



DISSERTATION

zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Turbulenz und Teilchentransport in der Heliosphäre

Simulationen von inkompressiblen MHD-Plasmen
und Testteilchen

VON

SEBASTIAN LANGE

GEB.: 19.05.1985, PIRNA

Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT
WÜRZBURG**

Fakultät für
Physik und Astronomie

Abgabe: Würzburg 2012

Eingereicht am:
bei der Fakultät für Physik und Astronomie

- 1. Gutachter:
- 2. Gutachter:
- 3. Gutachter:

der Dissertation.

Vorsitzende(r):

- 1. Prüfer:
- 2. Prüfer:
- 3. Prüfer:

im Promotionskolloquium (unzutreffendes streichen).

Tag des Promotionskolloquiums:

Doktorurkunde ausgehändigt am:

Abstract

In the past years, the origin of high energetic solar particles could be clearly connected to shock acceleration at coronal mass ejections. Caused by resonant wave–particle interactions, on the one hand, the particles change their energy because of scattering, on the other hand, the dynamics of plasma waves in such acceleration regions are significantly influenced by these processes through self-generated wave modes.

In this dissertation, the basic physical regime of turbulence and particle transport were described via numerical modeling. The simulation of the plasma dynamics uses the methodology of magnetohydrodynamics, whereas the kinetic description of single particles is calculated by elementary electrodynamic equations of motion.

The common plasma turbulence theories by Goldreich and Sridhar could be confirmed by simulations resembling conditions at three solar radii. Foremost, evidence for the critical balance has been found, which is a key parameter of these theories. Furthermore, results of the dynamic evolution of amplified wavemodes are presented, which are very important for the general turbulence development. In this context, the wave–steepening was identified as a central process, which is an efficient energy transport mechanism in parallel direction to the magnetic background field. This explains turbulent structures at high parallel wavenumbers, which are not described by the Goldreich–Sridhar model.

Moreover, a fundamental understanding of the quasi-linear theory of particle transport has been achieved. Specifically, more detailed insight into the interpretation of the diffusion coefficients of wave–particle interactions could be obtained. For the first time, simulations of particle scattering at amplified wave modes showed complex resonant structures, which cannot be described by analytical approaches adequately.

Kurzzusammenfassung

Die Herkunft hochenergetischer solarer Teilchen konnte in den vergangenen Jahren eindeutig auf Schockbeschleunigung an koronalen Masseauswürfen zurückgeführt werden. Durch resonante Interaktionen zwischen Wellen und Teilchen werden zum einen geladene Teilchen unter Veränderung ihrer Energie gestreut, zum anderen wird die Dynamik der Plasmawellen in solchen Beschleunigungsregionen durch diese Prozesse von selbstgenerierten Wellenmoden maßgeblich beeinflusst.

Mittels numerischer Modellierungen wurden im Rahmen dieser Arbeit die grundlegenden physikalischen Regimes der Turbulenz und des Teilchentransports beschrieben. Die Simulation der Plasmadynamik bedient sich der Methodik der Magnetohydrodynamik, wohingegen kinetische Einzelteilchen durch die elementaren Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik berechnet werden.

Es konnten die Turbulenztheorien von Goldreich und Sridhar unter heliosphärischen Bedingungen bei drei solaren Radien bestätigt werden. Vor allem zeigten sich Hinweise für das Erreichen der kritischen Balance, einem Schlüsselparameter dieser Theorien. Weiterhin werden Ergebnisse der dynamischen Entwicklung angeregter Wellenmoden präsentiert, in denen die Bedeutsamkeit für die gesamte Turbulenz gezeigt werden konnte. Als zentraler Prozess bei hohen Energien hat sich das wave-steepening herausgestellt, das als effizienter Energietransportmechanismus in paralleler Richtung zum Hintergrundmagnetfeld identifiziert wurde und somit turbulente Strukturen bei hohen parallelen Wellenzahlen erklärt, deren Entstehung das Goldreich–Sridhar Modell nicht beschreiben kann. Darüber hinaus wurden grundlegende Erkenntnisse über die quasilineare Theorie des Teilchentransports erzielt. Im Speziellen konnte ein tieferes Verständnis für die Interpretation der Diffusionskoeffizienten von Welle–Teilchen Wechselwirkungen erlangt werden. Simulationen zur Streuung an angeregten Wellenmoden zeigten erstmals komplexe resonante Strukturen die im Rahmen analytischer Modelle nicht mehr adäquat beschrieben werden können.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Phänomenologie	3
2.1. Beobachtungssituation in der Heliosphäre	4
2.2. Der Sonnenwind	6
2.3. Heliosphärische Turbulenz	13
2.4. Flares und Coronal Mass Ejections	17
2.4.1. Solar Flares	17
2.4.2. Coronal Mass Ejections	18
2.4.3. Magnetische Rekonnexion	21
2.5. Solar Energetic Particle - Events	23
2.5.1. Allgemeine Eigenschaften von SEP-Ereignissen	23
2.5.2. Beschleunigung und Transport von Teilchen in SEP-Ereignissen	26
3. Theorie	35
3.1. Statistische Physik und Magnetohydrodynamik	36
3.1.1. Grundlagen der Statistik eines Plasmas	38
3.1.2. Momentenbildung der Vlasov-Gleichung	39
3.1.3. Ideale Magnetohydrodynamik	41
3.1.4. Resistivitäten und Inkompressibilität	44
3.1.5. Physikalisches Regime der inkompressiblen MHD	47
3.2. Turbulenz	53
3.2.1. Kolmogorov Turbulenz	56
3.2.2. MHD - Turbulenz	65
3.3. Teilchentransport	77
3.3.1. Statistische Beschreibung des Teilchentransports	78
3.3.2. Quasilineare Theorie	80

3.3.3.	Alternativen zur QLT	85
3.3.4.	Selbstgenerierte Wellen und Plasmainstabilitäten	88
4.	Methodik	91
4.1.	Numerik der Plasmasimulationen	91
4.1.1.	Pseudospektrale Methodik	92
4.1.2.	Diskrete Fouriertransformation	95
4.1.3.	Schnelle Fouriertransformation	97
4.1.4.	Zeitentwicklung der MHD	99
4.2.	Numerik der Testteilchensimulationen	100
4.2.1.	Boris–Push	101
4.3.	GISMO	103
4.3.1.	GISMO-MHD	103
4.3.2.	GISMO-Particles	110
4.3.3.	Parallelisierung	115
4.3.4.	Normierungen	117
4.4.	Kritische Betrachtung und Grenzen des Modells	120
4.4.1.	Modell der Plasmaturbulenz	121
4.4.2.	Modell des Teilchentransports	122
5.	Ergebnisse	125
5.1.	Validierung von GISMO	125
5.1.1.	Testfälle der MHD	126
5.1.2.	Testfälle der Teilchensimulationen	135
5.2.	Ergebnisse von GISMO-MHD	144
5.2.1.	Simulation heliosphärischer Turbulenz	145
5.2.2.	Simulation angeregter Wellenmoden in heliosphärischer Turbulenz	156
5.2.3.	Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SI . .	159
5.2.4.	Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SII . .	164
5.2.5.	Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SIII . .	168
5.2.6.	Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SIV . .	170
5.2.7.	Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SV . .	173
5.2.8.	Diskussion der Ergebnisse von SI–SV	174

5.3. Ergebnisse von GISMO-PARTICLES	182
5.3.1. Testteilchensimulation in heliosphärischer Turbulenz	182
5.3.2. Teilchenstreuung an angeregten Wellenmoden	186
5.3.3. Vergleich der Testteilchensimulation mit dem SQLT Ansatz	194
5.3.4. Diskussion	203
6. Zusammenfassung	207
Anhang	211
A. Elsässervariablendarstellung der MHD-Gleichungen	213
B. Approximationsverfahren des Larmor–Radius	216
C. Interaktion mit der P3DFFT	217
D. Extraktion des MPI-Kommunikators aus der P3DFFT	219
E. Skalierungstests von GISMO	220
F. Herleitung der Pitchwinkel Diffusionskoeffizienten im Rahmen der magne- tostatischen Näherung	221
G. Diskretisierung der Pitchwinkel Diffusionskoeffizienten	224
Literaturverzeichnis	227
Publikationsliste	245
Danksagung	246
Eigenständigkeitserklärung	249

*„Bei der Eroberung des Weltraums sind zwei Probleme zu lösen:
die Schwerkraft und der Papierkrieg.
Mit der Schwerkraft wären wir fertig geworden.“*

- Wernher von Braun -

1. Einleitung

Das Verständnis der komplexen Dynamik und Prozesse innerhalb der Heliosphäre erlangt in unserem Zeitalter immer mehr an Bedeutung. Maßgeblich hierfür ist der technologische Fortschritt, der es zum einen ermöglicht, wertvolle Messdaten in unserem Sonnensystem zu gewinnen und zum anderen die Notwendigkeit erzeugt, sensible Technik, sei es in Satelliten, Flugzeugen oder Telekommunikationssystemen, vor hochenergetischen solaren Teilchen zu schützen. So hat sich in den letzten Jahren die Vorhersage des Weltraumwetters erheblich weiterentwickelt und wird auch in Zukunft ein wichtiger Zweig der Wissenschaft sein. Die grundlegenden Untersuchungen liegen in diesem Zusammenhang in der Physik der Plasmaturbulenz und dem Teilchentransport.

Die zentrale Thematik der vorliegenden Dissertation ist die theoretische Beschreibung und numerische Modellierung von Phänomenen innerhalb unseres Sonnensystems. Dabei liegt der Fokus auf der Untersuchung von Ereignissen hochenergetischer solarer Teilchen. Diese wurden erstmals 1946 durch Forbush entdeckt und waren insofern nicht vollständig zu erklären, da Teilchenenergien bis in den GeV-Bereich gemessen wurden. Mögliche Quellen, wie solare Flares und koronale Masseauswürfe können zwar durch direkte Beschleunigung weite Energiebereiche abdecken, scheiden aber als Kandidaten für so hohe Energien aus. Zusätzlich beobachtet man bei sogenannten sukzessiven Ereignissen hochenergetische Teilchen über einen längeren Zeitraum bis hin zu mehreren Tagen, was ebenfalls gegen einen direkten Beschleunigungsmechanismus spricht. Mit der Verbesserung der Messtechnik und dem zunehmenden Verständnis der Prozesse in unserem Sonnensystem wurden in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte erzielt. So konnten als Quellen dieser hochenergetischen Teilchen die Schockregionen, die koronalen Masseauswürfen vorauslaufen, identifiziert werden. Durch mehrfache Streuvorgänge beim Überqueren der Schockfront ändern Teilchen ihre Energien. Diese gewinnen oder verlieren sie durch die in der Schockregion vorhandenen Plasmawellen.

In vielen Beschreibungen wird das System aus selbstgenerierten Wellenmoden, Tur-

bulenz und Teilchenstreuung nicht ganzheitlich erfasst, sondern getrennt voneinander behandelt. Dadurch wird der Einfluss von verstärkten Wellen, die durch Plasmainstabilitäten generiert werden, vernachlässigt. Das hat zum einen Konsequenzen für die Entwicklung der heliosphärischen Turbulenz und zum anderen für die korrekte Beschreibung von Teilchenstreuungsvorgängen. So werden in einem Plasma, in dem selbstgenerierte Wellen die Dynamik beeinflussen, aufgrund resonanter Interaktionen zwischen Wellen und Teilchen, charakteristische Streuprozesse die Entwicklung der Teilchen bestimmen. In üblichen analytischen Ansätzen zur Berechnung des Teilchentransports werden die Näherungen der quasilinearen Theorie verwendet, die gerade bei stark angeregten Wellenmoden an ihre Grenzen stößt.

Das Ziel dieser Dissertation ist es, eine Brücke zwischen den numerischen Beschreibungen turbulenter Teilchenstreuregionen und analytischen Teilchentransporttheorien zu schlagen. Damit wird die Grundlage für eine selbstkonsistente Modellierung von hochenergetischen solaren Teilchenereignissen geschaffen. Als methodisches Werkzeug wurde dafür ein eigenständiger Hybrid-Code entwickelt, mit dem die Simulation von Plasmaturbulenz und Teilchen auf modernen Rechensystemen ermöglicht wird.

In der Struktur der vorliegenden Arbeit wird Wert darauf gelegt, beide physikalische Regimes hinreichend zu beschreiben. Dabei wird stets zuerst das turbulente heliosphärische Plasma untersucht, das den Ausgangspunkt für die nachfolgenden Teilchensimulationen bildet. Der aktuelle Stand der Wissenschaft und der Beobachtungslage wird im Kapitel der Phänomenologie diskutiert. Beginnend mit einem kurzen historischen Exkurs über die Entdeckung verschiedener solarer Ereignisse, wird auf die Ursachen heliosphärischer Turbulenz eingegangen, um schließlich das Phänomen hochenergetischer solarer Teilchen zu erläutern. Im darauf folgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen vermittelt. Es werden die gängigen Theorien für Turbulenz und Teilchentransport vorgestellt. Das Kapitel der Methodik beschreibt die numerische Modellierung bis hin zur Umsetzung des entwickelten Hybrid-Codes. Der Ergebnisteil beginnt mit ausführlichen Validierungen des Programms. Im Anschluss werden die Ergebnisse der Simulationen verschiedener Szenarien heliosphärischer Turbulenz präsentiert. Ausgehend von diesen Simulationen werden abschließend ausgewählte Resultate der Streuung geladener Teilchen vorgestellt.

2. Phänomenologie

Dieses Kapitel widmet sich der phänomenologischen Beschreibung der behandelten Thematik. Es soll dem Leser ein Überblick über den heutigen Kenntnisstand, bezüglich der Beobachtungen und Messungen gegeben werden und die vorliegende Arbeit mit der dahinterstehenden Physik verknüpfen. Im Fokus stehen dabei Phänomene hochenergetischer, solarer Teilchen, sowie Turbulenz in unserem Sonnensystem. Dazu ist es zunächst notwendig, die Eigenschaften der Heliosphäre näher zu untersuchen. Zum Teil ist es nötig, kleinere theoretische Grundlagen direkt zu vermitteln, während komplexe Bereiche, wie z.B. die *Magnetohydrodynamik (MHD)*, im darauf folgenden Theorieteil geklärt werden. Leider kommt es dadurch zum Teil zu unvermeidbaren Überschneidungen, also Grundlagen, die dieses Kapitel nur flüchtig vorstellt und die in der Theorie detailreich diskutiert werden. Daher sind beide Kapitel *ganzheitlich* zu verstehen.

Die interessanten Phänomene innerhalb unsere Heliosphäre sind allerdings so mannigfaltig, dass im Folgenden nur ein Bruchteil dem Leser vorgestellt werden kann. Es werden die relevanten Themen hinreichend heraus gearbeitet, um einen geschlossenen Überblick zu verschaffen. Zu diesem Zweck wird grob in den Bereich der Turbulenz und Plasmadynamik, sowie den Bereich des Teilchentransports unterteilt. Im Mittelpunkt steht dabei die Sonne, von der alle der Betrachteten Phänomene ausgehen. Im ersten Abschnitt steht der *Sonnenwind* im Mittelpunkt, da dieser permanente Plasmastrom das Hintergrundmedium für die meisten Phänomene des Weltraumes ist. Durch ihn wird die, im darauf folgenden Kapitel beschriebene, *heliosphärische Turbulenz* angetrieben. Dieses Medium wird durch verschiedene solare Ereignisse moduliert. Die prominentesten von ihnen sind *koronale Masseauswürfe*, sowie enorme Energieemissionen, die sogenannten *Flares*. Diese Phänomene sind äußerst effiziente Teilchenbeschleuniger und somit die Ursache hochenergetischer solarer Teilchen. Diese *solar energetic particle* Ereignisse sollen im letzten Teil dieses Kapitels im Fokus stehen.

Da in den kommenden Abschnitten oft auf Messungen durch verschiedene Raumfahr-

zeuge referenziert wird, soll jedoch zu Beginn dem Leser ein kurzer Überblick über die wichtigsten Missionen und deren historischen Kontext gegeben werden.

2.1. Beobachtungssituation in der Heliosphäre

Ein entscheidender Vorteil bei der Erforschung der Heliosphäre, liegt in der guten experimentelle Zugänglichkeit durch Raumfahrzeuge. Nachdem mit dem russischen Satelliten *Sputnik* 1957 die unbemannte Raumfahrt eingeläutet wurde, folgten zahlreiche Satellitenexperimente und Raumsonden die zu einem imensen Fortschritt unseres Wissens bezüglich des Universums führten. Im Speziellen wurden wertvolle Erkenntnisse über die Sonne und deren Heliosphäre gewonnen. So besteht spätestens seit den deutsch-amerikanischen *Helios*-Missionen kein Zweifel mehr daran, dass die Erde sich durch ein turbulentes Plasma, den *Sonnenwind*, bewegt. Dieser ist hochgradig dynamisch und befindet sich durch energiereiche Eruptionen der Sonne im ständigen Wandel. Speziell die *Ulysses*-Mission trug massiv zum Verständnis solarer Prozesse in der Heliosphäre bei, da diese Sonde als erste die Polarregionen der Sonne erkundete. Die Grenzen des Einflussbereichs der Sonne wurden wiederum durch die *Pioneer* und *Voyager*-Missionen erforscht, welche die ersten Sonden außerhalb unseres Sonnensystems, bis etwa 130 AU¹ brachten. Das Ausmaß der Heliosphäre wird zunächst durch einen Bereich starker Wechselwirkung zwischen Sonnenwind und interstellarem Plasma, dem *Termination Shock*, bestimmt und endet nach der *Heliosheath* in der *Heliopause*, in der der Sonnenwind praktisch keinen Einfluss mehr hat.

Besonders starke Sonnenereignisse beeinflussen die Erde unmittelbar und äußern sich in *geomagnetischen Stürmen* und der allseits bekannten *Aurora borealis*. Aufgrund der zunehmenden Bedeutung der Luft- und Raumfahrt ist es nötig geworden solche Phänomene zu detektieren und vorherzusagen. Somit wurde der wissenschaftliche Zweig des Weltraumwetters geboren. Aktuell wird die Aktivität der Sonne durch hochauflösende Instrumente der Missionen *SOHO*, *SDO*, *Stereo* und *WIND* (um nur einige zu nennen) gemessen, die neben wichtigen wissenschaftlichen Daten, auch spektakuläre Bilder der Sonne liefern.

¹Einheiten werden in diesem Kapitel im verwendeten *cgs-System* angegeben mit Ausnahme der Entfernungen, die üblicherweise im Sonnensystem durch die *Astronomische Einheit* (Englisch *Astronomical Unit*, *AU*) ausgedrückt werden. Dabei entspricht 1 AU dem Abstand Erde-Sonne mit etwa $150 \cdot 10^{11}$ cm, wobei die Sonne bei 0 AU und die Erde bei 1 AU liegt.

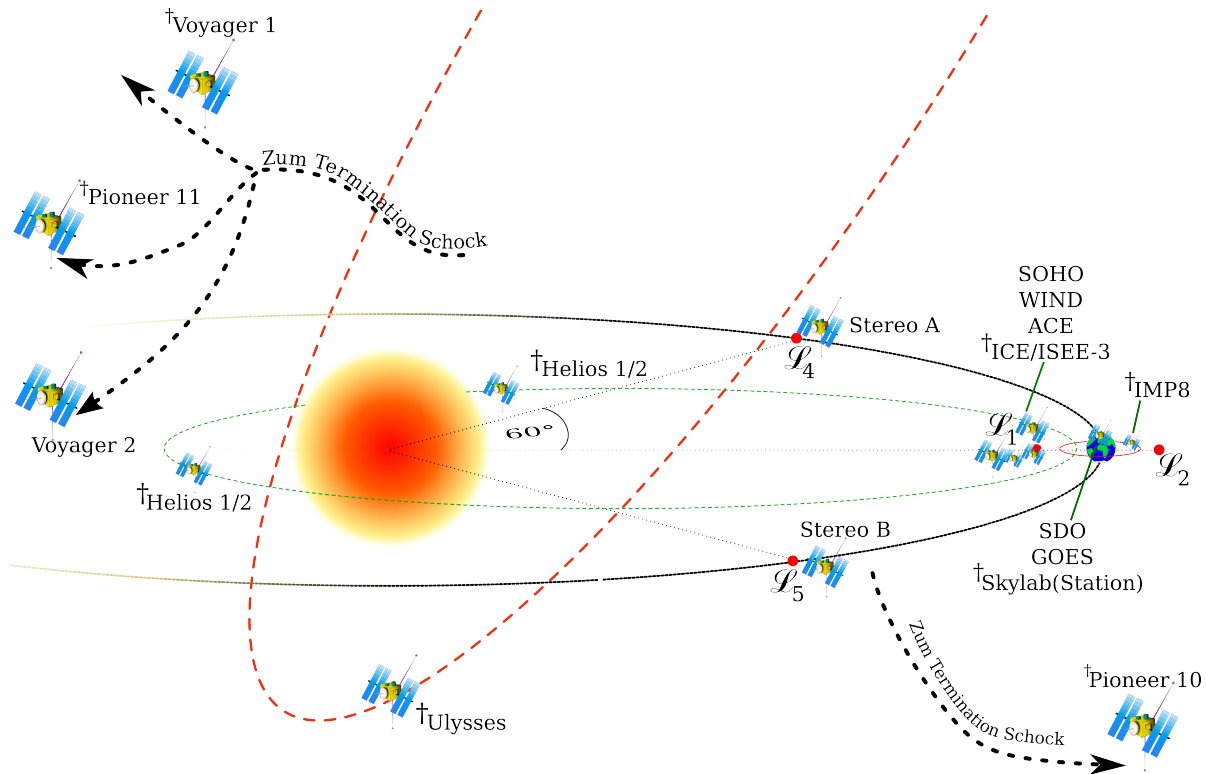


Abbildung 2.1.: Illustration der wichtigsten Messinstrumente für das Sonnenwindplasma und für hochenergetische Teilchen in unserem Sonnensystem. Die mit dem †-Symbol gekennzeichneten Raumfahrzeuge sind nicht mehr in Betrieb bzw. deutlich außerhalb ihres Missionsplanes. Vier der fünf Lagrangepunkte sind mit einem roten Punkt markiert, L_3 liegt außerhalb der Grafik.

Zahlreiche Erkenntnisse über hochenergetische Teilchenereignisse, die vermittelt komplexer Beschleunigungsmechanismen auf Energien in den GeV-Bereich gebracht werden, konnten in den 70er Jahren durch die *Skylab*-Raumstation, sowie durch das *ISEE-3* Experiment auf *ICE* und *IMP-8* gewonnen werden. Heutzutage sind die wichtigsten Teilchendetektoren auf *WIND*, *SOHO* und *ACE* stationiert, die sich alle im Lagrangepunkt L_1 ¹ befinden. Einen illustrativen Überblick der wichtigsten Experimente und deren Standorte in unserem Sonnensystem bietet Abbildung 2.1.

¹Die Lagrangepunkte sind fünf Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems, an denen kein effektives Potential herrscht, da sich Gravitations- und Zentrifugalkraft aufheben. Diese Punkte sind demnach ideal um ein Raumfahrzeug mit möglichst geringem Treibstoffverbrauch zu stationieren.

2.2. Der Sonnenwind

Die Sonne dominiert das interplanetare Medium weitaus mehr als es auf den ersten Blick der Fall zu sein scheint. Neben dem gravitativen Einfluss der Sonne und deren Photoemission, die weitgehend als Schwarzkörperstrahlung aufgefasst werden kann, beeinflusst sie darüber hinaus unser Sonnensystem auf sehr massive, wenn auch weniger offensichtliche Weise. Die ersten Indizien lieferte die relativ einfach zu beobachtende, starke Dynamik der Sonnenoberfläche. So konnten 1610 durch die Nutzung der ersten Teleskope durch *Thomas Harriot* und im gleichen Jahr wohl auch durch *Galilei*, erstmals Sonnenflecken beobachtet werden. Aus dem periodischen Auftreten besonders dominanter Flecke innerhalb von ca. 25 Tagen, schloss *Johann Fabricius* auf die Eigenrotation der Sonne. Genauere Beobachtungen der Sonnenflecken durch *Samuel Schwabe* offenbarten im 19. Jahrhundert zudem eine differentielle Rotation, sowie eine weitere Periodizität in der Sonnenfleckentstehung. So entstehen Flecken bei etwa 30° nördlicher, wie gleichermaßen südlicher Breite und „bewegen“ sich zum Sonnenäquator. Die Entstehungsrate nimmt in Richtung Äquator ab, bis keine neuen Flecken mehr gebildet werden. Schließlich beginnt dieser 11 Jahre andauernde Zyklus von Neuem, jedoch mit entgegengesetzter magnetischer Polarität. Also durchläuft die Sonne effektiv einen 22 Jahre-Zyklus, mit verschiedenen Aktivitätsphasen, die auch als *solare Minima* und *Maxima* bezeichnet werden. Die genauen Mechanismen und Ursachen dieses Phänomens werden noch heute aktiv erforscht und sind weitestgehend unklar. So versteht man mittlerweile die Natur der Sonnenflecken recht gut, als starke toroidale Magnetfelder, die aus der konvektiven oberen Schicht der Sonne in die Photosphäre eindringen, wobei das darin eingesperrte Plasma (Def. Plasma, siehe Theorieteil) erheblich abkühlt. Es können sich regelrechte Plasmaschläuche entwickeln, auch als ruhende Protuberanzen bezeichnet, die mehrere Millionen Kilometer Ausdehnung annehmen und längere Zeit verharren, bis sie wieder auf die Sonnenoberfläche zurückfallen. Eruptive Protuberanzen sind hingegen erheblich größer, zeichnen sich somit deutlich von der Sonne ab und fallen nicht zwangsweise zurück, sondern können ins interplanetare Medium geschleudert werden. Es ist allerdings nicht geklärt, woher diese Typen von Störungen im, durch den inneren solaren Dynamo erzeugten, Gesamtmagnetfeld der Sonne stammen. Eine mögliche Erklärung ist die differentielle Rotation, die zu einer immer stärker werdenden Verscherung der Magnetfeldlinien führt, bis dieses schließlich zusammenbricht und sich neu bildet. Einen sehr guten Überblick dieser Thematik bietet Charbonneau (2010).

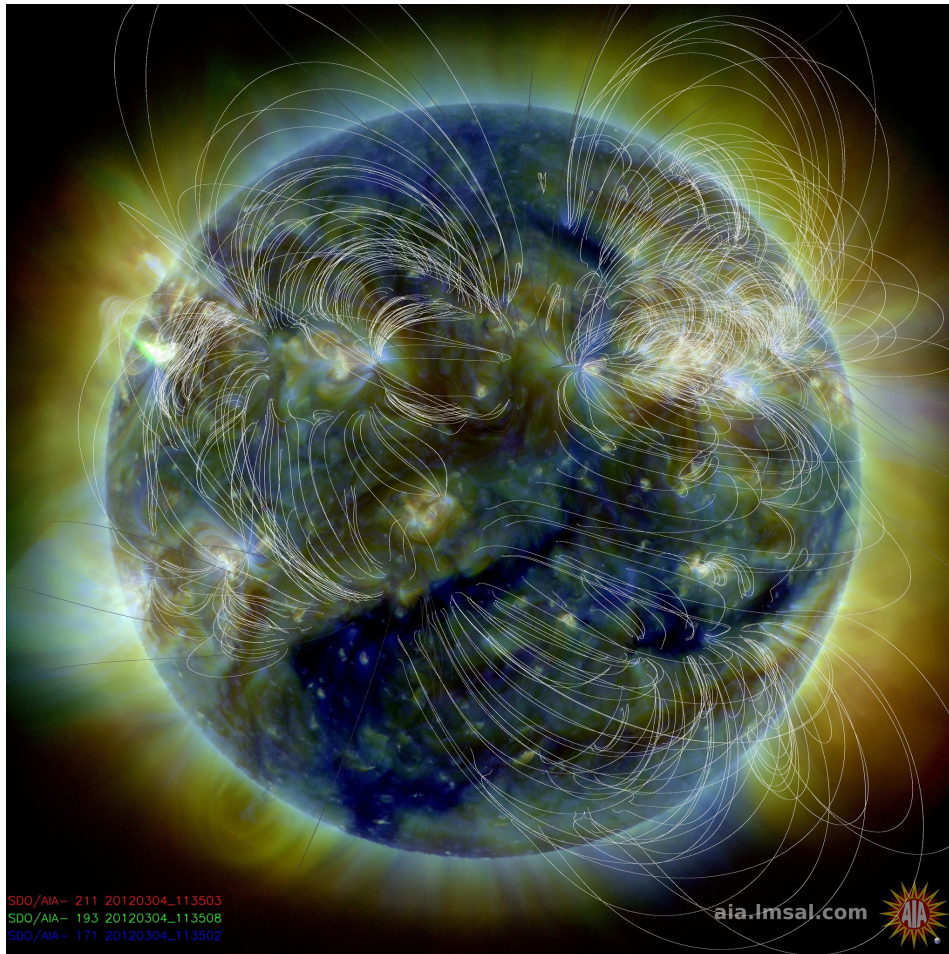


Abbildung 2.2.: Eine Falschfarbenaufnahme der Sonne des „Solar Dynamics Observatory“ (SDO) durch das Messinstrument „Atmospheric Imaging Assembly“ (AIA) mit eingezeichneten Magnetfeld-Potentiallinien. Dieses Experiment beobachtet die Sonnenatmosphäre in verschiedenen Wellenlängen λ . Hier ist, entsprechend der Bild-Legende, der energiereiche UV-Bereich nahe der Röntgenstrahlung gezeigt, mit $\lambda = 211/193/171 \text{ \AA}$ in Farben Rot/Grün/Blau. SDO ist seit Februar 2010 in einem geosynchronen Orbit und soll primär Vorhersagen des Weltraum-Wetters optimieren, sowie Messungen von SOHO (Start 1995) fortführen. Quelle: SDO, NASA Goddard Space Flight Center

Eine weitere wichtige Beobachtung der Sonnendynamik ist die stark veränderliche *Korona*, eine Schicht geringer Dichte (Teilchenzahldichte $\approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$), weit über der Photosphäre, die mit dem 11-Jahreszyklus in Aktivität und Dicke (3-6 Sonnenradien) variiert. Während einer totalen *Sonnenfinsternis* ist die Korona für das bloße Auge als „Strahlenkranz“ sichtbar. Somit ist ihre Existenz - zumindest phänomenologisch - schon seit mehreren tausend Jahren bekannt.

Den wichtigsten Hinweis auf den weitreichenden Einfluss der Sonnendynamik lieferten jedoch Beobachtungen von Kometen. Schon Kepler fiel 1619 auf, dass manche Schweife¹ von Kometen immer von der Sonne weg zeigen und zudem keine Krümmung entlang der Kometenbahn aufweisen. Lange Zeit blieb dieses Phänomen unerklärt. Der erste vorgeschlagene Mechanismus war im 19./20. Jahrhundert die *Lichtdrucktheorie*, eine dem Betrag der Schwerkraft der Sonne ähnelnde Repulsivkraft, die mit

$$F_S(r) = \frac{\zeta}{r^2} \quad (2.1)$$

abnimmt. Der Skalenfaktor ζ spielte hierbei eine wichtige Rolle². Beobachtungen von *Paul Ahnert* (später zudem von Cuno Hoffmeister) am Kometen *Whipple-Fedtke 1942g* ergaben sehr große Werte für ζ (Ahnert 1949). Dieser Komet eignete sich besonders gut für die Beobachtung der Schweifablenkung, da er zum einen eine relativ sonnen- und erdnahe Bahn verfolgt und zum anderen, weil die Sonne im Jahr 1942 recht viele Sonnenflecke aufwies, da sie im 11-Jahreszyklus in einer aktiven Phase war. Ahnert leitete aus seinen Ergebnissen die ersten Hinweise eines *Sonnenwinds* ab, indem er die Schweifablenkung in Zusammenhang mit der Sonnenfleckaktivität brachte. Schließlich war es *Ludwig Biermann* der den Sonnenwind wissenschaftlich etablierte. In Biermann (1951) erklärte er zunächst die unterschiedliche Ablenkung möglicher verschiedener Schweifelemente, durch die Feststellung, dass primär Ionenschweife, im Speziellen bestehend aus CO^+ , eine starke, ungekrümmte Ablenkung zeigen. Außerdem korrigierte er die Messungen des Faktors ζ , die vor allem bei CO^+ -Schweiften Werte bis zu 10^5 annahmen und somit die Lichtdrucktheorie in Frage stellten. Aus diesen Ergebnissen schlussfolgerte Biermann, dass nur eine Strahlung aus geladenen Teilchen (*Korpuskularstrahlung*) diese Effekte erklären kann. Da zu dieser Zeit bereits Messungen vorlagen, dass „Teilchenwolken“, die von der Sonne emittiert werden, *quasineutral* sind, nahm er an, dass Protonen und gleichermaßen Elektronen für die Ablenkung des Schweifs verantwortlich sind, wobei Elektronen einen deutlich höheren Wirkungsquerschnitt haben. *Hannes Alfvén* entwickelte diese Idee weiter und postulierte einen Strom magnetisierten Plasmas, der sich von der Sonne hinweg ausbreitet. Letztendlich wurde der Begriff „Sonnenwind“

¹Anmerkung: Es können im Wesentlichen bis zu 3 mögliche Arten von Kometenschweiften gleichzeitig beobachtet werden: Typ I besteht aus Molekülonen, Typ II aus neutralen Staubteilchen, der sich zudem in zwei Teile aufspalten kann, sowie Typ III, der lediglich ein Projektionseffekt bei bestimmten Positionen zur Sonne ist.

²In den Originalarbeiten als μ bezeichnet, Umbenennung wegen Pitchwinkeldefinition μ in Kapitel 3.3

(im Folgenden auch SW) von Parker (1958) geprägt und dessen grundlegende Eigenschaften beschrieben. So fiel Parker durch eine Rechnung auf, dass die Korona sich nicht in einem statischen Gleichgewicht befinden kann, sondern entweder kollabieren oder expandieren muss. Er löste dieses Problem durch Einführen eines supersonischen SWs ¹. Ein knappes Jahr darauf, 1959, konnten *in situ* Messungen des Sonnenwinds durch die russischen Missionen *LUNIK III* und *VENUS I* dessen Existenz schließlich bestätigen. Das Phänomen der Kometenschweife wurde durch wachsende Erkenntnisse über den SW auch besser verstanden. So ist die gängige Theorie, dass die Wechselwirkung zwischen Schweifionen und Magnetfeldern, die sich mit dem SW mitbewegen, den dominanten Mechanismus darstellen. Magnetohydrodynamische Simulationen von Wegmann (2000) bestätigen dies.

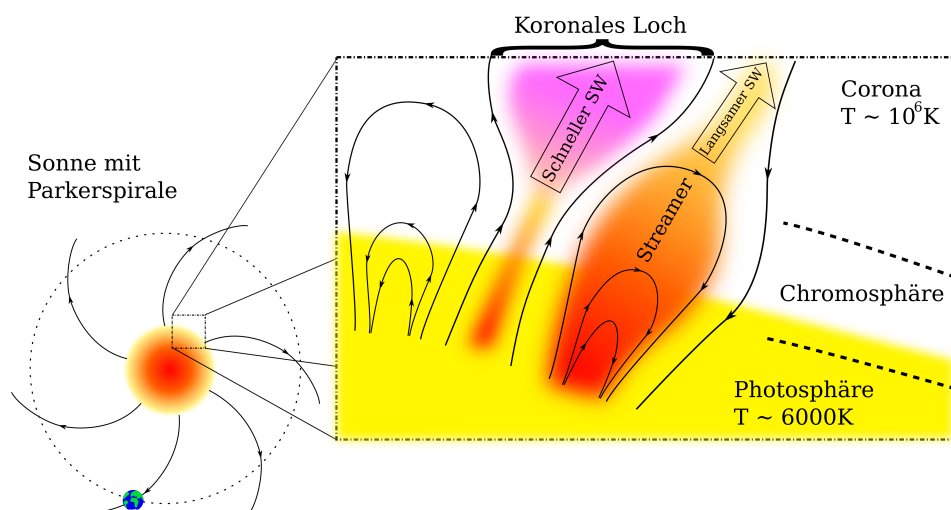


Abbildung 2.3.: Illustration der Sonne und des Sonnenwinds mit dessen grundlegenden Eigenschaften. Schneller Sonnenwind ($\approx 10^8 \text{ cm/s}$) entströmt aus koronalen Löchern, die sich zwischen zwei benachbarten Sonnenflecken bilden, wenn deren Magnetfelder entgegengesetzte Polarität haben. Langsamer Sonnenwind ($\approx 10^7 \text{ cm/s}$) hingegen kann direkt aus einem Sonnenfleck durch einen sogenannten koronalen Streamer emittiert werden. Der ausströmende Sonnenwind trägt das Magnetfeld mit dem Plasma radial von der Sonne hinweg. Durch deren Eigenrotation bildet sich die Parkerspirale.

Heutzutage sind durch zahlreiche Satellitenexperimente, wie *WIND*, *ULYSSES*, *SOHO*, *SDO* und *VOYAGER*, um nur einen Auszug zu nennen, die Eigenschaften des Sonnenwinds sehr gut untersucht. Es wird zunächst in zwei Typen separiert, den lang-

¹Im Original als „stellar breeze“ bezeichnet

samen und den *schnellen* SW. Die Hauptcharakteristik der beiden Typen ist die Geschwindigkeit. So haben die Teilchen des schnellen Sonnenwinds durchschnittliche Geschwindigkeiten von $\approx 750 \cdot 10^5 \text{cm/s}$, dabei werden zum Teil Maximalwerte deutlich über $\approx 10^8 \text{cm/s}$ gemessen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit des langsamen Sonnenwinds liegt bei etwa $\approx 300 \cdot 10^5 \text{cm/s}$. Ein weiterer Unterschied liegt in der Entstehung der beiden SW-Arten. Es werden zwar noch immer die genauen Entstehungsmechanismen erforscht, aber es wird angenommen, dass der schnelle SW aus *koronalen Löchern* emittiert wird, während der langsame SW eher aus *koronalen Streamern* zu stammen scheint. In Abb. 2.3 werden beide Mechanismen illustriert. Koronale Löcher entstehen wenn sich zwei starke Magnetfeldlinien, die aus der Sonnenoberfläche heraustreten und gleiche Polarität besitzen, nahe beieinander liegen. Dies ist beispielsweise der Fall bei benachbarten Sonnenflecken mit entgegengesetzter magnetischer Polarität. Zudem scheint die Entstehung koronaler Löcher vorzugsweise bei hohen Breitengraden statt zu finden, meist in einem Sonnenfleckenminimum. In diesem Zusammenhang beobachtet man speziell Regionen, in denen nur sehr schwach Röntgenstrahlung oder energiereiche UV-Strahlung emittiert wird. Dort laufen viele starke Magnetfeldlinien auf relativ engem Raum zusammen. In Abb. 2.2 kann man diesen Effekt sehr gut beobachten. Die dadurch entstandenen Löcher im solaren Magnetfeld lassen Teilchen recht ungehindert mit hohen Geschwindigkeiten ins Weltall strömen. Besonders der Satellit *ULYSSES*, welcher sich erstmals auf polaren Umlaufbahnen um die Sonne bewegte, hat zahlreiche Erkenntnisse über diesen Typus des SWs gesammelt. Der langsame SW wird hingegen eher an geringen Breitengraden, also in Äquatornähe aus weniger permanenten Regionen emittiert. Als Hauptkandidaten kommen die Streamer in Frage, die in aktiven Fleckenregionen auftreten. Das Magnetfeld eines Sonnenflecks muss dazu weit in die Korona hinausreichen, bis die Magnetfeldlinien nahezu parallel verlaufen. Dadurch wird das Plasma aus den Flussschläuchen förmlich „herausgequetscht“. Dieses Phänomen ist besonders gut während einer Sonnenfinsternis zu beobachten. So heben sich deutlich von der restlichen Korona, die konischen Strukturen ab, die aufgrund ihrer Form im englischen als *Helmets* bezeichnet werden. In Abbildung 2.7 lässt sich diese Namensgebung gut nachvollziehen.

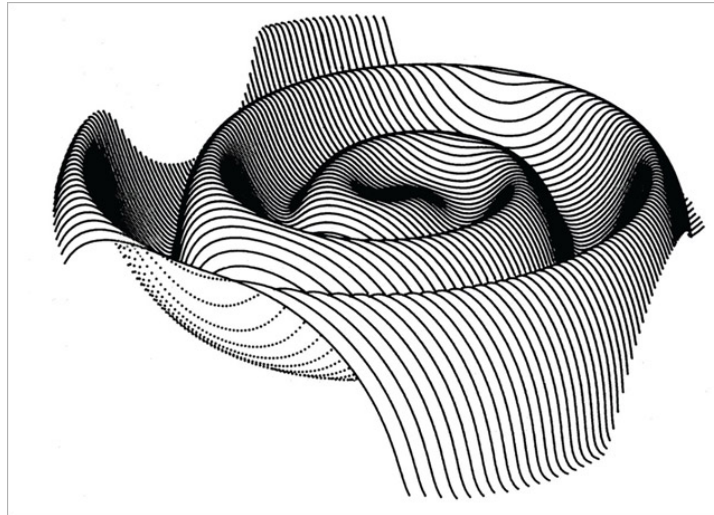


Abbildung 2.4.: Das sogenannte *Ballerinakleid* der Sonne. Dies sind die *Stromschichten*, durch die das Magnetfeld zwischen dessen Polarität getrennt wird. Aufgrund der komplexen *Eigenrotation* der Sonne ergibt sich diese verdrehte Struktur, die das größte zusammenhängende Gebilde unseres Sonnensystems formt. Quelle: *Sun-Earth Day 2010, NASA Goddard Space Flight Center*

Der in alle Richtungen strömende Sonnenwind hat eine sehr wichtige Konsequenz für das interplanetare Magnetfeld. Das SW-Plasma trägt die Magnetfeldlinien mit sich (Stichwort *frozen-in-flux* Kapitel 3.1) radial von der Sonne hinweg. Durch deren *Eigenrotation* wird das Magnetfeld schließlich in Form einer archimedischen Spirale „verdreh“t. Parker (1958) beschrieb dieses Phänomen zuerst und wurde somit namensgebend für die *Parkerspirale*, die auch in Abbildung 2.3 illustriert ist. In Äquatornähe liegen die unterschiedlichen Polaritäten des Sonnenmagnetfeldes eng beieinander. Es bildet sich somit eine schmale Schicht zwischen den Polaritäten, in der, dem Induktionsgesetz der Maxwell-Gleichungen nach, ein Strom fließt. Daher werden diese auch als *Stromschichten* bezeichnet. Durch die verschiedenen Magnetfelder, die vom SW nach außen getragen werden, der differentiellen Rotation der Sonne und der Notwendigkeit geschlossener Feldlinien, ergibt sich eine komplizierte großräumige Struktur die ihrem Aussehen nach einem *Ballerinakleid* ähnelt, siehe Abb. 2.4. Daher auch die Bezeichnung in der Fachliteratur als *Ballerinaskirt*.

Eine sehr gute numerische Modellierung der Eigenschaften des schnellen und langsamen Sonnenwinds, speziell deren Geschwindigkeitsentwicklung in Abhängigkeit zum Abstand zur Sonne, wurde von Vainio et al. (2003) durchgeführt. In Abbildung 2.5 er-

kennt man sehr gut, dass der langsame SW ein deutlich dichteres Medium darstellt, als der schnelle. Das hat im Speziellen Konsequenzen für die turbulente Zusammensetzung der Heliosphäre, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden soll. So ist es nicht möglich das interplanetare Medium ganzheitlich durch *ein* Turbulenzmodell zu beschreiben. Vielmehr muss man sich auf Bereiche beschränken, die entweder inkompressibel (schneller SW) oder kompressibel (langsamer SW) sind. Als ein sehr kontrastvolles Beispiel seien hier die sogenannten *ko-rotierenden Interaktionsregionen* (Englisch: co-rotating interaction regions, *CIR*) aufgeführt. Da die Emission des schnellen SW eher an den Polkappen der Sonne erfolgt, wohingegen das Plasma in Äquatornähe langsam ausströmt und zudem beide Emissionsregionen unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeiten haben, bilden sich archimedische Spiralen verschiedener Krümmung aus. Das hat zur Folge, dass sich beide Sonnenwindarten in bestimmten Bereichen - den CIRs - vermischen, indem der schnelle SW den langsamen „überholt“. In einer CIR kommt es zu starker Kompression des Plasmas, was mit erhöhten Temperaturen und verstärkten Magnetfeldern einher gehen kann. Besonders häufig treten ausgeprägte CIRs während solarer Maxima auf, da in dieser Phase des Sonnenzyklus koronale Löcher bis hin zum Äquator entstehen können (Forsyth u. Breen 2002; Balogh et al. 1999) und folglich der schnelle SW stark in den langsamen einströmt. Dadurch können sich Schockregionen ausbilden, die effizient zur Teilchenbeschleunigung beitragen.

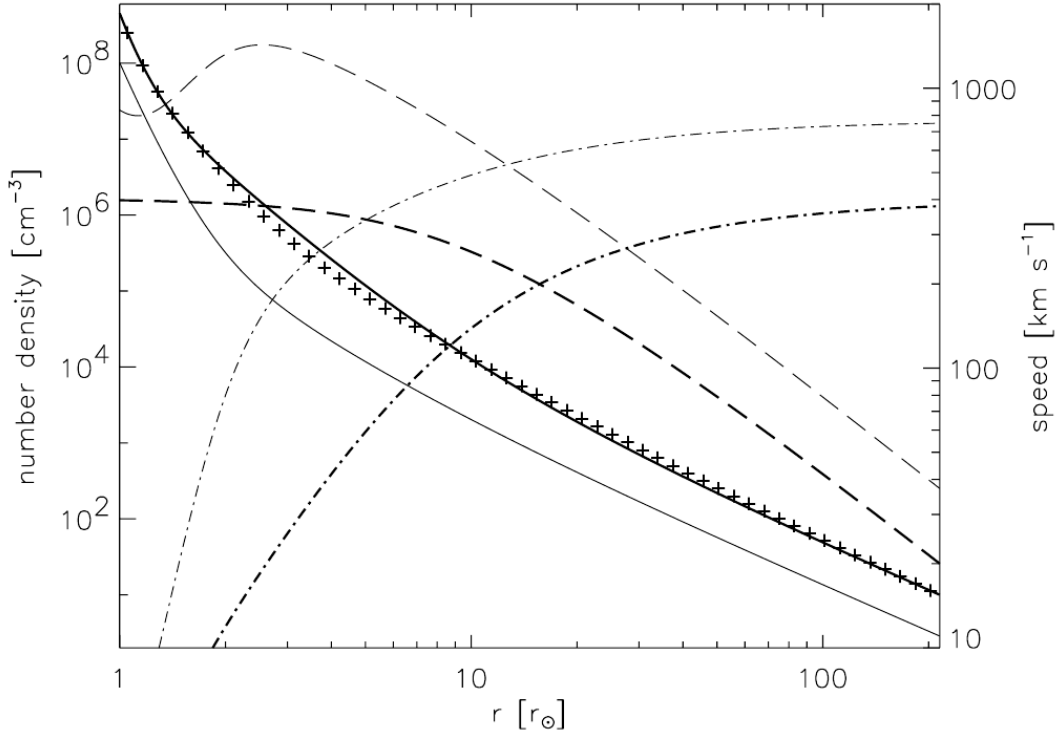


Abbildung 2.5.: Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften des schnellen (dünne Kurven) und langsamen (dicke Kurven) Sonnenwinds. Dabei stehen die Strich-Punkt Kurven für entsprechende SW-Geschwindigkeit, die Strich-Kurven für die Alfvéngeschwindigkeit, sowie die durchgezogene Kurven für die Anzahldichten. Die experimentellen Werte sind durch Datenpunkte (Kreuze) gekennzeichnet. Quelle: Vainio et al. (2003)

2.3. Heliosphärische Turbulenz

Die Heliosphäre wird, wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, durch den Sonnenwind dominiert. Aufgrund seiner hohen Geschwindigkeiten in einem Medium mit geringer Dichte (Abbildung 2.5) kommt es zu hohen *Reynoldszahlen*. Diese dimensionslose Größe ist ein Maß für die potentielle Ausbildung von Turbulenz, da sie als das Verhältnis zwischen inneren Kräften und kinematischer Viskosität definiert ist

$$Re = \frac{vL}{\nu_{\text{kin}}} \quad (2.2)$$

oder im Fall der *magnetischen Reynoldszahl* als entsprechendes Verhältnis zur magnetischen Resistivität

$$\begin{aligned} \nu_{\text{Mag}} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \\ Re_{\text{Mag}} &= \frac{vL4\pi\sigma}{c^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit σ . Überschreiten große Reynoldszahlen einen kritischen Wert, ist eine Strömung anfällig gegenüber Störungen und geht vom laminaren Fall zu Verwirbelungen über. Typische Werte für die Heliosphäre und den Sonnenwind liegen bei $\approx 10^{14}$ (Borovsky u. Funsten 2002; Borovsky u. Gary 2008). Daher kann man das Sonnenwindplasma als stark turbulent betrachten. Missionen mittels der *Mari-ner*-Sonden, konnten in den frühen siebziger Jahren erstmals fluktuierende Felder messen. Die Beobachtung eines turbulenten Energiespektrums gelang wenige Jahre später durch die Sonde *Helios-2*. Solche Turbulenzspektren zeichnen sich durch Potenzgesetze $E(k) \propto k^\alpha$ aus, die sich durch *Energiekaskaden* entwickeln. Dieser typische Verlauf der Energie ist in Abbildung 2.6 sehr gut zu erkennen. Bemerkenswert ist hierbei der spektrale Bruch, der durch die blauen Punkte in der Grafik markiert wird. Während sich Helios-2 der Sonne annäherte und immer wieder Messungen vornahm, wenn sie sich im selben ko-rotierenden Plasmastrom der Sonne befand, bewegte sich dieser Knick immer mehr zu höheren Frequenzen. Dies ist in guter Übereinstimmung mit gängigen Turbulenztheorien, nämlich dass ein typisches Spektrum im niederfrequenten Bereich durch Energieinjektion getrieben wird und diese Energie im darauf folgenden Inertialbereich, sich mit einem steilerem Potenzverlauf, zu kleinen Skalen entwickelt. Im Falle der Helios-2 Messungen macht es also Sinn, dass die spektrale Bruchkante sich nahe der Sonne, welche die Turbulenz antreibt, zu höheren Frequenzen verschiebt.

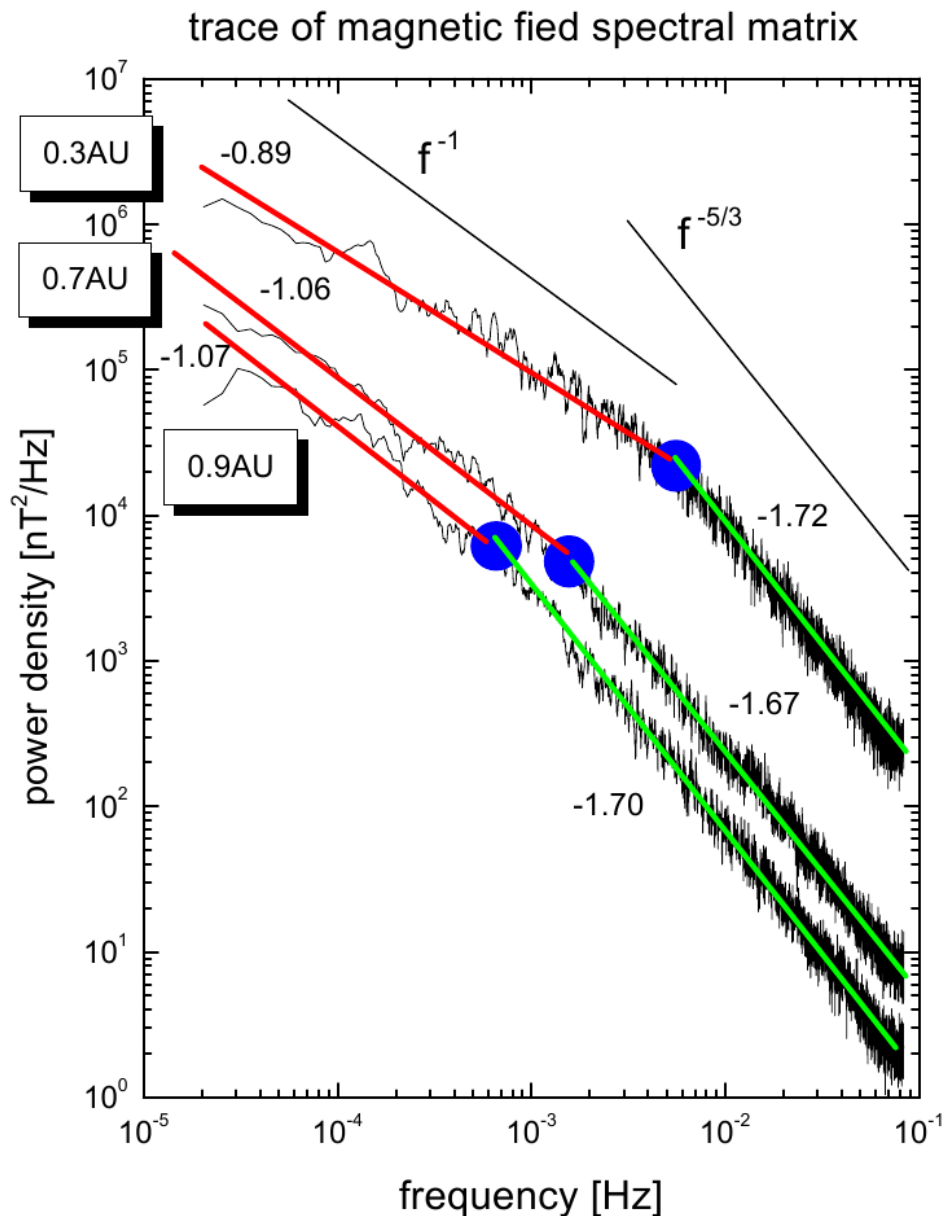


Abbildung 2.6.: Messungen der magnetischen Feldfluktuationen im Sonnenwind durch die Helios2-Sonde im Jahre 1976. Die Daten wurden im selben ko-rotierenden Plasma-Ausfluss der Sonne gemessen während sich die Sonde über 104 Tage der Sonne auf 0.3 AU näherte. Man kann sehr gut ein Potenzgesetz mit einem spektralen Bruch (blauer Punkt) erkennen. Je größer der Abstand zur Sonne ist, desto länger ist der Bereich mit Exponent ≈ -1.7 Quelle: Überarbeiteter Plot durch Bruno u. Carbone (2005)

Wenig später konnten zudem Simulationen vermittels magnetohydrodynamischen Ansatz durch Matthaeus et al. (1983), Grappin (1986) und Pouquet et al. (1986) ebenfalls

nichtlinearen Energietransport zu kleinen Skalen belegen. Seither haben sich einige Turbulenzmodelle entwickelt, die unterschiedliche Ansätze, wie kinetische Beschreibung auf kleinen Skalen, Magnetohydrodynamik-Modellierungen und WKB-Theorie¹, verfolgen (Bavassano et al. 1982; Marsch u. Tu 1990; Matthaeus et al. 1994). Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, ist es prinzipiell nicht möglich ein ganzheitliches Modell zu finden, da die Heliosphäre sich als äußerst komplex erweist. Daher werden sämtliche Theorien bis heute äußerst kontrovers diskutiert. Betrachtet man den inkompressiblen schnellen Sonnenwind, kommt besonders erschwerend hinzu, dass Messungen des Turbulenzspektrums im Mittel einen Exponenten von $\alpha \approx -1.6$ für den Intertialbereich ergeben (Tu u. Marsch 1995), ein Wert der fast genau zwischen den inkompressiblen Turbulenzmodellen von *Kraichnan*, sowie *Iroshnikov* ($\alpha \approx -3/2$) und *Kolmogorov* bzw. *Goldreich und Sridhar* ($\alpha \approx -5/3$) liegt². Diese Kontroverse ist auch heutzutage nicht vollständig aufgelöst (Carbone u. Pouquet 2005). Allerdings scheint die Annahme von Inkompressibilität in weiten Teilen der Heliosphäre gerechtfertigt zu sein und lässt auf eine Dominanz des schnellen Sonnenwindes schließen (Bruno et al. 1985; Tu et al. 1989). Als Wellenmode eines inkompressiblen, magnetisierten Plasmas kommt somit die *Alfvénwelle* in Frage, eine Welle, die sich (anti)parallel zum Hintergrundmagnetfeld \mathbf{B}_0 ausbreitet. Dies erklärt sehr gut die Daten von Helios 2 in Abbildung 2.6, da dieses Spektrum rein aus Alfvénwellen besteht. Außerdem werden kompressible Plasmawellen, wie z.B. die schnelle und langsame *magnetosonische Mode* effizient durch *Landau-* und *Barnesmechanismus* (Barnes 1966), sowie *vikos* (Spanier 2005) gedämpft. Einen möglichen Kompromiss zwischen beiden Regimes verfolgt die *Nahezu-Inkompressible MHD* (Englisch: *Nearly Incompressible MHD*, NIMHD), wie beispielsweise von Matthaeus et al. (1990) untersucht. Dabei wird angenommen, dass leichte Kompressibilität durch ein Druckungleichgewicht zwischen Alfvénwellen hervorgerufen wird. Allerdings scheint auch die NIMHD nach hinreichender Zeitentwicklung gegen das rein inkompressible Regime zu konvergieren und konnte sich somit nicht durchsetzen.

¹Auf den WKB-Ansatz soll nicht im Detail eingegangen werden. Es sei an dieser Stelle nur erklärt, dass dieser die aus der Quantenmechanik bekannte *Wentzel-Kramer-Brillouin-Näherung* verwendet, um Fluktuationen als inhomogenen, großskaligen Fluss zu beschreiben. Diese Herangehensweise liefert zwar gute Ergebnisse bei der Beschreibung der Verschiebung des spektralen Bruchs wie in Abbildung 2.6, kann aber nur auf schwach veränderliche Fluktuationen angewendet werden. Für weitere Details siehe auch Bruno u. Carbone (2005).

²Im Theorieteil wird motiviert, wieso man dennoch eher zu einem Kolmogorovexponenten tendieren sollte.

2.4. Flares und Coronal Mass Ejections

In diesem Abschnitt werden zwei wichtige Phänomene der Sonne behandelt, die im direkten Zusammenhang mit hochenergetischen solaren Teilchen stehen. Dabei handelt es sich um gewaltige Energie- und Materieauswürfe, die zunächst nicht exakt unterschieden werden konnten. Ein kurzer historischer Rückblick soll Aufschluss über die Entwicklung der Erforschung dieser interessanten Phänomene geben.

2.4.1. Solar Flares

Neben den bereits erwähnten Protuberanzen sind *solare Flares* (vom Englischen: Fackel) äußerst prominente Erscheinungen auf der Sonnenoberfläche. Sehr allgemein betrachtet, ist ein Flare ein starker Strahlungsausbruch der sich über einen weiten Frequenzbereich erstreckt. Im sichtbaren Bereich ist besonders der Übergang der H_{α} -Linie mit etwa 650 nm zu erkennen, der allerdings u.a. in der normalen Oberflächenstrahlung der Sonne emittiert wird. Daher war auch die Entdeckung durch *Richard Carrington* mittels filterlosen Teleskopes im Jahre 1859 nur möglich, da am 1. September ein besonders starker Flare im sichtbaren Bereich ausbrach. Nach der Erkenntnis, dass die H_{α} -Linie sehr intensiv wahrnehmbar ist, wurde für längere Zeit die Klassifikation eines Flares bei dieser Wellenlänge definiert, wodurch sich auch der Begriff H_{α} -Flare prägte¹. Mit der Entwicklung der Radioastronomie in den 1940er Jahren und anschließend, etwa 30 Jahre später, der Röntgen-Satellitenteleskope (GOES) wurden Flares hauptsächlich in den Frequenzbereichen 100 MHz bis 400 GHz bzw. durch Röntgenstrahlung und im hochfrequenten UV-Bereich beobachtet. Heutzutage bieten Satellitenmessungen die beste Möglichkeit Flares zu observieren, da der Filtereffekt der Erdatmosphäre wegfällt und hochauflösende Bilder der Sonnenaktivität produziert werden. Ein sehr gutes Beispiel hierfür ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Die Klassifikation erfolgt mittlerweile primär über Röntgenintensitäten².

Während eines Flares werden Energien bis 10^{32} erg (integrale Energie) freigesetzt (Kopp et al. 2005). Die Menge der Ausbrüche richtet sich ebenfalls nach dem 11-Jahreszyklus und reicht von wenigen Ereignissen pro Woche bis zu mehreren 10 Ereignissen pro Woche.

¹Klassifikation durch Intensität: b (brilliant), n (normal), f (faint) und Größe des Flares relativ zur Sonnenoberfläche S,1,2,3,4 (von klein nach groß), Bsp: H_{α} -2b, intensiver Ausbruch, mittlerer Ausdehnung

²Messung des Flusses in W/m^2 mit den Klassen A,B,C,M,X von schwach bis stark

nissen pro Stunde, wobei kleinere Flares (Klasse A/B der Röntgendefinition) häufiger zu beobachten sind. Die Beobachtungszeit variiert, je nach betrachtetem Frequenzbereich (Kahler 1992). So wurden zwei Haupttypen von Flares von Pallavicini et al. (1977) mittels *Skylab*-Messungen im Röntgenbereich durch Dauer und Ausdehnung unterschieden. Typ I erreicht Gesamthöhen von maximal 10^9 cm und ist für wenige 10 Minuten sichtbar, wohingegen Typ II deutlich über 10^9 cm Höhe erlangt und mehrere Stunden observierbar bleibt.

2.4.2. Coronal Mass Ejections

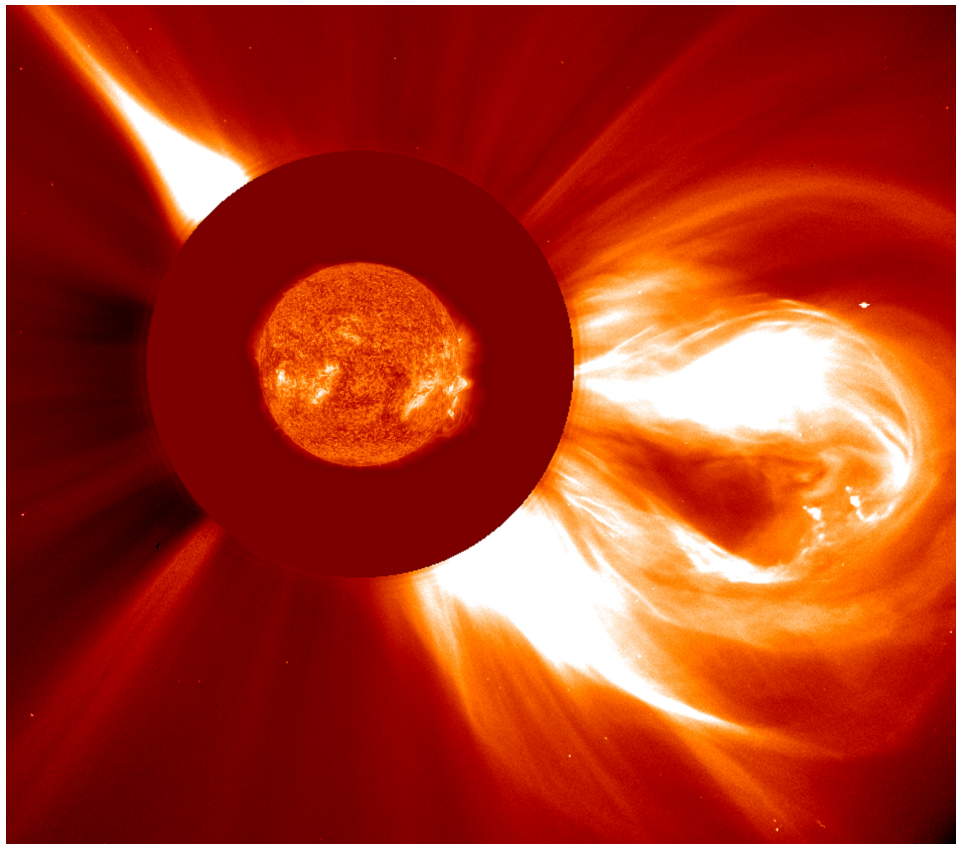


Abbildung 2.7.: Aufnahme des Chronographen LASCO (mit ausgeblendeter Korona) durch SOHO. Man erkennt zwei interessante Phänomene. Zum einen einen äußerst starken koronalen Masseauswurf (CME, rechts im Bild). Zum anderen einen sogenannten Helmet (links), durch die vermutlich der langsame Sonnenwind emittiert wird. Quelle: Sun-Earth Day 2010, NASA Goddard Space Flight Center

Eine vergleichsweise junge Entdeckung der Sonnenforschung sind die sogenannten

koronalen Masseauswürfe (Englisch: *coronal mass ejections*, CME), die, dem Namen entsprechend, enorme Ausstöße von Materie der Sonnenoberfläche sind. Dabei werden CMEs im planetennahen Bereich als *interplanetare CMEs* (Abkürzung *ICME*) bezeichnet. Im Gegensatz zu Protuberanzen fällt das ausgeworfene Material nicht wieder auf die Sonne zurück, sondern wird mit Geschwindigkeiten von $10^6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ bis etwa $3 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ weit in die Heliosphäre geschleudert. Typische Massen eines Auswurfes liegen bei etwa 10^{16} g , wodurch das Plasma kinetische Energien bis 10^{32} erg erreicht (Manchester et al. 2005). Durch die teilweise enormen Geschwindigkeiten des ausgeworfenen Plasmas, dass in den, zum Teil langsameren, Sonnenwind einströmt, bildet sich eine Schockfront aus, sofern die Geschwindigkeit des CMEs im Bezugssystem des SW größer als die magnetosonische Schallgeschwindigkeit ist. Das geschieht in der Regel bei sehr schnellen Ereignissen mit $v > 5 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Diese Schocks sind direkt messbar und stellen äußerst effiziente Teilchenbeschleuniger dar (Vourlidas et al. 2003). Während sich der CME von der Sonne entfernt, zieht er die magnetischen Feldlinien aufgrund des frozen-in-fluxes mit sich und stört somit das Feld der Parkerspirale (siehe Abbildung 2.9). So werden an einer Seite des CME die Feldlinien verdichtet, während auf der anderen Seite das Magnetfeld ausdünnert. Außerdem biegen die Feldlinien sich entlang der Schockfront, bis sie vor der Schockregion wieder der gewöhnlichen archimedischen Spirale folgen. Ein weiterer Effekt ist das Ausbilden von sogenannten *Plasmoiden*, auch als *magnetische Blasen* bezeichnet. Das sind geschlossene Magnetfeldstrukturen, die entstehen, wenn der CME sich weit von der Sonne entfernt hat, so dass dessen innere Feldlinien hinter der Plasmawolke sehr eng beieinander liegen, wodurch diese in der sogenannten *Rekonnexionsregion* sich neu verbinden können. Diese Thematik wird im Anschluss in Kapitel 2.4.3 genauer erläutert. Der Rekonnexionsprozess ist in diesem Fall langsam und es lassen sich CMEs bis zu 5 AU beobachten, die noch geschlossene Feldlinien zur Sonne aufweisen (Gosling et al. 1995). Je nach Aktivität des Sonnenzyklus, ist das Weltall mehr oder weniger stark mit Plasmoiden und magnetischen Schleifen gefüllt, was in aktiven Phasen mittlere Abstände zwischen ihnen von 1 AU bedeutet, bei passiven Phasen entsprechend etwa 10 AU.

CMEs sind weniger strahlungsintensiv und daher nur schwer von der Korona oder von eruptiven Protuberanzen zu unterscheiden. Deshalb wurde dieses Phänomen durch die ersten Satellitenexperimente, die mit Chronographen ¹ ausgestattet waren, beobach-

¹welche die Korona ausblenden

tet. So gelang es erstmals *OSO-7* (1973) und *Skylab* (1974) einen CME zu detektieren (Gosling et al. 1974). Diese Entdeckung entfachte in den darauf folgenden Jahren eine Debatte, inwiefern CMEs und solare Flares miteinander in Verbindung stehen und vor allem, welches der beiden Phänomene effizient Teilchen beschleunigt und damit im Zusammenhang mit starken geomagnetischen Stürmen und hochenergetischen Teilchen steht. Es war mehr als 50 Jahre anerkannt und mit zahlreichen Theorien und Beobachtungen bestätigt, dass Flares die Ursache starker Teilchenbeschleunigung und Ausbildung von Schockregionen sind (Hale 1931; Forbush 1946). Zwar wurde zunächst auch die Idee von Greaves u. Newton (1928) verfolgt, dass eruptive Protuberanzen dafür verantwortlich sein könnten. Da diese aber, Beobachtungen zufolge, in der Regel wieder zur Sonne zurückfallen wurde diese Theorie wieder verworfen (Hale 1931). Erste Zweifel an der Verknüpfung von Flares mit Schockregionen kamen auf, nachdem *Skylab*-Messungen keinen direkten Zusammenhang herstellen konnten und Lin u. Hudson (1976) nötige Flare-Elektronen-Energien von mindestens 20 keV berechneten, die nur bei sehr starken Flares erreicht werden. CMEs wurden somit immer mehr in Betracht gezogen und man nahm zunächst an, dass diese durch H_{α} -Flares erzeugt werden. Systematische Untersuchungen von CMEs durch Munro et al. (1979) zeigten jedoch, dass nur ca. 40% mit Flares im Zusammenhang stehen, hingegen etwa 70% zusammen mit Protuberanzen auftreten. Mittlerweile ist die Auffassung, dass eher CMEs durch Flares begleitet werden, als anders herum (Kahler et al. 1989) und dass koronale Masseauswürfe mit hohen Geschwindigkeiten zusammen mit H_{α} -Flares auftreten. Aus mangelndem Verständnis der Erzeugungsmechanismen ist diese Aussage allerdings eher eine Regel, als ein valides Gesetz. So wurde ebenso Teilchenbeschleunigung an CME-Schockfronten detektiert, bei denen der koronale Masseauswurf weder mit einem Flare assoziiert war, noch aus einer aktiven Sonnenregion zu stammen schien (Kahler et al. 1986).

Eine Klasse von koronalen Masseauswürfen sind die sogenannten *Halo CMEs*. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich in Richtung Erde bewegen und dadurch einen optischen Halo auf Bildern von Chronographen-Beobachtungen erzeugen. Diese spezielle Klasse ist von großer Bedeutung für das *Weltraumwetter*, also den direkten Einfluss auf die Erde. Es ist üblich Halo CMEs als ICMEs abzukürzen. Für das Weltraumwetter ist eine frühe Detektion und Geschwindigkeitsmessung solcher Ereignisse äußerst wichtig, zumal ICMEs im Durchschnitt nur etwa 80 Stunden bis zur Erde benötigen (Brueckner et al. 1998).

Das Hauptproblem liegt derzeit nicht in der Beobachtung von Flares und CMEs, als vielmehr im Verständnis ihrer grundlegenden Erzeugungsmechanismen. Es wird immernoch versucht zu verstehen, welche Prozesse diese Ereignisse hervorrufen. Ein vielversprechendes Modell bietet die *magnetische Rekonnexion*, worüber im nächsten Abschnitt dem Leser ein kurzer Überblick verschafft werden soll.

2.4.3. Magnetische Rekonnexion

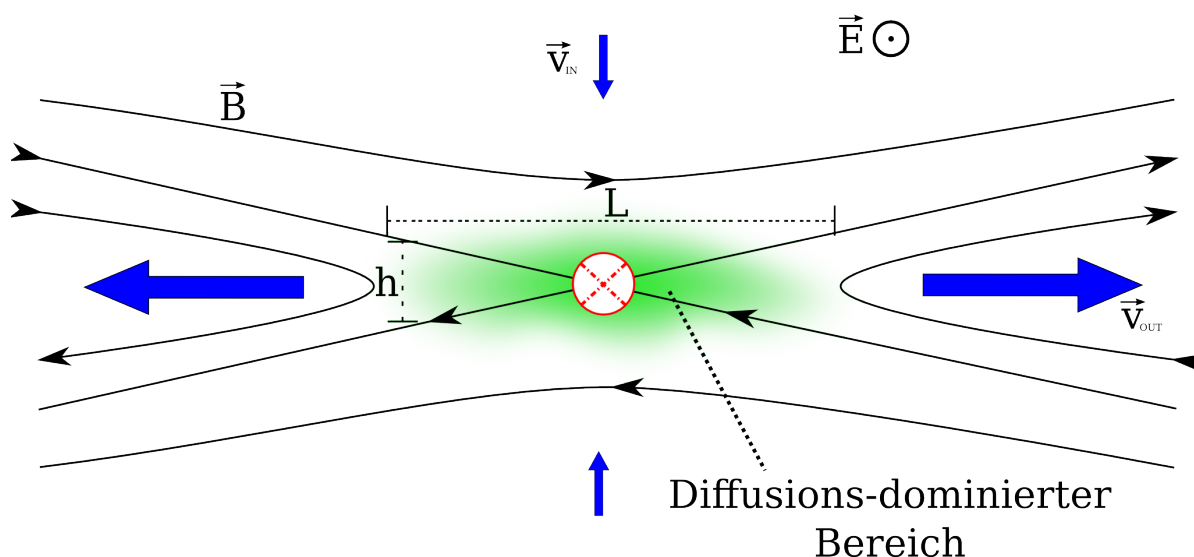


Abbildung 2.8.: Skizze der magnetischen Rekonnexion gemäß dem Sweet-Parker-Modell. Zwei Plasmaströmungen mit unterschiedlich orientierten Magnetfeldern fließen ineinander und erzeugen eine durch Diffusion dominierte Region der Höhe h und der Länge L in der die Feldlinien sich schnell ausrichten und sich neu verbinden können. Quelle: Selbserzeugte Grafik nach einer Idee von Koskinen (2011)

Um einen Flare oder eine CME zu erzeugen sind äußerst große Energien nötig. Diese Energien lassen sich durch den Prozess der magnetischen Rekonnexion erklären. Der Zusammenhang zwischen eng benachbarten, starken Magnetfeldern in Sonnenfleckenregionen während des solaren Maximums und dem Auftreten von CMEs wurde durch Hildner et al. (1976) vorgeschlagen. Svestka (1986) schloss auf den Mechanismus der Rekonnexion bei langanhaltenden eruptiven Flares, die von CMEs begleitet werden. Des Weiteren findet Rekonnexion von Feldlinien auch im Schweif der Magnetosphäre der Erde statt.

Die zugrundeliegende Mechanismus der magnetischen Rekonnexion ist die Neuordnung zweier eng beieinanderliegender Feldlinien¹, mit unterschiedlicher Polarität, die sich untereinander neu verbinden. Bei solch einer Rekonnexion wird der magnetische Fluss kurzzeitig gestört, was im Fall der Sonne bedeutet, dass immense Flüsse, die sich über mehrere Stunden aufgebaut haben, plötzlich austreten und somit enorme Mengen magnetischer Energie frei wird, die sich in kinetische und thermische Energie wandelt. Der mikroskopische Vorgang ist bis heute nicht geklärt und lässt somit einige Fragen offen. Man kann allerdings erklären welche Voraussetzungen nötig sind.

Im Bild der klassischen MHD ist der magnetische Diffusionsterm von Bedeutung für die Neuausrichtung des magnetischen Flusses. Die magnetische Diffusion ist in astronomischen Plasmen jedoch meist sehr klein, was im Wesentlichen daran liegt, dass hohe Leitfähigkeit σ , welche invers proportional zur magnetischen Diffusivität η ist, vorherrscht. Der Grund dafür ist, dass die Diffusionszeitskala $\tau_D = L^2/\eta$ für große Systemlängen L sehr groß wird (Koskinen 2011). Strömen zwei ideale Plasmaflüsse, die unterschiedliche Magnetfeldrichtungen haben, mit ihren eingefrorenen Magnetfeldern aneinander vorbei, so bildet sich eine Stromschicht aus². Diese Stromschicht erzeugt eine neue, deutlich kleinere, effektive Systemlänge, was folglich die Diffusionszeitskala verkürzt. Wird die Stromschicht sukzessive dünner, dominiert schließlich die Diffusion und das Magnetfeld richtet sich sehr schnell neu aus. Dabei wird die Stromschicht zwischen den Plasmen durchbrochen.

An dieser recht einfachen Beschreibung finden sich zwei Probleme. Zum einen ist auf der Längenskala, die zur Rekonnexion führt, die Annahme der MHD nicht mehr möglich. Zum anderen würde sich das Plasma an den Stromschichten ansammeln und nicht schnell genug wegströmen. Eine Lösung für Letzteres wurde durch Sweet (1958) und Parker (1957) vorgeschlagen. Im Sweet-Parker-Modell wird die Ausdehnung L der Diffusionsregion im Einströmbereich als groß gegenüber deren Höhe h in Ausströmbereich angenommen, wobei das Problem durch geschickte Koordinatenwahl immer auf effektiv zwei Dimensionen rückführbar ist. Wie auch in Abbildung 2.8 angedeutet, hat dann das nach außen strömende Plasma höhere Geschwindigkeit als das einströmende. Ein Vergleich zwischen Poynting-Fluss und Energieänderung der beiden Plasmaströmungen

¹Zwar sind Feldlinien nur ein künstliches Hilfsmittel, dass die zugrundeliegende Dynamik der Magnetfelder durch die Maxwellgleichung nur näherungsweise beschreibt, im Zusammenhang mit Rekonnexion jedoch sehr anschaulich.

²Das entspricht genau dem selben Mechanismus der bereits im Zusammenhang mit Abbildung 2.4 beschrieben wurde und zur Ausbildung des Ballerinaflecks führt.

gen ergibt, dass die Ausflussgeschwindigkeit der Alfvéngeschwindigkeit v_A ¹ entspricht. Dieses Modell beschreibt die Rekonnexion schon deutlich besser, allerdings sind die Zeitskalen auf denen das Plasma in die Diffusionsregion einströmt so groß, dass z.B. Energie für einen typischen Flare mehrere Tage lang aufgebaut werden müsste. Daher bezeichnet man beim Sweet-Parker-Modell den Prozeß auch als *langsame Rekonnexion*. Eine Verbesserung wurde dahingehend von Petschek (1964) erzielt, der einen diffusionsdominierten Bereich ausschloß und stattdessen die schnellen Magnetfeldstörungen durch Beschleunigung des Plasmas an Schocks, die durch die *langsame Plasmamode* (Englisch: *slow mode*) auftreten, erklärte. Diese Beschreibung liefert deutlich höhere Einströmgeschwindigkeiten als das Sweet-Parker-Modell und somit eine viel größere magnetische Flussrate. Durch diese *schnelle Rekonnexion* konnten erstmals Phänomene wie Flares erklärt werden.

Allerdings sind viele Fragen immernoch nicht ausreichend geklärt, wie z.B. die Rekonnexion in kollisionsfreien Plasmen, in denen die MHD nicht mehr anwendbar ist. Auch hierfür gibt es zahlreiche Ansätze und Modelle, die jedoch nicht im Fokus der vorliegenden Arbeit stehen. Da die Grundlagen der Sonnenphysik ausreichend vorgestellt wurden, soll sich stattdessen nun der Phänomenologie solarer hochenergetischer Teilchen angenommen werden.

2.5. Solar Energetic Particle - Events

In diesem Kapitel wird das Phänomen hochenergetischer solarer Teilchen vorgestellt. Dazu werden zunächst die generellen Eigenschaften erörtert und im Anschluss die zugrundeliegenden Teilchenbeschleunigungsmechanismen diskutiert.

2.5.1. Allgemeine Eigenschaften von SEP-Ereignissen

Auf der Erde werden geladene solare Teilchen mit Energien von 10 MeV bis nahezu 1 GeV detektiert. Dabei erreichen nur die Protonen, also im Wesentlichen Kerne von Wasserstoff, Helium, Sauerstoff, etc. solche Energien, wohingegen Elektronen im keV bis 100 MeV Bereich liegen. Zuerst wurden diese hochenergetischen Teilchen durch Forbush

¹Dies entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit von inkompressiblen Plasmawellen - siehe Kapitel 3.1

(1946) entdeckt und wurden im weiteren Verlauf als *solar energetic particles*, (*SEP*) bezeichnet. Die Messungen solcher Teilchen sind von großer Bedeutung, da sie im direkten Zusammenhang mit ihrer Quelle stehen und somit eine Fülle an Informationen über CMEs, Flares und andere Teilchenbeschleuniger in der Heliosphäre bieten.

SEPs unterscheiden sich zum einen durch ihre hohe Energie und zum anderen durch ihre geringe Dichte¹ vom omnipräsenten Sonnenwind. Zahlreiche Messungen dieser Teilchen wurden durch das *Goddard Space Flight Center* mittels der Satellitenexperimente *ISEE-3*, *International Sun Earth Explorer*² und *IMP8, Interplanetary Monitoring Platform* durchgeführt. Heutzutage wurden diese Experimente teilweise durch den Satelliten *WIND* abgelöst, der hochenergetische Teilchen mit dem Instrument *EPACT* detektiert. Die Messungen unterscheiden die SEPs in zwei Typen. Zum einen in die sogenannten *impulsiven SEPs*, zum anderen in die *sukzessiven SEPs*. Die folgenden Eigenschaften werden diesen beiden Typen nach Lang (2009) zugeordnet.

Impulsive Ereignisse sind mit wenigen Stunden Beobachtungszeit eher kurzlebig und werden mit Typ I Röntgenflares³ assoziiert. Messungen durch Chronographen ergeben keine Korrelation zu CMEs, stattdessen werden die Teilchen sehr wahrscheinlich von Flares oder durch Wellenmoden, die von Flares verstärkt werden, beschleunigt. Es werden während des solaren Maximums ca. 1000 pro Jahr gemessen. Impulsive SEPs sind reich an Elektronen und setzen sich gleichermaßen aus Helium-3 und Helium-4 zusammen. Das ist insofern erstaunlich, dass nur ein äußerst kleiner Anteil⁴ der Sonne aus ³He besteht, was wiederum den zugrundeliegenden Beschleunigungsmechanismus charakterisiert. Dieser muss gezielt mit dem seltenen Helium-3 wechselwirken und außerdem teilweise ⁴He beschleunigen, da die Zeitverläufe der Intensitäten beider Spezies ähnlich sind. Beispielsweise käme als Beschleunigungsprozeß die Welle-Teilchen-Resonanz durch Alfvénwellen in Frage, da die Gyrationfrequenz beider Heliumspezies nahe beieinander liegt und mit Alfvénwellen unterhalb der Protonengyrofrequenz Ω_p interagieren kann (Koskinen 2011). In jedem Fall scheint der Beschleunigungsmechanismus recht nahe der Sonne statt zu finden, da impulsive SEPs fast ausschließlich aus Regionen hoher östlicher Länge stammen (Reames 1999). Geladene Teilchen folgen der Parkerspirale (Abbildungen 2.3 und 2.9), da sie an das starke Hintergrundmagnetfeld gebunden sind.

¹Vergleich der Flüsse von $\approx 10^6 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ zu Sonnenwindflüssen von etwa $\approx 10^{16} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$

²Später in *ICE - International Cometary Explorer* umbenannt, da die Sonde als erste durch einen Kometenschweif geflogen ist.

³Klassifikation in Kapitel 2.4.1 nach Pallavicini et al. (1977)

⁴In der Sonnenatmosphäre macht ³He lediglich 0.02% der Gesamtheliummenge aus (Koskinen 2011).

Das hat zur Folge, dass in Erdnähe gemessene Teilchen, die wenig Störungen während ihrer Ausbreitung erfahren haben, also nur gering gestreut oder beschleunigt wurden, immer von östlichen Gebieten der Sonne kommen.

Sukzessive SEPs sind zum Teil mehrere Tage lang beobachtbar und werden eher mit Typ II Röntgenflares in Verbindung gebracht. Die Tatsache, dass dieser Flaretyp häufig von CMEs begleitet wird und Chronographenmessungen eine Korrelation von etwa 96% zu CMEs zeigen, lässt darauf schließen, dass diese SEPs durch Schockbeschleunigung generiert werden. Während starker Sonnenaktivität beobachtet man etwa 100 solcher Ereignisse pro Jahr (Lang 2009). Im Gegensatz zu impulsiven SEPs entspricht das $^3\text{He}/^4\text{He}$ Verhältnis mit $\approx 10^{-4}$ der natürlichen Sonnenmateriezusammensetzung. Aufgrund der eben beschriebenen Eigenschaften ist eine Beschleunigung der sukzessiven SEPs an Schockfronten sehr wahrscheinlich (Kahler et al. 1984). Besonders wird dies durch die Detektion von Kahler et al. (1986) hervorgehoben, da diese SEP-Messung nicht mit einem Flare in Zusammenhang stand. Betrachtet man die Verteilung der SEP-Ereignisse in Abhängigkeit des solaren Längengrades ihrer Quellen, stellt man im Gegensatz zu impulsiven SEPs keinen Vorzugsbereich fest. Die Verteilungsfunktion ist deutlich breiter und erstreckt sich über die gesamten Längengrade.¹ Auch dies spricht vornehmlich für Teilchenbeschleunigung an interplanetaren Schockfronten, da diese sich unabhängig zum Hintergrundmagnetfeld ausbreiten können und somit Teilchen effizient von der Bewegung entlang der Parkerspirale ablenken. Als schockerzeugende Ereignisse kommen im Wesentlichen nur drei verschiedene Phänomene in betracht, die zu einer sukzessiven SEP-Messung führen können. Eine Möglichkeit sind die, unter Kapitel 2.4.2 erläuterten, durch CME erzeugten Schockregionen und im Speziellen ICMEs, die sich zur Erde hin bewegen. Des Weiteren kommt der *planetare Bow-Schock* in Frage, also der Bereich in dem der Sonnenwind auf die Magnetosphäre der Erde trifft und diese verformt. Als letzte Möglichkeit können sukzessive SEPs durch CIRs beschleunigt werden, die ebenfalls Schockfronten ausbilden können, wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt. Da jedoch

¹Anmerkung zur Messmethode: Das Zuordnen der sukzessiven SEPs zu einem bestimmten Längengrad erweist sich als kompliziert, da ein CME nicht in jedem Fall seiner Entstehungsregion zugewiesen werden kann, speziell solche, die weder aus aktiven Sonnenregionen zu kommen scheinen, noch von einem Flare begleitet werden. In der Tat können SEPs detektiert werden, beschleunigt von CMEs, die auf der nicht der Erde zugewandten Sonnenseite, erzeugt wurden. Dies ist zum einen durch die Krümmung des Schocks möglich, zum anderen da Teilchen an Schockfronten auch resultierend „rückwärts“ gestreut werden können (siehe Abbildung 2.9). Aus diesem Grund verwendet man zur Katalogisierung der SEP-Quellen nur CMEs, die mit Flares assoziiert werden können. Man kann dennoch signifikant die Quellen ermitteln, da gerade schnelle CMEs, die hauptsächlich Teilchen beschleunigen, mit Flares einher gehen.

schnelle CMEs besonders effizient Teilchen beschleunigen (Reames 1999), fokussiert sich vorliegende Arbeit auf CME-Schockregionen im Falle sukzessiver SEP-Ereignisse. Im nächsten Abschnitt soll geklärt werden, wie Beschleunigungs- und Transportmechanismen im Detail funktionieren.

