

# Die Prüfung von Verlaufskurven auf das Vorliegen von Trends über die exakte Verteilung von *Spearman's S<sup>2</sup>*

*Hans-Peter Krüger und Armin Rausche*

## 1. Trendfragestellungen bei Verlaufskurven

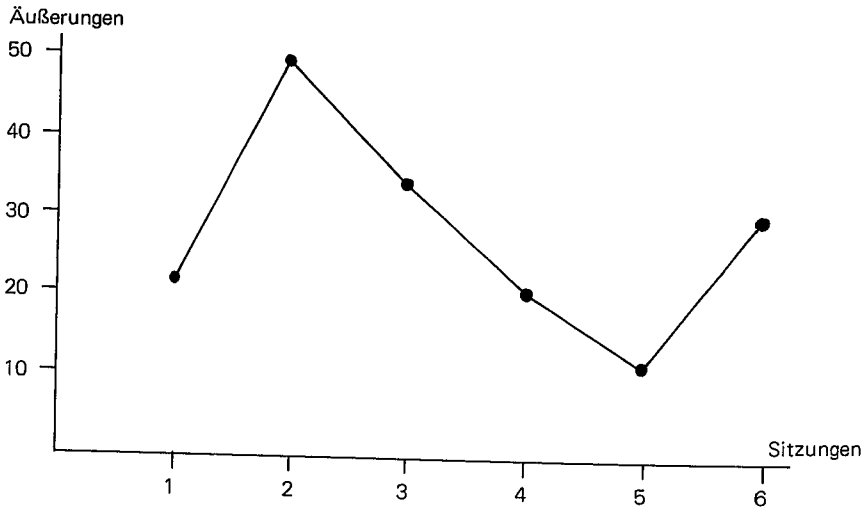
Die Bedeutung der Evaluation von Interventionsmaßnahmen nimmt in der klinischen Forschung ständig zu. In der Regel fallen dabei Verlaufsdaten an. Diese stellen den Anwender dann vor Probleme, wenn er die Dignität seiner Daten für eine parametrische Auswertung begründen muß. Oftmals liegen nur ordinalskalierte Observablen vor, zudem sind die Stichprobenumfänge in einigen Fällen recht klein. Im Zuge zunehmender Beliebtheit von nichtparametrischen Verfahren sind zu diesem Problem vor allem in den letzten Jahren eine ganze Anzahl von Auswertungsverfahren vorgeschlagen worden (für eine Übersicht siehe *Lienert 1979*).

Von einer Verlaufskurve soll im folgenden gesprochen werden, wenn ein Merkmal  $x$  an einem  $P_b$  ( $i=1, \dots, N$ ) zu  $t$  ( $t=1, \dots, T$ ) Zeitpunkten gemessen wird. Die Meßwerte  $x_{it}$  können einem bestimmten Verlauf folgen, den wir als Trendstufe  $k$  beschreiben.  $k=1$  wird als monotoner,  $k=2$  als bitoner,  $k=3$  als tritoner Trend bezeichnet. Höhere Trendstufen sind selbstverständlich möglich, doch in der Interpretation kaum aufzufangen.

In der Therapieevaluation wäre ein  $k=1$  etwa der Hypothese einer abnehmenden pathogenen Symptomatik entsprechend. Ein  $k=2$  könnte etwa bedeuten, daß bei Therapiebeginn eine Verschlechterung, dann erst eine Verbesserung erwartet wird. Ein  $k=3$  wäre möglicherweise für das Verhältnis des Klienten zum Therapeuten während einer Therapie zu erwarten: Nach einer Phase zunehmender Nähe am Anfang, nimmt diese in der Verarbeitungsphase stark ab, um sich zum Therapieende wieder in die Ausgangslage zurückzubewegen. Ausgebaute Hypothesen für höhere Trendstufen scheinen uns allerdings sehr selten zu sein.

## 2. Die Bestimmung der Trendkomponenten einer Verlaufskurve

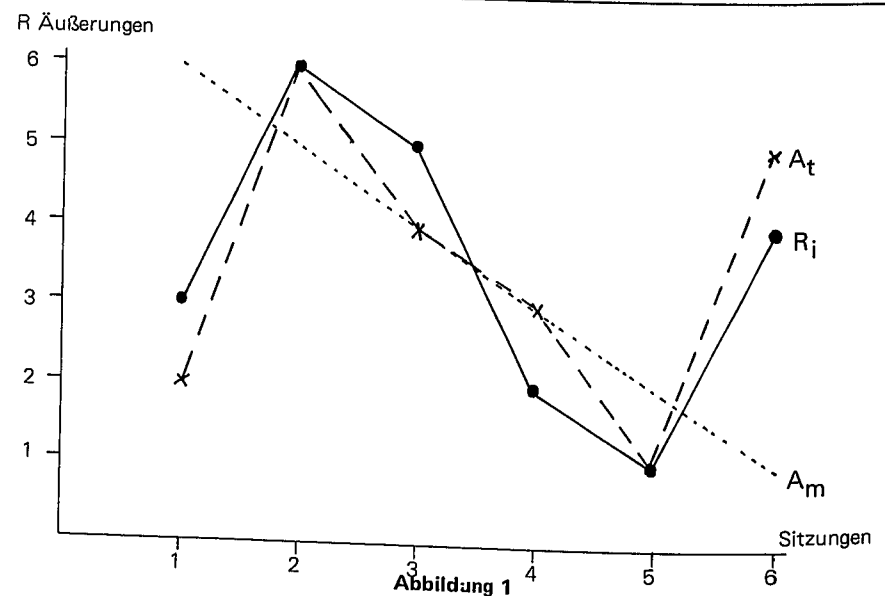
An einem Klienten werden über  $T=6$  Sitzungen hinweg erhoben, wieviel Äußerungen er abgibt, die auf den Therapeuten bezogen sind. Das Ergebnis ist in Abbildung 1, Teil A veranschaulicht. Die Zahl solcher Äußerungen steigt in der 2. Sitzung steil an, wird in den darauffolgenden geringer und endet mit einer leichten Erhöhung gegenüber dem Ausgangswert. Gefragt wird nach den einzelnen Trendkomponenten dieser Verlaufskurve.



A

$X_i$	22	50	34	21	12	30		
$R_i$	3	6	5	2	1	4		
$A_m$	1	2	3	4	5	6	$S^2$	rho
$A_b$	5.5	3.5	1.5	1.5	3.5	5.5	48	-0.371
$A_t$	2	6	4	3	1	5	33.5	+0.069
							4	+0.0886

B



C

Abbildung 1

### 2.1 Die Methode der orthogonalen Polynome

Grundsätzlich kann jede empirische Kurve durch ein Polynom angepaßt werden, wenn die Zahl der freien Parameter des Polynoms groß genug ist.

Am einfachsten ist das vorzustellen, wenn nur zwei empirische Punkte gegeben sind. Durch diese Punkte ist genau eine Gerade zu legen mit der Grundgleichung  $y = a_0 + a_1 x$ . Sind drei empirische Punkte gegeben, existiert genau eine Parabel, die durch diese drei Punkte geht mit der Grundgleichung  $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ . Mit jedem weiteren empirischen Punkt verlängert sich das Polynom um ein Glied, so daß für T Punkte allgemein geschrieben werden kann

$$y = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_{T-1} x^{T-1} \quad (1)$$

Die  $a_0, a_1, \dots, a_{T-1}$  werden als Polynomkoeffizienten bezeichnet und sind die freien Parameter, über die die Kurvenanpassung vollzogen wird.

Im Regelfall sind diese Polynomkoeffizienten nicht unabhängig voneinander: Ein bestimmtes  $a_0$  impliziert meist bereits die Ausprägung des  $a_1$  und der folgenden Koeffizienten. D.h., niederwertigere Koeffizienten „erklären“ bereits einen Anteil an der Verlaufskurve, der eigentlich höherwertigen Koeffizienten (mit höherem Exponenten) vorbehalten wäre.

Die von R.A. Fisher (1921) eingeführte Methode der „orthogonalen Polynome“ vermeidet diese Schwierigkeit, indem sie statt der „x“ in der Polynomgleichung Funktionen von  $x(z=f(x))$  so wählt, daß für diese z gilt:

- a)  $\sum z_i = 0$
- b)  $\sum z_i z_j = 0$  für jedes mögliche Paar von i und j ( $i \neq j$ ).

Bedingung b) ist so zu interpretieren, daß die Koeffizienten für den i-ten Trend unabhängig (und damit auch unkorreliert) sind von den Koeffizienten des j-ten Trends (bei gleichem T). Wegen dieser Bedingung für das Kreuzprodukt  $\sum z_i z_j$  werden die Polynomkoeffizienten *orthogonal* genannt. Mit diesen Koeffizienten ist es möglich, schrittweise aus einer empirischen Kurve die einzelnen Trend-Anteile herausziehen. Für eine Beschreibung dieser Methode siehe etwa Lienert (1979, 233 ff.) oder Pearson & Hartley (1966), wo auch jeweils die Tabellen für diese Koeffizienten zu finden sind.

Die Anwendung der orthogonalen Polynome ist an zwei Bedingungen gebunden:

- a) Die Meßwerte müssen intervallskaliert und die Serie der T Punkte muß äquidistant sein. Sind die T Meßzeitpunkte nicht mehr gleichabständig, sind die üblicherweise angegebenen Koeffizienten nicht zu verwenden. Wie dann zu verfahren ist, findet sich bei Grandage (1958), Robson (1959) und Gaito (1965).
- b) Soll auf die Signifikanz des Trends getestet werden, muß für die dabei verwendete ANOVA die Normalverteilung der Daten begründbar sein.

### 2.2 Die Rang-Methode von Ferguson

Vor allem im klinischen Bereich sind weder Äquidistanz der Meßzeitpunkte (man denke an den Ablauf einer Therapie) noch Intervallqualität der Messungen (etwa Klientenratings) einfach zu realisieren. Plausibel ist meist nur Rangdignität der eingebrachten Daten. Ferguson (1965) führte die Überlegung ein, statt der Koeffizienten der orthogonalen Polynome deren Ränge zu verwenden. Ebenfalls werden die Daten durch ihre Ränge repräsentiert. Die Höhe der Rangkorrelationen (Kendalls

tau) zwischen den Rängen der Polynomkoeffizienten und den Rängen der Daten gibt dann die Stärke des jeweiligen Trends an.

