauer wollen wir fragen: Angenommen, wir haben ein Faltmuster mit gerader Anzahl an Falzen (weil das Faltmuster mit ungerader Anzahl an Falzen keine Chance hat, flachfaltbar zu werden, wie wir bereits wissen), können wir unter Berücksichtigung der Formel $|B - T| = 2$ diese Falze so einfärben, dass man das Faltmuster flachfalten kann?

Wir erklären, wie die Färbung für den Fall $B + T = 6$ zu wählen ist. Das dabei verwendete Verfahren lässt sich in natürlicher Weise auf $B + T = n$ für gerade n übertragen (eine alternative Argumentation ist in Kapitel 5 angegeben).

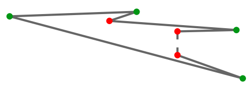
Lassen Sie Schülerinnen und Schüler ein Faltmuster mit sechs Falzen erstellen, so dass die alternierende Winkelsumme gleich 0° ist.[7] Dann schneiden Sie das Faltmuster an einem der sechs Falze, sagen wir f_1, bis zum Schnittpunkt der Falze ein und falten Sie nun die anderen Falze alternierend als Berge und Täler.



(a) Das klappt so



(b) Das klappt so nicht



(c) Aber so klappt es

Bild 7: *Die drei Grafiken entstehen als Querschnitte eines Faltmusters definiert durch die Winkel $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = 70°$, $\alpha_4 = 15°$, $\alpha_5 = 70°$, $\alpha_6 = 135°$. In Bild 7(a) wurde das Faltmuster zwischen α_6 und α_1 aufgeschnitten, im Bild 7(b) dagegen zwischen α_1 und α_2. Erst, wenn ein Falz wie in Bild 7(c) umgefärbt wird, ergibt sich eine passende Färbung.*

Zwei Varianten können eintreten. Erstens, Sie bekommen eine Situation wie in Bild 7(a), dann kleben Sie f_1 wieder zusammen und erhalten ein flachgefaltetes Faltmuster. Sie müssen eventuell erklären, warum man nun das gleiche Faltmuster mit der gefundenen Färbung auch ohne Aufschneiden flachfalten kann. Zweitens, es könnte die unangenehme Situation wie in Bild 7(b) eintreten, dass die beiden Schnittkanten durch einige Papierschichten getrennt sind und Sie können sie nicht ohne Weiteres zusammenkleben. In dem Fall war unsere Färbung nicht gut gewählt. Aber wir können die Situation retten, indem wir einen einzigen Falz umfärben, zum Beispiel einen, der möglichst weit links liegt, 7(c).

[6]Sollte Peter oder Sie die Behauptung so formulieren: »Flachfaltbar mit vier Falzen ⇒ gegenüberliegende Winkel summerieren sich zu 180°«, dann muss nun bei mehreren Falzen geklärt werden, dass die allgemeine Situation von alternierenden Winkeln spricht: Was ist »der gegenüberliegende Winkel« eines Winkels in einem Faltmuster mit 6 Winkeln?

[7]Wenn Sie die Situation stärker kontrollieren wollen, können Sie Winkel genau vorgeben, etwa $\alpha_1 = 40°, \alpha_2 = 30°, \alpha_3 = 70°, \alpha_4 = 15°, \alpha_5 = 70°, \alpha_6 = 135°$.

Analysieren wir die Konstruktion, dann merken wir schnell, dass sie ohne Weiteres auf Faltmuster mit beliebiger (jedoch gerader) Anzahl an Falzen übertragbar ist.

Somit haben wir einen Höhepunkt der Theorie erreicht, da wir nun definitiv einem uns vorliegenden Faltmuster ansehen können, ob es flachfaltbar ist oder nicht, und zwar ohne es tatsächlich zu falten!

Hauptsatz Ein durch die aufeinander folgenden Winkeln α_1 bis α_n gegebenes Faltmuster ist genau dann flachfaltbar, wenn n gerade ist und $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n = 0$ gilt.

2.6 Globale Flachfaltbarkeit

- ⋆ Anna: Aber wie ist es mit mehreren Punkten? Geht das, wenn ich aufs Papier nicht nur einen, sondern mehrere Punkte draufmale und von ihnen Strecken ziehe?
- ⋆ Lehrerin: Zeichnet euch doch mal einige solche Faltmuster aufs Papier! Könnt ihr dann etwas über die Flachfaltbarkeit des ganzen Faltmusters aussagen?
- ⋆ Ali: Hm, jede der Punkte an sich muss schon flachfaltbar sein.
- ⋆ Lehrerin: Sehr schön! Reicht das schon dafür, dass das ganze Muster flachfaltbar wird?
  Das reicht nicht und ein Beispiel zu finden ist nicht ganz einfach. Wenn die Klasse stark genug ist, kann man sie eine Weile suchen lassen, aber vermutlich wird man ein Beispiel liefern müssen. Außerdem wir bei mehreren Punkten vieles komplizierter: Zum Beispiel kann man nicht ohne Weiteres die Formel $|B - T| = 2$ übertragen. Allerdings lässt sich diese Formel etwas umständlich verallgemeinern, s. [Hul94, Proposition 4.1].

Ein sehr schönes und einfaches Beispiel (von Thomas Hull) ist im folgenden Bild zu sehen:

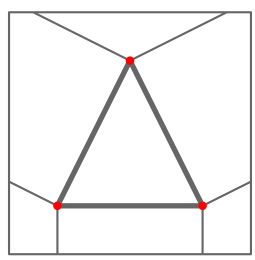


Bild 8: *In diesem Faltmuster sind alle Winkel, die wie 90°-Winkel aussehen, tatsächlich auch 90°-Winkel. Dieses Faltmuster ist lokal, aber nicht global flachfaltbar, siehe Satz 1.*

In diesem Beispiel ist keine Färbung der Falze vorgegeben; vielmehr ist das Spannende bei diesem Beispiel, nachzuweisen, dass *jede* Färbung der Falze unter der Annahme der Flachfaltbarkeit zu einem Widerspruch führt. Wie begründet man das? Es ist durchaus zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler selbst auf die richtige Idee kommen. Diese Idee kann man zu einem Satz zusammenfassen und wir erlauben uns, in diesem Abschnitt einen Satz mit Beweis anzuführen.

Satz 1 (Über eingeschlossene Winkel). Seien $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ drei aufeinander folgende Winkel um einen Punkt eines Faltmusters. Ferner gelte $\alpha_{i-1} > \alpha_i < \alpha_{i+1}$. Gibt es eine Färbung des Faltmusters, so dass es flach wird, dann sind die beiden den Winkel α_i begrenzenden Schenkel verschieden gefärbt.

Beweis: Wären die jeweiligen Falze gleich gefärbt, so würde sich das Papier unweigerlich selbst im Weg stehen, bevor man es flachfalten könnte, wie im Bild 9. □

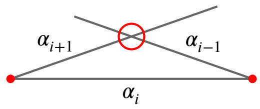


Bild 9: *Wir betrachten wieder einen Querschnitt von vorn: Die zwei Punkte sollen die erwähnten Schenkel von α_i andeuten, die Strecken repräsentieren die Kreissektoren bestimmt durch die drei Winkel. Der rote Kreis deutet die Selbstüberschneidung des Papiers an.*

Nun wollen wir die Unterrichtssequenz langsam zu einem Ende bringen. Es fehlt noch ein positiver Abschluss, ein erstaunliches, notwendiges Kriterium für globale Flachfaltbarkeit. Wir betrachten zuerst ein weiteres spannendes Beispiel, welches für unsere Zwecke vielversprechend und gleichzeitig interessant (wenn auch etwas anspruchsvoll) zu falten ist.

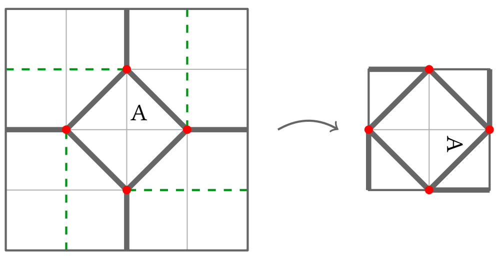
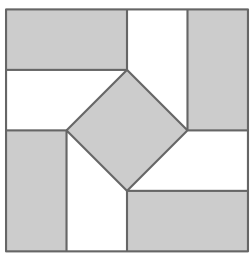


Bild 10: *Der sogenannte Square-Twist*[8]*: Links das Faltmuster und rechts das flachgefaltete Modell. Gestrichelte grüne Falze sind Täler, durchgezogene dicke graue Falze Berge. Der Buchstabe A deutet an, was die Faltung bewirkt.*

Hier kann man auf die Idee kommen, die fünf der neun von den Falzen des Square-Twists begrenzte Gebiete, welche im gefalteten Zustand nach oben weisen, mit einer Farbe, und die restlichen vier Gebiete, die nach unten weisen, mit einer zweiten Farbe einzufärben (dies nennen wir 2-färben). Faltet man



die Figur wieder auf, dann bemerkt man, dass diese Gebiete 2-gefärbt wurden. Nun kann man auf die Idee kommen, dass es ein gutes Kriterium für globale Flachfaltbarkeit ist. Allerdings zeigt man sofort mit Bild 8, dass dieses Kriterium zumindest nicht hinreichend ist. Jedoch zeigen wir im Kapitel 5 Satz 9, dass dieses Kriterium tatsächlich notwendig ist!

Es wäre schön, die Unterrichtssequenz mit einer interessanten Faltung abzuschließen. Das erledigen wir mit der sog. Miura-Ori, benannt nach ihrem Erfinder Koryo Miura, einem der führenden Origamiwissenschaftler weltweit. Diese Faltung demonstriert eindringlich, wie man einen Stadtplan so falten kann, dass es möglich ist, ihn mit einer einzigen Bewegung auf- und zusammenzufalten.

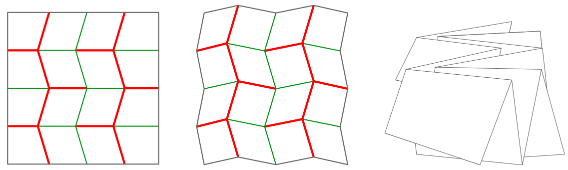


Bild 11: *Eine Variante der Miura-Karte (Miura-Ori). Verschiedene Farben repräsentieren verschiedene Ausrichtungen der Falze: Berge oder Täler. Links das Faltmuster, in der Mitte etwas angefaltet, rechts die fast flachgefaltete (und vergrößerte) Karte.*

3 Hinweise und Bemerkungen

In diesem Abschnitt wollen wir noch einige Bemerkungen zur Durchführung, die bisher unerwähnt geblieben sind, ausführen sowie alternative Methoden aufzeigen.

3.1 Hinweise zur Durchführung

★ Sie sollten sich nur als einen Moderator ansehen und versuchen, die Behauptungen möglichst unverändert aufzuschreiben. Um geäußerte Formulierungen straffer zu gestalten, lohnt sich der Trick, nachzufragen, wie diejenige Person das Gesagte meint, weil man es aus diversen Gründen (z. B. akustisch) nicht verstanden hat. Damit erwirkt man eventuell ein weiteres Nachdenken und eine tafelgeeignetere Formulierung.

★ Wenn Sie eine Vermutung oder Beobachtung an die Tafel schreiben wollen, dann sollten Sie die Namen der Schülerinnen und Schüler vor die Vermutung schreiben, z. B. »Regina: Mit drei Falzen gehts nicht!« Wir glauben, dass dadurch die Überlegungen der Schülerinnen und Schüler wertgeschätzt und sie persönlich in die Arbeit eingebunden werden. Außerdem ist damit klargestellt, dass Vermutungen den Schülerinnen und Schülern gehören und nicht vom Lehrer kommen. Wir haben mit dieser Methode nur positive Erfahrungen gemacht.

★ Folgende Hinweise können wir geben, um Schülerinnen und Schüler zur Arbeit zu motivieren, wenn die Unterrichtssequenz nicht flüssig läuft oder Schülerinnen und Schüler größere Probleme haben:

  ⋄ Geben Sie konkrete Arbeitsanweisungen, vgl. Abschnitt 3.2, besprechen Sie ein konkretes vorbereitetes Faltmuster.

  ⋄ Zeigen Sie viele Beispiele mit verschiedenen Faltmustern, wenn die Klasse selbst keine guten Beispiele findet.

[8]Der Square-Twist eröffnet ein weites Feld mathematisch interessanter Objekte: Tessellationen oder Mosaiken, siehe [Gje08].

- ⋄ Fragen Sie Schülerinnen und Schüler nach ihrer Meinungen: »Was meinst du: Stimmt diese Behauptungen an der Tafel?«, »In welche Richtung, denkst du, sollen wir uns bewegen?«
- ⋄ Erzwingen Sie jedoch *niemals* Vermutungen (»Sonja, du hast noch nichts gesagt: Stellt doch mal auch eine Vermutung auf!«), das wirkt demotivierend.

⋆ Nehmen Sie *niemals* das Modell Ihrer Schülerinnen bzw. Schüler aus deren Hand, um die Faltung zu Ende zu bringen oder gar neu zu falten, vgl. [GJ09]! Falten und erklären Sie immer anhand Ihres eigenen Modells. Wir glauben, dass eines der wesentlichen Vorteile des Papierfaltens die Erschaffung eigener Strukturen, eigener Mathematik ist; nehmen Sie das Modell in Ihre Hände und beseitigen die Probleme auf eine eventuell unverständliche Weise (sonst gäbe es diese Probleme vielleicht nicht), so geht, aus unserer Sicht, dieses Gefühl eigener Kreation verloren.

⋆ Sie können sich überlegen, wie Sie Schülerinnen und Schülern Beispiele vorfalten. Aus unserer Erfahrung eignet sich die bewährte Methode des Faltens in der Tafelebene, das heißt Sie legen ein großes Blatt Papier auf die Tafel und falten so, als ob Sie am Tisch arbeiten würden. Alternativ können Sie spiegelverkehrt in der Luft falten, jedoch erfordert das ein sehr sicheres Beherrschen der Faltung. Sie können auch an eine Dokumentenkamera denken, um im Sitzen falten und bei Bedarf die Modelle vergrößern oder aufnehmen zu können, jedoch hat sich diese Methode in unserer Erfahrung nicht bewährt – Schülerinnen und Schüler sind gezwungen, einer Projektion an der Wand zu folgen und Ihnen zuzuhören, was eventuell zur Verwirrung führen kann.

3.2 Alternativen

Hier stellen wir einige Abweichungen von unserem Vorgehen vor, die Sie aus unserer Sicht gut einsetzen können, wenn Sie etwa wenig Zeit haben, die Klasse nicht stark ist oder Sie sich in diesem Thema noch etwas unsicher fühlen.

⋆ Es ist denkbar, die Unterrichtssequenz so einzuleiten: Sie beginnen mit zwei gefalteten Modellen, das eine ist flachgefaltet (z.B. ein Kranich) und das andere ist ein dreidimensionales Objekt, welches sich nicht flachfalten lässt. Sie können dann diese Modelle auffalten und mit Schülerinnen und Schülern die beiden Faltmuster betrachten und fragen, ob es denn möglich ist, einem Faltmuster direkt anzusehen, ob das Modell ein flaches wird oder nicht. Ein Vorteil dieses Anfangs ist, dass Sie mit einer sehr anschaulichen intuitiven Frage beginnen. Eine Gefahr ist, dass Schülerinnen und Schüler sich möglicherweise in der Komplexität des Faltmusters verlieren. Schülerinnen und Schüler sollten aus unserer Sicht zuerst Flachfaltbarkeit lokal (um einen Punkt herum) klären.

⋆ Der Ablauf kann von sehr offenem bis zu stark strukturiertem Arbeiten variieren:

- ⋄ Im strukturierten Ablauf empfiehlt sich eine Tabelle, in der gefundene Erkenntnisse gesammelt werden, etwa so:

Anzahl der Falze	2	3	4	6	…
Flachfaltbar?					
Gegenbeispiel?					
Farben der Falze					
Winkel					

Eventuell führt dieses tabellarische Vorgehen schneller und strukturierter zu Behauptungen; ein solches Vorgehen ist sinnvoll bei knapper Zeit oder bei Unsicherheiten auf der Seite der Lehrkraft.

- ⋄ Sie könnten auch Vermutungen auf Karten statt an die Tafel schreiben. Die Karten werden dann an die Tafel geklebt oder gepinnt. Das ermöglicht leichteres Ordnen und Sortieren der Aussagen; verworfene Vermutungen können leichter entfernt werden; leichteres Zusammenfassen und Wiederaufgreifen in den Folgestunden der Aussagen ist möglich.
- ⋄ Bei einem offenen Vorgehen, wenn die Klasse möglichst eigenständig arbeitet, empfehlen wir eine gewöhnliche Kreidetafel oder alternativ ein Smartboard.

⋆ Sie können sich überlegen, wie Sie mit der Menge der geäußerten Aussagen umgehen. Sie können:

- ⋄ erst alle Vermutungen aufstellen lassen und sammeln, dann beweisen (lassen).
- ⋄ oder erst ein paar Vermutungen sammeln, ausgewählte sofort beweisen, dann wieder Vermutungen sammeln usw.

Wir wissen nicht, welche der beiden Option »die bessere« ist, nach unserer Erfahrung ergibt sich oft ein Mix aus den beiden.

⋆ Es ist durchaus denkbar, die ganze Unterrichtssequenz mit der Miura-Ori anzufangen. Das bringt viele Vorteile: Es ist eine faszinierende Faltung, die durchaus einen Realitätsbezug aufweist – als eine Stadtplankarte oder als ein faltbares (der Fläche nach reduziertes) Solarpaneel, vgl. [Hul12, p. 307] –, mit einem flachfaltbaren Faltmuster, bei dem in jedem Punkt vier Falze zusammentreffen (oder *inzidieren* in der Fachsprache). Andererseits kann man diese schöne Faltung auch für den Schluss aufheben. Jedenfalls sorgt diese tolle Konstruktion für Heiterkeit und Freude in der Klasse und ist zudem ein guter Abschluss der Theorie!

