

DIE HOMOGENITÄT VON INTERAKTIONEN ALS SKALIERUNGSKRITERIUM

Hans-Peter Krüger
Universität Würzburg

Christine Wolfrum
Universität Düsseldorf

Problemstellung

Werden in der Praxis multifaktorielle Versuchspläne angewendet, so drückt sich damit in der Regel die Überzeugung des Anwenders aus, daß die von ihm gewählten Faktoren einen gemeinsamen Einfluß auf die Observable haben. Erbringt die Auswertung mehrere Haupt- und Wechselwirkungseffekte, wird in der Interpretation meist auf substanzwissenschaftliche Konzepte rekurriert, die eine Zusammenfassung mehrerer Effekte zu einem gemeinsamen Wirkungsmechanismus erlauben. Diese, in der Interpretation unterstellten Konzepte waren bei der Versuchsplanung allerdings noch nicht so spezifiziert, daß sie bereits zu einer Verringerung der Faktorenzahl geführt hätten. Vielmehr erscheint in vielen multifaktoriellen Plänen die Auswahl der Faktoren als eine Approximation an einen hypostasierten Bedingungsprozeß für die Variation der Observablen. Anders ausgedrückt: die Interpretation ist oft weniger komplex als es die mehrfaktorielle Differenzierung erlauben würde.

An einem psychologischen Beispiel gezeigt: ein Untersucher führt als Faktoren

- a. die Schwierigkeit einer Aufgabe und
 - b. die Ängstlichkeit einer Vp als Schichtungsfaktor
- ein und mißt auf den verschiedenen Faktorkombinationen die Leistung. Erhält er nur eine Wechselwirkung, steht er vor dem Problem, einen gemeinsamen Prozeß zwischen Schwierigkeit und Ängstlichkeit annehmen zu müssen, der die Leistungsvariation bedingt. Er führt das Konzept der Aktivierung ein, wobei aus substanzwissenschaftlichen Gründen unterstellt wird, daß Schwierigkeit und Ängstlichkeit die Aktivierung (wenn gleich unterschiedlich) erhöhen und daß bei zu hoher Aktivierung die Leistung wieder sinkt.

Bei diesem heuristisch fruchtbaren Vorgehen wird im Sinne einer ex post exhaustierenden Technik eine neue Variable postuliert, die sich aus den interagierenden Faktoren zusammensetzt. Kann der Untersucher Hypothesen dieser Art ex post heuristisch an seinen Daten prüfen? Damit ist ein Skalierungsproblem für die in der Interpretation hypostasierte

neue Variable gestellt:

Wie können Faktorkombinationen so skaliert werden, daß sie zu einer sinnvollen Beziehung zur Observablen führen?

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind damit Versuchsergebnisse, wie sie exemplarisch in Tabelle 1 a und b dargestellt sind. Es wird ein 3 x 3 - faktorieller Versuchsplan mit einer alternativen Observablen in den Ausprägungen "+" und "-" angenommen. Das "0/12" in Zelle 11 der

TABELLE 1 A

		B			
		1	2	3	
A	1	0/12	12/0	6/6	18/18
	2	12/0	6/6	0/12	18/18
	3	6/6	0/12	12/0	18/18
		18/18	18/18	18/18	54/54

TABELLE 1 B

		B			
		1	2	3	
A	1	12/0	6/6	0/12	18/18
	2	6/6	6/6	6/6	18/18
	3	0/12	6/6	12/0	18/18
		18/18	18/18	18/18	54/54

Tabelle 1 a bedeutet, daß hier 0mal ein "+", 12mal ein "-" aufgetreten ist. Die Versuchsergebnisse in beiden Tabellen liefern in einer Auswertung (etwa entsprechend der KFA nach KRAUTH/LIENERT, 1973) jeweils keine Haupteffekte, jedoch eine deutliche Wechselwirkung.