2.5.2. Beschleunigung und Transport von Teilchen in SEP-Ereignissen

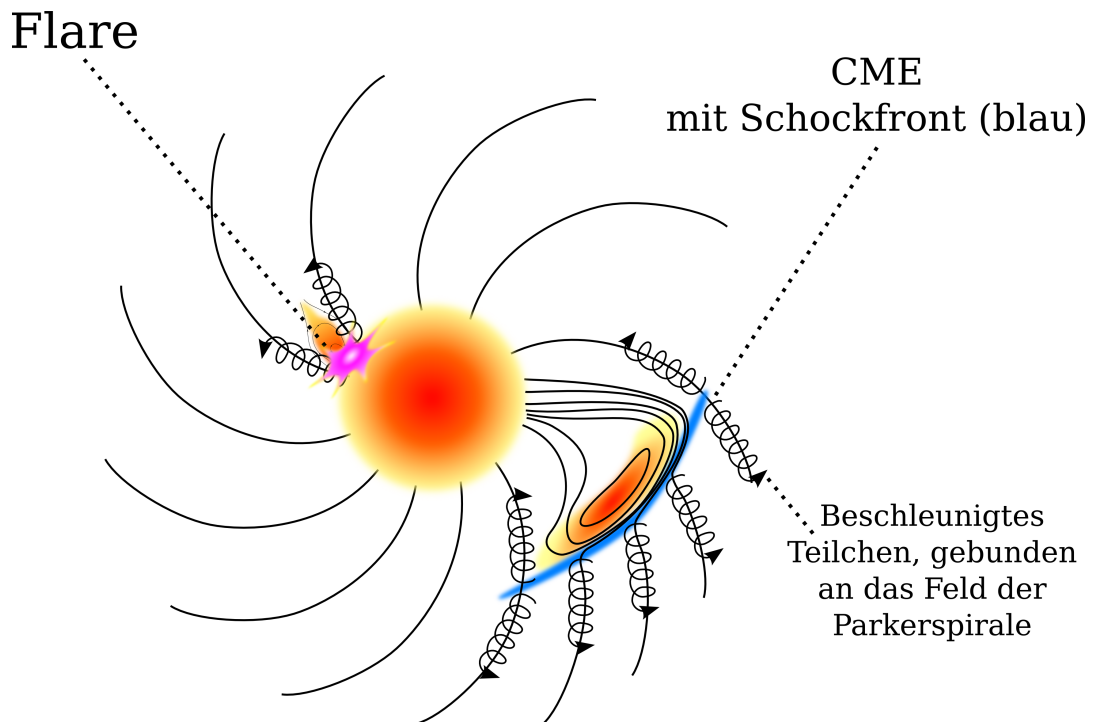


Abbildung 2.9.: Illustration der Teilchenbeschleunigung an Flares und CMEs. Durch den frozen-in-flux verändert ein CME die Magnetfeldstruktur der Parkerspirale maßgeblich. In der CME-Plasmawolke befinden sich Magnetfeldschleifen, die bis zu 5 AU noch mit der Sonne verbunden sind. Durch langsame Rekonnexion können daraus Plasmoiden entstehen. Diese komplexe Magnetfeldtopologie schlägt sich in der Messung von SEP-Ereignissen nieder. Quelle: Selbsterzeugte Grafik, nach einer Idee von Reames (1999)

Da die Beschleunigungsmechanismen von beiden SEP-Typen scheinbar grundsätzlich verschieden sind, werden im Folgenden separate Betrachtungen angestellt. Abbildung 2.9 stellt die Grundidee beider Prozesse dar. Sukzessive Ereignisse werden durch CME-getriebene Schockfronten beschleunigt, wohingegen Flares einen direkten Mechanismus

nahe der Sonne aufweisen.

Sukzessive SEP-Ereignisse

Die lange Beobachtungszeit, die recht gleichmäßige Längengradverteilung, sowie das Auftreten unabhängig von Flares sind starke Indikatoren für Schockbeschleunigung. Dabei ist die Geschwindigkeit des Schocks von großer Bedeutung. Zunächst muss sich der Schock schneller als der durchschnittliche Sonnenwind bewegen, also $v_S \gtrsim 5 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Ist $v_S \sim 7.5 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, also etwa die Geschwindigkeit des schnellen SW, erfolgt auf jeden Fall ein SEP-Ereignis (Reames et al. 1997). Die Ausmaße des CMEs sind hingegen nicht relevant, da massereiche, aber langsame CMEs keine SEPs erzeugen.

Energieänderung von Teilchen an Schockfronten basiert im Wesentlichen auf der, von *Enrico Fermi* entdeckten, *Fermi-Beschleunigung*. Dieser Prozess beschreibt den sukzessiven Energiegewinn durch Streuung von Teilchen zwischen der *upstream* und *downstream*-Region, also den Bereichen *vor* und *hinter* der Schockfront. Stellt man sich beispielsweise ein Proton vor, das sich in die upstream-Region hinein bewegt und dort gestreut wird, so verändert sich durch den Streuvorgang die Ausrichtung des Teilchens zum Hintergrundmagnetfeld, die durch den sogenannten *Pitchwinkel* $\mu = \cos \theta$ (siehe auch Gl. 3.141) bestimmt wird. Da im mitbewegten System des Schocks das Teilchen elastisch gestreut wird ändert sich dessen Impulsbetrag p nicht. Das Teilchen gewinnt dennoch Energie, da $E \sim v_S p \Delta \mu$. Wird das Proton wieder aus dem Schock hinaus in die upstream-Region gestreut und von der Front eingeholt, bzw. anschließend wieder von upstream in den Schock hineingestreut, so kann sich der Vorgang wiederholen, bis das Proton deutlich Energie gewonnen hat und den Schockbereich endgültig verlässt. Dieser Vorgang wird auch als *Fermi-I-Prozess* bezeichnet, da der mittlere Energiezuwachs nur linear von der Schockgeschwindigkeit abhängt¹.

Angewandt auf die Problematik eines CME unterscheidet man zwei Szenarien. Ist die Schockfrontnormale parallel zum magnetischen Hintergrundfeld, findet der Beschleunigungsprozess wie eben beschrieben statt und man spricht von *Diffusiver Schockbe-*

¹Entsprechend ist der *Fermi-II-Prozess* quadratisch von der Geschwindigkeit der Streuregion abhängig. Der einzige physikalische Unterschied ist hierbei, dass keine Schockfront mit einer Vorzugsrichtung vorliegt, sondern die Streuregionen beliebige Ausbreitungsgeschwindigkeiten haben können. Fermi beschrieb diesen Prozess zuerst und argumentierte, dass auch in diesem Fall ein resultierender Energiegewinn vorliegt, da es wahrscheinlicher ist, dass Teilchen gestreut werden, die sich gegen die Ausbreitungsrichtung des Plasmas bewegen, als anders herum.

schleunigung (Englisch *diffusive shock acceleration*, *DSA*). Man erwartet dies besonders in Bereichen des Schocks, die weit genug vom antreibenden CME entfernt sind, so dass die Parkerspirale relativ ungestört, also senkrecht, die Schockfront durchdringt. Dies ist vor allem in östlichen¹ Bereichen des Schocks der Fall, da das Magnetfeld aufgrund der Geometrie nur gering verzerrt ist (siehe Abbildung 2.9). Nahe der Mitte der Schockfront bis westlich davon, steht das Hintergrundmagnetfeld vornehmlich senkrecht zur Schockfrontnormalen. Dadurch richten sich die Teilchen in ihrer Gyrationbewegung dementsprechend aus. Folglich wechseln Teilchen mit jeder Gyration zwischen upstream und downstream Bereich und erhalten eine resultierende Driftbewegung durch $\mathbf{v}_S \times \mathbf{B}_0$. Gemessen an dem Energiezuwachs nach Fermi-I, gewinnen die Teilchen deutlich schneller und auch stärker an Energie, da sie immer wieder in den Schock „hineingezwungen“ werden. Man nennt diesen Vorgang auch *Schock-Drift-Beschleunigung* (Englisch *Shock-Drift-acceleration*, *SDA*). Eine Driftbewegung entsteht immer, wenn auf ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld eine zusätzliche Kraft wirkt oder sofern das Magnetfeld Inhomogenitäten aufweist, so dass die Tensordivergenz $\nabla \otimes \mathbf{B} \neq 0$. Dann führt das Teilchen nicht nur eine Gyrationbewegung um die Magnetfeldlinien aus, sondern wird zusätzlich durch

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \quad (2.4)$$

senkrecht zum Hintergrundfeld abgelenkt². Im Falle der SDA wird die Drift-erzeugende Kraft durch das elektrische Feld hervorgerufen, das durch die Schockgeschwindigkeit mittels $-\mathbf{E} \propto \mathbf{v}_S \times \mathbf{B}_0$ entsteht.

Durch die variierende Magnetfeldtopologie entlang der Schockfront und innerhalb des treibenden CMEs, die in Abbildung 2.9 verdeutlicht wird, kann man auch sehr gut zwischen den einzelnen Schock-Bereichen, in denen das SEP-Ereignis erzeugt wird, unterscheiden. Ist die Sonde oder der Satellit, der ein SEP-Ereignis detektiert im östlichen Bereich des Schocks, was den westlichen Feldlinien der Sonne entspricht, ist die Intensität energiereicher Teilchen zunächst schlagartig hoch und fällt über die Beobach-

¹An dieser Stelle sei der Leser darauf hingewiesen, dass „östlich“ die rechte Flanke des Schocks, betrachtet von upstream nach downstream Region, meint. Dies ist genau spiegelverkehrt zur „Himmelsrichtungsdefinition“ der Sonnenscheibe. Das ist zwar teilweise verwirrend, aber üblich in der Fachliteratur.

²Im Falle eines inhomogenen Magnetfelds ist die Herleitung etwas komplizierter, da aber $\mathbf{F} = -q/2\mathbf{v} \times \mathbf{r}_L \cdot \mathbf{e}_z \nabla \otimes \mathbf{B}$ ist die Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v}_D \propto \mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B}$ (Koskinen 2011)

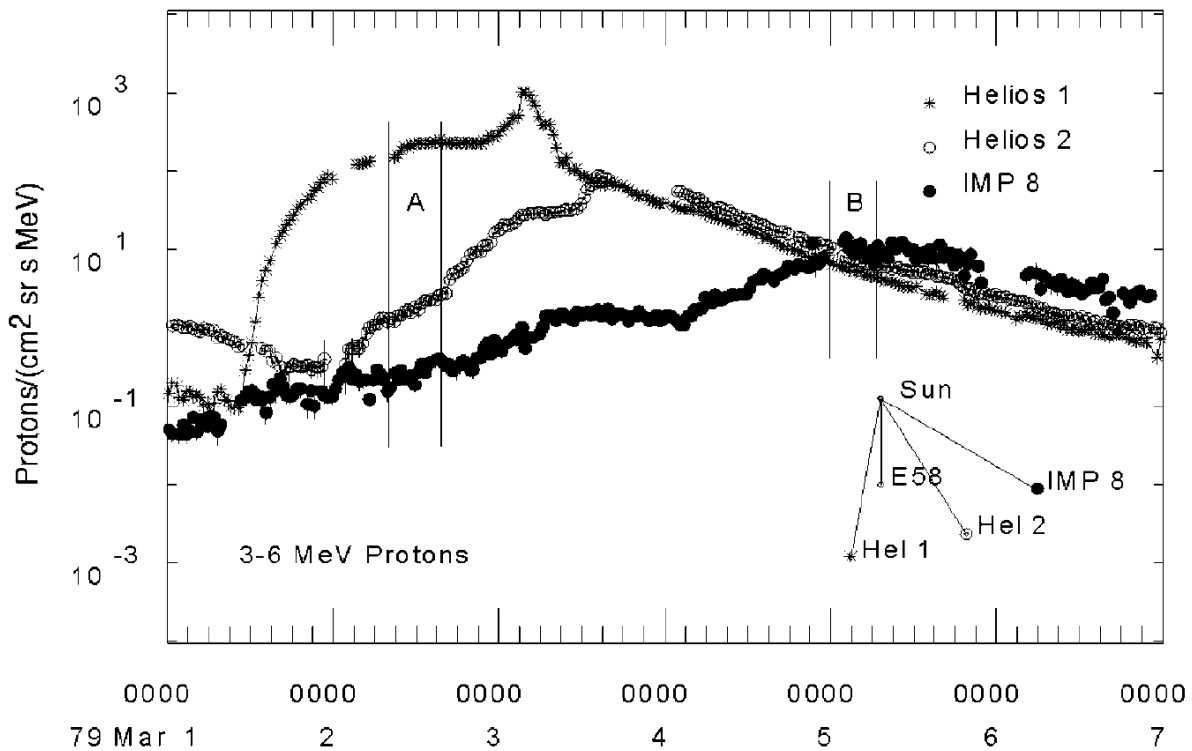


Abbildung 2.10.: *Intensität eines SEP-Ereignisses für 3-6 MeV Protonen, gemessen an drei verschiedenen Bereichen des Schocks. Der antreibende koronale Masseauswurf wurde einer Quelle im östlichen Bereich der Sonne zugeordnet, was der Abkürzung E58 entspricht. Die Messungen wurden durch Helios1 nahe dem Scheitelpunkt der Schockfront und durch Helios2 und IMP8 westlich davon aufgezeichnet. Der Schock erreichte die Weltraumsonden etwa am 3. März. Im Bereich A liegen die Messwerte deutlich verschieden, wohingegen im Bereich B ein Schnittpunkt vorliegt. Dieses Phänomen wird als räumliche Invarianz bezeichnet. Quelle: Reames (1999)*

tungszeit ab. Bemerkenswert dabei ist, dass der Moment, in dem die Schockfront das Messgerät erreicht, keine signifikante Änderung im Intensitätsprofil des SEP-Ereignisses verursacht. Ist der Messpunkt in der Mitte, also am Scheitelpunkt des Schocks, so wird eine hohe SEP-Intensität über längere Zeit - etwa 2-3 Tage - recht konstant gemessen, die wenige Stunden nach der Passage der Front zunächst rapide und dann allmählich abfällt. Befindet sich die Messanlage im westlichen Teil der Schockregion, wird eine langsam ansteigende SEP-Intensität detektiert, die wenige Stunden nach dem Passieren der Schockfront ihr Maximum erreicht und schließlich langsam abfällt. Speziell die Unterschiede einer Messung nahe des Scheitelpunktes und im westlichen Schockbereich, ist in Abbildung 2.10 zu erkennen.

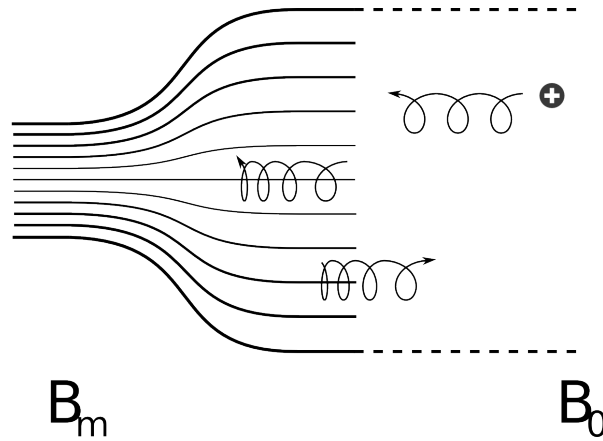


Abbildung 2.11.: Darstellung eines magnetischen Spiegels. Am Beispiel: ein Proton gyriert in einem, sich verdichtenden Magnetfeld (Beträge $B_m > B_0$) und kehrt, aufgrund der Erhaltung des magnetischen Moments, seinen parallelen Impuls um. Quelle: Ganse (2012)

Erklären kann man diese unterschiedlichen Messergebnisse durch die Struktur des Magnetfelds. Dazu ist es zunächst wichtig einen Effekt der Plasmaphysik näher zu beleuchten. Bewegt sich ein geladenes Teilchen entlang einer Feldlinie in einem inhomogenen Magnetfeld, das sich parallel zur Bewegungsrichtung verdichtet, so wirkt auf das Teilchen eine resultierende Kraft, welche die parallele Geschwindigkeitskomponente abbremst (siehe Abbildung 2.11). Die Ursache hierfür ist das *magnetische Moment*

$$\mu_{\text{Mag}} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{|\mathbf{B}|}, \quad (2.5)$$

das in der Plasmaphysik eine *adiabatische Invariante* darstellt. Durch das dichter werdende Magnetfeld steigt also $|\mathbf{B}|$, was durch die senkrechte Geschwindigkeitskomponente des Teilchen kompensiert werden muss. Aufgrund der Energieerhaltung verliert das Teilchen somit immer mehr an parallelem Impuls und gewinnt an senkrechtem. Ist die Verdichtung des Magnetfelds (B_m Abbildung 2.11) ausreichend groß gegenüber dem Hintergrundfeld B_0 , kann dieser Prozess soweit fortschreiten bis das Teilchen seine parallele Ausbreitungsgeschwindigkeit schließlich umkehrt, um den dichten Magnetfeldbereich „rückwärts“ zu verlassen. Da das Teilchen also effektiv reflektiert wird, bezeichnet man dieses Phänomen als einen *magnetischen Spiegel*. Ob ein Teilchen von einem magnetischen Spiegel reflektiert werden kann, hängt ausschließlich von seinem anfänglichen Pitchwinkel ab. Verdichtet sich das Magnetfeld in der „Rückrichtung“ erneut, ist das

Teilchen in einer sogenannten *magnetischen Flasche* gefangen. Ein populäres Beispiel ist der *Van-Allen-Gürtel* - ein Bereich des Erdmagnetfeldes, der eine magnetische Flasche bildet und hochenergetische geladene Teilchen (hauptsächlich relativistische Elektronen) gefangen hält, die zwischen den magnetischen Polen hin und her reflektiert werden. Erst kürzlich konnte man die plötzliche Entpopulation dieses Gürtels durch geomagnetische Stürme, die durch besonders starke CMEs und CIRs erzeugt werden, erklären (Turner et al. 2012).

Die unterschiedlichen SEP-Spektren werden also folgendermaßen verursacht. Im östlichen Bereich der Schockfront herrscht ein vergleichsweise schwaches Magnetfeld. Die Feldlinien folgen im Wesentlichen der Parkerspirale. Beschleunigung durch DSA erzeugt hochenergetische SEPs, welche die Schockregion schnell verlassen können. Folglich ist die Intensität dieser Teilchen, die eine Sonde detektiert am größten, wenn die Schockfront sich gerade ausgebildet hat und noch weit entfernt ist. Eine Messung im mittleren Bereich der Schockfront wird durch Schock-Drift-Beschleunigung dominiert und erhält somit über längere Zeit Teilchen hoher Energien. Selbst nachdem der Schock an der Sonde vorübergezogen ist, ändert sich die SEP-Intensität nicht sehr stark, zum einen weil die Teilchen immer wieder hinter die Schockfront gyrieren, zum anderen weil manche Teilchen in den Plasmoiden des CMEs oder den geschlossenen Feldlinien zur Sonne hin gefangen sind (siehe Kapitel 2.4.2 und Abbildung 2.9). Betrachtet man zuletzt den westlichen Abschnitt der Schockfront, kann man das allmähliche Ansteigen der Intensität dadurch erklären, dass SEPs durch die Parkerspirale abgelenkt werden. Erst deutlich nachdem der Schock das Messgerät passiert hat, erreicht das SEP-Spektrum sein Maximum, was daran liegt, dass hochenergetische Teilchen vom Scheitelpunkt der Front zurückgestreut werden und sich entlang der verzerrten Magnetfeldlinien Richtung westlicher Schockregion ausbreiten.

Einen weiteren interessanten Effekt, den man in Abbildung 2.10 beobachten kann ist die *räumliche Invarianz*. So bezeichnet man das Phänomen, dass Spektren aus unterschiedlichen Schockbereichen an einem Punkt zusammenlaufen (Intervall B in Abbildung 2.10). Dies kann man durch die magnetische Flasche erklären, die der CME mit der Sonne bildet. SEPs sind darin gefangen und werden von einem Messgerät folglich erst nach dem Passieren der Schockfront detektiert (Reames et al. 1997). Dennoch weisen manche SEP-Messungen die räumliche Invarianz vor Erreichen des Schocks auf. Das liegt nach Reames (1999) vermutlich daran, dass das Weltall durch bereits vergangene CMEs mit

magnetischen Flaschen in Form von Plasmoiden und zur Sonne verbundenen Magnetfeldschleifen, gefüllt ist (siehe Kapitel 2.4.2).

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch erwähnt, dass zahlreiche andere Prozesse, wie z.B. Beschleunigung im Rekonnexionsbereich hinter einem CME, ebenso zur Erzeugung von SEPs beitragen, vermutlich aber nicht so effizient, wie die eben vorgestellten Mechanismen.

Impulsive SEP-Ereignisse

Die Beschleunigungsprozesse von impulsiven Ereignissen sind bei weitem noch nicht so gut verstanden, wie die, sukzessiver SEPs. Wie bereits zu Anfang dieses Kapitels erwähnt, müssen diese Prozesse allerdings grundlegend verschieden von Schockbeschleunigung sein. Ein wichtiger Indikator ist hierbei das hohe ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ Verhältnis, was auf einen effizienten Beschleunigungsmechanismus für ${}^3\text{He}$ hinweist. Plausibel hierfür sind resonante Wechselwirkungen zwischen Ionengyration und Plasmawellen. So wurde zuerst von Fisk (1978) vorgeschlagen, dass ${}^3\text{He}$, was nur eine geringfügig höhere Gyrationfrequenz als ${}^4\text{He}$ und Wasserstoff hat ($\Omega_{\text{He}3} = 2/3 \Omega_p$ und $\Omega_{\text{He}4} = 1/2 \Omega_p$), nahezu dämpfungsfrei von *elektrostatischen Ionen-Zyklotronwellen*¹ geheizt werden kann. Die Ionen im Schweif einer thermischen Verteilung, können wiederum durch Fermi-Prozesse beschleunigt werden (Möbius et al. 1982). Für dieses Modell spricht auch der erhöhte Eisenanteil in impulsiven Ereignissen gegenüber sukzessiven, da Fe^{17+} durch die zweite Harmonische der elektrostatischen Welle geheizt werden kann. Diese Modell stimmt allerdings nicht in allen Vorhersagen überein, wie z.B. den benötigten hohen ${}^3\text{He}/\text{H}$ -Verhältnis und benötigt zudem zwei unabhängige Mechanismen - Heizung und Beschleunigung - so dass nicht erklärt werden kann, warum in jedem solaren Flare ${}^3\text{He}$ stark beschleunigt wird. Daher schlug Temerin u. Roth (1992), sowie Roth u. Temerin (1997) *elektromagnetische Ionen-Zyklotronwellen* (kurz *EMIC*) als beschleunigende Wellenspezies vor, die durch Elektronenstrahl-induzierte Wellen, die mit den Ionen wechselwirken, erzeugt werden. Deren Frequenz liegt unterhalb der Wasserstoffgyrofrequenz und kann somit direkt ${}^3\text{He}$ beschleunigen. Außerdem wurden neben den EMIC-Wellen auch deren nicht-resonante Moden, die *Scher-Alfvénwellen* (engl. *shear mode*) als effiziente Teilchenbeschleuniger entdeckt. So beschreiben Miller u. Roberts (1995) den turbulenten

¹Niederfrequente Plasmawelle, die durch Dichteschwankungen aufgrund von Ionengyration erzeugt wird und sich nahezu senkrecht zu \mathbf{B}_0 ausbreitet. Die Rückstellkraft ist dabei die Lorentzkraft.

Kaskadierungsprozess von Alfvénwellen¹ als möglichen Beschleunigungsprozess, da diese Wellen durch die Energiekaskade von niedrigen bis zu hohen Frequenzen reichen und somit von schweren Ionen mit geringen Gyrationfrequenzen, wie Eisen, bis Ionen wie Helium und Wasserstoff, in resonante Wechselwirkungen treten können. Dieses Modell erklärt zwar die Elementenhäufigkeit für schwere Ionen sehr gut und bietet einen direkten Beschleunigungsprozess, kann aber auch nicht die exklusive Verstärkung von ³He erklären. Daher ist die Thematik der impulsiven SEP-Ereignisse noch immer im Fokus aktueller Forschung.

¹der im Theorieteil der vorliegenden Arbeit ausgiebig diskutiert wird

3. Theorie

Die Heliosphäre besteht aus geladenen und neutralen Teilchen, die den grundlegenden Mechanismen der Mechanik und Elektrodynamik folgen. Messungen durch Satellitenexperimente zeigen dynamische Magnetfelder, die sich konvektiv ausbreiten. Großskalige elektrische Felder hingegen, können nicht gefunden werden. Dies entspricht dem Zustand eines Plasmas; ein Gas aus neutralen, sowie geladenen Partikeln, das, von außen betrachtet, neutral erscheint und sich kollektiv verhält. Die sogenannte *Quasineutralität* rührt daher, dass negative und positive Ladungsträger sich aufgrund der elektrostatischen Anziehung so anordnen, dass deren Felder nur innerhalb eines kleinen Bereiches,

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2}}, \quad (3.1)$$

der *Debyelänge*, wirken. Damit ein Plasma in diesem Zustand verbleiben kann, müssen hinreichend viele Teilchen n_e zur Reaktion auf Störungen dieser Abschirmung vorhanden sein. Die Bedingung an den *Plasmaparameter*

$$g = \frac{1}{n_e \cdot \frac{4}{3}\pi \lambda_D^3} \ll 1 \quad (3.2)$$

ist also zwingend für ein Plasma. Ist dies gewährleistet, spricht man auch von einem *idealen* Plasma.

Auf der Erde gibt es nur wenige natürlich vorkommende Plasmen. Die Heliosphäre hingegen bietet durch gute experimentelle Zugänglichkeit, ein ausgezeichnetes Labor. Dennoch ist es derzeit nicht möglich die Dynamik der Heliosphäre auf großen Skalen durch Messungen ganzheitlich zu beobachten. Das Mittel der Wahl ist hierfür die Beschreibung durch physikalische Modelle. Diese sind allerdings so komplex, dass eine numerische Behandlung der Problematik von Nöten ist. Damit bilden Simulationen einen wichtigen Grundpfeiler für das Verständnis unseres Sonnensystems und sogar darüber hinaus, in Bereichen, die derzeit für Messungen und Experimente nur schwer fassbar

sind.

Im Rahmen dieser Dissertation wurden eben solche Simulationen durchgeführt. Die nötigen Grundlagen zum Verständnis der Theorie sollen in den folgenden Abschnitten nahegelegt werden. Das verwendete Modell basiert auf einer makroskopischen Beschreibung eines Plasmas, der sogenannten *Magnetohydrodynamik*. Diesem Formalismus soll unter 3.1 das erste Drittel dieses Kapitels gewidmet werden. Durch Satellitenexperimente, die in der vorangegangenen Phänomenologie diskutiert wurden, weiß man, dass die Dynamik der Heliosphäre äußerst komplex und hochgradig turbulent ist. Diesem Thema soll sich unter Kapitel 3.2 angenommen werden. Schließlich bildet den Abschluss der Theorie dieser Arbeit Kapitel 3.3, mit der Behandlung der Systematik des Teilchentransports. Diese ist notwendig, um die Ergebnisse der in dieser Arbeit durchgeführten Testteilchensimulationen auszuwerten. Gerade solche Teilchensimulationen, innerhalb turbulenter Plasmen, sind ein ideales Werkzeug, um die Natur der SEP-Ereignisse zu verstehen, vor allem in Bezug auf die zugrundeliegenden Beschleunigungsmechanismen, die zum Teil zu enormen Energien führen.

Zur Nomenklatur sei an dieser Stelle erwähnt, dass Geschwindigkeiten, die in der vorliegenden Arbeit mit u bezeichnet werden, immer die Kollektivgeschwindigkeiten und somit die Plasmabewegung bezeichnen. Geschwindigkeiten, die hingegen mit v definiert werden, meinen Einzelteilchen – auch später im Kapitel des Teilchentransports. Des Weiteren wird zum Teil die gängige Abkürzung ∂_x für partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ verwendet.

3.1. Statistische Physik und Magnetohydrodynamik

Die Heliosphäre befindet sich, wie bereits nahegelegt, im Zustand eines Plasmas. Prinzipiell lässt sich ein Plasma exakt durch die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander beschreiben. Simulationen aller Einzelteilcheninteraktionen im Rahmen der *Molekulardynamik* lassen sich, aufgrund des extrem hohen Rechenaufwands, allerdings nicht für Maßstäbe astronomischer Längenskalen durchführen. So ist es notwendig für die meisten Problemstellungen der Astronomie auf idealisierte Modelle zurückzugreifen. Betrachtet man beispielsweise nur stoßfreie Wechselwirkungen vermittelt der Lorentzkraft eröffnet sich die Möglichkeit der Simulation durch sogenannte *Particle in Cell*, kurz *PiC*, - Codes. Diese Methodik ist zwar relativ exakt um ein solches System zu beschreiben, dennoch liegt auch hier die Limitation in der benötigten Rechenleistung, da das PiC-Verfahren

stark von der Teilchenstatistik abhängt und folglich statistischem Rauschen unterliegt. Schon Raumgebiete innerhalb der Größenordnung der Heliosphäre ganzheitlich zu modellieren, ist somit auch mit diesem Verfahren nicht möglich. Dieses Problem kann durch eine makroskopische Beschreibung des Systems umgangen werden. Statt Betrachtung einzelner Teilchen, geht man zu Ensemblemittelwerten über. Im Rahmen der statistischen Physik kann man die Entwicklung solcher makroskopischer Variablen anhand der *Vlasov-Gleichung* darstellen. Diese Gleichung ist in der Plasmaphysik von fundamentaler Bedeutung. Aus ihr lässt sich die Entwicklung einer Teilchenverteilung im sechsdimensionalen Phasenraum exakt beschreiben. Lässt man die Rückwirkung der Teilchen auf die Felder des Plasmas mittels der Maxwellgleichungen zu, indem man Dichte und Stromdichte durch die Verteilungsfunktion interpretiert, erhält man eine äußerst realistische Darstellung des Systems. Durch Lösung eines Gleichungssystems in sechs Dimensionen, ist allerdings auch mit dieser Methodik eine Modellierung von Systemen auf astronomischen Längenskalen derzeit technisch undenkbar. Dennoch bietet dieser statistische Ansatz eine Alternative. So lässt sich aus der Vlasov-Gleichung, durch Bildung derer Momente, ein Multifluidmodell des Plasmas herleiten. Nähert man dies durch die Beschreibung einer einzelnen Flüssigkeit, die das System dominiert, befindet man sich im Regime der Magnetohydrodynamik. Im Rahmen der MHD lassen sich sehr gut Systeme großer Ausdehnung darstellen. Vor allem die Eigenschaft der Skalenunabhängigkeit ist von zentraler Bedeutung. Die magnetohydrodynamische Modellierung ist daher das Kernstück der vorliegenden Arbeit.

Es ist wichtig, die Gültigkeit der MHD-Beschreibung zu definieren. So ist die Grenze zu einer kinetischen Plasmabeschreibung zum einen durch die externen Längenskalen und Zeiten festgelegt; interessiert man sich für Gebiete, die deutlich größer als die mittlere freie Weglänge der Teilchen des Plasmas sind, kann eine makroskopische Darstellung gewählt werden. Zum anderen ist es nötig, sich auf Zeitskalen unterhalb der Ionen-Zyklotronfrequenz zu beschränken, d.h. nur niederfrequente Ereignisse $< \Omega_i$ können durch MHD beschrieben werden. Außerdem beschränkt sich der Gültigkeitsbereich der Magnetohydrodynamik streng genommen auf kollisionsdominierte Plasmen. Es zeigt sich jedoch, dass man unter Umständen auch für stoßfreie Fluide den Formalismus der MHD näherungsweise anwenden kann, wie z.B. bei Alfvénwellen-dominiertem Plasmaturbulenz (Schekochihin et al. (2007)).

Im folgenden Kapitel sollen sukzessive die oben genannten Schritte, die zu dem Satz

der in dieser Arbeit verwendeten MHD-Gleichungen führen, gezeigt werden. Besonderes Augenmerk soll auf der statistischen Beschreibung und Entwicklung des Systems liegen. Wie bereits erwähnt ist die Vlasov-Gleichung in diesem Zusammenhang von großer Wichtigkeit. Da diese Gleichung auch in Kapitel 3.3 von Bedeutung ist, soll zunächst deren Grundidee dem Leser nahegebracht werden.

3.1.1. Grundlagen der Statistik eines Plasmas

Im Rahmen der statistischen Beschreibung eines Plasmas betrachtet man zunächst die Wahrscheinlichkeit $p_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ein Teilchen T , am Ort \mathbf{x} und mit Geschwindigkeit \mathbf{v} , zur Zeit t anzutreffen. Folglich wird ein Phasenraum mit sechs Dimensionen aufgespannt, der die Dichte

$$f_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial^3 p_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z} \quad (3.3)$$

besitzt. Der *Satz von Liouville* beschreibt die zeitliche Erhaltung der Phasenraumdichte

$$\frac{df_T}{dt} = \frac{\partial f_T}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3.4)$$

was wiederum zur kollisionsfreien Boltzmann-Gleichung führt. Das Plasma wird durch die Lorentzkraft dominiert, somit lässt sich der Kraftterm in obiger Gleichung durch

$$m_T \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}_T}{dt} \right) = m_T \frac{d\mathbf{v}_T}{dt} = \frac{q_T}{c} [c\mathbf{E}(\mathbf{x}_T, t) + \mathbf{v}_T \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_T, t)] \quad (3.5)$$

ersetzen. Dadurch erhält man schließlich die *nicht-relativistische Vlasov-Gleichung*:

$$\frac{df_T}{dt} = \frac{\partial f_T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_T + \frac{q_T}{m_T c} [c\mathbf{E}(\mathbf{x}_T, t) + \mathbf{v}_T \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_T, t)] \cdot \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{v}} = S_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (3.6)$$

wobei der Term auf der rechten Seite der Gleichung ein beliebiger Quellterm ist. In diesem Zusammenhang werden durch S_T Ionisations- und Rekombinationsprozesse berücksichtigt, also Stöße zwischen den Teilchen des Plasmas. Da historisch Vlasov die kollisionsfreie Boltzmann-Gleichung verwendete, sind diese streng genommen an dieser Stelle schon zu vernachlässigen. Der Vollständigkeit halber sollen die Quellterme jedoch bis zur MHD-Näherung mit angegeben werden. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass die Boltzmann-Gleichung im Regime der Coulomb Wechselwirkung bei Paar-Kollisionen zu

divergenten kinetischen Termen führt, was Vlasov zu dem kollisionsfreien Ansatz führte.

Da einzelne Teilchen nicht mehr zu unterscheiden sind, sondern nur Ensembles von Teilchen, wird im Folgenden die Entwicklung einer gesamten Teilchenspezies betrachtet. Anhand dieser Betrachtung lassen sich die makroskopischen Variablen

$$n_a(\mathbf{x}, t) = n_a \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad \text{Anzahldichte (3.7)}$$

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \sum_a n_a q_a \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad \text{Ladungsdichte (3.8)}$$

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) = n_a(\mathbf{x}, t)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad \text{Kollektivgeschwindigkeit (3.9)}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_a n_a q_a \mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) \quad \text{Stromdichte} \quad (3.10)$$

$$\Pi_{a,ik}(\mathbf{x}, t) = m_a \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i)(\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_k) \quad \text{Drucktensor} \quad (3.11)$$

für eine Spezies a einführen. Entsprechend ist n_a die Gesamtanzahl der Ensembles, q_a deren Ladung, sowie m_a deren Masse. Gleichung 3.7 bezeichnet man auch als *nulltes Moment*, die Kollektivgeschwindigkeit als *erstes Geschwindigkeitsmoment*, sowie den Drucktensor als *zweites Moment* der Verteilungsfunktion. Durch Bildung eben dieser Momente mit der Vlasov-Gleichung 3.6 kann man zu einer hydrodynamischen Beschreibung des Systems übergehen, was im nächsten Unterkapitel gezeigt werden soll.

3.1.2. Momentenbildung der Vlasov-Gleichung

Die grundlegende Idee der Momentenbildung ist die Beschreibung von Erhaltungsgrößen eines Ensembles und deren Gleichungen. So sind die Momente der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen makroskopischen Variablen Erhaltungsgleichungen für Masse (nulltes Moment von 3.7), Impuls (erstes Moment der Kollektivgeschwindigkeit 3.9) und Energie (zweites Moment des Drucktensors 3.11). Eine ausführliche Herleitung wird in Canuto (1988) durchgeführt. Hier sollen nur die wichtigsten Ergebnisse gezeigt werden.

Man bildet das Moment einer Variable X mit einer Verteilungsfunktion $f_X(x)$

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx, \quad (3.12)$$

wobei n die Ordnung des Moments darstellt. Wendet man dies für das nullte Moment der makroskopischen Variable 3.7 mit der Vlasov-Gleichung 3.6 an erhält man

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) + \frac{q_a}{m_a c} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v (c \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v S_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (3.13)$$

Da die Phasenraumdichte gegen Null gehen muss, falls die Komponenten von \mathbf{v} gegen $\pm\infty$ gehen, muss auch der dritte Term der linken Seite Null sein. Man erhält schließlich die Erhaltungsgleichung der Masse, die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = Q_a, \quad (3.14)$$

wobei $Q_a = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v S_a$ ist. Man erkennt, dass die Kontinuitätsgleichung wiederum mit dem nächst höheren Moment durch die Kollektivgeschwindigkeit \mathbf{u}_a verknüpft ist. Dies ergibt sich analog zu 3.9 mit 3.6:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_a \mathbf{u}_a}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a c} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v \mathbf{v} (c \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v \mathbf{v} S_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Auch in diesem Moment befindet sich die Verknüpfung zum nächst höheren. Verwendet man die Gleichungen 3.9, sowie 3.11 lässt sich der zweite Term auf der linken Seite durch den Drucktensor ausdrücken. Außerdem kann das Integral über die Lorentzkraft mittels partieller Integration ausgeführt werden, so dass sich

$$\begin{aligned} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_a + \nabla_i \Pi_{a,ki} - \frac{q_a n_a}{c} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}) &= \\ &= m_a \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a) S_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ergibt. Dies ist die Multifluid - Impulsgleichung, aus der man die Impulserhaltungsgleichung ableiten kann. An dieser Stelle wäre es nun erforderlich das dritte Moment zu bilden, was zur Energieerhaltungsgleichung führt. Um ein System exakt auf diese Art zu

modellieren wäre es folglich nötig unendlich viele Momente zu bilden, da jedes Moment wiederum von dem der höheren Ordnung n abhängt. In der Praxis ist das verständlicherweise nicht möglich. Daher sucht man sich eine geeignete Abschlußbedingung die eine sinnvolle Näherung bietet. Üblicherweise bricht man bei der dritten Ordnung, der Energieerhaltung, ab indem man eine physikalisch motivierte Bedingung an den Drucktensor stellt.

3.1.3. Ideale Magnetohydrodynamik

Zunächst fehlt nun für die vollständige Beschreibung des Plasmas noch der zu den makroskopischen Variablen gehörige Satz der Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi\rho(\mathbf{x}, t) + 4\pi\rho_{ext} \quad \text{Gaußsches Gesetz} \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit v. B} \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Faradaysches Gesetz} \quad (3.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ext}) \quad \text{Ampèresches Gesetz} \quad (3.20)$$

Die verwendeten Variablen entsprechen hierbei den Definitionen 3.7-3.11.

Nimmt man nun an, dass sich ein Plasma aus den Teilchenspezies der Elektronen mit dem Index $a \equiv e$, sowie der Ionen mit $a \equiv i$ zusammensetzt, erhält man mit den im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Momenten eine Zwei-Fluid Darstellung des Systems. Im Rahmen der Magnetohydrodynamik soll nun eine Beschreibung des Plasmas durch eine einzelne magnetisierte Flüssigkeit gefunden werden. Dazu ist zunächst die bereits vorgestellte Annahme der Quasineutralität wichtig, da in einem Plasma gelten muss, dass die Anzahldichten der Ladungsträger gleich sind, also $n_e = n_i = n$. Daraus

definieren sich analog zu den makroskopischen Variablen:

$$\varrho = en_i - en_e = 0 \quad \text{Ladungsdichte} \quad (3.21)$$

$$\rho = \rho_e + \rho_i = m_e n_e + m_i n_i = n(m_e + m_i) \quad \text{Massendichte} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i}{\rho} \\ &= u_i - \frac{\rho_e}{\rho} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = u_e + \frac{\rho_i}{\rho} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \end{aligned} \quad \text{Fluidgeschwindigkeit} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{J} = en_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad \text{Stromdichte} \quad (3.24)$$

Dabei errechnen sich aus Gl. 3.23 mit Gl. 3.24 die Geschwindigkeiten der Teilchenspezies:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u} + \frac{m_e}{e\rho} \mathbf{J} && \text{Ionenkollektivgeschwindigkeit} \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{u} - \frac{m_i}{e\rho} \mathbf{J} && \text{Elektronenkollektivgeschwindigkeit} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Setzt man die oben stehenden Definitionen nun in die Momente der Vlasov-Gleichung ein und summiert über die einzelnen Teilchenspezies a , reduziert man das Plasma auf eine Ein-Fluidbeschreibung. Beginnend mit dem ersten Moment

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_e + \rho_i)}{\partial t} + \nabla(\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i) &= S_e + S_i \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

erhält man die Kontinuitätsgleichung der Magnetohydrodynamik. Dabei wurden, wie schon in Kapitel 3.1.1 vorausgegriffen, Rekombinations- und Ionisationsprozesse vernachlässigt oder als im Gleichgewicht befindlich angenommen. Folglich ergeben sich die Quellterme der Elektronen und Ionen zu Null.

Das zweite Moment wird analog behandelt, so dass man

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \underbrace{\left[\sum_a n_a q_a \mathbf{E} \right]}_{\equiv 0} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \underbrace{\nabla \cdot \sum_a \Pi_{a,ik}}_{\equiv p} \quad (3.27)$$

erhält. Dabei wird p für die Summe über Gl. 3.11 als kinetischer Gesamtdruck eingeführt. Die Summe über die elektrischen Felder wird Null gesetzt, da auch hier wieder Quasineutralität gelten muss und somit keine E-Felder über makroskopische Skalen existieren.

Schließlich lässt sich noch der $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ Term mittels des Amperèschen Gesetzes (Gl. 3.20) umschreiben:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla p. \quad (3.28)$$

Diese Gleichung wird als *Impulsgleichung* der idealen MHD bezeichnet. Die in dieser Arbeit betrachteten Plasmen besitzen eine hinreichend große Leitfähigkeit, so dass im nichtrelativistischen Fall ($|\mathbf{u}| \ll c$) der Maxwell'sche Verschiebungsstrom zu vernachlässigen ist. Außerdem werden keine externen Ströme berücksichtigt. Gl. 3.28 wird im folgenden Kapitel noch weiter angepasst, aber zunächst muss noch der Zusammenhang mit den Magnetfeldern geklärt werden. Dazu wird die Elektronen-Fluidgleichung untersucht:

$$m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\frac{e}{c}(c\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_e} \nabla(n_e k_B T_e) - \nu_{ie} m_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (3.29)$$

wobei $\nu_{ie} m_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ der Elektronen-Ionen Stoßterm ist. Es sollen nur niederfrequente Wellen betrachtet werden, also werden Moden im Bereich der Elektronenzyklotronenfrequenz Ω_e nicht mehr aufgelöst. Für durch Elektronen erzeugte Wellen betrifft dies im Wesentlichen die *R*-Moden und bei $\approx \Omega_e/2$ die *Whistler*-Moden. Daher wird die zeitliche Änderung der Elektronenkollektivgeschwindigkeit gegen Null gehen. Ersetzt man die Geschwindigkeiten durch die in Gl. 3.24 definierte Stromdichte ergibt sich das *generalisierte Ohm'sche Gesetz*

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{c e n_e} \mathbf{J}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{e n_e} \nabla(n_e k_B T_e) = \eta \mathbf{J}. \quad (3.30)$$

Auch hier muss man wieder berücksichtigen, dass hochfrequente Moden bereits im vorangegangenen Schritt ausgeschlossen wurden. Gleiches gilt nun auch für Wellen, die durch Ionenbewegung erzeugt werden. Sofern die Stoßraten zwischen Ionen und Elektronen groß werden und folglich auch die Resistivität $\eta \mathbf{J}$ mit $\eta = \frac{m_e \nu_{ie}}{e^2}$, wird die Erzeugung von L-Moden unterdrückt. Diese werden im Rahmen der *Hall-MHD*¹ durch den Hallterm $\mathbf{J}_e \times \mathbf{B}$ beschrieben, der im Folgenden vernachlässigt werden soll.

Durch bilden der Rotation von Gl. 3.30 wird mittels des Faradayschen Gesetzes (Gl. 3.19) der Zusammenhang zur zeitlichen Entwicklung der B-Felder erzeugt:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{e n_e} \nabla n_e \times \nabla k_B T_e - \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.31)$$

¹Die Hall-MHD ist die nächst mögliche Erweiterung der idealen MHD, wodurch im Wesentlichen der Einfluss der Elektronenträgheit berücksichtigt wird.

Dies ist die generelle Form der Induktionsgleichung der Magnetohydrodynamik für niederfrequente Bereiche. Im Bild der idealen MHD liegt keine Resistivität vor, also ist $\eta = 0$. Außerdem verläuft der Temperaturgradient in der Regel parallel zum Dichtegradient, womit das Kreuzprodukt der Gradienten Null wird. Die *Induktionsgleichung* der idealen MHD ist folglich

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.32)$$

Im Rahmen der idealen MHD verschwinden demnach die Korrekturterme und die Stromdichte in Gl. 3.30 und man erhält das vereinfachte Ohm'sche Gesetz

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J} \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} &\stackrel{\eta=0}{=} 0. \\ \Rightarrow -\mathbf{E} &= \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.1.4. Resistivitäten und Inkompressibilität

Die ideale MHD vernachlässigt die makroskopischen Effekte die durch Teilchenkollisionen entstehen, so hat man beispielsweise die magnetische Resistivität im vorangegangenen Kapitel ausgelassen. Finden hingegen Stöße zwischen Elektronen und Ionen statt, so verbleibt der Term $\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$ in Gl. 3.31. Da das Magnetfeld quellenfrei sein muss, reduziert sich das doppelte Kreuzprodukt und man erhält die Induktionsgleichung für eine magnetische Resistivität ν_B

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_B \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

An dieser Stelle soll kurz auf die Idee der *Stoßfreiheit* eingegangen werden. Prinzipiell ist die Magnetohydrodynamik nicht stoßfrei, da innerhalb der Herleitung ein Drucktensor verwendet wird. Dieser kann nur ungleich Null sein, sofern man kinetische, also in der klassischen Definition, thermische Stöße annimmt. So muss „Stoßfreiheit“ auf zwei Arten verstanden werden - einmal die mikroskopischen Prozesse die implizit im Rahmen der MHD angenommen werden und einmal die Wirkung der MHD-Gleichungen auf bestimmte Wellen im beschriebenen Fluid. Beispielsweise wäre ein kollisionsfreies System für Wellen gültig, welche die Bedingung $k < \lambda_{\text{mfp}}^{-1}$ erfüllen, wobei λ_{mfp} die mittlere freie Weglänge ist.

Kollisionen zwischen Plasmateilchen der gleichen Spezies erzeugen wiederum einen anderen Effekt. Gemäß der Newtonschen Reibung zwischen Fluidschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, unterscheidet man diese Resistivität von der im magnetischen Fall. Dieser Mechanismus wird durch eine Analyse des Spannungstensors für Fluide klar, soll hier aber nicht im Detail gezeigt werden. Da der Effekt jedoch formal ähnlich zu dem in der Induktionsgleichung ist, muss auch die Impulsgleichung durch eine Resistivität modifiziert werden:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla p + \rho \nu_u \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3.35)$$

Dabei spricht man aufgrund der Analogie zum hydrodynamischen Fall, der auch durch die *Navier-Stokes Gleichung* beschrieben wird, von der Viskosität ν . In der Tat entspricht die Impulsgleichung der MHD sogar derer der Navier-Stokes Gleichungen, sofern man die Magnetfelder gleich Null setzt.

Gl. 3.34 und Gl. 3.35 enthalten nun einen Dissipationsterm ähnlicher Größenordnung und Auswirkung. Daher ist es üblich bei MHD-Simulationen eine allgemeine Resistivität einzuführen, die durch

$$\nu_B = \nu_u \equiv \nu_n \quad (3.36)$$

gegeben ist. In diesem Fall beschränkt man sich auf Plasmen mit *magnetischer Prandtlzahl*

$$P_m = \frac{\nu_u}{\nu_B} = 1, \quad (3.37)$$

was in verschiedenen Bereichen der Heliosphäre der Fall ist. Da derzeit nicht viele Messung dieser Größe vorliegen, wird diese Annahme dennoch kontrovers diskutiert (Montgomery 1992). Es finden sich allerdings Belege, dass für Alfvénwellen dominierte Turbulenz dieser Parameter nicht von entscheidender Bedeutung ist (Bershadskii 2002; Bigot et al. 2008). Zudem wird im Rahmen der in dieser Arbeit verwendeten spektralen Lösungsmethodik, die Diffusivität künstlich durch eine Potenz h verstärkt, so dass gilt

$$\nu_h \nabla^2 \rightarrow \nu_h \nabla^{2h}. \quad (3.38)$$

Man spricht hierbei auch von *Hyperdiffusivität*. Es wird später, im Kapitel der Methodik,

noch einmal auf diese Größe und deren Hintergrund eingegangen.

Da im Rahmen dieser Arbeit nur inkompressible Plasmen behandelt werden, soll an dieser Stelle noch die Idee der Kompressionsfreiheit gegeben werden. Anschließend wird der Satz der simulierten MHD-Gleichungen hervorgehoben.

Nach der Kontinuitätsgleichung (Gl. 3.26) ist Inkompressibilität mit der Quellenfreiheit von \mathbf{u} gleich zu setzen. So ist zum einen die zeitliche Änderung einer konstanten Dichte Null, zum anderen ist sie Ortsunabhängig und kann somit vor den Nabla-Operator gezogen werden. Folglich lässt sich Inkompressibilität durch $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ausdrücken.

Des Weiteren müssen die Magnetfelder im verwendeten *cgs*-Einheitensystem in den MHD-Gleichungen mit dem Faktor 4π angepasst werden, am Beispiel der Impulsgleichung ergibt sich

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \right) = -\frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla p + \rho \nu_u \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3.39)$$

Außerdem wurde das doppelte Kreuzprodukt unter Beachtung der nicht-Kommutativität des Nabla-Operators und der Quellenfreiheit von B ausmultipliziert. Führt man nun noch den Gesamtdruck ein, als Summe des thermischen und des magnetischen Drucks $P = p + B^2/(8\pi)$ und normiert die Magnetfelder so, dass $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$ gilt erhält man den Satz der inkompressiblen MHD-Gleichungen in der hier verwendeten Form:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla P + \nu_n \nabla^{2n} \mathbf{u} \quad \text{Impulsgleichung} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu_n \nabla^{2n} \mathbf{b} \quad \text{Induktionsgleichung} \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Inkompressibilität} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit v. B} \quad (3.43)$$

wobei die Inkompressibilität zur Freiheit der Wahl der Dichte $\rho = 1$ genutzt wurde. Die Normierung der Magnetfelder hat zur Folge, dass \mathbf{b} die gleiche Dimension wie \mathbf{v} trägt, was im nächsten Teilkapitel im Zusammenhang mit einem Hintergrundmagnetfeld zu einer speziellen Wellenbeschreibung führt. Die gewählte Darstellung der inkompressiblen MHD-Gleichungen ist üblich und wurde in dieser Form auch von Maron u. Goldreich (2001) verwendet.

Wie bereits diskutiert, muss das System der Gleichungen noch geschlossen werden, da sonst weitere höhere Momente der Vlasov-Gleichung berücksichtigt werden müssen um

den Drucktensor zu definieren. Das oben stehende Gleichungssystem wird implizit durch die Annahme der Inkompressibilität geschlossen. Durch bilden der Divergenz der Gl. 3.40 und ansetzen der Quellenfreiheit von \mathbf{u} findet man eine Bedingung die den Druck mit den Magnet- und Geschwindigkeitsfeldern verknüpft und somit die MHD-Gleichungen abschließt:

$$\nabla^2 P = \nabla \mathbf{b} \otimes \nabla \mathbf{b} - \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u}. \quad (3.44)$$

Die zweifache räumliche Integration liefert schließlich unter Verwendung der *Green-schen*-Funktion die unmittelbare Bedingung für den Druck

$$P = \int \frac{\nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{b} \otimes \nabla \mathbf{b}}{4\pi|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} d^3\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.45)$$

3.1.5. Physikalisches Regime der inkompressiblen MHD

Es soll nun der physikalische Bereich der soeben vorgestellten Gleichungen diskutiert werden. Dabei beschränken wir uns auf inkompressible magnetisierte Plasmen, da nur solche im Fokus dieser Arbeit stehen.

Zunächst einmal soll die physikalische Entsprechung der Terme der verwendeten MHD-Gleichungen geklärt werden. So entsprechen die ∇^2 -Terme in den Gl.en 3.40 und 3.41 dem Prozeß der *Diffusion* im Realraum, was in der Fourierdarstellung der *Dissipation* entspricht. Im Zusammenhang mit der Energiedissipationsgleichung verursacht die Viskosität schließlich die *Dissipation* von Energie auf kleinen Längenskalen. Sämtliche Terme die nichtlineare Wechselwirkungen beschreiben, transportieren die Feldgrößen durch *Advektion* und durch *Fourierraum-Diffusion*¹. Beide Prozesse anhand dieser Terme zu unterscheiden ist allerdings nicht möglich. Im Folgenden wird der nichtlineare Term, wie in entsprechender Fachliteratur üblich, dennoch als Konvektionsterm bezeichnet. Wie bereits erwähnt entspricht die Quellenfreiheit der Felder der Inkompressibilität oder respektive dem Verbot magnetischer Monopole gemäß den Maxwellgleichungen.

Die inkompressiblen Gleichungen der Magnetohydrodynamik besitzen zwei wichtige

¹Es ist wichtig beide Terminologien zu unterscheiden, so wird weiterhin explizit zwischen Diffusion (sprich den Realraumeffekt, der im k-Raum Dissipation bedeutet) und Fourier- bzw. k-Raum-Diffusion unterschieden

Erhaltungsgrößen. Zum einen die Energieerhaltung

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x (u^2 + b^2) \quad (3.46)$$

und zum anderen die Erhaltung der Kreuzhelizität

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}. \quad (3.47)$$

Da die in dieser Arbeit beschriebenen Plasmen ideal leitfähig sind, wie es z.B. der Fall für die Heliosphäre oder das interstellare Medium ist, können sich keine großskaligen elektrischen Felder ausbilden. Dies ist eine direkte Konsequenz der idealen MHD und Gl. 3.33. Durch die Kopplung von Magnetfeldern \mathbf{B} und Plasmabewegungen \mathbf{u} durch die MHD kann man zeigen, dass die ideale Leitfähigkeit zum sogenannten *frozen-in-flux* führt. Betrachtet die Änderung des magnetischen Flusses durch ein beliebiges Volumen des Plasmas mit der Grenzfläche S ,

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (3.48)$$

erhält man unter Anwendung des *Gaußschen Integralsatzes*

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (3.49)$$

und der Quellenfreiheit des Magnetfeldes, die Entwicklungsgleichung

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \oint_S d\mathbf{l} \cdot \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

Diese Gleichung lässt sich durch das Faradaysche Gesetz und den *Stokeschen Integralsatz*

$$\oint_S d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.51)$$

in die Form

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = - \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.52)$$

bringen, die aufgrund Gl. 3.33 gleich Null ist. Somit ist der magnetische Fluss erhalten.

Das bedeutet, dass die Magnetfeldlinien im Plasma „eingefroren“ sind und dessen Bewegungen folgen, woher sich auch der Begriff *line tying* erklärt¹. Diese Tatsache erkannte schon Hannes Alfvén und brachte dies mit der Konvektion in Zusammenhang. So erkennt man leicht an der Induktionsgleichung (Gl. 3.41), wenn der Dissipations-term vernachlässigbar ist, dass der Konvektions-Term einzig die Magnetfeldevolution beschreibt, die somit von der Bewegung der Fluidelemente bestimmt wird. Liegt im Rahmen der resistiven MHD ein $\eta \neq 0$ vor, wird die Flussserhaltung in Gl. 3.52 durch Diffusion modifiziert

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = - \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\eta}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.53)$$

wobei die Magnetfelder weiterhin im Plasma eingefroren sind, solange die Diffusionszeitskala hinreichend groß ist. Im Fall astronomischer Plasmen ist dies in der Regel gewährleistet.

Im Gegensatz zu den elektrischen Feldern bilden sich durch den *frozen-in-flux* großskalige Hintergrundmagnetfelder, entweder durch die großskalige Plasmadynamik an sich oder durch externe Quellen, wie im Falle der Heliosphäre das Magnetfeld der Sonne. Somit werden die Felder der Gl.en 3.40-3.43 durch

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \delta\mathbf{b} + B\mathbf{e}_z \\ \mathbf{u} &= \delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.54)$$

definiert, also durch einen fluktuierenden Anteil und im Falle von \mathbf{b} durch das zusätzliche Hintergrundfeld. Letzteres wird in vorliegender Arbeit in z -Richtung definiert und soll im Folgenden auch als \mathbf{B}_z oder \mathbf{B}_0 notiert werden. Als kurze Anmerkung zu dieser Notation sei erwähnt, dass die Richtung entlang dieses globalen Feldes als *parallel*, folglich eine Variable X mit dem Index $X_{\parallel} \hat{=} X_z$, bezeichnet werden. Entsprechend stehen die anderen Dimensionen *senkrecht* zu \mathbf{B}_0 und werden mit dem Index $X_{\perp} \hat{=} X_x$ bzw. X_y benannt.

Eine Konsequenz der Existenz eines globalen Magnetfeldes in einem inkompressiblen Plasma ist das Entstehen von *Alfvénwellen*. Durch das „Mitziehen“ der Feldlinien durch die Ionenbewegung kommt es zu einer Störung im Plasma, die zu einer Rück-

¹Streng genommen sind Magnetfeldlinien nur ein mathematisches Hilfsbild und somit ist eigentlich die direkte Magnetfeld-Entwicklung zu betrachten. Im Rahmen der idealen MHD kann man jedoch auf die Feldlinienbewegung zurückgreifen.

stellkraft führt und somit Plasmawellen generiert. Im Fall der Alfvénwellen breiten sich diese Störungen entlang der Vorzugsrichtung, festgelegt durch das Magnetfeld, aus. In der Literatur wird diese Spezies auch als *Scher*-Alfvénwellen bezeichnet. Ein weiterer Wellentypus sind die sogenannten *Pseudo*-Alfvénwellen. Diese sind die inkompressible Grenze der langsamen magnetosonischen Mode. Magnetosonische Wellen sind hierbei das Plasma-Pendant gewöhnlicher Schallwellen, die neben Dichteschwankungen zusätzlich durch den magnetischen Druck beeinflusst werden. Da diese Wellen auf Kompressibilität angewiesen sind, können sie nicht in inkompressiblen Plasmen angeregt werden, da sie sonst unendlich hohe Phasengeschwindigkeiten hätten. Durch diesen Zusammenhang werden Pseudo-Alfvénwellen auch häufig als *slow-modes* bezeichnet, was allerdings - streng genommen - nicht korrekt ist. Weitere Moden können nicht modelliert werden, da man im Rahmen der MHD auf den niederfrequenten Bereich unterhalb der Ionen-Zyklotronfrequenz beschränkt ist. Für hochfrequente Wellen, wie O- und X-Moden sind kinetische Beschreibungen der Einzelteilchen erforderlich.

Die ideale, inkompressible MHD beherbergt somit lediglich zwei Wellenarten; Scher- und Pseudo-Alfvénwellen. Beide Moden breiten sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_A \equiv \frac{B_z}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (3.55)$$

auch als *Alfvéngeschwindigkeit* bezeichnet, aus und folgen der Dispersionsrelation

$$\omega^2 = v_A^2 k_{\parallel}^2. \quad (3.56)$$

Der Unterschied der beiden Spezies liegt in deren Polarisation. So besitzen die Scher-Wellen die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_S(\mathbf{k}, t) &= \hat{\mathbf{A}}_S e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \pm \omega t)} \\ \hat{\mathbf{b}}_S(\mathbf{k}, t) &= \pm \hat{\mathbf{A}}_S e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \pm \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit dem Polarisationsvektor

$$\hat{\mathbf{A}}_S \equiv \frac{\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_z)^2}}. \quad (3.58)$$

Die Pseudo–Alfvénwellen hingegen:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{\text{P}}(\mathbf{k}, t) &= \hat{\mathbf{A}}_{\text{P}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \pm \omega t)} \\ \hat{\mathbf{b}}_{\text{P}}(\mathbf{k}, t) &= \pm \hat{\mathbf{A}}_{\text{P}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} \pm \omega t)},\end{aligned}\quad (3.59)$$

mit Polarisation

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{P}} \equiv \frac{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_k}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_z)^2}}. \quad (3.60)$$

Da das System aus diesen beiden Wellenarten besteht, bietet sich eine alternative Darstellung der MHD-Gleichungen an. Die *Elsässer*-Notation beschreibt die MHD-Gleichungen direkt im Wellenbild. Dazu werden folgende Felder definiert

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^- &= \mathbf{u} + \mathbf{b} - v_A \mathbf{e}_{\parallel} \\ \mathbf{w}^+ &= \mathbf{u} - \mathbf{b} + v_A \mathbf{e}_{\parallel}.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Diese sogenannten Elsässervariablen sind direkte Darstellungen von Wellenpaketen, die sich mit Alfvéngeschwindigkeit entweder parallel oder antiparallel zum Hintergrundmagnetfeld ausbreiten. Wendet man nun Gl. 3.61 auf die Gl.en 3.40-3.43 an ergibt sich

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}^- = \mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- + \nabla P - v_A \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^- \quad (3.62)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}^+ = \mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ + \nabla P + v_A \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^+ \quad (3.63)$$

mit der Bedingung der Quellenfreiheit, welche im Elsässerbild gleichermaßen \mathbf{v} und \mathbf{b} betrifft,

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^{\mp} = 0 \quad (3.64)$$

und analog der Schließungsbedingung an den Drucktensor

$$P = \int \frac{\nabla \mathbf{w}^+ \otimes \nabla \mathbf{w}^-}{4\pi |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} d^3 \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.65)$$

Eine ausführliche Herleitung der oben stehenden Gleichungen findet sich im Anhang A. Es wurde hierbei, aus Gründen der Übersicht, zunächst Viskositätsfreiheit angenommen.

Die Dissipationsterme \mathbf{D}_{w^\mp} sollen dennoch der Vollständigkeit halber hier erwähnt werden. So ergeben sich durch die Definitionen der allgemeinen Diffusivität (Gl. 3.36) und Hyperdiffusivität (Gl. 3.38) analog für die Elsässervariablen

$$\mathbf{D}_{w^\mp} = \nu_h \nabla^{2h} \mathbf{w}^\mp. \quad (3.66)$$

Dieser Term soll im Methodikteil in der Gesamtbeschreibung des Gleichungssystems verwendet werden.

Ein deutlicher Vorteil der Elsässer-Darstellung liegt darin, dass man direkt aus den Elsässer-Gleichungen das Verhalten der Wellen ablesen kann. So erkennt man beispielsweise, dass ein beliebiges Wellenpaket, welches sich entlang des Hintergrundfeldes ausbreitet ($\mathbf{w}^+ \neq 0, \mathbf{w}^- = 0$), ungestört in seiner Bewegung bleibt. Gleiches gilt natürlich auch für Wellenpakete, die entgegen B_0 laufen, also $\mathbf{w}^+ = 0, \mathbf{w}^- \neq 0$. Zum einen liegt das am Verschwinden der nichtlinearen Wechselwirkungen in den Gl.en 3.62 oder 3.63. Zum anderen könnte der Drucktensor die Bewegung eines Wellenpakets beeinflussen. Dieser ergibt sich für die jeweiligen Fälle zu Null, was man durch bilden der Divergenz der Elsässer-MHD Gleichungen sieht, da $\nabla^2 P = 0$.

Die Eigenschaft der ungestörten Bewegung von Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung, führt somit unmittelbar zu der Konsequenz, dass nur Wellenpakete, die sich gegenläufig ausbreiten, miteinander mittels Kollisionen wechselwirken. Da solche Zusammenstöße der Energie- und Kreuzhelizitätserhaltung (Gl.en 3.46 und 3.47) entsprechen müssen, folgt

$$\frac{d}{dt} \int d^3x |\mathbf{w}^\pm|^2 = 0, \quad (3.67)$$

wenn man Gl. 3.62 mit \mathbf{w}^- Skalar-multipliziert bzw. Gl. 3.63 mit \mathbf{w}^+ . Der Druckterm und die Nichtlinearitäten divergieren und verschwinden folglich für den Fall, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathbf{w}^\pm = 0. \quad (3.68)$$

Da gemäß der Definition der Elsässervariablen in Gl. 3.61 das Quadrat der Absolutbeträge den Energien

$$E_\pm = \int d^3x \frac{|\mathbf{w}^\pm|^2}{4} \quad (3.69)$$

entspricht, kann man die oben stehende Gleichung als Energieänderung der jeweiligen Wellenpakete auffassen. Da diese Null ist, muss eine Kollision zwischen den Wellenpaketen elastisch sein. Es wird also keine Energie während des Stoßvorgangs zwischen den Paketen dissipiert. Dies gilt natürlich nur sofern die Gleichungen viskositätsfrei sind. Für weitere Details soll hier der Kürze wegen auf Maron u. Goldreich (2001) verwiesen werden.

Die eben beschriebenen Kollisionen werden also durch die nichtlinearen Terme der MHD-Gleichungen beschrieben. Diese nichtlinearen Wechselwirkungen erzeugen wiederum Störungen im Plasma. Solche Störungen führen zu einer turbulenten Energie-Kaskadierung im System. Die Entwicklung der Turbulenz in magnetisierten Plasmen ist ein wichtiger Prozeß und bis heute noch Teil der aktiven Forschung. Daher soll das nächste Kapitel diesem Thema gewidmet werden.

3.2. Turbulenz

*„Könnte ich Gott etwas fragen, dann;
Warum Relativität? Warum Turbulenz?
Ich glaube auf das Erste würde ich eine Antwort erhalten...“*

- HEISENBERG -

Turbulenz ist dahingehend ein interessantes Phänomen, da es der letzte Zweig der klassischen Physik ist, der immer noch nicht verstanden worden ist. Auch heute noch zählt Turbulenz zur aktiven Forschung und wird weiterhin kontrovers diskutiert. Dabei bestimmt dieses Phänomen - vor allem im Rahmen der Hydrodynamik - unseren Alltag. Aufgrund hoher kinetischer Reynoldszahlen ($\approx 10^4$) entsteht Turbulenz schon bei normalen Bewegungen durch die Luft oder durch Wasser und erst recht bei hohen Geschwindigkeit, wie beispielsweise in der Aviatik. Da die meisten Substanzen jedoch entweder nicht als Plasma vorliegen oder keine ideale Leitfähigkeit und folglich hohe magnetische Reynoldszahlen aufweisen, ist Turbulenz in magnetisierten Plasmen hingegen auf der Erde nur schwer beobachtbar. Der baryonische Anteil des Universums besteht

jedoch weitestgehend aus turbulenten Plasmen, die zum großen Teil auch im Rahmen der Magnetohydrodynamik beschrieben werden können.

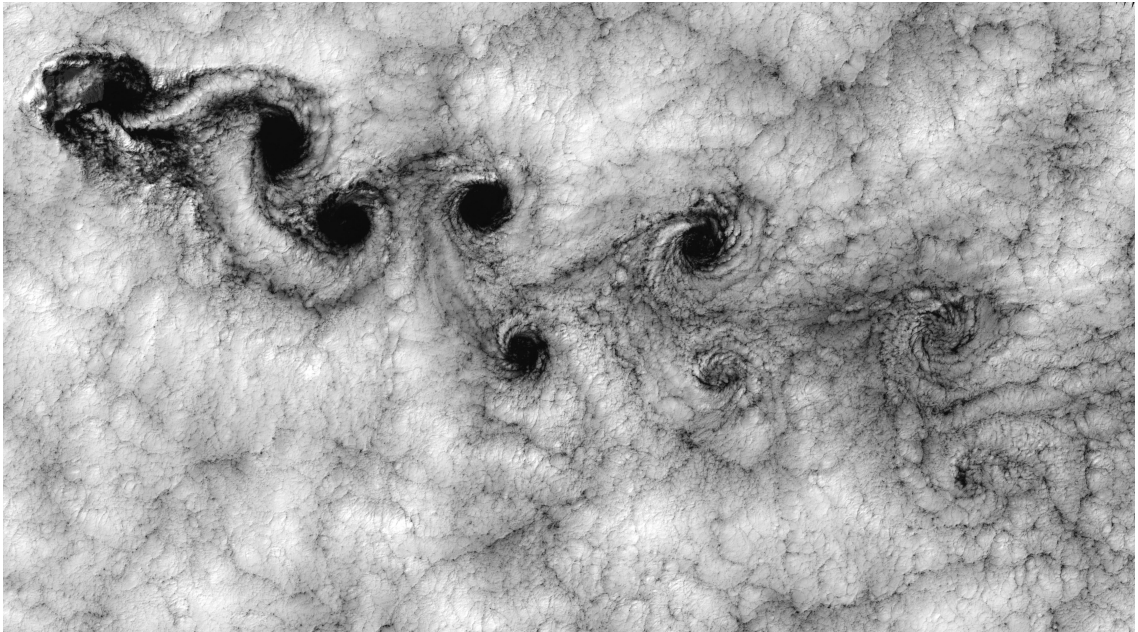


Abbildung 3.1.: *Eine Satellitenaufnahme über den Juan-Fernández-Inseln. Die Strömung der Wolkendecke um die Inselformation erzeugt eine Kármánsche Wirbelstraße. Man kann daran sehr gut das Skalenverhalten von Turbulenz beobachten. So ist die Strömung direkt am Hindernis zunächst laminar und wird mit zunehmenden Abstand turbulent wobei die Wirbel durch Dissipation zerfallen. Quelle: NASA Earth-observatory*

Turbulenz kann man im Wesentlichen in zwei Grundmechanismen gliedern. Zum einen lässt sich Turbulenz durch Verwirbelungen des Mediums erzeugen, sogenannte *Eddies* ($\hat{=}$ engl. Wirbel) oder *Vortizes*. Zum anderen können auch Überlagerungen von Wellen zu turbulentem Verhalten führen.

Vortex-turbulenz ist ein dominanter Prozeß in hydrodynamischen Systemen. So nimmt man im Alltag oft Wirbelbildung in Flüssigkeiten wahr, z.B. beim Schwimmen oder bei Bewegungen von Schiffen durch Wasser. Eine wichtige Eigenschaft ist hierbei die Kaskadierung zu kleineren Längenskalen. Man beobachtet wie große Wirbel zerfallen und dabei, unter Erhaltung des Drehimpuls, kleinere bilden. Das geschieht sukzessive bis schließlich die Strömung wieder in den nicht turbulenten Fall, das laminare Regime, übergeht. Dies kommt daher, dass die, für die Turbulenz entscheidende, Reynoldszahl mit

$$Re = \frac{u_0 l_0}{\nu} \quad (3.70)$$

(u_0 Wirbelgeschwindigkeit) unter anderem von der Längenskala des Wirbels l_0 abhängt und sich somit mit jedem Zerfall verkleinert. Schließlich dominiert die Viskosität ν und die Energie der Wirbel dissipiert. Durch dieses Skalenverhalten muss das Spektrum der Energie einem Potenzgesetz $E(k) \propto k^{-\alpha}$ folgen. Ein typisches Spektrum wird in drei Bereiche unterteilt. Auf großen Längenskalen, folglich kleinen Wellenzahlen, wird Energie in das System gebracht, z.B. durch eine externe Anregung. Dieser Abschnitt wird als Initial- oder Treibbereich bezeichnet. Im zweiten Bereich folgt das Potenzgesetz aufgrund der Kaskadierung einem negativen, konstanten Exponenten. Üblicherweise erstreckt sich dieser sogenannte Inertialbereich über mehrere Größenordnungen von k . Schließlich zerfällt die Turbulenz im Dissipationsbereich auf sehr kleinen Längenskalen. Das erste konkrete Modell der Eddieturbulenz, u.a. mit einer Beschreibung des Energiespektrums, wurde von *Andrey Kolmogorov* im Jahre 1941 (im Folgenden als *K41* bezeichnet) aufgestellt. Aufgrund seiner Vorhersagen, die erstaunlicherweise nicht nur für rein hydrodynamische Systeme zutreffen, sondern auch für MHD-Turbulenzen, ist die Theorie von Kolmogorov immernoch äußerst aktuell. Daher soll im nächsten Kapitel das K41-Modell vorgestellt und hergeleitet werden.

Der zweite grundlegende Mechanismus für die Entstehung von Turbulenz ist die Wellenturbulenz. Anders als bei der Vortexturbulenz entstehen nicht direkt Wirbel aus Fluidströmungen, sondern vielmehr aus der Überlagerung von Wellen, welche auch wirbelähnliche Strukturen erzeugen können, sich allerdings immer wieder in die Einzelmodes zerlegen lassen. Um das System in einen turbulenten Zustand zu bringen, müssen die Wellen sich weit außerhalb des thermischen Gleichgewichts befinden. Zakharov et al. (1992) beschreibt die Grundlage als „statistisches Langzeitverhalten eines Meers aus schwach nichtlinearen, dispersiven Wellen“. Da die Wellen der Dissipation unterliegen, muss ein Energietransfermechanismus vorliegen. In der Regel erfolgt dies durch resonante Wechselwirkungen der Wellenpakete. Ähnlich zur Eddieturbulenz entstehen hohe Reynoldszahlen. Außerdem kaskadiert auch hier die Energie und folgt einem Potenzgesetz mit konstantem Exponenten über mehrere Größenordnungen der Wellenzahl im Inertialbereich. Dies erklärt sich dadurch, dass im Rahmen der statistischen Wellenbeschreibung ein Gaußscher Ansatz für die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion der Amplituden, zu einem Fluss von Erhaltungsgrößen vom Initial- zum Dissipationsbereich führt (Zakharov u. Filonenko (1966)). Wellenturbulenz ist dominant für schwach turbulente MHD-Plasmen, sowie, wie später noch gezeigt wird, auch im Falle inkompressibler star-

ker Turbulenz in eben solchen Systemen. Dies liegt vor allem in der Natur der Dispersion von Plasmawellen und deren nichtlinearen Wechselwirkungen, die im vorangegangenen Kapitel diskutiert wurden. Des Weiteren lässt sich Wellenturbulenz auch im Alltag beobachten. So zum Beispiel die Oberflächenwellen in Gewässern, die durch Wind als externe Quelle angeregt werden. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf MHD-Turbulenz die durch Alfvénwellen generiert wird. In der Theorie wurden für solche Systeme bahnbrechende Arbeiten von *P. Goldreich* und *S. Sridhar* geleistet. Deren Modelle sollen schließlich in Kapitel 3.2.2 vorgestellt werden.

3.2.1. Kolmogorov Turbulenz

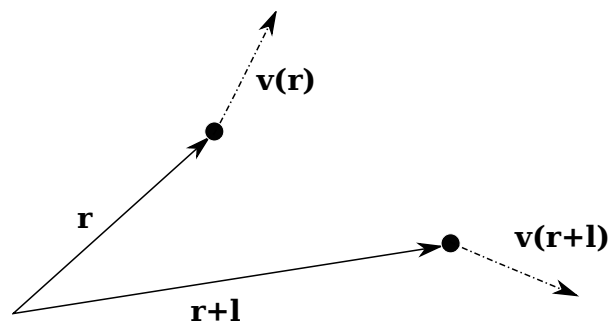


Abbildung 3.2.: Illustration zur Definition einer Fluktuation $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{l})$ im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} der Navier-Stokes Gleichung einer hydrodynamischen Turbulenz.

Das Modell von Kolmogorov zählt heute noch zu den wichtigsten Theorien der Turbulenz. Ein wichtiges Ergebnis dieser Theorie ist, dass sich der Exponent des Energiespektrums im Inertialbereich zu $-5/3$ ergibt. Spektren, die diesem Potenzgesetz folgen, werden als *Kolmogorov-Spektren* bezeichnet. Das Modell wurde zwar teilweise seit 1941 ergänzt und weiterentwickelt, hat aber im Grunde genommen seit 70 Jahren nichts an Gültigkeit verloren. Außerdem beobachtet man auch in MHD-Plasmen Kolmogorov-Spektren, also scheint dieses Modell auch über seine Grundlagen hinaus, zumindest phänomenologisch, korrekt zu sein. Kolmogorov leitete seine Ideen für rein hydrodynamische Turbulenz zunächst aus einer Dimensionsanalyse und dem Skalenverhalten von Vortexturbulenz her (Kolmogorov (1941c) und Kolmogorov (1941b)). Die Herleitung wurde bereits in Lange (2008) ausführlich gezeigt. Daher soll hier darauf nicht eingegangen werden. In seiner dritten Veröffentlichung zur Turbulenz im Jahre 1941 (Kolmogorov (1941a)) gelang es ihm sein Modell zu untermauern indem er eines der wichtigsten und

allgemein gültigen Gesetze der Turbulenztheorie herleitete, das sogenannte *4/5-Gesetz*. Es bildet mit den *Strukturfunktionen* die Grundlage für das *5/3-Spektrum*. Aufgrund seiner immensen Wichtigkeit, soll hier eine kurze Herleitung gezeigt werden. Eine detaillierte Beschreibung befindet sich in Frisch (1995).

Das 4/5-Gesetz und die Kármán-Howarth-Monin Relation

Man geht zunächst von der *Navier-Stokes*-Gleichung eines inkompressiblen, hydrodynamischen Systems aus

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f} \quad (3.71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Der Druck- und Viskositätsterm ist bereits in ähnlicher Art aus Kapitel 3.1 bekannt. Die externe Kraft \mathbf{f} ist nötig um ein „realistisches Turbulenzszenario“ zu beschreiben, indem diese die durch viskose Dissipation verlorene Energie wieder ergänzt. Man hat hierbei eine freie Wahl der Kraft, speziell da sie nur auf großen Skalen (Initialbereich), fernab der Dissipation, wirken soll. Daher wird angenommen, dass sie stationär und homogen ist. Außerdem sollen ihre statistischen Eigenschaften unter räumlicher und zeitlicher Verschiebung invariant bleiben. Gl. 3.71 ist unter diesen Bedingungen Rotationssymmetrisch, sowie symmetrisch für Zeit- und Ortstranslationen. Noch viel wichtiger für die Beschreibung der Turbulenz ist jedoch die Skaleninvarianz der Navier-Stokes Gleichung. Diese Annahmen sind allerdings nicht allgemein gültig, da die „Mechanismen der Turbulenzerzeugung für gewöhnlich nicht konsistent mit Symmetrien sind“ (Kolmogorov (1941a)). Allerdings lassen sich der Turbulenz bestimmte Eigenschaften zuordnen um diese Symmetrien zu erhalten. Daher müssen folgende Hypothesen gelten, die bereits in den ersten beiden Veröffentlichungen der K41-Theorie Anwendung fanden:

HYPOTHESE I Im Grenzbereich unendlich großer Reynoldszahlen werden alle Symmetrien der Navier-Stokes Gleichung, die durch den Erzeugungsmechanismus eines turbulenten Flusses zusammenbrechen, auf kleinen Skalen und fern von Grenzbereichen in einem statistischen Sinne wieder hergestellt.

Dabei meint *kleine Skalen* einen Bereich $l \ll L_0$, wobei L_0 die Skala des Energieinjektionsbereichs ist. Daher folgt für die Homogenität auf kleinen Skalen, speziell für die

statistischen Geschwindigkeiten

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (3.72)$$

In Abbildung 3.2 ist die Idee dieser Annahme verdeutlicht. An dieser Stelle soll auch der longitudinale Anteil der Geschwindigkeitsinkremente

$$\delta v_{\parallel} \equiv \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \quad (3.73)$$

definiert werden. Dieser wird später für das 4/5-Gesetz wichtig.

HYPOTHESE II Unter der Annahme gleicher Bedingungen aus Hypothese I, ist der turbulente Fluss selbstähnlich auf kleinen Skalen, d.h. es existiert ein ausgezeichnete Skalensexponent h .

Daher folgt

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda \mathbf{l}) \equiv \lambda^h \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}). \quad (3.74)$$

Und schließlich

HYPOTHESE III Unter der Annahme gleicher Bedingungen aus Hypothese I, hat der turbulente Fluss eine endliche, nichtverschwindende mittlere Rate der Dissipation ε pro Einheitsmasse.

wobei

$$\varepsilon \propto \frac{V_0^3}{L_0} \quad (3.75)$$

gilt, mit der großskaligen Geschwindigkeit V_0 .

Außerdem benötigt man noch eine Beschreibung des Energieflusses um die Kaskadierung zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck trennt man die Navier-Stokes Gleichung in Geschwindigkeiten auf großen Skalen (folglich kleinen Frequenzen $k < K$) und kleinen Skalen ($K < k$) und wendet den Tiefpassfilter $P_K : f(\mathbf{r}) \mapsto f_K^<(\mathbf{r})$ an. Die resultierenden Geschwindigkeiten sollen hier, der Kürze wegen, schon in integraler Form dargestellt werden:

$$\mathbf{v}_K^<(\mathbf{r}) = \int_{k \leq K} d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad \text{Tiefpass gefiltert,} \quad (3.76)$$

sowie analog die Hochpassfilter-Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_K^>(\mathbf{r})$. Angewandt auf Gl. 3.71:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_K^< + P_K(\mathbf{v}_K^< + \mathbf{v}_K^>) \nabla(\mathbf{v}_K^< + \mathbf{v}_K^>) = -\nabla p_K^< + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_K^< + \mathbf{f}_K^< \quad (3.77)$$

Um schließlich einen skalenabhängigen Energiefluss zu erhalten mittelt man obige Gleichung und multipliziert mit $\mathbf{v}_K^<$ unter Beachtung, dass sich zwei der vier Nichtlinearitäten zu Null ergeben

$$\frac{\partial \mathcal{E}_K}{\partial t} + \Pi_K = -2\nu \Omega_K + \mathcal{F}_K, \quad (3.78)$$

wobei die einzelnen Größen wie folgt interpretiert werden:

$$\mathcal{E}_K \equiv \frac{1}{2} \langle |\mathbf{v}_K^<|^2 \rangle \quad \text{Kumulative Energie} \quad (3.79)$$

$$\Omega_K \equiv \frac{1}{2} \langle |\boldsymbol{\omega}_K^<|^2 \rangle \quad \text{Kumulative Enstrophie} \quad (3.80)$$

$$\mathcal{F}_K \equiv \langle \mathbf{f}_K^< \cdot \mathbf{v}_K^< \rangle \quad \text{Kumulative Energieinjektion.} \quad (3.81)$$

Die Enstrophie ist ein Maß für den Grad der Verwirbelung mit der Vortizität $\boldsymbol{\omega} \propto \mathbf{k} \times \mathbf{v}$. Außerdem definiert sich der Energiefluss bei einer Wellenzahl K durch

$$\Pi_K \equiv \langle \mathbf{v}_K^< \cdot (\mathbf{v}_K^< \cdot \nabla \mathbf{v}_K^>) \rangle + \langle \mathbf{v}_K^< \cdot (\mathbf{v}_K^> \cdot \nabla \mathbf{v}_K^>) \rangle. \quad (3.82)$$

Nun definiert man sich den Energiefluss

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(\mathbf{l}) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle \Big|_{\text{NL}} \quad (3.83)$$

im physikalischen Raum, mit der Abkürzung NL für die pure nichtlineare Zeitskala. Mittels dieser Eigenschaft und Gl. 3.78 lassen sich die beiden Energieflüsse verknüpfen

$$\Pi_K = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_K = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k \leq K} d^3k \int d^3l e^{i\mathbf{k}\mathbf{l}} \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(\mathbf{l}) \quad (3.84)$$

(entscheidend ist hierbei die Dominanz der nichtlinearen Skala). Letztlich steckt in Gl. 3.84 die Fouriertransformation von E . An dieser Stelle verwendete Kolmogorov eine bereits hergeleitete Bedingung, die Kármán-Howarth-Monin Relation, deren Kernaussage ist, dass sich für homogene Turbulenz die statistischen Eigenschaften räumlich konstant verhalten (Ein ausführlicher Beweis findet sich in Frisch (1995)). Daher gilt für den

physikalischen Energiefluss

$$\mathcal{E}_{\Re}(\mathbf{l}) = -\frac{1}{4} \nabla_l \langle |\delta \mathbf{v}(\mathbf{l})|^2 \delta \mathbf{v}(\mathbf{l}) \rangle. \quad (3.85)$$

Verwendet man diese Relation mit Gl. 3.83 erhält man schließlich durch Gl. 3.84 und der partiellen Integration über den Fourierraum (d^3k)

$$\Pi_K = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^3l \frac{\sin(kl)}{l} \nabla_l \cdot \frac{\mathbf{l}}{l} \nabla_l \langle |\delta \mathbf{v}(\mathbf{l})|^2 \delta \mathbf{v}(\mathbf{l}) \rangle. \quad (3.86)$$

Bisher wurde lediglich Homogenität der Turbulenz angenommen. An dieser Stelle ist es nötig im Kolmogorov-Modell die Annahme der Isotropie zu machen. Dadurch zerfällt obiges Integral auf eine Dimension und ergibt sich zu

$$\Pi_K = -\frac{1}{6\pi} \int dl \frac{\sin(kl)}{l} \left(1 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \left(3 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \left(5 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \frac{\langle \delta v_{\parallel}^3 \rangle}{l}. \quad (3.87)$$

Dabei wurde die Gl. 3.73 für δv_{\parallel} angewandt. Im letzten Term dieser Gleichung stehen nun Geschwindigkeitsmomente, eine wichtige Messgröße der Turbulenz, auch bekannt als *Strukturfunktionen*. In diesem Fall handelt es sich um die Strukturfunktion dritter Ordnung, die sich folglich aus den longitudinalen Geschwindigkeitsmomenten dritter Ordnung ableitet:

$$S_3(l) = \langle (\delta v_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{l}))^3 \rangle \quad (3.88)$$

Da bisher nur Isotropie und Homogenität angenommen wurde, müssen nun noch drei wichtige Eigenschaften angewendet werden um ein turbulentes System im gesättigten Zustand zu beschreiben. „Gesättigt“ heißt in dem Sinne: unabhängig von Randbedingungen, äußeren Kräften und Viskosität innerhalb des Inertialbereichs.