Für das Beispiel der Abbildung 1 ist das Vorgehen dann wie folgt:

1. Herausuchen der orthogonalen Koeffizienten für T=6 für k=3 Trendstufen (bis k=5 wäre bei T=6 möglich, da  $k_{max}=T-1$ )

monoton:	-5	-3	-1	1	3	5
biton:	5	-1	-4	-4	-1	5
triton:	-5	7	4	4	7	5

2. Umwandlung der Koeffizienten in Ränge (siehe dazu auch Tafel A des Anhangs)

monoton:	1	2	3	4	5	6	(= $A_m$ )
biton:	5.5	3.5	1.5	1.5	3.5	5.5	(= $A_b$ )
triton:	2	6	4	3	1	5	(= $A_t$ )

Diese Rangreihen werden im folgenden als „Ankerreihen“ bezeichnet.

3. Umwandlung der Meßwerte in Ränge

Meßwerte:	22	50	34	21	12	30	(=x)
Ränge:	3	6	5	2	1	4	(= $R_x$ )

Diese Rangreihe wird im folgenden als „Vergleichsreihe“ bezeichnet.

4. Bestimmung des Anteils jeder Trendstufe über die Bildung einer Korrelation zwischen Ankerreihe und Vergleichsreihe. *Ferguson* schlägt dafür *Kendalls* tau vor: Wir geben hier die Prüfgröße  $S^2$  an, die in der *Spearmans* Rangkorrelation verwendet wird und die Summe der Quadrate der Rangdifferenzen Anker-Vergleichsreihe bezeichnet. Das Vorgehen ist in Teil B der Abbildung 1 veranschaulicht.

Es zeigt sich ein negativer Zusammenhang der Vergleichsreihe zur monotonen Ankerreihe, ein stark positiver zur tritonischen und kein Zusammenhang zur bitonischen. Das wird anschaulich aus Teil C der Abbildung 1, in der die Rangwerte eingetragen sind. Die Verlaufskurve fällt leicht (= negativer monotoner Trend) und zeigt die typisch tritonische S-Form.

Das Vorgehen nach *Ferguson* scheint so sehr plausibel, hat aber einen entscheidenden Nachteil: Durch die Technik der Rangvergabe an die Polynomkoeffizienten geht deren Unabhängigkeit verloren.

Im obigen Beispiel sind sowohl die orthogonalen Koeffizienten wie deren Ränge für T=6 angegeben (Punkt 1 und 2). Korreliert man z.B. die Koeffizienten des monotonen mit denen des tritonischen Trends, resultiert ein  $r=0$ , wie in der Unabhängigkeitsbedingung gefordert. Die entsprechende Korrelation zwischen den Rängen des Koeffizienten beträgt aber  $\rho = -0.029$ . Das bedeutet, daß in der Rangbetrachtung das Vorliegen eines monotonen Trends bereits eine gewisse Höhe des tritonischen Trends impliziert (und vice versa). Damit sind die Trendtests nicht mehr unabhängig voneinander.

*Sarris, Revenstorff & Fricke* (1969) haben diesen Einwand (der bereits von *Stuart*, 1965, erhoben wurde) zum Anlaß genommen, die Tau-Korrelation für ausgewählte Trendstufen und eine Reihe von Meßzeitpunkten (bis T=200) zwischen den Rängen der Polynomkoeffizienten zu berechnen. Ihr Ergebnis: Gerade Trendstufen korrelieren mit geraden zu Null (also etwa  $k=2$  mit  $k=4$ ), ebenso ungerade mit ungeraden. Korrelationen treten auf zwischen geraden und ungeraden. Sie bewegen sich etwa um  $\pm 0.07$  und werden mit zunehmendem T nicht kleiner. Bis T=5 sind allerdings alle Interkorrelationen Null. Das gilt in dieser Form nur für Tau-Korrelationen, bei *Spearmans* rho stellen sich die Verhältnisse anders dar (siehe obiges Beispiel, in dem der monotone mit dem tritonischen Trend korreliert).

Dieser Einwand gegen die *Ferguson*-Methode hat zu einer Skepsis bei ihrer Anwendung geführt, die eine weitere Verbreitung verhinderte. Das ist auch verständlich, bedenkt man die Konsequenzen dieser Verletzung der Unabhängigkeitsbedingung.

Wird eine Verlaufskurve als monoton gekennzeichnet (d.h. korrelieren die Ränge der Meßwerte hoch mit den Rängen der linearen Polynomkoeffizienten), ist damit gleichzeitig eine erhöhte Korrelation mit den Rängen der tritonischen Koeffizienten impliziert.

Dennoch machen die wenig restriktiven Voraussetzungen das Verfahren für die Praxis attraktiv. Es gilt also, ein Verfahren zu finden, das die Abhängigkeit zwischen den Rängen der Koeffizienten explizit aufgreift.

### 3. Die Methode der exakten Rangverteilungen

Gegeben sei eine Verlaufskurve mit T=3 Stützstellen (Meßzeitpunkte). Werden die Meßwerte in Ränge transformiert, gibt es  $3!=6$  mögliche Permutationen (allgemein T!), die auftreten können. Sie sind in Tabelle 1, Teil A in der linken Spalte aufgeführt. Die orthogonalen Koeffizienten lauten für T=3:

monoton:	-1	0	1	in Rängen:	1	2	3
biton:	1	-2	1	in Rängen:	2.5	1	2.5

Für jede Permutation wird  $S^2$  zur monotonen und bitonischen Ankerreihe bestimmt (Spalte 2 und 3 der Tabelle 1, Teil A). Es zeigt sich, daß beim monotonen Trend nur vier verschiedene  $S^2$  (0,2,6 und 8), beim bitonischen Trend nur drei verschiedene (0,5, 3,5 und 6,5) auftreten können. Die Häufigkeitsverteilung dieser  $S^2$  geht aus Tabelle 1, Teil B hervor.

Tabelle 1:

Permutationen	monoton	biton	klassifiziert	
	$S^2$ zu 1-2-3	$S^2$ zu 2.5-1-2.5	mono	biton
1 2 3	0	3.5	-	0
1 3 2	2	6.5	0	+
2 1 3	2	0.5	0	-
2 3 1	6	6.5	0	+
3 1 2	6	0.5	0	-
3 2 1	8	3.5	+	0

A

$S^2$	H	p	$P(S_1^2 \leq S^2)$	$P(S_1^2 \geq S^2)$
monoton				
0	1	1/6	1/6	6/6
2	2	2/6	3/6	5/6
6	2	2/6	5/6	3/6
8	1	1/6	6/6	1/6
biton				
0.5	2	2/6	2/6	6/6
3.5	2	2/6	4/6	4/6
6.5	2	2/6	6/6	2/6

B

mono	biton	H	E
+	+	-	0
+	0	1	1/6
+	-	-	0
0	+	2	2/6
0	0	-	0
0	-	2	2/6
-	+	-	0
-	0	1	1/6
-	-	-	0

C

Unter der Nullhypothese keines Trends sind alle Rangpermutationen gleich wahrscheinlich. Da die einzelnen Permutationen voneinander unabhängig sind, läßt sich die Verteilung der  $S^2$  unter  $H_0$  bilden. In Spalte 2 der Tabelle 1, Teil B sind die Häufigkeiten der  $S^2$ , in Spalte 3 die Punkt Wahrscheinlichkeiten  $p$  für jedes  $S^2$  angegeben. Völlig analog dem Verfahren der Signifikanzbestimmung beim Korrelationskoeffizienten kann nun gefragt werden, wie wahrscheinlich es ist, ein bestimmtes  $S^2$  oder ein kleineres zu erhalten (= Überschreitungswahrscheinlichkeit). Die Punkt Wahrscheinlichkeit  $p(S^2=2)$  beim monotonen Trend beträgt  $p = 2/6$ . Die Überschreitungswahrscheinlichkeit, ein kleineres oder gleiches  $S^2$  zu erzielen, beträgt  $P(S_1^2 \leq S^2) = p(S^2=2) + p(S^2=0) = 2/6 + 1/6 = 3/6 = 0.50$ . In Spalte 4 sind die Überschreitungswahrscheinlichkeiten  $P(S_1^2 \leq S^2)$ , in Spalte 5 die Überschreitungswahrscheinlichkeiten  $P(S_1^2 \geq S^2)$  angegeben.

Damit ist ein erstes Ziel erreicht: Da die Zahl der Rangpermutationen für jedes  $T$  endlich ist, kann unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller Permutationen die Verteilung der monotonen, bitonen, usw.  $S^2$  unter Gültigkeit von  $H_0$  (= kein Trend) erstellt werden. Für jede Verlaufskurve kann damit angegeben werden, mit welcher Überschreitungswahrscheinlichkeit das beobachtete oder ein extremeres  $S^2$  zu erhalten ist. Für die Einzelfalldiagnostik ist so eine Möglichkeit gegeben, individuelle Verlaufskurven auf die Stärke des Trends zu prüfen.

### 3.1 Die Beurteilung von Verlaufskurven nach der exakten Rangverteilung (Einzelfalldiagnostik)

Für  $T=4(1)10$  sind in Tafel B des Anhangs zu einer Reihe von Signifikanzniveaus  $\alpha$  die Grenzen angegeben, die ein  $S^2$  höchstens erreichen darf, um zum gegebenen  $\alpha$  als „signifikant“ zu gelten. Dabei sind die Fälle inbegriffen, in denen auf monotone, bitone und tritone Trends ( $k=1(1)3$ ) zu  $\alpha = q$  von 0,5, 1, 2,5, 5, 10, 20, 25 und 33% geprüft werden soll. Liegt also eine Meßwertreihe mit  $T$  Meßwerten vor, wird wie folgt geprüft:

- Festlegung der zu prüfenden Trendstufen.** Am Beispiel der Abbildung 1: Es soll der monotone Trend überprüft werden.
- Festlegung der zu erwartenden Richtung für den Trend.** Aus inhaltlichen Gründen ist zu erwarten, daß die Zahl der therapeutenbezogenen Äußerungen abnimmt. Daraus resultiert für den monotonen Trend eine einseitige Fragestellung: die Korrelation zur Ankerreihe wird negativ,  $S^2$  also als groß angenommen (bei exakter Übereinstimmung von Anker- und Vergleichsreihe, also bei  $\rho = 1$ , wird  $S^2=0$ ).