⋆ Im Block »globale Flachfaltbarkeit« können Sie an mehreren Stellen die Sequenz beenden, je nach Klasse, Zeit und Interesse. Unsere Empfehlung ist, mindestens das Beispiel aus dem Bild 8 zu besprechen (besser in Gruppenarbeit klären lassen) und dann zu erklären, dass globale Flachfaltbarkeit wesentlich komplizierter ist als lokale. Alternativ können Sie sowohl nach dem Square-Twist, Bild 10, als auch nach Miura-Ori aufhören; das sind aus unserer Sicht allesamt gute Schlusspunkte. Sollten Sie jedoch besonders viel Zeit oder eine starke Gruppe haben, können Sie noch weiter gehen und Beispiele aufzeigen, wie in Bild 12, die nahelegen, worin die Komplexität der globalen Flachfaltbarkeit liegt. Spätestens an dieser Stelle sind Sie da angekommen, wo die Forschung derzeit auch steht.

4 Ziele der Flachfalterei in der Schule

Im Folgenden beschreiben wir die Ziele, die bei der Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit verfolgt werden können. Das

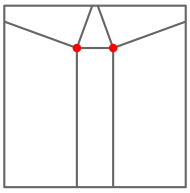


Bild 12: *Dieses Beispiel aus [Hul12, p. 236] zeigt ein Faltmuster mit zwei Punkten, welches lokal, aber nicht global flachfaltbar ist. Der Nachweis der Nichtflachfaltbarkeit ist nicht ganz einfach.*

Hauptziel und die größte Stärke sind, dass Schülerinnen und Schüler den Entstehungsprozess einer mathematischen Theorie selbst erleben und mitgestalten können. Sie arbeiten dabei auf eine ähnliche Weise wie Mathematikerinnen und Mathematiker. Entsprechend den Bildungsstandards umfasst dies die prozessbezogenen Kompetenzen: argumentieren, Probleme lösen, kommunizieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen und modellieren, vgl. [KMK12].

Bei der Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit können aus unserer Sicht vor allem drei Kompetenzen besonders angesprochen werden. Erstens *mathematisches Kommunizieren*, vor allem beim Diskutieren von Beispielen und Vermutungen. Dabei muss das eigene Vorgehen beschrieben werden, damit es Andere nachvollziehen können, vgl. [BDH12, p. 48–50]. Zweitens wird *mathematisches Argumentieren* gefördert. Wie wir gezeigt haben, entwickeln Schülerinnen und Schüler ihre eigene Theorie und sollen auch die darin enthaltenen Argumentationsschritte und Beweise möglichst eigenständig entwickeln. Drittens bietet die Beschäftigung mit den Fragen nach der Flachfaltbarkeit von Faltmustern viele Anlässe, um auf Probleme zu stoßen, diese selbst zu bearbeiten und schließlich mit mathematischen Mitteln zu lösen. Schülerinnen und Schüler wenden folglich verschiedene Heurismen an, etwa das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme (z. B. Fallunterscheidungen entsprechend der Anzahl der Falze) oder das Umstrukturieren der Situation (etwa Betrachtung der abgeschnittenen Spitze), vgl. [Pol10, p. 157].

Neben diesen kompetenzbezogenen Zielen ist unsere Hoffnung, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik als eine für sie spannende und lehrreiche Beschäftigung empfinden werden.

5 Mathematischer Blick auf Flachfaltbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Theorie der Flachfaltbarkeit etwas stärker mathematisch orientiert vorstellen.

Definition 2. Sei $\{P_1, \dots, P_n\}$ eine Partition des Einheitsquadrats $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ in n Vielecke, $n \in \mathbb{N}$. Als *Knoten* bezeichnen wir diejenigen Punkte in $(0,1)^2$, die entweder Ecken von P_i oder endlich viele weitere Punkte auf den Seiten von P_i sind. Ein *Faltmuster* $F = (V, E)$ der Partition $P_1, \dots, P_n$ bestehe aus der Menge der Knoten V und der Menge E aller (Teil-)Kanten in $(0,1)^2$ der Vielecke P_i, die bis auf Knoten disjunkt sind. Jedes Element von E nennen wir *Falz*.

Diese Definition formalisiert das Einzeichnen der Punkte und Strecken auf das Papier. Man kann etwas mühsam Begriffe *Faltung*, *Flachfaltbarkeit*, *Papier* präzise formulieren, doch das wird für diese Arbeit etwas zu technisch. Wir verweisen dafür zum Beispiel auf [Pom09].

Definition 3. Als ein *1-fach-Faltmuster* bezeichnen wir ein Faltmuster mit einem einzigen Knoten ($|V| = 1$). Diesen Knoten bezeichnen wir mit *Mittelpunkt*.

Definition 4. Für ein Faltmuster E mit der Falzmenge E nennen wir eine Funktion $c : E \to \{b, t\}$ *Färbung* des Faltmusters.

Diese Definition formalisiert die Vorstellung, dass einige Falze Berge, b, und einige Täler, t, sind.

Satz 5 (Maekawa 1986, Justin 1984). In einem flachfaltbaren 1-fach-Faltmuster mit B Bergen und T Tälern gilt die Gleichung

$$|B - T| = 2.$$

Beweis (Jan Siwanowicz 1993, [Hul12]): Falten wir das Muster flach und schneiden eine kleine Umgebung der Spitze ab, so ist der Querschnitt ein ausgeartetes Polygon mit inneren Winkeln von 0° und 360°, siehe Bild 3. Dabei haben alle Falze gleicher Farbe denselben Winkelgrad. Die Anzahl der Falze $n := B+T$ ist die Anzahl der Ecken im Polygon. In einem n-Eck ist jedoch die Summe der Innenwinkeln gleich $(n-2)\cdot 180°$. Betrachten wir nun Täler als Falze, die zu den 0°-Winkeln gehören, Berge als Falze, die zu den 360°-Winkeln gehören, so folgt auf einmal:

$$(B+T-2)\cdot 180° = (n-2)\cdot 180° = 0°\cdot T + 360°\cdot B \Longrightarrow B-T = -2.$$

Schauen wir auf das Faltmuster von der anderen Seite, so folgt $B - T = +2$ und insgesamt also die Behauptung. □

Beim Beweis des obigen Satzes ist Vorsicht geboten. Für gewöhnlich würden Studierende so argumentieren: Ein Faltmuster mit genau 2 Falzen ist genau dann flachfaltbar, wenn beide Falze gleiche Farbe haben (und kollinear sind), das heißt, es gilt $|B - T| = 2$; dann argumentieren sie, dass wenn nun weitere Falze produziert werden, verändert sich diese Gleichheit nicht. Das ist kein Beweis, da keineswegs klar ist, warum alle flachfaltbaren Muster so entstehen sollten (und offensichtlich tun sie es auch nicht – es gibt flachfaltbare Faltmuster, in denen z. B. keine zwei Falze kollinear sind).

Aus dem obigen Satz lässt sich sofort eine erstaunliche Konsequenz ableiten.

Korollar 6. Ist die Anzahl der Falze in einem 1-fach-Faltmuster ungerade, so lässt sich das Faltmuster nicht flachfalten.

Beweis: Die Anzahl der Falze lässt sich als Summe der Berg- und Talfalzen auffassen, also $B+T$. Mit dem Satz von Maekawa-Justin folgt dann $B + T = B + B \pm 2 = 2(B \pm 1)$. □

Der folgende Satz charakterisiert die Flachfaltbarkeit eines 1-fach-Faltmusters.

Satz 7 (Kawasaki 1989, Justin 1984). Sei n die Anzahl der Falze in einem 1-fach-Faltmuster und sei n gerade. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ aufeinander folgende positive Winkeln zwischen den Falzen. Dann und nur dann ist das 1-fach-Faltmuster flachfaltbar, wenn gilt

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \mp \ldots - \alpha_n = 0.$$

Beweis: Wir gehen anfangs genau so vor wie im Beweis des Satzes von Maekawa-Justin und betrachten einen Querschnitt einer Umgebung des Mittelpunktes M. Nun stellen wir uns vor, dass wir diesen Querschnitt wie einen Weg (in der Literatur stellt man sich eine kleine Ameise vor) von einem Punkt P aus einmal ablaufen.

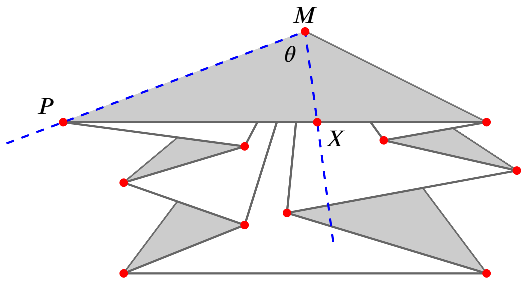


Bild 13: *Im Bild ist ein Querschnitt um die Spitze M zu sehen, graue Flächen deuten eine Seite des Papiers, weiße die andere. Läuft X auf dem Rand des Querschnitts, so beschreibt $\theta = \measuredangle PMX$ die Auslenkung des Punktes X von P bezüglich M im Bogenmaß.*

Betrachten wir die Auslenkung θ von P zu einem Punkt X auf dem Querschnitt, dann stellen wir folgendes fest: Wenn X den Querschnitt einmal abläuft, dann variiert θ wie im Bild: $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 + \ldots - \alpha_n$. Andererseits, da X nach diesem Ablaufen wieder in P landet, ist die Auslenkung $\theta = 0$.

Die andere Richtung beweist man algorithmisch, das heißt, in dem man eine Färbung angibt, mit der man das Faltmuster flachfalten kann. Den Algorithmus haben wir auf Seite 6 und im Bild 7 dargelegt. Die Behauptung folgt. □

Korollar 8. Genau dann ist ein 1-fach-Faltmuster flachfaltbar mit den Voraussetzungen und Winkeln wie im Satz 7, wenn gilt

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n = 180°.$$

Beweis: Die Gleichung $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 360°$ und die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_2 \pm \ldots - \alpha_n = 0$ aus Satz 7 liefern sofort die Behauptung. □

Mit diesen Sätzen haben wir nun vollständig die Flachfaltbarkeit eines 1-fach-Faltmusters beschrieben. Natürlich kann man hier noch weitere Fragen stellen, wie etwa: Hat ein flachfaltbares Faltmuster eine einzige Färbung oder gibt es mehrere? Wenn es mehrere gibt, liefern sie alle dasselbe Modell? Kann man die Anzahl der Färbungen bestimmen? (siehe [Hul02, Theorem 4.1]). Oder kann man den Prozess des Faltens mathematisch beschreiben? Können wir etwa jederzeit eine mathematische Momentaufnahme des Prozesses des Faltens erstellen, vgl. [BH02]?

Die Theorie der globalen Flachfaltbarkeit ist deutlich komplizierter als die der 1-fach-Flachfaltbarkeit und bis heute gibt es keinen einfachen Algorithmus, der einem Faltmuster schnell[9] ansieht, ob es flachfaltbar sein wird. Wir wollen nicht zu sehr ins Detail gehen, machen lediglich einige Bemerkungen.

Offensichtlich lässt sich unschwer erkennen, dass die Flachfaltbarkeit eines Faltmusters nur dann möglich ist, wenn jeder einzelne Knoten des Musters an sich (also lokal) flachfaltbar ist. Die Umkehrung ist leider falsch wie beispielsweise Bild 8 zeigt.

Was kann man dann überhaupt im Allgemeinen über globale Flachfaltbarkeit sagen? Wie Bild 10 und die Überlegungen in Abschnitt 2.6 nahelegen, lassen sich die Flächen[10] eines global flachfaltbaren Faltmusters mit zwei Farben färben. Wir wollen hier einen graphentheoretischen Beweis dieser bemerkenswerten Eigenschaft skizzieren.

Satz 9. Gegeben sei ein global flachfaltbares Faltmuster (V, E) zur Partition $P_1, \ldots, P_n$, vgl. Definition 2. Dann kann man die Vielecke P_i so in zwei Farben färben[11], dass benachbarte Vielecke verschiedene Farben haben.

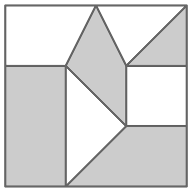


Bild 14: *Ein Beispiel für ein flächen-2-färbbares Faltmuster (global nicht flachfaltbar).*

Beweisskizze: Für den Beweis definieren wir einen Graphen $G = (V \cup X, E \cup Y)$, wobei X aus den Ecken von P_i besteht, die auf dem Rand des Einheitsquadrats liegen, und Y sei die Menge der Kanten von P_i ohne E. Das heißt G ist im Wesentlichen das Faltmuster (V, E) mit zusätzlichen Ecken und Kanten.

Wegen der Flachfaltbarkeit in jedem Knoten des Faltmusters (V, E) besagt der Satz von Maekawa-Justin, dass in G höchstens Knoten aus X ungerade Valenzen haben. Verbinden wir diese Knoten mit einem Knoten x außerhalb des Einheitsquadrats[12], so besitzt $G \cup \{x\}$ nur gerade Valenzen und ist somit eulersch. Das wiederum zeigt, dass der duale Graph von $G \cup \{x\}$ bipartit ist und wir können somit seine Knoten in zwei Farben färben, so dass keine Knoten gleicher Farbe benachbart sind. Da diese Knoten den Flächen in $G \cup \{x\}$ entsprechen, haben wir die Flächen von $G \cup \{x\}$ 2-gefärbt. Aber damit sind auch die Flächen von G 2-gefärbt und wir sind fertig. □

Bemerkung 10. Das besonders Bemerkenswerte an Satz 9 ist, dass man im Allgemeinen nicht weniger als vier Farben braucht, um »Landkarten«, die aus einem planaren Graphen entstehen, einzufärben, siehe Bild 15.
Die globale Flachfaltbarkeit stellt wohl eine wesentliche Einschränkung an das Faltmuster und seine »Länder«.

Mit Satz 9 können wir also vielen lokal flachfaltbaren Faltmustern ohne große Mühe ansehen, dass sie nicht global flachfaltbar sind – es reicht eben nachzuweisen, dass sich »die Länder« in dem Faltmuster nicht mit zwei Farben einfärben lassen. ♯

[9] Technischer ausgedrückt: Entscheiden der Flachfaltbarkeit allgemeiner Faltmuster ist NP-schwer, vgl. [BH96].

[10] Das sind die Vielecke P_i aus Definition 2, wenn man so will.

[11] Also etwa eine Funktion $f : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \mathbb{Z}_2$ angeben.

[12] Wir können die neuen Kanten so wählen – sie müssen nicht geradlinig sein – dass auch $G \cup \{x\}$ ein ebener Graph bleibt.

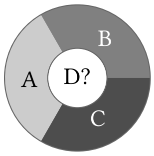


Bild 15: *Das Standardbeispiel eines ebenen Graphen, der flächen-4-färbbar, aber nicht flächen-3-färbbar ist.*

In dieser Arbeit gehen wir nicht tiefer in die Problematik und Mathematik der globalen Flachfaltbarkeit. Grund dafür sind hauptsächlich technische wie zeitliche Bedenken – die Aussagen werden komplizierter (insbesondere für das Schulniveau) und wir glauben nicht, dass es in der Schule möglich sein wird, so viel zu besprechen. Ein Blick in die Materie lohnt sich jedoch auf jeden Fall und wir empfehlen, Originalarbeiten wie [Hul94], [Hul02], [Hul12], [Pom09], [BH96] oder [Huz90] zur Hand zu nehmen.

6 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit haben wir versucht, die Theorie der Flachfaltbarkeit didaktisch aufzuarbeiten und für den Schulunterricht nutzbar zu machen.

Bisher haben wir diese Beschäftigung hauptsächlich an der Universität Würzburg im Rahmen mehrerer Seminare sowie Schülerprojekttage und einiger Workshops durchgeführt.

Natürlich gilt es, diese Unterrichtssequenz in der Schulpraxis einzusetzen, zu evaluieren, auf Wirksamkeit zu überprüfen und sie dann hoffentlich als eine wertvolle Ergänzung des Unterrichts zu etablieren.

Literatur

[BH02] S.-M. Belcastro & T. Hull. A mathematical model for non-flat origami. In: *Origami 3: Third International Meeting of Origami Mathematics, Science, and Education*, S. 39–51, 2002.

[BH96] M. Bern & B. Hayes. The complexity of flat origami. In: *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, S. 175–183, 1996.

[BDH12] W. Blum et al. (Hrsg.) *Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Cornelsen Scriptor, 2012.

[Ger08] R. Geretschläger. *Geometric Origami.* Arbelos, 2008.

[Gje08] E. Gjerde. *Origami Tessellations: Awe-inspiring Geometric Designs.* CRC Press, 2008.

[GJ09] M. Golan & P. Jackson. Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. In: *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, S. 459–469, 2009.

[Hul94] T. Hull. On the mathematics of flat origamis. In: *Congressus numerantium*, S. 215–224, 1994.

[Hul02] T. Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. In: *Origami 3: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, S. 29–38, 2002.

[Hul12] T. Hull. *Project origami: activities for exploring mathematics.* CRC Press, 2012.

[Hun13] N. Hungerbühler. Origami – von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Heft 45, S. 1–14, 2013.

[Huz90] H. Huzita. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology.* Padova, 1990.

[KMK12] Kultusministerkonferenz. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Quelle: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf, 2012.

[Mon09] J. Montroll. *Origami polyhedra design.* CRC Press, 2009.

[Pol10] G. Polya. *Schule des Denkens – vom Lösen mathematischer Probleme.* Franke, 2010.

[Pom09] F. Poma. *On The Flat-Foldability Of A Crease Pattern.* Quelle: www.phc.pisa.it/~poma/Ffcp.pdf (17.05.2016), 2009.

[SHH13] R. Schmitt-Hartmann & W. Herget. *Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12.* Klett, 2013.

A.2. Quadratische Gleichungen

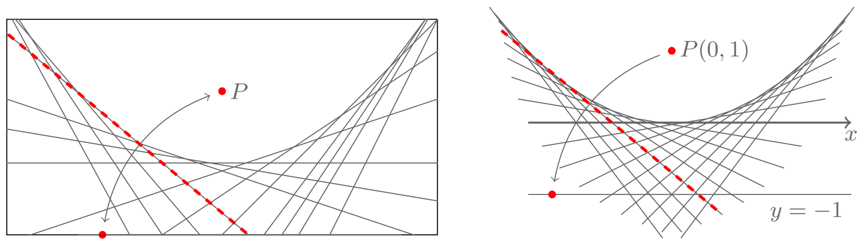
Begleitmaterial: Falten von Lösungen quadratischer Gleichungen

Hier wollen wir Parabeln und ihre Tangenten mittels Origami aus einer anderen Perspektive sehen und damit vorgegebene quadratische Gleichungen der Form $x^2 - px + q = 0$ mit p, q etwa aus natürlichen Zahlen allein durch Falten von Papier lösen. Damit würden wir dann (irrationale) Zahlen der Form $\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ konstruieren.