- (1) Wie bereits erwähnt dürfen treibende Kräfte \mathbf{f} nur auf großen Skalen $L_0 \propto \frac{1}{K_0}$ wirken. Daraus folgt, dass die Tiefpassfilterung in Gl. 3.81 wegfällt:

$$\langle \mathbf{f}_K^< \cdot \mathbf{v}_K^< \rangle \simeq \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (3.89)$$

- (2) In der Langzeitentwicklung konvergiert die Navier-Stokes Gleichung zu einem sta-

tistisch stationären Zustand, d.h. $\partial_t \langle \dots \rangle = 0$. Damit folgt für die Energiegleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle = 0 = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle + \underbrace{\nu \langle \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \rangle}_{\varepsilon}. \quad (3.90)$$

(3) Hypothese III (siehe Anfang des Kapitels) muss gelten: Für $\nu \rightarrow 0$ (also Reynoldszahl $Re \rightarrow \infty$) muss die Dissipation sich asymptotisch positiv verhalten:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \varepsilon(\nu) = \varepsilon > 0 \quad (3.91)$$

Das hat zur Folge, dass die mittlere Energie E für $K \gg K_0$ und $\nu \rightarrow 0$ gegen Null geht:

$$|2\nu\Omega_K| = \nu \langle |\boldsymbol{\omega}_K^<|^2 \rangle \leq \nu K^2 \langle |\mathbf{v}_K^<|^2 \rangle = 2\nu K^2 E \stackrel{\nu \rightarrow 0}{\simeq} 0 \quad (3.92)$$

Also findet Dissipation nur auf kleinen Skalen, respektive bei großen Wellenzahlen statt.

Somit bleibt unter diesen Annahmen für den Inertialbereich von Gl. 3.78 nur noch

$$\Pi_K \simeq \varepsilon \quad (3.93)$$

übrig. Es wurde hierbei die kumulative Energieinjektion gemäß **(2)** durch die Dissipation ersetzt. Jetzt lässt sich auch das Integral in Gl. 3.87 mittels Substitution $x := kl$ für $k \gg K_0$ lösen:

$$\Pi_K = - \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} D\left(\frac{x}{k} = l\right) \quad (3.94)$$

$D(l)$ steht hier für $(1 + l\partial_l)(\dots)(\dots) \frac{S_3(l)}{l}$ und kann für $k \rightarrow \infty$ vor das Integral gezogen werden:

$$\Pi_K \approx -D\left(\frac{x}{k} = l\right) \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}}_{\pi/2} \quad (3.95)$$

$$\iff D(l) = -\frac{2}{\pi} \varepsilon. \quad (3.96)$$

Löst man diese gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung erhält man schließlich das

gesuchte 4/5-Gesetz

$$S_3(l) = -\frac{4}{5}\varepsilon l. \quad (3.97)$$

Bemerkenswert an diesem Gesetz ist nun, dass es im Vergleich zu anderen Modellen der Turbulenztheorie sehr allgemein ist. Neben Homogenität und Isotropie wurde im Prinzip die Gültigkeit nur auf kleine Skalen und hohe Reynoldszahlen eingeschränkt. Außerdem geht man von Systemen entwickelter Turbulenz aus, d.h. die Entwicklungszeit muss hinreichend groß sein (Annahme **(2)**). Selbst die Hypothesen I und II von Kolmogorov haben für dieses Gesetz keine Relevanz. Somit ist Skaleninvarianz keine Bedingung. Diese recht universelle Gültigkeit führt dazu, dass auch andere Turbulenzmodelle als das von Kolmogorov, diesem Gesetz entweder folgen müssen oder dessen Grundannahmen außer Kraft setzen. Außerdem lässt sich Gl. 3.97 gut experimentell überprüfen, da die Strukturfunktion dritter Ordnung eine leicht zu messende Größe ist.

Strukturfunktion der Kolmogorovturbulenz

In diesem Abschnitt soll jetzt der Zusammenhang des Kolmogorov-Modells mit dem 4/5-Gesetz gezeigt werden und die direkte Konsequenz für das Energiespektrum. Dazu müssen nun auch die Hypothesen I und II berücksichtigt werden. Im Wesentlichen bedeutet dies Skaleninvarianz und die Annahme der Selbstähnlichkeit. Das 4/5-Gesetz läßt auf den Skalenexponenten h einer Skalierung

$$l \mapsto \lambda l \quad v \mapsto \lambda^h v \quad (3.98)$$

schließen, da durch das Gesetz

$$\langle (\delta v_{\parallel}(l))^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon l \quad (3.99)$$

ein Zusammenhang zwischen Längenskala und Geschwindigkeit hergestellt wird. Somit muss der Exponent $h = \frac{1}{3}$ sein.

Das Energiespektrum leitet sich aus der Strukturfunktion zweiter Ordnung ab. Definiert man zunächst die Strukturfunktionen p -ter Ordnung mit $p > 0$

$$S_p(l) = \langle (\delta v_{\parallel}(l))^p \rangle, \quad (3.100)$$

lässt sich daraus im Zusammenhang mit dem 4/5-Gesetz folgern

$$\begin{aligned}
 S_3(l) &\propto \varepsilon l \\
 \iff S_p(l) &\propto [S_3(l)]^{\frac{p}{3}} \\
 \iff S_p(l) &= C_p \varepsilon^{\frac{p}{3}} l^{\frac{p}{3}}, \tag{3.101}
 \end{aligned}$$

da εl die Einheit der Strukturfunktion bestimmt. Der dimensionslose Koeffizient C_p , der im Falle $p = 3$ den Wert $4/5$ liefert, ist nicht universal, wie schon Landau kontrovers zu Kolmogorovs Annahme behauptete. Da die Energie von der 2. Ordnung abhängt, also

$$S_2 = C_2 \varepsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}}, \tag{3.102}$$

ergibt sich konsequent für das Spektrum

$$E(k) = \frac{d}{dk} \mathcal{E}_k \propto \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \tag{3.103}$$

Zur Herleitung dieses Spektrums sind nun alle in diesem Kapitel getroffenen Annahmen nötig. Speziell wurde die Selbstähnlichkeit der Turbulenz angenommen. Das heißt unter anderem, dass

$$l^{\frac{p}{3}} = l^{\zeta_p} \tag{3.104}$$

gilt und somit ζ_p sich linear zu p verhält. Messungen zeigen jedoch, dass dies schon bereits für $p > 3$ an Gültigkeit verliert und mit höheren Ordnungen immer mehr vom Kolmogorov-Modell abweicht. Eine Erklärung hierfür ist die sogenannte *Intermittenz*, eine kurzzeitige Unterbrechung des regulären Verhaltens durch einen Übergang zum Chaotischen. Von Frisch et al. (1978) wurde zur Klärung dieses Problems das β -Modell vorgeschlagen. Dieses Modell basiert auf der Überlegung, dass Wirbel nicht mehr volumenerhaltend bzw. raumfüllend zerfallen. Somit ist die Annahme der Selbstähnlichkeit nicht mehr gültig. Zur Lösung werden sogenannte Kodimensionen vorgeschlagen, die aus multifraktalen Symmetriebetrachtungen stammen. Diese passen den Skalenexponenten entsprechend an. Diese Idee wurde von *She* und *Leveque* noch erweitert (She u. Leveque (1994)). Da dies aber nicht im Fokus dieser Arbeit liegt, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Es soll nur noch an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass Kolmogorovs Theorie und das oft nachgewiesene $-5/3$ Spektrum zwar für viele Systeme

gültig sind, jedoch nur sofern man sich auf omnidirektionale Spektren und kleine Ordnungen von p bezieht. Die eigentlichen Charakteristika der Turbulenz sind jedoch im Detail zu finden, speziell in den Messgrößen der Strukturfunktionen und deren höheren Ordnungen. Als beispielhafte Messung der Intermittenz sei hier Abbildung 3.3 gezeigt, in der man klar den nichtlinearen Anstieg der Strukturfunktionen mit wachsender Ordnung. Wie bereits in der Phänomenologie erläutert, ist der Sonnenwind also deutlich intermittent und somit nicht raumfüllend von turbulenten Strukturen durchsetzt (Burlaga (1991)).

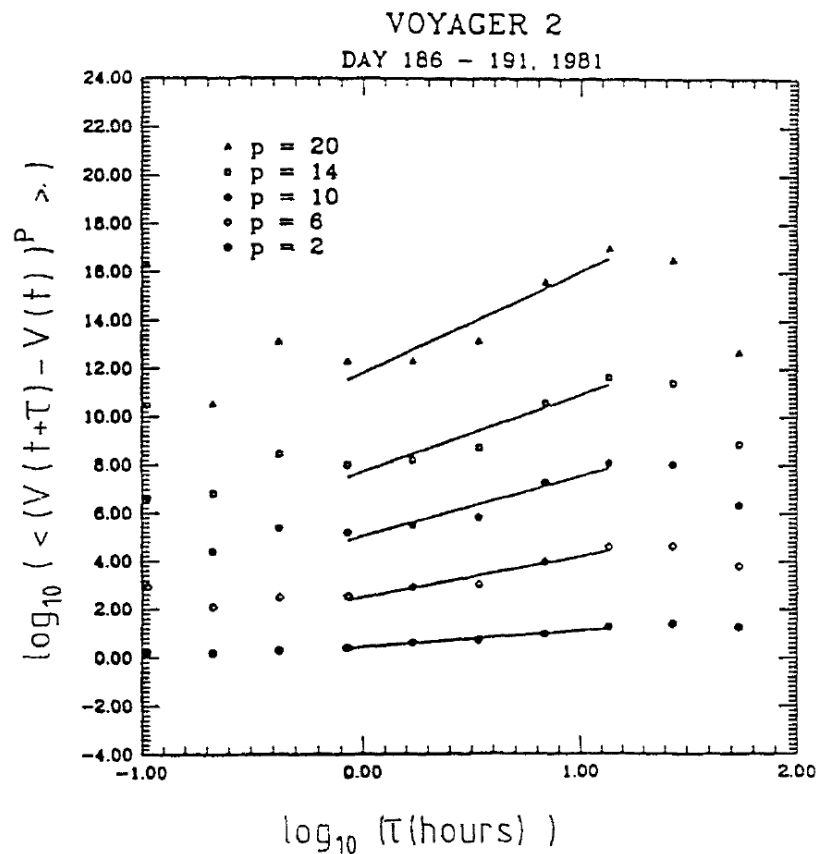


Abbildung 3.3.: Messungen der Strukturfunktionen verschiedener Ordnungen durch die Voyager 2 Sonde im Abstand von etwa 8.5 AU zu Erde. Gerade bei hohen Ordnungen dieser Geschwindigkeitskorrelationen macht sich ein starker nichtlinearer Anstieg bemerkbar. Dieser kann nicht durch die Annahmen von Kolmogorov erklärt werden, sondern bricht die Bedingung der Selbstähnlichkeit durch multifraktale Kodimensionen.

3.2.2. MHD - Turbulenz

Will man Turbulenz auf Systeme magnetisierter Plasmen ausweiten, muss gemäß den MHD-Gleichungen die Induktionsgleichung erfüllt werden. Dadurch wird das Problem zwar komplexer, da nun auch die Magnetfelddynamik beschrieben werden muss, kann aber in manchen Fällen auch zu einer einfacheren Lösung führen. Dies liegt vor allem daran, dass es, im Gegensatz zur reinen Hydrodynamik, verschieden starke Ausprägungen von Turbulenz gibt. Man unterscheidet im Wesentlichen zwei Bereiche; dem der *schwachen* und dem der *starken* Turbulenz. Beide Regimes werden durch die Stärke des Verhältnisses der fluktuierenden Magnetfelder zum Hintergrundfeld unterschieden. Ist das Verhältnis

$$\frac{(\delta b)^2}{(B_z)^2} \quad (3.105)$$

sehr viel kleiner als 1, spricht man von schwacher Turbulenz. Im Falle von Vortexturbulenz kann man auch die Alfvénzeitskala ($\sim (k_{\parallel} B_z)^{-1}$) mit der *Eddie turnover time*, also der effektiven „Lebensdauer“ eines Wirbels, vergleichen. Ist die Turbulenz schwach, ist die Alfvénzeitskala deutlich kleiner als die Wirbelzerfallszeit. Dementsprechend bezeichnet man ein System als stark turbulent, wenn das Verhältnis 3.105 nahe 1 ist. Als Anmerkung sei hier erwähnt, dass besagtes Verhältnis definitionsgemäß nicht größer als 1 sein kann. Der Vorteil gegenüber der Turbulenzbeschreibung in einem rein hydrodynamischen System liegt darin, dass man für die beiden Bereiche Näherungen einführen kann, um für den jeweiligen Fall eine gesonderte Theorie zu finden. So lässt sich im Fall schwacher Turbulenz in einem inkompressiblen Regime ein Übergang zur Störungstheorie machen, da lediglich lineare Wellen, eben die Alfvénwellen, beitragen. In Falle kompressibler, schwacher Turbulenz hingegen, lassen sich die MHD-Gleichungen vereinfachen, indem man die gesamten Wechselwirkungen im Plasma auf Zwei-Wellen Wechselwirkungen als linearen Prozeß und Drei-Wellen Wechselwirkungen als einzigen nichtlinearen Vorgang reduziert. Auch hier wird sich der Theorieteil auf den Bereich der inkompressiblen Turbulenz beschränken. Zum einen da nur inkompressible Systeme untersucht wurden, zum anderen da es heutzutage immernoch kein theoretisches Modell für den kompressiblen Fall gibt.

Bevor auf die detaillierten Modelle eingegangen wird, soll kurz auf die Natur der inkompressiblen MHD-Turbulenz erläutert werden. Wie bereits erwähnt unterscheidet

man die grundlegenden Erzeugungsmechanismen von Turbulenz durch Wirbelzerfall oder Wellenwechselwirkungen. Es wurde lange kontrovers diskutiert, welcher Mechanismus im Falle der Magnetohydrodynamik vorliegt. Zwar sind - speziell im inkompressiblen System - Alfvénwellen lineare Lösungen der MHD-Gleichungen, jedoch sind diese Wellen pseudo-dispersiv, da deren Kreisfrequenz direkt proportional zur Wellenzahl ist. Außerdem war fraglich, ob man eine Gültigkeit des 4/5-Gesetzes für MHD-Wellen bestätigen kann oder zumindest eine ähnliche Gesetzmäßigkeit für die n -Punkt-Korrelationen finden kann. Für den Fall starker Turbulenz konnte dies von Politano u. Pouquet (1998) gezeigt werden. Es kann eine Analogie zum 4/5-Gesetz gefunden werden, da sich aufgrund des bereits erwähnten frozen-in-flux die Magnetfelder sich wie die Geschwindigkeitsfelder verhalten. Dadurch lässt sich eine Beschreibung analog zu Gl. 3.99 mittels der Elsässervariablen finden:

$$\langle (\hat{w}_{\parallel}^+ - w_{\parallel}^+) \sum_j (\hat{w}_j^- - w_j^-)^2 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon l. \quad (3.106)$$

Es wird also angenommen, dass der Turbulenzerzeugungsmechanismus der Magnetohydrodynamik auf Wechselwirkung zwischen Alfvénwellenpaketen beruht.

Der erste Versuch einer Beschreibung inkompressibler MHD-Turbulenz wurde von *Kraichnan* und *Iroshnikov* gemacht (im Folgenden auch mit IK abgekürzt). In deren unabhängigen Arbeiten (Iroshnikov (1964) und Kraichnan (1965)) wurde die Erweiterung des Kolmogorov-Modells auf magnetisierte Plasmen durchgeführt, speziell im inkompressiblen Fall.

Als kurze Erläuterung der Grundidee des IK-Modells sei erwähnt, dass prinzipiell eine ähnliche Herleitung wie in Kolmogorov (1941c) durchgeführt wurde, jedoch mit dem Unterschied, dass Alfvénwellen vorliegen und somit die charakteristische Systemzeit (bei Kolmogorov $\tau_l = l/v_l$) welche durch die Alfvénzeitskala bestimmt wird. Diese ist nach Gl. 3.55 deutlich kürzer, wodurch sich folglich die IK-Zeitskala verlängert:

$$\tau_{\text{IK}} \equiv \frac{\tau_l}{\tau_A}, \quad \text{mit} \quad \tau_A \sim \frac{l}{B_z}. \quad (3.107)$$

Somit erhält man für die Dissipationsrate durch Einsetzen der oben stehenden Zeitskala

die Relation

$$\varepsilon \sim \frac{v_l^2}{\tau_{\text{IK}}} = \frac{v_l^4 l}{l^2 B_z}. \quad (3.108)$$

Daraus lassen sich, analog zu Kapitel 3.2.1, die Strukturfunktionen

$$S_p(l) \sim v_l^p \sim (\varepsilon l B_z)^{\frac{p}{4}} \quad (3.109)$$

ableiten. Aus der Strukturfunktion zweiter Ordnung und der Ableitung nach k erhält man folglich wieder das Energiespektrum

$$E(k) = \frac{d}{dk} \mathcal{E}_k \propto (\varepsilon B_z)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.110)$$

Das IK-Modell sagt also einen spektralen Energieverlauf mit einem $-3/2$ -Exponenten voraus. Außerdem steckt in den Annahmen von Kraichnan und Iroshnikov, dass die Alfvénwellenpakete mehrfach kollidieren können, bevor sich deren Größen wesentlich ändern. Somit wird implizit ein schwach turbulentes System angenommen. Das IK-Energiespektrum wurde zwar lange Zeit als gültig für magnetisierte Plasmen angenommen, konnte aber dennoch für schwache MHD-Turbulenz nicht verifiziert werden. Der Grund dafür liegt in der Annahme der Isotropie im Zusammenhang mit der Drei-Wellenwechselwirkungen. So wurde von Sridhar u. Goldreich (1994) nahegelegt, dass die IK-Theorie implizit auf der 3-Wellen-Wechselwirkung basiert (was allerdings nur im Rahmen schwacher Turbulenz gezeigt werden kann). Außerdem konnte von Shebalin et al. (1983) gezeigt werden, dass die Annahme eines Hintergrundmagnetfelds der Annahme der Isotropie widerspricht. Dies lässt sich leicht aus der Energie- und Impulserhaltung der 3-Wellenwechselwirkungen ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (3.111)$$

In inkompressiblen Plasmen mit einem Hintergrundmagnetfeld sind die „Bausteine“ dieser Wechselwirkung Alfvénwellen. Da Alfvénwellen wiederum der Dispersionsrelation in

Gl. 3.56 folgen, ergibt sich für obige Bedingungen:

$$\begin{aligned}k_{1,\parallel} + k_{2,\parallel} &= k_{3,\parallel} \\ |k_{1,\parallel}| + |k_{2,\parallel}| &= |k_{3,\parallel}|.\end{aligned}\tag{3.112}$$

Wie bereits in Kapitel 3.1.5 argumentiert, können nur Wellenpakete unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung miteinander nichtlinear wechselwirken. Das hat zur Folge, dass die Wellenzahlen von Paket 1 und 2 unterschiedlichen Vorzeichens sein müssen. Damit also die Gültigkeit der oben stehenden Resonanz-Triaden weiterhin besteht muss $k_{1,\parallel}$ oder $k_{2,\parallel}$ Null sein. Damit kann 3-Wellenwechselwirkung unter diesen Annahmen nicht stattfinden und das IK-Modell verliert seine Grundlage.

Dennoch lieferte das IK-Modell wichtige Erkenntnisse. Vor allem änderte Kraichnan das Bild der Turbulenz in magnetisierten Plasmen, indem er implizit annahm, dass der grundlegende Mechanismus der Energiekaskadierung die Kollision von gegenläufigen Alfvénwellenpaketen ist, während in neutralen Fluiden der Zerfall von Wirbeln als „Motor“ der Turbulenz angenommen wurde. So zeigte Kraichnan (1965), dass in neutralen Fluiden effektive Beiträge zu Energiekaskadierung nur durch Interaktionen zwischen Wirbeln gleicher Längenskalen stattfinden können. So verschwindet durch Galilei-Transformation der Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes von großskaligen Wirbeln auf kleinere Wirbel. Magnetfelder hingegen bleiben unter Galilei-Transformation bestehen. Also ist die Wechselwirkung von großskaligen Strukturen auf kleine ein wichtiger Bestandteil der Energiekaskade in Plasmen. Die Wirkung des Magnetfeldes eines großen Wirbels auf einen kleineren ist ähnlich der Wirkung des Hintergrundfeldes auf Alfvénwellen. Folglich schloss Kraichnan, dass die grundlegenden Prozesse in inkompressiblen MHD-Plasmen eben auf Kollisionen zwischen Alfvénwellenpaketen zurückzuführen sind. Die Theorie der Wellenturbulenz gewann somit an Bedeutung.

Goldreich und Sridhar Theorie

Die erste konsistente Theorie der inkompressiblen MHD-Turbulenz gelang Goldreich und Sridhar (im Folgenden auch GS). Auch hier wird eher das Bild der Wellenturbulenz angenommen, als das der Vortexturbulenz. Das GS-Modell gliedert sich in drei Teile. Sridhar u. Goldreich (1994) beschreibt hierbei das Regime schwacher Turbulenz (im Folgenden auch GSI) während sich Goldreich u. Sridhar (1995) auf stark turbulente

Systeme konzentriert (entsprechend GSII). Da beide Modelle unterschiedliche Regimes beschreiben, die in einem turbulenten System skalenabhängig auftreten können, wurde speziell GSI kontrovers diskutiert. Der Hauptgrund dafür war der Ausschluss von 3-Wellenwechselwirkung in diesem Modell. Dies wurde allerdings u.a. von numerischen Simulationen widerlegt. Entscheidend war die Erkenntnis, dass beide Modelle innerhalb eines Systems Gültigkeit haben, eben abhängig von den betrachteten Längenskalen. Somit muss zwischen beiden Theorien ein Übergang stattfinden. Dieses Turbulenzmodell wurde daher auch in Goldreich u. Sridhar (1997) (Abkürzung GSIII) als *intermediate turbulence*, also Turbulenz im Übergangsbereich, bezeichnet. Da alle drei Modelle von grundlegender Bedeutung sind und auch im Zusammenhang mit dieser Arbeit untersucht werden, soll jetzt ein kurzer Überblick gegeben werden. Dabei sollen nur die Ideen vorgestellt werden. Außerdem wird gezeigt, dass auch die GS-Theorie ein Kolmogorov-artiges Energiespektrum liefert.

GOLDREICH-SRIDHAR MODELL FÜR SCHWACHE TURBULENZ

Wie bereits in der Beschreibung der IK-Theorie dargelegt, ist die Annahme der Isotropie für ein magnetisiertes Plasma nicht gültig. In diesem Zusammenhang wurde auch gezeigt, dass im Rahmen der inkompressiblen MHD in einem solchen Plasma 3-Wellenwechselwirkungen nur mit der Null-Mode möglich sind. Ist die Turbulenz schwach, müssen die Resonanzbedingungen in Gl. 3.111 eingehalten werden. Somit kann für schwach turbulente Regimes die 3-Wellenwechselwirkung als Grundmechanismus ausgeschlossen werden. Daher wird im GSI Modell die nächst höhere Ordnung, also die 4-Wellenwechselwirkung, als dominanter Prozeß untersucht. Analog müssen die Resonanzbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned} \tag{3.113}$$

gelten. Auch hier müssen die Vorzeichen von $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{e}_z$ unterschiedlich sein, da nur Wellen entgegengesetzter Ausbreitung miteinander interagieren können. Wählt man nun beispielsweise $k_{1z} > 0$, $k_{2z} < 0$ folgt aus der Impulserhaltung, dass $k_{3z} > 0$, $k_{4z} < 0$

und damit die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} k_{1z} + k_{2z} &= k_{3z} + k_{4z} \\ k_{1z} - k_{2z} &= k_{3z} - k_{4z} \end{aligned} \quad (3.114)$$

und somit

$$\begin{aligned} k_{1z} &= k_{3z} \\ k_{2z} &= k_{4z}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Basierend auf 4-Wellenwechselwirkung kann also keine Energiekaskade in z -Richtung, also parallel zum Hintergrundmagnetfeld auftreten, da die z -Komponente der obigen Impulsbedingung unverändert bleibt.

Die Entwicklung der Turbulenz findet folglich senkrecht zu B_0 statt. Zunächst geht man analog zu Kolmogorov von der Bedingung für die Energiekaskade

$$\epsilon \sim \frac{v_\lambda^2}{t_c} \quad \text{mit der Kaskadierungszeitskala} \quad t_c \sim \frac{N}{k_z v_A} \quad (3.116)$$

aus. Dabei ist N die Anzahl der Kollisionen, die nötig sind um die Korrelation zum Anfangszustand eines Wellenpakets aufzuheben. ϵ steht für die injizierte Energierate und v_λ für die fluktuierenden Geschwindigkeitsfelder. Die Amplitude eines Wellenpakets ändert sich bei 4-Wellenwechselwirkung um

$$|\delta v_\lambda| \sim \left| \frac{d^2 v_\lambda}{dt^2} \frac{1}{(k_z v_A)^2} \right|. \quad (3.117)$$

Eine Einheitenanalyse ergibt

$$\frac{d^2 v_\lambda}{dt^2} \sim \frac{d}{dt} (k_\perp v_\lambda^2) \sim k_\perp v_\lambda \frac{dv_\lambda}{dt} \sim k_\perp^2 v_\lambda^3, \quad (3.118)$$

wobei diese Überlegung hauptsächlich aus den MHD-Gleichungen folgt, speziell aus $\partial_t \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, wobei für Scher-Alfvénwellen $\mathbf{v} \cdot \nabla \sim k_\perp v_\lambda$ gilt. Das GSI Modell vernachlässigt generell die Spezies Pseudo-Alfvénwellen, da diese in schwacher Turbulenz äußerst effektiv vom Barnes Mechanismus gedämpft werden (Barnes (1966)). Aus oben stehenden Bedingungen erhält man die effektive Änderung des Wellenpaketes durch eine

Kollision

$$\left| \frac{\delta v_\lambda}{v_\lambda} \right| \sim \left(\frac{k_\perp v_\lambda}{k_z v_A} \right)^2. \quad (3.119)$$

Damit kann man nun die Kollisionsrate N in der Bedingung 3.116 bestimmen

$$N \sim \left(\frac{k_z v_A}{k_\perp v_\lambda} \right)^4. \quad (3.120)$$

Es gilt folglich

$$v_\lambda^2 \sim \epsilon t_c \sim \frac{\epsilon N}{k_z v_A} \sim \frac{\epsilon (k_z v_A)^3}{k_\perp^4 v_\lambda^4}. \quad (3.121)$$

Demnach ist ϵ effektiv zu v_λ^6 proportional. Nimmt man nun eine konstante Energierate $\epsilon = \text{const}$ an und zieht die dritte Wurzel erhält man

$$v_\lambda^2 \sim \frac{\epsilon^{1/3} (k_z v_A)}{k_\perp^{4/3}}, \quad (3.122)$$

woraus sich über

$$\sum v_\lambda^2 = \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} E(k_\perp, k_z) \quad (3.123)$$

das dreidimensionale Energiespektrum

$$E(k_\perp, k_z) \propto \frac{\epsilon^{1/3} v_A}{k_\perp^{10/3}} \quad (3.124)$$

ergibt. Durch die Energiegleichung wird somit v_λ mit $k_\perp^{-2/3}$ verknüpft. Implizit folgt somit $N \propto k_\perp^{-4/3}$. Dieser Zusammenhang hat zur Folge, dass N mit steigendem k_\perp kleiner wird. Also werden weniger Kollisionen benötigt um die Korrelation zum Anfangszustand aufzuheben. Nähert sich $N \simeq 1$ ist das System stark turbulent und obige Abschätzung gilt nicht mehr.

Die Kernaussagen von GSI sind also:

- 3-Wellenwechselwirkung ist in schwacher, inkompressibler MHD-Turbulenz nicht möglich, da die Resonanzbedingungen nicht erfüllt werden können.

- 4-Wellenwechselwirkung erzeugt eine Energiekaskade in senkrechter Richtung zum Hintergrundmagnetfeld. Das eindimensionale Energiespektrum ist flacher als ein Kolmogorovspektrum.
- Turbulenz wird bei großen Wellenzahlen stärker und kann ab einer gewissen Fluktuationsstärke und Größenskala nicht mehr durch GSI und 4 Wellenwechselwirkung beschrieben werden.

Der Beweis der oben stehenden Aussagen wurde von GS mittels Störungstheorie und durch Lösung der kinetischen 4-Wellenwechselwirkungsgleichungen erbracht, soll aber der Kürze wegen hier nicht gezeigt werden.

GOLDREICH-SRIDHAR MODELL FÜR STARKE TURBULENZ

In GSI wurde festgestellt, dass Turbulenz sich skalenabhängig verstärkt. Schließlich kann die Kollisionsrate N bis zur Dekorrelation so klein werden, dass die Energiekaskade nicht mehr durch 4-Wellenwechselwirkung fortgesetzt werden kann. Dies ist in einem stark turbulenten System der Fall. Das GSII Modell erlaubt wieder 3-Wellenwechselwirkungen, da im Bereich starker Fluktuationen gegenüber dem Hintergrundfeld die Resonanzbedingung verletzt werden kann. Es können somit auch Wellenpakete mit mehr als nur den Null-Moden interagieren. Ein wichtiger Parameter zur Bestimmung des Übergangs von schwacher zu starker Turbulenz, ist die in GSII eingeführte *kritische Balance*. Sie ist definiert durch

$$\zeta \sim \frac{k_{\perp} v_{\lambda}}{k_z v_A} \quad (3.125)$$

und wird im Wesentlichen durch die Idee der oben genannten Kollisionsrate bestimmt. Der Begriff *Balance* kommt aus der Überlegung, dass dieser Parameter das Gleichgewicht zwischen der Alfvénzeitskala, also der, des linearen Regimes, mit der intrinsischen nichtlinearen Zeitskala darstellt, die den Energietransfer zu kleinen Längenskalen beschreibt. Besteht ein Gleichgewicht, muss $\zeta \sim 1$ gelten. Ist $\zeta \ll 1$, gilt das GSI Modell der 4-Wellenwechselwirkung. Die starke Turbulenz ist auch gültig, wenn die kritische Balance größer als 1 ist. Das wird aus der Herleitung des Energiespektrums ersichtlich. Prinzipiell ist diese analog zu GSI, wobei $\zeta \sim 1$ angenommen wird. Wie bereits argumentiert ist dies wiederum gleichbedeutend mit $N \sim 1$ und natürlich mit der Annahme einer starken Anregung $v_{\lambda} \sim v_A$. Das Vorgehen ist wieder analog zum GSI Modell. Unter

den eben getroffenen Bedingungen ergibt sich für die Kaskadierungszeitskala

$$t_c \sim \frac{1}{k_z v_A}. \quad (3.126)$$

Die kritische Balance wiederum ergibt den Zusammenhang zwischen v_λ und v_A :

$$v_\lambda = \frac{k_z}{k_\perp} v_A \quad (3.127)$$

(unter Beachtung $\zeta = 1$). Einsetzen in die Gleichung der Energiekaskade liefert

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim \frac{v_\lambda^2}{t_c} \\ &\sim \frac{k_z^2 v_A^2}{k_\perp^2 (k_z v_A)^{-1}} \\ &\sim \frac{k_z^3 v_A^3}{k_\perp^2}. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Daraus ergeben sich zwei wichtige Zusammenhänge für das Skalenverhalten der Geschwindigkeit und Wellenzahlen in starker Turbulenz

$$(i) \quad k_z \sim k_\perp^{2/3} L^{1/3} \quad (3.129)$$

$$(ii) \quad v_\lambda \sim v_A (k_\perp L)^{-1/3}. \quad (3.130)$$

(i) zeigt die Korrelation zwischen senkrechter und paralleler räumlicher Ausdehnung der turbulenten Strukturen. Man kann in diesem Zusammenhang auch anschaulich wieder von Wirbeln reden. Aus (i) erhält man

$$\frac{k_\perp}{k_z} \sim \sqrt[3]{k_\perp L}, \quad (3.131)$$

was sinngemäß die Ausrichtung der Wirbel am Hintergrundmagnetfeld für große k_\perp widerspiegelt.

Aus (ii) lässt sich das Energiespektrum herleiten mit

$$\begin{aligned}
 v_\lambda^2 &\sim \frac{v_A^2}{k_\perp^{2/3} L^{2/3}} \\
 &\stackrel{L^{1/3} \sim \frac{k_\perp^{2/3}}{k_z}}{=} \frac{v_A^2}{k_\perp^{4/3} L^{1/3}} f\left(\frac{k_z L^{1/3}}{k_\perp^{2/3}}\right).
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Aus Gl 3.123 ergibt sich somit das dreidimensionale Energiespektrum, indem man über den Wellenzahlraum integriert. Dadurch erhält man einen zusätzlichen Faktor k_\perp^2 :

$$E(k_\perp, k_z) \sim \frac{v_A^2}{k_\perp^{10/3} L^{1/3}} f\left(\frac{k_z L^{1/3}}{k_\perp^{2/3}}\right). \tag{3.133}$$

Somit zeigt das von GS vorgeschlagene Spektrum für starke Turbulenz in einer Dimension den Kolmogorovexponenten ($\propto k_\perp^{-5/3}$), was in dreidimensionaler Darstellung respektive einem $-11/3$ Exponenten entspricht. Die Aussagen des GSII Modells werden durch die Berechnungen der kinetischen Wellengleichungen belegt. Auch hier soll nicht im Detail darauf eingegangen werden. Eine analoge Beweisführung zu GSI durch Anwendung der Störungstheorie ist nicht mehr möglich, da die Störungs-Näherung verletzt wird. So sind die Fluktuationen nicht mehr hinreichend schwach, dass sich der störungstheoretische Ansatz der Linearisierung nicht mehr annehmen lässt.

Zusammenfassend wird also von GS für starke Turbulenz angenommen:

- Turbulenz verstärkt sich mit zunehmender Wellenzahl k_\perp , bis die Anzahl der Kollisionen zwischen Wellenpaketen, welche die Korrelation zu deren Anfangszustand aufhebt, gegen 1 geht. Der Ansatz der kritischen Balance beschreibt das Erreichen der starken Turbulenz.
- Ist $\zeta \sim 1$, so ist 4 Wellenwechselwirkung nicht länger der dominante Prozeß. Somit ist der Inertialbereich von GSI beschränkt. In diesem Bereich wird Turbulenz nicht durch eine bestimmte Ordnung der Wellenwechselwirkung dominiert. So wird Turbulenz gleichermaßen durch *nichtresonante* 3 Wellenwechselwirkungen generiert.
- Die Kaskade verläuft anisotrop in senkrechter Richtung zum Hintergrundfeld und das Energiespektrum folgt dem Kolmogorov-Exponenten.

Zum Abschluss des Kapitels über Turbulenztheorie soll der Vollständigkeit halber noch auf das dritte Modell von Goldreich und Sridhar eingegangen werden. Montgomery u. Matthaeus (1995) zeigten, dass im IK-Modell 3 Wellenwechselwirkung auftritt und kritisierten somit die Theorie von GSI. Daraufhin wurde in GSIII ein zusätzliches Bild vorgeschlagen, dass eine Brücke zwischen schwacher und starker Turbulenz schlägt. Es wurde in den beiden vorangegangenen Modellen gezeigt, dass beide Regimes der Turbulenz in einem System vorliegen können, da Turbulenz sich mit zunehmender Wellenzahl verstärkt. Also ist die Konsequenz anzunehmen, dass ein Übergangsbereich existiert, indem beide Modelle ihre Gültigkeit haben. Dieser Bereich wird als *intermediate* Turbulenz bezeichnet. Die primäre Idee dieser Theorie ist es, das IK-Modell nachzuvollziehen und dabei die 3 Wellenwechselwirkung anzuwenden. Ein wichtiger Unterschied ist bei der Herleitung des Energiespektrums zu finden, die zwar analog zu GSI ist, aber die Änderung der Wellenamplituden (Vergleich: Gl 3.117) mit

$$\frac{\delta v_\lambda}{v_\lambda} \sim \frac{dv_\lambda}{dt} \frac{1}{v_A k_z v_\lambda} \quad (3.134)$$

beschreibt. Dieser Ansatz wird durch 3 Wellenwechselwirkung verursacht. Das hat im Wesentlichen zur Folge, dass das Energiespektrum deutlich flacher als GSI und GSII ist, mit

$$E(k_\perp, k_z) \sim \frac{v_L^2}{k_\perp^3} \quad (3.135)$$

und vor allem, dass die Energiekaskade, im Gegensatz zum GSI- und IK-Modell, anisotrop ist und sich lediglich in senkrechter Richtung entwickelt. Des Weiteren wird, wie auch schon durch die kritische Balance in GSII, damit impliziert, dass der Inertialbereich der Übergangsturbulenz stark beschränkt ist. Das hat zur Folge, dass man auf astronomischen Maßstäben ein solches Spektrum wohl nicht beobachten kann. Die Fluktuationsstärke ist im Übergangsbereich der Turbulenz bereits so groß, dass auch hier die Störungstheorie keine Gültigkeit mehr hat.

Um eine genauere Klassifikation vorzunehmen, in welchem Bereich das jeweilige Modell anwendbar ist, werden zwei Eigenschaften der schwachen Turbulenz als Ausgangspunkt betrachtet:

- (1) Schwache Wechselwirkungen implizieren, dass die Änderung der Amplitude der Wellenpakete während einer Wellenperiode (siehe Gl 3.119) klein ist.
- (2) Die Änderung muss hinreichend klein sein, dass eine Linearisierung im Rahmen der Störungstheorie gültig ist.

Entsprechend gilt GSI sofern beide Bedingungen erfüllt sind. Im Bereich der intermediate Turbulenz (GSIII) hat nur noch (1) Gültigkeit, obwohl die Amplitudenänderung bereits so stark ist, dass die Störungstheorie versagt. Konsequenterweise werden durch starke Turbulenz (1) und (2) verletzt und GSII wird gültig.

Abschließend sei noch erwähnt, dass sich das vorgestellte Bild auf die Originalarbeiten von Goldreich und Sridhar bezieht. Dabei ist vor allem GSII für die starke Turbulenz akzeptiert. Das Modell der schwachen Turbulenz wird immernoch diskutiert. Allerdings scheinen 4 Wellenwechselwirkung nicht zwingend dominant zu sein. In der soeben genannten Klassifikation erfüllt schwache Turbulenz immer (1) und (2), wie von Galtier et al. (2000) gezeigt werden konnte, da die Störungstheorie auch für schwache Turbulenz Gültigkeit besitzt. Vielmehr nimmt man derzeit an, dass die beiden Modelle GSI und GSIII nicht getrennt zu behandeln sind und der Begriff „intermediate“ allgemein durch „schwach“ ersetzt wird (Lithwick u. Goldreich (2003)). Es scheint also eine Mischung beider Modelle gültig zu sein. Für die vorliegende Arbeit ist allerdings die starke Turbulenz von größerer Bedeutung, daher soll eine tiefer gehende Behandlung der schwachen Turbulenz hier nicht weiter verfolgt werden.

Zusammenfassend bieten die Arbeiten von Goldreich und Sridhar die derzeit beste Basis für Modelle der inkompressible MHD-Turbulenz. Sie beschreiben Turbulenz konsistent durch Wellenwechselwirkungsprozesse unterschiedlicher Ordnung und erklären die beobachteten Energiespektren. Vor allem lässt sich durch GSII im Regime starker Turbulenz der Kolmogorovexponent $-5/3$ herleiten, was bis dahin nicht für magnetisierte Plasmen möglich war. Im Ergebnisteil dieser Arbeit wird dem Leser die Bedeutung dieser Modelle ersichtlich.

3.3. Teilchentransport

Der letzte Grundpfeiler, der dieser Arbeit zugrundeliegenden Theorie, ist der Transport von Teilchen. Es wird durch die Simulation der Teilchendynamik eine, im Rahmen der numerischen Genauigkeit, relativ exakte Modellierung des Teilchentransports gewährleistet (für weitere Details soll auf Kapitel 4.2 verwiesen werden). Die physikalischen Vorgänge, wie die Teilchenbewegung und Streuungen, werden durch die Reaktion der Teilchen auf die magnetischen und elektrischen Felder des Hintergrundplasmas mittels der Lorentzkraft, realistisch modelliert. Das bedeutet, dass in dem Modell dieser Arbeit ein *Hybridcode* verwendet wird, der zum einen die kollektive Plasmabewegung durch die MHD-Theorie darstellt und zum anderen das kinetische Regime der Einzelteilchen beschreibt. Die zugrundeliegende Idee, eines solchen Mischmodells ist die Möglichkeit Szenarien zu untersuchen, wie sie unter Kapitel 2 vorgestellt wurden; der turbulente Sonnenwind folgt dem Regime der MHD, während die hochenergetischen Teilchen, die maßgeblich durch den SW beeinflusst werden, wie z.B. in SEP-Ereignissen, einer kinetischen Betrachtung bedürfen. Um aus den daraus resultierenden Messgrößen eine angemessene Theorie des Teilchentransports zu finden, muss man dennoch vom Einzelteilchenbild Abstand nehmen.

Schon in Kapitel 3.1 wurde die Idee einer statistischen Beschreibung eines Plasmas dargestellt. Der gleiche Formalismus lässt sich folglich auch zur Modellierung des Teilchentransports benutzen. Auch hier steht erneut die Vlasov-Gleichung im Mittelpunkt. Diese soll im ersten Unterkapitel (3.3.1) an die Problemstellung angepasst werden. Aufgrund der Limitierung durch die derzeit mögliche Rechenleistung ist auch hier leider eine vollständige Beschreibung des Transports nicht möglich. Man ist also erneut auf Näherungen angewiesen. Eine zentrale Rolle spielt hierbei die *quasilineare Theorie* (im Folgenden auch QLT), die in Kapitel 3.3.2 eingeführt wird. Durch diese Theorie lässt sich der Transport durch ermitteln der sogenannten *Fokker-Planck-Koeffizienten* bestimmen. Die Annahmen der QLT sind allerdings nur unter sehr stringenten Bedingungen möglich. Daher gewannen in den letzten Jahren andere Modelle an Bedeutung, die allerdings erheblich rechenaufwendiger sind. In Kapitel 3.3.3 sollen die Schwächen der QLT und mögliche Alternativen aufgezeigt werden.

Des Weiteren gehen die folgenden Kapitel von sogenannten Testteilchenbeschreibungen aus. Das heißt, die Rückwirkung der Teilchen auf die Felder wird vernachlässigt.

Somit sind Plasma- und Teilchendynamik voneinander entkoppelt. Man kann sich leicht vorstellen, welche Rechenkapazität eine selbstkonsistente Modellierung realistischer Plasmen zur Folge hätte, wie es beispielsweise in reinen Vlasov-Maxwell-Modellen versucht wird. Eine solche Annahme ist also für die Anwendbarkeit dieser Theorie unabdingbar, im Speziellen auch deshalb, weil im Rahmen eines Hybridmodells eine klare Trennung zwischen Fluidbeschreibung und kinetischer Beschreibung angenommen werden muss, da beide Theorien in physikalisch verschiedenen Regimes angesiedelt sind.

3.3.1. Statistische Beschreibung des Teilchentransports

Gemäß Kapitel 3.1.1 ist die Teilchenverteilung durch die Phasenraumdichte in Gl. 3.3 gegeben. Durch den Satz von Liouville ist man für $f_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ schließlich auf die Vlasov-Gleichung (3.6) gekommen. Teilchentransport, speziell für die hochenergetischen Teilchen der Heliosphäre oder der kosmischen Strahlung, findet in der Regel im relativistischen Bereich statt. Der Unterschied liegt folglich in der Bewegungsgleichung die den Gammafaktor trägt:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \quad (3.136)$$

Somit ist die relativistische Vlasov-Gleichung durch

$$\frac{df_T}{dt} = \frac{\partial f_T}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{c} (c\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \cdot \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{p}} = S_T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (3.137)$$

gegeben. Der Kürze wegen, soll an dieser Stelle auf weitere Details verzichtet werden. Eine genauere Herleitung der Problematik wurde bereits in Lange (2008) durchgeführt.

Wichtig für das Folgende ist jedoch der Übergang in ein passendes Koordinatensystem. Da geladene Teilchen der Masse m_i , sowie der Kernladungszahl Z_k unter dem Einfluss eines Magnetfeldes B um die Feldlinien mit der Frequenz

$$\Omega = \frac{Z_k e B}{\gamma m_i c} \quad (3.138)$$

und dem Larmorradius

$$r_L = \frac{v_T}{\Omega} \quad (3.139)$$

gyrieren, bietet es sich an in Kugelkoordinaten des *Führungszentrums* der Teilchen über zu gehen. Die Gyrationbewegung wird vom Ortsvektor

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z}{\pm\Omega} \quad (3.140)$$

absorbiert. Das Vorzeichen im Nenner ist entsprechend der Ladung der Teilchenspezies zu wählen. Die sphärischen Koordinaten werden durch den *Pitchwinkel*

$$\mu = \cos\theta \equiv \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0}{|\mathbf{v}| |\mathbf{B}_0|}, \quad (3.141)$$

den Winkel in der $x - y$ -Ebene Φ und dem Impulsbetrag p bestimmt. Es ergeben sich somit folgende Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned} p_x &= p \sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi \\ p_y &= p \sqrt{1 - \mu^2} \sin \Phi \\ p_z &= p \mu \\ x &= X - \frac{c}{qB_0} p \sqrt{1 - \mu^2} \sin \Phi \\ y &= Y + \frac{c}{qB_0} p \sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi \\ z &= Z. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Unter diesen Transformationen in das neue System der Koordinaten X_σ lässt sich die relativistische Vlasov-Gleichung durch

$$\frac{\partial F_T}{\partial t} + v\mu \frac{\partial F_T}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial F_T}{\partial \phi} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial X_\sigma} (\langle p^2 g_{X_\sigma} \delta f_T \rangle) = S_T(X_\sigma, t) \quad (3.143)$$

ausdrücken. Die einzelnen Herleitungsschritte sollen hier nicht gezeigt werden (nachzulesen entweder in Schlickeiser (2002) oder Lange (2008)). Wichtig ist hierfür die Annahme, dass die Fluktuationen der Felder klein sind, so dass der aus dem vorangegangenen Ka-

pitel bereits bekannte Störungsansatz gemacht werden kann

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \\
\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \mathbf{B}_0.
\end{aligned} \tag{3.144}$$

Des Weiteren steht g_{X_σ} in Gl. 3.143 für die *generalisierten Kräfte*. Sie beschreiben im Wesentlichen die Wirkung der elektromagnetischen Felder auf die Teilchen und sind letztendlich die zeitlichen Ableitungen der dazugehörigen Koordinaten. So entspricht beispielsweise $g_\mu = \dot{\mu}$. Die Funktion F_T repräsentiert den Erwartungswert $\langle f_T \rangle$ und

$$\delta f_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - F_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tag{3.145}$$

ist die Abweichung des Mittelwerts vom Momentanzustand der Teilchenverteilung.

3.3.2. Quasilineare Theorie

Die quasilineare Theorie geht zunächst von den bereits unter Gl. 3.144 getroffenen Bedingungen aus. Die eigentliche Näherung der QLT ist jedoch die Annahme, dass Teilchen sich auf *ungestörten* Trajektorien bewegen. Genauer gesagt die Führungszentren der Teilchen. Dies entspricht dem Nullsetzen der mittleren Wirkung der generalisierten Kraftterme, $\langle g_{X_\sigma} \rangle \equiv 0$, die in Gl. 3.143 definiert wurden. Die Konsequenz ist, dass nichtlineare Terme der Fluktuationen im Mittel als vernachlässigbar klein angenommen werden, das System folglich *quasilinear* ist. Grundlegend für diese Methodik war die Arbeit von Jokipii (1966). Darin wurde im Wesentlichen damit argumentiert, dass die Zweipunkt-Korrelationsfunktion die Teilchendiffusion ausreichend beschreibt.

Unter den Annahmen der QLT reduziert sich die Vlasogleichung (Herleitung bereits

in Lange (2008)) zu folgender Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_T}{\partial t} + v\mu \frac{\partial F_T}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial F_T}{\partial \phi} = S_T(X_\sigma, t) \\ + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial X_\sigma} \left(p^2 \frac{\partial F_T}{\partial \hat{X}_\sigma} \underbrace{\int_0^t ds \langle g_{X_\sigma} g_{\hat{X}_\sigma}(\hat{X}_\sigma, s) \rangle}_{D_{X_\sigma \hat{X}_\sigma}} \right). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Dabei wurde zur Herleitung dieser Gleichung u.a. die Lösungsmethode der Charakteristika benutzt. Die Notation mit dem Dach-Symbol, steht für Größen entlang der Charakteristika. Gl. 3.146 wird auch als *Fokker-Planck-Gleichung* bezeichnet. Sie wird durch die gleichnamigen *Fokker-Planck-Koeffizienten* $D_{X_\sigma \hat{X}_\sigma}$ definiert. Wichtig ist die Annahme, dass die Entwicklungszeitskala hinreichend groß ist, also $t \rightarrow \infty$. Im Speziellen soll der Koeffizient

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{1}{2\Delta t} \iint_t^{t+\Delta t} dt_1 dt_2 \left\langle \frac{d\mu(t_1)}{dt_1} \frac{d\mu(t_2)}{dt_2} \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta \mu^2}{2\Delta t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta v_{\parallel}^2}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (3.147)$$

betrachtet werden. Man beachte die eben erwähnte Abhängigkeit der Zweipunkt – Korrelationen und dementsprechend dass Fehlen derer höherer Ordnungen. $D_{\mu\mu}$ ist von besonderer Bedeutung. Dieser Koeffizient beschreibt die Streuung des Pitchwinkels eines Teilchens. Streuvorgänge sind im Bild der QLT resonante Welle-Teilchen-Interaktionen, die der Bedingung

$$k_{\parallel W} v_T \mu - \omega_W - n\Omega_T = 0 \quad (3.148)$$

genügen (Schlickeiser (1989)). Die mit W indizierten Größen entsprechen Eigenschaften der Welle (parallele Wellenzahl $k_{\parallel W}$ und Kreisfrequenz ω_W), respektive T , denen des Teilchens (parallele Ausbreitungsgeschwindigkeit v_T und Gyrationfrequenz Gl. 3.138). Die Ordnung der Resonanz wird durch $n \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Da die Wechselwirkung zwischen Welle und Teilchen für diese Arbeit von großer Bedeutung sind und deren Grundlagen für spätere Simulationen verstanden werden müssen, soll nun dieses Formalismus genau-

er beleuchtet werden. Die Bedingung 3.148 leitet sich aus der Änderung des Pitchwinkels ab, die durch eine Streuung verursacht wird. Im engeren Sinne interagiert ein geladenes Teilchen mit der Magnetfeldstörung δB , die durch eine Alfvénwelle hervorgerufen wird und verlässt seine ungestörte Gyration. Es muss demnach die Korrektur durch die Impulsänderung in paralleler Richtung berechnet werden, da $p \frac{d\mu}{dt} = \frac{dp_{\parallel}}{dt}$. Die zeitliche Ableitung des parallelen Impulses gewinnt man aus der Lorentzkraft indem man den $\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}$ -Term ausführt:

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{ec}{2E} \sum_{\pm} (\mp i) p_{\perp 0} \delta B_{\pm}, \quad (3.149)$$

wobei E die als konstant angenommene Energie des Teilchens ist. Der parallele Impuls des Teilchens bleibt in der ungestörten Gyration unverändert während $p_{\perp} = p_x \pm ip_y = p_{\perp 0} \exp[\mp i\Omega t]$ durch die Kreisbewegung moduliert wird. Dementsprechend wird die zeitliche Änderung von μ durch

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{ec}{2pE} \sum_{\pm} (\mp i) p_{\perp 0} \exp[\mp i(\phi_0 - \Omega t)] \delta B_{\pm}(\mathbf{r}) \quad (3.150)$$

bestimmt. Durch die Zerlegung des Magnetfeldes der Welle in dessen Fouriermoden

$$\delta B_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k} \delta B_{\pm}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (3.151)$$

und dem Umschreiben der Exponentialfunktion mit den parallelen Komponenten von \mathbf{k} und \mathbf{r} , durch die erzeugenden Besselfunktionen J_n

$$\exp(iz \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp(in\theta) \quad (3.152)$$

erhält man die Änderung von μ mit den getrennten Anteilen paralleler und senkrechter Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \frac{ec}{2pE} \sum_{\pm} (\mp i) p_{\perp 0} \exp[\mp i\phi_0] \\ &\quad \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k} \delta B_{\pm}(\mathbf{k}) \sum_n J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) \\ &\quad \cdot \exp[-in(\Psi - \phi_0) + it(k_{\parallel} v_{\parallel 0} \pm \Omega - n\Omega)] \end{aligned} \quad (3.153)$$

mit dem Polarkoordinatenwinkel Ψ in der k_{\perp} -Ebene ($\mathbf{k} = (k_{\perp} \cos(\Psi), k_{\perp} \sin(\Psi), k_{\parallel})^T$). Dieser Ausdruck lässt sich für Alfvénwellen dahingehend vereinfachen, da die Fluktuationen in Richtung $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_z$ liegen und somit $\delta B_{\pm}(\mathbf{k}) = \delta B(\mathbf{k})(\mp i) \exp(\pm i\Psi)$. Die zeitliche Integration liefert schließlich einen Ausdruck für μ

$$\begin{aligned} \mu = & -\frac{e c p_{\perp 0}}{2pE} \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k} \delta B(\mathbf{k}) \sum_n \frac{2n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \exp[-in(\Psi - \phi_0)] \\ & \cdot \int_0^t dt' \exp[it'(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - n\Omega)] + \mu_0. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Durch die Anwendung der Definition 3.147 lässt sich somit ein Ausdruck für $D_{\mu\mu}$ finden. Dazu muss $\langle \Delta\mu\Delta\mu \rangle$ berechnet werden. Mit Gl. 3.154 und mit $\langle \delta B(\mathbf{k})\delta B^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^6 P(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ erhält man

$$\begin{aligned} \langle \Delta\mu\Delta\mu \rangle = & \frac{e^2 c^2 p_{\perp 0}^2}{p^2 E^2} d^3\mathbf{k} P(\mathbf{k}) \sum_n \frac{n^2 \Omega^2}{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2} J_n^2 \\ & \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp[i(t' - t'')(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - n\Omega)]. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Die Zeitintegration lässt sich für $t \rightarrow \infty$ durch

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp[i(t' - t'')(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - n\Omega)] \\ & \simeq 2\pi t \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - n\Omega) \end{aligned} \quad (3.156)$$

näherungsweise ausdrücken. Folglich ist

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} = & \frac{\pi e^2 c^2}{E^2} (1 - \mu^2) \int d^3\mathbf{k} P(\mathbf{k}) \\ & \cdot \sum_n \frac{n^2 \Omega^2}{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - n\Omega). \end{aligned} \quad (3.157)$$

Physikalisch bedeutet diese Gleichung, dass ein Teilchen mit einer Wellenmode in diskreten Intervallen n resonant wechselwirkt. Für $n = 0$ findet keine Streuung mit den Scherwellen statt, was daher rührt, dass Alfvénwellen nicht mit Teilchen interagieren können, die sich entlang B_z bewegen. Diese sogenannte *Cherenkov* Resonanz kann daher ausschließlich von pseudo Alfvénwellen generiert werden. Für $n = \pm 1$ dominiert die parallele Komponente der Welle und Gl. 3.148 ist anwendbar. Für $|n| > 1$ werden die

Besselfunktionen und somit die senkrechten Anteile der Welle entscheidend. Für diesen Fall ist demnach $J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)$ nicht zu vernachlässigen. Des Weiteren wurde in der Herleitung dieser Gleichung angenommen, dass die Zeitentwicklung hinreichend groß ist. Man kann sich darunter vorstellen, dass eine Welle zunächst im ballistischen Regime mit beliebigen Teilchen interagiert, aber nur jene Teilchen effektiv gestreut werden, die nahe der Resonanzbedingung liegen. Ist die zeitliche Entwicklung weit fortgeschritten, also nach einigen Welle-Teilchen-Wechselwirkungen, nähert sich die Verteilung immer mehr einer δ -Funktion an. Teilchen, deren Pitchwinkel die Resonanzbedingung nicht erfüllen, werden im Mittel nicht gestreut.

Aus der Pitchwinkelstreuung lassen sich wichtige Größen, wie die mittlere freie Weglänge eines Teilchens ableiten

$$\lambda_{\parallel}(v) = \frac{3}{8}v \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{(1-\mu^2)^2}{D_{\mu\mu}} \sim \frac{2\Delta t(1-\mu^2)^2}{\Delta v_{\parallel}^2}, \quad (3.158)$$

welche man aus der Messgröße der Winkelverteilung und Monte-Carlo Simulationen gewinnt (Agueda et al. 2009). Am Beispiel des Pitchwinkelkoeffizienten $D_{\mu\mu}$ sei noch erwähnt, dass bei numerischer Behandlung die Integration in Gl. 3.147 wie gewohnt diskretisiert wird. Es kommt noch eine weitere Summe über die Anzahl der Teilchenrealisierungen hinzu, da für eine hinreichend gute Statistik über viele Trajektorien gemittelt werden muss. Somit ist

$$D_{\mu\mu}(X_\sigma, t) = \sum_T \frac{1}{N_T} \sum_{s=0}^{t_{end}} \Delta s \dot{\mu}(s) \dot{\mu}(t_{end}), \quad (3.159)$$

wobei diese Definition als *Kuboformalismus* bezeichnet wird (Kubo 1957).

Wie man schon aus den oben stehenden Erkenntnissen ableiten kann, beschreibt die Fokker-Planck-Gleichung (im Folgenden auch FP-Gleichung) offensichtlich die *Diffusion* von Teilchen. So findet man eine zweifache räumliche Ableitung in Gl. 3.146 im Term der FP-Koeffizienten. Bei genauerem betrachten erkennt man ebenso Driffterme. In der Tat ist die FP-Gleichung eine Diffusions-Drift-Gleichung der Struktur (hier im eindimensionalen Beispiel einer Wahrscheinlichkeit $p(x, t)$)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_2(x, t)p(x, t)] - \frac{\partial}{\partial x} [D_1(x, t)p(x, t)], \quad (3.160)$$

mit dem Driftkoeffizienten D_1 und dem Diffusionskoeffizienten D_2 . Sie lässt sich aus der *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* herleiten, die eine allgemeine zeitliche Entwicklung von Wahrscheinlichkeiten modelliert, sofern $p(x, t)$ „ohne Gedächtnis“ ist, sich also lediglich aus dem *letzten vorangegangenen* Zustand ergibt. Solche unkorrelierten Vorgänge werden im Einzelnen als *Markov-Prozesse*, im Sinne einer Entwicklung auch als *Markovketten* bezeichnet. Diese Prozesse sind eine nötige Voraussetzung, falls man den Teilchentransport durch die FP-Gleichung beschreiben will. Im Rahmen der linearen Störungstheorie der QLT, werden implizit Markovketten angenommen. Es liegt also Nahe, dass der Gültigkeitsbereich der QLT dahingehend eingeschränkt ist. Bei genauerer Untersuchung der soeben vorgestellten Theorie, offenbaren sich weitere Probleme. Diese sollen im letzten Abschnitt diskutiert werden.

3.3.3. Alternativen zur QLT

Die bereits angesprochenen Markovprozesse sind nötig um die Gültigkeit der FP-Gleichung zu gewährleisten. In der Anwendung der QLT und somit bedeutend für die Entwicklung der Teilchenverteilung wird diese Bedingung durch die Autokorrelationszeit τ_{AC} widergespiegelt. Dieses Zeitintervall gibt an, wann ein Teilchen auf eine, zum vorangegangenen Zustand unkorrelierte, Feldkonfiguration trifft (Völk (1973)). So ist die Aussage von Gl. 3.147 nur dann korrekt, wenn τ_{AC} deutlich kleiner als Δt ist. Außerdem muss Δt wiederum kleiner sein, als die Relaxationszeit der Teilchenverteilung $f_T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Nach Chandrasekhar (1943) muss τ_{AC} folglich hinreichend klein sein.

Die Grundannahme der QLT ist die Bewegung der Teilchen auf ungestörten Bahnen. Diese Annahme ist nur haltbar, wenn die fluktuierenden Feldanteile δB klein gegenüber dem Hintergrundfeld sind, da sonst zwischen den beiden Komponenten nicht mehr unterschieden werden kann. In realen Plasmen sind diese Abweichung jedoch so groß, dass *lokale* Feldkonfigurationen eine erhebliche Größe annehmen und konsequenterweise die Teilchen nicht länger ungestörten Trajektorien folgen. Dementsprechend lässt sich eine weitere Einschränkung der QLT definieren. So konnte Dupree (1966) zeigen, dass die quasilineare Theorie anwendbar ist, sofern τ_{AC} sehr viel kleiner ist, als das Zeitintervall τ_{PD} , innerhalb dessen ein Teilchen signifikant seinen ungestörten Orbit verlässt. Korrekturen der QLT werden nötig wenn $\tau_{AC} \lesssim \tau_{PD}$.

Ein weiteres Problem der QLT ist die unbefriedigende Darstellung von Teilchen, die

sich nahezu senkrecht zum Hintergrundfeld bewegen, für die also $\mu \approx 0$ ist. Für solche Teilchen wird demnach die parallele Geschwindigkeitskomponente gegen Null gehen, was im FP-Modell die Pitchwinkelstreuung verschwinden lässt. Tatsächlich wird aber τ_{AC} so groß, dass die eben herausgearbeiteten Bedingungen nicht länger valide sind. Selbst wenn man weiterhin vom Fokker-Planck-Modell ausgeht, erhält man für $v_{\parallel} \approx 0$ Singularitäten in der mittleren freien Weglänge (Gl. 3.158) und in der Resonanzbedingung 3.148. In Systemen, die kleiner als λ_{\parallel} sind oder in vergleichbarer Größe, unterliegt der Teilchen-transport nicht mehr der Diffusion, sondern folgt dem *Knudsen-Fluss* (Völk (1973)). Ist dies der Fall, fehlt auch die Rechtfertigung der Diffusionsnäherung. Demnach bricht das Bild der Fokker-Planck-Beschreibung durch eine Diffusions-Drift- -Gleichung völlig zusammen.

Hasselmann u. Wibberenz (1970) konnten einen Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der QLT und dem Turbulenzspektrum herstellen. So scheinen die FP-Koeffizienten nur aussagekräftig zu sein, sofern das parallele Spektrum nicht zu steil ist. Als Grenze wird hierbei für ein Spektrum $E(k_{\parallel}) \sim k_{\parallel}^{\alpha}$ der maximale Exponent $\alpha \approx -2$ angegeben. Für steilere Spektren, also $\alpha \lesssim -2$, sind Korrekturen nötig.

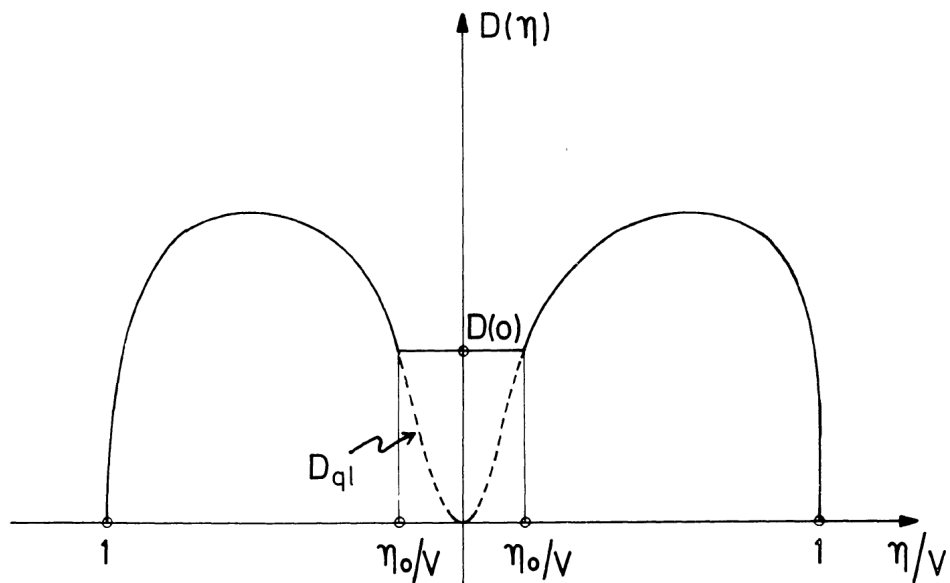


Abbildung 3.4.: Verlauf des Pitchwinkelkoeffizienten gegen $\frac{\eta}{v} \sim \mu$ aufgetragen, mit Überlagerung der Lösung der quasilinearen Theorie (im Plot als D_{ql} notiert) mit Korrekturen der nichtlinearen Terme für den Bereich $\mu \approx 0$, was einer verschwindenden parallelen Geschwindigkeitskomponente entspricht. Der Plot wurde Völk (1973) entnommen.

Eine möglich Alternative wurde von Völk (1973) vorgeschlagen. In dieser Arbeit werden Terme nichtlinearer Ordnung in die Herleitung von $D_{\mu\mu}$ einbezogen. Dennoch wird das Ergebnis der QLT für den Bereich ausgeprägter v_{\parallel} benutzt. Somit entspricht dieses Modell zum einen der QLT mit dem Pitchwinkelkoeffizienten in analytischer Form

$$D_{\mu\mu}^{\text{qlt}} = \pi \left(\frac{e}{mc} \right)^2 v_{\perp}^2 \sum_k \sum_n \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega) |\delta B(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} \right)^2 J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right), \quad (3.161)$$

wobei implizit die Welle-Teilchenresonanz aus Gl. 3.148 angenommen wurde. Zum anderen wurde die Korrektur durch die nichtlinearen Terme in erster Ordnung vorgenommen, um die Schwäche der QLT für $\mu \approx 0$ zu überlagern. Damit ergibt sich für kleine Beträge des Pitchwinkels der Koeffizient

$$D_{\mu\mu}(0)^{(3+\alpha)/2} = -\frac{3^{0.5(\alpha+1)}}{\alpha + \frac{1}{3}} v^2 B^2 C \frac{\pi}{4} \Omega^{0.5(3\alpha+5)}, \quad (3.162)$$

indem der Exponent des Turbulenzspektrums α mit eingeht. C ist dabei die Normierung des Spektrums. In Abb. 3.4 ist der Verlauf dieser Überlagerung für ein Spektrum mit $\alpha = -2$ dargestellt. Es ist ein deutlicher Unterschied zum Ergebnis der QLT zu erkennen.

Das Modell von Völk basiert dennoch zum Teil auf den Annahmen der quasilinearen Theorie, vor allem in Bezug auf die senkrechte Diffusion. Zwar wurden die nichtlinearen Korrekturen betrachtet, aber die Führungszentrumskoordinaten $X(t)$ und $Y(t)$ sind weiterhin Null. Dieses Problem wurde in der *weakly nonlinear theory* (kurz WNLT) von Shalchi et al. (2004) verbessert. Die WNLT ist die erste Theorie, welche die Effekte der Ablenkungen der Teilchen aus ihren ungestörten Orbits berücksichtigt. Dafür wurden Ansätze der *nonlinear guiding center theory* von Matthaeus et al. (2003) benutzt um $X(t)$ und $Y(t)$ durch eine nichtlineare senkrechte Entwicklung zu erweitern. Der daraus hergeleitete Pitchwinkelkoeffizient (der Übersicht halber soll hier auf die detaillierte Form verzichtet werden), wird um nichtlineare Effekte erweitert. Wichtig ist hierbei eine Steuerungsfunktion, die das Maß der Nichtlinearität bestimmt und im Grenzfall das Ergebnis der QLT erzeugt. Außerdem wird in dieser Theorie der Streuvorgang in einen parallelen (*slab*), sowie einen senkrechten Anteil zerlegt. Dementsprechend werden zusätzlich neue Formen von $D_{\mu\mu}$ für eine effektiv zweidimensionale Turbulenz in senkrechter Richtung erzeugt, so dass sich der Pitchwinkelkoeffizient aus der Summe der

Komponenten

$$D_{\mu\mu} = D_{\mu\mu}^{\text{slab}} + D_{\mu\mu}^{\perp} \quad (3.163)$$

ergibt.

Eine völlig andere herangehensweise bietet die Messung des Diffusionsstromes der zu untersuchenden Größe im Rahmen einer Simulation. Wieder am Beispiel des Pitchwinkels, wäre es der Diffusionsstrom von $D_{\mu\mu}$. Dazu geht man wie folgt vor. Zunächst werden Teilchen kontinuierlich mit μ_0 initialisiert. Sobald eine Diffusion stattgefunden hat, also $D_{\mu\mu} \neq 0$, werden entsprechende Teilchen, die nun ihren Pitchwinkel um $\Delta\mu$ geändert haben, wieder aus dem System entfernt. Dementsprechend entsteht durch den andauernden Fluss zwischen Initialisierung, Diffusion und Entfernen, ein Gleichgewicht und somit ein Diffusionsstrom. Dieser ist eine korrekte Lösung der Diffusionsgleichung und umgeht somit die Probleme der QLT. Lediglich die Annahme eines zugrundeliegenden Diffusionsprozeß ist nötig.

3.3.4. Selbstgenerierte Wellen und Plasmainstabilitäten

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Welle-Teilchen-Interaktionen diskutiert. Dabei lag der Fokus stets auf der Wirkung von Plasmawellen auf Einzelteilchen. Im letzten Kapitel der Theorie soll schließlich noch erörtert werden, welche Effekte sich auf das Plasma auswirken. Prinzipiell muss für eine vollständige Beschreibung dieser Problematik die Theorie der Plasmainstabilitäten eingeführt werden. Diese beschreibt die Entwicklung einer Störung in einem Plasma, welche, falls nicht sofort gedämpft (stabiles Plasma), anwachsen kann und dabei Wellen erzeugt. Durch eine Plasmainstabilität wird folglich die Dispersionsrelationen der Plasmawellen modifiziert. Aufgrund der immensen Vielfältigkeit solcher Instabilitäten, die verschiedenste Plasmamoden anregen können, soll hier nur der, für die vorliegende Arbeit relevante Mechanismus diskutiert werden, die sogenannte *Strömungsinstabilität*. Diese wurde bereits implizit in dem Phänomenologiekapitel verwendet, da das Hintergrundplasma des Sonnenwindes durch das anisotrope Einströmen von hochenergetischen Teilchen, z.B. durch Flares und CMEs, massiv gestört wird. Dabei werden, abhängig von der Energie der einströmenden Teilchen, durch *nichtlineare* Prozesse, Alfvénwellen erzeugt (vgl. Kapitel 3.1). Der interessierte Leser kann sich einen sehr guten Überblick über das Gebiet der Plasmainstabilitäten in Melrose (1989)

und Koskinen (2011) verschaffen, an denen sich auch dieser letzte Abschnitt orientiert.

Der zentrale Prozess bei der Ausbreitung von hochenergetischen Teilchen in magnetisierten Plasmen, ist die bereits diskutierte Welle-Teilchen Wechselwirkung. Dabei interagiert ein Teilchen mit Impuls p durch seine Geschwindigkeitskomponente \mathbf{v}_T mit dem Wellenvektor \mathbf{k}_W einer Welle der Frequenz ω_W resonant, sofern die Bedingung

$$k_W v_T \mu - \omega_W - n \Omega_T = 0 \quad (3.164)$$

erfüllt ist (Schlickeiser (1989), siehe auch Gl. 3.148). Bei dieser Interaktion ändert sich die Energiedichte W der Welle demnach um

$$\frac{dW(\mathbf{k})}{dt} = -\Gamma(\mathbf{k})W(\mathbf{k}), \quad (3.165)$$

wobei je nach Vorzeichen des Koeffizienten Γ die Welle an Energie gewinnt oder verliert. Respektive wird das Teilchen entweder beschleunigt oder abgebremst. Durch die Anwendung der *quasilinearen Theorie*, kann man die Wellenwachstumsrate abhängig von der Gesamtverteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ der wechselwirkenden Teilchen mit

$$\begin{aligned} \Gamma(k_{\parallel}) &= \frac{1}{W} \frac{dW(\mathbf{k})}{dt} \\ &= \frac{\pi \Omega}{2 n v_A} \int d^3 p v (1 - \mu^2) |k| \delta(k_{\parallel} + \frac{\Omega}{v \mu}) \frac{\partial f}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (3.166)$$

angeben (Vainio 2003). Die δ -Funktion stellt hierbei die Resonanzbedingung dar und lässt sich nach Skilling (1975) und Bell (1978) unabhängig von μ darstellen. Somit vereinfacht sich die Wachstumsrate zu

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, p, t) &= \frac{\pi}{2} \frac{\Omega p}{n v_A} 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu v \mu p^2 f \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\Omega p}{n v_A} S(\mathbf{r}, p, t). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Die Funktion $S(\mathbf{r}, p, t)$ steht für die Verteilungsfunktion der einströmenden Teilchen, da durch die Integration die effektive Anzahl der Teilchen, die eine Einheitsfläche mit bestimmten Einheitsimpuls im Einheitszeitintervall passieren, dargestellt wird (Vainio 2003). Gl. 3.167 zeigt sehr anschaulich, wie einzelne Wellenmoden durch einen Strom einer bestimmten Teilchenpopulation, wie z.B. SEPs, angeregt werden können.

Das eben beschriebene Wellenwachstum entspricht genau den Vorgängen, die in Kapitel 2.5.2 durch den Fermi-Prozess an einem Schock erklärt wurden. In der Tat besteht die Schockregion aus selbstgenerierten Wellen, die beispielsweise durch den koronalen Masseauswurf entstehen. Die Wellenspezies die für SEP-Ereignisse besonders in Frage kommt sind die bereits angesprochenen niederfrequenten Alfvénwellen. Diese werden vorzugsweise durch SEPs generiert und treten über Gl. 3.164 im Gegenzug wieder mit den Protonen in Wechselwirkung (Reames 1989). Man kann sich leicht vorstellen, dass ein Teilchenstrom mit hohem Impuls beim Durchlaufen der Schockregion seine Energie teilweise auf Alfvénwellen überträgt. Für darauffolgende Teilchen wird somit die mittlere freie Weglänge reduziert, da die Streuwahrscheinlichkeit an der verstärkten Mode erhöht ist. Dieser Effekt ist als *Strömungslimitierte Intensität* von SEPs bekannt und wurde ausgiebig von Ng u. Reames (1994) und Reames u. Ng (1998) untersucht. So zeigen Messungen von sukzessiven SEP-Ereignissen eine obere Grenze der Intensitäten, abhängig von der Teilchenenergie. Ein wichtiger Hinweis auf den Mechanismus selbstgenerierter Wellen ist außerdem der starke Intensitätsanstieg, wenn die Schockfront (natürlich abhängig vom räumlichen Messbereich im Schock, siehe Kapitel 2.5.2) die messende Raumsonde erreicht. Dieser ist dadurch zu erklären, dass durch die Welle-Teilchen-Interaktionen die Teilchen vorübergehend in der Schockfront gefangen werden und somit effektiv eine höhere Teilchenintensität innerhalb und nahe des Schocks vorliegt.

4. Methodik

Dieses Kapitel widmet sich der technischen Umsetzung der vorgestellten Thematik. Im Wesentlichen geschieht dies in zwei Teilen. Zum einen durch Lösung der MHD-Gleichungen zur Simulation eines Plasmahintergrundes, zum anderen durch Berechnung der Lorentzkraft für Testteilchen, die sich eben in diesen Plasma bewegen. Aus den in Kapitel 3.1 und 3.3 diskutierten Gründen, sind beide Systeme von einander getrennt und interagieren nur über den Austausch der magnetischen und elektrischen Felder. Wie bereits erwähnt ist eine Rückwirkung der Teilchen auf das Plasma hierbei nicht möglich.

Der Hauptanteil der vorliegenden Arbeit liegt in der Plasmasimulation. Daher soll zunächst die verwendete Lösungsmethodik der MHD-Gleichung beschrieben werden. Anschließend wird das numerische Lösungsverfahren der Lorentzkraft diskutiert. Beide Algorithmen werden von einem vollständig parallelisierten, objektorientiertem *C++* Programm iteriert, welches am Ende dieses Kapitels vorgestellt wird.

4.1. Numerik der Plasmasimulationen

Kernpunkt der Plasmabeschreibung sind die MHD-Gleichungen der Form, wie sie in Kapitel 3.1.4 vorgestellt wurden, im Speziellen deren Wellendarstellung durch die Elsässervariablen in den Gleichungen 3.62 – 3.64. Diese Gleichungssysteme sind i.A. nicht mehr analytisch lösbar, daher muss man zu einer numerischen Beschreibung übergehen, folglich das System diskretisieren und iterativ lösen. Das Problem der Modellierung eines turbulenten Plasmas besteht darin, dass aufgrund der Dynamik des Systems sich Schockregionen ausbilden können, also starke Änderungen der Feldkonfigurationen auf kleinen räumlichen Skalen. Dies kann zu Unstetigkeiten führen, die in der Mathematik als *Riemannproblem* bezeichnet werden.

Es gibt zahlreiche Lösungsverfahren, sogenannte *Riemannlöser*, wie beispielsweise die stückweise Linearisierung durch das *Godunov-Verfahren* (Zrake u. MacFadyen 2012).

Eine andere Möglichkeit bietet die Gewichtung von links- und rechtsseitiger, sowie zentraler räumlicher Ableitung durch das *Centrally weighted essentially non-oscillatory*, kurz *CWENO*-Schema (Kissmann 2006). Ein deutlicher Nachteil dieser Verfahren liegt in der erheblichen numerischen Dissipation, die implizit und somit nicht steuerbar ist. Gerade für Beschreibung turbulenter Systeme stellt dies eine Hürde dar, sofern man einen Inertialbereich über mehrere Wellenzahlen modellieren möchte.

Eine sehr gute Alternative bietet die Umgehung der räumlichen Ableitungen durch *spektrale Lösungsmethoden*. Diese können ein System partieller Differentialgleichungen durch eine geeignete Transformation mittels einer Ansatzfunktion in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen. Die Wahl der Ansatzfunktion hängt von der Problemstellung ab, zumeist werden aber *Tschebyscheff-Polynome* oder *Fourierentwicklungen* gewählt. Nichtlineare Systeme, wie turbulente Plasmen, müssen dennoch teilweise im Realraum behandelt werden. Solche Verfahren sind eine Unterklasse der spektralen Behandlung und werden als *pseudospektrale Methoden* bezeichnet. Dabei bietet sich numerisch die Wahl von *Fast-Fourier-Transform* Algorithmen an, also eine Lösung der Gleichungen im Fourier- oder Wellenzahlraum. Diese Methodik wurde im Rahmen dieser Dissertation zur Plasmasimulation gewählt und soll nun im folgenden Abschnitt erläutert werden.

4.1.1. Pseudospektrale Methodik

Wie bereits erwähnt, eignen sich pseudospektrale Verfahren sehr gut zur Modellierung nichtlinearer Systeme. Dabei findet bei fluiddynamischen Problemen zumeist die Fouriertransformation als Ansatzfunktion Anwendung. Mit einem exponentiellen Verlauf konvergiert diese numerische Methode, verglichen mit anderen, äußerst schnell (Canuto 1988). Durch die Wahl der Fouriertransformation in dreidimensionaler Form

$$FT(f(\mathbf{x})) = F(\mathbf{k}) = c \cdot \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

mit deren Inversion

$$FT^{-1}(f(\mathbf{k})) = F(\mathbf{x}) = c \cdot \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{k}), \quad (4.2)$$

der Normierung c und unter Voraussetzung der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration, die bei Fourierintegration nach der Leibnizregel immer gegeben ist, gehen räumliche Ableitungen verloren. So ist die Fouriertransformierte der vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

in ihrer Wellenraumdarstellung durch

$$F(\mathbf{k}) = c \cdot \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \nabla u(\mathbf{x}) = i\mathbf{k}\tilde{u}(k) \quad (4.4)$$

gegeben, wobei die Tilde-Notation im Folgenden für Variablen des Fourierraums steht.

Eine Transformation der MHD-Gleichungen 3.40 - 3.43 führt somit zu

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) - \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - i\mathbf{k}\tilde{P} - \nu_n \mathbf{k}^{2n} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial t} = \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}) - \nu_n \mathbf{k}^{2n} \tilde{\mathbf{b}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = 0, \quad (4.8)$$

wobei an dieser Stelle offensichtlich wird, weshalb eine ganzheitliche Fourierraumbeschreibung der Magnetohydrodynamik nicht möglich ist. So lassen sich die nichtlinearen Terme, sowie die Schließungsbedingung in Gl. 3.45 nicht beliebig vertauschen, so dass i.A. $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \not\rightarrow k\tilde{u}^2$ gilt. Daraus ergibt sich die Konsequenz, dass nicht trivial möglich ist die nichtlinearen Terme im Fourierraum zu berechnen, da z.B. $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \neq \widetilde{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Dennoch lässt sich eine geschlossene Darstellung des Gleichungssystems finden, sofern man eine komponentenweise Formulierung wählt, die hier als Komponenten α, β, γ notiert werden. Im Folgenden soll die Einsteinsche Summenkonvention benutzt werden, also wird über gleiche Indizes summiert. Beginnt man zunächst mit dem Druckterm, ist dieser durch

$$-\nabla P = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) + ik_\beta \left(\widetilde{u_\alpha u_\beta} - \widetilde{b_\alpha b_\beta} \right) \quad (4.9)$$

gegeben (Lesieur 1990). Führt man das Kronecker-Delta aus, erhält man mit

$$\begin{aligned} -ik_\gamma \delta_{\alpha\beta} \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) &= -ik_\gamma \left(\widetilde{u_\alpha u_\gamma} - \widetilde{b_\alpha b_\gamma} \right) \\ &= -ik_\beta \left(\widetilde{u_\alpha u_\beta} - \widetilde{b_\alpha b_\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

einen Ausdruck für

$$\widetilde{\nabla P} = -i \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right), \quad (4.11)$$

der sich mit der Fouriertransformation der linken Seite zu

$$\tilde{P} = -\frac{k_\beta k_\gamma}{k^2} \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) \quad (4.12)$$

ergibt. Dies entspricht im k -Raum wiederum der Schließungsbedingung der MHD-Gleichungen (3.44):

$$\Delta P = \nabla \mathbf{b} \otimes \nabla \mathbf{b} - \nabla \mathbf{v} \otimes \nabla \mathbf{v}. \quad (4.13)$$

Setzt man dies nun in die MHD-Gleichungen, unter Anwendung der Komponentenschreibweise für die anderen Terme ein, erhält man mit

$$\frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial t} = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) - \nu k^2 \tilde{u}_\alpha \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_\alpha}{\partial t} = -ik_\beta \left(\widetilde{u_\beta b_\alpha} - \widetilde{b_\beta u_\alpha} \right) - \nu k^2 \tilde{b}_\alpha \quad (4.15)$$

$$k_\alpha \tilde{u}_\alpha = 0 \quad (4.16)$$

$$k_\alpha \tilde{b}_\alpha = 0, \quad (4.17)$$

das Gleichungssystem im Fourierraum. Unter Verwendung der Definitionen 3.61 erhält man nach einigen einfachen Umformungen die Darstellung

$$(\partial_t - v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^- = \frac{i}{2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} - \frac{\nu}{2} k^{2n} \tilde{w}_\alpha^- \quad (4.18)$$

$$(\partial_t + v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^+ = \frac{i}{2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} - \frac{\nu}{2} k^{2n} \tilde{w}_\alpha^+ \quad (4.19)$$

$$k_\alpha \tilde{w}_\alpha^\pm = 0 \quad (4.20)$$

in Elsässernotation. Die einzelnen Schritte sind wiederum im Anhang A ausführlich festgehalten. Wendet man die Einsteinsche Summenkonvention an, so erkennt man, dass die

Summen über β und γ unabhängig von der α -Summation sind. Dadurch lassen sich die nichtlinearen Terme der Druck-Schließungsbedingung und folglich der Gleichungssatz zu

$$(\partial_t - v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^- = i \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} - i k_\beta \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} - \frac{\nu}{2} k^{2h} \tilde{w}_\alpha^- \quad (4.21)$$

$$(\partial_t + v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^+ = i \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} - i k_\beta \widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} - \frac{\nu}{2} k^{2h} \tilde{w}_\alpha^+ \quad (4.22)$$

$$k_\alpha \tilde{w}_\alpha^\pm = 0 \quad (4.23)$$

zusammenfassen.

Auch an dieser Stelle ist h wieder der Parameter für die Hyperdiffusivität. An den Gl.en 4.21–4.23 wird deutlich, wieso dieser Parameter nötig ist. Da die pseudospektrale Methodik sämtliche Ortsableitungen durch simple Multiplikationen ersetzt, leidet dieses Verfahren nahezu gar nicht unter numerischer Dissipation. In der Regel ist dies ein Vorteil. Will man turbulente Systeme modellieren, ist man allerdings auf ein gewisses Maß an Dissipation angewiesen, da diese einen wichtigen Bestandteil der Energiekaskade darstellt (vgl. Kapitel 3.2). Je nach Problemstellung führt man deshalb eine künstliche Verstärkung des Energiezerfalls ein, indem man die Hyperdiffusivität ausnutzt. Dadurch wird die Ordnung der k -Raumdissipation deutlich erhöht. Folglich werden höhere Wellenzahlen stark gedämpft. Üblicherweise reicht schon ein Parameter $h = 2$ aus, um hinreichende Dissipation einzustellen.

