Anhang

Ergänzungen zu Kapitel 4.3

Weitere Beschreibungen metakognitiver Aspekte und metakognitions-bezogener Tätigkeiten

An dieser Stelle finden sich weitere Beschreibungen metakognitiver Aspekte, Ausprägungen und Unterkategorien sowie metakognitions-bezogener Tätigkeiten und Vorgänge, die sich aus den Interview-Transkripten mittels Codierung und sukzessiver Ausschärfung der daraus resultierenden Kategorien und Unterkategorien ergeben haben. Dabei handelt es sich vor allem um bestimmte Aspekte, Handlungen und Überlegungen, die beim Umgang mit Mathematik eine Rolle spielen und die entweder weitere Verfeinerungen (bzw. Vorstufen) von (Unter-)Kategorien des vorgestellten Schemas (S. 183 ff., Abb. 7) darstellen oder die verschiedene Aspekte von Metakognition aus verschiedenen Kategorien vereinen.

Beurteilung – Beurteilung anderer Personen

Auf Grund der speziellen Art, in der ein Teil der im Rahmen der empirischen Erhebung durchgeführten Interviews stattfand – mit zwei Interview-Teilnehmer_innen, die in einem gemeinsamen Gespräch befragt wurden, was Interaktion und gemeinsames Arbeiten ermöglichte – liegt es nahe, nicht nur Metakognition zu betrachten, die – wie dies in der Regel geschieht – die eigene Kognition zum Inhalt hat, sondern auch Metakognitionen, die sich auf die Kognition anderer Personen beziehen.

Im Verlauf der durchgeführten Interviews wurden die Teilnehmer_innen unter anderem dazu aufgefordert, sich zu überlegen, wie die vorliegende Aufgabe einer/m potentiellen Mit- oder Nachhilfeschüler/in erklärt werden könne, bzw. wie in dieser Situation Hilfestellungen gegeben werden könnten. Außerdem sollte in diesem Rahmen der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe beurteilt werden – sowohl in Bezug auf die eigene Person als auch aus Sicht besagter anderer Person. Des Weiteren kam in verschiedenen Interviews der Vergleich mit Mitschüler_innen zur Sprache – dabei oft in Bezug auf typische Verhaltensweisen und Affekte, die entweder mit anderen geteilt worden seien, oder sich von deren Verhalten/Affekten unterschieden hätten.

Grundsätzlich liegen hier dieselben metakognitiven Aspekte vor, wie sie auch bei „selbst-bezogener" Metakognition bestehen und stattfinden – bspw. das Wissen über Wissen und über Fähigkeiten oder über Stärken und Schwächen oder das Überwachen von Denkprozessen (einer/s Nachhilfeschülerin/s). Allerdings sind diese – genau wie im Fall der Interview-Situation – der eigenen Wahrnehmung nur mittelbar zugänglich und müssen aus der Kommunikation mit und dem Verhalten der jeweils anderen Person(en) geschlossen und interpretiert werden.

Dabei können eigene Interpretationen und Rückschlüsse über die Kognition anderer wiederum metakognitiv (auf die eigene Kognition bezogen) analysiert, überwacht, überprüft, etc. werden – als Wissen über eigenes Wissen über das Wissen anderer, in Form von Überprüfungen eigener Beliefs über die Fähigkeiten anderer auf Korrektheit, etc.. So kann z.B. bewusst sein, dass die eigene Evaluation des Verständnisses oder Wissens anderer nicht notwendigerweise korrekt sein muss, bzw. nur zu einem gewissen Grad korrekt sein kann. Ebenso kann bedacht werden, dass sich die Frage nach „Korrektheit" unter Umständen nicht beantworten lässt, da bestimmte Einschätzungen vom eigenen Standpunkt abhängen.

Die „Überwachung" des Verhaltens anderer und dessen Interpretation im Hinblick auf die dahinterstehenden Kognitionen kann genutzt werden, um eigene Fähigkeiten und eigenes Verständnis oder bspw. den eigenen Lernfortschritt zu evaluieren, indem diese verglichen und in Relation gesetzt werden. Bspw. kann die Orientierung an „kompetenten" Mitschüler_innen einen realistischen Rahmen für die eigenen Möglichkeiten und noch zu erreichende Ziele liefern.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] ich weiß nicht ich kann dadurch lernen dass ich was abstrakt mach des is ne sache die wenige leute können das weiß ich also, grad weil die meisten meiner nachhilfeschüler sind verloren wenn dann da nicht mehr zahlen sondern a b und c stehen […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.195 – Student_2)
- „[…] es war irgendwie in der ganzen zeit mein gedanke [Reaktion auf andere/n Teilnehmer_in] […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.423 – Student_1)

- „[…] wenns dem schüler sehr schnell erklärt wurde oder der n eindruck macht dass ers so, schon unterbewusst verstanden hat aber ers noch nicht wirklich sieht dann würd ichs nochmal so probieren – und wenn er, des schon ausführlich erklärt bekommen hat und aber nach wie vor keine ahnung hat wovon da geredet wird dann würd ichs anders probieren […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.85)
- „[…] aber klar muss man halt auf die person selber nochmal eingehen, dass man dann eben sagt, okay - jetzt weiß ich, wo dein fehler ist, das kann ich dir jetzt besser erklären und ja, das ist mir bis jetzt auch immer ganz gut gelungen […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.29 – Student_2)

Beurteilung – Nutzen beurteilen

Unter dieser Überschrift wird die metakognitions-bezogene Fähigkeit (bzw. entsprechende Denkprozesse) gefasst, den Nutzen von (gedanklichen) Strategien oder Hilfsmitteln sowie Wissen und Denkprozessen allgemein beim Lernen und beim Bewältigen von Aufgaben beim Umgang mit Mathematik zu erkennen und zu beurteilen. Starke Bezüge werden daher zum (spezifischen) Metawissen und zum Beurteilungs-Aspekt gesehen.

Gemeint ist hier einerseits das aktive Reflektieren von möglichen Strategien – bspw. Lernstrategien oder Problemlösestrategien – und die Entscheidung, ob diese für die zu bewältigende Aufgabe (das Lernen von Inhalten oder das Lösen einer bestimmten Aufgabe) von Nutzen seien. Hierzu spielen offensichtlich deklaratives Strategiewissen aber auch Aufgabenwissen (in Bezug auf die jeweilige konkrete Aufgabe oder das Gebiet – z.B. Mathematik, Analysis, Extremwertprobleme, Differentiation) eine Rolle. Solches Wissen muss erinnert, reflektiert und auf die aktuelle, konkrete, Situation bezogen werden, um zu einer Entscheidung zu kommen. Dementsprechend spielt der Reflexions-Aspekt eine große Rolle. Je nach Zeitpunkt – im Rahmen eines Lern-, Denk- oder Arbeitsprozesses – kann diese Beurteilung auf Nützlichkeit hin natürlich auch während dessen Planungsphase stattfinden, bzw. ist notwendig, um während des Prozesses diesen zu überwachen und – quasi permanent – den Nutzen einer eingeschlagenen Strategie im Auge zu behalten und neu zu bewerten.

Um bspw. den Nutzen einer bestimmten Vorgehensweise beim (Er-)Lernen oder Wiederholen/Festigen bestimmter Inhalte oder beim Vorbereiten auf Prüfungen zu beurteilen, müssen eigenes Verständnis, bzw. Fortschritte im eigenen Verständnis, beurteilt werden können. Strategiewissen und Aufgabenwissen sind vonnöten, um die Strategie an sich zu überblicken und zu reflektieren. Damit lässt sich letztlich die zur Debatte stehende Strategie (oder Vorgehensweise) analysieren und auf ihren Nutzen für die zu bewältigende Herausforderung zu prüfen; abzusehen, welche Konsequenzen, Vor- und Nachteile ihre Verwendung (vermutlich) mit sich bringt. Um diesen Nutzen nicht nur allgemein, sondern für die eigene Person abzusehen, ist ebenfalls Personenwissen notwendig. Die gleiche Strategie eignet sich schließlich nicht notwendigerweise für verschiedene Personen gleichermaßen.

Ggf. erfolgen aus dieser Beurteilung dann die Auswahl, das Verwerfen oder die Modifikation von Strategien.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] des hinschreiben ist wirklich wichtig also, dass man, sich überlegt wie machen wirs wie geh ich ran ok – aber wenn ich des nicht an nem konkreten beispiel einfach mal durchrechnen kann oder besser noch, jemanden des an einem konkreten beispiel erklären kann […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.197 – Student_2)
- „[…] den punkt könn mer bestimmen, den punkt könn mer wunderbar bestimmen, bringt uns des was […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.380 – Student_2)
- „[…] erstmal ausmultipilzieren weil des bietet sich an weil ich dann nachher ne abbildung, nee ne ableitung mein ich, machen will und dann halt ableiten und ähm die ableitung gleich null setzen – und dann jeweils die gerade stelle – ne – die, waagrechte oder so asymptote rauszufinden […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.297)
- „[…] im abi hab ich, nicht die scheitelpunktsform vorbereitet, also ich konnt se auswendig von nachhilfe her aber ich fand die recht unpraktisch für solche aufgaben […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.323)
- „[…]es is ja doch nicht schlecht die rechengesetze zu kennen und mal zu sehen was mer da immer falsch anwendet […]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.201)
- „[…] es is – find ich keine sehr saubere lösung, aber es machts deutlich einfacher um des prinzip dahinter zu verstehen – das heißt wenn mers – ein paar mal so gemacht hat wird’s deutlich leichter auch andere probleme ohne diese

zwischenschritte – über gleichungen zu lösen […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.283)

- „[…] ne längere und dadurch leichter verständliche lösung zu wählen […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.351)
- „[…] das heißt wenn jemand mit so ner form, von haus aus besser umgehen kann unds gerade um irgendein anderes problem zum verstehen geht dann würd ich die nehmen weil dass das konzept leichter verständlich macht […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.361)
- „[…] des wichtigste dabei find ich dass mer selbst drüber nachdenkt, und wenn mer nur drüber nachdenkt und aber kein schritt weiterkommt dann wird das nachdenken auch frustrierend, dementsprechend wenn mer dann nen kleinen schritt weiter is kann mer den im nachhinein noch verstehen, meistens hoffentlich, und von da aus eventuell durch weiteres nachdenken weiterkommen […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.385)
- „[…] der eigentliche lerneffekt kommt nur durchs nachdenken […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.389)
- „[…] ich find es auch ganz sinnvoll eigentlich - also problem ist, wenn wir jetzt hier auf der schrägen ding hier irgendwie, das kann man schon so machen, aber das man dann hier mit winkel und so rummachen, muss man dann schauen, wie man hier drauf kommt und dann auf die fläche, das ist ein bisschen umständlich […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.277 – Student_1)
- „[…] also was hat uns da jetzt genau gebracht […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.365 – Student_2)
- „[…] aber die ableitung gibt dir doch gar nicht die fläche an, das interessiert doch gar nicht, wo die ableitung am größten ist, ist doch nicht wo die funktion am größten ist […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.433 – Student_1)
- „[…] ne, aber ich finds zum beispiel auch allgemein blöd, das jetzt viele m und n nehmen, so dass man nichts mehr unterscheiden kann, wenn es dann an die tafel geschmiert ist, weil eigentlich kann man ja jeden buchstaben nehmen […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.473 – Student_2)
- „[…] ist halt besser verständlich, wenn man sich an konventionen hält, also den eher leistungschwächeren schülern in der elften klasse würde ich das hier jetzt

nicht so geben, weil der checkt nicht, was x und y ist und was a ist und sonst was, sondern da muss man sich ganz arg an die konvention halten, y von x und so [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.475 – Student_1)

Grenzen, Geltungsbereiche, etc.

Erfahrungsgemäß wird von Lernenden häufig übersehen, dass mathematische Aussagen und Verfahren von Bedingungen abhängen, die – auch im relativ „sicheren“ Bereich der Schulmathematik – nicht notwendigerweise in jedem Kontext (inner- wie außermathematisch) erfüllt sind, bzw. vorliegen. Für Mathematiker_innen dürfte die Frage danach, unter welchen Bedingungen eine Aussage wahr ist, bzw. ob diese Bedingungen in einem bestimmten Kontext erfüllt sind, zu den wichtigsten/zentralen Fragestellungen überhaupt gehören.

Metakognitiv gesehen, bestehen hier Bezüge zum Aufgabenwissen. Lernenden muss (oder kann) an erster Stelle (→) bewusst sein (→ Sensitivität), dass derartige Einschränkungen existieren (→ Aufgabenwissen), die mit zunehmender Erfahrung (in höheren Klassenstufen) an Bedeutung gewinnen. Dementsprechend sollte die (→) Überprüfung, ob bestimmte Bedingungen möglicherweise beachtet werden müssen, Teil der (→) Planungsphase von Denk- und Arbeitsprozessen sein. Dabei gilt es, zu (→) analysieren, welche (außergewöhnlichen) Bedingungen eine Rolle spielen könnten. So kann in der Schul-Analysis bspw. normalerweise die Grundmenge $\mathbb{R}$ vorausgesetzt werden. Zu beachten sind stattdessen Fälle, in denen bspw. in der Aufgabenstellung Teile der Grundmenge ausgeschlossen werden (z.B. $\{\mathbb{R}\backslash 0\}$), oder sich eine derartige Einschränkung durch den Aufgaben-Kontext ergibt, bzw. beim Erstellen der Zielfunktion erkannt wird (falls diese bspw. eine Nullstelle im Nenner des Funktionsterms, also bspw. eine Polstelle des Graphen aufweist).

Der (→) Vergleich mit bekannten Sachverhalten oder Aufgabenstellungen kann hierbei eine Hilfe sein. Eigenes Wissen muss also (→) überblickt, bzw. aktiv (→) durchsucht werden; (→) metakognitive Erfahrungen, die beim Umgang mit ähnlichen Aufgabenstellungen gemacht wurden, müssen (→) bewusst sein und (→) reflektiert werden und Mechanismen und Strategien, die von „zuvor“ bekannt sind, müssen (→) angepasst und im Hinblick auf das neue Problem (→) übersetzt werden.

Während des laufenden Prozesses sollte (→) überwachend darauf geachtet werden, ob sich anfangs geltende Bedingungen ändern, oder ob sich durch Berechnungen oder bspw. durch das Erstellen weiterer Funktionen zusätzliche Bedingungen ergeben, die beachtet werden müssen, bzw. wie sich die ursprünglichen und neue Bedingungen auf den Arbeitsprozess auswirken. Ggf. muss es dann zu (→) Anpassungen der verwendeten (→) Strategie kommen.

Rückblickend kann bspw. (→) reflektiert werden, woran erkannt werden kann, welche Bedingungen beachtet werden müssen.

Konkreter kann (→) reflektiert werden, welche Details dazu führen können, dass sich Bedingungen ändern, um dies für zukünftige Prozesse abzuspeichern. Bspw. können Divisionen oder das Ziehen von Wurzeln Fallunterscheidungen nötig machen. Entsprechende Erkenntnisse können ins deklarative Metawissen über Bedingungen (→ Aufgabenwissen) und entsprechende (→) Strategien integriert werden und als Basis für zukünftige (→) Analyse- und Planungsprozesse abgespeichert werden.