- Festlegung des Signifikanzniveaus  $\alpha$ .** In Tafel B ist  $\alpha$  mit  $q$  bezeichnet; acht verschiedene Niveaus stehen zur Verfügung. Es wird ein  $\alpha = 5\%$  gewählt.
- Umwandlung der Meßwerte in Ränge.**
- Bestimmung der Ränge des orthogonalen Polynoms für  $T$  Meßzeitpunkte.** Die Ränge der Polynomkoeffizienten sind aus Tafel A zu entnehmen. Für den hier zu prüfenden Fall mit  $T=6$  und monotoner Alternativhypothese lauten die Ränge 1-2-3-4-5-6.
- Bestimmung des  $S^2$  zwischen Anker- und Vergleichsreihe.** Wie aus Abbildung 1, Teil B hervorgeht, beträgt  $S^2=48$  für den monotonen Trend.
- Heraussuchen des Tafelwertes für das gegebene  $T$ ,  $\alpha$  und die Trendstufe.** In Tafel B ist für  $T=6$ ,  $\alpha=q=5\%$  bei Trend M (= monoton) zu finden.

+ 6.0  
- 64.0

Es wird ein negativ monotoner Trend unterstellt. Da  $S^2=48 < 64$ , muß  $H_0$  keines monotonen Trends beibehalten werden. Bei dieser Verlaufskurve kann zum gegebenen  $\alpha$  also nicht von einem negativen Trend ausgegangen werden.

Das Vorgehen soll für eine zweiseitige Fragestellung noch einmal an derselben Kurve der Abbildung 1 für den tritonen Trend dargestellt werden.

- Festlegung der zu prüfenden Trendstufe: triton
- Festlegung der zu erwartenden Richtung: Hier kann keine Voraussage gemacht werden, es ist also zweiseitig zu prüfen (anschaulich: das „S“ des tritonen Trends kann auf dem „Bauch“ oder auf dem „Rücken“ liegen).
- Festlegung des Signifikanzniveaus  $\alpha$ : es soll insgesamt zu  $\alpha=5\%$  geprüft werden. Da sowohl entschieden werden muß, ob der Trend positiv oder negativ ist, müssen zwei simultane Tests durchgeführt werden. Nach dem *Bonferoni*-Prinzip ist dazu das  $\alpha$ =Niveau auf die Zahl der r durchzuführenden Tests zu adjustieren (siehe dazu *Krauth & Lienert* 1973a). Es werden ein Test auf positiven und ein Test auf negativen Trend durchgeführt. Da damit  $r=2$ , muß zu  $\alpha^0 = \alpha/r = 0.05/2 = 2.5\%$  geprüft werden.
- Umwandlung der Meßwerte in Ränge.
- Bestimmung der Ränge des orthogonalen Polynoms für  $T$  Meßzeitpunkte: Aus Tafel A geht für den tritonen Trend bei  $T=6$  die Rangfolge 2-6-4-3-1-5 hervor.
- Bestimmung der  $S^2$  zwischen Anker- und Vergleichsreihe: Aus Abbildung 1, Teil B ist zu entnehmen, daß  $S^2=4$ .
- Heraussuchen des Tafelwertes für das gegebene  $T$ ,  $\alpha$  und die Trendstufe: In Tafel B ist für  $T=6$ ,  $\alpha^0=q=2.5\%$  bei Trend T (= triton) zu finden

+ 4.0  
- 66.0

Da  $S^2=4.0 \leq 4.0$  (dem Tafelwert für positiven tritonen Trend) ist, darf zum gegebenen  $\alpha=5\%$  von einem positiven tritonen Trend ausgegangen werden.  $H_0$  wird abgelehnt.

**Hinweis:** Treten in der Vergleichsreihe Bindungen (= gleiche Meßwerte) auf, muß die Rangvergabe durch Zufall geschehen. Eine (wie sonst übliche) Vergabe von mittleren Rängen verändert die in Tafel B tabellierte Nullverteilung.

Mit diesen Tabellen können somit individuelle Verlaufskurven (unter der Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Meßwerte) auf Signifikanz für bestimmte Trendstufen untersucht werden.<sup>1</sup> Es ist allerdings *nicht möglich*, eine gegebene Verlaufs-

1) Ähnliche Tabellen haben *Hotelling-Pabst* und *Glasser-Winter* erstellt (siehe dazu *Lienert* 1975). Diese können allerdings nur zur Prüfung von Trends eingesetzt werden, deren Ankerreihen keine Bindungen aufweisen.

kurve inferentiell für mehrere Trendstufen gleichzeitig zu beurteilen. Da die Technik der Rangvergabe wie erwähnt die Unabhängigkeit zwischen den Polynomialkoeffizienten verletzt, wären solche Tests nicht mehr unabhängig. Auch eine entsprechende  $\alpha$ -Adjustierung kann dem nicht abhelfen. Es ist nur erlaubt, jeweils *eine* Trendstufe zu prüfen.

### 3.2 Die Klassifikation von Verlaufskurven nach mehreren Trendkomponenten gleichzeitig.

Die Rangbildung verbietet eine simultane Prüfung mehrerer Trendstufen *bei inferentieller Fragestellung*. Nichts kann allerdings dagegen eingewendet werden, die  $S^2$  als deskriptive Maße für die einzelnen Trends einzuführen. Je extremer die  $S^2$ , desto deutlicher ist der Trend. Ist  $S^2$  klein, handelt es sich um einen positiven, ist  $S^2$  groß, um einen negativen Trend. Der Anwender kann so anhand der  $S^2$  entscheiden, ab wann er einen Trend als positiv, negativ oder als „nicht vorhanden“ klassifizieren will. Dabei handelt es sich um *keine inferentielle Entscheidung*, sondern lediglich um eine deskriptive Klassifikation. Für die Entscheidung „kein Trend“ müßte bei inferentieller Ausrichtung sonst der  $\beta$ -Fehler kontrolliert werden.

#### 3.2.1 Die Berechnung der Auftrittswahrscheinlichkeiten

Die Klassifikation danach, ob ein Trend vorliegt, geschieht sinnvollerweise nach der Verteilung des  $S^2$  unter  $H_0$ . Für  $T=3$  hatten wir in Tabelle 1 alle möglichen Rangpermutationen aufgezählt (Teil A der Tabelle) und die Verteilung der  $S^2$  bestimmt (Teil B). Es liegt nun in der Hand des Anwenders (und ist nach inhaltlichen Gesichtspunkten zu entscheiden), ab welcher Überschreitungswahrscheinlichkeit er einen Trend annehmen will. Für das Beispiel der Tabelle 1 soll diese Überschreitungswahrscheinlichkeit  $q=P(S^2) \leq 33\%$  sein, um einen positiven oder negativen Trend zu klassifizieren. Dann geht aus Teil B der Tabelle hervor:

- beim monotonen Trend:
  - nur  $P(S^2=0) = 1/6 \leq 33\% = q$  und führt zur Klassifikation „positiv monotoner Trend“ (mit „+“ signiert)
  - nur  $P(S^2=8) = 1/6 \leq 33\% = q$  führt zur Klassifikation „negativ monotoner Trend“ (mit „-“ signiert)
  - alle anderen  $S^2$  führen zur Klassifikation „kein monotoner Trend“ (mit „0“ signiert).
- beim bitonen Trend:
  - nur  $P(S^2=0.5) = 2/6 \leq 33\% = q$  führt zu „positiver bitoner Trend“ (mit „+“ signiert)
  - nur  $P(S^2=6.5) = 2/6 \leq 33\% = q$  führt zu „negativer bitoner Trend“ (mit „-“ signiert)
  - alle anderen  $S^2$  führen zu „kein bitoner Trend“ (mit „0“ signiert).

Damit können aus der Nullverteilung von  $S^2$  alle  $T!=3!=6$  möglichen Verlaufsformen in Tabelle 1, Teil A nach ihrem monotonen und bitonen Trend klassifiziert werden. Das ist dort in den beiden letzten Spalten der Tabelle geschehen.

Es zeigt sich, daß zwar jeweils pro Trendstufe die Klassifikation nach positiv, negativ oder „kein Trend“ stattfinden kann, es aber bei  $T=3$  und  $q=33\%$  *nicht möglich*

ist, eine Verlaufskurve zu erhalten, die *sowohl* positiv monoton *als auch* positiv biton ist. Zusätzlich zur Verletzung der Unabhängigkeit bei der Rangvergabe wurde offensichtlich durch die Klassifikation der Trends eine weitere Abhängigkeit eingeführt. Dies muß bei der Prüfung explizit aufgegriffen werden.

Da jeweils pro Trendstufe  $k$  drei Klassen (+, 0 und -) möglich sind, resultieren bei  $K=2$  Trendstufen  $3^K=3^2=9$  mögliche Kombinationen, die in Tabelle 1, Teil C aufgeführt sind. Nicht alle dieser Konfigurationen (= Kombinationen) sind besetzt (es fehlen ++, +-, 00, -+ und --), dennoch können aus Tabelle 1, Teil A die Erwartungswerte angegeben werden. Die  $3!=6$  möglichen Permutationen verteilen sich wie in Spalte 2 der Tabelle 1, Teil C angegeben auf die  $3^K=9$  Konfigurationen. Da jede der Permutationen unter  $H_0$  keines Trends gleichwahrscheinlich ist, ergeben sich die Erwartungswerte (hier als Auftrittswahrscheinlichkeiten) direkt als  $e=h/T!$ , wobei  $h$  die Häufigkeiten pro Konfiguration angibt. Es ist zu beachten: Obwohl  $q=33\%$ , jede Klasse jeder Trendstufe also gleichwahrscheinlich ist, ergibt sich für die Kombination der Trendstufen *keine Gleichwahrscheinlichkeit*.