4.1.2. Diskrete Fouriertransformation

Im numerischen Bereich wird das Integral in 4.1 und 4.2 durch die Summe

$$X(k) = c \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right) \quad (4.24)$$

für jede Dimension diskretisiert. Man nennt diese Form entsprechend *diskrete Fouriertransformation* (kurz *DFT*). Das heißt, im dreidimensionalen Fall ergeben sich drei ge-

koppelte Summationen

$$X(k_1, k_2, k_3) = c \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} x(n_1, n_2, n_3) \times \\ \times \exp\left(\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N_3} n_3 k_3\right) \quad (4.25)$$

und entsprechend ergibt sich die Rücktransformation zu

$$x(n_1, n_2, n_3) = c \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} X(k_1, k_2, k_3) \times \\ \times \exp\left(-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N_3} n_3 k_3\right). \quad (4.26)$$

Der Übergang zur diskreten Formulierung bedeutet im Speziellen für die Variablen $X(k_1, k_2, k_3)$ und $x(n_1, n_2, n_3)$, dass diese dreidimensionalen Felder durch Gitter beschrieben werden, welche in $K_1 \times K_2 \times K_3$ und respektive $N_1 \times N_2 \times N_3$ Zellen unterteilt werden. Dabei stehen die Werte n für ein diskretisiertes Raumgebiet der Ausdehnung L und k entsprechend für einzelne Wellenzahlen, die durch $k = \{-N/2 \cdots 0 \cdots N/2\} \cdot 2\pi/L$ festgelegt werden. In den Gl.en 4.25 und 4.26 wurden die Indizes um $N/2$ verschoben. Diese Indexverschiebung ist üblich in numerischen Implementationen, damit die Laufvariablen immer $\in \mathbb{N}_0$ sind. Im Allgemeinen werden lediglich die negativen Wellenzahlen um N verschoben. Dadurch entsprechen Werte von 0 bis $N/2$ im Wellenzahlgitter den positiven Wellenzahlen $k = 0 \cdots N/2$, sowie Werte von $N/2$ bis N den negativen $k = -N/2 \cdots -1$. Liegen die Felder $x(n_1, n_2, n_3)$ im Realraum als reelle Größen vor, muss deren komplex-zahliges Fourierpendant gemäß der Informationserhaltung die hermitesche Symmetrie

$$X_k = X_{N-k}^* \quad (4.27)$$

aufweisen. Diese Symmetrie nutzen die gängigen numerischen DFTs aus, um Berechnungen zu sparen. So ist es aufgrund der Hermitizität nicht nötig ein dreidimensionales Gitter komplett im Fourierraum zu berechnen, da die letzte dimension halbiert werden kann. Folglich ist ein Realraumfeld der Größe $N_1 \times N_2 \times N_3$ vollständig durch das

Wellenzahlgitter $K_1 \times K_2 \times K_3/2$ bestimmt¹ .

4.1.3. Schnelle Fouriertransformation

Für typische Anwendungen sind die Gleichungen 4.25 und 4.26 nicht nutzbar, da eine Berechnung mit $\mathcal{O}(N^2)$ zu langsam ist. Durch Cooley u. Tukey (1965) wurde erstmals in geschlossener und allgemein anwendbarer Form² vorgeschlagen, den *Teile und herrsche* Ansatz für die Fouriertransformation anzuwenden. Dieser zerlegt ein Problem solange in einzelne Teilprobleme, bis eine Beherrschung des Teilstücks möglich ist, um die Gesamtlösung schlussendlich wieder aus den Einzellösungen zusammen zu setzen. Im Fall der DFT werden im Wesentlichen die Summen in ungerade und gerade Indizes getrennt. Der Vorteil liegt in der Reduktion der komplexen Operationen, da das Verfahren für einen halbierten Bereich nur ein Viertel der Operationen benötigt. Durch rekursive Anwendung erreicht diese sogenannte *schnelle Fouriertransformation* (englisch: *Fast-Fourier-Transform, FFT*) eine Geschwindigkeitsskalierung mit $\mathcal{O}(N \log N)$.

Ein weiterer Vorteil liegt in der starken Verbreitung und Nutzung der FFT. Dadurch ergeben sich zahlreiche Wahlmöglichkeiten zwischen verschiedenen Programmimplementierungen der FFT, die auf unterschiedlichsten Algorithmen oder Weiterentwicklungen des Verfahrens von Cooley u. Tukey (1965) basieren.

Die Reproduktion einer beliebigen Funktion durch deren Fourierdarstellung, ist i.A. nicht fehlerfrei möglich. Die Ursache liegt in der Diskretisierung des Signals, im Speziellen in dessen Abtastung. Im Alltag ist dieser Effekt in Form der *Moiré-Muster* häufig beobachtbar, das immer dann auftritt, wenn sich leicht unregelmäßige Gitterstrukturen überlagern. So z.B. bei Netzstrukturen in Gardinen, nahezu parallel verlaufenden Geländern, etc.. Ein anschauliches Beispiel ist in Abbildung 4.1 in Form zweier gekippt überlagerter Punktgitter gegeben, die, abhängig von ihrer Position, ein vom Originalgitter stark verschiedenes, Überlagerungsmuster erzeugen. Ein damit verwandtes Problem entsteht durch Digitalisierungen von Signalen mit geringen Abtastfrequenzen wie beispielsweise im Fernsehen, wo eine geringe Bildanzahl pro Sekunde zum sogenannten *Wagon-wheel effect* führt, durch den Räder von vorwärts fahrenden Autos sich scheinbar

¹In einer numerischen Implementation wird die letzte Dimension i.d.R. durch $K_3/2 + 1$ beschrieben, da die Wellenzahl Null und $N/2$ keinen hermiteschen Partner haben.

²Es ist strittig, wer den ersten FFT Algorithmus zuerst publizierte. Tatsächlich fanden bereits Carl Friedrich Gauß (1805) und Carl Runge (1905) diesen Ansatz für spezielle Probleme.

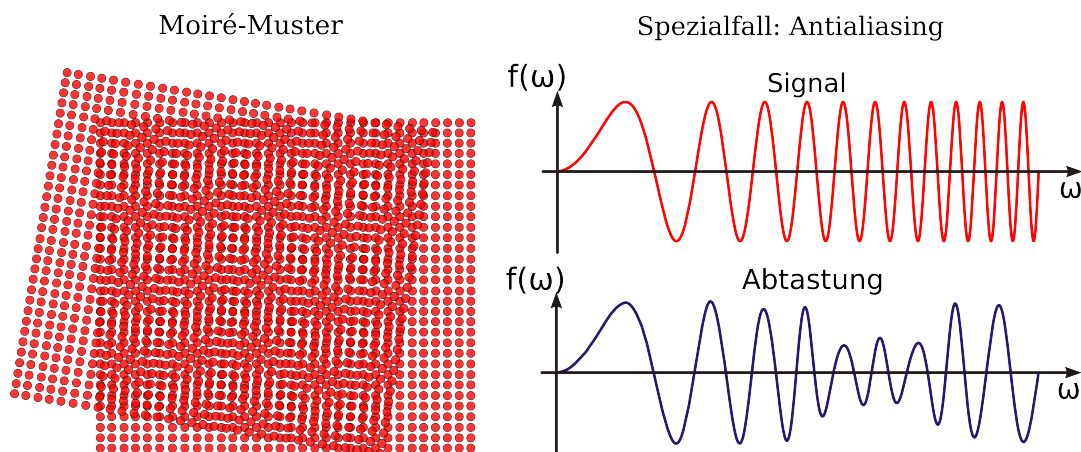


Abbildung 4.1.: Illustration von Störeffekten bei signalauflösenden Verfahren. Links im Bild der allgemeine Moiré-Effekt, der bei Überlagerungen von leicht unregelmäßigen Gitterstrukturen auftritt. In diesem Beispiel wird die Unregelmäßigkeit durch Verkippung der Gitter erzielt. Rechts ist der Spezialfall dieses Phänomens zu sehen, der räumliche Aliasing-Effekt. Man erkennt deutlich, dass bei einer konstanten Abtastung des Originalsignals ab einer gewissen Frequenz starke Verfälschungen auftreten.

rückwärts drehen oder Rotorblätter von Helikoptern während des Fluges scheinbar still stehen. Die Problematik der Signalauflösung durch ein Abtastmuster wird allgemein als *Aliasing-Effekt* bezeichnet, der entweder durch temporale oder räumliche Abtastungen hervorgerufen wird. Da eine der beiden Ursachen bei Signaldarstellungen durch Fouriertransformationen immer vorliegt, ist der Aliasing-Effekt eng mit FFTs verknüpft. So lässt sich eine periodische Funktion überhaupt nur dann sinnvoll durch eine FFT bestimmen, sofern ihre Frequenz unterhalb der sogenannten *Nyquist-Frequenz* liegt. Diese ist als die halbe Abtastfrequenz definiert. Man erkennt in Abbildung 4.1 deutlich die verfälschte Wiedergabe des Originalsignals, sobald die Nyquistfrequenz unterschritten wird. Generell treten weniger gravierende Aliasingeffekte auch unterhalb der Nyquistfrequenz auf, was an der Diskretisierung des Integrals 4.1 liegt. So kann man i.A. Aliasingfehler als Differenz der kontinuierlichen Fouriertransformation 4.1 und der DFT 4.25 definieren (Canuto 1988). Um diese Fehler zu vermeiden sind sogenannte *Antialiasing*-Methoden notwendig, die durch unterschiedliche Verfahren die Störeffekt beheben. In dieser Arbeit wurde das *Zero-padding* Verfahren gewählt, da es ohne viel Rechen- und Speicheraufwand auskommt. Dabei werden nach Orszag (1971) sämtliche Wellenmoden $|\mathbf{k}| > oN$ mit $1/3 \leq o \leq 1/2$ auf Null gesetzt. Dabei ist das Antialiasing mit $o = 1/3$ das schlechteste Szenario, was auftritt, wenn das Signalgitter eine karierte Struktur besitzt, also

jede Gitterzelle zwischen zwei Werten alterniert. Alle Wellenmoden die unterhalb dieser $2/3$ liegen und demnach keinesfalls vom Zero-padding erfasst werden, da sie immer frei von Alias-Effekten sind, werden auch als *aktive Moden* bezeichnet. Man sollte also bei der Verwendung spektraler Methoden mittels Fouriertransformationen immer berücksichtigen, dass eine gewünschte Simulation von N_k aktiven Moden auf einem dreifach vergrößerten Gitter stattfinden muss.

4.1.4. Zeitentwicklung der MHD

Schließlich soll noch das verwendete Lösungsverfahren für die Zeitentwicklung diskutiert werden. Im einfachsten Fall kann eine Diskretisierung durch das Eulerverfahren

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad \rightarrow \quad y_{n+1} &= y_n + \Delta t f(y_n, t_n) \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \end{aligned} \tag{4.28}$$

erfolgen. Allerdings ist diese Methode sehr fehlerbehaftet, so dass sich schon durch ein Verfahren geringfügig höherer Ordnung erhebliche Verbesserungen erzielen lassen. Für Verfahren höherer Ordnung benötigt man allerdings zusätzliche Zwischenspeicher für die Felder. Daher wurde als Kompromiss das Heun-Verfahren zweiter Ordnung (ähnlich dem Runge-Kutta-2 Verfahren)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f \left(y_n + \frac{1}{2} \Delta t f(y_n, t_n), t_n + \frac{1}{2} \Delta t \right) \tag{4.29}$$

verwendet, welches im Wesentlichen die Feldgrößen mit Hilfe einer Stützstelle, über einen Zwischenschritt bei der halben Schrittweite berechnet (Press et al. 1992).

Eine noch höhere Genauigkeit bietet das Runge-Kutta-4 Verfahren. Auch diese Methode kann wahlweise verwendet werden. Sie bietet geringfügig höherer Stabilität als ein Verfahren 2. Ordnung und zudem eine sehr hohe Genauigkeit mit Fehlern $\mathcal{O}(\Delta t^5)$. Die

Methode hat mit

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\k_1 &= \Delta t f(y_n, t_n) \\k_2 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\k_3 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\k_4 &= \Delta t f(y_n + k_3, t_n + \Delta t)\end{aligned}\tag{4.30}$$

insgesamt vier Stützstellen - eine am Anfang jedes Schrittes, zwei in der Mitte und eine am Ende. Dadurch ist dieses Vorgehen wiederum rechenaufwändiger als ein Verfahren 2.Ordnung.

4.2. Numerik der Testteilchensimulationen

Der zentrale Punkt der Testteilchensimulationen ist das Lösen der Teilchenbewegungsgleichungen. Diese werden gemäß Kapitel 3.3 durch die Lorentzkraft in Gl. 3.5 bestimmt, also einer gewöhnlichen, zeitabhängigen Differentialgleichung. Da die Plasmazeitentwicklung durch ein Runge -Kutta-Verfahren zweiter Ordnung (siehe Gl. 4.29) erfolgt, müsste die Lorentzkraft analog behandelt werden. Es zeigt sich jedoch, dass für die Testteilchensimulationen ein Verfahren zweiter Ordnung nicht ausreichend ist, da die kleinskalige Gyrationbewegung nur bei sehr kleinen Zeitschritten Δt stabil aufgelöst werden kann. Somit bleiben nur zwei Alternativen; entweder die Plasmasimulationen mit einem Verfahren höherer Ordnung zeitlich iterieren, wie z.B. Runge-Kutta-4 oder die Teilchenbewegungen mit einer stabileren Methode berechnen, die keine Zwischenspeicherung der Feldgrößen benötigt. Die erste Variante wurde bereits in Kapitel 4.1.4 aufgrund ihres hohen Speicheraufwands ausgeschlossen. Daher wurde mit dem sogenannten *Boris-Push* ein geeigneteres Verfahren zur Testteilchensimulation gewählt, was im Folgenden vorgestellt wird.

4.2.1. Boris–Push

Die relativistische Lorentzkraft

$$\frac{d}{dt}\gamma\mathbf{v} = \frac{q}{mc} [c\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (4.31)$$

bestimmt die Bewegungsgleichung der Teilchen. Diese kann sehr einfach durch den Euler-Schritt

$$\frac{\gamma(\mathbf{v}^{t+1} - \mathbf{v}^t)}{\Delta t} = \frac{q}{mc} [c\mathbf{E} + \mathbf{v}^t \times \mathbf{B}] \quad (4.32)$$

diskretisiert werden. Wie bereits erwähnt, ist der numerische Fehler bei diesem Verfahren sehr groß.

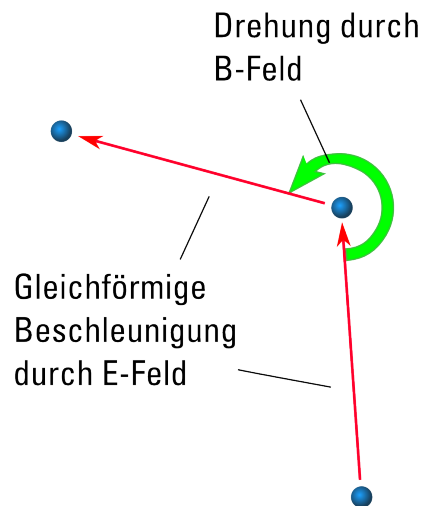


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung des Boris–Pushs. Dieses implizite Verfahren legt der Teilchentrajektorie eine Gyrationbewegung zu Grunde. Dadurch wird die Iteration in einen halben Schritt der Beschleunigung durch das elektrische Feld, eine Drehung durch das Magnetfeld und einen erneuten halben E–Feld Beschleunigungsschritt untergliedert. Quelle: Kilian (2010)

Boris (1970) schlug eine Alternative durch eine *implizite* Methode vor. Wie in Abbildung 4.2 erkenntlich, zerlegt diese die Iteration in zwei Teilstücke. Zunächst wird das Teilchen durch das elektrische Feld eine halbe Schrittweite gleichförmig beschleunigt. Anschließend wird es durch die Magnetfeldwirkung gedreht und erfährt erneut die

E-Feld Beschleunigung. Dadurch zerlegt sich Gl. 4.32 in

$$\mathbf{v}^{t-\Delta t/2} = \mathbf{v}^- - \frac{q \mathbf{E} \Delta t}{2 m} \quad (4.33)$$

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2 \gamma m} (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{q \mathbf{E} \Delta t}{2 m}. \quad (4.35)$$

Dieser sogenannte Boris-Push hat als implizite Methode den Vorteil einer erheblichen numerischen Stabilität. Während explizite Verfahren wie Gl. 4.32 bei zu groß gewählten Schrittweiten Δt keine stabile Kreisbewegung modellieren können und eher Spiralbahnen erzeugen, weicht der Boris-Push lediglich von dem analytischen Larmorradius ab und beschreibt weiterhin eine, in diesem Rahmen korrekte, Gyration. Selbst wenn für den Zeitschritt $\Delta t \gg 1/\Omega$ gilt, wird noch eine stabile Kreisbewegung modelliert, die gegen die adiabatische Drift konvergiert. An den oben stehenden Gleichungen erkennt man, dass der Boris-Push das elektrische Feld eine halbe Zeitschrittweite verschoben zu dem Magnetfeld annimmt. Bei der Wahl eines kleinen Δt ist dies jedoch vernachlässigbar.

Es ist für die Berechnung der Bewegungsgleichungen nötig Gl. 4.34 nach \mathbf{v}^+ aufzulösen. Dazu werden die Hilfsvektoren \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 eingeführt. Damit lässt sich die Auflösung

$$\mathbf{h}_1 = \frac{q \mathbf{B}}{2 \gamma^n m c} \Delta t \quad (4.36)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{h}_1 \quad (4.37)$$

$$\mathbf{h}_2 = \frac{2 \mathbf{h}_1}{1 + \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}' \times \mathbf{h}_2 \quad (4.39)$$

durchführen (Birdsall u. Langdon 2005).

Eine Grenze für dieses Verfahren stellen ultrarelativistische Teilchengeschwindigkeiten dar. In diesem Fall wird die Energieerhaltung verletzt, was im Wesentlichen daran liegt, dass das ideale Ohmsche Gesetz $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ nicht mehr erfüllt wird und somit Scheinkräfte auf die Teilchen wirken (Vay 2008). Für leicht-relativistische Fälle ist das Verfahren dennoch anwendbar, da signifikante Abweichungen erst ab $\gamma \approx 10^3$ auftreten (Vay 2008).

4.3. Gismo

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der *C++*-Hybridcode *Genuine Incompressible Spectral Magnetohydrodynamic Odyssey* entwickelt, der die Lösungsverfahren der vorangegangenen Kapitel umsetzt. GISMO vereint eine turbulente Plasmaevolution mittels MHD und die kinetische Simulation von Testteilchen in den unabhängigen Teilen GISMO-MHD und GISMO-Particles, welche über die Schnittstelle der magnetischen und elektrischen Felder interagieren. Die MHD-Entwicklung ist dabei das Kernstück des Programms. Im Folgenden sollen die Struktogramme, Optionen und Programmabläufe der beiden Methoden vorgestellt werden.

4.3.1. Gismo-MHD

Die pseudospektrale Lösungsmethodik der Gl.en 4.21-4.23 macht es zunächst notwendig, eine geeignete FFT zu wählen. Da Fouriertransformationen in vielen Gebieten von Bedeutung sind, steht eine große Auswahl an Programmbibliotheken zur freien Verfügung, allen voran die von *Matteo Frigo* and *Steven G. Johnson* am *MIT* entwickelte *FFTW* (engl.: *Fastest Fourier Transform in the West*). Diese bietet eine vergleichsweise sehr gut entwickelte FFT. Nach heutigen Standards der Rechenleistung ist es auf sinnvollen Zeitskalen nicht möglich, die MHD-Entwicklung von Feldern mit größeren Gitterauflösungen als 128^3 auf einem typischen shared-memory System zu berechnen. Es ist also nötig das Programm zu parallelisieren um die Problemstellung auf Großrechner zu portieren. Eine parallele Version der aktuellen FFTW3 bietet die, von *Dmitry Pekurovsky* am *SDSC* entwickelte, *Parallel Three-Dimensional Fast Fourier Transform (P3DFFT)*. Diese benutzt als Grundlage die FFTW3, die durch eine Fortranroutine mit Hilfe des *Message Passing Interface (MPI)* parallelisiert wurde. Die zu transformierenden Felder liegen in jeder Komponente $w_x^\pm, w_y^\pm, w_z^\pm$ im Realraum als Blitz++ Arrays, jeweils mit der Gitterauflösung $N_x \times N_y \times N_z$, vor. Wie schon in Kapitel 4.1.2 angesprochen, müssen entsprechend die gleichen Felder in hermitescher Symmetrie im Fourierraum vorhanden sein. Dabei wird die Fourierreihe der letzten Dimension nur halb ausgeführt, weil die andere Hälfte des Gitters aus symmetrischen Werten besteht. Da die P3DFFT nativ in Fortran programmiert wurde, ist die äußere Reihe die Fouriertransformation in x -

Richtung¹. Folglich sind die drei Felder der Komponenten von $\tilde{\mathbf{w}}^\pm$ durch das Gitter $(N_x/2 + 1) \times N_y \times N_z$ aufgelöst.

Eine weitere Konsequenz der Fortran – C++ Interaktion ist der eher technische Aspekt des *Name-manglings*. So müssen für Funktionsaufrufe „Übersetzungen“ zwischen den beiden Sprachen erfolgen. Dem interessierten Leser wird die Problematik in Anhang C nahegebracht.

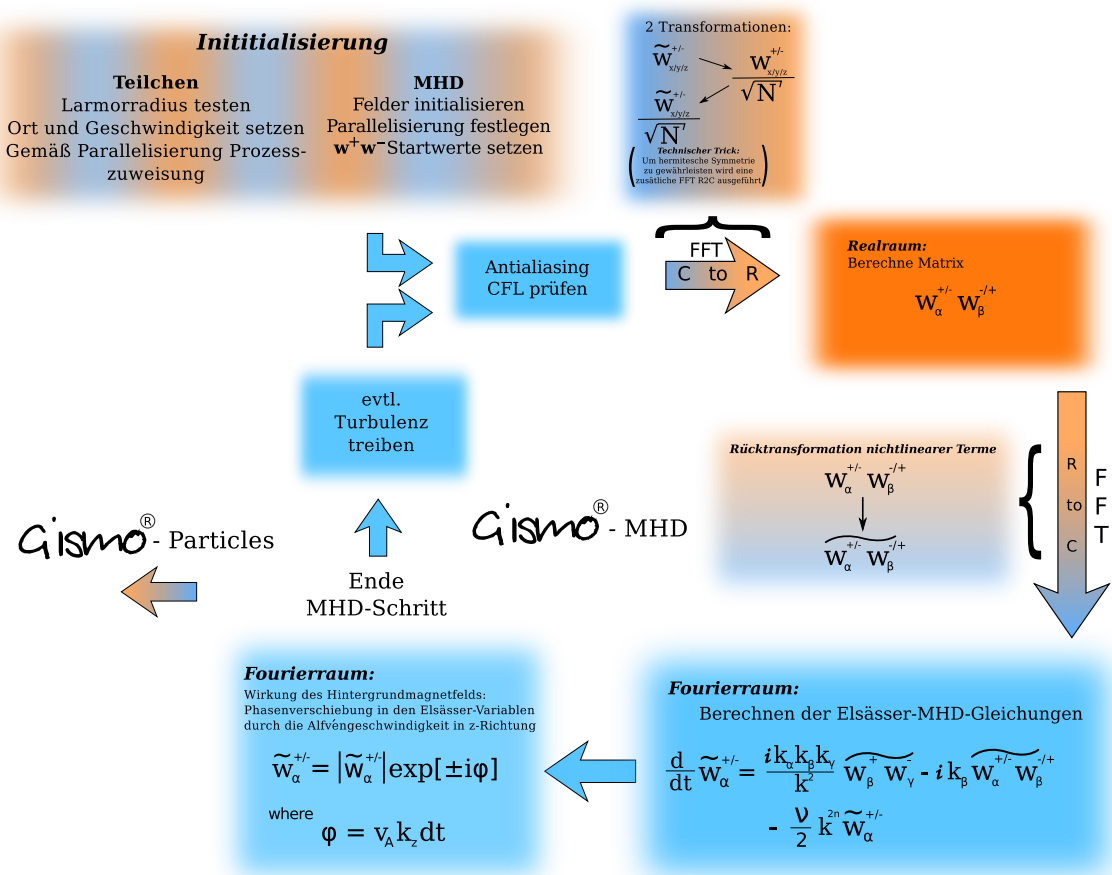


Abbildung 4.3.: Struktogramm des Programmablaufs der MHD-Berechnungen. Kästchen, die blau eingefärbt sind, repräsentieren Vorgänge im Fourierraum, wohingegen Orange für Realraumbetrachtungen steht. Am Ende jeder MHD-Iteration können die Felder optional der Teilchenroutine übergeben werden.

Wie in Abbildung 4.3 ersichtlich, wird GISMO-MHD größtenteils im Fourierraum ausgeführt. Der Programmablauf beginnt zunächst mit dem Festlegen der Anfangsbe-

¹Dies liegt daran, dass Fortran *column-major-order* verwendet, wohingegen C/C++ *row-major-order* benutzt. Demnach sind Zeilen und Spalten vertauscht.

dingungen. Diese können beliebig entweder im Realraum oder im \mathbf{k} -Raum eingestellt werden. Aus dem Folgenden wird jedoch ersichtlich, warum eine Behandlung im Wellenzahlraum von Vorteil ist. Nach dem Auswählen der Rahmenparameter, wie Systemgröße und deren Gitterauflösung N^3 , Zeitdiskretisierung, Alfvéngeschwindigkeit, Dichte, sowie Resistivität, werden die \mathbf{w}^\pm Felder mit Startwerten bestückt. Zur Wahl stehen hierbei entweder das Initialisieren einzelner Wellen oder mehrerer Wellenpakete, die während der Zeitentwicklung durch nichtlineare Wechselwirkung ein turbulentes Plasma erzeugen. An dieser Stelle zeigt sich der Vorteil der Elsässernotation. So ist gemäß der Fouriertransformation eine einzelne Welle durch

$$f(\mathbf{r}) = A \cos\left(\frac{2\pi}{N_x}x\right) \quad (4.40)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = N \left(\frac{A}{2} \delta(\mathbf{k} - 1 \cdot \mathbf{e}_{kx}) + \frac{A}{2} \delta(\mathbf{k} + 1 \cdot \mathbf{e}_{kx}) \right) \quad (4.41)$$

bzw.

$$f(\mathbf{r}) = A \sin\left(\frac{2\pi}{N_x}x\right) \quad (4.42)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = iN \left(\frac{A}{2} \delta(\mathbf{k} - 1 \cdot \mathbf{e}_{kx}) - \frac{A}{2} \delta(\mathbf{k} + 1 \cdot \mathbf{e}_{kx}) \right) \quad (4.43)$$

bestimmt. Daher ist die Startbedingung für eine einzelne Alfvénwelle, durch das Definieren der Amplitude an einem beliebigen diskreten \mathbf{k} in einer Komponente von \mathbf{w}^\pm , vollständig bestimmt. So ergibt beispielsweise

$$\tilde{w}_y^+(k_x = 1, k_y = 0, k_z = 0) = A + i \cdot 0 \quad (4.44)$$

eine Initialwelle, die durch einen Kosinus der normierten Frequenz 1 in x -Richtung beschrieben wird, der sich in der y -Komponente in positiver Richtung zum Hintergrundmagnetfeld ausbreitet. Eine solche Welle ist gemäß der Definition der Elsässervariablen linear polarisiert, da deren \mathbf{E} -Feldvektor parallel zum \mathbf{B} -Feldvektor liegt. Um eine zirkular polarisierte Alfvénwelle zu erzeugen, müssen unter Beachtung von

$$\frac{iE_x}{E_y} = \pm 1, \quad (4.45)$$

die x und y Komponente von \mathbf{w}^\pm initialisiert werden. Dabei steht die positive Lösung

für rechtszirkulare und die negative für linkszirkulare Polarisation. Folglich werden für die Elsässerdarstellung rechts zirkular polarisierte Wellen beispielsweise durch

$$\begin{aligned}\tilde{w}_x^\pm(k_x, k_y, k_z) &= 0 + i \cdot \frac{A}{2} \\ \tilde{w}_y^\pm(k_x, k_y, k_z) &= -\frac{A}{2} + i \cdot 0,\end{aligned}\tag{4.46}$$

erzeugt, respektive links zirkulare Polarisation durch

$$\begin{aligned}\tilde{w}_x^\pm(k_x, k_y, k_z) &= 0 - i \cdot \frac{A}{2} \\ \tilde{w}_y^\pm(k_x, k_y, k_z) &= -\frac{A}{2} + i \cdot 0.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Um eine turbulente Plasmaentwicklung zu initialisieren, ist die einfachste Methode beliebige Wellenpakete zu erzeugen, die miteinander nichtlinear wechselwirken können. Wie in Kapitel 3.2 diskutiert, wird in einem turbulenten System Energie von großen Skalen zu kleineren kaskadieren, um schließlich zu dissipieren. Es ist somit sinnvoll, Moden bei kleinen Wellenzahlen zu initialisieren. GISMO bietet dabei eine Auswahl verschiedener Szenarien. So ist es möglich beliebige Amplitudenverteilungen mit zufälligen Phasenbeziehungen entweder isotrop für $|\mathbf{k}| < k_{\text{Turbinit}}$ oder anisotrop $\mathbf{k} < \mathbf{k}_{\text{Turbinit}}$ zu generieren. Eine weitere Option ist das Initialisieren einer *Slab*-ähnlichen Geometrie, d.h. es werden nur Werte entlang der Hintgrundmagnetfeldrichtung gesetzt, die eine wählbare Breite in senkrechter Richtung aufweisen. Diese Verbreiterung ist nötig, weil eine reine Slab – Turbulenz sich gemäß den Gl.en 4.21-4.23 nicht entwickeln¹ kann, da keine Nichtlinearitäten auftreten. Um die nötige Quellenfreiheit der \mathbf{w}^\pm – Felder sicher zu stellen, werden die Startwerte von einem Divergenzsäuberer überprüft, der im Wesentlichen $\nabla \cdot \mathbf{w}^\pm = 0$ durch einen Projektionsoperator gewährleistet. Anschließend werden die Felder an eine Problemstellung angepasst. Dies kann optional durch eine Skalierung über einen Energieinjektionsparameter erfolgen, der physikalisch motiviert ist, so z.B. Energieeinspeisung durch Supernovae oder die durch das Einstellen der Magnetfeldfluktuationen in einem beliebigen Verhältnis zu B_0 . Des Weiteren wird an dieser Stelle einbezogen, ob eine kontinuierliche Energieinjektion erfolgt - sogenannte getriebene Turbulenz - oder ob lediglich eine einmalige Energiezugabe am Anfang der Simulation benutzt wird, also eine

¹In diesem Zusammenhang bezieht sich „entwickeln“ auf das Ausbilden von Turbulenz durch nichtlineare Wechselwirkung. Der Resistivitätsterm der MHD-Gleichungen trägt natürlich auch bei reiner Slab-Turbulenz zur Zeitentwicklung bei.

zerfallende Turbulenz. Je nachdem wird der Energieinjektionsparameter zusätzlich mit einem Zeitfaktor gewichtet.

Die Anpassung der Turbulenz benutzt zum einen die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2} (u + \Delta u)^2 \\ &= \frac{m}{2} (u^2 + 2u\Delta u + \Delta u^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

mit dem gestörten Anteil

$$\Delta E = \frac{m}{2} (2u\Delta u + \Delta u^2). \quad (4.49)$$

Der Normierungsfaktor ζ der Störung

$$\Delta u = \zeta \Delta \hat{u}, \quad (4.50)$$

lässt sich über das Verhältnis der normierten zur unnormierten Störung ermitteln:

$$\frac{\Delta E}{\Delta \hat{E}} = \frac{2\zeta a_2 + \zeta^2 a_1}{2a_2 + a_1} \quad (4.51)$$

wobei $a_1 = \rho \Delta \hat{u}^2$ und $a_2 = u \rho \Delta \hat{u}$ dichteabhängige Faktoren sind. Diese quadratische Gleichung für ζ löst sich mit

$$2a_2 + a_1 = \frac{2\Delta \hat{E}}{V}, \quad (4.52)$$

wobei V das Volumen ist, zu

$$\zeta_{1/2} = -\frac{a_2}{a_1} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2} + \frac{2\Delta \hat{E}}{V a_1}}. \quad (4.53)$$

Dabei fällt die negative Lösung weg, da unphysikalisch.

Zum anderen erfolgt die Anpassung der Magnetfeldfluktuationen völlig analog zur Berechnung von $\zeta_{1/2}$. Ausgehend von der magnetischen Energie

$$E_{\text{magn}} = \frac{(B + \Delta B)^2}{8\pi}, \quad (4.54)$$

erhält dadurch einen Skalierungsfaktor von

$$\beta_{1/2} = -\frac{l_2}{l_1} \pm \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{8\pi\Delta E}{l_1}}. \quad (4.55)$$

Dabei entspricht $l_1 = \Delta\hat{B}^2$ und $l_2 = B\Delta\hat{B}$. Auch an dieser Stelle entfällt die negative Lösung.

Die Größe ΔE hängt von der Energieinjektion durch eine dedizierte Quelle ab. Je nach Problemstellung kommen beispielsweise Energiebeiträge durch solare Prozesse (Sonnenwind, Flares, CMEs) oder Supernovae in Frage. Es ist also

$$\Delta E = S_e V dt \quad \text{mit} \quad S_e \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{s}} \right], \quad (4.56)$$

wobei der Parameter S_e die Injektion steuert.

Ist die Initialisierung erfolgt, beginnt die Iteration der MHD-Gleichungen. Wie in Abbildung 4.3 dargestellt wird dafür zunächst das Antialiasing mittels Zero-padding durchgeführt, da im nächsten Schritt die FFT angewendet werden soll. Ebenso wird zu Beginn des Iterationsschritts die *CFL-Zahl* ermittelt. Diese wurde als numerisches Stabilitätskriterium von Courant et al. (1928) als

$$cfl = \mathbf{u}_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.57)$$

definiert. Sie gibt an, wie weit sich ein Element pro Zeitschritt fortbewegt. In gängigen Ortsraumverfahren für partielle Differentialgleichungen muss diese Zahl kleiner oder gleich einer problemabhängigen Konstante sein, um Konvergenz zu gewährleisten. Generell entspricht diese Konstante dem Maximum der Charakteristiken. Im Fall subalfvénischer MHD entspricht dies der Alfvéngeschwindigkeit. Für die pseudospektrale Methodik ist diese Bedingung nicht direkt übernehmbar, da eine Ortsdiskretisierung zwar erfolgt, aber nicht unmittelbar in die Berechnungen einfließt. In der Tat ist es schwierig für solche Verfahren überhaupt Stabilitätskriterien zu definieren. Allerdings besteht auch hier eine bestimmte Obergrenze, wie weit sich ein Fluidelement pro Zeitschritt fortbewegen darf, um die numerische Stabilität zu erhalten. Demnach ist ein Zusammenspiel zwischen der Größe des Zeitschritts, der Konvektion und der Diffusion für die Stabilität entscheidend (Gottlieb u. Tadmor 1991).

Im nächsten Teilschritt werden nun durch die P3DFFT die Elsässer-Felder in den Realraum transformiert (kurz: C2R, für Complex to Real). Zwei technische Aspekte müssen an dieser Stelle erwähnt werden.

- (I) Nach der Transformation erfolgt eine Normierung um den Faktor c , wie in Gl. 4.25 ersichtlich. Diese Operation ist nötig, da die FFT grundsätzlich unnormiert ist und nach jeder FFT vom Real- in den Fourierraum (kurz: R2C, für Real to Complex) die Felder um einen Faktor der Anzahl der Gitterpunkte N vergrößert sind. Prinzipiell ist es egal an welcher Stelle der Faktor N^{-1} auf die Felder angewendet wird. Damit aus Gründen der Übersichtlichkeit die gesamte Normierung zentral erfolgt, wird nach der C2R-Transformation der Faktor $N^{-1/2}$ auf die Ortsraumfelder multipliziert. Damit ist es nicht mehr notwendig die Felder nach der Berechnung der quadratischen Terme zu normieren, da diese bereits einen resultierenden Faktor N^{-1} beinhalten. Man muss allerdings jederzeit berücksichtigen, dass die Realraumfelder sich um einen Faktor \sqrt{N} von den Fourierraumfeldern unterscheiden.
- (II) Die Forderung der Hermitizität einer DFT muss gewährleistet werden, da sonst die Transformation nicht korrekt durchgeführt wird. Die P3DFFT stellt diese Bedingung automatisch her, sofern man R2C transformiert. Die Gegenrichtung, C2R, muss hingegen „per Hand“ sichergestellt werden. Sofern man lediglich mit nicht-parallelisierten Simulationen rechnet, ist das herstellen der Hermitizität trivial. Durch das Aufspalten des Problems auf mehrere Prozesse wird dieser Vorgang erheblich komplizierter. So müsste man neben einer optimalen Prozessorkommunikation zusätzlich die korrekte Gitterzuordnung des jeweiligen Prozesses bewerkstelligen. Um dies zu vermeiden, kann man zwei Eigenschaften der P3DFFT ausnutzen. Zum einen sind die Fourierraumfelder bereits um die hermitesch symmetrische Hälfte reduziert. Man muss somit nur noch die Randflächen behandeln. Zum anderen bildet die P3DFFT gemäß der Fourierreihe die Summe jeweils über einen Wert κ im k-Raum und dessen hermitesch symmetrischen Partner κ_H . Damit also die Transformation C2R korrekte Realraumergebnisse liefert, muss lediglich κ mit dem Faktor 2 gewichtet und $\kappa_H = 0$ gesetzt werden. Mit dieser Methode ergeben sich fehlerfreie Realraumfelder, die anschließend wieder mit R2C in den Fourierraum gebracht werden können, um korrekte hermitesch symmetrische k-Raumfelder zu erhalten. Diese müssen abschließend mit dem noch fehlenden Faktor $N^{-1/2}$ nor-

miert werden.

Mit den nun gewonnenen Realraumfeldern lassen sich die Nichtlinearitäten der MHD-Gleichungen berechnen und anschließend wieder in den Fourierraum zurücktransformieren. Die nichtlinearen Felder bedürfen keiner Normierung, da diese bereits durchgeführt wurde. Ein Vorteil der kontrahierten Schreibweise von Gl. 4.21–4.23 ist, dass lediglich einmal die Matrix

$$(\mathbf{w}^-)^T \otimes \mathbf{w}^+ = \begin{pmatrix} w_x^- w_x^+ & w_x^- w_y^+ & w_x^- w_z^+ \\ w_y^- w_x^+ & w_y^- w_y^+ & w_y^- w_z^+ \\ w_z^- w_x^+ & w_z^- w_y^+ & w_z^- w_z^+ \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

berechnet werden muss, da sich aus ihr sämtliche nichtlineare Terme ergeben.

Zurück im Fourierraum werden nun die MHD-Gleichungen zunächst ohne den Hintergrundfeldterm $v_A k_z \tilde{w}_\alpha^\pm$ berechnet. Dieser Term wird im Anschluß durch eine Phasenverschiebung der Elsässerfelder realisiert. Der Vorteil an diesem Vorgehen ist, dass die Berechnung von

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\alpha^\pm &= |\tilde{w}_\alpha^\pm| e^{i\phi} \\ &= |\tilde{w}_\alpha^\pm| e^{i v_A k_z dt} \end{aligned} \quad (4.59)$$

semianalytisch ist. Dadurch weist es eine höhere Stabilität und Genauigkeit gegenüber einer expliziten Berechnung mittels Diskretisierung von $v_A k_z \tilde{w}_\alpha^\pm$ auf.

Mit diesem Schritt ist die erste Iteration der MHD-Gleichungen abgeschlossen. Je nach gewähltem Szenario wird nun wieder Energie in das System gebracht, um die Turbulenz anzutreiben oder dieser Schritt wird übersprungen. Anschließend beginnt der Iterationszyklus von Neuem.

Ist eine Simulation der Testteilchen in den Startbedingungen festgelegt, werden ab dem Erreichen einer beliebig gesetzten Teilchenstartzeit am Ende jeder MHD-Iteration die Felder der Gismo-Particles Routine übergeben.

4.3.2. Gismo-Particles

Wie bereits erwähnt, ist Gismo-Particles eine Subroutine von Gismo-MHD und wird von dort aus angesteuert. Wie in Abbildung 4.3 erkenntlich, werden die Startwerte der

Testteilchen bereits in der allgemeinen Initialisierung festgelegt, sofern die Simulation der Teilchen vorgesehen ist.

Die Teilchenspezies wird anhand ihrer Masse und Ladung festgelegt. Anschließend wird die Gesamtanzahl der Teilchen mit beliebigen Startwerten versehen. Dabei kristallisieren sich zwei verschiedene Grundtypen heraus. Man verteilt alle Testteilchen zufällig über das Simulationsgebiet mit einem konstanten Impulsbetrag mit entweder zufällig (Typ I) oder konstant (Typ II) gewähltem Pitchwinkel μ . Der Impuls wird entsprechend der Koordinatentransformation Gl. 3.142

$$\begin{aligned} p_x &= p\sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi \\ p_y &= p\sqrt{1 - \mu^2} \sin \Phi \\ p_z &= p\mu \end{aligned} \tag{4.60}$$

festgelegt. Dabei erfolgt die Wahl der Ausrichtung in der x-y Ebene über den Parameter Φ ebenfalls zufällig.

Stabilitätskriterium des Boris-Pushs

Schließlich verbleibt noch die Wahl einer geeigneten Zeitdiskretisierung. Wie bereits diskutiert, ist aufgrund der Trennung von kinetischem und fluidynamischem Modell, die Entwicklungszeitskala der Teilchen deutlich kleiner als jene der MHD. Folglich muss auch die Zeitdiskretisierung kleiner sein, also $\Delta t_{\text{MHD}} \gg \Delta t_{\text{T}}$. Da mit dem verwendeten impliziten Boris-Push die Integration an sich immer stabil ist (vgl. Kapitel 4.2.1) und bei schlechter Zeitauflösung lediglich der Larmorradius nicht mehr korrekt dargestellt wird, muss ein geeignetes Verfahren zur Wahl von Δt_{T} gefunden werden. Zu diesem Zweck wurde eine Methode implementiert, die, unter den gegebenen Startbedingungen, ein einzelnes Teilchen in dem Hintergrundfeld gyrieren lässt und dabei den Larmorradius misst. Als Messverfahren wird eine Kreisapproximation verwendet. Drei beliebige Punkte auf der Kreisbahn des Teilchens werden hierfür zu einem Dreieck verbunden, dessen Umkreis die Gyrationbahn widerspiegelt. Für eine hohe Messgenauigkeit werden diese Punkte, nach einem kurzen Einschwingvorgang, bei etwa jedem Drittel der Kreisbahn entnommen. Über die Bestimmung der Kreismittelpunktskoordinaten lässt sich schließlich der Larmorradius bestimmen (siehe Anhang B). Die gewünschte Genauigkeit kann durch die relative Abweichung gegenüber dem analytisch ermittelten $r_L = v_T/\Omega$ festgelegt wer-

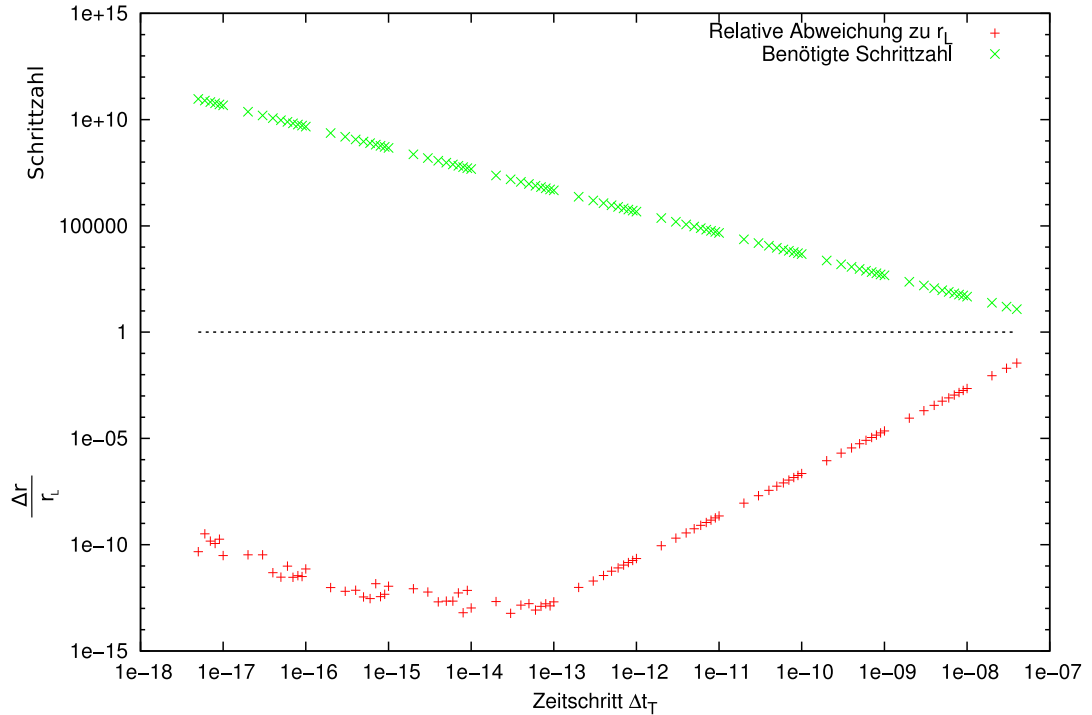


Abbildung 4.4.: Die Abbildung zeigt eine beispielhafte Messreihe zur Ermittlung des Larmorradius um eine geeignete Schrittweite Δt_T zu evaluieren. Der obere Graph stellt die Anzahl der benötigten Schritte für eine Gyration dar. Die Ordinate stellt oberhalb von 1 die Schrittzahl und unterhalb 1 die relative Abweichung dar. Um die Grenzen des Boris-Pushs auszuloten, wurde in dieser Simulation pro Gyrationmessung der Zeitschritt ausgehend von 10^{-7} bis etwa 10^{-17} verringert. An den Fluktuationen unterhalb $\Delta t_T < 10^{-13}$ erkennt man sehr gut, dass die Messungen in den Bereich der Maschinengenauigkeit eingetreten sind. Durch das exponentielle Anwachsen numerischer Fehler steigt die Kurve in Richtung $\Delta t_T \rightarrow 0$ wieder an, da die Schrittzahl pro Gyration sehr hoch ist und sich die Fehler entsprechend fortpflanzen. Um auf sinnvollen Simulationszeitskalen zu bleiben empfiehlt es sich einen Zeitschritt $> 10^{-10}$ zu wählen, dessen relative Abweichung im Bereich 10^{-5} liegt und somit vollkommen ausreichend ist.

den. Um jedoch die Gyrationenperiode auf einem simulierbaren Maßstab zu halten, wird zusätzlich eine maximale Anzahl von Simulationsschritten pro Gyration als Grenzwert gesetzt. Der Zeitschritt Δt_T wird nun sukzessive reduziert und die Gyrationenbewegung erneut gestartet, bis diese beiden Abbruchbedingungen erfüllt sind. In Abbildung 4.4 findet sich eine exemplarische Messreihe dieser Methode. Zusätzlich wird der ermittelte Zeitschritt einer Plausibilitätsprüfung unterzogen, um die Trennung des kinetischen und fluiddynamischen Regimes sicher zu stellen.

Wenn die Startzeit der Testteilchen erreicht ist, erfolgt die Übergabe der \mathbf{w}^\pm -Felder. Damit beginnt der schematische Ablauf, der in Abbildung 4.5 illustriert ist.

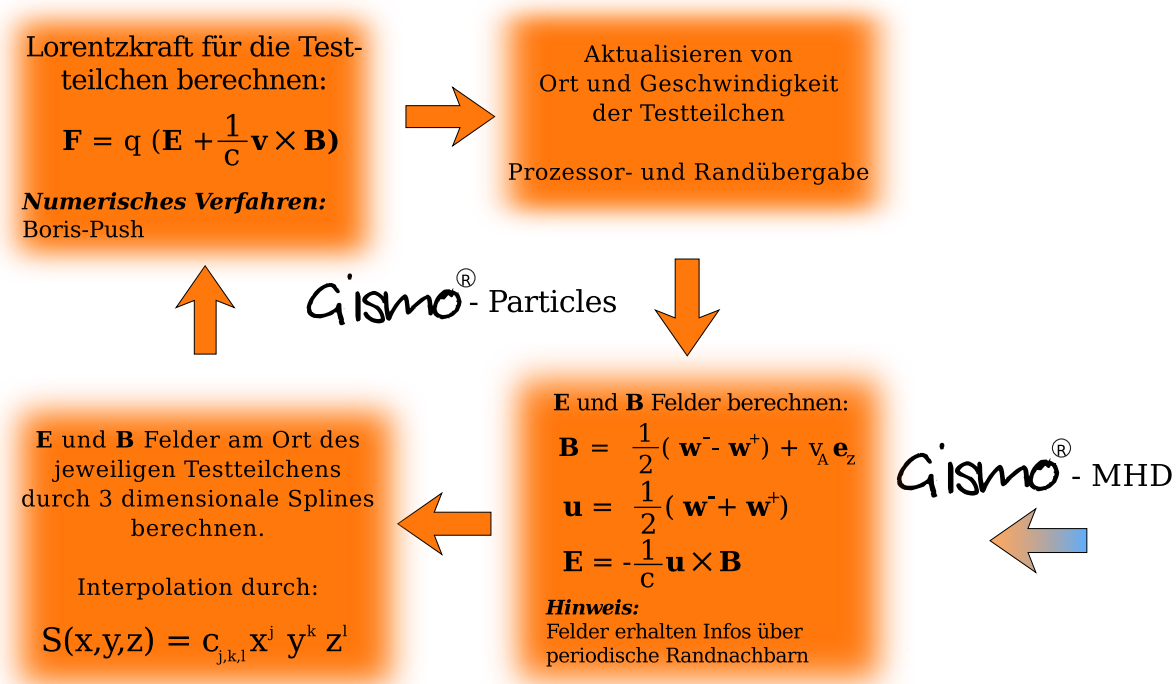


Abbildung 4.5.: Schematischer Ablauf der Testteilchensimulation. Dieser Programmteil ist abhängig von GISMO-MHD und wird von dort aus gesteuert. Die Farbkodierung ist gemäß 4.3.

Magnetische und elektrische Felder

Die Feldgrößen werden unabhängig von den Teilchen in der MHD-Beschreibung gemäß Kapitel 4.1 simuliert. Dabei ergeben sich drei wesentliche Unterschiede zu den, von den Testteilchen benötigten, elektrischen und magnetischen Feldern.

- (I) Die MHD-Felder liegen in Elsässernotation als vorwärts und rückwärts laufende Wellen \mathbf{w}^\pm vor.
- (II) Zwar sind die Felder \mathbf{w}^\pm mit periodischen Randbedingungen ausgestattet, diese werden aber implizit durch die FFT generiert, da die zeitliche Evolution der MHD-Gleichungen im Fourierraum stattfindet, in dem keine Randbedingungen vorliegen. Die Teilchen benötigen jedoch Realraumfelder mit periodischen Rändern.

(III) \mathbf{w}^\pm werden durch ein Gitter der Auflösung $N = N_x \times N_y \times N_z$ diskretisiert und sind folglich in Zellen untergliedert, während die Teilchen einer kontinuierlichen Ortsbeschreibung im Simulationsgebiet folgen.

Der erste Punkt lässt sich leicht beheben, indem man zunächst die Rücktransformation in \mathbf{b} - und \mathbf{v} -Felder gemäß den Gl.en 3.61 oder A.7 und A.8 durchführt. Anschließend verwendet man das ideale Ohmsche Gesetz um die elektrischen Felder durch

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{b} \quad (4.61)$$

zu berechnen.

Um Punkt (II) zu realisieren, werden den so gewonnenen \mathbf{E} - und \mathbf{b} -Feldern anschließend Ränder mit der Breite von zwei Zellen in jeder Richtung angefügt. Diese Ränder werden jeweils mit den Feldwerten der gegenüberliegenden Seiten gefüllt.

Der dritte Punkt ist etwas komplexer, da man eine geeignete Interpolationsmethode finden muss, um das Feld am Ort eines Teilchens zu bestimmen. Es erweist sich als unzureichend, auf jedes Teilchen direkt das Feld einer Plasmazelle wirken zu lassen, vor allem bei geringen Auflösungen N . Auch eine lineare Interpolation, also eine simple Zellmittelpunktbildung weicht deutlich von analytischen Ergebnissen ab. Eine sehr gute Genauigkeit im Einklang mit annehmbarem Rechenaufwand, wird durch eine Interpolation mit einem Polynom 3. Grades

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (4.62)$$

mit den Koeffizienten c_i erzielt, was in dreidimensionaler Form

$$S(x, y, z) = c_{ijk} x^i y^j z^k, \quad (4.63)$$

unter Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention, eine Matrixgleichung ergibt. Um die Felder sämtlicher Nachbarzellen durch diese Methode zu interpolieren muss die 64×64 Koeffizientenmatrix c_{ijk} lediglich einmal bestimmt werden, da deren Form unabhängig von der Auflösung des Gitters ist. Diese Matrix wurde von Weiss (2011) durch *Mathematica* berechnet und wird in GISMO verwendet. Zusammen mit dem Ort des jeweiligen Teilchens, ist das Gleichungssystem 4.63 bestimmt und das Feld kann recht exakt ermittelt werden. Solche Glättungsverfahren mit beliebigen Polynomen, die durch

Fixpunkte bestimmt sind, bezeichnet man auch als *Splines*. Begriff und Methode wurden durch Schoenberg (1946) geprägt, der vom Schiffsbau inspiriert wurde, wo sogenannte *Straklatten* (engl.: Splines) sich entlang des Schiffskörpers biegen, da sie an dem Grundgerüst, also den Spanten, punktweise fixiert werden.

Eine Konsequenz aus dieser Interpolationsmethode ist, dass die Felder mit einem Rand erweitert werden müssen, indem die periodischen Übergänge zu den gegenüberliegenden Seiten gespeichert sind. Nur dadurch kann eine korrekte Feldinterpolation für Teilchen erfolgen, die sich Nahe der Grenze der Simulationsbox befinden.

Sind die elektrischen und magnetischen Felder am Ort des jeweiligen Testteilchens bekannt, wird im nächsten Schritt der Boris-Push ausgeführt. Dabei wird das Gleichungssystem 4.36-4.39 gelöst um die Geschwindigkeit des Teilchens zu aktualisieren. Der Ort kann dann gemäß

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}^+ dt \quad (4.64)$$

neu zugewiesen werden.

Im abschließenden Schritt der Testteilcheniteration wird geprüft, ob sich der aktuelle Ort noch innerhalb der simulierten Box befindet. Falls die Grenzen überschritten wurden, wird das entsprechende Teilchen periodisch an den gegenüberliegenden Rand transferiert. Da GISMO vollständig parallelisiert ist, muss an dieser Stelle ebenfalls geprüft werden, ob das Teilchen seine *lokalen Koordinaten*, also die Grenzen des aktuellen Prozesses, verlassen hat. Gegebenfalls muss eine Prozessorübergabe erfolgen. Dieses und weitere Details der Parallelisierung werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

4.3.3. Parallelisierung

Ein Großteil der physikalischen Problemstellungen bedürfen hoher Orts- und somit Wellenmodenauflösung. Bereits Gittergrößen mit mehr als 128^3 Zellen, die lediglich 21 aktive Moden beinhalten, können nicht mehr sinnvoll auf einem lokalen Rechner durch einen einzelnen Prozessor (*CPU*, engl. *central processing unit*), berechnet werden. Es ist also unabdingbar eine Parallelisierung durchzuführen, um eine Simulation auf mehrere CPUs zu verteilen. Die Grundidee ist es demnach ein Ausgangsproblem, dass auf dem sogenannten *globalen* Gitter definiert ist, in kleinere, sogenannte *lokale* Gitter, zu unterteilen.

Ein Vorteil pseudospektraler Methodik liegt in der ortsunabhängigen Behandlung des Gleichungssystems. D.h. es ist nicht nötig periodische Randbedingungen oder korrekte Übergaben zwischen den Prozessen zu gewährleisten. Lediglich die Fouriertransformation muss ganzheitlich über das globale Gitter kommunizieren. Aus diesem Grund wurde die P3DFFT als Fouriertransformation ausgewählt, denn sie bietet eine parallel ausführbare FFT an, die zudem eine beliebige Prozessoraufteilung zulässt. Ein Großteil der Parallelisierung von GISMO-MHD wird somit bereits durch die P3DFFT erledigt. Im Speziellen wird die Prozessorkommunikation intern von der P3DFFT ausgeführt, die sich der Parallelisierung mittels des MPI bedient. Es muss lediglich sichergestellt werden, dass die Berechnungen auf den korrekten lokalen Koordinaten erfolgen.

Die Parallelisierung von GISMO-Particles erweist sich als schwieriger. Die Testteilchen werden ausschließlich im Realraum simuliert. Demnach muss eine korrekte Randübergabe und Prozessorkommunikation erfolgen. Da bereits die Prozessanordnung und Gitteraufteilung durch MPI intern von der P3DFFT initialisiert wurde besteht bereits ein `MPI_COMM_WORLD`, sowie ein kartesischer `MPI_CART_COMM` Kommunikator. Leider ist in der verwendeten Version der P3DFFT (V 2.4) kein Standardzugriff auf diese MPI-Funktionen möglich. Daher wurde die P3DFFT angepasst. Dieser stark technische Aspekt wird dem interessierten Leser im Anhang D erläutert. Speziell der kartesische Kommunikator spielt eine zentrale Rolle, da er die CPU-Aufteilung beinhaltet.

Im ersten Schritt der Parallelisierung von GISMO-Particles müssen die elektrischen und magnetischen Felder auf dem lokalen Gitter definiert werden. Durch die, im vorangegangenen Kapitel erläuterten Splines, muss auch an dieser Stelle jedes lokale Feld einen Rand erhalten, der die Informationen der Feldwerte des benachbarten Prozesses enthält. Es werden demnach bei der Berechnung von \mathbf{E} und \mathbf{B} mittels des kartesischen Kommunikators, die Randwerte der lokalen Nachbargitter kopiert.

Im zweiten Schritt müssen schließlich noch die Testteilchen an sich parallelisiert werden. Zu diesem Zweck wird nach dem Boris-Push, mit der darauffolgenden Ortsaktualisierung für jedes Teilchen überprüft, ob es sich weiterhin auf seiner ursprünglichen CPU aufhält. Falls nicht, wird es in eine Transferliste eingetragen, die nach Prüfen aller Teilchenorte die Übertragung zwischen den Prozessen markiert. Um eine hohe Effizienz zu erhalten, darf ein Teilchen dabei nicht weiter als zu einem direkten Nachbarprozess übermittelt werden, da ansonsten die Kommunikation zwischen sämtlichen Prozessen stattfinden müsste. Diese Optimierung bringt keinerlei Einschränkungen mit sich, da

im Normalfall ein solcher Transfer auch durch die CFL-Bedingung (vgl. Kapitel 4.3.1) instabil sein würde und folglich nicht zulässig wäre.

Im Wesentlichen ist mit diesen Schritten der Kernpunkt der Parallelisierung von GISMO erfasst. Um zu prüfen, ob dies erfolgreich durchgeführt wurde, sind Skalierungstests gemacht worden. Diese bemessen, inwiefern eine optimale Parallelisierung vorliegt, d.h. ob eine Problemstellung sinnvoll von mehreren Prozessen bearbeitet werden kann oder ob durch die unausweichliche CPU-Kommunikation mehr Rechenlast als Nutzen entsteht. Die Resultate in Anhang E zeigen eine nahezu optimale Parallelisierung von GISMO.

4.3.4. Normierungen

Es ist in numerischen Verfahren ein probates Mittel die Variablen und Gleichungssätze zu normieren. Dies kann zur Übersichtlichkeit und Stabilität bezüglich der Maschinengenauigkeit beitragen. Die Normierung von GISMO trennt sich in die mathematische Norm der P3DFFT und die physikalischen Skalierungen.

Norm der Fouriertransformation

Wie schon in Kapitel 4.3.1 diskutiert, erhalten die Felder durch die FFT nach jeder Transformation vom Realraum in den Wellenzahlraum einen Faktor N . Somit muss nach je zwei FFTs eine Normierung durch die Anzahl der Gitterpunkte erfolgen. Am Beispiel in einer Dimension ist die diskrete Fouriertransformation also:

$$\tilde{F}(k) = N \cdot \sum_x f(x) e^{-ikx2\pi/N} \quad (4.65)$$

$$f(x) = \sum_x \tilde{F}(k) e^{ikx2\pi/N} \quad (4.66)$$

Wie in Abbildung 4.3 ersichtlich, werden folgende drei FFTs pro MHD-Schritt ausgeführt:

- 1) Werte des aktuellen Zeitschritts von $\tilde{\mathbf{w}}$ werden in den Realraum transformiert (C2R), um die Nichtlinearitäten zu berechnen:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}) \Rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{r})$$

- 2) Anschließend wird direkt eine Rücktransformation durchgeführt, um die korrekten, hermitesch symmetrischen Felder $\tilde{\mathbf{w}}$ herzustellen (R2C):

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) \Rightarrow \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k})$$

- 3) Nach der Berechnung von $\mathbf{w}\mathbf{w}$ wird wieder zurücktransformiert (R2C):

$$\mathbf{w}\mathbf{w}(\mathbf{r}) \Rightarrow \widetilde{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\mathbf{k})$$

Die entsprechenden Normierungen erfolgen dann in dieser Form:

- 1) C2R: Normierung mit $1/\sqrt{N}$:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{w}(\mathbf{r})$$

- 2) R2C: Erneute Normierung mit $1/\sqrt{N}$, womit sich der nötige Gesamtfaktor N^{-1} ergibt:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{w}(\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{N}{\sqrt{N}\sqrt{N}}\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k})$$

- 3) R2C: bei der Transformation der Nichtlinearitäten ist keine Normierung mehr nötig, da bereits durch die Norm unter Punkt 1) der Gesamtfaktor N^{-1} erzeugt wurde:

$$\frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N}}\mathbf{w}\mathbf{w}(\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{N}{\sqrt{N}\sqrt{N}}\widetilde{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\mathbf{k})$$

Es kommt hinzu, dass die Realraum Felder aufgrund der hermiteschen Symmetrie die doppelte Amplitude tragen, so das sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}) = \frac{2}{\sqrt{N}}\mathbf{w}(\mathbf{r}) \quad (4.67)$$

Die Normierung in GISMO ist so gewählt, dass die Energie zwischen Real- und Fourier-raum entsprechend dem *Parsevalschen Theorem* erhalten ist:

$$\sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} |\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k})|^2 = \sum_{\mathbf{r}=0}^{N-1} |\mathbf{w}(\mathbf{r})|^2 \quad (4.68)$$

Physikalische Skalierung

Die physikalischen Werte werden in GISMO durch die Basisnormierung der Ladung q , der Masse m , der Massendichte ρ , des Ortes x , sowie der Plasmageschwindigkeit u

$$q = q_0 q' \quad (4.69)$$

$$m = m_0 m' \quad (4.70)$$

$$\rho = \rho_0 \rho' \quad (4.71)$$

$$x = L_0 x' \quad (4.72)$$

$$u = u_0 u' \quad (4.73)$$

festgelegt. Außerdem lassen sich die einzelnen Dimensionen durch den Skalierungsvektor

$$\mathbf{l}_{\text{box}} = (l_{bx}, l_{by}, l_{bz})^T \quad (4.74)$$

anpassen. Über diese Norm ist auch der Wellenzahlvektor

$$\mathbf{k}_{\text{box}} = \frac{2\pi}{L_0} (k'_x l_{bx}^{-1}, k'_y l_{by}^{-1}, k'_z l_{bz}^{-1})^T \quad (4.75)$$

definiert. Im folgenden Ergebnisskapitel wird häufig die numerische Wellenzahl benutzt, die einem ganzzahligen numerischen Gitter entspricht (vgl. Kapitel 4.3.1).

Mit der Wahl der Skalierung der MHD-Gleichungen in Kapitel 3.1.4, folgt für das Plasmamagnetfeld die Normierung

$$b = b_0 b' = \sqrt{4\pi\rho_0} b'. \quad (4.76)$$

In diesem System verbleibt die Plasmageschwindigkeit unskaliert

$$u = u_0 u' \stackrel{u_0=1}{=} u' \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right], \quad (4.77)$$

also entspricht der numerische Wert vom Betrag her dem physikalischen Pendant, zuzüglich der Dimension. Die Teilchengeschwindigkeiten $v = v_0 v'$ folgen der selben Norm, also $v_0 = u_0$.

Durch die Wahl dieser Skalierung entspricht die Alfvéngeschwindigkeit im Betrag dem Wert des numerischen Hintergrundmagnetfelds.

Die Normierung der Zeitskala ist dementsprechend durch Systemgröße und Geschwindigkeitsnorm bestimmt:

$$t = t_0 t' = \frac{L_0}{u_0} t'. \quad (4.78)$$

Wendet man die Norm auf die Lorentzkraft (Gl. 3.5) an

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{q}{c}(-\mathbf{u} \times \mathbf{b} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) \\ &= q_0 u_0 b_0 \frac{q'}{c}(-\mathbf{u}' \times \mathbf{b}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{b}'), \end{aligned} \quad (4.79)$$

erhält man gemäß $F = F_0 F'$ den Skalenfaktor

$$F_0 = q_0 u_0 b_0. \quad (4.80)$$

Es folgt somit für die Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ der Testteilchen die Normierung

$$\begin{aligned} \frac{u_0 m_0}{t_0} \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} &= \frac{u_0^2 m_0}{L_0} \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} &= \frac{q_0 b_0 L_0}{m_0 u_0} \mathbf{F}'. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Aus der angegebenen Norm lässt sich schließlich die Energieinjektionsrate S_e skalieren. Diese ist durch die Energienorm $E_0 = \rho_0 u_0^2$ pro Zeitskala gegeben, was folglich zu

$$S_e = S_{e0} S'_e = \frac{\rho_0 u_0^2}{t_0} S'_e = \frac{\rho_0 u_0^3}{L_0} S'_e \quad (4.82)$$

führt.

4.4. Kritische Betrachtung und Grenzen des Modells

Mit der vorgestellten Phänomenologie und deren theoretischen Grundlagen, sowie Umsetzung in der Methodik, ist das Modell nun ausreichend beschrieben. Zum Abschluss soll an dieser Stelle noch einmal dessen Gültigkeit herausgestellt und bewertet werden.

Das Ziel dieser Dissertation ist es Phänomene innerhalb der Heliosphäre zu untersuchen. Dies gliedert sich zum einen in die Modellierung wellendominierter Plasmaturbulenz und zum anderen in Teilchentransport-, sowie Beschleunigungsphänomene. Dabei wurde für die Turbulenzsimulation die Methodik der inkompressiblen Magnetohydro-

dynamik gewählt, wohingegen das Teilchenmodell die kinetische Beschreibung durch direkte Simulation der Lorentzkraft benutzt.

4.4.1. Modell der Plasmaturbulenz

Wie bereits in der Phänomenologie herausgearbeitet wurde, ist die Heliosphäre äußerst komplex und demnach nur schwer mit einer einzelnen Methode zu beschreiben. Folglich ist zunächst entscheidend, welche Skalen von Interesse sind. Für räumliche Ausdehnungen, die größer als die mittlere freie Weglänge der Plasmateilchen sind, liegt ein kollisionsdominiertes Plasma vor. Für solche Bereiche ist die Magnetohydrodynamik eine äußerst gute Methode, solange man kinetische Effekte vernachlässigen kann, die oberhalb der Ionen-Zyklotron-Frequenz eine Rolle spielen.

Ist die MHD anwendbar, muss ein geeignetes Gleichungssystem gewählt werden. Im Wesentlichen unterscheidet man an dieser Stelle zwischen der inkompressiblen und kompressiblen Theorie. Zwar lässt sich durch letztere ein allgemeineres Modell erstellen, allerdings birgt die numerische Umsetzung i.d.R. erhebliche Probleme. Als gravierendes Problem sei hier die numerische Dissipation genannt, die zu einer starken Reduktion des Inertialbereiches des Kolmogorovspektrums führt und somit im Kontrast zu den Beobachtungen steht. Hier liegt der Vorteil in der inkompressiblen Methodik, mit der man in der Lage ist eine realistische Plasmaturbulenz bis hin zu kleinen Skalen zu simulieren. Des Weiteren liegen viele Phänomene im inkompressiblen Regime. So sind weite Teile der Heliosphäre Alfvénwellendominiert, vor allem aufgrund der starken Dämpfung kompressibler Moden, was in diesen Bereichen eine Anwendung der iMHD rechtfertigt. Im Speziellen ist der schnelle Sonnenwind weitestgehend als inkompressibel zu betrachten, wie in Kapitel 2.2 diskutiert. Dabei sollte das physikalische Gebiet allerdings klein genug sein um Störeffekte zu vermeiden. Das gewählte Modell ist beispielsweise nicht mehr auf Skalen anwendbar, auf denen die Krümmung des Hintergrundmagnetfeldes der Parkerspirale dominant wird. Außerdem können spezielle Gebiete, wie die CIRs nicht korrekt dargestellt werden, da dort ein hohes Maß an Kompressibilität vorliegt.

Eine weiterer Vorteil der inkompressiblen MHD liegt in der Möglichkeit der theoretischen Beschreibung der Turbulenz. So sind die Modelle von Sridhar u. Goldreich (1994); Goldreich u. Sridhar (1995), die eine anisotrope Energiekaskade vorhersagen, sehr gut etabliert. Für kompressible MHD-Turbulenz gibt es hingegen derzeit keine geschlossene

Theorie.

Um inkompressible MHD-Turbulenz zu erforschen bietet GISMO eine ideale Grundlage. So können unterschiedliche Szenarien simuliert werden. Das Treiben der Turbulenz kann beliebig an das jeweilige Szenario angepasst werden. So ist es möglich spezielle Moden anzuregen, anisotrop oder isotrop zu treiben, nach einmaliger Energieinjektion den Zerfall von Turbulenz zu untersuchen oder kontinuierlich Energie in das System einzuschießen, nur um einige signifikante Optionen zu nennen (vgl. Kapitel 4.3). Des Weiteren erlaubt die Parallelisierung die Portierung des Problems auf Großrechner, um eine möglichst hohe Auflösung der Wellenmoden zu erhalten.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Anwendungsmöglichkeiten von GISMO nicht auf die Heliosphäre beschränkt sind. Beispielsweise kann auch eine Vielzahl von Gebieten im *interstellaren Medium (ISM)* simuliert werden. Dies liegt vor allem an der Alfvénwellendominanz, da auch im ISM effiziente Dämpfungsmechanismen speziell auf kompressible Moden wirken.

4.4.2. Modell des Teilchentransports

Die Simulation des Teilchentransports ist durch die Wahl der Methodik gegenüber anderen Modellen äußerst exakt. Der Einfluss der Feldgrößen auf die Teilchen wird realistisch durch die Lorentzkraft beschrieben. Dabei werden so gut wie keine Näherungen getroffen, d.h. die Teilchen folgen ihren tatsächlichen Trajektorien unabhängig von lokalen Störungen im Magnetfeld, die beispielsweise von der quasilinearen Theorie nicht erfasst werden können.

Mit der Umsetzung durch den Boris-Push wird zudem der numerische Fehler drastisch reduziert. Die Teilchen folgen durch dieses implizite Verfahren immer stabilen Gyrationbahnen, die lediglich im Rahmen der numerischen Genauigkeit minimal abweichende Larmorradien haben, jedoch nicht diese Trajektorie aufgrund numerischer Effekte verlassen (wie z.B. instabile Spiralbahnen). Durch das automatische Anpassen des Zeitschritts, bei jeder Initialisierung einer Simulation, an eine gewünschte relative Abweichung (vgl. Kapitel 4.3.2) ist eine hohe Genauigkeit stets gewährleistet. Die Grenze dieses Verfahrens liegt in der Beschreibung ultrarelativistischer Teilchen. So liefert der Boris-Push keine zuverlässigen Ergebnisse ab Gammafaktoren über $\gamma \approx 10^3$ (vgl. Kapitel 4.2.1).

Die Parallelisierung von GISMO erlaubt es problemlos realistische Teilchenzahlen von

10^6 in Standardsimulationen zu berechnen. Der Vorteil solcher großen Anzahlen liegt in der sehr guten Statistik, so dass man physikalische Effekte deutlich vom statistischen Rauschen unterscheiden kann.

Eine wichtige Grenze der verwendeten Methodik liegt in der Rückwirkung der Teilchen auf das Hintergrundplasma. Diese kann von GISMO nicht dargestellt werden, da die Regimes von Magnetohydrodynamik und kinetischem Teilchenmodell physikalisch strikt getrennt sind. Es zeigt sich jedoch, dass dies kein gravierendes Problem darstellt, sofern man nicht an der Veränderung der Turbulenz durch die Teilchen interessiert ist. In diesem Fall würde die Landaudämpfung, also das Entziehen von Energie aus Wellenmoden bei resonanten Welle-Teilchen-Interaktionen, eine wichtige Rolle spielen.

5. Ergebnisse

Die Ergebnisse dieser Dissertation werden analog zu den vorangegangenen Kapiteln in zwei Teilen präsentiert. Im ersten Abschnitt werden Resultate aus der Simulation von Plasmaturbulenz vorgestellt. Dabei wird ein spezieller Bezug zu der Entwicklung verstärkter Wellenmoden hergestellt, die das Szenario eines koronalen Masseauswurfs oder eine Flares widerspiegeln sollen (vgl. Kapitel 2.4). Der zweite Teil widmet sich dem Transport und der Streuung von kinetischen, geladenen Teilchen an eben solchen getriebenen Wellenmoden. Hier liegt das Augenmerk auf der Änderung des Pitchwinkelkoeffizienten und der damit zusammenhängenden Beschleunigung, die Teilchen in den SEP-Ereignissen erfahren (vgl. 2.5). Zu diesem Zweck werden Testteilchensimulationen im Hintergrundplasma mit verstärkten Wellenmoden durchgeführt.

Um signifikante wissenschaftliche Aussagen treffen zu können, muss man das verwendete Modell einer ausführlichen Prüfung unterziehen. So wird GISMO mit seinen Subroutinen GISMO-MHD und GISMO-PARTICLES zunächst anhand verschiedener Testfälle validiert.

5.1. Validierung von Gismo

Die Konstruktion von Testfällen ist ein wichtiger Schlüsselpunkt der numerischen Beschreibung. Neben der unbedingt erforderlichen Validierung des Modells, erzeugt das Berechnen analytisch und physikalisch nachvollziehbarer Szenarien ein tiefergehendes Verständnis. Die Schwierigkeit besteht darin, solche Testfälle zu finden, die nichttrivial und dennoch analytisch zu berechnen sind. Zu diesem Zweck werden im Folgenden zunächst Grundlagentests erstellt, die einfache physikalische Eigenschaften beschreiben, um anschließend komplexere Testfälle durchzuführen.

5.1.1. Testfälle der MHD

Wellenbewegung

Der einfachste Test der MHD-Gleichungen betrifft den Einfluss des Hintergrundmagnetfeldes auf eine Alfvénwelle ohne Resistivität ($\nu = 0$). Wie man sich leicht klar machen kann, reduziert sich folglich durch die Initialisierung einer einzelnen Welle, der Satz der MHD-Gleichungen auf

$$(\partial_t - v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^- = 0 \quad (5.1)$$

$$(\partial_t + v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^+ = 0 \quad (5.2)$$

$$k_\alpha \tilde{w}_\alpha^\pm = 0, \quad (5.3)$$

da die nichtlinearen Terme stets einen Faktor Null beinhalten. Dementsprechend sollte die Zeitentwicklung lediglich eine Einzelwelle aufweisen, die entweder parallel (\mathbf{w}^+) oder antiparallel (\mathbf{w}^-) zum Hintergrundfeld propagiert.

In Abbildung 5.1 ist eine beispielhafte Testsimulation dargestellt. Die eingestellte Alfvéngeschwindigkeit war $10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Als Startwert wurde eine Welle mit Kosinusform in z -Richtung gewählt, wobei die Simulationsbox mit $L = 10^8 \text{ cm}$ durch 128^3 Gitterzellen aufgelöst wurde. Nach 4 s physikalischer Simulationszeit wurde eine Messung mittels Schnitt entlang der z -Achse vorgenommen und die Phasendifferenz zwischen \mathbf{w}^\pm und Initialwelle ermittelt. Wie erwartet, hat sich die \mathbf{w}^+ -Welle um 51,2 Gitterzellen in positive Richtung bewegt, was bei einer äußeren Längenskala von 10^8 cm eine physikalische Distanz von $4 \cdot 10^7 \text{ cm}$ darstellt. Folglich hat sich die Welle exakt mit Alfvéngeschwindigkeit bewegt. Gleiches gilt für die \mathbf{w}^- Welle, die sich 51,2 Gitterzellen in negative Richtung bewegt hat. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden die Kosinuskurven mit entsprechender Phasenverschiebung abgebildet. Die Messpunkte liegen sehr gut auf dem theoretischen Verlauf.

Damit ist die Grundlage für komplexere Testfälle gelegt.

Nichtlinearer Testfall

Die vollständige MHD-Entwicklung zu beliebigen Zeiten nachzuvollziehen, ist auf analytischem Wege nicht möglich. Durch die nichtlineare Wechselwirkung können verschiedene Moden aneinander koppeln und neue Wellen erzeugen (vgl. Kapitel 3.1 und 3.2), die sich

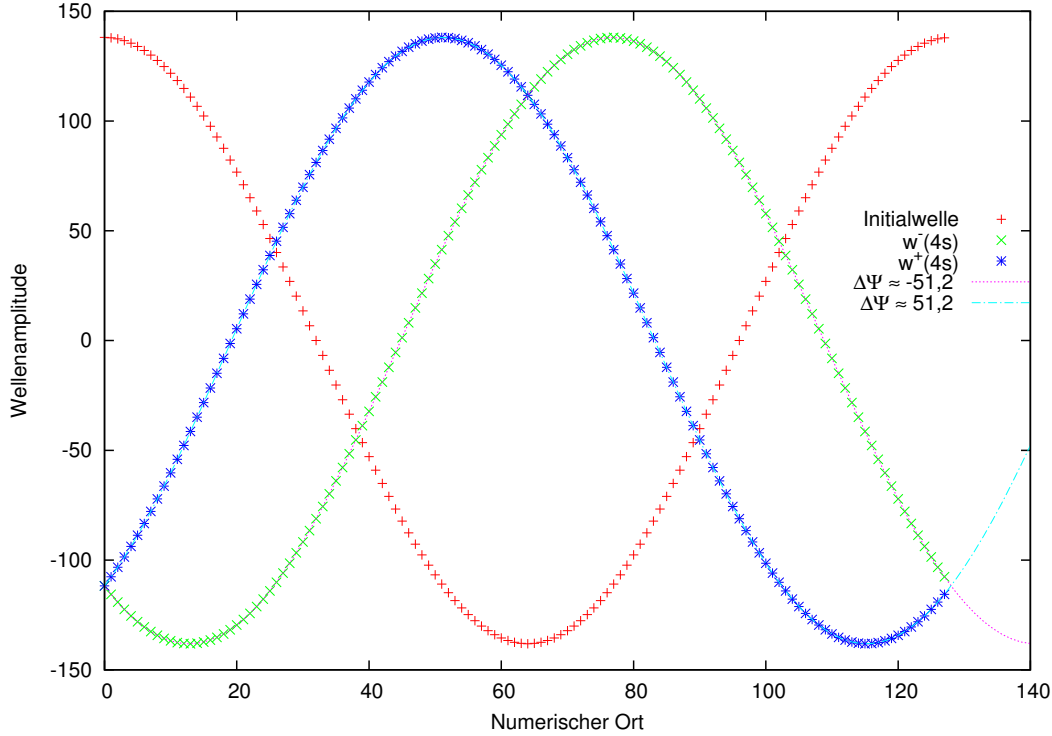


Abbildung 5.1.: Grundagentestfall von purer Alfvénwellenpropagation. Zur besseren Darstellbarkeit wurde ein Schnitt entlang der z -Achse durch den dreidimensionalen Realraum durchgeführt. Die Initialwelle (rote Punkte) wurde mit beliebiger Amplitude und $\mathbf{k}' = (0, 0, 1)^T$ für \mathbf{w}^+ , sowie \mathbf{w}^- definiert. Die Messwerte für beide Wellen wurden nach 4 s physikalischer Simulationszeit genommen. Die Längenskala der Simulationsbox entspricht 10^8 cm, die Alfvéngeschwindigkeit beträgt 10^7 cm · s⁻¹. Zum Abgleich wurden die beiden Kosinuskurven mit der erwarteten Phasenverschiebung eingezeichnet.

wiederum mit anderen Wellen überlagern. So kann schon nach wenigen Schritten keine analytische Berechnung mehr erfolgen. Dennoch kann man einen Testfall konstruieren, der halb-analytisch den ersten Zeitschritt vorhersagen kann.

Um zunächst methodische Fehler auszuschließen, wird die analytische Rechnung lediglich für die Realraumgleichungen

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}^- = \mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- + \nabla P - v_A \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^- \quad (5.4)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}^+ = \mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ + \nabla P + v_A \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^+, \quad (5.5)$$

durchgeführt. Zur Vereinfachung wurde erneut $\nu = 0$ gesetzt.

Der Testfall muss nun so konstruiert werden, dass der nichtlineare Term erhalten bleibt. Dies ist, wie bereits in Kapitel 3.1.5 eruiert, nur der Fall, wenn mindestens zwei unterschiedlich propagierende Wellenpakete aufeinander treffen. Um zu ermitteln, welche der Vektorkomponenten von \mathbf{w}^\pm für diesen Test initialisiert werden müssen, ist es hilfreich sich die Form von $\mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^-$ zu verdeutlichen. Bei genauerer Betrachtung wird klar, dass die Verknüpfung dieses Terms eine Tensorkontraktion der Form

$$\mathbf{w}^\pm \cdot \nabla \mathbf{w}^\mp = \begin{pmatrix} w_x^\pm \partial_x w_x^\mp + w_y^\pm \partial_y w_x^\mp + w_z^\pm \partial_z w_x^\mp \\ w_x^\pm \partial_x w_y^\mp + w_y^\pm \partial_y w_y^\mp + w_z^\pm \partial_z w_y^\mp \\ w_x^\pm \partial_x w_z^\mp + w_y^\pm \partial_y w_z^\mp + w_z^\pm \partial_z w_z^\mp \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

darstellt. Anhand dieses resultierenden Vektors ist man schließlich in der Lage verschiedene Komponenten zu wählen, so dass $\mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- \neq 0$. Dabei ist die Quellenfreiheit von \mathbf{w}^\pm zu beachten. Es wurden verschiedene Kombinationen zur Validierung von GISMO getestet. Hier soll die Wahl

$$\begin{aligned} w_z^+ &= A_1 \sin(k_\perp^{+a} y + k_\perp^{+b} x) \\ w_x^- &= A_2 \sin(k_\parallel^- z + k_\perp^- y + \phi), \end{aligned} \quad (5.7)$$

als Beispiel dienen. Dadurch ergeben sich die folgenden nichtlinearen Terme

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_x^- \partial_x w_z^+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_1 A_2 k_\perp^{+b} \cos(k_\perp^{+a} y + k_\perp^{+b} x) \sin(k_\parallel^- z + k_\perp^- y + \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ &= \begin{pmatrix} w_z^+ \partial_z w_x^- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 A_2 k_\parallel^- \sin(k_\perp^{+a} y + k_\perp^{+b} x) \cos(k_\parallel^- z + k_\perp^- y + \phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nun wird der Druckterm gemäß Kapitel 3.1.4 und 3.1.5, Gl. 3.65 durch bilden der Divergenz der MHD-Gleichungen ermittelt, was durch

$$\nabla^2 P = \nabla \mathbf{w}^+ \otimes \nabla \mathbf{w}^-, \quad (5.10)$$

die MHD-Entwicklung schließt. Anhand des gewählten Beispiels ergibt sich der Druckterm zu

$$\begin{aligned} \nabla^2 P &= \partial_x (w_z^+ \partial_z w_x^-) = \partial_z (w_x^- \partial_x w_z^+) \\ &= A_1 A_2 k_\perp^{+b} k_\parallel^- \cos(k_\perp^{+a} y + k_\perp^{+b} x) \cos(k_\parallel^- z + k_\perp^- y + \phi). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich beispielsweise durch Fouriertransformation lösen

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{A_1 A_2 k_\perp^{+b} k_\parallel^- \pi^{3/2}}{\sqrt{2} k^2} \left[e^{-i\phi} \left(\delta(-k_\perp^{+b} + k_x) \delta(k_\perp^{+a} + k_\perp^- - k_y) \delta(-k_\parallel^- + k_z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta(k_\perp^{+b} + k_x) \delta(k_\perp^{+a} - k_\perp^- + k_y) \delta(-k_\parallel^- + k_z) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\phi} \left(\delta(-k_\perp^{+b} + k_x) \delta(-k_\perp^{+a} + k_\perp^- + k_y) \delta(k_\parallel^- + k_z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta(k_\perp^{+b} + k_x) \delta(k_\perp^{+a} + k_\perp^- + k_y) \delta(k_\parallel^- + k_z) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

und ergibt führt zu

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} A_1 A_2 k_\perp^{+b} k_\parallel^- \left(\frac{\cos(k_\perp^{+b} x + k_\perp^{+a} y - k_\perp^- y - k_\parallel^- z - \phi)}{(k_\perp^{+a})^2 + (k_\parallel^-)^2 + (k_\perp^{+a} - k_\perp^-)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(k_\perp^{+b} x + k_\perp^{+a} y + k_\perp^- y + k_\parallel^- z + \phi)}{(k_\perp^{+a})^2 + (k_\parallel^-)^2 + (k_\perp^{+a} + k_\perp^-)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Im nächsten Schritt kann nun die Zeitentwicklung berechnet werden. Zu diesem Zweck wurde eine kurzes C-Programm geschrieben, dass einen einzelnen Zeitschritt durch das Euler-Verfahren ermittelt.

Schließlich wurden mit GISMO die selben Startbedingungen gemäß den Gl.en 5.7 gewählt und ebenfalls ein Euler-Schritt berechnet. Dementsprechend sollte eine sehr gute Vergleichbarkeit zwischen den halbanalytischen \mathbf{w}^\pm Feldern und den Resultaten von GISMO vorliegen.