Speziell im Kontext der Analysis sind die folgenden (teils bereits angesprochenen) Beispiele denkbar:

- Beim Umgang mit Funktionen ist deren Definitionsbereich zu beachten. Diese können durch Aufgabenstellungen vorgegeben oder selbst erstellt werden müssen. Vor allem gebrochen-rationale Funktionen, Wurzel-Funktionen, Funktionen mit nicht-natürlichen (negativen oder gebrochenen) Exponenten oder Logarithmus-Funktionen können hier zu Problemen führen, wenn entsprechende Fälle nicht beachtet werden. „Problemfälle“, wie Nullstellen im Nenner eines Funktionsterms oder negative Werte unter „geraden Wurzeln“ müssen ausgeschlossen werden. Ergebnisse müssen daraufhin überprüft werden, ob sie im eingangs etablierten Definitionsbereich liegen. Es muss beachtet und geklärt werden, welche Bedeutung solche („Nicht-)Ergebnisse“ für den (→) Aufgabenkontext haben.
- Umgekehrt muss auch der Wertebereich von Funktionen beachtet werden. Liegen relevante Werte im Rahmen einer Aufgabe außerhalb des Wertebereichs einer Funktion, werden also von dieser nicht „angenommen“, kann dies bedeuten, dass die Aufgabe nicht lösbar ist, bzw. der betrachtete Fall keine Lösung im Sinne des Aufgabenkontextes darstellen kann. Fallen derartige Widersprüche nicht auf, weil die Eigenschaften der Funktion nicht beachtet werden, wird unter Umständen mit solchen Werten/ Ergebnissen weitergerechnet, ohne dass das Problem erkannt wird.
- Unter Umständen müssen Fallunterscheidungen getroffen werden.

Metakognitiv spielen hier unter anderem, wie gesagt, die Sensitivität, bzw. das Bewusstsein für die Existenz solcher potentiellen Probleme eine Rolle, damit sie entweder „automatisch“ bemerkt werden oder gezielt nach ihnen gesucht wird.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] ich halts für unwahrscheinlich, ehrlich gesagt, also wir haben einfach zu wenig angaben wir wissen einfach nicht wie groß wie hoch dieses dreieck is, wenn wirs jetzt, wir könnens abschätzen also wenn wenn wir sagen es is maßstabsgetreu können wir messen und können dann halt mit n kleinen messfehler das ganze ding berechnen aber, wir wissen weder hier diese höhe hier wissen wir nicht und, gut das seitlich wissen wir - aber wir wissen eigentlich hier diese höhe net, und das ist das problem [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.387 – Student_2)

Gezieltes Vorgehen – Auswahl und Design von Variablen und anderen Elementen

Eng zusammenhängend mit der prozeduralen (→) Planungs-Kategorie wird speziell der planerische Umgang mit mathematischen Elementen und Objekten betont, deren Konstruktion oder Auswahl beim Bearbeiten einer Aufgabenstellung „geschickter“ oder weniger „geschickt“ erfolgen kann, insofern, dass durch (→) strategisch sinnvolles Vorgehen bspw. Zeit eingespart oder unnötige Mühe erspart werden können. Allerdings erfolgen entsprechende Auswahl- und Belegungs-Vorgänge nicht ausschließlich in der (→) Planungsphase vor der eigentlichen Bearbeitung einer Aufgabe, sondern kommen möglicherweise regelmäßig während der Bearbeitung vor, sofern weitere Entscheidungen zu treffen sind. Hier bestehen offensichtlich Verbindungen zum (→) Strategiewissen, zur (→) Reflexion, zur Antizipierung von Auswirkungen, bzw. insgesamt zu Überwachungs- und Steuerungs-Vorgängen. Gemeint ist dabei bspw. die „taktisch geschickte“ Wahl von Variablen, die taktisch geschickte Wahl der Lage eines Koordinatensystems, die Unterteilung geometrischer Figuren in bekannte Teil-Figuren (z.B. in rechtwinklige Dreiecke anstatt einer weniger gut berechenbaren Unterteilung), etc..

Hierzu müssen also Sachwissen (→) überblickt, (→) sondiert und Möglichkeiten erkannt werden, die im Rahmen der vorliegenden Aufgabenstellung bestehen, wozu wiederum domänenspezifisch-metakognitives Aufgabenwissen benötigt wird.

Beispiel:

In Zusammenhang mit eigenen Vorlieben oder dem Wissen über eigene Schwächen und typische Fehler ließe sich bspw. an Konventionen festhalten, um Verwirrung zu vermeiden, indem „gängige" Variablen verwendet werden (f, x, y beim Umgang mit Funktionen). Ebenso könnten bspw. Variablen verwendet werden, die den Anfangsbuchstaben der Objekte oder der Größen entsprechen, für die sie stehen (z.B. s für Strecke, t für Zeit (auf Englisch: time) oder D für den Flächeninhalt eines Dreiecks).

Ist bereits eine Strategie angedacht worden, so ist (→) Strategiewissen vonnöten, um diese zu analysieren und zu entscheiden, an welchen Stellen Details variiert werden können, um sie zu optimieren.

Beispiel:

Denkbar ist hierbei bspw., bei einer Optimierungsaufgabe, wie der, die in der empirischen Erhebung verwendet wurde, den Ursprung eines Koordinatensystems so zu wählen, dass entsprechende Streckenlängen sich vergleichsweise einfach in Abhängigkeit der unabhängigen Variablen darstellen lassen, damit als Konsequenz eine strukturell besonders einfache Zielfunktion erstellt werden kann.

Liegt eine quadratische Zielfunktion vor, so ließe sich diese bspw. gleich zu Beginn in Scheitelpunktform (SPF) aufstellen oder umformen, wenn das Ablesen des Extremums in SPF dem Berechnen mittels Ableitung vorgezogen wird (→ Beurteilung von Schwierigkeitsgrad, Vorliebe, Zeitaufwand, etc.).

Im Hinblick auf derartige Optimierungen und die Frage, was sich im Rahmen der Aufgabenstellung oder Lösungsstrategie als „geschickt" oder „günstig" erweist, ist es nötig, die (→) Auswirkungen von Variationen zu bedenken und abschätzen zu können (→ Auswirkungen, Prognosen, Aufgabenwissen, etc.) und den (→) Nutzen verschiedener Auswirkungen gegeneinander abzuwägen.

Im Rahmen von (→) Überwachungsvorgängen finden solche Überlegungen auch während des laufenden Prozesses weiter statt.

Als weiteres Beispiel wäre es denkbar, beim Ableiten einer Funktion zu überprüfen, ob sich verschiedene Möglichkeiten des Ableitens ergeben. So können bspw. verkettete oder Produkte von Polynom-Funktionen ggf. ausmultipliziert werden und unter

Verwendung der Summenregel für Polynome abgeleitet werden, ohne dass die Verwendung der Produktregel notwendig ist.

Wie meist werden bei der Umsetzung der entsprechenden deklarativen Wissensaspekte (→) Steuerungsvorgänge nötig sein. Außerdem spielt die (→) Sensitivitäts-Kategorie eine Rolle, da für die (→) Notwendigkeit, entsprechend strategisch tätig zu werden, ein Bewusstsein bestehen muss, bzw. auf Grund (→) metakognitiver Erfahrungen und durch aufmerksames (→) Monitoring des Prozesses im entscheidenden Fall (→) bemerkt werden muss, dass (→) Handlungsbedarf besteht.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] ich sag mal theoretisch - es kommt darauf an, wie die quadratische gleichung gegeben ist, wenn man so eine form hat, ist es eigentlich relativ - okay gut ich sag mal, wenn ich jetzt die form hätte x quadrat plus 4 x plus 4 minus die 3 eingebaut, also minus 1, d.h. wenn ich diese form hätte, dann könnte man ja theoretisch das wieder zurück machen, in eine - so eine form, man sieht ja das x quadrat, man weiß ja, sei das jetzt einfach mal x, durch das 2 a b, teilt man es einfach durch zwei und weiß, dass eins davon dann x ist und dann kommt man auf die plus 2 [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.207)
- „[...] weil das halt äh - weil das - ich muss es ja für mich aufschreiben, wenn ich es als was anderes benenne als x und y und ich das dann für mich noch mal irgendwann lese, weil ich sonst durcheinander komme - die waagrechte achse wurde immer x - uns wurde das so eingetrichtert, dass das eigentlich immer x und immer mit x beschriften, dann muss ich das so durchrechnen, wenn ich das irgendwie aufschreibe, ist das immer x - sonst komme ich für mich durcheinander [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.153)
- „[...] aber da würd ich fast sogar des äh anders nehmen äh des koordinatensystem weil da unten is ja der fixpunkt also [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.209)
- „[...] am anfang is es deutlich leichter es zu verstehen, wenn es an einem markanten punkt liegt, aber sobald mers prinzip dann begriffen hat bzw oberflächlich begriffen hat ums zu vertiefen sollte des irgendwo anders liegen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.245)
- „[...] dann muss man sich halt nicht mit willkürlich definierten variablen strecken rumschlagen und dann in eine andere strecke und dann umrechnen oder so,

sondern jeder Punkt hat halt irgendwie eine bezeichnung

[...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.489 – Student_1)

Optimierung, bzw. Verbesserung kognitiver Prozesse und Handlungen

Da die Optimierung kognitiver Handlungen ein Ziel zahlreicher metakognitiver Aspekte (und mathematischer Aufgabenstellungen) darstellt, scheint es sinnvoll, sie als eigenen Punkt exemplarisch anzusprechen.

Optimieren lassen sich verschiedene Prozesse, die mit Kognition (und Metakognition) einerseits oder mit dem Umgang mit Mathematik (der ja letztlich ebenfalls in Form von Kognition (und Handlungen) stattfindet) zusammenhängen. Ihre Optimierung kann deshalb als Metakognition, bzw. als Ziel metakognitiver Überlegungen gesehen werden (→ exekutiver Aspekt); Wissen um die Optimierung kognitiver Prozesse als metakognitives Wissen. Vermutlich ließe sich die Optimierung (oder zumindest Verbesserung) von Kognitionen als das zentrale Ziel von Metakognition – zumindest im Hinblick auf Leistung und den Erfolg von Lernprozessen – bezeichnen.

Hierbei spielen mit Sicherheit alle deklarativen und prozeduralen Ober-Kategorien eine Rolle.

An erster Stelle (zeitlich gesehen) dürften die Überwachung von Denk- und Arbeitsprozessen, die dabei gemachten (→) metakognitiven Erfahrungen und deren (→) Reflexion stehen. Es muss (→) beurteilt werden, welche Kognitionen, Handlungen, etc. sich als (→) nützlich und (→) effizient erwiesen haben und bei zukünftigen Prozessen Zeit und Aufwand ersparen und Risiken mindern können, oder welches Lernverhalten bspw. zu einem besonders nachhaltigen Lernerfolg führt.

Später muss das dadurch erworbene deklarative Wissen im richtigen Moment (bei Prozessen, in denen es hilfreich sein kann – z.B. bei ähnlichen Herausforderungen) erinnert werden; Erinnerungen sollten gezielt (→) durchsucht werden. Dazu muss Lernenden die Möglichkeit, Prozesse zu optimieren, indem (→) metakognitive Erfahrungen und Metawissen genutzt werden, (→) bewusst sein.

Im Folgenden kann das aktivierte Metawissen gezielt zur (→) Planung eingesetzt werden.

Bei der Umsetzung der geplanten Handlungen und Kognitionen gilt es, den laufenden Prozess einerseits im Hinblick auf Ziele, „Funktionieren“ und notwendige Anpassungen hin zu (→)

überwachen und ihn andererseits rückblickend mit den oben angesprochenen Erfahrungen und dem Metawissen über Optimierung (→) abzugleichen, um ggf. steuernd (→) einzugreifen.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] dann ham wir den stress net […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.178 – Student_2)
- „[…] ich hab auch in mathe eins gesehen was an der vorbereitung was, was es ändert, is die zeit die man für ne prüfung braucht
[…]“ (Interview_Transkript_06_x2_239 – Student_2)
- „[…] lso grad grad bei der vektorrechnung ham wir uns da, bisschen das leben manchmal des leben einfach einfacher gemacht
[…]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.579 – Student_2)
- „[…] bei dem ursprung ist ja da der fixpunkt, der immer in der platte drin is und dann is es leichter dadraus ne funktion zu bilden
[…]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.215)

Lernprozesse – Personenwissen, Überwachung und Steuerung

Unter dieser Ausprägung ist Wissen zusammengefasst, das Lernende über ihre eigenen Lernprozesse und die für diese relevanten Faktoren besitzen. Dabei handelt es sich um eine sehr „klassische“ Ausprägung von Metakognition, die in der Geschichte der Metakognitionsforschung seit jeher von zentraler Bedeutung ist. Insbesondere spielt hierbei auch die Steuerung von Lernprozessen eine Rolle, die sich aus explizitem wie implizitem Metawissen über solche Prozesse ergibt. Elemente dieses Aspekts sind Metawissen über Funktionen des kognitiven Systems – z.B. des Gedächtnisses, über Mechanismen von Lernprozessen und über mögliche Strategien zur Optimierung solcher Prozesse. Dieses kann sowohl allgemeiner Natur sein als auch spezifisch auf („typische“) Eigenschaften des eigenen Systems und eigener Prozesse bezogen sein. Dabei spielt Wissen darüber eine Rolle, welche Strategien für die eigene Person besonders effektiv funktionieren oder welche Lern-Inhalte typischerweise mehr oder weniger Schwierigkeiten bereiten und deshalb besonders gründlich eingeprägt werden müssen. Es zeigen sich also bereits in dieser allgemeinen Beschreibung Bezüge zum Personen- und Strategiewissen sowie zum systemischen und epistemischen Wissen, wie es bspw. von Hasselhorn (etwa 1992) behandelt wird. Dass eigene Lernprozesse überwacht und ggf. angepasst werden können und müssen, zeigt den Bezug zur Überwachungs-Kategorie. Außerdem stellt sich die Frage, wie sicher Inhalte bereits verinnerlicht wurden, bzw. in welchen Bereichen Lernbemühungen noch intensiviert werden müssen. Dazu müssen Lernende in der Lage sein, entsprechende Beurteilungen des eigenen Fortschritts vorzunehmen. Dies ist sowohl in einer bewussten wie unbewussten Form vorstellbar. Es bestehen also offensichtlich auch Beziehungen zur Sensitivitäts- oder Awareness-Kategorie sowie zu Metakognition bzgl. des eigenen Verständnisses.

Unter anderem beim Umgang mit Mathematik lassen sich möglicherweise Lernprozesse metakognitiv ähnlich systematisieren, wie dies in der Fachdidaktik bei der Konzeption von Unterricht stattfindet. Lernende können – sicher weniger formalisiert, als dies durch Lehrkräfte geschieht – Lernziele formulieren, die zu erreichen sind, bzw. überwachen, wie weit diese bereits erreicht wurden. Hierbei ist es wieder nützlich, über ein „Gespür" für das eigene Verständnis und die eigene Sicherheit beim Umgang mit Mathematik zu verfügen sowie über entsprechendes Personenwissen und domänenspezifisches Aufgabenwissen darüber, welche zu lernenden Inhalte bspw. mit einem bestimmten mathematischen Begriff verbunden sind.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] es ist es kommt drauf an also wenn ichs schon so einigermaßen verstanden hab dann am liebsten alleine dass ich allein ein bisschen knobel und selbst dann mein schluss zieh weil dann hab ichs wirklich verstanden
  [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.123)
- „[...] ich bin gelegentlich gefragt worden ob ich denn mal was erklären kann, da hab ich auch gemerkt dass des hilft des besser zu verstehen, sowohl der person der mans erklärt, mit n bisschen glück zumindest, als auch mir selbst
  [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.75)
- „[...] dadurch dass mer des ganze aus nem anderen blickwinkel angeht, nämlich nicht nur versucht des zu verstehen sondern – des so zu verpacken dass es verständlich ist, und nach möglichkeit noch in nem anderen weg als es schon erklärt wurde
  [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.79)
- „[...] der eigentliche lerneffekt kommt nur durchs nachdenken
  [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.389)
- „[...] erklären allgemein, bringt einem normalerweise viel, also auch wenn man im mathestudium zusammen arbeitet, in den übungsgruppen und so, das haben wir im

vorkurs auch schon erfahren, da bringt es ehrlich gesagt schon was, etwas zu erklären […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.33 – Student_1)

„Typisches Verhalten“

Vorwiegend in Beziehung mit der deklarativen Kategorie „Personenwissen“ wird Wissen über und Umgang mit „typischen Denk- und Verhaltensweisen“ (der eigenen Person) im Rahmen der erweiterten Beschreibung des Kategoriensystem behandelt. Dieser Entschluss ist vor allem dem relativ häufigen Auftreten entsprechender Äußerungen in der empirischen Erhebung des Projekts geschuldet.