Dazu sind folgende Aufgaben zu bewältigen.

a) Markieren Sie mit dem Stift einen Punkt P auf einem Blatt Papier, etwa DIN-A4 im Querformat. Falten Sie nun P auf die untere Kante des Papiers oder, was dasselbe und leichter ist, die untere Seite des Papiers auf den Punkt P. Dafür gibt es unendlich viele Möglichkeiten, wählen Sie eine davon. Falten Sie wieder auf. Sie sehen einen Falz: Was kann man über diesen sagen? Falten Sie noch mehr solche Falze, indem Sie immer wieder P auf verschiedene Punkte der unteren Seite des Papiers falten wie in Abbildung 5(a). Was beobachten Sie? Was können Sie über die »Kurve« um P sagen?

b) Wir vermuten schnell, dass diese Kurve eine Parabel ist. Doch warum? Algebraisieren wir dazu unser Blatt, indem wir ihm ein Koordinatensystem aufzwingen: Seien $P = (0, 1)$ und $l : y = -1$, wobei l die untere Seite des Papiers bezeichne. Es entsteht ein Bild wie in Abbildung 5(b). Können Sie nun erklären, warum die Kurve eine Parabel ist? Tipp: Der rote, gestrichelte Falz ist eine Tangente an diese Parabel.



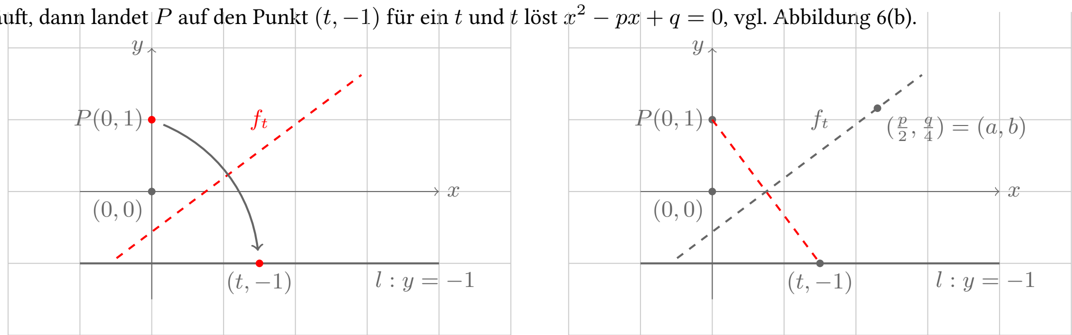
(a) Falten eines Punktes auf eine Gerade. Dabei entsteht der rote, gestrichechte Falz.

(b) Falten des Punktes $(0, 1)$ auf die Gerade mit der Geradengleichung $y = -1$

Bild 5: Eine Parabel als Epigraph der Falze.

c) Nun wollen wir mehr über diese Falze/Tangenten erfahren. Können Sie deren Geradengleichung angeben? Betrachten Sie dazu Abbildung 6(a). Sei dazu ein Punkt $(t, -1)$ auf der Geraden l beliebig gewählt. Falten wir P auf $(t, -1)$, entsteht der Falz f_t. Welche Steigung hat er? Dafür brauchen wir zwei Ideen bzw. Informationen. Oder ein Wort: Mittelsenkrechte = Mitte + Senkrechte. Die erste Information ist: f_t steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Punkte P und $(t, -1)$. Warum ist das so? Die zweite Information ist: Der Mittelpunkt der Strecke $[(t, -1)P]$ liegt auf f_t. Warum ist das so und was nützt uns das? Nach kurzem Nachdenken stellen wir fest: $f_t(x) = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$. Das sieht schon nach einer Parabel aus!

d) Da wir unendlich viele t haben, bekommen wir auch unendlich viele f_t. Das sind zu viele. Was wäre, wenn wir an f_t eine Bedingung stellten, etwa durch einen vorgegebenen Punkt (a, b) zu verlaufen? Dann gälte $b = f_t(a) = \frac{t}{2}a - \frac{t^2}{4}$ oder äquivalent $t^2 - 2at + 4b = 0$. Aber dies löst doch unser Problem! Falten wir den Punkt P auf l so, dass der Falz durch den (bereits vorgefalteten) Punkt $(a, b) = (\frac{p}{2}, \frac{q}{4})$ verläuft, dann landet P auf den Punkt $(t, -1)$ für ein t und t löst $x^2 - px + q = 0$, vgl. Abbildung 6(b).



(a) Die Geradengleichung des Falzes in Abhängigkeit von t.

(b) t löst die quadratische Gleichung $t^2 - pt + q = 0$.

Bild 6: Um die Gleichung $x^2 - px + q = 0$ zu lösen, falten wir $P(0, 1)$ so auf $l : y = -1$, dass der Falz f_t durch $(\frac{p}{2}, \frac{q}{4})$ geht. Falten wir anschließend die Senkrechte zur f_t durch P, dann schneidet sie l in $(t, -1)$ und t löst unsere Gleichung!

Fazit: Mit diesem Verfahren können wir allgemeine quadratische Gleichungen lösen und insbesondere quadratische Irrationalitäten falten!

Eine Version des Online-Begleitmaterials zum Lösen quadratischer Gleichungen mit 1-fach-Origami, vgl.[Ned18].

Begleitmaterial: $x^2 - 7x + 5 = 0$ mit Origami lösen

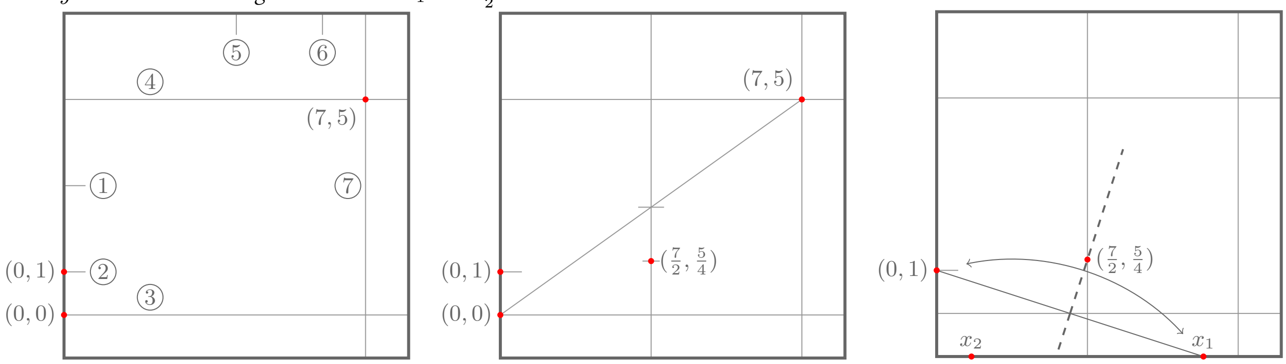
Wir wollen die zwei irrationalen Lösungen der Gleichung $x^2 - 7x + 5 = 0$ geometrisch mittels Papierfalten finden und auf dem Zahlenstrahl visualisieren.

Dazu benötigen wir ein quadratisches (nach Möglichkeit transparentes – etwa Back-)Papier der Größe ungefähr 20 cm x 20 cm. Wir stellen uns vor, dass das Quadrat ein Ausschnitt der Zeichenebene und wie folgt mit kartesischen Koordinaten versehen ist: Die linke untere Ecke des Quadrats habe die Koordinaten $(0, -1)$, die rechte obere Ecke die Koordinaten $(8, 7)$.

a) Zuerst falten wir Hilfspunkte und -geraden. Nach jedem Faltschritt falten wir das Papier wieder auf.
   (1) Falten Sie die untere Ecke der linken Kante auf die obere, so dass Sie den entstehenden Falz nur etwa 1 cm lang wie in Abbildung 7(a) anfalten.
   (2) Falten Sie die untere Ecke des Quadrats auf die gerade entstandene Markierung auf der linken Kante. Es entsteht der Punkt $(0, 1)$. Aus ästhetischen Gründen falten Sie auch hier den Falz nicht durch, sondern etwa 1 cm ins Quadratinnere.
   (3) Falten Sie $(0, -1)$ auf $(0, 1)$, dabei entsteht die x-Achse $y = 0$. Können Sie erklären, warum diese Faltung eindeutig ist?
   (4) Falten Sie die obere linke Ecke auf die Mitte der linken Kante. Dabei entsteht die Gerade $y = 5$.
   (5) Halbieren Sie nun die obere Kante des Quadrats der Länge nach. Falten Sie nicht durch.
   (6) Halbieren Sie die rechte Hälfte der oberen Kante. Falten Sie nicht durch.
   (7) Falten Sie die Mittelsenkrechte der Strecke $[(6, 7)(8, 7)]$.

b) Nun konstruieren wir den Punkt $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$, der uns die gewünschten Lösungen von $x^2 - 7x + 5 = 0$ liefern wird.
   (1) Falten Sie die linke Seite des Quadrats auf den senkrechten Falz, der durch $(7, 5)$ geht. Sie erhalten einen Falz mit Geradengleichung $x = \frac{7}{2}$, vgl. Abbildung 7(b).
   (2) Falten Sie die Verbindungsgerade von $(0, 0)$ und $(7, 5)$; es reicht den Schnittpunkt mit dem Falz aus dem vorigen Schritt zu falten.
   (3) Falten Sie nun den Punkt $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$, indem Sie den Punkt $(\frac{7}{2}, 0)$ auf den Punkt $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ bringen. Falten Sie nicht durch.

c) Nun zu den Lösungen. Falten Sie dazu den Punkt $(0, 1)$ auf die untere Kante $y = -1$ des Ausgangsquadrats , so dass der entstehende Falz durch $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$ geht. Es ist leichter (mit demselben Ergebnis), die untere Kante auf den Punkt $(0, 1)$ zu legen und diesen auf der Kante gleiten zu lassen, bis der Falz den gewünschten Punkt passiert. Beachten Sie, dass es zwei Möglichkeiten gibt, dies zu tun; beide sind in Abbildung 7(c) angedeutet. Falten Sie nun das Lot zum gerade entstandenen Falz, das durch $(0, 1)$ geht. Sein Schnittpunkt mit $y = -1$ ist dann der gesuchte Punkt $x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2}$.



(a) Gefaltete Hilfslinien. Eingekreiste Zahlen deuten die Reihenfolge der Faltung an.

(b) Alles vorbereitet zum Lösen!

(c) Falten von $(0, 1)$ auf die untere Kante, so dass der Falz durch $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$ verläuft, liefert genau die x-Koordinaten der Lösungen unserer Gleichung. Hier nur für den Fall $x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2}$ dargestellt.

Bild 7: Falten von Lösungen der Gleichung $x^2 - 7x + 5 = 0$ allein mittels Papierfalten.

Bemerkungen

a) Diese Faltanleitung ist deutlich leichter zu falten als zu lesen.

b) Um nicht zu oft »Halbieren Sie...« zu schreiben und Origami mit Geometrie zu verbinden, sind einigen Faltschritten Lote, Mittelsenkrechten etc. absichtlich beigemischt.

c) Sie können Zeit sparen, indem Sie das Falten reduzieren: Die Schritte aus a) können Sie weglassen und die nötigen Hilfspunkte und -linien auf einem karierten Blatt Papier einzeichnen.

d) Sie können Zeit sparen, indem Sie den allerletzten Schritt in c) weglassen und mit einem Stift die Stelle markieren, auf die $(0, 1)$ zu liegen kommt.

e) Diese Methode ist bereits in [Ols75] in ähnlicher Form enthalten.

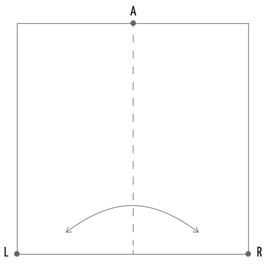
Eine Version des Online-Begleitmaterials zum Lösen quadratischer Gleichungen mit 1-fach-Origami, vgl.[Ned18].

A.3. Reguläres Fünfeck

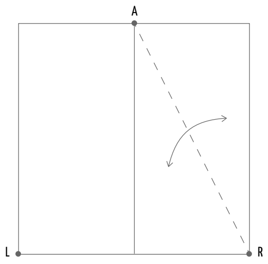
One-fold Origami Construction of Robert Geretschläger's Easy Pentagon

Dmitri Nedrenco

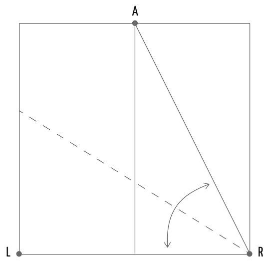
June 9, 2015



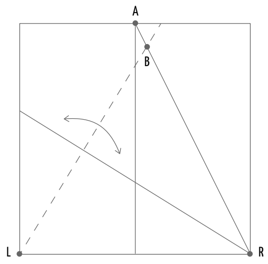
i Fold perpendicular bisector of the lower side LR of the square, thus creating the midpoint A of the upper side. *HJA2*



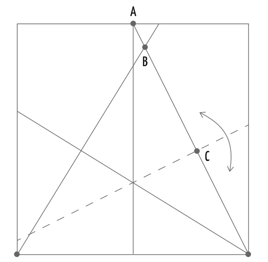
ii Fold the line AR. *HJA1*



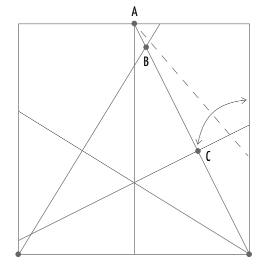
iii Fold AR on the LR, creating angle bisector of the two lines. *HJA3*



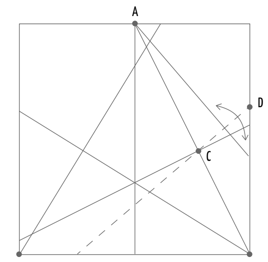
iv Fold the angle bisector from step **iii** onto itself through L, creating the point B. Note that $\overline{BR}$ has the length 1. *HJA4*



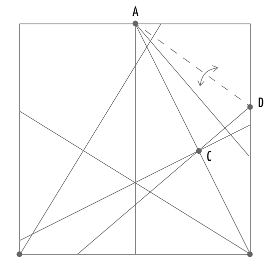
v Fold the perpendicular bisector of $\overline{BR}$, creating the midpoint C. The length of $\overline{AC}$ is $\bar{\phi}$, where ϕ is the golden ratio, so $2\bar{\phi} = \sqrt{5}-1$. *HJA2*



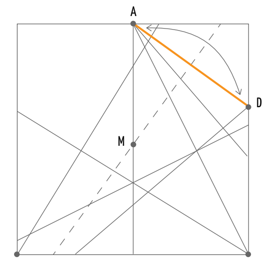
vi Fold C onto the right side of the square such that the fold line passes through the point A. We want to transport C on the right side of the square. *HJA5*



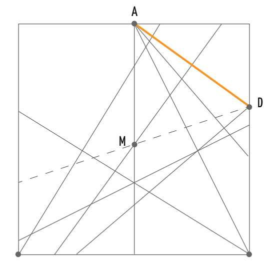
vii Fold now the line from the previous step onto itself through C. The point D is the intersection of the fold line and the right side of the square. *HJA4*



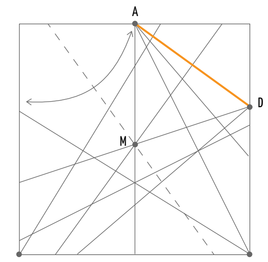
viii Fold AD. The length of $\overline{AD}$ is $\bar{\phi}$ as it should be for a side of a our pentagon. *HJA1*



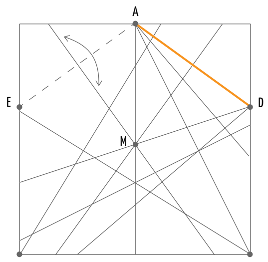
ix Fold the perpendicular bisector of $\overline{AD}$ creating the center M of the pentagon as this fold line and the line from step **i** are symmetry axes of the pentagon. *HJA1*



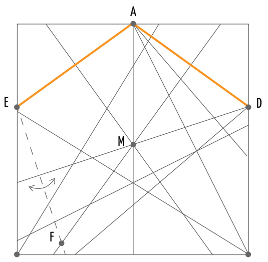
x Fold the line DM, it is a symmetry axes, too. *HJA2*



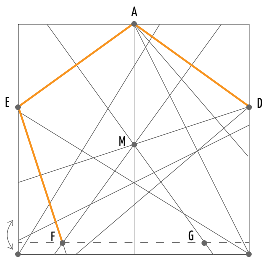
xi It is difficult to transport $\overline{AD}$ directly, so we use various symmetries to construct the other sides of the pentagon. Fold A onto the left side through M. *HJA5*



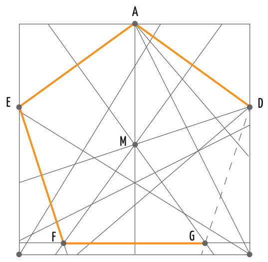
xii Fold the fold line from the previous step onto itself through A to produce E, i.e. the image point of A on the left side. By symmetry $\overline{AE}$ has the right lenght, $\bar{\phi}$. *HJA4*



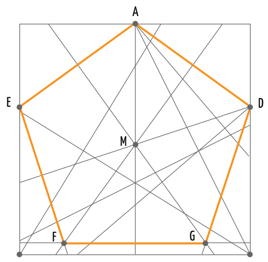
xiii Fold line DM onto itself through E to create F, the image point of E in the reflexion across DM. *HJA4*



xiv Fold left side onto itself through F producing G as intersection point of the fold line and one symmetry axes through M. *HJA4*



xv Join by folding the points D and G in order to get the fifth side of the regular pentagon. *HJA2*



xvi Now we have a regular pentagon $DAEFG$.

A.4. Vorlage für den Artikel [Ned18]

Irrationales falten

Dmitri Nedrenco

Lerngruppe ab 9. Klasse.