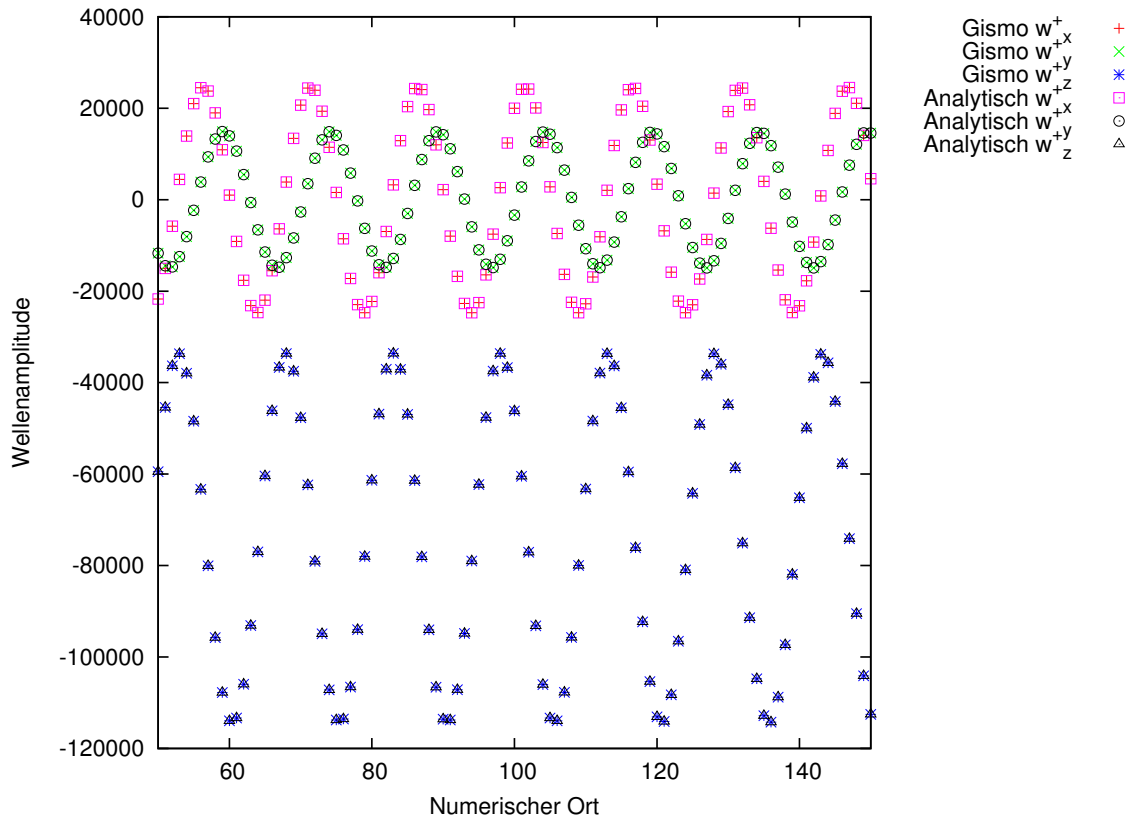


Abbildung 5.2.: *Auszug eines beliebigen eindimensionalen Schnitts entlang der z-Achse für das w^+ Feld, jeweils für den nichtlinearen Testfall für GISMO und den halbanalytischen Resultaten. Beide Lösungsmethoden liefern nahezu identische Ergebnisse.*

Zur Veranschaulichung der Testergebnisse wurden erneut beliebige eindimensionale Schnitte aus den Feldern extrahiert und miteinander verglichen. In Abbildung 5.2 findet sich beispielhaft ein Auszug eines Schnitts entlang z-Richtung für das w^+ Feld. Offensichtlich liegt bereits qualitativ eine sehr gute Übereinstimmung vor.

Um einen quantitativen Vergleich zu ziehen, wurde die relative Abweichung zwischen den halbanalytischen Kurven und den Ergebnissen von GISMO berechnet. Die Ergebnisse in Abbildung 5.3 liegen weit unterhalb der Promillegrenze.

Es wurde durch diesen nichttrivialen Testfall eine solide Validierung von GISMO-MHD erreicht. Im nächsten Schritt soll nun noch ein numerisches Standardproblem eines turbulenten Systems überprüft werden.

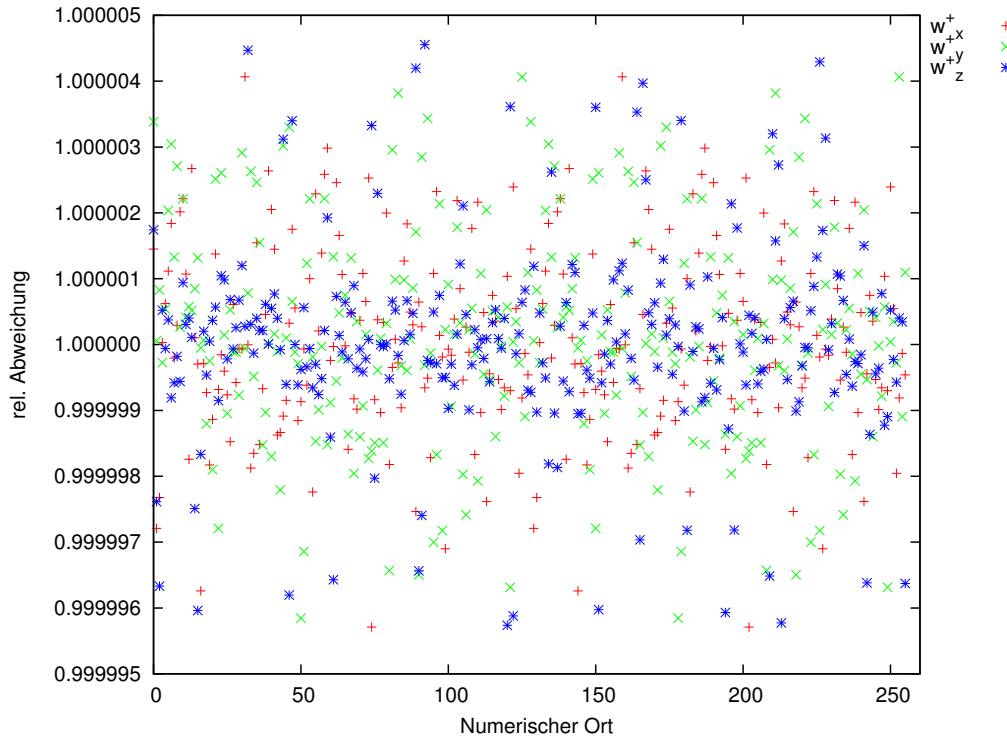


Abbildung 5.3.: *Quantitative Überprüfung der Ergebnisse aus Abbildung 5.2. Die Abweichungen zwischen den theoretischen Ergebnissen und GISMO sind vernachlässigbar klein.*

Taylor-Green-Vortex

Taylor u. Green (1937) konstruierten ein spezielles Szenario für die hydrodynamischen Navier-Stokes-Gleichungen, mit den Startbedingungen

$$\mathbf{u} = u_0 \begin{pmatrix} \sin(x) \cos(y) \cos(z) \\ -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

um die Eigenschaften von Turbulenz genauer zu untersuchen. Die Grundidee dabei war, gegeneinander rotierende, dreidimensionale Vortizes und deren Zerfall zu betrachten. Die Entwicklung der z -Komponente von \mathbf{v} wird durch den Druckgradienten erzeugt. Vor allem lag der Fokus dieses Problems auf der Untersuchung der Energiekaskade zu kleineren Längenskalen, die für das später entwickelte Kolmogorov-Modell eine entscheidende Rolle spielt (vgl. Kapitel 3.2). Der Vorteil dieser Methode liegt in der starken Symmetrie

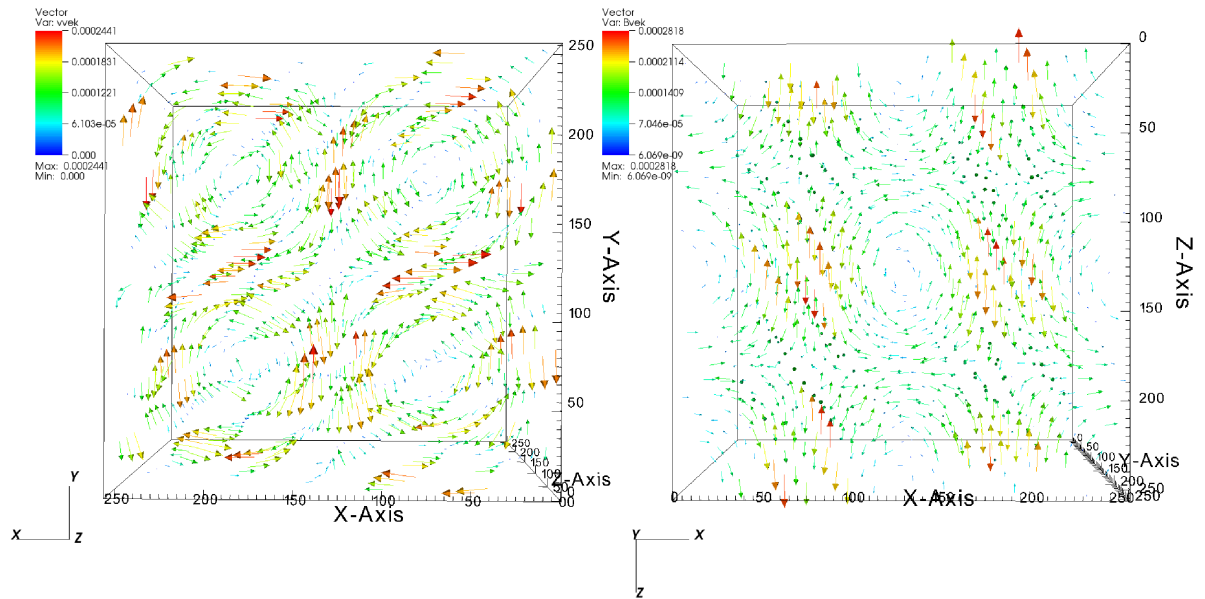


Abbildung 5.4.: Realisierung des Taylor-Green-Vortex durch GISMO. Links sind die Startwerte für \mathbf{u} abgebildet, rechts die für das Magnetfeld \mathbf{b} . Beide Initialisierungen beschreiben den Fall isolierender Wände. Sehr gut erkennbar sind die gegenrotierenden Wirbel, die in der zeitlichen Entwicklung zu turbulenter Energiekaskadierung führen.

der Anfangsbedingungen und deren Erhaltung über einen längeren Zeitraum¹, wodurch das Problem sogar teilweise durch analytische Ansätze verfolgt werden kann. Prinzipiell entspricht dies einem *von Kármán*-Fluss zwischen zwei Wirbeln mit verschiedenem Rotationssinn. Das hatte speziell für die damalige Zeit große Bedeutung, da die Experimente durch von Kármán Pionierarbeit der Turbulenzforschung darstellten. Heutzutage ist der Taylor-Green-Vortex immernoch ein wichtiges Instrument zur Untersuchung von Turbulenz und wurde auf den Formalismus der Magnetohydrodynamik ausgeweitet. Ein wesentlicher Vorteil für die numerische Behandlung ist das Einsparen von Rechenzeit aufgrund der Symmetrien (Lee et al. 2008).

Um die Anfangsbedingungen auf die Magnetfelder für die MHD-Behandlung anzupassen, müssen ähnliche Symmetrien gefunden werden. Eine Möglichkeit, die hier angewendet werden soll, ist die sogenannte „Isolationsbox“. Der Name leitet sich aus den isolierenden Wänden der Simulationsbox ab, auf denen das Magnetfeld immer senkrecht

¹typischerweise Entwicklungsskalen im Sekundenbereich

steht. Die Startwerte genügen dabei

$$\mathbf{b} = b_0 \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \sin(z) \\ \sin(x) \cos(y) \sin(z) \\ -2 \sin(x) \sin(y) \cos(z) \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Die Wahl der Konstanten wurde dabei analog zu Lee et al. (2008) mit $v_0 = 1$ und $b_0 = 1/\sqrt{3}$ getroffen, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu erzeugen. In Elsässernotation lassen sich die Startbedingungen entsprechend durch

$$\mathbf{w}^\pm = \begin{pmatrix} \sin(x) \cos(y) \cos(z) \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(x) \sin(y) \sin(z) \\ -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(x) \cos(y) \sin(z) \\ \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(x) \sin(y) \cos(z) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

beschreiben.

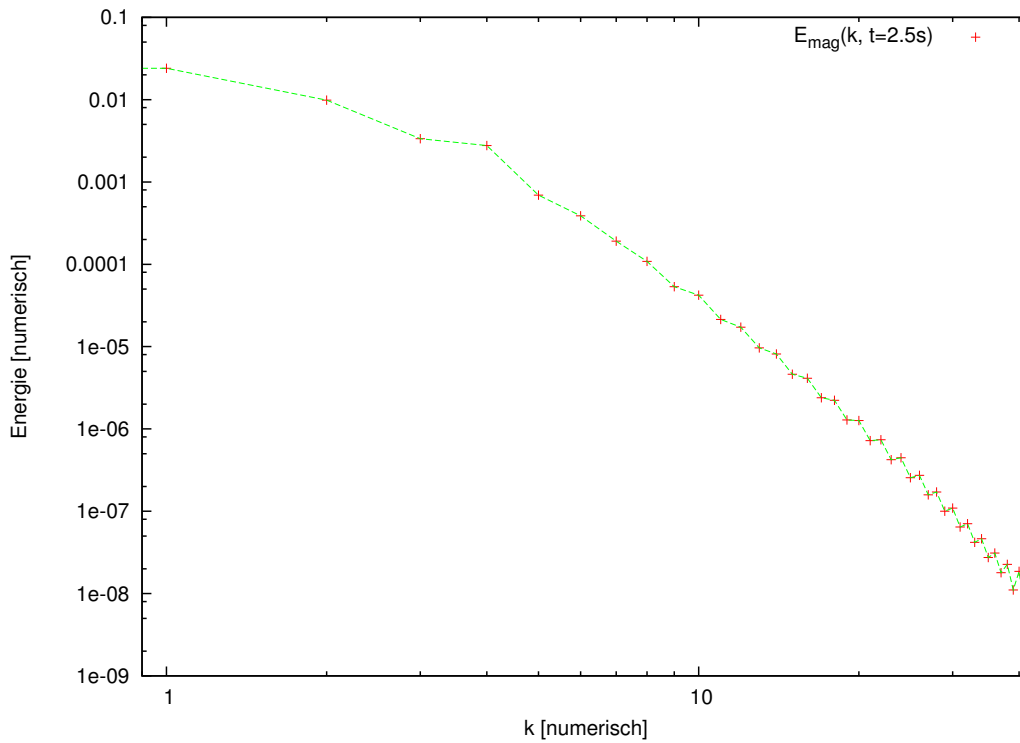


Abbildung 5.5.: Totales Energiespektrum des Magnetfeldes nach 2.5s Entwicklungszeit im Taylor-Green-Vortex Test. Für die Simulation wurde eine Auflösung von 256^3 gewählt.

Abbildung 5.5 zeigt das Magnetfeld-Energiespektrum nach einer Entwicklungszeit von 2,5 s. Zum Vergleich wurde das gleiche Spektrum aus einer ähnlichen Simulation von Lee et al. (2008) herangezogen. Dieses ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

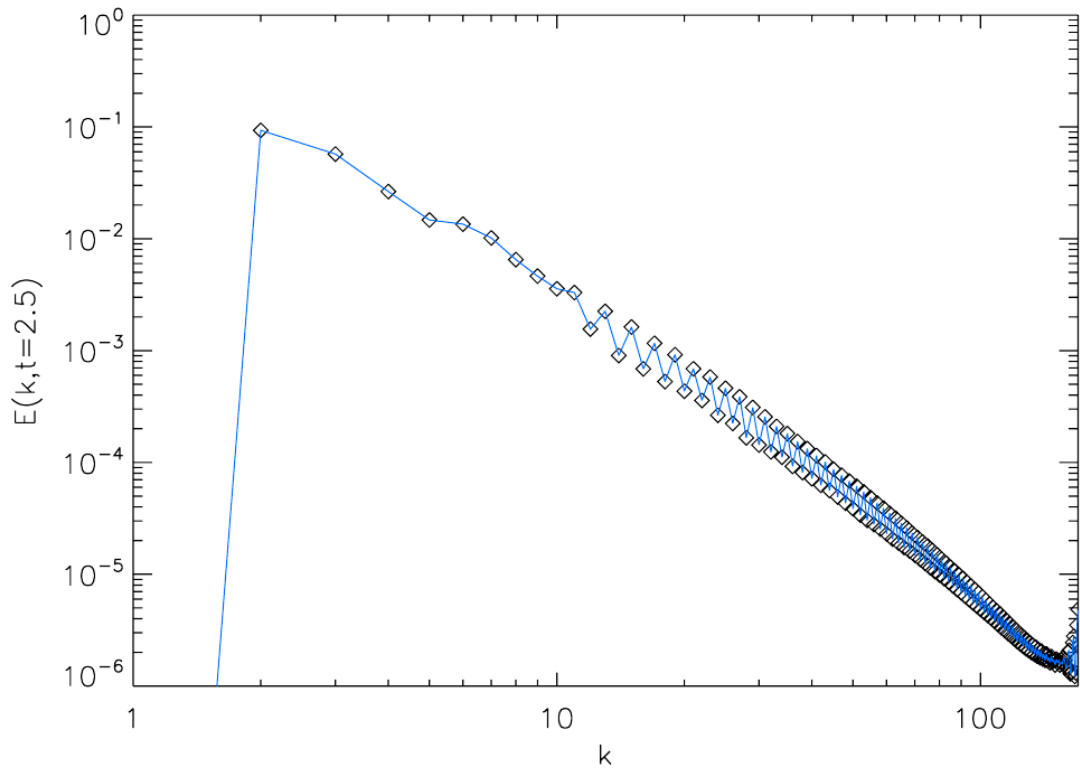


Abbildung 5.6.: Vergleichsspektrum zu Abbildung 5.5 aus Lee et al. (2008).

Die Resultate der Simulation durch GISMO zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den Simulationen von Lee et al. (2008). Zwar verläuft das Spektrum etwas steiler, vor allem bei großen Wellenzahlen, dies liegt aber an der unterschiedlichen Auflösung der Simulationsboxen. So wurde in Lee et al. (2008) mit 512^3 Zellen, eine 8-fach höhere Auflösung gewählt (vs. 256^3). Dadurch ist der Bereich zum Antialiasingbereich auch nur halb so groß, was zu einem stärkeren Verlust von Energie durch das zero-padding führt.

Der MHD-Teil des verwendeten Modells und dessen numerische Umsetzung wird somit als hinreichend verifiziert angenommen. Es folgt im nächsten Abschnitt die Untersuchung der Testteilchen-Methodik.

5.1.2. Testfälle der Teilchensimulationen

Teilchengyration

Für die Simulation der Testteilchen soll ebenfalls zunächst ein simpler Testfall durchgeführt werden, um die grundlegenden Mechanismen zu überprüfen.

Das einfachste Szenario ist ein geladenes Einzelteilchen, das sich in einem konstanten und homogenen Hintergrundmagnetfeld bewegt. Gemäß der Lorentzkraft (Gl. 3.5) wird das Teilchen einer Spiralbahn folgen und keine effektive Beschleunigung erfahren, d.h. keine Änderung seines Impulsbetrages. Als Validierung bietet sich demnach eine Messung des Larmorradius an. Ein besonderer Augenmerk wird zusätzlich auf die korrekte Rand- und Prozessorübergabe gelegt, da, im Gegensatz zum MHD-Teil, die periodischen Randbedingungen nicht implizit durch die FFT, sondern mittels MPI-Kommunikation generiert werden (vgl. Kapitel 4.2).

In Abbildung 5.7 findet sich die Trajektorie eines Protons mit $|v_{\perp}| = 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ in einem Magnetfeld der Stärke $B_z = 1,737 \cdot 10^{-4} \text{ G}$, wie es von GISMO in einer Box der Größe $L_0 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ cm}$ simuliert wird. Eine simple Direktmessung des Larmorradius ergibt $r_L \approx 6,002 \cdot 10^7 \text{ cm}$. Dies weicht lediglich um 1,4% von der theoretischen Vorhersage ab. Dabei spielt die Ungenauigkeit im Messverfahren wohl die größte Rolle. Wie bereits unter Kapitel 4.3.2 vorgestellt, wird von GISMO standardmäßig vor jeder Simulation eine deutlich bessere Methode angewandt, mit der der Larmorradius bishin zur Maschinengenauigkeit beliebig aufgelöst werden kann.

Ein wichtiger Punkt ist die korrekte Prozessübergabe des Teilchens. In Abbildung 5.7 wird dies durch die verschiedenen Farben der Datenpunkte visualisiert. Sobald das Testteilchen den Prozess verlässt - entweder durch Wechseln zur anliegenden CPU oder durch verlassen der Simulationsbox an den Rändern, erfolgt die periodische Übergabe zum nächsten Nachbarprozess. Dabei sind in den Ergebnissen keine Sprünge erkennbar. Die Teilchentrajektorie wird fehlerfrei auf der Nachbar-CPU fortgesetzt.

$E \times B$ – Drift

Zur vollständigen Überprüfung der Lorentzkraft wird zu dem Hintergrundmagnetfeld B_z des vorangegangenen Tests, ein zusätzliches elektrisches Feld initialisiert. Dadurch

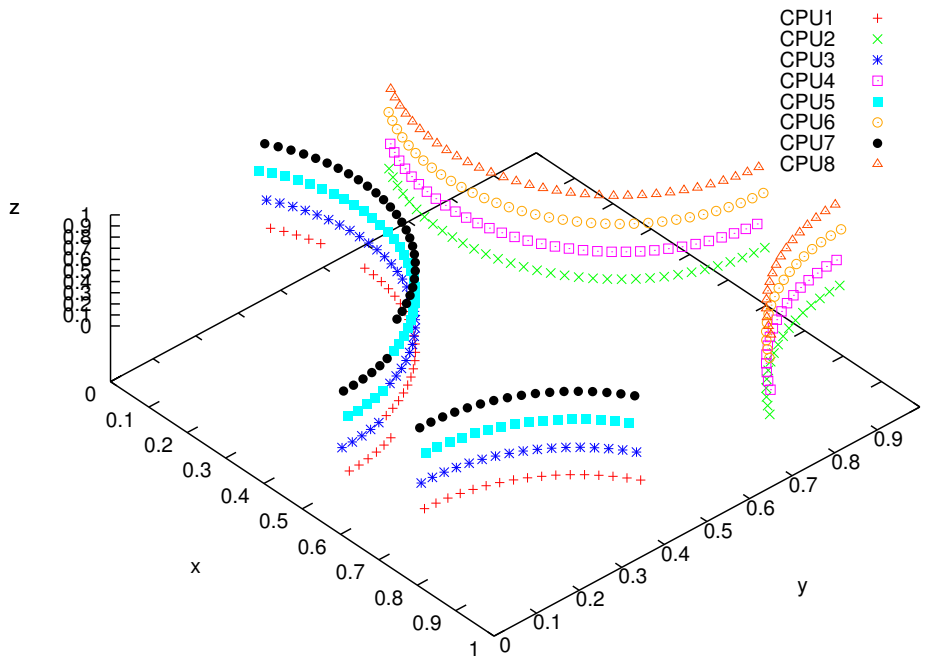


Abbildung 5.7.: Einzelteilchenbewegung im konstanten, homogenen Magnetfeld. Das Teilchen gyriert in der Ebene senkrecht zum Hintergrundfeld und bewegt sich zusätzlich mit der Initialgeschwindigkeit konstant in z -Richtung. Durch die verschiedenen Farben werden die einzelnen CPUs dargestellt, die das Teilchen durchläuft. Start- und Endposition liegt auf CPU1 (+ Datenpunkte, links im Bild, ca.(0,4;0,4) in der xy -Ebene). Prozessor- und periodische Randübergabe funktionieren einwandfrei.

entsteht die, in Kapitel 2.5.2 beschriebene, Driftbewegung mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{b^2} \quad (5.17)$$

Wählt man das elektrische Feld konstant und homogen in y -Richtung, so entsteht die resultierende konstante Driftbewegung

$$\mathbf{v}_D = \frac{E_y}{B_z} \mathbf{e}_x \quad (5.18)$$

in x-Richtung. Hat das Testteilchen beispielsweise eine Initialgeschwindigkeit von

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

ist dessen tatsächliche Geschwindigkeit in x-Richtung

$$v_x(t) = v_{0x} \cos(\Omega t) + \frac{E_y}{B_z} \quad (5.20)$$

zusätzlich durch die Driftgeschwindigkeit überlagert. Wählt man $E_y = 100$ ESU und erneuert $B_z = 1,737 \cdot 10^{-4}$ G, so ist der Driftterm

$$\begin{aligned} -\frac{E_y}{B_z} &= -5,758 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \\ \Rightarrow v_{0x} - \frac{E_y}{B_z} &= 4,942 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (5.21)$$

und entsprechend, der effektive Geschwindigkeitsbetrag gegeben.

Aus der Simulation durch GISMO kann nun der Zeitverlauf von v_x entnommen werden. Abbildung 5.8 zeigt die Ergebnisse mit einem Offset von v_0 . Den Betrag der Geschwindigkeit in x-Richtung erhält man schließlich, indem man den halben Abstand zwischen minimaler und maximaler Geschwindigkeit misst. Dieser ergibt sich zu $0,5(10^8 - 1,5 \cdot 10^6) = 4,925 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ und weicht somit nur um 0,35% von der Vorhersage ab.

Welle-Teilchen-Resonanz

Als abschließender, komplexer Testfall wird eine Welle-Teilchen-Resonanz simuliert. Zum einen ist diese Simulation von hoher Bedeutung, ob Teilchen mit beliebigen Startwerten, physikalisch korrekt mit einer Welle interagieren. Zum anderen erzeugt dieser Test ein größeres Verständnis, wie Welle-Teilchen-Wechselwirkungen in der Tat funktionieren. Dies ist besonders von Vorteil, um noch komplexere Szenarien nachvollziehen zu können.

Für den Formalismus der Welle-Teilchen-Resonanz soll auf Kapitel 3.3.2 zurückgegriffen werden. Dort wurde im Rahmen der quasilinearen Theorie ein analytischer Ausdruck

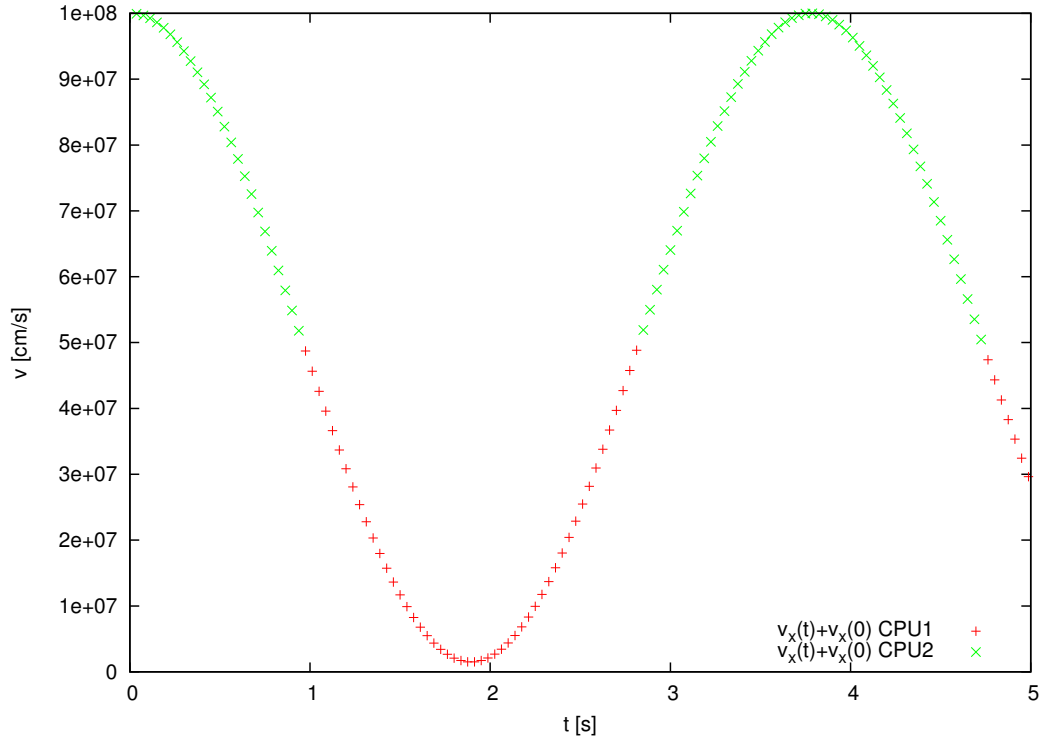


Abbildung 5.8.: Zeitlicher Verlauf der Teilchengeschwindigkeit in x -Richtung bei einem Magnetfeld in z -Richtung und einem elektrischen Feld in y -Richtung. Es entsteht eine konstante Driftbewegung in Richtung x , die sich mit der Gyration überlagert. Des Weiteren erkennt man auch in dieser Abbildung die gelungene Prozessorübergabe.

für die Streuung von Teilchen an Magnetfeldfluktuationen ermittelt. Dabei beschreibt

$$\mu = \frac{\omega_W + n\Omega_T}{k_W v_T} = \frac{v_A k_z - n \frac{eB_0}{m_p c}}{k_z v_T} \quad (5.22)$$

die Position der resonanten Pitchwinkel bei einer Interaktion zwischen Proton und Alfvénwelle (vgl. Gl. 3.148). In Gl. 3.154 wurde die zeitliche Entwicklung des Pitchwinkels μ beschrieben. Für den Testfall wird lediglich eine Alfvénwelle $\mathbf{k} = (0, 0, k_{\parallel})^T$ benötigt, die zunächst zirkular polarisiert sei. Das Magnetfeld ist demnach durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta B (\mathbf{e}_x \cos(\pm kz + \psi) + \mathbf{e}_y \sin(\pm kz + \psi)) \quad (5.23)$$

unter der Bedingung $B_0 \gg \delta B$ gegeben. Einsetzen in Gl. 3.154 ergibt mit

$$\Delta\mu^\pm(t, \psi) = \Omega \sqrt{(1 - \mu^2)} \frac{\delta B}{B_0} \frac{\cos \psi - \cos [(\pm kv\mu - \Omega)\Delta t + \psi]}{\pm kv\mu - \Omega} \quad (5.24)$$

einen Ausdruck für die Zeitabhängigkeit des Pitchwinkels. Dieser wird durch die Wahl der Phase

$$\psi_M^\pm = \arctan \left[\frac{\sin(\pm kv\mu - \Omega)\Delta t}{1 - \cos(\pm kv\mu - \Omega)\Delta t} \right] \quad (5.25)$$

und deren identischen Lösung bei der Tangensperiode $\psi_M^\pm + \pi$ maximal.

Um sämtliche \pm -Lösungen zu überprüfen, wird in GISMO eine linear polarisierte Alfvénwelle initialisiert, die sich in diesem Beispiel parallel zu B_0 ausbreitet (w^+ -Mode). Durch die linear Polarisation setzt sich die Lösung aus der Summe von Gl. 5.24 und Gl. 5.25 beider Vorzeichen zusammen. Demnach wird die Zeitentwicklung von $\Delta\mu$ durch alle 4 Funktionen beschrieben. Die Stärke der Wellenamplitude wird zunächst über das Verhältnis $\delta B/B_0$ auf 0,1 gesetzt, wobei das Hintergrundmagnetfeld $B_0 = 4,34 \cdot 10^{-4}$ G beträgt. Dementsprechend ist die Gyrationfrequenz eines Protons in diesem Feld $\Omega = 4,16 \text{ rad s}^{-1}$. Für den Test mit GISMO wurden insgesamt 500.000 Testteilchen, damit das Ergebnis eine hohe statistische Auflösung hat. Diese wurden mit zufälligen Ort, zufälligen Pitchwinkel μ und Polarwinkel Φ , sowie konstantem Geschwindigkeitsbetrag von $v_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ initialisiert. Die Initialgeschwindigkeit ist dabei so zu wählen, dass sie oberhalb der Alfvéngeschwindigkeit $v_A = 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ liegt, da sonst die Teilchen nicht resonant wechselwirken können.

In Abbildung 5.9 ist die Teilchenstreuung in Form der Pitchwinkeländerung über den initialisierten Pitchwinkel aufgetragen. Zum Vergleich sind alle 4 Funktionen von Gl. 5.24 und Gl. 5.25 eingezeichnet. Man erkennt sehr gut das Ausbilden eines resonanten Peaks bei den Positionen $\mu_{-1} = -0,28$ und $\mu_1 = 0,38$. Dies stimmt sehr gut mit der Vorhersage durch Gl. 5.22 überein. Die Zeitverlaufskurven liefern hingegen keine gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen. Zum einen sind die Peaks gegenüber der Vertikalen nach links verkippt. Zum anderen ist die Position der vorhergesagten Resonanzen symmetrisch mit $\mu_{-1} = -0,33$ und $\mu_1 = 0,33$. Zwei Effekte sind hierfür verantwortlich. Die Verschiebung des Pitchwinkels liegt an der Wahl des falschen Inertialsystems. So sind die Gleichungen 5.24 im Bezugssystem der Welle. Demnach fehlt der

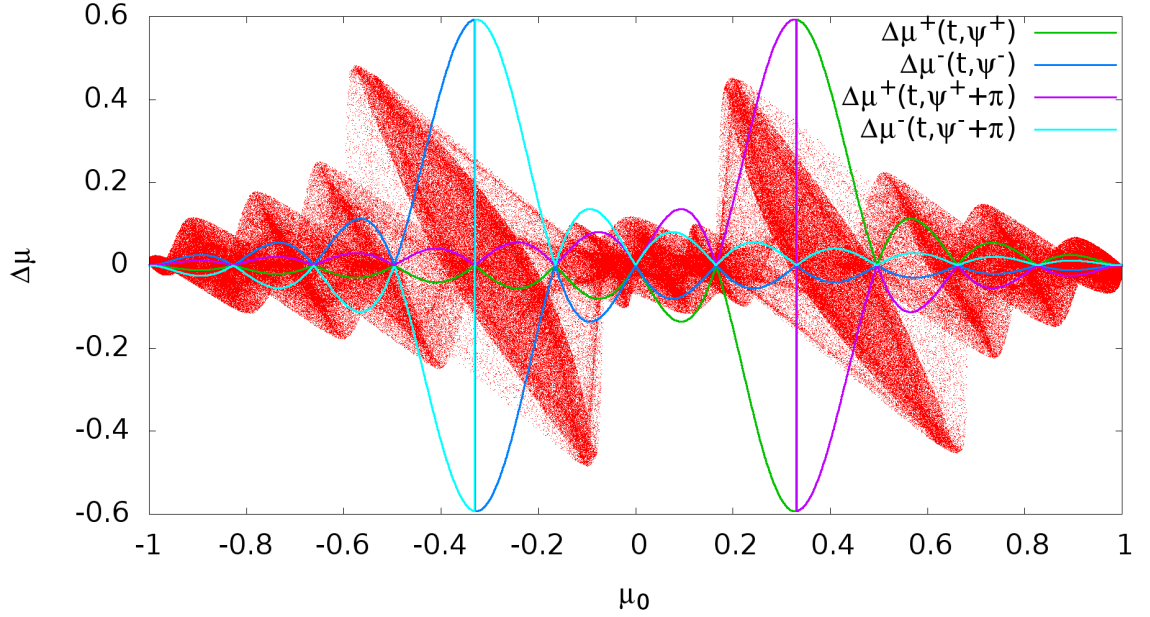


Abbildung 5.9.: Welle-Teilchen-Resonanz für 500000 Teilchen, die mit einer rein parallelen Welle der Stärke $\delta B/B_0 = 0,1$ wechselwirken. Jeder Punkt repräsentiert ein Testproton. Die Simulationszeit beträgt $t = 3$ s (etwa 2 Gyrationenperioden). Als Maß der Streuvorgänge wurde die Änderung des Pitchwinkels über den initialisierten Pitchwinkel aufgetragen. Zur Vorhersage durch die quasilineare Theorie ist ein deutlicher Unterschied erkennbar.

Einfluss der Alfvéngeschwindigkeit. Durch die Transformation

$$\mu' = \mu \pm \frac{v_A}{v_T}, \quad (5.26)$$

mit den jeweiligen Lösungen für vor- und rückwärts laufende Wellen, erhält man den Pitchwinkel im Teilchenbezugssystem. Damit liegen die resonanten Peaks, gemäß Gl. 5.22 nicht mehr symmetrisch um $\mu = 0$, sondern um 0,05 in positiver Richtung verschoben und folglich an den gleichen Positionen, wie jene, der Testteilchensimulation.

Die „Verkipfung“ der Ergebnisse, rührt von der Abweichung der Simulationen von der quasilinearen Theorie, da in deren Annahmen ein Schlüsselpunkt das Vernachlässigen der Fluktuationen gegenüber dem Hintergrundfeld ist. Bei einem Verhältnis von $\delta B/B_0 = 0,1$, wobei die gesamte Energie in einer einzelnen Mode steckt, ist die lokale Störung von B_0 merklich. Die Positionen der resonanten μ müsste demnach in Gl. 5.22

lokal bestimmt werden. Dadurch unterscheiden sich auch die Streuvorgänge, bei denen sich der Pitchwinkel positiv ändert, von denen mit negativer Gesamtänderung. Um die Verkippung innerhalb der Abbildung zu vermeiden, müsste die Änderung $\Delta\mu$ über den Mittelwert $\langle\mu\rangle$ statt über den Anfangswert μ_0 aufgetragen werden. Damit wäre das Problem jedoch lediglich optisch gelöst. Der Winkel der Verkippung ist dabei nicht von $\delta B/B_0$ abhängig, lediglich die Streuamplitude der Teilchen vergrößert sich und macht somit die Verkippung der Maxima deutlicher.

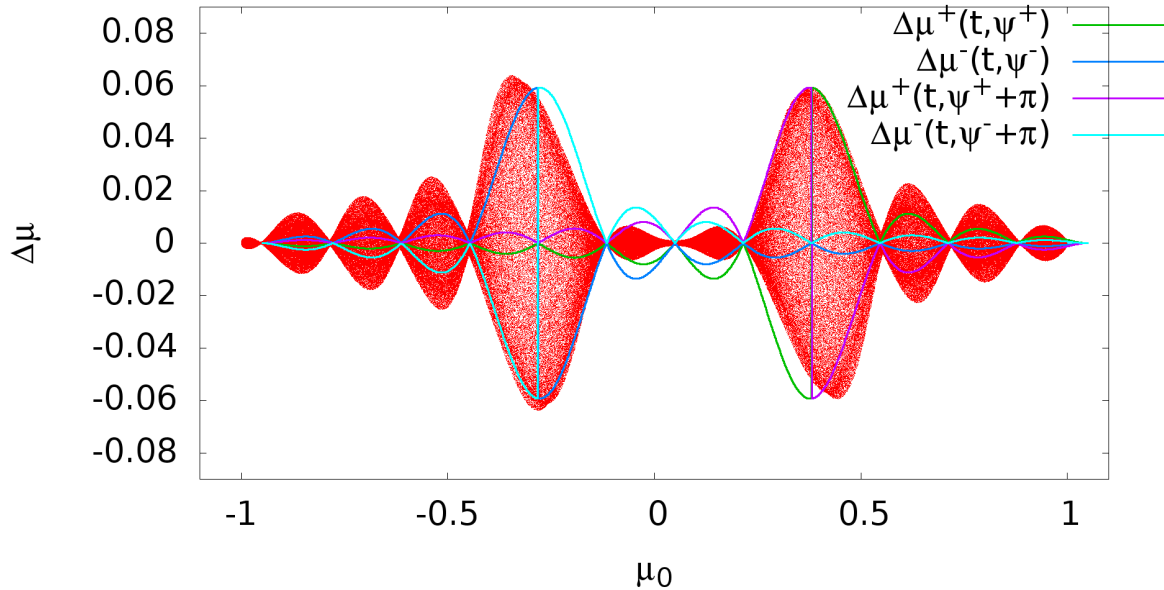


Abbildung 5.10.: Identische Simulation zu Abbildung 5.9, nur mit der Wellenstärke $\delta B/B_0 = 0,01$ nach $t = 3$ s (etwa 2 Gyrationperioden). Die Abweichung zur QLT verbessert sich merklich durch „Aufrichten“ der Maxima und Minima. Die Graphen der theoretischen Zeitentwicklung wurden in das Teilchenbezugssystem transformiert.

Zur Überprüfung wurde die gleiche Simulation mit einem Zehntel der Wellenamplitude wiederholt. Man erkennt in Abbildung 5.10 eine erhebliche Verbesserung der Vorhersage durch die QLT. Die Peaks haben sich nahezu vollständig aufgerichtet. Zudem wurden die Graphen durch die Transformation ins Teilchenbezugssystem korrigiert. Natürlich reduziert sich die absolute Streuamplitude der Teilchen ebenfalls mit $\delta B/B_0$ um einen Faktor 10, da Gl. 3.154 linear von diesem Verhältnis abhängt.

Im Zeitverlauf reduzieren sich die Amplituden der ballistischen Nebenextrema, wohingegen deren Anzahl größer wird. Das bedeutet, dass die Teilchen bei den resonanten

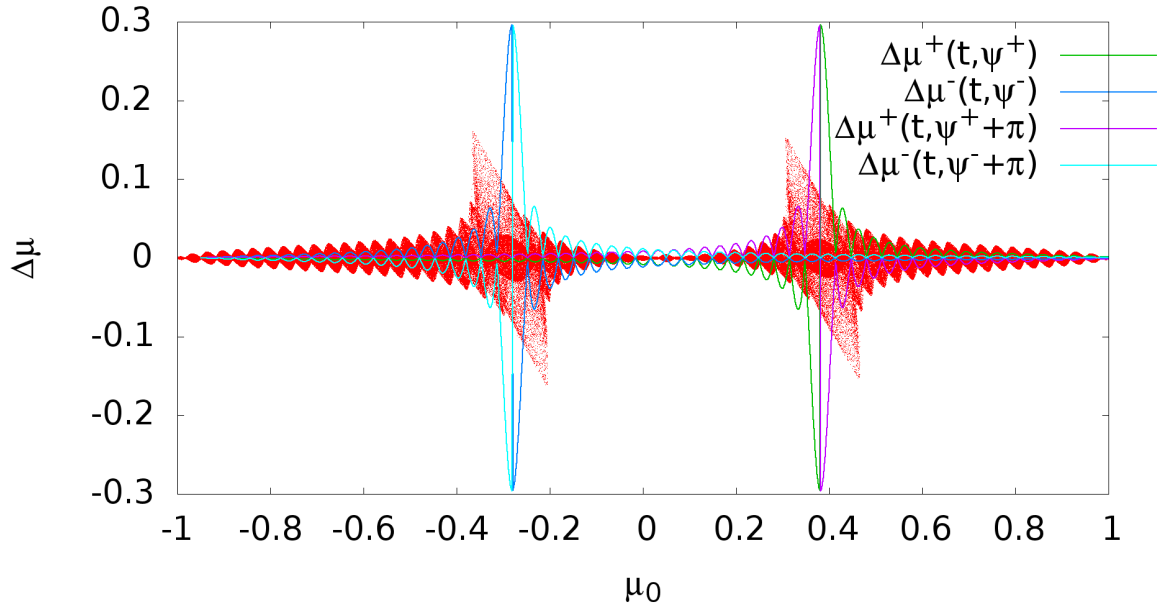


Abbildung 5.11.: Identische Simulation zu Abbildung 5.10 ($\delta B/B_0 = 0,01$) nach $t = 15$ s (etwa 10 Gyrationperioden). Mit zunehmender Zeit verlieren die ballistischen Nebenextrema an Amplitude, während der Resonanzpeak gewinnt.

Pitchwinkeln deutlich stärker gestreut werden und sich sukzessive ein δ -förmiger Peak heraus kristallisiert. Dieser Vorgang ist sehr gut in Abbildung 5.11 zu erkennen. Dennoch ist auch hier erneut eine deutliche Abweichung zu den theoretischen $\Delta\mu$ -Verlauf zu verzeichnen. Teilchen mit einem $|\mu| > \mu_{\text{res}}$ sind von der Streuamplitude größer als QLT vorhersagt, wohingegen die eigentlichen Resonanten Peaks zu klein ausfallen. Somit stellt sich die Frage, ob dieser Fehler lediglich durch die längere Zeitentwicklung entsteht und seinen Ursprung ebenfalls in dem $\delta B/B_0$ Verhältnis hat.

Daher soll erneut überprüft werden, ob die lokale Störung der Welle diesen Einfluss verursacht und somit zu einer Abweichung zur QLT führt. Wie man in Abbildung 5.12 erkennt, ist dies in der Tat der Fall. Die gleiche Simulation nur mit einem Faktor 0.1 verringerter Wellenamplitude führt zu einer erheblichen Verbesserung der Übereinstimmung mit der QLT. Daran wird deutlich, wie sensitiv die Approximation gegenüber der lokalen Magnetfeldstörung ist.

Zum Abschluss dieses komplexen Teilchentestfalls, soll noch überprüft werden, ob auch andere Resonanzpeaks korrekt dargestellt werden. Gl. 5.22 sagt bei der vorange-

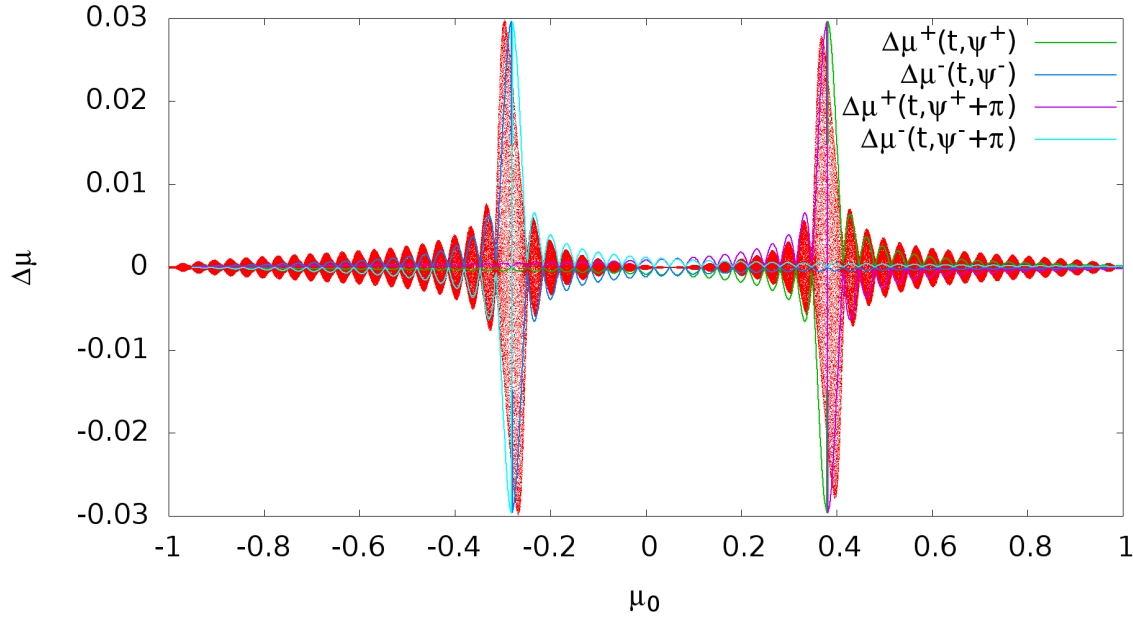


Abbildung 5.12.: Um erneut Abweichung der QLT zu testen wurde die Wellenamplitude um einen Faktor 0,1 auf $\delta B/B_0 = 0,001$ verringert. Die Abbildung zeigt wie Abbildung 5.11 die Pitchwinkelstreuung nach $t = 15$ s (etwa 10 Gyrationperioden).

gangenen Simulation die $n = \pm 2$ Resonanz bei $\mu_{-2} = -0,61$ und $\mu_2 = 0,71$, sowie die $n = -3$ Resonanz bei $\mu_{-3} = -0,94$ voraus. Resonante Wechselwirkung höherer Ordnung wird dabei nur von den senkrechten Anteilen einer Welle erzeugt (vgl. Kapitel 3.3.2). Deshalb wird zur Simulation die Shear-Welle $\mathbf{k}' = (0, 1, 1)^T$ benutzt, während alle anderen Rahmenparameter identisch sind. Abbildung 5.13 zeigt die Ergebnisse dieser Simulation im Vergleich zu denen, einer rein parallelen Welle. Sämtliche Resonanzen liegen an der vorhergesagten Position. Außerdem wurde mit $t = 75$ s ein später Entwicklungszeitpunkt gewählt, um erneut das Anwachsen der δ -Form zu überprüfen. Dies ist in der Tat der Fall. Die resonanten Peaks heben sich deutlich von den ballistischen Anteilen ab. Auch in dieser Simulation ist das Fluktuations-Hintergrundfeld Verhältnis mit 0,001 zu hoch für eine exakte Vorhersage der QLT. Man erkennt dies sehr gut daran, dass die Bereiche zwischen den Resonanzen nicht gegen Null gehen, sondern sich auf ein ballistisches Rauschen mit endlicher Amplitude reduzieren. Entsprechend würden sich die Ergebnisse anpassen, wenn man erneut die Wellenamplitude verringert.

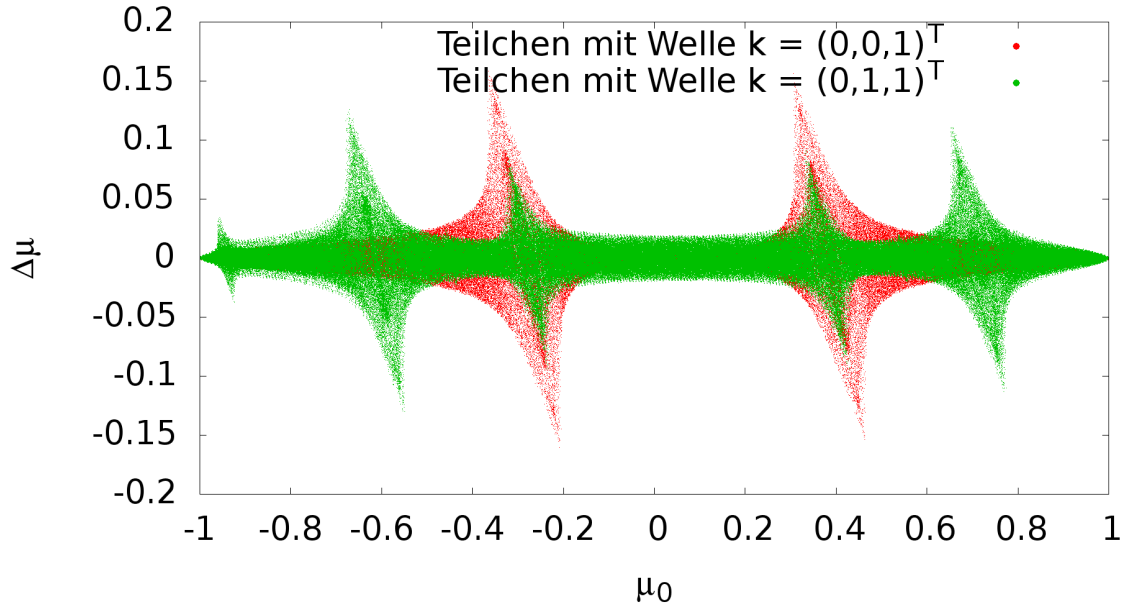


Abbildung 5.13.: *Entwicklung der Resonanz von rein paralleler und Shear-Alfvénwelle nach $t = 75$ s (etwa 50 Gyrationenperioden). Die senkrechte Komponente der Welle verursacht resonante Wechselwirkungen höherer Ordnung ($|n| > 1$). Die Wellenstärken liegen bei $\delta B/B_0 = 0,001$.*

5.2. Ergebnisse von Gismo-MHD

Der Fokus dieses Ergebnisteils liegt zunächst auf der Simulation von heliosphärischer Turbulenz, die im Rahmen von GISMO-MHD mittels inkompressibler MHD-Modellierung untersucht wird. Diese Simulationen stellen die Grundlage für den weiteren Verlauf. Im zweiten Teil werden darauf aufbauend einzelne Wellenmoden verstärkt und deren Entwicklung, sowie Einfluss auf die Turbulenz untersucht. Es wird dabei das Ziel verfolgt das Szenario eines Flares oder eines koronalen Masseauswurfs nachzubilden, bei dem auf bestimmten Längenskalen und den damit korrespondierenden Wellenmoden Energie übertragen wird.

Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln gehandhabt, liegt das magnetische Hintergrundfeld B_0 in z -Richtung. Entsprechend ist die Notation der senkrechten Richtung, z.B. k_\perp , mit x und y , z.B. k_x und k_y , gleichzusetzen wohingegen die z -Dimension als parallele Richtung bezeichnet wird, z.B. $k_\parallel \hat{=} k_z$. Die Darstellung der Wellenzahlen erfolgt in numerischer Schreibweise mit diskreten k' , die durch $\mathbf{k} = 2\pi/(\mathbf{l}_{\text{box}}L_0) \mathbf{k}'$ mit dem

physikalischen \mathbf{k} verknüpft sind (vgl. Kapitel 4.3.4).

5.2.1. Simulation heliosphärischer Turbulenz

Die Turbulenz innerhalb der Heliosphäre wird durch die kontinuierliche Energieinjektion der Sonne auf großen Längenskalen in der Größenordnung 10^8 cm getrieben (vgl. Kapitel 2.3, sowie Bruno u. Carbone (2005)). Das zunächst radial von der Sonne wegströmende Plasma erzeugt durch den *frozen-in-flux* und die damit auftretende Torsion, die Parkerspirale und somit eine klare Vorzugsrichtung eines Hintergrundmagnetfeldes. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass eine Simulation auf deutlich größeren Skalen die Geometrie der Spirale berücksichtigen muss, da die Krümmung der Feldlinien nicht mehr vernachlässigbar wäre. Die Modellierung der beschriebenen Turbulenz erfolgt in den Simulationen durch kontinuierliches Zuführen von Energie bei kleinen Wellenmoden, wobei die Anisotropie durch die jeweiligen Komponenten des Wellenvektors berücksichtigt wird. So findet das Treiben in den senkrechten Komponenten k_x und k_y in einem kleineren Bereich $k'_\perp = [0, \dots, 4]$ statt, wohingegen in paralleler Richtung bis $k'_\parallel = [0, \dots, 14]$ Energie injiziert wird. Wie in Kapitel 4.3.1 beschrieben, wird die Stärke der Fluktuationen mit der Amplitude der Treibmoden reguliert. Dementsprechend wird das gewünschte $\delta B/B_0$ -Verhältnis hergestellt. Ein weiterer Grund für die Wahl eines anisotropen Turbulenztreibers ist die geringe Entwicklung in paralleler Richtung. Wie schon in Kapitel 3.2 ausführlich dargelegt, erfolgt gerade bei schwacher Turbulenz die Energiekaskadierung primär mit k_\perp , also senkrecht zu B_0 . Ein isotroper Treiber würde auch im gesättigten Zustand der Turbulenz nicht zu ausgeprägten Slab-Moden führen. Beobachtungen heliosphärischer Turbulenz haben jedoch auch turbulente Moden bei hohem k_\parallel nachgewiesen. Somit muss sich im Endzustand der Simulationen auch eine Slab-Komponente entwickelt haben, um den Messungen realistisch zu entsprechen.

Parameter, welche die physikalischen Rahmenbedingungen bestimmen, werden wie folgt gewählt:

In Anbetracht der im nächsten Kapitel durchgeführten Teilchensimulationen, soll der Fokus auf der schwachen Turbulenz liegen. Folglich wird für das Verhältnis von $\delta B/B_0$ die Größenordnung 10^{-2} gewählt. Dies ist nötig um die Anwendbarkeit der quasilinearen Theorie zu gewährleisten (vgl. Kapitel 3.3.2), damit signifikante Aussagen bezüglich der Streukoeffizienten getroffen werden können. Unter dieser Prämisse ist der physikalisch

interessante Bereich bei etwa drei solaren Radien in der Heliosphäre zu finden. In diesem Bereich ist zudem die Teilchenbeschleunigung durch CME-getriebene Schockfronten sehr stark (Vainio et al. 2003). Wie man Abbildung 2.5 entnehmen kann, beträgt dort die Alfvéngeschwindigkeit etwa $10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Es wird für v_A der Wert $1,2 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ abgelesen. Das Hintergrundfeld B_0 ist durch

$$B = v_A \sqrt{4\pi m_p n_d} \quad (5.27)$$

mit der Alfvéngeschwindigkeit v_A verknüpft. Unter der Annahme einer Anzahldichte von $n_d = 10^5$ Protonen im Plasma (vgl. Abbildung 2.5, Vainio et al. (2003)) ergibt sich demnach eine Feldstärke von $B_0 = 0,174 \text{ G}$. Die äußere Längenskala L_0 wird anhand der typischen Protonenenergien in einem SEP-Event bestimmt. Auch dies geschieht wieder in Anbetracht der in den nächsten Kapiteln präsentierten Simulationen von verstärkten Wellenmoden und den Teilchensimulationen. Die Protonen weisen Energien im Bereich 100 MeV auf (vgl. Kapitel 2.5). Unter der Verwendung der Resonanzbedingung führt das zu einer Längenskala von

$$L_0 = \frac{2\pi k'}{eB_0} \gamma m_p c v \approx 10^8 \text{ cm}. \quad (5.28)$$

Als spezifischer Wert wird $L_0 = 3,4 \cdot 10^8 \text{ cm}$ gewählt, um Ergebnisse bei $k' \approx 20$ zu beschreiben. Um einen eventuellen Einfluss der Geometrie zu überprüfen, kann die Verknüpfung von Azimut ϕ in der Ekliptik mit dem Abstand r zur Sonne,

$$\frac{r}{r_\odot} - 1 - \ln \frac{r}{r_\odot} = \frac{v_{\text{SW}}}{\omega_\odot r_\odot} (\phi - \psi) \quad (5.29)$$

gemäß Parker (1958) herangezogen werden. Der Winkel ψ beschreibt dabei den Winkel der Krümmung am Beginn einer Feldlinie, die aus der Sonne bei einem solaren Radius $r_\odot \hat{=} 6,96 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ hinaustritt, wohingegen ϕ den Azimut im Abstand r repräsentiert. Das Verhältnis zwischen der Ausströmgeschwindigkeit des Sonnenwinds v_{SW} und der solaren Winkelgeschwindigkeit ω_\odot beträgt nach Zank et al. (1996) etwa 1 AU $\hat{=} 1,496 \cdot 10^{13} \text{ cm}$. Demnach ist eine Änderung zwischen ϕ und ψ in Gl. 5.29 nur auf der Größenordnung r_\odot relevant. Des Weiteren zeigen Simulationen unter Berücksichtigung der Parkerspiralengeometrie signifikante Änderungen erst im Bereich 1 AU (Tautz et al. 2011). Daher ist also anzunehmen, dass auf einer Längenskala von 10^8 cm Effekte durch

die tatsächliche Krümmung des Hintergrundfelds keine Rolle spielen.

Die Simulationsbox wird kubisch aufgeteilt und im Ortsraum durch ein Gitter mit 256^3 Zellen diskretisiert. Dies entspricht einem Wellenzahlgitter mit 128^3 Moden, von denen lediglich 42 aktiv sind, also außerhalb des Antialiasing-Bereichs liegen (vgl. Kapitel 4.1.3). Der einschränkende Faktor der Gitterauflösung ist dabei die Rechenzeit. So ist eine Berechnung von höheren Auflösungen nicht mehr auf dem Rechencluster des Lehrstuhls¹ möglich. Größere Simulationen wurden hauptsächlich auf dem Nehalem-Cluster *Laki* des Stuttgarter Rechenzentrums *HLS* durchgeführt und sind erheblich aufwendiger. Ziel der Turbulenzmodellierung ist es einen gesättigten Zustand zu erreichen, in dem Energiezufluss und Dissipation sich ausgleichen. In diesem Zustand wird sich gemäß der Turbulenztheorien eine Energiekaskade zu den kleinsten Längenskalen aufgebaut haben (vgl. Kapitel 3.2, Kolmogorov (1941b, a); Sridhar u. Goldreich (1994); Goldreich u. Sridhar (1995, 1997)). Ein entscheidender Parameter für die Dissipation ist die Resistivität. Gemäß Kapitel 3.1.4 wird durch diese Größe die Energieumwandlung durch Viskosität und magnetische Dämpfung beschrieben. In diesem Zusammenhang wird in der spektralen Methodik oft die Hyperdiffusivität benutzt, damit die Dissipation ausreichend stark ist und auf simulierbaren Zeitintervallen zu vollständig entwickelter Turbulenz führt (vgl. Kapitel 4.1.1). Beide Parameter werden schließlich so gewählt, dass der Dissipationsbereich ausreichend groß ist, um numerische Artefakte, wie die Reflexion von Moden am Übergang zum Antialiasingbereich (im Folgenden auch *Antialiasingkante*), zu verhindern. Dabei liegt das Augenmerk darauf den, für die Turbulenz interessanten, Inertialbereich möglichst über viele Wellenzahlen zu erhalten. In den durchgeführten Simulationen hat sich dabei eine Resistivität von $\nu = 1$ und eine Hyperdiffusivität von $h = 2$ als sinnvoll erwiesen.

Die Simulation ist für eine Zeitdiskretisierung mit $\Delta t' = 1 \cdot 10^{-11}$ in numerischen Einheiten oder $\Delta t' = 3,4 \cdot 10^{-3}$ s numerisch stabil. Der Zustand der Sättigung wird bei etwa $t = 85$ s erreicht, was mit angegebenem $\Delta t'$ insgesamt 25000 Iterationsschritten entspricht. In diesem Zeitintervall haben die Alfvénwellen ungefähr 30 mal die Simulationsbox durchlaufen. Die sogenannten *Alfvén-crossingtimes* werden in inkompressiblen Turbulenzsimulationen als alternative Zeiteinheit angegeben. Unter den gegebenen Diskretisierungen ergibt sich somit eine Gesamtsimulationszeit von etwa 3000 CPU-Stunden pro gewähltem Parametersatz.

¹Nehalem-System mit 64 CPUs der Baureihe Intel®Xeon E5506, sowie 32 CPUs der Westmereklasse Intel®Xeon E5620

	$L_0[\text{cm}]$	$n_d[\text{cm}^{-3}]$	$B_0[\text{G}]$	$v_A[\text{cm s}^{-1}]$	$\nu[\text{num}]$	k'
SI	$3,4 \cdot 10^8$	10^5	0,174	$1,2 \cdot 10^8$	1	128^3
SII	$3,4 \cdot 10^8$	10^5	0,174	$1,2 \cdot 10^8$	10	128^3
SIII	$3,4 \cdot 10^8$	10^5	1,74	$1,2 \cdot 10^9$	10	128^3
SIV	$3,4 \cdot 10^8$	10^5	0,00174	$1,2 \cdot 10^6$	1	128^3
SV	$3,4 \cdot 10^8$	10^5	0,174	$1,2 \cdot 10^8$	1	256^3

Tabelle 5.1.: *Parametersätze der durchgeführten Turbulenzentwicklungssimulationen. Die Anzahldichte n_d verknüpft das Hintergrundmagnetfeld B_0 mit der Alfvéngeschwindigkeit v_A mittels $\sqrt{4\pi mn_d}$.*

Um die Effekte der, für die Turbulenzentwicklung wichtigen, Parameter zu untersuchen, werden Variationen des soeben beschriebenen Parametersatzes vorgenommen. Im Wesentlichen wird die Dissipation mittels der Resistivität ν oder das Hintergrundmagnetfeld und somit die Alfvéngeschwindigkeit v_A verändert. Wie aus Kapitel 3.2 bekannt, wirken sich beide Größen entscheidend auf die Entwicklung turbulenter Strukturen aus. Die verschiedenen Parametersätze sind in Tabelle 5.1 mit den Abkürzungen *SI* – *SV* aufgelistet. Der Satz *SI* entspricht dabei der Grundeinstellung. Die Parameter von *SII* sollen zur Untersuchung der Dissipation dienen und unterscheiden sich von *SI* lediglich durch eine höhere Resistivität. Da die verwendete Methodik keinerlei numerische Dissipation aufweist und der einzige intrinsische Energieverlustprozess durch das Überschreiten der Antialiasingkante erzeugt wird, steht der Wellenzahldissipationsterm,

$$\nu \nabla^{2h} \mathbf{w}^\pm$$

im direkten Zusammenhang mit der räumlichen Diffusion.

Der wohl wichtigste Parameter der MHD-Turbulenz ist das magnetische Hintergrundfeld. Wie schon in Kapitel 3.2 ausführlich diskutiert, bestimmt es zum einen durch das $\delta B/B_0$ Verhältnis das Maß Turbulenzstärke und zum anderen, durch den ζ -Parameter (vgl. Gl. 3.125 $\zeta \sim (k_\perp v_\perp)/(k_\parallel v_A)$), die kritische Balance und folglich die Entwicklung turbulenter Strukturen. Im Speziellen wird dabei die Entwicklungsrichtung der Fluktuationen δB , senkrecht oder parallel zu B_0 , beeinflusst. Zur Untersuchung dieser Effekte sind die Parametersätze *SIII* und *SIV* gedacht.

In der Einstellung *SIII* ist das Hintergrundfeld um eine Größenordnung erhöht und dementsprechend das Verhältnis $\delta B/B_0$ im schwachen turbulenten Bereich anzusiedeln.

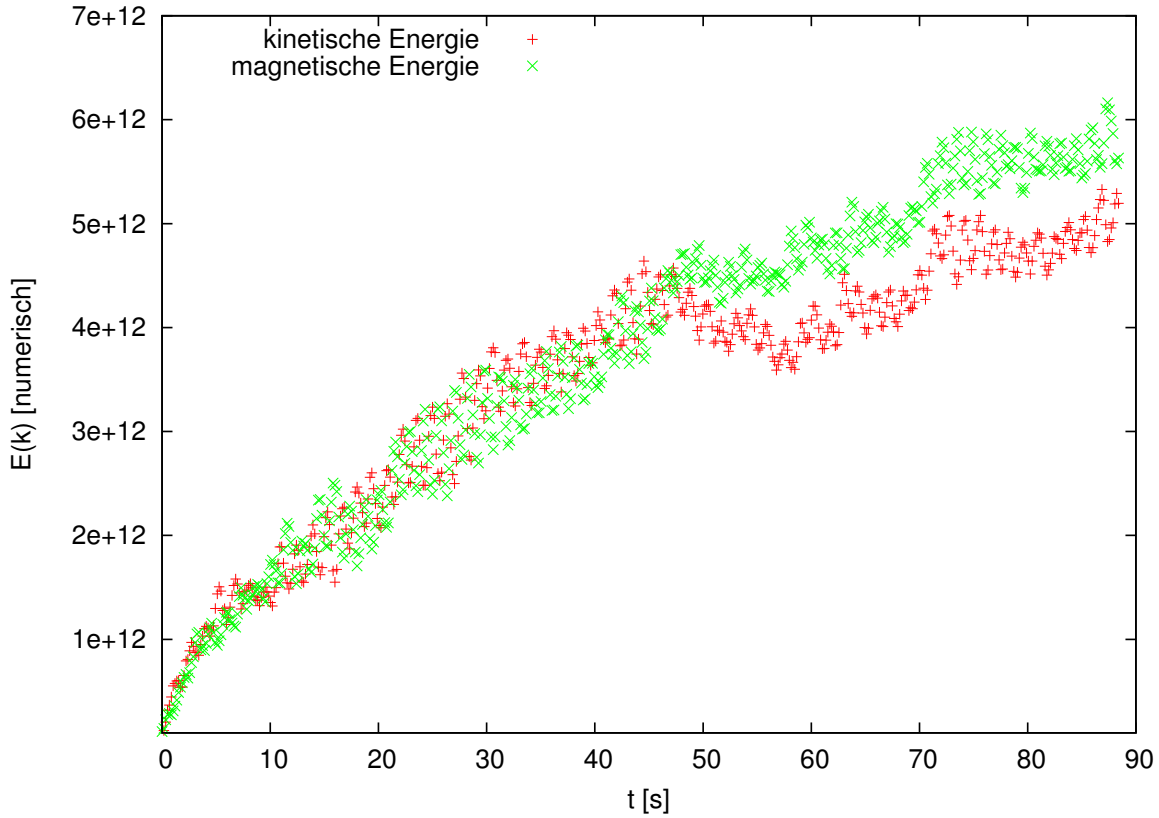


Abbildung 5.14.: Zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie des System mit Parametersatz SI. Das Abflachen des Verlaufs signalisiert die Sättigung der Turbulenz, in welcher Energieinjektion und Dissipation im Gleichgewicht sind.

Die Resistivität mit $\nu = 10$ ist ebenfalls höher als bei SI, da die höhere Alfvéngeschwindigkeit ($v_A \propto B_0$) den Energietransport zu hohen Wellenzahlen beeinflusst und die Energie nicht mehr schnell genug dissipieren kann. Dadurch sammeln sich Moden um die Antialiasingkante an. Um diesen sogenannten *Bottleneckeffect* zu vermeiden, muss also die Dissipationsrate erhöht werden.

Im Parametersatz SIV ist das magnetische Hintergrundfeld um zwei Größenordnungen deutlich verringert. Ziel dieser Simulationen ist es, die Turbulenz im Bereich der kritischen Balance zu untersuchen. Ist $\zeta \approx 1$, so befindet sich das System im Regime der starken Turbulenz. Wie bereits in Kapitel 3.2 erklärt, richten sich in diesem Zustand die turbulenten Strukturen in paralleler Richtung gemäß Gl. 3.125 bis zu Skalen $l_{\parallel} \sim v_A / (k_{\perp} v_{\perp})$ aus. Energie kaskadiert zusätzlich parallel zu B_0 , wodurch die Entwicklung isotroper wird.

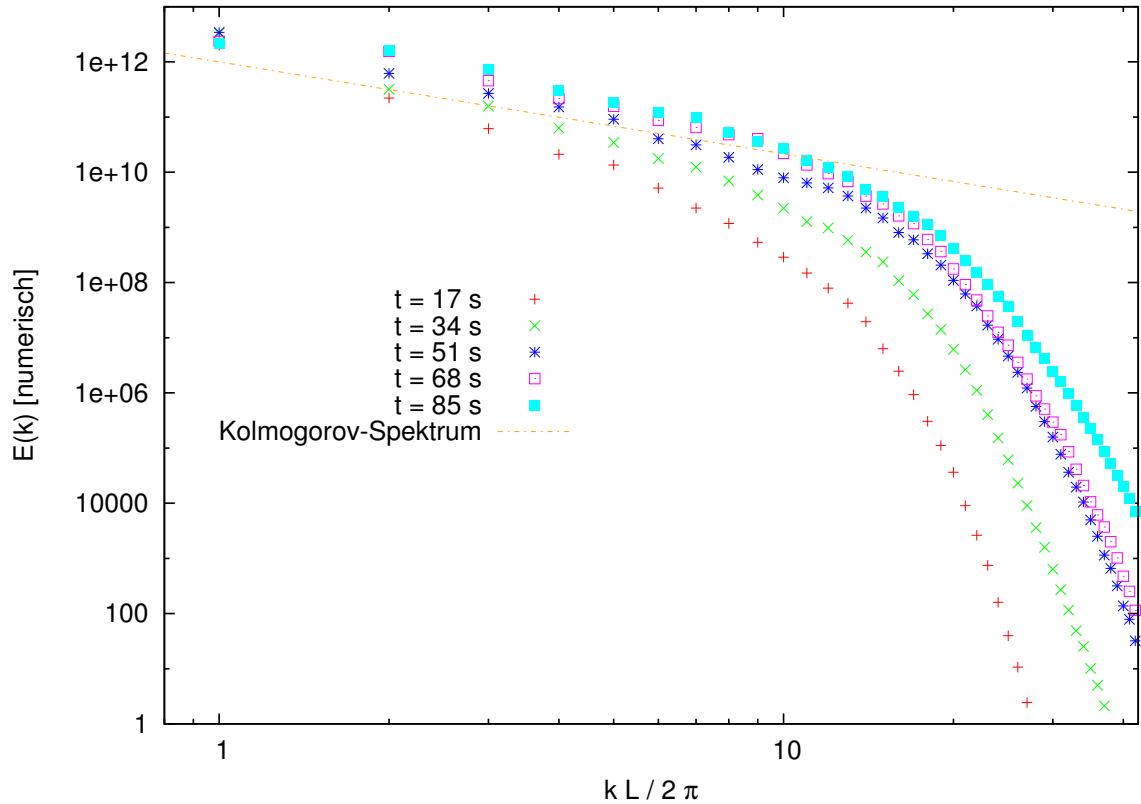


Abbildung 5.15.: *Totales Energiespektrum der magnetischen Energie für Parametersatz SI. Es ist die zeitliche Entwicklung der Turbulenz dargestellt. Im gesättigten Zustand, nach etwa 85 s, hat sich das Spektrum im Inertialbereich einem Potenzgesetz mit $-5/3$ -Exponent durch Kaskadierung der Energie zu kleinen Skalen angenähert. Im Dissipationsbereich erkennt man eine deutliche Abweichung vom Kolmogorov-Spektrum.*

Im letzten untersuchten Parametersatz SV wurde die Auflösungen in jeder Raumrichtung verdoppelt. Das Realraumgitter ist somit durch 512^3 Zellen diskretisiert. Dementsprechend werden im Fourierraum höhere Wellenmoden aufgelöst. Dadurch wird der Dissipationsbereich zu hohen Wellenzahlen verlagert und der, für die Untersuchung der Turbulenz interessante, Inertialbereich vergrößert. Des Weiteren wirkt sich die verbesserte Auflösung auf den später betrachteten Teilchentransport aus, da Streuung an höheren Wellenmoden ermöglicht wird.

Zunächst sollen die Ergebnisse für Parametersatz SI präsentiert werden. Jede Simulation wurde bis zum Zustand der Sättigung, in dem die Injektion der Energie mit der Dissipation im Gleichgewicht ist, ausgeführt. In diesem Zustand ist für die Turbulenz keine signifikante qualitative Veränderung mehr zu erwarten. In Abbildung 5.14 erkennt

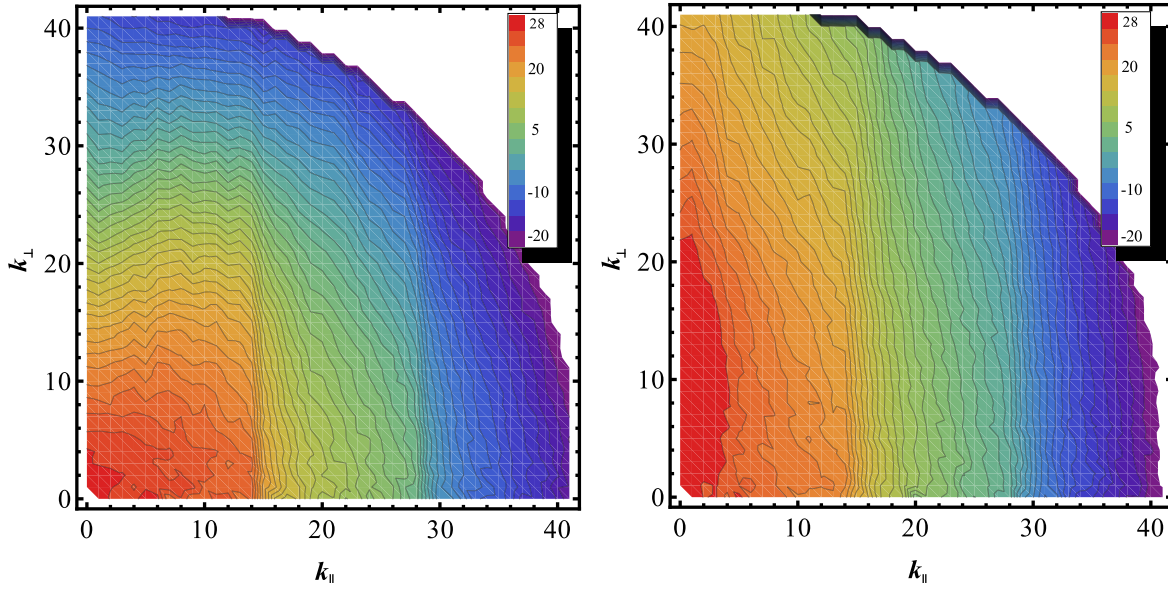


Abbildung 5.16.: *Entwicklung der spektralen Energie von Simulation SI in zweidimensionaler Darstellung. Die Farbskalierung ist logarithmisch. Das linke Bild zeigt den Zustand bei $t = 17$ s. Rechts ist der gesättigte Zustand der Turbulenz bei $t = 85$ s zu beobachten.*

man das Erreichen der Sättigung sehr gut am Abflachen der Gesamtenergiekurve. Nach 85 s oder 30 Alfvén-crossing-times hat sich der gewünschte Zustand eingestellt und die Turbulenz hat sich bis zu den kleinsten aufgelösten Skalen durch die Energiekaskade entwickelt. Dabei wird gemäß Kapitel 3.2 durch die Dissipation bei hohen Wellenzahlen die Energie zu kleinen Strukturen transportiert. Sehr deutlich ist dieser Vorgang auch in Abbildung 5.15 zu beobachten. Im Anfangszustand wird das System von großskaligen Strukturen dominiert, die bei kleinen Wellenzahlen viel Energie in sich tragen. Im Verlauf der Simulation wachsen die Moden bei höherem k an, die durch den Energietransfer kleinerer Wellenmoden gespeist werden. Es stellt sich ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von $-5/3$ ein, das sogenannte Kolmogorovspektrum. Die Abweichung von diesem Verlauf nimmt in der Nähe des Dissipationsbereichs erwartungsgemäß zu. Außerdem stellt Abbildung 5.15 das totale Energiespektrum dar, wofür über \mathbf{k} zylindrisch integriert wurde. Man kann also keine Aussagen über die Abhängigkeit des Energieverlaufs von der Entwicklungsrichtung k_{\perp} oder k_{\parallel} treffen.

Gemäß den Arbeiten von Sridhar u. Goldreich (1994) und Goldreich u. Sridhar (1995) findet die Kaskadierung in senkrechter Richtung zu B_0 statt. Der spektrale Energiever-

lauf ist entsprechend $E(k) \propto k_{\perp}^{-5/3}$. Gerade bei schwacher Turbulenz ist die Entwicklung in paralleler Richtung stark unterdrückt. Da das $\delta B/B_0$ -Verhältnis für SI etwa 10^{-2} beträgt ist von schwacher Turbulenz auszugehen und die Energie sollte entsprechend vorzugsweise in senkrechter Richtung kaskadieren. Um die Entwicklungsrichtung der Turbulenz zu untersuchen wurden zusätzlich zweidimensionale Spektren angefertigt. Diese stellen die spektrale Energie in Abhängigkeit $E(k_{\parallel}, k_{\perp})$ dar und werden durch zylindrische Intergration im Fourierraum gewonnen. In Abbildung 5.16 findet sich dieser 2D-Plot für Parametersatz SI. Man erkennt eindeutig die dominante Entwicklungsrichtung senkrecht zum Hintergrundfeld. Ist die Energie anfangs noch recht gleichmäßig verteilt, stellt sich im Stättigungszustand eine starke Anisotropie ein. Die Wellenmoden in Abbildung 5.16 bilden mit k_{\perp} lang gezogene Strukturen wohingegen in paralleler Richtung nur wenig Energie transportiert wurde.

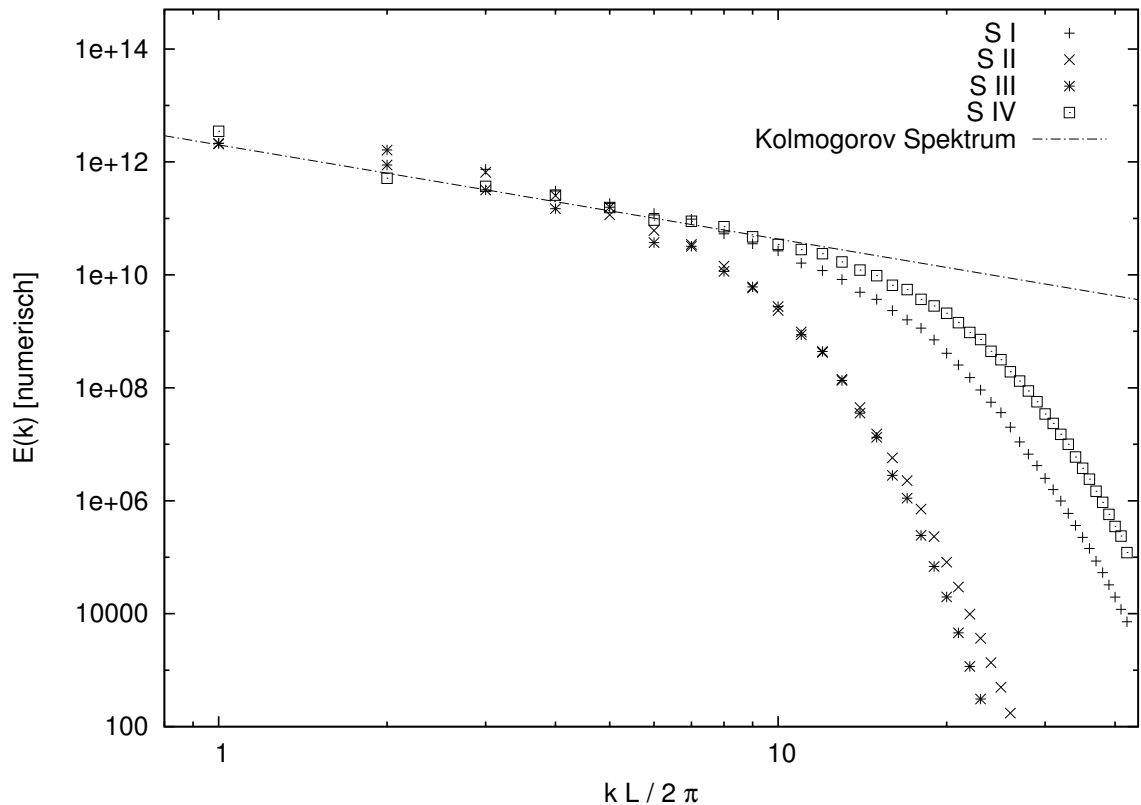


Abbildung 5.17.: Vergleich der totalen Energiespektren für die Parametersätze SI–SIV. Der Inertialbereich, der dem Kolmogorovspektrum folgt, verkürzt sich erwartungsgemäß bei SII und SIII deutlich, da bei diesen Simulationen eine höher Resistivität benutzt wurde. Dementsprechend vergrößert sich der Dissipationsbereich im Fourierraum.

Im Parametersatz SII weicht der spektrale Energieverlauf deutlich von dem Kolmogorov Verlauf ab. Dies ist nicht unerwartet, da eine höhere Resistivität verwendet wurde, was in der Kombination mit Hyperdiffusivität, die mit $\propto k^4$ dämpft, zu einer starken Dissipation führt. Folglich verkürzt sich der Inertialbereich, der dem $-5/3$ Spektrum folgt erheblich. Dies ist sehr gut in Abbildung 5.17 zu erkennen.

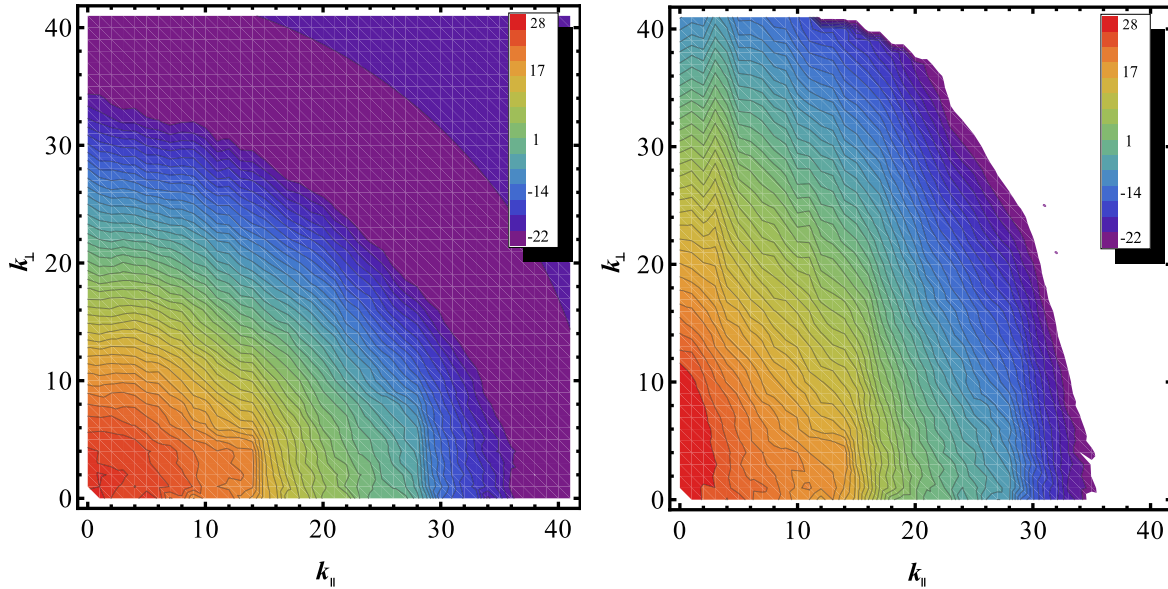


Abbildung 5.18.: Zweidimensionale Entwicklung der spektralen Energie im Fourierraum für Parametersatz SII. Der Energietransport ähnelt dem in SI, mit dem Unterschied, dass große Wellenmoden weniger Energie tragen. Dies ist auf die stärkere Dissipation zurück zu führen.

Vor allem bei der Betrachtung der spektralen Gesamtenergie fällt die Abweichung besonders stark aus. Dies ist hauptsächlich auf die schwache parallele Entwicklung zurück zu führen. Wie schon in SI kaskadiert die Turbulenz primär entlang der senkrechten Richtung. Der geringe Energietransfer, beispielsweise durch Diffusion im Fourierraum, wird sehr stark durch die erhöhte Dissipation unterdrückt. So sieht man in Abbildung 5.18 keine energiereichen Moden mit $k'_{\parallel} \gg 20$. In der Darstellung der Gesamtenergie, die durch Intergration über \mathbf{k} gewonnen wird, muss das Spektrum entsprechend steiler werden.