Gemeint ist hierbei z.B. Wissen darüber, welche Denkweisen für das eigene Denken typisch sind, oder sogar bevorzugt werden, weil sie erfahrungsgemäß häufig zu aussichtsreichen Ideen oder Lösungsstrategien führen.

Eine Rolle spielen dabei (→) metakognitive Erfahrungen (und ggf. deren bewusste (→) Reflexion), die beim Umgang mit Mathematik gemacht wurden, indem entsprechende Denkweisen positive oder negative Auswirkungen hatten und dementsprechend abgespeichert wurden. Wie bewusst Lernenden diese Erfahrungen sind und ob sie daher bewusst reflektiert oder beurteilt werden können, dürfte von Person zu Person verschieden sein – ein Umstand, der sich auch bei der Durchführung der Interview-Studie angedeutet hat.

Ebenso von Bedeutung sind hierbei Wissen über häufig gemachte Denk- oder Flüchtigkeitsfehler und Überlegungen und Wissen darüber, wie sich diese vermeiden lassen. Hier spielen in konkreten Denk-, Arbeits- und Lernprozessen die (→) Überwachungs- und Awareness-Kategorie eine Rolle; es muss aktiv untersucht werden, ob Situationen vorliegen, in denen derartige Fehler häufig auftreten, sowie überprüft werden, ob Fehler gemacht werden. Ebenso besteht die Möglichkeit, dass entsprechende Situationen und Fehler bei entsprechender (unbewusster) (→) Aufmerksamkeit „auffallen“, ohne dass aktiv nach ihnen gesucht/ „Ausschau gehalten“ wird. Zu überprüfen dürfte allgemein sein, woran sich entsprechende Risiken normalerweise erkennen lassen.

Weiterhin spielt Wissen über Gewohnheiten eine Rolle, die sich prinzipiell nicht als positiv oder negativ bewerten lassen, aber durch ihr häufiges Auftreten vertrauter sind als alternative Denkweisen oder Strategien. Entsprechend lassen sich hieraus Folgerungen (→ Steuerung) für das eigene Verhalten ziehen. Bspw. könnten in Prüfungssituationen oder zu Beginn einer Unterrichtsphase gewohnte Arbeitsweisen (u.Ä.) bevorzugt werden, um sich (gedanklich, strategisch) „auf sicherem Terrain“ zu bewegen und kognitive Ressourcen nicht zusätzlich zu belasten. Andererseits könnten in „sicheren“ Situationen und bei ausreichend verfügbaren kognitiven Ressourcen absichtlich Gewohnheiten durchbrochen werden, um sich mit alternativen Denkweisen (u.Ä.) vertraut zu machen und das eigene Strategie-Repertoire zu erweitern, bzw. schlicht Lernprozesse und Weiterentwicklung zuzulassen.

Ebenso könnte darauf geachtet werden (→ Überwachung), dass gewohnte und „eingeschliffene“ Verhaltensweisen den Blick auf Alternativen einschränken könnten, und dem aktiv entgegengewirkt werden (→ Steuerung), indem versucht wird, bewusst andere (→) Perspektiven in den eigenen Denkprozess miteinzubeziehen, oder nach alternativen Informationsquellen zu suchen.

Insgesamt gilt es für Lernende, sich der Existenz derartiger typischer Eigenschaften, Denk- und Verhaltensweisen (→) bewusst zu sein, ihre Auswirkungen auf den Umgang mit Mathematik zu (→) reflektieren und für das eigene Verhalten (→) Konsequenzen zu ziehen, um diese zu (→) nutzen, bzw. zu vermeiden.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] das is nur menschlich, des is ganz normal - weil wenn man wenn man ne reihenfolge hat dann kann man sich die dinger in kleinen ich sag mal schüben merken, also äh ich kann das zwar jetzt unterstützen aus auswendig lernen ich hass das auch, über alles […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.237 – Student_2)
- „[…] weil des so meine rechenregel wie gesagt ich lern immer und vergess es danach deswegen halt dann mal potenzgesetz falsch angewendet oder so und da lag halt dann meistens auch der fehler oder einfach n vorzeichen nicht mit abgeschrieben oder sowas halt […]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.193)
- „[…] für mich wirklich typisch sind leichtsinnsfehler weil ich der meinung bin was verstanden zu ham, habs auch soweit verstanden und geh dann demensprechend schnell drüber und […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.87)
- „[…] flüchtigkeitsfehler passiert mir persönlich ehrlich gesagt relativ oft […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.77)
- „[…] also wenn ich dann irgendwie mich so an einer lösung festgekrallt hab und ähm ich einfach an dieser, an diesem lösungsweg nicht weiter gekommen bin, dann, erstmal aufstehen ne kleine runde laufen und dann wieder sich hinsetzen,

und dann hat mer diesen lösungsweg n weng weg ausm kopf und dann kann mer dann ist mer auch wieder offen für neue […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.161)

- „[…] ich bin ehr ein fan vom ausmultiplizieren […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.337)

Nutzen von Hinweisen u.Ä.

Beim Umgang mit Mathematik – bspw. beim Entwickeln und Durchführen von Problemlösungs-Strategien – spielt zweifellos der Umgang mit neuen Erkenntnissen, zusätzlichen Informationen (bspw. in Form von externen Ratschlägen und Hinweisen) eine große Rolle, gerade dann, wenn beim Lernen und Einüben neuer Inhalte diese noch nicht gefestigt sind und Themen noch nicht „vollständig“ überblickt und durchdrungen werden. Was

Metakognition betrifft, stellt sich dabei z.B. die Frage, ob solche neuen Informationen (doch) bereits teilweise bekannt sind, bzw. bei anderen Aufgaben schon in ähnlicher Form verwendet wurden. Weiterhin ist mit Sicherheit nötig, zuerst zu klären, ob diese neuen Informationen für die eigene Person überhaupt Sinn ergeben, ob – zumindest teilweise – verstanden wird, inwiefern diese mit der vorliegenden Aufgabe (Problem, Thema, Lerngegenstand) zusammenhängen und mit welchem Zweck diese ggf. von bspw. einer Lehrperson angesprochen/ gegeben wurden, wie und an welchen Stellen sie sich in den ablaufenden Denk-, Lösungs-, Lernprozess gewinnbringend integrieren lassen. Eine Rolle spielen hier also Personenwissen („Sind Inhalte schon bekannt?“, „Werden sie verstanden?“), Aufgabenwissen („Wie hängen neue und bekannte Inhalte zusammen?“, „Mit welchem Ziel wurden sie eingebracht?“), Strategiewissen („Wie können diese in die entwickelte Strategie integriert werden, wie diese verbessern, wie entstandene Schwierigkeiten lösen?“) und Überwachungs- und Neu-Planungs-Aktivitäten (Die aktuell verwendete Strategie muss überwacht werden/ worden sein, um auf Schwierigkeiten aufmerksam zu werden, es muss beurteilt werden, an welcher Stelle einer geplanten Strategie Hinweise eine Verbesserung bedeuten können, etc.). Offensichtlich spielen also auch Beurteilungen und Prognosen eine Rolle sowie allgemein die Frage nach Ziel und Zweck der zu Grunde liegenden Aufgabe und das Durchsuchen und Abgleichen eigenen Wissens und eigener Erinnerungen. Die hier beschriebene Ausprägung von Metakognition legt ihren Fokus auf die Aspekte (bzw. auf die Fragestellungen und Aktivitäten), die gezielt dazu dienen, bzw. dabei zum Tragen kommen, Informationen oder Hinweise zu analysieren, in eigene Strategien einzuordnen, auf ihren Nutzen hinsichtlich des gesetzten Ziels zu beurteilen und tatsächlich in die eigene Strategie zu integrieren.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] gucken was gibt's raus, kann ich des so machen, nein, gut nächsten ansatz - ich kam am schluss dann auch drauf mit dem springenden punkt der war, hilfreich [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.464 – Student_2)
- „[...] achso ja so war das - jetzt wo du es sagst, sagt mir das alles wieder was [...]" (Interview_Transkript_01_x1_Z.191)
- „[...] mit dem frust is schwierig umzugehen des, lässt sich eigentlich nur, damit umgehen indem mers probiert, und drauf hoffen dass es dann irgendwie funktioniert – und an den aufgaben probier ich mich dann und wenns nicht klappt, dann frag ich jemand anderen nachm tipp, zumindest nachm ansatz oder nachm teil vom ansatz und damit versuchen weiterzukommen [...]" (Interview-Transkript)
- „[...] achso du meinst ein koordinatensystem hier reinzulegen [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.381)

Nutzung von Erklärungen u.Ä. anderer Personen

Unter anderem werden unter dieser Überschrift metakognitive Aspekte zusammengefasst, die dabei helfen, Verhalten und Äußerungen anderer Personen für den eigenen Umgang mit Mathematik gewinnbringend zu nutzen.

Metakognitiv ist dabei unter anderem die Interpretation entsprechender Äußerungen dahingehend, welche Absichten, Ideen, etc. hinter dem Gesagten stehen; es muss also über die Kognition anderer Personen nachgedacht werden (vgl. auch „Theory of Mind", Kapitel 2).

Diese – angenommenen – Kognitionen müssen wiederum mit der eigenen Kognition in Beziehung gesetzt und für das eigene Verhalten genutzt (→ Steuerung) werden. Es ist zu überwachen und zu überprüfen – sofern möglich – ob die eigene Interpretation des Gesagten zutreffend ist (bspw. durch Nachfragen), ob die Aussage der anderen Person(en) (→) verstanden wird und ins eigene Wissen (→) eingeordnet werden kann. Hierbei sind also allgemein (→) Personen- und Aufgabenwissen (im Sinne eines (→) Überblicks über eigenes (Fach-)Wissen sowie eine (→) Überwachung des eigenen Verständnisses) und (→) Einordnungs-/Beurteilungsprozesse (sowohl allgemein als auch ggf. fachspezifisch) notwendig.

Daraufhin muss geklärt werden, inwiefern sich die Äußerungen anderer (Hinweise, Hilfestellungen, Erklärungen, etc.) für das eigene Lernen, Verständnis oder für konkrete Aufgabenstellungen nutzen lassen. Zusammenhänge mit eigenen (offenen) Fragen müssen hergestellt, Aussagen in eigene Formulierungen übersetzt, Informationen mit Problemstellungen verglichen werden, um zu beurteilen, welche neuen Erkenntnisse hilfreich sein können und welche weiteren Ideen, Strategien, Lösungsmethoden sich aus ihnen entwickeln lassen, welche Verständnislücken durch sie möglicherweise geschlossen werden können. Auch hierbei spielen also Personen- und vor allem Aufgaben- und Strategiewissen eine Rolle. (→) Beurteilungen im Hinblick auf „Nutzbarkeit“ und „Passung“ zu gegebenen Problemen müssen vorgenommen werden. Die vorliegenden Probleme und die sich ergebenden Möglichkeiten müssen analysiert werden, es muss (ggf. unbewusst) erkannt werden (→ „Awareness“), wo sich Zusammenhänge ergeben oder schaffen lassen.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] wenn andere leute mir ne idee liefern dann versuch ich natürlich mit der auch weiterzukommen als obs meine eigene wär
[…]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.419)
- „[…] manchmal – ich sag mal manche denkweisen kommt man nicht so da kommt man halt nicht hinterher aber, wenn ja wenn mer des dann sagt so hey ich versteh nicht wie bist du denn jetzt auf da und dann schreibt er vielleicht die zwei schritte die er da noch im kopf gemacht hat auf das blatt dann, ja ok so rechnest du
[…]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.133)
- „[…] stellenweise wie gut mans halt kann also wenn mer schon ziemlich gut geübt hat dann reicht ein kurzer hinweis wenn merrs halt vielleicht des erste mal macht dann muss man es halt ganz erklärt bekommen
[…]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.191)

„Ausprobieren“ und Kreativität

Gemeint ist das „Ausprobieren“ verschiedener Lösungsansätze beim Umgang mit Aufgabenstellungen, für die auf Anhieb keine („sichere“) Strategie bekannt ist; es geht also hier um den Versuch, bei Unwissen (weil bspw. keine (→) bekannten, ähnlichen Aufgabenstellungen und entsprechende Strategien erinnert werden) Lösungsversuche zu unternehmen und dabei möglichst effizient zu einer funktionierenden Strategie zu gelangen. Gemeint ist also kein undurchdachtes „Drauflos-Arbeiten“, sondern ein (→) überwachtes, begleitetes und (→) reflektiertes, (→) beurteiltes Vorgehen, das dazu dient, Erinnerungen zu aktivieren und/ oder (neue) Ideen zu generieren; sozusagen eine Art metakognitiv begleitetes, systematisches „Brainstorming“.

Können (→) planerische Aktivitäten aus Mangel an Einfällen vorerst nicht in ausreichendem Ausmaß vorgenommen werden, so kann dennoch eine Analyse bestehenden Wissens und ein Heranziehen – in irgendeiner Art – ähnlicher Aufgaben von Nutzen sein. Transferierbarkeit ist hierbei entsprechend zu (→) beurteilen. Können hierbei – wie angesprochen – auf Anhieb keine (aussichtsreichen) Strategien übertragen werden, so lassen sich möglicherweise doch gewisse Ansätze ausmachen, die probehalber verfolgt werden können.

Diese Probe-Ansätze gilt es nun zu überwachen und auf ihr Funktionieren und ihre Erfolgsaussicht für die zu bewältigende Aufgabe hin zu überprüfen. Es gilt zu überwachen, ob sich im laufenden Prozess noch Fortschritte/Veränderungen ergeben, oder ob man sich gedanklich „im Kreis dreht“/ „auf der Stelle tritt“, was ggf. zu einem Verwerfen dieses Ansatzes führen sollte. In diesem Fall könnte (→) reflektiert und analysiert werden, welche Teil-Strategien dieses Ansatzes dennoch aussichtsreich sein und weiterverwendet werden könnten. Für „metakognitiv aktive“ Lernende wäre es hierbei also notwendig, ein Bewusstsein oder Gefühl dafür zu haben, woran sich erkennen lässt, ob Arbeits- und Denkprozesse noch „vorangehen“ oder in eine „Sackgasse“ laufen. Hier können Beurteilungsprozesse (im Hinblick auf Zeit, Ressourcen, Aufwand, etc.) eine Rolle spielen, aber auch die „Awareness“-Kategorie, sowie Aufgaben- und Strategiewissen allgemein, die Indizien für Fortschritt oder Stagnation liefern. Je mehr metakognitive Erfahrungen, also Erfahrungen, die beim Umgang mit Mathematik im Hinblick auf diese Fragestellungen gemacht wurden, hierzu vorliegen, desto eher dürfte vermutlich ein „Gefühl“ dafür bestehen, wie entsprechende Ansätze zu bewerten und wann (unter welchen Umständen) sie ggf. anzupassen oder zu verwerfen sind.