Dabei ist die Optik der Tabellen "ordentlich". In Tabelle 1 a sind die Zellen der Nebendiagonalen in der Verteilung der Alternativobservablen homogen, ebenso die dazu "parallelen" Zellen 12 und 21 bzw. 23 und 32. Legt man in Tabelle 1 a durch die Hauptdiagonale eine Symmetrieachse, sind die jeweils axialsymmetrischen Zellen homogen besetzt (Spiegelsymmetrie). Anders in Tabelle 1 b: hier sind zum einen die zur Haupt- und Nebendiagonalen axialsymmetrischen Zellen homogen, vor allem aber die Zellen, die bei einer punktsymmetrischen Drehung um Zelle 22 aufeinander fallen würden (Zelle 11 und 33 bzw. 13 und 31).

Die Konfiguration der Tabelle 1 a soll deshalb "Axialsymmetrie", die der Tabelle 1 b "Punktsymmetrie" genannt werden. Ins Numerische umgesetzt,

implizieren beide Symmetrien verschiedene Modelle. Bezeichnet man die Zeilen- und die Spaltenfolge jeweils mit +1, 0 und -1, so ergibt sich

- a. die Axialsymmetrie, wenn man pro Zelle die Summe aus zeilen- und spaltenkonstituierender Merkmalsausprägung bildet [für Zelle 21 z.B. $0 + (+1) = +1$]. Zellen mit gleicher Summe sind axialsymmetrisch.
- b. die Punktsymmetrie, wenn man pro Zelle das Produkt aus zeilen- und spaltenkonstituierender Merkmalsausprägung bildet [für Zelle 11 z.B. $(+1) \cdot (+1) = +1$, für Zelle 33 dann $(-1) \cdot (-1) = +1$]. Zellen mit gleichem Produkt sind punktsymmetrisch.

Die Summen- bzw. Produktbildung bedeutet inhaltlich die Bildung einer neuen Variablen. Die Skalenwerte dieser neuen Variablen gehen für unser Beispiel aus den Tabellen 2 a und b hervor. Bei der Axialsymmetrie ent-

TABELLE 2 A

		B		
		+1	0	-1
A	+1	+2	+1	0
	0	+1	0	-1
	-1	0	-1	-2

TABELLE 2 B

		B		
		+1	0	-1
A	+1	+1	0	-1
	0	0	0	0
	-1	-1	0	+1

entsteht die neue Variable aus dem additiven Zusammenwirken der beiden Faktoren, bei der Punktsymmetrie aus dem multiplikativen. Beide Male ergibt sich in der Auswertung eine hauptwirkungsfreie Wechselwirkung.

Als Kriterium für das Vorliegen einer auf Symmetrie basierenden Skala wird genommen, daß die Verteilung der Observablen in den symmetrischen Zellen (am gleichen Skalenpunkt) homogen ist. Über die Art dieser Verteilungen ist nichts ausgesagt.

Substanzwissenschaftlich erscheint ein solches Vorgehen der Bildung einer neuen Variablen außerordentlich fruchtbar - es ist eine gerichtete Hypothesenbildung für neue Experimente möglich. Der Experimentator kann

es in Folgeuntersuchungen unternehmen, die so von ihm hypostasierten Variablen direkt zu erfassen und zu prüfen.

Eine Inspektion mehrfaktorieller Pläne in der Praxis zeigte uns, daß Fälle dieser Art zum einen recht häufig vorkommen, zum andern, daß die Anwender regelhaft versuchten, sich solche Wechselwirkungen durch die Bildung "eindimensionaler" Variablen zu erklären. Vom Statistischen her können wir keine stringente, vor allem aber keine inferentielle Prüfungsmöglichkeit für solche Symmetrien vorlegen. Der folgende Vorschlag ist ein erster Versuch, diese Strukturen heuristisch zu untersuchen. Eine Lösung dieses praktisch wichtigen Problems steht noch aus.