In Tafel C des Anhangs sind die Erwartungswerte (als Prozente der Auftrittswahrscheinlichkeit) für folgende Fälle angegeben:

- für  $k=1, 2$  und  $3$  (mono-, bi- und triton) und alle möglichen Kombinationen aus den drei Trendstufen
- für  $q=10, 20, 25$  und  $33\%$
- für  $T=4(1)10$

*Beispiel:* Mit  $K$  wird die Zahl der zu prüfenden Trendstufen bezeichnet. Für  $q=10\%$ ,  $T=5$ ,  $K=2$ , nämlich  $k=2$  und  $k=3$  (bi- und triton) ergeben sich theoretisch wieder  $3^K=9$  Kombinationen der drei Trendkomponenten. Aus Tafel C1 geht hervor, daß vier Konfigurationen nicht besetzt sind (++, +-, -+ und --). Die Erwartungswerte betragen für +0 und -0 jeweils 10%, für 0+ und 0- je 6.6667% für 00 ist er 66.6667%.

#### 3.2.2 Test auf überfrequente Trendkonfigurationen

Da die einzelnen Konfigurationen aus den Trendstufen unabhängig sind, kann bei genügender Größe ein  $X^2$ -Test auf die Güte der Anpassung der empirischen Häufigkeiten an die erwarteten angesetzt werden. Dabei ist die übliche *Pearson*-Prüfgröße

$$X^2 = \frac{(b-e)^2}{e}$$

zu verwenden, die bei Gültigkeit von  $H_0$  asymptotisch Chi-Quadrat-verteilt ist. Da in Tafel C die Erwartungswerte als Auftrittswahrscheinlichkeiten unter  $H_0$  in Prozent angegeben sind, ist die *Pearson*-Größe bei Verrechnung mit empirischen Häufigkeiten etwas umzuformen in

$$X^2 = \frac{(b - e.w)^2}{e.w.} \text{ mit } w = N/100$$

für jede einzelne Konfiguration. Ist man nur daran interessiert, das  $X^2$  für alle Konfigurationen zusammen zu erhalten (die sich bei der Verwendung der obigen Formel als Summe der Einzel- $X^2$  ergibt), rechnet man einfacher mit

$$\sum X^2 = \frac{100}{N} \sum \frac{b_i^2}{e_i} - N$$

Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich aus der Überlegung, daß  $3^K-U$  Einzeltests durchgeführt werden, wobei K die Zahl der geprüften Trends, U die Zahl der unbesetzten (= „unmöglichen“) Konfigurationen angibt. Ein Freiheitsgrad geht durch den Stichprobenumfang N verloren, so daß sich für den gesamten Test

$$df = 3^K - U - 1$$

Freiheitsgrade ergeben. Die Zahl der Freiheitsgrade ist in den Tafeln C jeweils unter der Auflistung der Konfigurationen angegeben.

Beispiel: Für T=5, q=10%, K=2, nämlich k=1 und k=3 resultieren, wie ein Blick in die Tafel C1 zeigt, U=4 nicht besetzte Konfigurationen. Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich so als

$$df = 3^2 - 4 - 1 = 4$$

Sollen Einzel-Konfigurationen geprüft werden, ist jeder einzelne Test pro Konfiguration mit  $df=1$  durchzuführen. Zu beachten ist allerdings dabei, daß bei inferentieller Fragestellung eine  $\alpha$ -Adjustierung auf die Zahl der r simultanen Tests durchzuführen ist. Wenn im obigen Beispiel alle fünf möglichen Konfigurationen einzeln abgeprüft werden ( $r=5$ ), muß das vorgegebene Signifikanzniveau  $\alpha$  auf  $\alpha^0 = \alpha/5$  adjustiert werden.

Das Vorgehen an einem Beispiel:

Bei N=72 Pbn wurde während einer 14minütigen Phase die Konzentrationsfähigkeit bestimmt, wobei die Leistung jeweils in 2-Minuten-Abständen gemessen wurde. Die Meßwerte  $x_1$  bis  $x_7$  pro Pb sind den ersten Spalten der Tabelle 2 zu entnehmen. Es soll geprüft werden, ob Pbn mit monotonem und/oder bitonem Trend überzufällig häufig auftreten, wobei keine Aussage über die Richtung der Trends gemacht werden kann. Als „deutlicher“ Trend wird eine Rangfolge mit  $q \leq 33\%$  bezeichnet. Das Signifikanzniveau  $\alpha$  wird auf 5% festgelegt.

- Schritt:** Umwandlung der Meßwerte in Ränge. Treten gleiche Meßwerte auf, müssen diese nach Zufall aufgelöst werden. Die Ränge  $R_1$  bis  $R_7$  gehen aus Tabelle 2 hervor.
- Schritt:** Heraussuchen der Ankerreihen A für das gegebene T und die zu prüfenden Trendstufen aus Tafel A.
- Schritt:** Berechnen von  $S^2_{mono}$  und  $S^2_{bit}$   
 Pb 1 hat die  

Meßwerte	34	31	32	31	33	32	32	und die
Ränge	7	1	5	2	6	3	4	(nach Zufall)

 Ankerreihen  

monoton	1	2	3	4	5	6	7	(aus Tafel A)
biton	6.5	4.5	2.5	1	2.5	4.5	6.5	(aus Tafel A)

 Berechnung  $S^2$   

monoton	36	1	4	4	1	9	9	$S^2_{mono} = 64$
biton	0.25	12.25	6.25	1	12.25	2.25	6.25	$S^2_{bit} = 40.5$

Diese Werte sind ebenfalls in Tabelle 2 zu finden.

- Schritt:** Heraussuchen der Grenzen für  $S^2$  für die einzelnen Trendstufen, T und das gewählte q. Im Beispiel ist T=7, q=33%, k=1 und k=2. Aus Tafel B ist zu entnehmen:

	M	B
T=7	+ 44.0	43.5
	- 68.0	65.5

Tabelle 2:

Pb	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_7$	$S^2_{mono}$	$S^2_{biton}$	$S^2_{tri}$	m	b	t	
1	34	31	32	31	33	32	32	7	1	5	2	6	3	4	64	40	50	76	2	1	2
2	43	45	48	50	48	50	46	1	2	4	7	5	6	3	26	95	50	64	2	1	2
3	45	45	50	42	45	44	43	6	4	7	2	5	3	1	34	60	50	60	2	2	2
4	45	39	46	48	46	37	39	4	2	6	7	5	1	3	68	91	50	68	2	2	2
5	50	43	45	44	42	44	41	7	3	6	5	2	4	1	36	61	50	64	2	2	2
6	40	39	46	41	41	42	41	2	1	7	5	4	6	3	36	85	50	56	1	3	2
7	33	27	28	25	29	20	28	7	2	4	1	5	6	3	62	29	50	88	2	1	2
8	36	32	34	30	33	33	27	7	3	6	2	5	4	1	90	52	50	76	3	2	2
9	41	38	40	37	37	34	25	7	5	6	3	4	1	2	106	51	50	48	3	2	2
10	50	48	50	48	45	44	45	6	4	7	5	3	1	2	100	69	50	40	3	3	2
11	45	45	46	47	44	42	41	5	4	6	7	3	2	1	94	87	50	48	3	3	2
12	56	57	50	62	58	50	50	4	5	3	7	6	2	1	80	91	50	64	3	3	2
13	45	39	43	41	39	43	41	7	2	5	3	1	6	4	66	27	50	64	2	1	2
14	41	42	46	45	45	47	48	1	2	5	4	3	6	7	8	54	50	64	2	1	2
15	40	45	41	42	46	43	48	1	5	2	3	6	4	7	16	47	50	40	1	2	2
16	37	39	38	40	39	41	39	1	5	2	6	3	7	4	28	68	50	52	1	3	2
17	44	35	37	37	37	35	33	7	2	4	5	6	3	1	94	69	50	88	3	3	2
18	36	32	36	31	37	31	29	5	4	6	2	7	3	1	82	68	50	68	3	3	2
19	27	26	31	23	29	22	27	4	2	6	1	5	7	3	44	49	50	72	1	2	3
20	52	56	47	51	53	52	50	4	7	1	3	6	5	2	66	51	50	72	2	2	3
21	49	51	49	51	51	49	50	3	7	2	6	5	1	4	68	69	50	76	3	2	1
22	39	48	40	39	44	48	45	1	6	3	2	4	7	5	26	44	50	44	1	2	2
23	41	40	47	42	42	35	39	4	3	7	6	5	1	2	80	92	50	44	2	3	2
24	45	45	46	40	38	34	41	6	5	7	4	2	1	3	100	54	50	28	3	2	1
25	36	27	29	31	32	23	37	6	1	2	3	4	5	7	20	19	50	72	1	1	1
26	45	44	44	36	41	40	35	7	6	5	2	4	3	1	106	44	50	68	3	2	2
27	50	38	49	42	43	42	41	7	1	6	3	4	5	2	74	51	50	80	3	2	3
28	52	47	50	50	47	56	47	6	1	5	4	3	7	2	60	54	50	84	2	2	3
29	43	38	39	40	39	32	40	7	2	4	6	3	1	5	74	48	50	52	2	2	2
30	24	25	30	21	22	24	26	2	4	6	7	1	3	5	52	75	50	16	2	2	1
31	34	29	30	30	34	34	32	5	1	2	3	7	6	4	22	47	50	96	1	2	3
32	50	47	47	45	48	49	43	7	3	4	2	5	6	1	78	44	50	92	2	2	1
33	35	33	29	27	32	32	31	7	6	2	1	5	4	3	82	21	50	72	3	1	2
34	20	18	18	18	18	20	17	7	3	2	5	4	6	1	76	57	50	96	3	2	3
35	39	40	38	36	38	35	37	6	7	5	2	4	1	3	100	40	50	28	3	1	1
36	40	40	45	40	41	40	39	5	3	7	2	6	4	1	78	68	50	68	3	3	3
37	36	33	40	44	37	42	46	2	1	4	6	3	5	7	12	60	50	44	1	2	3
38	37	37	35	31	36	33	32	7	6	4	1	5	3	2	96	33	50	64	3	1	2
39	48	39	44	43	38	37	31	7	4	6	5	3	2	1	106	65	50	56	3	2	2
40	39	39	40	39	34	40	39	5	2	7	3	1	6	4	58	43	50	48	2	1	2
41	36	32	36	27	38	36	37	3	1	2	6	7	4	5	22	72	50	76	1	3	3
42	44	46	46	46	45	40	42	3	5	7	6	4	1	2	84	92	50	28	3	3	1
43	53	53	47	41	44	46	44	7	6	5	1	3	4	2	98	29	50	56	3	1	2
44	45	43	45	43	39	44	42	6	3	7	4	1	5	2	84	54	50	52	3	2	2
45	37	26	29	21	32	28	21	7	1	2	4	6	3	5	52	38	50	84	2	1	1
46	50	46	48	46	44	45	40	7	5	6	4	2	3	1	108	54	50	52	3	2	2
47	76	66	60	56	56	56	51	7	6	5	2	4	3	1	106	44	50	60	3	2	2
48	38	32	39	27	39	39	38	3	1	7	2	5	6	4	34	60	50	60	1	2	2
49	40	39	43	43	46	45	39	3	1	4	5	7	6	2	26	85	50	88	1	3	3
50	45	47	48	47	48	47	49	1	3	6	2	5	4	7	18	52	50	28	1	2	1
51	54	54	49	52	52	44	52	7	6	2	4	3	1	5	86	26	50	44	3	1	2
52	38	40	41	41	37	42	38	2	4	5	6	1	7	3	46	72	50	44	2	3	2
53	68	64	61	62	59	61	56	7	6	3	5	2	4	1	102	49	50	64	3	2	2
54	38	33	31	30	36	33	34	7	3	2	1	6	4	5	56	17	50	80	2	1	3
55	22	26	27	29	29	29	28	1	2	3	4	5	6	7	8	54	50	52	1	2	2
56	25	16	27	17	16	28	24	3	4	5	6	2	7	1	62	60	50	60	2	3	2
57	71	70	56	58	49	50	50	7	6	4	5	1	2	3	102	41	50	40	3	1	2
58	42	30	15	40	33	35	34	7	1	5	6	2	4	3	74	56	50	68	3	2	2
59	46	40	41	41	37	35	37	7	4	6	5	3	1	2	104	61	50	48	3	2	2
60	40	38	40	42	38	39	40	4	2	5	6	1	3	7	42	48	50	28	1	2	1
61	30	25	25	40	26	39	40	1	2	2	7	4	5	6	14	71	50	48	1	2	2
62	39	34	34	37	30	31	32	6	4	7	5	1	2	3	94	57	50	12	3	2	1
63	39	40	41	35	37	37	39	5	6	7	1	2	3	4	84	22	50	24	1	1	1
64	22	29	31	28	31	31	36	1	4	5	3	7	6	2	28	82	50	24	1	1	1
65	16	17	19	20	21	22	26	1	2	3	6	4	5	7	6	64	50	44	1	2	2
66	45	36	34	34	30	30	34	7	6	3	4	1	2	5	28	37	50	16	3	1	1
67	24	29	33	37	39	31	37	4	1	5	6	2	3	7	26	50	50	26	1	2	1
68	34	34	38	30	30	31	31	2	4	3	7	1	5	6	22	59	50	22	1	2	1
69	25	11	28	29	28	29	31	1	6	2	4	3	5	7							