Der gleiche Effekt ist auch für die Abweichung vom Kolmogorovspektrum bei Verwendung des Parametersatzes SIII verantwortlich. Auch hier wurde die gleiche Resistivität wie in SII benutzt. Außerdem wird durch das größere Hintergrundfeld der Energietrans-

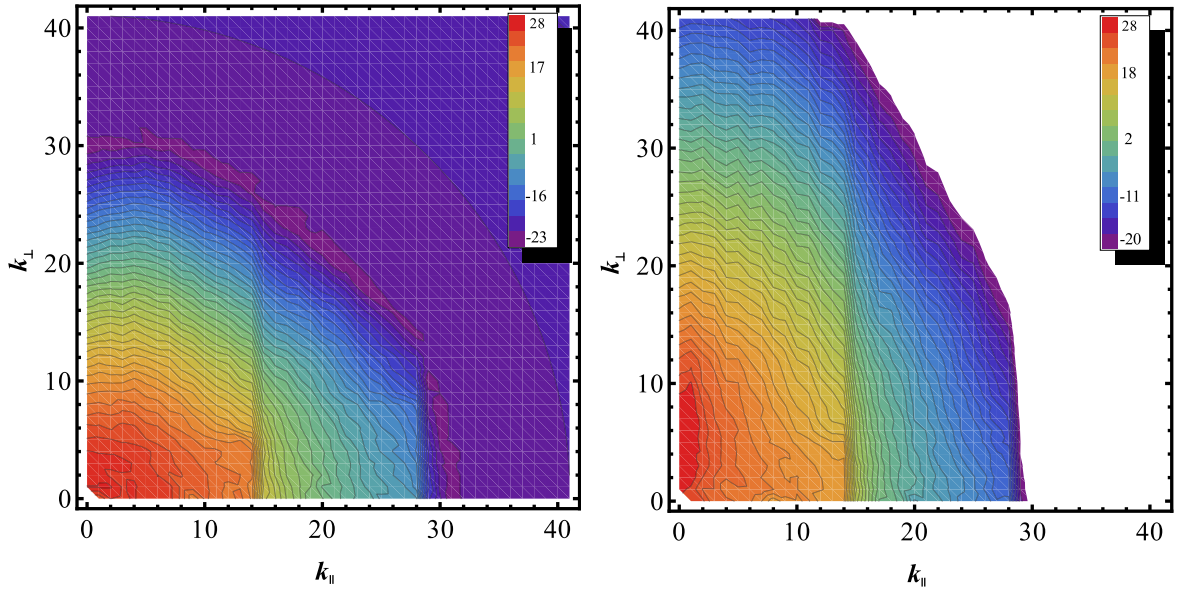


Abbildung 5.19.: *Zweidimensionale Entwicklung der spektralen Energie im Fourierraum für Parametersatz SIII. Die gleiche Resistivität wie unter SII führt zu einem ähnlichen Verhalten der Turbulenzentwicklung. Das deutlich größere B_0 führt zusätzlich zu einer stärkeren senkrechten Ausbreitung der Energie. Die Entwicklung in paralleler Richtung ist stark unterdrückt*

fer noch stärker in Richtung k_{\perp} fokussiert. Anhand Abbildung 5.19 erkennt man, dass nun kaum noch Energie in Moden oberhalb des Treibbereichs $k_{\parallel} > 15$ vorhanden ist. Daher weicht der spektrale Energieverlauf in Abbildung 5.17 noch stärker als SII vom Kolmogorov Potenzgesetz ab.

Eine deutlich andere die Entwicklung der Turbulenz wird unter Verwendung der Parameter von SIV beobachtet. Wie aus Tabelle 5.1 zu entnehmen ähnelt diese Simulation dem Satz SI, nur das Hintergrundfeld wurde um zwei Größenordnungen reduziert. Der Energietransfer erfolgt nahezu isotrop. In Abbildung 5.20 ist besonders gut der starke Energietransport zu hohen parallelen Wellenzahlen erkennbar, was durch die Ausbildung einer parallelen Kaskade gemäß Goldreich u. Sridhar (1995) erklärt wird. Durch die Isotropisierung ist nun auch ein ausgeprägter Inertialbereich mit einem Kolmogorovspektrum entstanden, wie man Abbildung 5.17 entnehmen kann.

Die Ergebnisse für den letzten verwendeten Parametersatz SV sind in Abbildung 5.21 zusammengefasst. Ähnlich zu der Entwicklung unter den Parametern von SI, hat sich die Turbulenz stark in senkrechter Richtung entwickelt. Die Energie ist entlang k_{\perp} bis

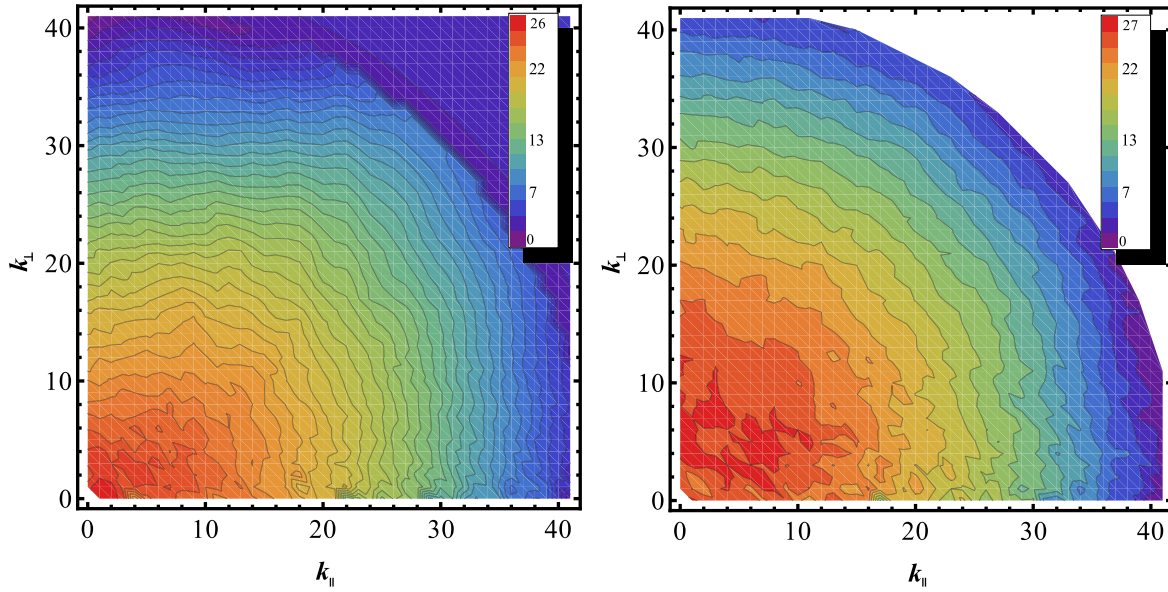


Abbildung 5.20.: Zweidimensionale Entwicklung der spektralen Energie im Fourierraum für Parametersatz SIV. Szenario für starke Turbulenz mit $\delta B/B_0 \approx 1$. Die Entwicklung erfolgt deutlich isotroper. Speziell Wellenmoden mit hohem k_{\parallel} tragen mehr Energie als in den anderen Parametersätzen.

hin zur Antialiasingkante kaskadiert. In paralleler Richtung war die Entwicklung ähnlich schwach wie unter SI. Da in SV die Anzahl der aktiven Moden sich jedoch verdoppelt hat ist die Energie nicht vollständig im Fourierraum ausgebreitet. Das ist nicht unerwartet, da die Kaskadierungszeitskala sich gemäß Kapitel 3.2 ebenfalls vergrößert. Demnach ist der vorliegende Zustand nach etwa 30 Alfvén-crossingtimes noch nicht vollständig gesättigt, so dass sich das Gleichgewicht zwischen Injektion und Dissipation der Energie noch nicht gänzlich eingestellt hat. Dies erkennt man auch im Gesamtspektrum, in dem der Inertialbereich mit dem Kolmogorovexponenten im Vergleich zum Dissipationsbereich eher klein ist. Dennoch soll dieser Zustand als Ausgangspunkt der folgenden Simulationen dienen, da die Gesamtsimulationszeit bis zur vollständigen Sättigung erheblich wäre und nicht mehr im Rahmen der beantragten Rechenzeit durchführbar war.

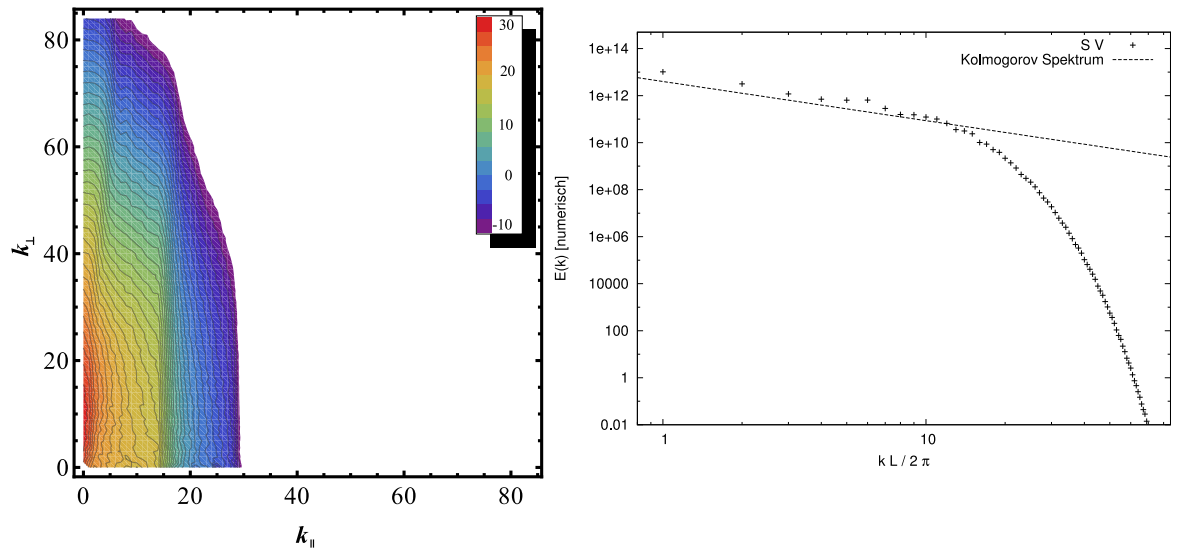


Abbildung 5.21.: Ergebnisse für die Einstellungen unter Parametersatz SV mit höherer Auflösung. Der dargestellte Zeitpunkt nach etwa 30 Alfvén-crossingtimes hat noch nicht den Zustand der vollständigen Sättigung erreicht. Die Entwicklung in paralleler Richtung ist daher weniger stark und der Dissipationsbereich im totalen Spektrum (rechts) erstreckt sich über einen großen Wellenzahlbereich.

5.2.2. Simulation angeregter Wellenmoden in heliosphärischer Turbulenz

Die Grundlage der Turbulenzsimulationen wurde mit dem vorangegangenen Kapitel geschaffen. Der Fokus dieser Dissertation liegt auf der Untersuchung einzelner angeregter Wellenmoden. Ziel ist es, erste Schritte zur Beschreibung von SEP-Ereignissen zu machen, die bisher noch nicht im Rahmen numerischer MHD-Simulationen untersucht wurden. Wie schon in Kapitel 2.5 und 3.3.4 beschrieben, werden durch strömende energiereiche Protonen im Bereich von 100 MeV Instabilitäten im Plasma erzeugt. Diese führen zum Anwachsen einzelner Wellenmoden (vgl. Gl. 3.167). Die Entwicklung solcher Moden in einem turbulenten Hintergrundplasma ist vor allem für den Transport und die Beschleunigung von geladenen Teilchen von besonderer Bedeutung. Es sollen im Folgenden nun die Entwicklungsmechanismen genauer untersucht werden. Dabei wird das Anwachsen einer Mode durch die Plasmainstabilität nicht auf kinetischer Ebene modelliert, sondern unter der Annahme, dass strömende Teilchen Energie an bestimmte Wellenmoden abgeben, in das Bild der MHD übertragen, um dort das Augenmerk auf

deren Entwicklung legen zu können.

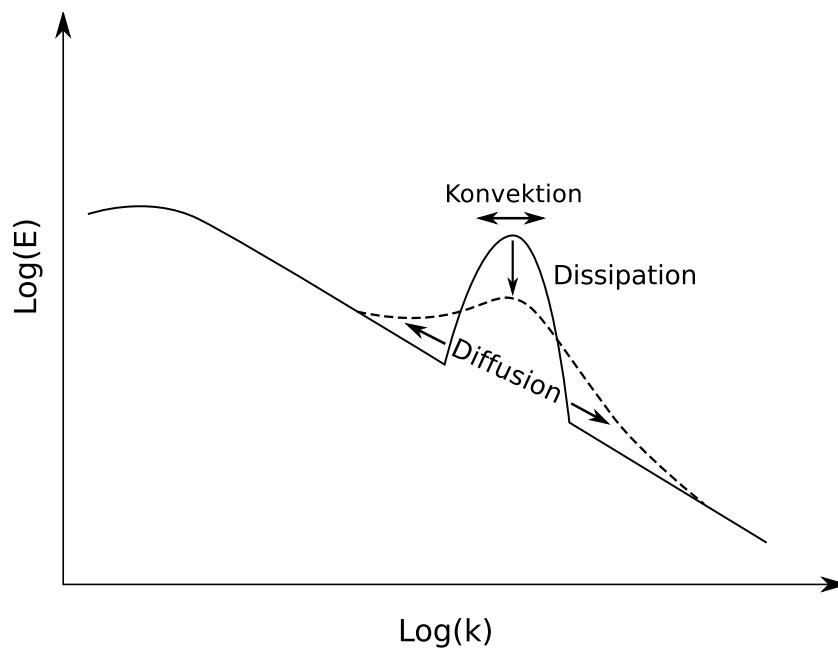


Abbildung 5.22.: Grafische Darstellung der möglichen Entwicklungsmechanismen einer angeregten Mode im turbulenten Hintergrundfeld. Dabei ist als Diffusionsprozeß die Fourierraum- oder Wellenzahldiffusion gemeint, was nicht mit der räumlichen Diffusion zu verwechseln ist.

In Abbildung 5.22 sind die möglichen Mechanismen und deren Auswirkung auf eine angeregte Mode dargestellt. Die Position einer solchen Mode im k -Raum kann sich durch Konvektion verändern. Eine Verbreiterung der Form, vor allem in den Flanken des Peaks, wird durch Diffusion verursacht. Dabei ist explizit die Wellenzahldiffusion gemeint, nicht die Räumliche. Letztere ist im Rahmen der spektralen Methodik mit der Dissipation verknüpft. Wie schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben enthält, abgesehen vom zero-padding der Antialiasing Routine, das Modell keine Energieverluste außer der Dissipation, die durch den entsprechenden Term der ohmschen und viskosen Resistivität eingehen. Folglich kann man die Wellenzahldissipation auf den räumlichen Diffusionsprozeß zurückführen. Löst man also die Wellenzahldissipationsgleichung

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -k^2 D e \quad (5.30)$$

und berechnet deren Koeffizienten

$$D = \frac{\epsilon_0 - 1}{k^2 \Delta t}, \quad (5.31)$$

kann man Aussagen über die räumliche Diffusion treffen. Dieser Ansatz ist sehr gut zur Untersuchung einer angeregten Einzelmode geeignet. Eine Auswertung dieser Koeffizienten für beliebig turbulente Moden wäre nicht sinnvoll, da man i.A. die Dissipation nicht von anderen Prozessen unterscheiden kann.

Während die Verbindung zu dem Dissipationsterm der MHD-Gleichungen klar ist, kann man die Mechanismen der Konvektion und Wellenzahldiffusion nicht exakt zuordnen. Beide werden von den nichtlinearen Termen der Gl.en 4.21–4.23 verursacht und können nicht getrennt betrachtet werden (vgl. 3.1 und 4.1).

Die gewählten physikalischen Parameter wurden größtenteils schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben. Die äußere Längenskala L_0 wurde dabei so gewählt, dass die korrespondierenden Protonenenergien im Bereich mehrerer MeV liegen. Der Gedanke war hierbei, dass die meisten Ereignisse, die zur Strömungsinstabilität und somit zu angeregten Moden führen, von Protonen mit Energien zwischen 1-100 MeV erzeugt werden. Um zwei verschiedene Szenarien der Energieinjektion bei großen und kleinen räumlichen Skalen abzudecken, wurde Moden bei $k' = 8$ und $k' = 24$ angeregt. Diese entsprechen den physikalischen Werten $k_{\parallel} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ und $k_{\parallel} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ und repräsentieren Anregungen durch Protonen der Energie $E_8 \approx 64 \text{ MeV}$ bzw. $E_{24} \approx 7 \text{ MeV}$. Die Energien wurden gemäß Gl. 5.28 durch

$$k_{\parallel} = \frac{2\pi k'_{\parallel}}{L} = \frac{eB_0}{\gamma m_p v_{\parallel} c} = \frac{eB_0}{p_{\parallel} c} \quad (5.32)$$

berechnet.

Um das sukzessive Anwachsen einer Mode möglichst realistisch zu gestalten, wird der jeweilige Peak nicht auf einmal initialisiert, sondern über ein Zeitintervall von 1.7 s getrieben. Dabei werden die beiden angeregten Moden mit zwei verschiedenen Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 , mit $\Gamma_1 < \Gamma_2$ getrieben, die folglich in zwei verschiedene Peakamplituden resultieren. Für die Parametersätze SI–SIV wurden demnach jeweils vier Simulationen durchgeführt, $k' = 8$ und 24, jede mit Γ_1 und Γ_2 . Da SEP-Ereignisse nicht nur bei einer diskreten Energie auftreten, sondern Teilchen unterschiedlicher Energien

beitragen, wird als Treibprofil eine Gaußkurve angenommen, die einen Bereich über etwa fünf Wellenmoden verteilt anregt.

5.2.3. Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SI

Die Ergebnisse des Parametersatzes SI werden sehr ausführlich präsentiert, um einen Überblick über die Auswertung zu geben. Bei jeder Simulation wurden alle diese Auswertungen vorgenommen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden allerdings nur die wichtigsten Resultate vorgestellt.

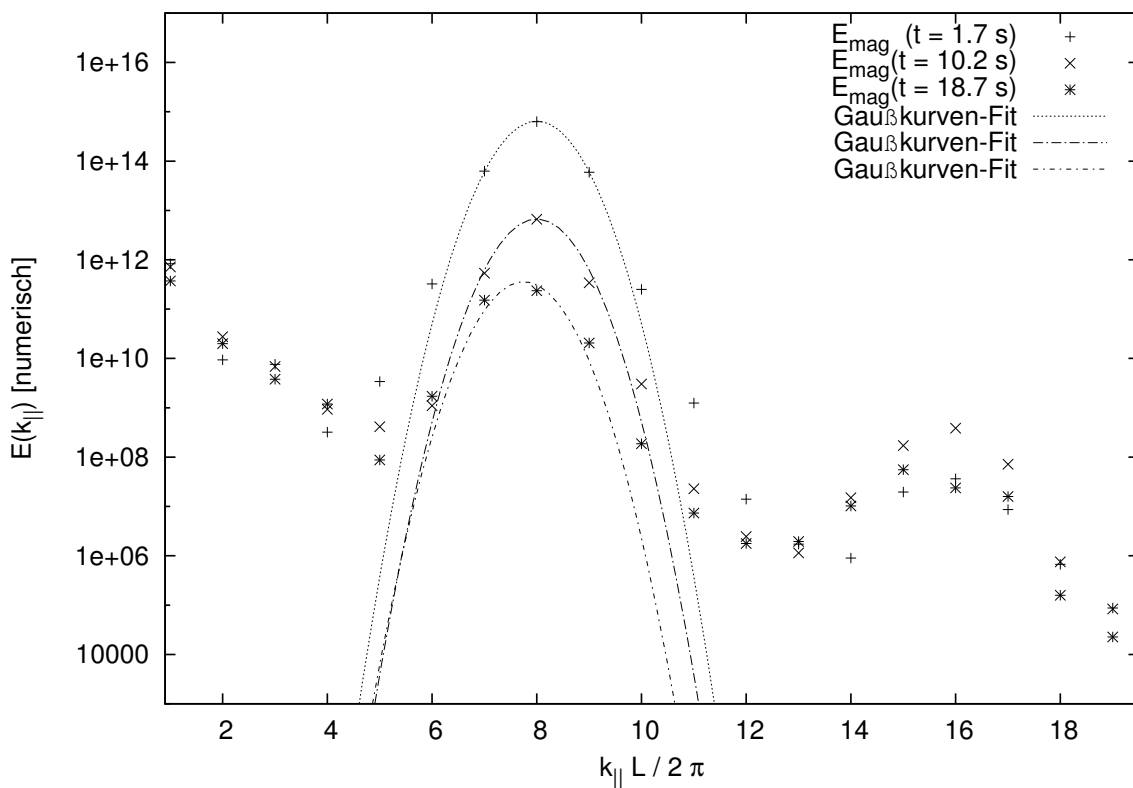


Abbildung 5.23.: Parametersatz SI, Peak $k'_{\parallel} = 8$, kleine Wachstumsrate Γ_1 : Eindimensionaler Schnitt entlang der parallelen Richtung im Fourierraum ($k_{\perp} = 0$). Aufgetragen ist die Zeitentwicklung der magnetischen Energie. Zusätzlich wurde die initialisierte Gaußkurve eingezeichnet. Es ist eine deutliche Verbreiterung erkennbar, sowie eine leichte Verschiebung zu kleinerem k'_{\parallel} . Bei $k'_{\parallel} = 16$ findet sich ein weiteres Maximum.

Zunächst soll die Slab-Komponente des Peaks untersucht werden, da dort der Peak

$t[\text{s}]$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
$t_1 \equiv t_{\text{start}}$	0	0	
$t_2 \equiv t_{\text{mid}}$	51 (25, 5)	8, 5	SI
$t_3 \equiv t_{\text{end}}$	102 (51)	17	

Tabelle 5.2.: Gesamtzerfallszeiten der angeregten Moden in SI. Die Startzeiten sind am Ende des Peaktreibens festgelegt und stehen somit für den Beginn des Zerfalls. Der Endzustand wird durch den Zeitpunkt kurz vor dem Gesamtzerfall der Energie in der Slab-Komponente markiert. Dabei stehen die eingeklammerten Werte für die tatsächliche Simulation, die in diesen Fällen nicht bis zu Ende geführt wurden, aufgrund der hohen Simulationszeiten. Für diese Werte wurde für t_{end} eine Abschätzung anhand eines Exponential-Fits der Zerfallskurve gemacht.

$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$		$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
Γ_1	Γ_2	Γ_1	Γ_2
$1,90 \cdot 10^7$	$1,95 \cdot 10^9$	$1,66 \cdot 10^{18}$	$2,29 \cdot 10^{20}$

Tabelle 5.3.: Parametersatz SI: Gesamtenergieinjektion der Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 . Die Injektion ist als Verhältnis $E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{max}})/E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{start}})$ angegeben.

initialisiert wird und die Veränderung zu der ursprünglichen Gaußkurve direkt vergleichbar ist. Zu diesem Zweck wurde die magnetische Energie entlang der parallelen k-Achse ausgewertet. In Abbildung 5.23 ist die Zeitentwicklung der angeregten Mode bei $k'_{\parallel} = 8$ mit Wachstumsrate Γ_1 gezeigt. Die Dissipation ist deutlich zu erkennen. Die Amplitude des Peaks nimmt exponentiell ab, was auf den Dissipationsterm zurück zu führen ist. Außerdem zeigt sich eine starke Verbreiterung der Flanken, die durch Wellenzahldiffusion verursacht wird. Besonders gut lässt sich die Verbreiterung im Vergleich mit der initialisierten Gaußkurve erkennen. Eine leichte Verschiebung in dem betrachteten Zeitintervall (17 s) von $k'_{\parallel} = 8$ auf $\approx 7,7$ deutet zudem auf konvektive Prozesse hin. Das lokale Maximum bei $k'_{\parallel} = 16$ ist als eine höhere harmonische Anregung zu identifizieren, die sich bei einer weiteren Darstellung der k-Achse und mit zunehmender Zeit auch bei $k'_{\parallel} = 24, 32$ und 40 wiederfinden¹.

Die gleichen eindimensionalen Darstellungen wurden für die anderen angeregten Moden ausgewertet. In den Abbildungen 5.24 und 5.25 wurden exemplarisch die Zeitentwicklungen für die schwache und die starke Wachstumsrate Γ_1 und Γ_2 dargestellt. Er-

¹Dies ist in der späteren Auswertung der zweidimensionalen Energieverteilung deutlich erkennbar, daher wurde hier auf eine weitere Abbildung verzichtet.

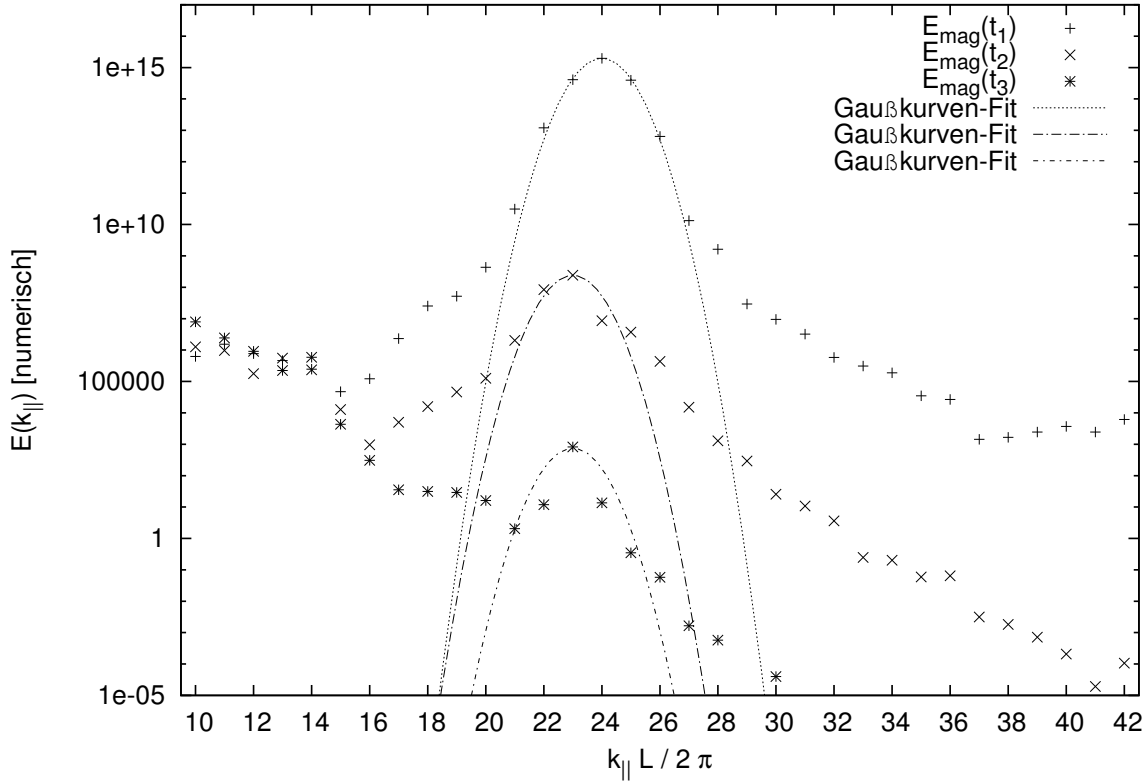


Abbildung 5.24.: Parametersatz SI, Peak $k'_{\parallel} = 24$, kleine Wachstumsrate Γ_1 : Eindimensionaler Schnitt entlang der parallelen Achse ($k_{\perp} = 0$) im Fourierraum. Die gezeigten Zeitschritte sind kleiner als in Abbildung 5.23, was auf eine stärkere Dissipation schließen lässt. Des Weiteren ist die Verschiebung zu kleinerem k_{\parallel} deutlicher.

wartungsgemäß ist die Dissipation der 24er Mode signifikant stärker als bei $k'_{\parallel} = 8$, was auf die Proportionalität $\propto k^4$ des Dissipationsterms zurück zu führen ist. Die genauen Werte der Zerfallszeiten wurden in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Um die Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 der jeweiligen angeregten Mode in Relation zur injizierten Energie zu bringen, wurde in Tabelle 5.3 das Verhältnis der Energie des turbulenten Hintergrundes mit der, des maximalen Treibens, gebildet. Dabei ist die effektive Injektion bei $k'_{\parallel} = 24$ hoch, da der Energietransport in paralleler Richtung sehr langsam ist und sich folglich wenig energiereiche Turbulenz entwickelt hat (vgl. Abbildung 5.26).

In beiden Abbildungen, 5.24 und 5.25, erkennt man eine Verbreiterung der Flanken, vor allem da das turbulente Hintergrundfeld bei so hohem k_{\parallel} nicht sehr energiereich ist. Die Verschiebung der Position fällt stärker als in Abbildung 5.23 aus. So ist nach dem

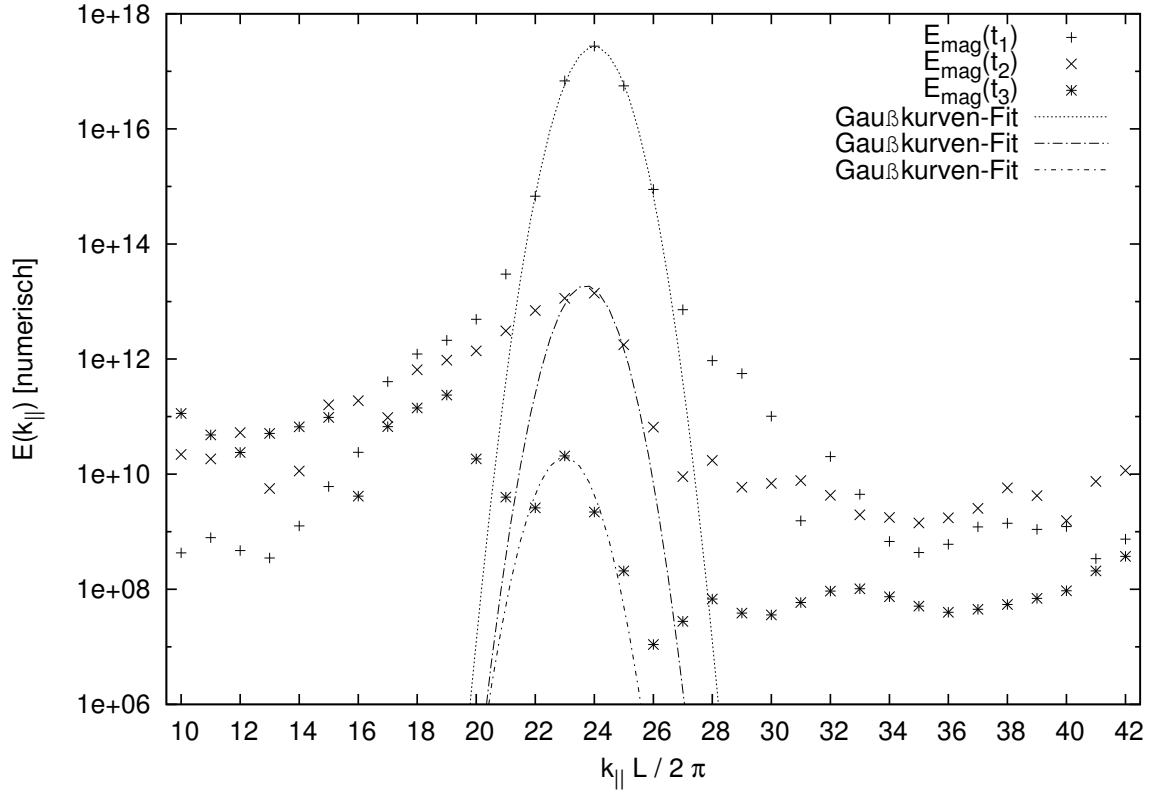


Abbildung 5.25.: Parametersatz SI, Peak $k'_{\parallel} = 24$, hohe Wachstumsrate Γ_2 : die Zeitentwicklung der magnetischen Energie ist erneut entlang der k_{\parallel} -Achse dargestellt. Die stärkere Wachstumsrate führt zu mehr Substrukturen im Spektrum, wie z.B. lokale Maxima bei $k'_{\parallel} = 16$ und 38.

gleichen Zeitintervall von 17 s bei beiden Simulationen eine Verschiebung von $k'_{\parallel} = 24$ nach 23 zu erkennen.

Nun soll die Gesamtentwicklung der angeregten Moden untersucht werden. Wie schon bei der Auswertung der Hintergrundturbulenz im vorangegangenen Kapitel, wird zu diesem Zweck die spektrale Energie in zweidimensionalen Abbildungen dargestellt. Um einen Überblick über die interessanten Phasen der Zeitentwicklung eines Peaks zu geben, wurden in den Abbildungen 5.26 Zeitschritte zur Mitte des Treibintervalls, zum maximalen Treibzustand und während des Zerfalls für jeweils beide angeregten Moden ausgewählt.

Besonders gut erkennbar sind die höheren harmonischen Anregungen der $k' = 8$ Mode. Wichtig ist die Erkenntnis, dass deren Ausprägung bei höherem $k_{\perp} \neq 0$ beginnt und

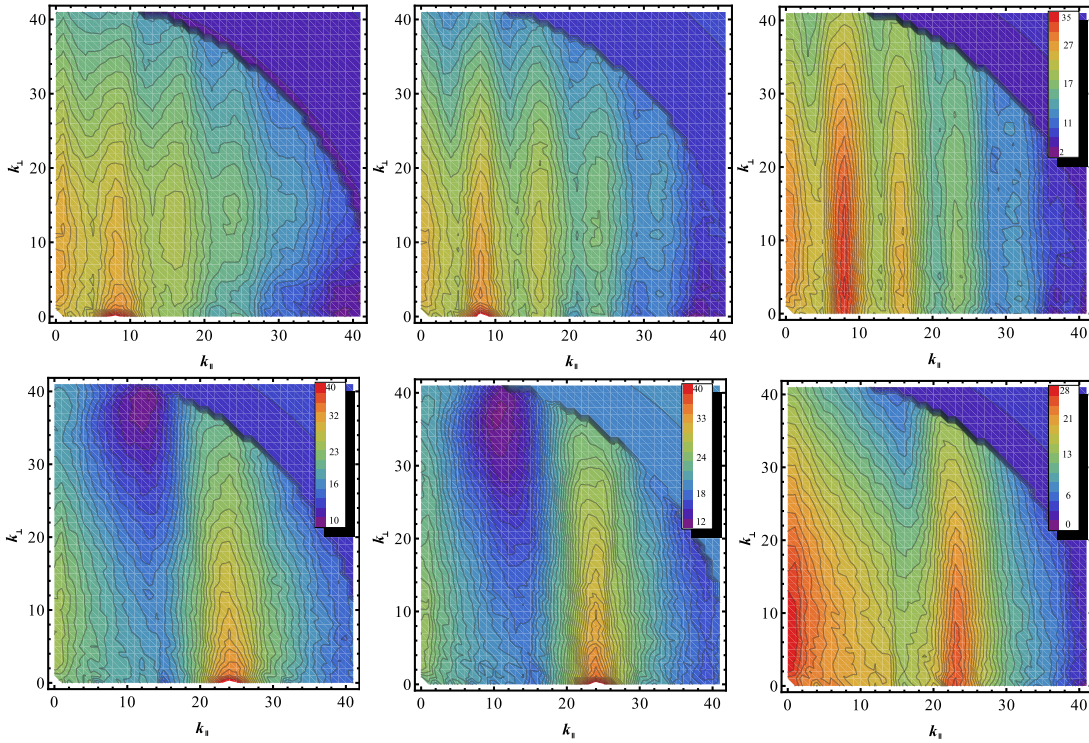


Abbildung 5.26.: Parametersatz SI, Peak $k'_{\parallel} = 8$ (oben) $k'_{\parallel} = 24$ (unten), schwache Wachstumsrate Γ_1 : Zweidimensionale Entwicklung der spektralen, magnetischen Energie. Wie schon im vorangegangenen Kapitel, ist die Farbeinteilung logarithmisch. Außerdem wurde die Farbskalierung bei den oberen drei Abbildungen zur besseren Vergleichbarkeit normalisiert. Bei der unteren Bildreihe des $k'_{\parallel} = 24$ Peaks war dies nicht möglich, da sonst wegen der großen Unterschiede die Substrukturen nicht gut aufgelöst wären. Das linke Bild ist eine Aufnahme in der Mitte des Peaktreibens. Das mittlere Bild zeigt den maximalen Treibzustand, also t_{start} . Rechts ist der Zerfall nach 17 s (oben) und 6,8 s (unten) dargestellt.

erst durch die starke senkrechte Kaskadierung die Energie zur k_{\parallel} -Achse gelangt. Solche höheren Harmonischen würden sich in den $k' = 24$ Peak Simulationen ebenfalls entwickeln. Da die $k' = 48$ Mode jedoch nicht mehr aktiv ist, wird sie durch das Antialiasing unterdrückt.

Um die unterschiedlichen Anwachsraten in Abhängigkeit der zweidimensionalen Fourierentwicklung zu untersuchen, wurde Abbildung 5.27 erstellt. Es sind deutlich verschiedene Energietransportrichtungen erkennbar. So ist im linken Bild die Simulation mit Γ_1 stark von einer senkrechten Kaskade geprägt, während Γ_2 in der rechten Abbildung einen isotroperen Verlauf des Energietransfers aufweist. Vor allem ist das

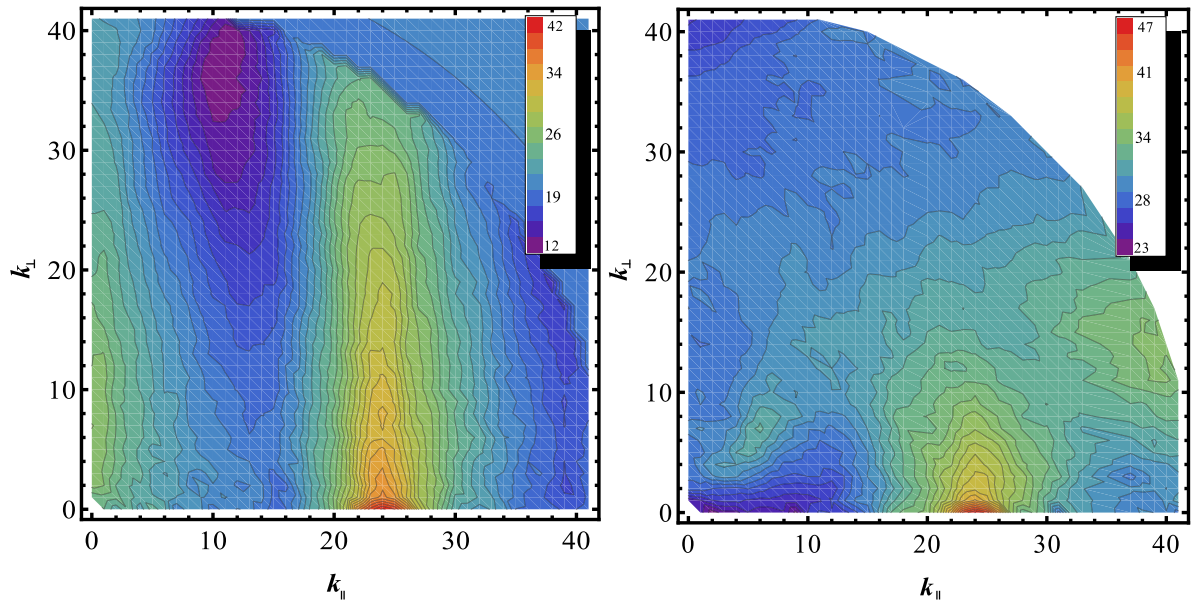


Abbildung 5.27.: Parametersatz SI: Vergleich der spektralen Energieentwicklung der verschiedenen Wachstumsraten Γ_1 (links) und Γ_2 (rechts). Die isotropere Entwicklung bei Γ_2 ist ein Indikator für das Erreichen der kritischen Balance. Zudem bilden sich im rechten Bild interessante Substrukturen aus.

Ausbilden weiterer Substrukturen bei $k'_{\parallel} = 6$ und $k'_{\perp} = 10$ zu beobachten. Dies deutet auf das Erreichen der kritischen Balance hin.

Um dies genauer zu überprüfen, wurde eine Karte des ζ -Parameters (vgl. Gl. 3.125) für das rechte Bild in Abbildung 5.27 angefertigt. Zwar erkennt man in Abbildung 5.28, dass $\zeta \approx 1$ nicht gänzlich erreicht wird, aber die erhöhten Werte stimmen mit den beobachteten Substrukturen überein. Bemerkenswert ist weiterhin, dass durch das Anwachsen der angeregten Mode auch Werte entlang der senkrechten Wellenzahlachse bei kleinem k_{\parallel} verstärkt werden und demnach ein Wechselwirkungsprozeß vorliegen muss.

5.2.4. Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SII

Das Ziel von Parametersatz SII ist die Untersuchung der Entwicklung bei höherer Dissipation. Zu diesem Zweck wurde die Resistivität auf $\nu = 10$ vergrößert.

Erneut wurden die Zerfallszeiten gemessen und in Tabelle 5.4 eingetragen. Sehr gut erkennbar sind die deutlich kürzeren Zerfallsintervalle, was für eine stärkere Dissipation

$t[\text{s}]$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
$t_1 \equiv t_{\text{start}}$	0	0	
$t_2 \equiv t_{\text{mid}}$	20,4	1,28	SII
$t_3 \equiv t_{\text{end}}$	40,8	2,55	

Tabelle 5.4.: Gesamtzerfallszeiten der angeregten Moden in SII. Die Startzeiten sind am Ende des Peaktreibens festgelegt und stehen somit für den Beginn des Zerfalls. Der Endzustand wird durch den Zeitpunkt kurz vor dem Gesamtzerfall der Energie in der Slab-Komponente markiert.

$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$		$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
Γ_1	Γ_2	Γ_1	Γ_2
$9,17 \cdot 10^7$	$9,22 \cdot 10^9$	$2,10 \cdot 10^{18}$	$2,10 \cdot 10^{20}$

Tabelle 5.5.: Parametersatz SII: Gesamtenergieinjektion der Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 . Die Injektion ist als Verhältnis $E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{max}})/E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{start}})$ angegeben.

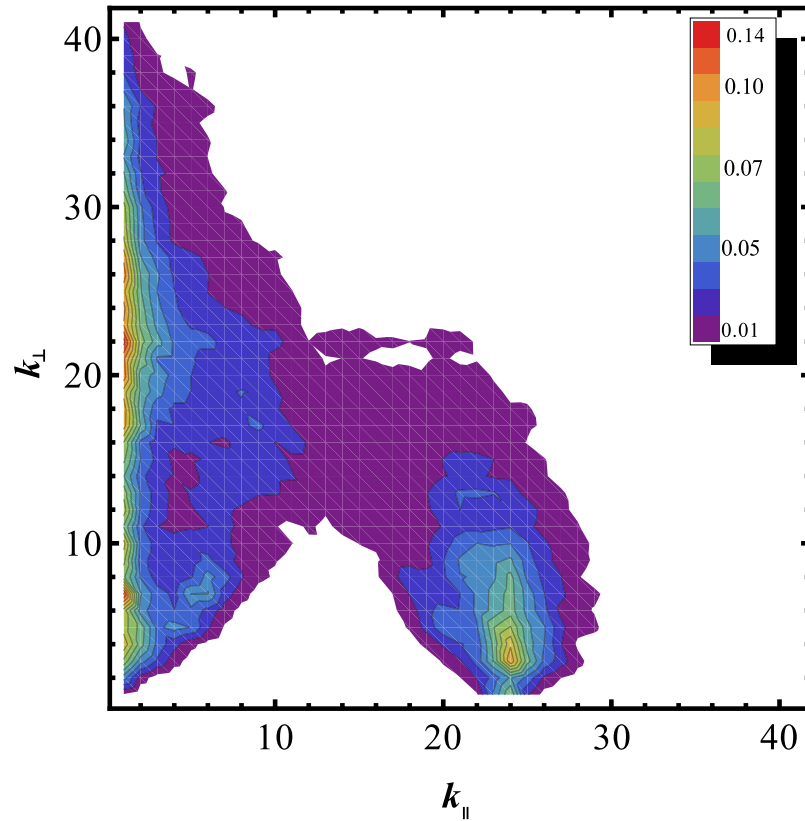


Abbildung 5.28.: Parametersatz SI: Eine Karte für die summierten ζ -Parameter in Abhängigkeit von k_{\parallel} und k_{\perp} für das rechte Bild in Abbildung 5.27. Ist $\zeta \approx 1$ wird das Erreichen der kritischen Balance nach Goldreich u. Sridhar (1995) indiziert. Zwar wird in dieser Simulation der Wert 1 nicht erreicht, aber die Substrukturen in Abbildung 5.27 zeigen Übereinstimmungen mit Regionen nahe des Peaks, sowie bei $k'_{\parallel} = 6$ und $k'_{\perp} = 10$, wo ζ leicht erhöht ist.

zu erwarten ist. Dies zeigt sich auch an der effektiv injizierten Gesamtenergie (Tabelle 5.5), deren turbulenter Hintergrund etwas weniger Energie trägt. Daher ist das Verhältnis zur Peakenergie leicht erhöht.

Ein bedeutender Unterschied lässt sich zu den Simulationen in SI feststellen. So ist die Verschiebung der angeregten Moden zu kleinerem k_{\parallel} signifikanter. Beispielhaft wird in Abbildung 5.29 erneut ein eindimensionaler Spektralverlauf gezeigt. Trotz der verringerten Simulationszeit, verschiebt sich der Peak innerhalb von etwa 2,5 s von $k'_{\parallel} = 24$ nach $k'_{\parallel} = 22$. Gleichmaßen verstärkt sich auch die Verschiebung der $k'_{\parallel} = 8$ Mode, wobei auf eine weitere Abbildung hier verzichtet werden soll.

Stattdessen sollen für den Peak bei $k'_{\parallel} = 8$ die unterschiedlichen Wachstumsraten in

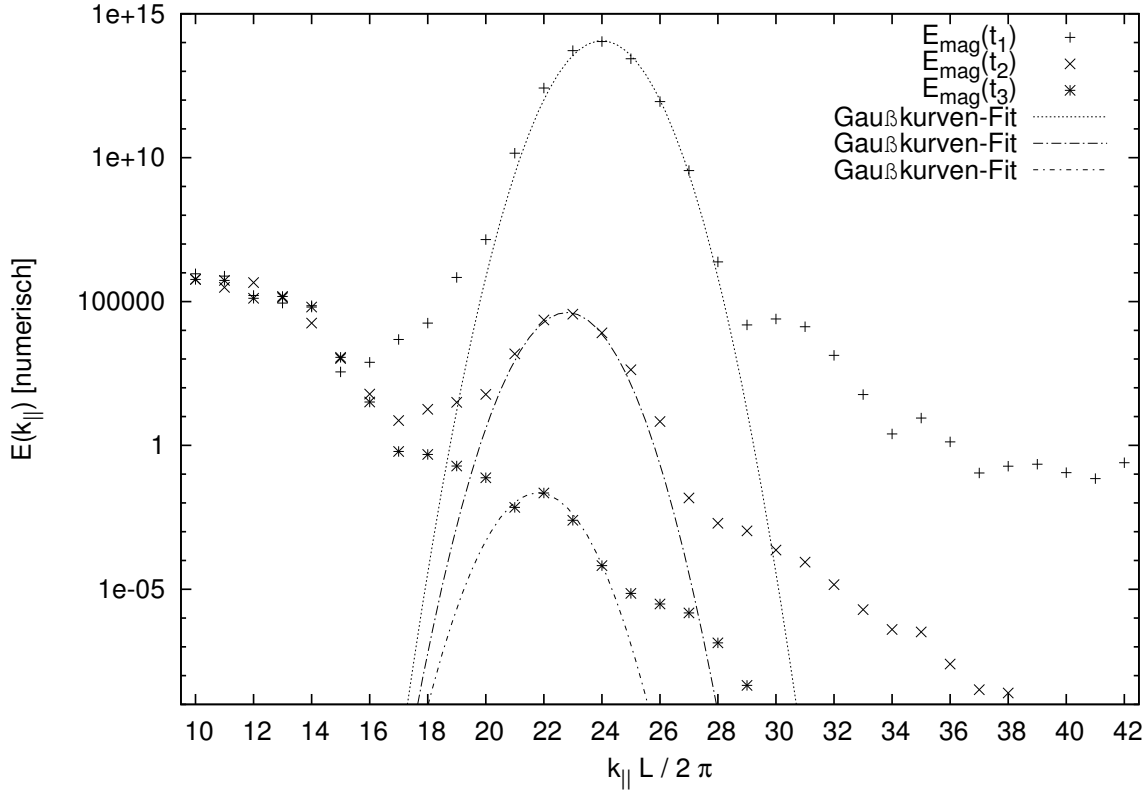


Abbildung 5.29.: Parametersatz SII, Peak $k'_{\parallel} = 24$, kleine Wachstumsrate Γ_1 : Eindimensionaler Schnitt entlang der parallelen Achse im Fourierraum. Die Verschiebung zu kleineren k_{\parallel} ist deutlicher als beim Parametersatz SI.

zweidimensionaler Darstellung gezeigt werden. Wie schon in Kapitel 5.2.3 beobachtet, hat die injizierte Energie einen wesentlichen Einfluss auf die Gesamtentwicklung. So ist der Energietransfer bei der Simulation mit Γ_2 erkennbar isotroper, sogar eher in paralleler Richtung verschoben. Die kleinere Wachstumsrate führt hingegen wieder zu stark senkrechter Entwicklung. Bemerkenswert ist weiterhin das Auftreten der höheren harmonischen Moden. Diese sind in beiden Simulationen bei kleinerem k_{\perp} lokalisiert und weniger zahlreich ausgeprägt. Es lässt sich gerade noch bei $k'_{\parallel} = 32$ eine schwache Mode erkennen.

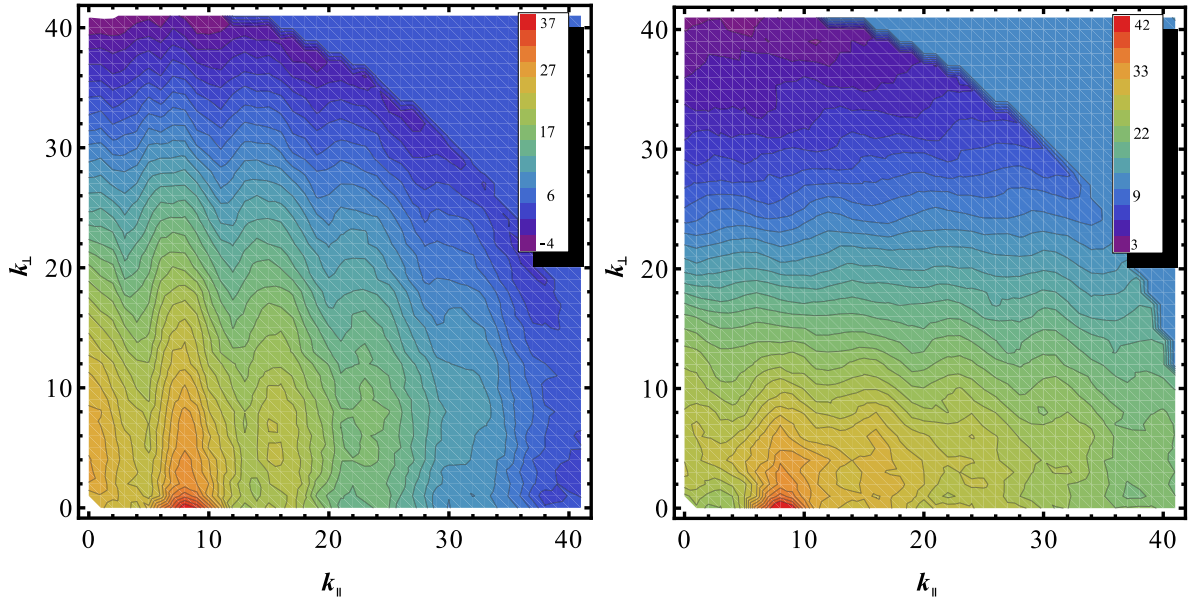


Abbildung 5.30.: Parametersatz SII, Peak $k'_{\parallel} = 8$: Vergleich der Wachstumsraten in der zweidimensionalen spektralen Darstellung. Erneut ändert sich die Entwicklung der Energie erheblich zwischen Γ_1 (links) und Γ_2 (rechts).

5.2.5. Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SIII

In diesem Parametersatz wurde das Hintergrundmagnetfeld um eine Größenordnung auf $B_0 = 1,74$ G erhöht. Außerdem wurde die Resistivität bei $\nu = 10$ belassen. Dadurch wird eindeutig schwache Turbulenz simuliert, was schon in Kapitel 5.2.1 (Abbildung 5.18) erwartungsgemäß zu starker Senkrechtentwicklung in k geführt hat.

Trotz der gleichen Dissipation wie in SII, hat sich effektive Amplitude und Lebensdauer der Peaks leicht erhöht, wie man den Tabellen 5.6 und 5.7 entnehmen kann.

Der deutlichste Unterschied zu SI und SII ist die äußerst starke senkrechte Entwicklung.

Wie man Abbildung 5.31 entnehmen kann, sind bis in den Zerfallsbereich stark lokalisierte Moden bei den Initialpositionen, sowie bei den höheren harmonischen Anregungen beobachtbar. Wie schon bei SII, sind die Harmonischen nicht sehr stark und zahlreich ausgebildet, was mit der höheren Dissipation zu begründen ist. Ein Unterschied zu SII ist der geringere Einfluss der Anwachsrate. Alle Simulationen zeigen ein ähnliches Entwicklungsverhalten für Γ_1 und Γ_2 . Lediglich die Anzahl und Ausprägung der höheren

$t[\text{s}]$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
$t_1 \equiv t_{\text{start}}$	0	0	
$t_2 \equiv t_{\text{mid}}$	22, 53 (21, 42)	2, 04	SIII
$t_3 \equiv t_{\text{end}}$	45, 05 (42, 84)	4, 08	

Tabelle 5.6.: Gesamtzerfallszeiten der angeregten Moden in SIII. Die Startzeiten sind am Ende des Peaktreibens festgelegt und stehen somit für den Beginn des Zerfalls. Der Endzustand wird durch den Zeitpunkt kurz vor dem Gesamtzerfall der Energie in der Slab-Komponente markiert. Dabei stehen die eingeklammerten Werte für die jeweils tatsächlichen Simulationen, die in diesen Fällen, aufgrund der langen Simulationszeiten, nicht bis zu Ende geführt wurden. Für diese Werte wurde für t_{end} eine Abschätzung anhand eines Exponential-Fits der Zerfallskurve gemacht.

$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$		$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
Γ_1	Γ_2	Γ_1	Γ_2
$4,41 \cdot 10^7$	$4,39 \cdot 10^9$	$4,98 \cdot 10^{19}$	$4,98 \cdot 10^{21}$

Tabelle 5.7.: Parametersatz SIII: Gesamtenergieinjektion der Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 . Die Injektion ist als Verhältnis $E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{max}})/E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{start}})$ angegeben.

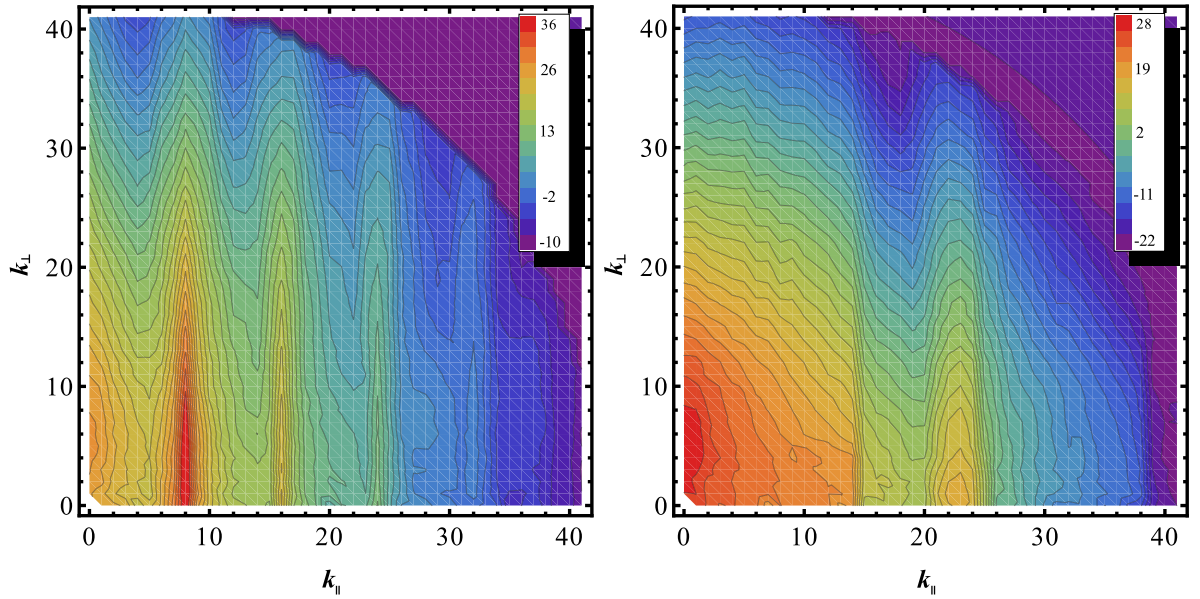


Abbildung 5.31.: Parametersatz SIII, Peaks $k'_{\parallel} = 8$ und 24 zum Zeitpunkt t_{mid} : Der zweidimensionale spektrale Energieverlauf weist deutlich ausgeprägte senkrechte Entwicklung auf.

harmonischen Moden nimmt mit dem größeren Γ_2 zu.

5.2.6. Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SIV

Die Simulation starker Turbulenz wird in diesem Parametersatz untersucht. Dabei konnte das Szenario mit starker Wachstumsrate Γ_2 für den $k'_{\parallel} = 24$ Peak nicht durchgeführt werden, da dieser Parametersatz mit dem gewählten Δt nicht mehr stabil war.

Die Zerfallszeiten der angeregten Moden sind vergleichbar mit SI, was man in Tabelle 5.8 ablesen kann. Die entsprechenden effektiven Amplituden in Tabelle 5.9 sind verhältnismäßig kleiner, da die Hintergrundturbulenz stärker ist.

Aufgrund des hohen $\delta B/B_0 \approx 10$ kann man die Turbulenz eindeutig als stark bezeichnen. Dabei treten interessante Entwicklungseffekte auf. Wie in den Abbildung 5.32 und 5.33 gezeigt, bilden sich neben den höheren harmonischen Anregungen weitere Strukturen aus. Dabei sind diese vorzugsweise bei hohem k_{\perp} und nicht zwingend bei ganzzahligen Vielfachen der initialisierten Peakposition zu finden.

$t[\text{s}]$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$	$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
$t_1 \equiv t_{\text{start}}$	0	0	
$t_2 \equiv t_{\text{mid}}$	54 (28,9)	12,75	SIV
$t_3 \equiv t_{\text{end}}$	108 (57,8)	25,5	

Tabelle 5.8.: Gesamtzerfallszeiten der angeregten Moden in SIV. Die Startzeiten sind am Ende des Peaktreibens festgelegt und stehen somit für den Beginn des Zerfalls. Der Endzustand wird durch den Zeitpunkt kurz vor dem Gesamtzerfall der Energie in der Slab-Komponente markiert. Dabei stehen die eingeklammerten Werte für die jeweils tatsächlichen Simulationen, die in diesen Fällen, aufgrund der langen Simulationszeiten, nicht bis zu Ende geführt wurden. Für diese Werte wurde für t_{end} eine Abschätzung anhand eines Exponential-Fits der Zerfallskurve gemacht.

$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 8$		$k'_{\text{Peak}} = 2\pi \cdot 24$	
Γ_1	Γ_2	Γ_1	Γ_2
$1,45 \cdot 10^6$	$1,54 \cdot 10^8$	$5,17 \cdot 10^9$...

Tabelle 5.9.: Parametersatz SIV: Gesamtenergieinjektion der Wachstumsraten Γ_1 und Γ_2 . Die Injektion ist als Verhältnis $E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{max}})/E(k_{\text{Peak}}, t_{\text{start}})$ angegeben.

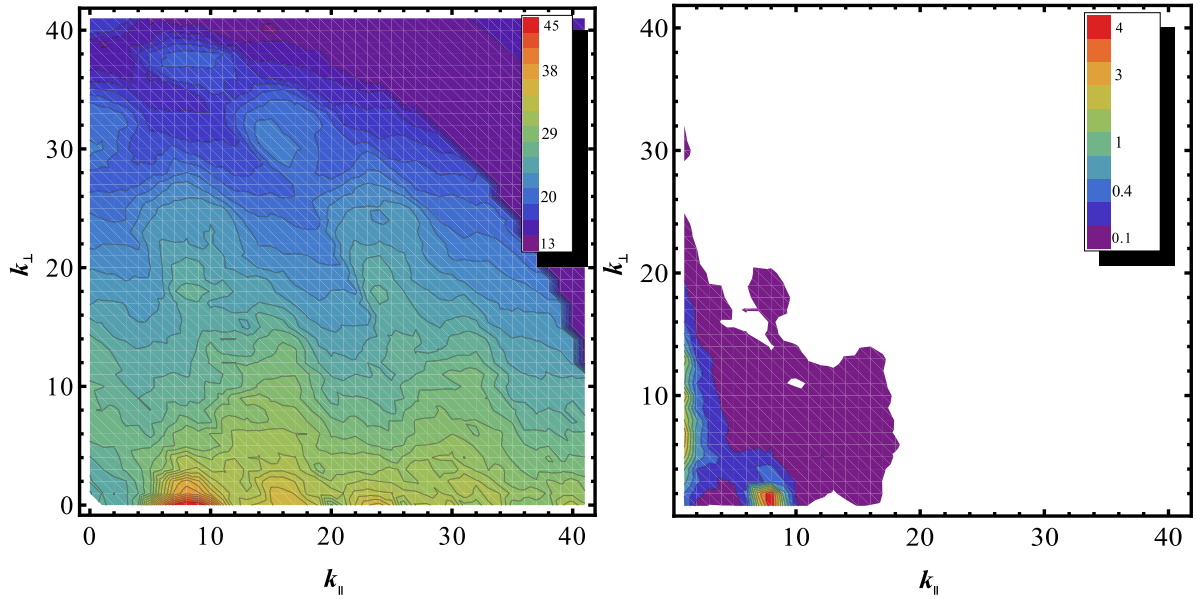


Abbildung 5.32.: Parametersatz SIV, Peak $k'_{\parallel} = 8$ mit Wachstumsrate $\Gamma_2, 1, 28$ s nach dem maximalen Treiben (t_{start}): Links ist der zweidimensionale spektrale Energieverlauf dargestellt und rechts die dazugehörige ζ -Karte. Dabei ist die Farbeinteilung im rechten Bild linear und zeigt integrale Werte von ζ .

Bei der Entwicklung von Mode $k'_{\parallel} = 8$ treten die zusätzlichen Moden bei hohem $|\mathbf{k}|$ auf, so z.B. bei $(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = (10, 18)$, $(10, 38)$, $(18, 32)$ und $(24, 18)$ (vgl. Abbildung 5.32). Bei der initialen $k'_{\parallel} = 24$ Mode ist die Entwicklung dieser Strukturen eher bei kleinem k_{\parallel} und mittleren k_{\perp} zu beobachten, z.B. $(5, 13)$, $(5, 17)$ und $(8, 22)$ (vgl. Abbildung 5.33).

Die Vermutung liegt daher nahe, dass diese neuen Moden mit der kritischen Balance zusammenhängen. Daher wurde für beide Abbildungen die entsprechende Karte des ζ -Parameters erstellt, die rechts in der jeweiligen Abbildung gezeigt ist. Die Skalierung der Farbe wurde dabei so gewählt, dass lediglich Werte oberhalb von $\zeta = 0, 1$ sichtbar sind. Wie schon in Abbildung 5.28 beobachtet, scheint der $k'_{\parallel} = 24$ Peak stark mit den Moden entlang der k_{\perp} Achse zu interagieren und erzeugt dort hohe Werte von ζ .

Die höheren harmonischen Moden sind im Gegensatz zu den anderen Parametersätzen bei sehr kleinem k_{\perp} lokalisiert.

Die Entwicklung des initialisierten Peaks ist von der Dissipation her ähnlich der von SI. Die Verbreiterung durch Wellenzahldiffusion, sowie das Verschieben zu kleinerem k_{\parallel} durch konvektive Prozesse ist hingegen deutlich stärker ausgeprägt.

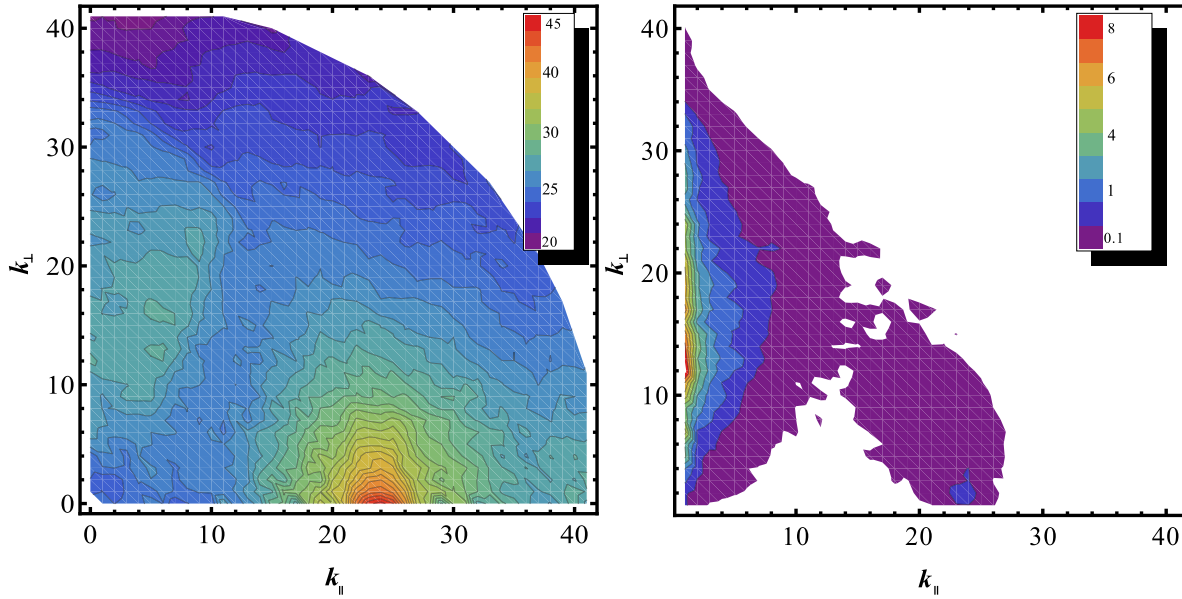


Abbildung 5.33.: Parametersatz SIV, Peak $k'_{\parallel} = 24$ mit Wachstumsrate Γ_1 , 0,68 s nach dem maximalen Treiben (t_{start}): Links ist der zweidimensionale spektrale Energieverlauf dargestellt und rechts die dazugehörige ζ -Karte. Dabei ist die Farbeinteilung im rechten Bild linear und zeigt integrale Werte von ζ .

5.2.7. Ergebnisse der angeregten Wellenmoden im Parametersatz SV

Im letzten untersuchten Parametersatz SV wurde die Auflösung im Real- und Fourierraum in jeder Dimension verdoppelt. Durch die nahezu verzehnfachten Simulationszeiten war es nicht möglich die verschiedenen Szenarien, wie unter SI–SIV durchgeführt, nachzubilden. Daher wurde lediglich eine Wachstumsrate für jeden Peak gewählt. Der Verlauf der Entwicklung der angeregten Moden ist analog zu den Peaks mit Γ_2 unter Parametersatz SI. Hervor zu heben ist die Tatsache, dass unter der Auflösung von SV die Anzahl der aktiven Moden groß genug ist, um die höheren Harmonischen des $k'_{\parallel} = 24$ Peaks zu beobachten. Man erkennt sehr deutlich in Abbildung 5.34 im rechten Bild das Ausbilden der Moden bei $k'_{\parallel} = 48$ und 72 . Weiterhin bemerkenswert ist die Entwicklungszeiskala dieser Moden. Wie in Kapitel 5.2.1 erwähnt, war die Hintergrundturbulenz noch nicht vollständig im gesättigten Zustand. Vor allem in paralleler Richtung ist wenig Energie transportiert worden, was in Übereinstimmung mit dem Goldreich–Sridhar Modell ist, in dem eine parallele Energiekaskade *nicht* beschrieben wird. Dennoch entwickeln sich

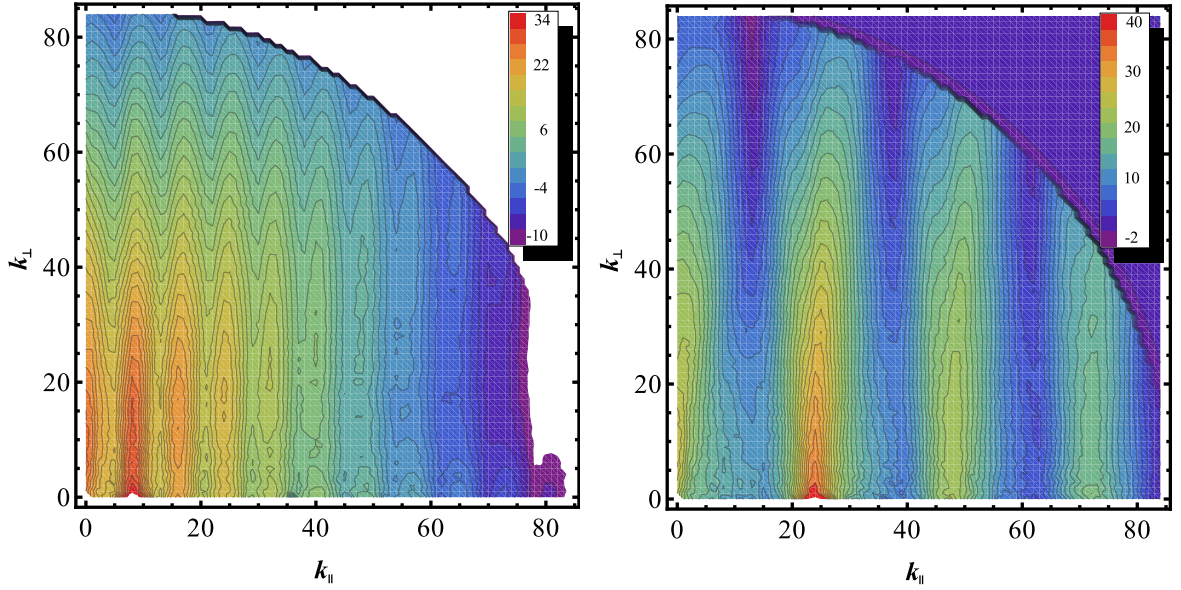


Abbildung 5.34.: Parametersatz SV, zweidimensionaler spektraler Energieverlauf der Peaks bei $k_{\parallel}' = 8$ (links) und $k_{\parallel}' = 24$ (rechts) mit Wachstumsrate Γ_2 im maximalen Treibzustand (t_{start}). Wie schon in den Simulationen der anderen Parametersätze mit starker Energieinjektion beobachtet, entstehen höhere Harmonische.

die höheren Harmonischen innerhalb weniger Alfvén-crossingtimes zu hohem k_{\parallel} .

5.2.8. Diskussion der Ergebnisse von SI–SV

Für die beobachteten Phänomene in den verschiedenen Parametersätze sollen in diesem Kapitel mögliche Erklärungen gegeben werden. Es konnten alle drei Prozesse, die in Abbildung 5.22 skizziert wurden, beobachtet werden. Generell war die Dynamik sämtlicher Mechanismen für die angeregten Moden recht stark. Dies ist vor allem darauf zurück zu führen, dass eine einzelne, energiereiche Alfvénwelle in turbulenten Hintergrundfeldern immer eine instabile Lösung der MHD-Gleichung darstellt und nichtlineare Interaktionen stark Einfluss nehmen. Besonders gut ist dies bei großen Wellenzahlen beobachtbar. So war die Dynamik bei sämtlichen $k_{\parallel}' = 24$ Simulationen äußerst stark. Hervor zu heben ist dabei die Dissipation, die aufgrund der Proportionalität $\propto k^4$, die mit der verwendeten Hyperdiffusivität einher geht, für hohe Werte von k Energie sehr stark dissipiert. Die Zerfallszeiten in den Tabellen 5.2–5.8 bestätigen dies, im Speziellen, wenn man auf die Unterschiede zwischen den Simulationen mit erhöhtem ν achtet (SII und SIII). Dabei

	$k'_{\text{Peak}} = 8$		$k'_{\text{Peak}} = 24$	
	Γ_1	Γ_2	Γ_1	Γ_2
SATZ SI				
τ_1	$5,09 \cdot 10^{14}$	$1,76 \cdot 10^{16}$	$4,12 \cdot 10^{15}$	$7,92 \cdot 10^{15}$
τ_2	$7,23 \cdot 10^{15}$	$8,79 \cdot 10^{16}$	$1,55 \cdot 10^{16}$	$2,92 \cdot 10^{16}$
SATZ SII				
τ_1	$1,41 \cdot 10^{15}$	$8,33 \cdot 10^{15}$	$9,79 \cdot 10^{24}$	$1,23 \cdot 10^{25}$
τ_2	$3,28 \cdot 10^{17}$	$7,60 \cdot 10^{15}$	$4,85 \cdot 10^{30}$	$4,91 \cdot 10^{32}$
SATZ SIV				
τ_1	$1,25 \cdot 10^{14}$	$6,74 \cdot 10^{13}$	$5,84 \cdot 10^{14}$...
τ_2	$4,43 \cdot 10^{14}$	$8,00 \cdot 10^{13}$	$1,47 \cdot 10^{16}$...

Tabelle 5.10.: *Berechnete Dissipationskoeffizienten gemäß Gl. 5.31. Es wurden für sämtliche Simulationen der Parametersätze SI, SII und SIV die Berechnungen für zwei unterschiedliche Zeitschritte (τ_1, τ_2) durchgeführt. Da die Einstellungen von SIII zwei veränderte Parameter tragen, wurde D nicht berücksichtigt, da keine direkte Vergleichbarkeit zu den anderen Simulationen besteht. Die Koeffizienten sind in cm^2s^{-1} gegeben.*

sind die leicht erhöhten Werte in den Tabellen von SIII gegenüber SII durch das Hintergrundmagnetfeld verursacht, was die Energie stärker bei kleineren Moden bindet und somit die Lebensdauer der Peaks minimal erhöht.

Wie schon in Kapitel 5.2.1 im Zusammenhang mit Gl. 5.31 erläutert, ist die Wellenzahldissipation in der verwendeten Methodik mit dem räumlichen Diffusionsprozeß verknüpft. Anhand der Koeffizienten der Dissipationsgleichung kann man Rückschlüsse auf die räumliche Diffusion ziehen. In Tabelle 5.10 sind die Koeffizienten für verschiedene Zeitschritte berechnet. Man sieht, dass vor allem für die starke Wachstumsrate Γ_2 bei den Simulationen mit $k'_{\parallel} = 8$ die Koeffizienten nahezu konstant bleiben. Das lässt darauf schließen, dass in diesen Fällen die räumliche Diffusion die Dynamik bestimmt und somit die Wellenzahldissipation der dominante Prozeß ist. Dies stimmt auch mit den Beobachtungen der Entwicklung im Fourierraum überein. So kann man zwar auch die Verbreiterung und Verschiebung der Peaks bei $k'_{\parallel} = 8$ erkennen, aber die Dissipation hat den deutlichsten Einfluss. Eine starke Schwankung ist hingegen beim Parametersatz SII für den $k'_{\parallel} = 24$ zwischen τ_1 und τ_2 sichtbar. Eine mögliche Erklärung hierfür ist die nichtlineare Wechselwirkung mit anderen Moden, die Energie beispielsweise durch Kaskadierung stark von der initialisierten Wellenmode weg transportiert.

Weitere nichtlineare Effekte wurden bereits mit der Wellenzahldiffusion und der Konvektion in Verbindung gebracht. Dabei führt die Diffusion zur Verbreiterung der angeregten Moden. Auch dieser Vorgang wurde in allen Simulationen in unterschiedlicher Ausprägung beobachtet. Vor allem scheint die effektive Peakamplitude starken Einfluss auf die Verbreiterung zu nehmen. So wurde beispielsweise in den Simulationen zu Parametersatz SI bei der Anwachsrate Γ_2 eine Zunahme der FWHM um 70 % bereits 1,7 s nach dem maximalen Peaktreiben gemessen, wohingegen bei Γ_1 lediglich eine Verbreiterung von etwa 15 % zu verzeichnen war. Eine mögliche Erklärung ist ein Gleichgewicht zwischen Energie- und Enstrophiekaskade. Dadurch wird ein gleichmäßiger Energiefluss zu hohen und kleinen Wellenzahlen stattfinden, was die angeregte Mode demnach „auseinanderziehen“ würde (Mininni u. Pouquet 2009).

Die Verschiebung der initialen Position der angeregten Moden durch Konvektion ist verglichen mit Dissipation und Diffusion, ein eher langsamer Prozeß. Den Ergebnissen kann man entnehmen, dass vor allem die Peaks in den Parametersätzen SI, SII und SIV verschoben werden. Die Simulationen in SIII zeigen hingegen kaum eine Veränderung der Position. Die Verschiebungsrichtung wurde immer zu kleineren Wellenzahlen identifiziert. Dies entspricht der Kaskadierung der Enstrophie. Dieser Prozeß ist vor allem in zweidimensionalen Plasmen bekannt. Ist die MHD-Entwicklung eines Plasmas anisotrop kann man dieses auch als effektiv zweidimensional betrachten, insofern entlang einer Dimension eine Vorzugsrichtung besteht. Dadurch entstehen im Plasma Strukturen und Verwirbelungen auf größeren räumlichen Skalen, was Energietransfer zu kleinerem k bedeutet. Dadurch tritt eine inverse Energiekaskade oder hochskalierende Enstrophiekaskade auf.

Um auf diesen Prozeß weiterhin einzugehen, soll im Folgenden die Mode bei $k'_{\parallel} = 8$ mit geringer Wachstumsrate Γ_1 genauer untersucht werden. Dabei wird sich auf die Simulationen in SI, SIII und SIV konzentriert, da dort jeweils unterschiedliche Hintergrundmagnetfelder verwendet wurden. Da der Energietransfer sehr empfindlich auf B_0 reagiert, sind diese Parametersätze von besonderem Interesse. In Abbildung 5.35 ist der Zustand in benannten Simulationen nach etwa 17 s nach maximalem Peaktreiben verglichen. In SI hat sich innerhalb dieses Zeitintervalls die Position von $k'_{\parallel} = 8$ auf ca. 7,7 verändert. In der Simulation in SIII mit stärkerem B_0 , ist die Position nahezu konstant geblieben. Der Parametersatz SIV zeigt die stärkste Änderung auf $k'_{\parallel} = 6,5$. Das beobachtete Verhalten spricht für eine Enstrophiekaskade, da das extrem starke

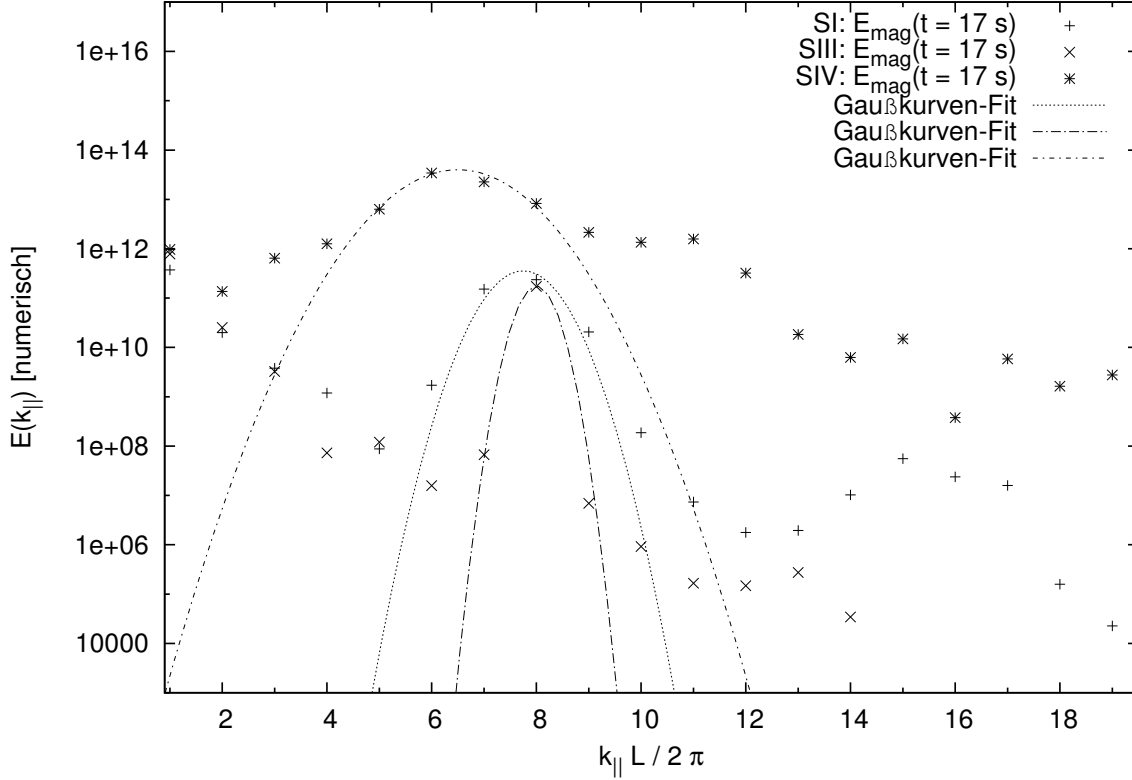


Abbildung 5.35.: Vergleich zwischen der konvektiven Verschiebung der schwach angeregten Mode $k'_{\parallel} = 8$ bei verschiedenen Hintergrundmagnetfeldern B_0 in den Parametersätzen SI, SIII und SIV bei etwa 17 s im Zerfallsbereich. Bei dem sehr starken B_0 in SIII ist der Peak stark lokalisiert und eine Verschiebung ist kaum messbar. Bei geringem B_0 ist die Bewegung zu kleinerem k_{\parallel} signifikant. Dies deutet auf eine Enstrophiekaskade.

Hintergrundmagnetfeld die Vorzugsrichtung eindeutig festlegt und die Entwicklung eher eindimensional ist. Dies ändert sich mit schwächerem B_0 , so dass die Entwicklung weniger eingeschränkt ist. Um diese These zu untermauern wurde zusätzlich die Enstrophie in den verschiedenen Simulationen gemessen. Die Berechnungen wurden gemäß

$$\varepsilon(k) = \int dk |\mathbf{k} \times \mathbf{u}|^2. \quad (5.33)$$

durchgeführt und sind in Abbildung 5.36 dargestellt.

Ein weiterer beobachteter Effekt ist das Ausbilden höherer harmonischer Moden, die bei allen $k'_{\parallel} = 8$ Simulationen mehr oder weniger stark und zahlreich waren. Wie schon erwähnt sind die gleichen Beobachtungen für $k'_{\parallel} = 24$ Initialpeaks nicht möglich, da im

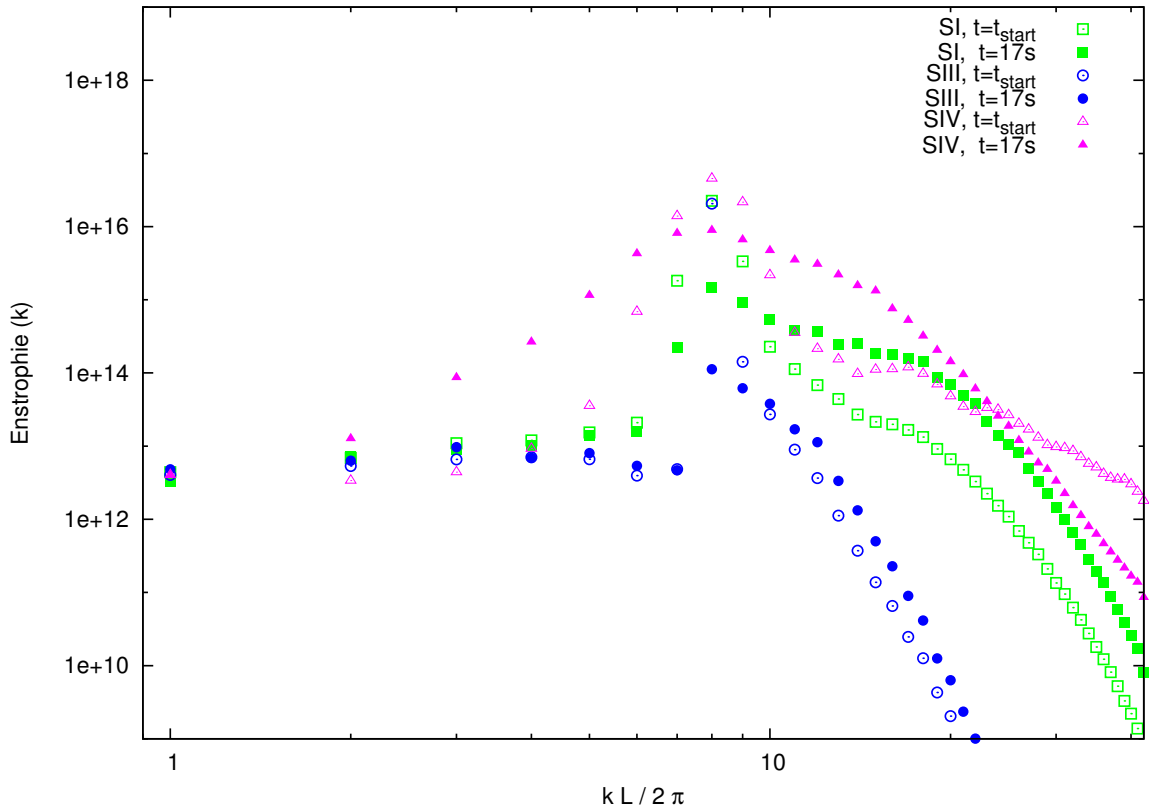


Abbildung 5.36.: Zeitentwicklungen der Enstrophie in den Parametersätzen *SI*, *SIII* und *SIV*. Das starke Hintergrundmagnetfeld bei *SIII* verhindert die Ausbildung einer Kaskade. Bei *SIV* ist hingegen eine deutliche Veränderung zu erkennen.

256^3 Gitter bei $k' = 42$ die aktiven Moden enden und der Antialiasingbereich anfängt. Es hat sich gezeigt, dass höhere Wachstumsraten Γ_2 auch zu stärkerer Ausprägung der Harmonischen führten.