Idee Irrationale Zahlen durch Falten von Papier auf eine andere Weise erfahren.

Weiteres Material Anleitung zum Lösen quadratischer Gleichungen mittels Origami, Anleitung zum Falten von Lösungen von $x^2 - 7x + 5 = 0$.

1 Einleitung

Papierfalten fliegender Kraniche und bunter Lampions ist längst nicht nur eine Kindergartenbeschäftigung. Papierfalten ist zu einer beachtlichen mathematischen Theorie herangereift, an deren Weiterentwicklung intensiv geforscht wird, vgl. das ausgezeichnete Buch [Hul12]. Aus der didaktischen Perspektive ist das offensichtliche haptische Feedback der Mathematik beim Falten nicht zu übersehen und so setzen immer mehr Lehrerinnen und Lehrer mathematisches Papierfalten im Mathematikunterricht ein. Dabei können sie sich auf praxisnahe und mit Kopiervorlagen ausgestattete Faltbücher wie [SHH13] stützen. Auch »Der Mathematikunterricht« widmete bereits 2009 ein ganzes Heft dem Origami; das Heft 72 der »Praxis der Mathematik« beschäftigte sich 2016 ebenfalls mit diesem Thema. Das Interesse am Origami im Mathematikunterricht ist folglich vorhanden. Und obwohl noch nicht abschließend nachgewiesen, erscheint der Mehrwert des Papierfaltens *auf der Hand liegend*.

Origami (jap. *oru* – falten, *kami* – Papier) bzw. Papierfalten[1] hat nicht nur das Potenzial schöne selbst hergestellte Objekte wie Würfel oder Rhombendodekaeder ohne Computer zu visualisieren, anzufassen und auseinander zu nehmen – zu analysieren; nicht nur ermöglicht es eine etwas andere Perspektive auf bekannte Dinge (Falten einer Geraden auf eine andere, um eine Winkelhalbierende zu erhalten). Mit Papierfalten können wir die klassischen Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen[2] und insbesondere arithmetische Verhältnisse auf eine neue Weise erfahrbar machen. In diesem Artikel wollen wir uns mit der Frage beschäftigen: *Kann Origami helfen, irrationale Zahlen besser zu verstehen?* Diese Frage wird an konkreten Beispielen und Algorithmen diskutiert.

2 Wieder Zahlen falten

Wie können irrationale Zahlen durch Papierfalten dargestellt oder erzeugt werden?

Die Stärke des Papierfaltens, neue Zusammenhänge zu entdecken, greift bei irrationalen Zahlen nur wenig, da wir allein durch Falten nicht einsehen können, dass wir eine irrationale Zahl gefaltet haben, das muss theoretisch begründet werden. Im Vergleich dazu lässt sich bei manchen geometrischen oder arithmetischen Problemen gut *sehen*, ob etwa eine Strecke in drei Teile gefaltet wurde oder ob das Faltdreieck gleichseitig ist. Aus dem Grund wollen wir uns hier damit beschäftigen, gewisse irrationale Zahlen auf dem Zahlenstrahl zu visualisieren. Papierfalten ist nicht gut dazu geeignet, irrationale Zahlen kennenzulernen. Sind sie jedoch bereits bekannt, so

[1] Eine mögliche Definition des mathematischen Papierfaltens finden Sie in [Ned17].

[2] Jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist auch mit Papierfalten exakt durchführbar, vgl. [Ger08].

könnte eine Beschäftigung mit irrationalen Zahlen via Origami auf den enaktiven und symbolischen Ebenen das Verständnis vertiefen und eine Konstruktionsmöglichkeit dieser Zahlen bieten. Doch bevor wir uns mit Falten von irrationalen Zahlen beschäftigen, reden wir kurz über rationale Zahlen[3].

Wir können durch Falten von Papier beliebige Strecken halbieren, vierteln etc. – sowohl praktisch recht genau als auch mathematisch exakt! Denken wir an Streckendrittelung, so werden wir etwa mittels einer Brieffaltung wie in Abbildung 1, recht schnell gute *Näherungen* an ein Drittel falten – doch können Sie eine *Konstruktion* von $\frac{1}{3}$ angeben? Das geht und könnte eine interessante Diskussion im Unterricht anfeuern: Was ist der Unterschied zwischen »augenmaßgenau« und »mathematisch genau«, der auch für irrationale Zahlen von Bedeutung ist: der Unterschied zwischen 3,14 und π, beispielsweise, zwischen Approximationen und Grenzwerten.

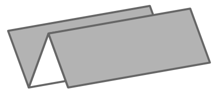


Bild 1: Eine Brieffaltung

Kommen wir nun nach Halbieren und Dritteln zu allgemeinen Stammbrüchen. Wir wollen sehen, wie man induktiv aus $\frac{1}{n-1}$ die Zahl $\frac{1}{n}$ exakt faltet[4]: Nehmen Sie dazu ein quadratisches Blatt mit der Seitenlänge 1 und falten Sie die Diagonale $[OA]$ wie in Abbildung 2. Haben Sie davor $[OB]$ der Länge $\frac{1}{n-1}$ gefaltet, so falten Sie nun $[BC]$. Wenn Sie $[OC]$ auf sich falten, so dass der Falz bzw. das Lot durch den Schnittpunkt von $[BC]$ und $[OA]$ geht, dann bekommen Sie $\overline{OD} = \frac{1}{n}$. Warum ist das so? Hier sehen wir, dass Falten zweier Strecken im Quadrat, rasch Geometrie mit linearen Funktionen verbindet. Denken Sie an OA als $y = x$ und BC als $y = \frac{1}{n-1}(1-x)$, wobei $\overline{AC} = 1$ sei, dann können Sie sofort nachrechnen, dass die x-Koordinate von D exakt $\frac{1}{n}$ ist.

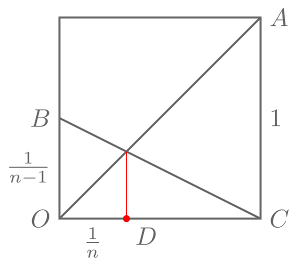


Bild 2: Induktive Faltkonstruktion von Stammbrüchen.

Verallgemeinern wir das Verfahren dahingehend, dass $\overline{AC} = a$, $\overline{OB} = b$ und $\overline{OC} = 1$ ist, so wird $\overline{OD} = b/(a+b)$ betragen und die Faltbarkeit aller rationaler Zahlen liefern. Zugegebenermaßen werden Sie nur selten $\frac{17}{33}$ praktisch falten müssen, doch ist die theoretische Faltbarkeit hiervon im *Mathematik*unterricht durchaus interessant und erwähnenswert.

3 Irrationale Zahlen falten

Wenn wir über irrationale Zahlen im Mathematikunterricht sprechen, welche Zahlen meinen wir dann überhaupt? Sicherlich ist die allgemeine Fassung der überabzählbaren Menge dieser Zahlen in der Schule wenig sinnvoll. Welche irrationalen Zahlen sind hier also relevant? Welcher davon kann sich Origami annehmen? Tatsächlich ist das Falten irrationaler Zahlen weder in der Mathematik noch in der Mathematikdidaktik neu, darüber schrieb etwa M. Schmitz in [Sch09] und [Sch14]. Doch gehen wir die Zahlen der Reihe nach durch:

3.1 Die Wurzel aus 2

$\sqrt{2}$ steht häufig am Anfang der Beschäftigung mit irrationalen Zahlen in der Schule. Wir können sie gut darstellen, etwa als Diagonale im Einheitsquadrat oder als das Seitenverhältnis im Ostwaldschen Rechteck (DIN-A-Format). Ihre Irrationalität wurde in der Didaktik etwa in [Fro09] und [Sch09] behandelt.

Allerdings eignet sich das Falten von DIN-A-Papieren zur Visualisierung irrationaler Zahlen nur bedingt, da dort $\sqrt{2}$ per Design bereits vorliegt und man seitens der Lernenden eine gewisse Unzufriedenheit verspüren kann. Weitaus besser scheint das Falten dieser Zahl aus anderen Formaten, wie etwa einem Quadrat, wie es in [Sch09]

[3]Wir denken dabei an einen Musiklehrer, der seinen Schüler in der ersten Musikstunde nicht auffordern wird, etwas aus Chopin vorzuspielen, sondern mit der Tonleiter anfängt.

[4]Mehr dazu und anderen Konstruktionen rationaler Zahlen finden Sie unter http://langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf.

zu finden ist. So erkennen Lernende diese Zahl nicht nur in Beziehung zu anderen Zahlen, sondern erstellen diese Beziehung eigenhändig.

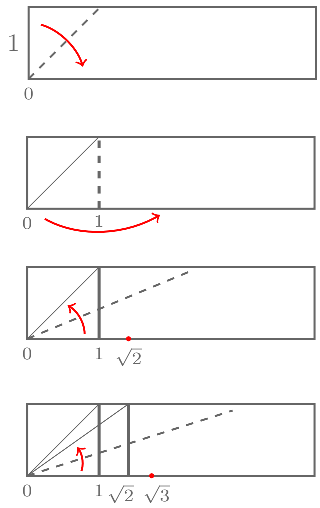
3.2 Mitternachtszahlen

Zahlen der Form $\sqrt{q}$ sowie $\pm p \pm \sqrt{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sind die häufigsten Vertreter irrationaler Zahlen in der Schule. Die irrationalen Zahlen unter diesen nennen wir *quadratische Irrationalitäten*: Sie sind das Fundament der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (der »Mitternachtsformel«), ihre Irrationalität ist immer noch leicht nachzuweisen, ihre Faltung gut durchzuführen, s. Begleitmaterial. Wir werden daher hauptsächlich mit diesen Zahlen und ihrer Faltung beschäftigt sein. Allerdings wurde auch dazu schon viel gemacht, vgl. [Hul12], [Pie15]. Insbesondere der goldene Schnitt φ wurde an vielen Stellen mittels Origami behandelt, etwa auch in [SHH13] und [Sch14].

3.3 Faltsequenz von $\sqrt{n}$

Hier wollen wir Wurzelzahlen $\sqrt{n}$ konkret falten. Nehmen Sie dazu einen Papierstreifen, etwa einen Ausschnitt eines DIN-A4-Blattes: 5 cm x 21 cm. Wir wollen nun Zahlen $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ etc. auf der unteren Seite des Streifens durch Falten konstruieren, um damit die Lage dieser Zahlen auf dem Zahlenstrahl und in Beziehung zu natürlichen Zahlen zu sehen und ggf. besser zu verstehen.

Für die Sequenz sind folgende Faltkompetenzen erforderlich: Lote, Winkelhalbierende und Verbindungsgeraden falten, das heißt: Eine Gerade so auf sich selbst falten, dass der Falz durch einen vorgegebenen Punkt verläuft; eine Gerade auf eine andere Gerade falten; den eindeutigen Falz falten, auf dem zwei vorgegebene Punkte zu liegen kommen. Außerdem wird stillschweigend der Satz des Pythagoras benutzt.



Legen Sie in Gedanken die x-Achse des kartesischen Koordinatensystems auf die untere Seite des Rechtecks mit der Null in der linken unteren Ecke und lassen Sie die linke Kante des Rechtecks 1 Einheit lang sein. Falten Sie nun die linke obere Ecke[5] des Streifens auf die untere Kante, so dass der Falz durch den Ursprung geht – Sie bekommen eine Winkelhalbierende der Länge $\sqrt{2}$. Falten Sie nach jedem Faltschritt das Papier auf.

Falten Sie das Lot zur unteren Seite, das durch $(1, 1)$ geht, falten wieder auf und markieren den gerade entstandenen Falz mit einem Stift. Legen Sie die x-Achse auf die $\sqrt{2}$-Strecke, jedoch falten Sie nicht durch; markieren Sie lediglich die Stelle auf der x-Achse, die mit dem Punkt $(1, 1)$ zusammenfällt und falten auf. Falten Sie das Lot zur x-Achse durch den gerade entstandenen Punkt und markieren diesen Falz ebenfalls. Wir haben die Punkte $(\sqrt{1}, 0)$ und $(\sqrt{2}, 0)$ bereits konstruiert.

Nun beginnt die eigentliche Iteration. Falten Sie zuerst die Verbindungsgerade von $(\sqrt{2}, 1)$ und dem Ursprung. Legen Sie dann die untere Kante des Streifens auf diesen Falz und verfahren analog zur Konstruktion des Punktes $(\sqrt{2}, 0)$, um den Punkt $(\sqrt{3}, 0)$ zu erhalten. Falten Sie in diesem Sinne fort bis wenigstens $(\sqrt{7}, 0)$, vgl. Abbildung 3.

Bemerkungen zur Sequenz

a) Diese Faltsequenz braucht eine gewisse Übung; trainieren Sie das Falten von Verbindungsgerade, Lote und Winkelhalbierenden vorher. Verbindungsgeraden zu falten ist meistens am schwersten.

[5] Um Anschauung, Konzentration und Iterationsverständnis zu fördern, werden absichtlich keine Buchstaben in den Abbildungen eingeführt, auch wenn dadurch die Beschreibung der Faltschritte weniger kompakt wird, vgl. die Ausführungen zu Abbildung 2.

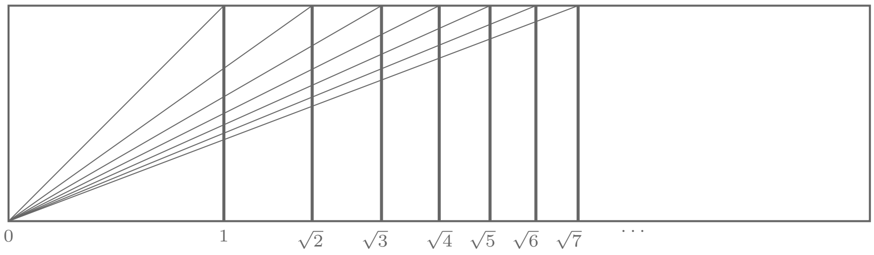


Bild 3: Faltkonstruktion der Wurzelzahlen $\sqrt{n}$.

b) Diese Faltsequenz ist gewissermaßen fehlererkennend: Sobald bei $(\sqrt{4}, 0)$ angekommen, können Sie leicht überprüfen, ob Fehler gemacht wurden, indem Sie die linke Kante des Papiers am vorhandenen Falz $x = 1$ falten. Kommt diese dabei auf den Falz mit der Geradengleichung $x = 2$ zu liegen, falten Sie sehr genau. Analoges kann bei $(\sqrt{9}, 0)$ etc. geschehen.

c) Diese Faltsequenz können Sie natürlich auch bei $(\sqrt{k}, 0)$ für eine Quadratzahl k beginnen lassen, indem Sie zuvor k Einheiten auf der x-Achse abtragen.

d) Diese Faltsequenz zeigt deutlich, dass die Wurzelfunktion monoton abnimmt.

e) Diese Faltsequenz können Sie im fortgeschrittenen Unterricht dazu nutzen, eine Zahl anzudeuten, von der wir nicht wissen, ob Sie rational oder irrational ist. Falten Sie dazu den Streifen nach links am Falz $x = 1$, dann die obere Schicht nach rechts am Falz $x = \sqrt{2}$ und so weiter im Zigzag-Modus wie in Abbildung 4. Da die Abstände zwischen $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k+1}$ mit wachsendem k immer kleiner werden, wird der Grenzwert dieser Faltung im Intervall $(0, 1)$ liegen. Nach einigem Nachdenken erkennt man, dass dieser die »unendliche Summe« der Zahlen $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ sein wird und mithilfe der Riemannschen-ζ-Funktion beschrieben werden kann.

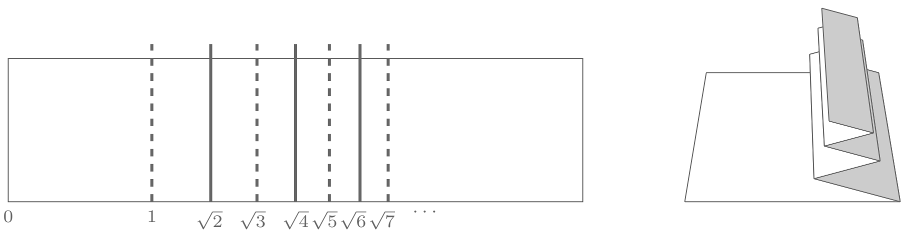


Bild 4: Links: Das Faltmuster, gestrichelte Falze sind Täler, durchgezogene Berge. Rechts: das leicht aufgefaltete perspektivische Ergebnis (abgeschnitten ab $\sqrt{5}$) der Faltung.

3.4 Höhere Wurzelausdrücke

Die »delische« Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist im Mathematikunterricht durchaus interessant, ihre Irrationalität kann auch in der Schule nachgewiesen werden, doch ein systematischer Zugang zu solchen kubischen Irrationalitäten ist im folgenden Sinne nicht möglich: Weder ihre Nicht-Konstruierbarkeit mittels euklidischer Instrumente noch allgemeine Lösungsformeln kubischer Gleichungen sind in der Regel Bestandteil des Mathematikunterrichts. Und obwohl Lösungen allgemeiner kubischer und quartischer Gleichungen exakt faltbar sind, vgl. [Pie15], [Ger08] ist es mehr als fraglich, ob diese Faltungen tatsächlich im Unterricht sinnvoll sind. Dafür gibt es zwei Gründe. Erstens: Lösen von kubischen Gleichungen mittels Falten ist erst dann sinnvoll, wenn man routiniert lineare und quadratische Gleichungen mithilfe Origami lösen kann (nicht anders als mit anderen Konstruktionsinstrumenten). Zweitens:

Oft sind solche Faltungen nicht ganz einfach und erfordern eine gewisse Erfahrung mit Origami. Ferner wären solche Faltungen nicht ausreichend, um erwarten zu dürfen, dass die Gleichungen und ihre Lösungen allein des Faltens wegen besser verstanden werden.