5. *Schritt*: Klassifikation der individuellen  $S^2$  nach diesen Grenzen.

Der Beispiels-Pb erhält damit

für  $S^2_{mono} = 64$  die Signatur „0“ (= kein monotoner Trend)

für  $S^2_{bit} = 40.5$  die Signatur „+“ (= positiv bitoner Trend)

In Tabelle 2 sind in der letzten Spalte diese Signaturen zu finden, wobei „+“ mit „1“, „0“ mit „2“ und „-“ mit „3“ signiert ist.

6. *Schritt*: Aufstellen der Häufigkeitsmatrix der Konfigurationen. Das ist für das Beispiel in Tabelle 3 geschehen.

Pro Konfiguration wird die Häufigkeit des Auftretens ausgezählt.

Tabelle 3:

Konfi m b	p	b	e	$X^2$
+ +	10.456	2	7.528	4.060
+ 0	12.163	13	8.757	2.055
+ -	10.456	8	7.528	0.030
0 +	12.103	7	8.714	0.337
0 0	9.643	2	6.943	3.519
0 -	12.103	3	8.714	3.747
- +	10.456	8	7.528	0.030
- 0	12.163	17	8.757	7.758
- -	10.456	12	7.528	2.656

$$X^2 = 24.192, df = 8, P = .00213$$

7. *Schritt*: Heraussuchen der Erwartungswerte für die gewählte Trendkombination für gegebenes T und q aus Tafel C. Die entsprechenden Werte sind ebenfalls in Tabelle 3 zu finden.

8. *Schritt*: Berechnen der  $X^2$ -Werte nach den angegebenen Formeln, Summation aller Einzel- $X^2$ . Für die Konfiguration ++ ergibt sich ein Erwartungswert von 10.456%. Beobachtet wurden  $b=2$  Fälle. Das  $X^2$  ergibt sich zu

$$X^2 = \frac{(2 - 10.456 \cdot 72/100)^2}{10.456 \cdot 72/100} = 4.060$$

Das gesamte  $X^2$  beträgt  $X^2=24.192$  und ist nach acht Freiheitsgraden zu beurteilen (die df sind ebenfalls in Tafel C zu finden).

9. *Schritt*: Beurteilung des  $X^2$  und Entscheidung über  $H_0$ . Das im Beispiel beobachtete  $X^2=24.192$  hat mit  $P = 0.00213$  eine Überschreitungswahrscheinlichkeit kleiner  $\alpha$ . Die Nullhypothese ist abzulehnen, wonach nur Zufallsfolgen vorliegen. Es treten überzufällig viele mono- und/oder bitone Trends im Material auf.

Würde man inferentiell alle neun Konfigurationen der Tabelle 3 je nach  $df=1$  beurteilen, müßte bei  $\alpha=5\%$  ein adjustiertes  $\alpha^0=0.05/9=0.0056$  angesetzt werden. Mit  $X^2=7.758$  und einem  $P=0.0053$  würde lediglich die Konfiguration „-0“ signifikant, in der sich Pbn befinden, die lediglich einen negativ monotonen (keinen bitonen) Trend zeigen.

### 3.2.3 Hierarchische Klassifikation von Verlaufskurven

Die Betrachtung der  $X^2$  in Tabelle 3 legt die Vermutung nahe, daß in der untersuchten Stichprobe nur monotone Trends aufzufinden sind. Die höheren  $X^2$  treten dort

auf, wo die bitone Trend-Komponente als „0“ klassifiziert wurde. Eine Überprüfung dieser Vermutung muß das  $X^2$  von mehreren kombinierten Trends in Einzel- $X^2$  zerlegen, die den einzelnen Trendkomponenten zuzuordnen sind. Für eine solche Fragestellung eignet sich die Technik der Assoziationsstrukturanalyse (ASA) nach Krauth & Lienert (1973b).

Dazu werden die  $K=3$  Trendstufen monoton (m), biton (b) und triton (t) sowie alle daraus möglichen Kombinationen daraufhin untersucht, ob überfrequente Häufigkeiten auftreten. Insgesamt resultieren daraus folgende Prüfungen:

für  $K=3$ : m b t (monoton, biton und triton)  
 für  $K=2$ : m b . (der Punkt gibt an, welche Trendstufe ausgelassen wird)  
 m . t  
 . b t  
 für  $K=1$ : m . .  
 . b .  
 . . t

Tabelle 4:

Trend	Ausgangs- $X^2$	bereinigtes $X^2$
m b t	32.771 <sub>6</sub>	4.968 <sub>8</sub>
m b .	24.192 <sub>8</sub>	6.303 <sub>4</sub>
m . t	14.739 <sub>8</sub>	0.474 <sub>4</sub>
. b t	7.417 <sub>8</sub>	2.481 <sub>4</sub>
m . .	13.609 <sub>2</sub>	13.609 <sub>2</sub>
. b .	4.280 <sub>2</sub>	4.280 <sub>2</sub>
. . t	0.656 <sub>2</sub>	0.656 <sub>2</sub>

In Tafel C sind für jede dieser Prüfungen die Erwartungswerte angegeben. Das Vorgehen ist dasselbe wie unter 3.2.2 beschrieben. Für das Beispiel der Tabelle 2 resultieren die in Tabelle 4 angegebenen  $X^2$ . Da die einzelnen Tests voneinander unabhängig sind, sind die  $X^2$  unter Gültigkeit von  $H_0$  additiv. Zieht man vom  $X^2$  jeder „höheren“ Trendkombination (Kombination mit mehr beteiligten Trendstufen) alle  $X^2$  der darin enthaltenen „niedrigeren“ Trendkombinationen ab, erhält man in dem Rest- $X^2$  jeweils den Anteil, der durch diese Kombination von Trendstufen (und nur durch diese) „erklärt“ wird. Für  $K=3$  Trendstufen müssen also folgende Differenzen gebildet werden:

Ausgangs- $X^2$	bereinigtes $X^2$
$X^2(mbt)$	$X^2(mbt) - X^2(mb.) - X^2(m.t) - X^2(.bt) + X^2(m.) + X^2(.b) + X^2(.t)$
$X^2(mb.)$	$X^2(mb.) - X^2(m.) - X^2(.b.)$
$X^2(m.t)$	$X^2(m.t) - X^2(m.) - X^2(.t)$
$X^2(.bt)$	$X^2(.bt) - X^2(.b.) - X^2(.t)$

Die  $X^2(m.)$ ,  $X^2(.b.)$  und  $X^2(.t)$  bleiben erhalten. Die bereinigten  $X^2$ -Werte für das Beispiel sind ebenfalls in Tabelle 4 angegeben. Die dort angehängten Zahlen bedeuten die Freiheitsgrade. Diese verhalten sich ebenso wie die  $X^2$  additiv. D.h., für die Zahl der Freiheitsgrade sind dieselben Bereinigungen durchzuführen wie für die  $X^2$ . Insgesamt entstehen sieben Kombinationen von Trends, die zu  $r=7$  Einzeltests füh-

ren. Entsprechend muß das  $\alpha$ -Niveau auf  $\alpha^0 = \alpha/r$  adjustiert werden. Wäre ein Niveau von  $\alpha = 5\%$  vorgegeben, resultierte daraus ein  $\alpha^0 = 0.05/7 = 0.00714$ . Lediglich das  $X^2(m..) = 13.609$  hat mit  $df=2$  eine Überschreitungswahrscheinlichkeit  $P = 0.00111$  kleiner  $\alpha$ . Keine der anderen Kombinationen überschreitet diese Grenze. Damit muß davon ausgegangen werden, daß in dem Material nur ein monotoner Trend anzusetzen ist. Die Nullhypothese keines Trends ist abzulehnen.