Diese Vorgehensweise kann ebenfalls dem Provozieren spontaner Ideen, bzw. Einfälle dienen, die sich durch die Beschäftigung mit der Aufgabenstellung und Strategieansätzen einstellen. Dabei müssen Lernende über ein Bewusstsein für solche Ideen verfügen; sie wahrnehmen, beurteilen und zur Strategie-Entwicklung verwenden können.

Ähnliche heuristische Arbeitsweisen wurden bspw. bereits von Pólya (vgl. Kapitel 2.3.1) behandelt.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] grad wenn ich jetzt kein konkretes problem hab, schau ich halt mir an, was was kann ich aufs extreme treiben also wenn ich irgendwas gegen null gehen lass was gegen unendlich gehen lass […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.177 – Student_2)
- „[…] was ich oft mache wenn ich irgendwie – keine ahnung hab des hat mir auch n lehrer mal gesagt als tipp aber, ich glaub des hab ich vor allem in mathe schon so halt gemacht - ich nehm die sachen die da stehen, und mach einfach alles mögliche mit denen, alles was man halt machen kann, wird gemacht und dann vielleicht bringt ja der eine schritt, dann machste wieder sachen, und dann kommt man irgendwie dann doch schon aufs ergebnis oft […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.592 – Student_1)

Nutzung bekannter Strategien und Lösungsansätze auf Grund von Erfahrungen mit ähnlichen Problemstellungen

Ganz im Sinne Pólyas meint diese Ausprägung das Übertragen von bekannten Strategien (z.B Problemlöse-, Beweis- oder Modellierungs-Strategien) auf andere, ggf. ähnliche Aufgabenstellungen.

Metakognitiv fallen hierbei verschiedene Aufgaben, bzw. Handlungen an. Zum einen ist ein Überblick über, bzw. aktives Durchsuchen des eigenes/n Wissen(s) vonnöten, um einerseits zu klären ob Aufgabenstellungen bekannt sind, die der aktuellen Aufgabenstellung auf eine Art ähneln, die einen gewissen Nutzen für das aktuelle Problem erwarten lässt. Im Folgenden müssen zugehörige Bearbeitungs-/Lösungsstrategien erinnert und analysiert werden. Einerseits müssen also Erinnerungen sondiert werden, andererseits muss beurteilt werden, ob bekannte und neue Aufgaben sich ähnlich sind. Dabei muss insbesondere beurteilt werden, nach welchen Kriterien diese Ähnlichkeit zu beurteilen ist, in welcherlei Hinsicht sich also Probleme ähneln müssen, damit entsprechende Strategien übertragen werden können. Hierbei spielen also Aufgaben- und Strategiewissen (vor allem aus der domänenspezifischen Komponente) eine Rolle, sowie Personenwissen (über eigene Erinnerungen).

Des Weiteren muss analysiert werden, welcher Art Unterschiede zwischen den entsprechenden Problemstellungen sind und inwiefern sich diese Unterschiede auf die bekannten Strategien auswirken; es muss geklärt werden, ob diese Unterschiede ein Übertragen der bekannten Strategien erlauben, bzw., wie sich diese ggf. verändern und anpassen lassen, um die aktuelle

Aufgabe zu bearbeiten. Hierzu müssen also eigenes (spezifisches) Aufgaben- und Strategiewissen und -verständnis sowie Fachwissen reflektiert werden, mathematische Sachverhalte und Strategien verglichen, sowie Unterschiede und Ähnlichkeiten eingeordnet und Nutzen und Machbarkeit von Adaptionen beurteilt werden.

Offenbar sind hier also (→) Übersetzungs- und Vergleichs-Prozesse vonnöten, um zu klären, welche Teilaspekte bekannter Strategien mit welchen Eigenschaften/Bedingungen bekannter Aufgaben zusammenhängen und wie sie sich bei Veränderungen verhalten.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] zum beispiel weiß ich noch dass ähm – wir da die, integralregeln so die besonderen wenn da zum beispiel beim bruch die ableitung im zähler steht und äh die funktion halt unten dran, ähm – das hattn wir da in der stunde halt grad gemacht gehabt, und ähm, dann ham wir halt aufgaben dazu gemacht – und dann is mir des irgendwie aufgefallen, hm ja, irgendwie n bruch ok des war naja neu, und dann hab ich mir gedacht ok wo hab ich schon mal n bruch gesehen ok bei den neuen, ähm besonderen fällen, dann is mir aufgefallen ok da is n bruch, hab ichs verglichen, da is mir dann aufgefallen dass es halt eben, genau der fall is […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.292 – Student_1)
- „[…] vielleicht könnt mer sich jetzt denken was mer in der schule gemacht hat […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.419 – Student_2)
- „[…] in der schule waren die aufgaben meistens alle recht ähnlich gestellt oder hatten immer so n schema und ähm dann hattest du - also konnte man schon ahnen also wenn, n paar werte halt gegeben sind und je einer wird gesucht, dann hast du noch ne aufgabe im hinterkopf gehabt die halt dasselbe war, und dann konntest du dieses schema x halt drauf anwenden einfach, und dann hattest du die aufgabe gelöst […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.97)
- „[…] entweder halt ähm versuchen, bezug zu anderen aufgaben herzustellen die schon gelöst wurden oder sich das einfach mal vorzustellen wie das jetzt gemeint wurde vielleicht auch sogar mal nachspielen, ähm, vor allem so keine ahnung urnenaufgaben oder so kann man ja recht leicht ma nachsimulieren […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.103)

- „[...] ich versuche mir, mich zu erinnern wie wir des immer gelöst ham [...]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.223)
- „[...] dann eben rechenweg verglichen, zwischen der beispielaufgabe die vorgerechnet wurde und wie ichs da gerechnet hab [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.57)
- „[...] dann bin ich zunächst mal davon ausgegangen dass ich für die andere aufgabe das konzept hab leicht abwandeln müssen und dann, geschaut hab worin die abwandlung denn besteht, um dadraus wieder rückschlüsse aufs konzept zu ziehen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.61)
- „[...] ich setz mich hin und überlege und dann fällt mir ein, so könnte es gehen oder könnte es sogehen, manchmal helfen so assoziationen, oft sind es ähnliche vorgehensweisen, die bei den aufgaben funktionieren, also wenn ich irgendwie einen gewissen aufgabentyp schon gemacht hab, dann kommt man dann meistens drauf, dass man eben den ansatz den man schon mal angewendet hat, eben nochmal hier auch anwenden kann, das ist jetzt ein blödes beispiel induktion, wenn die einmal funktioniert hat, dann probieren wir es bei einem ähnlichen problem einfach wieder zum beispiel oder ähm irgendwie ähm - einen einfachen widerspruch oder so, wenn man schon mal eine ähnliche aufgabe hatte, dann assoziert man die irgendwie und kommt auch drauf - wenns ein komplett anderer typ ist an aufgabe, die man, die ich zuvor noch nie gemacht hab, dann dauert es halt sehr lange [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.59 – Student_1)

Fehleranalyse und Lernen aus Fehlern

Aus metakognitiver Sicht spielt hierbei sicher die Analyse eigener Denkprozesse eine Rolle, daraufhin, welche (Fehl-)Vorstellungen vorliegen, welche Überlegungen zu einem (fachlich, logisch) falschen Schluss führen könnten oder geführt haben könnten, welche Ursachen ihrerseits zu derartigen Vorstellungen und Überlegungen geführt haben könnten und wie sich diese identifizieren lassen und wie sich mit ihnen umgehen lässt.

Als „erster Schritt“ eines diesbezüglichen Reflexionsprozesses könnte die Frage geklärt werden, welche Möglichkeiten zur Verfügung stehen, um Fehler zu erkennen/ wahrzunehmen, was mit den Kategorien „Awareness“ und „Analyse“ zusammenhängt. Insbesondere wäre zu klären, welche Arten von Fehlern beim eigenen Denken, bzw. beim Umgang mit Mathematik (im Fall der eigenen Person) überhaupt (typischerweise) auftreten, grundsätzlich möglich sind und wie sich diese einordnen/kategorisieren lassen, was mit der Beurteilungs-/Einordnungs-Kategorie zusammenhängt.

Dabei kommen nicht-fachspezifische „Fehler“ oder ungünstige Verhaltensweisen in Frage, wie bspw. Unaufmerksamkeit, was durch den aktiven Versuch, sich besser zu konzentrieren behoben werden könnte, bzw. dadurch, dass die eigene Aufmerksamkeit beim Arbeiten und Nachdenken besser überwacht, öfter überprüft wird.

Auch überwachend gilt es, Denkfehler, Flüchtigkeitsfehler o.Ä. zeitnah wahrnehmen, erkennen und identifizieren zu können, um anschließend korrigierend (→ Steuerung) eingreifen zu können.

Dies kann zu einer simplen Korrektur, einer Anpassung der eingeschlagenen Strategie führen, oder aber zur Erkenntnis, dass sich diese unter den neuen Bedingungen nicht weiterverfolgen lässt, da ihr Funktionieren mit dem identifizierten „Fehler“ zusammenhing.

Retrospektiv können Denkprozesse als Ganzes überblickt und auf Fehler, Fehlvorstellungen oder ungünstiges (Denk-)Verhalten und ihre Rolle im Gesamtprozess hin analysiert werden. Dabei können bestimmte Details zuerst einmal als Fehler (o.Ä.) identifiziert werden, wobei die Frage, ob sich ein bestimmter Gedanke oder eine bestimmte Handlung als „falsch“ erweisen, von ihrer Bedeutung für den Prozess abhängen dürfte. Es können (→) Ursachen gesucht werden, die diesen Fehlern zu Grunde liegen, die Art ihrer Entstehung kann im Detail nachvollzogen und auf (typische Denk-)Muster hin überprüft werden, woraufhin geklärt werden kann, inwiefern sich derartige Probleme in Zukunft vermeiden lassen können. Diese Überlegungen können ausgedehnt werden, indem ähnliche Situationen und Aufgabenstellungen in Betracht gezogen werden, in denen die identifizierten „Fehler“ ebenfalls eine Rolle spielen könnten, um die gewonnenen Erkenntnisse zu übertragen und möglicherweise zu generalisieren, indem von konkreten Aufgabenstellungen abstrahiert und Erkenntnisse auf den Umgang mit Mathematik, bzw. auf eigene Denkprozesse im Allgemeinen angewendet werden.

Solche Überlegungen, Identifizierungen, Analysen etc. spielen natürlich vor allem in Bezug auf fachspezifische Fehler eine Rolle. Hier sind Aufgaben- und Strategiewissen entscheidend. Es müssen Indikatoren bekannt sein, bzw. im Verlauf von Analyse- und Reflexionsprozessen ausgemacht werden, anhand derer erkannt werden kann, dass Fehler irgendeiner Art gemacht wurden.

Typische Beispiele sind hierbei das Auftreten von Ergebnissen, die nicht in der betrachteten Ergebnismenge liegen (z.B. negative Zahlen bei erwartetem natürlichem Ergebnis), Extremstellen, die außerhalb des für eine Aufgabenstellung relevanten Bereichs liegen, oder Ergebnisse, die im Rahmen eines Realwelt-Zusammenhangs unrealistisch (z.B. zu groß oder zu klein) sind.

Hier bestehen offensichtlich Zusammenhänge mit den Sinn- und Plausibilitäts-Kategorien und mit der Reflexion über Fachwissen, bzw. über Mathematik an sich.

Des Weiteren müssen Strategien daraufhin analysiert werden können, ob Denkfehler, die während ihrer Entwicklung gemacht wurden, korrigiert werden können und die Strategie angepasst werden kann, oder ob zur Erreichung des verfolgten Ziels ein anderer Ansatz gefunden werden muss, weil die ursprüngliche Strategie von dem als fehlerhaft erkannten Detail abhing und nicht modifiziert werden kann.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] das ist nicht wichtig aber ich schreib so viel da weil ich hier dann schon das plusminus nicht beachtet hab [...]" (Interview_Transkript_02_x1_Z.273)
- „[...] ich kanns ja einfach mal ausprobieren also, es is, ich weiß dass des falsch is aber, irgendwie so – dann kann man des ausklammern dass des schöner ausschaut [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.319)
- „[...] das ist ne gute frage ich – würd es vermutlich vom schüler abhängig machen ob ichs erst nochmal, auf dem gleichen weg probier obs dann besser wird und dann erst nen anderen, nehm oder gleich den anderen [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.83)
- „[...] sich nicht auf einen weg einzuschießen, da sonst dauert es ewig und meistens kommt nichts dabei raus [...]" (Interview_Transkript_05_x2_Z.85 – Student_1)
- „[...] ja das kann man schon sagen, wenn man öfters mal die erfahrung macht, das wenn man sich auf einen lösungsweg nur beschränkt, das man dann, da kommt man einfach nicht weiter und da muss man viele ausprobieren, bis man irgendwas findet [...]" (Interview_Transkript_05_x2_Z.87 – Student_1)

„Notwendigkeit“

Diese Ausprägung bezeichnet die (bewusste und unbewusste) Auseinandersetzung damit, ob in einer bestimmten Situation (z.B. beim Beweisen oder bei der Bearbeitung von Problemlöse- oder Modellierungsaufgaben), bzw. im Verlauf eines (schrittweisen) Arbeits- oder Denkprozesses (zusätzliche) Überlegungen oder Handlungen notwendig sind. Hierbei kommen verschiedene Arten von „Notwendigkeit“ in Frage. Im Bereich nicht-fachspezifischer Planungsaktivitäten ließen sich vergleichsweise „banale“ Beispiele wie das Vorbereiten entsprechender Arbeitsmaterialien nennen, wobei auch hierbei bereits ein gewisser Fach- oder Aufgabenbezug eine Rolle spielen kann. Bspw. könnten Lernende in Abhängigkeit vom derzeit im Unterricht bearbeiteten Fachgebiet entscheiden, welche Hilfsmittel (z.B. Lineal und Zirkel oder CAS-Geräte) in der nächsten Unterrichtseinheit vonnöten sein könnten. Spezifischer im Hinblick auf Aufgaben- und Personenwissen könnte rückblickend reflektiert werden, welche Inhalte vorangegangener Unterrichtseinheiten bereits mehr oder weniger verstanden wurden, woraus geschlossen werden kann, welche dieser Inhalte für kommende Unterrichtseinheiten (oder in Vorbereitung auf Prüfungssituationen) nachbearbeitet/wiederholt oder eingehender durchdacht werden müssen. Hierzu ist also einerseits ein Überblick über aktuellen Unterrichtsstoff (und damit zu beherrschende Inhalte) notwendig, eine Einschätzung des eigenen Verständnisses dieser Inhalte und eine Prognose, welcher dieser Inhalte in der Zukunft von Bedeutung sein werden (im Hinblick auf Prüfungsanforderungen oder als Grundlage für darauf aufbauende Inhalte) und damit andererseits auch ein Überblick über mathematische Zusammenhänge, also darüber, wie sich die betreffenden Inhalte ins (im Aufbau begriffene) Begriffsnetz und ins System Mathematik einordnen lassen.