Axialsymmetrie in zweidimensionalen Versuchsplänen

LIENERT und WALL (siehe dazu LIENERT, 1979) haben für die Itemanalyse das Konzept der Axialsymmetrie entwickelt und eine nonparametrische Prüfmöglichkeit angegeben. Dabei wird getestet, ob die Besetzungszahlen axialsymmetrischer Itemkonfigurationen unter der Nullhypothese des Vorliegens von Axialsymmetrie von der Homogenität abweichen. Wird H_0 nicht abgelehnt, wird für die Items

- a. gleiche Verteilungsstruktur und
- b. gleiche Interkorrelation

unterstellt. In analoger Weise kann bei der Auswertung von Versuchsplänen vorgegangen werden. Unter der Nullhypothese der Axialsymmetrie müssen die Besetzungszahlen der axialsymmetrischen Zellen homogen sein.

Für jede axialsymmetrische Zellkonfiguration wird über X^2 eine Homogenitätsprüfung durchgeführt. Liegen k axialsymmetrische Punkte vor, bildet man die $\sum X_k^2$ der Einzel- X^2 . Diese Summe wird (da die Tests unabhängig sind) nach der Edf_k Freiheitsgrade beurteilt. Überschreitet das X^2 die vorher festgelegte Schranke, wird die Hypothese der Axialsymmetrie verworfen. In quadratischen Plänen gibt es mit der Haupt- und der Nebendiagonalen zwei Symmetrieachsen. Die Testprozedur wird für beide Achsen vorgenommen. Wird H_0 nicht verworfen, kann von einem Zusammenwirken der Faktoren im additiven, bei Punktsymmetrie (die durch einen zusätzlichen Test abzusichern ist) in einem multiplikativen Sinn ausgegangen werden.

Die Axialsymmetrie wird jeweils für die Haupt- und Nebendiagonale als Symmetrieachse überprüft. Die Entscheidungslogik:

1. Führt ein Test zur Ablehnung von H_0 , der andere nicht, kann die Hypothese der Axialsymmetrie beibehalten werden. Die Faktorkombinationen sind entsprechend der Hypothese zu skalieren.
2. Führen beide Tests zur Ablehnung von H_0 , wird die Hypothese der Axialsymmetrie verworfen.
3. Führen beide Tests nicht zur Ablehnung von H_0 , ist die Hypothese der Axialsymmetrie dennoch abzulehnen. Es kann in diesem Fall aber noch eine Punktsymmetrie vorliegen, wie aus Tabelle 2 b hervorgeht. Dann müssen die punktsymmetrischen Zellen die gleiche Verteilung der Observablen haben. Ein entsprechender Test ist leicht anzusetzen.

Die axialsymmetrische Prüfung an einem pharmakopsychologischen Beispiel

Zur Überprüfung der Wirkung von Psychopharmaka bei unterschiedlicher Lärmbelastung auf die Leistung führte KRÜGER (1980) ein 3 x 3-faktorielles Experiment mit den

- a. Faktoren
- a_1 : Medikation in den Stufen
 T = Tranquilizer
 P = Placebo
 S = Stimulizer
- a_2 : weißes Rauschen als Stressor in den 3
 Lautstärken P1, P2 und P3
- und den
- b. Observablen
- b_1 : erlebte Lautheit bei den Vpn, wobei die
 Lautheitsurteile mediandichotomiert wurden in E+ und E-
- b_2 : Leistung in einem Lerntest, die ebenfalls mediandichotomiert wurde in L+ und L-

durch. Am Experiment nahmen N=54 weibliche Vpn teil.