#### 4. Die Asymptotik des Verfahrens

Damit die *Pearson*-Prüfgröße hinreichend gut von der Chi-Quadrat-Verteilung approximiert wird, müssen die Erwartungswerte genügend groß sein. Üblicherweise werden als Faustregel Erwartungswerte  $e > 5$  angegeben. Da in Tafel C die Auftrittswahrscheinlichkeiten in Prozent stehen, resultierte aus dieser Forderung für den kleinsten Erwartungswert  $e_{\min}$

$$e_{\min} N / 100 > 5$$

Sind alle Erwartungswerte etwa gleich groß, was nur bei  $q=33\%$  überhaupt eintreten kann, reichen nach den Empfehlungen von *Wise* (1963) bereits Erwartungswerte um 2 für eine hinreichende Approximation. Da im klinischen Bereich meist kleinere Stichproben vorliegen, dürfte dieser Wert von  $q=33\%$  in der Regel auch die Grenze der Wahl sein.

Ein Blick in Tafel C zeigt, daß die Verteilungen der Erwartungswerte sich bereits bei  $T=10$  stabilisieren und übergehen in das Produkt der Einzelauftrittswahrscheinlichkeiten. D.h., bei Prüfung nur einer Trendstufe werden die  $e_i \approx q$ , bei Prüfung von zwei Trendstufen die  $e_i \approx q_1 \cdot q_2$  usw., so daß mit den gewählten Grenzen  $q$  direkt gerechnet werden kann. Für die Klassifikation von Verlaufskurven mit  $T > 10$  müssen allerdings auch die Grenzen der  $S^2$  (Tafel B) neu berechnet werden. Der Erwartungswert von  $S^2$  beträgt  $\mu(S^2) = T(T-1)/6$ . Die Varianz beträgt

$$\sigma^2(S^2) = \frac{1}{T-1} \left( \frac{T^3 - T}{6} \right)^2.$$

Für große  $T$  ist  $S^2$  näherungsweise normalverteilt. Dann können Ober- und Untergrenze von  $S^2$  für jedes  $q$  bestimmt werden aus

$$\begin{aligned} \text{Obergrenze} \quad O &= \mu(S^2) + z(q) \sigma(S^2) \\ \text{Untergrenze} \quad U &= \mu(S^2) - z(q) \sigma(S^2) \end{aligned}$$

Für  $z(q)$  ist je nach  $q$  zu setzen:  $z(q=33\%) = 0.43$ ,  $z(q=25\%) = 0.67$ ,  $z(q=20\%) = 0.84$  und  $z(q=10\%) = 1.28$ .

Für  $10 < T < 30$  ist diese Näherung jedoch noch sehr ungenau. Nach einem Vorschlag von *Kendall* (1948) ist es besser, in diesem Bereich die Grenzen nach

$$\begin{aligned} O &= \mu(S^2) + t(q, df) \sigma^*(S^2) \\ U &= \mu(S^2) - t(q, df) \sigma^*(S^2) \end{aligned}$$

zu berechnen. Dabei ist

$$\sigma^{*2} = \frac{T-1}{T-2} \sigma(S^2)$$

und  $t(q, df)$  der zu  $q$  gehörende  $t$ -Wert aus einer  $t$ -Verteilung mit  $df = T-2$  Freiheitsgraden.

*Beispiel:* Für  $T=10$ ,  $q=25\%$  wird  $\mu(S^2) = 10(100-1)/6 = 165$ ,  $\sigma^2 = [(10^3 - 10)6]^2 / (10-1) = 3025$ ,  $\sigma = 55$ ,  $\sigma^{*2} = 3025(10-1)/(10-2) = 3404$ ,  $\sigma^* = 58.3$ .

Unter Verwendung der Normalverteilungsapproximation erhält man  $O = 165 + (.67)(55) = 201.85$  und  $U = 165 - (.67)(55) = 128.15$ . Bei Verwendung der  $t$ -Verteilung erhält man mit  $t(q=25\%, df=10-2) = .71$  für  $O = 165 + (.71)(58.3) = 206.39$  und für  $U = 165 - (.71)(58.3) = 123.71$ . Diese Werte stimmen mit den exakten Werten aus Tafel B  $O = 206$  und  $U = 124$  gut überein.

#### 5. Diskussion

Die Methode der exakten Rangverteilungen umgeht die Schwierigkeit des *Ferguson*-Rationales durch die Angabe exakter Auftrittswahrscheinlichkeiten. Die Ansprüche an die Daten sind wenig restriktiv: Zum einen müssen die Meßwerte nur ordinal skaliert sein, zum anderen ist für die Reihenfolge der Messungen keine Äquidistanz vorgeschrieben. Die vorgeschlagene Methode ist damit in diesen Fällen gegenüber der direkten Verwendung der orthogonalen Polynome zur Trendbestimmung im Vorteil, wie sie etwa in *Lienert* beschrieben werden (1979, 347 ff. und 994 ff.). Für die Einzelfalldiagnostik wie für Fragestellungen nach „Pbn gleichen Verlaufs“ scheint die deskriptive Klassifikation nach „positivem“, „negativem“ und „kein“ Trend gleichermaßen brauchbar. Der Nachteil des Verfahrens liegt in der relativ aufwendigen Rechenprozedur.

#### LITERATUR:

- FERGUSON, G.A.: *Nonparametric trend analysis*. Montreal: McGill Univ. Press, 1965.
- FISHER, R.A. (1921): zitiert nach Pearson, E.S. & H.O. Hartley (Eds.): *Biometrika tables for statisticians*. 3rd ed., Vol. 1, Cambridge: University Press, 1969.
- GAITO, J.: Unequal intervals and unequal  $n$  in trend analyses. *Psych. Bull.*, 1965, 63, 125-127.
- GRANDAGE, A.: Orthogonal coefficients for unequal intervals. *Biometrics*, 1958, 14, 287-289.
- KENDALL, M.G.: *Rank correlation methods*. London: Charles Griffin, 1948.
- KRAUTH, J. & G.A. LIENERT: Nichtparametrischer Nachweis von Syndromen durch simultane Binomialtests. *Biom. Z.*, 1973 (a), 15, 13-20.
- KRAUTH, J. & G.A. LIENERT: *Die Konfigurationsfrequenzanalyse*. Freiburg/München: Alber, 1973 (b).
- LIENERT, G.A.: *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik*. 2. Aufl. Tafelband. Meisenheim: Hain, 1975.
- LIENERT, G.A.: *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik*. 2. Aufl., Band 2. Meisenheim: Hain, 1979.
- PEARSON, E.S. & H.O. HARTLEY (Eds.): *Biometrika tables for statisticians*. 3rd ed., Vol. 1. Cambridge: University Press, 1969.
- ROBSON, D.S.: A simple method for constructing orthogonal polynomials when the independent variable is unequally spaced. *Biometrics*, 1959, 15, 187-191.
- SARRIS, V., REVENSTORFF, D. & R. FRICKE: Überprüfung polytoner Trendkomponenten auf wechselseitige Unabhängigkeit mittels Fergusons nichtparametrischer Trendanalysen. *Z. exp. ang. Psych.*, 1969, 16, 473-478.



STUART, A.: Nonparametric trend analysis. (Buchrezension zu Ferguson, 1965). *Brit. J. Math. Stat.*, 1965, 18, 261.

WISE, M.E.: Multinomial probabilities and the  $X^2$  distribution. *Biometrika*, 1963, 50, 145-154.

**Anschrift:** Prof. Dr. Hans-Peter Krüger  
 Institut für Psychologie  
 der Universität Würzburg  
 Domerschulstraße 15  
 8700 Würzburg

**Anhang:**

**Tafel A:** Ränge der orthogonalen Polynome von  $T=4(1)10$  für monotonen, bitonen und tritonen Trend.

Ablesebeispiel: für  $T=5$  und tritonen Trend lauten die Ränge 2, 5, 3, 1 und 4.

Trendstufe		Ränge der Polynome									
T=4	k=1	1	2	3	4						
	k=2	3.5	1.5	1.5	3.5						
	k=3	2	4	1	3						
T=5	k=1	1	2	3	4	5					
	k=2	4.5	2.5	1	2.5	4.5					
	k=3	2	5	3	1	4					
T=6	k=1	1	2	3	4	5	6				
	k=2	5.5	3.5	1.5	1.5	3.5	5.5				
	k=3	2	6	4	3	1	5				
T=7	k=1	1	2	3	4	5	6	7			
	k=2	6.5	4.5	2.5	1	2.5	4.5	6.5			
	k=3	2	6	6	4	2	2	6			
T=8	k=1	1	2	3	4	5	6	7	8		
	k=2	7.5	5.5	3.5	1.5	1.5	3.5	5.5	7.5		
	k=3	1.5	6	7.5	5	4	1.5	3	7.5		
T=9	k=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	k=2	8.5	6.5	4.5	2.5	1	2.5	4.5	6.5	8.5	
	k=3	1	6	8	7	5	3	2	4	9	
T=10	k=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	k=2	9.5	7.5	5.5	3.5	1.5	1.5	3.5	5.5	7.5	9.5
	k=3	1	7	9	8	6	5	3	2	4	10

**Tafel B:** Obere und untere Schranken der Spearman-Summe  $S^2$  für  $q=0.5\%$ ,  $1\%$ ,  $2.5\%$ ,  $5\%$ ,  $10\%$ ,  $20\%$ ,  $25\%$  und  $33\%$  für  $T=4(1)10$  und monotonen, bitonen und tritonen Trend

Ablesebeispiel: für  $T=7$ ,  $q=10\%$  und bitonen Trend lautet die untere Grenze  $U=23.5$ , die obere Grenze  $O=85.5$ . Ist ein beobachtetes  $S^2 \leq U$ , ist von einer positiven Korrelation, ist  $S^2 \geq O$  von einer negativen Korrelation zum gegebenen Niveau  $q$  auszugehen.