Im Rahmen fachspezifischer Metakognition kommt dieser Aspekt bspw. beim Planen und Entwickeln von Problemlösestrategien sowie bei deren Überwachung und Reflexion zum Tragen. So stellt sich bspw. die Frage, welche Angaben, bzw. Informationen im Rahmen eines Sachverhalts/ einer Aufgabenstellung notwendig sind, um eine Strategie zur Lösung entwickeln zu können, bzw. um überhaupt eine sinnvolle Aufgabenstellung zu erhalten, in dem Sinne, dass sich aus den zur Verfügung stehenden Informationen überhaupt Schlussfolgerungen, bzw. Aussagen ableiten lassen, die von Interesse sind.

Ggf. lässt sich analysieren, welche zusätzlichen Informationen recherchiert oder durch Abschätzung selbstständig „generiert“ werden müssen (bspw. im Rahmen von Modellierungsprozessen).

Des Weiteren lässt sich analysieren, welche Zwischenergebnisse berechnet, bzw. welche Zusammenhänge reflektiert werden müssen, um aus einer „ungefähren“ Idee eine zusammenhängende und tragfähige Strategie zu entwickeln. Hierbei spielen also offensichtlich Aufgaben- und Strategiewissen eine Rolle, Ziele und Zwischenziele müssen identifiziert und noch „unfertige“ Strategie-Ideen müssen als Ganzes überblickt und nach Bedarf konkretisiert werden.

Solche Überlegungen spielen sicher im Rahmen aller prozeduralen Über-Kategorien eine Rolle und können sowohl im Vorhinein eines Arbeits- und Denkprozesses stattfinden (Planung), aber auch überwachend zu jedem Zeitpunkt, woraus sich ggf. Änderungen oder Anpassungen der gewählten Strategie ergeben. Rückblickend kann reflektiert werden, welche Handlungen, Überlegungen, Informationen notwendig waren, um zum gewünschten Ergebnis zu kommen, bzw. welche zusätzlichen Bedingungen notwendig gewesen wären, um ein Ziel zu erreichen.

Im Rahmen mathematischer Beweisaufgaben muss reflektiert werden, welche Aussagen überhaupt eines Beweises bedürfen (und wieso) und welche sich wiederum „direkt“ („trivialerweise“) aus zur Verfügung stehenden Angaben ergeben. In beiden Fällen muss geklärt werden, welche Angaben/ Informationen weswegen und an welcher Stelle im Beweis vonnöten sind und wie sie sich (also durch welche Argumentationsschritte) zu einem kohärenten Beweis kombinieren lassen.

Diese Überlegungen spielen sicher auch grundsätzlich bei der Analyse und Verwendung von mathematischen Objekten/ Begriffen (und damit deren Definitionen) eine Rolle. Es kann überprüft werden, welche Bedingungen einer Definition welche Eigenschaften des Begriffs zur Folge haben (welche Bedingungen also für eine Eigenschaft notwendig sind) und inwiefern sich Veränderungen hier auswirken.

Einen weiteren Teil dieser Ausprägung stellt die Frage dar, welche Bedingungen notwendig sind (und geschaffen werden können), um den eigenen Verständnis- und Arbeitsprozess möglichst effizient zu gestalten oder zu erleichtern. Bspw. könnte das Einhalten bestimmter Notations-Konventionen notwendig sein, um Verwirrung beim Umgang mit verschiedenen Objekten und sie repräsentierenden Variablen zu vermeiden. So zeigt sich bspw. bei der empirischen Erhebung im Rahmen dieser Arbeit, dass von den Teilnehmer_innen versucht wurde, sich beim Erstellen von Funktionen an die aus der Schule bekannte Notation von Funktionen als $y = f(x)$ zu halten, wobei x und y die unabhängige und abhängige Variable, bzw. die waagrechte und senkrechte Achse des zu Grunde liegenden Koordinatensystems und f die Abbildungsvorschrift, bzw. „die Funktion“ repräsentieren.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] muss man nicht unbedingt, also ich hab des kennen gelernt am anfang mit äh quadratischer ergänzung [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.497 – Student_1)
- „[...] ein bisschen mathematisches gespür reicht [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.79 – Student_2)
- „[...] du kannst es nicht sicher, also wiederholst du des [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.191 – Student_2)
- „[...] ich halts für unwahrscheinlich, ehrlich gesagt, also wir haben einfach zu wenig angaben [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.387 – Student_2)
- „[...] er muss es nicht unbedingt machen, aber es hilft weil man dann sagen kann, wenn ich jetzt hier bin und mein p, also wenn der x wert von p sich erhöht, dass ich halt einfach hier die orientierung hab [...]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.487 – Student_2)
- „[...] wenn ich das dann jetzt ausmultiplizieren würde - müsste das was quadratisches werden - ist ja auch logisch, ich brauch ja was maximales, also muss ich dann - es muss höher als ersten grades sein, sonst hab ich ja keinen maximalwert [...]" (Interview_Transkript_01_x1_Z.155)
- „[...] das heißt es ist monoton steigend, es ist aber umgekehrt, also müsste es monoton fallend sein und geht jetzt ungefähr, ich glaube zu wissen, sie muss den punkt irgendwie berühren [...]" (Interview_Transkript_01_x1_Z.177)
- „[...] ich müsst da jetzt noch ein bisschen länger einfach mal drüber nachdenken wie das war [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.269)
- „[...] jetzt, bräuchte man ja irgendwie, diese, also irgendeine funktion die halt das hier besagt also, würd ich mal sagen die fläche von dem ganzen minus, dieses dreieck [...]" (Interview_Transkript_03_x1_Z.271)
- „[...] da müsst ich mich glaub ich in unterschiedlichen prinzipien einlesen eindenken und dann schauen ob ich das dadrauf anwenden kann [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.293)
- „[...] das is die frage – das muss auch irgendwie n extremwert annehmen für den definierten bereich [...]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.317)

- „[...] eigentlich denke ich, dass wir die zwischendrin gar nicht ausrechnen könnten, da wir net das verhältnis haben, zum einen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.223 – Student_2)
- „[...] es muss auf jeden fall ein maximum haben, weil, es wird eine umgekehrte parabel sein, wahrscheinlich vermute ich mal, logischerweise, weil es hier unten kein maximum, es kann, eigentlich wenn man es von hier unten bis nach da oben zieht, dann kann ich nur ein maximum haben und dann ist es eine umgekehrte parabel [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.287 – Student_1)
- „[...] ich weiß noch ein argument, es kann schon allein nicht x hoch 4 sein, weil x die einheit zentimeter hat, wir haben ja keine hoch 4 zentimeter als fläche, wir wollen eine fläche rauskriegen, das heißt wir müssen x quadrat haben, dass wir quadratzentimeter bekommen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.337 – Student_1)
- „[...] kannst du dann nicht anhand der ableitung begründen, sondern musst es doch anhand von der funktion begründen, ich mein du musst doch begründen, dass die funktion hier steigt, weil dann steigt die fläche, wenn die ableitung steigt, dann ändert sich ja nur die änderung von der platte mit der änderung von x [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.437 – Student_1)

Reproduzieren von „günstigen“ Bedingungen anhand metakognitiver Erfahrungen

Unter dieser Überschrift wird eine vor allem dem Aspekt der „Steuerung“ zuzuordnende Ausprägung von Metakognition zusammengefasst. Gemeint ist hierbei das bewusste Herbeiführen von Situationen/ Umständen, bzw. „gedanklichen Zuständen“, die als günstig und aussichtsreich für bestimmte kognitive Vorgänge beurteilt werden. Unter kognitiven Vorgängen werden hierbei z.B. Reflexionen, Lern- und Übungsprozesse, der Umgang mit Problemen oder das Generieren von Ideen und Strategien verstanden. Die Auswahl und Herbeiführung entsprechender Situationen und Zustände erfolgt meiner Ansicht nach auf Basis von metakognitiven Erfahrungen und auf Basis von deren Beurteilung. Wurde in der Vergangenheit bspw. eine bestimmte Situation/ ein bestimmter kognitiver Zustand als besonders fruchtbar für das Entstehen von Ideen im Rahmen von Problemlösungsstrategien empfunden, so wurde diese *metakognitive Erfahrung* abgespeichert und kann nun dazu dienen, in einer erneuten Problemlöse-Situation „verwendet“ zu werden, indem die entsprechende

Situation oder der entsprechende Zustand wieder (oder in ähnlicher Form) herbeigeführt wird, sofern dies möglich ist.

Dabei kann eine solche günstige Situation spontan erinnert werden, ohne, dass sie bei ihrem ursprünglichen Auftreten als solche wahrgenommen oder weiter beachtet wurde, oder sie kann bei einem vormaligen Auftreten bewusst als günstig erkannt, reflektiert und für zukünftige ähnliche Fälle abgespeichert worden sein.

Insofern können beim Umgang mit Mathematik (bewusst) „abgespeicherte" Erinnerungen analysiert werden. Beginnend bei Pólyas Frage, ob ein vorliegendes Problem (so oder ähnlich) schon einmal gesehen wurde (vgl. Kapitel 2.3.1), lässt sich weiterhin fragen, unter welchen Umständen dieses gelöst wurde und wie sich diese wieder erzeugen lassen.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] das weiß ich aus erfahrung […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.183 – Student_1)
- „[…] ich hab halt effektiv meine notizen durchgeschaut und, wenn man mal des is immer n gutes indiz wie oft oder wie lange man eine aufgabe besprochen hat also wenn man den aufgabentyp zehnmal gemacht hat dann könnte der dran kommen […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.189 – Student_2)
- „[…] ich hab auch gemerkt ich wurd schneller […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.189 – Student_2)
- „[…] da hab ich auch gemerkt, geometrie ging anfangs gar nich […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.189 – Student_2)
- „[…] ich weiß nicht ich kann dadurch lernen dass ich was abstrakt mach des is ne sache die wenige leute können das weiß ich also, grad weil die meisten meiner nachhilfeschüler sind verloren wenn dann da nicht mehr zahlen sondern a b und c stehen […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.195 – Student_2)
- „[…] mir hatts geholfen […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.195 – Student_2)
- „[…] rückfragen, sind das wunderschöne am menschen, er sieht was versteht es nicht, und guckt dass es angreift also so das motto ich versteh es nicht also muss es falsch sein oder muss irgendwas fehlen, und durch dieses fehlen kann man ins stolpern kommen, wenn man sich jetzt fragt warum machste jetzt diese

umformung, äh – oder – also oder warum weiß ich jetzt dass des gilt
[…]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.207 – Student_2)

- „[…] ich konnte halt viele sachen relativ intuitiv gut
[…]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.239 – Student_2)
- „[…] wenn ich probleme mit dem verständnis hatte […] hab ich vielleicht noch ein bisschen abgewartet, dass vorne noch ein paar beispiele gerechnet wurden und musste dann auch erstmal ein bisschen länger nachdenken, eh ich dann da mit dem rechnen so richtig angefangen konnte, musste ich halt ein bisschen nachdenken […] mehr darüber sprechen und definitionen noch zwei dreimal durchlesen, um vielleicht auf den gedanken zu kommen, was da genau gemeint is
[…]" (Interview_Transkript_01_x1_Z.21)

„Machbarkeit"

Eine Ausprägung von Metakognition, der mit dem Einschätzen des benötigten kognitiven Aufwandes zusammenhängt und der in allen prozeduralen „Phasen" auftreten können sollte, ist die Untersuchung einer gegebenen Situation beim Umgang mit Mathematik auf Machbarkeit. Gemeint sind das Stellen und Untersuchen der Frage, ob sich bspw. eine bestimmte Aufgabenstellung (oder Teile davon) erfüllen, bzw. bewältigen lässt. Dabei sind sowohl mathematische Gegebenheiten zu reflektieren als auch Informationen über die eigenen Fähigkeiten mit diesen in Beziehung zu setzen (Personenwissen) und äußere Gegebenheiten – wie verfügbare Zeit oder vorhandene Werkzeuge – zu bedenken, um eine Entscheidung zu treffen, ob (bzw. in welchem Rahmen) eine Bewältigung der Aufgabenstellung zu erwarten ist. Insbesondere beim Stellen von Prognosen, was bspw. die benötigte Dauer zur Bearbeitung einer Aufgabe betrifft, spielt dieser Aspekt eine Rolle.

In Bezug auf Personen- und Aufgabenwissen stellt sich dabei sicher zuerst die Frage, ob die vorliegende Aufgabenstellung verstanden wird (→ Verständnis), ob aus ihrer Formulierung die vorliegende Situation, das sich ergebende Problem und damit das Ziel der Aufgabe „entnommen" werden können. Weiterhin wird sich die Frage stellen, ob diese Aufgabenstellung – so sie nicht sofort als Routine erkannt, bzw. sich spontan eine Lösungsidee zeigt – bereits – teilweise – bekannt ist, oder ob Aufgaben bekannt sind, die mit ihr in Beziehung stehen und zur Übertragung einer vertrauten Strategie dienen könnten (→ Strategiewissen, Personenwissen). Ob dies der Fall ist oder auch nicht, sollte sich dann die Frage anschließen, ob durch

Übertragung oder durch Neuentwicklung von Strategien eine Idee zur Lösung des Problems existiert. Diese muss im Folgenden daraufhin untersucht werden, ob – im Fall einer umfangreicheren Strategie – die notwendigen mathematischen Methoden und Begriffe bereits vertraut genug sind, um verwendet werden zu können, oder ob sie noch geläufig genug sind, um ausreichend erinnert oder erneut hergeleitet werden zu können.

Aus diesen Überlegungen muss sich schließlich die Frage danach beantworten lassen, ob sich die Aufgabe lösen, oder zumindest teilweise (z.B. bis zu einem Zwischenergebnis) bearbeiten lassen wird. Auch hier sind wiederum metakognitive Erinnerungen wichtig. War man bei der Bearbeitung der ähnlichen, verwandten Aufgaben erfolgreich? Ließen sich diese eigenständig bewältigen? Wird die notwendige Übertragung und Anwendung der entsprechenden Strategie(n) als (zu) schwierig beurteilt und wie hoch waren die Erfolgschancen bei Aufgaben, die als ähnlich schwierig beurteilt wurden?