Diese Energieabhängigkeit spricht für zwei mögliche Ursachen. Zum einen kann ein 3-Wellen-Wechselwirkungsprozeß $k_8 + k_8 \rightarrow k_{16}$ zugrunde liegen. Diese Annahme wird durch Abbildung 5.37 gestützt. Dort findet sich ein quadratischer Zusammenhang der Energie zwischen der Initialmode und derer ersten Harmonischen. Diese funktionale Abhängigkeit würde auch bei 3-Wellen-Wechselwirkung auftreten (Sagdeev u. Galeev 1969). Wie jedoch schon ausführlich im Theorieteil diskutiert, ist diese Interaktionen für gleichgerichtete Alfvénwellen nicht erlaubt. Daher müssen gegenläufige Wellen im Hintergrundplasma beteiligt sein, da sonst die Impulserhaltung verletzt wäre. Eine Überprüfung durch eine Simulation ohne turbulentes Hintergrundfeld weist keine höheren

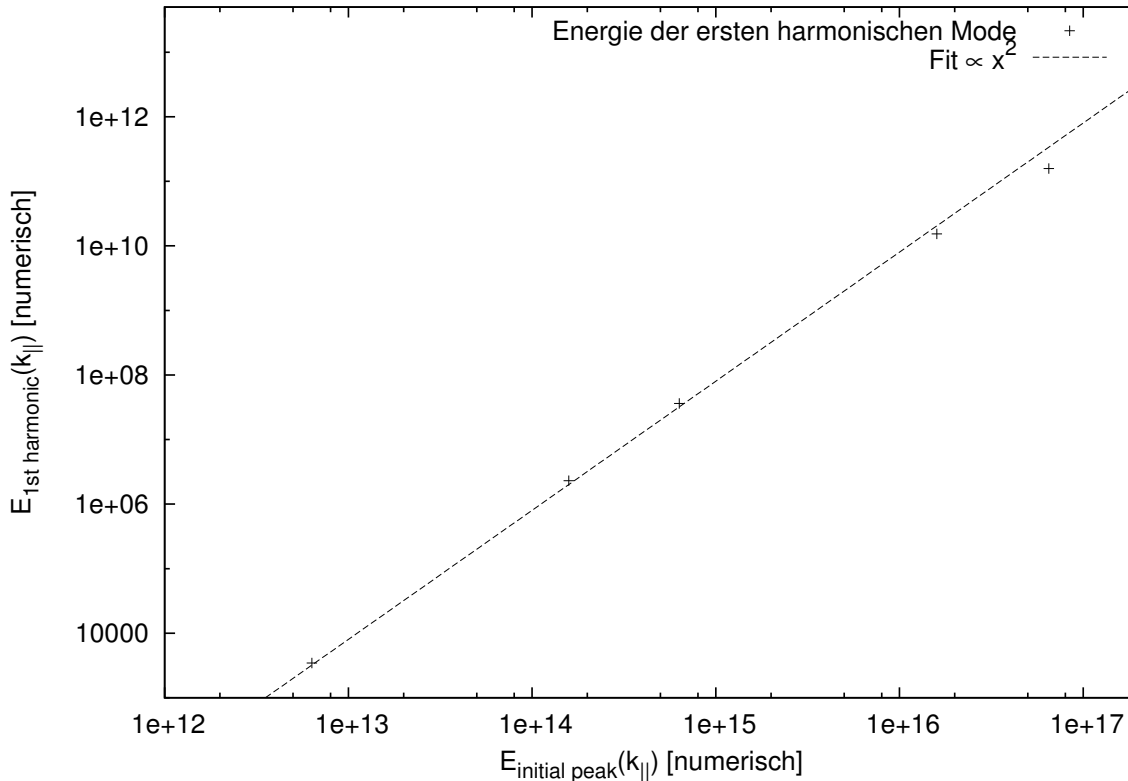


Abbildung 5.37.: *Energieabhängigkeit der ersten harmonischen Mode von der Energie des initialisierten Peaks. Der Fit ergibt einen quadratischen funktionalen Zusammenhang, was für 3-Wellen-Wechselwirkung spricht.*

harmonischen Moden auf, was für die getroffene Annahme spricht.

Eine andere Erklärung dieser höheren Anregungen ist die Selbstinteraktion der Alfvénwellen, durch das sogenannte *wave-steepening*. Man kennt diesen Vorgang vor allem aus der Hydrodynamik. Wellen mit starken Amplitude bäumen sich in Ufernähe auf und erhalten dadurch unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten. Folglich überholt sich die Welle selber und bildet einen turbulenten Schock aus. Es kommt zum Brechen der Welle und unter Dissipation ihrer Energie. Dieser Vorgang kann auch bei Alfvénwellen auftreten und durch das „Brechen“ zu höheren harmonischen Moden führen (Galinsky et al. 1997).

Unabhängig vom zugrunde liegenden Prozeß ist die Entwicklung der höheren harmonischen Moden in parallelen Wellenzahlen von hoher Bedeutung. Das Goldreich–Sridhar Modell beschreibt die Kaskadierung der Energie und das entsprechende Kolmogorovspek-

trum nur entlang senkrechter Richtung. Dies konnte auch in den durchgeführten Simulationen ohne angeregte Wellenmoden bestätigt werden (vgl. 5.2.1). Die Beobachtung hoher Wellenmoden in paralleler Richtung wird hingegen nicht erklärt. Betrachtet man nun die Erzeugung höherer harmonischer Moden als einen permanenten Vorgang der durch die Sonne fortwährend durch Emission hochenergetischer Teilchen, sei es während Flares, CMEs oder durch Schockbeschleunigung innerhalb der Korona, angetrieben wird, so findet man einen effektiven Mechanismus zum Energietransfer in paralleler Richtung. Wie in den Ergebnissen dieser Arbeit gezeigt, ist es zudem nicht von Bedeutung, bei welchem k_{\perp} die höheren Harmonischen generiert werden, da die turbulente Energiekaskade in senkrechter Richtung Energie schnell transportiert.

Ein spezielles Augenmerk lag bei den vorgenommenen Simulationen auf der Untersuchung der kritischen Balance. Vor allem der Parametersatz SIV war dafür ausgelegt Werte von $\zeta \approx 1$ zu erreichen. Dabei sind in den Abbildungen 5.32 und 5.33 unerwartete Strukturen aufgetreten. Die dazugehörigen Karten des ζ -Parameters weisen in entsprechenden Regionen Werte im Bereich 1 auf. Scheinbar treten erste Effekte der kritischen Balance bereits eher auf. So sind Abweichungen zu den anderen Simulationen bereits in den Abbildungen 5.27 und 5.28 bei $\zeta \approx 0,1$ zu verzeichnen. Es sei darauf hingewiesen, dass es nicht möglich ist, darauf zu schließen, ob die unregelmäßigen Strukturen oder die hohen ζ -Werte zuerst auftreten. Unabhängig davon ist das beobachtete Verhalten jedoch gut in Übereinstimmungen mit den Goldreich–Sridhar Turbulenztheorien, die eine Verstärkung der Turbulenz vorhersagen, so dass ζ dem Wert 1 entgegenstrebt. Wie bereits erwähnt, richten sich in diesem Zustand die turbulenten Strukturen zunehmend entlang der parallelen Richtung aus, was auch mit der Beobachtung der durchgeführten Simulationen übereinstimmt. Die Entwicklung, wie sie in den zweidimensionalen, spektralen Abbildungen erkennbar ist, wird isotroper und Moden bei hohem k_{\parallel} werden energiereicher.

Die gewonnenen Erkenntnisse der durchgeführten Simulationen sind äußerst wichtig um diffusive Schockbeschleunigung in der Heliosphäre zu verstehen. Speziell sind die unterschiedlichen Prozesse der Entwicklung angeregter Moden für die Beschleunigung von solaren Teilchen interessant. Die beobachteten Prozesse verändern die Struktur dieser Moden zum Teil erheblich. Durch diese Veränderung können wiederum Teilchen anderer Energie beschleunigt werden und erneut zur Modifikation einzelner Moden beitragen. Vor allem die Verschiebung der Peaks zu kleineren Moden kann zur Beschleunigung

von höher energetischen Teilchen führen, da die Resonanzbedingung (vgl. Gl. 3.148, Kapitel 3.3.2) in diesem Fall modifiziert wird (Vainio u. Laitinen 2007). Zwar ist die Verschiebung in den durchgeführten Simulationen nicht erheblich, was jedoch auf die Beschränkung auf diskrete Moden und auf geringe Gesamtsimulationszeit rückführbar ist. Zudem kann GISMO wie auch andere MHD-Simulationen keine selbstkonsistente Beschreibung liefern, da sonst kinetisches und fluiddynamisches Regime vermischt würden. In der Heliosphäre findet hingegen ständige Wechselwirkung zwischen den Wellenmoden und den solaren Teilchen statt.

Des Weiteren wird durch hochenergetische Energieinjektion wave-steepening oder ein 3-Wellen-Wechselwirkungsprozeß begünstigt. Diese Entwicklung von Anregungen höherer Harmonischer spricht für das Beschleunigen von niederenergetischeren Teilchen. Dabei sei darauf hingewiesen, dass diese Aussage der isotropen Energiediffusion durch Vainio u. Laitinen (2007) widerspricht. Daher müssen diese Modelle auf den beobachteten Energietransfer zu kleineren Skalen angepasst werden. Zumindest in starken Anregungen steht die Ausbildung der höheren Harmonischen im Widerspruch zu gleichmäßiger isotroper Kaskadierung im Fourierraum. Vor allem ist ein solcher Prozeß für die Entwicklung der Turbulenz in paralleler Richtung von Bedeutung. Die Zeitskala dieser Entwicklung ist deutlich kürzer als das konvektive oder diffusive Transportieren der Energie. Besonders gut ist dies in den höher aufgelösten Simulationen im Parametersatz SV erkennbar, in denen in wenigen Alfvén-crossingtimes hohe Werte für k_{\parallel} erreicht werden, obwohl die Hintergrundturbulenz in diesen Bereichen nicht vollständig entwickelt war (vgl. Kapitel 5.2.1). Demnach wäre die Ausbildung höherer Harmonischer ein wichtiger Prozeß, um Turbulenz bei hohen slab-Komponenten zu erklären. Starke Energieinjektionen während Flares oder CMEs würden auf diesem Wege sehr effizient Energie in hohe k_{\parallel} einschleusen.

Die starke senkrechte Energieentwicklung führt wiederum zu höheren Ordnungen der Resonanzbedingung. Wie schon im vorangegangenen Kapitel 5.1.2 demonstriert, wechselwirken dann auch Teilchen anderer Ausrichtung zum Hintergrundmagnetfeld mit den senkrechten Anteilen der Moden (Schlickeiser 2002).

Um die genauen Effekte der hier vorgestellten Simulationen in Bezug zur Teilchenstreuung zu untersuchen werden im Folgenden Ergebnisse der Simulationen von GISMO-Particles vorgestellt.

B_0 [G]	v_A [cm · s ⁻¹]	ν [cm ^{2h} · s ⁻¹]	k -grid	v_T [cm · s ⁻¹]	μ_R ($k'_{\parallel} = 2\pi \cdot 8$)	μ_R ($k'_{\parallel} = 2\pi \cdot 24$)
0,174	$1,2 \cdot 10^8$	1	128 ³	$1,21 \cdot 10^{10}$	0,86	0,29
0,174	$1,2 \cdot 10^8$	1	256 ³	$1,21 \cdot 10^{10}$	0,86	0,29
1,74	$1,2 \cdot 10^9$	10	128 ³	$2,9 \cdot 10^{10}$	1	0,37

Tabelle 5.11.: *Parametersätze der Testteilchensimulationen. Die Turbulenzparameter entsprechen den Einstellungen SI, SIII und SV (siehe Tabelle 5.1) mit der äußeren Skala $L_0 = 3,4 \cdot 10^8$ cm und der Plasma-Anzahldichte $n_d = 10^5$ cm⁻³, wobei die Alfvéngeschwindigkeit v_A wieder durch $\sqrt{4\pi mn_d}$ mit B_0 verknüpft ist. Die Anzahl der simulierten Testteilchen betrug in jedem Satz konstant 10^5 . Die beiden rechten Spalten zeigen die Positionen der ersten Resonanz ($n = 1$) für die $k' = 8$ und 24 Mode, welche im folgenden Kapitel angeregt werden soll. Die Position der Resonanz wird dabei über die Teilchengeschwindigkeit v_T eingestellt (vgl. Gl. 5.34).*

5.3. Ergebnisse von Gismo-Particles

In diesem Kapitel werden Ergebnisse des Transports und der Streuung von geladenen Teilchen in turbulenten Plasmen präsentiert. Zum einen werden dabei Resultate der Testteilchensimulationen von GISMO-PARTICLES in verschiedenen Szenarien, wie der heliosphärischen und durch angeregte Wellenmoden modulierten Turbulenz vorgestellt. Zum anderen werden die Ergebnisse mit einem unabhängigen Ansatz mittels der magnetostatischen, quasilinearen Theorie (im Folgenden auch *SQLT*) verglichen.

5.3.1. Testteilchensimulation in heliosphärischer Turbulenz

Der unter Kapitel 5.1.2 präsentierte Testfall einer simplen Welle-Teilchen Interaktion hat bereits die wichtigen Parameter aufgezeigt. Dabei hat sich erwartungsgemäß die Stärke der Wellenamplitude im Verhältnis zum Hintergrundmagnetfeld als entscheidend für die Anwendbarkeit der QLT erwiesen. Dementsprechend ist die Turbulenzstärke, gemessen durch das Verhältnis $\delta B/B_0$, die zentrale Größe der durchgeführten Teilchensimulationen. Daher wird sich im Folgenden auf die Simulationssätze SI mit schwächerem und SIII mit stärkerem B_0 konzentriert. Weiterhin wird der Einfluss der Auflösung durch Parametersatz SV überprüft.

Da die Turbulenzparameter bereits im vorangegangenen Kapitel beschrieben wurden, sollen an dieser Stelle nur die jeweiligen Bedingungen der Testteilchensimulationen

vorgestellt werden. Ausgangspunkt jeder Teilchensimulation ist die jeweilige vollständig entwickelte Turbulenz, wie sie unter Kapitel 5.2.1 präsentiert wurde. Jedes Szenario wird durch 10^5 Teilchen modelliert, also einer Anzahl, die in den durchgeführten Testfällen eine ausreichend gute Statistik zeigte, um resonante Strukturen zu erkennen. Eine höhere Testteilchenzahl ist zwar handhabbar und würde entsprechend glattere Kurven ergeben, ist aber in dem durchgeführten Umfang erheblich rechenaufwendiger und steht damit nicht mehr in einem sinnvollen Verhältnis zum Nutzen. In Anbetracht der im folgenden Kapitel dargestellten Simulationen werden die Teilchengeschwindigkeiten festgelegt. Dabei wird über die bereits vorgestellte Bedingung

$$\mu_R = \frac{\omega - n\Omega}{k_{\parallel} v} = \frac{\omega - n\Omega}{L_0^{-1} 2\pi k'_{\parallel} v_T} \quad (5.34)$$

die Geschwindigkeit der Teilchen so gewählt, dass die Resonanzen innerhalb des μ -Intervall $[-1, 1]$ liegen. Der Geschwindigkeitsbetrag ist für jedes Teilchen konstant. Die Parametersätze der Teilchensimulationen sind in Tabelle 5.11 zusammengefasst.

Als eine zentrale Größe des Teilchentransports wurde bereits im Theorieteil dieser Arbeit der Fokker-Planck-Koeffizient $D_{\mu\mu}$ identifiziert. Besonders dessen Verknüpfung über die mittlere freie Weglänge (vgl. Gl. 3.158) zu observablen Größen, wie der Winkelverteilung, sind für Satellitenexperimente von Bedeutung (Agueda et al. 2009). Daher wird ein spezielles Augenmerk auf die Pitchwinkelstreuung gelegt, wobei hauptsächlich die Streufrequenz

$$D_{\alpha\alpha} = \frac{(\Delta\alpha)^2}{2\Delta t} = \frac{D_{\mu\mu}}{1 - \mu^2}. \quad (5.35)$$

ausgewertet wird. Es ist zu beachten, dass obige Definition eine Näherung für den Fall

$$D_{\mu\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\Delta\mu)^2}{2\Delta t} \stackrel{t \gg t_0}{\approx} \frac{(\Delta\mu)^2}{2\Delta t}, \quad (5.36)$$

darstellt und somit nur für eine ausreichende Zeitentwicklung gültig ist (vgl. Kapitel 3.3.2).

In Abbildung 5.38 ist das Ergebnis für $D_{\alpha\alpha}$ in der Turbulenz mit dem Parametersatz SI zu verschiedenen Entwicklungszeiten gezeigt. Ist anfangs noch eine gleichmäßige Streufrequenz für jedes μ zu erkennen, so bildet sich nach etwa 30 Gyrationen ein stabiler Zustand mit zwei prominenten Maxima aus. Dieses Doppelmaximum entwickelt sich

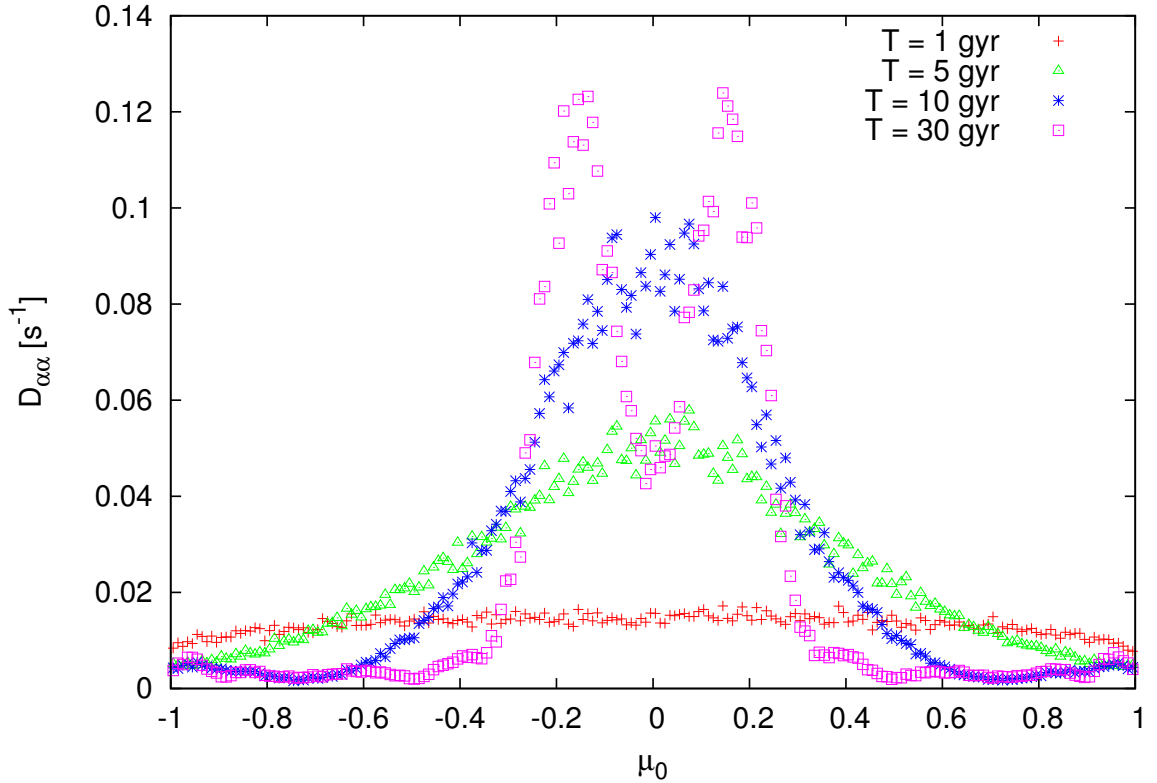


Abbildung 5.38.: Zeitentwicklung der Streufrequenz $D_{\alpha\alpha}$ für 10^5 Testteilchen im turbulenten Plasma mit Parametersatz SI. Nach einer Gyrationperiode ist die Streuung gleichmäßig für jeden Pitchwinkel verteilt. Bei etwa 30 Gyrationen hat sich ein stabiler Zustand eingestellt, der eine deutliche Doppelpeakstruktur bei kleinem $|\mu|$ aufweist.

dabei aus einem einzelnen Maximum bei $\mu = 0$ heraus. Um ein genaueres Bild dieses Vorgangs zu bekommen, bieten sich die Streuplots an, die bereits beim Welle-Teilchen Testfall verwendet wurden. Dazu wird erneut die Gesamtänderung des Pitchwinkels ($\Delta\mu$) über dessen Anfangswert μ_0 für jedes Teilchen einzeln aufgetragen. Durch diese Methode wird sehr deutlich der zugrundeliegende Streuvorgang visualisiert. So stellt man beim Vergleich zwischen den Abbildungen 5.38 und 5.39 fest, dass das beobachtete Doppelmaximum tatsächlich von der selben Resonanz her rührt. Die Verkippung der Resonanz, die schon beim Welle-Teilchen Testfall beschrieben wurde, führt zum Aufspalten des Maximums im Streukoeffizienten $D_{\alpha\alpha}$, da dort nur der Betrag von $\Delta\mu$ berücksichtigt wird. Im Zusammenhang mit dem Streuplot wird klar, dass die Struktur der Cherenkov-Resonanz durch die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Pseudo-Alfvénwellen entspricht. Weitere Maxima können nicht eindeutig der ballistischen Streuung oder den resonanten

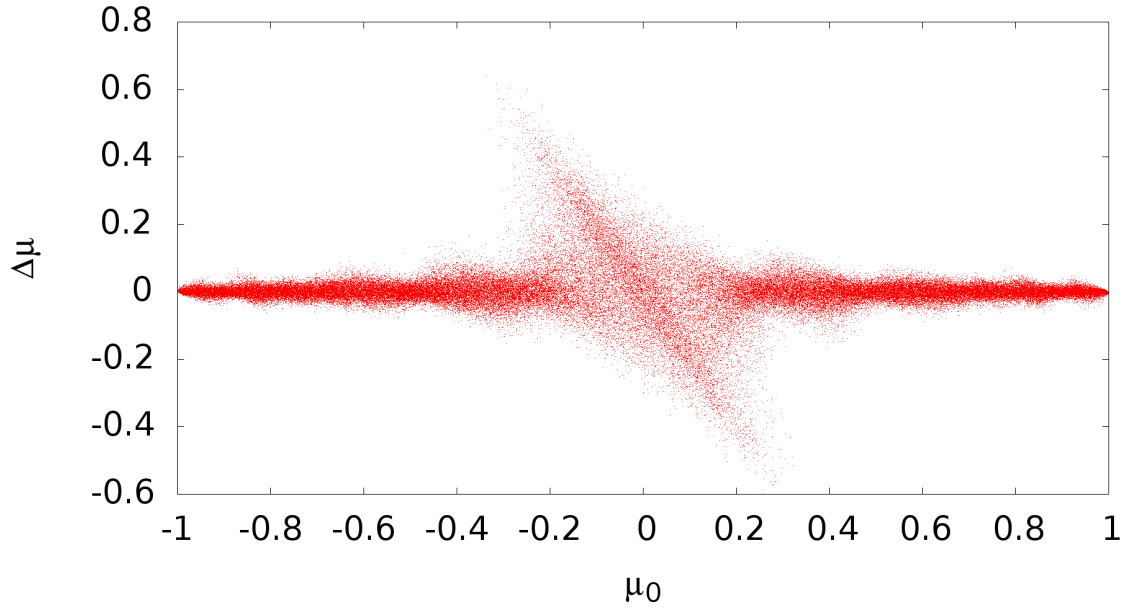


Abbildung 5.39.: Streuplot der Testteilchensimulation in der SI Turbulenz nach 30 Gyrationenperioden. Wie schon im Welle-Teilchen Testfall steht jeder Punkt für die Gesamtänderung des Pitchwinkels eines individuellen Teilchens. Eine klare resonante Struktur hat sich bei $\mu = 0$ entwickelt. Diese kann als Cherenkov-Resonanz ($n = 0$) identifiziert werden, die durch Teilcheninteraktionen mit Pseudo-Alfvénwellen generiert wird.

Interaktionen mit Scher-Alfvénwellen zugeordnet werden, da eine genauere Untersuchung der beitragenden Wellen in homogener Turbulenz schwierig ist. Dennoch ist ein Indiz für Resonanz die zeitliche Entwicklung. Während resonante Interaktionen mit zunehmender Zeit schmaler und deutlicher werden, sofern die Wellenamplitude ausreichend für signifikante Streuung ist, verlieren ballistische Wechselwirkungen an Streuamplitude. Ein sehr deutlicher Unterschied ist außerdem die zunehmende Anzahl der ballistischen Maxima während der zeitlichen Entwicklung, was wiederum zu sich ändernden Positionen der Maxima führt. Ausgehend von diesen Tatsachen, ist es nahe liegend, dass die Strukturen in Abbildung 5.39 von ballistischer Streuung verursacht werden.

Im Szenario eines stärkeren Hintergrundmagnetfelds (Satz SIII) ist die Streuung deutlich diffuser. So lässt sich im Streuplot in Abbildung 5.40 keine klare Struktur erkennen. Die Streuung ist nahezu isotrop. Dabei scheint die Cherenkov-Resonanz nicht länger dominant zu sein. Dementsprechend würde der Streukoeffizienten $D_{\alpha\alpha}$ auch keine Struk-

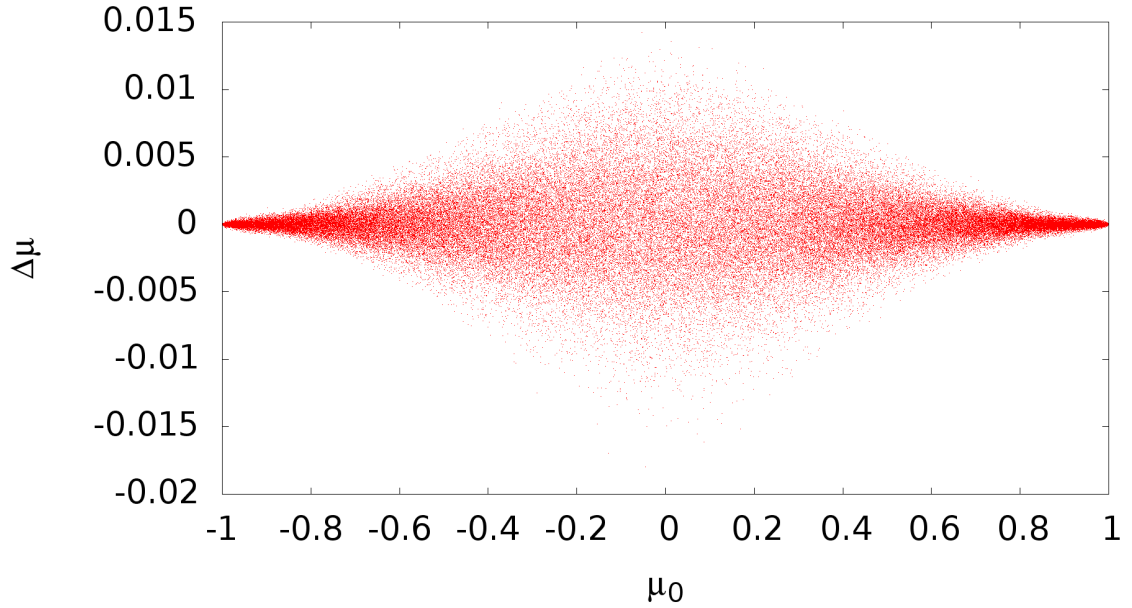


Abbildung 5.40.: Streuplot der Testteilchensimulation in der SIII Turbulenz nach 30 Gyrationen. Das stärkere Hintergrundmagnetfeld führt zu isotoperer Streuung. Die Cherenkov-Resonanz ist nicht mehr dominant ausgeprägt.

tur zeigen. Die Amplitude der Pitchwinkeländerung hat sich erwartungsgemäß mit der Turbulenzstärke um eine Größenordnung reduziert, da die Streuungsstärke linear zum $\delta B/B_0$ Verhältnis verläuft.

5.3.2. Teilchenstreuung an angeregten Wellenmoden

In diesem Teil wird nun die Untersuchung von Pitchwinkelstreuung an den verstärkten Wellenmoden aus Kapitel 5.2.2 behandelt. In einem Evolutionszyklus wurden von jeder verstärkten Wellenmode, vom getriebenen Zustand bis zum kompletten Zerfall, verschiedene $\delta B/B_0$ Verhältnisse durchlaufen. Dabei wurden vor allem beim maximalen Treibzustand sehr starke Moden generiert. Bei so hohen lokalen Turbulenzstärken ist die Anwendbarkeit der QLT nicht mehr möglich und eine stochastische Streuverteilung würde sich einstellen. Daher wurden Bereiche der Peakentwicklung mit geringerer $\delta B/B_0$ Stärke gewählt. Es wurden dazu einzelne Zeitschritte der Ergebnisse von SI, SIII und SV in Kapitel 5.2.2 als Ausgangspunkt für die Testteilchensimulationen benutzt. Für jeden Peak bei $k' = 8$ und 24 wurde im Zerfallszustand der Zeitpunkt gewählt, bei dem die

Amplitude der angeregten Moden sich auf $\delta B/B_0 \approx 10^{-3}$ reduziert hatten. Innerhalb der Parametersätze SI und SIII wurde zusätzlich der Treibzustand simuliert, wobei die Teilchen direkt zu Beginn der Energieinjektion initialisiert wurden.

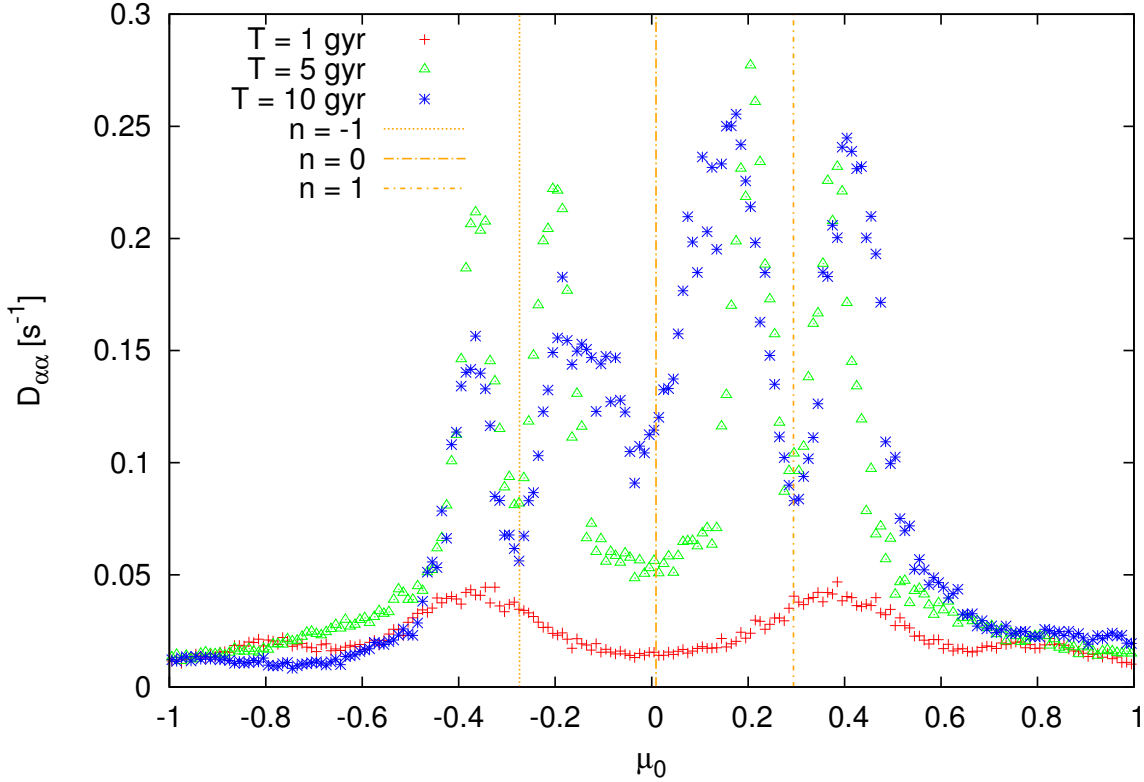


Abbildung 5.41.: Zeitentwicklung des Pitchwinkelstreuoeffizienten $D_{\alpha\alpha}$ im Parametersatz SI mit verstärkter $k' = 24$ Mode im Treibbereich. Nach fünf Gyrationen lässt sich bereits eine resonante Struktur erkennen. Die orangenen Geraden zeigen die ermittelten Positionen der Resonanzen an.

Die Geschwindigkeitsbeträge der Teilchen wurden gemäß Tabelle 5.11 so angepasst, dass bei beiden angeregten Wellenmoden resonante Wechselwirkungen innerhalb des μ Intervals liegen (vgl. Gl. 5.34). Für das schwächere Hintergrundmagnetfeld wurde demnach $v_T = 1,21 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ festgelegt. Da mit dem Magnetfeld in Parametersatz SIII sich die Gyrationenfrequenz erhöht, muss auch die Teilchengeschwindigkeit auf $v_T = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vergrößert werden. Dementsprechend sind diese Simulationen im schwach relativistischen Bereich mit einem Lorentzgammafaktor von $\Gamma \approx 4$. In diesem Regime ist das Verfahren des Boris-Pushs noch eine gute Näherung. Dennoch ist dieser Fall eher als ein künstliches Szenario anzusehen, da bei so hohen Magnetfeldern SEP-

Ereignisse mit 2,65 GeV assoziiert werden. Bei so hohen Energien ist die relativistische Protonendichte wiederum so gering, dass durch die Strömungsinstabilität keine Wellen mehr generiert werden können (vgl. Kapitel 3.3.4). Die zentrale Fragestellung dieser Simulationen wird demnach die Veränderung der Ergebnisse im Rahmen der quasilinearen Theorie sein, da die Annahmen der QLT bei kleinerem $\delta B/B_0$ Verhältnis besser erfüllt sind.

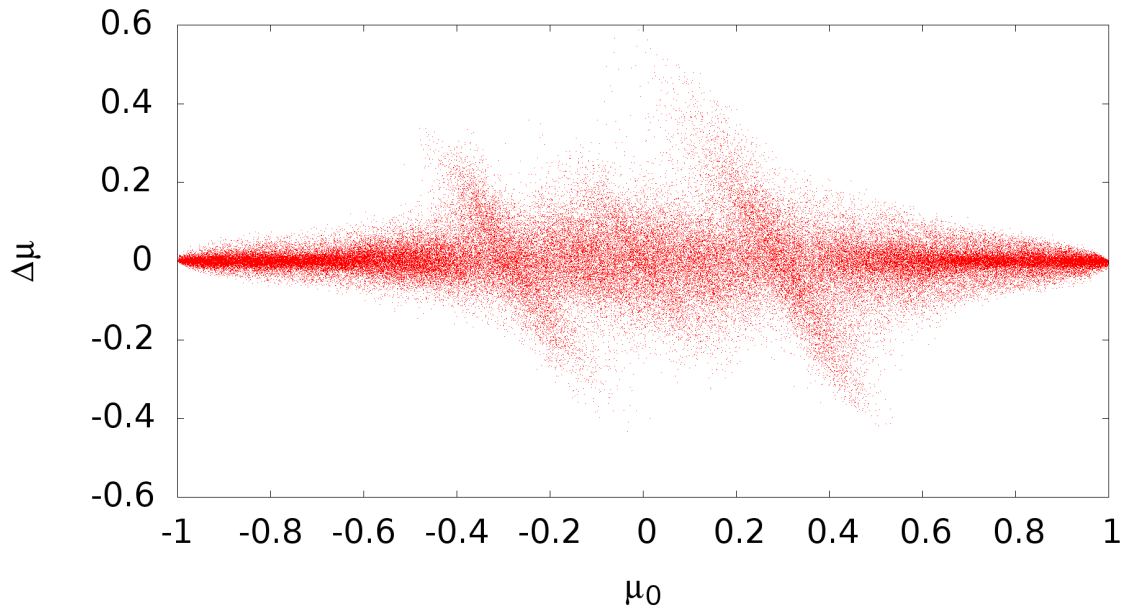


Abbildung 5.42.: Zur Abbildung 5.41 gehöriger Streuplot bei etwa zehn Gyrationenperioden. Die Doppelmaxima im $D_{\alpha\alpha}$ -Verlauf erweisen sich als Artefakte der verkippten Resonanzen. Signifikante Strukturen haben sich bei $\mu = -0,27; 0; 0,29$ ausgebildet.

Zunächst werden die Resultate im Parametersatz SI vorgestellt. Die Testteilchen wurden zunächst direkt mit dem Beginn des Treibzustands der angeregten Mode initialisiert. In Abbildung 5.41 ist die Zeitentwicklung der Streufrequenz $D_{\alpha\alpha}$ dargestellt, die im Treibbereich des $k' = 24$ Peaks zu beobachten ist. Man erkennt deutlich, dass sich zwischen der fünften und zehnten Gyrationenperioden ein stabiler Zustand mit hervorstechenden Resonanzen eingestellt hat. Zwei Doppelmaxima sind bei etwa $\mu \approx \pm 0,3$ entstanden, deren einzelne Maxima sich mit der Zeit leicht auseinander bewegen. Da dieses Verhalten bereits bei der Cherenkov-Resonanz in der homogenen SI Turbulenz beobachtet (vgl. Kapitel 5.3.1) und als Artefakt der $D_{\alpha\alpha}$ -Auswertung identifiziert wurde, liegt auch hier nahe, die tatsächliche Resonanzstruktur mit dem zugehörigen Streuplot

zu überprüfen.

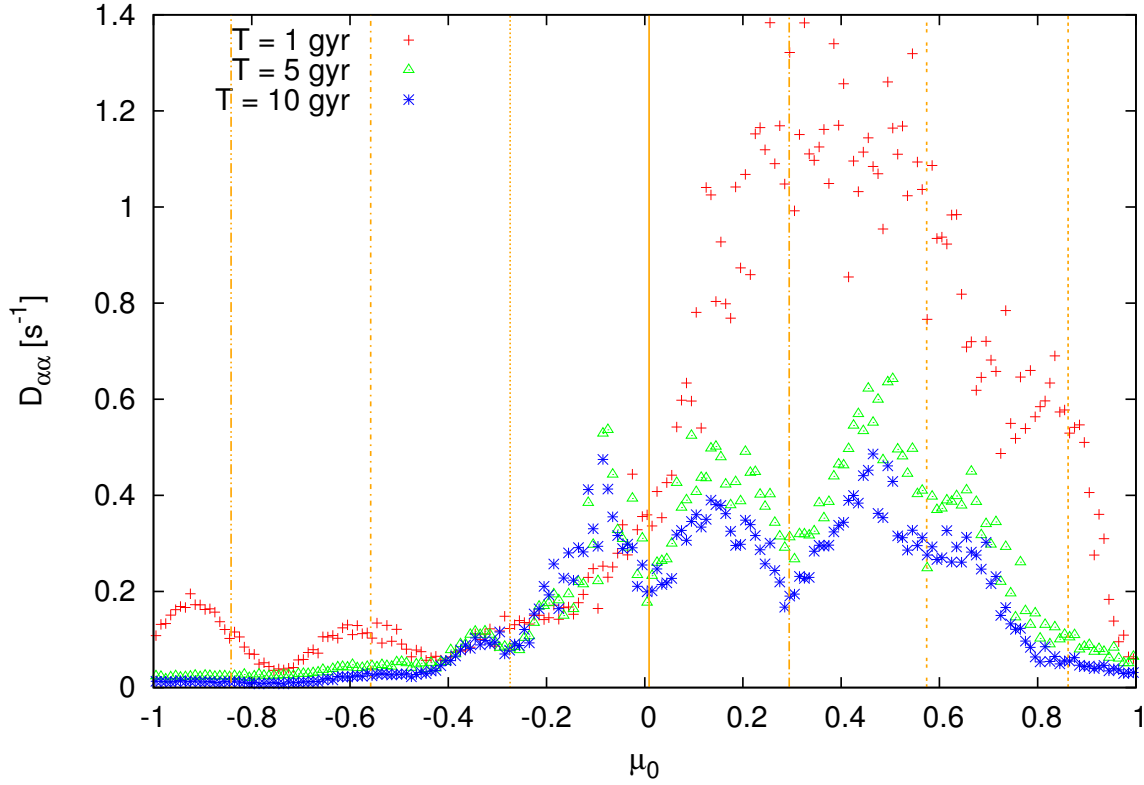


Abbildung 5.43.: Zeitentwicklung des Pitchwinkelstreuoeffizienten $D_{\alpha\alpha}$ im Parametersatz SI mit verstärkter $k' = 24$ Mode im Zerfallsbereich. Die Peakentwicklung der ursprünglichen rein parallelen Mode zu anderen Wellenzahlen führt zu mehr Streupotentialen. Dadurch wird der Verlauf von $D_{\alpha\alpha}$ deutlich komplexer. Zur besseren Interpretation wurden erneut die Positionen der Resonanzen durch die orangenen Linien gekennzeichnet.

Abbildung 5.42 bestätigt die Vermutung, dass die Doppelmaxima wieder durch die Verkippung der Resonanzen erzeugt werden. Bei genauer Messung erkennt man, wie Teilchen mit dem Initialwerten von $\mu = -0,27; 0; 0$, eine signifikante Streuung im Pitchwinkel erfahren. An eben diesen μ Positionen werden durch Gl. 5.34 die Resonanzen $n = -1; 0; 1$ bestimmt. Dabei wird die $n = -1$ Wechselwirkung durch die links-zirkular polarisierten und die $n = 1$ durch die rechts-zirkular polarisierten Anteile des $k' = 24$ Peaks verursacht. Die $n = 0$ Mode, die schon in der homogenen Hintergrundturbulenz beobachtet wurde, ist wieder mit der Cherenkov-Resonanz der Pseudo-Alfvénmode zu assoziieren. Höhere Ordnungen $|n| > 1$ werden nicht erzeugt, da der Peak rein parallel getrieben wird.

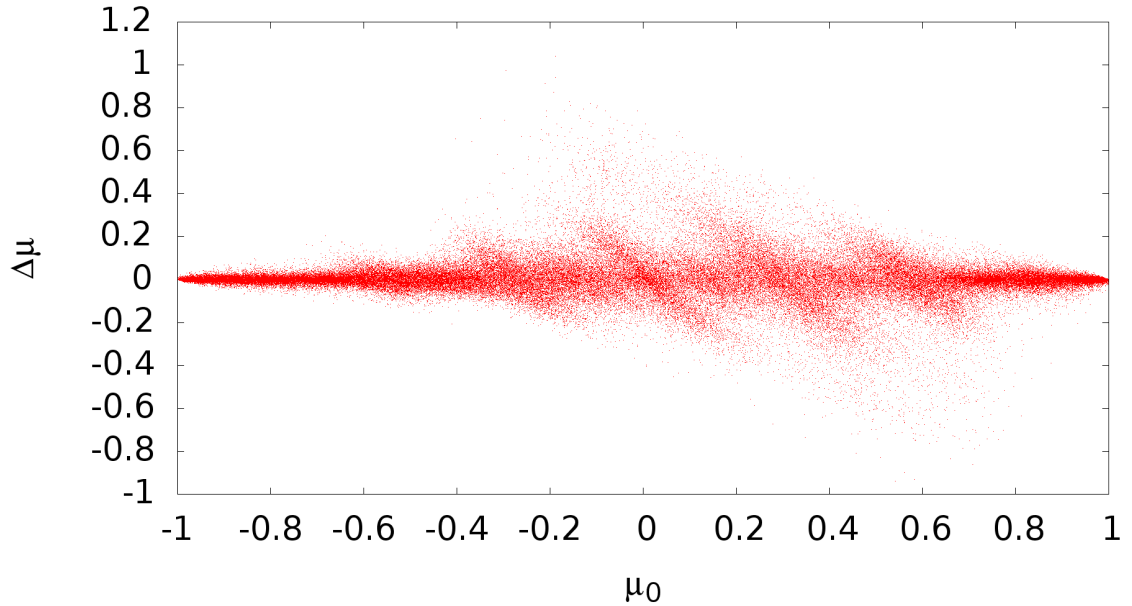


Abbildung 5.44.: Der zu Abbildung 5.43 gehörige Streuplot. Verschiedene resonante Strukturen lassen sich im Zerfallsbereich des $k' = 24$ Peaks erkennen. Dabei ist der Struktur erheblich deutlicher wahrzunehmen als im $D_{\alpha\alpha}$ Verlauf.

Die Situation ändert sich wesentlich im Zerfallsbereich des Peaks. So wird der Verlauf von $D_{\alpha\alpha}$ deutlich komplexer, wie man in Abbildung 5.43 erkennen kann. Ohne den zugehörigen Streuplot ist eine Interpretation nur schwer möglich. Mehrere Maxima sind zu erkennen, die zum Teil nur schwer voneinander getrennt wahrgenommen werden können. Auch hier hat sich ein stabiler Streuzustand nach etwa fünf bis zehn Gyrationen eingestellt.

Erneut enthüllt der Streuplot in Abbildung 5.44 die zugrundeliegende Struktur der Resonanzen. Durch den Transport der Energie des ursprünglichen Peaks zu anderen Wellenzahlen (vgl. Kapitel 5.2.3, Abbildung 5.27), vor allem in senkrechter Richtung, sind nun Welle-Teilchen-Interaktionen höherer Ordnung möglich. Neben den zuvor beobachteten Resonanzen bei $\mu_R = -0,27; 0; 0,29$ tritt eine signifikante Streuung bei $\mu_R = 0,58$ auf, die von den $n = 2$ Wechselwirkungen mit der rechts-zirkular polarisierten Scheralfvénwelle verursacht wird. Die Resonanz mit den links-zirkular polarisierten Moden sind bei $\mu_R = -0,56$ zu sehen, jedoch weniger stark ausgebildet.

Die Ergebnisse der Simulationen des $k' = 8$ Peaks für den Treibbereich sind in Ab-

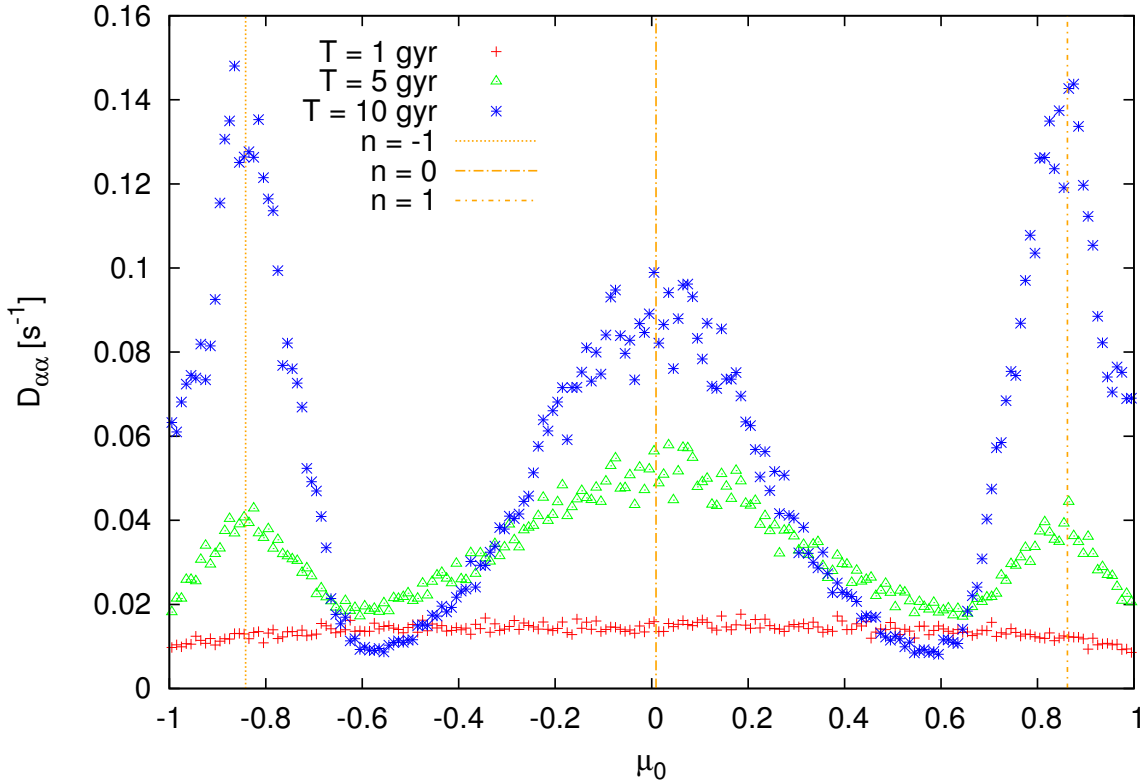


Abbildung 5.45.: Zeitentwicklung des Pitchwinkelkoeffizienten $D_{\alpha\alpha}$. Gezeigt ist die Teilchensimulation im Treibzustand der $k' = 8$ Mode. Es haben sich klare $|n| = 1$ Resonanzen entwickelt.

bildung 5.45 dargestellt. Auch in diesem Fall haben sich nach zehn Gyrationen zwei klare Resonanzen an den vorhergesagten μ -Positionen bei $\mu_R \approx \pm 0,9$ herausgebildet. Da das Treiben dieser Mode etwas weniger Energieinjektion pro Sekunde benutzt ist die Verkippung im zugehörigen Streuplot nicht so stark, wie bei den $k' = 24$ Peak Simulationen. Deshalb spalten sich die Maxima von $D_{\alpha\alpha}$ nicht auf. Die Cherenkov-Resonanz ist erwartungsgemäß deutlich ausgebildet.

Für den Zerfallsbereich der $k' = 8$ Mode wird in Abbildung 5.46 lediglich der Streuplot präsentiert, da in diesem Fall der Verlauf von $D_{\alpha\alpha}$ keine Struktur aufweist. Der Grund dafür lässt sich gut anhand von Abbildung 5.46 erkennen. So sind die Interaktionen mit den Teilchen so stark, dass sich die Resonanzen erheblich verkippfen und sich in der Projektion auf die μ_0 -Achse überschneiden. Dies führt zu fließenden Übergängen im Verlauf des Streukoeffizienten und macht ihn somit für weitere Auswertungen un-

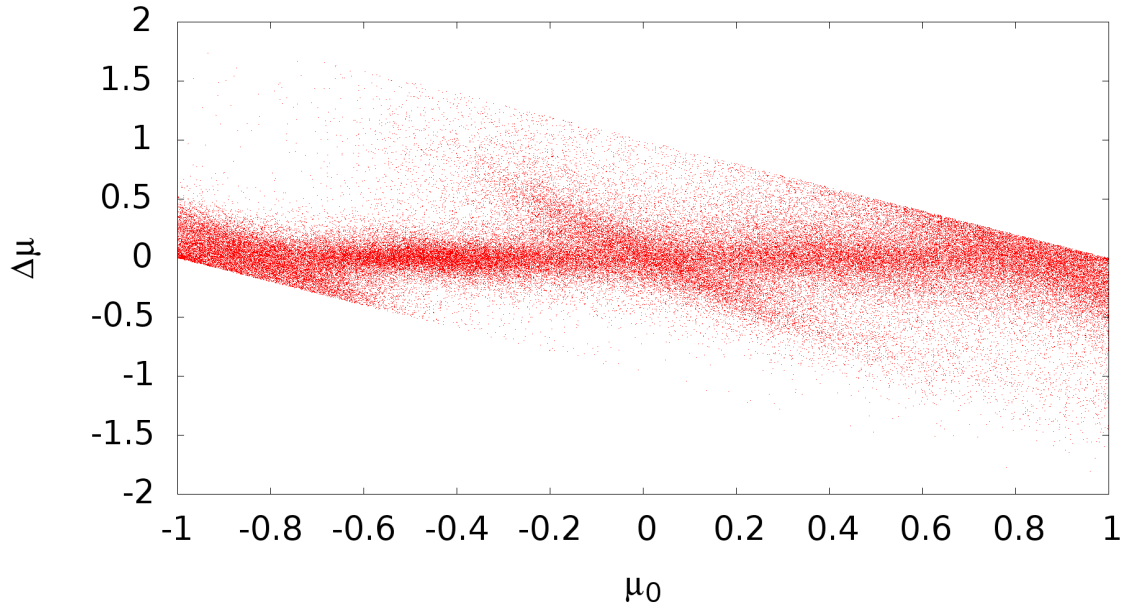


Abbildung 5.46.: Streuplot für die Simulationen nach 10 Gyrationen im Zerfallsbereich des $k' = 8$ Peaks. Die starke Streuung führt zu deutlichen Abweichungen von der QLT. Im Speziellen sind die Resonanzen soweit verkippt, dass Überlappungen im $D_{\alpha\alpha}$ -Verlauf eine Interpretation erschweren.

brauchbar. Die starke Streuung ist auf die Entwicklung des Peaks zurück zu führen, dessen Energie sich auf breite Wellenzahlbereiche ausgedehnt hat. In dem Streuplot lassen sich sogar die Geraden der maximal möglichen μ Änderung erkennen, da zahlreiche Testteilchen massiv gestreut werden.

Die Simulationen im feineren Gitter des SV Parametersatzes zeigen das gleiche Problem. Im direkten Vergleich zwischen den Abbildungen 5.46 und 5.47 ist eine stärkere Verkipfung zu beobachten. Des Weiteren sind die Geraden mit maximalem $\Delta\mu$ noch deutlicher und über einen weiteren Bereich zu erkennen.

Der $k' = 24$ Peak in SV konnte ebenfalls höhere Harmonische erzeugen, da sich die Antialiasingkante von $k' = 42$ auf $k' = 85$ verschoben hat und demnach weniger Moden durch das Zero-padding gelöscht werden. Dadurch sind in Abbildung 5.48 zwar die Resonanzen wie in Abbildung 5.44 zu erahnen, aber bei weitem nicht mehr so ausgeprägt. Der Bereich der Interaktionen mit den rechts-zirkular polarisierten Moden ist deutlich diffuser und von stochastischer Streuung dominiert.

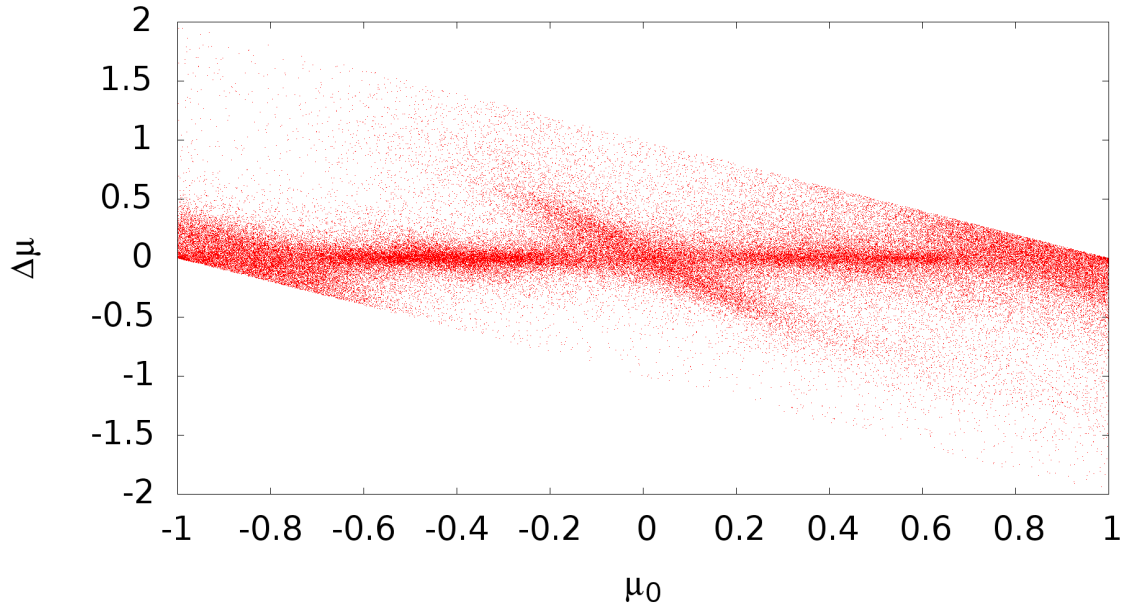


Abbildung 5.47.: Streuplot für die Teilchensimulationen in Parametersatz SV mit dem $k' = 8$ Peak im Zerfallszustand nach 25 Gyrationen. Die größere Anzahl aktiver Moden verstärkt die Streuung, die Verkippung gegenüber Abbildung 5.46 hat zugenommen. Ansonsten ist die grundlegende Struktur der Resonanzen ähnlich.

Die Simulationen mit stärkerem Hintergrundmagnetfeld mit den Parametern SIII zeigen erwartungsgemäß erheblich ausgeprägte und wenig verkippte Resonanzen. In Abbildung 5.49 ist der Streuplot nach 50 Gyrationen im Zerfallsbereich des Peaks dargestellt. Beide $|n| = 1$ Interaktionen sind zu sehen, sowie die Cherenkov-Resonanz. Weiterhin ist bei $\mu = 0,53$ eine leichte Erhöhung des Streuprofiles zu beobachten, die durch Wechselwirkung der Teilchen mit der stark ausgeprägten $k' = 16$ Harmonischen (vgl. Abbildung 5.31) erzeugt wurde. Da die $n = 0$ Resonanz nicht innerhalb der Hintergrundturbulenz auftritt und in Abbildung 5.40 nicht zu sehen ist, müssen die entsprechenden Pseudo-Moden während der Peakevolution entstehen. Dies wird auch von Abbildung 5.50 belegt, die den Streuplot für den $k' = 24$ Peak nach 30 Gyrationen zeigt. In diesem Fall lassen sich Resonanzen nur bei $\mu_R = 0,37$ und $0,70$ erkennen, was den $n = 1$ und 2 Wechselwirkungen mit der rechts-zirkular polarisierten Mode des Peaks entspricht. Die Cherenkov-Resonanz, sowie Interaktionen mit links-zirkularen polarisierten Anteilen, fehlen völlig. Da zumindest die links-zirkularen Moden im Treibbereich mit initialisiert und auch deren resonante Wechselwirkungen mit Teilchen beobachtet wurden,

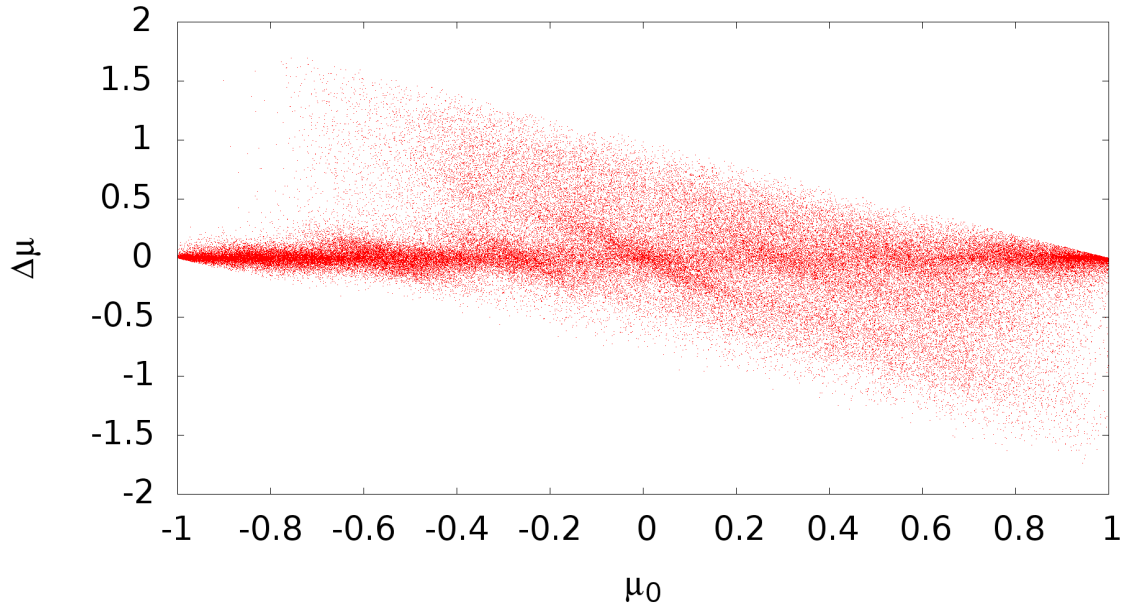


Abbildung 5.48.: Streuplot für die Teilchensimulationen in Parametersatz SV mit dem $k' = 24$ Peak im Zerfallszustand nach 25 Gyrationen. Durch den vergrößerten Bereich der aktiven Moden haben sich höhere Harmonische bei $k' = 48$ und 72 entwickelt und tragen zur Streuung bei. Die resonanten Strukturen lassen sich dadurch schwerer erkennen, ähneln aber denen, des 256^3 Gitters.

ist davon auszugehen, dass diese Wellen komplett zerfallen sind.

5.3.3. Vergleich der Testteilchensimulation mit dem SQLT Ansatz

Abschließend wird ein halbanalytischer Ansatz über die Näherung der magnetostatischen QLT gewählt, der in Arbeiten zum Teilchentransport eine wichtige Rolle spielt. Die grundlegende analytische Beschreibung folgt Schlickeiser (2002) und wurde im Rahmen einer Kooperation mit Timo Laitinen und Markus Battarbee in numerischer Berechnung umgesetzt. Dabei werden beide inkompressiblen MHD-Wellentypen einzeln betrachtet und deren Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten separat berechnet. Es ergibt sich für die

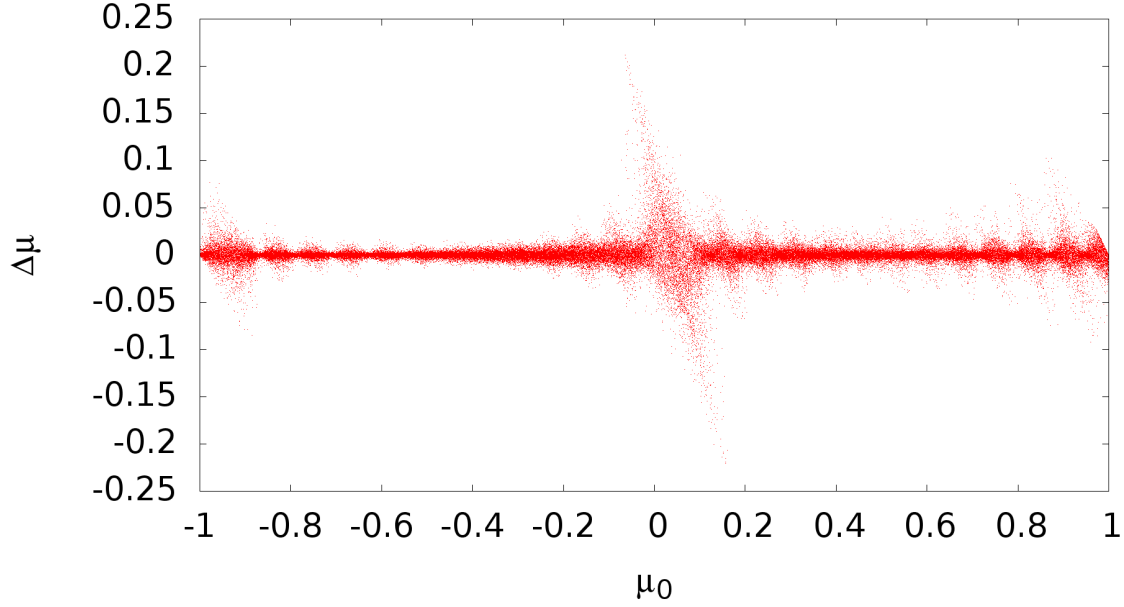


Abbildung 5.49.: Streuplot für die Teilchensimulationen in Parametersatz SIII mit dem $k' = 8$ Peak im Zerfallszustand nach 50 Gyrationen. Wie erwartet führt das geringere $\delta B/B_0$ Verhältnis zu einer besseren Übereinstimmung mit der QLT. Es bilden sich wenig verkippte und scharfe Resonanzen aus. Die leichte Erhöhung der Streuung bei $\mu \approx 0,5$ wird möglicherweise durch die $k' = 16$ Harmonische verursacht.

Pseudo-Mode

$$D_{\mu\mu,P} \approx \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n \neq 0} \int d^3k \pi \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega) \times [J'_n(v_{\perp} k_{\perp} / \Omega)]^2 P_{xx,P}(\mathbf{k}) \quad (5.37)$$

und für die Scher-Mode

$$D_{\mu\mu,A} = \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \pi \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\Omega) \times \left[\frac{n J_n(v_{\perp} k_{\perp} / \Omega)}{v_{\perp} k_{\perp} / \Omega} \right]^2 P_{xx,A}(\mathbf{k}), \quad (5.38)$$

wobei sich eine ausführlichere Herleitung in Anhang F befindet. Weiterhin wird eine Diskretisierung in Anhang G präsentiert, mit der obige Gleichungen numerisch gelöst werden.

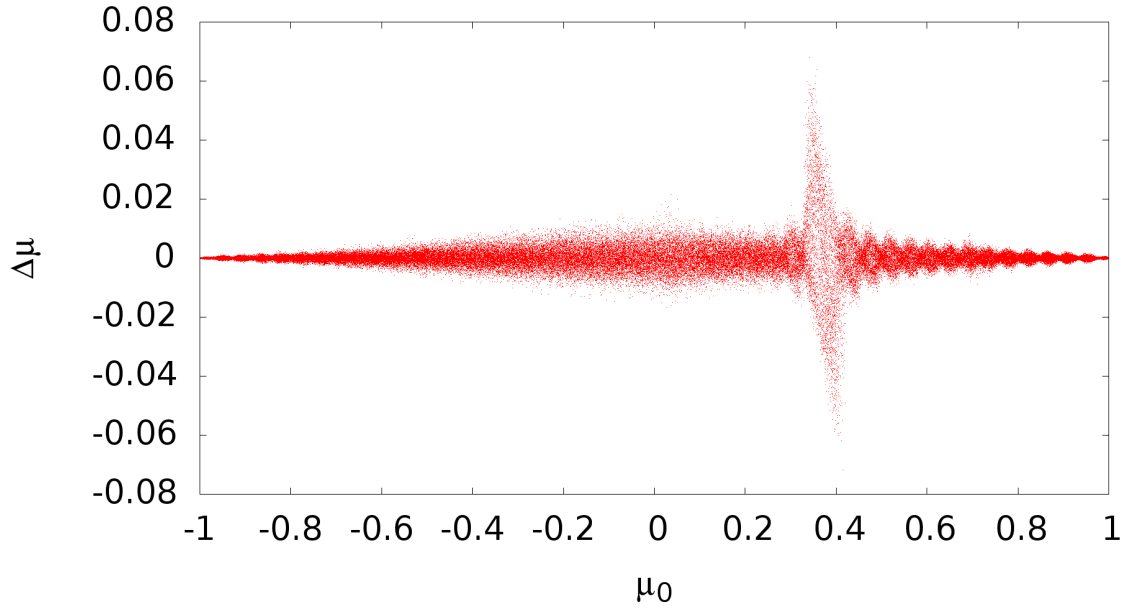


Abbildung 5.50.: Streuplot für die Teilchensimulationen in Parametersatz SIII mit dem $k' = 24$ Peak im Zerfallszustand nach 30 Gyrationen. Die $n = 1$ und 2 Resonanzen sind erkennbar. Die Cherenkov-Resonanz, sowie Wechselwirkungen mit links-zirkularen Anteilen des Peaks fehlen völlig. Wobei die $n = -1$ Resonanz während des Treibzustands beobachtet wurde.

Mit diesem Ansatz lassen sich unabhängig von Testteilchensimulationen die Streukoeffizienten bestimmen. Der Vorteil gegenüber direkter Teilchensimulation liegt in dem statischen Ansatz, der das Problem zeitunabhängig macht, sofern die Wellenfrequenz ω vernachlässigbar gegenüber der Gyrationfrequenz Ω ist. Weiterhin ist die Lösung der Gl.en 5.37 und 5.38 von erheblich kleinerem Rechenaufwand. Der Nachteil liegt in den starken Näherungen, die mit dem QLT-Formalismus einher gehen. Die berechneten Diffusionskoeffizienten sind somit nur in sehr eingeschränkten Bereichen aussagekräftig. Streng genommen gilt dieser Ansatz nur für Fälle unendlich kleiner Wellenamplituden.

Als Eingabequantität wird das Spektrum P_{xx} aus den Simulationen von GISMO-MHD benutzt, das den Entwicklungszuständen entspricht, welche auch bei den Testteilchensimulationen verwendet wurden. Somit sind die Spektren der Parametersätze SI und SIII für Hintergrundturbulenz und Peak-Moden Simulationen, jeweils im Treib- und Zerfallsbereich, sowie die Peak-Moden Simulationen im Zerfallszustand für Satz SV, der Ausgangspunkt für die Berechnungen der Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten.

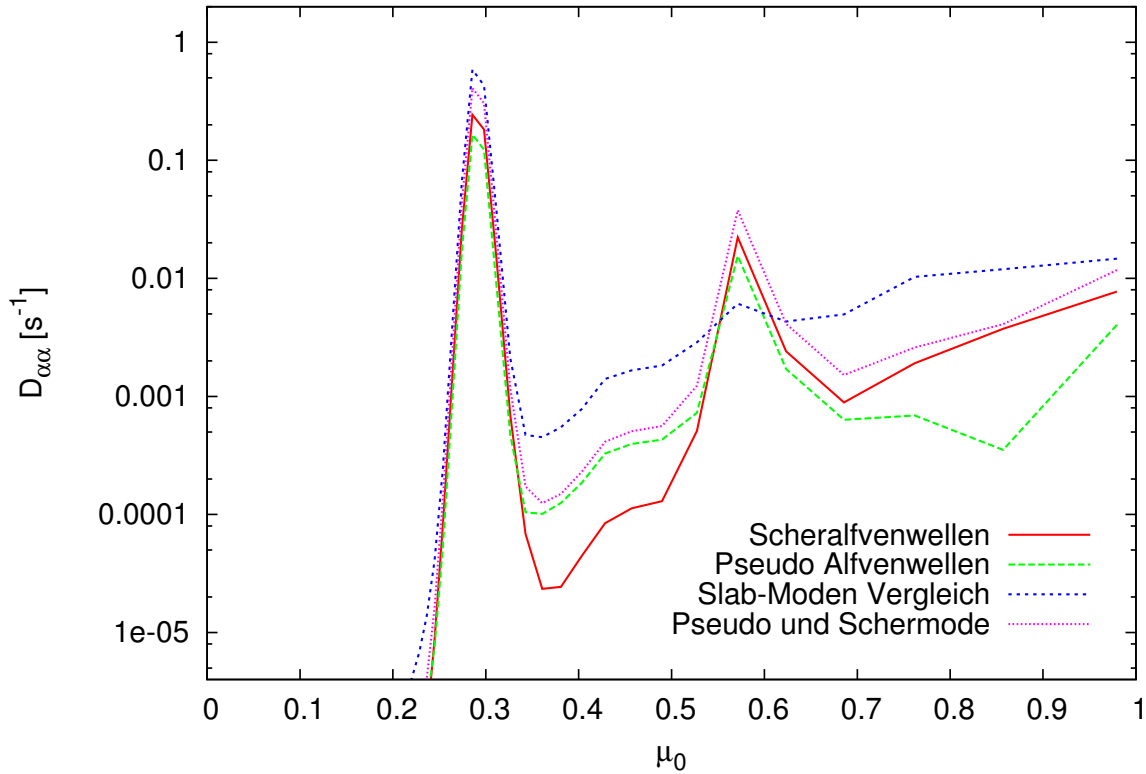


Abbildung 5.51.: Ergebnisse des SQLT Ansatzes für Parametersatz SI mit $k' = 24$ Peak im Zerfallszustand. Der Diffusionskoeffizient wurde für beide Alfvénwellenmoden und einer slab-Approximation separat berechnet. Die Resonanzen sind sehr gut zu beobachten. Die Näherung über die slab Projektion zeigt gute Übereinstimmung mit den tatsächlichen $D_{\alpha\alpha}$, kann aber erwartungsgemäß die Resonanz bei $\mu_R = 0,58$ nicht reproduzieren.

Eine exemplarische Berechnung ist in Abbildung 5.51 dargestellt. Das verwendete Eingabespektrum war die angeregte $k' = 24$ Mode im Zerfallsbereich unter Verwendung von Satz SI. Der Streukoeffizient zeigt Resonanzen mit Pseudo- und Scher-Alfvénwellen bei $n = 1$ und $n = 2$, wie sie durch Gl. 5.34 bestimmt werden. Beide Wellenspezies erzeugen ähnliche Streukoeffizienten, vor allem in bei den resonanten Maxima. Nur bei Werten zwischen den Resonanzen ($\mu \approx [0,35; 0,54]$) ist die Streurrate der Pseudo-Alfvénwellen erhöht, ansonsten dominiert der Streuvorgang an den Schermoden. Eine vereinfachte Abschätzung über die Näherung eines Slabspektrums reproduziert die tatsächlichen $D_{\alpha\alpha}$ recht gut, bis auf die $n = 2$ Resonanz, die nicht von Slabmoden generiert werden kann. Der starke Abfall der Streurrate bei kleinem μ wird durch die sogenannte *Resonanzlücke* verursacht, da Wellenmoden unterhalb der Resonanz-Funktionen in den Gleichungen

5.37 und 5.38 nicht mehr zur Berechnung beitragen. Dieses methodische Problem wurde bereits in den Kapiteln 3.3.2 und 3.3.3 als grundlegende Schwachstelle der QLT nahe $\mu \approx 0$ identifiziert.

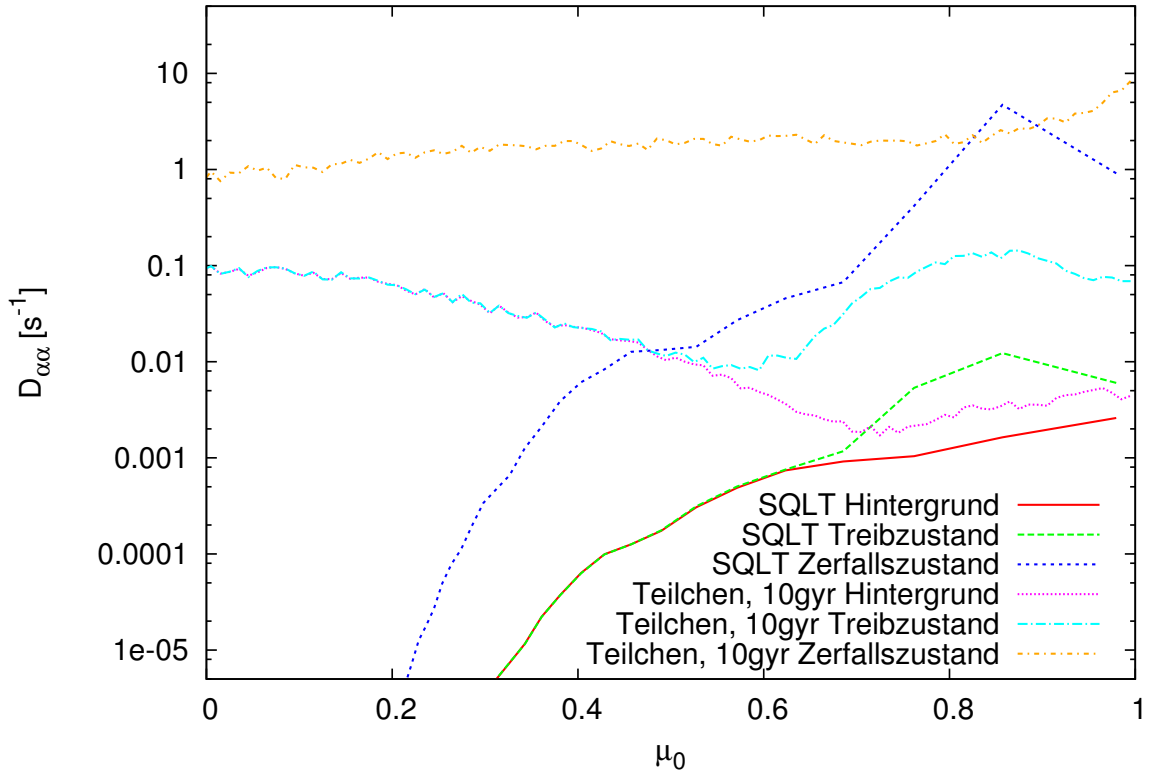


Abbildung 5.52.: Direkter Vergleich der $D_{\alpha\alpha}$ -Koeffizienten des SQLT Ansatzes und der Testteilchensimulationen. Die Abbildung zeigt die verschiedenen Entwicklungszustände des $k' = 8$ Peaks im Parametersatz SI. Dabei sind die SQLT Ergebnisse für Pseudo- und Scher-Alfvénwellen addiert. Gute Übereinstimmung liegt bei $\mu > 0,6$ für die reine Hintergrundturbulenz und den Treibzustand vor. Im Zerfallsbereich ist das $D_{\alpha\alpha}$ der Testteilchensimulation zu unstrukturiert.

Im Gegensatz zu den Streukoeffizienten, die aus den Testteilchensimulationen gewonnen werden konnten, ist die direkte Berechnung von $D_{\alpha\alpha}$ im Rahmen der QLT von erheblich klarerer Struktur. Da weder eine Verbreiterung durch die endliche Zeitentwicklung, noch eine Verkipfung der Resonanzen stattfindet, wie sie in den Streuplots gezeigt wurde, befinden sich die Maxima an den erwarteten Positionen. Um einen direkten Vergleich herzustellen, werden in den folgenden Abbildungen jeweils die Ergebnisse beider Methoden der Ermittlung von $D_{\alpha\alpha}$ in einer Grafik gezeigt.

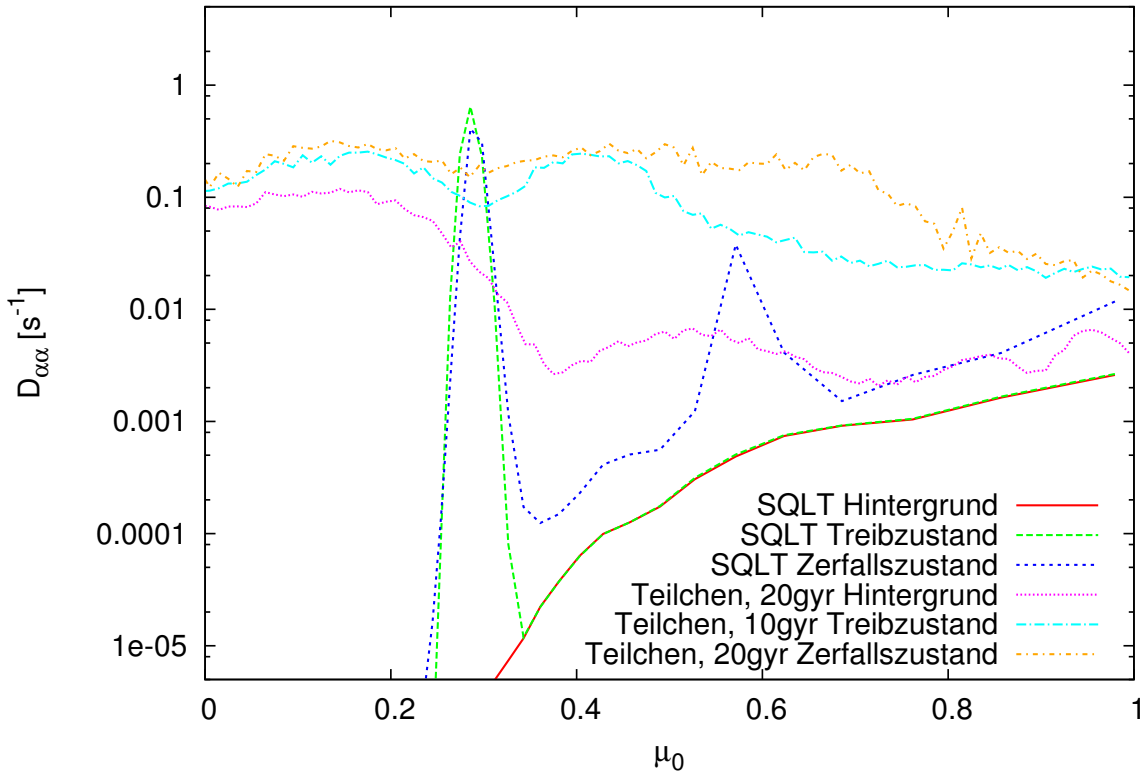


Abbildung 5.53.: Vergleich zwischen den $D_{\alpha\alpha}$ der SQLT und der Testteilchen im Parametersatz SI mit angeregter $k' = 24$ Mode. Die Hintergrundturbulenz ist gleich der, die in Abbildung 5.52 gezeigt wurde, nur bei $t = 20$ Gyrationen.

Die Simulationen mit den Parametern SI zeigen eine gute Vergleichbarkeit für $\mu > 0,6$ für die Hintergrundturbulenz und den Treibbereich des $k' = 8$ Peaks, wie man in Abbildung 5.52 erkennen kann. Die Abweichungen werden für kleinere μ größer. Zum einen liegt dies an der Resonanzlücke, die im Rahmen der SQLT nicht beschrieben wird, jedoch real existiert. Zum anderen an der Cherenkov-Resonanz die in der Resonanzlücke liegt und zusätzlich durch die Verkippung den Verlauf des $D_{\alpha\alpha}$ -Koeffizienten der Teilchen verändert. Da während des Treibens der $k' = 8$ Mode die Teilchensimulationen die QLT Annahmen sehr gut erfüllt haben (vgl. Abbildung 5.45), ist die Übereinstimmung mit der SQLT sehr gut. Die quantitative Abweichung in der Streufrequenz wird dabei von der zeitlichen Energieinjektion verursacht, die von der zeitunabhängigem Lösung der SQLT nicht reproduziert werden kann. Wie schon im vorangegangenen Kapitel diskutiert, ist die Situation für den Zerfallsbereich komplexer. Vor allem die Abweichungen zur

QLT, die zur Verkippung der Resonanzen führen, ändern den Verlauf der Teilchen- $D_{\alpha\alpha}$ maßgeblich. Dadurch lässt sich keine Vergleichbarkeit zwischen SQLT und Testteilchensimulation in diesem Fall herstellen.

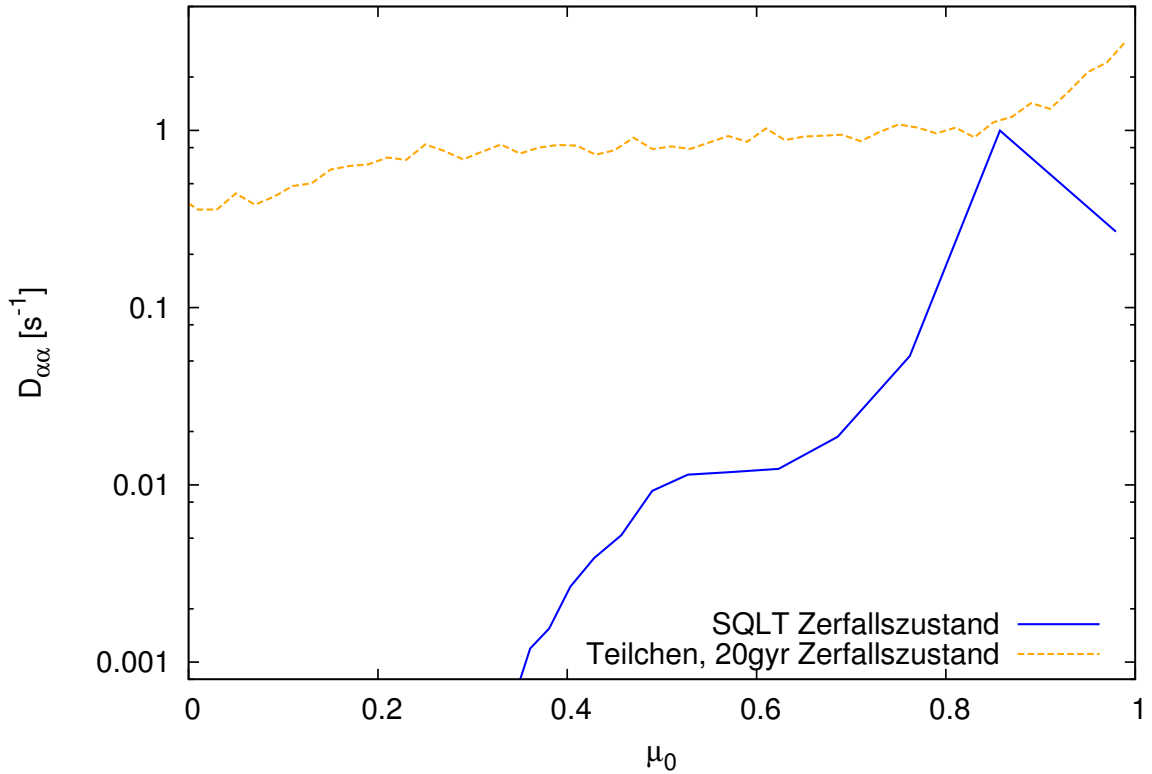


Abbildung 5.54.: Vergleich zwischen den $D_{\alpha\alpha}$ der SQLT und der Testteilchen im Parametersatz SV mit angeregter $k' = 8$ Mode.

Der Vergleich für die $k' = 24$ Mode fällt entsprechend schlechter aus, da hier die Verkippung in Treib- und Zerfallszustand ähnlich stark ist und zusätzlich im Zerfallsbereich die Resonanzstruktur komplexer wird, da höhere Ordnungen angeregt werden. Dadurch wird der Verlauf des $D_{\alpha\alpha}$ der Testteilchen schwer interpretierbar. Ohne den zugehörigen Streuplot in Abbildung 5.44 ist es somit nicht möglich den Verlauf mit der SQLT zu vergleichen.