T	+	-	Q=0.5%			Q=1.0%			Q=2.5%			Q=5.0%		
			M	B	T	M	B	T	M	B	T	M	B	T
T=4	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	20
T=5	+	-	-	-	-	-	-	0	-	-	0	2	1.0	2
T=6	+	-	-	-	-	-	-	40	-	-	40	38	37.0	38
T=7	+	-	-	-	0	-	-	2	4	1.5	4	6	5.5	6
T=8	+	-	-	4.5	-	6	7.5	4	12	11.5	8	16	16.5	12
T=9	+	-	10	6.0	11	14	14.0	15	22	18.0	22	30	26.0	30
T=10	+	-	158	158.0	155	154	150.0	151	146	146.0	144	138	138.0	136
T=9	+	-	20	21.0	20	26	27.0	26	36	37.0	36	48	48.0	48
T=10	+	-	220	215.0	220	214	209.0	214	204	199.0	204	192	188.0	192
T=10	+	-	34	30.5	34	42	38.5	42	58	54.5	58	72	70.5	72
T=10	+	-	296	294.5	296	288	286.5	288	272	270.5	272	258	254.5	258



w = 10%

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ # .	-	-	-	0.258	0.402	0.464	0.485
+ U .	-	6.667	8.750	9.484	9.028	8.762	8.591
+ - .	-	-	-	0.258	0.402	0.464	0.485
U + .	-	10.000	8.889	9.008	8.720	8.601	8.187
U 0 .	-	66.667	64.722	61.984	62.897	63.419	64.502
U - .	-	10.000	8.889	9.008	8.720	8.601	8.187
- + .	-	-	-	0.258	0.402	0.464	0.485
- U .	-	6.667	8.750	9.484	9.028	8.762	8.591
- - .	-	-	-	0.258	0.402	0.464	0.485
FG	-	4	4	8	8	8	8
+ . +	-	-	-	0.099	0.531	0.738	0.427
+ . U	4.167	6.667	8.611	9.544	9.085	8.780	8.770
+ . -	-	-	0.139	0.357	0.216	0.172	0.365
U . +	4.167	6.667	8.611	8.115	9.045	8.780	8.770
U . U	83.333	73.333	65.278	63.770	62.247	63.059	63.337
U . -	4.167	6.667	8.611	8.115	9.045	8.780	8.770
- . +	-	-	0.139	0.357	0.216	0.172	0.365
- . U	4.167	6.667	8.611	9.544	9.085	8.780	8.770
- . -	-	-	-	0.099	0.531	0.738	0.427
FG	4	4	6	8	8	8	8
. + +	-	-	0.139	0.298	0.508	0.449	0.500
. + U	-	10.000	8.611	8.929	8.507	8.631	8.157
. + -	-	-	0.139	0.298	0.508	0.449	0.500
. U +	-	6.667	8.472	7.976	8.775	8.793	8.561
. U U	-	66.667	65.278	65.000	63.403	63.358	64.562
. U -	-	6.667	8.472	7.976	8.775	8.793	8.561
. - +	-	-	0.139	0.298	0.508	0.449	0.500
. - U	-	10.000	8.611	8.929	8.507	8.631	8.157
. - -	-	-	0.139	0.298	0.508	0.449	0.500
FG	-	4	8	8	8	8	8
+ . .	4.167	6.667	8.750	10.000	9.831	9.690	9.562
U . .	91.667	86.667	82.500	80.000	80.337	80.620	80.876
- . .	4.167	6.667	8.750	10.000	9.831	9.690	9.562
FG	2	2	2	2	2	2	2
. # .	-	10.000	8.889	9.524	9.524	9.528	9.158
. U .	-	80.000	82.222	80.952	80.952	80.944	81.684
. - .	-	10.000	8.889	9.524	9.524	9.528	9.158
FG	-	2	2	2	2	2	2
. . +	4.167	6.667	8.750	8.571	9.792	9.690	9.562
. . U	91.667	86.667	82.500	82.857	80.417	80.620	80.876
. . -	4.167	6.667	8.750	8.571	9.792	9.690	9.562
FG	2	2	2	2	2	2	2

Tafel C2

Q = 20%

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ # +	-	-	-	0.079	0.280	0.477	0.378
+ # U	-	1.667	1.944	2.321	2.158	2.431	2.300
+ # -	-	-	0.417	0.278	0.407	0.332	0.527
+ U +	-	2.500	1.806	2.024	3.294	3.465	2.762
+ U 0	16.667	9.167	9.583	10.853	9.157	8.246	8.651
+ U -	-	2.500	1.667	1.548	1.329	1.075	1.522
+ - +	-	-	-	0.079	0.280	0.477	0.378
+ - U	-	1.667	1.944	2.321	2.158	2.431	2.300
+ - -	-	-	0.417	0.278	0.407	0.332	0.527
U # +	-	1.667	2.361	1.865	2.262	2.352	2.264
U # 0	16.667	10.000	10.556	8.690	7.842	8.441	7.959
U # -	-	1.667	2.361	1.865	2.262	2.352	2.264
U U +	16.667	9.167	8.750	7.698	8.943	8.403	8.723
U U 0	-	20.000	16.389	20.198	18.442	18.370	18.890
U U -	16.667	9.167	8.750	7.698	8.943	8.403	8.723
U - +	-	1.667	2.361	1.865	2.262	2.352	2.264
U - 0	16.667	10.000	10.556	8.690	7.842	8.441	7.959
U - -	-	1.667	2.361	1.865	2.262	2.352	2.264
- # +	-	-	0.417	0.278	0.407	0.332	0.527
- # 0	-	1.667	1.944	2.321	2.158	2.431	2.300
- # -	-	-	-	0.079	0.280	0.477	0.378
- U +	-	2.500	1.667	1.548	1.329	1.075	1.522
- U 0	16.667	9.167	9.583	10.853	9.157	8.246	8.651
- U -	-	2.500	1.806	2.024	3.294	3.465	2.762
- - +	-	-	0.417	0.278	0.407	0.332	0.527
- - U	-	1.667	1.944	2.321	2.158	2.431	2.300
- - -	-	-	-	0.079	0.280	0.477	0.378
FG	5	18	22	26	26	26	26

W = 20%

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ + .	-	1.667	2.361	2.679	2.845	3.240	3.205
+ 0 .	16.667	14.167	13.056	14.425	13.780	12.787	12.935
+ - .	-	1.667	2.361	2.679	2.845	3.240	3.205
0 + .	16.667	13.333	15.278	12.421	12.366	13.146	12.486
0 0 .	33.333	30.333	33.889	35.595	36.329	35.176	36.337
0 - .	16.667	13.333	15.278	12.421	12.366	13.146	12.486
- + .	-	1.667	2.361	2.679	2.845	3.240	3.205
- 0 .	16.667	14.167	13.056	14.425	13.780	12.787	12.935
- - .	-	1.667	2.361	2.679	2.845	3.240	3.205
FG	4	8	8	8	8	8	8
+ . +	-	2.500	1.806	2.183	3.854	4.419	3.519
+ . 0	16.667	12.500	13.472	15.496	13.472	13.107	13.251
+ . -	-	2.500	2.500	2.103	2.143	1.739	2.576
0 . +	16.667	12.500	13.472	11.429	13.467	13.107	13.251
0 . 0	33.333	40.000	37.500	37.579	34.127	35.253	34.808
0 . -	16.667	12.500	13.472	11.429	13.467	13.107	13.251
- . +	-	2.500	2.500	2.103	2.143	1.739	2.576
- . 0	16.667	12.500	13.472	15.496	13.472	13.107	13.251
- . -	-	2.500	1.806	2.183	3.854	4.419	3.519
FG	4	8	8	8	8	8	8
. + +	-	1.667	2.778	2.222	2.949	3.161	3.169
. + 0	16.667	13.333	14.444	13.333	12.158	13.302	12.559
. + -	-	1.667	2.778	2.222	2.949	3.161	3.169
. 0 +	16.667	14.167	12.222	11.270	13.566	12.943	13.008
. J 0	33.333	30.333	35.556	41.905	36.756	34.863	36.191
. 0 -	16.667	14.167	12.222	11.270	13.566	12.943	13.008
. - +	-	1.667	2.778	2.222	2.949	3.161	3.169
. - 0	16.667	13.333	14.444	13.333	12.158	13.302	12.559
. - -	-	1.667	2.778	2.222	2.949	3.161	3.169
FG	4	8	8	8	8	8	8
+ . .	16.667	17.500	17.778	19.782	19.469	19.266	19.345
0 . .	66.667	65.000	64.444	60.437	61.062	61.468	61.309
- . .	16.667	17.500	17.778	19.782	19.469	19.266	19.345
FG	2	2	2	2	2	2	2
. + .	16.667	16.667	20.000	17.778	18.056	19.625	18.897
. 0 .	66.667	66.667	60.000	64.444	63.889	60.750	62.206
. - .	16.667	16.667	20.000	17.778	18.056	19.625	18.897
FG	2	2	2	2	2	2	2
. . +	16.667	17.500	17.778	15.714	19.464	19.266	19.345
. . 0	66.667	65.000	64.444	66.571	61.071	61.468	61.309
. . -	16.667	17.500	17.778	15.714	19.464	19.266	19.345
FG	2	2	2	2	2	2	2