Natürlich sind außer den – hier im Vordergrund stehenden – fachbezogenen Aspekten auch weitere Fragen von Bedeutung. So muss die Frage nach den äußeren Umständen gestellt werden. Reicht bspw. die verfügbare Zeit aus (z.B. bei Prüfungsaufgaben in einer schriftlichen Klausur), um eine Aufgabe zu bewältigen, oder muss eine „schnellere" Strategie entwickelt oder die Aufgabe zugunsten einer anderen – in kürzerer Zeit zu bewältigenden – „aufgegeben" werden. Sind notwendige Hilfsmittel – wie Werkzeuge oder auch zu recherchierende Informationen – verfügbar, bzw. können sie unter den gegebenen Umständen beschafft werden? Naheliegenderweise sind zur Beantwortung dieser Fragen die obigen – fachbezogenen – zuerst zu klären; so ist z.B. zur Einschätzung der Machbarkeit im Hinblick auf die zu erwartende Dauer auch die „fachnähere" Einschätzung der Machbarkeit im Hinblick auf das eigene Wissen und die eigenen Fähigkeiten im Hinblick auf die notwendige Mathematik nötig.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] dann ließe sich das denk ich auch ganz gut bestimmen oder mit c […]" (Interview_Transkript_06_x2_Z.341 – Student_2)
- „[…] ich halts für unwahrscheinlich, ehrlich gesagt, also wir haben einfach zu wenig angaben wir wissen einfach nicht wie groß wie hoch dieses dreieck is, wenn wirs jetzt, wir könnens abschätzen also wenn wenn wir sagen es is maßstabsgetreu können wir messen und können dann halt mit n kleinen messfehler das ganze ding berechnen aber, wir wissen weder hier diese höhe hier wissen wir nicht und, gut

das seitlich wissen wir - aber wir wissen eigentlich hier diese höhe net, und das ist das problem […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.387 – Student_2)

- „[…] es ist auch machbar, aber halt ein bisschen schwieriger und dann auf jeden fall so, bei der stochastik, ich sag ja auch auf jeden fall das wenn der lehrer dir das einigermaßen gut erklärt und es auch die schüler verstehen, dann ist das auch okay […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.69)
- „[…] wäre es nicht, denn man kann trotzdem locker leicht die maxima ausrechnen […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.157)
- „[…] das theoretisch, das könnte ich jetzt ausmultiplizieren und damit könnte ich den extremwert berechnen oder ich könnte es in den taschenrechner eingeben […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.163)
- „[…] ich glaub des funktioniert gar nicht wenn man davon die ableitung nimmt […]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.337)
- „[…] dann lässt sich die fläche über die differenz von der breite und diesem stück der ja eine koordinate von dem punkt is und selbiges für die andere seite berechnen […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.169)
- „[…] die is nach wie vor gut lösbar, es is ne kleinerer aufwand […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.191)
- „[…] tangens kann man halt schlecht im kopf ausrechnen […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.519 – Student_2)

Reflexion – Hypothetisches Denken und Variation von Situationen

An dieser Stelle wird die Fähigkeit zu hypothetischen Überlegungen und dem „Durchdenken“ von Sachverhalten, Strategien, etc. angesprochen, die bereits vor einer tatsächlichen Durchführung einer entsprechenden Bearbeitung liegen können. Hiermit ist die Fähigkeit gemeint, Situationen und die für sie relevanten Parameter und kausalen Zusammenhänge zu überblicken und im Folgenden durch die (gedankliche) Manipulation dieser Parameter und die Reflexion über deren Auswirkung zusätzliches Wissen über die entsprechende Situation zu gewinnen.

Gerade für den Umgang mit Mathematik scheint diese Fähigkeit von großem Nutzen zu sein, um bspw. Umfang und Grenzen eines Begriffs auszuloten. Eigenschaften eines Begriffs müssen daraufhin analysiert werden, unter welchen Bedingungen sie zutreffen und unter welchen nicht. Umgekehrt muss aus Definitionen abgeleitet werden, welche Auswirkungen die in ihnen geforderten Bedingungen für den Begriff und seine Eigenschaften haben, was sich z.B. dadurch erreichen lässt, dass (gedanklich) Änderungen an ihnen vorgenommen werden, also bewusst definierende Bedingungen verletzt und die Folgen dieser Verletzung überdacht werden. Solche Vorschläge finden sich bereits etwa bei Pólya (z.B. 1945).

- Bspw. ließe sich durchdenken, welche Auswirkungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen haben, die bei der Berechnung von Extremwerten überprüft werden. Lernende sollten sich die Frage stellen, warum diese notwendig, bzw. hinreichend sind und vor allem, welche Veränderungen sich bei ihrer Nichterfülltheit ergeben würden.
- Sollen im Rahmen einer Aufgabenstellung bspw. die Darstellungen mehrerer Funktionsgraphen daraufhin analysiert werden, bei welcher von ihnen es sich um die Ableitung (oder umgekehrt die Stammfunktion) einer anderen handelt, müssen die Auswirkungen der Differentiation auf Merkmale einer Funktion überdacht werden. Wozu „werden“ bspw. Extrem- oder Wendestellen einer Funktion, bzw. eines Funktionsgraphen beim Ableiten? Verhalten sich Nullstellen einer Funktion in einer bestimmten Weise, wenn diese abgeleitet wird? Welche Auswirkungen hat das Bilden der Ableitung an Polstellen der Funktion, bzw. auf asymptotisches Verhalten?

Auch zum Entwickeln von Bearbeitungs- und Lösungsstrategien bei (mathematischen) Problemstellungen müssen Auswirkungen eigenen Handelns antizipiert werden; sofern nicht – bspw. um beim Fehlen jeglicher Ideen solche zu generieren – weitgehend „blind“ und ziellos

(oder besser heuristisch) vorgegangen wird, müssen also bis zu einem gewissen Grade mögliche Strategien hypothetisch „vor-gedacht“ werden, um ihre Aussicht auf Erfolg abschätzen und entsprechend auswählen zu können.

Ähnliches dürfte auch für die Konstruktion mathematischer Beweise gelten. Da diese oft nicht in der (logisch-folgerichtigen) Weise entwickelt werden (können), in der sie schließlich (bspw. in Lehrbüchern oder Vorlesungen) präsentiert werden, sondern vielmehr bei ihrer Entwicklung aus verschiedenen Richtungen „vorwärts und rückwärts gearbeitet“ wird, bzw. einzelne Teil-Beweise zu einem Gesamt-Beweis verknüpft werden, sollte hierbei die Fähigkeit, Auswirkungen noch nicht durchgeführter Handlungen zu reflektieren und ihre potentielle Bedeutung innerhalb des Beweises zu begreifen, von Nutzen sein.

Insgesamt ist die Fähigkeit zum hypothetischen Arbeiten und Denken, wie sie hier angenommen und beschrieben wird, mit der verknüpft, Prognosen zu stellen.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] ich würde auf jeden fall n system nehmen das hier meine y gleichung und hier meine x richtung, da hab ich längen gegeben, hab ich ich damit auch punkte gegeben so gesehen also wenn ich das jetzt hier in die ecke da unten legen würde hätt ich hier 0, hier hätt ich dann 80 in x richtung – in cm – und hier hätt ich das ganze in y richtung, dann ließe sich das denk ich auch ganz gut bestimmen oder mit c […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.341 – Student_2)
- „[…] in der schule konnte man sagen, so ich nehme an für bla blub und ham dann konnte man damit weiterrechnen das fand ich ganz cool – geht des in der uni auch – wenn du wirklich nicht weiter weißt […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.404 – Student_1)
- „[…] ich sag mal theoretisch - es kommt darauf an, wie die quadratische gleichung gegeben ist, wenn man so eine form hat, ist es eigentlich relativ - okay gut ich sag mal, wenn ich jetzt die form hätte x quadrat plus 4 x plus 4 minus die 3 eingebaut, also minus 1, d.h. wenn ich diese form hätte, dann könnte man ja theoretisch das wieder zurück machen, in eine - so eine form, man sieht ja das x quadrat, man weiß ja, sei das jetzt einfach mal x, durch das 2 a b, teilt man es einfach durch zwei und weiß, dass eins davon dann x ist und dann kommt man auf die plus 2 - so und dann kann man mit diesem […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.207)
- „[…] oder komplexer zu machen, das heißt zu schauen ob mer sich auch noch vorstellen kann dass es so ist wenn der punkt woanders liegt […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.249)
- „[…] genau, die ableiten – die nullstellen von der ableitung finden – es muss eine negative parabel sein die nach oben verschoben ist dementsprechend gibt’s nur ein extremwert und des is des maximum damit wäre die nullstelle der ableitung schon die lösung […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.261)
- „[…] wenn man das jetzt hardore analytisch machen würde, würde man irgendwie die funktion der fläche in abhängigkeit vom verhältnis aufstellen oder fläche in abhängigkeit von dieser länge oder so was oder von dieser länge, ist ja eigentlich wurscht was man als variablen nimmt, es ist eigentlich am einfachsten diese länge

hier als x zu nehmen oder sowas und dann ist diese länge hier natürlich 20 minus x, das wäre glaub ich gar nicht so blöd das hier oben mit x zu wählen und dann kommt man leichter auf die fläche, und dann macht man halt a von x, die leiten wir dann ab und dann sieht man, das hat kein maximum, ach quatsch, das hat ein maximum, wo man es dann halt, das sieht man dann wenn x halt 0 ist, das maximum 0 hat, dann ist das genau das quadrat […]" (Interview_Transkript_05_x2_Z.271 – Student_1)

Hilfen, Hilfsmittel, Werkzeuge

Der Einsatz von Hilfen (jeglicher Art) scheint auf den ersten Blick möglicherweise nicht metakognitiver Natur zu sein; allerdings sollte beachtet werden, dass zur Nutzung von Hilfen, bzw. Hilfsmitteln, auch deren Auswahl in Abhängigkeit von der jeweiligen Situation gehört, wozu auch die korrekte Einschätzung der eigenen „Kompetenz", bzw. der mathematischen „Notwendigkeit" für den Einsatz eines Hilfsmittels sowie die Wahl des jeweils geeigneten Hilfsmittels und dessen angemessener Einsatz in Verbindung mit dem eigenen Denkprozess gezählt werden können.

Hierzu gehören vermutlich – sehr verkürzt dargestellt – an erster Stelle eine Analyse und Beurteilung der – wie auch immer gearteten – Situation, mit der Lernende konfrontiert werden; an zweiter Stelle das Untersuchen des eigenen Wissens und der eigenen Fähigkeiten im Hinblick auf die zugehörige Aufgabe (das Problem, die Herausforderung), die Suche nach und Beurteilung von möglichen Strategien und eine Bewertung im Hinblick auf Machbarkeit. Hierbei kommen vor allem analysierende und beurteilende sowie planerische Aspekte von Metakognition zum Tragen, sowie allgemein Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen.

Im Rahmen der Bewertung, ob eine vorliegende Situation mit den zur Verfügung stehenden Mitteln (Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Informationen) bewältigt werden kann, wird es – zu Anfang oder an späterer Stelle bei entsprechenden Erkenntnissen, die sich aus Überwachungsprozessen ergeben – auch gehören, zu entscheiden, ob zusätzliche Informationen benötigt werden, aber auch, ob Hilfsmittel eingesetzt oder Hilfestellungen, bzw. zusätzliche Erklärungen eingeholt werden müssen.

Im Fall von nötigem Werkzeugeinsatz dürften neben relativ trivialen Fällen – wie dem Einsatz eines Taschenrechners für nicht im Kopf oder schriftlich durchführbare Rechnungen (z.B. beim Rechnen mit Logarithmen oder Wurzeln) – auch Fälle in Frage kommen, in denen Computer-

Algebra-Systeme oder Dynamische-Geometrie-Systeme angemessen verwendet werden müssen.

> Beispiel:
>
> So ließe sich bspw. abwägen, ob das Lösen einer Gleichung auf dem Papier „von Hand“ möglicherweise schneller vonstattenginge als die – möglicherweise umständliche – Eingabe in ein CAS-System. Die Sicherheit und Geschwindigkeit, die das System – bei korrekter Eingabe – liefern könnte, stünde dem Zeitverlust durch die Eingabe und die nötige Interpretation des Ergebnisses (je nach Format der Ausgabe) gegenüber. Im Hinblick auf spezifisches Metawissen würden Vorteile des CAS oder der DGS abgewogen, z.B. die Möglichkeit, kognitive Belastung zu reduzieren oder die eigene Vorstellungskraft zu ergänzen.

Bei der Entscheidung, ob (und welche) Werkzeuge einzusetzen sind, gilt es, verschiedene Gründe abzuwägen, die für oder gegen einen Einsatz sprechen, oder es gilt – wie bei der Auswahl rein kognitiver Strategien – die Eignung von Werkzeugen zu beurteilen und diese in eine Strategie zur Bewältigung der jeweiligen Herausforderung einzuarbeiten.

Insbesondere hängt der Einsatz von Werkzeugen sicher von der Situation ab, in der sie eingesetzt werden, und dient dann unterschiedlichen Zwecken. In den meisten Fällen könnten gerade darstellende Werkzeuge (wie Geometriesoftware) im Rahmen von Planungsprozessen zu Beginn einer Aufgabe eingesetzt werden, um die eigene Vorstellungsfähigkeit zu unterstützen, oder um Erinnerungen an ähnliche Aufgaben (o.Ä.) zu aktivieren und Ideen zur Problemlösung zu „provozieren“. Lernende könnten diese Möglichkeit des Werkzeugeinsatzes nutzen, um die eigene Kognition mit „Anregungen“ zu versorgen.

Alternativ ließen sich bei – so metakognitiv wahrgenommenen – Unsicherheiten Werkzeuge zur Kontrolle der eigenen Ideen und Überlegungen einsetzen.

Vor allem im Rahmen von Prüfungssituationen ließen sich kognitive Ressourcen „einsparen“, wenn festgestellt wird, dass diese anderweitig benötigt werden, indem Werkzeuge genutzt werden, um Operationen durchzuführen (Berechnungen, Ableitungen, Integrationen) oder Beispiele zu visualisieren.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] da sind meine notizzettel grad für da dass ich meinen gedanken den ich habe aufschreibe und mit dem irgendwann weitermachen kann […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.164 – Student_2)
- „[…] versuchen, bezug zu anderen aufgaben herzustellen die schon gelöst wurden oder sich das einfach mal vorzustellen wie das jetzt gemeint wurde vielleicht auch sogar mal nachspielen, ähm, vor allem so keine ahnung urnenaufgaben oder so kann man ja recht leicht ma nachsimulieren […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.103)
- „[…] vielleicht mit einer graphischen skizze, also ner maßstabsgetreuen, ich weiß jetzt nicht, ob es jetzt im verhältnis ist, oder das man es jetzt einfach so pi mal daumen überprüft […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.257 – Student_2)
- „[…] das kam meistens auf die aufgabe drauf an, wie ich sie dann im kontext, je nachdem hab ich noch das tafelwerk zu rate gezogen und dabei ein tipp oder da was anderes steht als die definition, die wir vielleicht da hatten und da vielleicht noch was, was mir weitergeholfen hat und hab halt versucht mit irgendwelchen ansätzen, irgendwann etwas durchzuprobieren […] mit irgendwelchen variablen oder irgendwelchen beispielen das zumindest veranschaulicht oder irgendwie durch probieren und versuchen nachzudenken, irgendwie dann halt in die Problematik reinzufinden […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.23)
- „[…] ich hab eigentlich eher versucht, ich hab mir nochmal angeschaut, was wir im unterricht gemacht habe, meistens versucht das gut mitzuschreiben und hab das dann zu hause nochmal versucht nachzuarbeiten, definitionen, vielleicht die beispiele die wir gerechnet haben nochmal entweder die lösung durchzudenken, nochmal versuchen selber zu rechnen, ob ich irgendwie aufs ergebnis drauf komme oder, wenn nicht halt nochmal versuchen, die komplette rechnung noch mal nachzuvollziehen, wie man das denn etwa macht und dann vielleicht auf ein nächstes beispiel auszudenken, oder vielleicht irgendwo im internet mal nachzuschauen, wo es die lösungen gibt, die nicht im unterricht behandelt wurden, wo ich es dann selber nochmal mit einer unbekannten aufgabe das versuche, anhand dessen was ich gemacht habe, um mich da zurecht zu finden oder halt wenn die lösung da steht, dass wenn ich was gerechnet habe, es nachprüfen kann, ob ich

es jetzt, richtig gemacht habe oder ob ich immer noch fehler mach […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.81)

- „[…] was das lernen anging für die einzelnen fächer, da hab ich so meine taktik gehabt […] da wo ich halt merkte, okay, da dauert es noch ein bisschen länger oder da mach ich noch fehler oder da ist noch einiges nicht ganz richtig verinnerlicht worden, dann hab ich dazu noch ein paar aufgaben durchgerechnet und welche rausgesucht, entweder welche die schon dastanden, wo ich also das ergebnis hatte, die aufgabe halt dann noch mal abgeschrieben und durchgerechnet oder mir halt neue irgendwo gesucht - oder manchmal irgendwas mir auch selber ausgedacht, was man mit dem taschenrechner nachprüfen konnte und mir dann irgendwelche beispiele ausgedacht und die dann gerechnet und mit dem taschenrechner nachgeprüft, womit es mir dann klar geworden ist und dann hab ich halt meistens ein tag vorher gelernt und dann hab ich mir gedacht, ja jetzt passt es - müsste ich schon irgendwie hinkriegen […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.83)

(Eigenes) Verständnis beurteilen, bzw. einschätzen

Ein zentrales Element metakognitiver Kompetenz, das gerade für das Lernen und Arbeiten in einem Fach, bzw. einer Fachwissenschaft wie der Mathematik von unschätzbarer Wichtigkeit sein dürfte, ist das → Einschätzen, bzw. Beurteilen des eigenen Verständnisses.