Das Ergebnis zeigt Tabelle 3. Die Zeilen stellen die Stufen der Medikation, die Spalten die Stufen des weißen Rauschens dar. In den Zellen ist die Vierfeldertafel aus erlebter Lautheit und Leistung zu finden. Axial-

TABELLE 3

	P 1	P 2	P 3	
T	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 2 & 2 \\ \text{E-} & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 0 & 2 \\ \text{E-} & 3 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 0 & 1 \\ \text{E-} & 2 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 2 & 5 \\ \text{E-} & 6 & 5 \end{array}$
	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 2 & 0 \\ \text{E-} & 2 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 2 & 1 \\ \text{E-} & 1 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 1 & 3 \\ \text{E-} & 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 5 & 4 \\ \text{E-} & 5 & 4 \end{array}$
S	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 1 & 3 \\ \text{E-} & 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 5 & 0 \\ \text{E-} & 0 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 2 & 2 \\ \text{E-} & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 6 & 5 \\ \text{E-} & 3 & 4 \end{array}$
	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 5 & 5 \\ \text{E-} & 5 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 5 & 3 \\ \text{E-} & 4 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 3 & 6 \\ \text{E-} & 5 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} & \text{L+} & \text{L-} \\ \hline \text{E+} & 13 & 14 \\ \text{E-} & 14 & 13 \end{array}$

symmetrisch zur Hauptdiagonalen sind die Zellen 12-21, 13-31 und 23-32, zur Nebendiagonalen 12-23, 11-33 und 21-32.

Da eine bivariate Observable vorliegt, können insgesamt drei Prüfungen auf Axialsymmetrie stattfinden:

- ist die erlebte Lautheit axialsymmetrisch,
- ist die Lernleistung axialsymmetrisch und
- ist die Interaktion zwischen Lautheit und Leistung axialsymmetrisch?

Tabelle 4 zeigt die Auswertungsprozedur. Wird bezogen auf die erlebte Lautheit E ausgewertet (oberer Teil der Tabelle 4), werden die E+ und

TABELLE 4

SYMMETRIEPRÜFUNG BEZOGEN AUF ERLEBTE LAUTHEIT E					
	Zellen	12 21	13 31	23 32	
Axialsymm. Hauptdiag.	E+	2 2	1 4	4 3	
	E-	4 4	5 2	2 3	
	X ²	0	3.086	0.343	$\Sigma X^2=3.429$ df=3
	Zellen	12 23	11 33	21 32	
Axialsymm. Nebendiag.	E+	2 4	4 2	2 3	
	E-	4 2	4 2	4 3	
	X ²	1.333	0	0.343	$\Sigma X^2=1.676$ df=3
SYMMETRIEPRÜFUNG BEZOGEN AUF LEISTUNG L					
	Zellen	12 21	13 31	23 32	
Axialsymm. Hauptdiag.	L+	3 4	2 3	3 3	
	L-	3 2	4 3	3 3	
	X ²	0.343	0.343	0	$\Sigma X^2=0.686$ df=3
	Zellen	12 23	11 33	21 32	
Axialsymm. Nebendiag.	L+	3 3	3 3	4 3	
	L-	3 3	3 3	2 3	
	X ²	0	0	0.343	$\Sigma X^2=0.343$ df=3
SYMMETRIEPRÜFUNG BEZOGEN AUF DIE INTERAKTION E X L					
	Zellen	12 21	13 31	23 32	
Axialsymm. Hauptdiag.	I+	1 4	3 1	1 6	
	I-	5 2	3 5	5 0	
	X ²	3.086	1.500	8.571	$\Sigma X^2=13.157$ df=3
	Zellen	12 23	11 33	21 32	
Axialsymm. Nebendiag.	I+	1 1	3 3	4 6	
	I-	5 5	3 3	2 0	
	X ²	0	0	2.400	$\Sigma X^2=2.400$ df=3

(I+ ist die Zusammenfassung von E+L+ und E-L-, I- von E+L- und E-L+)

E- der entsprechenden Zelle in Tabelle 3 summiert und gegen die Summen der axialsymmetrischen Zelle auf Homogenität geprüft. Bei der Auswertung auf Leistung L werden die L+ und L- aufsummiert. Zur Prüfung der Interaktion E x L werden die interaktions-konstituierenden Zellen der Vierfeldertafel (E+L+)+(E-L-) und (E+L-)+(E-L+) summiert. Für den ersten Vergleich der Zelle 12 gegen 21 ist aus Tabelle 3 zu entnehmen:

	E+L+	E+L-	E-L+	E-L-	E+	E-	L+	L-	I+	I-
Zelle 12	0	2	3	1	2	4	3	3	1	5
Zelle 21	2	0	2	2	2	4	4	2	4	2

Für die Homogenitätsprüfung resultiert eine Vierfeldertafel mit den Frequenzen

- a. bei der Lautheit: 2 - 2 - 4 - 4
- b. bei der Leistung: 3 - 4 - 3 - 2
- c. bei der Interaktion: 1 - 4 - 5 - 2 (I+ steht für positive, I- für negative Interaktion).

Jede dieser Vierfeldertafeln liefert in der Homogenitätsprüfung ein X^2 mit einem Freiheitsgrad. Die Summe der Einzel- X^2 wird pro Symmetrietest nach der Summe der Freiheitsgrade beurteilt.

Es ergibt sich

1. für die Prüfung der erlebten Lautheit:

a_1 : weder die Axialsymmetrie Hauptdiagonale ($X^2=3.429$, $df=3$),
 a_2 : noch die Axialsymmetrie Nebendiagonale ($X^2=1.676$, $df=3$)

können verworfen werden. Damit ist nach den Entscheidungsregel nicht von der Axialsymmetrie auszugehen.

2. für die Prüfung der Leistung:

b_1 : weder die Axialsymmetrie Hauptdiagonale ($X^2=0.686$, $df=3$),
 b_2 : noch die Axialsymmetrie Nebendiagonale ($X^2=0.343$, $df=3$)

können verworfen werden. Wieder liegt keine Axialsymmetrie vor.

3. für die Prüfung der Interaktion Lautheit x Leistung (E x L):

c_1 : die Hypothese der Axialsymmetrie muß in bezug auf die Hauptdiagonale verworfen werden ($X^2=13.157$, $df=3$),

c_2 : wird aber für die Nebendiagonale beibehalten ($X^2=2.4$, $df=3$).

Damit kann weiter von der Axialsymmetrie in bezug auf die Nebendiagonale ausgegangen werden.

Direkte Wirkungen der Faktoren Medikation und Lärmstreß auf die Observablen liegen damit im Sinne der Axialsymmetrie nicht vor. Diese Hypothese kann nur in bezug auf die Interaktion E x L beibehalten werden. Es ergibt sich, daß die Reihenfolge der Medikation (Tranquilizer, Placebo, Stimulizer) in umgekehrter Richtung auf die Interaktion einwirkt wie die Reihenfolge des Lärmstreß (P_1 =leis, P_2 =mittel, P_3 =laut). Oder: Tranquilizer wirkt wie lauter, Stimulizer wie leiser Lärm.

Ein Blick in Tabelle 3 macht dieses Ergebnis verständlich. Die phi-Koeffizienten zwischen E und L sind für die entsprechenden axialsymmetrischen Zellen einander ähnlich. Diese Homogenität der Interaktionen führt zur Skalierung der Faktorkombinationen nach der Vorschrift der Axialsymmetrie. Einer weiteren Untersuchung kann damit folgende Skala der Faktorkombinationen unterlegt werden:

	T/P3	T/P2	T/P1		
		P/P3	P/P2	P/P1	
			S/P3	S/P2	S/P1
Skala	++	+	0	-	--

Damit ist eine gerichtete Heuristik für neue Untersuchungen gegeben.

Die Skalenbezeichnungen von "++" nach "--" deuten an, daß bereits eine substanzwissenschaftliche Hypothese unterstellt wurde. Es wird angenommen, daß Tranquilizer von gesunden Vpn als "hemmend" erlebt wird, ebenso wie lauter Lärm. Damit wäre diese Skala etwa als "Belastung" zu interpretieren. In einer Nachuntersuchung konnte dies bestätigt werden (KRÜGER, 1980).