3.5 Kreis- und Eulerzahl

Die Kreiszahl lässt sich weder mit euklidischen noch verwandten Instrumenten konstruieren. Auch Origami muss hier größtenteils passen. Es gibt eine interessante »Konstruktion« von π des Origamimathematikers T. Hull[6], aber natürlich kann das keine Konstruktion im üblichen Sinne sein. Wir glauben, dass sie trotzdem eine wichtige Diskussion im Unterricht liefern könnte: Was sind und was sollen Konstruktionen? Zu begreifen, wodurch sich eine Näherungskonstruktion von einer axiomatischen Konstruktion unterscheidet, ist aus unserer Überzeugung eine wesentliche Kompetenz in der Geometrie der Oberstufe, siehe aber auch »pures Origami«. Dazu ein Beispiel: Wollen Sie eine Kante eines Papierstücks in drei gleiche Teile teilen, so könnten Sie sie mittels der sog. Brief- bzw. N-Faltung falten. Sie bekommen eine sehr gute Genauigkeit, die für die meisten praktischen Anwendungen völlig ausreicht. Probieren Sie es aus, in der 8. oder 9. Klasse die Frage auszudiskutieren, ob diese Faltung eine Konstruktion ist und wenn ja, warum nicht. Aus unserer Erfahrung sorgt diese Frage immer für spannende Diskussionen!

Die Eulersche Zahl e trifft man in der Analysis der Kollegstufe. Uns ist jedoch nicht bekannt, ob einfache und interessante Faltungen dieser Zahl existieren. Hier kommt vermutlich erschwerend dazu, dass e und π sogar transzendent sind. Allerdings ist diese Eigenschaft völlig außerhalb des Fokus der Schularithmetik.

Pures Origami Immer wieder ist zu hören, dass beim Origami (im Gegensatz zum Basteln) nicht geklebt, nicht geschnitten werden darf. So spricht man von *purem Origami.* In der Mathematik des Papierfaltens kann man pures Origami u. a. so verstehen:

- Falten von Objekten (sowohl dreidimensional wie Polyeder als auch zweidimensional wie Dreiecke, Strecken, Punkte) mittels eines einzigen Papiers quadratischer Form ohne Zuhilfenahme weiterer Werkzeuge; wobei Falze Strecken sein sollen.
- Konstruieren von Punkten und Geraden in der Ebene ausgehend von wenigen ausgezeichneten Punkten und Geraden unter Verwendung klar definierter Faltbewegungen (wie Falten einer Geraden auf eine andere). Der bekannteste Spezialfall dieser Theorie ist das sog. 1-fach-Origami.

Beide Sichtweisen erinnern an einen axiomatischen Zugang und erfordern gewisse Erfahrung und Zeit. Pures Origami eignet sich gut für einen längeren Kurs, der sich nur mit Papierfalten beschäftigt. Im Schulunterricht sehen wir keine Notwendigkeit einer solchen puristischen Sichtweise. Im Hochschulunterricht kann das jedoch durchaus sinnvoll sein, vgl. [Ned17].

4 Praktische Tipps

Unterrichtssequenzen mit Papierfalten werden in der Regel von Schülerinnen und Schülern sehr gut angenommen, doch gleichzeitig sind sie nicht leicht zu planen und durchzuführen. Drei typische Probleme sind zu nennen: Die ausgewählte Faltung ist schwer zu falten (Kranich, Würfel, Winkeldreiteilung); die ausgewählte Faltung ist mathematisch zu anspruchsvoll (Winkeldreiteilung); die ausgewählte Faltung ist aus der Schülerperspektive unverständlich (exakte Konstruktion von $\frac{1}{3}$ in der 7.–9. Klasse.). Folgende Tipps könnten hilfreich sein:

a) Wie bei einem guten Kartentrick gilt: Führen Sie eine Faltübung/-aufgabe erst vor, wenn Sie sie selbst sicher beherrschen; so können Sie schnell und souverän Tipps und Hilfestellung zum Falten geben. Führen Sie einzelne Faltschritte mehrmals vor.

b) Führen Sie der Klasse eine Faltung vor, benutzen Sie vorzugsweise die Tafelebene (und große Papiere) zum Falten; falten Sie nur dann in der Luft, wenn Sie die Faltung absolut sicher beherrschen. Eine Dokumentenkamera ist eine mögliche Alternative.

[6] http://mars.wne.edu/ thull/papers/constpi.pdf.

c) Führen Sie anfangs keine technisch und/oder mathematisch zu langen bzw. zu anspruchsvollen Konstruktionen vor. Drittelung einer Strecke, Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks sind spannende und angemessen fordernde Beispiele; Falten von $\sqrt[3]{2}$ ist zu Beginn der Beschäftigung mit mathematischem Papierfalten nicht gut geeignet, da es der schwierigen – nicht euklidischen – Operation des Faltens zweier Punkte auf zwei Gerade bedarf.

Tolle Faltanleitungen für Schulmathematik, ihre Begründung und Weiterführung finden Sie in [Hul12] und [Ols75]. Deutsche Kopiervorlagen finden Sie etwa in [SHH13].

5 Fazit

Wir haben gelernt, dass irrationale Zahlen im Mathematikunterricht via Origami durchaus behandelt werden können, vor allem zum Vertiefen des Verständnisses. Dazu falteten wir quadratische Irrationalitäten und lösten quadratische Gleichungen mittels Papierfalten.

Insgesamt lässt sich sagen, dass mathematisches Papierfalten ein mächtiges und faszinierendes Werkzeug ist, welches verschiedentlich im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann, jedoch eine gewisse Erfahrung und sorgfältige Vorbereitung benötigt.

Literatur

[Fro09] Daniel Frohn. Die Wurzel aus 2. In *mathematik lehren*, pages 20–24,45, 2009.

[Ger08] Robert Geretschläger. *Geometric Origami.* Arbelos, 2008.

[Hul12] Thomas Hull. *Project origami: activities for exploring mathematics.* CRC Press, 2012.

[Ned17] Dmitri Nedrenco. Gestaltung und Durchführung eines Universitätskurses »Axiomatisieren lernen mit 1-fach-Origami« für gymnasiales Lehramt. In Michael Schmitz, editor, *Papierfalten im Mathematikunterricht.* Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2017.

[Ols75] Alton T. Olson. *Mathematics Through Paper Folding.* National Council of Teachers of Mathematics, 1975.

[Pie15] Manfred Pietsch. Einfach schön, mit einer Faltung zur Lösung kubischer Gleichungen. In *mathematik lehren*, pages 32–37, 2015.

[Sch09] Michael Schmitz. Quadrate . In *Der MU*, number 6, pages 25–28, 2009.

[Sch14] Michael Schmitz. Zahlen falten. In *PM*, pages 21–30, 2014.

[SHH13] Reinhard Schmitt-Hartmann and Wilfried Herget. *Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12.* Klett, 2013.

Dmitri Nedrenco
Emil-Fischer-Straße 30
97074 Würzburg
dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de

A.5. Übungblatt zum Lösen kubischer Gleichungen

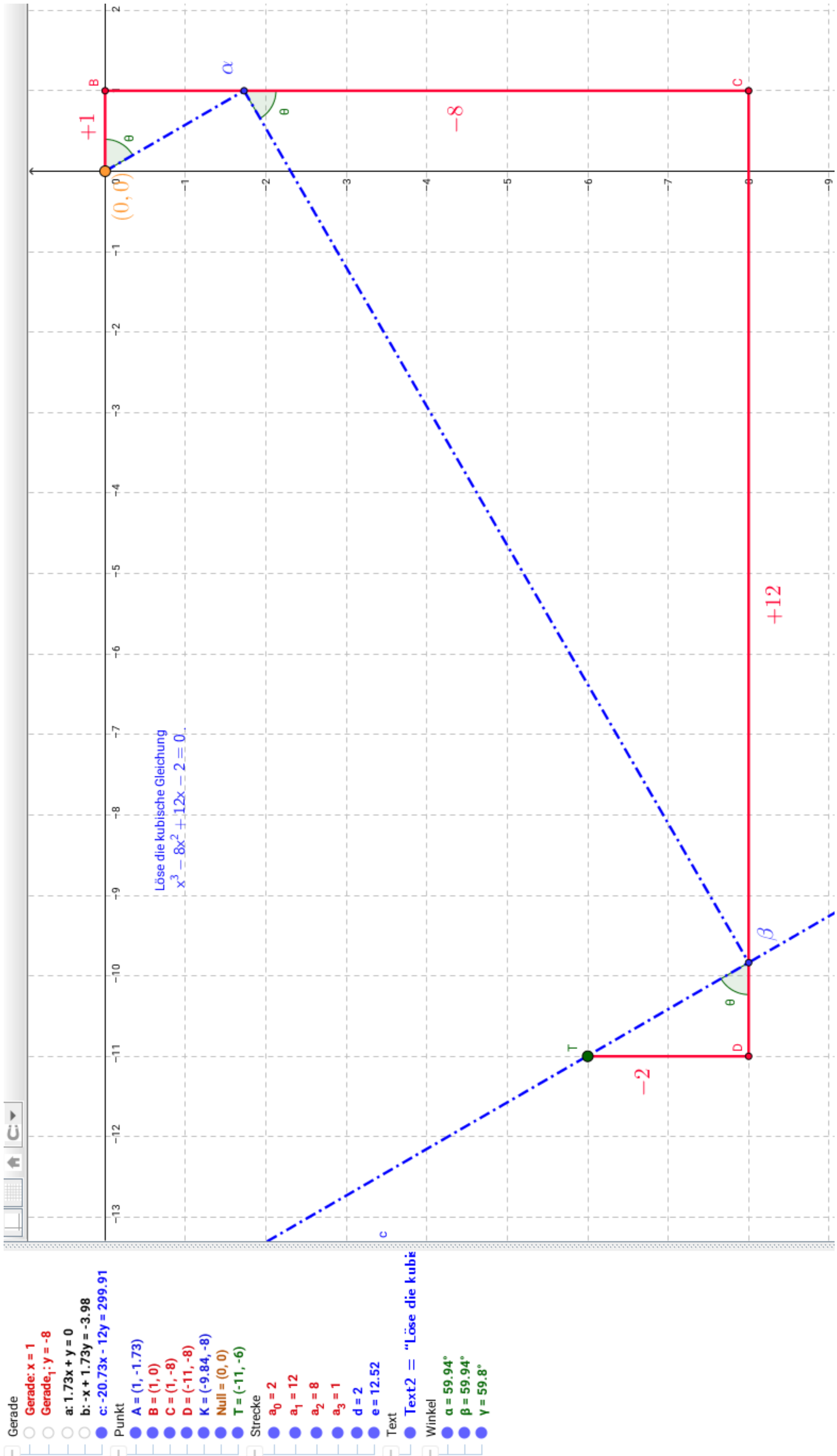
Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2016/17
8. Übungsblatt

Aufgabe 1 Betrachte die Datei lill.ggb, bewege den Punkt α so, dass die Gerade c den Punkt T passiert. Nutze dann die Ähnlichkeit der Dreiecke (beachte die Winkel θ), um zu zeigen, dass $x = -\tan\theta$ die Gleichung $x^3 - 8x^2 + 12x - 2 = 0$ löst. Analog beweist man die Behauptung für allgemeine Polynome.
(Hier `https://www.geogebra.org/apps/` kann lill.ggb geöffnet werden.)
Hinweis: Finde einen Zusammenhang zwischen $\tan\theta$ *und den Längen der Strecken, die die Koeffizienten des Polynoms repräsentieren.*

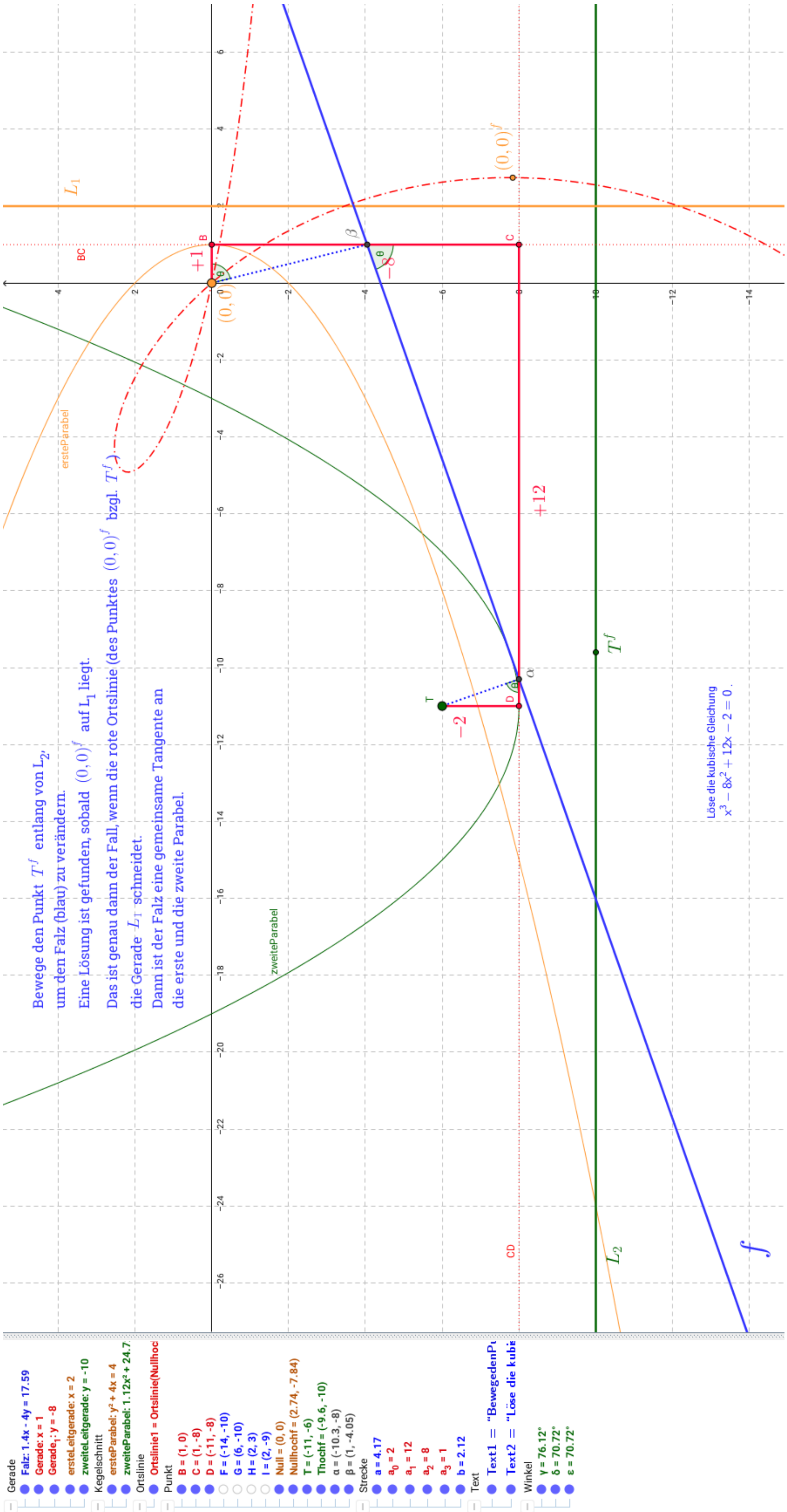
Aufgabe 2 Betrachte die Lill-Beloch-Konstruktion in der Datei lill-beloch.ggb und versuche sie nachzuvollziehen. Bewege dazu den Punkt T^f auf L_2 und betrachte die Punkte α, β sowie $(0,0)^f$. Erkläre, warum diese Konstruktion »stimmt«, das heißt erkläre warum L_1 und L_2 so gewählt werden und warum (im Fall $(0,0)^f$ liegt auf L_1) die Lote auf f durch α bzw. β genau T bzw. $(0,0)$ treffen. Mit der Aufgabe 1 können wir somit kubische Gleichungen lösen.

Aufgabe 3 Denke an ein kubisches Polynom. Bewege in der Datei lill-beloch.ggb die Punkte B, C, D, T so, dass der entstehende Streckenzug $(0,0)BCDT$ dein Polynom repräsentiert. Passe ggf. die Geraden L_1 und L_2 an. Finde nun mit dem Verfahren von Lill-Beloch eine reelle Nullstelle (falls eine solche existiert!) von deinem Polynom. Überprüfe das Ergebnis numerisch oder analytisch.

A.6. Ein Screenshot aus lill.ggb, vgl. Anhang A.5



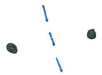
A.7. Ein Screenshot aus lill-beloch.ggb, vgl. Anhang A.5

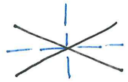


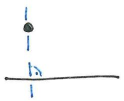
A.8. 1-fache-Übersicht, seit ^{16}Kurs

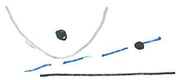
Eine 1-fache Übersicht

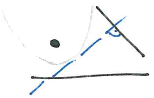
Axiome

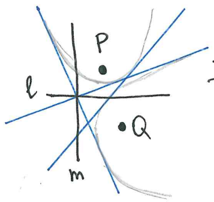








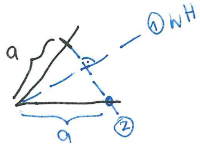


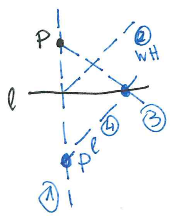


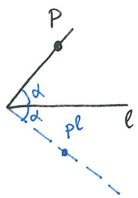
Ist $P=(0,1)$, $l: y=-\frac{1}{2}$
$Q=(\frac{q}{2},\frac{p}{2})$, $m: x=-\frac{q}{2}$

Falten von P auf l und Q auf l
liefert simultane Tangenten an $p(P,l)$ und $p(Q,l)$,
deren Steigung $x^3+px+q=0$ löst.