Da Mathematik – sicher nicht unbegründet – den Ruf hat, besonders verständnis-intensiv zu sein (in Abgrenzung von Fachbereichen, die in höherem Maße Faktenwissen voraussetzen, wobei dieser Vergleich mit Sicherheit kontrovers zu diskutieren ist), dürfte zur Optimierung eigener Lernprozesse die Fähigkeit unerlässlich sein, zu beurteilen, wie gut bzw. wie tiefgehend etwas verstanden wird, um daraus Folgerungen für notwendigen Lernaufwand zu ziehen.

So muss überprüft werden können, ob mathematische Begriffe oder Methoden (z.B. zur Berechnung von Extremwerten) ausreichend verstanden wurden, um mit diesen in einer Prüfungssituation umgehen zu können. Hierzu muss also Verständnis quasi „quantifiziert“ werden: „Wie viel“ wurde verstanden. Dies lässt sich relativ sehen, im Sinne einer Durchdringung des gesamten Begriffs oder des gesamten Prozesses (Wie „tief“ wurde der Begriff durchdrungen?), oder aber im Sinne von Teilaspekten (Welche Anteile des Begriffs wurden (schon) verstanden, welche noch nicht, bzw. – wiederum – in welchem Ausmaß?).

Gerade im Hinblick auf Mathematik wird bei dieser Überlegung klar, dass Lernende optimalerweise in der Lage sein müssten, Begriffe im Sinne von Aspekten und Grundvorstellungen oder im Sinne eines Stufenmodells zu interpretieren, was ihnen ein differenziertes Beurteilen von Verständnis ermöglichen könnte. Dass Lernende über derart didaktisches Wissen in der Regel nicht verfügen dürften, sollte klar sein, aber nichtsdestotrotz muss zum Beurteilen des eigenen Verständnisses vermutlich ein – zumindest unterbewusstes – Gefühl für mit mathematischen Inhalten verbundene Aspekte und Vorstellungen sowie Schwierigkeiten vorhanden sein.

Dies wird auch klar, wenn neben Prüfungs- noch andere Situationen berücksichtigt werden. So dürfte metakognitiv aktiven Lernenden auch bewusst sein, dass sie aktuellen Unterrichtsstoff zu einem gewissen Grad verstanden haben müssen, um darauf in folgenden Unterrichtsstunden und -jahren sinnvoll und ohne größeren Nachholbedarf aufzubauen.

Dass es bei dieser Ausprägung allerdings nicht nur – wie bisher beschrieben – um Aufgaben- und Strategiewissen geht, die zur Beurteilung von mathematischen Inhalten zentral sind und somit eine wichtige Komponente von Begriffsverständnis-Verständnis abdecken (vgl. etwa Stufe 5: „Kritisch“ bei Vollrath, Kapitel 4.4.1), scheint naheliegend. Ist dieses Wissen optimalerweise „ausreichend“ vorhanden, sollten Lernende auf Seite des Personenwissens in der Lage sein, dieses differenzierte Wissen über (Meta-)Mathematik zu nutzen, um ihr Verständnis zu beurteilen. Hierzu sollte es hilfreich sein, wenn Lernende über objektiv überprüfbare Aspekte hinaus auf Grund metakognitiver Erfahrungen ein Gefühl für ihr Verständnis haben (→ Sensitivity). Objektiv ließe sich bspw. überprüfen, welche Aufgabentypen bereits innerhalb einer gewissen Zeit erfolgreich bearbeitet werden können, oder welche Beweise selbstständig reproduziert werden können; es würde also ein vergleichbarer Indikator verwendet, wie dies in Prüfungen der Fall ist. Schwieriger würde es,

nach bspw. einer Unterrichtseinheit oder einer Lernphase ohne eine solche Überprüfung den eigenen Fortschritt zu beurteilen. In der Psychologie wurden derartige Fähigkeiten im Bereich des „Judgement-of-Learning“ (Kapitel 2) aufgegriffen.

Verwandt hiermit ist das sogenannte „feeling-of-knowing“, bei dem es darum geht, zu beurteilen, ob ein bestimmtes Item (vor allem Wörter, aber möglicherweise ließe sich diese Idee auf mathematische Begriffe und Verfahren ausweiten) bekannt ist, bzw. wie vertraut dieses ist.

Beim Mathematiklernen wäre diese metakognitive Fähigkeit sicher nicht nur auf einzelne Begriffe (Wörter) beschränkt, wobei bereits dies ein wichtiger Hinweis sein könnte, um bspw.

in einem ersten Schritt einschätzen zu können, ob die nötigen Informationen zur Bearbeitung einer Aufgabenstellung (auf Grund der vorkommenden Wörter) grundsätzlich bekannt sind und es sich deshalb lohnen könnte, eigene Erinnerungen zu sondieren.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] des muss mer halt wirklich gucken dass man äh des dem andern auch erklär verständlich macht, weil wenn ders dann wirklich versteht, dann musst dus auch selbst verstanden haben weil weil man drückts dann rum wenn mans net hinkriegt, ich meine des is mir auch passiert […] des is gehört dazu […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.211 – Student_2)
- „[…] ich konnte halt viele sachen relativ intuitiv gut […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.239 – Student_2)
- „[…] ich verstehs also, es is es kommt mir intuitiv vor und ich weiß dann gut wenn ichs so da stehen hab dann kann ich daraus dinge lesen, also es ist halt mir x seh ich klammer verhält sich so und ich hab außen was stehen […]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.512 – Student_2)
- „[…] am liebsten also zumindest aus der 12 war mir die vektorenrechnung, die geometrie fiel mir eigentlich ganz leicht, war eigentlich auch am einfachsten, dann die differentialrechnung, also die ableitungen dann, wo man die ganz normalen regeln anwenden konnte und die anwendungen dazu fand ich jetzt auch noch ganz einfach, die integralrechnung, das ging eigentlich auch, und ja gut die stochastik, ich sag mal in der 11, fiels mir am ende ein bisschen schwieriger, aber in der 12 hatten wir die signifikanz, das rechtsseitige und linksseitige, das ging dann wieder eigentlich total einfach […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.67)
- „[…] manche denkweisen kommt man nicht so da kommt man halt nicht hinterher aber, wenn ja wenn mer des dann sagt so hey ich versteh nicht wie bist du denn jetzt auf da und dann schreibt er vielleicht die zwei schritte die er da noch im kopf gemacht hat auf das blatt dann, ja ok so rechnest du […]“ (Interview-Transkript)
- „[…] äußert sich hauptsächlich, an der geschwindigkeit mit der mer konzepte versteht […]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.133)
- „[…] dadurch dass mer des ganze aus nem anderen blickwinkel angeht, nämlich nicht nur versucht des zu verstehen sondern – des so zu verpacken dass es

verständlich ist, und nach möglichkeit noch in nem anderen weg als es schon erklärt wurde […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.79)

- „[…] ich komm mit den konzepten, deutlich besser klar als mit der übertragung [4]
- „[…] irgendwie hat mein nachhilfeschüler das nie verstanden oder halt nicht so verstanden, wie ich es verstanden hab […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.135)

Kausalität

Unter dieser Überschrift wird die Fähigkeit gefasst, kausale Zusammenhänge zu reflektieren und zu analysieren, wobei hierbei vor allem Zusammenhänge in Bezug auf die eigene Kognition über/ und mathematische Zusammenhänge gemeint sind. Teil dieser Ausprägung ist die Frage (von Lernenden an sich selbst), ob eine bestimmte kausale Beziehung verstanden wird, ob sie nachvollzogen werden kann und ob die entsprechende Logik erläutert, bzw. die Begründung der entsprechenden Aussage selbstständig reproduziert werden kann. Dies kann bspw. beim Nachvollziehen eines mathematischen Beweises erfolgen, währenddessen das eigene Verständnis überwacht wird, um zu überprüfen, ob logische Schritte verstanden o.Ä. werden. Statt laufend, während des tatsächlichen Arbeitsvorgangs (in diesem Fall des Beweisvorgangs), kann dies auch rückblickend in Reflexion eines konkreten Vorgangs geschehen, der bspw. während der Nachbereitung einer Lerneinheit (Unterrichtseinheit, Vorlesung) rekapituliert oder in Vorbereitung für eine Prüfung wiederholt wird.

Kausale Beziehungen bestehen allerdings auch beim Lernen von Mathematik. Dabei geht es bspw. darum, dass Lernende begreifen, dass – trivialerweise – aus Übung eine höhere Sicherheit im Umgang mit der Materie folgt; dass aus einem Mehr an Übung eines bestimmten Aufgabentyps aber nicht unbegrenzt ein Mehr an Verständnis und Fertigkeit folgen muss, sondern dass auch andere „Ursachen“ für eine Verbesserung mitverantwortlich sind, dass z.B. das Üben verwandter Aufgabenstellungen oder die Reflexion von Gegenbeispielen zu einem besseren Verständnis führen können.

Entscheidend hierbei ist mit Sicherheit auch, dass Lernende überhaupt in der Lage sind, zu entscheiden, woran „Verständnis“ (individuell) gemessen werden kann und welche objektiven Hilfsmittel (wie bspw. das Überprüfen anhand ähnlicher Aufgabenstellungen) sich dazu eignen.

Bezüge bestehen hier auch zur Ausprägung „System-Überblick“, der unter anderem auch kausale Beziehungen zwischen Teilen des jeweiligen Systems, bzw. ihren Interaktionen im

Blick hat. Ebenso findet sich hier ein Bezug zur konditionalen Komponente von Metakognition, die in der Literatur teils auftritt (vgl. Kapitel 1.4).

Transkript-Ausschnitte

- „[...] es muss auf jeden fall ein maximum haben, weil, es wird eine umgekehrte parabel sein, wahrscheinlich vermute ich mal, logischerweise, weil es hier unten kein maximum, es kann, eigentlich wenn man es von hier unten bis nach da oben zieht, dann kann ich nur ein maximum haben und dann ist es eine umgekehrte parabel [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.287 – Student_1)
- „[...] eigentlich denke ich, dass wir die zwischendrin gar nicht ausrechnen könnten, da wir net das verhältnis haben, zum einen [...]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.223 – Student_2)
- „[...] ne längere und dadurch leichter verständliche lösung zu wählen [...]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.351)
- „[...] des ergibt sinn – natürlich mir fällt jetzt auf, dass man des so einfach schön lösen kann wenn man sich die funktion mal überlegt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.522 – Student_2)

Einschätzen von Schwierigkeitsgraden

Die Fähigkeit, Schwierigkeitsgrade zu beurteilen, scheint sowohl selbsterklärend wie – auf den ersten Blick möglicherweise – trivial und metakognitiv wenig bedeutend zu sein, doch muss beachtet werden, dass bei der Beurteilung, wie schwierig „etwas“ ist, Anforderungen an viele Anteile deklarativen Metawissens, an Überwachung und reflektierende Überlegungen und an den Überblick metakognitiver Erfahrungen gestellt werden dürften. Des Weiteren besteht bei dieser Kompetenz naheliegenderweise ein enger Bezug zum spezifischen Aufgabenwissen (also zur Mathematik).

Beurteilt werden kann die Schwierigkeit verschiedener Herausforderungen; dies können mathematische Aufgaben oder Aufgabentypen sein, mathematische Begriffe, mathematische

Verfahren, ganze Fachgebiete. Es zeigt sich der Bezug zu (spezifischem) Aufgaben- und Strategiewissen, da zur Beurteilung der Schwierigkeit mathematischer Inhalte Wissen über diese oder ähnliche Inhalte sowie über ihre Beziehungen und Einsatzmöglichkeiten notwendig ist.

So ist allein der Begriff Schwierigkeit mehrdeutig. Hier gilt es, zu unterscheiden, in Relation wozu und aus welcher Perspektive diese Schwierigkeit beurteilt werden soll. So lässt sich bspw. a priori beurteilen, als wie schwierig sich das Begreifen und Durchdringen eines neu zu erlernenden mathematischen Begriffs erweisen wird. Ist dieser Begriff noch gar nicht bekannt, so lässt sich im Wesentlichen nur auf Grund von Wissen über verwandte Begriffe eine Prognose treffen, wozu zusätzlich – zumindest ungefähr – geklärt werden muss, wie sich dieser – weitgehend unbekannte – Begriff in sein mathematisches „Umfeld" einordnen lässt. Ist der Begriff bereits – zu einem gewissen Grad – bekannt, könnte beurteilt werden, wie schwierig (vgl. auch „Aufwand") es sein wird, ein höheres Verständnis-Niveau zu erreichen, wozu insbesondere (eigenes) Verständnis (→) beurteilt werden können muss. Sodann ließe sich die Schwierigkeit eines Begriffs auch als seine Verortung innerhalb des Lehrplans interpretieren (Jahrgangsstufe der Einführung, Zeitpunkt innerhalb einer Unterrichtssequenz, etc.), was die Beurteilung der Schwierigkeit den Erstellern selbigen Lehrplans überlässt. Lernende müssten in dieser Hinsicht also in der Lage sein, auch Überlegungen anderer Personen nachzuvollziehen, und diese mit Mathematik in Beziehung setzen.

In Bezug auf andere Personen, wie z.B. Mitschülerinnen und -schüler, lässt sich Schwierigkeit auch mittels Perspektivwechsel aus Sicht anderer beurteilen, was – vermutlich – auch einen Vergleich zwischen eigenem Schwierigkeitsempfinden und dem der anderen miteinschließt. Informationen aus der Personenwissens-Kategorie müssen hierbei beachtet werden, wobei sich dieses Wissen nun nicht (nur) auf die eigene Person, sondern auf andere bezieht (im Hinblick auf deren Fähigkeiten u.Ä. im Umgang mit Mathematik). Das Verhalten anderer beim Umgang mit Mathematik muss hierzu beobachtet (→ Überwachung) worden sein und → beurteilt werden können und aus diesem Wissen müssen in Bezug auf die aktuelle Einschätzung von Schwierigkeit Schlussfolgerungen gezogen werden.

Die Schwierigkeit mathematischer Begriffe, Methoden, Ideen, etc. ließe sich allerdings nicht nur im Hinblick auf Verständnis beurteilen, sondern auch im Hinblick auf ihre Anwendung und Durchführbarkeit. Während rein rezeptivem Verstehen im Sinne von Nachvollziehen (bspw. eines schrittweisen Beweises) möglicherweise ein gewisser Schwierigkeitsgrad zugeordnet wird, wird die Anwendung/ Durchführung (z.B. in einem Problemlöse-Kontext) der „verstandenen" Inhalte oder deren Reproduktion (z.B. eigenständiges Beweisen) möglicherweise völlig anders beurteilt. Hierbei könnte ebenfalls wieder unterschieden werden; bspw. zwischen der grundsätzlichen Schwierigkeit der Anwendung/ Durchführung, so, wie sie von der betreffenden Person „wahrgenommen" wird, der Schwierigkeit zu einem bestimmten

Zeitpunkt, die sich – mit der Zeit, bedingt durch Erfahrung, Üben, etc. – ändert, oder aber dem benötigten Aufwand, der mit dem Meistern der zur Anwendung/ Durchführung nötigen Kompetenzen verbunden ist (was ebenfalls eine Einschätzung der betreffenden Person nötig macht).