Diskussion

Wie das Auswertungsprocedere zeigt, liegt dem Gedanken der Axialsymmetrie eine Verallgemeinerung des McNEMAR-Tests (1947) zugrunde, wobei hier als Spezifikum die doppelte Testung nach beiden Symmetrieachsen eingeführt wurde. Ein Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß keine

Annahmen über den Verlauf der Observablen über der Skala der Faktorkombinationen gemacht werden müssen. Jede beliebige Form der Abbildung der Faktoren in die Observablen ist prüfbar. Ein weiterer Vorteil ist darin zu sehen, daß einfach von multifaktoriellen-univariaten Versuchsplänen (im Beispiel die Prüfung der erlebten Lautheit bzw. der Leistung je für sich) zu multifaktoriellen-multivariaten Plänen (Prüfung der Lautheit x Leistungs-Interaktion) übergegangen werden kann. Auch die Erhöhung der Stufenzahl auf seiten der Observablen bereitet keine Schwierigkeiten.

Die Schwachstelle der angebotenen Auswertung liegt in der doppelten Testung nach beiden Symmetrieachsen, die eine inferentielle Interpretation verhindert. Im Sinne der Überlegungen wäre es nötig, den Fehler 2.Art zu kontrollieren, um auch auf das Vorliegen von Symmetrie schließen zu können (anstatt sie nur abzulehnen). Denn: alle vorgeschlagenen Tests basieren auf der Voraussetzung, daß überhaupt Effekte im Versuchsplan aufgetreten sind. Bei nur zufälliger Besetzung der Zellen wäre ohne dieses Desiderat weder Axial- noch Punktsymmetrie abzulehnen.

Da hier keine Angaben über den Fehler 2.Art gemacht wurden, liegt als Empfehlung für den Anwender nahe, das Risiko 1.Art recht hoch zu wählen (etwa $\alpha = 20\%$), um nicht durch überhöhte Ansprüche an das α den Fehler 2.Art unkontrolliert zu erhöhen.

Durch diese Einschränkungen ist auch die Rolle der hier vorgeschlagenen Auswertung vorgezeichnet. Sie kann nur in heuristischer Weise anknüpfend an eine im strengen Sinn inferentielle Auswertung nach Haupt- und Wechselwirkungen tätig werden.

Fraglich ist, inwieweit die Prüfung auf Axialsymmetrie auch auf asymmetrische Versuchspläne (Faktoren mit unterschiedlicher Stufenzahl) angewendet werden kann. Bisläng existieren für diese Fälle keine Symmetriemodelle (siehe dazu etwa LIENERT, 1979). Es bleibt zu diskutieren, ob für die hier vorgeschlagene Prüfung nicht das Desiderat der gleichen Summe aus Zeilen- und Spaltenscore ausreicht. Überprüft wird eine bestimmte Form der additiven Wirkung zweier Faktoren. Durch eine entsprechende Modellbildung könnte dies Prüfung wahrscheinlich sogar allgemeiner und effizienter ausfallen als mit dem hier vorgelegten Konzept der Axialsymmetrie.

Literatur

KRAUTH, J. und LIENERT, G.A.: Die Konfigurationsfrequenzanalyse.
Freiburg: Alber, 1973

KRÜGER, H.-P.: Differentielle Pharmakopsychologie ohne Differentielle
Psychologie? In: JANKE, W. (Hrsg.): Festschrift für G.A. LIENERT.
Erscheint 1980

LIENERT, G.A.: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. 2. Aufl.
Band II. Meisenheim: Hain, 1979

McNEMAR, Q.: Note on the sampling error of the differences between
correlated proportions of percentages. Psychometrika, 12, 1947,
153-157

Anschrift der Verfasser: Dr.Christine Wolfrum, Psychologisches Institut
der Universität Düsseldorf, Universitätsstraße 1, 4000 Düsseldorf und
Prof.Dr.Hans-Peter Krüger, Psychologisches Institut der Universität
Würzburg, Domerschulstraße 13, 8700 Würzburg