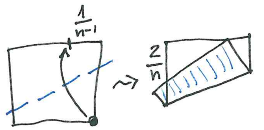
Korollare

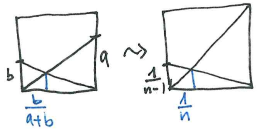


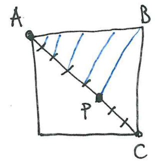




Lineare Gleichungen







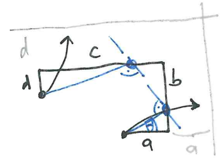
Euklidische Methode

Sei $2^{k-1} < n \le 2^k$

$A=P_1,\dots,P_n=P$, $P_i := \frac{i}{2^k}$

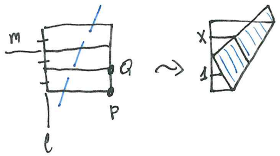
① Teile [AC] in 2^k gleiche Strecken
② Konstruiere [PB] und Parallelen durch P_i
③ [AB] ist n-geteilt

Kubische Gleichungen



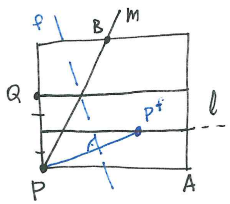
Satz von Lill

$x=-\tan\theta$ löst
$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$



Delisches Problem

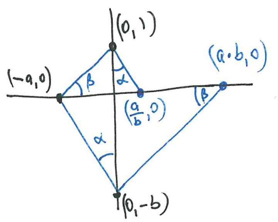
$x=\sqrt[3]{2}$



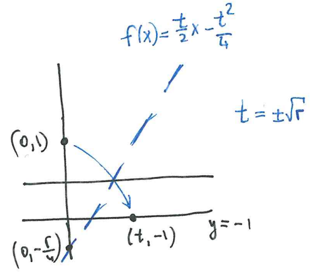
Winkeldreiteilung

$\sphericalangle APB = 3\cdot\sphericalangle APP'$

Grundrechenarten



Quadratische Gleichungen



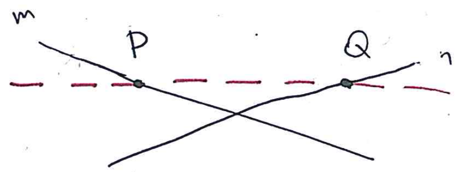
Regelmäßige n-Ecke

Ein regelmäßiges n-Eck ist genau dann mit 1-fach-Origami konstruierbar, wenn $n=2^k\cdot 3^l\cdot p_1\cdots p_r$, $k,l,r\in\mathbb{N}$ wobei $p_i=2^s3^t+1$, $s,t\in\mathbb{N}_0$ verschiedene Pierpont-Primzahlen sind.

A.9. Dominanz der Beloch-Faltung (generisch), seit [17]Kurs

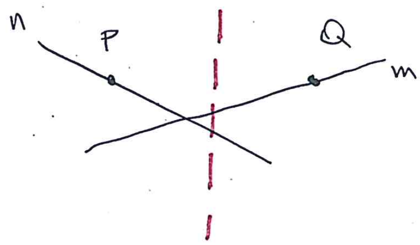
Simultane Tangenten $\quad$ $P^f \in m \wedge Q^f \in n$

VG



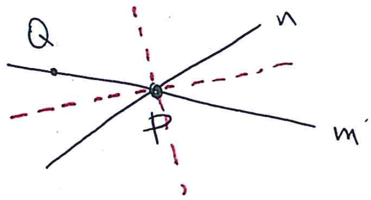
$P \in m,\ Q \in n,\ m \nparallel n,\ P \neq Q$

MS

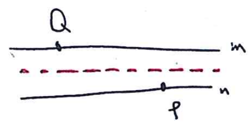


$P \notin m,\ Q \notin n,\ P \neq Q,\ m \neq n,$
$P \in n,\ Q \in m$
↪ Eine Lösungen ist MS

WH

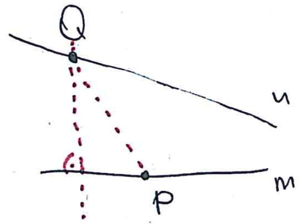


$P \in m \wedge n,\ Q \in n,\ m \neq n,$
$P \neq Q$



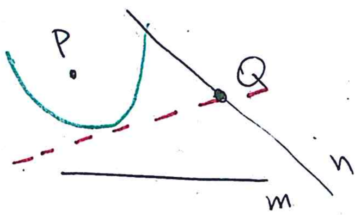
$P \in n,\ Q \in m,\ P \neq Q,\ m \neq n,$
$m \parallel n$

Lot
(Q auf m)



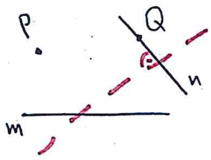
$P \in m,\ Q \in n,\ m \nparallel n,\ P \neq Q$
(eine der Lösungen ist Lot)

Tangente



$P \notin m,\ Q \in n$

J7



$P \notin m,\ Q \in n$

A.10. Axiome der euklidischen Ebene

Ein Axiomensystem der ebenen euklidischen Geometrie.[⋆]

Undefinierte Terme: Menge der Punkte $\mathscr{P}$, Menge der Geraden $\mathscr{L}$, Abstand $\mathbb{d}$, Winkelmaß $\mathbb{m}$.
Definitionen: Dazwischenheit, Strecke, Strahl, Dreieck, Winkel.
Implizite Voraussetzung Logik, Mengenlehre, Abbildung.

I) Inzidenzaxiome

a) Ein Element aus $\mathscr{L}$ ist eine Teilmenge von $\mathscr{P}$.

b) Sind P und Q zwei verschiedene Elemente aus $\mathscr{P}$, dann gibt es ein eindeutiges Element aus $\mathscr{L}$, das P und Q enthält.

c) Es gibt drei nicht kollineare Punkte in $\mathscr{P}$. (Es gibt drei Elemente aus $\mathscr{P}$, die nicht gleichzeitig Elemente eines Elements aus $\mathscr{L}$ sind.)

II) Linealaxiom

Es gibt eine Abbildung $\mathbb{d} : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{d}(P, Q) := \overline{PQ}$, so dass für jede Gerade $l \in \mathscr{L}$ eine Bijektion $f : l \to \mathbb{R}$ existiert mit $\overline{PQ} = |f(Q) - f(P)|$, das heißt wir können Abstände zwischen Punkten definieren und messen.

III) Paschaxiom

Schneidet eine Gerade aus $\mathscr{L}$ ein Dreieck nicht in einer seiner Ecken, dann schneidet sie zwei Seiten des Dreiecks.

IV) Winkelmaßaxiom

Das Winkelmaß $\mathbb{m}$ ist eine Abbildung von der Menge aller Winkel nach $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$ mit der Eigenschaft:

a) Ist $\overrightarrow{VA}$ ein Strahl, dann gibt es für jede Zahl $0 < r < \pi$ genau zwei Möglichkeiten für einen Strahl $\overrightarrow{VP}$ für einen Punkt P, so dass $\mathbb{m}(\angle AVP) = r$ ist.

b) Liegt ein Punkt B im Inneren des Winkels $\angle AVC$, dann gilt $\mathbb{m}(\angle AVB) + \mathbb{m}(\angle BVC) = \mathbb{m}(\angle AVC)$.

V) SWS

VI) Parallelenaxiom(e)

Es existiert ein Rechteck. *Oder:* Zu jeder Geraden und jedem Punkt nicht darauf, gibt es eine Parallele zu der Geraden durch diesen Punkt.

Diese Axiome haben (bis auf Äquivalenz) als einziges Modell $\left(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$*, siehe Chapter 25.*

[⋆] Nach George E. Martin *The Foundations of Geometry and Non-Euclidean plane*, Springer, 1998.

A.11. Axiome: ausgewählte Hausaufaben

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2018/19
10. Übungsblatt

Aufgabe 1 Angenommen, wir studieren eine Theorie (etwa die euklidische Geometrie oder Arithmetik oder Vektorraumtheorie) und wollen sie axiomatisch aufbauen, das heißt alle Aussagen der Theorie sollen (mithilfe der Logik) aus den Axiomen gefolgert werden können. Warum nehmen wir nicht einfach *alle* Aussagen in dieser Theorie als Axiome an? Welche Folgerung kann man daraus ziehen in Hinblick auf die Eigenschaften eines Axiomensystems?

Aufgabe 2 Finde eine für dich befriedigende Definition eines Axioms und erläutere deine Wahl.

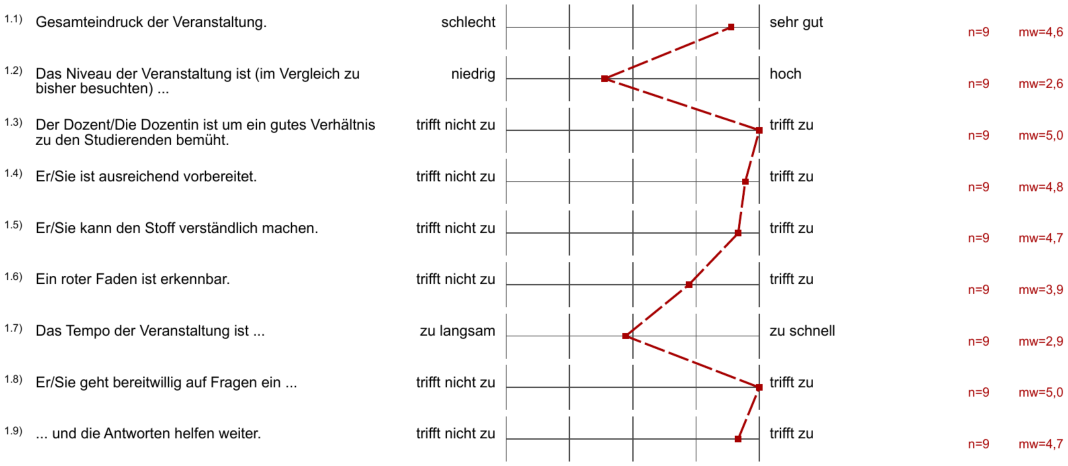
Aufgabe 3 Würdest du zwischen Axiomen und Definitionen einen Unterschied sehen? Wenn ja, worin? Wenn nein, wozu gibt es dann zwei *verschiedene* Wörter?

Aufgabe 4 Stelle dir vor, du stehst vor einer Klasse und beginnst mit dem Geometrieunterricht. Wo fängst du an? Wie definierst du zum Beispiel, was ein Punkt und was eine Gerade ist? (Man sollte diese Frage nicht zu schnell beantworten.) Wie definierst du Dreiecke? Winkel? Überhaupt irgendwas »Geometrisches«?

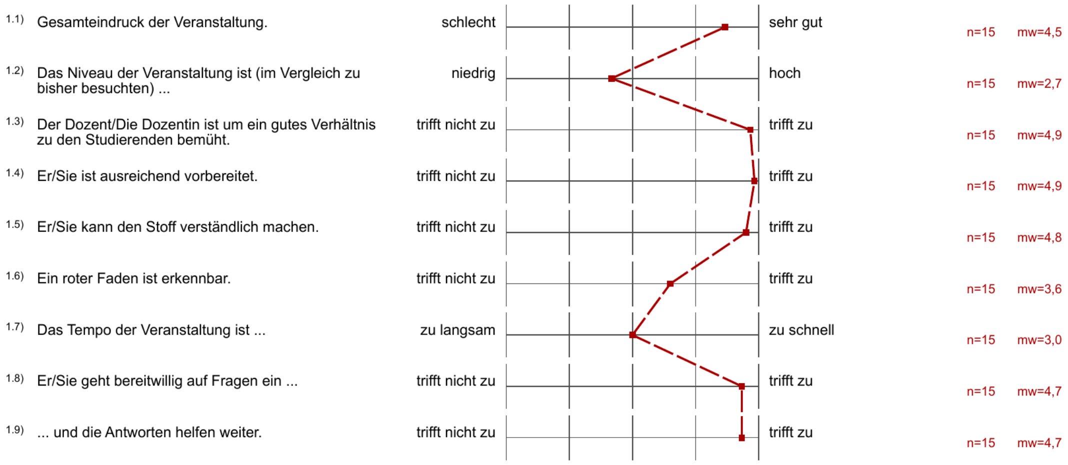
*Abgabe bis Montag, 4. Februar, 10 Uhr in **WueCampus**.*

A.12. Auswertung der Kursumfragen

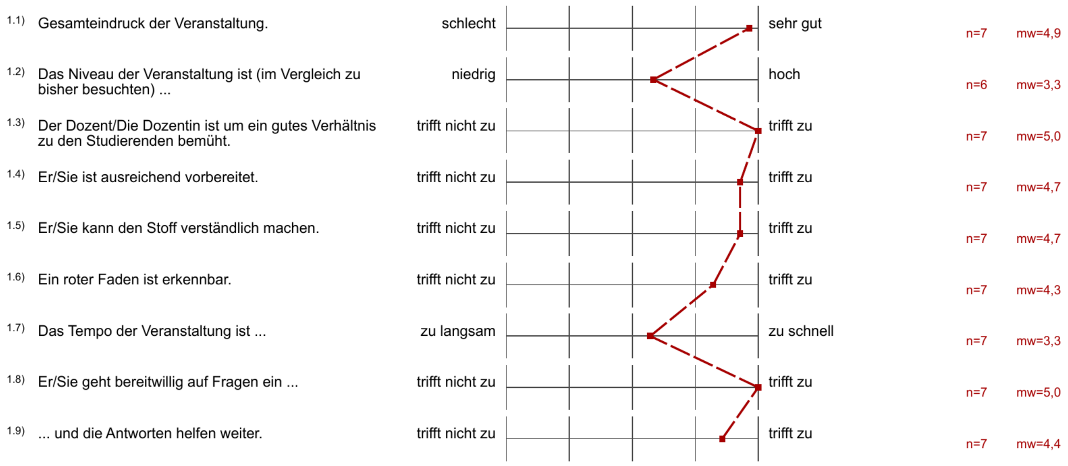
[15]Kurs



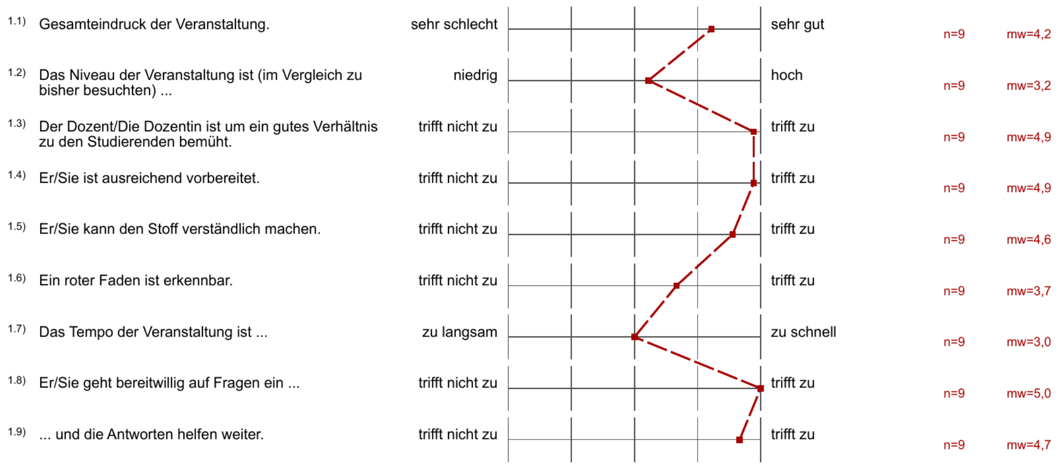
[16]Kurs



[17]Kurs



[19]Kurs



B.1. Pretest, Sommer 2015

Passwort:

Axiomatisieren mit Papierfalten
Sommersemester 2015
Pre-Test

Beantworten Sie bitte folgende Fragen; Ihre Antworten sind anonym. Bitte tragen Sie oben links ein Passwort ein, welches Sie möglichst bis Ende des Semesters nicht vergessen. Bei der Beantwortung der Fragen dürfen Sie sich gerne vollständiger Sätze, Stichpunkte sowie Skizzen bedienen.

Frage 1 a) Haben Sie eine Algebravorlesung besucht? b) Wissen Sie, was eine Körpererweiterung ist?

ja ☐ nein ☐ ja ☐ nein ☐ ungefähr ☐

Frage 2 Haben Sie schon oft verschiedene Figuren aus Papier gebastelt?

ja ☐ nein ☐

Beschreiben Sie das bitte etwas genauer:

Frage 3 Wie würden Sie eine auf Papier gezeichnete Strecke in drei Teile teilen? Erklären Sie bitte Ihr Vorgehen.

Frage 4 In den Empfehlungen für die Lehrerausbildung im Fach Mathematik für den Bereich Geometrie ist unter anderem zu lesen:

> »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie.«

Erläutern Sie bitte kurz mit einfachen Worten diese Kompetenz so, wie Sie sie verstehen.

Frage 5 Ordnen Sie bitte die nachstehenden Aussagen (zum Beispiel in einer Skizze) mittels Folgerungen, Äquivalenzen oder Ähnlichem; machen Sie deutlich, wenn keine logische Beziehung möglich ist. Zum Beispiel, aus **A** folgt **F**; **X** widerspricht **Y**.

A Alle Primzahlen sind natürliche Zahlen;

B Es gibt unendlich viele Primzahlen;

C Für jede endliche Menge von Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ gibt es eine weitere Primzahl, welche die Zahl $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n + 1$ teilt;

D Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen;

E Die Menge $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist endlich.

B.2. Pretest, Winter 15/16

Passwort:

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2015/16
Pre-Test

Beantworten Sie bitte folgende Fragen; Ihre Antworten werden anonym ausgewertet. Bitte tragen Sie oben links ein Passwort ein, an welches Sie sich bis Ende des Semesters erinnern können. Bei der Beantwortung der Fragen dürfen Sie sich gerne vollständiger Sätze, Stichpunkte sowie Skizzen bedienen.

Frage 1 In welchem Fachsemester sind Sie? ____________

Frage 2 Haben Sie eine Algebravorlesung besucht? ja ☐ nein ☐

Frage 3 Wissen Sie, was eine Körpererweiterung ist? ungefähr ☐ ja ☐ nein ☐

Frage 4 Haben Sie schon oft verschiedene Figuren aus Papier gebastelt? ja ☐ nein ☐
Beschreiben Sie das bitte etwas genauer:

Frage 5 Wie würden Sie eine Strecke in drei gleiche Teile teilen? Erklären Sie bitte Ihr Vorgehen. Kennen Sie noch weitere Möglichkeiten?

Frage 6 Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?

Frage 7 Was ist für Sie die euklidische Ebene?

Frage 8 In den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik für den Bereich Geometrie ist unter anderem die folgende Kompetenz angegeben:

> »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie.«

Erläutern Sie bitte kurz mit einfachen Worten diese Kompetenz so, wie Sie sie verstehen.