Das gleiche Problem besteht bei den Ergebnissen mit Parametersatz SV. Wie bereits diskutiert führt die größere Anzahl der aktiven Moden zu mehr Streupotentialen. Dadurch wurde in den Streuplots eine starke Verkippung beobachtet, die wiederum zu sehr strukturlosen $D_{\alpha\alpha}$ führte. Somit sind die Abweichungen zwischen SQLT und Testteil-

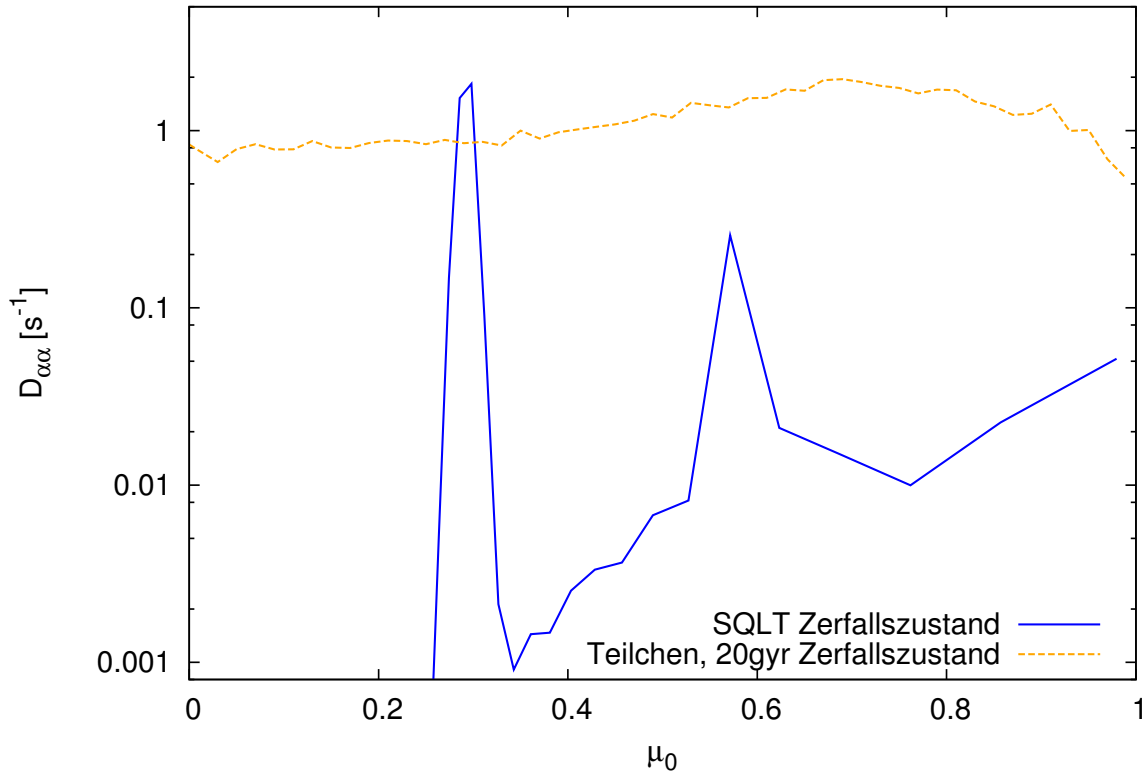


Abbildung 5.55.: Vergleich zwischen den $D_{\alpha\alpha}$ der SQLT und der Testteilchen im Parametersatz SV mit angeregter $k' = 24$ Mode. Durch die höhere Anzahl aktiver Moden wird die Streustruktur komplexer (vgl. Abbildung 5.48). Ein Vergleich zum SQLT Ansatz wird somit erschwert.

chensimulation in den Abbildungen 5.54 und 5.55 erheblich.

Abschließend bleibt der Vergleich innerhalb des Parametersatzes SIII. Da die quasilinearen Näherungen mit dem kleineren $\delta B/B_0$ Verhältnis besser erfüllt werden, sollte auch die Übereinstimmung zur SQLT zunehmen. Die Ergebnisse in den Abbildungen 5.56 und 5.57 können dies nicht sehr gut bestätigen. Zwar ist das $D_{\alpha\alpha}$ der Testteilchen klar strukturiert und man erkennt deutlich die Resonanzen, aber die Verläufe der SQLT-Kurven weichen stark ab. Vor allem liegt das an der vergrößerten Resonanzlücke, da mit der schwächeren Turbulenz mehr Moden die Resonanzbedingung nicht mehr erfüllen. Nur wenn die Amplitude der Mode hinreichend groß ist, lässt sich das $D_{\alpha\alpha}$ noch berechnen. Deutlich wird dies bei der Betrachtung der Berechnung für die $k' = 24$ Mode in Abbildung 5.57. Da der Peak signifikant mehr Energie hat als die benachbarten Moden,

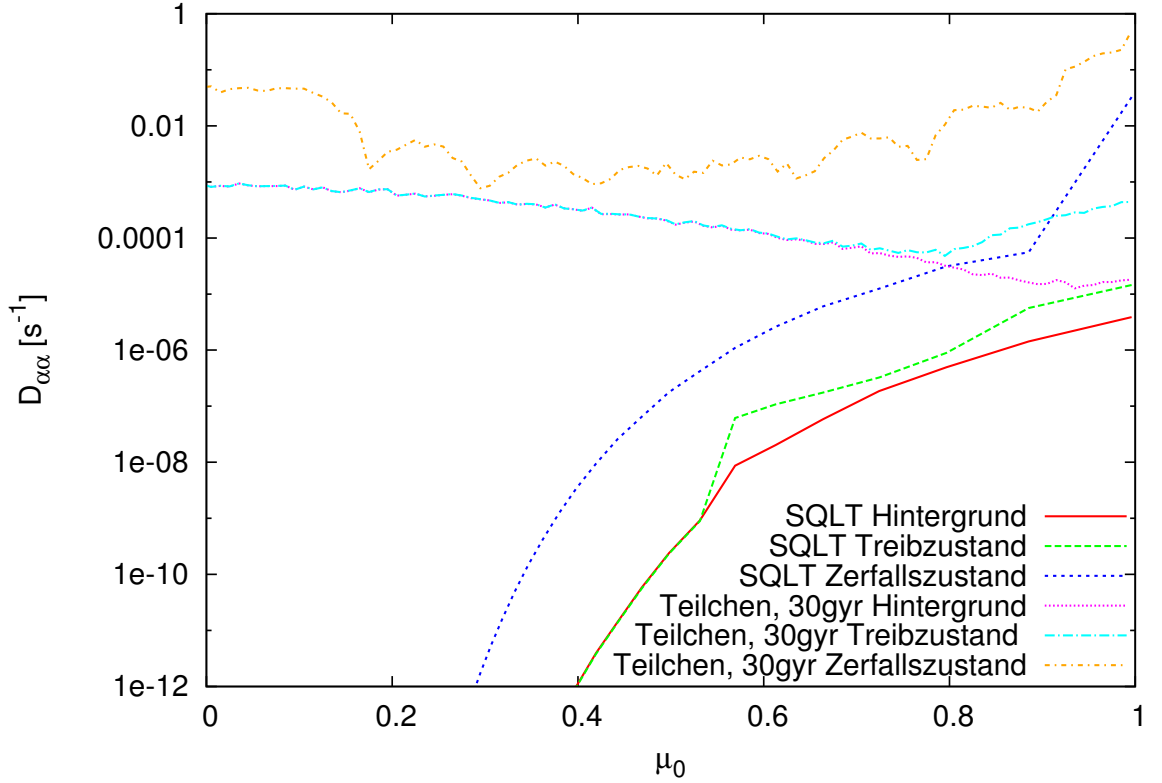


Abbildung 5.56.: Vergleich zwischen den $D_{\alpha\alpha}$ der SQLT und der Testteilchen im Parametersatz SIII mit angeregter $k' = 8$ Mode. Da die Bedingungen durch das kleinere $\delta B/B_0$ Verhältnis besser erfüllt werden, ist das $D_{\alpha\alpha}$ der Testteilchen strukturierter. Die größere Resonanzlücke verschlechtert den Vergleich zur SQLT.

hebt sich die Resonanz um mehrere Größenordnungen vom Untergrund ab und erreicht quantitativ eine ähnliche Streufrequenz, wie in den Testteilchensimulationen. Dennoch ist die Position der Resonanz leicht verschoben, was an der magnetostatischen Näherung liegt. Da $\omega \ll \Omega$ in Parametersatz SIII nicht mehr erfüllt ist, weicht die magnetostatische Näherung geringfügig ab. Überprüft man die Position der Resonanz mit Gleichung 5.34 erhält man ohne Berücksichtigung von ω ein $\mu_R = 0,33$. Dies entspricht genau der Abweichung in Abbildung 5.57 zur tatsächlichen Resonanz bei $\mu_R = 0,37$. Die Testteilchensimulationen zeigen weiterhin mehrere kleine Maxima zwischen den resonanten Strukturen, die man nicht in der SQLT wieder finden kann. Der Grund hierfür sind die ballistischen Streuungen, die zeitabhängig sind und somit auch nicht von der SQLT dargestellt werden können.

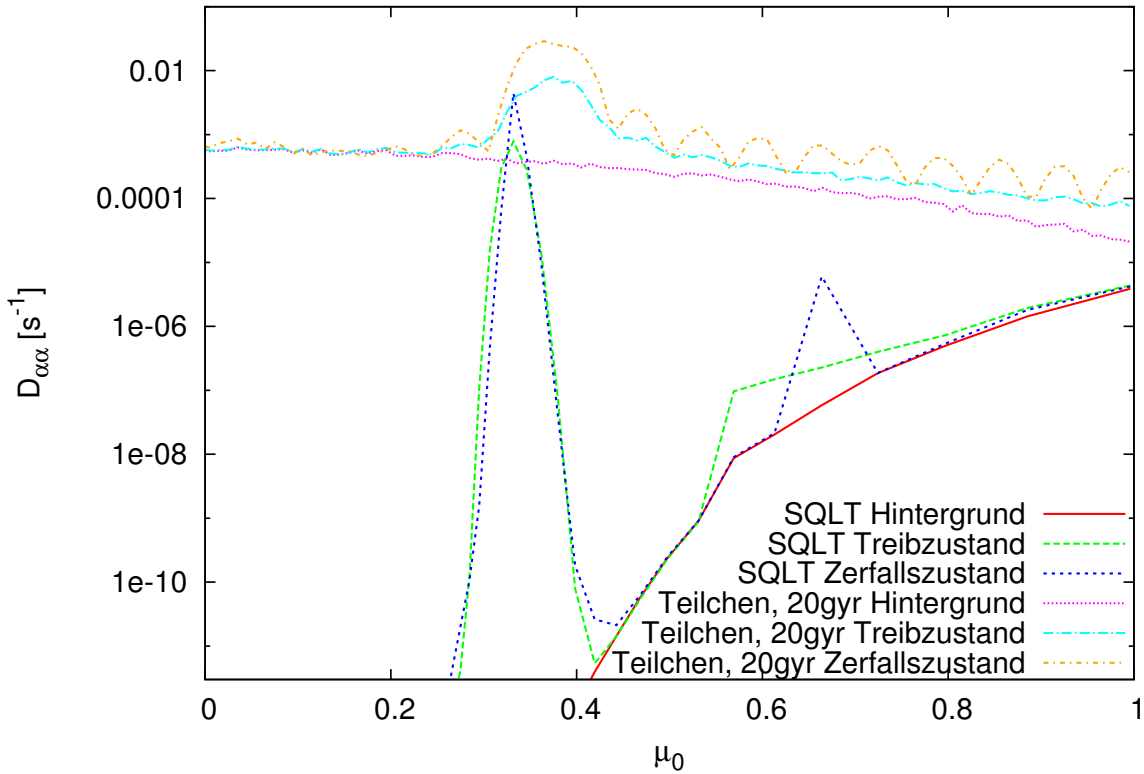


Abbildung 5.57.: Vergleich zwischen den $D_{\alpha\alpha}$ der SQLT und der Testteilchen im Parametersatz SIII mit angeregter $k' = 24$ Mode. Die Resonanzen stimmen gut überein. Die leichte Verschiebung des SQLT Streukoeffizienten wird von der magnetostatischen Näherung verursacht.

5.3.4. Diskussion

Für den Fall, dass das zugrundeliegende Spektrum ein homogenes Breitbandspektrum ist, zeigen die Ergebnisse gute Übereinstimmungen zwischen den Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten, die aus Testteilchensimulationen gewonnen werden und den halb-analytischen Berechnungen im Rahmen der magnetostatischen quasilinearen Theorie. Mit kleiner werdendem $|\mu|$ wird die Abweichung beider Modelle größer, was an dem Fehlen der Cherenkov Resonanz liegt, die von der SQLT Resonanzlücke verdeckt wird. In der Testteilchensimulation ist die $n = 0$ Wechselwirkung hingegen stark ausgebildet und beeinflusst $D_{\alpha\alpha}$ für $|\mu| < 0,6$ maßgeblich.

Weiterhin verursacht die Verletzung der QLT-Näherungen durch die Bedingungen in den Testteilchensimulationen methodische Schwierigkeiten, die immer zu Abweichungen

von der analytischen Betrachtungen führen. Hervorstechend sind dabei zwei Probleme:

- I Die QLT geht von Zuständen mit unendlich langen Entwicklungszeiten aus, in denen Teilchen nicht mehr von ballistischen Streuungen beeinflusst werden, sondern nur resonante Wechselwirkungen zu δ -förmigen Änderungen der Pitchwinkel führen können. Demnach sind bei kurzen Entwicklungszeiten die Resonanzen stark verbreitert. Verlängert man allerdings die Simulationszeit, summieren sich auch die Abweichungen gegenüber der QLT, was auf langen Zeitskalen zu stochastischen Streuungen führt. Sehr gut kann dieser Effekt im Welle-Teilchen Testfall nachvollzogen werden. Folglich ist es sinnvoll, einen Zeitpunkt zu bestimmen, bei dem die Resonanzen sich nahezu stabilisiert haben und bereits deutlich gegenüber ballistischer Streuung hervorstechen.
- II Mit zunehmendem $\delta B/B_0$ Verhältnis verkippen sich die Resonanzen, was bei starker Streuung zum Überlappen von $(\Delta\mu)^2$ führt und somit im Verlauf von $D_{\alpha\alpha}$ eine Unterscheidung zwischen eng beieinanderliegenden Wechselwirkungen unmöglich macht oder zu Fehlinterpretationen führen kann (vgl. Doppelmaxima in Abbildung 5.41).

Ist die Turbulenz nicht homogen im Fourierraum, sondern durch angeregte Wellenmoden verändert, verstärken sich die eben diskutierten Probleme. Aufgrund der komplexen Resonanzstrukturen, vor allem im Zerfallsbereich der Peaks, haben sich die $D_{\alpha\alpha}$ Koeffizienten für die Testteilchensimulationen als unbrauchbar erwiesen. Nur durch das Erstellen der hier vorgestellten Streuplots, bei denen für jedes individuelle Teilchen die Gesamtänderung in μ dargestellt wird, ist eine eindeutige Interpretation der resonanten Strukturen möglich.

Weiterhin konnte verifiziert werden, dass mit abnehmendem $\delta B/B_0$ Verhältnis die Näherung durch die SQLT mit den Ergebnissen der Teilchensimulationen übereinstimmt. In diesen Fällen wurden aufrechte und schmale Resonanzen erzeugt, die wiederum eine klare Struktur in $D_{\alpha\alpha}$ erzeugt haben. Der quantitative Vergleich wird allerdings durch die Resonanzlücke der QLT stark verfälscht, da bei schwächerer Turbulenz mehrere Moden nicht mehr genügend Energie haben, um die Wechselwirkungsbedingung zu erfüllen.

Die Teilchensimulationen haben sich als ein wichtiges Werkzeug herausgestellt, um Streuvorgänge zu verstehen. Zwar liefert der Ansatz durch die SQLT für schwache Turbulenz gute Näherungen, weicht aber stark von den tatsächlichen Resonanzstrukturen bei der Berücksichtigung verstärkter Wellenmoden ab. Vor allem die Verkipfung erweist

sich als ein erhebliches Problem in der quasilinearen Beschreibung. Damit Streuprozesse, wie sie mit SEP-Ereignissen assoziiert werden, modelliert werden können, müssen realistischere Annahmen getroffen werden. Ein reiner QLT-Ansatz ist in diesen Fällen nicht mehr möglich. Die direkte Simulation von Teilchenstreuungen bietet hingegen einen sehr guten Zugang.

6. Zusammenfassung

Die Bereiche der Plasmaturbulenz und des Teilchentransports stehen im unmittelbaren Zusammenhang mit SEP-Ereignissen. In dieser Dissertation wurden beide Themen miteinander in Verbindung gebracht, um erste Schritte zum Verständnis der Dynamik hochenergetischer solarer Teilchen zu machen. Dafür wurde ein Modell benutzt, das Turbulenz und Teilchentransport auf elementarer Ebene beschreibt. Die Umsetzung erfolgte durch die Entwicklung des eigenständigen Hybrid-Codes GISMO, mit dem magnetohydrodynamische Turbulenz und kinetische Teilchendynamik selbstkonsistent numerisch beschrieben werden kann.

Zur Untersuchung der MHD-Turbulenz nahe der Sonne, bei etwa drei solaren Radien, wurden Simulationen mit verschiedenen Parametersätzen durchgeführt. Neben der homogenen Hintergrundturbulenz lag ein spezielles Augenmerk auf dem Entwicklungsverhalten angeregter Wellenmoden. Diese sind besonders interessant, da in sonnennähe starke eruptive Ereignisse wie Flares und koronale Masseauswürfe energiereiche Teilchenströmungen verursachen, die im heliosphärischen Plasma zu Instabilitäten führen. Dadurch werden wiederum Plasmamoden, wie Alfvénwellen, in einem bestimmten Wellenzahlintervall erzeugt. Die Simulationen solcher Szenarien durch GISMO haben gezeigt, dass angeregte Wellenmoden die gesamte Evolution der Turbulenz maßgeblich bestimmen. Ist die Entwicklung in der homogenen Hintergrundturbulenz oder bei schwach angeregten Moden hauptsächlich durch das Goldreich-Sridhar Modell der Übergangsturbulenz bestimmt, erfolgt die Energiekaskadierung ausschließlich in senkrechter Richtung zum Hintergrundmagnetfeld. Die Ausbreitung der Energie in paralleler Richtung ist dagegen ein sehr langsamer Prozess, der Konvektion oder Wellenzahldiffusion zugeordnet werden konnte. Mit zunehmender Amplitude der angeregten Wellenmoden geht das System in den Bereich der starken Turbulenz über. In dem zugehörigen Goldreich-Sridhar Modell ist der Schlüsselparameter hierfür die kritische Balance, die mit dem Wert $\zeta \approx 1$ erreicht wird. In den Simulationen nahe des Übergangs in das stark turbulente Regime

konnte dieser Wert in verschiedenen Wellenzahlbereichen gemessen werden. Weiterhin trat in diesen Fällen die Erzeugung komplexer Alfvénwellenstrukturen auf. Dabei hat sich die zweidimensionale Darstellung der spektralen Energie als ein wichtiges Werkzeug herausgestellt, mit dessen Hilfe eine übersichtliche Visualisierung des Fourierraumes gelungen ist. Als ein weiterer Effekt im Zusammenhang mit stark angeregten Moden, konnte das Wave-steepening beobachtet werden. Dies ist insofern ein wichtiger Prozess für die Gesamtentwicklung der Turbulenz, da durch das Erzeugen höherer Harmonischer Energie effizient in paralleler Richtung transferiert wird, was nicht vom Goldreich–Sridhar Modell erklärt wird. Im Kontext der heliosphärischen Turbulenz können somit hohe parallele Wellenmoden verstanden werden, da die Sonne - abhängig von ihrer Aktivität - regelmäßig durch starke solare Ereignisse, Wellenmoden anregt, die wiederum in der Lage sind höhere Harmonische zu generieren.

Die MHD-Simulationen dieser verschiedenen Szenarien bildeten darüber hinaus den Ausgangspunkt für Testteilchensimulationen. Dabei stand die Untersuchung der Pitchwinkelstreuung und deren Zusammenhang mit der quasilinearen Theorie im Mittelpunkt. Erstmals wurde unter gleichen Bedingung der Ansatz der magnetostatischen QLT mit den Ergebnissen der simulierten Teilchenstreuung verglichen. Dieser Teil der vorliegenden Arbeit hat erheblichen Einfluss auf aktuelle analytische Teilchentransportmodelle. Wie sich herausstellte, ist die Struktur resonanter Wechselwirkungen zwischen Welle und Teilchen gerade bei Streuung an angeregten Wellenmoden so komplex, dass eine Interpretation der häufig verwendeten Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten $D_{\mu\mu}$ ohne tieferes Verständnis nicht möglich ist. Schon bei leichten Abweichungen von den quasilinearen Näherungen verändert sich die Geometrie der Resonanzen so, dass der funktionale Verlauf von $D_{\mu\mu}$ verfälscht wird. Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Interpretation der tatsächlichen Streuvorgänge haben sich die Streuplots erwiesen, durch die individuelle Teilchenstreuungen dargestellt werden.

Der analytische Ansatz durch die SQLT zeigte eine gute Näherung der resonanten Wechselwirkungen besonders bei schwach turbulenten Moden. Starke Abweichungen traten zum einen bei kleinen Pitchwinkeln auf, was auf die Resonanzlücken in der quasilinearen Beschreibung zurück zu führen ist und zum anderen bei höheren Verhältnissen von $\delta B/B_0$, bei denen Annahmen der QLT schlechter zutreffen.

AUSBLICK UND ZUKÜNFTIGE PROJEKTE

Mit den vielfältigen Möglichkeiten die der Hybrid-Code GISMO bietet, bleiben für zukünftige Untersuchungen von Turbulenz und Teilchentransport noch zahlreiche Szenarien. Aufbauend auf dieser Arbeit sind im Speziellen genauere Simulationen der Turbulenz in kritischer Balance von Interesse. Dabei sind höhere Gitterauflösungen nur ein möglicher Ansatzpunkt. Weiterhin werden derzeit mit GISMO neue Verfahren entwickelt, um exaktere Berechnungen der Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten zu erreichen. So wurde bereits die Messung von Diffusionsströmen implementiert, die es ermöglicht, über den Ansatz der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \mu} D_{\mu\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0,$$

sofern sich ein Strom j_μ einstellt, den Diffusionskoeffizienten durch

$$D_{\mu\mu} = -\frac{j_\mu}{\frac{\partial f}{\partial \mu}}$$

zu bestimmen. Ein deutlicher Vorteil dieser Methode liegt in der breiteren Anwendbarkeit, da keine Näherungen im Rahmen der quasilinearen Theorie mehr nötig sind. Dadurch können auch für den Fall starker Turbulenz oder bei stark angeregten Wellenmoden Pitchwinkel-Diffusionskoeffizienten berechnet werden.

In zukünftigen Arbeiten wird ein zentraler Punkt der verstärkte Abgleich der Teilchentransportmodellierung mit Beobachtungsdaten sein. Das im vergangenen Jahr initiierte EU-Projekt *SEP-Server* bietet dafür einen sehr guten Datenzugang. Angeleitet von der Universität Helsinki, werden Messungen hochenergetischer solarer Teilchenereignisse von elf verschiedenen europäischen Instituten aufbereitet und zur Verfügung gestellt. Dabei soll vor allem eine Plattform geschaffen werden, um Messdaten von Satellitenexperimenten leicht zugänglich zu machen. Im Rahmen dieses Projektes ist auch eine Implementation von Simulationen und numerischen Verfahren vorgesehen, bei denen GISMO einen wichtigen Beitrag liefern kann, da mit vergleichsweise wenigen Näherungen der Teilchentransport in einem turbulenten Hintergrundfeld realistisch auf großen Skalen simuliert werden kann. Andere Ansätze bedienen sich hierfür erheblicher Vereinfachungen (z.B. halbanalytische QLT Modelle) oder können aufgrund der numerischen Komplexität nur Fragmente der großskaligen räumlichen Ausdehnungen abdecken (z.B. PiC-Ansatz).

Darüber hinaus stellen Simulationen innerhalb der Heliosphäre nur eine Facette der Möglichkeiten dar. Die MHD-Turbulenz und der Teilchentransport sind auf eine Vielzahl astrophysikalischer Phänomene anwendbar. Daher steht ein weitreichender Parameterraum in GISMO zur Erforschung bereit. Diese Dissertation kann somit Ausgangspunkt für viele weitere Arbeiten und Projekte sein.

Anhang

A. Elsässervariablendarstellung der MHD-Gleichungen

HERLEITUNG DER ELSÄSSER-GLEICHUNGEN IM REALRAUM

Ausgehend von den MHD-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla P + \nu_n \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Impuls} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu_n \nabla^2 \mathbf{b} \quad \text{Induktion} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Inkompressibilität} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit b} \quad (\text{A.4})$$

wird die Definition der Elässervariablen

$$\mathbf{w}^- = \mathbf{u} + \mathbf{b} - v_A \mathbf{e}_z \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{u} - \mathbf{b} + v_A \mathbf{e}_z \quad (\text{A.6})$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow \mathbf{b} = \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+ + 2v_A \mathbf{e}_z}{2} \quad (\text{A.8})$$

angewandt. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die \mathbf{w}^\pm -Felder lediglich aus den fluktuierenden Anteilen, im Vorangegangenen als $\delta \mathbf{w}^\pm$ notiert, bestehen. Das Hintergrundmagnetfeld ist in dieser Darstellung durch den Term $v_A \mathbf{e}_\parallel$ entkoppelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \equiv \delta \mathbf{b} + \mathbf{B}_0 &= \delta \mathbf{b} & + & v_A \mathbf{e}_\parallel \\ \mathbf{b} \equiv & \frac{-\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-}{2} & + & v_A \mathbf{e}_\parallel \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Der Übersichtlichkeit halber soll im Folgenden die Resistivität ignoriert werden, also $\nu = 0$, da eine Berücksichtigung dieses Terms trivial nachvollziehbar ist. Durch das Einsetzen der Definitionen A.7 und A.8 in die oben stehenden MHD-Gleichungen erhält

man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} = \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+ + 2v_A \mathbf{e}_z}{2} \cdot \nabla \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+}{2} - \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} \cdot \nabla \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} - \nabla P \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+}{2} = \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+ + 2v_A \mathbf{e}_z}{2} \cdot \nabla \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} - \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} \cdot \nabla \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+}{2} \quad (\text{A.11})$$

wobei $\nabla \mathbf{e}_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_{\parallel} = 0$ berücksichtigt wurde. Man erhält schließlich die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+}{2} = -\frac{1}{2} [\mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- + v_A \nabla_z (-\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+)] - \nabla P \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+}{2} = \frac{1}{2} [\mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- + v_A \nabla_z (\mathbf{w}^- + \mathbf{w}^+)] \quad (\text{A.13})$$

nachdem alle Terme ausmultipliziert und vereinfacht wurden. Löst man vermittels Additionsverfahren dieses Gleichungssystem ergeben sich die finalen Realraumgleichungen

$$(\partial_t + v_A \nabla_z) \mathbf{w}^+ = -\mathbf{w}^- \cdot \nabla \mathbf{w}^+ - \nabla P + \nu_n \nabla^{2h} \mathbf{w}^+ \quad (\text{A.14})$$

$$(\partial_t - v_A \nabla_z) \mathbf{w}^- = -\mathbf{w}^+ \cdot \nabla \mathbf{w}^- - \nabla P + \nu_n \nabla^{2h} \mathbf{w}^- \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \mathbf{w}^{\pm} = 0, \quad (\text{A.16})$$

wobei der Resistivitätsterm wieder hinzugefügt wurde. Entsprechend liest sich die Schließungsbedingung über den Druckterm wie folgt:

$$P = \int \frac{\nabla \mathbf{w}^+ \otimes \nabla \mathbf{w}^-}{4\pi |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|} d^3 \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.17})$$

HERLEITUNG DER ELSÄSSER-GLEICHUNGEN IM FOURIERRAUM

Analog zur vorangegangenen Herleitung wird nun die Elsässervariablendefinition auf die Fourierraumdarstellung der MHD-Gleichungen angewendet. Ausgehend von

$$\frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial t} = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) - \nu k^2 \tilde{u}_\alpha \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_\alpha}{\partial t} = -ik_\beta \left(\widetilde{u_\beta b_\alpha} - \widetilde{b_\beta u_\alpha} \right) - \nu k^2 \tilde{b}_\alpha \quad (\text{A.19})$$

$$k_\alpha \tilde{u}_\alpha = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$k_\alpha \tilde{b}_\alpha = 0, \quad (\text{A.21})$$

wobei erneut Resistivität und auch der ν_A -Term ignoriert wurden, werden wieder die Definitionen der Elsässervariablen eingesetzt. Zunächst für den Term

$$\left(\widetilde{u_\beta u_\gamma} - \widetilde{b_\beta b_\gamma} \right) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\left(\widetilde{u_\beta b_\alpha} - \widetilde{b_\beta u_\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\alpha^-} - \widetilde{w_\beta^- w_\alpha^+} \right), \quad (\text{A.23})$$

und schließlich für die restlichen Terme

$$\partial_t (\tilde{w}_\alpha^+ + \tilde{w}_\alpha^-) = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \cdot \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\partial_t (-\tilde{w}_\alpha^+ + \tilde{w}_\alpha^-) = -ik_\beta \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\alpha^-} - \widetilde{w_\beta^- w_\alpha^+} \right). \quad (\text{A.25})$$

Nun wird abermals das Additionsverfahren angewandt, was folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$2\partial_t \tilde{w}_\alpha^- = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \cdot \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$- ik_\beta \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\alpha^-} - \widetilde{w_\beta^- w_\alpha^+} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$2\partial_t \tilde{w}_\alpha^+ = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \cdot \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$+ ik_\beta \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\alpha^-} - \widetilde{w_\beta^- w_\alpha^+} \right) \quad (\text{A.29})$$

Im nächsten Schritt wird das Kronecker-Delta ausgeführt

$$\begin{aligned}
-ik_\gamma \delta_{\alpha\beta} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) &= -ik_\gamma \left(\widetilde{w_\alpha^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\alpha^- w_\gamma^+} \right) \\
&= -ik_\beta \left(\widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} + \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} \right), \tag{A.30}
\end{aligned}$$

was in Zusammenhang mit Gl. A.27

$$\begin{aligned}
2\partial_t \tilde{w}_\alpha^- &= i \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) \\
&\quad + ik_\beta \left(-\widetilde{w_\beta^+ w_\alpha^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\alpha^+} \right) - ik_\beta \left(\widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} + \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} \right) \tag{A.31}
\end{aligned}$$

ergibt. Analoges Vorgehen mit $\partial_t w_\alpha^+$ und anschließendes Vereinfachen führt zu den Entwicklungsgleichungen von \tilde{w}^\pm :

$$\partial_t \tilde{w}_\alpha^- = \frac{i k_\alpha k_\beta k_\gamma}{2 k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} \tag{A.32}$$

$$\partial_t \tilde{w}_\alpha^+ = \frac{i k_\alpha k_\beta k_\gamma}{2 k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} \tag{A.33}$$

Unter Berücksichtigung des Hintergrundmagnetfeldes und des Diffusionsterms erhält man schließlich die finale Form des Gleichungssystems, wie sie von GISMO simuliert wird:

$$(\partial_t - v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^- = \frac{i k_\alpha k_\beta k_\gamma}{2 k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^- w_\beta^+} - \frac{\nu}{2} k^{2h} \tilde{w}_\alpha^- \tag{A.34}$$

$$(\partial_t + v_A k_z) \tilde{w}_\alpha^+ = \frac{i k_\alpha k_\beta k_\gamma}{2 k^2} \left(\widetilde{w_\beta^+ w_\gamma^-} + \widetilde{w_\beta^- w_\gamma^+} \right) - ik_\beta \widetilde{w_\alpha^+ w_\beta^-} - \frac{\nu}{2} k^{2h} \tilde{w}_\alpha^+ \tag{A.35}$$

$$k_\alpha \tilde{w}_\alpha^\pm = 0 \tag{A.36}$$

B. Approximationsverfahren des Larmor–Radius

Zur Bestimmung der Zeitdiskretisierung der Teilchensimulationen, wird die Gyrationbewegungsbahn eines Teilchens vorab jeder Simulation getestet. Der gemessene Larmorradius wird mit dem analytischen Wert verglichen (im Rahmen der numerischen Genauigkeit) und der Zeitschritt solange angepasst, bis eine gewünschte maximale relative

Abweichung erfüllt ist. Da man das Koordinatensystem immer so drehen kann, dass eine Koordinate Null ist, reicht im Folgenden eine zweidimensionale Beschreibung.

Um den Larmorradius aus der Teilchenbahn zu bestimmen, ist es nötig eine Kreisapproximation durchzuführen. Diese ergibt sich, wenn man den Umkreis des Dreiecks konstruiert, das aus 3 beliebigen Punkten der Teilchenbahn gebildet wird. Bestenfalls liegen diese Punkte jeweils an den Dritteln des Kreises und müssen zumindest mehr als ein viertel Kreisbogen abdecken. Aus einfachen geometrischen Überlegungen folgt, dass der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Dreieckseiten den Mittelpunkt des Kreises darstellt. Konstruiert man sich diese Senkrechten aus den drei Eckpunkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$, wobei zwei Mittelsenkrechten ausreichen, erhält man das Gleichungssystem für die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{2} [(x_2 + x_1) + m_{1,2}(y_2 - y_1)] \\ y_S &= \frac{1}{2} [(y_2 + y_1) - m_{1,2}(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{2} [(x_3 + x_2) + m_{2,3}(y_3 - y_2)] \\ y_S &= \frac{1}{2} [(y_3 + y_2) - m_{2,3}(x_3 - x_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dessen Lösung ergibt schließlich die Koordinaten des Kreismittelpunkts

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{(y_3 - y_2)(x_1^2 + y_1^2) + (y_1 - y_3)(x_2^2 + y_2^2) + (y_2 - y_1)(x_3^2 + y_3^2)}{2[(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_2)]} \\ y_M &= \frac{(x_3 - x_2)(x_1^2 + y_1^2) + (x_1 - x_3)(x_2^2 + y_2^2) + (x_2 - x_1)(x_3^2 + y_3^2)}{2[(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_2)]}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

von dem aus nun der Abstand zu jedem beliebigen Punkt der Kreisbahn des Testteilchens zur Messung des Larmor-Radius berechnet werden kann.

C. Interaktion mit der P3DFFT

Da die P3DFFT nativ ein Fortranprogramm ist, muss für den Zugriff von C/C++ ein *Name-mangling* definiert werden, mit dem Fortranmethoden nach C/C++ portiert werden können. Dies wird bereits von der P3DFFT mitgeliefert, war aber in den ersten Versionen nicht korrekt, so dass hier nocheinmal kurz die Idee umrissen werden soll.

Für das Name-mangling muss man die Schreibweisen der Funktionen für verschiedene Compiler berücksichtigen. Für den *Intel Compiler* benötigt man beispielsweise im Header „p3dffft.cpp.h“ die Definition

```

#ifdef ...
...
#elif __INTEL_COMPILER
#define FORT_MOD_NAME(NAME) p3dffft_mp_##NAME##_
#define FORTNAME(NAME) NAME##_
...
#else

...

void p3dffft_setup(int *,int ,int ,int , int);
void p3dffft_get_dims(int *,int *,int *,int);

...

```

Dies wird dann in der „p3dffft.cpp.cpp“ in einem `extern "C"` Block verwendet:

```

extern "C"
{
    void FORT_MOD_NAME(p3dffft_setup)(int *dims,int *nx,int *ny,int *nz, int *ow);
    void FORT_MOD_NAME(p3dffft_get_dims)(int *,int *,int *,int *);
    ...
}

void p3dffft_setup(int *dims,int nx,int ny,int nz, int overwrite)
{
    FORT_MOD_NAME(p3dffft_setup)(dims,&nx,&ny,&nz,&overwrite);
}

void p3dffft_get_dims(int *start,int *end,int *size,int conf)
{
    FORT_MOD_NAME(p3dffft_get_dims)(start,end,size,&conf);
}

```

...

D. Extraktion des MPI-Kommunikators aus der P3DFFT

Da die Parallelisierung von GISMO grundlegend von der P3DFFT generiert wird, muss man Folgendes beachten. Bei der Parallelisierung der Teilchensimulation wird der kartesische MPI-Kommunikator benötigt, um korrekte Prozessorkommunikation im Prozeß-Gitter durchzuführen. Leider bietet die P3DFFT - zumindest bis zur Version 2.4 - keinen Standardzugriff auf den, von ihr erzeugten, MPI-Kommunikator. Daher muss man die P3DFFT editieren, um eine Fortranübergabemethode für den Kommunikator zu schreiben. Es reicht dafür eine simple Rückgabefunktion aus.

Zu diesem Zweck wird in der „module.F90“ in Zeile 121-122 die **public**-Methode `p3dfft_get_cartcomm` deklariert:

```
public :: p3dfft_get_dims,p3dfft_setup,p3dfft_ftran_r2c,p3dfft_btran_c2r, &  
         p3dfft_clean,print_buf, get_timers, p3dfft_get_cartcomm
```

Diese Funktion wird anschließend in der „setup.F90“ definiert:

```
!=====  
  subroutine p3dfft_get_cartcomm (p3dfft_mpi_comm_cart)  
!=====  
  integer p3dfft_mpi_comm_cart(1)  
  p3dfft_mpi_comm_cart = mpi_comm_cart  
  end subroutine p3dfft_get_cartcomm
```

Um schließlich Zugriff via C/C++ darauf zu erhalten muss diese neue Funktion noch im Name-mangling der „p3dfft.cpp.cpp bzw. .h“ eingetragen werden:

```
extern "C"  
{  
  ...  
  void FORT_MOD_NAME(p3dfft_get_cartcomm)(int *);  
}
```

```

...

void p3dfft_get_cartcomm(int *tmpcartcomm)
{
    FORT_MOD_NAME(p3dfft_get_cartcomm)(tmpcartcomm);
}

```

E. Skalierungstests von Gismo

Folgende Skalierungstests wurden am *HLRB2* auf der *Altix 4700*-Plattform mit einer Itanium2-Architektur (*Montecito Dual Core*) durchgeführt. Dies ist notwendig um eine gelungene Parallelisierung zu verifizieren. Dabei sind zwei Arten von Tests konstruiert worden. Zum einen das sogenannte *strong scaling*, bei dem eine typische Simulation, mit einer Gittergröße von 256^3 Punkten, zunächst mit 8 CPUs berechnet wurde, um anschließend die gleiche Simulation mit der doppelten Anzahl von Prozessoren durchzuführen. Man erwartet bestenfalls, dass sich bei doppelter Rechenleistung die Gesamtrechenzeit halbiert, also die Abhängigkeit $1/n$ ist. Dieser Vorgang wurde schließlich mehrfach, bis zu 256 CPUs wiederholt. Die Ergebnisse in Abbildung E.1 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit einem $1/n$ Verlauf.

Zum anderen wurde zusätzlich ein *weak scaling* – Test absolviert. In diesem Fall wird eine steigende Anzahl von Prozessoren benutzt, um Problemstellungen in gleichermaßen steigenden Auflösungen zu berechnen. Der Idealfall wäre hier ein logarithmischer Anstieg der Rechenzeit mit zunehmender CPU-Anzahl.

Die Messungen in Abbildung E.2 zeigen ebenfalls gute Übereinstimmung mit der Erwartung.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass ein Idealverlauf so gut wie unmöglich ist, da mit steigender CPU-Anzahl ebenfalls die Prozessorkommunikation anwächst.

Bei beiden Tests ist zu beachten, dass man sämtliche nicht-simulationsbezogene Prozesse reduziert und genügend lange Simulationen durchführt, um das Verhältnis Initialisierungszeit zu Rechenzeit klein zu halten.

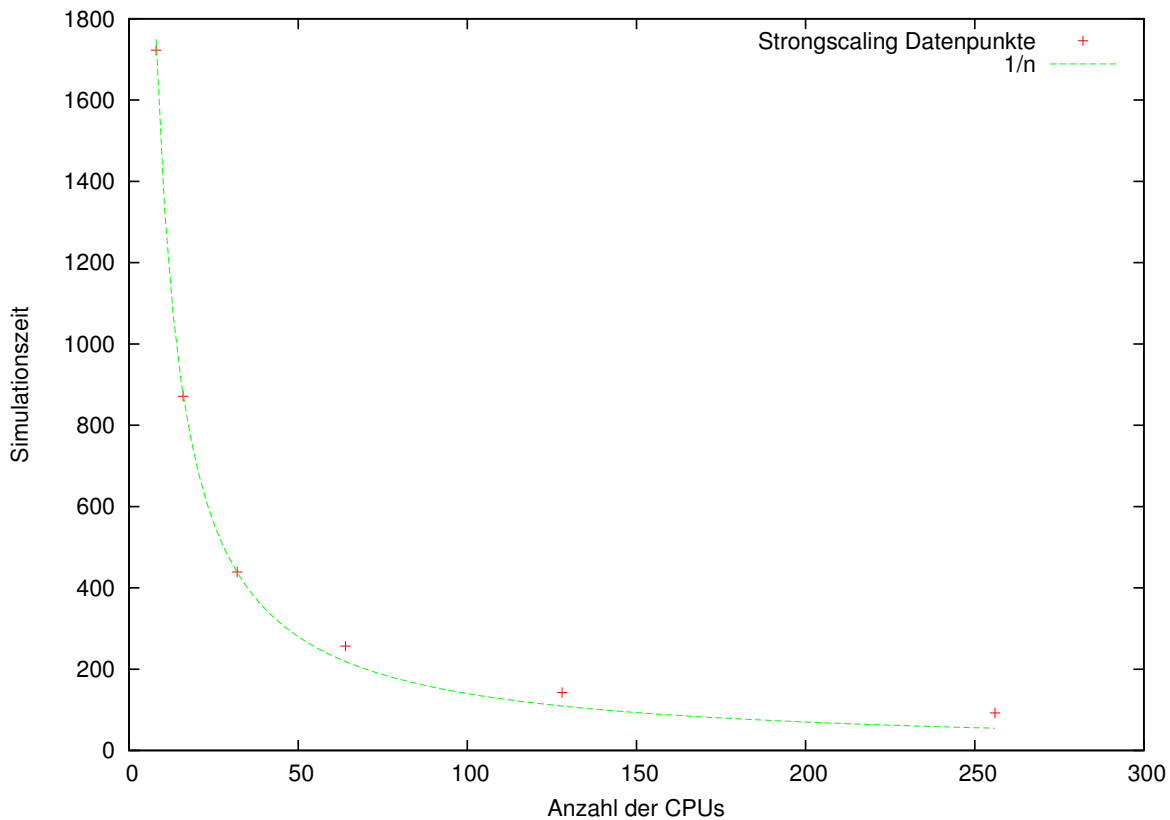


Abbildung E.1.: Ergebnisse des strong scaling-Tests. Dabei wird eine Problemstellung mit unterschiedlichen Anzahlen von CPUs berechnet.

F. Herleitung der Pitchwinkel Diffusionskoeffizienten im Rahmen der magnetostatischen Näherung

Im Regime der inkompressiblen MHD existieren zwei Wellentypen, pseudo- und Scheralfvénwellen. Da für beide Spezies unterschiedliche Diffusionskoeffizienten bestehen, wird im Folgenden $D_{\mu\mu}$ getrennt betrachtet. Um pseudo- und Scherwellen voneinander zu separieren wird ein Ansatz gemäß Maron u. Goldreich (2001) gewählt.

Ausgehend vom Scherwellen Pitchwinkel Diffusionskoeffizienten, wird von Schlickeiser

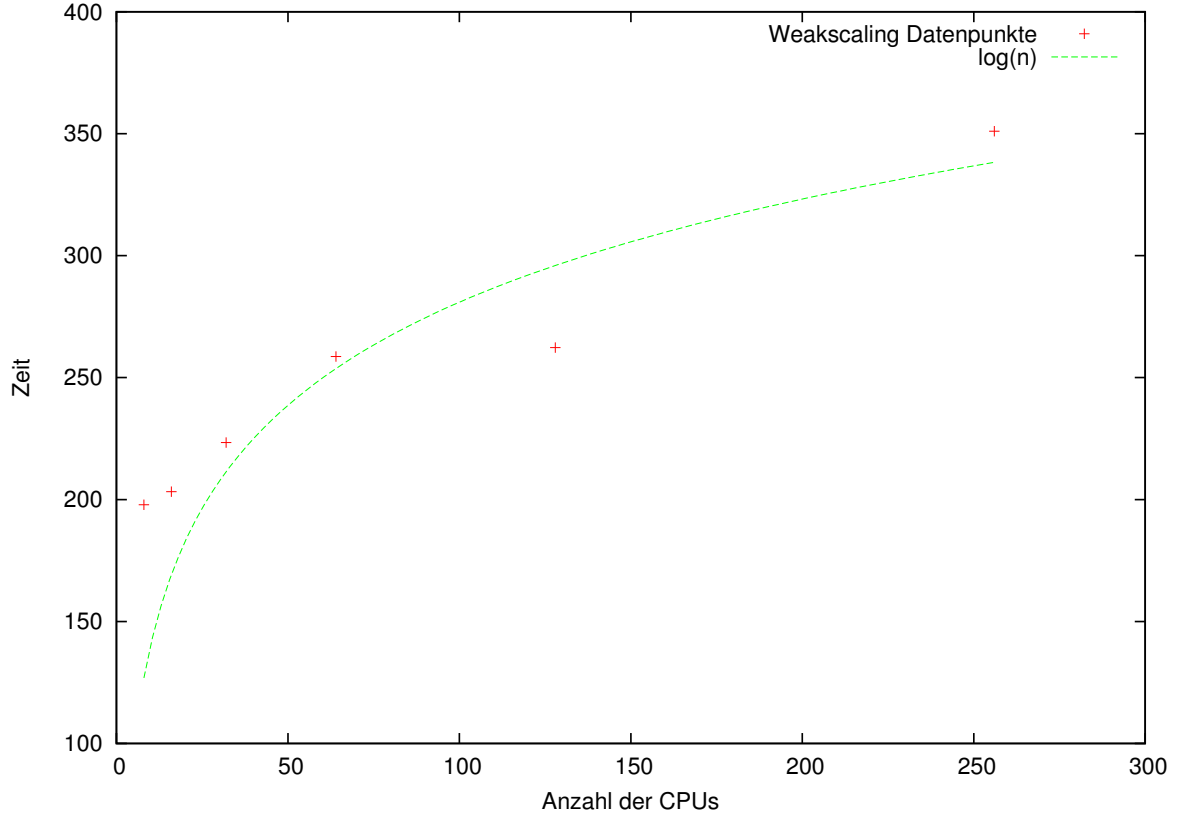


Abbildung E.2.: Ergebnisse des weak scaling – Tests. Dabei wird mit steigender Anzahl von CPUs ein gleichermaßen vergrößertes Gitter berechnet.

(2002) der allgemeine Ansatz

$$D_{\mu\mu,A} = \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega) \left[1 - \frac{\mu\omega}{k_{\parallel}v}\right]^2 \times \left[\frac{n J_n(v_{\perp}k_{\perp}/\Omega)}{v_{\perp}k_{\perp}/\Omega}\right]^2 P_{xx,A}(\mathbf{k}), \quad (\text{F.1})$$

gegeben, wobei μ , v und Ω erneut Variablen der Teilchen sind, $v_{\perp} = v\sqrt{1-\mu^2}$ und $P_{xx,A}$ die xx -Komponente des Power-Spektrumtensor für Alfvénturbulenz ist. Resonante Interaktion wird dabei durch die Resonanzfunktion $\mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega)$ definiert, die sich unter der Annahme der Dämpfungsfreiheit zu einer δ -Funktion $\mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega) = \pi \delta(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\Omega)$ vereinfacht. In der magnetostatischen Näherung wird $\Omega \gg \omega_j \approx 0$ approximiert und der

Diffusionskoeffizient vereinfacht sich zu

$$D_{\mu\mu,A} = \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \pi \delta(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\Omega) \times \left[\frac{n J_n(v_{\perp}k_{\perp}/\Omega)}{v_{\perp}k_{\perp}/\Omega} \right]^2 P_{xx,A}(\mathbf{k}). \quad (\text{F.2})$$

Die magnetosonische Lösung ist nach Schlickeiser (2002) für die schnelle Mode in kalten Plasmen

$$D_{\mu\mu,M} \approx \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega) \times [J'_n(v_{\perp}k_{\perp}/\Omega)]^2 P_{xx,M}(\mathbf{k}), \quad (\text{F.3})$$

unter der Annahme hinreichend hoher Teilchengeschwindigkeiten, $v_A \ll v$. Man kann zeigen, dass die Polarisation der schnellen magnetosonischen Mode in der Näherung des kalten Plasmas, die gleiche ist, wie die, der pseudo Alfvénwelle. Dementsprechend lässt mit deren Dispersionsrelation oben stehender Diffusionskoeffizient annehmen. Mit Hilfe der magnetostatischen Näherung $\omega \approx 0$ kann für die dämpfungsfreie Resonanzfunktion wieder $\mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega) = \pi \delta(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega)$ angenommen werden. Man erhält somit für die pseudo Mode

$$D_{\mu\mu,P} \approx \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \pi \delta(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega) \times [J'_n(v_{\perp}k_{\perp}/\Omega)]^2 P_{xx,P}(\mathbf{k}). \quad (\text{F.4})$$

Da die Cherenkov Resonanz mit $n = 0$ bei der pseudo Alfvénwelle existiert, muss diese getrennt betrachtet werden. Zwar kann eine Resonanzfunktion mit

$$\mathcal{R}_{n=0} = \frac{\pi \delta(v_{\parallel} - v_A)}{k_{\parallel}} \quad (\text{F.5})$$

angenommen werden, dies führt aber zu einer frei stehenden δ -Funktion, was eine unphysikalische Lösung darstellt. Im Rahmen der QLT ohne Korrekturen ist eine Behandlung daher nicht möglich. In diesem Modell wird deshalb die Cherenkov-Resonanz nicht behandelt.

Unter der erneuten Anwendung der magnetostatischen Näherung mit der Resonanzfunktion

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \omega) = \pi \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega), \quad (\text{F.6})$$

erhält man für die Gyroresonanz der Pseudomode

$$D_{\mu\mu,P} \approx \frac{2\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{n \neq 0} \int d^3k \pi \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega) \times [J'_n(v_{\perp} k_{\perp} / \Omega)]^2 P_{xx,P}(\mathbf{k}). \quad (\text{F.7})$$

G. Diskretisierung der Pitchwinkel Diffusionskoeffizienten

Um die im Rahmen numerischer Berechnungen $D_{\mu\mu}$ zu bestimmen, wird ein kontinuierliches Spektrum in paralleler und ein diskretisiertes in senkrechter Richtung angenommen. Also ist

$$P_{xx}(k_x, k_y, k_z) = P_{xx}(h\Delta k, i\Delta k, k_z), \quad (\text{G.8})$$

mit $h, i = -M, \dots, M$. Folglich werden die Integrale durch diskretisierte Summen über k_x und k_y approximiert, wobei k_z durch eine δ -Funktion beschrieben wird. Damit gilt für den Diffusionskoeffizienten der pseudo Mode

$$D_{\mu\mu,P}^{n \neq 0} = \frac{2\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2 |v_{\parallel}|} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty, n \neq 0} \sum_{h,i=-M}^M \Delta k^2 [J'_n(v_{\perp} k_{\perp} / \Omega)]^2 P_{xx,P}(h\Delta k, i\Delta k, n\Omega/v_{\parallel}). \quad (\text{G.9})$$

Nach der k_z -Integration wird die Gleichung mit $k_z = j\Delta k$ diskretisiert. Dementsprechend sind $l = \Omega/(\mu v \Delta k)$ und $\mu = \Omega/(l v \Delta k)$. Die Teilchen mit $v = \Omega/(m\Delta k)$, und $m \leq l \leq M$ haben somit einen diskretisierten Pitchwinkel $\mu = m/l$. Unter den

durchgeführten Diskretisierungen ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
v_{\parallel} &= v (m/l), \\
v_{\perp} &= v \sqrt{1 - m^2/l^2}, \\
k_{\perp} &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \Delta k \sqrt{h^2 + i^2}
\end{aligned} \tag{G.10}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu,P}^{n \neq 0} \left(\frac{m}{l} \right) &= 2\pi\Omega \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right) l \times \\
&\sum_{n=-M/l}^{M/l, n \neq 0} \sum_{h,i=-M}^M \left[J'_n \left(\frac{1}{m} \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right) (h^2 + i^2)} \right) \right]^2 \times \\
&\frac{\Delta k^3 P_{xx,P}(h\Delta k, i\Delta k, n l \Delta k)}{B_0^2}.
\end{aligned} \tag{G.11}$$

Analoges vorgehen bei den Scheralfvénwellen liefert

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu,A} \left(\frac{m}{l} \right) &= 2\pi\Omega \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right) l \times \\
&\sum_{n=-M/l}^{M/l} \sum_{h,i=-M}^M \left[\frac{n J_n \left(\frac{1}{m} \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right) (h^2 + i^2)} \right)}{\frac{1}{m} \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right) (h^2 + i^2)}} \right]^2 \times \\
&\frac{\Delta k^3 P_{xx,A}(h\Delta k, i\Delta k, n l \Delta k)}{B_0^2}.
\end{aligned} \tag{G.12}$$

Literaturverzeichnis

Agueda et al. 2009

AGUEDA, N. ; VAINIO, R. ; LARIO, D. ; SANAHUJA, B.: The influence of in situ pitch-angle cosine coverage on the derivation of solar energetic particle injection and interplanetary transport conditions. In: *Advances in Space Research* 44 (2009), Oktober, S. 794–800. <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2009.05.023>. – DOI 10.1016/j.asr.2009.05.023

Ahnert 1949

AHNERT, P.: Der Komet 1942g (Whipple-Fedtko). In: *Mitteilungen der Sternwarte zu Sonneberg* 38 (1949), Dezember, S. 24–47

Balogh et al. 1999

BALOGH, A. ; FORSYTH, R. J. ; LUCEK, E. A. ; HORBURY, T. S. ; SMITH, E. J.: Heliospheric magnetic field polarity inversions at high heliographic latitudes. In: *Geophys. Res. Lett.* 26 (1999), März, S. 631–634. <http://dx.doi.org/10.1029/1999GL900061>. – DOI 10.1029/1999GL900061

Barnes 1966

BARNES, A.: Collisionless Damping of Hydromagnetic Waves. In: *Physics of Fluids* 9 (1966), April, S. 1483. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761882>. – DOI 10.1063/1.1761882

Bavassano et al. 1982

BAVASSANO, B. ; DOBROWOLNY, M. ; MARIANI, F. ; NESS, N. F.: Radial evolution of power spectra of interplanetary Alfvénic turbulence. In: *J. Geophys. Res.* 87 (1982), Mai, S. 3617–3622. <http://dx.doi.org/10.1029/JA087iA05p03617>. – DOI 10.1029/JA087iA05p03617

Bell 1978

BELL, A. R.: The acceleration of cosmic rays in shock fronts. I. In: MNRAS 182 (1978), Januar, S. 147–156

Bershadskii 2002

BERSHADSKII, A.: Anomalous three-dimensional symmetries of solar-wind plasma. In: *Phys. Rev. E* 66 (2002), Oct, 046410. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.66.046410>. – DOI 10.1103/PhysRevE.66.046410

Biermann 1951

BIERMANN, L.: Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung. In: ZAp 29 (1951), S. 274

Bigot et al. 2008

BIGOT, B. ; GALTIER, S. ; POLITANO, H.: An anisotropic turbulent model for solar coronal heating. In: A&A 490 (2008), Oktober, S. 325–337. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20079227>. – DOI 10.1051/0004-6361:20079227

Birdsall u. Langdon 2005

BIRDSALL, C. K. ; LANGDON, A. B.: *Plasma physics via computer simulation*. First. New York: Taylor and Francis, 2005

Boris 1970

BORIS, J. P.: Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. In: *Proceedings of the Fourth Conference on Numerical Simulation Plasmas* (1970), S. 3–67

Borovsky u. Funsten 2002

BOROVSKY, J. E. ; FUNSTEN, H. O.: The role of solar-wind turbulence in the coupling of the solar wind to the Earth's magnetosphere. In: *AGU Spring Meeting Abstracts* (2002), Mai, S. B1

Borovsky u. Gary 2008

BOROVSKY, J. E. ; GARY, S. P.: The Viscosity of the Collisionless Solar Wind and the Reynolds Number of Its MHD Turbulence. In: *AGU Fall Meeting Abstracts* (2008), Dezember, S. A2

Brueckner et al. 1998

BRUECKNER, G. E. ; DELABOUDINIÈRE, J.-P. ; HOWARD, R. A. ; PASWATERS,

S. E. ; ST. CYR, O. C. ; SCHWENN, R. ; LAMY, P. ; SIMNETT, G. M. ; THOMPSON, B. ; WANG, D.: Geomagnetic storms caused by coronal mass ejections (CMEs): March 1996 through June 1997. In: *Geophys. Res. Lett.* 25 (1998), S. 3019–3022. <http://dx.doi.org/10.1029/98GL00704>. – DOI 10.1029/98GL00704

Bruno et al. 1985

BRUNO, R. ; BAVASSANO, B. ; VILLANTE, U.: Evidence for long period Alfvén waves in the inner solar system. In: *J. Geophys. Res.* 90 (1985), Mai, S. 4373–4377. <http://dx.doi.org/10.1029/JA090iA05p04373>. – DOI 10.1029/JA090iA05p04373

Bruno u. Carbone 2005

BRUNO, R. ; CARBONE, V.: The Solar Wind as a Turbulence Laboratory. In: *Living Reviews in Solar Physics* 2 (2005), September, S. 4

Burlaga 1991

BURLAGA, L. F.: Intermittent turbulence in the solar wind. In: *J. Geophys. Res.* 96 (1991), April, S. 5847–5851. <http://dx.doi.org/10.1029/91JA00087>. – DOI 10.1029/91JA00087

Canuto 1988

CANUTO, Claudio: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin Heidelberg New York : Springer, 1988. – ISBN 3–540–52205–0

Carbone u. Pouquet 2005

CARBONE, V. ; POUQUET, A.: An introduction to fluid and MHD turbulence for astrophysical flows: Theory, observational and numerical data, and modeling. Berlin, Germany; New York, U.S.A. : Springer, 2005. – in press

Chandrasekhar 1943

CHANDRASEKHAR, S.: Stochastic Problems in Physics and Astronomy. In: *Reviews of Modern Physics* 15 (1943), Januar, S. 1–89. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.15.1>. – DOI 10.1103/RevModPhys.15.1

Charbonneau 2010

CHARBONNEAU, Paul: Dynamo Models of the Solar Cycle. In: *Living Reviews in Solar Physics* 7 (2010), Nr. 3. <http://www.livingreviews.org/lrsp-2010-3>

Cooley u. Tukey 1965

COOLEY, J. W. ; TUKEY, J. W.: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. In: *Math. Comput.* 19 (1965), S. 297+

Courant et al. 1928

COURANT, R. ; FRIEDRICHS, K. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. In: *Math. Ann.* 100 (1928), S. 32–74

Dupree 1966

DUPREE, T. H.: A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence. In: *Physics of Fluids* 9 (1966), September, S. 1773–1782. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761932>. – DOI 10.1063/1.1761932

Fisk 1978

FISK, L. A.: He-3-rich flares - A possible explanation. In: *ApJ* 224 (1978), September, S. 1048–1055. <http://dx.doi.org/10.1086/156456>. – DOI 10.1086/156456

Forbush 1946

FORBUSH, S. E.: Three Unusual Cosmic-Ray Increases Possibly Due to Charged Particles from the Sun. In: *Physical Review* 70 (1946), November, S. 771–772. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.70.771>. – DOI 10.1103/PhysRev.70.771

Forsyth u. Breen 2002

FORSYTH, B. ; BREEN, A.: Meeting report: The 3-D Sun and heliosphere at solar maximum. In: *Astronomy and Geophysics* 43 (2002), Juni, Nr. 3, S. 030000–3. <http://dx.doi.org/10.1046/j.1468-4004.2002.43332.x>. – DOI 10.1046/j.1468-4004.2002.43332.x

Frisch et al. 1978

FRISCH, U. ; SULEM, P.-L. ; NELKIN, M.: A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 87 (1978), August, S. 719–736. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112078001846>. – DOI 10.1017/S0022112078001846

Frisch 1995

FRISCH, Uriel: *Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995

Galinsky et al. 1997

GALINSKY, V. L. ; SHEVCHENKO, V. I. ; RIDE, S. K. ; BAINE, M.: Excitation of nonlinear Alfvén waves by an ion beam in a plasma 1. Right-hand polarized waves. In: *J. Geophys. Res.* 102 (1997), September, S. 22365–22376. <http://dx.doi.org/10.1029/97JA01920>. – DOI 10.1029/97JA01920

Galtier et al. 2000

GALTIER, S. ; NAZARENKO, S. V. ; NEWELL, A. C. ; POUQUET, A.: A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics. In: *Journal of Plasma Physics* 63 (2000), Juni, S. 447–488. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022377899008284>. – DOI 10.1017/S0022377899008284

Ganse 2012

GANSE, Urs: *Dissertation: Kinetische Simulationen solarer Typ II Radiobursts*. Julius-Maximilians-Universität Würzburg : Institut für theoretische Physik und Astrophysik, 2012

Goldreich u. Sridhar 1995

GOLDREICH, P. ; SRIDHAR, S.: Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong Alfvénic turbulence. In: *ApJ* 438 (1995), Januar, S. 763–775. <http://dx.doi.org/10.1086/175121>. – DOI 10.1086/175121

Goldreich u. Sridhar 1997

GOLDREICH, P. ; SRIDHAR, S.: Magnetohydrodynamic Turbulence Revisited. In: *ApJ* 485 (1997), August, S. 680. <http://dx.doi.org/10.1086/304442>. – DOI 10.1086/304442

Gosling et al. 1995

GOSLING, J. T. ; BIRN, J. ; HESSE, M.: Three-dimensional magnetic reconnection and the magnetic topology of coronal mass ejection events. In: *Geophys. Res. Lett.* 22 (1995), April, S. 869–872. <http://dx.doi.org/10.1029/95GL00270>. – DOI 10.1029/95GL00270

Gosling et al. 1974

GOSLING, J. T. ; HILDNER, E. ; MACQUEEN, R. M. ; MUNRO, R. H. ; POLAND, A. I. ; ROSS, C. L.: Mass ejections from the sun - A view from SKYLAB. In:

J. Geophys. Res. 79 (1974), November, S. 4581–4587. <http://dx.doi.org/10.1029/JA079i031p04581>. – DOI 10.1029/JA079i031p04581

Gottlieb u. Tadmor 1991

GOTTLIEB, D. ; TADMOR, E.: The CFL condition for spectral approximations to hyperbolic initial-boundary value problems. In: *Mathematics of Computation*, vol. 56, no. 194, pp. 565–588 56 (1991), April, S. 565–588. <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1066833-9>. – DOI 10.1090/S0025-5718-1991-1066833-9

Grappin 1986

GRAPPIN, R.: Onset and decay of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence with velocity-magnetic field correlation. In: *Physics of Fluids* 29 (1986), August, S. 2433–2443. <http://dx.doi.org/10.1063/1.865536>. – DOI 10.1063/1.865536

Greaves u. Newton 1928

GREAVES, W. M. H. ; NEWTON, H. W.: Magnetic storms and solar activity, 1874 to 1927. In: MNRAS 89 (1928), November, S. 84–92

Hale 1931

HALE, G. E.: The Spectroheliograph and its Work. Part III. Solar Eruptions and Their Apparent Terrestrial Effects. In: ApJ 73 (1931), Juni, S. 379. <http://dx.doi.org/10.1086/143316>. – DOI 10.1086/143316

Hasselmann u. Wibberenz 1970

HASSELMANN, K. ; WIBBERENZ, G.: A Note on the Parallel Diffusion Coefficient. In: ApJ 162 (1970), Dezember, S. 1049. <http://dx.doi.org/10.1086/150736>. – DOI 10.1086/150736

Hildner et al. 1976

HILDNER, E. ; GOSLING, J. T. ; MACQUEEN, R. M. ; MUNRO, R. H. ; POLAND, A. I. ; ROSS, C. L.: Frequency of coronal transients and solar activity. In: Sol. Phys. 48 (1976), Mai, S. 127–135. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00153339>. – DOI 10.1007/BF00153339

Iroshnikov 1964

IROSHNIKOV, P. S.: Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field. In: Soviet Ast. 7 (1964), Februar, S. 566

Jokipii 1966

JOKIPII, J. R.: Cosmic-Ray Propagation. I. Charged Particles in a Random Magnetic Field. In: ApJ 146 (1966), November, S. 480. <http://dx.doi.org/10.1086/148912>. – DOI 10.1086/148912

Kahler 1992

KAHLER, S. W.: Solar flares and coronal mass ejections. In: ARA&A 30 (1992), S. 113–141. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.000553>. – DOI 10.1146/annurev.aa.30.090192.000553

Kahler et al. 1986

KAHLER, S. W. ; CLIVER, E. W. ; CANE, H. V. ; MCGUIRE, R. E. ; STONE, R. G. ; SHEELEY, N. R.: Solar filament eruptions and energetic particle events. In: ApJ 302 (1986), März, S. 504–510. <http://dx.doi.org/10.1086/164009>. – DOI 10.1086/164009

Kahler et al. 1984

KAHLER, S. W. ; SHEELEY, N. R. ; HOWARD, R. A. ; MICHELS, D. J. ; KOOMEN, M. J. ; MCGUIRE, R. E. ; VON ROSENVINGE, T. T. ; REAMES, D. V.: Associations between coronal mass ejections and solar energetic proton events. In: J. Geophys. Res. 89 (1984), November, S. 9683–9693. <http://dx.doi.org/10.1029/JA089iA11p09683>. – DOI 10.1029/JA089iA11p09683

Kahler et al. 1989

KAHLER, S. W. ; SHEELEY, N. R. ; LIGGETT, M.: Coronal mass ejections and associated X-ray flare durations. In: ApJ 344 (1989), September, S. 1026–1033. <http://dx.doi.org/10.1086/167869>. – DOI 10.1086/167869

Kilian 2010

KILIAN, Patrick: *Diplomarbeit: Teilchenbeschleunigung in Laserplasmen: kinetische Simulationen*. Julius-Maximilians-Universität Würzburg : Institut für theoretische Physik und Astrophysik, 2010

Kissmann 2006

KISSMANN, Ralf: *Dissertation: Numerical investigation of the turbulent ISM*. Ruhr-Universität Bochum : Fakultät für Physik und Astronomie, 2006

Kolmogorov 1941a

KOLMOGOROV, A.: Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. In: *Akademiia Nauk SSSR Doklady* (1941)

Kolmogorov 1941b

KOLMOGOROV, A.: On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. In: *Akademiia Nauk SSSR Doklady* (1941)

Kolmogorov 1941c

KOLMOGOROV, A.: The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. In: *Akademiia Nauk SSSR Doklady* (1941)

Kopp et al. 2005

KOPP, G. ; LAWRENCE, G. ; ROTTMAN, G.: The Total Irradiance Monitor (TIM): Science Results. In: *Sol. Phys.* 230 (2005), August, S. 129–139. <http://dx.doi.org/10.1007/s11207-005-7433-9>. – DOI 10.1007/s11207-005-7433-9

Koskinen 2011

KOSKINEN, Hannu E. J.: *Physics of Space Storms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011

Kraichnan 1965

KRAICHNAN, R. H.: Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence. In: *Phys. Fluids* 8 (1965), S. 1385–1387

Kubo 1957

KUBO, R.: Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 12 (1957), Juni, S. 570–+

Lang 2009

LANG, Kenneth R.: *The Sun from space*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009

Lange 2008

LANGE, Sebastian: *Diplomarbeit: Teilchentransport in inkompressiblen turbulenten Plasmen mittels spektraler MHD-Simulationen*. Julius-Maximilians-Universität Würzburg : Institut für theoretische Physik und Astrophysik, 2008

Lee et al. 2008

LEE, E. ; BRACHET, M. E. ; POUQUET, A. ; MININNI, P. D. ; ROSENBERG, D.: Paradigmatic flow for small-scale magnetohydrodynamics: Properties of the ideal case and the collision of current sheets. In: *Phys. Rev. E* 78 (2008), Dec, 066401. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.78.066401>. – DOI 10.1103/PhysRevE.78.066401

Lesieur 1990

LESIEUR, M.: *Turbulence in Fluids*. Dordrecht:Kluwer, 1990

Lin u. Hudson 1976

LIN, R. P. ; HUDSON, H. S.: Non-thermal processes in large solar flares. In: *Sol. Phys.* 50 (1976), Oktober, S. 153–178. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00206199>. – DOI 10.1007/BF00206199

Lithwick u. Goldreich 2003

LITHWICK, Y. ; GOLDREICH, P.: Imbalanced Weak Magnetohydrodynamic Turbulence. In: *ApJ* 582 (2003), Januar, S. 1220–1240. <http://dx.doi.org/10.1086/344676>. – DOI 10.1086/344676

Manchester et al. 2005

MANCHESTER, W. B. ; GOMBOSI, T. I. ; DE ZEEUW, D. L. ; SOKOLOV, I. V. ; ROUSSEV, I. I. ; POWELL, K. G. ; KÓTA, J. ; TÓTH, G. ; ZURBUCHEN, T. H.: Coronal Mass Ejection Shock and Sheath Structures Relevant to Particle Acceleration. In: *ApJ* 622 (2005), April, S. 1225–1239. <http://dx.doi.org/10.1086/427768>. – DOI 10.1086/427768

Maron u. Goldreich 2001

MARON, J. ; GOLDREICH, P.: Simulations of Incompressible Magnetohydrodynamic Turbulence. In: *ApJ* 554 (2001), Juni, S. 1175–1196. <http://dx.doi.org/10.1086/321413>. – DOI 10.1086/321413

Marsch u. Tu 1990

MARSCH, E. ; TU, C.-Y.: Spectral and spatial evolution of compressible turbulence in the inner solar wind. In: *J. Geophys. Res.* 95 (1990), August, S. 11945–11956. <http://dx.doi.org/10.1029/JA095iA08p11945>. – DOI 10.1029/JA095iA08p11945

Matthaeus et al. 1990

MATTHAEUS, W. H. ; GOLDSTEIN, M. L. ; ROBERTS, D. A.: Evidence for the presence of quasi-two-dimensional nearly incompressible fluctuations in the solar wind. 95 (1990), Dezember, S. 20673–20683. <http://dx.doi.org/10.1029/JA095iA12p20673>. – DOI 10.1029/JA095iA12p20673

Matthaeus et al. 1983

MATTHAEUS, W. H. ; MONTGOMERY, D. C. ; GOLDSTEIN, M. L.: Turbulent generation of outward-traveling interplanetary Alfvénic fluctuations. In: *Physical Review Letters* 51 (1983), Oktober, S. 1484–1487. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.51.1484>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.51.1484

Matthaeus et al. 2003

MATTHAEUS, W. H. ; QIN, G. ; BIEBER, J. W. ; ZANK, G. P.: Nonlinear Collisionless Perpendicular Diffusion of Charged Particles. In: *The Astrophysical Journal Letters* 590 (2003), Nr. 1, L53. <http://stacks.iop.org/1538-4357/590/i=1/a=L53>

Matthaeus et al. 1994

MATTHAEUS, W. H. ; ZHOU, Y. ; ZANK, G. P. ; OUGHTON, S.: Transport theory and the WKB approximation for interplanetary MHD fluctuations. In: *J. Geophys. Res.* 99 (1994), Dezember, S. 23421. <http://dx.doi.org/10.1029/94JA02326>. – DOI 10.1029/94JA02326

Melrose 1989

MELROSE, Donald B.: *Instabilities in space and laboratory plasmas*. Cambridge University Press, 1989

Miller u. Roberts 1995

MILLER, J. A. ; ROBERTS, D. A.: Stochastic Proton Acceleration by Cascading Alfvén Waves in Impulsive Solar Flares. In: *ApJ* 452 (1995), Oktober, S. 912. <http://dx.doi.org/10.1086/176359>. – DOI 10.1086/176359

Mininni u. Pouquet 2009

MININNI, P. D. ; POUQUET, A.: Helicity cascades in rotating turbulence. In: *Phys. Rev. E* 79 (2009), Februar, Nr. 2, S. 026304. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.026304>. – DOI 10.1103/PhysRevE.79.026304

Montgomery 1992

MONTGOMERY, D.: Modifications of magnetohydrodynamics as applied to the solar wind. In: *J. Geophys. Res.* 97 (1992), April, S. 4309. <http://dx.doi.org/10.1029/92JA00144>. – DOI 10.1029/92JA00144

Montgomery u. Matthaeus 1995

MONTGOMERY, D. ; MATTHAEUS, W. H.: Anisotropic Modal Energy Transfer in Interstellar Turbulence. In: *ApJ* 447 (1995), Juli, S. 706. <http://dx.doi.org/10.1086/175910>. – DOI 10.1086/175910

Munro et al. 1979

MUNRO, R. H. ; GOSLING, J. T. ; HILDNER, E. ; MACQUEEN, R. M. ; POLAND, A. I. ; ROSS, C. L.: The association of coronal mass ejection transients with other forms of solar activity. In: *Sol. Phys.* 61 (1979), Februar, S. 201–215. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00155456>. – DOI 10.1007/BF00155456

Möbius et al. 1982

MÖBIUS, E. ; SCHOLER, M. ; HOVESTADT, D. ; KLECKER, B. ; GLOECKLER, G.: Comparison of helium and heavy ion spectra in He-3-rich solar flares with model calculations based on stochastic Fermi acceleration in Alfvén turbulence. In: *ApJ* 259 (1982), August, S. 397–410. <http://dx.doi.org/10.1086/160177>. – DOI 10.1086/160177

Ng u. Reames 1994

NG, C. K. ; REAMES, D. V.: Focused interplanetary transport of approximately 1 MeV solar energetic protons through self-generated Alfvén waves. In: *ApJ* 424 (1994), April, S. 1032–1048. <http://dx.doi.org/10.1086/173954>. – DOI 10.1086/173954

Orszag 1971

ORSZAG, S. A.: Elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components. In: *Atmospheric Sciences* 28 (1971), S. 1074+

Pallavicini et al. 1977

PALLAVICINI, R. ; SERIO, S. ; VAIANA, G. S.: A survey of soft X-ray limb flare images - The relation between their structure in the corona and other physical parameters. In: *ApJ* 216 (1977), August, S. 108–122. <http://dx.doi.org/10.1086/155452>. – DOI 10.1086/155452

Parker 1957

PARKER, E. N.: Sweet's Mechanism for Merging Magnetic Fields in Conducting Fluids. In: J. Geophys. Res. 62 (1957), Dezember, S. 509–520. <http://dx.doi.org/10.1029/JZ062i004p00509>. – DOI 10.1029/JZ062i004p00509

Parker 1958

PARKER, E. N.: Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields. In: ApJ 128 (1958), November, S. 664. <http://dx.doi.org/10.1086/146579>. – DOI 10.1086/146579

Petschek 1964

PETSCHEK, H. E.: Magnetic Field Annihilation. In: *NASA Special Publication 50* (1964), S. 425

Politano u. Pouquet 1998

POLITANO, H. ; POUQUET, A.: von Kármán-Howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions. In: Phys. Rev. E 57 (1998), Januar, S. 21. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.57.R21>. – DOI 10.1103/PhysRevE.57.R21

Pouquet et al. 1986

POUQUET, A. ; FRISCH, U. ; MENEGUZZI, M.: Growth of correlations in magnetohydrodynamic turbulence. In: Phys. Rev. A 33 (1986), Juni, S. 4266–4276. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.33.4266>. – DOI 10.1103/PhysRevA.33.4266

Press et al. 1992

PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Second. Cambridge: University Press, 1992

Reames 1989

REAMES, D. V.: Wave generation in the transport of particles from large solar flares. In: ApJ 342 (1989), Juli, S. L51–L53. <http://dx.doi.org/10.1086/185482>. – DOI 10.1086/185482

Reames 1999

REAMES, D. V.: Particle acceleration at the Sun and in the heliosphere. In:

Space Sci. Rev. 90 (1999), Oktober, S. 413–491. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1005105831781>. – DOI 10.1023/A:1005105831781

Reames et al. 1997

REAMES, D. V. ; KAHLER, S. W. ; NG, C. K.: Spatial and Temporal Invariance in the Spectra of Energetic Particles in Gradual Solar Events. In: ApJ 491 (1997), Dezember, S. 414. <http://dx.doi.org/10.1086/304939>. – DOI 10.1086/304939

Reames u. Ng 1998

REAMES, D. V. ; NG, C. K.: Streaming-limited Intensities of Solar Energetic Particles. In: ApJ 504 (1998), September, S. 1002. <http://dx.doi.org/10.1086/306124>. – DOI 10.1086/306124

Roth u. Temerin 1997

ROTH, I. ; TEMERIN, M.: Enrichment of ^3He and Heavy Ions in Impulsive Solar Flares. In: ApJ 477 (1997), März, S. 940. <http://dx.doi.org/10.1086/303731>. – DOI 10.1086/303731

Sagdeev u. Galeev 1969

SAGDEEV, R. Z. ; GALEEV, A. A.: *Nonlinear Plasma Theory*. 1969

Schekochihin et al. 2007

SCHEKOCHIHIN, A. A. ; COWLEY, S. C. ; DORLAND, W.: Interplanetary and interstellar plasma turbulence. In: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 49 (2007), Mai, S. 195. <http://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/49/5A/S16>. – DOI 10.1088/0741-3335/49/5A/S16

Schlickeiser 1989

SCHLICKEISER, R.: Cosmic-ray transport and acceleration. I - Derivation of the kinetic equation and application to cosmic rays in static cold media. II - Cosmic rays in moving cold media with application to diffusive shock wave acceleration. In: ApJ 336 (1989), Januar, S. 243–293. <http://dx.doi.org/10.1086/167009>. – DOI 10.1086/167009

Schlickeiser 2002

SCHLICKEISER, Reinhard: *Cosmic Ray Astrophysics*. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2002. – ISBN 3-540-66465-3

Schoenberg 1946

SCHOENBERG, I. J.: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. In: *Quart. Appl. Math.* 4 (1946), S. 45–99

Shalchi et al. 2004

SHALCHI, A. ; BIEBER, J. W. ; MATTHAEUS, W. H. ; QIN, G.: Nonlinear Parallel and Perpendicular Diffusion of Charged Cosmic Rays in Weak Turbulence. In: *The Astrophysical Journal* 616 (2004), Nr. 1, 617. <http://stacks.iop.org/0004-637X/616/i=1/a=617>

She u. Leveque 1994

SHE, Z.-S. ; LEVEQUE, E.: Universal scaling laws in fully developed turbulence. In: *Physical Review Letters* 72 (1994), Januar, S. 336–339. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.336>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.72.336

Shebalin et al. 1983

SHEBALIN, J. V. ; MATTHAEUS, W. H. ; MONTGOMERY, D.: Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field. In: *Journal of Plasma Physics* 29 (1983), Juni, S. 525–547. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022377800000933>. – DOI 10.1017/S0022377800000933

Skilling 1975

SKILLING, J.: Cosmic ray streaming. III - Self-consistent solutions. In: *MNRAS* 173 (1975), November, S. 255–269

Spanier 2005

SPANIER, Felix: *Dissertation: Turbulenz im ISM: Einschränkung der Turbulenzparameter durch Berücksichtigung von Plasmawellenheizung*. Ruhr-Universität Bochum : Institut für theoretische Physik IV Weltraum- und Astrophysik, 2005

Sridhar u. Goldreich 1994

SRIDHAR, S. ; GOLDREICH, P.: Toward a theory of interstellar turbulence. 1: Weak Alfvénic turbulence. In: *ApJ* 432 (1994), September, S. 612–621. <http://dx.doi.org/10.1086/174600>. – DOI 10.1086/174600

Svestka 1986

SVESTKA, Z.: On the varieties of solar flares. In: D. F. NEIDIG (Hrsg.): *The lower*

atmosphere of solar flares; Proceedings of the Solar Maximum Mission Symposium, Sunspot, NM, Aug. 20-24, 1985 (A87-26201 10-92). Sunspot, NM, National Solar Observatory, 1986, p. 332-355., 1986, S. 332–355

Sweet 1958

SWEET, P. A.: The Neutral Point Theory of Solar Flares. In: B. LEHNERT (Hrsg.): *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics* Bd. 6, 1958, S. 123

Tautz et al. 2011

TAUTZ, R. C. ; SHALCHI, A. ; DOSCH, A.: Simulating heliospheric and solar particle diffusion using the Parker spiral geometry. In: *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 116 (2011), Februar, S. 2102. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA015936>. – DOI 10.1029/2010JA015936

Taylor u. Green 1937

TAYLOR, G. I. ; GREEN, A. E.: Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. In: *Royal Society of London Proceedings Series A* 158 (1937), Februar, S. 499–521

Temerin u. Roth 1992

TEMERIN, M. ; ROTH, I.: The production of He-3 and heavy ion enrichment in He-3-rich flares by electromagnetic hydrogen cyclotron waves. In: *ApJ* 391 (1992), Juni, S. L105–L108. <http://dx.doi.org/10.1086/186408>. – DOI 10.1086/186408

Tu u. Marsch 1995

TU, C.-Y. ; MARSCH, E.: MHD structures, waves and turbulence in the solar wind: Observations and theories. In: *Space Sci. Rev.* 73 (1995), Juli, S. 1–210. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00748891>. – DOI 10.1007/BF00748891

Tu et al. 1989

TU, C.-Y. ; ROBERTS, D. A. ; GOLDSTEIN, M. L.: Spectral evolution and cascade constant of solar wind Alfvénic turbulence. In: *J. Geophys. Res.* 94 (1989), Oktober, S. 13575–13578. <http://dx.doi.org/10.1029/JA094iA10p13575>. – DOI 10.1029/JA094iA10p13575

Turner et al. 2012

TURNER, D. L. ; SHPRITS, Y. ; HARTINGER, M. ; ANGELOPOULOS, V.: Explaining

sudden losses of outer radiation belt electrons during geomagnetic storms. In: *Nature Physics* 8 (2012), Januar, S. 208–212. <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2185>. – DOI 10.1038/nphys2185

Vainio 2003

VAINIO, R.: On the generation of Alfvén waves by solar energetic particles. In: *A&A* 406 (2003), August, S. 735–740. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20030822>. – DOI 10.1051/0004-6361:20030822

Vainio u. Laitinen 2007

VAINIO, R. ; LAITINEN, T.: Monte Carlo Simulations of Coronal Diffusive Shock Acceleration in Self-generated Turbulence. In: *ApJ* 658 (2007), März, S. 622–630. <http://dx.doi.org/10.1086/510284>. – DOI 10.1086/510284

Vainio et al. 2003

VAINIO, R. ; LAITINEN, T. ; FICHTNER, H.: A simple analytical expression for the power spectrum of cascading Alfvén waves in the solar wind. In: *A&A* 407 (2003), August, S. 713–723. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20030914>. – DOI 10.1051/0004-6361:20030914

Vay 2008

VAY, J.-L.: Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. In: *Physics of Plasmas* 15 (2008), Mai, Nr. 5, S. 056701–+. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2837054>. – DOI 10.1063/1.2837054

Völk 1973

VÖLK, H. J.: Nonlinear Perturbation Theory for Cosmic Ray Propagation in Random Magnetic Fields. In: *Ap&SS* 25 (1973), Dezember, S. 471–490. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00649186>. – DOI 10.1007/BF00649186

Vourlidas et al. 2003

VOURLIDAS, A. ; WU, S. T. ; WANG, A. H. ; SUBRAMANIAN, P. ; HOWARD, R. A.: Direct Detection of a Coronal Mass Ejection-Associated Shock in Large Angle and Spectrometric Coronagraph Experiment White-Light Images. In: *ApJ* 598 (2003), Dezember, S. 1392–1402. <http://dx.doi.org/10.1086/379098>. – DOI 10.1086/379098

Wegmann 2000

WEGMANN, R.: The effect of some solar wind disturbances on the plasma tail of a comet: models and observations. In: *A&A* 358 (2000), Juni, S. 759–775

Weiss 2011

WEISS, Martina: *Dissertation: Numerische Untersuchung von Turbulenz und Teilchentransport in der Heliosphäre*. Julius-Maximilians-Universität Würzburg : Institut für theoretische Physik und Astrophysik, 2011

Zakharov u. Filonenko 1966

ZAKHAROV, V. E. ; FILONENKO, N. N.: The energy spectrum for stochastic oscillations of a fluid surface. In: *Akademiia Nauk SSSR Doklady* 170 (1966), S. 1292–1295

Zakharov et al. 1992

ZAKHAROV, V. E. ; L'VOV, V. ; FALKOVICH, G. E.: *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1992

Zank et al. 1996

ZANK, G. P. ; MATTHAEUS, W. H. ; SMITH, C. W.: Evolution of turbulent magnetic fluctuation power with heliospheric distance. In: *J. Geophys. Res.* 101 (1996), August, S. 17093–17108. <http://dx.doi.org/10.1029/96JA01275>. – DOI 10.1029/96JA01275

Zrake u. MacFadyen 2012

ZRAKE, J. ; MACFADYEN, A. I.: Numerical Simulations of Driven Relativistic Magnetohydrodynamic Turbulence. In: *ApJ* 744 (2012), Januar, S. 32. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/744/1/32>. – DOI 10.1088/0004-637X/744/1/32

Publikationsliste

- Lange, S. und Spanier, F.: EVOLUTION OF PLASMA TURBULENCE EXCITED WITH PARTICLE BEAMS, In: *Astronomy & Astrophysics* Oct 2012, Vol. 546, S. A51
- Lange, S., Vainio, R., Battarbee, M., Laitinen, T., Spanier, F.: PARTICLE SCATTERING IN TURBULENT PLASMA TURBULENCE EXCITED WITH PARTICLE BEAMS, In: *Astronomy & Astrophysics*, *submitted*
- Lange, S., Ivascenko, A., Spanier, F.: CALCULATION METHODS FOR THE PITCH ANGLE SCATTERING COEFFICIENT, *in Preparation*

Danksagung

Der Finanzierung und der außergewöhnlichen Betreuung dieser Promotion durch Dr. Felix Spanier bin ich zutiefst dankbar. Durch seine wissenschaftlichen Anregungen, seinen ungebrochenen Optimismus und die Bereitschaft, selbst zur fortgeschrittenen Stunde Diskussionen zu führen, hat er maßgeblich zu dieser Dissertation beigetragen. Darüber hinaus ermöglichte er mir zahlreiche Teilnahmen an Konferenzen, Forschungsreisen und Workshops, die mir erlaubten meine Ergebnisse zu präsentieren, meinen wissenschaftlichen Horizont zu erweitern und mit internationalen Partnern zusammen zu arbeiten.

Für die finanzielle Unterstützung möchte ich mich auch außerordentlich bei Prof. Dr. Karl Mannheim bedanken, der immer einen Weg fand, meine Promotion mit den nötigen Mitteln auszustatten.

Mein Dank gilt auch Dr. Rami Vainio für seine Zusammenarbeit und speziell seiner Hilfe bei der Entschlüsselung der Geheimnisse der Welle–Teilchen Interaktionen.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen Dr. Urs Ganse, Alex Ivascenko, Andreas Kempf, Patrick Kilian, Cedric Schreiner und Dr. Matthias Weidinger für die kameradschaftliche Atmosphäre und ihre stete Hilfsbereitschaft in allen Fragen. Meinem Büroleidensgenossen Stephan Richter sei an dieser Stelle besonders gedankt, der er es geschafft hat, diese Arbeit in Gänze zu lesen und dabei einen beachtlichen Vorrat an gebackenen Bohnen hochstapelte.

Meiner Frau Nora Lange spreche ich meinen tiefen Dank für ihre Unterstützung aus, auf die ich mich selbst unter den widrigsten Umständen verlassen konnte und die mir neben der Promotion auch sportlichen Erfolg ermöglichte.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meiner gesamten Familie für ihren Beistand, sei er finanzieller, ideeller oder moralischer Natur.

DANKE

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Sebastian Lange geboren am 19.05.1985 in Pirna, an Eides statt, diese Arbeit ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt und außer den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln keine verwendet zu haben.

Würzburg, ...