Einerseits ließe sich Schwierigkeit anhand objektiver Merkmale von „Task“ (Aufgabe, Gebiet, Begriff, etc.) und „Person“ beurteilen. Dies würde die (→) Awareness, Analyse und (→) Beurteilung dieser Merkmale notwendig machen, was die Anwendung von sowohl Aufgaben- als auch Personenwissen notwendig macht und, je nach Fall und Komplexität, aufwendig sein dürfte. Andererseits besteht die Möglichkeit, dass eine gewisse „Intuition“, ein „Gefühl“ für die Einschätzung von Schwierigkeiten besteht. Aus metakognitiven Erfahrungen mit Mathematik dürfte sich optimalerweise ein solches Bewusstsein für den Schwierigkeitsgrad von Herausforderungen entwickeln, was mit der (→) Awareness-Kategorie zusammenhängt, sowie mit (unterbewusster) Überwachung, der (zuvor erfolgten) Reflexion ähnlicher Situationen und metakognitiven Erfahrungen in diesen Situationen.

Transkript-Ausschnitte

- „[...] einmaleins halt einfach für mich ich weiß haargenau was ich machen muss, es is für mich jetzt, etwas was ich halt sehr oft geübt hab [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.552 – Student_1)
- „[...] es ist dann halt so nicht nur immer das schema f und so, [...] wo man noch mehr um die ecke denken muss und sich noch ein bisschen reindenken muss, es ist auch machbar, aber halt ein bisschen schwieriger und dann auf jeden fall so, bei der stochastik, ich sag ja auch auf jeden fall das wenn der lehrer dir das einigermaßen gut erklärt und es auch die schüler verstehen, dann ist das auch okay [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.69)
- „[...] das wäre dann ja ein bisschen sehr kompliziert, wenn man die ganzen kleinen zacken, man rechnet es dann näherungsweise aus, dann können die schüler damit besser was anfangen, ich sag mal, wenn man das wirklich wie es bricht, dann hat man da irgendwelche zacken und wenn man das jetzt ausrechnen müsste, müsste man es in tausend stücke zerlegen und jedes kleine stück ausrechnen - wenn man das jetzt irgendwie auf einen graphen übertragen würde, dann müsste man eine ganz komische formel nehmen, das wäre für die schüler dann etwas zu kompliziert [...]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.103)

- „[…] Das kam dann auf die aufgabe drauf an, ich hab sie mir ersteinmal durchgelesen und wenn ich dann meinte, okay gut, da kann ich dann einfach gleich machen, dann hab ich es auch gleich gemacht […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.73)
- „[…] bei quadratischen funktionen ist also, der extremwert zu berechnen, ist, wenn es so eine einfache ist, dann ist es eigentlich kein problem, dann hat man einfach, wie nennt man das - scheitelpunkt oder so […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.197)
- „[…] ich hab mir gedacht […] ich hab, das lange nicht mehr gemacht, wie war das gleich nochmal, so ein bisschen erschreckt […] jetzt überforderts mich, dann hab ich halt versucht, ich versuch bei sowas sowieso eigentlich immer ruhig zu bleiben, also das ist sowieso das beste was man machen kann, wenn man unruhig wird, wird das sowieso nichts, das hab ich auch schon festgestellt mal, und dann ich versucht mich irgendwie reinzudenken, mir das alles wieder ein bisschen vorzustellen, versuchen mich zu erinnern und das hat nicht ganz - ein bisschen von deiner hilfe hab ich ja gebraucht, ich hätte mich vielleicht noch ein bisschen länger reindenken müssen, dann wäre ich vielleicht auch irgednwann wieder drauf gekommen, aber so auf die schnelle - ich hab halt versucht, das was mir klar war, hab ich halt versucht aufzuschreiben, wie gesagt, dass das halt in abhängigkeit von dem ist und wie man den inhalt berechnet, also gut, als du mir dann den tipp mit der funktion gegeben hast, bin ich dann auch wieder auf die idee gekommen mit dem punkt, wie man dann halt den anstieg berechnet und das halt dann einsetzt und dann wurde es mir halt dann auch wieder klar […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.221)
- „[…] sinus oder so das war dann schon n weng schwieriger, aber da konnt man auch dieses schema anwenden, also es war, sehr einfach eigentlich […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.89)
- „[…] bei dem ursprung ist ja da der fixpunkt, der immer in der platte drin is und dann is es leichter dadraus ne funktion zu bilden […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.215)
- „[…] ich hab se schon seit vielen monaten nicht mehr gelöst deswegen würd ich se, erstmal schwierig ähm bezeichnen aber wenn ich die aufgabe jetzt mehrmals hätte dann würd ich se würd se ja immer leichter werden […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.229)

- „[…] nach ner weile ja am anfang is es deutlich leichter es zu verstehen, wenn es an einem markanten punkt liegt, aber sobald mers prinzip dann begriffen hat bzw oberflächlich begriffen hat ums zu vertiefen sollte des irgendwo anders liegen ja [4]
- „[…] es is – find ich keine sehr saubere lösung, aber es machts deutlich einfacher um des prinzip dahinter zu verstehen – das heißt wenn mers – ein paar mal so gemacht hat wird's deutlich leichter auch andere probleme ohne diese zwischenschritte – über gleichungen zu lösen […]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.283)
- „[…] das is ne gute frage – das sieht ausm stand nach ner einfacheren lösung aus – ob se dadurch eleganter wird, is die frage […]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.331)
- „[…] es hat den anschein als wär die vorlesung noch schulstoff so wie er war, und sehr verständlich und die aufgaben sind dann ne ganz andere leistungsklasse deutlich drüber, das heißt in der vorlesung, überleg ich meistens wieso ich eigentlich da bin und über den aufgaben sitz ich dann drüber und hab keine ahnung was ich eigentlich tun soll […]" (Interview_Transkript_04_x1_Z.379)
- „[…] ich denke mal, wenn man das thema an sich gut versteht, dann ist es auch weniger ein problem, es zu erklären […]" (Interview_Transkript_05_x2_Z.27 – Student_2)

Erkennen/ Durchschauen von Zweck/ Absichten – Verstehen von Aufgabenstellungen

Über die Überprüfung darüber, ob grundsätzlich mit einem Begriff oder anderen, beliebigen Informationen Bedeutung im Sinne des eigenen Verständnisses verbunden wird, hinaus, meint diese Ausprägung das Verständnis/ Erkennen/ Durchschauen des Zwecks oder der Ziele, die mit verschiedenen „Daten" verknüpft sind. In Frage kommen hierbei der Einsatz bestimmter (mathematischer) Begriffe (und nicht anderer) im Rahmen eines Prozesses (Problemlösung, Modellierung, Beweis, etc.) und die Ziele, die mit ihrem Einsatz verfolgt werden; in diesem Sinne auch die Gründe, die zu ihrem Einsatz führen, bzw. insgesamt ihre Bedeutung, eben ihr Sinn und Zweck, die Rolle, die sie im Prozess spielen. Ebenso spielt für diese Kategorie eine Rolle, wie genau die entsprechenden, betrachteten Elemente (Begriffe, Strategien, Methoden) innerhalb eines Prozesses oder (→) Systems die ihnen eigene Rolle innehaben, wie sie also im Rahmen des Systems funktionieren. Naheliegenderweise steht diese Ausprägung in Zusammenhang mit deklarativem Aufgaben-Wissen einerseits und mit Strategie-Wissen andererseits, bzw. lässt sich – je nach (→) Bewusstheit – entweder als aktive (reflektierende)

Verwendung dieses Wissens sehen, oder andererseits als – unterbewusst-passives, wahrnehmendes – Verständnis und Begreifen der entsprechenden Mechanismen. Es ließe sich von einem Verständnis für Operationalisierung (von bspw. Begriffen, Strategien, etc.) sprechen, was den Nutzen dieser Ausprägung für die Operationalisierung eigener Kompetenzen und von Informationen im Rahmen von Strategien zum Umgang mit Mathematik andeutet.

Über diese sehr begriffs- und strategie-bezogene Auffassung hinaus, lässt sich die Frage nach Sinn und Zweck auch auf die Frage nach Absichten erweitern, hier auf die Absichten und Ziele von Lehrkräften, Prüfenden, oder auch auf Absichten, die hinter der Konzeption bestimmter Lehrwerke und Instrumente stehen. Dabei können bspw. die didaktischen Ziele gemeint sein, die hinter dem Verwenden bestimmter Aufgaben stehen (zum Üben, zum Einstieg in neue Themenbereiche, zum Überprüfen von Kompetenzen, etc.), oder bspw. die Funktionsweise einzelner Elemente eines mathematischen Werkzeugs (z.B. von „Schiebereglern“ bei einer Geometrie-Software). Auch Absichten, die bspw. mit dem Stellen bestimmter Fragen verfolgt werden, könnten metakognitiv analysiert werden; Die gewonnen Erkenntnisse könnten z.B. in Prüfungen genutzt werden, um die Absichten der Prüfenden zu „durchschauen“.

Diese Kategorie lässt sich letztendlich über Sinn und Zweck, also eine zielorientierte Auffassung, hinaus zu einem allgemein system-orientierten Überblick über die Funktionsweisen von und Zusammenhänge in Systemen erweitern (s. dort).

Transkript-Ausschnitte

- „[...] das is riskante kann ins straucheln bringen, oder wenn man partout irgendwas auch nicht wirklich selbst nicht ganz begreift was die von einem wollen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.213 – Student_2)
- „[...] ich kann mir ziemlich denken was man tun sollte [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.302 – Student_2)
- „[...] es ist anzunehmen dass wir die variable berechnen sollen [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.302 – Student_2)
- „[...] des ergibt sinn – natürlich mir fällt jetzt auf, dass man des so einfach schön lösen kann wenn man sich die funktion mal überlegt [...]“ (Interview_Transkript_06_x2_Z.522 – Student_2)
- „[...] ich hätte jetzt nicht gewusst, was ich hätte machen sollen, das wär mir jetzt ein bisschen suspekt gewesen, also es macht schon sinn die strecke auszurechnen, jetzt

glaube ich sogar, dass du recht hast, jetzt wo du es gesagt hast, aber da wäre ich nicht draufgekommen […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.149 – Student_1)

- „[…] ja man soll das verhältnis ja suchen, das ist ja die aufgabe – oder […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.225 – Student_1)

Prognosen, Konsequenzen

Wie sich unter anderem im Verlauf der geführten Interviews zu zeigen scheint, tun sich Lernende schwer damit, aus eigentlich vorhandenem Wissen auch – zu erwartende – Handlungen im Sinne von Problemlösungen abzuleiten (s. Produktionsdefizit). Es stellt sich allerdings die Frage, ob hier möglicherweise ein gedanklicher Zwischenschritt fehlt: das Anstellen von Prognosen auf Grund aktuell vorhandener Informationen. Während es – natürlicherweise – ein permanent ablaufender Vorgang ist, Konsequenzen eigenen Handelns zu prognostizieren und das eigene Handeln entsprechend zu steuern, so scheint es ebenfalls relativ offensichtlich zu sein, dass dies bei höherer Komplexität und kognitivem Anspruch sowie geringerem Bekanntheitsgrad entsprechender Problemstellungen schwieriger ist. Da Mathematik in jedem Fall weniger vertraut als alltägliches Weltwissen sein dürfte und ebenso auf einem höheren Abstraktions-Niveau stattfindet, was in der Regel zu höherem kognitivem Anspruch führt, sollte zu erwarten sein, dass das Absehen von Konsequenzen aus „mathematischen Handlungen“ relativ schwierig ist. Die Komplexität mathematischer Probleme und die entsprechend im Arbeitsgedächtnis zu haltenden Informationen tragen hierzu mit Sicherheit bei.

Beim Prognostizieren von Konsequenzen von Handlungen im Umgang mit Mathematik sollte ein metakognitiver Überblick über gut vernetztes Fachwissen sowie metakognitives Aufgaben- und Strategiewissen sehr nützlich sein. Sich der Zusammenhänge zwischen Begriffen und Strategien bewusst zu sein (Aufgaben- und Strategiewissen, Bewusstsein für Wissen) und eigenes Wissen systematisch zu überblicken und damit „sondieren“ und mit vorliegenden Problemen im Hinblick auf Beziehungen und Nutzbarkeit abgleichen (Abgleich, Bewertung) zu können, sollte das Antizipieren von Auswirkungen möglicher Handlungen erleichtern. Dies wiederum kann einer effektiveren und effizienteren Fähigkeit zur Steuerung eigener Lern- und Arbeitsprozesse zuträglich sein.

Transkript-Ausschnitte

- „[…] wenn ich da was falsch hatte, was es mir das meistens klar, wenn ich jetzt dachte, das ist ein bisschen besser gelaufen, ich sag mal, ich konnte zumindest grob die richtung einschätzen, also ob es jetzt besser gelaufen ist oder nicht, also ob es - in der oberstufe jetzt ob ich mit zweistellig oder einstellig rechnen muss, also das hab ich meistens ganz gut vom gefühl her einschätzen können […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.89)
- „[…] ich glaube ich kriegs nichts selber, denk ich mal, wenn ich mich einlese, ich hatte damals im abi so eine ähnliche aufgabe, die hab ich wunderbar rechnen können […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.121)
- „[…] wenn ich das dann jetzt ausmultiplizieren würde - müsste das was quadratisches werden - ist ja auch logisch, ich brauch ja was maximales, also muss ich dann - es muss höher als ersten grades sein, sonst hab ich ja keinen maximalwert […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.155)
- „[…] ich glaube es wird schwierig, ich glaube eigentlich nicht […]“ (Interview_Transkript_01_x1_Z.161)
- „[…] eine x-quadrat funktion, also wahrscheinlich sowas, also es hat auf jeden fall ein Minimum oder ein maximum je nachdem, des wissen wir noch nicht […]“ (Interview_Transkript_02_x1_Z.275)
- „[…] würde mir schon irgendwie so ein ansatz denk ich irgendwie erkennen aber s würde halt schon länger dauern ich müsst schon […]“ (Interview_Transkript_03_x1_Z.265)
- „[…] wie schwierig es is kann ich vorerst noch nicht sagen weil, es geht ja um diese farbliche fläche und die is nur durch den punkt näher definiert der ja, ein teil des größeren abgrenzt und der durch eine schräge definiert ist die mer zunächst, definieren muss […]“ (Interview_Transkript_04_x1_Z.161)
- „[…] in mathe war das eigentlich nie ein problem, da konnte ich eigentlich immer so einschätzen, wie gut ich vorbereitet bin und was rauskommt […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.117 – Student_2)
- „[…] das muss ja hier irgendwie, stetig kleiner werden, wenn ich das hier verschieb, das ist ja hier stetig und das hier ist jetzt auch monoton fallend oder seh ich das richtig - also ich glaub, das wäre das maximum, jetzt so, das müsste man jetzt noch

beweisen, aber ich vermute, dass hier oben das maximum ist […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.221 – Student_1)

- „[…] es muss auf jeden fall ein maximum haben, weil, es wird eine umgekehrte parabel sein, wahrscheinlich vermute ich mal, logischerweise, weil es hier unten kein maximum, es kann, eigentlich wenn man es von hier unten bis nach da oben zieht, dann kann ich nur ein maximum haben und dann ist es eine umgekehrte parabel […]“ (Interview_Transkript_05_x2_Z.287 – Student_1)