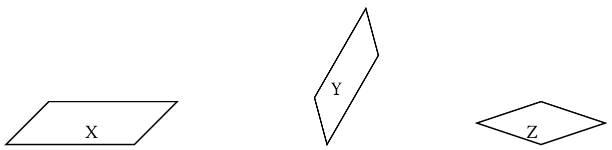
Passwort:

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2016/17
Pre-Test

Beantworten Sie bitte folgende Fragen; Ihre Antworten werden anonym ausgewertet. Bitte tragen Sie oben links ein Passwort ein, an welches Sie sich *bis Ende des Semesters* erinnern können (etwa so: erster Buchstabe des Vornamens der Mutter, erster Buchstabe des Geburtortes, der Tag des Geburtstages. Beispiel: NC29).
Bei der Beantwortung der Fragen dürfen Sie sich gerne vollständiger Sätze, Stichpunkte sowie Skizzen bedienen.

Frage 1 In welchem Fachsemester sind Sie? ____________

Frage 2 Welche der drei Figuren sind Parallelogramme?



A Nur X

B Nur Z

C Nur X und Y

D Keine der drei Figuren

E Alle drei Figuren

Erklären Sie bitte Ihre Entscheidung:

Frage 3 Benennen Sie alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Quadrate, aber nicht alle Rauten haben.

Benennen Sie nun alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Rauten, aber nicht alle Quadrate haben.

Frage 4 Stellen Sie sich vor, eine Schülerin sagt Ihnen, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was und warum würden Sie darauf sagen?

Frage 5 Ein Viereck kann unter anderem folgende Eigenschaften haben:

diag Es hat gleichlange Diagonalen

quad Es ist ein Quadrat

recht Es ist ein Rechteck

Welche der fünf Aussagen (und warum?) würden Sie als wahr ansehen?

A Es gilt sowohl »**diag** $\Longrightarrow$ **quad**« als auch »**quad** $\Longrightarrow$ **recht**«.

B Es gilt sowohl »**diag** $\Longrightarrow$ **recht**« als auch »**recht** $\Longrightarrow$ **quad**«.

C Es gilt sowohl »**quad** $\Longrightarrow$ **recht**« als auch »**recht** $\Longrightarrow$ **diag**«.

D Es gilt sowohl »**recht** $\Longrightarrow$ **diag**« als auch »**diag** $\Longrightarrow$ **quad**«.

E Es gilt sowohl »**recht** $\Longrightarrow$ **quad**« als auch »**quad** $\Longrightarrow$ **diag**«.

Evtl. Begründung:

Frage 6 In einer Theorie, erfunden von Mr. Playfair, soll gelten, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks kleiner als 180° ist. Was kann man dazu sagen?

A Er hat sich definitiv vermessen.

B Er muss einen logischen Fehler gemacht haben.

C Er hat eine falsche Vorstellung davon, was »gelten« bedeutet.

D Er hat für seine Theorie andere Annahmen verwendet, als die der üblichen Geometrie.

E Keine der Antworten A–D ist richtig.

Frage 7 Wie würden Sie eine Strecke in drei gleiche Teile teilen? Erklären Sie bitte Ihr Vorgehen. Kennen Sie noch weitere Möglichkeiten?

Frage 8 Was ist ein Axiomensystem? Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?

Frage 9 Können Sie andeuten, worin sich für Sie die Begriffe »Axiom«, »Definition«, »Theorem« unterscheiden.

Frage 10 Was ist für Sie die euklidische Ebene? Wie würden Sie die euklidische Ebene definieren?

B.4. Pretest, Winter 18/19

Passwort:

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2018/19
Pre-Test

Bitte tragen Sie oben links ein Passwort ein, an welches Sie sich *bis Ende des Semesters* erinnern können (etwa so: erster Buchstabe des Vornamens der Mutter, erster Buchstabe des Geburtortes, der Tag des Geburtstages. Beispiel: NC29). Beantworten Sie bitte folgende Fragen; Ihre Antworten werden pseudonym (d.h. in Kenntnis Ihres Passworts, nicht Namens) ausgewertet.
Bei der Beantwortung der Fragen dürfen Sie sich gerne vollständiger Sätze, Stichpunkte sowie Skizzen bedienen.

Frage 1 In welchem Fachsemester sind Sie? ____________

Frage 2 Stellen Sie sich vor, eine Schülerin sagt Ihnen, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was würden Sie ihr darauf antworten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Frage 3 Uns sind fünf Aussagen A, B, C, D, E einer mathematischen Theorie bekannt sowie die folgenden logischen Verbindungen zwischen ihnen:

1) Aus der Aussage A folgt C;
2) B kann man mit D beweisen;
3) C ist ein Korollar aus D;
4) A folgt aus E, aber auch aus B;
5) wenn D falsch ist, dann ist auch B falsch.

Welche der fünf Aussagen A, B, C, D, E sind mindestens erforderlich, um aufgrund der bekannten Verbindungen 1) – 5) die restlichen Aussagen zu folgern? Eventuell ist ein Diagramm hilfreich.

Frage 4 Was bedeutet für Sie der Begriff »euklidische Ebene«? Wie würden Sie diesen definieren?

Frage 5 Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären? Wie würden Sie es definieren?

Frage 6 Können Sie andeuten, worin sich für Sie die Begriffe »Axiom«, »Definition«, »Satz« unterscheiden.

Vielen Dank!

B.5. Auswertungsbogen, Winter 16/17

Axiomatisieren mit Papierfalten
Auswertung Pretest
Wintersemester 2016/17

Passwort
Fachsemester

Hinweise zum Auswerten

Prozesse werden aus Gutierrez & Jaime übernommen. **E** steht für *Erkennen*, **V** steht für *Verwenden einer Definition*, **F** steht für *Formulieren einer Definition*, **K** steht für *Klassifizieren*, **B** steht für *Beweisen/Begründungen*. Fehlt

Niveaus werden neben Prozessen vergeben, etwa K2. Die Niveaus sind Zahlen 1–5.

Pfeile ↗ bzw. ↘ deuten an, dass das eigentliche Niveau möglicherweise höher bzw. niedriger ist, als in der jeweiligen Antwort interpretierbar.

Zuordnung Die theoretisch möglichen Prozesse sowie hierfür minimal und maximal mögliche Niveaus für die jeweiligen Fragen wurden wie folgt identifiziert (kursiv dargestellte Zahlen deuten Prozesse an, die evtl. nur erkennbar sind, falls eine Begründung angegeben wurde):

	Erkennen	**Verwenden**	**Formulieren**	**Klassifizieren**	**Beweisen**
Frage 2 (Us)	1–2	*2*	*1–2*	*1–2*	
Frage 3 (G&J)		2–3		1–3	
Frage 4 (Pu)					1–4
Frage 5 (Us)	2	*2–4*		*2–3*	*2–4*
Frage 6 (Us)		*2–4*			*2–5*
Frage 7					2–3
Frage 8		2–4	2–5		
Frage 9 (B&S)		2–4	2–4	2–3	
Frage 10			2–5	2–3	

Auswertung	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Erkennen									
Verwenden									
Formulieren									
Klassifizieren									
Beweisen									

Niveau	1	2	3	4	5
Grad, %					

Zusammenfassung:

Frage 2 »Welche der drei Figuren sind Parallelogramme?«

Wahl

Begründung?

inklusiv? »Da sind Parallelogramme, weil…«

explizit? »Parallelogramme sind…«

Bemerkungen

Frage 4 »Stellen Sie sich vor, eine Schülerin sagt Ihnen, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was und warum würden Sie darauf sagen?«

Argumente:

Ist die Argumentation vollständig?

Wird die euklidische Ebene verwendet?

Ist eine nichteuklidische Ebene erkennbar?

Welche Vorstellung ist erkennbar?

Bemerkungen

Frage 3 a) »Benennen Sie alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Quadrate, aber nicht alle Rauten haben.«

Eigenschaften auflisten:

Nur notwendige genannt? **Redundante Eigenschaften:**

Alle wesentlichen genannt?

Falsche Vorstellung erkennbar?

Bemerkungen

b) »Benennen Sie nun alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Rauten, aber nicht alle Quadrate haben.«

»keine« **Explizit »Quadrate sind auch Rauten«?**

Eigenschaften ≠ »keine«:

Eigenschaften genannt, die Quadrate und Rauten haben?

Eigenschaften genannt, die auch andere Vierecke haben?

Falsche Vorstellung erkennbar?

Bemerkungen

Frage 5 »Welche der fünf Aussagen (und warum?) würden Sie als wahr ansehen?«

Wahl **richtig?**

Begründung der Wahl?

Andere Möglichkeiten widerlegt?

Bemerkungen

Frage 6 »In einer Theorie, erfunden von Mr. Playfair, soll gelten, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks kleiner als 180° ist. Was kann man dazu sagen?

A Er hat sich definitiv vermessen.

B Er muss einen logischen Fehler gemacht haben.

C Er hat eine falsche Vorstellung davon, was »gelten« bedeutet.

D Er hat für seine Theorie andere Annahmen verwendet, als die der üblichen Geometrie.

E Keine der Antworten A–D ist richtig.«

Wahl **richtig?**

ggf. Begründung

nichteuklidische Geometrie erkennbar?

Welche Vorstellung ist erkennbar?

Bemerkungen

Frage 7 »Wie würden Sie eine Strecke in drei gleiche Teile teilen? Erklären Sie bitte Ihr Vorgehen. Kennen Sie noch weitere Möglichkeiten?«

Methoden:

Begründung der Methode? **Ist das eine Konstruktion?**

Bemerkungen

Frage 8 »Was ist ein Axiomensystem? Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?«

Definition »Axiomensystem«?

Definition »Axiom«?

Explizit »Axiom $\in$ Axiomensystem«?

Welche Eigenschaften von Axiomen bzw. Axiomensystemen werden genannt?

math. Struktur der Definition?

Bemerkungen

Frage 9 »Können Sie andeuten, worin sich für Sie die Begriffe »Axiom«, »Definition«, »Theorem« unterscheiden.«

Axiom vs. Definition

Axiom vs. Theorem

Definition vs. Theorem

Versuch einer Definition?

Sind die Begriffe klar getrennt?

Bemerkungen

Frage 10 »Was ist für Sie die euklidische Ebene? Wie würden Sie die euklidische Ebene definieren?«

Versuch einer formalen Definition?

Anschauliche Umschreibung?

Wird zwischen formalen und anschaulichen Darstellung unterschieden?

Falsche Vorstellung erkennbar?

Bemerkungen

Frage 2	angekreuzt »E«, »Da die jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander sind.«	angekreuzt »E«, »Bei Parallelogrammen sind jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel. Dies ist bei allen drei Figuren der Fall.«
Frage 3	*Erster Teil*: »Quadrate haben: 4 rechte Winkel, die Eckpunkte liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt,«. *Zweiter Teil*: leer	*Erster Teil*: »4 Rechte (Innen-)Winkel, Diagonalen sind gleich lang, alle Seiten sind gleich lang«. *Zweiter Teil*: »Diagonalen stehen senkrecht aufeinander«
Frage 4	»Ich würde eine Strecke zeichnen und am Ende jeweils zwei Strecken mit 90° Winkel und ihr damit zeigen, dass sich diese 2 Strecken niemals treffen können, damit sie versteht, dass dies nicht möglich ist.«	»Das ist nicht möglich, weil die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Da ein Dreieck immer 3 Innenwinkel hat, können keine 2 rechte Winkel auftreten, weil der 3. Winkel dann 0° groß wäre. Das geht nicht.«
Frage 5	angekreuzt »A, C, D«, keine Begründung angegeben	angekreuzt »B, C«, »Bei gleichlangen Diagonalen kann sich auch um ein Quadrat handeln. Also ist diag $\Rightarrow$ quad falsch. Dass jedes rechteck ein Quadrat ist (recht $\Rightarrow$ quad) ist natürlich auch ein Schmarrn.«
Frage 6	angekreuzt »D«, keine Begründung angegeben	angekreuzt »D«, keine Begründung angegeben
Frage 7	»Mithilfe des Strahlensatzes: Eine Halbebene am Anfangspunkt der Strecke, mit dem Zirkel 3 gleich lange Abschnitte einzeichnen und dann Mittelsenkrechten zur Strecke zeichnen. Weitere Möglichkeiten kenne ich nicht.«	» - trivial: Mit dem Lineal: Strecke abmessen, durch 3 teilen; jetzt ausgehend vom Anfang der Strecke nach dem 1. Drittel Strich einzeichnen & nach dem 2. Drittel. - Papier so falten, dass 3 aufeinandergefaltete Teile des Papiers exakt aufeinander liegen.«
Frage 8	»Ein System von Annahmen die man selbst als gültig erachtet. Ein Axiom ist eine Annahme, die man nicht beweisen kann oder als gültig vorausgesetzt wird.«	»Ein Axiomensystem besteht aus mehreren Axiomen, die den gleichen Gegenstand zum Thema haben. Ein Axiom kann nicht bewiesen werden; es wird als wahr angenommen, weil die empirische Forschung bisher noch keinen Widerspruch dazu gefunden hat.«
Frage 9	»Ein Axiom unterscheidet sich von einer Definition davon, dass ich bei einer Definition einen neuen Begriff nur einführe ohne irgendwelche Aussagen über diesen zu treffen. Ein Theorem kann ich nicht erklären.«	»Eine Definition ist abhängig vom Definitionsgeber. Jeder kann sich Dinge definieren, wie es ihm gefällt, d.h. Definitionen sind unterschiedlich. Ein Axiom existiert nur in der einen Form. Ein Theorem ist die Vorform eines Axioms, d.h. es muss noch dementsprechend durch empirische Forschung bestätigt werden.«
Frage 10	»Kann ich nicht erklären!«	»Ich würde die euklidische Ebene als Menge aller Punkte definieren die auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegen. Also eukl. Ebene := $\{X \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid X \in E, E \subset \mathbb{R}^3 \text{ Ebene}\}$.«

Tabelle B.1.: Abgetippte Antworten zweier Studenten aus [17]Pretest links: 11. Semester (Auswertung in Anhang B.6); rechts: 3. Semester.

Passwort —
Fachsemester 11

Axiomatisieren mit Papierfalten
Auswertung Pretest
Wintersemester 2016/17

Hinweise zum Auswerten

Prozesse werden aus Gutierrez & Jaime übernommen. **E** steht für *Erkennen*, **V** steht für *Verwenden einer Definition*, **F** steht für *Formulieren einer Definition*, **K** steht für *Klassifizieren*, **B** steht für *Beweisen/Begründungen*. Fehlt

Niveaus werden neben Prozessen vergeben, etwa K2. Die Niveaus sind Zahlen 1–5.

Pfeile ↗ bzw. ↘ deuten an, dass das eigentliche Niveau möglicherweise höher bzw. niedriger ist, als in der jeweiligen Antwort interpretierbar.

Zuordnung Die theoretisch möglichen Prozesse sowie hierfür minimal und maximal mögliche Niveaus für die jeweiligen Fragen wurden wie folgt identifiziert (kursiv dargestellte Zahlen deuten Prozesse an, die evtl. nur erkennbar sind, falls eine Begründung angegeben wurde):

	Erkennen	**Verwenden**	**Formulieren**	**Klassifizieren**	**Beweisen**
Frage 2 (Us)	1–2	*2*	*1–2*	*1–2*	
Frage 3 (G&J)		2–3		1–3	
Frage 4 (Pu)					1–4
Frage 5 (Us)	2	*2–4*		*2–3*	*2–4*
Frage 6 (Us)		*2–4*			*2–5*
Frage 7					2–3
Frage 8		2–4	2–5		
Frage 9 (B&S)		2–4	2–4	2–3	
Frage 10			2–5	2–3	

Auswertung	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Erkennen	2								
Verwenden	2↗	2			–				
Formulieren							3-4	2-3	–
Klassifizieren	2↗	3?		1-2				2-3	–
Beweisen			2?	–	–	2-3			

Niveau	1	2	3	4	5
Grad, %					

Zusammenfassung: Bewertung unklar

Frage 2 »Welche der drei Figuren sind Parallelogramme?«

Wahl E

Begründung? Da die jeweils gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind.

inklusiv? »Da sind Parallelogramme, weil...« Ja

explizit? »Parallelogramme sind...« Nein

Bemerkungen kurze gute Begründung

Frage 4 »Stellen Sie sich vor, eine Schülerin sagt Ihnen, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was und warum würden Sie darauf sagen?«

Argumente: »Ich würde eine Strecke zeichnen und am Ende jeweils zwei Strecken mit 90° Winkel und ihr damit zeigen, dass sich diese 2 Strecken niemals treffen können, damit sie versteht, dass dies nicht möglich ist.«

Ist die Argumentation vollständig? Nein

Wird die euklidische Ebene verwendet? Unklar

Ist eine nichteuklidische Ebene erkennbar? Nein

Welche Vorstellung ist erkennbar? Das Dreieck wir zu einem unendlichen Zweieck mit rechten Basiswinkeln und parallelen Seiten

Bemerkungen »Strecken« treffen sich nie. Eine sehr anschauliche Argumentation; begründet nicht, warum sich die Geraden nicht treffen.

Frage 3 a) »Benennen Sie alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Quadrate, aber nicht alle Rauten haben.«

Eigenschaften auflisten: »Quadrate haben: 4 rechte Winkel, die Eckpunkte liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt«

Nur notwendige genannt? ja

Alle wesentlichen genannt? ja

Falsche Vorstellung erkennbar? nein

Bemerkungen Unklar, ob die Darstellung impliziert, Rauten haben diese Eigenschaften nicht. Genannte Eigenschaften sind jeweils ausreichend

B.6. Beispielauswertung, Winter 16/17

b) »Benennen Sie nun alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Rauten, aber nicht alle Quadrate haben.«
Keine Bearbeitung.
Zu spekulativ hier »es gibt keine« reinzuinterpretieren.

Frage 5 »Welche der fünf Aussagen (und warum?) würden Sie als wahr ansehen?«

Wahl Unklar, angekreuzt A, C, D **richtig?** nein

Begründung der Wahl? keine

Andere Möglichkeiten widerlegt? nein

Bemerkungen die richtige Antwort ist mit ausgewählt. Zu wenig Info.

Frage 6 »In einer Theorie, erfunden von Mr. Playfair, soll gelten, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks kleiner als 180° ist. Was kann man dazu sagen?

A Er hat sich definitiv vermessen.

B Er muss einen logischen Fehler gemacht haben.