Tafel C3

W = 25%

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ + +	-	0.833	0.417	0.575	0.774	1.345	1.037
+ + 0	-	2.500	2.361	3.452	2.666	3.325	3.087
+ + -	-	0.833	1.111	1.012	0.838	0.943	1.166
+ 0 +	4.167	2.500	4.028	3.452	4.479	4.760	4.136
+ 0 0	12.500	9.167	10.278	9.306	8.088	7.005	7.546
+ 0 -	4.167	2.500	2.778	2.044	1.967	1.675	2.325
+ - +	-	0.833	0.417	0.575	0.774	1.345	1.037
+ - 0	-	2.500	2.361	3.452	2.666	3.325	3.087
+ - -	-	0.833	1.111	1.012	0.838	0.943	1.166
0 + +	-	3.333	3.056	2.996	2.949	3.227	3.024
0 + 0	16.667	8.333	6.111	7.421	6.657	6.852	6.385
0 + -	-	3.333	3.056	2.996	2.949	3.227	3.024
0 0 +	12.500	7.500	8.889	6.766	8.420	7.202	7.673
0 0 0	-	10.000	8.056	9.881	11.870	9.651	10.611
0 0 -	12.500	7.500	8.889	6.766	8.420	7.202	7.673
0 - +	-	3.333	3.056	2.996	2.949	3.227	3.024
0 - 0	16.667	8.333	6.111	7.421	6.657	6.852	6.385
0 - -	-	3.333	3.056	2.996	2.949	3.227	3.024
- + +	-	0.833	1.111	1.012	0.838	0.943	1.166
- + 0	-	2.500	2.361	3.452	2.666	3.325	3.087
- + -	-	0.833	0.417	0.575	0.774	1.345	1.037
- 0 +	4.167	2.500	2.778	2.044	1.967	1.675	2.325
- 0 0	12.500	9.167	10.278	9.306	8.088	7.005	7.546
- 0 -	4.167	2.500	4.028	3.452	4.479	4.760	4.136
- - +	-	0.833	1.111	1.012	0.838	0.943	1.166
- - 0	-	2.500	2.361	3.452	2.666	3.325	3.087
- - -	-	0.833	0.417	0.575	0.774	1.345	1.037
FG	9	26	26	26	26	26	26

u = 25%

Tafel C4

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ + .	-	4.167	3.889	5.040	4.278	5.613	5.291
+ 0 .	20.833	14.167	17.083	14.802	14.534	13.440	14.007
+ - .	-	4.167	3.889	5.040	4.278	5.613	5.291
0 + .	16.667	15.000	12.222	13.413	12.555	13.306	12.433
0 0 .	25.000	25.000	25.833	23.413	28.710	24.055	25.956
0 - .	16.667	15.000	12.222	13.413	12.555	13.306	12.433
- + .	-	4.167	3.889	5.040	4.278	5.613	5.291
- 0 .	20.833	14.167	17.083	14.802	14.534	13.440	14.007
- - .	-	4.167	3.889	5.040	4.278	5.613	5.291
FG	4	8	8	8	8	8	8
+ . +	4.167	4.167	4.861	4.603	6.027	7.450	6.211
+ . 0	12.500	14.167	15.000	16.210	13.420	13.655	13.721
+ . -	4.167	4.167	5.000	4.067	3.643	3.561	4.657
0 . +	12.500	14.167	15.000	12.758	14.318	13.655	13.721
0 . 0	33.333	26.667	20.278	24.722	25.184	23.356	23.382
0 . -	12.500	14.167	15.000	12.758	14.318	13.655	13.721
- . +	4.167	4.167	5.000	4.067	3.643	3.561	4.657
- . 0	12.500	14.167	15.000	16.210	13.420	13.655	13.721
- . -	4.167	4.167	4.861	4.603	6.027	7.450	6.211
FG	8	8	8	8	8	8	8
. + +	-	5.000	4.583	4.583	4.561	5.515	5.227
. + 0	16.667	13.333	10.833	14.325	11.989	13.503	12.560
. + -	-	5.000	4.583	4.583	4.561	5.515	5.227
. 0 +	20.833	12.500	15.694	12.262	14.866	13.637	14.133
. 0 0	25.000	28.333	28.611	28.492	28.046	23.661	25.703
. 0 -	20.833	12.500	15.694	12.262	14.866	13.637	14.133
. - +	-	5.000	4.583	4.583	4.561	5.515	5.227
. - 0	16.667	13.333	10.833	14.325	11.989	13.503	12.560
. - -	-	5.000	4.583	4.583	4.561	5.515	5.227
FG	4	8	8	8	8	8	8
+ . .	20.833	22.500	24.861	24.881	23.090	24.667	24.588
0 . .	58.333	55.000	50.278	50.238	53.819	50.667	50.823
- . .	20.833	22.500	24.861	24.881	23.090	24.667	24.588
FG	2	2	2	2	2	2	2
. + .	16.667	23.333	20.000	23.492	21.111	24.533	23.015
. 0 .	66.667	53.333	60.000	53.016	57.778	50.935	53.970
. - .	16.667	23.333	20.000	23.492	21.111	24.533	23.015
FG	2	2	2	2	2	2	2
. . +	20.833	22.500	24.861	21.429	23.988	24.667	24.588
. . 0	58.333	55.000	50.278	57.143	52.024	50.667	50.823
. . -	20.833	22.500	24.861	21.429	23.988	24.667	24.588
FG	2	2	2	2	2	2	2

v = 33%

KONFIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
+ + +	-	0.833	1.389	2.143	3.063	3.777	3.387
+ + 0	4.167	4.167	3.611	5.556	3.502	4.123	3.949
+ + -	-	2.500	2.917	2.758	2.778	2.597	3.141
+ 0 +	4.167	4.167	6.806	4.127	6.414	5.140	4.848
+ 0 0	4.167	5.833	6.250	6.250	4.901	3.913	4.141
+ 0 -	4.167	0.833	4.028	1.786	3.229	2.135	2.892
+ - +	-	0.833	1.389	2.143	3.063	3.777	3.387
+ - 0	4.167	4.167	3.611	5.556	3.502	4.123	3.949
+ - -	-	2.500	2.917	2.758	2.778	2.597	3.141
0 + +	4.167	5.833	4.306	3.631	3.579	4.027	3.904
0 + 0	16.667	6.667	2.222	4.841	3.442	4.259	3.718
0 + -	4.167	5.833	4.306	3.631	3.579	4.027	3.904
0 0 +	4.167	2.500	4.861	3.452	4.772	4.105	4.231
0 0 0	-	6.667	2.778	2.738	2.798	2.800	2.814
0 0 -	4.167	2.500	4.861	3.452	4.772	4.105	4.231
0 - +	4.167	5.833	4.306	3.631	3.579	4.027	3.904
0 - 0	16.667	6.667	2.222	4.841	3.442	4.259	3.718
0 - -	4.167	5.833	4.306	3.631	3.579	4.027	3.904
- + +	-	2.500	2.917	2.758	2.778	2.597	3.141
- + 0	4.167	4.167	3.611	5.556	3.502	4.123	3.949
- + -	-	0.833	1.389	2.143	3.063	3.777	3.387
- 0 +	4.167	0.833	4.028	1.786	3.229	2.135	2.892
- 0 0	4.167	5.833	6.250	6.250	4.901	3.913	4.141
- 0 -	4.167	4.167	6.806	4.127	6.414	5.140	4.848
- - +	-	2.500	2.917	2.758	2.778	2.597	3.141
- - 0	4.167	4.167	3.611	5.556	3.502	4.123	3.949
- - -	-	0.833	1.389	2.143	3.063	3.777	3.387
FG	17	26	26	26	26	26	26

G = 33%

NO. FIG.	T						
	4	5	6	7	8	9	10
-----							
+ + .	4.167	7.500	7.917	10.456	9.343	10.497	10.477
+ U .	12.500	10.833	17.083	12.163	14.544	11.188	11.082
+ - .	4.167	7.500	7.917	10.456	9.343	10.497	10.477
U + .	25.000	18.333	10.833	12.103	10.600	12.313	11.526
U U .	6.333	11.667	12.500	9.643	12.341	11.010	11.277
U - .	25.000	18.333	10.833	12.103	10.600	12.313	11.526
- + .	4.167	7.500	7.917	10.456	9.343	10.497	10.477
- U .	12.500	10.833	17.083	12.163	14.544	11.188	11.862
- - .	4.167	7.500	7.917	10.456	9.343	10.497	10.477
-----							
FG	8	8	8	8	8	8	8
-----							
+ . +	4.167	5.833	9.583	8.413	12.540	12.695	11.622
+ . U	12.500	14.167	13.472	17.361	11.905	12.159	12.039
+ . -	4.167	5.833	9.861	7.302	8.785	7.329	9.174
U . +	12.500	14.167	13.472	10.714	11.930	12.159	12.039
U . U	33.333	20.000	7.222	12.421	9.683	11.319	10.250
U . -	12.500	14.167	13.472	10.714	11.930	12.159	12.039
- . +	4.167	5.833	9.861	7.302	8.785	7.329	9.174
- . U	12.500	14.167	13.472	17.361	11.905	12.159	12.039
- . -	4.167	5.833	9.583	8.413	12.540	12.695	11.622
-----							
FG	8	8	8	8	8	8	8
-----							
. + +	4.167	9.167	8.611	8.532	9.420	10.401	10.432
. + U	25.000	15.000	9.444	15.952	10.446	12.504	11.616
. + -	4.167	9.167	8.611	8.532	9.420	10.401	10.432
. U +	12.500	7.500	15.694	9.365	14.415	11.380	11.972
. U U	8.333	18.333	15.278	15.238	12.599	10.627	11.096
. U -	12.500	7.500	15.694	9.365	14.415	11.380	11.972
. - +	4.167	9.167	8.611	8.532	9.420	10.401	10.432
. - U	25.000	15.000	9.444	15.952	10.446	12.504	11.616
. - -	4.167	9.167	8.611	8.532	9.420	10.401	10.432
-----							
FG	8	8	8	8	8	8	8
-----							
+ . .	20.833	25.833	32.917	33.075	33.229	32.182	32.836
U . .	58.333	48.333	34.167	33.849	33.542	35.636	34.329
- . .	20.833	25.833	32.917	33.075	33.229	32.182	32.836
-----							
FG	2	2	2	2	2	2	2
-----							
. + .	33.333	33.333	26.667	33.016	29.286	33.307	32.480
. U .	33.333	33.333	46.667	33.968	41.429	33.386	35.041
. - .	33.333	33.333	26.667	33.016	29.286	33.307	32.480
-----							
FG	2	2	2	2	2	2	2
-----							
. . +	20.833	25.833	32.917	26.429	33.254	32.182	32.836
. . U	58.333	48.333	34.167	47.143	33.492	35.636	34.329
. . -	20.833	25.833	32.917	26.429	33.254	32.182	32.836
-----							
FG	2	2	2	2	2	2	2