C Er hat eine falsche Vorstellung davon, was »gelten« bedeutet.

D Er hat für seine Theorie andere Annahmen verwendet, als die der üblichen Geometrie.

E Keine der Antworten A–D ist richtig.«

Wahl D **richtig?** ja

ggf. Begründung nein

Bemerkungen zu wenig Info; ggf. kein Bedarf an Begründung erkannt?

Frage 7 »Wie würden Sie eine Strecke in drei gleiche Teile teilen? Erklären Sie bitte Ihr Vorgehen. Kennen Sie noch weitere Möglichkeiten?«

Methoden: »Mithilfe des Strahlensatzes«, erklärt das Vorgehen. »Weitere Möglichkeiten kenne ich nicht«

Begründung der Methode? ja, aber kein Beweis **Ist das eine Konstruktion?** ja

Bemerkungen »und dann Mittelsenkrechten zur Strecke zeichnen« gemeint sind wohl die Parallelen.

Frage 8 »Was ist ein Axiomensystem? Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären?«

Definition »Axiomensystem«? »System von Annahmen, die man selbst als gültig erachtet«

Definition »Axiom«? »Eine Annahme, die man nicht beweisen kann und als gültig vorausgesetzt wird.«

Explizit »Axiom $\in$ Axiomensystem«? wohl ja

Welche Eigenschaften von Axiomen bzw. Axiomensystemen werden genannt? gültig, nicht beweisbar

math. Struktur der Definition? ja

Bemerkungen Es wird nicht erklärt, was »Annahmen« sein sollen. »Selbst als gültig erachtet« spielt wohl darauf an, dass jeder sich die Axiome zurecht legen kann.

Frage 9 »Können Sie andeuten, worin sich für Sie die Begriffe »Axiom«, »Definition«, »Theorem« unterscheiden.«

Axiom vs. Definition Bei einer Definition wird ein Begriff nur eingeführt ohne irgendwelche Aussagen über diesen zu treffen (im Gegensatz zum Axiom)«

~~Definition vs.~~ Theorem »kann ich nicht erklären«

Versuch einer Definition? Nein, eher eine Erklärung des Unterschieds.

Sind die Begriffe klar getrennt? Nein, unklar was Axiome konkret von Definitionen unterscheidet

Bemerkungen Vermutlich ist gemeint, dass man über Axiome sagen kann, ob sie gültig oder nicht sind. Bei Definitionen geht das nicht. Schwer zu beurteilen.

Frage 10 »Was ist für Sie die euklidische Ebene? Wie würden Sie die euklidische Ebene definieren?«
»Kann ich nicht erklären!«

Axiomatisieren mit Papierfalten
Sommersemester 2015
Fragenkatalog fürs Interview

Vornamen der Interviewten:

Einleitung

I. Könnt ihr bitte kurz erzählen, womit wir uns im Kurs beschäftigt haben?

II. Was ist dieses 1-fach-Origami? ↪ Kannst du das bitte kurz erklären?

Über Axiome

Im Allgemeinen

III. Würdest du sagen, dass der Kurs die Art, wie du über Mathematik denkst, verändert hat? ↪ Beschreibe das genauer!

IV. Würdest du sagen, dass sich deine Sichtweise auf Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen geändert hat? ↪ Wie?

V. Hast du mit Menschen außerhalb des Kurses über Axiome in der Geometrie mal gesprochen? Was halten sie davon? Oder was denkst du was sie darüber denken?

VI. ↪ Warum will man eigentlich Axiome finden? Axiomatisieren?

In der Schule

VII. Hast du in der Schule schon mit Axiomen gearbeitet?

VIII. Wie siehst du das: Welche Bedeutung sollten Axiome in der Schulmathematik spielen? ↪ Warum?

IX. Welche Probleme im Umgang mit Axiomen würdest du bei Schülerinnen und Schülern sehen? ↪ Hast du diese Probleme auch? ↪ Wie kommt es dazu?

X. Angenommen eine gute Schülerin ist unzufrieden mit den Beweisen im Geometriebuch; sie findet diese ungenau und möchte dortige Aussagen auf eine solide logische Basis stellen. Wie soll sie vorgehen? Was würdest du ihr sagen?

Im Studium

XI. Hast du während des Studiums mit Axiomen gearbeitet? Haben Axiome irgendwo im Studium eine Rolle gespielt?

XII. In den Empfehlungen für die Ausbildung von Mathematiklehrenden steht »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie.« Wie interpretierst du das? Was soll der Studierende, also du, können? Was ist damit gemeint?

XIII. Wie würdest du jemandem erklären, was ein Axiom ist?

Faktisches Wissen

XIV. Beschreibe einige der Grundfaltungen. ↪ Warum erwähnst du "Falte einen Punkt auf eine Gerade" nicht?

XV. Kannst du mir bitte das Wort Axiomatisieren bzw. Axiomatik erklären? ↪ Was ist das, was ist der Unterschied?

XVI. Was ist dir von dem Kurs an Konstruktionen im Kopf geblieben?

a) Kannst du eine Strecke in fünf gleiche Teile falten?

b) Welche Konstruktion hat dich am meisten fasziniert?

c) Was ist das Besondere am mathematischen Papierfalten im Vergleich zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen?

XVII. Was ist für dich die euklidische Ebene? ↪ Meinst du, dass der bestimmte Artikel hier angebracht ist?

Notizen, Bemerkungen, Nachträge:

C.2. Interviewleitfaden, Winter 15/16

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 15/16
Fragenkatalog fürs Interview

Vornamen der Interviewten:

Setting: Die Interviewten und der Interviewer sitzen zudritt an einem Tisch. Vor ihnen liegt viel Papier zum Falten oder Schreiben.

Ziele des Interviews

i) Welche Schwierigkeiten haben Studierende mit Axiomen, Axiomatisieren, Axiomatik?

ii) Wie verändert das Axiomatisieren des Papierfaltens ihre Sicht auf Axiome, euklidische Ebene?

iii) Hat sich ihre Einstellung zur Schulgeometrie und besonders zu den Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen geändert?

iv) Welche fachspezifische Kompetenzen haben sie im Kurs erworben?

Fragen

Einleitung

I. Könnt ihr bitte kurz erzählen, womit wir uns im Kurs beschäftigt haben?
Grobe Richtung festlegen.

II. Was ist dieses 1-fach-Origami? ↪ Kannst du das bitte kurz erklären?
Gemeinsame Sprache finden . Interviewer kann sich die genannten Begriffe vorgreifen.

Über Axiome
Die Fragen sind nicht sortiert, die Reihenfolge wird in jedem einzelnen Gespräch an die vorigen Antworten angepasst.

Im Allgemeinen

III. Würdest du sagen, dass der Kurs die Art, wie du über Mathematik denkst, verändert hat? ↪ Beschreibe das genauer!
Wenn das Wort Axiom *noch nicht gefallen ist, wird die 2. Frage aufgeschoben. Festhalten der Veränderungen.*

IV. Würdest du sagen, dass sich deine Sichtweise auf Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen geändert hat? ↪ Wie?
Eine Kontrollfrage. Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen an sich wurden nicht behandelt.

V. Hast du mit Menschen außerhalb des Kurses über Axiome in der Geometrie mal gesprochen? Was halten sie davon? Oder was denkst du was sie darüber denken?
Das Ziel ist herauszufinden, welche Vorstellungen über Axiome andere haben.

VI. ↪ Warum will man eigentlich Axiome finden? Axiomatisieren?

In der Schule

VII. Hast du in der Schule schon mit Axiomen gearbeitet?
Mögliche negative Erfahrungen aufgreifen.

VIII. Wie siehst du das: Welche Bedeutung sollten Axiome in der Schulmathematik spielen? ↪ Warum?
Wie ist die Einstellung der Interviewten zur Bedeutung der Axiomatik? Schätzen sie das als etwas Wichtiges ein oder verstehen sie nicht warum man sich die Mühe macht? Auf welchem logischen/Abstraktionsniveau bewegen sie sich?

IX. Welche Probleme im Umgang mit Axiomen würdest du bei Schülerinnen und Schülern sehen? ↪ Hast du diese Probleme auch? ↪ Wie kommt es dazu?
Vielleicht sprechen die Interviewten leichter über Probleme, wenn diese andere Menschen betreffen. Reflexionen über Probleme anderer.

X. Angenommen eine gute Schülerin ist unzufrieden mit den Beweisen im Geometriebuch; sie findet diese ungenau und möchte diese Aussagen auf eine solide logische Basis stellen. Wie soll sie vorgehen? Was würdest du ihr sagen?
Haben sie das lokale Ordnen verinnerlicht? Haben sie neue Ideen zum Axiomatisieren? Welche Probleme sind damit verbunden?

Im Studium

XI. Hast du während des Studiums mit Axiomen gearbeitet? Haben Axiome irgendwo im Studium eine Rolle gespielt?
Welche Vorerfahrungen haben die Studierenden?

XII. Wie würdest du jemandem erklären, was ein Axiom ist?
Interessant ist die Wortwahl und die Beziehungen zwischen den Begriffen.

XIII. In den Empfehlungen für die Ausbildung von Mathematiklehrenden steht »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie.« Wie interpretierst du das? Was soll der Studierende, also du, können? Was ist damit gemeint?
Vergleich der Antwort mit der aus dem Pretest; hat sich die Sichtweise geändert? Wird in Schriftform vorgelegt.

C.3. Interviewleitfaden, Winter 16/17

Axiomatisieren mit Papierfalten **Vornamen der Interviewten:**
Wintersemester 16/17
Fragenkatalog fürs Interview

Setting: Die Interviewten und der Interviewer sitzen zudritt an einem Tisch. Vor ihnen liegt viel Papier zum Falten oder Schreiben.

Ziele des Interviews

i) Welche Schwierigkeiten haben Studierende mit Axiomen, Axiomatisieren, Axiomatik?

ii) Wie verändert das Axiomatisieren des Papierfaltens ihre Sicht auf Axiome, euklidische Ebene?

iii) Hat sich ihre Einstellung zur Schulgeometrie und besonders zu den Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen geändert?

iv) Welche fachspezifische Kompetenzen haben sie im Kurs erworben?

v) Ist eine Veränderung in van Hiele Niveaus der Studierenden festzustellen?

Fragen

Einleitung

I. Könnt ihr bitte kurz erzählen, womit wir uns im Kurs beschäftigt haben?
Grobe Richtung festlegen.

II. Was ist dieses 1-fach-Origami? ↪ Kannst du das bitte kurz erklären?
Gemeinsame Sprache finden. Interviewer kann sich die genannten Begriffe vorgreifen.

Über Axiome
Die Fragen sind nicht sortiert, die Reihenfolge wird in jedem einzelnen Gespräch an die vorigen Antworten angepasst.

Im Allgemeinen

III. Würdest du sagen, dass der Kurs die Art, wie du über Mathematik denkst, verändert hat? ↪ Beschreibe das genauer!
Wenn das Wort Axiom *noch nicht gefallen ist, wird die 2. Frage aufgeschoben. Festhalten der Veränderungen.*

IV. Würdest du sagen, dass sich deine Sichtweise auf Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen geändert hat? ↪ Wie?
Eine Kontrollfrage. Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen an sich wurden nicht behandelt.

In der Schule

V. Hast du in der Schule schon mit Axiomen gearbeitet?
Mögliche negative Erfahrungen aufgreifen sowie verstehen, was sie in der Schule darüber wussten.

VI. Wie siehst du das: Welche Bedeutung sollten Axiome in der Schulmathematik spielen? ↪ Warum?
Wie ist die Einstellung der Interviewten zur Bedeutung der Axiomatik? Schätzen sie das als etwas Wichtiges ein oder verstehen sie nicht warum man sich die Mühe macht?

Im Studium

VII. Welche Probleme im Umgang mit Axiomen würdest du bei deinen Kommilitonen sehen? ↪ Hast du diese Probleme auch? ↪ Wie kommt es dazu?
Vielleicht sprechen die Interviewten leichter über Probleme, wenn diese andere Menschen betreffen. Reflexionen über Probleme anderer.

VIII. Wie würdest du jemandem erklären, was ein Axiom ist? Würde sich die Antwort unterscheiden, je nach dem, wem du das erklärst? Wie würdest du es definieren?
Interessant ist die Wortwahl und die Beziehungen zwischen den Begriffen.

IX. Kannst du mir bitte das Wort Axiomatisieren bzw. Axiomatik erklären? ↪ Was ist das, was ist der Unterschied?
Tieferes Beherrschen der Begrifflichkeit abfragen.

Faktisches Wissen

X. Beschreibe einige der Grundfaltungen. ↪ Warum erwähnst du ”Falte einen Punkt auf eine Gerade” nicht?

XI. Was ist dir von dem Kurs an Konstruktionen im Kopf geblieben?
Sind inhaltliche Ziele erreicht?

a) Kannst du eine Strecke in fünf gleiche Teile falten?

b) Welche Konstruktion hat dich am meisten fasziniert?

c) Was ist das Besondere am mathematischen Papierfalten im Vergleich zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen?
Reflexionen und Festhalten wesentlicher Erkenntnisse aus dem Kurs.

XII. Was ist für dich die euklidische Ebene? ↪ Meinst du, dass der bestimmte Artikel hier angebracht ist?
Wie fest sitzen die Begriffe? Auf welchem abstrakten Niveau bewegen sich die Studierenden? Ist eine Veränderung nach dem Kurs festzustellen?

Van-Hiele-Niveaus

XIII. Zeichne ein Dreieck. Dann ein anderes. Dann ein anderes.
Solange das Sinn ergibt: Wie klassifizieren sie ihre Dreiecke?

XIV. Stell dir vor, eine Schülerin sagt dir, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was würdest du darauf sagen?

XV. Nenne alle wesentlichen Eigenschaften, die Quadrate und Rauten gemeinsam haben. Nenne alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Quadrate, aber nicht alle Rauten haben. Nenne nun alle wesentlichen Eigenschaften, die *alle* Rauten, aber nicht alle Quadrate haben.

XVI. Ein Viereck kann unter anderem folgende Eigenschaften haben:

diag Es hat gleichlange Diagonalen

quad Es ist ein Quadrat

recht Es ist ein Rechteck

Welche der fünf Aussagen (und warum?) würden Sie als wahr ansehen?

A Es gilt sowohl **diag** $\Longrightarrow$ **quad** als auch **quad** $\Longrightarrow$ **recht**.

B Es gilt sowohl **diag** $\Longrightarrow$ **recht** als auch **recht** $\Longrightarrow$ **quad**.

C Es gilt sowohl **quad** $\Longrightarrow$ **recht** als auch **recht** $\Longrightarrow$ **diag**.

D Es gilt sowohl **recht** $\Longrightarrow$ **diag** als auch **diag** $\Longrightarrow$ **quad**.

E Es gilt sowohl **recht** $\Longrightarrow$ **quad** als auch **quad** $\Longrightarrow$ **diag**.

Hier und nachfolgend: Beide Interviewten schreiben die Nummer der Frage sowie ihre Kurzantwort verdeckt auf ein Blatt Papier und diskutieren anschließend über ihre Entscheidung. Damit werden verschiedene und eigene! Antworten ermöglicht und in der Diskussion könnten sogar mehr Probleme auftauchen als es im Einzelgespräch der Fall wäre.

XVII. Wenn wir sagen, dass eine Diagonale in einem Polygon eine Strecke ist, die zwei nicht benachbarte Ecken verbindet, kannst du dann sagen wie viele Diagonalen ein 5-Eck hat? Ein n-Eck? Kannst du das begründen?

XVIII. Üblicherweise definiert man ein Parallelogramm als ein Viereck mit zwei Paaren von parallelen Seiten. Könnte man ein Parallelogramm auch so definieren: Ein Viereck, in dem die Summe je zweier neben einander liegender Winkel gleich 180° ist? Wenn ja, kannst du begründen, dass beide Definitionen äquivalent sind? Wenn nein, kannst du ein Gegenbeispiel hinmalen?

Notizen, Bemerkungen, Nachträge:

Passwort:

Axiomatisieren mit Papierfalten
Wintersemester 2018/19
Post-Test

Bitte tragen Sie oben links das Passwort ein, das Sie im Pretest benutzt haben (etwa so: erster Buchstabe des Vornamens der Mutter, erster Buchstabe des Geburtortes, der Tag des Geburtstages. Beispiel: NC29). Tragen Sie bitte kein anderes Passwort ein! Beantworten Sie bitte folgende Fragen; Ihre Antworten werden pseudonym (d.h. in Kenntnis Ihres Passworts, nicht Ihres Namens) ausgewertet.
Bei der Beantwortung der Fragen dürfen Sie sich vollständiger Sätze, Stichpunkte sowie Skizzen bedienen.

Frage 1 In welchem Fachsemester sind Sie? ___________

Frage 2 Beschreiben Sie Konstruktionen der Zahl $\frac{1}{3}$ mittels Papierfalten. Sind diese 1-fach-Origami?

Frage 3 Stellen Sie sich vor, eine Schülerin sagt Ihnen, dass sie ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen könne. Was würden Sie ihr darauf antworten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Frage 4 Nennen oder skizzieren Sie möglichst viele Axiome des 1-fach-Origami.

Frage 5 Wie würden Sie jemandem das Wort »Axiom« erklären? Wie würden Sie es definieren?

Frage 6 Erläutern Sie, worin sich die Begriffe »Axiom«, »Definition«, »Satz« unterscheiden.

Frage 7 Uns sind fünf Aussagen A, B, C, D, E einer mathematischen Theorie bekannt sowie die folgenden logischen Verbindungen zwischen ihnen:

1) Die Aussage A ist ein Korollar aus D.
2) Wenn D falsch ist, dann ist auch C falsch.
3) Mit A kann man C beweisen.
4) E ist keine Folgerung aus D.
5) Aus den Aussagen A und E folgt die Aussage B.

Welche der fünf Aussagen A, B, C, D, E sind mindestens erforderlich, um aufgrund der bekannten Verbindungen 1) – 5) die restlichen Aussagen zu folgern? Eventuell ist ein Diagramm hilfreich.

Frage 8 Was verstehen Sie unter »Axiomatisieren«?

Frage 9 Was bedeutet für Sie der Begriff »euklidische Ebene«? Wie würden Sie diesen definieren?

Vielen Dank!

C.4. Posttest, Winter 18/19